



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

Análisis de la Dimensión Fractal de los
Sismogramas del Valle de México.

TESIS

Que para obtener el Título de:

Física

Presenta:

Ana María Oropeza López

FALLA DE ORIGEN

México, D.F.

1991.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INDICE	i
AGRADECIMIENTOS	iv
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	7
DIMENSIONES.	9
ESTUDIO DEL CAOS.	13
ANALISIS DE SISTEMAS CAOTICOS.	14
Secciones de Poincaré.	15
Exponentes de Lyapunov.	15
Espectros de Potencias y Función de Autocorrelación.	17
Dimensión Fractal.	19
CAPITULO II	21
DIMENSIONES FRACTALES.	23

CARACTERIZACION GEOMETRICA DE UN ATRACTOR.	27
Reconstrucción del espacio fase.	28
Dimensión de correlación.	28
MIDIENDO LA EXTRAÑEZA DE LOS ATRACTORES EXTRAÑOS.	31
Cálculos numéricos.	34
CAOS DE BAJA DIMENSION EN UN ATAQUE EPILEPTICO.	35
Epilepsia.	35
Actividad cerebral.	37
Caracterización.	37
METODO UTILIZADO EN EL PROGRAMA QUE CALCULA LAS DIMENSION.	39
Ejemplos conocidos.	40
CAPITULO III	45
SOBRE EL VALLE DE MEXICO	47
Descripción de los aparatos.	50
Información acelerométrica.	50
EVALUACION DE LAS DIMENSIONES PARA LOS ACELEROGRAMAS.	50
Reconstrucción del espacio fase.	50
Resultados.	54
Discusión.	59
CAPITULO IV	63
CONCLUSIONES.	65

APENDICES	67
APENDICE I : DIMENSION EFECTIVA.	69
APENDICE II : RELACION ENTRE LA DIMENSION FRACTAL Y LA DIMENSION DE CORRELACION.	71
APENDICE III: GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE DIMENSION.	73
APENDICE IV : RUIDO BLANCO.	75
APENDICE V : MAPEO LOGISTICO.	77
REFERENCIAS.	79

Agradecimientos.

A todos ustedes que hicieron posible de una u otra manera este trabajo.

En particular a los doctores Francois Leyvraz y Thomas H. Seligman, por haberme permitido colaborar con ellos, por el apoyo, la asesoría y la paciencia que me brindaron durante la elaboración de la tesis.

A mis sinodales: Dr. Gerardo Suárez, M. en C. Servando de la Cruz y el Dr. Jorge Flores, por la revisión del trabajo.

A mis padres por obsequiarme el placer que representa el estudio de la Física.

Y de una manera muy especial me permito mencionar al Dr. Salas Brito.

GRACIAS.

INTRODUCCION

En la experiencia cotidiana, la naturaleza nos muestra sistemas con comportamiento sumamente complicado y aparentemente errático. Encontramos algunos sistemas en los que una variación pequeña en sus condiciones iniciales produce estados finales muy similares, en cambio existen otros en los que un ligero cambio en las condiciones iniciales origina comportamientos muy diferentes llevando a situaciones finales completamente distintas. Estos sistemas los denominamos caóticos. En los últimos años se ha encontrado que esta gran sensibilidad a condiciones iniciales, es una propiedad típica de muchos sistemas.

Este tipo de estudios se ha hecho posible, en parte, gracias a la rapidez de las computadoras. Aparecen por ejemplo en la simulación de circuitos electrónicos, dispositivos ópticos no lineales, fluidos y gases, células cardiacas, reacciones químicas, sistemas clásicos de muchos cuerpos, aceleradores de partículas, péndulos forzados y acoplados, plasmas, así como en modelos biológicos, meteorológicos, económicos y muchísimos otros sistemas dinámicos. Estos sistemas pueden ser modelados por distintas formas matemáticas: ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones en diferencias ó mapeos. Como el análisis de estos sistemas es muy amplio, se engloban estudios tanto de propiedades particulares como de propiedades universales de los sistemas dinámicos no lineales.

Ya desde los años de 1875-1925, los matemáticos se dieron cuenta de que un buen entendimiento de lo irregular o inconexo (así como de lo regular y conexo) no podía satisfacerse definiendo, una cualidad que los caracteriza, la "dimensión" como número de coordenadas. El primer paso de un análisis riguroso lo hizo Cantor en junio de 1877 en una carta a Dedekind, continuó Peano en 1890 y se encuentran otros estudios que datan de la década de los 20's. Como muchos de los grandes desarrollos intelectuales estos estudios han tenido diversas interpretaciones. La noción de dimensión tiene muchas formas matemáticas que no sólo son conceptualmente distintas, sino que llevan a diferentes valores numéricos. Como decía William de Occam¹⁰: *no deben multiplicarse las dimensiones innecesariamente, pero una multiplicidad de*

dimensiones es absolutamente inevitable. La dimensión euclídea, por ejemplo, se limita a conjuntos para los cuales todas las dimensiones útiles coinciden, de manera que puede llamarseles conjuntos dimensionalmente concordantes; mientras que hay otros conjuntos para los cuales el valor numérico de las distintas dimensiones difiere de uno a otro y se les llama conjuntos dimensionalmente discordantes. Además existe una ambigüedad inevitable y esencial entre las dimensiones de los conjuntos matemáticos y las dimensiones efectivas (apéndice I) de los objetos físicos modelados por estos conjuntos. A cualquier escala, desde tamaños atómicos hasta el tamaño del universo, la geometría de los objetos naturales es importante en los modelos desarrollados para entender la naturaleza, como la geometría de las trayectorias de las partículas; de un flujo hidrodinámico, olas, barcos y costas; paisajes, montañas, islas, ríos, glaciares y sedimentos; plantas, insectos y células entre otros. La geometría de la naturaleza es tan central en el estudio de los campos de las ciencias naturales que se suele dar por hecho. En cada campo se adoptan conceptos usados intuitivamente por los científicos. Tradicionalmente la dimensión euclídea servía como base del entendimiento de la geometría de la naturaleza, pero Benoit B. Mandelbrot introdujo el concepto de fractal generando en los últimos años el estudio de objetos con geometría poco tradicional en muchos campos de la ciencia. Los fractales son mucho más que curiosidades matemáticas; ofrecen un método extremadamente compacto para describir objetos y formaciones. Mandelbrot utilizó para definir a los fractales la noción de la dimensión de Hausdorff y la llamó dimensión fractal ya que no necesariamente resulta ser un número entero. La geometría fractal parece describir estructuras naturales en forma mucho más eficiente que la geometría euclídea, así como la geometría de las trayectorias de los procesos dinámicos no-lineales y que son el objeto de estudio de la teoría contemporánea del caos determinista. Este hecho ha despertado un gran interés por la geometría y las dimensiones fractales.

En este trabajo se elaboró un programa para calcular *la dimensión fractal de una serie temporal de datos experimentales*, que era el principal objetivo y se planteó como una buena aplicación, determinar la dimensionalidad dinámica de los acelerogramas de un sismo en el valle de México. Básicamente en este valle se tienen tres tipos de suelo y de un estudio previo en sismos puede observarse que los espectros de Fourier de los acelerogramas difieren de terreno a terreno, lo cual sugiere la posibilidad de encontrar una dimensionalidad distinta para cada tipo de suelo.

El contenido del trabajo escrito es el siguiente:

El primer capítulo es una introducción al concepto de dimensión y da un panorama del surgimiento del caos, así como de los métodos de análisis para sistemas caóticos, dentro de los cuales se encuentra el análisis de la dimensión fractal que es el tema de esta tesis.

En el capítulo dos se expone en forma más detallada el concepto de dimensión fractal. Se hace referencia al artículo de Grassberger y Procaccia⁷, quienes introdujeron la dimensión de correlación y proponen su método para el análisis de datos experimentales. Se ejemplifica con un trabajo previo -de neurobiología- de Babloyantz y Destexhe² sobre caos de baja dimensión durante un ataque epiléptico. Finalmente se expone el método utilizado para calcular dimensiones fractales en el programa elaborado y se presentan los resultados obtenidos para ejemplos conocidos, que se utilizaron para probar el programa.

El capítulo tres está dedicado a la descripción del trabajo realizado con los acelerogramas del sismo. Se hace aquí una breve descripción del sistema, es decir, de las características del valle de México, de los instrumentos utilizados para el registro de los datos y de su ubicación. Contiene también la discusión de los resultados obtenidos para este sistema.

El último capítulo contiene las conclusiones.

CAPITULO I

DIMENSIONES.

ESTUDIO DEL CAOS.

ANALISIS DE SISTEMAS CAOTICOS.

Secciones de Poincaré.

Exponentes de Lyapunov.

Espectros de Potencias y Función de Autocorrelación.

Dimensión Fractal.

DIMENSIONES.

El término *dimensión* comunmente aceptado lleva en sí la definición que se encuentra al principio del Libro I de Euclides⁶ sobre geometría plana:

1. Un punto es aquello que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin ancho.
3. Los elementos de una línea son puntos...
5. Una superficie es aquella que tiene solamente ancho y largo.
6. Los extremos de una superficie son líneas.

y que se extiende en su Libro XI de geometría espacial:

1. Un sólido es aquello que tiene longitud, ancho y profundidad.
2. Los extremos de un sólido son superficies.

Una transcripción del punto de vista de Euclides la hace Poincaré en 1903 (Poincaré 1905, Cap.III, Sec.3) donde escribe más o menos lo siguiente: "Cuando decimos que el espacio tiene tres dimensiones ¿qué queremos decir? Si para dividir un continuo C es suficiente considerar como cortes un cierto número de elementos distinguibles, decimos que el continuo es de dimensión uno... Si, ... para dividir un continuo es suficiente hacer cortes que forman uno ó muchos continuos de dimensión uno, decimos que C es un continuo de dimensión dos. Si los cortes necesarios para partir un continuo son continuos de dimensión dos a lo más, decimos que C es un continuo de dimensión tres y así sucesivamente. Para justificar esta definición es necesario revisar como introducen, los matemáticos dedicados a la geometría, la noción de dimensión. ¿Qué encontramos? Por lo general comienzan definiendo superficies como las fronteras de los sólidos, puntos como las fronteras de las curvas y establecen que este proceso ya no sigue adelante. Esta es la misma idea: para cortar el espacio se necesitan superficies; para dividir superficies son necesarios cortes que se llaman

curvas; para cortar curvas se necesitan puntos y los puntos no siendo un continuo, no pueden dividirse. Como las curvas pueden dividirse por cortes que no forman continuos, decimos que éstas son continuos de dimensión uno; como las superficies se dividen con continuos de dimensión uno, éstas son continuos de dimensión dos y así sucesivamente." Posteriormente, en 1913, Brouwer construyó una definición topológicamente invariante de dimensión, que para una gran cantidad de espacios es equivalente a la que se usa hoy en día. Una configuración se decía E-dimensional si el número mínimo de parámetros reales necesarios para describir sus puntos es E. Pero, un estudio matemático de la forma debe ir más allá que la topología, una noción de forma contiene otros aspectos matemáticos además de los topológicos y es por eso que se vuelve a la noción de dimensión tal como la define Hausdorff. Por ejemplo, la topología considera que todas las ollas con dos agarraderas tienen la misma forma, por que si las dos son infinitamente flexibles y compresibles, pueden ser moldeadas una en la otra continuamente, sin necesidad de hacer ó cerrar agujeros; o que todas las costas son de la misma forma, por que son topológicamente idénticas al círculo y por tanto son curvas de dimensión uno. Vemos entonces que la topología no es capaz de distinguir entre distintas costas, que son curvas que forman parte de una categoría de fractales, a saber, curvas con dimensión mayor que uno. Considerese un pedazo de costa, es evidente que su longitud es por lo menos igual a la longitud de una línea recta trazada entre sus extremos. Pero una costa es irregular y está "enroscada", sin lugar a duda su longitud es mayor que la de la línea recta. Hay varias formas de medir su longitud en forma más exacta y todos los métodos llevan a la misma conclusión, la longitud de las costas típicas es tan grande que resultaría mejor considerarla infinita. Por lo tanto, si se quiere comparar entre distintas costas desde el punto de vista de su extensión, considerar la longitud no resulta ser el concepto adecuado para dicha comparación. Algunos de los métodos que se utilizan para determinar la longitud son:

Método A: Se toman segmentos de longitud ϵ y se recorren a lo largo de la costa, comenzando cada paso donde termina el anterior. El número de pasos multiplicado por ϵ es la longitud aproximada $L(\epsilon)$ de la costa. Se espera que $L(\epsilon)$ se aproxime a un valor bien definido, llamado la *longitud verdadera*, cuando el valor de ϵ se hace pequeño. Pero lo que se espera, no sucede, en un caso típico $L(\epsilon)$ tiende a crecer sin límite. La razón de este comportamiento es obvia: cuando una bahía ó una península de un mapa a escala 1/100,000 se examina en un mapa a escala 1/10,000, sub-bahías y sub-penínsulas se vuelven visibles. En un mapa a escala 1/1,000 subsub-bahías y subsub-penínsulas aparecen y así sucesivamente, cada una de éstas se va sumando a la longitud.

Método B: Imagínese a un hombre caminando a lo largo de la costa, tomando el camino más corto para avanzar, pero alejándose del agua no más que una distancia ϵ , luego hace lo mismo para ϵ cada vez más pequeña. En este caso la longitud $L(\epsilon)$ está dada en función de ϵ , el tamaño del paso y el número de paso para recorrer la

costa. Otra vez, cada que el caminante permanece más cerca del agua, la distancia que tiene que recorrer continúa creciendo sin límite.

Método C: Cantor sugiere, una generalización del método anterior, considerar todos los puntos de ambos lados del "límite" entre el agua y la playa que estén a una distancia menor ó igual a ϵ . Estos puntos van a formar una especie de salchicha de ancho 2ϵ . Propone medir el área de la salchicha y dividirla entre 2ϵ ; si la costa es recta, la salchicha es un rectángulo y el cociente resulta ser la longitud exacta. Para costas reales, se obtiene un valor estimado $L(\epsilon)$ que crece sin límite al hacer ϵ cada vez más pequeña.

Método D: En este método se cubre el "límite" con círculos de radio ϵ de tal forma que el número de círculos sea el mínimo. El área de estos círculos entre $\pi\epsilon/2$ es el valor estimado de longitud. Una vez más, este cálculo diverge cuando el valor de ϵ decrece.

