

22

201



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ARBOLES. ARBORESCENCIAS Y BOSQUES.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A ;
OSCAR DAVALOS OROZCO



México, D. F.

1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

Introducción.	1
Conceptos básicos.	8
Arboriscencias Generadoras.	19
Arboriscidad por Vertices.	45
Arboriscidad Lineal por Vertices.	52
Bibliografía.	81
Índice Analítico.	83
Lista de símbolos.	86

INTRODUCCION

En el presente trabajo de tesis se estudian tres temas. El primero me fue propuesto por la M. en C. Virginia Abrín Batule, mi directora de tesis, y fue el que motivó este trabajo. El problema consistía en buscar condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica tuviera un cierto número de arborescencias generadoras ajenas¹, en especial se quería que la digráfica tuviera el número máximo de éstas, es decir $\left[\frac{|F(D)|}{|V(D)|-1} \right]$. Como toda digráfica es subdigráfica de un torneo, me concreté a la tarea de estudiar este problema solamente en torneos, ya que si encontraba las condiciones necesarias y suficientes para este caso, sería más fácil encontrar la solución para una digráfica cualquiera. El problema lo pude resolver para torneos con un número par de vértices y solamente encontré unas condiciones necesarias pero no las suficientes para los torneos con un número impar de vértices. También se encontraron las condiciones necesarias y suficientes para que un torneo tenga dos arborescencias generadoras ajenas y las necesarias para que tenga 3, así como algunas familias de torneos que tienen las $\left[\frac{|F(D)|}{|V(D)|-1} \right]$ arborescencias generadoras ajenas.

Todo lo anterior está contemplado en el capítulo de Arborescencias Generadoras.

¹ Una arborescencia es un árbol dirigido donde todos los vértices tienen grado interior uno, excepto un vértice llamado raíz, el cual tiene grado interior cero. Una arborescencia generadora de una digráfica D es una subdigráfica de D la cual es una arborescencia y contiene todos los vértices de D . Dos arborescencias son ajenas si no tienen flechas en común.

Durante la investigación sobre el tema al cual me referí en el párrafo anterior encontré varias proposiciones acerca de arborescencias. una de ellas, [4, p. 331 y [18, p. 194], dice que los siete enunciados siguientes son equivalentes si D es una digráfica con n vértices v y que además, cada uno de éstos caracteriza a una arborescencia:

- 1) D es debilmente conexa y sin ciclos.
- 2) D es debilmente conexa con $n - 1$ flechas.
- 3) D es un árbol dirigido con vértice raíz r .
- 4) Existe un vértice $r \in V(D)$ tal que para todo vértice $v \in V(D)$ existe una única travectoria dirigida de r a v .
- 5) D es debilmente conexa y $D - (f)$ no es conexa para todo $f \in F(D)$.
- 6) D es debilmente conexa y tiene un vértice r tal que $\text{grad}^-(r) = 0$ y $\text{grad}^-(v) = 1$ si $v \neq r$.
- 7) D no tiene ciclos y contiene un vértice r tal que $\text{grad}^-(r) = 0$ y $\text{grad}^-(v) = 1$ si $v \neq r$.

Una proposición debida a Crestín [4, p. 35] asegura que es posible asignar direcciones a una gráfica conexa G , logrando una digráfica que contiene una subdigráfica H la cual es una arborescencia generadora de G , de tal forma que cualquier flecha que no pertenezca a H está en un ciclo dirigido.

Si el conjunto de vértices de una digráfica D es (v_1, \dots, v_n) , usando la matriz de grado interior $M = [k_{pq}]$ ⁽²⁾ y la matriz M_i que se define como la matriz M quitando la columna i y el renglón

$$k_{pq} = \begin{cases} -v & \text{si } p = r \text{ y } v \text{ es el número de flechas de } v_p \text{ a } v_q. \\ \text{grad}^-(v_p) & \text{si } p = q. \end{cases}$$

j se obtienen dos resultados bastante importantes. El primero dice que D es una arborescencia si y sólo si $k_{11} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = r \\ 1 & \text{si } i \neq r \end{cases}$ y el determinante de la matriz M_r es 1 para algún $r \in \{1, \dots, n\}$. Usando este resultado Tutte [18, p. 155] y [4, p. 51], encontró el número de arborescencias generadoras ajenas con vértice raíz v_i . Este está dado por el determinante de la matriz M_{r_i} .

En el capítulo de Arboricidad por Vértices de este trabajo se demuestra que para toda gráfica G la arboricidad por vértices $a(G)$ es menor o igual a $\left\lfloor \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rfloor$; si G es plana entonces $a(G) \leq 3$ y que para toda gráfica n -partita completa $G = K(p_1, \dots, p_n)$ la arboricidad por vértices es $a(G) = n - \max\{k \mid \sum_{i=1}^k p_i \leq n - k\}$. Todos estos resultados fueron obtenidos de un artículo escrito por Gary Chartrand, Hudson V-Kronk y Curtis E. Wall llamado "The Point-Arboricity of a Graph" [8].

Un tema relacionado con la arboricidad por vértices, es el que trata la arboricidad lineal por vértices $a_l(G)$ de una gráfica G . En el último capítulo desarrollamos este tema dando los resultados encontrados en dos artículos, el primero publicado por K. S. Poh [17], se demuestra que $a_l(G) \leq 3$ si G es plana y el segundo de Makoto Matsumoto [13] quien demuestra que $a_l(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$ para

³ La arboricidad por vértices $a(G)$ de una gráfica G es el número mínimo de subconjuntos que cumplen con la propiedad de ser una partición de $V(G)$ y de que además cada V_i sea un bosque.

⁴ La arboricidad lineal por vértices $a_l(G)$ de una gráfica G se define como el número mínimo de subconjuntos V_1, \dots, V_k que cumplen con la propiedad de ser una partición de $V(G)$ y además que cada componente conexa de cada V_i sea una trayectoria.

Toda gráfica G v si G es conexa v $\Delta(G) = 2n$, $a(G) = 1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ si y sólo si G es un ciclo o isomorfa a K_{2n-1} .

Sobre este tema obtuve dos resultados, el primero es un complemento a la última proposición que enuncié, la cual dice que si G es conexa, $\Delta(G) = 2n - 1$ v $|V(G)| = 2n$, $n \geq 3$, $a(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ si v solamente si sucede una de las siguientes condiciones:

1) Existen dos vértices no adyacentes $u, v \in V(G)$ tal que $\text{grad}(u) \leq 2n - 3$, $\text{grad}(v) \leq 2n - 3$ v dos vértices distintos x y z que no son adyacentes a u y v respectivamente.

2) Existen dos subconjuntos ajenos V_1 y V_2 de $V(G)$ de cardinalidad tres, tales que $\langle V_1 \rangle$ y $\langle V_2 \rangle$ inducen un bosque cuyas componentes conexas son trayectorias.

El segundo es el cálculo de la arboriscidad lineal por vértices de una gráfica n -partita completa.

Todo lo anterior es el contenido de este trabajo de tesis, en el cual también se incluye un capítulo, capítulo 1, con las definiciones y conceptos básicos de la Teoría de las Gráficas.

Por último, aunque en este trabajo no se toca el tema, quiero enunciar por su importancia y relación con los temas de arboriscidad y arboriscidad lineal por vértices algunos resultados importantes acerca de la arboriscidad lineal por aristas, la cual se define como el número mínimo de subconjuntos del conjunto de aristas de G , cuyas gráficas inducidas tienen por componentes conexas trayectorias, este número lo denotaremos por $\Xi(G)$.

Akiyama, Exoo v Harary [2] publicaron en 1980 los resultados:
 $\Xi(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$ para todo árbol T ; $\Xi(K(m,n)) = \left\lceil \frac{m + \delta(m,n)}{2} \right\rceil$

donde $\delta(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$; $\Xi(K_r) = \left\{ \frac{r}{2} \right\}$ si $G \cong K_r$ plana
 $\Xi(G) = 2$. Definen además $\Pi(G)$ como el menor número de trayectorias
ajenas por aristas $P_i \subseteq G$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n(G)} A(P_i) = A(G)$ y $\hat{\Pi}(G)$ como
el menor número de trayectorias $P_i \subseteq G$ no necesariamente ajenas,
tales que $\bigcup_{i=1}^{n(G)} A(P_i) = A(G)$, y relacionan éstos números con la
arboriscidad lineal por aristas de la siguiente forma: $\Pi(G) = \Xi(G)$
si y sólo si $G \cong K(1, p)$ y $\hat{\Pi}(G) = \Xi(G)$ si y sólo si $G \cong K(1, p)$ o
 $G \cong K(2, p)$; $\Xi(G) = \alpha(L(G)) = a(L(G))$ donde $L(G)$ es la gráfica de
líneas de G .⁽³⁾

Este artículo dio pie a otros, los cuales trabajaron con una
conjetura dada por Akiyama, Exoo y Harary: $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$.

Si $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\text{grad}(v_i) = g_i$, diremos que G es
una $\{g_1, \dots, g_n\}$ -gráfica. $V_k(G)$ indicará el conjunto de vértices
de grado k de la gráfica G .

Pavel Tomasta [19] demostró lo siguiente: Si G es una $\{4, 3, \dots, 3\}$ -gráfica entonces $\Xi(G) = 2$; $\Xi(G) = 4$ si G es 6-regular, lo
cual también fue demostrado por Hiko Enomoto y Bernard Péroche [9];
si $\Delta(G) \leq 4$, $\delta(G) = 3$ y $\langle V_k(G) \rangle$ es una $\{0, 1\}$ -gráfica entonces
 $\Xi(G) = 2$; si G es 5-regular entonces $\Xi(G) = 3$; si G es
8-regular entonces $\Xi(G) = 5$; $\Xi(G) \leq \left\lfloor \frac{5\Delta(G)}{8} \right\rfloor$ si $\Delta(G)$ es par y
 $\Xi(G) \leq \left\lfloor \frac{5\Delta(G) + 3}{8} \right\rfloor$ si $\Delta(G)$ es impar. En este artículo se comenta
que la arboriscidad lineal por aristas de las gráficas 4-regulares es
3, y que este resultado fue publicado en Math. Slovaca 20 de año 1980
en un artículo llamado "Covering and packing in graph III: Cyclic and

³ La gráfica de líneas $L(G)$ de una gráfica G se define de la
siguiente manera: $A(L(G)) = V(G) \times V(G)$ y $\{(a, b), (c, d)\} \in A(L(G))$ si y
sólo si a, b, c, d son incidentes en G .

acyclic invariants" escrito por los ya mencionados Akiyama, Exoo y Harary.

En el año de 1986 Filip Guldan, [10] y [11], publicó la demostración de que si G es una $(6, 5, \dots, 5)$ -gráfica entonces $\Xi(G) = 3$ junto con los siguientes resultados: Si G es una gráfica r -regular, $r \geq 5$ impar y $\Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$ entonces para toda gráfica G' que sea $(r+5)$ -regular tenemos que $\Xi(G') = \left\{ \frac{r+6}{2} \right\}$. Como para las gráficas G 5-regulares, $r = 5$, ya se demostró que $\Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$ se obtiene por la proposición anterior que toda gráfica 10-regular tiene arboriscidad lineal por aristas $\left\{ \frac{10+1}{2} \right\} = 6$. Otros resultados obtenidos por este mismo autor son: Si G es r -regular, r impar, y $\Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$, entonces para G' $r+1$ y $r+3$ regular $\Xi(G') = \left\{ \frac{(r+1)+1}{2} \right\}$ y $\Xi(G') = \left\{ \frac{(r+3)+1}{2} \right\}$ respectivamente; si G es r -regular, r impar y $|V(G)| \leq r+2$, o r par y $|V(G)| \leq r+3$ entonces $\Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$. Guldan demuestra que si $\Xi(G) = \left\{ \frac{r+1}{2} \right\}$ para las gráficas r -regulares, donde $r \leq 2n$ y r es par entonces si G es $2k$ -regular tenemos que $\Xi(G) \leq \left\{ \frac{n+1}{n} k \right\}$ y por otra parte que si para toda gráfica $2r$ -regular, $r \leq n$, su arboriscidad por aristas es $r+1$ entonces para toda gráfica G $\left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\} \leq \Xi(G) \leq \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\Delta(G)}{2} \right\}$ si $\Delta(G)$ es par y $\left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\} \leq \Xi(G) \leq \left\{ \frac{n+1}{n} \frac{\Delta(G)-1}{2} \right\}$ si $\Delta(G)$ es impar. Utilizando este último resultado, como ya se ha probado que $\Xi(G) = r+1$ para las gráficas 2, 4, 6, 8 y 10-regulares se obtiene que para toda gráfica G :

$$\left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\} \leq \Xi(G) \leq \left\{ \frac{6}{5} \frac{\Delta(G)}{2} \right\}$$

si $\Delta(G)$ es par y si $\Delta(G)$ es impar

$$\left\{ \frac{\Delta(G)}{2} \right\} \leq \Xi(G) \leq \left\{ \frac{6}{5} \frac{\Delta(G) - 1}{2} \right\}$$

que son las mejores cotas que se han encontrado.

CONCEPTOS BASICOS

GRAFICAS.

Una gráfica G consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices denotado por $V(G)$ y un conjunto $A(G)$ que consta de parejas no ordenadas de $V(G)$ llamadas aristas. Una subgráfica H de G es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. También se dice que H está contenida en G .

Si $a = (u, v) \in A(G)$, diremos que los vértices u y v son adyacentes y lo denotaremos $u \text{ ady } v$ o $v \text{ ady } u$, además diremos que a incide en u y en v .

Para todo $v \in V(G)$ el grado de v en G es el número de aristas de G que inciden en v y se denota $\text{grado}(v)$ o simplemente $\text{grad}(v)$. El grado mínimo $\delta(G)$ de una gráfica G es el menor de los grados de sus vértices. Análogamente se define $\Delta(G)$ el grado máximo. La vecindad o el conjunto de vecinos de un vértice v en una gráfica G , es el conjunto $N(v)$ formado por los vértices adyacentes a v . Si todos los vértices de una gráfica G tienen el mismo grado r , diremos que G es r -regular.

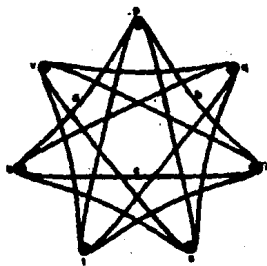
Sea $V' \subseteq V(G)$ y $A' \subseteq A(G)$. $G - V'$ es la subgráfica de G que se obtiene al quitar los vértices V' y como consecuencia las aristas que son incidentes a algún vértice de V' . De forma análoga se define $G - A'$ como la subgráfica que se obtiene al quitar de G las aristas de A' , pero no sus vértices incidentes.

La subgráfica inducida por $V', \langle V' \rangle$, es aquella que tiene a V' como conjunto de vértices y las aristas son las que tienen ambos

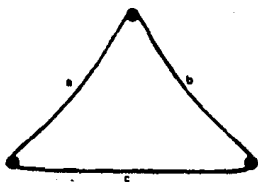
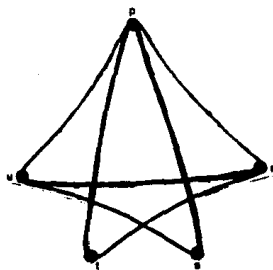
extremos en V' . Dicha gráfica se expresa $\langle V' \rangle$. Análogamente se define la gráfica $\langle A' \rangle$.

