

64  
2 y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA

MOISES SILVA GONZALEZ

CON EL TITULO DE  
OSCILACIONES DE UNA GOTA

BAJO LA DIRECCION DEL  
DR. ARTURO MENCHACA ROCHA

23 DE AGOSTO DE 1991

**FALLA DE ORIGEN**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

cap.	Tema	pág.
I	<b>Introducción</b>	1
II	<b>Gotas y núcleos</b>	2
	A. El modelo de la gota líquida para el núcleo atómico	2
	B. El modelo de la gota líquida en las vibraciones del núcleo.	6
III	<b>Vibraciones del medio continuo</b>	11
	A. La ecuación de continuidad	11
	B. La ecuación de Navier-Stokes	13
	C. Oscilaciones de una gota	16
IV	<b>El experimento</b>	24
	A. El dispositivo experimental	24
	B. El desarrollo experimental	29
	C. La digitalización de las imágenes	30
	D. Modos propios	33
V	<b>Análisis de resultados</b>	35
	A. Obtención de los perfiles	35
	B. Resolución	39
	C. Convergencia	42
	D. Resultados	48
	E. Las frecuencias de oscilación	53
	F. Las fases de oscilación	54
	G. Coeficientes de atenuación	60
VI	<b>Conclusiones</b>	62
apéndices		
A-1	<b>Velocidad de una onda en un medio elástico</b>	64

A-2	Simetría del tensor de esfuerzos	68
A-3	Area de una superficie en coordenadas curvilíneas ortogonales	72
A-4	Frecuencia de oscilación ( $\omega_{km}$ ) en un medio en coordenadas cilíndricas	74
	I. Derivación de $\omega_{km}$	74
	II. La fórmula de Laplace	77
	III. Condiciones generales para el equilibrio	80
	IV. Tensión superficial	81
	Referencias	85

## CAPITULO I    Introducción

El estudio del estado de equilibrio, así como las vibraciones de un fluido confinado es un problema recurrente en la física. Gotas, estrellas, núcleos etc. son ejemplos de sistemas que caen dentro de esta categoría. Existe una gran cantidad de estudios teóricos sobre el tema, sin embargo, la información experimental en cada caso es más bien limitada.

El presente es un trabajo experimental en el que se estudian las oscilaciones de gotas de mercurio, la evolución en el tiempo de sus modos propios y la manera en que se amortigua su movimiento. Con el fin de obtener gotas deformadas y poder estudiarlas, se realizó un experimento en el que se hicieron chocar dos gotas de la misma masa y con una velocidad de la misma magnitud pero en direcciones opuestas. Eligiendo, de todas las colisiones producidas, aquellas en las que se fusionaban las gotas incidentes.

Esta tesis tuvo su origen en el interés por construir un instrumento para ilustrar algunas de las propiedades macroscópicas comunmente asociadas a los estados vibracionales de los núcleos atómicos.

La tesis está dividida en 6 capítulos. Luego de esta breve introducción, en el capítulo II se hace un resumen de los conceptos relacionados con el modelo nuclear de la gota líquida, en el capítulo III se presentan los conceptos generales de la mecánica de fluidos aplicables en la derivación de la frecuencia de Rayleigh, el capítulo IV describe el trabajo experimental que se hizo, así como el dispositivo que se construyó para medir esa frecuencia de oscilación en gotas de mercurio, en el capítulo V se presentan los resultados experimentales y por último (capítulo VI) se dan unas breves conclusiones.

*En este capítulo se presentan algunos de los conceptos teóricos que existen en la física del núcleo en relación a las vibraciones de un "fluido nuclear", modelo para el que es de mucho interés un estudio macroscópico de un sistema análogo.*

### II.A El modelo de la gota líquida para el núcleo atómico.

Las oscilaciones de una gota de fluido han sido un problema clásico que fue estudiado desde hace tiempo por investigadores tan notables como Kelvin y Rayleigh. Incluso en este siglo se han desarrollado trabajos importantes a este respecto por personajes no menos notables como S. Chandrasekhar en 1959<sup>1</sup> que estudió el problema de una masa incompresible con su propio campo gravitacional (autogravitación) y con efectos viscosos; y más recientemente por S. Cohen, F. Plasil, W.J. Swiatecki<sup>2</sup> que estudiaron las formas de equilibrio de masas líquidas cargadas o con autogravedad.

En física nuclear son importantes esos estudios porque se ha demostrado que el núcleo muestra un comportamiento similar al de las gotas, lo que ha dado origen al llamado MODELO DE LA GOTA LIQUIDA<sup>3</sup>. La aplicación inmediata del modelo está en la derivación de la fórmula semiempírica de la masa o fórmula de Weizsacher<sup>4</sup>. En dicha aplicación del modelo, las interacciones coulombianas, los efectos del principio de exclusión de Pauli y otras interacciones características de un sistema nuclear se agregan a la fórmula como correcciones que no se hacen evidentes al considerar al núcleo como una gota de fluido. De manera breve el modelo de la gota líquida para un núcleo es el siguiente. Se considera que un núcleo es un conjunto de partículas obligadas a mantenerse unidas por fuerzas atractivas que actúan entre ellas. Un nucleón (protón o neutrón) energético que se acerca a este núcleo se ve acelerado cuando se introduce en él debido a las fuerzas atractivas del resto de los constituyentes nucleares. Eventualmente el nucleón

incidente chocará con alguno de ellos. La dirección de movimiento de cada nucleón en el núcleo se ve afectada en cada nueva colisión. Cuando un nucleón se encuentra cerca de la orilla del núcleo experimenta una interacción hacia el interior de este debida a la atracción producida por el resto de los nucleones, cambiando su dirección drásticamente. De tal forma que las velocidades de los nucleones dentro de un núcleo están distribuidas isotrópicamente como resultado de los múltiples cambios de dirección. Esta situación pone a la "superficie del núcleo" en un estado de esfuerzos similar a la tensión superficial de una gota líquida macroscópica.

En esta tesis estudiaremos los modos vibracionales de una gota líquida y su analogía con el caso nuclear. Para esto es importante analizar la dinámica de la deformación de una gota.

Como se muestra en el apéndice (A-1) la velocidad  $v$  de propagación de una onda está dada por

$$v = \sqrt{B/\rho} , \quad (II.1)$$

donde  $B$  se conoce como el *módulo volumétrico* (bulk modulus) y tiene dimensiones de fuerza por unidad de área. El valor de  $B$  es característico de cada sustancia y, para un medio isotrópico, se puede relacionar con el módulo de Young  $Y$  y con el coeficiente de Poisson.<sup>5</sup>

La deformación de una gota, como función del ángulo  $\theta$  (ángulo azimutal de las coordenadas esféricas) y del ángulo ecuatorial  $\phi$ , puede ser descrita en base a sus modos propios,  $\lambda, \mu$ , de acuerdo a:

$$r(\theta, \phi) = a_0 + \sum_{\lambda \mu} a_{\lambda \mu} P_{\lambda \mu}(\cos \theta) e^{-i\mu \phi}, \quad (II.2)$$

donde  $a_0$  representa el radio equivalente,  $\mu$  la proyección de  $\lambda$  y  $P_{\lambda \mu}$  son los polinomios asociados de Legendre. Por ejemplo, una gota cuya deformación se parezca a la representada por la línea continua de la figura II.1



$P_{30}$

(figura II.1)

Las desviaciones a partir de la forma esférica de las ondas estacionarias sobre la superficie de una gota líquida son proporcionales a los polinomios asociados de Legendre  $P_{\lambda\mu}$ . Aquí se muestra una onda para la que  $\mu=0$  y  $\lambda=3$ . La figura tiene simetría de rotación al rededor del eje horizontal que pasa por su centro. La línea segmentada representa la forma esférica de reposo.

está descrita por la componente  $P_{30}$ . En este caso, la línea discontinua representa la magnitud de la constante  $a_0$ .

Por definición de modo propio, el número de longitudes de onda necesarios para abarcar todo el perímetro de la gota es igual a  $l$ , donde  $l$  es el grado de multipolaridad (el momento angular en el caso de un sistema cuántico), así que

$$\lambda_l = \frac{2\pi a_0}{l} \quad (II.3)$$

La frecuencia  $\nu_l$  está dada por la relación usual entre frecuencia, velocidad, y longitud de onda para una onda en un medio elástico

$$\nu_l = \frac{v}{\lambda_l} \quad (II.4)$$

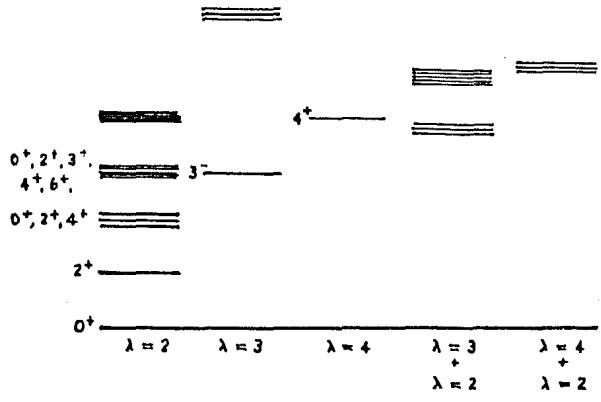
donde  $v$  está dada por (II.1).

Por otra parte se sabe que los núcleos poseen una densidad interna que es aproximadamente uniforme y una superficie bien definida. Debido a esa propiedad, a partir de las dos últimas ecuaciones se tiene el siguiente resultado aproximado



$$\nu_1 \approx \text{constante} \cdot \frac{l}{a_0} \quad (11.5)$$

En un sistema lo suficientemente pequeño como para que los efectos cuánticos sean apreciables, tales como una molécula o un núcleo, las vibraciones están cuantizadas, es decir, se dan en unidades de energía de tamaño  $h\nu_1$ , conocidas como *fonones*. Un estado vibracional debe contener un número entero de fonones para cada  $l$ . Algunos de los estados vibracionales de menor energía tienen entonces energía  $h\nu_2$ ,  $2h\nu_2$ ,  $3h\nu_2$ ,  $h\nu_3$ ,  $h\nu_3 + h\nu_2$ ,  $h\nu_4$ , etc. Si se hace un cálculo preciso de  $\nu_1$  se encuentra que, en el caso nuclear, las energías relativas de esos estados son aproximadamente como se muestra en el diagrama de la figura 11.2.



(figura 11.2)

Si el núcleo pudiera considerarse como una gota líquida, este diagrama representa las energías de los estados vibracionales que se esperarían. Las agrupaciones que se muestran son de acuerdo al número  $\lambda$  con estados en los que va aumentando el número de fonones en la misma columna vertical. Los estados que se muestran muy juntos están a la misma energía.

Se puede probar también que cada fonón de vibración lleva un momento angular  $l$ .

Desde luego que un núcleo no tiene todas las propiedades de

una gota líquida, el número de nucleones en un núcleo es mucho menor que el que se toma como hipótesis básica en el modelo del medio continuo, y los orbitales de los nucleones están sujetos a muchas restricciones cuánticas como: energías y momentos angulares cuantizados y el principio de exclusión de Pauli; por mencionar sólo algunos. Sin embargo existe la suficiente semejanza como para esperar estados en el núcleo que correspondan al menos burdamente a la descripción clásica de la oscilación de una gota.

A los estados de este tipo se les llama colectivos ya que tienen su origen en el movimiento de muchos nucleones actuando colectivamente para producir efectos que no serían producidos por un sólo nucleón. Se sabe que el primer estado excitado de todos los núcleos de capa esférica no cerrada par-par es estado vibracional de  $l = 2$ .

En los trabajos teóricos de la física nuclear para una gran variedad de sistemas de muchos cuerpos se han dado descripciones del espectro de excitación en términos de modos elementales de vibración, representando con ello las diferentes fluctuaciones respecto al equilibrio. La manera en que se representan esas fluctuaciones depende del sistema y pueden estar asociadas a excitación de partículas individuales o, como ya se mencionó, a vibraciones colectivas de: la densidad, la forma, o de algún otro parámetro que caracterice al sistema en equilibrio. Ya se ha indicado que también en el caso de sistemas moleculares el modelo colectivo se aplica, como por ejemplo, en el caso de los átomos de las moléculas de una estructura aproximadamente rígida; las excitaciones internas de baja energía corresponden a los modos normales de vibración de esa estructura; esas vibraciones respecto a la red de equilibrio, en el caso de un cuerpo macroscópico sólido, corresponden a las ondas elásticas.

## II.B El modelo de la gota líquida en las vibraciones del núcleo

Aquí se explicará lo que se conoce como "núcleo de Bohr - Wheeler". El hecho de que se de la fisión como un proceso espontáneo o como una reacción inducida por proyectiles de baja energía es un indicativo de la poca estabilidad de los núcleos

pesados, inducida por la repulsión coulombiana de largo alcance entre los protones. En un trabajo de N. Bohr y de J. A. Wheeler<sup>6</sup> se estudia ese comportamiento y se describen estados metaestables en la forma del núcleo (saddle-point shapes). ... a esas formas de equilibrio hacen referencia Cohen, Plasil y Swiatecki<sup>2</sup>.

En el trabajo de Bohr-Wheeler se consideran vibraciones de la superficie respecto al equilibrio con simetría esférica. Cabe mencionar que fueron N. Bohr y Kalckar en 1937<sup>3</sup> los que introdujeron el modelo de la gota líquida en el estudio de la dinámica nuclear con el fin de poder entender el fuerte acoplamiento en el movimiento de los nucleones individuales. Este primer estudio hizo posible que los mismos Bohr y Wheeler en 1939<sup>6</sup> pudieran dar una interpretación de las características básicas del proceso de fisión. Otra aplicación más del modelo de la gota líquida es el estudio de los grados de libertad asociados con el movimiento de neutrones con respecto a los protones que se observan en el foto-efecto nuclear. En los puntos más generales el modelo de la gota líquida aplicado en las oscilaciones nucleares es el siguiente<sup>7</sup>. Las vibraciones de la superficie de una gota líquida se pueden describir con un conjunto completo (base ortonormal) de números  $\alpha_{\lambda\mu}$ , resultado de una expansión de dicha superficie en armónicos esféricos,

$$R(\vartheta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta, \phi) \right) \quad (II.6)$$

donde  $R_0$  es el radio de equilibrio y  $R(\vartheta, \phi)$  es la distancia del origen a la superficie. Se muestra en dicho estudio que el hamiltoniano es

$$H = \sum_{\lambda\mu} \left( \frac{1}{2} D_{\lambda}^{-1} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (II.7)$$

en donde los  $C_{\lambda}$  son coeficientes relacionados con la fuerza restauradora, los  $D_{\lambda}$  son coeficientes relacionados con la masa y ambos parámetros dependen del líquido que se considere y donde los coeficientes  $\pi_{\lambda\mu}$  son los momentos conjugados de las coordenadas generalizadas  $\alpha_{\lambda\mu}$  dados por la relación canónica

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}} (T - U). \quad (II.8)$$

Con ese hamiltoniano se da lugar a las siguientes ecuaciones de

movimiento

$$\ddot{\alpha}_{\lambda\mu} + \omega_{\lambda}^2 \alpha_{\lambda\mu} = 0 \quad , \quad \omega_{\lambda} = \left( \frac{C_{\lambda}}{D_{\lambda}} \right)^{1/2} \quad , \quad (II.9)$$

de modo que con esa aproximación se encuentra que las coordenadas  $\alpha_{\lambda\mu}$  realizan oscilaciones armónicas de frecuencia  $\omega_{\lambda}$ .

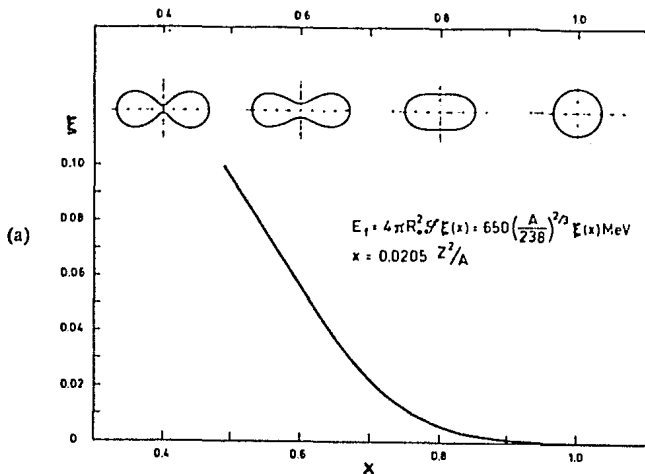
En todo lo que considera el mencionado estudio hasta este punto se supone que las amplitudes de oscilación son pequeñas, es decir,  $|\alpha_{\lambda\mu}| \ll 1$ . En el estudio de mayores deformaciones de la superficie, es necesario incluir en el hamiltoniano términos de potencias mayores de  $\alpha_{\lambda\mu}$ , y ellas dan como resultado vibraciones anarmónicas y acoplamiento entre modos de diferentes órdenes multipolares.

En el mismo trabajo de Bohr y Wheeler<sup>6</sup> se estudia la energía potencial para grandes deformaciones en función del proceso de fisión. Eso tiene como justificación que una gota eléctricamente cargada que bien podría ser estable frente a oscilaciones de pequeña amplitud deje de serlo para deformaciones suficientemente grandes. De hecho, como resultado de la repulsión coulombiana, eventualmente la energía debe disminuir como función de la deformación conforme el sistema se va acercando a la división en dos gotas. La manera en que se estudia la energía potencial  $U(\alpha_{\lambda\mu})$ , en situaciones de deformación, es expresándola en términos de una función adimensional que depende del cociente entre las energías coulombiana y de superficie, esa razón es proporcional a la cantidad  $Z^2/A$ , ( $Z$  número de protones y  $A$  número de nucleones), que se conoce como el parámetro de fisibilidad (fissility parameter)

$$x = \frac{Z^2}{A} \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{crit}}^{-1} \approx 0.0205 \frac{Z^2}{A} \quad , \quad (II.10)$$

en donde  $(Z^2/A)_{\text{crit}}$  es el valor de  $Z^2/A$  para el cual la forma esférica se torna inestable con respecto a las deformaciones cuadrupolares. Para valores de  $x$  cercanos a la unidad, la forma de silla de montar (saddle-point shape) y la barrera de fisión se pueden obtener por expansión de la energía potencial hasta el tercer orden en las variables de deformación. Se ha estudiado

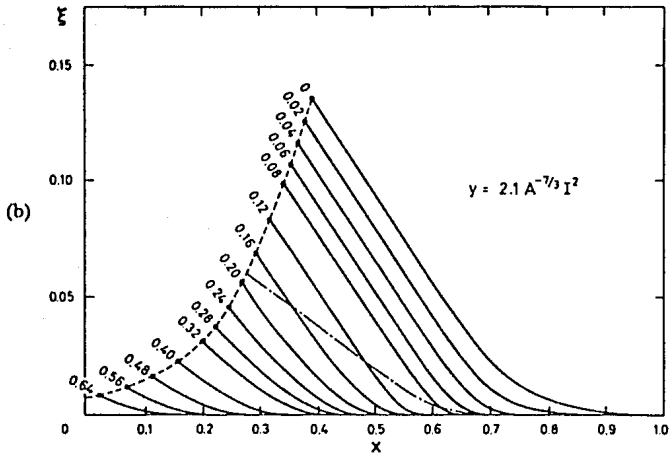
ampliamente la función de energía potencial por distintos métodos, entre ellos, como se dijo, el de la referencia de Cohen, Plasil y Swiatecki<sup>2</sup>. Para valores arbitrarios de  $x$  con grandes cálculos numéricos por computadora, en la figura II.3 se muestran las barreras de fisión y las formas de silla de montar obtenidas en dichos cálculos, en dicha figura la cantidad  $\xi(x)$  es la barrera de fisión en unidades de la energía de superficie para la forma esférica.



(figura II.3-a)

Formas de silla de montar y energías de fisión  
 para una gota líquida cargada.

En la parte (a) de la figura se muestra un sistema sin momento angular, la forma que adopta el sistema y la energía de deformación  $E_f$  en la configuración de "silla de montar" para la fisión a distintos valores del parámetro de fisibilidad  $x$ .



(figura II.3-b)

En la parte (b) de la figura se da la barrera de fisión para distintos valores del parámetro "y", para gotas líquidas en rotación; los números de las distintas curvas dan el valor del parámetro "y", el cual es una medida del momento angular. Las curvas terminan en el lugar de inestabilidad de la forma de silla de montar con respecto a las deformaciones de paridad impar (modo de asimetría en la masa). La curva punteada representa el límite de inestabilidad respecto a la forma de equilibrio oblató de simetría axial; después de esa curva, el equilibrio tiene forma triaxial<sup>7</sup>.

*En este capítulo se presentan los conceptos teóricos que existen sobre las vibraciones de un fluido en base a las leyes clásicas del movimiento y a las leyes del comportamiento de los fluidos que de ellas se derivan.*

### III.A La ecuación de continuidad.

En el estudio del comportamiento de un fluido se hacen en general las siguientes consideraciones básicas:

- i) Los fenómenos que se estudian en un fluido son macroscópicos por lo que un fluido se considera como un medio continuo.
- ii) Al hablar de un elemento diferencial de volumen en un fluido se considera que es lo suficientemente grande como para contener un número muy grande de moléculas, aunque muy pequeño comparado con el volumen del cuerpo que se estudie. Es decir, el tamaño del elemento diferencial de volumen, relativo a la distancia entre las moléculas es grande.