Resumiendo lo anterior, se observa básicamente el mismo comportamiento, al hacer más pequeño el valor de ϵ , la longitud aproximada crece sin límite. Para indagar sobre el significado de este resultado, considerense medidas análogas para curvas euclideas comunes. Para un segmento de línea recta, las mediciones son esencialmente las mismas y definen la longitud del segmento. Para un círculo, las mediciones crecen pero convergen rápidamente a un límite. Las curvas, para las cuales se encuentra de esta manera un valor de su longitud, son llamadas curvas rectificables. Pero escoger un valor de ϵ para dar un valor de la longitud de una curva, como las costas, es un asunto tanto científico como filosófico. La naturaleza existe independientemente del hombre y de una manera u otra el concepto de longitud geográfica no es enteramente objetivo; el observador inevitablemente interviene en su definición. Sin embargo, la variación de la longitud $L(\epsilon)$ obtenida con el método A, fué estudiada empíricamente por Lewis Fry Richardson⁵ 1961, sus resultados (figura 1.1) publicados en un anuario, llevan a la conclusión de que existe un parámetro, que llamaremos D , tal que -para aproximar una costa por segmentos- uno necesita $F\epsilon^{-D}$ segmentos de longitud ϵ , que dan una longitud de:

$$L(\epsilon) \sim F\epsilon^{1-D}.$$

El valor del exponente D parece depender de la costa en cuestión y diferentes pedazos de la misma costa, si se consideran por separado, pueden producir distintos valores para D . Para Richardson, la D era un simple exponente sin ningún significado particular. Sin embargo, su valor parece ser independiente del método utilizado para estimar la longitud de la costa, por lo que el valor de D merecía mayor atención y Benoit B. Mandelbrot se la dió en 1967. Propuso que, no obstante D no es necesariamente un entero, puede y debe interpretarse como una dimensión, a saber

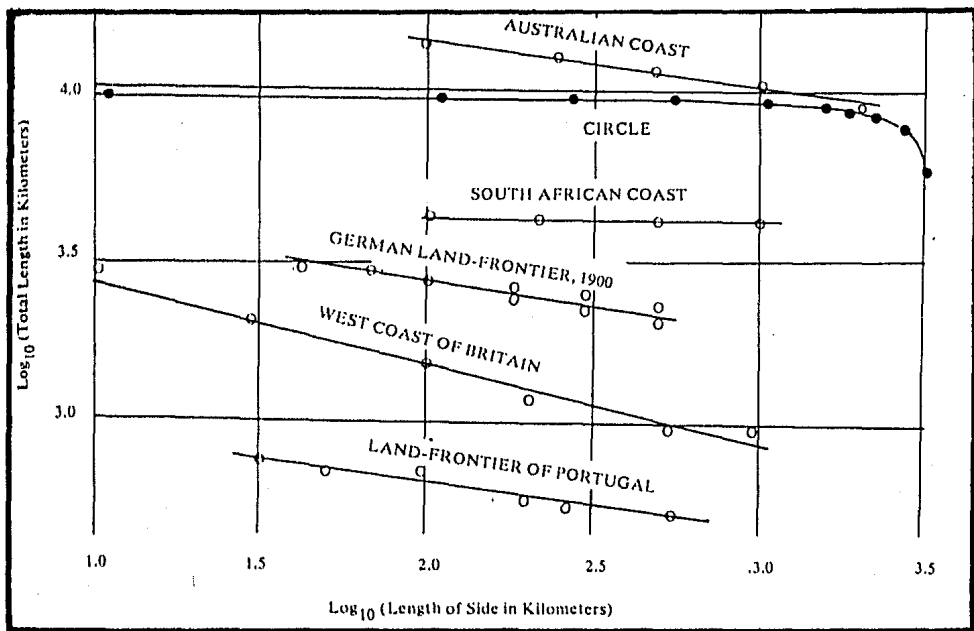


figura 1.1 - Resultados Experimentales de Richardson, de la razón de crecimiento de la longitud de las costas.

Mientras $\epsilon \rightarrow 0$ la longitud aproximada en la gráfica $\log - \log$ cae en una recta con pendiente negativa.

una dimensión fractal. Identificó los métodos para aproximar $L(\epsilon)$ con definiciones generalizadas de dimensión usadas en matemáticas puras, en particular identificó la de Hausdorff y la utilizó para definir dimensiones fractales. Hemos visto que la noción de longitud posee un problema conceptual y que en cambio D ofrece como alternativa una respuesta conveniente y manejable. El análisis de los métodos para obtener el valor de D se deja pendiente hasta el capítulo dos, pero cabe mencionar en este momento que, por ejemplo, a primera aproximación D es igual a $3/2$ para una costa, lo cual establece que su dimensión fractal excede su dimensión topológica que es igual a uno. La interpretación de la D como una dimensión, fué motivada por un método ingenioso de Felix Hausdorff; intuitivamente, del hecho que la medida lineal de un polígono (su perímetro) se calcula sumando cada uno de sus lados. Uno podría decir que los segmentos están elevados a la unidad, $D = 1$, la dimensión euclídea de una curva. Cuando se mide la superficie interior de un polígono cerrado, se puede calcular identificando cuadrados y sumando sus lados elevados al cuadrado, $D = 2$, la dimensión euclídea de un plano. Para una aproximación poligonal de la costa, hecha por segmentos pequeños de longitud ϵ , si las longitudes se elevan a la potencia D , se obtiene una cantidad que puede llamarse tentativamente una "aproximación de la longitud en la dimensión D ", con una D independiente de ϵ y no necesariamente entera. Así D representa una caracterización para curvas no-rectificables. Mandelbrot propuso que las curvas para las cuales la dimensión fractal exceda la dimensión topológica igual a uno sean llamadas curvas fractales. Puede decirse entonces que las costas son modelables por curvas fractales ó dicho en forma coloquial, las costas son fractales. Así como las costas, algunas de las trayectorias estudiadas por el caos determinista son modelables por curvas fractales, con lo cuál la dimensión fractal resulta ser una posible medida para caracterizar procesos caóticos. No existe una noción generalmente aceptada de lo que es el caos. Pero el estudio de la dinámica no-lineal y su comprensión es lo que ha despertado el interés y la preocupación de los físicos por la evaluación de dimensiones fractales. Es por ésto que a continuación se expone una breve descripción del estudio del caos.

ESTUDIO DEL CAOS.

A fines del siglo pasado, el desarrollo de la mecánica celeste y la fundamentación de la mecánica estadística, habían revelado problemas profundos en la dinámica clásica. Pero el estudio de estos problemas implica una gran cantidad de cálculos. Así, sin la ayuda computacional con la que se cuenta en la actualidad y aunado el hecho que el surgimiento de la relatividad y la teoría cuántica, tanto como el progreso de la tecnología moderna habían absorbido la atención de casi todos los físicos, los problemas de la dinámica no-lineal se quedaron para los matemáticos por más de

medio siglo. Sus esfuerzos cristalizaron en la formulación del teorema de KAM sobre sistemas Hamiltonianos cuasi-integrables a principio de los 60's. Sin embargo durante este tiempo se llevaron al cabo trabajos como los de Poincaré (la introducción de las secciones de Poincaré) que se utilizan en el estudio de la dinámica no-lineal. Después en 1963, E. N. Lorentz publicó sus observaciones numéricas de un modelo simplificado de convección térmica, modelo que actualmente lleva su nombre. Encontró que en este sistema completamente determinista de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, toda solución no periódica estaba acotada pero era inestable, *i.e.* tenía fluctuaciones irregulares sin que se introdujera ningún elemento aleatorio. En 1971 D. Ruelle y F. Takens introdujeron el término de atractor extraño para las orbitas asintóticas del espacio de fases de sistemas dinámicos disipativos, sin saber que el modelo de Lorenz era el primer ejemplo de un atractor extraño; posteriormente sugirieron un nuevo mecanismo para describir el umbral de la turbulencia. Li y York por su parte parecen haber sido los primeros en introducir el término caos en la literatura matemática para denominar la aparente aleatoriedad de algunos mapeos. En 1976 una publicación de R. May pone atención a dinámicas complicadas incluyendo doblamiento de periodos y caos en algunos modelos simples de crecimiento de poblaciones. Luego vino el descubrimiento de Feigenbaum de las propiedades de escalamiento y constantes universales en mapeos unidimensionales. Pero "caos" no debe ser simplemente asociado a desorden. Es mucho más apropiado considerar el caos como una especie de orden sin periodicidad. En ciertos regímenes caóticos uno puede observar patrones repetitivos a escalas menores, si se cuenta con el poder de resolución lo suficientemente bueno tanto numérica como experimentalmente. Con esto aparece, en lugar de la periodicidad espacial o temporal usual, una invarianza a escalas que abre la posibilidad de las consideraciones de grupos de renormalización para el estudio de transiciones al caos. El trabajo de Feigenbaum levantó gran interés entre los físicos como puede observarse de la cantidad creciente de literatura al respecto.

ANÁLISIS DE SISTEMAS CAÓTICOS.

Existen varios análisis a realizar si se desea saber si un sistema se comporta ó no en forma caótica. Es decir, si son procesos cuya evolución temporal admite las siguientes características; está determinada por ecuaciones diferenciales o en diferencias que dan origen a comportamientos irregulares, aparentemente acausales con un crecimiento exponencial de la imprecisión inicial. No se incluyen en caos determinista procesos regulares (procesos estacionarios, periódicos o cuasi-periódicos) ni puramente estocásticos (no descriptibles por ecuaciones deterministas, sino por distribuciones probabilísticas con ecuaciones dinámicas subyacentes). Para caracterizar los procesos de caos determinista es indispensable distinguirlos de los procesos re-

gulares y estocásticos; con este fin se estudia la evolución temporal de los sistemas. Como no hay una caracterización absoluta del caos –de hecho ni siquiera una que sea aceptada por la mayoría de los científicos dedicados a este tema– existen distintas formas para atacar los problemas. Algunos de los métodos se mencionan a continuación.

Secciones de Poincaré. Una posibilidad para caracterizar los procesos son las secciones de Poincaré, donde se obtiene una visión estroboscópica de la dinámica del sistema. Se trata de la consideración de los puntos de la trayectoria que intersectan en la dirección de incidencia con el mismo sentido un “plano” en el espacio fase (figura I.2). Un mapeo de Poincaré reemplaza el flujo de un sistema continuo con N grados de libertad, por un sistema discreto de orden $2N - 1$; las secciones de Poincaré están limitadas en la práctica a espacios fase tri-dimensionales debido a que el sistema resultante es de dimensión dos y por consecuencia lo podemos graficar fácilmente. Las secciones no sólo reducen el número de coordenadas en uno, si no también discretizan el tiempo, reemplazan las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias (el mapeo de Poincaré $P \mapsto T(P)$) y reducen enormemente el número de datos por manipular, ya que la mayoría de los puntos de la trayectoria son ignorados. Como primer análisis las secciones de Poincaré ofrecen información cualitativa del comportamiento del sistema. Dada una condición inicial la sección de Poincaré nos da una imagen del flujo y una elección apropiada del plano permite que el sistema sea analizado con mayor facilidad; por ejemplo, si el movimiento es periódico, las sección de Poincaré se reduce a puntos discretos y si el movimiento es cuasiperiódico, la sección contendrá un conjunto de puntos que forman una curva continua. Sin embargo, puede darse el caso de encontrar una sección con puntos aparentemente desordenados y cubriendo totalmente el espacio accesible para tiempos suficientemente grandes y no es posible entonces establecer si los puntos de dicha sección provienen de un sistema de ecuaciones deterministas ó de una distribución de probabilidades.

Exponentes de Lyapunov. Una medida cuantitativa para las trayectorias en el espacio de fases es la determinación de los exponentes de Lyapunov, ya que se vuelve cada vez más difícil seguir la evolución de un flujo caótico mientras la divergencia de las trayectorias en el atractor se incrementa rápidamente (figura I.3). Lo que se acostumbra hacer es estimar dicha divergencia y el espectro de Lyapunov es justamente la razón exponencial promedio de la divergencia de las trayectorias. Por cada dimensión del espacio de estados hay un exponente de Lyapunov independiente, definido por ejemplo para el caso de un mapeo (caso discreto) por:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \delta) - f^N(x_0)}{\delta} \right|$$

Donde f^N significa aplicar N veces el mapeo, por lo que la expresión nos da el factor promedio en que la distancia entre dos puntos cercanos, crece ó decrece. Cabe men-

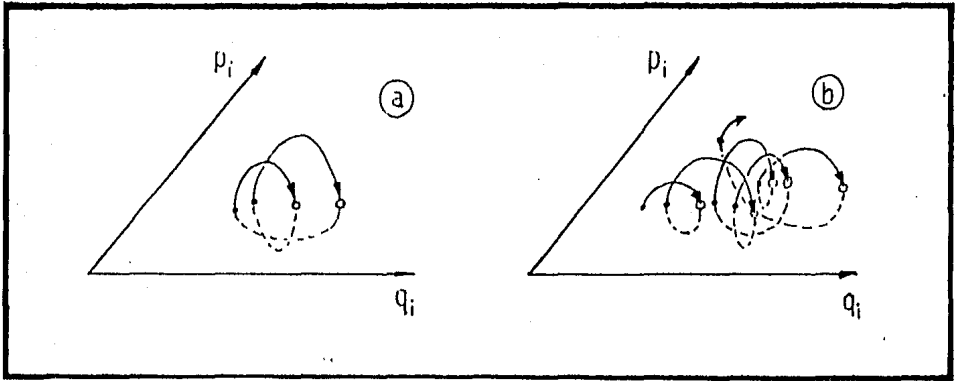


figura 1.2 - Secciones de Poincaré: a) proceso regular, b) proceso irregular.

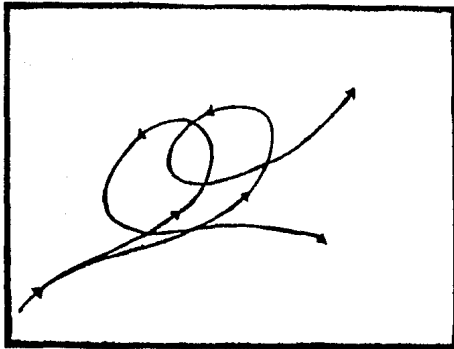


figura 1.3 - Divergencia exponencial (λ) de las trayectorias.

sionar que se tiene un expresión equivalente para el caso continuo y que se presenta la del caso discreto por simplicidad.

Para una solución caótica, la sensibilidad a las condiciones iniciales implica la existencia de un exponente de Lyapunov positivo, como consecuencia directa de la divergencia de trayectorias vecinas, por lo tanto, encontrar un exponente positivo es un signo inequívoco de un régimen caótico. En cambio para en el caso de soluciones periódicas o cuasi-periódicas los exponentes de Lyapunov son cero.

Espectro de Potencias y Función de Autocorrelación. Otra opción es el estudio de la irregularidad de la evolución temporal $X(t)$ de una cierta variable X ; con el espectro de potencias $P(\omega)$ ó con la función de autocorrelación $\Phi(\tau)$.