Un camino v_0, v_1, \dots, v_n en una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas donde $(v_{i-1}, v_i) \in A(G)$ para todo i , $1 \leq i \leq n$. Un paseo en una gráfica G es un camino en el cual no se repiten aristas. Una trayectoria $\{v_1, \dots, v_n\}$ en una gráfica G es un paseo en donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Un camino cerrado, es una sucesión de vértices y aristas en donde el vértice inicial coincide con el vértice final. Un ciclo (v_1, \dots, v_n, v_1) es un camino cerrado (v_1, \dots, v_n, v_1) donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. La longitud de un camino es el número de aristas que lo forman.

En la gráfica que se dibuja a continuación $V(G) = \{p, q, r, s, t, u, v\}$ y $A(G) = \{(p,r), (p,s), (p,t), (p,u), (q,s), (q,t), (q,u), (q,v), (r,t), (r,u), (r,v), (s,u), (s,v), (t,v)\}$. $N(p) = \{r, s, t, u\}$, $\delta(G) = \Delta(G) = 4$, así pues es una gráfica 4-regular. (p, r, t, v, q, s, u, p) es un ciclo y $\{q, t, p, s, v, r, u\}$ una trayectoria de longitud siete y seis respectivamente.

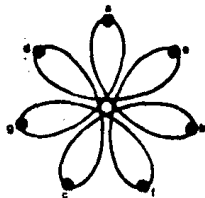
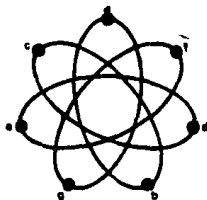


Las gráficas siguientes representan las subgráficas inducidas por $\{p, r, s, t, u\}$ y $\{a, b, c\}$ respectivamente.

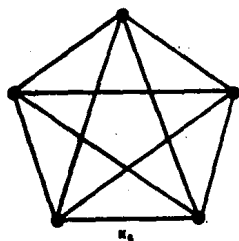


Dos gráficas G y H son isomorfas si y sólo si existe una función biyectiva $f:V(G) \rightarrow V(H)$ tal que si $\{a, b\} \in A(G)$ entonces $\{f(a), f(b)\} \in A(H)$. Esto lo expresamos $G \cong H$.

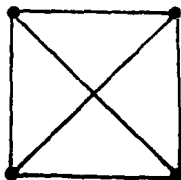
Las dos gráficas siguientes son isomorfas. Consideremos la función $f(x) = x'$.



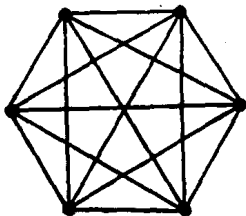
Una gráfica completa es aquella en donde toda pareja de vértices son adyacentes. La gráfica completa con n vértices la denotaremos por K_n .



K_5

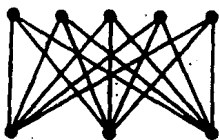


K_4



K_6

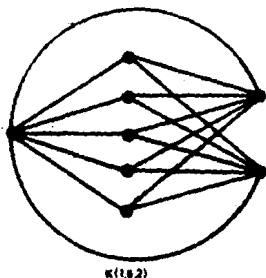
Una gráfica G es bipartita si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arista es incidente a un vértice de V_1 y a otro de V_2 . A V_1 y V_2 le llamaremos la bipartición natural de G . Una gráfica G es bipartita completa si G es bipartita y si V_1, V_2 es la partición natural de G , cada vértice de V_1 es adyacente a todos los vértices de V_2 , en este caso G se denota $K(m, n)$ si $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$.



$K(3,4)$

Una gráfica G es n -partita si existe una partición de G en n conjuntos V_1, \dots, V_n con la propiedad de que si $(u, v) \in A(G)$, $u \in V_i$ y $v \in V_j$, entonces $i \neq j$. A V_1, \dots, V_n le llamaremos la n -partición natural de G . Una gráfica G es n -partita completa si

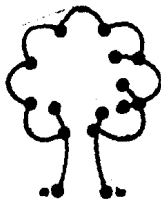
existe una partición (V_1, \dots, V_n) de tal manera que si $u \in V_i$ entonces u ady v para todo $v \in (V(G) - V_i)$. Estas gráficas se denotan $K(p_1, \dots, p_n)$, donde $p_i = |V_i|$.



Una gráfica G es conexa si y sólo si para cualquier par de vértices existe una trayectoria que los une. Las componentes conexas de una gráfica G son las subgráficas de G que son máximas con respecto a la propiedad de ser conexas.

Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos. Un bosque es una gráfica acíclica. En un árbol los vértices de grado 1 se llaman vértices terminales.

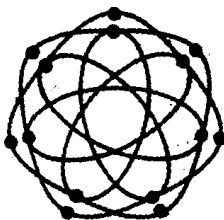
La gráfica siguiente representa un árbol cuyos vértices terminales son a y b .



A un paseo de G que utiliza todos los elementos de $A(G)$ se le llama paseo euleriano. Si el vértice inicial y final de un paseo de esta naturaleza coinciden, estaremos hablando de un paseo euleriano cerrado. Una gráfica G es euleriana si contiene un paseo euleriano cerrado.

Un ciclo hamiltoniano en una gráfica G es un ciclo que utiliza todos los vértices de G . Una gráfica hamiltoniana es una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano. Una trayectoria hamiltoniana en una gráfica G , es una trayectoria que utiliza todos los vértices de G .

La gráfica siguiente es euleriana y hamiltoniana.



DIGRÁFICAS.

Una digráfica D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices denotado por $V(D)$ y un subconjunto de $V(D) \times V(D)$ denotado por $F(D)$ cuyos elementos son llamados flechas. Una subdigráfica H de D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. También se dice que H está contenida en D .

Si la flecha $(u, v) \in F(D)$, diremos que u y v son adyacentes

o específicamente u es adyacente a v v es adyacente de u . Si $f = (u, v) \in F(D)$ diremos que f incide de u , f incide en v , u es el vértice inicial de f , v es el vértice final de f .

Para todo $v \in V(D)$ el grado interior (exterior) de v en D es el número de vértices adyacentes a v (adyacentes de v) y se denota $\text{grad}_v^-(V)$ ($\text{grad}_v^+(V)$). Denotaremos por $\delta^-(G)$ ($\delta^+(G)$) y $\Delta^-(G)$ ($\Delta^+(G)$) el grado interior (exterior) mínimo y máximo respectivamente.

Para cualquier subconjunto S de $V(D)$ definimos al conjunto de vecinos internos (externos) o vecindad interior (vecindad exterior) como $\{x \mid (x, u) \in F(D) \text{ para algún } u \in S\}$ ($\{x \mid (u, x) \in F(D) \text{ para algún } u \in S\}$) y denotamos a este conjunto como $N^-(S)$ ($N^+(S)$), en caso de que S conste de un solo vértice u este conjunto se denotará $N^-(u)$ ($N^+(u)$).

Un camino v_0, v_1, \dots, v_n en una digráfica D es una sucesión alternada de vértices y flechas donde sucede que $(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$ o $(v_i, v_{i-1}) \in F(D)$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$. En el caso de que $(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$, decimos que el camino es dirigido. Un paseo en una digráfica D es un camino en el cual no se repiten flechas; si dicho camino es dirigido entonces se le denomina paseo dirigido. Un camino (paseo) cerrado, es un camino (paseo) cuyo vértice inicial coincide con su vértice final.

Una trayectoria $[v_1, \dots, v_n]$ en una digráfica D es un paseo en donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. A v_1 y v_n se les llama vértice inicial y final respectivamente de la trayectoria. Una uv -trayectoria es una trayectoria con vértice inicial u y final v y se denota $T(u, v)$. La trayectoria es dirigida $[v_1, \dots, v_n]$ si es un paseo dirigido en donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. A v_1 y

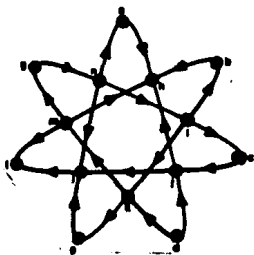
v_i se les llaman vértice inicial y final respectivamente de la trayectoria. Una uv-trayectoria dirigida es una trayectoria con vértice inicial u y final v y se denota $T(\overrightarrow{u, v})$.

Un camino (paseo) cerrado dirigido, es un camino dirigido (paseo dirigido) cuyo vértice inicial coincide con su vértice final.

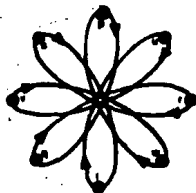
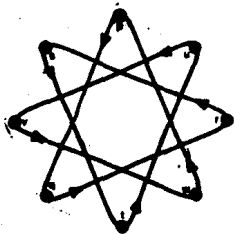
Un ciclo es un camino cerrado (v_1, \dots, v_n, v_1) donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Llamemos ciclo dirigido a un camino cerrado dirigido donde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$, y se denota $(\overrightarrow{v_1, \dots, v_n, v_1})$. La longitud de un camino es el número de flechas que lo forman.

Una digráfica D es conexa si y sólo si para cualquier par de vértices existe una trayectoria que los une. Las componentes conexas de una digráfica D son las subdigráficas de D que son máximas con respecto a la propiedad de ser conexas. Si para todo par de vértices u y v existe un vértice $w \in V(D)$ tal que existe una trayectoria $T(\overrightarrow{w, u})$ y $T(\overrightarrow{w, v})$ entonces diremos que D es débilmente conexa, y si existiera $T(\overrightarrow{u, v})$ y $T(\overrightarrow{v, u})$ la llamaríamos fuertemente conexa.

En la gráfica siguiente $\text{grad}^+(d) = 0$ y $\text{grad}^-(d) = 2$. $N^+(j) = \{h, l\}$, $N^-(j) = \{c, d\}$. Sea $S = \{a, i, k\}$, entonces $N^+(S) = \{h, c, b, e, m\}$ y $N^-(S) = \{n, d\}$. Esta gráfica es débilmente conexa ya que hay una trayectoria dirigida de d a cualquier otro vértice, pero no es fuertemente conexa ya que no existe trayectoria dirigida, excepto la trivial, que parta de h o llegue a d . $(\overrightarrow{d, k, m, g, n, l, c, j, i, f})$ es una trayectoria dirigida y $(\overrightarrow{g, n, l, k, m, g})$ es un ciclo dirigido de longitud 9 y 5 respectivamente.

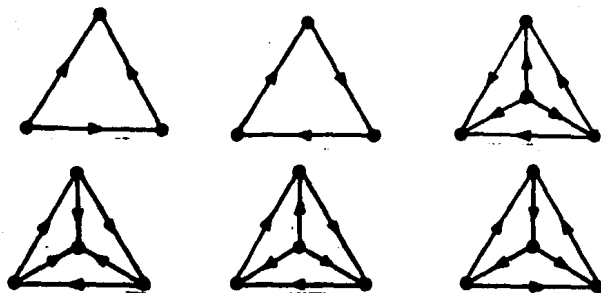


Dos digráficas D y H son isomorfas si y sólo si existe una función biyectiva $f:V(D) \rightarrow V(H)$ tal que si $(a, b) \in E(D)$ entonces $(f(a), f(b)) \in E(H)$. Esto lo expresamos $D \cong H$.



Una digráfica es un torneo si para toda pareja de vértices distintos $u, v \in V(D)$ $(u, v) \in E(D)$ o $(v, u) \in E(D)$. A un torneo con n vértices lo denotaremos D_n .

A continuación se muestran los torneos de 3 y 4 vértices.



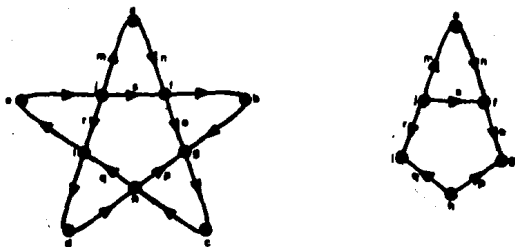
Una digráfica D es k -balanceada si para todo vértice $u \in V(D)$
 $\text{grad}_D^+(u) = \text{grad}_D^-(u) = k$.

Sea D una digráfica, $V' \subseteq V(D)$ y $F' \subseteq F(D)$. $D - V'$ es la subdigráfica de D que se obtiene al quitar los vértices V' y como consecuencia las flechas que inciden a v de estos vértices de V' . De manera semejante $D - F'$ es la subdigráfica que se obtiene quitando a D las flechas de F' pero no sus vértices iniciales ni finales.

La subdigráfica inducida por V' es aquella que tiene a V' como conjunto de vértices y sus flechas son las flechas de D que tienen sus vértices inicial y final en V' . Dicha digráfica se expresa $\langle V' \rangle$. Análogamente puede definirse la digráfica inducida por F' , como aquella que tiene a F' como conjunto de flechas y cuyos vértices son los vértices iniciales y finales de las flechas de F' , esta digráfica se denota como $\langle F' \rangle$.

A continuación se muestra una digráfica y una subdigráfica de ella que coincide con ser la subdigráfica inducida por los vértices

a, f, g, h, i, j y por las aristas m, n, o, p, q, r, v, s.



A un paseo dirigido de D que utiliza todos los elementos de $E(D)$ se le llama **paseo euleriano**. Si el vértice inicial y final de un paseo de esta naturaleza coinciden, estaremos hablando de un **paseo euleriano cerrado**. Una digráfica D es **euleriana** si contiene un paseo euleriano cerrado.

Un **ciclo hamiltoniano** en una digráfica D es un ciclo dirigido que utiliza todos los vértices de D . Una digráfica **hamiltoniana** es una digráfica que contiene un ciclo hamiltoniano. Una **trayectoria hamiltoniana** en una digráfica D , es una trayectoria dirigida que utiliza todos los vértices de D .

Diremos que u alcanza a v o v es alcanzable desde u si existe una uv -trayectoria dirigida. Si se tiene que para todo $v \in V(D)$ u alcanza a v , diremos que u es un **vértice fuente** o **raíz**. En el caso de que para todo $v \in V(D)$ v alcanza a u , decimos que u es un **pozo**.

ARBORESCENCIAS GENERADORAS

El problema principal de este capítulo consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un torneo con p vértices tenga $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ arborescencias generadoras ajenas.

Definición :

Una digráfica es un árbol dirigido si es conexa y sin ciclos.

Una digráfica D es una arborescencia si D es un árbol dirigido y cumple las siguientes condiciones:

- a) Tiene un vértice r , tal que $\text{grad}_n^-(r) = 0$ llamado raíz.
- b) Si $u = (V(D) - \{r\})$ entonces $\text{grad}_n^-(u) = 1$.

D es una arborescencia generadora de una digráfica E si D es una arborescencia y $V(D) = V(E)$.

Dos arborescencias son ajenas si no tienen flechas en común.

Primero veamos porqué nos interesa que un torneo tenga $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ arborescencias generadoras ajenas. Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ el conjunto de arborescencias ajenas en un torneo D_p con p vértices.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n F(A_i) \right| \leq |F(D_p)| = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n F(A_i) \right| = \sum_{i=1}^n |F(A_i)| = \sum_{i=1}^n (p-1) = n(p-1).$$

Entonces $n(p-1) \leq \frac{p(p-1)}{2}$, por consiguiente $n \leq \frac{p}{2}$.

Por lo tanto $n \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el máximo entero menor o igual a x .

De lo anterior obtenemos la siguiente:

Proposición 1

El número de arborescencias generadoras ajenas en un torneo con p vértices es a lo más $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$.