Para un estudio cuantitativo de la vibración de una gota es necesario entender la dinámica del fluido. Siguiendo a Landau y Lifshitz<sup>8</sup>, la descripción matemática del estado de un fluido en movimiento se hace por medio de funciones que dan la distribución de velocidad del fluido  $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z,t)$  y de cualesquiera dos cantidades termodinámicas del mismo; por ejemplo la presión  $p(x,y,z,t)$  y la densidad  $\rho(x,y,z,t)$ . Como bien se sabe, todas las cantidades termodinámicas están determinadas por los valores de cualesquiera dos de ellas, junto con la ecuación de estado; así que si se proporcionan cinco cantidades, por ejemplo las tres componentes de la velocidad  $\vec{v}$ , la presión  $p$  y la densidad  $\rho$ , el estado termodinámico del fluido en movimiento está determinado completamente.

La vorticidad de un fluido se define como  $\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{u}$ . Si hay un flujo estacionario para el cual la vorticidad  $\vec{\omega} = 0$  en TODO el espacio que comprende al fluido se le llama a dicho flujo, FLUJO POTENCIAL o FLUJO IRROTACIONAL. Físicamente eso implica una velocidad de circulación igual a 0 ya que por el teorema de Stokes

$$0 = \oint_S \nabla \times \vec{u} \cdot d\vec{a} = \int_{\delta S} \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (\text{III.1})$$

y como todo campo vectorial cuyo rotacional es cero en todo el espacio, la velocidad en el caso de flujo potencial puede expresarse como el gradiente de alguna función escalar. A esa función escalar se le llama el potencial de velocidad y se le representa por  $\phi$ ,

$$\vec{u} = \nabla\phi. \quad (\text{III.2})$$

En la gran mayoría de los casos de flujo de los líquidos se puede suponer invariable su densidad, es decir, constante a lo largo del volumen del fluido y durante su movimiento. En otras palabras, no existe compresión o expansión apreciable del fluido. Se habla entonces de un flujo incompresible<sup>8</sup>.

Una vez establecidas las hipótesis básicas de caracter general se procede a deducir las ecuaciones que gobiernan el comportamiento clásico de un fluido.

Lo primero es obtener la llamada Ecuación de continuidad, que es una ecuación de caracter conservativo. Para lo cual se supone que se tiene un fluido de densidad  $\rho$  y velocidad  $\vec{u}$ , en donde  $\rho$  y  $\vec{u}$  son funciones de la posición  $\vec{r}$  y del tiempo  $t$ . Si se sigue a un pequeño elemento de fluido de volumen  $\delta V$  y de masa  $\delta m = \rho\delta V$  en su movimiento, el principio de conservación de la masa plantea que

$$\frac{d\delta m}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\delta V + \rho \frac{d\delta V}{dt} = 0 \quad (\text{III.3})$$

donde  $d/dt$  representa diferenciación siguiendo al elemento de volumen. Nuevamente, debido a la conservación de la masa, la razón de cambio de  $\delta V$  debe igualarse al flujo de  $\vec{u}$  hacia afuera de la superficie  $\delta S$  que encierra a  $\delta V$ . Por definición de divergencia y por el teorema de la divergencia

$$\frac{d\delta V}{dt} = \int_{\delta S} \vec{u} \cdot \hat{n} dS = \nabla \cdot \vec{u} \delta V \quad (\text{III.4})$$



en donde  $\hat{n}$  es un vector unitario normal que apunta hacia afuera asociado al elemento de superficie  $\delta S$ . Al sustituir la relación de la ecuación (III.4) en la ecuación (III.3) se obtiene otra forma del principio de conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (III.5)$$

que se conoce como ECUACION DE CONTINUIDAD. Para el caso particular de que  $d\rho/dt = 0$  se tiene que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  a lo que se le llama un fluido incompresible.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido son particularmente sencillas para un flujo potencial de un fluido incompresible, si para este se consideran las relaciones  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  y  $\vec{u} = \nabla \phi$  sustituyendo la primera en la segunda resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0. \quad (III.6)$$

Un resultado del cálculo diferencial de muchas variables es que para una función cualquiera  $f(\vec{r}, t)$  el cambio a primer orden en  $f$  debido a un cambio de tiempo  $dt$  y a un cambio de posición  $d\vec{r} = \vec{u} dt$  es

$$df = f(\vec{r} + \vec{u} dt, t + dt) - f(\vec{r}, t) = \vec{u} \cdot \nabla f dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (III.7)$$

ésto permite escribir al operador  $d/dt$  como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (III.8)$$

si se usa la forma anterior de  $d/dt$  se puede escribir la ecuación de continuidad con derivación parcial en  $t$  ( $\partial/\partial t$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (III.9)$$

### III.B La ecuación de Navier-Stokes.

Considérese un fluido, y en este un volumen interior  $V$  encerrado por una superficie  $S$ . Dicho volumen puede acelerarse por alguna fuerza neta externa y por fuerzas de superficie ejercidas sobre  $S$  debidas al fluido externo que rodea a  $V$ . Con  $f$  se representará la fuerza externa por unidad de masa que actúa sobre

un elemento de volumen  $dV$  y con  $\vec{T}(\hat{n})$  el esfuerzo de superficie que actúa sobre el elemento de superficie  $dS$  con  $\hat{n}$  siendo como antes. Por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del fluido es

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{T}(\hat{n}) dS. \quad (III.10)$$

Con el fin de hacer más fácil el manejo de la ecuación de movimiento se escribe en forma tensorial como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \rho f_i dV + \int_S T(\hat{n})_i dS \quad (III.11)$$

donde los índices  $i, j$  pueden valer  $1, 2, 3$ ; para representar las componentes de los vectores y tensores de rango 2<sup>o</sup> a lo largo de los ejes  $x, y, z$  respectivamente. Como se indicó en el capítulo II existe una magnitud geométrica que se explota exhaustivamente en el estudio de un volumen de fluido que está expuesto a una deformación arbitraria, el radio equivalente. Sea  $\ell$  una dimensión característica del volumen  $V$ , esto es, una longitud que es proporcional al radio equivalente, entonces  $V \propto \ell^3$  y  $S \propto \ell^2$ . Por tanto si se hace  $\ell \rightarrow 0$  mientras que se conserva la forma del volumen, es decir se realiza una homotecia sobre el volumen  $V$ , la ecuación (III.11) se reduce a la condición de equilibrio local

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ell^2} \int_S T(\hat{n})_i dS \right] = 0. \quad (III.12)$$

Si la ecuación (III.12) se aplica a un pequeño tetraedro cuya cara inclinada tiene una normal unitaria  $n_i$  y con sus otras caras paralelas a los planos coordenados, se encuentra fácilmente que  $T(\hat{n})_i = T_{ij} n_j$ , ver apéndice (A-2) ecuación (A2.6), donde  $T_{ij}$  es el esfuerzo en la dirección  $x_i$  que actúa sobre un elemento de superficie cuya normal está en la dirección  $x_j$ , en la ecuación anterior se ha empleado la convención usual de suma sobre índices repetidos. Como  $T(\hat{n})_i$  y  $n_j$  son vectores, las cantidades  $T_{ij}$  son las componentes de un tensor de segundo rango  $\vec{T}$  al que se llama tensor de esfuerzos y describe completamente los esfuerzos en un fluido.

→

Es posible demostrar que  $T$  es simétrico, es decir,  $T_{ji} = T_{ij}$ .

Esto es una consecuencia inmediata de la aplicación de la condición de que debe haber un torque neto CERO sobre un pequeño cubo de fluido cuyas caras son paralelas a los planos coordenados, ver el apéndice A-2 ecuación (A2.10).

El efecto de la presión  $p(\vec{r}, t)$  en el fluido es el de contribuir a un esfuerzo normal hacia adentro (esfuerzo de compresión) sobre cualquier elemento de superficie. De lo que se deduce que  $T_{ij}$  puede escribirse como

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij} \quad (III.13)$$

donde  $\delta_{ij}$  es igual a 1 si  $i=j$  e igual a 0 en caso contrario, y donde  $T'_{ij}$  incluye las contribuciones al esfuerzo debidas a la viscosidad del fluido. Para fluidos ordinarios (fluidos Newtonianos), de los cuales el aire y el agua son ejemplos, el esfuerzo viscoso es proporcional a la cantidad de movimiento relativo que tiene lugar cerca del punto de interés. Entonces, al menos para pequeños gradientes de velocidad,  $T'_{ij}$  debe ser una función lineal de las derivadas  $\partial v_i / \partial x_j$ . Si se le impone a  $T'_{ij}$  la condición de que sea simétrico y que  $T'_{ij} = 0$  para rotaciones puras se llega a que

$$T'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (III.14)$$

para un fluido incompresible. El factor  $\eta$  se llama la *viscosidad dinámica* y es función de la presión y la temperatura. En general,  $p$  y  $T$  y por lo tanto  $\eta$  no son constantes a lo largo de todo el fluido. Sin embargo, en la mayoría de los casos los coeficientes de viscosidad no cambian apreciablemente en el fluido y pueden ser considerados CONSTANTES.

Sustituyendo (A2.5) en (III.11) y usando el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie a una integral de volumen, resulta

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \left( \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \quad (III.15)$$

De hecho, si se utiliza el principio de conservación de la masa en

la forma  $d\delta m/dt = 0$  se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \int u_i (\rho dV) = \int \frac{du_i}{dt} (\rho dV) \quad (III.16)$$

Al sustituir el resultado anterior en la ecuación (III.15) y tomando en cuenta la arbitrariedad del volumen  $V$  se obtiene

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (III.17)$$

que escrita en forma vectorial es

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (III.18)$$

y se le llama la ECUACION DE NAVIER-STOKES. En ella  $\nu = \eta/\rho$  es la viscosidad cinemática y se ha supuesto que el fluido es incompresible.

### III.C Oscilaciones de una gota.

De acuerdo a Landau y Lifshitz<sup>8</sup>, un caso de flujo potencial ocurre para pequeñas oscilaciones de un cuerpo inmerso dentro de un fluido. Es fácil probar que, si la amplitud  $a$  de las oscilaciones es pequeña comparada con la dimensión lineal  $\ell$  del cuerpo ( $a \ll \ell$ ), el flujo que pasa junto al cuerpo será flujo potencial. Para probar ésto se estimará el orden de magnitud de los distintos términos de la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p/\rho. \quad (III.19)$$

La velocidad  $\vec{u}$  cambia notablemente (en una cantidad del mismo orden que la velocidad  $\vec{v}$  del cuerpo oscilante) sobre una distancia del orden de la dimensión  $\ell$  del cuerpo. Así que las derivadas de  $\vec{u}$  con respecto a las coordenadas son del orden de  $v/\ell$ . El orden de magnitud de  $\vec{u}$  misma (a distancias muy pequeñas del cuerpo) se determina por la magnitud de  $\vec{v}$ . De modo que  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \approx u^2/\ell$ . La derivada  $\partial \vec{u}/\partial t$  es del orden de  $\omega v = (p/\rho)v$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de las oscilaciones. Ya que  $\omega \approx v/a$ , se tiene que  $\partial \vec{u}/\partial t \approx v^2/a$ . Ahora se sigue de la desigualdad  $a \ll \ell$  que el término

$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$  es pequeño comparado con  $\partial \vec{u} / \partial t$  y puede despreciarse, así que la ecuación de movimiento del fluido resulta  $\partial \vec{u} / \partial t = -\nabla\omega$ .

Tomando el rotacional de ambos lados, se obtiene  $\partial \nabla \times \vec{u} / \partial t = 0$ , de modo que  $\nabla \times \vec{u} = \text{constante}$ . En el movimiento oscilatorio, sin embargo, el promedio en el tiempo de la velocidad es cero, entonces  $\nabla \times \vec{u} = \text{constante}$  implica que  $\nabla \times \vec{u} = 0$ . Por lo tanto el movimiento de un fluido que ejecuta pequeñas oscilaciones es FLUJO POTENCIAL a primera aproximación.

Antes de pasar a considerar las oscilaciones de una gota en más detalle se demostrará que el área de una superficie  $r = r(\theta, \phi)$  dada en coordenadas esféricas es:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{1/2} r \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (\text{III.20})$$

Como se demuestra en el apéndice (A-3) si para un punto de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , con vector de posición

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad (\text{III.21})$$

en una superficie  $\Sigma$ , existen tres funciones uniformes y con derivadas continuas:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v); \quad (\text{III.22})$$

de manera que la correspondencia entre  $(x, y, z)$  y  $(u, v)$  sea biunívoca, entonces  $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$  es aproximadamente igual al área de una pequeña región de cuatro lados curvos cuyas fronteras son las curvas  $u = u_0$ ,  $u = u_0 + du$ ,  $v = v_0$ ,  $v = v_0 + dv$  sobre  $\Sigma$  por lo que el área de la superficie  $\Sigma$  está dada por

$$S = \iint |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \quad (\text{III.23})$$

donde

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k}, \quad (\text{III.24})$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k}; \quad (\text{III.25})$$

es decir,  $\vec{r}_u$  es un vector *tangente* a una curva de  $v$  constante y análogamente  $\vec{r}_v$ . Ahora se pueden calcular los vectores tangentes  $\vec{r}_u$  y  $\vec{r}_v$  para el caso de coordenadas esféricas. En tal caso las funciones de  $x$ , de  $y$ , y de  $z$  son

$$x = r \sin(\theta)\cos(\phi), \quad y = r \sin(\theta)\sin(\phi), \quad z = r \cos(\theta) \quad (\text{III.26})$$

y el vector de posición es  $\vec{r} = r(\theta, \phi)\hat{e}_r$  entonces

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \hat{e}_r + r \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \hat{e}_r + r \hat{e}_\theta \quad (\text{III.27})$$

y

$$\vec{r}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \hat{e}_r + r \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \hat{e}_r + r \sin(\theta) \hat{e}_\phi \quad (\text{III.28})$$

y por lo tanto

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| = \left| -r \sin(\theta) \frac{\partial r}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - r \frac{\partial r}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + r^2 \sin(\theta) \hat{e}_r \right|. \quad (\text{III.29})$$

Entonces,

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi| = r \sin(\theta) \left[ r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.30})$$

con lo que queda demostrado lo que se afirmó

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{1/2} r \sin(\theta) \, d\theta d\phi. \quad (\text{III.31})$$

Ahora es posible estudiar las oscilaciones de una gota ESFERICA LIGERAMENTE deformada suponiendo que  $r = a_0 + \xi$  con  $\xi \ll a_0$  en donde  $a_0$  representa el radio equivalente de la gota. Con esa hipótesis se puede hacer uso de la aproximación a primer orden de

$$\sqrt{x+h} \cong \sqrt{x} + h/2\sqrt{x}, \quad \text{tomando a } x \text{ como } r^2 \text{ y a } h \text{ como}$$

(  $(\partial r/\partial \theta)^2 + (\partial r/\partial \phi)^2/\text{sen}^2(\theta)$  ) y S queda como

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ (a_0 + \xi)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right] \text{sen}(\theta) \, d\theta d\phi.$$

(III.32)

Entonces la variación de S debida a una variación  $\delta \xi$  es

$$\delta S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ 2(a_0 + \xi) \delta \xi + \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial (\delta \xi)}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \frac{\partial (\delta \xi)}{\partial \phi} \right] \text{sen}(\theta) \, d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ 2(a_0 + \xi) - \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} \right] \delta \xi \text{sen}(\theta) \, d\theta d\phi$$

(III.33)

que se obtuvo integrando el segundo y tercer término de la penúltima integral por partes con respecto a  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente. Una forma independiente de expresar la variación  $\delta S$  es a partir de las ecuaciones (10-78 y 10-79 de Pruppacher<sup>9</sup>)

$$\delta S = \int \delta dS = - \int \left( \frac{p_e - p_i}{\sigma} \right) \delta \xi \, dS = \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta \xi \, dS, \quad (\text{III.34})$$

esta integral se calcula sobre la superficie cerrada. En coordenadas esféricas,  $dS = r^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi = a_0^2 (a_0 + 2\xi) \text{sen}(\theta) d\theta d\phi$  a primer orden en  $\xi$  por lo tanto al comparar las dos expresiones independientes de  $\delta S$  se llega a la ecuación

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{a_0} - \frac{2\xi}{a_0^2} - \frac{1}{a_0^2} \left[ \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \right]$$

(III.35)

En el caso de que se tenga un flujo potencial de pequeña amplitud la ecuación de Navier-Stokes se reduce a  $\partial \vec{u}/\partial t = - \nabla p/\rho$ , y por definición de flujo potencial  $\vec{u} = \nabla \phi$ , de modo que

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = - \frac{\nabla p}{\rho}, \text{ entonces } \int \left( \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l} = - \int_{p_e}^p \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{l}$$

(III.36)

y dado que los integrandos son campos gradientes, las integrales no dependen de las trayectorias, sólo de los puntos extremos por lo tanto en términos del potencial de velocidades se reduce a

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p = p_e \quad , \quad (III.37)$$

en donde  $p_e$  es la presión externa constante (y los efectos de la gravedad fueron ignorados). Por las ecuaciones (Pruppacher<sup>9</sup> 10-80 A.10-33 y A.10-34) la condición de frontera en  $r = a_0$  para  $\phi$  es

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sigma \left( \frac{2}{a_0} - \frac{2\xi}{a_0^2} - \frac{1}{a_0^2} \left[ \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \right] \right) = 0, \quad (III.38)$$

en la que se puede eliminar la presencia de  $\xi$  si se deriva con respecto al tiempo notando que  $\partial \xi / \partial t = u_r = \partial \phi / \partial r$  y evaluando en  $r = a_0$

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{a_0^2} \left( 2 \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] \right) = 0. \quad (III.39)$$

Si se desea una solución en la forma de una onda estacionaria entonces  $\phi = e^{i\omega t} \psi$ , en la que  $\psi$  debe cumplir la restricción  $\nabla^2 \psi = 0$ , pues por definición de flujo potencial y de fluido incompresible  $\nabla^2 \phi = 0$  de manera que en coordenadas esféricas el potencial de velocidad es de la forma

$$\phi = A e^{i\omega t} r^l P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad (III.40)$$

en el que  $P_l^m(\cos(\theta))$  son las funciones asociadas de Legendre. O bien,  $\psi = A e^{i\omega t} r^l Y_{lm}$ . Calculando directamente todas las derivadas parciales que aparecen en III.39 sobre  $\phi$ , se llega a los siguientes resultados

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{l \phi}{r} \quad (III.41)$$



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = A e^{i\omega t} r^l \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} Y_{lm}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = A e^{i\omega t} r^l \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} Y_{lm} \right) \quad (\text{III.41})$$

sustituyendo todas las relaciones de la ecuación III.41 en la ecuación III.39 se obtiene la siguiente ecuación

$$-\rho \omega^2 \Phi - \frac{\sigma}{a_0^2} \left( \frac{1}{r} \Phi + \frac{\partial}{\partial r} \left[ A e^{i\omega t} r^l \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} Y_{lm} + \frac{A e^{i\omega t} r^l}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} Y_{lm} \right) \right] \right) = 0, \quad (\text{III.42})$$

en la que se deben calcular las derivadas parciales respecto a r, al hacerlo resulta

$$-\rho \omega^2 \Phi - \frac{\sigma}{a_0^2} \left( \frac{2l\Phi}{r} + \frac{l A e^{i\omega t} r^l}{r} \left( \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} Y_{lm} + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} Y_{lm} \right) \right) \right) = 0 \quad (\text{III.43})$$

Ahora debe recordarse que  $Y_{lm} \equiv P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$  son las *eigen-soluciones* del problema

$$\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} Y_{lm} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} Y_{lm} + l(l+1) Y_{lm} = 0, \quad (\text{III.44})$$

de lo que se deduce que

$$-\rho \omega^2 \Phi - \frac{\sigma}{a_0^2} \left( \frac{2l\Phi}{r} - \frac{l A e^{i\omega t} r^l}{r} (l(l+1) Y_{lm}) \right) = 0, \quad (\text{III.45})$$

que al cancelar  $\Phi$  queda como

$$-\rho \omega^2 - \frac{\sigma}{a_0^2} \frac{1}{r} (2 - l(l+1)) = 0. \quad (\text{III.46})$$

Para la cual, al ser evaluada en  $r = a_0$  y tomando en cuenta que  $-(l-1)(l+2) = 2 - l(l+1)$  se llega al resultado de que existe un conjunto discreto de frecuencias angulares permitidas dadas por la relación

$$\omega_1^2 = \frac{1(1-1)(1+2)\sigma}{\rho a_0^3} \quad (III.47)$$

De acuerdo a Landau y Lifshitz<sup>B</sup> esta fórmula da las eigen-frecuencias de las oscilaciones capilares de un GOTA ESFERICA. Puede verse que sólo dependen de  $\ell$ , y no de  $m$ . Sin embargo, a una  $\ell$  dada, le corresponden  $2\ell+1$  funciones diferentes ( $\phi$ ), ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ ). Así que a cada una de las frecuencias  $\omega_1$  le corresponden  $2\ell+1$  oscilaciones diferentes. A las oscilaciones independientes que tienen la misma frecuencia se les dice que son *degeneradas*; en este caso se tiene una múltiple degeneración de  $2\ell+1$  veces. Así, los modos asimétricos tienen las mismas frecuencias que los modos de simetría axial para la misma  $m$ .

La expresión III.47 para  $\omega_1$ , se conoce como la frecuencia de Rayleigh, y es una de la predicciones que se intentará probar en el capítulo V.