El *espectro de potencias* se obtiene con la transformada de Fourier tal que

$$P(\omega) = |X(\omega)|^2$$

donde:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt.$$

La *función de autocorrelación* $\Phi(\tau)$ de $X(t)$ se define como:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \langle \hat{x}(t) \cdot \hat{x}(t + \tau) \rangle \\ &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}(t) \hat{x}(t + \tau) dt \end{aligned}$$

con:

$$\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x} \quad y \quad \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt.$$

$\Phi(\tau)$ establece la correlación entre dos medidas desplazadas un intervalo τ . Y según el teorema de Wiener-Khintchin³, $\Phi(\tau)$ y $P(\omega)$ están relacionados por

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Se tiene que para $X(t)$ periódica ó cuasiperiódica el espectro de potencias se compone de picos discretos y $\Phi(\tau)$ se mantiene distinta de cero cuando τ tiende a infinito. Esto nos dice que el comportamiento del sistema es predecible. En cambio, un espectro de potencias ancho y continuo, descarta toda posibilidad de que se

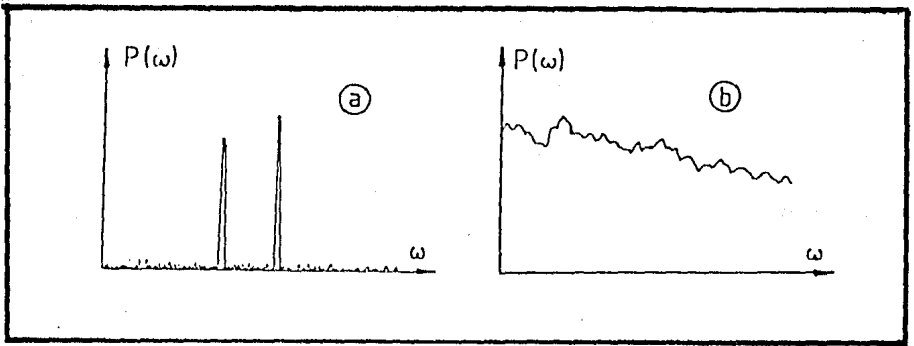


figura 1.4 - Espectros de potencias $P(\omega)$: a) proceso regular, b) proceso irregular.

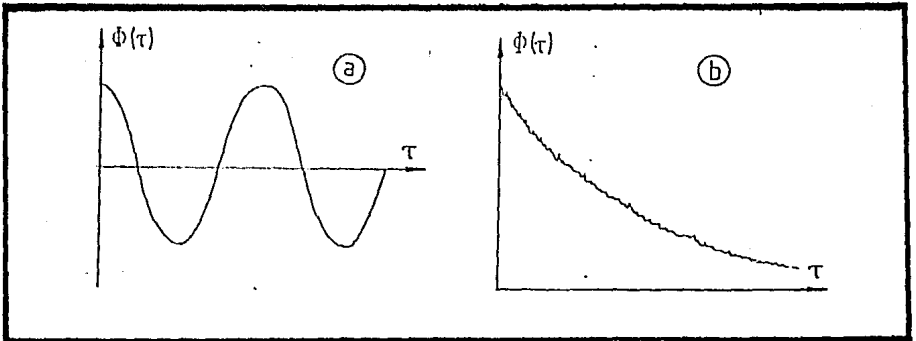


figura 1.5 - Función de autocorrelación $\Phi(\tau)$: a) proceso regular, b) proceso irregular.

trate de un proceso regular; permite observar que la evolución de X es desordenada y errática. En un régimen caótico, el espectro de potencias de una variable X del sistema dinámico es continuo, sin embargo, en base al espectro de potencias no puede afirmarse si $X(t)$ proviene de un sistema de ecuaciones deterministas o no, y por lo tanto no permite diferenciar un proceso caótico de uno estocástico. Para estimar la cantidad de desorden se utiliza la función de autocorrelación, que en un régimen caótico tiende necesariamente a cero al incrementar τ , ya que ningún intervalo finito de observación de $X(t)$ es suficiente para predecir el futuro comportamiento del sistema (figuras I.4 y I.5).

Dimensión Fractal. Los atractores extraños están altamente relacionados con la dimensión fractal, ya que se caracterizan por tener una subestructura muy compleja y por tanto pueden caracterizarse con la medida de su dimensión fractal. La aparición de atractores extraños es una de las manifestaciones del caos que sólo se presenta en sistemas disipativos. Determinar la dimensionalidad dinámica de datos experimentales es el objetivo central de este trabajo y por lo tanto se dedica el próximo capítulo a introducir la definición de las dimensiones fractales que se van a utilizar y a la explicación de los cálculos.

CAPITULO II

DIMENSIONES FRACTALES.

CARACTERIZACION GEOMETRICA DE UN ATRACTOR.

Reconstrucción del espacio de fases.

Dimensión de correlación.

MIDIENDO LA EXTRAÑZA DE LOS ATRACTORES EXTRAÑOS.

Cálculos numéricos.

CAOS DE BAJA DIMENSION EN UN ATAQUE EPILEPTICO.

Epilepsia.

Actividad cerebral.

Caracterización.

METODO UTILIZADO EN EL PROGRAMA QUE CALCULA LAS DIMENSIONES.

Ejemplos conocidos.

Una caracterización cuantitativa para un conjunto de datos experimentales que provienen de un proceso dinámico puede realizarse determinando su espectro de Lyapunov ó su dimensión fractal. Como en general, los exponentes de Lyapunov no son fáciles de calcular a partir de resultados experimentales, se ha puesto mayor atención a la dimensión fractal como caracterización de estos sistemas. Ya que la noción de dimensión fractal no es común, en la siguiente sección se desarrollan con más detalle esta idea y los conceptos matemáticos que se utilizan para su cálculo. Luego se expone la forma en que Grassberger y Procaccia calculan dimensiones fractales y se menciona un trabajo que hace uso de su método para el análisis de un conjunto de datos experimentales. Por último, se describen los cálculos de las dimensiones fractales efectuados en este trabajo.

DIMENSIONES FRACTALES.

Para definir la dimensión de Hausdorff de un conjunto de puntos en un espacio p -dimensional, se cubre el espacio con hipercubos de dimensión lineal ϵ y se determina el número mínimo de cubos, $H(\epsilon)$, necesario para cubrir al conjunto (ver figura II.1). La dimensión fractal D ó de Hausdorff (también llamada de Hausdorff-Besicovitch) está definida entonces como el límite de la razón $\ln H(\epsilon)/\ln (1/\epsilon)$ cuando la longitud de la arista ϵ de los hipercubos tiende a cero. Esto es

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(\epsilon)}{\ln (1/\epsilon)}. \quad (II.1)$$

Otra forma de decirlo es que el número mínimo $H(\epsilon)$ de cubos necesarios para

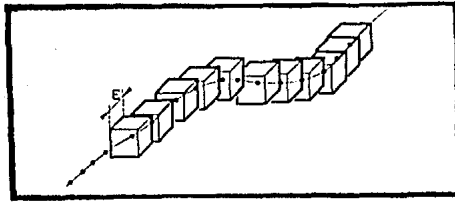


figura II.1 - Un conjunto de puntos cubierto con cubos de dimensión lineal c .

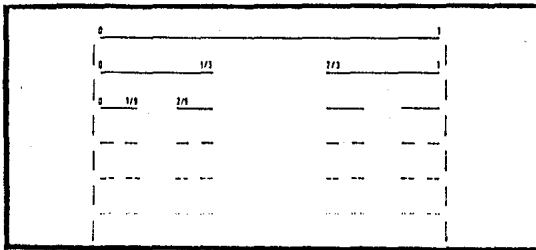


figura II.2 - Primeras iteraciones para construir el conjunto de Cantor.

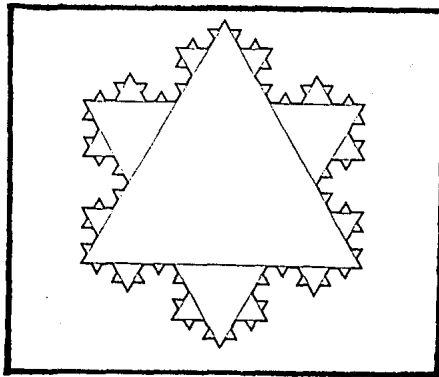


figura II.3 - Tercera iteración de la curva de Koch.

cubrir el conjunto de puntos varía como ϵ^{-D} . Por ejemplo, cuando el conjunto es simplemente un punto, tenemos que:

$$H(\epsilon) = \text{constante} = 1.$$

Por lo tanto la dimensión de Hausdorff de un punto es igual a cero coincidiendo con su dimensión topológica. Si el conjunto es un segmento de línea de longitud L , entonces

$$H(\epsilon) = L\epsilon^{-1}$$

de manera que D es igual a uno, mientras que para una superficie de área S :

$$H(\epsilon) = S\epsilon^{-2}$$

que resulta en D igual a dos.

Hasta este punto la definición de la dimensión de Hausdorff no ha añadido nada que no nos dijera ya la dimensión topológica. Sin embargo consideremos ahora el conjunto de Cantor; que se obtiene por medio de un proceso iterativo, donde el tercio central de un segmento unitario es removido y la operación se repite indefinidamente, como lo ilustra la figura II.2. De esta manera obtenemos un conjunto infinito de "puntos" inconexos. La dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor se deduce fácilmente de su construcción: para $\epsilon = 1/3$, el número de elementos (en este caso los hipercubos son simplemente segmentos) necesarios para cubrir el conjunto es $H(1/3) = 2$, de igual forma, para $\epsilon = 1/9$, $H(\epsilon) = 4$, y en general, para $\epsilon = (1/3)^m$, $H(\epsilon) = 2^m$. La dimensión de Hausdorff resulta

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \simeq 0.63.$$

Podemos observar que la dimensión de Hausdorff corresponde a una generalización de la dimensión geométrica usual, que permite la caracterización de objetos fractales.

Un segundo ejemplo clásico de objeto fractal es la llamada *curva de Koch ó copo de nieve*, que tiene la curiosa propiedad de tener un perímetro infinito pero ocupando tan sólo una región acotada del plano. Para construirla se toma un triángulo equilátero, se divide cada lado en tres, se inserta en cada segmento central otro triángulo equilátero y se itera esta construcción un número infinito de veces (ver figura II.3). Usando el razonamiento anterior, encontramos que la dimensión de

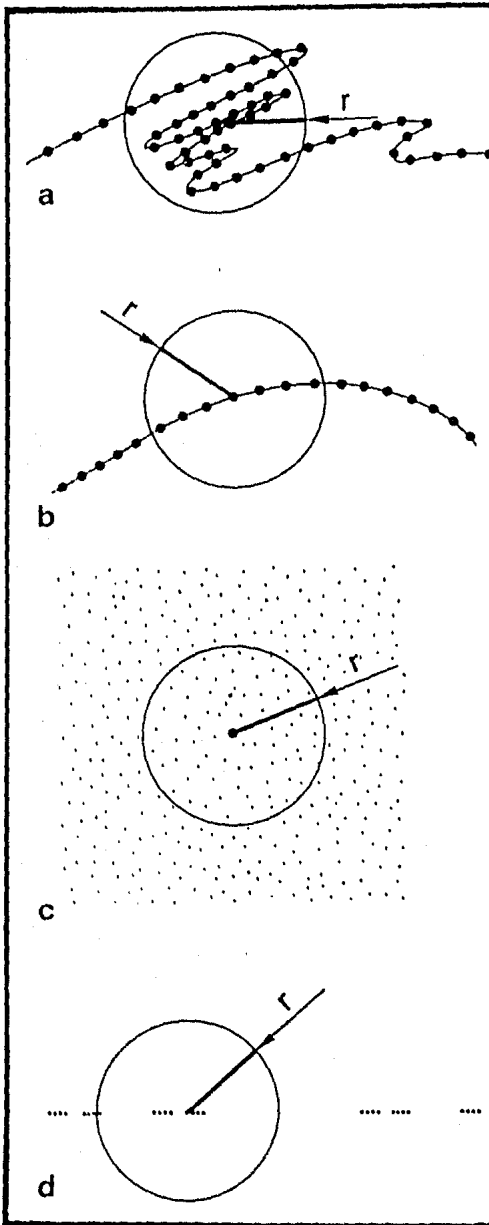


figura 11.4 - Método para calcular la dimensión de correlación de un conjunto inmerso en un espacio de dos dimensiones.

a) En general $N(r) \sim r^D$

b) línea $N(r) \sim r^1$

c) superficie $N(r) \sim r^2$

d) conjunto de cantor $N(r) \sim r^{0.63}$.

Hausdorff de la curva de Koch es

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.26.$$

Sin embargo, existen muchísimos otros objetos cuya geometría es más compleja y que se construyen a partir de cálculos numéricos. Desafortunadamente en varios casos de interés práctico, el cálculo directo de la dimensión de Hausdorff – usando la definición II.1– converge muy lentamente cuando la dimensión del espacio fase es mayor que dos. Así, en la práctica, se utiliza otra dimensión fractal llamada dimensión de correlación, ν , que resulta más fácil de calcular.

Ilustraremos primero con algunos ejemplos de geometría plana las ideas básicas que se utilizan para definir la dimensión de correlación. Si se considera un conjunto de puntos en un plano, por ejemplo, la sección de Poincaré de un flujo en \mathbb{R}^3 y se calcula el número de puntos $N(r)$ del conjunto localizados dentro de un círculo de radio r , es posible calcular ν . La dimensión de correlación se determina de la variación de $N(r)$ con r . Para un conjunto de puntos uniformemente distribuidos sobre una curva (unidimensional) y r suficientemente pequeña se tiene

$$N(r) \sim r$$

esto es, $N(r) \sim r^\nu$ con $\nu = 1$ (ver figura II.4.b). Ahora, si los puntos están distribuidos uniformemente sobre una superficie (dos dimensiones; ver figura II.4.c):

$$N(r) \sim r^2, \quad \nu = 2.$$

Con objetos generales de dimensión arbitraria, como el conjunto de Cantor descrito arriba (ver figura II.4.d), el número de puntos localizados dentro de un círculo crecerá, en promedio, más lento que el radio r . Suponiendo $N(r) \sim r^\nu$ se encuentra $\nu \approx 0.63$, que es igual a la dimensión de Hausdorff.

CARACTERIZACION GEOMETRICA DE UN ATRACTOR.

Inspirados en el enfoque que se ha descrito y que permite caracterizar un conjunto de puntos usando la dimensión de correlación, se ha propuesto un método que permite extraer información geométrica y dinámica de una serie temporal, usando el

hecho de que el espacio fase de un sistema puede reconstruirse. La idea central es tratar de encajar la información contenida en la serie temporal en un (pseudo)espacio fase. En el caso de series temporales que provienen de observaciones físicas, se pueden dar argumentos para identificar este nuevo espacio de fases con el original. Posteriormente se calcula la dimensión de correlación para caracterizar al conjunto, pero considerándolo como subconjunto del espacio fase reconstruido.

Reconstrucción del espacio fase. Las ideas que se tienen para el estudio de sistemas dinámicos presuponen el conocimiento del espacio fase, sin embargo casi nunca se tiene acceso a esta información, a no ser que se conozcan explícitamente las ecuaciones de evolución del proceso. Esto es muy frecuente en el análisis de datos experimentales, ya que por lo general se mide la variación de una sola propiedad relacionada de alguna manera con las variables de interés del sistema. No obstante se puede llevar al cabo el análisis, ya que a partir de estas observaciones se reconstruye el espacio fase equivalente.