Sabemos que todo torneo tiene al menos una trayectoria hamiltoniana [10, p. 116], entonces todo torneo tiene al menos una arborescencia. Además, usando el teorema de que todo vértice en un torneo fuertemente conexo D , $p \geq 3$, está contenido en un ciclo dirigido de longitud k , $3 \leq k \leq p$, [18, p.114], demostraremos lo siguiente:

Proposición 2

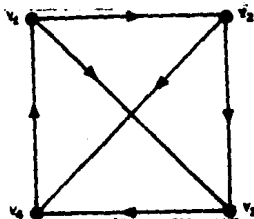
Si D es un torneo fuertemente conexo, $p \geq 4$, entonces D tiene al menos dos arborescencias generadoras ajenas con vértices fuentes distintos.

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre p , el número de vértices.

Sea $p = 4$.

Entonces D debe ser isomorfa a la gráfica siguiente:



$A_1 = (v_1, F_1)$, $V_1 = V(D_1)$, $F_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$
 $A_2 = (v_2, F_2)$, $V_2 = V(D_2)$, $F_2 = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_1, v_3)\}$ son

dos arborescencias ajenas con vértices fuentes v_1 y v_2 . De aquí que el resultado se sigue cuando el torneo fuertemente conexo tiene cuatro vértices.

Supongamos lo siguiente. Si D_k es un torneo fuertemente conexo $p = k + 1$, D_k tiene al menos dos arborescencias ajenas con vértices fuente distintos.

Ahora sea D_k un torneo fuertemente conexo con $p = k$.

Sea $u \in V(D_k)$ y C un ciclo, $u \in V(C)$, de longitud $k - 1$.

Tomemos $v \in V(D_k) - V(C)$ y consideremos $D' = D_k - \{v\}$. D' es un torneo con $k - 1$ vértices, y además es fuertemente conexo ya que $C \subseteq D'$, por lo tanto D' tiene dos arborescencias A'_1 y A'_2 con $x \neq y$ y sus vértices fuentes respectivamente $v \neq y$.

Por hipótesis D_k es fuertemente conexo, entonces existe un vértice $w \in V(D_k)$, $(w, v) \in E(D_k)$. $A_1 = A'_1 \cup \{(w, v)\}$ es una arborescencia generadora de D_k con vértice fuente x .

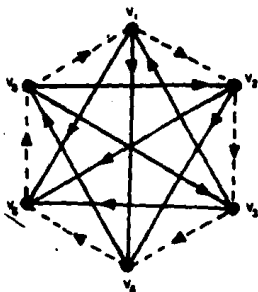
Una segunda arborescencia generadora A_2 de D_k se obtiene cuando a A'_2 le unimos la flecha (y, v) o (v, y) , según cual sea la flecha que pertenezca a $E(D_k)$, y su vértice fuente será y o v según sea el caso. Puede suceder que $v = y$, si esto sucede A_2 la construimos añadiendo la flecha (x, v) o (v, v) según sea el caso y A_2 añadiendo la flecha (y, v) . Es claro que $F(A_1) \cap F(A_2) = \emptyset$.

La conexidad fuerte en un torneo D_k asegura la existencia de $\left[\begin{smallmatrix} \text{MD} \\ \text{MD} \end{smallmatrix} \right]$ arborescencias generadoras ajenas?

Estudieemos el torneo de la página siguiente.

El número de flechas en D_n es igual al número de aristas que necesitamos para formar 3 arborescencias generadoras ajenas. La digráfica dibujada es fuertemente conexa, ya que contiene al ciclo

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$. El grado interior de un vértice, en una arborescencia, es a lo más 1. Entonces (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, v_4) , (v_4, v_5) , (v_5, v_6) deben estar en arborescencias distintas, pero solamente podemos formar 3 arborescencias distintas en D_6 , por lo tanto en esta digráfica es imposible formar las 3 arborescencias deseadas.



De esto concluimos que el hecho de que un torneo sea fuertemente conexo no nos garantiza la existencia de $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ arborescencias generadoras. Esto nos lleva a pensar que el grado interior de los vértices en un torneo es muy importante para tener las $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ arborescencias.

Observación:

Claramente queda establecido que si D es un torneo que posee $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ arborescencias generadoras ajenas: $A_1, A_2, \dots, A_{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}$ entonces el número de vértices que tienen la propiedad de ser fuentes en al menos una de ellas es a lo más $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$; por lo que $p - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ corresponde a la cardinalidad mínima del conjunto de vértices v que no son fuente de alguna $A_i, i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, es decir

$\text{grad}_{A_i}^-(v) = 1$, de aquí que $\text{grad}^-(v) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ para al menos $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ vértices.

Proposición 3

Sea D_p un torneo con un número par de vértices. Si D_p tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias generadoras ajenas $A_1, \dots, A_{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}$ entonces

$$\sum_{i=1}^h |F(A_i)| = |F(D_p)|, \text{ donde } h = \frac{p}{2}$$

Demostración:

$$|F(D_p)| = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$|F(A_i)| = p-1 \text{ para todo } i, i = 1, \dots, \frac{p}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces si } h = \frac{p}{2}, \sum_{i=1}^h |F(A_i)| &= \sum_{i=1}^h (p-1) = \\ &= h(p-1) = \frac{p}{2}(p-1) = \\ &= |F(D_p)| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 4

Sea D_p un torneo $p = 2k, k \in \mathbb{N}$. Si D_p tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias generadoras ajenas, entonces existen al menos $\frac{p}{2}$ vértices con grado interior $\frac{p}{2}$.

Demostración:

Sea $h = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \frac{p}{2}$ por ser p par. Sean $A_1, \dots, A_{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}$ las arborescencias generadoras de D_p .

Por la proposición anterior $\sum_{i=1}^h |F(A_i)| = |F(D_p)|$, por lo cual si v no es fuente para toda arborescencia A_i , tenemos que $\text{grad}_{A_i}^-(v) = 1$ para todo $i, i = 1, 2, \dots, \frac{p}{2}$, por lo tanto $\text{grad}_{D_p}^-(v) = \frac{p}{2}$. Vértices fuente a lo más hay $\frac{p}{2}$, de aquí que haya al menos $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ vértices con grado interior $\frac{p}{2}$ si p es par. \blacksquare

Proposición 5:

Sea D_p un torneo, $p = 2k$, $k \geq 2$. Si D_p tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias generadoras ajenas entonces $\text{grad}_{D_p}^-(v) < \frac{p}{2}$ para $v \in V(D_p)$.

Demostración:

Por la Proposición 3 si $h = \frac{p}{2}$ entonces $\sum_{i=1}^h |F(A_i)| = |F(D_p)|$ por lo tanto $\text{grad}_{D_p}^-(v) = \sum_{i=1}^h |\text{grad}_{A_i}^-(v)| \leq \sum_{i=1}^h 1 = h = \frac{p}{2}$. ■

Proposición 6:

Sea D_p un torneo, $p = 2k$, $k \geq 2$. Si D_p tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias generadoras ajenas $A_1, A_2, \dots, A_{\frac{p}{2}}$.

$\mathcal{F} = \{v \in V(D_p) \mid v \text{ es raíz en algún } A_i\}$

$v \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{grad}^-(v) < \frac{p}{2}$.

Demostración:

\Rightarrow $\text{grad}_{A_i}^-(v) \leq 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, \frac{p}{2}$.

Como $v \in \mathcal{F} \exists j, j = 1, 2, \dots, \frac{p}{2}$, donde $\text{grad}_{A_j}^-(v) = 0$

Entonces si $h = \frac{p}{2}$, $\text{grad}^-(v) = \sum_{i=1}^h \text{grad}_{A_i}^-(v) \leq \frac{p}{2} - 1$.

Por lo tanto $\text{grad}^-(v) < \frac{p}{2}$.

\Leftarrow Si $h = \frac{p}{2}$, $\text{grad}^-(v) = \sum_{i=1}^h \text{grad}_{A_i}^-(v) < \frac{p}{2}$.

Entonces existe $j, j = 1, 2, \dots, \frac{p}{2}$, donde $\text{grad}_{A_j}^-(v) = 0$.

Por lo tanto v es fuente en A_j . ■

La Proposición 2 asegura que cualquier torneo fuertemente conexo tiene dos arborescencias generadoras ajenas. Después de analizar esa proposición y darnos cuenta de que los grados interiores de los vértices desempeñan un papel importante encontramos la condición necesaria y suficiente para que un torneo tenga dos arborescencias

generadoras ajenas. Antes de ver esto demostraremos el siguiente

Lema 1

Si D_p es un torneo con p vértices y tiene $k + 1$ arborescencias generadoras ajenas entonces hay a lo más $k + 1$ vértices de grado k .

Demostración:

Supongamos que existen $m \geq k + 2$ vértices de grado k . Definamos $U = \{v \in V(G) \mid \text{grad}_{D_p}^-(v) = k\}$. Sean A_1, \dots, A_k las arborescencias generadoras ajenas y $R = \{v \in V(G) \mid v \text{ es raíz de } A_i \text{ para algún } i = (1, \dots, k)\}$.

$|R| \geq k + 1$. Como $|U| > k + 1$ existe un vértice u tal que $u \in U$ y $u \in R$. Entonces $\text{grad}_{A_i}^-(u) = 1$ para toda arborescencia A_i . Por lo cual $k = \text{grad}_{D_p}^-(u) \geq \sum_{i=1}^{k+1} \text{grad}_{A_i}^-(u) = \sum_{i=1}^{k+1} 1 = k + 1$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto a lo más existen $k + 1$ vértices de grado interior k . ■

Corolario

Sea $\delta^-(D_p) \geq k$.

Si D_p tiene $k + 1$ arborescencias generadoras ajenas por aristas entonces hay al menos $p - (k + 1)$ vértices de grado interior mayor o igual a $k + 1$. ■

Proposición 7

Sea D_p un torneo con p vértices y $\delta^-(D_p) \geq 1$.

D_p tiene dos arborescencias generadoras ajenas con vértice raíz distinto si y sólo si existen a lo más dos vértices de grado interior 1.

Demostración:

•

Aplicando el corolario anterior obtenemos que hay al menos $p - 2$ vértices con grado interior mayor o igual a dos, por lo cual existen a lo más dos vértices de grado interior 1.

•

Caso 1: Hay un único vértice de ingrado 1.

Sea T la trayectoria hamiltoniana de $D_p = (a)$, $a \in V(D_p)$ y $\text{grad}_{D_p}^-(a) = 1$.

Sean $b, c, d \in V(D_p)$ tales que $(b, a), (c, b), (d, b) \in F(D_p)$, c y d existen ya que $\text{grad}_{D_p}^-(b) \geq 2$. Si $(c, b) \in FCT$ entonces la digráfica $A_1 = T \cup ((b, a))$ y $A_2 = \left[\bigcup_{v \in (V(D_p) - \{a, b\})} ((a, v)) \right] \cup ((c, b))$ son dos arborescencias generadoras ajenas.

Si $(c, b) \notin FCT$ entonces $(d, b) \in FCT$ y se haría una demostración análoga.



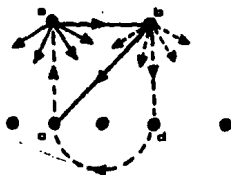
Caso 2: Existen dos vértices de ingrado 1.

Sean $a, b \in V(D_p)$ tales que $\text{grad}_{D_p}^-(a) = \text{grad}_{D_p}^-(b) = 1$. Como D_p es un torneo $(a, b) \in F(D_p)$ o $(b, a) \in F(D_p)$. Sin pérdida de generalidad supongamos $(a, b) \in F(D_p)$. Entonces $(b, v) \in F(D_p)$ si v es distinto de a . Existen dos vértices $c, d \in V(D_p)$ tales que

(c, a) y (d, c) $\in F(D_p)$ ya que $\text{grad}_p^-(c) \geq 2$.

$A_1 = \left[\bigcup_{v \in (V(D_p) - \{a, c\})} (c, v) \right] \cup \{(b, c)\}$ es una arborescencia generadora

ajena a $A_2 = \left[\bigcup_{v \in (V(D_p) - \{a, b, c\})} (b, v) \right] \cup \{(d, c), (c, a)\}$.



Caso 3: $\delta^-(D_p) \geq 2$.

Sea T la travectoria hamiltoniana de D_p . Sea $D' = D_p - F(T)$ y A una arborescencia maximal por vértices de D' con vértice raíz r . Si $V(A) = V(D)$, A es entonces una arborescencia generadora por lo cual la demostración ya estaría acabada. Supongamos ahora $V(A) \neq V(D)$, entonces existe un vértice v tal que $v \in V(D_p)$ y $v \notin V(A)$.

Subcaso 1: $V(D_p) - V(A) = \{v\}$.

$\delta^-(D') \geq 1$ por lo cual $\text{grad}_p^-(v) \geq 1$, entonces existe un vértice $u \in V(D')$ tal que $(u, v) \in F(D')$ entonces podemos extender a A añadiendo esta arista, pero esto contradice la maximalidad de A , por lo tanto $V(D_p) = V(A)$.

Subcaso 2: $(u, v) \in V(D_p) - V(A)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos $(u, v) \in F(D_p)$, entonces $\text{grad}_{(u,v)}^-(u) = 0$, pero $\text{grad}_p^-(u) \geq 1$ por lo cual existe $w \in V(D')$ tal que $(w, u) \in F(D')$, por lo tanto podemos extender A , lo cual es

una contradicción ya que A es maximal, por lo tanto $V(A) = V(D_p)$.

Subcaso 3: $|V(D_p) - V(A)| = 3$.

Sean $a, b, c \in (V(D_p) - V(A))$. Si $(r, a), (r, b) \in F(D_p)$ entonces a lo más una de estas flechas se pudo haber usado en la trayectoria T , por lo cual podríamos extender A con una de estas flechas, análogamente en el caso $(a, r), (b, r) \in F(D_p)$.

Ahora supongamos (r, a) y $(b, r) \in F(D_p)$, si alguna de estas flechas no fue usada en T podríamos extender A , entonces supongamos que (r, a) y (b, r) pertenecen a $F(T)$, por lo tanto la flecha que une a y r con c no ha sido usada en T y esta flecha extiende a A lo cual es una contradicción, por lo tanto $V(A) = V(D_p)$.

Si los vértices raíz de cada una de estas arborescencias son iguales hagamos lo siguiente: Sean $b, c \in V(D_p)$ dos vértices tales que las flechas $(b, r) \in F(D_p)$ y $(c, b) \in F(T)$. Construyamos ahora la arborescencia $A' = (T - (c, b)) \cup ((b, a))$

De esta forma tenemos dos arborescencias generadoras ajenas con vértices raíz distintos. ■



A la Proposición anterior podemos agregar que cuando tenemos vértices de grado 1, estos serán raíz de una de las arborescencias.

Proposición 8

Sea D_p un torneo con p vértices y $\delta^-(D_p) = 0$.

Sea $r \in V(D_p)$ tal que $\text{grad}^-(r) = 0$.

$\text{grad}^-(v) \geq 2$ para todo vértice $v \in (V(D_p) - \{r\})$ si y sólo si D_p tiene dos arborescencias generadoras ajenas.

Demostración:

Primero demostraremos que $|\{v \in V(D_p) \mid \text{grad}_{D_p}^-(v) = 2\}| \leq 3$.

Supongamos $|\{v \in V(D_p) \mid \text{grad}_{D_p}^-(v) = 2\}| = 4$.

$|\{v \in V(D_p) \mid \text{grad}_{D_p}^-(v) = 2\}| =$

$|\{v \in V(D_p) - \{r\} \mid \text{grad}_{D_p - \{r\}}^-(v) = 1\}| \leq 4$, pero no puede

haber cuatro vértices de grado interior uno en un torneo, por lo tanto

$|\{v \in V(D_p) \mid \text{grad}_{D_p}^-(v) = 2\}| \leq 3$.

Consideremos $D' = D_p - \{r\}$. D' es un torneo y $\delta^-(D') = 1$.