Por el tipo de la solución para el potencial de velocidad  $\phi$ , se puede ver que la forma de la gota para oscilaciones de simetría axial se puede describir por una expresión de la forma

$$r = a_0 + \sum_1 a_1 \cos(\omega_1 t) P_1(\cos(\theta)). \quad (III.48)$$

Respecto de las oscilaciones de una gota, los términos en  $i=0$  y  $i=1$  quedan eliminados por los siguientes argumentos. Si se toma  $i = 0$  corresponde a oscilaciones radiales, las cuales están prohibidas por la condición de incompresibilidad (en el caso de gotas que oscilen libremente en tres dimensiones), si se toma  $i = 1$  corresponde a movimiento de traslación de la gota como un todo; por lo tanto el modo fundamental de oscilación de la gota se da con  $i = 2$ .

Ante la evidencia experimental que se logró (capítulo V), se desarrolló un sencillo modelo geométrico de la deformación de una gota en las circunstancias del experimento realizado intentando con ello dar una explicación, al menos cualitativa, de las diferencias encontradas con la teoría. El modelo geométrico consiste en tomar en cuenta que la gota en equilibrio, no posee una forma esférica por encontrarse posada sobre una superficie y bajo la influencia de la gravedad. En estas circunstancias, su

forma es más parecida a un elipsoide de revolución tal que su eje de rotación es perpendicular a la superficie en que se apoya; su sección vertical es la de una elipse con semi eje mayor horizontal y semi eje menor a lo largo del eje z y con sección horizontal circular. El radio de dicha sección circular máxima se toma como el radio equivalente  $a_0$ . Con ese modelo de la gota en reposo las coordenadas más adecuadas son las CILINDRICAS. En esta nueva geometría se pueden hacer los cálculos correspondientes a los que se hicieran en coordenadas esféricas para deducir la frecuencia de Rayleigh  $\omega_1$ , dada por la ec. III.47. Esa nueva frecuencia, que se deduce en el apéndice (A-4), tiene la forma:

$$\omega_{km}^2 = \frac{10\sigma}{a_0^3 \rho} (1 + m^2 - k^2 a_0^2). \quad (\text{III.49})$$

Una cosa importante de destacar al comparar III.47 con III.49 es que en la primera  $\omega_1$  sólo es función del orden del polinomio  $l$ , mientras que la frecuencia que se obtiene del caso cilíndrico depende de las constantes de separación  $m$  y  $k$  que se definen en el Apéndice 4. Como se verá en el capítulo V, esta ecuación se aproxima más al resultado experimental.

Volviendo al caso de gotas "casi" esféricas la teoría predice algo más; y se trata de la manera en que se amortigua la gota. Las oscilaciones de una gota decaen en el tiempo obedeciendo a los efectos de la viscosidad, y para una viscosidad cinemática pequeña ( $\nu$ ) las frecuencias ( $\omega_1$ ) no se ven afectadas, pero las amplitudes decaen exponencialmente con una constante de tiempo característico para cada  $l$  dada por<sup>10</sup>

$$T_1 = \frac{a_0^2}{(1-l)(2l+1)\nu}. \quad (\text{III.50})$$

Sin embargo tal tiempo característico, como lo demuestra A. Prosperetti<sup>10</sup> se cumple rigurosamente sólo para pequeños tiempos; para grandes tiempos, la vorticidad generada en la superficie de la gota se difunde a su interior dando como efecto un incremento en el amortiguamiento. Lamentablemente no existe una predicción teórica para este último caso.

## CAPITULO IV El experimento

*En este capítulo se describe el dispositivo experimental, su funcionamiento y el procedimiento que se llevó a cabo para obtener la serie de resultados que se mostrarán más adelante.*

### IV.A El dispositivo experimental.

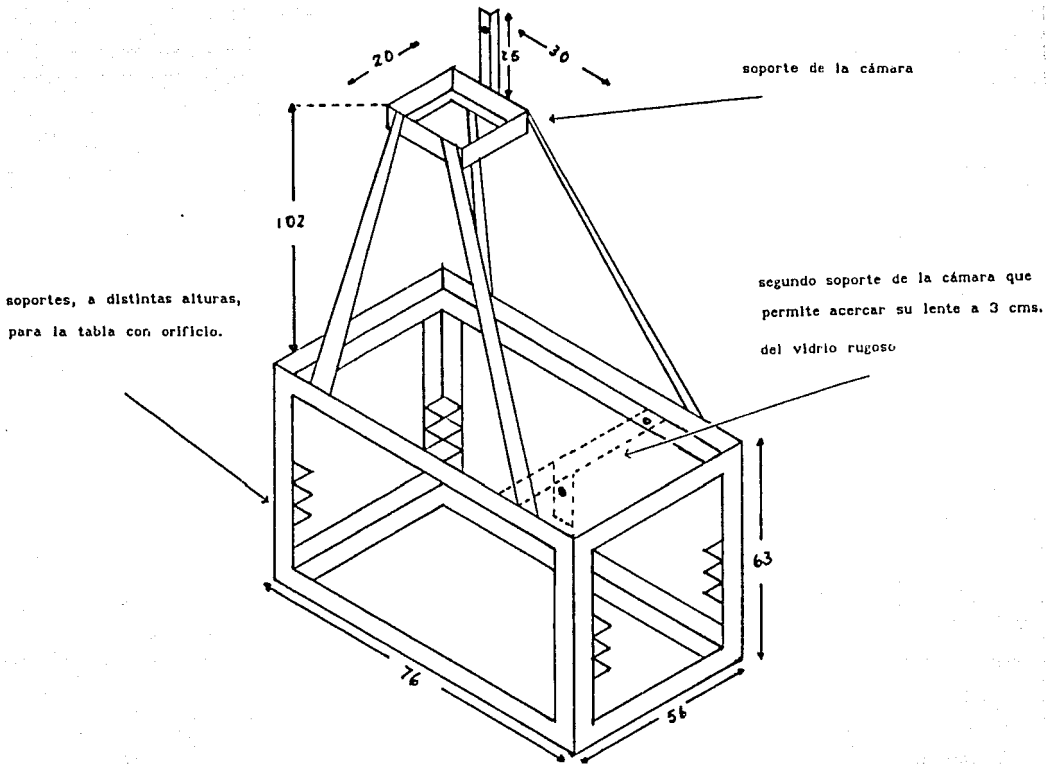
El experimento consistió en producir gotas altamente deformadas a partir de colisiones entre gotas de mercurio que se deslizan sobre una superficie de vidrio.

El punto más importante a destacar del dispositivo experimental es la superficie rugosa sobre la que se movieron las gotas de mercurio. Como es demostrado en el artículo "The mobility of mercury drops on rough glass surfaces," de Arturo Menchaca Rocha<sup>11</sup> existe una superficie de vidrio con la rugosidad óptima que permite el mayor alcance de las gotas que se dejan desplazar sobre ella para una energía inicial dada. De modo que eligiendo dicha superficie de vidrio se logra una situación muy adecuada para estudiar su evolución en el tiempo. Aunado a esto existe la comprobación experimental de que la interacción vidrio-gota es despreciable frente a la interacción gota-gota<sup>12</sup>.

El siguiente punto es la estructura sobre la que se sustenta la superficie de vidrio (figura IV.1). Se trata de una base de acero angular con los soportes necesarios para cargar la tabla de madera que soporta al vidrio. Esta base posee un orificio central para iluminar la escena desde la parte inferior.

Sobre dicho espacio central se monta un pequeño marco, también de madera, el cual cuenta con unas calzas de lámina para soportar los tornillos de nivel; es decir, en el perímetro del marco de madera hay tres perforaciones por las que pasan tres tornillos y que descansan en las mencionadas calzas. Esos tres tornillos permiten nivelar la superficie rugosa, evitando con esto posibles aceleraciones debidas al campo gravitacional terrestre y haciendo más "aislada" la interacción gota-gota de su entorno. Además de

cotas en centímetros



(figura IV.1 - a)

Estructura de acero

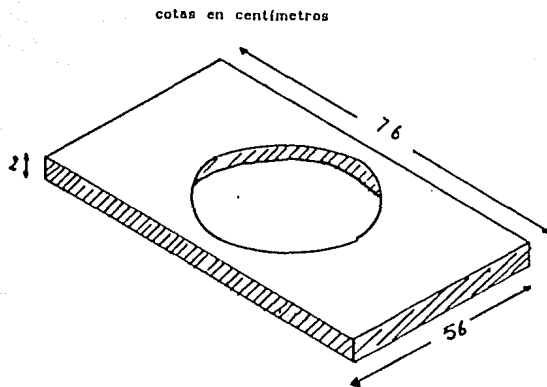
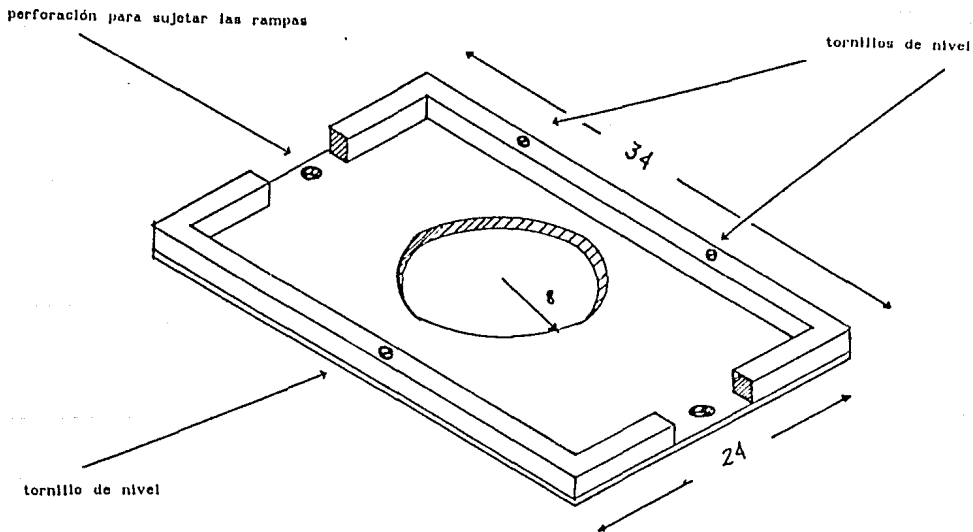


tabla de madera con orificio en el centro



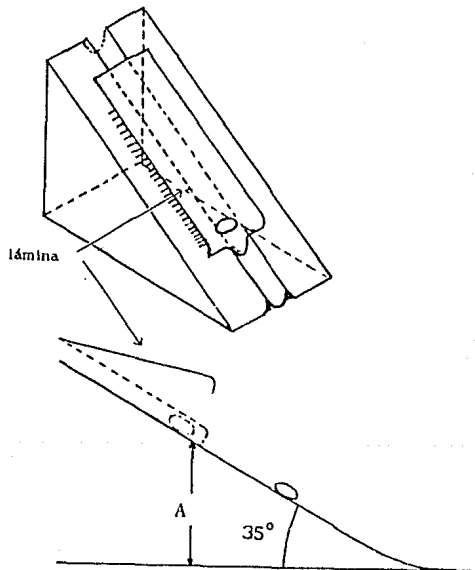
marco superior (de los tres que componen el arreglo) para usarse  
de base del vidrio rugoso

(figura IV.1 - b)

En la primera figura de esta página se muestra la tabla de madera que se apoya en la parte inferior de la estructura de acero. En la segunda figura se muestra la tabla y el marco que apoyan a la superficie de vidrio rugoso.



los soportes para la tabla de madera, en la estructura de acero, existe una columna de ángulos de acero soldada a la base en donde estaría cargada la tabla, sobre dicha columna se montó una cámara de video comercial con frecuencia de obturador de 1/30 de segundo y con exposición de 1/4000 de segundo. En los lados restantes del marco de madera, donde no habrían tornillos, se montaron dos rampas de lucita; en dicho montaje se les dió el espacio necesario para variar la dirección en que cada gota llegaría al choque. Sobre el material de cada rampa se talló una canal sobre la que correría la gota al ser liberada. Las rampas contaban con sendas láminas que detendrían a las gotas que se depositaran en ellas hasta que se deseara soltarlas (figura IV.2).



(figura IV.2)

La rampa cuenta con una escala que permitía graduar la altura A de la que la gota sería soltada. La pendiente se variaba continuamente, cerca de la región de contacto con el vidrio, hasta llegar tangente a la superficie horizontal del vidrio.



La altura a la que se colocan las láminas es variable, logrando así darle diferentes energías iniciales a la gota que se le pusiera. La inclinación en la pendiente de las canales se variaba continuamente, en la región de contacto con la superficie horizontal, de modo que al llegar a la superficie de vidrio el contacto fuera suave. Haciendo que el paso de la gota, de un material al otro, no la perturbara mucho. Ambas rampas se ajustaron para poder ser soltadas simultáneamente.

Como ya se mencionó, las gotas eran vistas desde la cámara a contra luz. Esto fué necesario para simplificar el manejo de las imágenes al estar contrastadas, prácticamente, a dos tonos: blanco y negro (luz y opacidad de la gota).

#### IV.B El desarrollo experimental.

Ahora se explicará la forma en que se trabajó con el equipo antes descrito. En la lámina que sujeta a la gota con la rampa hay una perforación por la que se depositaba la gota. Una vez elegida la masa de las gotas, el ángulo de incidencia para el choque, y la altura a la que serían soltadas, se interrumpía la iluminación del laboratorio para luego iluminar por debajo del vidrio rugoso. Una vez que todo eso estuviera preparado se procedía a grabar, liberando simultáneamente las gotas, que se habían colocado previamente, en las rampas. Lo que finalmente se captaba en la cámara es la sombra de las gotas, o más preciso, la luz que no fué obstruída por su cuerpo, obteniendo una proyección de dos dimensiones de un movimiento que se desarrolló en tres. El manejo de las colisiones grabadas en la cinta se hizo mediante el contador de tiempo que forma parte de la cámara. De tal manera que sólo era necesario llevar un registro del número de la colisión y del tiempo que se podía leer en el contador, y si se deseaba estudiar alguna imagen en particular lo único que se necesitaba era el número de la colisión y el tiempo que le correspondía moviendo la cinta hasta esa imagen.

Para los fines de este trabajo se eligieron choques simétricos, esto es, choques en los que las gotas tenían la misma masa y con la misma magnitud de velocidad inicial y en sentidos

opuestos. Con esta elección se lograba que el sistema del centro de masa estuviéramos en reposo respecto al marco del laboratorio y por lo tanto en el centro del campo visual de la cámara. Al mismo tiempo esta elección de las condiciones iniciales implicaba que el momento total del sistema (las dos gotas en el marco del laboratorio) fuera cero. La razón de esta elección fué la de lograr la mayor simplicidad posible y además la de evitar que el sistema formado por las dos gotas unidas se saliera del campo visual de la cámara.

En este trabajo no se estudió el comportamiento de las gotas como función de la masa, pues como lo predice Rayleigh, el cuadrado de la frecuencia de oscilación del modo  $l$  es inversamente proporcional a la masa y directamente proporcional a la tensión superficial. De tal modo que al ser depositadas sobre una superficie, aquellas gotas cuya forma sea muy cercana a la esférica tendrán frecuencias significativamente grandes, ya que sus masas deberán ser pequeñas, lo que entra en conflicto con la velocidad de la cámara utilizada. En contraste, para aquellas gotas de mayor masa sus frecuencias deberán ser menores. De ahí que se eligiera una masa relativamente grande para las gotas. Pevio a la grabación se pesó un conjunto de gotas de una masa de 1.5 gramos, para ese trabajo se contó con una balanza con precisión de  $1/10000$  de gramo. Cuando se contaba con un número suficiente de esas gotas se procedía a la grabación.

#### IV.C La digitalización de las imágenes.

Una vez que se tenía la grabación de una serie de colisiones se pasaba a una nueva etapa, el experimento propiamente había concluido. Dicha etapa consiste, como se mencionó arriba, en hacer archivos en disco para computadora.

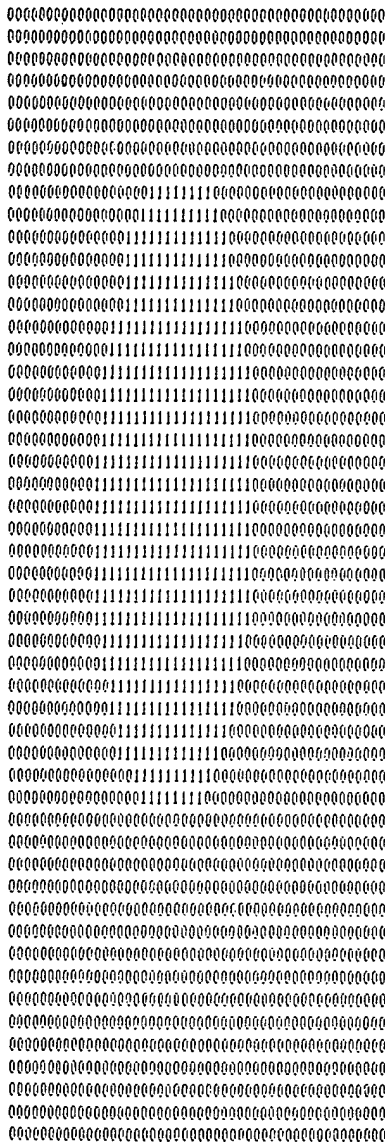
El contenido de dichos archivos eran las imágenes digitalizadas de las gotas durante sus colisiones. La digitalización de una imagen es la tarea que se debe desarrollar para poder contar con un archivo en disco que contenga una imagen.

Para dicha tarea existe una gran variedad de programas de computadora que permiten la comunicación entre esta y una pantalla de televisión en la que se ha detenido la imagen de interés de alguna cinta.

Dependiendo de la sofisticación del equipo de cómputo con que se cuente se podrán lograr imágenes con mayor o menor calidad dentro del archivo en disco. En particular, el equipo con que se trabajó para este experimento tiene la posibilidad de trabajar imágenes a color o en blanco y negro. Es la segunda posibilidad la que se utilizó. Trabajando de esta manera el aparato que maneja las imágenes de la cinta, (digitalizador), se cuenta con 128 tonos distintos entre negro y blanco. Haciendo corresponder una escala desde el 128 hasta el 255 con los tonos en un orden que va de los más oscuros hasta los más claros. Al MAS oscuro (NEGRO) le corresponde el valor 128 y al MAS claro (BLANCO) el valor 255.

Dentro de las opciones del programa de comunicación está la opción de elegir un área de interés. Por medio de un ratón (mouse) se marca en la pantalla de televisión la región de interés del cuadro que se haya elegido de la cinta, se le dan al programa las coordenadas de dicha región de interés y el nombre del archivo en que será guardada la imagen y el programa se encarga de crear el archivo con la imagen elegida y con el nombre que se le dió. Obviamente que con eso sólo se ha logrado que la imagen que ahora existe en archivo digitalizado sea casi binaria, es decir, su contenido son números enteros que pertenecen a dos conjuntos ajenos y que están entre 128 y 255. La etapa de digitalización ha terminado.

Con el archivo "casi binario" se creó, por medio de un programa hecho en lenguaje fortran para la microvax 3900, un segundo archivo que es definitivamente binario, el cual tiene forma de matriz con las dimensiones de la región de interés que se le proporcionó al digitalizador en la etapa anterior. Ese archivo con forma de matriz tiene EL NUMERO UNO en las entradas que corresponden a regiones donde hay material de la gota y EL NUMERO CERO en el entorno de ella (figura IV.3). Este procedimiento se realizó con todas las imágenes de la oscilación de una gota hasta que se detuvo.



(figura IV.3)

Un archivo típico que representa la imagen digitalizada de una

gota.