La reconstrucción se hace de la manera siguiente: empezando con la observación de la señal $X(t)$, es posible la reconstrucción de la topología del conjunto de datos, tomando como espacio fase $X(t)$, $X(t+\tau)$, $X(t+2\tau)$, ... ó $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\ddot{X}(t)$, En otras palabras, se puede considerar la señal $X(t)$ independiente de la misma señal un tiempo más tarde $X(t+\tau)$ donde τ es una constante arbitraria llamada retardo. O bien podemos tratar a $X(t)$ y a su derivada del tiempo $\dot{X}(t)$ como señales independientes. Esto no quiere decir que el atractor que se genera en el nuevo espacio sea idéntico al del espacio fase original, tan sólo que la nueva representación conserva las mismas propiedades topológicas. Este resultado es suficiente para estudiar las características esenciales en cuanto al análisis que se propone. Un ejemplo mostrado por Packard *et al* son las proyecciones de las trayectorias del flujo de Rössler (ver figura II.5):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz.\end{aligned}$$

Se tiene entonces en la práctica que el tiempo es discretizado para obtener una serie de vectores p -dimensionales representantes de la dinámica del sistema, ver figura II.6.

Dimensión de Correlación. La posición de dos puntos a lo largo de la misma trayectoria pero lejanos entre sí en el tiempo en el espacio de fases reconstruido, no están, en general, correlacionados. Sin embargo, como todos los puntos provienen de la misma serie temporal asociada con un único proceso, debe existir una correlación

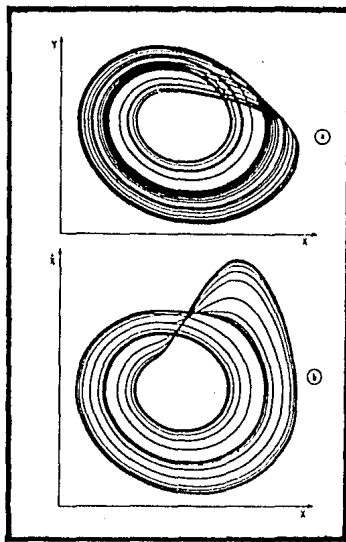


figura II.5 - Proyecciones del flujo de Rössler.
 a) verdadero (x,y) b) reconstrucción (x, \hat{z}) .

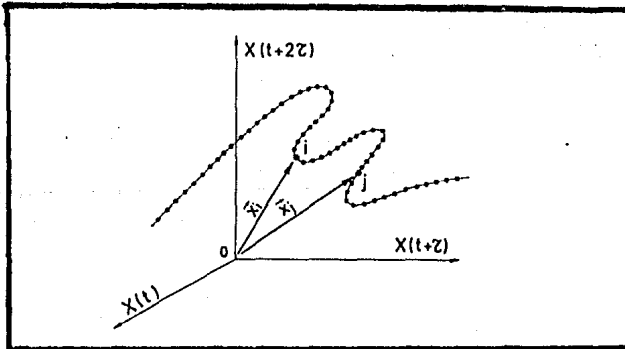


figura II.6 - Representación esquemática de una trayectoria reconstruida punto a punto de una serie de tiempo $x(t)$.

“espacial” caracterizada por alguna función. Se puede escribir:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \times [\text{número de parejas } i, j \text{ cuya distancia } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| < r]$$

donde i y j son índices que ordenan los N puntos de una trayectoria. Esta función puede definirse de manera más formal como:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(r - |\bar{x}_i - \bar{x}_j|) \quad (II.2)$$

donde Θ es la función Heaviside definida por $\Theta(x) = 1$ para x positiva y 0 en cualquier otro caso. El número de parejas i, j cuya distancia es menor que r es también la suma de todos los $N(r)$, si se cuentan los puntos contenidos en hiperesferas centradas en cada punto del atractor. Entonces, $C(r)$ es proporcional a $N(r)$ y por lo tanto

$$C(r) \sim r^\nu. \quad (II.3)$$

Con datos experimentales la validez de esta ley de potencias se limita a valores de r razonablemente pequeños comparados con la dimensión del conjunto; al incrementar r , $N(r)$ necesariamente se satura cuando r toma valores comparados con el tamaño del conjunto. Por otro lado, para valores muy pequeños de r son pocas las parejas i, j de datos experimentales cuya distancia es menor que r , dado que el número de puntos es finito. Bajo estas condiciones la estadística se vuelve pobre y la incertidumbre con que se toman los datos dominante. Así en la práctica sólo una gama limitada de r 's satisface la ley de potencias $C(r) \sim r^\nu$ y puede ser usada para determinar ν , la dimensión de correlación.

Aunque ν no es en general igual a D , es siempre una cota inferior (apéndice II):

$$\nu \leq D. \quad (II.4)$$

La dimensión de correlación ν depende de la densidad de puntos, ya que involucra un conteo de puntos y es sensible al proceso dinámico de cobertura del atractor. En

cambio, la dimensión de Hausdorff depende sólo de la composición geométrica; por definición se determina con el mínimo número de hipercubos que cubren el atractor. Por otro lado, si la densidad de puntos en una región es baja, esta región no contribuye apreciablemente a la dimensión de correlación, justificación cualitativa de que ν está acotada superiormente por D . Si la densidad de puntos es uniforme se trata de un conjunto dimensionalmente concordante y el valor numérico de sus dimensiones coincide, i.e. $\nu = D$.

El método se puede generalizar a espacios p -dimensionales definiendo $N(r)$ como el número de puntos contenidos en una hiperesfera p -dimensional de radio r . Existe además en la literatura otro tipo de generalización, propuesta por otros autores, de la noción de dimensión fractal (apéndice III).

MIDIENDO LA EXTRAÑEZA DE LOS ATRACTORES EXTRAÑOS.

Este es el título del artículo de Grassberger y Procaccia, en el que estudian el exponente de correlación ν que introdujeron como medida para atractores y que permite distinguir entre caos determinista y ruido blanco (ver apéndice IV). En él plantean la posibilidad de usar este método para el análisis de datos experimentales en cuya dinámica se sospeche la existencia de atractores. Este es el método que se utilizó para analizar los datos de los acelerogramas del sismo del 25 de abril de 1989.

Se sabe que muchos sistemas dinámicos disipativos no lineales no tienen estados asintóticos que sean estacionarios o periódicos. Si se dan valores apropiados a sus parámetros, el sistema podría tener únicamente estados asintóticos que correspondan a movimientos caóticos, a estos se les llama atractores extraños. Una pregunta natural, en este caso, es la de qué observable caracteriza al sistema de manera más eficiente; más aún, cuando se observa un comportamiento extraño, uno quisiera tener un procedimiento que permita saber si el atractor tiene una dinámica caótica ó si las irregularidades son producidas por ruido externo. Una medida que proporciona este conocimiento debe ser sensible a la estructura local del atractor. Este es el caso de la dimensión de correlación, por ello es que ν se ha utilizado para caracterizar atractores.

Sin embargo, para calcular la dimensión fractal es necesario conocer el atractor; si se tiene una serie temporal de una sola variable $\{x_i, i = 1, \dots, N; x_i \in \mathcal{X}\}$, la idea de Packard *et al.* y Takens consiste en construir los vectores

p -dimensionales

$$\xi_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}) \quad (II.5)$$

y usar el espacio ξ_i en lugar de X . Con ésto la integral de correlación se convierte en

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(r - (\xi_i - \xi_j)). \quad (II.6)$$

Grassberger y Procaccia proponen emplear en forma más general

$$\xi_i = (x(t_i), x(t_i + \tau) \dots x(t_i + (p-1)\tau)) \quad (II.7)$$

con τ un intervalo de tiempo prefijado. La magnitud de τ no puede ser muy pequeña, ya que se tendría $x_i \simeq x_{i+\tau} \simeq x_{i+2\tau} \simeq \dots$. Por otro lado, τ tampoco puede ser muy grande, ya que valores distantes de una señal temporal no están correlacionados. Además debe considerarse un compromiso con la dimensión p ; ésta debe ser mayor que la dimensión de correlación del atractor (si no, $C(r) \sim r^p$).

Una vez reconstruidos los espacios p -dimensionales de los valores $x(t_i)$, para valores crecientes de p ; *i.e.* $p=2,3,4,5,\dots$, los autores proponen determinar la dimensión de correlación calculando para cada valor de p la integral de correlación $C_p(r)$ para distintos valores de r y obtener la pendiente de la gráfica $\log C_p(r)$ vs. $\log r$ que corresponde al valor de la dimensión de correlación (ésto presupone que la relación que guardan es lineal). En efecto, para un régimen periódico, la dependencia de $C_p(r)$ es estrictamente lineal; en contraste con el caso de ruido blanco, donde la señal puede considerarse como una superposición de un número infinito de modos oscilatorios independientes. Tal comportamiento puede describirse por un atractor T^n , con n muy grande y trayectorias que cubren densamente cualquier espacio fase de dimensión $p \simeq n$. De hecho, la figura II.7 muestra que las funciones característica $C_p(r)$ obtenidas de ruido blanco tienen pendientes en una gráfica $\log - \log$ que continúan creciendo con p , obteniendo $\nu \sim p$. Este resultado puede extenderse: mientras el valor de ν sea igual a p (o continúe creciendo con p), se sabe que la dimensión del espacio usado para los cálculos es menor que (o comparable a) la del atractor correspondiente. Si por otro lado, el valor de ν calculado para un régimen se vuelve independiente de p , el valor al cual se estanca la pendiente se conoce como "dimensión de correlación" y el valor de p después del cual se observa la saturación -del valor de ν - da el número mínimo de variables necesarias para modelar la dinámica del atractor.

El caso de ruido en una señal caótica no se discute en el artículo, sólo se menciona que cuando existe un ruido externo, la gráfica $\log C(r)$ vs. $\log r$ tiene

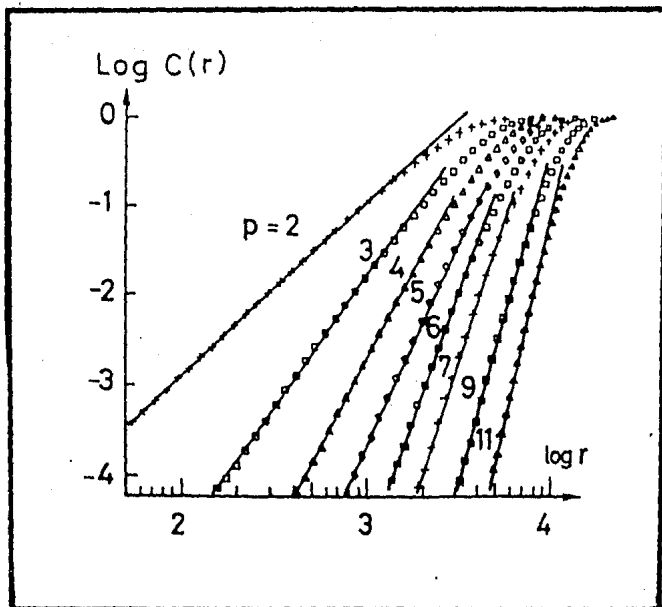


figura 11.7 - Log-Log de $(r, C(r))$ para ruido blanco.

dos regiones. A una ciertas escalas la componente aleatoria distorsiona la estructura fractal; para escalas de longitud mayores que éstas $C(r)$ continua escalando como r^D y para aquellas que se encuentran por debajo $C(r)$ escala como r^d . Así el análisis de una señal experimental en estas condiciones permite tanto la caracterización del atractor como una estimación de la magnitud de la componente aleatoria.

Cálculos numéricos. Grassberger y Procaccia estudian varios ejemplos de sistemas con dimensiones finitas e infinitas, numérica y analíticamente. Ellos introdujeron el análisis basado en la dimensión de correlación, por eso se exponen a continuación los cálculos que realizaron.

Generan primero las series de tiempo $\{X_i\}_{i=1}^N$ y se aseguran de que todas las x_i estén en el atractor descartando las primeras 100-200 iteraciones. Esta es la parte que menos tiempo computacional consume a comparación con el cálculo de las $N(N-1)/2 \geq 10^8$ pares de distancias $r_{ij} = |X_i - X_j|$ y su suma para calcular la integral de correlación.

El algoritmo que proponen para efectuar los cálculos, utiliza el hecho de que los números de punto flotante se guardan en la computadora de la siguiente manera

$$r = \pm \text{mantisa} \cdot \text{base}^{\text{exp}}$$

con $\text{base}=16$. En su caso $1/\text{base} < \text{mantisa} < 1$ y el exponente es entero. Así, extrayendo el exponente pueden formar las parejas de r_{ij} 's con una separación geométricamente creciente. Para escoger la separación máxima entre parejas toman el exponente de una potencia arbitraria r^p de r y después de obtener el número N_k de parejas (i, j) en el intervalo $2^{k-1} < r_{ij} < 2^k$, obtienen la integral de correlación como

$$C(r = 2^k) = \frac{1}{N^2} \sum_{k'=-\infty}^k N_{k'}. \quad (II.8)$$

El algoritmo presenta dos ventajas: Primero, la capacidad de memoria requerida se reduce enormemente. Segundo, en un algoritmo que cuenta cajitas se debe iterar hasta que toda cajita de longitud lineal r no vacía sea visitada, lo que es impráctico, especialmente si r es muy pequeña; esto induce errores sistemáticos aunque el número de iteraciones N sea muy grande. En este método no existe tal problema. En el análisis que ellos presentan no se utilizaron datos experimentales, que es el tipo de análisis que nos interesa, por ello se ofrece a continuación un ejemplo de la determinación de la dimensión fractal a partir del análisis de una serie temporal de la actividad cerebral.

CAOS DE BAJA DIMENSION EN UN ATAQUE EPILEPTICO.

Babloyantz y Destexhe realizaron un estudio con series temporales obtenidas de electroencefalogramas (EEG) y encontraron atractores caóticos en el comportamiento del cerebro. Si se compara la actividad cerebral durante un ataque epiléptico y la dinámica normal del cerebro humano, los resultados muestran un brinco entre la dimensión de los atractores del cerebro para sueño profundo (4.05 ± 0.05) y la dimensión encontrada para el estado epiléptico (2.05 ± 0.09). El hecho de que atractores caóticos sean identificados para varios estados de actividad cerebral, normal y patológica, implica la existencia de dinámicas deterministas de naturaleza compleja. A diferencia de los fenómenos periódicos, caracterizados por un número limitado de frecuencias, los procesos caóticos muestran un espectro continuo. Por tanto, una dinámica caótica incrementa la capacidad resonante del cerebro. Babloyantz y Destexhe relacionan esta propiedad con la habilidad del cerebro para generar y procesar información, especulando aun más, sugieren la siguiente explicación para un ataque epiléptico del tipo *petit mal*: los agentes que producen el ataque tienden a llevar la actividad del cerebro hacia un movimiento periódico estable, en este estado, el procesamiento de información sería imposible y la recuperación extremadamente difícil sin embargo el cerebro se las arregla para permanecer en un atractor caótico, aunque en uno de muy baja dimensión, para poder procesar reflejos. La determinación del número mínimo de variables necesarias para la descripción del atractor epiléptico es una valiosa clave para la construcción de un modelo y corresponde al mínimo valor de p para el cual la dimensión de correlación se satura. De su análisis sugieren que al menos cinco variables distintas están involucradas en el umbral del *petit mal*. Dos variables, por ejemplo, el potencial de las membranas de las neuronas excitatorias e inhibitoras, tienen la tendencia a generar un comportamiento periódico mientras que otras tres regresan el atractor a un estado menos coherente. Las propiedades topológicas de los atractores y su cuantificación por medio del análisis de dimensión fractal representan además de un avance en el estudio del funcionamiento del cerebro, una herramienta apropiada para la clasificación de la actividad cerebral. Con esto se tiene un posible método de diagnóstico, por ejemplo, varios tipos de ataques epilépticos podrían ser clasificados de acuerdo con su grado de coherencia. En seguida se encuentra la descripción del trabajo.