Caso 1: D' tiene a lo más dos vértices de ingrado 1.

Por la proposición anterior D' tiene dos arborescencias generadoras con vértice raíz distinto. Si A_1 y A_2 son estas arborescencias con vértice raíz a y b respectivamente, entonces $A'_1 = A_1 \cup \{r, a\}$ y $A'_2 = A_2 \cup \{r, b\}$ son dos arborescencias generadoras ajenas de D_p .

Caso 2: D' tiene tres vértices de ingrado 1.

Si $a, b, c \in V(D_p)$, $\text{grad}_{D_p}^-(a) = \text{grad}_{D_p}^-(b) = \text{grad}_{D_p}^-(c) = 1$ y si $(a, b) \in E(D_p)$ entonces $\langle a, b, c \rangle = \overline{\langle a, b, c \rangle}$ por lo tanto $(a, v), (b, v), (c, v) \in E(D_p)$ si $v \in (V(D_p) - \{a, b, c\})$.

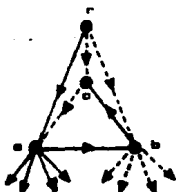
Sean $A'_1 = \left\{ \bigcup_{v \in V(D_p) - \{a, c\}} U(a, v) \right\} \cup \{(b, c)\}$

y

$A'_2 = \left\{ \bigcup_{v \in V(D_p) - \{a, b, c\}} U(b, v) \right\} \cup \{(c, a)\}$

Sean ahora $A_1 = A'_1 \cup \{r, a\}$ y $A_2 = A'_2 \cup \{r, b, (r, c)\}$. A_1 y A_2 son dos arborescencias generadoras ajenas.

En la página siguiente se ilustran estas dos arborescencias. La dibujada con línea continua representa A_1 y la dibujada con líneas punteadas A_2 . ■



Proposición 9

Sea D_p un torneo tal que $\bar{c}(D_p) = 2$.

Si existe un único vértice ingrado 2 entonces D_p tiene tres arborescencias generadoras ajenas.

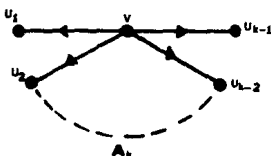
Demostración:

Sea $a \in V(D_p)$ tal que $\text{grad}^-(a) = 2$.

En la digráfico $D' = D_p - (a)$ hay a lo más dos vértices de ingrado 1, por lo tanto D' tiene dos arborescencias generadoras ajenas A_1 y A_2 . Si x y y son los vértices adyacentes a a sea $A'_1 = A_1 \cup \{(x, a)\}$ y $A'_2 = A_2 \cup \{(y, a)\}$. Sea A la arborescencia de $D_p = F(A'_1 \cup A'_2)$ con mayor número de vértices y cuyo vértice raíz es a .

Sea $V' = \{v \mid v \in V(D_p) - V(A)\}$. Supongamos $V' \neq \emptyset$.

Si $v \in V'$ entonces $(a, v) \in F(D_p)$ por lo cual $(v, a) \in F(D_p)$, de aquí que $|V'| \leq 2$ y $\bar{c}(V') = 0$. Sea $w \in V'$ tal que $\text{grad}_{D_p}^-(w) = 0$. $\text{grad}_{D_p}^-(w) \geq 3$ entonces existe un vértice $b \in V(A)$ tal que $(b, w) \in F(D_p)$ y $(b, w) \in F(A) \cup F(A')$ lo cual contradice la maximalidad de A .



Proposición 11:

Si existe un vértice $v \in V(D_2)$ tal que:

o $\text{grad}^-(v) = 0$.

o $D_2 - (v)$ tiene $k - 1$ ciclos hamiltonianos ajenos.

Entonces D_2 tiene k arborescencias generadoras ajenas.

Demostración:

Sea $V(D_2 - (v)) = \{u_1, \dots, u_{2k-1}\}$

Por la proposición 10 $D_2 - (v)$ tiene k arborescencias ajenas de las cuales $k - 1$ son trayectorias generadoras dirigidas, sean éstas A_1, A_2, \dots, A_{k-1} , y la otra una estrella con k vértices, llamémosle A_k . Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que el centro de la estrella es u_1 y $V(A_k) = \{u_1, \dots, u_k\}$.

Como $\text{grad}^-(v) = 0$, v ady u_i , para todo $u_i \in V(D_2 - (v))$.

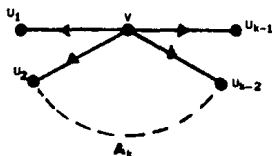
Construyamos ahora las siguientes arborescencias:

$A^1 = A_1 \cup \{(v, u_1)\}$ para $i = 1, \dots, k - 1$.

y $A^k = A_k \cup \bigcup_{i=2}^{2k-1} \{(v, u_i)\}$.

De esta forma se obtienen las k arborescencias generadoras ajenas.

A continuación ilustramos las arborescencias que se construyeron en esta proposición.



Proposición 11:

Si existe un vértice $w = V(D_0)$ tal que:

a) $\text{grad}^-(w) = 0$.

b) $D_0 - (w)$ tiene $k - 1$ ciclos hamiltonianos ajenos.

Entonces D_0 tiene k arborescencias generadoras ajenas.

Demostración:

Sea $V(D_0 - (w)) = \{u_1, \dots, u_{2k-1}\}$

Por la proposición 10 $D_0 - (w)$ tiene k arborescencias ajenas de las cuales $k - 1$ son trayectorias generadoras dirigidas, sean éstas A_1, A_2, \dots, A_{k-1} , y la otra una estrella con k vértices, llamémosle A_k . Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que el centro de la estrella es u_k y $V(A_k) = \{u_1, \dots, u_{2k-1}\}$.

Como $\text{grad}^-(w) = 0$, $w \text{ ady } u_i$, para todo $u_i \in V(D_0 - (w))$.

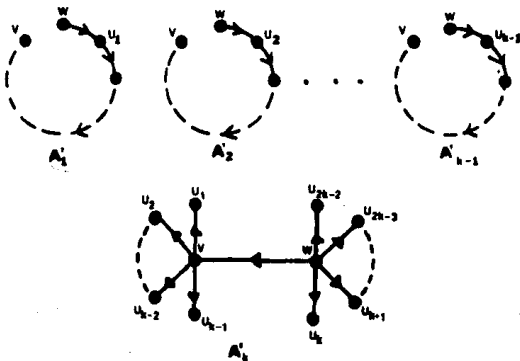
Construyamos ahora las siguientes arborescencias:

$A^i = A_i \cup \{(w, u_i)\}$ para $i = 1, \dots, k - 1$.

y $A^k = A_k \cup \bigcup_{i=1}^{2k-1} \{(w, u_i)\}$.

De esta forma se obtienen las k arborescencias generadoras ajenas.

A continuación ilustramos las arborescencias que se construyeron en esta proposición.



Proposición 12:

Si existe un vértice $w \in V(D_k)$ tal que:

a) $\text{grad}^-(w) = 1$.

b) $D_k - (w)$ tiene $k - 1$ ciclos hamiltonianos ajenos.

Entonces D_k tiene k arborescencias generadoras ajenas.

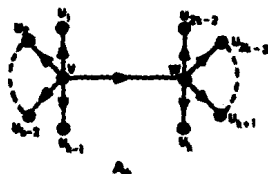
Demostración:

Como $\text{grad}^-(w) = 1$ existe un vértice $v \in V(D_k)$ tal que $(v, w) \in FC(D_k)$.

Consideremos $D' = (D_k - (v, w)) \cup (w, v)$.

D' coincide con D_k excepto en el sentido de (v, w) .

D' cumple con las condiciones de la Proposición 6, por lo cual podemos considerar la construcción hecha en esta proposición tomando al vértice v como u_1 . Si en esta construcción cambiamos el sentido de la flecha (w, v) de A_1 por (v, w) entonces lo obtenido son arborescencias generadoras ajenas de D_k . ■



Proposición 13:

Si existe un vértice $w \in V(D_{2k})$ tal que:

(i) $\text{grad}^-(w) \leq k$.

(ii) $D_{2k} - (w)$ tiene $k - 1$ ciclos hamiltonianos ajenos.

(iii) Existe un vértice $v \in V(D_{2k})$ tal que $N^-(w) = \{v\} \cong N^+(v)$.

Entonces D_{2k} tiene k arborescencias generadoras ajenas.

Demostración:

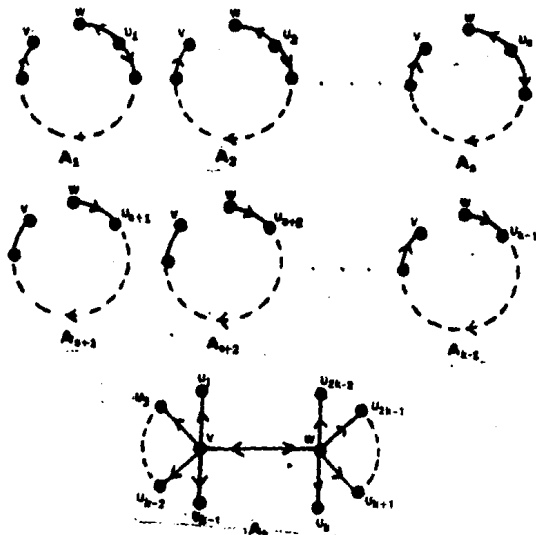
Sea $N^-(w) = \{u_1, \dots, u_k\}$ $k \leq k$.

Consideremos $D' = (D_{2k} - \bigcup_{(u_i, w)} \langle (u_i, w) \rangle) \cup \left\{ \bigcup_{(w, u_i)} \langle (w, u_i) \rangle \right\}$

D' es la digráfica D salvo los sentidos de las flechas (u_i, w) .

D' cumple con las condiciones de la Proposición 11 o la Proposición 12, podemos considerar la construcción hecha en cada una de estas proposiciones, según sea el caso, tomando siempre al vértice v como u_1 . Si en esta construcción cambiamos el sentido de cada flecha

(w, u) de A_i por (u_i, w) entonces se obtiene con arborescencias generadoras ajenas de D_{2k} .



Uniendo la proposición 4 y 5 obtenemos la proposición que dice lo siguiente:

Sea D_p un torneo, $p = 2k$, $k \geq 1$. Si D_p tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias generadoras ajenas con $\text{grad}_{D_p}^-(v) \leq \frac{p}{2}$ para todo $v \in V(D_p)$, entonces existen al menos $\frac{p}{2}$ vértices con grado interior $\frac{p}{2}$.

La pregunta que se hace ahora es si la proposición siguiente es cierta.

Sea D_p un torneo, $p = 2k$, $k \geq 1$. Si para todo vértice $v \in V(D_p)$

$\text{grad}_{D_p}^+(v) = \frac{p}{2}$ y además existen al menos $\frac{p}{2}$ vértices con grado interior $\frac{p}{2}$ entonces D tiene $\frac{p}{2}$ arborescencias.

Hasta el momento no hemos podido encontrar una demostración a la última proposición ni algún contraejemplo para un número par p , $p \geq 8$, por lo que no daremos una respuesta general a la anterior proposición, simplemente veremos que ésta es cierta para $p = 2$, $p = 4$ y $p = 6$ a partir de los torneos con 2, 4 y 6 vértices que cumplen con estas condiciones (14, p. 91).

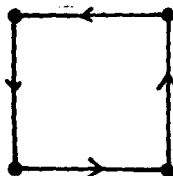
Las flechas no marcadas en los torneos que se ilustran a continuación son flechas dirigidas hacia abajo.

El torneo de dos vértices, que es único salvo isomorfismos, es una arborescencia.

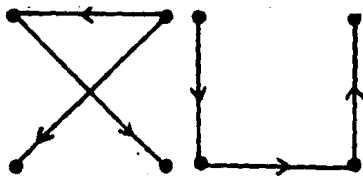


Hay dos torneos con cuatro vértices que cumplen las condiciones deseadas.

TORNEO

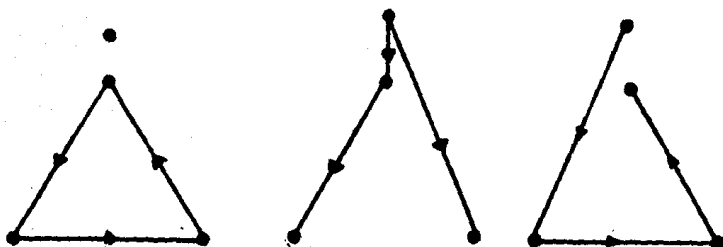


ARBORESCENCIAS

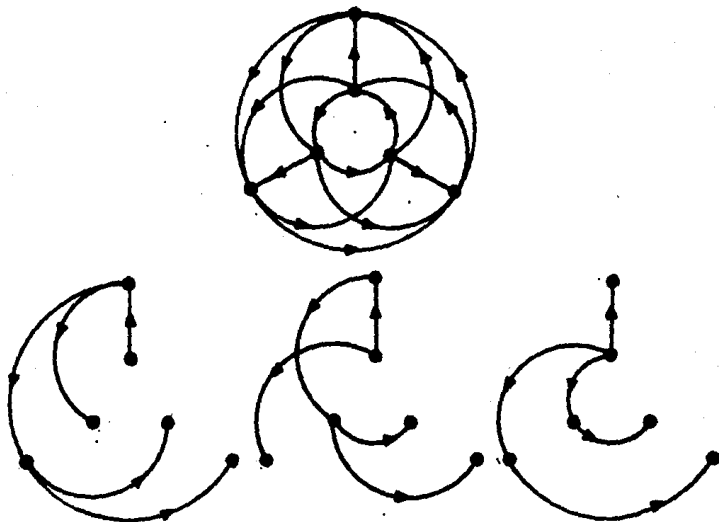


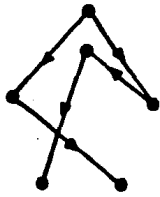
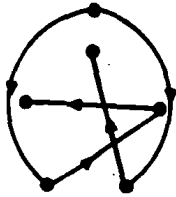
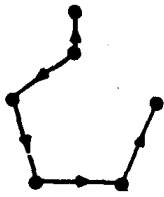
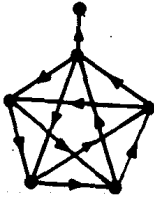
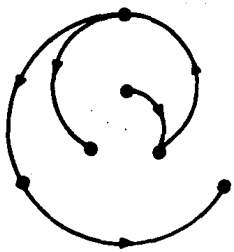
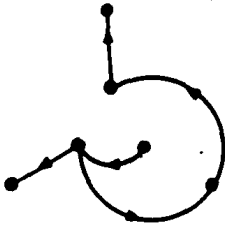
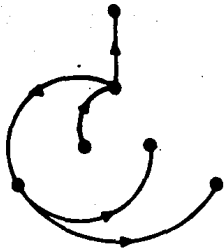
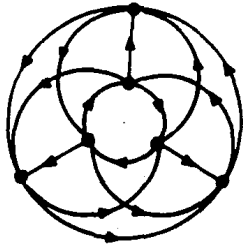
TORNEO