#### IV.D Modos Propios

Cuando se había terminado de procesar la serie de imágenes que daban la oscilación y se tenían las matrices binarias, se usaba un segundo programa en fortran que tomaba a los archivos de matrices binarias como datos de entrada. Dicho programa calcularía el CENTRO de MASA de la distribución de UNOS, determinaría las coordenadas del borde de dicha distribución y devolvería como datos de salida dos conjuntos de valores; el primero sería el de la DISTANCIA del borde de la distribución al CENTRO de MASA como FUNCION del ANGULO (las coordenadas polares del borde respecto del centro de masa); y el segundo conjunto de valores sería de parejas formadas por coordenadas polares obtenidas de un ajuste estadístico de todos los puntos del borde en el que se minimiza la distribución  $\chi^2$  de los puntos del borde y una función del TIPO serie de Fourier en la que se toman SOLO ALGUNOS TERMINOS. Se remarcó que es del tipo serie de Fourier por que como se recordará, en la discusión de la frecuencia  $\omega_1$  los términos  $i = 0, 1$  están prohibidos, de tal forma que se hace el ajuste con una combinación lineal de cosenos pero desde  $i = 2$ .

$$r(\theta) = \sum_{i=2} A_i \cos(i\theta - \phi_i) \quad (IV.1)$$

El segundo programa devolvía, además, otro archivo de datos de salida que estaba formado por los coeficientes de la "serie de Fourier", es decir, contenía los números que decían con que proporción contribuía cada término al ajuste de la frontera de la gota. En esta etapa del manejo de los datos se contaba con dos tipos de archivos: el primero de coordenadas polares y el segundo de coeficientes. Ya que se tenía completa la serie de imágenes que componían una oscilación, se usaba otro programa que tomaba como datos de entrada los archivos de coeficientes que había devuelto el segundo programa. El tercer programa volvía a hacer un ajuste minimizando  $\chi^2$  de los datos leídos con una función de la forma

$$Ae^{-\beta t} |\cos(\omega t - \phi)| \quad (IV.2)$$

en el que se determinaban los valores óptimos para el ajuste de los parámetros: "A", " $\beta$ ", " $\omega$ " y " $\phi$ "; eso se hacía para cada  $i$  del ajuste "tipo Fourier". Es decir, existía una curva ajustada de la forma  $A_i e^{-\beta_i t} |\cos(\omega_i t - \phi_i)|$  para cada término  $i$  de los que

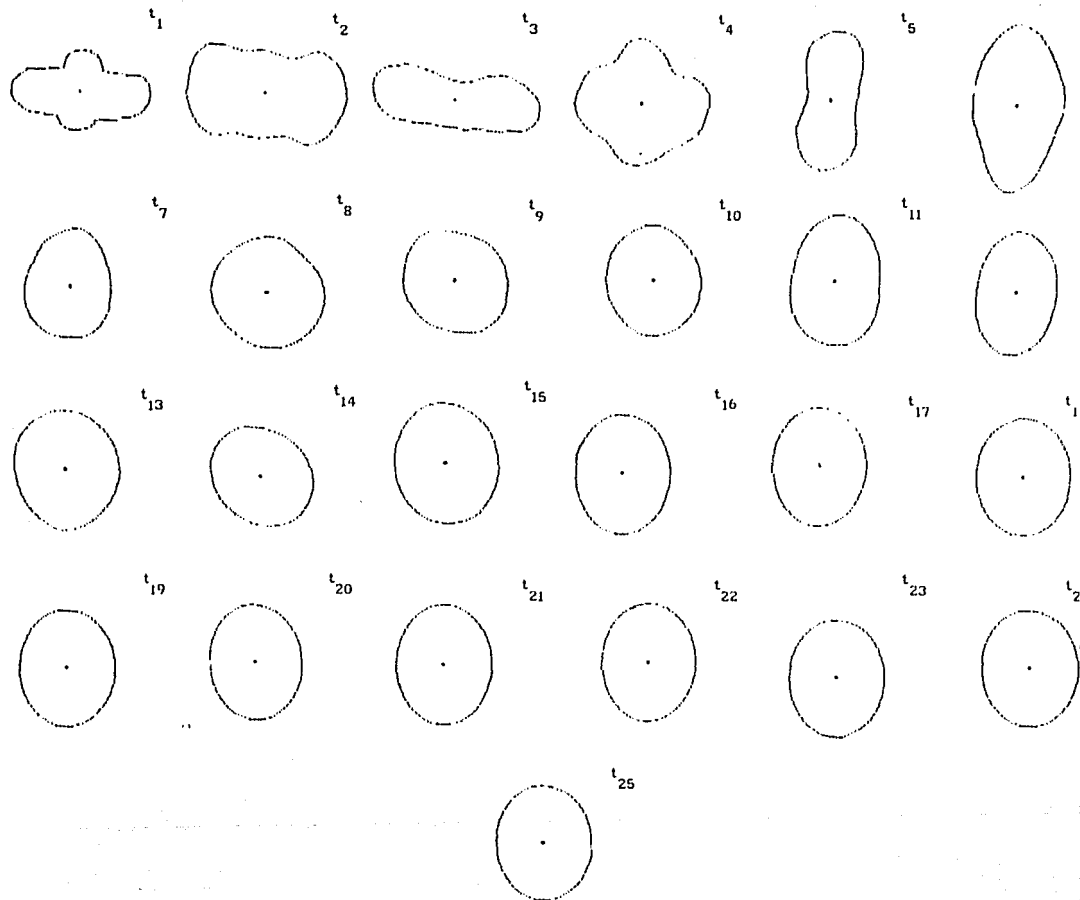
intervinieron en el ajuste previo del perfil de la gota. Fueron esas frecuencias obtenidas las que se compararon con las frecuencias de Rayleigh (ecuación III.47 del capítulo III). Los resultados se muestran en un capítulo más adelante. Otra comparación más que se hizo es la del coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  contra el inverso de la constante temporal de Prosperetti<sup>10</sup> (ver capítulo III).

*En este capítulo se presentan los datos experimentales que se obtuvieron y se describe el análisis correspondiente. Finalmente se comparan los resultados con las predicciones del modelo que se usó para describir la deformación.*

### V.A Obtención de los perfiles.

El análisis de la deformación de las gotas se efectúa a partir de la imagen de su silueta o "perfil". Debido al gran acercamiento de la lente de la cámara a las gotas en la grabación de las oscilaciones, (entre uno y tres centímetros de distancia), se lograron imágenes muy bien definidas. Es a partir de dichas imágenes (formas bidimensionales) que se obtienen los datos experimentales que constituyen el punto de partida del estudio de las oscilaciones de las gotas.

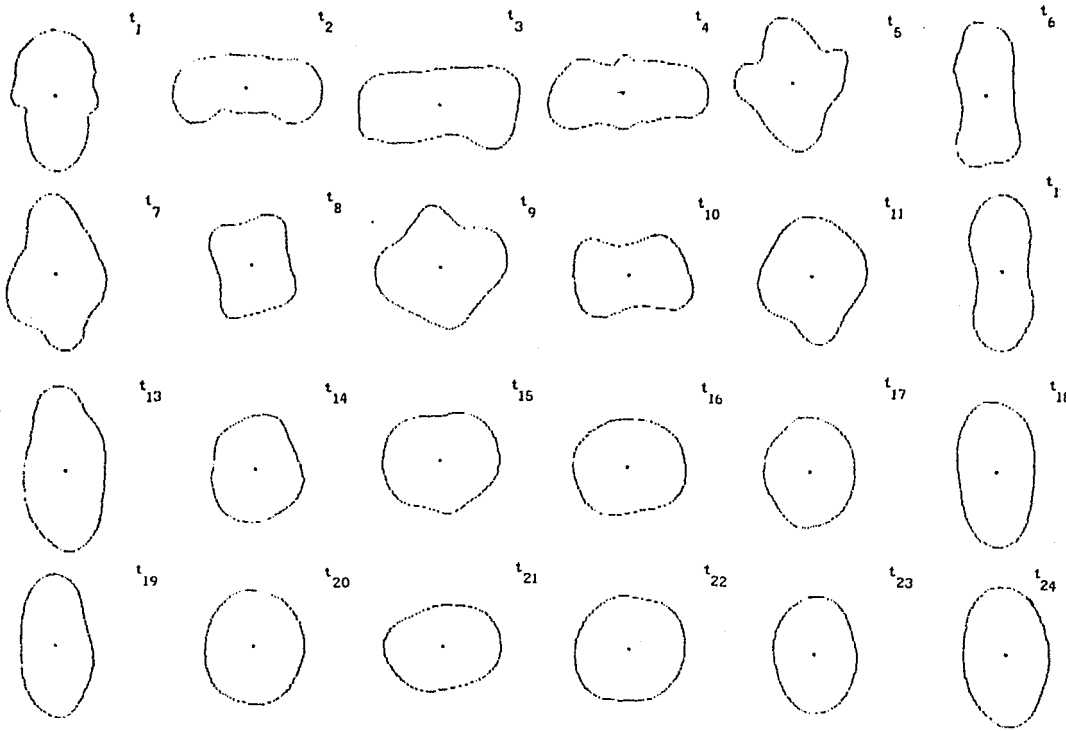
En el presente trabajo se estudiaron dos conjuntos de perfiles que corresponden a las oscilaciones de dos gotas, figuras V.1 (a-c). Al primer conjunto se le llamó "modo 2" pues de ver las imágenes se nota que después de los primeros 4 cuadros de la cinta la deformación está dominada, básicamente, por  $\lambda=2$ . Al segundo se le llamó "modo 4" pues en esa gota se aprecian frecuencias mayores a  $\lambda=2$ , incluso en  $t_{15}$ .



(figura V.I-a "modo 2")

Estas formas son el resultado de aplicar un programa a las imágenes grabadas una vez que se almacenan en un archivo en disco.

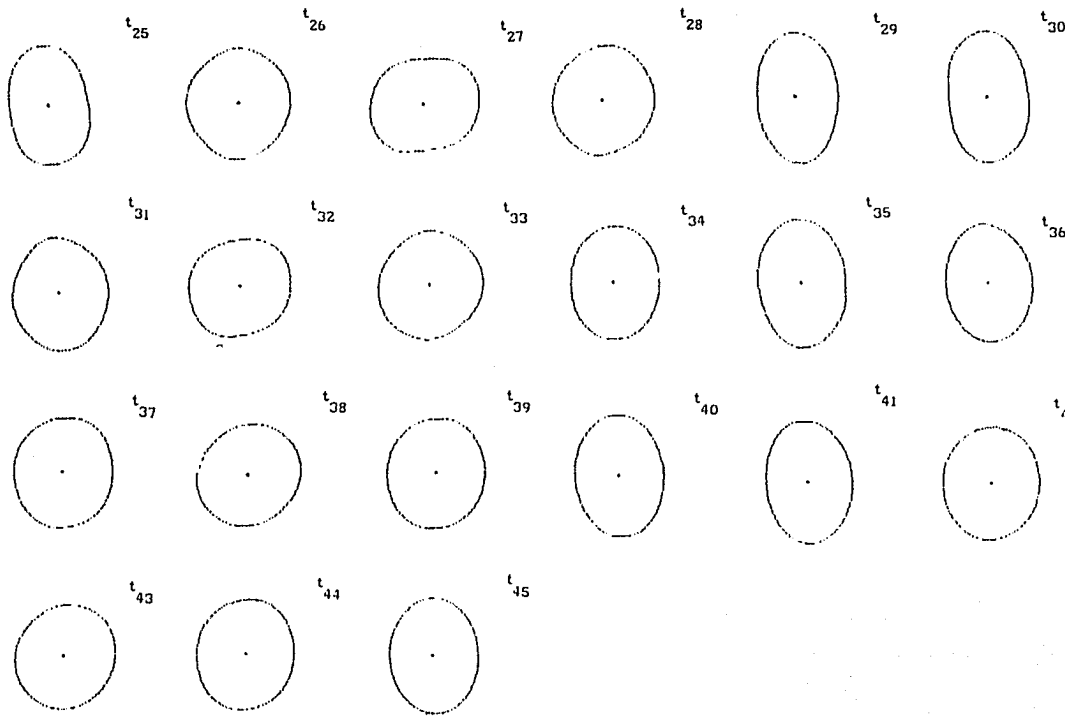




(figura V.1-b "modo 4")

El punto que aparece en el centro de cada figura (a), (b) y

(c) representa el Centro de Masa de la gota.



(figura V.1-c "modo 4")

En las tres partes (a, b, c) de la figura V.1 se cumple la

siguiente relación:  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1/30 \text{ seg.}$

### V.B Resolución.

Para cada imagen se tenían, típicamente, unos 365 elementos en la muestra, es decir, que se tenía bien cubierto el intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ; aunque no necesariamente de manera uniforme. La razón de que no fuera un barrido uniforme está en la manera en que el equipo manejaba la información. Las cámaras de video equipadas con unidad sensible CCD (Charge Coupling Device) NO tienen resolución CONTINUA, pues todas hacen una partición de su campo visual en pequeños cuadros, denominados pixels. En la pantalla del digitalizador había 500X500 de ellos. De tal forma que cuando se hace un recorrido angular de cada imagen a partir del centro de masa (ver figura V.2), hay ángulos para los cuales se intersecta muchas veces un mismo cuadro de la partición, mientras que en otras regiones se intersecta menos a algún cuadro.

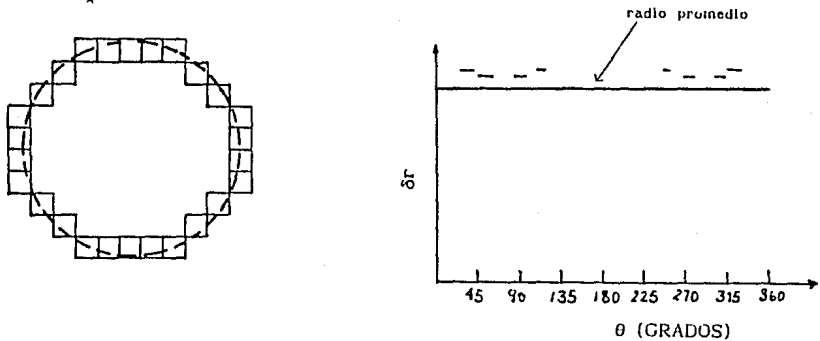


En la región (A)  $\Delta\theta = 9^\circ 10'$  mientras que en la región (B)  $\Delta\theta = 4^\circ 52'$ . En esta figura la dimensión horizontal no está a la misma escala que la dimensión vertical. El cuadro representa el centro de masa.

(figura V.2)

Al hablar de "buena resolución" se quiere dar a entender que el área que ocupa una imagen en el campo visual de algún aparato contiene una gran cantidad de elementos de su partición. En el caso presente, la imagen de una gota era típicamente de 100X250 píxels del digitalizador, es decir, un 10% del campo visual.

El problema de la resolución da lugar a un error en el conocimiento del perfil que es intrínseco al procedimiento experimental que se desarrolló. Para ilustrar esto véase la figura V.3.

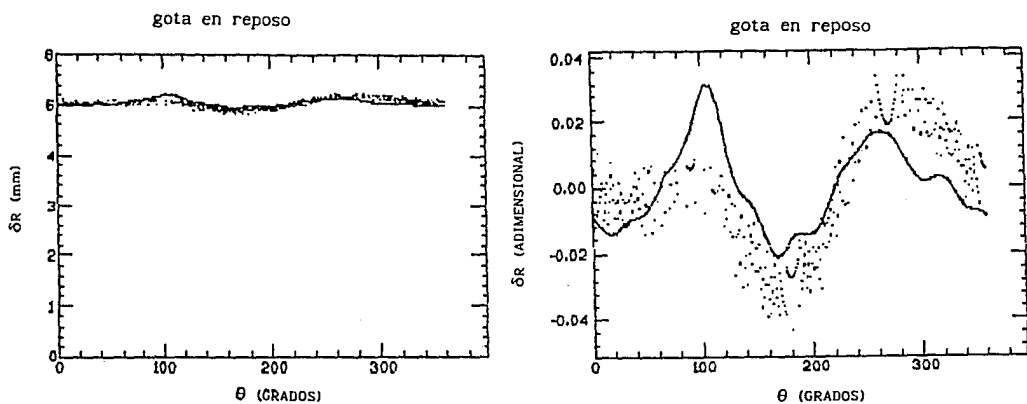


(figura V.3)

Simulación de una gota en reposo, la escala se exageró para ilustrar lo que ocurre con los píxels. En la gráfica de la derecha se muestra la distancia del centro de masa al borde de la gota.

En la figura se muestra con línea punteada lo que en un aparato ideal con "resolución continua" sería el perfil de una gota en reposo, es decir, se apreciaría un círculo perfecto, pero en línea continua se da un ejemplo de lo que en realidad se observa. Se trata de una imagen cuyo contorno es un polígono para el cual el número de sus lados aumenta y su longitud disminuye en función de la resolución. En otras palabras, aunque uno sepa de

antemano que el contorno de una gota en reposo es una circunferencia perfecta, sólo es posible conocer hasta cierto límite el radio de dicha circunferencia. En la segunda parte de la figura V.3 se muestran las desviaciones del radio promedio ( $\delta r$ ) que se medirían, como función del ángulo, en el caso ideal y en el real. Para dar un ejemplo experimental de esto, se colocó una gota en reposo en el campo visual de la cámara y se grabó. El resultado se muestra en la figura V.4.



(figura V.4)

En la primera parte se muestra la distancia al C.M. en mm.

y en la segunda la diferencia de la distancia del C.M. al

radio promedio normalizada al radio promedio.

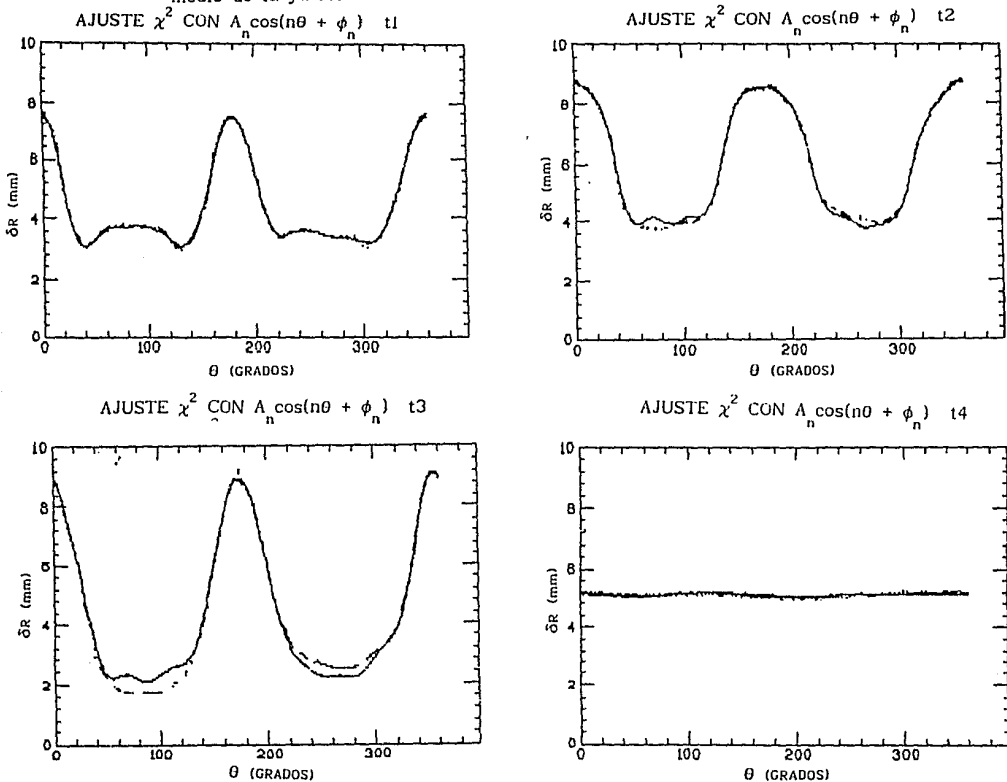
$$\langle r \rangle - r / \langle r \rangle$$

De modo que se tiene una limitante intrínseca de  $\sim 7.7\%$  en el conocimiento del perfil, y eso es ajeno a otras dificultades, como

la capacidad de representar analíticamente una deformación.

V.C Convergencia.

Para cada imagen se obtuvo una muestra de buen tamaño que hizo posible un ajuste estadístico de los datos de la frontera por medio de la ya mencionada "serie de Fourier", ver la figura (V.5).

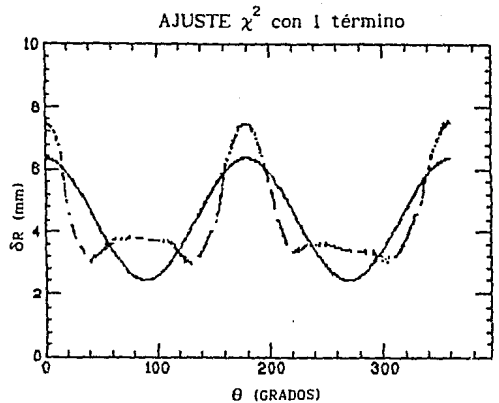
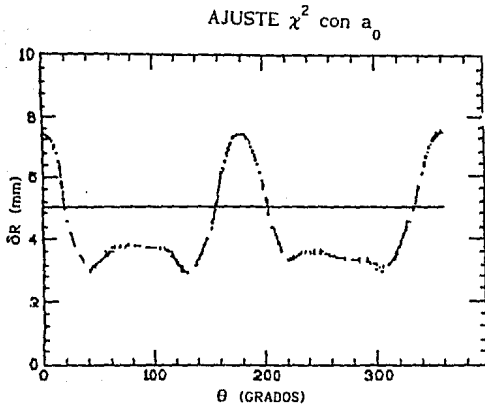


(figura V.5)

Estas gráficas representan los perfiles de una gota oscilando en los primeros tres y último cuadros de su grabación que corresponden a los instantes  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1/30$  seg,  $t_3 = 2/30$  seg. y  $t_4 = 24/30$  seg.  $\delta r$  es la distancia del Centro de Masa a la orilla en milímetros y  $\theta$  el ángulo en grados.

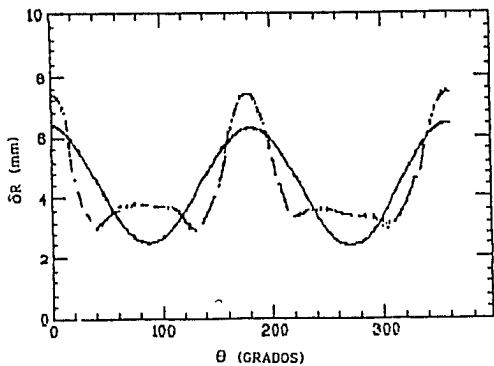
El análisis requiere establecer un criterio para truncar la serie utilizada para ajustar los datos (ec. IV.1). Esto se logró a través de requerir que, al agregar un nuevo término, la  $\chi^2$  no disminuyera más que un 0.1 %.