Epilepsia. Un ataque epiléptico refleja un estado patológico de la actividad cerebral que ocurre espontáneamente como resultado de un desorden funcional, inducido en forma externa ó como respuesta a una lesión. Existen muchos tipos de epilepsia: el único considerado en el estudio es el de ataques de duración corta (alrededor de 5 segundos) conocido como *petit mal*, que puede invadir por completo la corteza cerebral y muestra una simetría bilateral entre los hemisferios. Durante el ataque, la actividad electroencefalográfica cambia a un modo aparentemente oscilante. Se

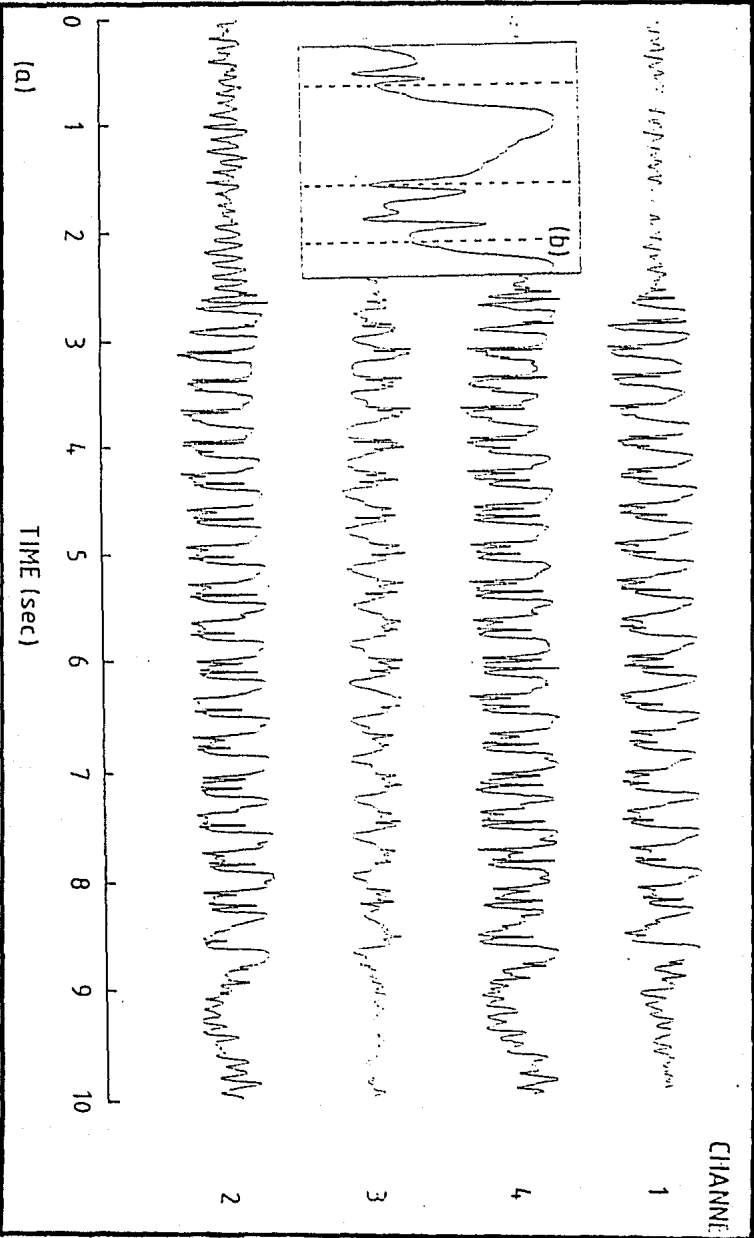


figura II.8 - Encfalogramas.

observa una sucesión de ondas más o menos regulares y extremadamente coherentes de aproximadamente 3 ciclos por segundo. Estas ondas están separadas por picos menos regulares (ver fig. II.8).

Actividad cerebral. Se supone en el trabajo que la dinámica del cerebro se puede describir por un conjunto de n variables $\{x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$ que satisfacen un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, equivalente a una ecuación diferencial de orden n de una sola variable x_0 , accesible de los datos experimentales. El atractor se reconstruye entonces como el conjunto $\{x_0(t), x_0(t + \tau), \dots, x_0(t + (n - 1)\tau)\}$ utilizando las series de tiempo obtenidas de medir a intervalos de tiempo regulares la actividad eléctrica de una porción de la corteza cerebral humana (figura II.9); por medio de EEG's tomados a pacientes epilépticos durante un ataque y a personas sanas durante ciclos de sueño. Así la x_0 representa el potencial eléctrico V obtenido del electroencefalograma y las variables independientes, corrimientos en el tiempo, con retraso τ ($\tau = m \cdot \Delta t$, donde m es un número entero y Δt es el intervalo entre muestras sucesivas). La determinación de τ la hacen por medio de la función de autocorrelación (figura II.10).

Caracterización. Para los cálculos de la dimensión de correlación de los atractores que construyen Bablyantz y Destexhe, introducen una notación vectorial: $\vec{V}_i(t)$ es un punto en el espacio fase cuyas coordenadas son $(V(t_i), V(t_i + \tau), \dots, V(t_i + (n - 1)\tau))$. Escogen un punto de referencia \vec{V}_i de los datos y calculan las distancias $|\vec{V}_i - \vec{V}_j|$ a los $N - 1$ datos restantes. De esta manera determinan la cantidad de puntos que se encuentran a una distancia r del punto \vec{V}_i . Repiten este procedimiento para todos los valores de i y obtienen a continuación $C(r)$, con la ecuación II.3. Esta función es una medida de que tanto afecta la presencia del punto \vec{V}_i a los demás puntos. Encuentran para valores pequeños de r la ley de potencias

$$C(r) \sim r^\nu$$

y la dimensión de correlación ν del atractor la calcularon de la pendiente de la recta $\log C(r)$ vs. $\log r$. Para esto determinaron primero por inspección visual las fronteras de la zona lineal, después calcularon la pendiente de los m primeros puntos por medio de mínimos cuadrados. Este proceso lo repitieron a todo lo largo de la región lineal recorriendo m un punto cada vez, con valores crecientes de m . Si la región es lineal, todas las operaciones deben dar el mismo resultado para el valor de la pendiente (con errores aceptables de frontera). Utilizaron τ 's entre $17\Delta t$ y $25\Delta t$, con las que obtuvieron regiones lineales satisfactorias o bien curvas de saturación bien comportadas, para $p=5$ y encontraron para el estado epiléptico una dimensión de correlación ν_c de 2.05. En un sistema biológico tan complejo como el cerebro una dimensión tan baja es realmente sorprendente, muestra la gran coherencia de la actividad dinámica registrada por el EEG durante el ataque. Para los ciclos de

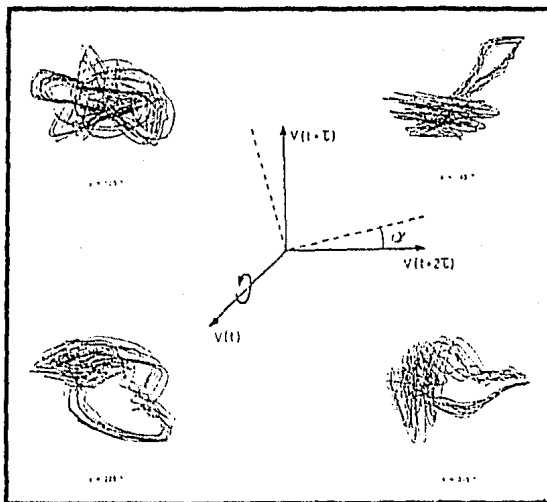


figura 11.9 - Atractores reconstruidos de los EEG.

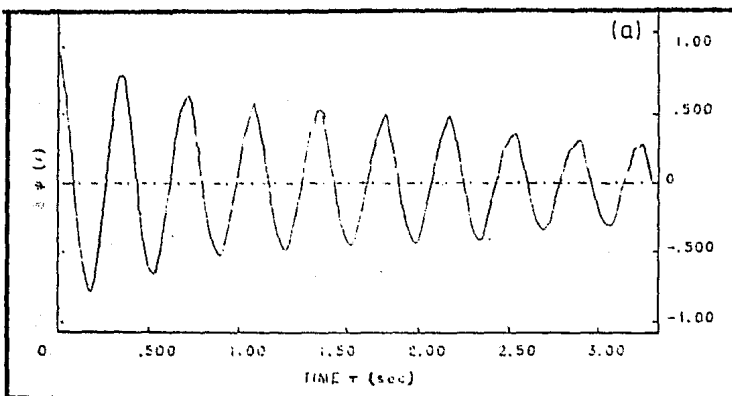


figura 11.10 - Función de autocorrelación para determinar τ .

sueño encontraron que de las etapas estudiadas, la cuarta –sueño profundo– presenta la dinámica más coherente con una ν , de 4.05. En conclusión observaron un gran salto en la dimensión, por tanto en la coherencia de la dinámica del sistema, entre el cuarto nivel de sueño y el atractor epiléptico. Cabe también mencionar que estudios preliminares no revelaron la precencia de atractores caóticos en gente despierta para dimensiones de p menores o iguales a 10; con ésto se concluye la ejemplificación del método. La siguiente sección está dedicada a los cálculos efectuados en el presente trabajo.

METODO UTILIZADO EN EL PROGRAMA QUE CALCULA LAS DIMENSIONES.

Teniendo en mente los cálculos efectuados por Grassberger y Procaccia para determinar dimensiones se elaboró un programa para calcular la dimensión de correlación y la de Hausdorff de una serie temporal de datos experimentales, aunque sirve en general para una secuencia de puntos. Se decidió evaluar la dimensión de correlación, para considerar en el cálculo la dinámica del sistema y en forma paralela la dimensión de Hausdorff, como parametro de control ya que $\nu \leq D$.

Para efectuar los cálculos el espacio fase se divide en retículas p -dimensionales con longitud lineal r . Los valores utilizados para r son $1/2, 1/4, \dots, 1/2^n$ y $1/3, 1/6, \dots, 1/(3 \cdot 2^n)$. Luego se localizan los datos en los hipercubos que cubren el espacio y se guarda está información en matrices, M_r .

Como la función de correlación es igual a la probabilidad de que dos puntos del conjunto estén separados una distancia menor que r (ecuación II.6), ésta es proporcional a la probabilidad de que dos puntos del conjunto caigan dentro de la i -ésima celda, probabilidad que podemos calcular como el número de parejas con repetición que se pueden formar con los puntos que se encuentran en cada una de las celdas de la retícula. Así, para determinar la dimensión de correlación, para N muy grande calculamos la función de correlación como:

$$C_p(r) = \frac{1}{(N^2/2)} \sum \frac{\mu_i^2(r)}{2} = \frac{1}{N^2} \sum \mu_i^2(r). \quad (II.9)$$

Donde N es el número total de datos y $\mu_i(r)$, el número de puntos en el i -ésimo hiper-

cubo p -dimensional. De la gráfica $\log C_p(r)$ vs. $\log r$ de los puntos (r, C_p) se encontró la recta que mejor se ajustó a los datos, obteniendo la dimensión de correlación como la pendiente de dicha recta.

En forma similar, para obtener el valor de la dimensión de Hausdorff se iban contando al mismo tiempo el número de celdas que estaban ocupadas para encontrar el valor de $H_p(r)$ y determinar con éste la dimensión de Hausdorff como menos la pendiente de la recta que se ajusta a los puntos (r, H_p) en la gráfica $\log H_p(r)$ vs. $\log r$.

Ejemplos conocidos. El valor que se obtiene para las dimensiones con este método se probó con dos secuencias de puntos, una se obtuvo de ruido blanco (apéndice IV) y otra del mapeo logístico (apéndice V).

Ruido Blanco. Para el caso de ruido blanco se generó el archivo de datos con un programa que utiliza el generador de números al azar de la máquina, pero que después ejecuta un or-exclusivo en modulo 256, permitiendo un valor máximo de 2^{16} y normalizando a uno (ver espacio fase reconstruido para el ruido figura II.11). Se obtuvieron los siguientes valores, con 50,000 datos, para: $p = 1, \nu = 1$ y $D = 1$; $p = 2, \nu = 2$ y $D = 2$; $p = 3, \nu = 2.9$ y $D = 3$; $p = 4, \nu = 3.8$ y $D = 3.8$. Estos son efectivamente los resultados que esperan para el ruido blanco -ver la discusión de la figura II.7-. Sin embargo, cabe mencionar que inicialmente el archivo de datos se obtuvo utilizando directamente los valores del generador de números al azar de la mvax39 del IFUNAM (VAX/VMS versión V5.3-1). En este caso, para $p = 1$ se encontraba un valor de 0.6 para ν y para $p = 3, \nu \approx 2$. Después de un análisis detallado del programa nos dimos cuenta de que el problema era la manera en que la máquina estaba generando las secuencias y decidimos programar nuestro propio generador. Fue satisfactorio comprobar que el programa es muy sensible a la cobertura del espacio hecha por la secuencia.

Mapeo logístico. En este caso se hizo el cálculo para dos valores del parámetro r' . Para $r' = r'_\infty$ y $r' = 4$. Con $N = 30,000$, $p = 3$ y $r' = 4$ se obtuvo un valor de $\nu = 0.99$ y se sabe que para este valor del parámetro la dimensión fractal es 1, ya que corresponde a un estado caótico que cubre todo el intervalo. Para $N = 30,000$, $p = 3$ y $r' = 3.5699456$ se obtuvo $\nu = 0.5$ y $D = 0.53$ que son los valores de la estructura fractal en la que se encuentra el mapeo para el parámetro r'_∞ (gráficas de algunos resultados - figura II.12).

Como se pretendía obtener un programa para el análisis de datos experimentales, en la elaboración del mismo se consideró el hecho de que en general en estos casos la cantidad de puntos con los que se cuenta es muy pequeña y encontramos preferible utilizar un algoritmo con cajitas, en lugar de un método que daría resultados más precisos pero que requiere de 20,000 a 30,000 datos ó que incluso llega a

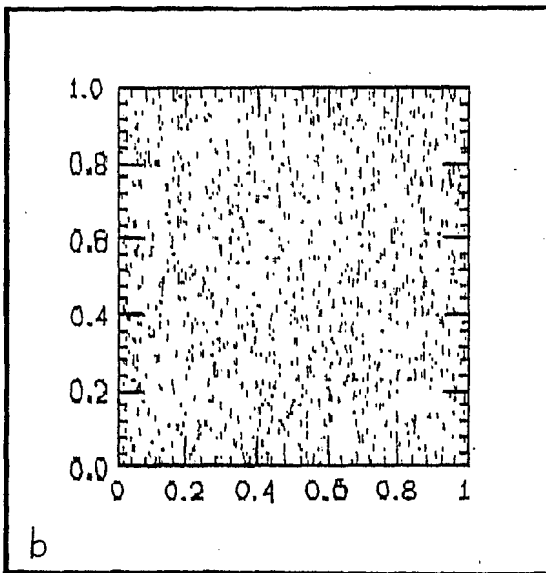
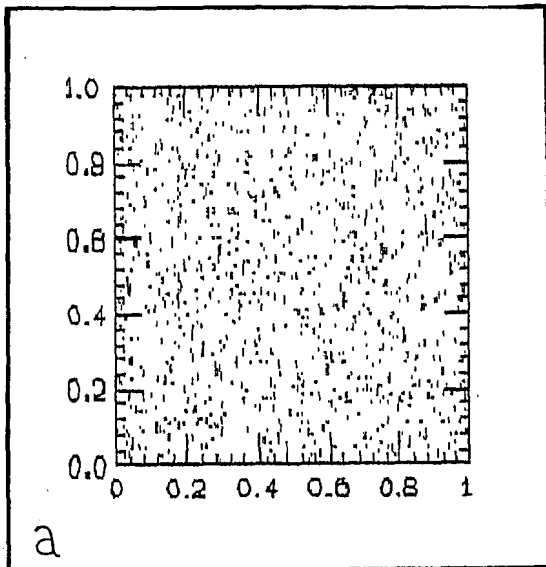


figura II.11 - Espacio fase reconstruido para ruido blanco: a) $p=2$, b) $p=3$ (proyección).