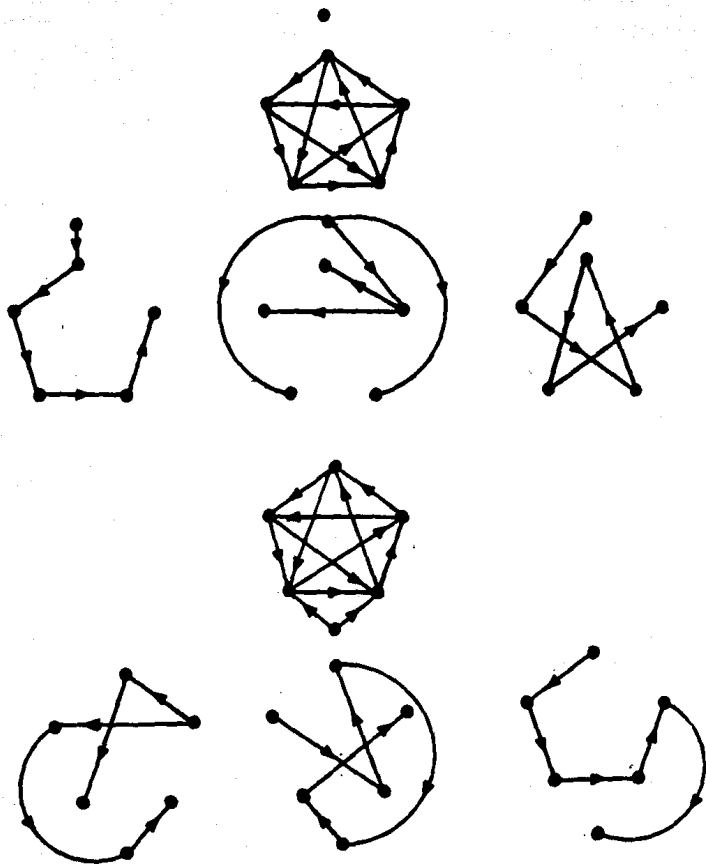
ARBORESCENCIAS

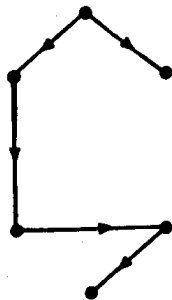
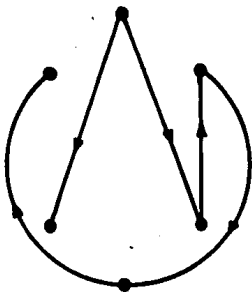
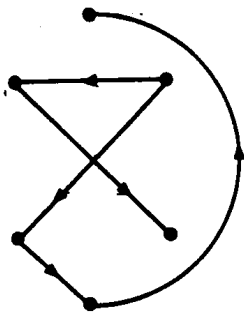
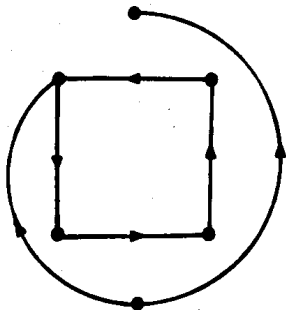


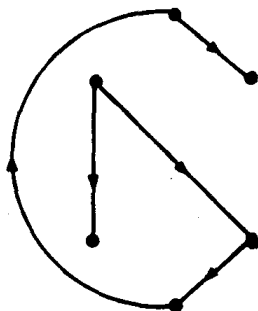
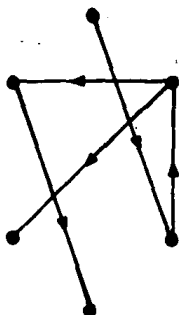
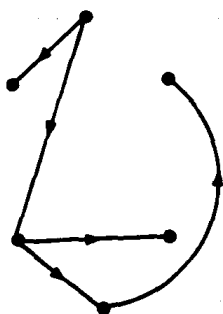
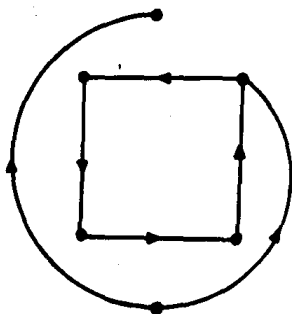
Por último ilustraremos los torneos de seis vértices que cumplen las condiciones que mencionamos con sus respectivas arborescencias.

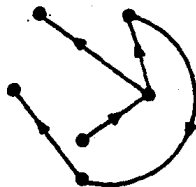
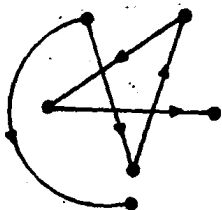
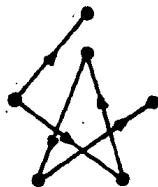
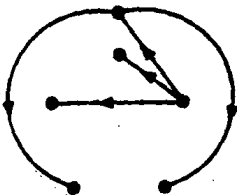
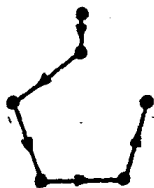


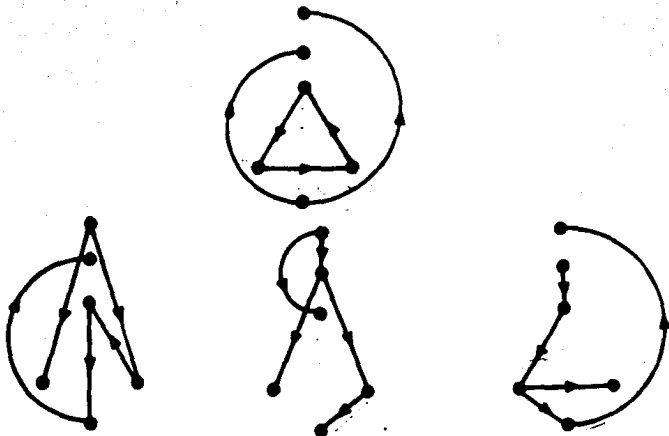












Meses después de haber escrito lo anterior, encontré un artículo de Ma Chung-fan y Cai Mao-cheng⁽¹⁾ los cuales definen $\tau(D)$ como el número máximo de arborescencias generadoras ajenas en un torneo D , y dicen que este es igual a $\max\{m \mid \sum_{i=1}^n \max(0, m - \text{grad}^-(v_i)) \leq m\}$ donde $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\text{grad}^-(v_i) \leq \text{grad}^-(v_j)$ si $i \leq j$.

Usando el resultado anterior demostraremos la siguiente

Proposición 14

Un torneo D_k tiene k arborescencias generadoras si y sólo si $\text{grad}^-(v) \leq k$ para todo vértice $v \in V(D_k)$.

Demostración:

•

El resultado se sigue de la proposición 5.

¹ CHUNG-FAN, M. - MAO-CHENG, C. The maximum number of arc-disjoint arborescences in a tournament. Journal of Graph Theory, 6, 205-202, 1982.

Sea $V(D_{2k}) = (v_1, \dots, v_{2k})$.

Sabemos por un resultado que $\sum_{i=1}^{2k} \text{grad}^-(v_i) = \frac{2k(2k-1)}{2}$.

Por hipótesis $\text{grad}^-(v) \leq k$ para todo vértice $v \in V(D_{2k})$ entonces $\max(0, k - \text{grad}^-(v_i)) = k - \text{grad}^-(v_i)$ por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{2k} \max(0, k - \text{grad}^-(v_i)) = \sum_{i=1}^{2k} (k - \text{grad}^-(v_i)) =$$

$$\sum_{i=1}^{2k} k - \sum_{i=1}^{2k} \text{grad}^-(v_i) = 2k^2 - \frac{2k(2k-1)}{2} = 2k^2 - (2k^2 - k) = k$$

Por la proposición 1 sabemos que $\left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = k$ es máximo por lo cual queda aprobada la proposición. ■

ARBORISCIDAD POR VÉRTICES

El propósito de este capítulo es dar cotas superiores para la arboriscidad por vértices. Los resultados que aparecen en este capítulo fueron encontrados en un artículo de G. Chartrand, H. Kronk y C. Wall [8].

La arboriscidad por vértices $\chi(G)$ de una gráfica G es el número mínimo de subconjuntos de $V(G)$ que cumplen con las siguientes condiciones:

- Forman una partición de $V(G)$.
- La gráfica generada por cada elemento de la partición es un bosque.

Si a una gráfica le damos una coloración minimal por vértices, cada una de las componentes conexas de cada subgráfica generada por cada clase cromática V_i , será isomorfa a K_i , por lo que $\rho(G) \leq \chi(G)$, donde $\rho(G)$ es la arboriscidad lineal por vértices y $\chi(G)$ es el número cromático por vértices de G .

Recordemos dos resultados acerca del número cromático:

Para toda gráfica G $\chi(G) \leq \Delta + 1$. [18, p. 250].

y el Teorema de Brooks:

Si G es una gráfica conexa y simple que no es un ciclo impar ni completa entonces $\chi(G) \leq \Delta$. [5, p. 122].

De aquí se desprenden los hechos siguientes:

- $\rho(G) \leq \Delta(G) + 1$ para toda gráfica G .
- $\rho(G) \leq \Delta(G)$ si G es conexa, simple y no es completa ni un ciclo impar.

Un tercer resultado queda establecido por:

iii) $\rho(G) \leq \chi(G) + 1$ donde $\chi(G)$ es la longitud de la trayectoria máxima de G , usando la proposición que relaciona el número cromático de una gráfica con la longitud de la trayectoria máxima $\chi(G)$, $\chi(G) \leq \rho(G) + 1$ [7, p. 132].

Observemos que todas estas cotas son demasiado grandes para la arboricidad por vértices en comparación de la conseguida por Chartrand, Kronk y Wall.

Teorema 1

Si $\Delta(G)$ denota el máximo grado de G entonces:

$$\rho(G) \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

donde $\lceil x \rceil$ es el mínimo entero no menor a x .

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre p , el número de vértices de G .

$$\text{Si } p = 1 \text{ entonces } 1 = \rho(G) \leq \left\lceil \frac{1 + 0}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

Supongamos que para toda gráfica H con $p - 1$ vértices, $p \geq 2$, la desigualdad es cierta, y sea G una gráfica con p vértices y $v \in V(G)$. Sea $H = G - (v)$

Por nuestra hipótesis de inducción $r = \rho(H) \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(H)}{2} \right\rceil$, por lo cual existe una partición V_1, \dots, V_r de $V(H)$ donde cada componente conexa de $\langle V_i \rangle$ es una subgráfica acíclica de H .

$$\text{Caso 1: } r < \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

Si $r < \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$ entonces $V_1, \dots, V_r, (v) = V_{r+1}$ es una buena partición para concluir nuestro resultado.

$$\text{Caso 2: } r = \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

i) Existe un conjunto V_i que contiene a lo más un vértice adyacente a v .

Supongamos lo contrario, es decir, $|V_i \cap N(v)| \geq 2$ para todo $i = (1, \dots, r)$.

Entonces $\text{grad}(v) \geq 2r = 2 \left\{ \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\} > \Delta(G)$. Lo cual es una contradicción ya que $\text{grad}(v) \leq \Delta(G)$.

Llamemos V_i a el conjunto de la partición tal que $|V_i \cap N(v)| \leq 1$, entonces $V_i \cup \{v\}$ es acíclica y por lo tanto:

$V_1, \dots, V_i \cup \{v\}, \dots, V_r$ es una partición acíclica de G , y

$$\rho(G) = r = \left\{ \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\} \leq \left\{ \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\} \quad \blacksquare$$

El resultado siguiente mejora al anterior en el caso de gráficas planas.

Teorema 2

Si G es una gráfica plana $\rho(G) \leq 3$.

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre p , el número de vértices de G .

Si $p = 1$ entonces $\rho(G) = 1 \leq 3$.

Supongamos que para toda gráfica plana H con p vértices, la desigualdad a demostrar es cierta.

Sea G una gráfica plana con $p + 1$ vértices.

Como G es una gráfica plana, existe un vértice $v \in V(G)$, con grado menor o igual a 5, [5, p. 144]. Consideremos $G - \{v\}$. Por nuestra hipótesis de inducción $\rho(G - \{v\}) \leq 3$, entonces se puede dar una partición V_1, V_2 y V_3 , no necesariamente cada V_i distinta del vacío, de $V(G - \{v\})$ donde cada V_i induce una subgráfica acíclica de $G - \{v\}$. Como $\text{grad}(v) \leq 5$, existe un entero $i = (1, 2, 3)$ tal que $|V_i \cap V_G(v)| \leq 1$. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que V_1 es dicho subconjunto. Así pues $V_1 \cup \{v\}, V_2$ y V_3 constituyen

una partición de $V(G)$ donde $\langle V_1 \cup \langle v_1 \rangle \rangle$, $\langle V_2 \rangle$ y $\langle V_3 \rangle$ inducen una gráfica acíclica, por lo tanto $\rho(G) \leq 3$. ■

Teorema 3:

La arboricidad por vértices de una gráfica n -partita completa $K_n \cong K(p_1, \dots, p_r)$, con $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n$ es:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n - \max\left(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq n - k\right)$$

donde definimos $p_0 = 0$.

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre n .

Si $n = 1$, $\rho(K(p_1)) = 1$ y $\max\left(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq n - k\right) = 0$.

Entonces $1 = n - \max\left(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq n - k\right) = \rho(K(p_1))$.

Por lo tanto la igualdad es cierta para $n = 1$.

Supongamos que el teorema se cumple para $k \leq n$.

Sea $K(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})$ con partición V_1, \dots, V_{n+1} .

Consideremos $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$ y supongamos que para ésta gráfica:

$$\sum_{i=0}^t p_i \leq n - t \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{t+1} p_i > n - (t + 1) \quad (I)$$

Por la hipótesis de inducción $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = n - t$.

Además $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}))$ por ser

$K(p_1, p_2, \dots, p_n)$ una subgráfica de $K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. Sea

A_1, \dots, A_{n-t} la partición de $V(K(p_1, p_2, \dots, p_n))$

donde cada $\langle A_i \rangle$ genera un bosque.

$V(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) \cup V_{n+1} = V(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}))$ de

aquí que $A_1, \dots, A_{n-t}, A_{n-t+1} = V_{n+1}$ sea una partición de

$V(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}))$ donde cada $\langle A_i \rangle$ genera un bosque. Por

lo tanto:

$$\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) \leq \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) + 1$$

Entonces $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) + 1$
 $\rho(K(p_1, p_2, \dots, p_n)) = \rho(K(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}))$.

Caso 1: $\sum_{i=0}^{n+1} p_i > (n+1) - (t+1) = n-t$.

Por (I) $\sum_{i=0}^k p_i \leq n-t < (n+1) - t$, entonces por la hipótesis de este caso $\max(k \mid \sum_0^k p_i \leq (n+1) - k) = t$.

Por lo tanto:
 $(n+1) - \max(k \mid \sum_0^k p_i \leq (n+1) - k) = n+1-t$

por lo cual queremos demostrar en este caso:

$\rho(K(p_1, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, \dots, p_n)) + 1$

Supongamos $\rho(K(p_1, \dots, p_{n+1})) = \rho(K(p_1, \dots, p_n))$.

Consideremos la gráfica $(n+1)$ -partita completa;

$K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+1})$, la cual es una subgráfica de G , entonces;

$\rho(K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+1})) \leq \rho(K(p_1, \dots, p_{n+1}))$

$\rho(K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+1})) \leq n-t$

$$\begin{aligned} |V(K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+1}))| &= \sum_{i=0}^{n+1} p_i = \\ &= \sum_{i=0}^{t+1} p_i + \sum_{i=t+2}^{n+1} p_i = \\ &= \sum_{i=0}^{t+1} p_i + p_{t+1}(n-t). \end{aligned}$$

Esto implica que en cualquier partición del conjunto de vértices $V(K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+1}))$ en $q-t$ subconjuntos al menos uno tendrá cardinalidad mayor o igual a:

$$\left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{t+1} p_i + (n-t)p_{t+1}}{(n-t)} \right\rceil$$

Como por hipótesis $\sum_{i=0}^{t+1} p_i > n-t$

$$\left\lfloor \frac{\sum_{i=0}^{t+1} p_i + (n-t)p_{t+1}}{(n-t)} \right\rfloor \geq p_{t+1} + 2$$

Por lo cual existe un conjunto con al menos $p_{t+1} + 2$ vértices, pero cualquier subgráfica de $K(p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n-1})$ generada con esta cantidad de vértices no induce una gráfica acíclica lo cual es una contradicción.