Esta convergencia se puede apreciar en la figura (V.6), donde se muestra que para la gota denominada "modo 2" era suficiente con los cinco primeros términos de la serie. Para la gota más perturbada ("modo 4") se requirieron 10 términos, como lo muestra la secuencia de la figura V.6d.

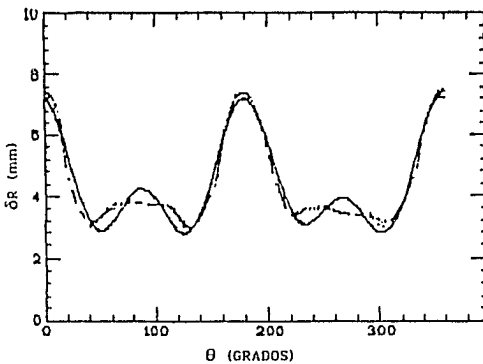


(figura V.6 - a "t<sub>1</sub>")

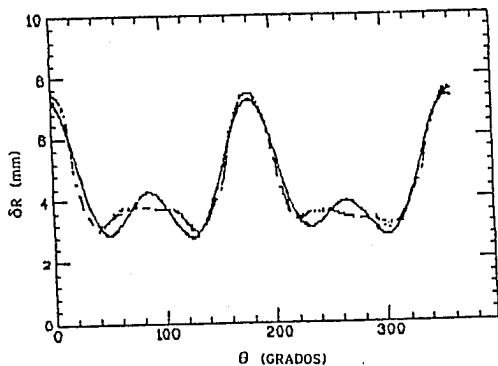
AJUSTE  $\chi^2$  con 2 términos



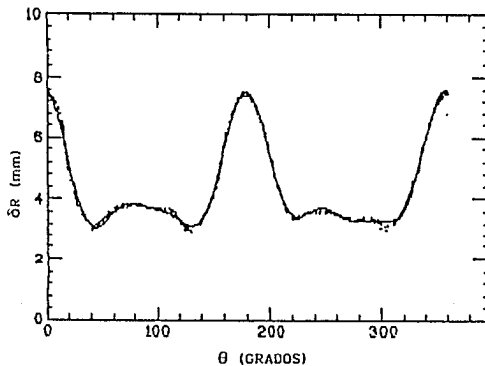
AJUSTE  $\chi^2$  con 3 términos



AJUSTE  $\chi^2$  con 4 términos



AJUSTE  $\chi^2$  con 5 términos

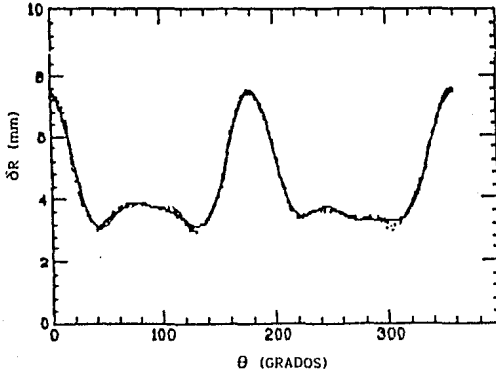


(figura V.6 - b "t<sub>1</sub>")

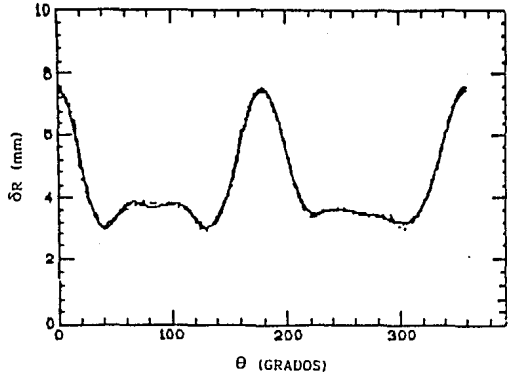
En la serie de gráficas que se muestran en esta figura, "t<sub>1</sub>"  
se refiere al análisis de Fourier para el instante t<sub>1</sub> de la  
gota "modo 2".



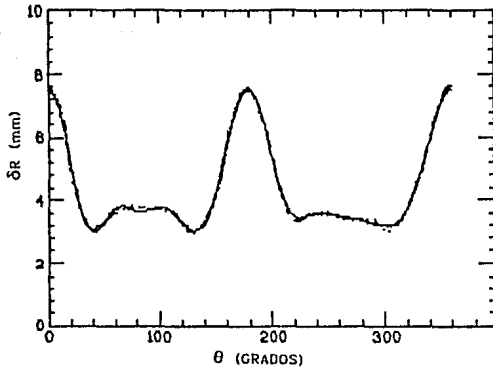
AJUSTE  $\chi^2$  con 6 términos



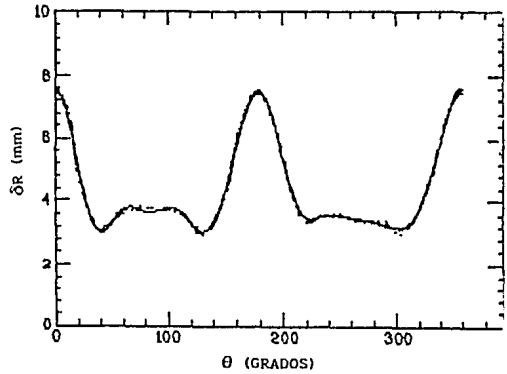
AJUSTE  $\chi^2$  con 7 términos



AJUSTE  $\chi^2$  con 8 términos



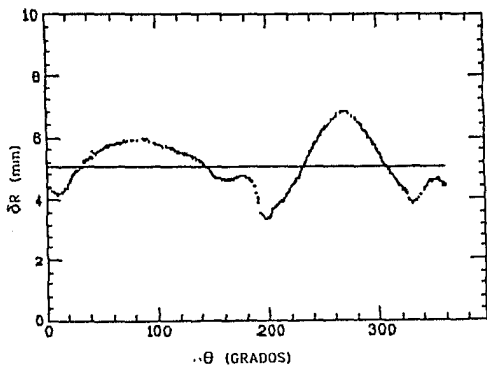
AJUSTE  $\chi^2$  con 9 términos



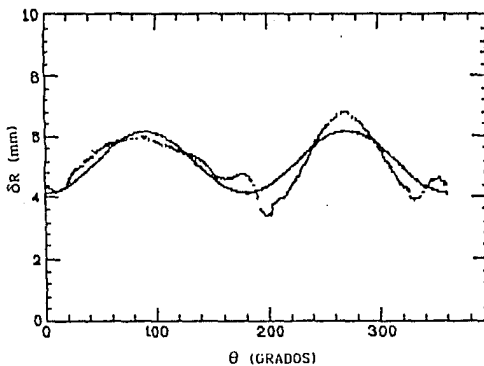
(figura V.6 - c "t<sub>1</sub>")

En la serie de gráficas que se muestran en esta figura, "t<sub>1</sub>"  
se refiere al análisis de Fourier para el instante t<sub>1</sub> de la  
gota "modo 2".

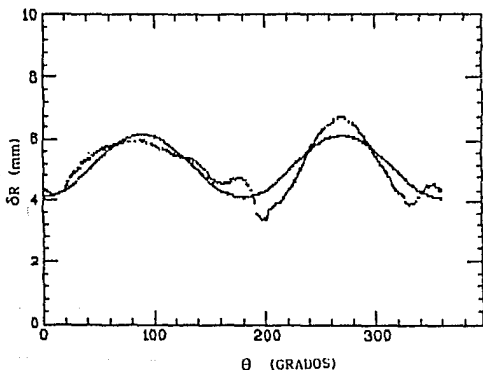
AJUSTE  $\chi^2$  con  $a_0$



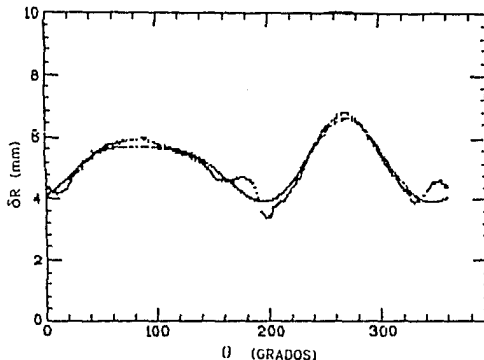
AJUSTE  $\chi^2$  con 1 término



AJUSTE  $\chi^2$  con 2 términos



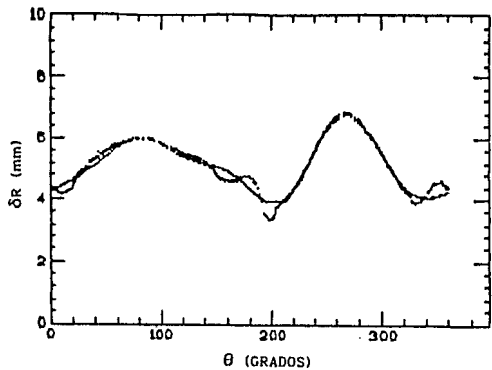
AJUSTE  $\chi^2$  con 3 términos



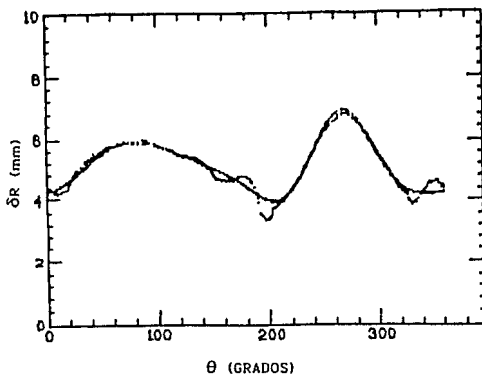
(figura V.6 - d "t<sub>1</sub>")

En la serie de gráficas que se muestran en esta figura, "t<sub>1</sub>"  
se refiere al análisis de Fourier para el instante t<sub>1</sub> de la  
gota "modo 4".

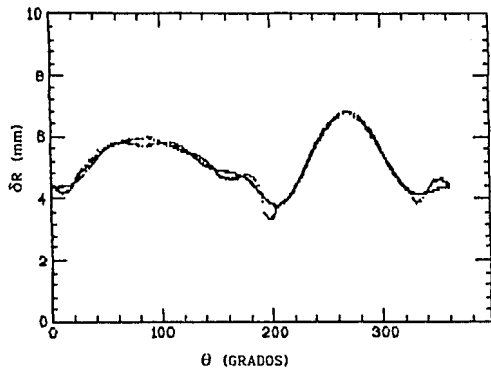
AJUSTE  $\chi^2$  con 4 términos



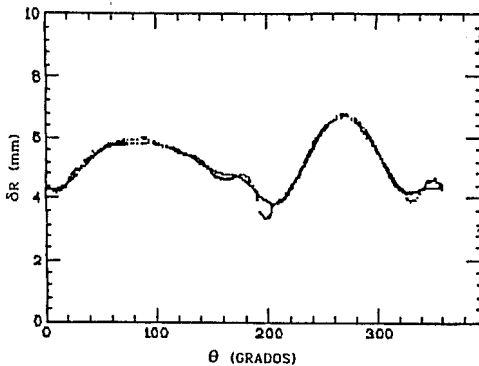
AJUSTE  $\chi^2$  con 5 términos



AJUSTE  $\chi^2$  con 6 términos



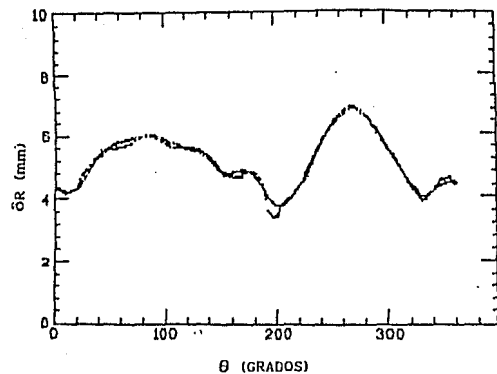
AJUSTE  $\chi^2$  con 7 términos



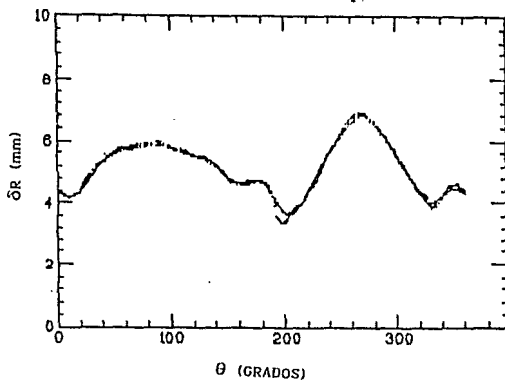
(figura V.6 - e " $t_1$ ")

En la serie de gráficas que se muestran en esta figura, " $t_1$ "  
se refiere al análisis de Fourier para el instante  $t_1$  de la  
gota "modo 4".

AJUSTE  $\chi^2$  con 8 términos



AJUSTE  $\chi^2$  con 9 términos



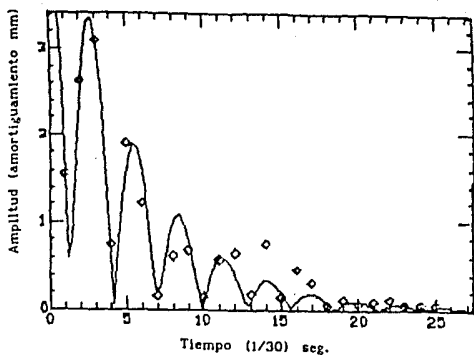
(figura V.6 - f "t<sub>1</sub>")

En la serie de gráficas que se muestran en esta figura, "t<sub>1</sub>"  
se refiere al análisis de Fourier para el instante t<sub>1</sub> de la  
gota "modo 4".

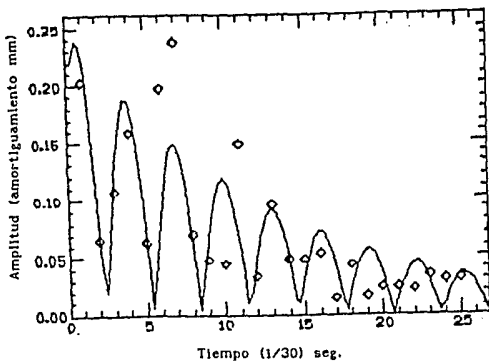
#### V.D Resultados

De los análisis de Fourier de cada conjunto se dedujo la frecuencia angular de cada modo  $\lambda$  que contribuyó a la serie y la amplitud en función del tiempo, así como una fase para el mismo modo, respecto a una dirección arbitraria. Los resultados obtenidos para cada conjunto se muestran en la figura V.7.

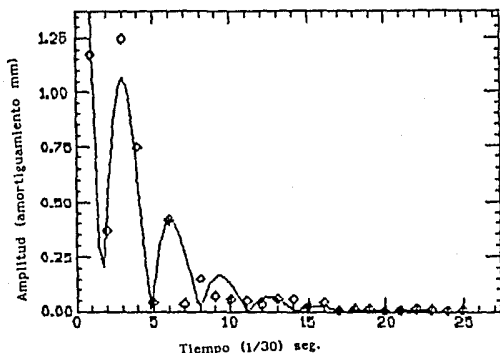
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 2$



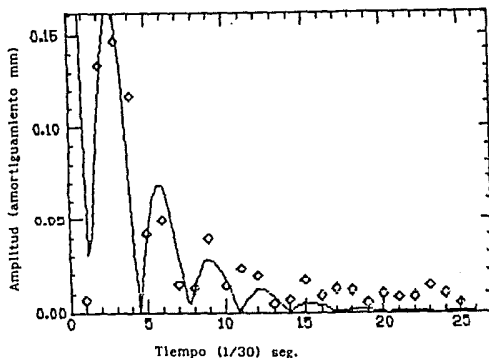
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 3$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 4$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 5$

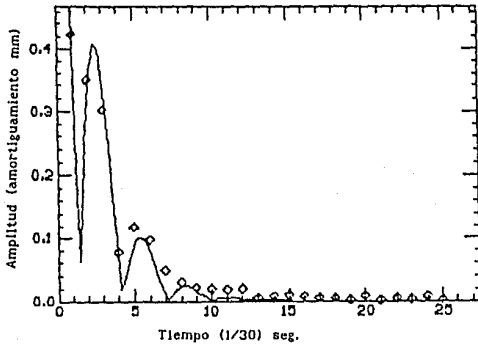


(figura V.7-a)

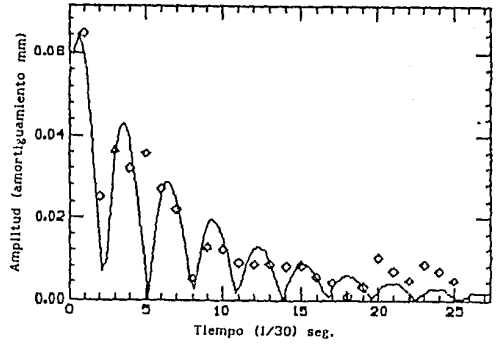
Amplitudes de "modo 2"

Los rombos representan los puntos experimentales y la línea continua es el ajuste con la función de la ecuación (IV.2). El eje vertical es la amplitud  $a_\lambda$  y el horizontal es el tiempo en treintavos de segundo. (cuadros de la cinta)

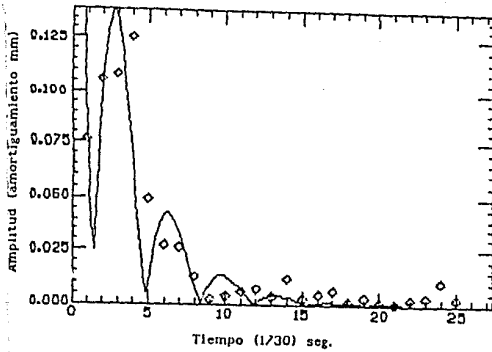
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 6$



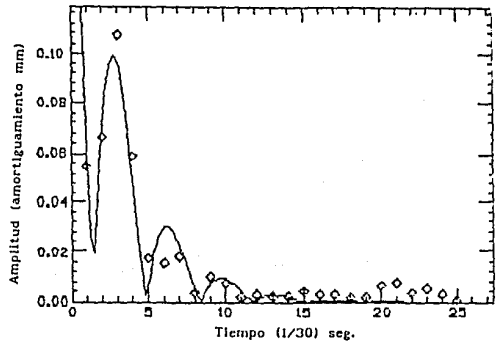
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 7$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 8$



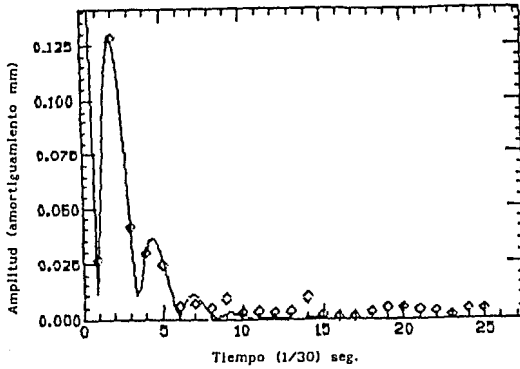
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 9$



(figura V.7-b)

Amplitudes de "modo 2"

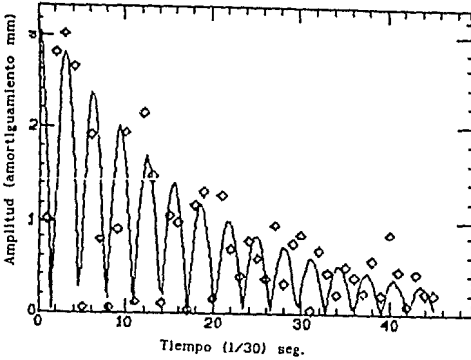
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 10$



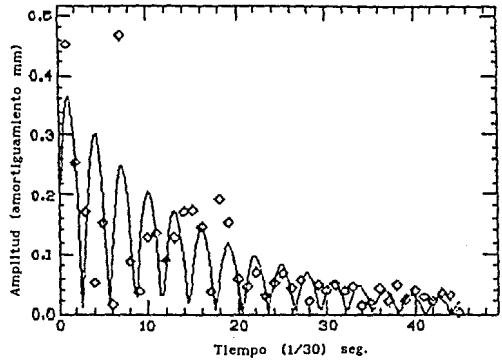
(figura V.7-c)

Amplitudes de "modo 2"

Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 2$



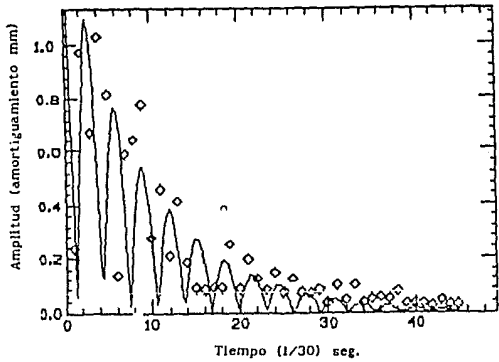
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 3$



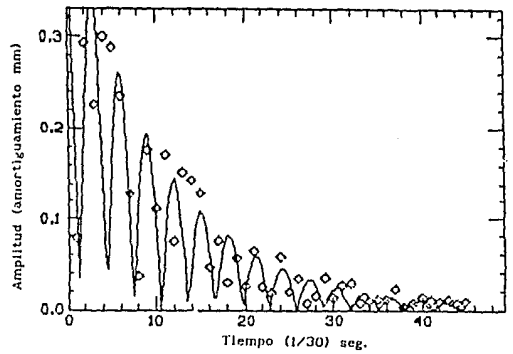
(figura V.7-d)

Amplitudes de "modo 4"