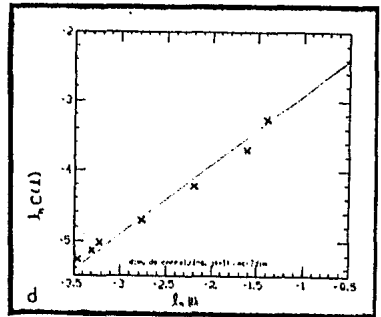
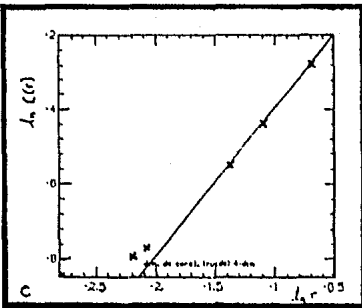
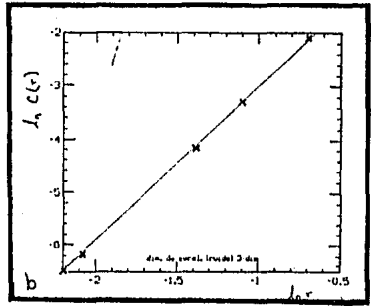
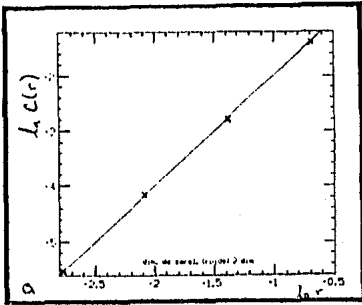


figura II.12 - Dimensión de correlación. Ruido: a) $p = 2, \nu = 2$, b) $p = 3, \nu = 3$, c) $p = 4, \nu = 4$. Mapeo Logístico, $r = 4$: d) $p = 3, \nu = 1$.

utilizar 100,000 datos -con los que no contamos- como el que utilizan Grasberger y Procaccia ó la evaluación directa de todas las distancias entre parejas de puntos que llevan al cabo Babloyantz y Destexhe en el análisis de la dinámica cerebral. Precisamente un sistema con características similares a las que presentan los encefalogramas, en cuanto al tipo de datos, es el conjunto de los acelerogramas de un sismo en el valle de México y como se están haciendo estudios para entender mejor los sismos, se sugirió calcular la dimensionalidad dinámica a partir de dichos acelerogramas, ya que se observan espectros de Fourier distintos para distintos tipos de suelo. En el siguiente capítulo se presenta la descripción del sistema y los resultados del trabajo sobre el sismo.

CAPITULO III

SOBRE EL VALLE DE MEXICO.

Descripción de los aparatos.
Información acelerométrica.

EVALUACION DE LAS DIMENSIONES PARA LOS ACELEROGRAMAS.

Reconstrucción del espacio fase.
Resultados.
Discusión.

SOBRE EL VALLE DE MEXICO.

El valle de México es una zona de alto riesgo sísmico y a partir del siniestro del 19 de septiembre de 1985 los esfuerzos por comprender lo que ocurre durante un sismo se han multiplicado. Con el afán de analizar y cuantificar los sucesos, para comprenderlos mejor, se realizó el cálculo de la dimensionalidad del movimiento telúrico.

Básicamente en el valle de México se tiene tres tipos de suelo que indican tres zonas sísmicas: zona I, terreno firme o roca; zona II, terreno de transición o sedimentos compactos y zona III, arcillas lacustres. El terreno rocoso en gran parte se encuentra circundando el valle y la zona lacustre está en el interior; el sedimento se encuentra entre las dos (ver figura III.1).

Se analizó el sismo del 25 de abril de 1989, que de acuerdo con los datos del Servicio Sismológico Nacional (SSN) del Instituto de Geofísica de la UNAM, ocurrió a las 14:26 hrs (GMT) en la ciudad de México. Tuvo una magnitud de 6.9Ms y su epicentro se localizó al suroeste de Acapulco, en las coordenadas 16.53 latitud norte y 99.55 longitud oeste (figura III.2). Este forma parte de los sismos lejanos que afectan al valle de México. Ocurren generalmente en las costas de Jalisco, Michoacán, Guerrero y Oaxaca, es decir, en la zona de subducción de la placa de cocos. Se eligió este sismo por que es el más grande que ha habido desde el de septiembre de 1985. La información fué recabada en la *Fundación Javier Barros Sierra*⁴.

Los datos fueron registrados con acelerógrafos de la red a cargo del Centro de Instrumentación y Registros Sísmicos, A.C. (CIRES,A.C.). Los instrumentos se implantaron a raíz de los sismos del 85. A continuación se indican las características de los aparatos de la red básica, así como de los registros obtenidos.

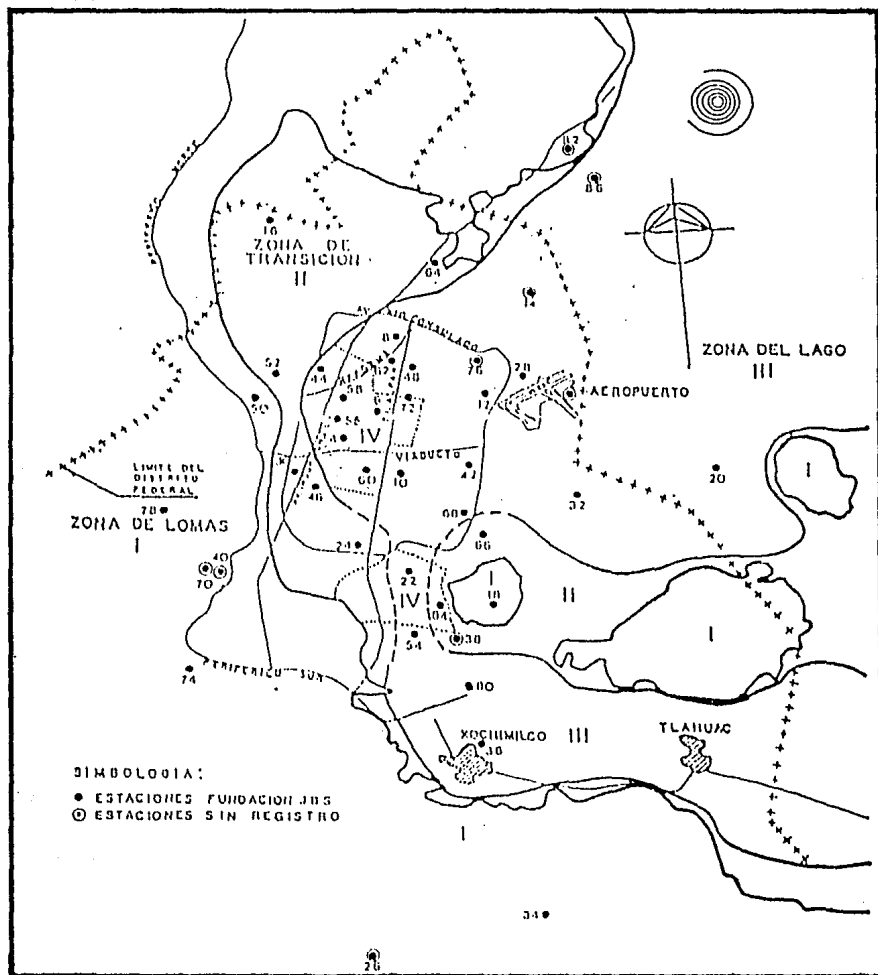


figura III.1 - estaciones sismológicas del CIRES.

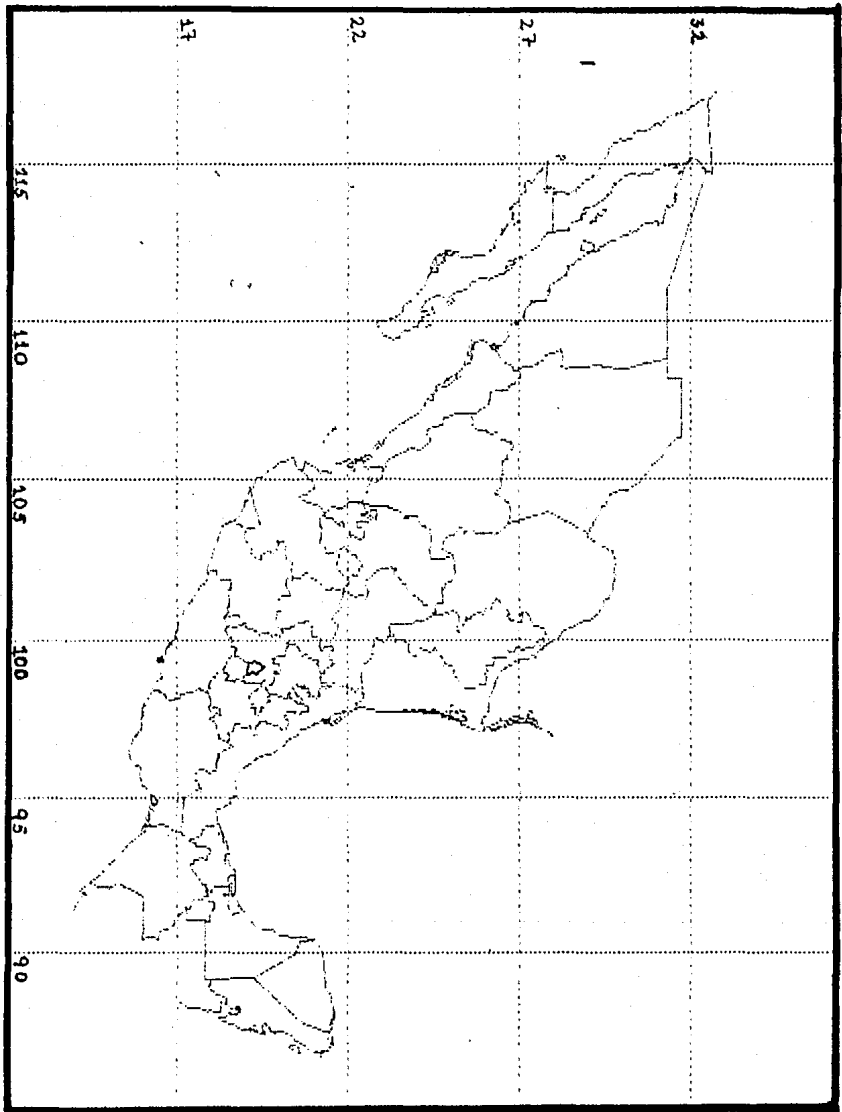


figura III.2 - Epicentro (16.53 latitud Norte y 99.55 longitud Oeste).

Descripción de los aparatos. Los *instrumentos de superficie* son acelerógrafos digitales con registro magnético en cassette, que pueden captar en escala completa hasta 0.5g. Cada aparato utiliza un microprocesador de 12 bits que controla el inicio y el final de la grabación en cassette, cada vez que la aceleración detectada rebasa un umbral preestablecido. El registrador toma 100 muestras por segundo de tres sensores ortogonales dispuestos en las direcciones vertical, norte-sur y este-oeste, las que se utilizan para evaluar las aceleraciones del terreno. La información registrada se complementa con el número de serie del registrador, el número progresivo del evento, la hora de un reloj interno y una señal de referencia de tiempo externo (señales típicas para las distintas zonas - ver figuras III.3, III.4 y III.5). El microprocesador detiene la grabación del cassette 15 segundos después de que la aceleración detectada supera por última vez el umbral de disparo. Cabe señalar, que el umbral de disparo es diferente en cada estación, para evitar que se llene la cinta magnética con registros de eventos originados por ruido sísmico local. Con el fin de capturar la información completa del sismo, el equipo dispone de una memoria pre-evento que permite registrar los 4 segundos previos al momento que el instrumento lo detecta. La información acelerométrica registrada, se pasa a través de un filtro de 30 Hz para discriminar las altas frecuencias. *Sistema de tiempo externo.* Este sistema de referencia está construido con 8 transmisores distribuidos alrededor del mundo, los cuales emiten información codificada cada 10 seg, en una frecuencia cercana a los 10 KHz. Con la recepción de esta señal se sincroniza automáticamente el reloj externo de cada estación.

Información acelerométrica. Se trabajó únicamente con los datos de 15 estaciones, escogidas tanto por su localización como por la inspección visual de los acelerogramas presentados en el informe. En la figura III.1 se muestra la distribución de las estaciones. Para la Zona I se analizaron las estaciones D34, D50, D74 y D78, con una duración aproximada de 80 seg. Para la Zona II se analizaron las estaciones D16, D30, D42 y D52, con una duración aproximada de 80 seg. Para la Zona III se analizaron las estaciones D06, D08, D10, D58, D62, D68 y D72, con una duración aproximada de 120 seg.

EVALUACION DE LAS DIMENSIONES PARA LOS ACELEROGRAMAS.