Por lo tanto si $\sum_{i=0}^{t-1} p_i > n-t$,

$$\rho(K(p_1, \dots, p_{n-1})) = (n+1) - \max(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq (n+1) - k)$$

Caso 2: $\sum_{i=0}^{t-1} p_i \leq n-t$.

Por (I.) $\sum_{i=0}^{t-1} p_i > n-t-1$ entonces

$$\sum_{i=0}^{t-2} p_i > n-t-1 = (n+1) - (t+2)$$

por lo cual $\max(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq (n+1) - k) = t+1$, entonces

$$(n+1) - \max(k \mid \sum_{i=0}^k p_i \leq (n+1) - k) = (n+1) - (t+1) = n-t$$

Entonces en este caso debemos demostrar:

$$\rho(K(p_1, \dots, p_{n-1})) = \rho(K(p_1, \dots, p_n))$$

Como $\sum_{i=0}^{t-1} p_i \leq n-t$, si V_1, \dots, V_{n-1} es la partición natural de θ entonces $|V_i \cup \dots \cup V_{i+t}| \leq |V_{i+2}, \dots, V_{n-1}|$, así pues a cada conjunto V_j , $t+2 \leq j \leq n+1$, le podemos añadir un elemento de $V_i \cup \dots \cup V_{i+t}$ hasta acabar con éstos. Cada uno de los conjuntos $V_j \cup \{u\}$, $t+2 \leq j \leq n+1$ y $u \in (V_i \cup \dots \cup V_{i+t})$, genera una gráfica isomorfa a $K(1, p_j)$ entonces $\rho(K(p_1, \dots, p_{n-1})) \leq n-t$ pero:

$$n-t = \rho(K(p_1, \dots, p_n)) \leq \rho(K(p_1, \dots, p_{n-1})) \leq n-t$$

por lo tanto $\rho(K(p_1, \dots, p_{n-1})) = n-t$, que es lo que

queríamos demostrar. ■

Corolario 3-1

Si K_n es una gráfica completa entonces $\rho(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Demostración:

$K_n \cong K(p_1, \dots, p_n)$, $p_i = 1$, $1 \leq i \leq n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \max(k \mid \sum_0^k p_i \leq n - k) &= \max(k \mid \sum_0^k 1 \leq n - k) \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por el teorema anterior:

$$\begin{aligned} \rho(K_n) &= n - \max(k \mid \sum_0^k p_i \leq (n+1) - k) \\ &= \begin{cases} n - \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ n - \frac{n-1}{2} & n \text{ impar} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ impar} \end{cases} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 3-2

Si $K(p_1, p_2)$, $p_1 \leq p_2$, es una gráfica bipartita completa

$$\text{entonces } \rho(K(p_1, p_2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = 1 \\ 2 & \text{si } p_1 \geq 2 \end{cases}$$

Demostración:

$$\max(k \mid \sum_0^k p_i \leq 2 - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = 1 \\ 0 & \text{si } p_1 \geq 2 \end{cases}$$

Entonces por el Teorema 3:

$$\begin{aligned} \rho(K(p_1, p_2)) &= 2 - \max(k \mid \sum_0^k p_i \leq 2 - k) \\ &= 2 - \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = 1 \\ 0 & \text{si } p_1 \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = 1 \\ 2 & \text{si } p_1 \geq 2 \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ARBORISCIDAD LINEAL POR VERTICES

El propósito de este capítulo es dar cotas superiores para la arboriscidad lineal por vértices de una gráfica.

Nuestra contribución a este tema consiste en encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica con grado máximo impar tuviera una arboriscidad lineal por vértices menor a $\left[\frac{1 + \Delta(G)}{2} \right]$ cuando $\Delta(G) = 2n - 1$ y $V(G) = 2n$. También se calculó la arboriscidad lineal por vértices para las gráficas n-partitas completas.

Veinte años después del artículo escrito por Chartrand, Kronk y Wall [8] del cual nos referimos en el capítulo anterior, Poh, [17], realizó un artículo donde demostró que la arboriscidad lineal por vértices de una gráfica plana también es menor o igual a 3. Antes de transcribir este artículo daremos algunas definiciones y nomenclatura que necesitaremos.

Definición

Un bosque lineal es un bosque cuyas componentes conexas son trayectorias.

Definición

Una partición lineal V_1, \dots, V_n de una gráfica G , es una partición de $V(G)$ donde cada $\langle V_i \rangle$ es un bosque lineal.

Definición

La arboriscidad lineal por vértices $a(G)$ de una gráfica G es el número mínimo de subconjuntos que cumplen la propiedad de ser una partición lineal.

Definición

Una trayectoria T en G es minimal si $\langle V(T) \rangle = T$.

Definición

Una gráfica plana es maximal si para cualquier par de vértices u y v , $u \neq v$, de $V(G)$ no adyacentes $G \cup \{(u, v)\}$ no es plana.

Definición

Una gráfica plana es internamente maximal si su frontera exterior es un ciclo y cada una de sus regiones interiores es un triángulo. A los vértices del ciclo se les llama exteriores y a los otros interiores.

Definición

Si $a(G) \leq 3$ entonces existe una partición lineal (V_1, V_2, V_3) de $V(G)$ (al menos una distinto del vacío). Si las trayectorias T_1 y T_2 son componentes conexas de $\langle V_1 \rangle$ y $\langle V_2 \rangle$ respectivamente, a la partición (V_1, V_2, V_3) le llamaremos T_1T_2 -partición.

Lema 1

Sea G una gráfica plana internamente maximal con cara exterior (v_1, \dots, v_k) , $k \geq 3$, y tal que para algún entero r , $1 \leq r \leq k$, las trayectorias $P_1 = [v_1, \dots, v_r]$ y $P_2 = [v_{r+1}, \dots, v_k]$ son minimales. Entonces G tiene una P_1P_2 -partición (V_1, V_2, V_3) .

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre p , el número de vértices de G .

Si $p = 3$ el Lema es cierto.

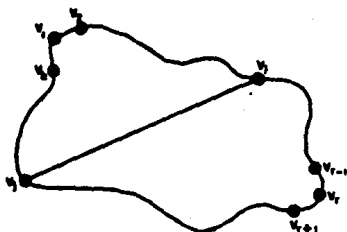
Supongamos el Lema cierto para $|V(G)| \leq p$.

Sea G una gráfica plana con $p + 1$ vértices que cumple con las condiciones del Lema. Demostremos que G tiene una P_1 -partición (V_1, V_2, V_3) .

Caso 1:

Existe una arista $(v_i, v_j) \in E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_{r+1})\}$, para algún $i \in \{1, \dots, r\}$, y $j \in \{r+1, \dots, k\}$.

Sean G_1 y G_2 dos subgráficas planas maximales de G cuyas caras exteriores son $(v_1, \dots, v_i, v_j, v_{r+1}, \dots, v_r, v_1)$ y $(v_1, v_{r+1}, \dots, v_{r+1}, v_j, v_i)$ respectivamente.



$|V(G_1)| < |V(G)| = p + 1$, $|V(G_2)| < |V(G)| = p + 1$, además las trayectorias $P_1^1 = [v_1, \dots, v_i]$, $P_2^1 = [v_j, v_{r+1}, \dots, v_r]$,

$P_1^2 = [v_1, v_{r+1}, \dots, v_r]$ y $P_2^2 = [v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_j]$ son minimales por ser subgráficas de trayectorias minimales, entonces por nuestra hipótesis de inducción G_1 tiene una $P_1^1 P_2^1$ -partición (V_1^1, V_2^1, V_3^1) y G_2 una $P_1^2 P_2^2$ -partición (V_1^2, V_2^2, V_3^2)

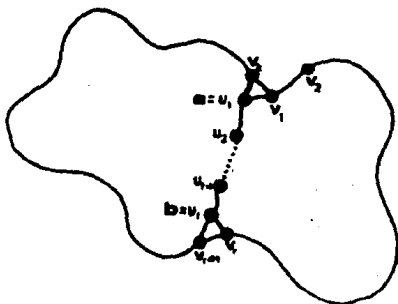
$(V_1^1 \cup V_1^2, V_2^1 \cup V_2^2, V_3^1 \cup V_3^2)$ es la partición requerida.

Caso 2:

No existe una arista (v_i, v_j) como en el caso 1.

En este caso la cara exterior no tiene aristas "que la crucen", entonces como es internamente maximal, los vértices interiores de G inducen una subgráfica conexa a la cual llamaremos H . Por esta misma razón las aristas $v_1 v_2, \dots, v_r v_{r+1}$ son aristas de una región interior triangular $v_1 v_2 a$ y $v_r v_{r+1} b$, donde a y b pertenecen a $V(H)$ (posiblemente $a = b$).

Sean $P = \{a = u_1, u_2, \dots, u_k = b\}$, $k \geq 1$, la trayectoria más corta en H entre a y b , G_1 y G_2 las gráficas planas internamente maximales con caras exteriores $(v_1, v_2, v_r, u_1, u_{k-1}, \dots, u_1, v_1)$ y $(u_1, u_2, \dots, u_k, v_{r+1}, \dots, v_r, u_1)$ respectivamente. Si $a = b$ entonces $G_1 \cong K_2$ si $r = 1$ y $G_2 \cong K_2$ si $r = k - 1$.



Como $|V(G_1)| < |V(G)|$ y P_1 y P son trayectorias minimales de G_1 , por nuestra hipótesis de inducción G_1 tiene una $P_1 P$ -partición (V_1', V_2', V_3') , análogamente G_2 tiene una PP_2 -partición (V_1'', V_2'', V_3'') $(V_1' \cup V_1'', V_2' \cup V_2'', V_3' \cup V_3'')$ es la partición requerida de G . ■

Teorema 1

Si G es una gráfica plana $a(G) \leq 3$.

Demostración:

Si $|V(G)| \leq 3$ el teorema es claro.

Si $|V(G)| \geq 4$, sea G^* , $|V(G^*)| = |V(G)|$, una gráfica plana maximal que contiene a G . Es claro que $a(G) \leq a(G^*)$. Por ser G^* maximal, ésta es internamente maximal y su cara exterior es un triángulo, sea éste (v_1, v_2, v_3) . Las trayectorias $P_1 = [v_1, v_2]$ y $P_2 = [v_2, v_3]$ son minimales, entonces por el Lema 1 $a(G^*) \leq 3$ y por lo tanto $a(G) \leq 3$. ■

Matsumoto [13], en el mismo año de la publicación de Poh, demostró que para toda gráfica G $a(G) \leq \left\lceil \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rceil$ y si $\Delta(G) = 2n$ entonces $a(G) = \left\lfloor \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rfloor$ si y sólo si $G \cong K_{2n+1}$ o G es un ciclo. Daremos unas definiciones necesarias para el mejor entendimiento de ellos.

Definición

Una n -coloración de G es una función de $V(G)$ a $\{1, \dots, n\}$.

Con respecto a una n -coloración V_i denotará el conjunto de todos los vértices de G coloreados con i . $G_i = \langle V_i \rangle$. $\deg_i(v) = |V_0(v) \cap V_k|$

Definición

Una n -coloración σ de G es arista minimal si $\sum_{i=1}^n |A(G_i)|$ es mínimo con respecto a todas las n -coloraciones.

Definición

Una n -coloración es minimal si es arista minimal y el número total de ciclos contenidos es mínimo con respecto a todas las

n -coloraciones arista minimales de G .

Lema 2:

Sea δ una n -coloración arista minimal de una gráfica G , $n \geq 1$, entonces $\Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor$, $k = 1, \dots, n$.

Demostración:

Si $n = 1$ no hay nada que demostrar, así pues supongamos $n \geq 2$.

Supongamos $\Delta(G) > \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor$ para algún k .

Sea $v \in V$ tal que $\text{grad}(v) > \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor$

Sea j tal que $\text{grad}_j(v) > \text{grad}_i(v)$ $i = 1, \dots, n$.

$n \text{grad}_j(v) = \sum_{i=1}^n \text{grad}_i(v) \leq \Delta(G)$

Entonces $\text{grad}_j(v) \leq \frac{\Delta(G)}{n}$ por lo que $\text{grad}_j(v) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor$.

Cambiamos el color k de v por el color j .

Entonces G_k pierde $\text{grad}_k(v)$ aristas y G_j gana $\text{grad}_j(v)$, por lo que $\sum_{i=1}^n |\Delta(G_i)|$ decrece en:

$$\text{grad}_k(v) - \text{grad}_j(v) > \left\{ \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor + 1 \right\} - \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor \geq 1$$

aristas en esta nueva coloración. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que δ era una n -coloración minimal.

Por lo tanto $\Delta(G_k) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor$ para todo $k = 1, \dots, n$. ■

Lema 3

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$.

En una n -coloración minimal de G , y $\Delta(G) = 2n$ si $v \in V(G)$ satisface $\text{grad}(v) = 2$, entonces $\text{grad}_j(v) = 2$ para todo entero j , $1 \leq j \leq n$.

Demostración:

Supongamos el Lema falso.

Por el Lema anterior $\alpha(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n} \right\rceil = 2$, $1 \leq i \leq n$, entonces si existiera j tal que $\text{grad}(v) \neq \text{grad}(v)$, $\text{grad}(v) \leq 1$. Cambiemos el color k de v por el color j , entonces G_v pierde dos aristas y G gana $\text{grad}(v) + 1$ aristas, por lo que $\sum_{i=1}^n \{AG_i\}$ decrece en $\text{grad}(v) - \text{grad}(v) + 1$. Esto contradice la minimalidad por aristas de la coloración, por lo tanto $\text{grad}(v) = 2$ para todo j , $1 \leq j \leq n$. ■

Lema 4

Si G es una gráfica conexa, entonces existe una $\left(1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{n} \right\rceil\right)$ -coloración arista minimal de G tal que cada subgráfica inducida G_v tiene a K_2 o K_1 como componentes conexas.

Demostración:

$$1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil > \frac{\Delta(G)}{2} \quad \text{entonces} \quad 2 > \frac{\Delta(G)}{1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil} \quad \text{por lo tanto}$$

$$1 \geq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil} \right\rceil.$$

Para $n = 1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ el Lema 2 anterior nos dice que existe una $\left(1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración donde $\Delta(G_v) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil} \right\rceil \leq 1$.

Esto implica que cada componente conexa de G_v es isomorfa a K_1 o a K_2 . ■

Teorema 2

$\alpha(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ para toda gráfica G .

Demostración:

Sea α una $\left(1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil\right)$ -coloración arista minimal de G

donde cada subgráfica inducida G_i tiene a K_1 o K_2 como componentes conexas, entonces por el Lema anterior existe una $V_1, \dots, V_r, \left[\frac{r-1}{2} \right]$ partición lineal de G , por lo tanto $\Delta(G) \leq 1 + \left[\frac{\Delta(G)}{2} \right]$.

Lema 5

Si G es conexa y $\Delta(G) \leq 2$ entonces G es un ciclo o una trayectoria.

Demostración:

Si $|V(G)| \leq 2$ entonces $G \cong K_1$ o $G \cong K_2$ por lo tanto el Lema se cumple.

Supongamos $|V(G)| \geq 3$.

Sea $T = [u_1, \dots, u_n]$ una trayectoria de longitud máxima de G .

Si $T = G$ entonces no hay nada que demostrar.