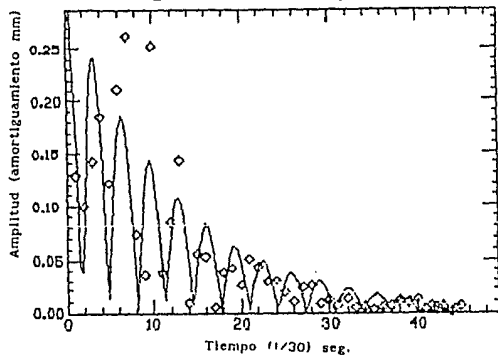
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 4$



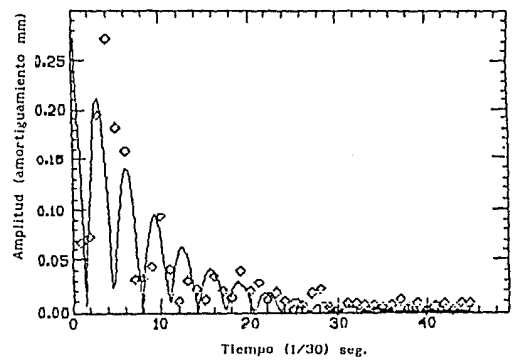
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 5$



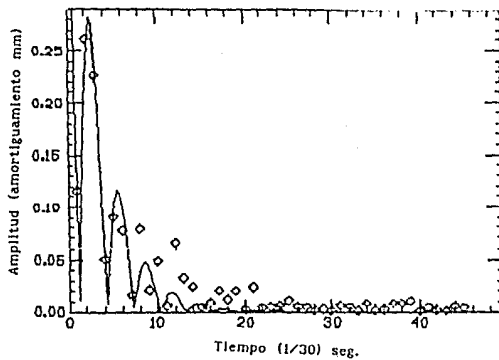
Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 6$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 7$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 8$

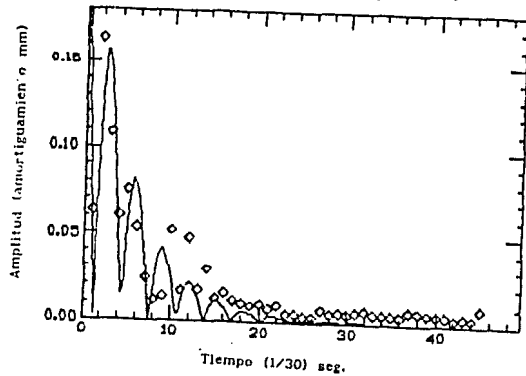


(figura V.7-e)

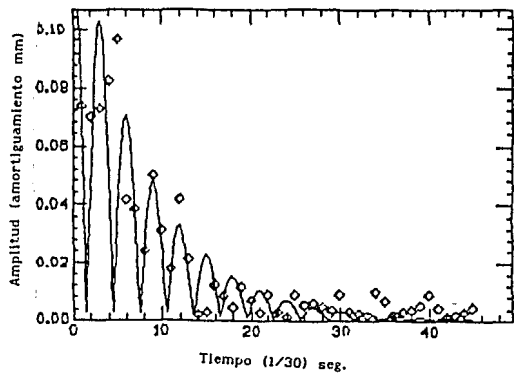
Ampplitudes de "modo 4"



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 9$



Amortiguamiento Vs. Tiempo  $\lambda = 10$



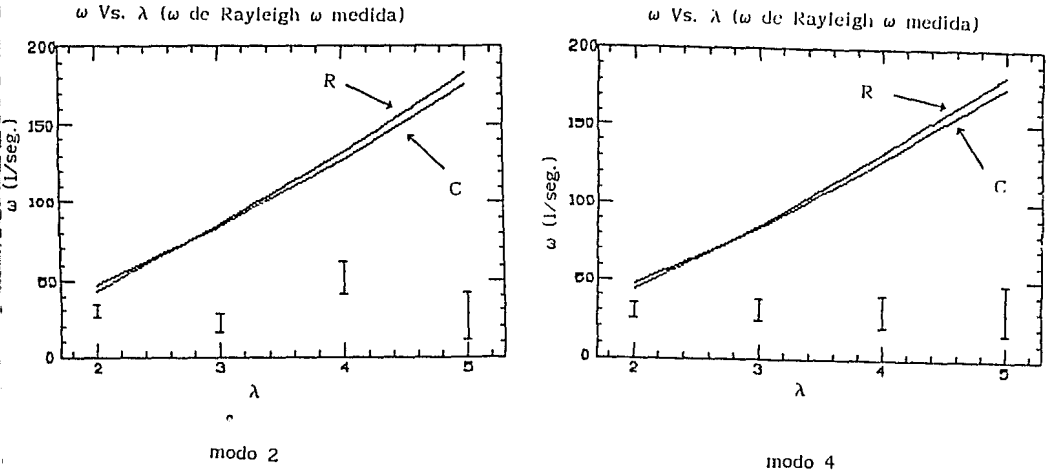
(figura V.7-f)  
Amplitudes de "modo 4"

En esta parte del estudio se hicieron aparentes las limitaciones que representa utilizar una cámara cuya velocidad de cuadros de cinta es de tan sólo 1/30 seg. De la figura anterior (V.7) se aprecia que cada ciclo de oscilación tiene una duración típica de 3/30 de segundo lo que implica que, en promedio, sólo se obtuvieran 3 imágenes POR CICLO.

#### V.E Las frecuencias de oscilación.

En la figura V.8 se muestran las frecuencias obtenidas como función del modo propio ( $\lambda$ ). También se incluyen en esta figura las predicciones del modelo de Rayleigh para gotas esféricas (R) y la modificación desarrollada en esta tesis para gotas elípticas (C). Como puede apreciarse, existe una discrepancia considerable

entre los resultados experimentales y las predicciones. Este resultado, aunque inesperado para nosotros, realmente NO es sorprendente, pues las predicciones teóricas sólo son válidas en ausencia de viscosidad y para deformaciones muy pequeñas. De observar la serie de figuras V.1 (págs. 36-38), se aprecia que esta última condición sólo se cumple al final de la oscilación. Sin embargo, debe enfatizarse, que no existen en la literatura predicciones teóricas mas cercanas a las observaciones de esta tesis.

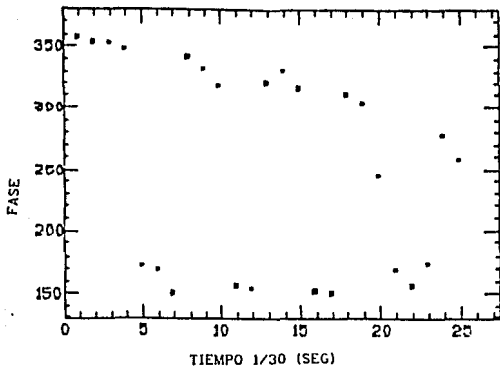


(figura V.8) frecuencia angular Vs. modo propio  $\lambda$

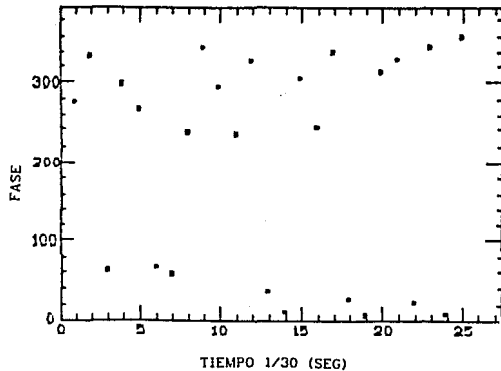
#### V.F Las fases de oscilación.

Aunque la velocidad de la cámara (de cuadros por segundo) resultó pequeña, con respecto a la rapidéz de la oscilación, fué posible deducir de esos datos ciertos resultados interesantes en los parámetros que se estudiaron, figura V.9.

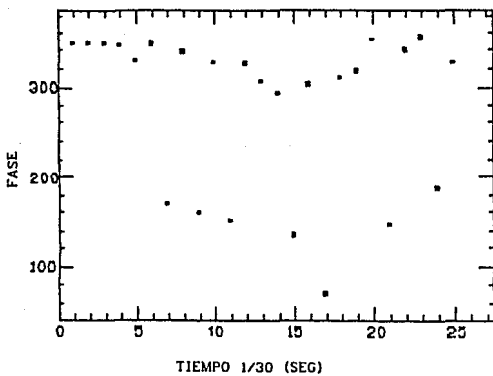
modo 2  $\lambda = 2$



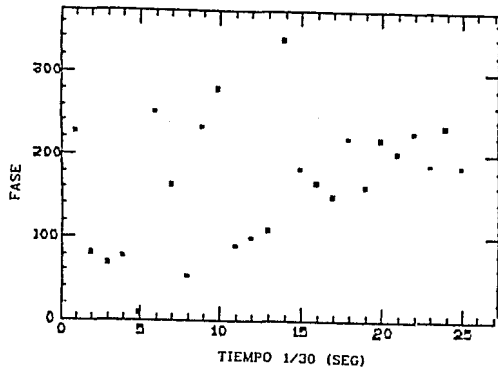
modo 2  $\lambda = 3$



modo 2  $\lambda = 4$



modo 2  $\lambda = 5$

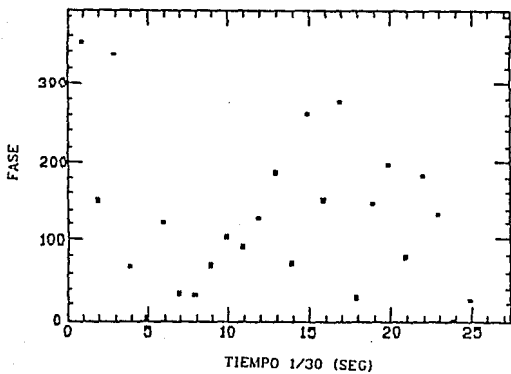


(figura V.9-a)

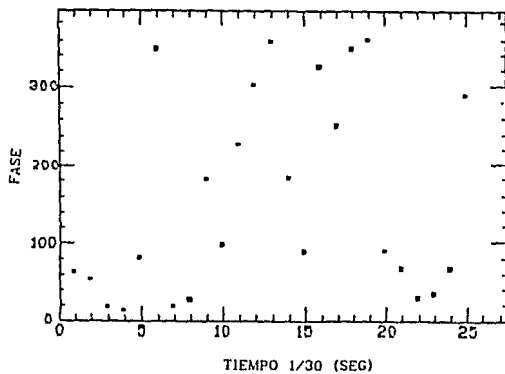
"modo 2"

Fases en función del tiempo para cada  $\lambda$  y para cada gota.

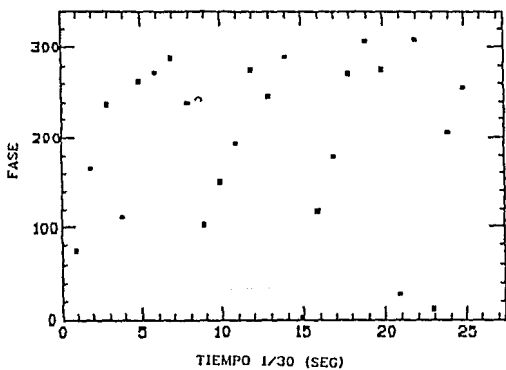
modo 2  $\lambda = 6$



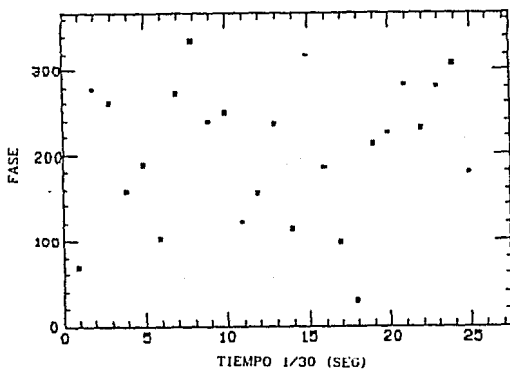
modo 2  $\lambda = 7$



modo 2  $\lambda = 8$



modo 2  $\lambda = 9$

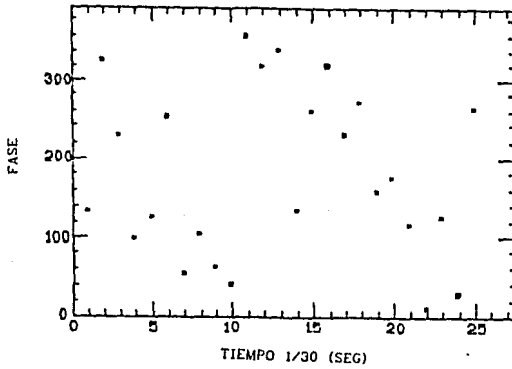


(figura V.9-b)

"modo 2"

Fases en función del tiempo para cada  $\lambda$  y para cada gota.

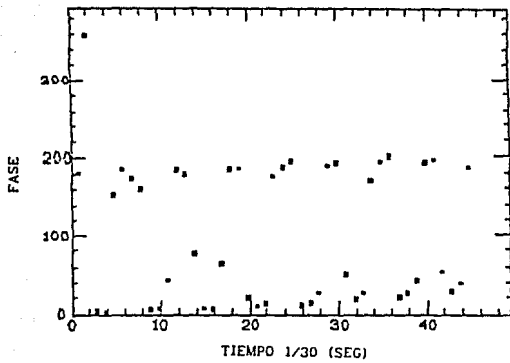
modo 2  $\lambda = 10$



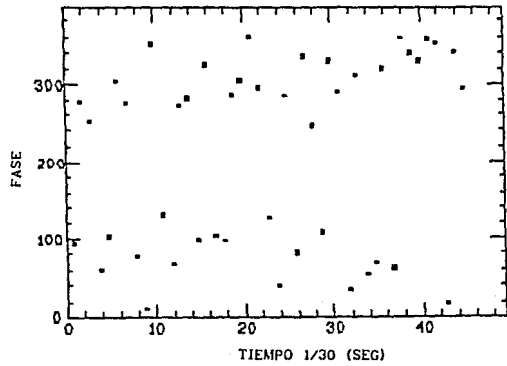
(figura V.9-c)

"modo 2"

modo 4  $\lambda = 2$



modo 4  $\lambda = 3$

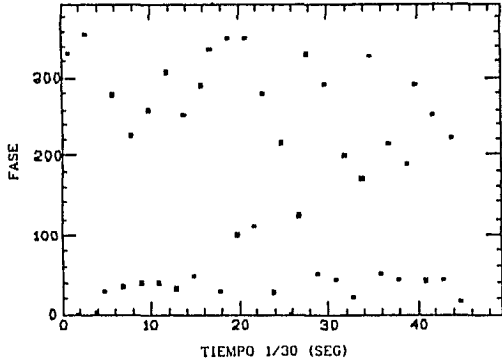


(figura V.9-d)

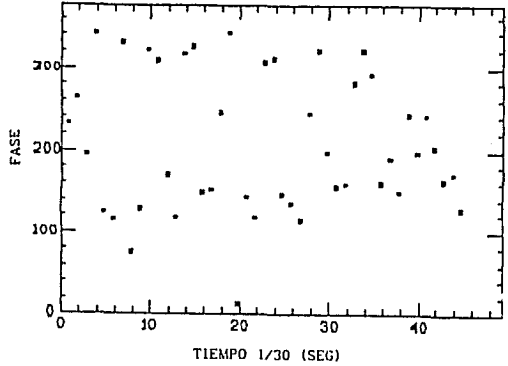
"modo 4"

2

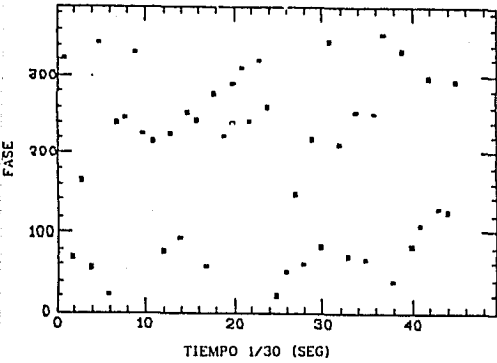
modo 4  $\lambda = 4$



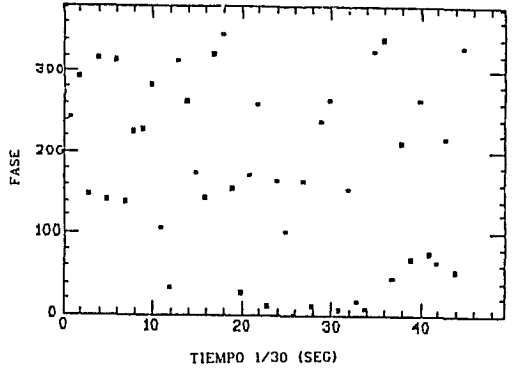
modo 4  $\lambda = 5$



modo 4  $\lambda = 6$



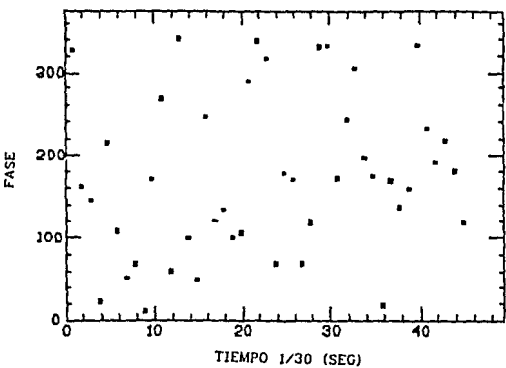
modo 4  $\lambda = 7$



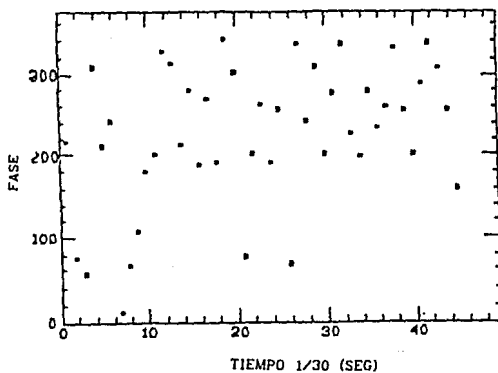
(figura V.9-e)

"modo 4"

modo 4  $\lambda = 8$



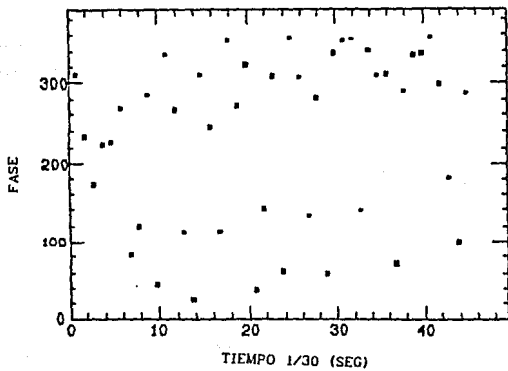
modo 4  $\lambda = 9$



(figura V.9-f)

"modo 4"

modo 4  $\lambda = 10$



(figura V.9-g)

"modo 4"

Si se observan las diferentes gráficas de la figura V.9 se verá que para algunos valores de  $\lambda$  la fase toma valores extremos que se repiten sistemáticamente, como en las gráficas etiquetadas "figura V.9-a modo 2" para  $\lambda = 2,3,4$ . O bien, las gráficas etiquetadas "figura V.9-d modo 4" para  $\lambda = 2,3,6,10$ . Mientras que en otras de las gráficas se muestran distribuciones que barren un rango completo de ángulos, entre  $0^{\circ}$  y  $180^{\circ}$  para unas, y para otras entre  $180^{\circ}$  y  $360^{\circ}$ . Este comportamiento indica que existe rotación para algunos valores de  $\lambda$  mientras que para otros no la hay.

#### V.C Coeficientes de atenuación

El último resultado experimental de este trabajo se refiere a la manera en que se amortigua la oscilación en comparación a la constante temporal de Prosperetti.

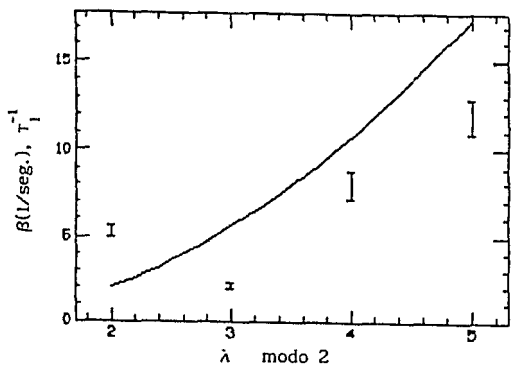
Al comparar las constantes de amortiguamiento que se derivaron de los ajustes ( $\beta$ ) con aquellas que predice Prosperetti (ecuación III.50)  $T_1^{-1} = \{(1-1)(2i+1)\nu\}/a_0^2$ , esta comparación se lleva a cabo en la figura V.10, se aprecia que, salvo por un punto en la gota "modo 4", el comportamiento observado es razonablemente reproducido por la teoría.

La desviación mencionada podría deberse a la oscilación fuera del plano observado, que para esta gota es bastante importante. Esto se aprecia de comparar las áreas aparentes de los perfiles de esta gota en la figura V.1b (pág. 37).