Reconstrucción del espacio fase. La información disponible, los acelerogramas registrados por estaciones sísmica durante el movimiento telúrico, son precisamente series temporales de una sola variable. Así, los espacios de fases utilizados en el análisis se reconstruyeron mediante los vectores ξ_i que introdujeron Grassberger y Procaccia, ecuación II.7. El retardo τ se determinó utilizando la *función de autoco-*

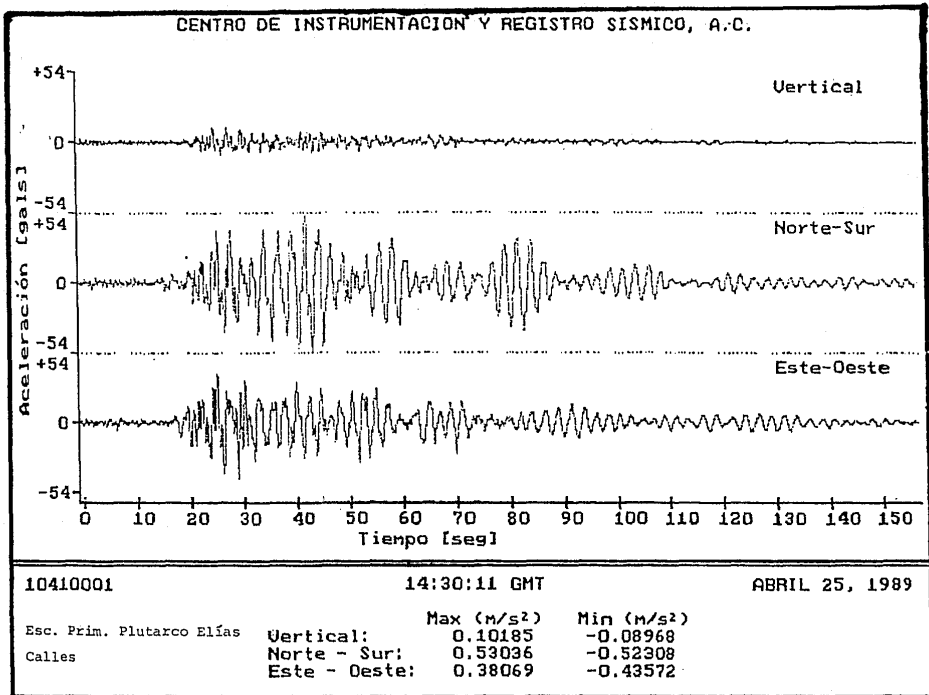
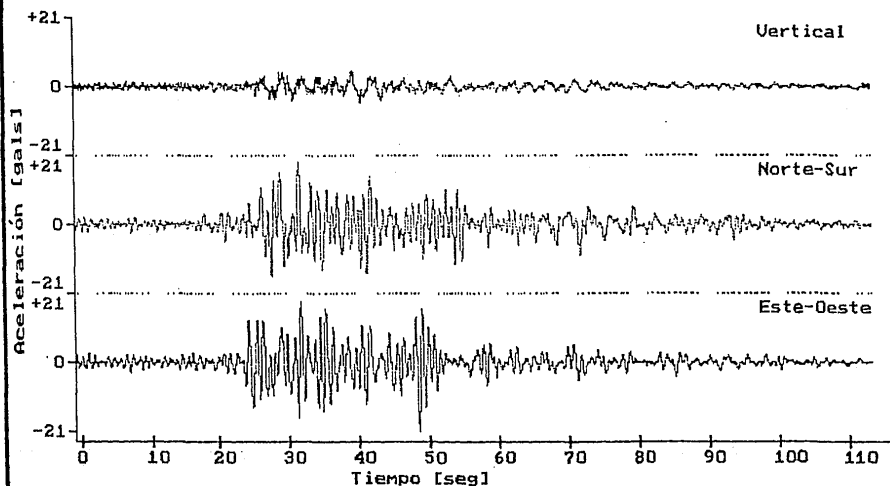


figura III.3 - Acelerograma del terreno de arcilla lacustre.

CENTRO DE INSTRUMENTACION Y REGISTRO SISMICO, A.C.



522801-8

14:30:06 GMT

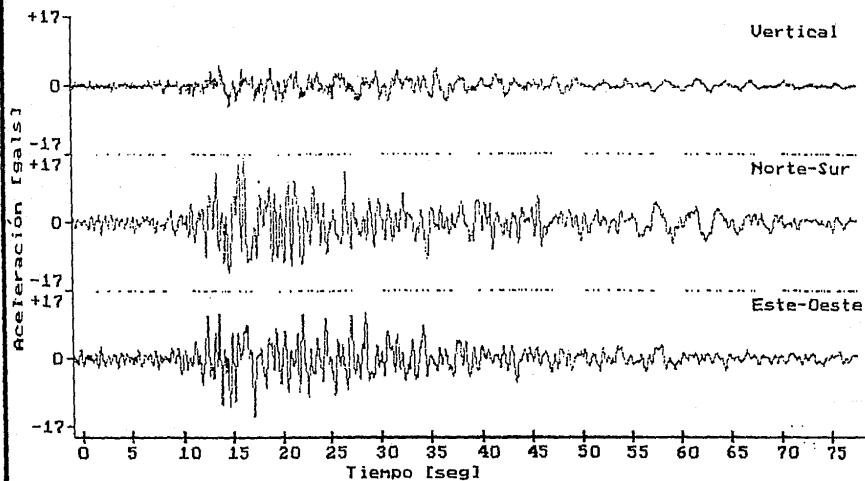
ABRIL 25, 1989

Sec. Téc. Rafael Dondé

	Max (m/s ²)	Min (m/s ²)
Vertical:	0.04710	-0.04867
Norte - Sur:	0.18674	-0.15563
Este - Oeste:	0.18173	-0.20852

figura III.A - Acelerograma del terreno de sedimentos.

CENTRO DE INSTRUMENTACION Y REGISTRO SISMICO, A.C.



50260123

14:30:19 GMT

ABRIL 25, 1989

Gandhi y Reforma

	Max (m/s ²)	Min (m/s ²)
Vertical:	0.04900	-0.04916
Norte - Sur:	0.16289	-0.12441
Este - Oeste:	0.11290	-0.14328

figura III.5 - Acelerograma del terreno rocoso.

rrelación, que proporciona información de que tanto se ve afectado el valor de una variable, dado que un tiempo τ anterior tomara otro valor. La función de autocorrelación se calcula como

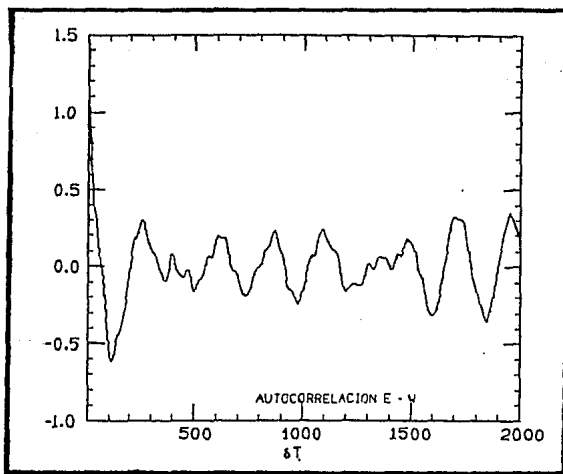
$$\Psi_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \cdot x_{j+m}. \quad (II.9)$$

Físicamente, la función representa el promedio del producto de los valores de la señal a un tiempo dado y un tiempo $m \cdot \Delta t$ más tarde. Podemos inferir entonces de Ψ_m si los valores instantáneos de una señal dependen de un valor previo y si dependen, por cuanto tiempo lo hacen. Mientras la función de autocorrelación es apreciable, la señal permanece relativamente predecible; el conocimiento de la señal en un tiempo suficientemente largo permite calcular con cierta confianza valores a tiempos posteriores por extrapolación. Por otro lado, si Ψ_m tiende a cero, la similitud de la señal consigo misma desaparece y la predicción de su evolución se vuelve imposible. Se calculó de la función de autocorrelación Ψ_m para distintos valores de m .

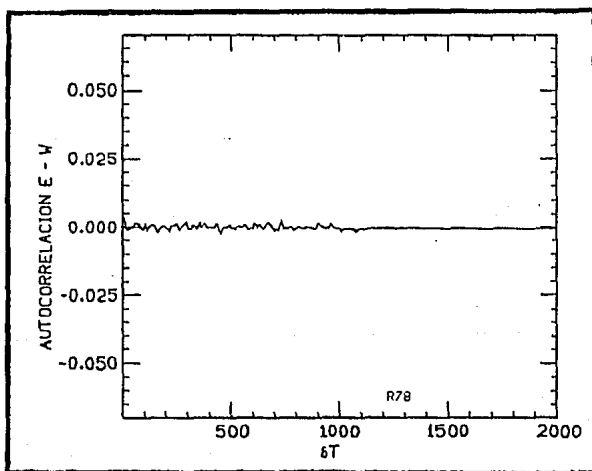
Los datos se analizaron por zonas y cada componente por separado. Los datos de la componente vertical no fueron tomados en cuenta por que su amplitud es mucho menor que la amplitud de las componentes norte-sur y oriente-pendiente. Para estas componentes se obtuvieron los mismos resultados; para el terreno rocoso efectivamente los datos ya no estaban correlacionados después de 0.05 seg, en cambio para el lago y la zona de transición se obtienen soluciones oscilantes (figura III.6). Trabajando directamente con la reconstrucción del espacio fase de los datos para distintas τ 's encontramos que los patrones (figura III.7) y de hecho ni el valor de las dimensiones cambiaba mucho con τ por lo que decidimos utilizar $\tau = 0.05$, con el objeto de mantener el mayor número de datos disponibles, pero descartando la correlación de la señal entrante (en roca).

Resultados. Una vez reconstruidos los espacios de fases se evaluaron las dimensiones con el programa para distintos valores de p ; primero de las estaciones por separado y luego juntando todos los datos. Obtuvimos que para $p = 3$ se satura el valor de las dimensiones dando como resultado para las zonas III y II, de arcilla lacustre y de sedimentos compactos, una dimensión de correlación, $\nu = 1$ y de Hausdorff de 1.1 y para la zona I ó de terreno rocoso una dimensión de correlación de $\nu = 1.3$ y de Hausdorff de 1.3. Algunas gráficas típicas se encuentran en la figura III.8.

Se hicieron además de los cálculos directos de los acelerogramas, cálculos sobre señales desamortiguadas. Se propuso considerar para la señal registrada un amortiguamiento exponencial después de un tiempo estimado de 60 seg que duró la señal entrante y se calculó el factor para desamortiguar la señal. Estos acelerogramas



a) autocorrelación en lago.



b) autocorrelación en roca.

figura III.8 - autocorrelación de los acelerogramas.

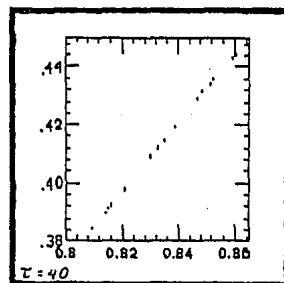
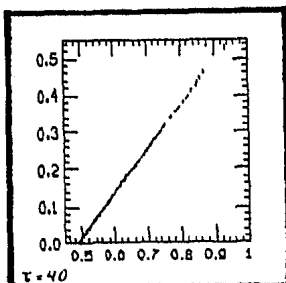
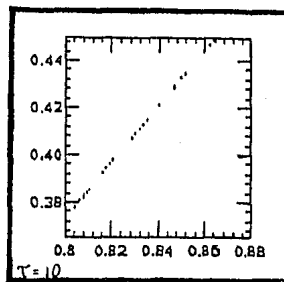
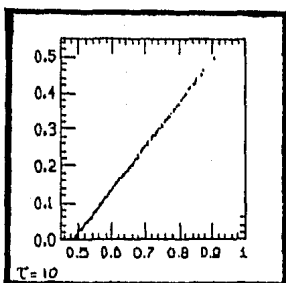
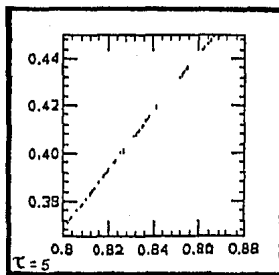
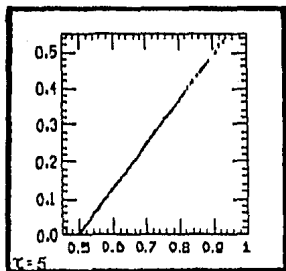


figura III.7.a - Reconstrucción del espacio fase de la arcilla lacustre, para distintas τ 's.

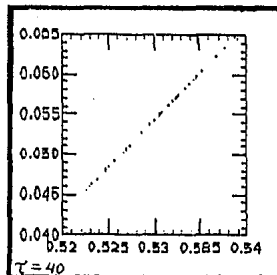
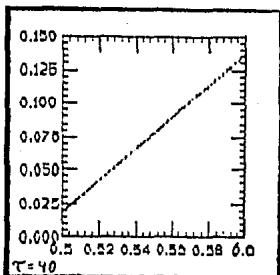
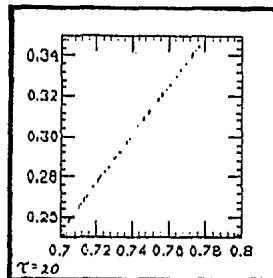
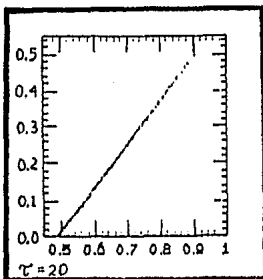
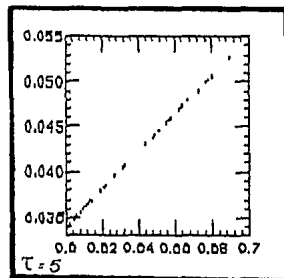
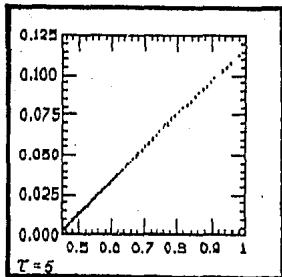


figura III.7.b - Reconstrucción del espacio fase del terreno rocoso, para distintas τ 's.

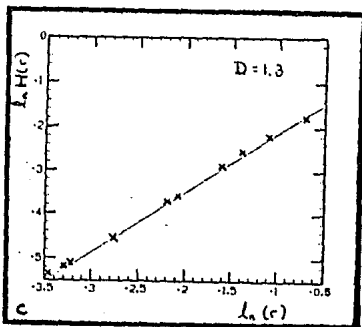
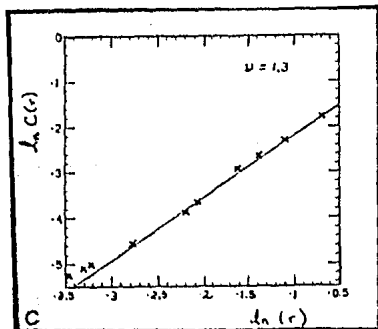
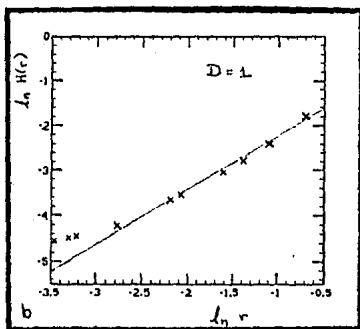
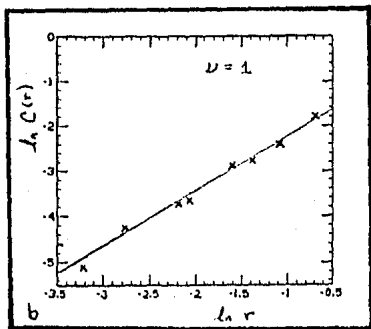
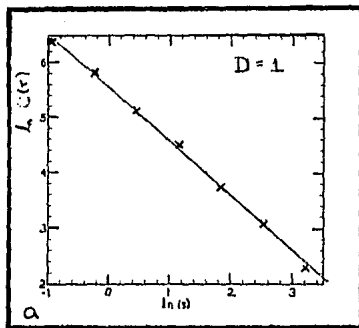
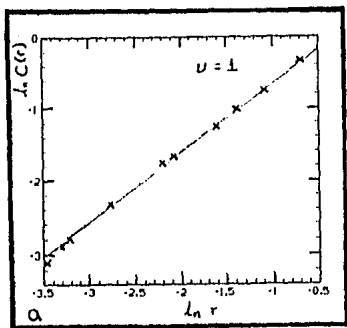


figura III.8 - Gráficas típicas de la dimensión de correlación y de la de Hausdorff: a) arcilla lacustre, b) sedimentos y c) roca.

dieron los mismos resultados que las señales originales. También se analizaron del lago las "colas" de los acelerogramas por separado, donde se creó que el movimiento de la arcilla lacustre tiene un patrón oscilatorio estacionario y que es congruente con la dimensión uno que estamos obteniendo.