Supongamos $T \neq G$. Tenemos que demostrar que G es un ciclo.

Observación:

Si $u_1 \neq u_n$ y $u_1 \neq u_n$ entonces $V_n(u_1) = \{u_{1-1}, u_{1+1}\}$ ya que $\text{grad}(u_1) \leq \Delta(G) \leq 2$.

o) $V(G) = V(T)$

Demostración: Supongamos $V(G) \neq V(T)$. Entonces existe un vértice $v \in (V(G) - V(T))$ tal que $(v, u_j) \in A(G)$, $j = 1, \dots, n$, por ser G conexa.

Por nuestra observación si $(v, u_j) \in A(G)$ entonces $u_j = u_1$ o $u_j = u_n$, pero en ambos casos $T \cup \{(u_1, v)\}$ y $T \cup \{(u_n, v)\}$ son trayectorias de longitud mayor a T , lo que nos lleva una contradicción con la suposición de la maximalidad de T . Por lo tanto $V(G) = V(T)$.

Como $T \neq G$ y $V(G) = V(T)$, existe una arista a en $A(G)$ que no está en $A(T)$. Por nuestra observación a no puede ser incidente

a u_j , si $k = 2, \dots, n-1$, por lo que $a = (u_1, u_n)$. En este caso $G = T \cup (a)$ la cual es un ciclo. ■

Lema 6

Sea G una gráfica tal que $\Delta(G) = 2n$ y ν una n -coloración minimal de G , donde existe un color i tal que G_i contiene un ciclo C . Entonces para todo $v, v \in V(C)$, y cualquier $j, 1 \leq j \leq n$:

a) $\text{grad}(v) = 2$

b) La n -coloración ν' , obtenida al recolorar v por el color k es minimal.

c) $N_G(v) \cap V_j = \{v^+, v^-\}$, donde v^+ y v^- son los vértices terminales de una trayectoria en G_j , de la cual es una componente conexa.

Demostración:

Como $v \in V(C)$, por nuestra hipótesis, $|\text{grad}(v)| \geq 2$.

Por el Lema 2 $\Delta(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n}{n} \right\rfloor = 2$, entonces $\text{grad}(v) \leq 2$, por lo tanto $\text{grad}(v) = 2$, con la cual queda demostrado el inciso a).

$\text{grad}(v) = 2$ entonces, aplicando el Lema 3, $\text{grad}_j(v) = 2$ para todo $j, 1 \leq j \leq n$.

Entonces si recoloramos a v por un color $k, 1 \leq k \leq n$, llamemos ν' a esta nueva coloración. $\sum_{i=1}^n |A(G_i)|$ no sufrirá alteración en ν' , por lo cual ν' también sería una coloración arista-minimal.

Sea $N_G(v) \cap V_j = \{v^+, v^-\}$. En ν' el ciclo C se convirtió en una trayectoria, como ν era minimal, entonces en ν' debe haber un nuevo ciclo, el cual debe de estar en G_j y además v, v^+ y v^- deben formar parte de él, por lo cual, aplicando el Lema 3,

$\text{grad}(v^*) \leq 2$ y $\text{grad}(v^{\sim}) \leq 2$ en G^* y $\text{grad}(v^*) \geq 1$ y $\text{grad}(v^{\sim}) \geq 1$ en G . Lo anterior significa que tanto v^* como v^{\sim} son los extremos de una trayectoria que es una componente conexa en G la coloración β , además el número de ciclos en G es el mismo número de ciclos en G^* , por lo tanto β es minimal. ■

Lema 7

Sea β una n -coloración minimal de una gráfica G , $\chi(G) = 2n$, $n \geq 2$. Si G contiene un ciclo C para algún i , $1 \leq i \leq n$, entonces:

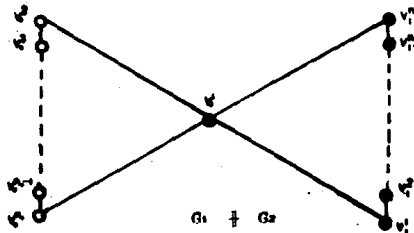
- a) C es un triángulo, con vértices u, v, z .
- b) Para todo j , $j \neq i$, existen dos vértices distintos $u_j, v_j \in V(G)$ los cuales son adyacentes a z .
- c) La subgráfica inducida $\langle u_j, v_j, z, u_j, v_j \rangle$ es isomorfa a K_5 .

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $G_1 = G_1$ y $G_2 = G_2$

Sean $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = H$, y $C = (v_1^1, \dots, v_n^1)$ un ciclo de G .

Aplicando el Lema 6 a v_n^1 , sabemos, que existe una componente conexa en G_2 la cual es una trayectoria, sea ésta (v_1^1, \dots, v_1^1) , y además v_1^1 y v_1^1 son los únicos vértices adyacentes a v_n^1 en G_2 .



o Color 1. ■ Color 2.

Si cambiamos el color de v_n^1 por el color 2 no perdemos la minimalidad. Llamemos $\mathcal{C}^{(n)}$ a esta nueva coloración y $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}$ a los vértices coloreados con 1 y 2 respectivamente en $\mathcal{C}^{(n)}$. En la coloración $\mathcal{C}^{(n)} = (v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \dots, v_1^{(n)})$ es un ciclo de $G_2^{(n)}$, entonces aplicando el Lema 3 a $v_1^{(n)}$ sabemos que existe una componente conexa en $G_1^{(n)}$, la cual es una trayectoria, sea ésta $[v_2^{(n)}, \dots, v_2^{(n)}]$, podemos ahora asignar a $v_1^{(n)}$ el color 1, sin perder la minimalidad y se formará un ciclo en $G_2^{(n)}$. Podemos seguir este procedimiento indefinidamente.

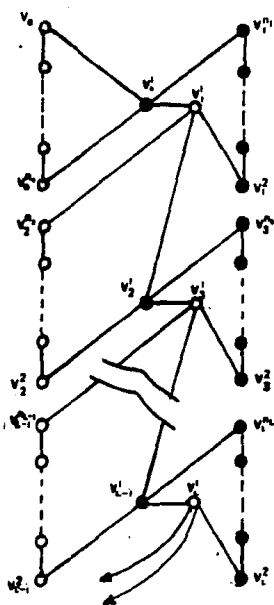
Supongamos que ya hemos obtenido los vértices v_l^j de H y una n -coloración minimal $\mathcal{C}^{(k)}$ para todo k , $0 \leq k < l$, y para toda j , $0 \leq j \leq n_k$. Existe un ciclo $(v_{l-1}^1, v_l^1, \dots, v_l^1)$ en $G_{v_l^1}^{(l-1)}$ donde $v(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ es par} \\ 2 & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$.

Aplicando el Lema 3 al vértice v_l^1 obtenemos una trayectoria $[v_{l-1}^1, \dots, v_{l-1}^1]$ en $G_{v_l^1}^{(l-1)}$.

Pongamos el color $v(l+1)$ a v_l^1 y llamemos $\mathcal{C}^{(l)}$ a esta nueva coloración que resulta también ser minimal.

Sea L el máximo de los enteros l , para los cuales los vértices v_k^l de H son todos distintos, para todo k , $0 \leq k \leq l$, y todo j , $0 \leq j \leq n_k$. Entonces al menos un vértice v_{L+1}^j es idéntico a algún $v_k^{j'}$, $1 \leq j \leq n_{L+1}$, $0 \leq k \leq L$, $1 \leq j' \leq n_k$.

Cuando aplicamos el Lema 3 a v_{L+1}^1 encontramos una trayectoria $[v_{L+1}^1, \dots, v_{L+1}^1]$, donde v_{L+1}^1 y v_{L+1}^1 son adyacentes a v_L^1 . Es fácil convencernos de que $[v_{L+1}^1, \dots, v_{L+1}^1]$ debe ser igual a una de las trayectorias siguientes $[v_0^2, \dots, v_0^1]$, $[v_0^1, v_1^1, \dots, v_1^2]$, \dots , $[v_{L-2}^1, v_{L-1}^1, \dots, v_{L-1}^2]$.

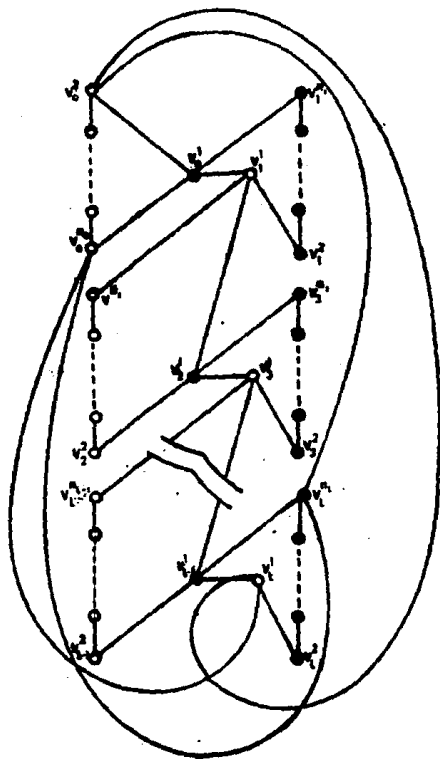


Supongamos $[v_{L+1}^1, \dots, v_{L+1}^{L+1}]$ diferente a $[v_n^2, \dots, v_n^n]$, entonces $[v_{L+1}^1, \dots, v_{L+1}^{L+1}] = [v_k^1, v_{L+1}^{k+1}, \dots, v_{L+1}^k]$, para algún k , $0 \leq k \leq L-2$. Entonces $v_k^1 = v_{L+1}^1$ o $v_k^1 = v_{L+1}^{L+1}$. Como v_{L+1}^1 y v_{L+1}^{L+1} son adyacentes a v_L^1 , v_k^1 debe ser adyacente a v_L^1 .

Entonces $v_L^1 = Vv(v_k^1) = (v_{L-1}^1, v_L^1, v_{L+1}^1, v_{L+1}^{L+1})$ si $k \neq 0$ y $v_L^1 = Vv(v_0^1) = (v_n^2, v_n^n, v_L^1, v_L^1)$ si $k = 0$. Estos dos casos son imposibles ya que estamos suponiendo $L > k + 2$.

Por lo tanto $[v_{1,1}^1, \dots, v_{1,1}^{1+1}] = [v_n^2, \dots, v_n^n]$.

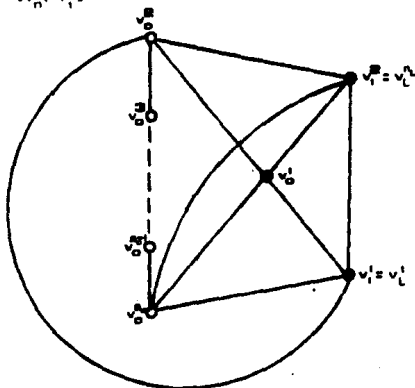
En consecuencia v_i^1 es adyacente a v_n^2 y a v_n^n . Notemos que $[v_i^1, \dots, v_i^{1+1}] = Vz$.



Consideremos ahora la coloración $z^{(1)}$ obtenida a partir de

$G_1^{(1)}$ aplicando el color 1 a v_1^1 . Entonces $(v_0^1, v_0^2, \dots, v_n^{(1)})$ es un ciclo en $G_1^{(1)}$. $|V_H(v_0^2) \cap V_2^{(1)}| = 2$ y $v_0^1, v_1^1 = V(v_0^2)$. entonces $V_H(v_0^2) \cap V_2^{(1)} = (v_0^1, v_1^1)$ donde v_0^1 y v_1^1 son los vértices terminales de una trayectoria en $G_2^{(1)}$, la cual es una componente conexa. Por lo tanto $L = 1$.

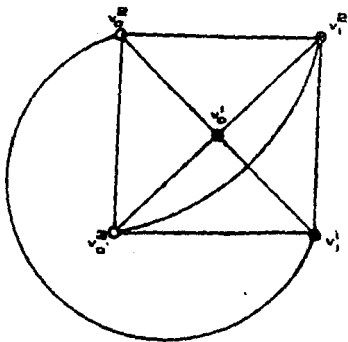
Entonces $(v_0^1, v_1^1, \dots, v_1^2) = (v_{l-1}^1, v_L^1, \dots, v_L^2)$. Pero v_1^1 era vértice terminal de la trayectoria por lo que tenemos: $(v_0^1, v_1^1, \dots, v_1^2) = (v_0^1, v_1^2)$



Regresemos a la coloración inicial \mathcal{N} y recoloreemos a v_0^2 con el color 2. En G_2 se forma el ciclo (v_0^2, v_1^2, v_1^1) y en $G_1^{(1)}$ se obtiene la trayectoria $(v_0^2, \dots, v_n^2, v_1^1)$, aplicando el Lema 3 a v_1^1 obtenemos que este vértice sólo es adyacente a v_0^2 y a v_n^2 pero sabíamos de antemano que v_1^1 era adyacente a v_n^2 , por ser $v_1^1 = v_1^2$, por lo tanto $v_n^2 = v_0^2$ de aquí que el ciclo C sea un triángulo. La componente conexa que contiene a v_1^1 en G_2 tiene solamente dos

vértices v_1^1 y v_1^2 los cuales son adyacentes a v_n^1 , por lo tanto $\langle (v_1^1, v_1^2, v_n^1, v_1^1, v_1^2) \rangle \cong K_2$.

Con esto terminamos la demostración del lema. \square



Teorema 3

Sea G una gráfica conexa. Si $\Delta(G)$ es par, entonces G es un ciclo o isomorfa a K_{2n+1} si y sólo si la arboricidad por vértices $\rho(G)$ de G es $1 + \frac{\Delta(G)}{2}$.

Demostración:

•

Caso 1: G es un ciclo.

Si G es el ciclo trivial K_1 $\rho(G) = 1 = 1 + \frac{\Delta(G)}{2}$.

Sea $G = (v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$.

Como G es un ciclo no trivial $\rho(G) \geq 2$ y por el Teorema 1 del capítulo anterior $\rho(G) \leq \left\lfloor \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 2$.

Por lo tanto $\rho(G) = 2$.

Caso 2: $\chi(G) = K_{2n+1}$

Por el Corolario del Teorema 3 del capítulo anterior,

$$\chi(G) = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor = n+1 = 1 + \frac{\chi(G)}{2}.$$

Caso 1: $\chi(G) = 0$.

Como G es conexa $G \cong K_1$, por lo cual se cumple la proposición.

Caso 2: $\chi(G) = 2$.

Como G es conexa, por el Lema 5, G es un ciclo o una trayectoria. Como $\chi(G) = 1 + \frac{\chi(G)}{2} = 1 + \frac{2}{2} = 2$, tenemos que G debe ser un ciclo, y de aquí se cumple la proposición.

Caso 3: $\chi(G) = 2n$, $n \geq 2$.

Como $1 + \frac{\chi(G)}{2} = 1 + \frac{2n}{2} = 1 + n$, para cualquier partición n -minimal, al menos existe un conjunto V_i , tal que $\langle V_i \rangle$ contiene un ciclo. Aplicando el Lema 7, obtenemos que ese ciclo es un triángulo $\langle u_i, v_i, z \rangle$, y para cada $j \neq i$, existen exactamente dos vértices u_j y v_j tales que $\langle u_i, v_i, z, u_j, v_j \rangle \cong K_5$, además como la minimalidad de la coloración no se pierde al cambiar el color de z por el color j para formar un nuevo ciclo en $\langle V_i \rangle$, tenemos que la gráfica generada $\langle \langle u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, z \rangle \rangle \cong K_{2n+1}$.

Supongamos que existe $x = (V(G) - \langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle)$.