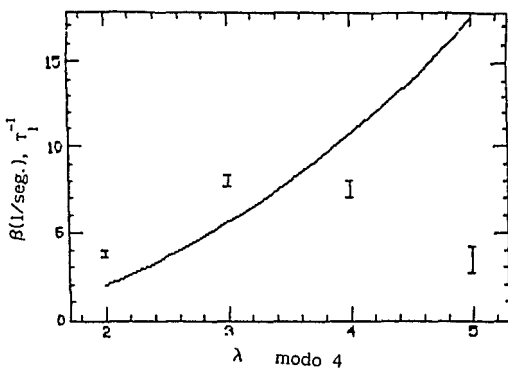
Además, es necesario recordar que la predicción de Prosperetti es válida sólo para pequeños tiempos, y que las gotas estudiadas son "grandes" por lo que les corresponden menores frecuencias de Rayleigh, es decir, mayores tiempos característicos.



$\beta$  Vs.  $\lambda$ ,  $T_1^{-1}$  Vs.  $\lambda$



$\beta$  Vs.  $\lambda$ ,  $T_1^{-1}$  Vs.  $\lambda$



(figura V.10) Coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  Vs.  $\lambda$

Comparación con la predicción de Prosperetti.

El propósito de esta tesis fue estudiar las oscilaciones de gotas de mercurio sobre una superficie de vidrio. Las gotas deformes se obtuvieron a partir de la colisión de dos gotas de menor tamaño. Las imágenes de las oscilaciones, proyectadas en el plano horizontal, como función del tiempo, fueron gravadas con una cámara de video. La digitalización de estas imágenes permitió obtener los perfiles de las gotas. Los parámetros obtenidos de la descomposición en modos propios de estos perfiles fueron comparados con predicciones teóricas para la dependencia de la frecuencia  $\omega_\lambda$  de oscilación y del coeficiente de amortiguamiento temporal  $\beta_\lambda(t)$  con el modo propio  $\lambda$ . En particular, la predicción de Rayleigh para las frecuencias  $\omega_\lambda$  de gotas esféricas fue modificada para tomar en cuenta, de manera aproximada, la forma no esférica de las gotas estudiadas. Al comparar los resultados experimentales con las predicciones se encontró que:

a) Las frecuencias propias  $\omega_\lambda$  observadas no muestran una dependencia apreciable con  $\lambda$ , que no concuerda con las predicciones mencionadas, puede deberse a la no aplicabilidad de las aproximaciones hechas en el desarrollo de esas teorías al caso de estudio.

b) La dependencia con  $\lambda$  de los coeficientes de atenuación observados, es reproducida razonablemente por la teoría. Las desviaciones pueden deberse tanto al haber ignorado los componentes oscilatorias en otros planos como a las aproximaciones de la teoría.

c) Un resultado interesante de este estudio fue la observación de corrimientos de las fases, como función del tiempo, de algunos modos propios respecto a otros.

Hay varias cosas que se pueden hacer para mejorar el estudio

de las gotas de mercurio en oscilación. La primera es conocer su comportamiento como función de la masa que en el trabajo experimental que se desarrolló no se estudió. La segunda y quizá, experimentalmente, la más importante es la de trabajar con un equipo de filmación mucho más veloz que el que se usó, eso daría una mejor estadística de los datos en función del tiempo. Estas mejoras son pensando en usar el mismo arreglo de la figura IV.1. Desde luego que el trabajo experimental se puede hacer tan sofisticado como se quiera, al menos en principio. Las sofisticaciones obvias son: a) hacer que las gotas oscilen en tres dimensiones, b) procurar que su movimiento sea influenciado lo menos posible por la atracción gravitacional, y c) hacer un estudio del sistema en el vacío.

## APENDICE (A-1): Velocidad de una onda en un medio elástico.<sup>5</sup>

Con las letras  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  se representarán desplazamientos en las direcciones  $x, y, z$  respectivamente y además se supondrá que son funciones de la posición  $\vec{r}$  y del tiempo  $t$ . Para iniciar la demostración se hará la siguiente definición, se define la deformación de volumen o dilatación  $\theta$  como

$$\theta = \frac{\Delta v}{v}, \quad (A1.1)$$

donde  $v$  es el volumen inicial y  $\Delta v$  es el cambio en el volumen.

Un conocimiento experimental es que tanto para líquidos como para sólidos  $\theta$  tiene valores pequeños en magnitud, excepto bajo presiones extremadamente altas. Aún en el caso de gases,  $\theta$  es pequeña para ondas sonoras de intensidad normal, no así en el caso de ondas de choque.

Los esfuerzos de tensión provocan cambios en el volumen del medio, de modo que debe existir alguna relación entre la dilatación, tal como se ha definido, y las extensiones  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$ . Aquí debe mencionarse que una extensión es un caso particular de la deformación, es una deformación en una dimensión y se define como el incremento fraccional en la longitud  $l$  de la dimensión  $x$ , dada por

$$\epsilon_l \equiv \frac{\Delta l}{l}, \quad (A1.2)$$

de hecho en el caso del eje  $x$  se tiene

$$\epsilon_x = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (A1.3)$$

normalmente  $\epsilon_l$  es muy pequeña, mucho menos que la unidad. Tal como los esfuerzos en una dimensión se generalizan al tensor de esfuerzos  $T_{ij}$  las extensiones unidireccionales se generalizan al tensor de extensiones o de deformaciones

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}. \quad (A1.4)$$

Para encontrar la relación que se desea considérese lo que le

ocurre a un elemento cúbico de volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  en el medio NO perturbado cuando la longitud  $\Delta x$  pasa a  $\Delta x + (\partial \xi / \partial x) \Delta x$  con los correspondientes cambios en  $\Delta y$  y  $\Delta z$ . Se tiene que la dilatación es

$$\theta = \frac{\left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \left( \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y \right) \left( \Delta z + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z \right) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}, \quad (A1.5)$$

donde las tres extensiones se han considerado como pequeñas cantidades. En términos del vector de desplazamiento

$$\vec{\varphi} = \xi \hat{i} + \eta \hat{j} + \zeta \hat{k}, \quad (A1.6)$$

la dilatación se puede escribir como

$$\theta = \nabla \cdot \vec{\varphi}. \quad (A1.7)$$

Es decir, la dilatación es la divergencia del vector desplazamiento. Cuando se somete un fluido o un medio elástico homogéneo a un incremento de la presión hidrostática  $p$  sufre una disminución de volumen dada por la deformación  $-\theta$ . En este caso la ley de Hook se puede escribir como

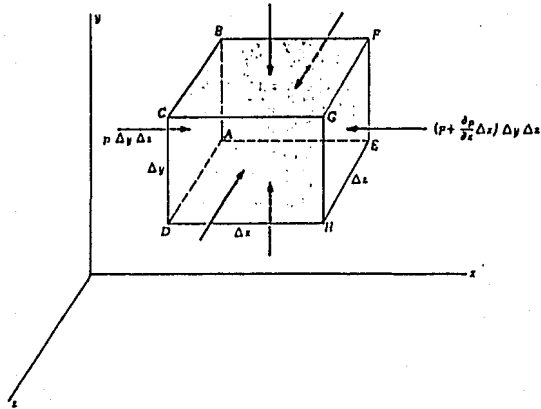
$$p = -B\theta, \quad (A1.8)$$

donde B es el módulo de volumen (bulk modulus). En el caso del mercurio el valor de B es de  $29 \text{ N/m}^2$ .

La presión  $p$  es una función de la posición y del tiempo y es un escalar  $p = p(\vec{r}, t)$  mientras que, como ya se dijo,  $\vec{\varphi}$  es un vector que también depende de la posición y del tiempo. Tomando la expresión para la deformación y sustituyéndola en la ley de Hook se obtiene

$$p = -B\theta = -B\nabla \cdot \vec{\varphi}, \quad (A1.9)$$

en ella se supone, para las ondas por considerar, que  $\theta \ll 1$ . Volviendo a considerar los esfuerzos sobre un elemento de volumen cúbico  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , se calculará la fuerza neta que sobre dicho elemento surge de las variaciones ondulatorias en la presión sobre sus seis caras, ver la figura A1.1.



(figura A1.1)

Fuerzas actuando sobre un elemento de fluido.

La fuerza en la dirección  $x$  sobre la cara ABCD es  $p\Delta y\Delta z$ , mientras que la fuerza en la dirección  $x$  sobre la cara EFGH es  $[p+(\partial p/\partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z$ . Así que la fuerza neta en la dirección  $x$  positiva es

$$\Delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z. \quad (A1.10)$$

De manera similar las fuerzas netas en las direcciones positivas  $y$ ,  $z$  son

$$\Delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (A1.11)$$

$$\Delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z. \quad (A1.12)$$

El vector fuerza neta sobre el elemento cúbico es

$$\Delta \vec{F} = -\nabla p\Delta x\Delta y\Delta z. \quad (A1.13)$$

Como el vector aceleración del fluido en el elemento es

$\partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2$  y su masa es  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,

aplicando la segunda ley de Newton

$$\vec{\Delta F} = - \nabla p \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}, \quad (\text{A1.14})$$

$$\text{o bien, } -\nabla p = \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (\text{A1.15})$$

que por la ley de Hook resulta

$$-\nabla \cdot \nabla p = \rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{\psi})}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (\text{A1.16})$$

llegando así a la ecuación de onda

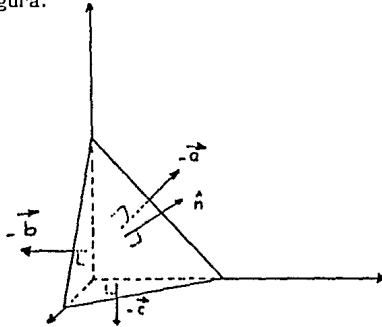
$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (\text{A1.17})$$

$$\text{en la que } c_f = \left( \frac{B}{\rho} \right)^{1/2} \quad (\text{A1.18})$$

es la velocidad de onda en el fluido. Para el mercurio  $B = 29 \text{ N/m}^2$   
y  $\rho = 13600 \text{ Kg/m}^3$  de modo que  $c_f = .0462 \text{ m/s}$

## APENDICE (A-2): Simetría del tensor de esfuerzos.<sup>9</sup>

Para determinar la dependencia de  $T(\hat{n})_i$  con la dirección de la normal al elemento de superficie a través del cual actúa, se deben considerar todas las fuerzas que actúan instantáneamente sobre el fluido dentro de un elemento de volumen  $\delta V$  en forma de TETRAEDRO como se ve en la figura.



(figura A2.1)

Tetraedro de tres caras ortogonales

Las tres caras ortogonales tienen áreas  $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$ , y normales unitarias (hacia afuera)  $-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c}$ , y la cuarta cara inclinada tiene área  $\delta A$  y normal unitaria  $\hat{n}$ . Las fuerzas de superficie actuarán sobre el fluido dentro del tetraedro a través de cada una de las cuatro caras, y su suma es.

$$\vec{T}(\hat{n})\delta A + \vec{T}(-\vec{a})\delta A_1 + \vec{T}(-\vec{b})\delta A_2 + \vec{T}(-\vec{c})\delta A_3 \quad (A2.1)$$

En vista de la ortogonalidad de tres de las caras, hay tres relaciones como:

$$\delta A_1 = \vec{a} \cdot \hat{n} \delta A, \quad (A2.2)$$

y la componente  $i$ -ésima de la suma de fuerzas de superficie se puede escribir como:

$$[T(\hat{n})_i - (a_j T(\vec{a})_j + b_j T(\vec{b})_j + c_j T(\vec{c})_j)] n_i \delta A. \quad (A2.3)$$

Ahora la fuerza de cuerpo del fluido dentro del tetraedro es proporcional al volumen  $\delta V$ , que es de menor orden que  $\delta A$  en la dimensión lineal del tetraedro. La masa del fluido dentro del



tetraedro también es del orden de  $\delta V$ , y también lo es el producto de la masa y la aceleración del fluido en el tetraedro, puesto que tanto la densidad local como la aceleración son finitas. Así que si las dimensiones lineales del tetraedro se hacen tender a cero, sin cambiar su forma, los primeros dos términos de la ecuación:

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{resultante de las fuerzas de cuerpo} + \text{resultante de las fuerzas de superficie.} \quad (\text{A2.4})$$

tiende a cero como  $\delta V$ , mientras que el tercer término tiende a cero, aparentemente, sólo como  $\delta A$ . En esas circunstancias la ecuación se puede satisfacer sólo si el coeficiente de  $\delta A$  en (A2.3) se anula idénticamente, dando

$$T(\hat{n})_i = \{a_j T(\vec{a})_i + b_j T(\vec{b})_i + c_j T(\vec{c})_i\} n_j. \quad (\text{A2.5})$$

Así, la componente del esfuerzo en una dirección dada, representada por el índice  $i$ , a través de un elemento de superficie plano con una orientación arbitraria especificada por la normal unitaria  $\hat{n}$  está relacionada a la misma componente de esfuerzo a través de cualesquiera tres elementos de superficie planos ortogonales en la misma posición dentro del fluido del mismo modo que si fuera un vector con componentes ortogonales  $T(\vec{a})_i, T(\vec{b})_i, T(\vec{c})_i$ . Los vectores  $\hat{n}$  y  $\vec{T}$  no dependen de ninguna manera de la elección de los ejes de referencia, y la expresión dentro de llaves en (A2.5) debe representar la componente  $(i,j)$ -ésima de una cantidad que es similarmente independiente de los ejes. En otras palabras la expresión dentro de llaves es una componente de un tensor de segundo rango,  $T_{ij}$  y

$$T(\hat{n})_i = T_{ij} n_j \quad (\text{A2.6})$$

Ya se explicó en el capítulo III que  $T_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) es la componente  $i$  de la fuerza por unidad de área ejercida a través de un elemento de superficie plano normal a la dirección  $j$ , en la posición  $\vec{r}$  dentro del fluido y al tiempo  $t$ , y que el tensor del cual es la componente general se llama el *tensor de esfuerzos*.

Se demostrará que las nueve componentes del tensor de esfuerzos no son todas independientes. Para ello se deben considerar los momentos de las fuerzas (o bien torques) que actúan sobre el fluido dentro de un volumen  $V$  de forma arbitraria. La componente  $i$ -ésima del momento total, respecto a un punto  $O$  dentro de este volumen, ejercido por las fuerzas de superficie en la frontera del

volumen es

$$\int \epsilon_{ijk} r_j T_{kl} n_l dA, \quad (A2.7)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de posición del elemento de superficie  $\hat{n} dA$  respecto a O. Esta integral sobre una superficie cerrada se puede transformar por el teorema de la divergencia a una integral de volumen.

$$\int \epsilon_{ijk} r_j T_{kl} n_l dA = \int \epsilon_{ijk} \frac{\partial (r_j T_{kl})}{\partial r_l} dV = \int \epsilon_{ijk} \left( T_{kj} + r_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial r_l} \right) dV \quad (A2.8)$$

(ya que  $\partial r_j / \partial r_l = \delta_{jl}$ )

Si ahora el volumen V se reduce a cero de modo que la configuración hecha de la frontera del volumen y el punto fijo O conserven la misma forma, el primer término de la tercera integral de (A2.7) se hace tan pequeño como V mientras que el segundo término tiende a cero más rápidamente que V. El momento total respecto a O ejercido sobre el elemento de fluido por las fuerzas de cuerpo es claramente del orden de  $V^{4/3}$  cuando V es pequeño y así es también la razón de cambio del momento angular del fluido instantáneamente en V. Así,

$$\int \epsilon_{ijk} T_{kj} dV \quad (A2.9)$$

es aparentemente de orden mayor en V que todos los otros términos de la ecuación de momento, y como consecuencia debe ser idénticamente cero. Esto es posible para todas las elecciones de la posición de O y la forma de V, cuando  $T_{ij}$  es continuo en  $\vec{r}$ , sólo si

$$\epsilon_{ijk} T_{kj} = 0, \quad (A2.10)$$

en todos los puntos del fluido; ya que si  $\epsilon_{ijk} T_{kj}$  no fuera cero en alguna región del fluido, se podría elegir un pequeño volumen V para el que la integral sea distinta de cero, resultando una contradicción.

La relación (A2.10) muestra que el tensor de esfuerzos es SIMETRICO, esto es,  $T_{ij} = T_{ji}$  y que sólo tiene seis componentes independientes.

Las tres componetes diagonales de  $T_{ij}$  son los *esfuerzos normales*, en el sentido que cada uno de ellos da la componente normal de la fuerza de superficie que actúa a través de un

elemento de superficie plano paralelo a alguno de los planos coordenados. Las seis componentes no diagonales de  $T_{ij}$  son los *esfuerzos tangenciales*, llamados también los esfuerzos de deformación, ya que provocan un movimiento o desplazamiento en láminas paralelas de material haciendo que se deslicen unas respecto a otras.

## APENDICE (A-3):

Area de una superficie en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Considérese una superficie en coordenadas curvilíneas dada por las variables  $u, v$  y que su expresión en coordenadas cartesianas se da por tres funciones

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\y &= y(u, v), \\z &= z(u, v); \end{aligned} \quad (A3.1)$$

ÚNIFORMES y con DERIVADAS CONTINUAS de manera que la correspondencia entre  $(x, y, z)$  y  $(u, v)$  sea biunívoca.

El vector de posición de algún punto sobre la superficie será de la forma

$$\vec{r} = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}, \quad (A3.2)$$

mientras que

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k} \quad (A3.3)$$

es un vector TANGENTE a una curva de  $v$  CONSTANTE en P (figura A-3.1). De modo similar

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k} \quad (A3.4)$$

es un vector tangente a una curva de  $u$  constante en P. Por lo tanto en todo punto P el vector  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  es normal a la superficie S en P. Como  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  es la magnitud de ese vector,

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad (A3.5)$$

es un vector unitario normal a S en P.

El ELEMENTO DIFERENCIAL de AREA de una SUPERFICIE es, por definición de producto vectorial (figura A-3.2)

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv, \quad (A3.6)$$

y su magnitud

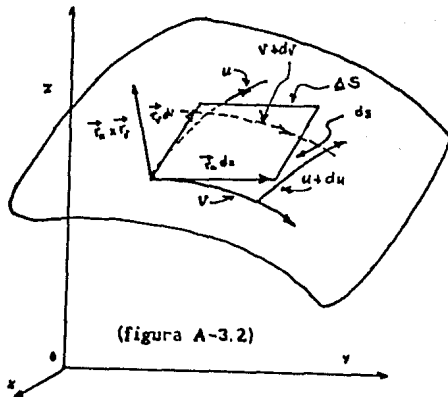
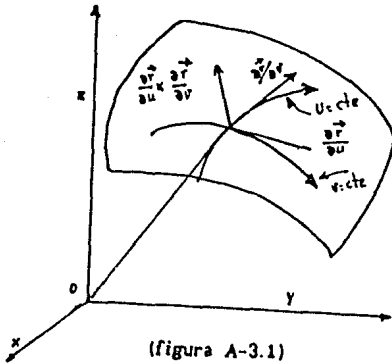
$$dS = |d\vec{S}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \quad (A3.7)$$

es aproximadamente igual al área de la superficie  $\Delta S$  limitada por cuatro curvas situadas sobre  $S$ . Como

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad (\text{A3.5})$$

entonces  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \hat{n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$  y de aquí que  $d\vec{S} = \hat{n} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \hat{n} dS$ . Con ello queda demostrado que el área  $S$  de una superficie en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$S = \iint dS = \iint \hat{n} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A3.8})$$



## APENDICE (A-4):

Frecuencia de oscilación ( $\omega_{km}$ ) de un medio  
en coordenadas cilíndricas.

En el presente apéndice se hace uso de los resultados que se derivaron en el precedente y se aplican en forma análoga a como se hizo en el capítulo III pero esta vez para el caso de coordenadas cilíndricas.

### A-4 I Derivación de $\omega_{km}$

Lo primero es hacer notar que en la siguiente derivación de  $\omega_{km}$  se hace la suposición que el perfil de la gota en reposo es el de una elipse con su semieje mayor paralelo a la horizontal, de tal modo que en EQUILIBRIO la superficie de la gota queda determinada por la función

$$r = r(z, \phi) = a_0 \sqrt{1 - (z^2/b^2)}, \quad (A4.1)$$

con  $0 \leq \phi < 2\pi$  y  $-b \leq z \leq b$  y siendo  $a_0$ , como antes, el radio equivalente "aparente" y  $r(z, \phi)$  como se define en coordenadas cilíndricas, la distancia al eje z.