Discusión. Para los distintos tipos de suelo, como ya se ha mencionado, se observan distintos espectros de fourier (figura III.9 - algunas gráficas típicas). Por ejemplo para la arcilla lacustre se pueden distinguir picos definidos para ciertas frecuencias, con algo de ruido; a ésto se debe la hipótesis del movimiento oscilatorio que se acaba de mencionar y del cual se obtiene un valor de la dimensión igual a uno. En cambio, en el caso del terreno firme, se observa un espectro ancho y como se dijo en el capítulo I, con este tipo de espectros no es posible distinguir entre caos determinista y ruido blanco. Así que decidimos determinar la dimensionalidad dinámica del movimiento telúrico utilizando los acelerogramas. No se pretenden caracterizar las distintas zonas con los valores obtenidos, ya que debido a la cantidad de datos con los que se cuenta, i.e. para roca y sedimentos en promedio se tiene 1333 datos por estación, 5332 datos en total, lo que quiere decir que para $p = 2$ tenemos 2666 datos y para $p = 3$ tenemos 1777 datos; para el caso de arcilla lacustre, son 2000 datos por estación, 14000 en total, por lo tanto se cuenta con 7000 datos para $p = 2$ y 4666 para $p = 3$, no se pueden asegurar valores precisos para las dimensiones fractales. Encontramos además, el valor de la función de correlación para un rango muy pequeño de r , porque para cajas más chicas se saturaban los valores de las dimensiones. Los valores encontrados no son del todo despreciables; como se mencionó, en el estudio sobre epilepsia se encontraron dimensiones fractales para datos con características parecidas a las de nuestros datos, comparar los encefalogramas que presentan en el trabajo (figura II.8) y los acelerogramas del CIRES (figuras III.3, III.4 y III.5), así como, las gráficas de la función de autocorrelación para ambos casos (figuras II.10 y III.6). Esto indica que al menos somos capaces de reportar la dimensionalidad dinámica de los acelerogramas, de 1 para arcilla lacustre y los sedimentos y de 1.3 para la zona de roca.

En base a dimensiones fractales existen otros estudios sismológicos, como los presentados sobre la falla de San Andrés por Aviles y Scholz¹ y por Okubo y Aki¹¹. Pero, sus estudios tiene que ver con el cálculo de la dimensión fractal -la dimensión de Hausdorff- de las fallas. Aviles y Scholz estudian la irregularidad de la falla principal utilizando el método A descrito en el capítulo I, recorriendo la falla con segmentos de tamaño ϵ y Okubo y Aki utilizan el método D (capítulo I) con círculos de radio ϵ , pero además de la falla principal ellos incluyen ramificaciones como San Jasinto y Banning entre otras. En ambos artículos se reportan dimensiones que dependen tanto de la magnitud de ϵ como de la escala de los mapas en los que se miden. Obtienen resultados como los siguientes; rangos en los que la dimensión varía mucho y son para ellos poco confiables, ó bien, reportan dimensiones mayores -como en el caso de Okubo y Aki- debido a que incluyen sistemas de fallas menores y utilizan mayor resolución en los cálculos. Pero estos son justo el tipo de problemas que reporta

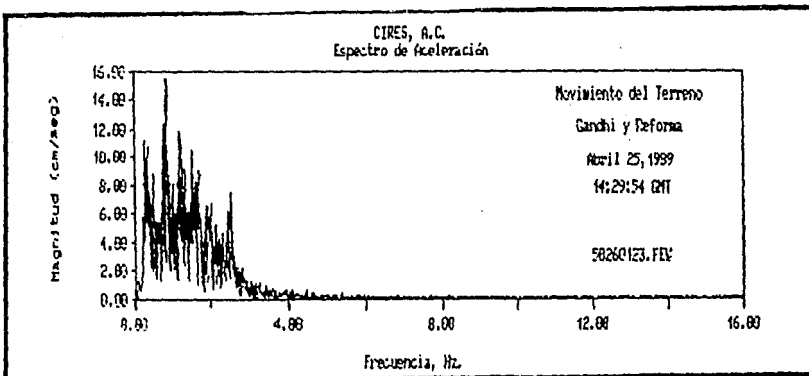
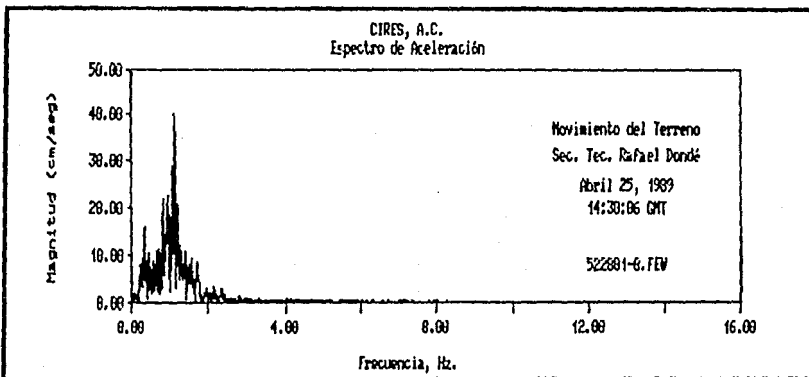
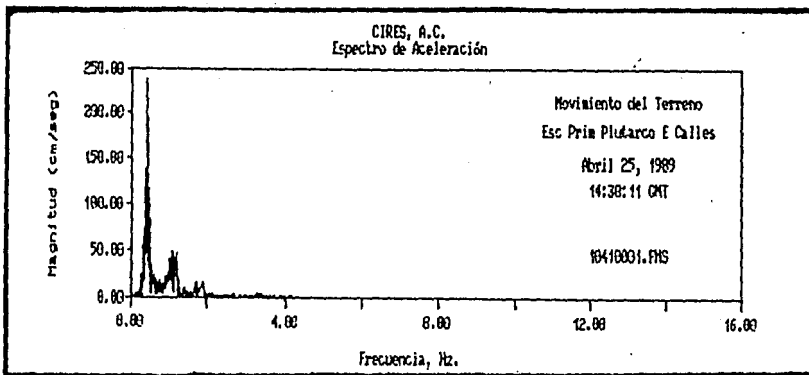


figura III.9 - Espectros de fourier típicos de los acclerogramas: a)arcilla lacustre, b)sedimentos y c)roca.

Mandelbrot para determinar la longitud de una costa y concluye que este tipo de análisis no resulta significativo. Sin embargo en estos estudios realizados justo en la falla reportan como dimensión fractal el valor 1.3, que es el valor que se obtuvo para la zona de terreno firme o rocoso.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES.

CONCLUSIONES.

Basados en las ideas de Grassberger y Procaccia elaboramos un programa que a partir de secuencias temporales, construye un espacio fase y de éste calcula las dimensiones de correlación y de Hausdorff, lo cuál nos permite determinar la dimensionalidad dinámica del sistema estudiado. Se comprobó que el programa funcionaba en forma adecuada haciendo pruebas con dos ejemplos conocidos, el ruido blanco y el mapeo logístico. En ambos casos los resultados fueron congruentes con los valores ya conocidos de sus dimensiones.

Además se aplicó el programa a un caso de datos experimentales; para la evaluación de la dimensionalidad dinámica de los acelerogramas de un sismo en el valle de México. Encontramos un valor de la dimensión de 1 para la zona de arcilla lacustre y la de sedimentos compactos y de 1.3 para la zona rocosa. El valor de 1.3 no necesariamente difiere de 1, debido a la cantidad de puntos con la que se cuenta, sin embargo resulta ser igual al valor reportado por Okubo y Aki¹¹ y por Aviles y Scholz¹ de la dimensión fractal medida directamente de la geometría de una falla sísmica (la falla de San Andrés). Nos encontramos ahora recabando los datos de los acelerogramas registrados en la falla de San Andrés, para hacer los cálculos con esos datos y poder comparar los resultados.

APENDICES

APENDICE I : DIMENSION EFECTIVA.

APENDICE II : RELACION ENTRE LA DIMENSION FRACTAL Y LA DIMENSION DE CORRELACION.

APENDICE III: GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE DIMENSION.

APENDICE IV : RUIDO BLANCO.

APENDICE V : MAPEO LOGISTICO.

DIMENSION EFECTIVA.

Mandelbrot, The fractal geometry of nature, 1983.

La dimensión efectiva es una noción que utiliza Mandelbrot y no la define en forma precisa. Utiliza este término para hacer referencia a la dimensión que trata de la relación entre los conjuntos matemáticos y los objetos naturales. Es decir; objetos físicos como un velo, un hilo y una pelotita deben ser representados con formas tridimensionales, sin embargo los físicos prefieren pensar en velos, hilos y pelotas –si son lo suficientemente finos– como objetos que se encuentran *efectivamente* en dos, una y cero dimensiones respectivamente. Evidentemente, esta consideración depende de la escala a la cual se está trabajando.

RELACION ENTRE LA DIMENSION FRACTAL Y LA DIMENSION DE CORRELACION.

Phys. Rev. Lett. 50, 346(1983)

La dimensión de Hausdorff D es la llamada dimensión fractal y ν es la dimensión de correlación. Para determinar la relación que existe entre ellas, cubrase un atractor con hipercubos de longitud lineal r . El número $M(r)$ de cubos que contienen parte del atractor es proporcional a r^{-D} ,

$$M(r) \sim r^{-D}.$$

Llámesese μ_i ($i=1,2,\dots$) al número de puntos del conjunto $\{\vec{X}_i\}_{i=1}^N$ que están en el i -ésimo hipercubo no vacío. Se puede escribir la función de correlación para valores de μ_i grandes como

$$C(r) \sim \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{M(r)} \mu_i^2 = \frac{M(r)}{N^2} \langle \mu^2 \rangle$$

donde los paréntesis angulares denotan un promedio de todas los cubos ocupados.

De la desigualdad de Schwartz,

$$C(r) \geq \frac{M(r)}{N^2} \langle \mu \rangle^2 = \frac{1}{N^2} \frac{M(r)}{M(r)} \left[\sum_{i=1}^{M(r)} \mu_i \right]^2 = 1/M(r) \sim r^D,$$

donde $\sum \mu_i = N$. De aquí se sigue:

$$\nu \leq D.$$

GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE DIMENSION.

Schuster, *Deterministic Chaos* (1983).

Schuster introduce además de la dimensión de Hausdorff D , un conjunto infinito de dimensiones $D = D_0, D_1, D_2, \dots$, que describe la inhomogeneidad de un atractor. De la partición del espacio de fases p -dimensional en celdas r_p . La probabilidad p_i de encontrar un punto del atractor en la i -ésima celda ($i = 1, 2, \dots, M(r)$) está dada por

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

donde N_i es el número de puntos en la celda y N el número total de puntos.

Para caracterizar la inhomogeneidad de la estructura del atractor introduce el conjunto como potencias de p_i como

$$D_f = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{f-1} \frac{\log \left(\sum_{i=0}^{M(r)} p_i^f \right)}{\log r}. \quad (AIII.1)$$

Por ejemplo, para $f = 0$ obtenemos de la ecuación AIII.1 la siguiente expresión:

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=0}^{M(r)} 1}{\log r} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M(r)}{\log r}$$

que resulta ser la definición usual de la dimensión de Hausdorff (*i.e.* $D = D_0$).

Para $f = 2$ encontramos

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \left(\sum_{i=0}^{M(r)} p_i^2 \right)}{\log r}.$$

Donde el numerador es proporcional a la función de correlación y por tanto, D_2 corresponde a la dimensión de correlación.

RUIDO BLANCO.

Bergé et al., Order within Chaos (1984).

El caso extremo de una señal aleatoria es lo que se llama *ruido blanco*. Este nombre es evocativo, haciendo alusión a ruido -en el sentido de sonido sin estructura armónica- y a la ausencia de color en la luz. Uno puede “ver” -luz blanca- y “oir” -sería el sonido típico de una cascada-.

Uno puede considerar la señal $x(t)$, resultante de ruido blanco, como “nueva” en cada instante, al menos a primera aproximación. Esto es; el ruido es blanco sí, además de ser independiente, se produce una señal que es un impulso de duración infinitesimal -sin autocorrelación-. Si cada una de las señales individuales tuviera una estructura espectral, sería el análogo a que el ruido ó la luz tuvieran color.

MAPEO LOGISTICO.

Schuster, Deterministic Chaos (1983).

El mapeo logístico corresponde a un modelo unidimensional de un sistema disipativo; está definido por

$$f(x_n) = x_{n+1} \equiv rx_n(1 - x_n)$$

y cumple la condición necesaria de no linealidad para la existencia del caos determinista; incluye como parámetro externo de control a la cantidad r . Al variar r pasa por determinados valores críticos (bifurcaciones), al aumentar r los intervalos de tales bifurcaciones son cada vez menores. Después del último punto crítico $r = r_\infty$, el sistema entra en una zona de caos determinista con ventanas de regularidad. El intervalo de interés es el $(0, 1)$ y para que la ecuación se mapee en si misma debe pedirse $r \in [0, 4]$. Para el caso $r = 4$ -máximo valor permitido- se cubre todo el intervalo. En este caso se tiene una solución irregular, que ejemplifica el caos determinista.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- 1) Aviles y Scholz,1987. J. Geophysical Research 92-B1,331.
- 2) Babloyantz y Destexhe, submitted to P.N.A.S.
- 3) Bergé P, Pomeau Y y Vidal Ch,1984. *Order within Chaos*, JW & Sons.
- 4) Contreras O, Fontana B e Ibarrola G,1989. Informe RA-DF-4, CIRES.
- 5) Feder J,1988. *Fractals*, Plenum Press NY.
- 6) Έυκλείδης, *Ετοιχειά*, Alejandría ~ 300 a.c. (primera edición: Simon Grynaeus, Basel 1533.
- 7) Grassberger P y Procaccia I,1983. *Physica* 9D,189.
- 8) Grassberger P y Procaccia I,1983. *Phys. Rev. Lett.* 50-5,346.
- 9) Jürgens H,Peitgen H y Saupe D,1990. *The language of Fractals*,Scientific American August.
- 10) Mandelbrot BB,1987. *The fractal geometry of nature* (San Francisco EUA: - Freeman).
- 11) Okubo y Aki,1987. J. Geophysical Research 92-B1,345.
- 12) Packard, Crutchfield, Farmer y Shaw,1980. *Phys. Rev. Lett.* 45-9,712.
- 13) Schuster H.G.,1984. *Deterministic Chaos*, (Berlin: Physik-Verlag).