Lo siguiente es considerar que en coordenadas cilíndricas el vector de posición de un punto cualquiera en el espacio es

$\vec{r} = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z$ . Y como las variables independientes que se han

tomado son z y  $\phi$  los vectores tangentes ( $\vec{r}_u$  y  $\vec{r}_v$ ) a la superficie de la gota son

$$\vec{r}_z = \frac{\partial r}{\partial z} \hat{e}_r + r \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{e}_z + z \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \hat{e}_r + \hat{e}_z, \quad (A4.2)$$

$$\vec{r}_\phi = \frac{\partial r}{\partial \phi} \hat{e}_r + r \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \hat{e}_z + z \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial \phi} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \hat{e}_r + r \hat{e}_\phi, \quad (A4.3)$$

con lo que resulta que  $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |\vec{r}_z \times \vec{r}_\phi|$ , (A4.4)

$$|\vec{r}_z \times \vec{r}_\phi|^2 = r^2 \left[ 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (A4.5)$$

así que el área S de la superficie de la gota es

$$S = \iint |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \iint |\vec{r}_z \times \vec{r}_\phi| \, dzd\phi =$$

$$\iint \left[ 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} r \, dzd\phi. \quad (\text{A4.6})$$

Si ahora se hace la misma aproximación de que  $\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + h/2\sqrt{x}$  con  $x = 1$  y  $h = [1 + (\partial r/\partial \phi)^2/r^2 + (\partial r/\partial z)^2]$  se llega a

$$S = \iint \left( r + \frac{r}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] \right) dzd\phi = \iint \left( r + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 + r \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] \right) dzd\phi$$

(A4.7)

calculando una variación  $\delta S$  (a primer orden) debida a una variación  $\delta r$  se tiene

$$\delta S = \iint \left( \delta r + \frac{1}{2} \delta \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right)^2 + r \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] \right) dzd\phi$$

$$= \iint \left( \delta r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\partial \delta r}{\partial \phi} \right) + r \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \delta r}{\partial z} \right) \right) dzd\phi. \quad (\text{A4.8})$$

Si se integran, por partes, los dos últimos términos del integrando se llega a

$$\delta S = \iint \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right) r \delta r \, dzd\phi. \quad (\text{A4.9})$$

Si en la deformación, la gota pasa de  $r = a_0$  a  $r = a_0 + \xi$  con  $\xi \ll a_0$ ,  $\delta S$  queda como

$$\delta S = \iint \left( \frac{1}{a_0 + \xi} - \frac{1}{(a_0 + \xi)^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) r \delta \xi \, dzd\phi, \quad (\text{A4.10})$$

y recordando el resultado del capítulo II de que  $\delta S$  se puede expresar en función de los radios de curvatura como (ver sección A-4 II de este mismo apéndice)

$$\delta S = \iint \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) r \delta \xi \, dzd\phi \quad (\text{A4.11})$$

se llega a la conclusión de que

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a_0 + \xi} - \frac{1}{(a_0 + \xi)^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (\text{A4.12})$$

Ahora se usará la serie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^{n-1} + \dots \quad (\text{A4.13})$$

para aproximar 
$$\frac{1}{a_0 + \xi} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \xi/a_0} \quad (\text{A4.14})$$

con  $x = \xi/a_0$ , 
$$\frac{1}{a_0 + \xi} = \frac{1}{a_0} - \frac{\xi}{a_0^2}, \quad (\text{A4.15})$$

y por tanto 
$$\frac{1}{(a_0 + \xi)^2} \cong \frac{1}{a_0^2}, \quad (\text{A4.16})$$

si se desprecian los términos  $-\frac{2\xi}{a_0^3}$  y  $\frac{\xi^2}{a_0^4}$ , por la hipótesis inicial de que  $\xi \ll a_0$ . Entonces la ecuación de los radios de curvatura queda como

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a_0} - \frac{\xi}{a_0^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (\text{A4.17})$$

Como en el capítulo II, se hará uso de la ecuación de Navier-Stokes para pequeñas amplitudes del FLUJO POTENCIAL de un fluido de densidad  $\rho$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -(p_1 - p_e) = -\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (\text{A4.18})$$

resultando 
$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sigma \left[ \frac{1}{a_0} - \frac{\xi}{a_0^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (\text{A4.19})$$

Recordando que el gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_k \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A4.20})$$

resulta que al derivar  $\xi$  con respecto a  $t$  se obtiene la velocidad radial

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (\text{A4.21})$$

y como para toda función continua 
$$\frac{\partial \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (\text{A4.22})$$

la ecuación en términos del flujo potencial  $\phi$  puede escribirse

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\phi}{a_0} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 0. \quad (\text{A4.23})$$

Proponiendo una solución de la forma  $\phi = A r^m e^{i m \phi} e^{k z} e^{i \omega t}$  y haciendo el álgebra necesaria se llega al resultado que se deseaba probar



$$\omega_{km}^2 = \frac{m\sigma}{a_0^3 \rho} (1 + m^2 - k^2 a_0^2). \quad (A4.24)$$

#### A-4 II La fórmula de Laplace

Considérese la superficie de interface entre dos medios, si esta tiene alguna curvatura (es decir que si no es plana) entonces las presiones de los medios en la vecindad de la interface es diferente, a esa diferencia se le llama *presión de superficie*. Con el fin de determinar esa diferencia debe aplicarse la condición de equilibrio termodinámico entre ellos, tomando en cuenta las propiedades de la superficie. Supóngase que hay un desplazamiento infinitesimal de esa superficie, y considérese en cada punto de la superficie original un segmento perpendicular a ella que interseca a ambas superficies, sea  $\delta\xi$  su longitud; entonces un elemento de volumen entre las dos superficies está dado por la expresión  $\delta\xi ds$ , donde  $ds$  es un elemento de superficie. Sean  $p_1$  y  $p_2$  las presiones en los medios 1 y 2 respectivamente, además se tomará la convención de que  $\delta\xi$  es positivo si el desplazamiento de la superficie es del medio 1 al medio 2 (por decir algo). Entonces el trabajo necesario para hacer tal cambio en el volumen es

$$\int (-p_1 + p_2) \delta\xi ds. \quad (A4.25)$$

Sin embargo el trabajo  $\delta w$  total hecho en el desplazamiento de la superficie se obtiene sumando al anterior el trabajo asociado al cambio en el área de la superficie, esa parte del trabajo es proporcional al cambio en el área  $ds$  de la superficie y es  $\sigma ds$ , donde  $\sigma$  se conoce como el *coeficiente de tensión superficial*, entonces el trabajo total es

$$\delta w = - \int (p_1 - p_2) \delta\xi ds + \sigma ds, \quad (A4.26)$$

siendo  $\delta w = 0$  la condición del equilibrio termodinámico. Supóngase que  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura principales en un punto dado de la superficie; también se tomará la convención de que esos radios son positivos si se toman respecto al medio 1, entonces los elementos de longitud  $dl_1$  y  $dl_2$  sobre la superficie en sus

secciones principales tienen incrementos  $(\delta\xi/R_1)dl_1$  y  $(\delta\xi/R_2)dl_2$  respectivamente cuando la superficie tiene un desplazamiento infinitesimal; donde se ha considerado que  $dl_1$  y  $dl_2$  son elementos de circunferencia de círculos con radios  $R_1$  y  $R_2$ , por lo tanto el elemento de superficie  $ds = dl_1 dl_2$  cambia por el desplazamiento de superficie a

$$dl_1(1+\delta\xi/R_1)dl_2(1+\delta\xi/R_2) \cong dl_1 dl_2(1 + \delta\xi/R_1 + \delta\xi/R_2), \quad (A4.27)$$

es decir, el elemento de superficie cambia en  $\delta\xi ds(1/R_1 + 1/R_2)$ . De manera que el cambio total en el área de la superficie de separación es

$$\delta s = \int \delta\xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds. \quad (A4.28)$$

Sustituyendo en la ecuación para el trabajo e igualando a cero se llega a la siguiente expresión para el equilibrio

$$\int \delta\xi \left[ (p_1 - p_2) - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] ds = 0. \quad (A4.29)$$

Esa condición se debe cumplir para todo desplazamiento infinitesimal de la superficie, es decir, para todo  $\delta\xi$ . Así que la expresión entre corchetes debe ser idénticamente cero

$$(p_1 - p_2) = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (A4.30)$$

La igualdad anterior es la *fórmula de Laplace*, la cual da la presión de superficie, debe tenerse presente que en la derivación de la fórmula se considera que la superficie de separación tiene cualquier forma y no necesariamente esférica.

Si  $R_1$  y  $R_2$  son positivos,  $p_1 - p_2 > 0$ , es decir que la presión es mayor en el medio cuya superficie es convexa, si  $R_1 = R_2 = \infty$ , de modo que la superficie de separación sea plana, la presión es la misma en cualquiera de los medios. Ahora se usará la fórmula de Laplace en un bello ejemplo que justifica la forma esférica de equilibrio de un fluido y su entorno (dos medios). Supóngase que no hay fuerzas externas actuando sobre los medios 1 y 2, es decir, que no haya fuerzas netas ni en la superficie de separación ni en los medios en sí mismos. Por lo tanto la presión es constante en cada cuerpo, entonces al aplicar la fórmula de Laplace para dar la condición de equilibrio resulta

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante.} \quad (\text{A4.31})$$

De modo que la suma de las curvaturas debe ser una constante sobre cualquier superficie libre de separación. Si toda la superficie es libre, entonces la condición de equilibrio anterior significa que dicha superficie debe ser esférica, por ejemplo la superficie de una pequeña gota para la cual el efecto de la gravedad puede ser despreciable; sin embargo si la superficie se apoya a lo largo de una curva (por ejemplo una película de líquido sobre un alambre) su forma es menos simple. Para generalizar la condición de equilibrio se deben considerar las condiciones de frontera que se deben satisfacer en la frontera entre dos fluidos en movimiento, tomando en cuenta las fuerzas de tensión superficial. En un principio supóngase que se pueden despreciar las fuerzas de tensión superficial, en tal caso se tiene en la frontera entre los dos fluidos que  $n_k(T_{2,1k} - T_{1,1k}) = 0$ . En donde  $T_{1,1k}$  y  $T_{2,1k}$  son los tensores de esfuerzos de los medios 1 y 2 respectivamente, nótese que los índices son las literales  $i,k$  mientras que los índices 1 y 2 son parte de la notación para diferenciar las cantidades de cada medio. La ecuación anterior establece la igualdad de las fuerzas de fricción viscosa sobre la superficie de cada fluido. Cuando se incluyen las fuerzas de tensión superficial se debe agregar a la derecha de la ecuación anterior una fuerza cuya magnitud está dada por la fórmula de Laplace y dirigida a lo largo de la normal

$$n_k T_{2,1k} - n_k T_{1,1k} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_1, \quad (\text{A4.32})$$

y recordando que el tensor de esfuerzos es de la forma

$$T_{ik} = -p\delta_{ik} + T'_{ik} \quad (\text{A4.33})$$

se puede escribir como

$$(p_1 - p_2)n_1 = (T'_{1,1k} - T'_{2,1k})n_k + \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_1. \quad (\text{A4.34})$$

#### A-4 III Condiciones generales para el equilibrio.

Considérese un sistema termodinámico homogéneo abierto de una sólo fase, el cual puede intercambiar calor, trabajo de presión, y masa con sus alrededores. Para pequeños cambios reversibles la segunda ley de la termodinámica plantea que el calor agregado se puede expresar como  $TdS$ , donde  $T$  y  $S$  son la temperatura y la entropía del sistema respectivamente; el incremento en el trabajo de presión hecho sobre el sistema es  $-pdV$ , donde  $P$  y  $V$  son la presión y volumen del sistema; y el incremento en masa se mide por  $dn_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, c$ , donde  $n_k$  es el número de moles de la componente química  $k$  de las  $c$  componentes que constituyen al sistema. De acuerdo a la primera y segunda leyes de la termodinámica, el incremento en la energía interna  $U = U(S, V, n_1, n_2, \dots, n_c)$  del sistema para procesos reversibles es

$$dU = TdS - pdV + \sum_{k=1}^c \mu_k dn_k, \quad (\text{A4.35})$$

$$\text{donde } \mu_k \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial n_k} \right)_{S, V, n_j \neq k} \quad (\text{A4.36})$$

se llama el *potencial químico de la componente k*. Nótese que  $U$  y las variables de estado independientes  $S$ ,  $V$ , y  $n_k$  son extensivas (proporcionales a  $n_k$ ), en contraste a las variables intensivas  $T$ ,  $p$  y  $\mu_k$ . Se representará a las variables extensivas por  $x_1$  y por  $y_1 = \partial U / \partial x_1$  a las intensivas. Entonces para una constante  $\lambda$  se tiene  $U(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda U(x_1, x_2, \dots)$ , así que

$$U(x_1, x_2, \dots) = \frac{d}{d\lambda} U(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \sum_1 \frac{\partial U(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)}{\partial (\lambda x_1)} = \sum_1 y_1 x_1,$$

$$\text{o } U(S, V, n_1, n_2, \dots, n_c) = TS - pV + \sum_{k=1}^c \mu_k n_k, \quad (\text{A4.37})$$

a la que se llama la *ecuación de Euler*. Si se resta (A4.35) de la diferencial de (A4.37) se obtiene la relación de Gibbs-Duhem

$$\sum_{k=1}^c n_k d\mu_k = -SdT + Vdp \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^c x_k d\mu_k = -sdT + vdp, \quad (\text{A4.38})$$

$$\text{donde} \quad x_k = n_k / \sum_{i=1}^c n_i = n_k / n \quad (\text{A4.39})$$

es la fracción molar de la componente k, y s y v son las cantidades molares medias.

La segunda ley de la termodinámica proporciona, como un corolario, un criterio cuantitativo para el equilibrio termodinámico. Considérese un sistema aislado que no esté en equilibrio. En tal sistema los procesos irreversibles ocurren espontáneamente. De acuerdo a la segunda ley, la entropía de tal sistema aumentará hasta que eventualmente alcance un estado en el cual su entropía sea un máximo. En tal estado todos los procesos irreversibles se habrán detenido y sólo continuarán, si es que existen, aquellos procesos que sean completamente reversibles. El sistema estará entonces en un estado de equilibrio. Entonces, para un sistema homogéneo abierto que se deja a U, V, y  $n_1, n_2, \dots, n_c$ , constantes, el criterio de equilibrio es

$$(\delta S)_{U, V, n_k} \leq 0, \quad (\text{A4.40})$$

donde  $\delta S$  representa una variación virtual de la entropía con respecto a los estados vecinos. Una expresión alterna para un sistema con S, V, y  $n_1, n_2, \dots, n_c$  constantes es

$$(\delta U)_{S, V, n_k} \geq 0. \quad (\text{A4.41})$$

Además el equilibrio es estable si  $(\delta^2 S)_{U, V, n_k} < 0$ , inestable si  $(\delta^2 S)_{U, V, n_k} > 0$ , y es condicionalmente estable o metaestable si  $(\delta^2 S)_{U, V, n_k} = 0$ . Aquí  $\delta^2 S$  es la segunda variación virtual en la entropía con respecto a los estados vecinos.

#### A-4 IV Tensión superficial.

Entre los sistemas termodinámicos las fases en contacto están separadas por una fina región de transición, generalmente de sólo algunas moléculas de grueso; en consecuencia es una abstracción

útil considerar tales interfaces como superficies geométricas. Esto permite una descripción relativamente simple y normalmente adecuada de los efectos de superficie por medio directo de la termodinámica macroscópica. La extensión de los sistemas termodinámicos para incluir efectos de superficie es conceptualmente simple; por analogía directa a las contribuciones del trabajo por presión  $-pdV$  en la energía interna, ahora se introduce una contribución  $\sigma d\Omega$ , donde  $\Omega$  representa el área de la superficie de separación, y  $\sigma$  es la *tensión superficial*. La cantidad  $\sigma$  es una variable termodinámica intensiva y tiene las dimensiones de energía por unidad de área, o de fuerza por unidad de longitud. Como en el caso nuclear (ver capítulo II) la base física de esta formulación se puede ver en el ejemplo de la gota líquida: en promedio, las moléculas en el interior de la gota se encuentran en un campo de fuerza simétrica atractiva, mientras que las moléculas en la capa superficial no lo están y de hecho experimentan una fuerza neta atractiva hacia el interior. Como consecuencia de esta interacción hacia dentro de la gota, la superficie está en estado de tensión, y se requiere de algún trabajo para estirla. A nivel molecular, este trabajo parece ser necesario para llevar a las moléculas del interior a la superficie, en contra de las fuerzas atractivas.

Las propiedades termodinámicas de la superficie son tan características que resulta conceptualmente útil considerarla como una fase aparte,  $(\sigma)$ , con su propia entropía,  $S^{(\sigma)}$ , número de moles del potencial químico  $k$ ,  $n_k^{(\sigma)}$ , etc. Y de acuerdo con la anterior discusión, el cambio en la energía interna  $U^{(\sigma)}$ ,  $(S^{(\sigma)}, \Omega, n_k^{(\sigma)})$  de la fase superficial para los procesos irreversibles es

$$dU^{(\sigma)} = T^{(\sigma)} dS^{(\sigma)} + \sigma d\Omega + \sum_{k=1}^c \mu_k^{(\sigma)} dn_k^{(\sigma)}, \quad (\text{A4.42})$$

donde  $\mu_k^{(\sigma)}$  son los potenciales químicos de la superficie.

Ahora se generalizará la discusión anterior respecto del equilibrio entre dos fases ('') y (''), tomando en cuenta también a la fase de superficie  $(\sigma)$  que las separa. Supóngase que cada fase está originalmente aislada y en equilibrio interno. Después de quitar la restricción que las aísla se consideran las restricciones sobre las variables intensivas que son necesarias y

suficientes para asegurar el equilibrio en todo el sistema, que aún se mantiene aislado como un todo. Las variables extensivas independientes para el sistema completo son  $V = V' + V''$ ,  $S = S' + S'' + S^{(\sigma)}$ ,  $n_k = n_k' + n_k'' + n_k^{(\sigma)}$ , y  $\Omega$ . Análogamente la energía interna total es  $U = U' + U'' + U^{(\sigma)}$ , y la condición de equilibrio generalizada es

$$(\delta U)_{S,V,\Omega,n_k} \geq 0. \quad (A4.43)$$

Entonces la forma general desarrollada de la condición de equilibrio es

$$\begin{aligned} \delta U = T' \delta S' + T'' \delta S'' + T^{(\sigma)} \delta S^{(\sigma)} - p' \delta V' - p'' \delta V'' + \sigma \delta \Omega + \sum_{k=1}^c \mu_k' \delta n_k' \\ + \sum_{k=1}^c \mu_k'' \delta n_k'' + \sum_{k=1}^c \mu_k^{(\sigma)} \delta n_k^{(\sigma)} \geq 0, \end{aligned} \quad (A4.44)$$

donde, de la restricción de aislamiento del sistema como un todo, se tienen las condiciones adicionales

$$\begin{aligned} \delta S = \delta S' + \delta S'' + \delta S^{(\sigma)} = 0; \quad \delta n_k = \delta n_k' + \delta n_k'' + \delta n_k^{(\sigma)} = 0; \\ \delta V = \delta V' + \delta V'' = 0. \end{aligned} \quad (A4.45)$$

Ninguna de esas condiciones se viola si se supone un conjunto de variaciones infinitesimales para las que  $\delta S' = 0$  y  $\delta n_k' = 0$ . Si además se supone que la fase (") es una esfera de radio  $a$ , de modo que  $d\Omega = 2dV''/a$ , las condiciones generales se reducen a

$$\begin{aligned} (T'' - T^{(\sigma)}) \delta S'' + \left( p' - p'' + \frac{2\sigma}{a} \right) \delta V'' + (\mu_k'' - \mu_k^{(\sigma)}) \delta n_k'' \geq 0. \\ (A4.46) \end{aligned}$$

Puesto que  $\delta S''$ ,  $\delta V''$  y  $\delta n_k''$  representan variaciones independientes y arbitrarias, cada coeficiente se debe anular. Un resultado similar se obtendría si se eligieran  $\delta S'' = \delta n_k'' = 0$ . Entonces la condición de equilibrio termodinámico resulta finalmente:

$$\begin{aligned} T' = T'' = T^{(\sigma)}, \quad p'' - p' = \frac{2\sigma}{a}, \quad \mu_k' = \mu_k'' = \mu_k^{(\sigma)}, \quad k = \\ 1, 2, \dots, c. \end{aligned} \quad (A4.47)$$

A la condición de las presiones se le llama *fórmula de Laplace*. La extensión de éstos resultados a un sistema más general constituido por  $\phi$  fases y  $\chi$  interfases esféricamente curvadas es directo: para que exista equilibrio termodinámico, deben tenerse temperaturas uniformes (equilibrio térmico) y potenciales químicos uniformes

(equilibrio químico) a lo largo de todo el sistema. Además debe cumplirse una relación de la forma de la de Laplace (equilibrio mecánico) para cualquier par de fases, dándose la mayor presión sobre el lado cóncavo de la interfase cuyo radio de curvatura sustituye a "a" en la fórmula de Laplace.



## REFERENCIAS

- 1 Chandrasekhar S. *Proc. London Math. Soc.* 9 (1959) 141
- 2 Cohen S., Plasil F., Swiatecki W. J. *Anns. Phys.* 82 (1974) 557
- 3 Bohr N. and Kalkar F. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 14 (1937) 10
- 4 Cohen B. L., *Concepts of Nuclear Physics* (1971) McGraw-Hill
- 5 Elmore W. and Heald M. A., *Physics of waves* (1969) McGraw-Hill
- 6 Bohr N. and Wheeler J.A. *Phys. Rev.* 56 (1939) 426
- 7 Bohr A. and Mottelson B. R., *Nuclear Structure v. II Nuclear Deformations* (1975) W. A. Benjamin, Inc.
- 8 Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Course of Theoretical Physics, v. VI Fluid Mechanics.* (1979) Pergamon Press
- 9 Pruppacher H. R. and Klett J. D., *Microphysics of Clouds and Precipitation* (1978) D. Reidel Publishing Co.
- 10 Prosperetti A. *Proc. Conf. on Drops and Bubbles*, California Institute of Technology 2 (1976) 357
- 11 Menchaca Rocha Arturo, "The mobility of mercury drops on rough glass surfaces" aceptado en: *Journal of Colloid and Interface Science* (1991).
- 12 Chapa Plata Martha , "Pérdida de Energía en Colisiones entre Gotas de Mercurio que se Deslizan Sobre un Vidrio Rugoso". FCUNAM, Agosto de 1991.