Como G es conexa existe una trayectoria T que une a x con $\langle \langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle \rangle$. Sea $T = [x, a_1, a_2, \dots, a_m]$ la trayectoria más corta de x a $\langle \langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle \rangle$, entonces: $a_m = \langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle$ y $a_{m-1} = \langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{grad}(a_m) &= |V(a_m)| \geq |\langle u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z \rangle \cup \{a_{m-1}\}| \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción al supuesto de que $\Delta(G) = 2n$.

Por lo tanto $V(G) = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z)$ y

$G = \langle (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, z) \rangle \cong K_{n+1}$. ■

Corolario

Sea G una gráfica conexa. Si $a(G)$ es par, entonces G es un ciclo o isomorfa a K_{n+1} si y sólo si la arboriscidad lineal por vértices $a(G)$ de G es $1 + \frac{\Delta(G)}{2}$.

Demostración:

•

Caso 1: G es un ciclo.

Si G es el ciclo trivial Es $a(G) = 1 = 1 + \frac{\Delta(G)}{2}$.

Sea $G = (v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$.

Como G es un ciclo no trivial $a(G) \geq 2$ y por el Teorema 2

$$a(G) < \left\{ \frac{1 + \Delta(G)}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \right\} = 2.$$

Por lo tanto $a(G) = 2$.

Caso 2: $G \cong K_{n+1}$

Aplicando el Teorema 2 y 3 obtenemos:

$$n + 1 = \rho(K_{n+1}) \leq a(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil = 1 + n.$$

•

Caso 1: $\Delta(G) = 0$.

Como G es conexa $G \cong K_1$, por lo cual se cumple la proposición.

Caso 2: $\Delta(G) = 2$.

Como G es conexa, por el Lema 5, G es un ciclo o una trayectoria. Como $a(G) = 1 + \frac{\Delta(G)}{2} = 1 + \frac{2}{2} = 2$, tenemos que G debe ser un ciclo, y de aquí se cumple la proposición.

Caso 3: $\Delta(G) = 2n$, $n \geq 2$.

Si aplicamos una n -coloración minimal a G entonces por el Lema 2 $\alpha(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil = \frac{2n}{2} = n$, así pues, las componentes conexas de G son trayectorias o ciclos. Si solamente fueran trayectorias, entonces $\alpha(G) = n$ pero esto es una contradicción con el hecho de que $\alpha(G) = 1 + \frac{\Delta(G)}{2} = 1 + \frac{2n}{2} = 1 + n$, por lo cual existe un ciclo en algún G_i , entonces aplicando el mismo procedimiento que en el caso 1 del teorema anterior obtenemos que $G \cong K_{2n}$. ■

Ahora daremos un pequeño complemento al Teorema anterior con condiciones necesarias y suficientes para que $\alpha(G) < \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ cuando $|V(G)| = 2n$, $\Delta(G) = 2n - 1$ para $n \geq 3$.

Proposición 1

Sea $\Delta(G) = 2n - 1$, $|V(G)| = 2n$, $n \geq 3$.

$\alpha(G) < \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil = n - 1$ si y solamente si sucede una de las siguientes condiciones:

1) Existen dos vértices no adyacentes $u, v \in V(G)$ tal que $\text{grad}(u) \leq 2n - 3$, $\text{grad}(v) \leq 2n - 3$ y dos vértices distintos x, y, z que no son adyacentes a u y v respectivamente.

2) Existen dos subconjuntos ajenos V_1 y V_2 de $V(G)$ de cardinalidad tres, tales que $\langle V_1 \rangle$ y $\langle V_2 \rangle$ inducen un bosque lineal.

Demostración:

•

Sea V_1, \dots, V_{n-1}, V_n , $t \leq n - 1$ la partición lineal minimal de G .

$$2n = \sum_{i=1}^t |V_i| \leq \sum_{i=1}^t \max(|V_i|) = t \max(|V_i|) \leq (n-1) \max(|V_i|)$$

entonces $\max(|V_i|) \geq \frac{2n}{n-1}$ por lo cual $\max(|V_i|) \geq 3$.

Sea $V_k = \max(|V_i|)$.

Si $|V_i| = 3$ entonces debe existir otro conjunto V_j con cardinalidad 3, ya que en caso contrario sucedería lo siguiente:

$$2n = \sum_{i=1}^t |V_i| = 3 + \sum_{i=1}^t |V_i| \leq 3 + \sum_{i=1}^t 2 = 3 + 2(t-1) = 2t + 1 \quad \text{de}$$

aquí que $2t + 1 < 2n$ y $t \geq \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2} > n-1$, lo cual es una contradicción.

Ahora estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: $|V_i| \geq 4$.

a) Si existe una componente conexa en $V_k = \{v_1, \dots, v_r\}$, $r \geq 4$, entonces $\text{grado}(v_1) \leq 2n-3$ y $\text{grado}(v_r) \leq 2n-3$, v_1 y v_r no son adyacentes además v_2 y v_{r-1} no son adyacentes a v_r y a v_1 respectivamente, por lo que se cumple la condición 1.

b) Si existe una componente conexa $\{v_1, v_2, v_3\}$ en V_k hay un vértice $v \in V_i$, $v \notin \{v_1, v_2, v_3\}$, $\text{grado}(v_1) \leq 2n-3$ y $\text{grado}(v) \leq 2n-3$, v_1 y v no son adyacentes, además v_3 y v_2 no son adyacentes a v_1 y a v respectivamente, por lo que se cumple la condición 1.

c) Si una componente conexa de V_k es la trayectoria $\{v_1, v_2\}$, entonces hay dos vértices distintos $u, v \in (V_i - \{v_1, v_2\})$ que no son adyacentes a v_1 y v_2 , por lo cual $\text{grado}(v_1) \leq 2n-3$, $\text{grado}(v_2) \leq 2n-3$, $\text{grado}(u) \leq 2n-3$ y $\text{grado}(v) \leq 2n-3$, por lo que se cumple la condición 1.

d) Si $\langle V_i \rangle$ son puntos aislados la condición 1 es inmediata.

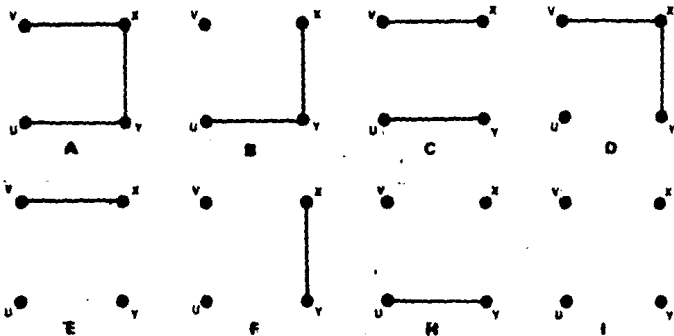
Caso 2 $|V_i| = 3$

En este caso, por lo demostrado anteriormente, existe $j \neq k$ tal

que $|V_i| = 3$. Entonces como V_i y V_{i+1} forman parte de la partición lineal de G , $\langle V_i \rangle$ y $\langle V_{i+1} \rangle$ inducen un bosque lineal.

•

1) Sean $u, v \in V(G)$ vértices no adyacentes de $V(G)$ tales que $\text{grad}(u) \geq 2n - 3$ y $\text{grad}(v) \leq 2n - 3$, y $x, y \in Z$ los vértices no adyacentes a u y v respectivamente. Formemos n subconjuntos ajenos de $V(G) = \{u, v\}$ de cardinalidad 2. Sean V_1, \dots, V_{n-1} estos subconjuntos y $V_n = \{x, y\}$. Consideremos la siguiente partición de $V(G)$: $V_1 \cup \{u, v\}, V_2, \dots, V_{n-1}$. Cada $\langle V_i \rangle$, $2 \leq i \leq n-1$, será isomorfa a K_2 o consiste de puntos aislados y V_n será isomorfa a alguna de las gráficas A, B, C, D, E, F, H o I que se muestran a continuación:



Así pues $V_1 \cup \{u, v\}, V_2, \dots, V_{n-1}$ es una partición lineal de G y por lo tanto $\alpha(G) \leq n - 1$.

2) En este caso consideremos la partición V_1, V_2, \dots, V_{n-1}

de $V = (V_i \cup V_j)$ donde $|V_i| = 2$, $i = 3, 4, \dots, n-1$.

Cada $\langle V_i \rangle$, $3 \leq i \leq n-3$, será isomorfa a K_2 o serán dos puntos aislados y tanto $\langle V_i \rangle$ como $\langle V_j \rangle$ son por hipótesis un bosque lineal.

Así pues, V_1, V_2, \dots, V_{n-1} es una partición lineal de G y por lo tanto $a(G) \leq n-1$. ■

Para concluir este capítulo vamos a calcular la arboricidad lineal por vértices de una gráfica n -partita completa.

Lema 8

Sea $G = K(p_1, \dots, p_n)$ una gráfica n -partita completa, $p_i \geq p_j$ si $i \leq j$. V_1, \dots, V_n la n -partición natural de G y U_1, \dots, U_k una partición lineal de G .

Entonces sucede una de las dos proposiciones siguientes:

- $U_i \subseteq V_j$ para algún j , $1 \leq j \leq n$
- Existe un único elemento $u \in U_i$ tal que $U_i - \{u\} \subseteq V_j$ para algún j , $1 \leq j \leq n$, y $|U_i| \leq 3$.

Demostración:

Sea $U_i \in \{U_1, \dots, U_k\}$. Si $U_i \subseteq V_j$ para algún j , $1 \leq j \leq n$, no hay nada que demostrar. Supongamos que U_i no es subconjunto de V_j para todo j , $1 \leq j \leq n$.

Sea $r = \max\{|U_i \cap V_j| \mid 1 \leq j \leq n, i \neq j\}$, y V_k un elemento de la partición tal que $|V_k \cap U_i| = r$.

1) Afirmamos que $r \leq 2$.

Supongamos $r \geq 3$.

Sea $(x, y, z) \in (U_i \cap V_k)$, como U_i no es subconjunto de V_k existe un vértice u de U_i que no pertenece a V_k , entonces u es

adyacente a x, y, z por lo cual $\langle u, x, y, z \rangle \in \langle U \rangle$ es conexa y no es una trayectoria, lo cual es una contradicción a la linealidad de U .

Por lo tanto $r \leq 2$.

Sea $U \cap V_i = \langle x, y \rangle$

Ahora sólo basta probar que $U \cap V_i = \langle u \rangle$.

Supongamos que existe $v \in U, v \neq u, v \notin V_i$.

Entonces u y v son adyacentes a x y y , por lo tanto la subgráfica generada $\langle u, v, x, y \rangle \subseteq \langle U \rangle$, contiene un ciclo, lo cual es una contradicción con la linealidad de U .

Por lo tanto existe un único vértice $u \in U$ tal que $(U = \langle u \rangle) \subseteq V_i$ y $|U_i| \leq 3$. ■

Lema 9:

Sea $K(p_1, \dots, p_n)$ una gráfica n -partita completa, $i = p_i$ o $p_i = 2$.

$l = |\{p_i \mid p_i = 1, 1 \leq i \leq n\}|$ y $m = |\{p_i \mid p_i = 2, 1 \leq i \leq n\}|$

entonces, si $k = |V(K(p_1, \dots, p_n))|$.

$$a(K(p_1, \dots, p_n)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2m+l}{3} \right\rfloor & \text{si } l \leq m \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2m-l}{3} \right\rfloor & \text{si } l > m \end{cases}$$

Demostración:

Sea $V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_l$ la n -partición natural de la gráfica en cuestión donde $|V_i| = 2$ y $|W_i| = 1$.

Sea U_1, U_2, \dots, U_t una partición minimal lineal por vértices de la gráfica $K(p_1, \dots, p_n)$, es decir $a(K(p_1, \dots, p_n)) = t$.

Sabemos por el Lema 8 que $|U_i| \leq 3$, entonces:

$$k = |V(K(p_1, \dots, p_n))| = \sum_{i=1}^m |V_i| + \sum_{i=1}^l |W_i| \leq \sum_{i=1}^m 3 + \sum_{i=1}^l 1 = 3t \text{ por lo tanto}$$

$$a(K(p_1, \dots, p_r)) = l + \left\{ \frac{k}{3} \right\} = \left\{ \frac{2m+l}{3} \right\} \quad (I)$$

Caso 1: $l \leq m$

$$V = \bigcup_{i=1}^{m-l} U_i, \quad V_i = 2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}$$

$$\text{Sea } U = \bigcup_{i=1}^{m-l} U_i, \quad U_i = (x_1, \dots, x_{2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}})$$

Consideremos la siguiente partición de $V(K(p_1, \dots, p_r))$:

$$U = V \cup U_i, \quad 1 \leq i \leq l$$

$$U_i = \begin{cases} V \cup U(x_i) & 1 \leq i \leq 2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] \\ V & 2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] + 1 \leq i \leq \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \end{cases}$$

$$\text{Entonces } U_i \cong T_2 \text{ si } 1 \leq i \leq 2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] + l \text{ y}$$

$$U_i \cong K_i \cup K_i$$

$$\text{si } l + 1 + 2 \left[m-l - \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\} \right] \leq i \leq l + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}$$

Así pues esta partición es lineal, por lo tanto:

$$a(K(p_1, \dots, p_{n+1})) \leq l + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}$$

Uniendo esta desigualdad con (I) obtenemos:

$$\left\{ \frac{2m+l}{3} \right\} \leq a(G) \leq l + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}$$

Pero $\left\{ \frac{2m+l}{3} \right\} = l + \left\{ \frac{2m-2l}{3} \right\}$, por lo tanto:

$$a(G) = \left\{ \frac{2m+l}{3} \right\} = \left\{ \frac{V(G)}{3} \right\} \text{ si } l \leq \frac{n}{2}.$$

Caso 2: $l > m$.

Sea U_1, \dots, U_m una partición lineal minimal.

Sea $U_i \in (U_1, \dots, U_m)$ donde $|U_i| = 3$.

o) Si $|U_i| = 3$, aplicando el Lema 8 obtenemos que existe un conjunto $V_i \in (V_1, \dots, V_m)$ tal que $V_i \subseteq U_i$.

Por lo tanto $|(U_i \setminus (U_i \setminus |U_i| = 3))| \leq m$. Sean U_1, \dots, U_m los conjuntos de cardinalidad 3.

$$2m + l = \sum_{i=1}^l |U_i| = \sum_{i=1}^l |U_i| + \sum_{i=l+1}^l |U_i|$$

$$\geq 3r + 2(l - r) = 2l + r \leq 2l + m = 2a(G) + m$$

Entonces $\frac{m+l}{2} \geq a(G)$

Por lo tanto $\left\{ \frac{m+l}{2} \right\} \geq a(G)$ (II)

Hagamos ahora la siguiente partición de G:

$$U_i = V_i \cup W_i \quad 1 \leq i \leq m$$

$$U_{m+1} = W_{m+1} \cup W_{m+2} \quad 1 \leq i \leq \left\{ \frac{l-m}{2} \right\}$$

$$U_i \cong T_2 \quad \text{si } 1 \leq i \leq m$$

$$U_i \cong K_2 \quad \text{si } 1+m \leq i \leq \left\{ \frac{l-m}{2} \right\} + m - 1 = \left\{ \frac{l+m}{2} \right\} - 1$$

Si $1+m$ es par $U_{\frac{l+m}{2}} \cong K_2$ y $U_{\frac{l+m}{2}} \cong K_1$ si $1+m$ es

impar.

Por lo tanto $U_1, \dots, U_{\frac{l+m}{2}}$ es una partición lineal por lo cual $a(G) \leq \left\{ \frac{l+m}{2} \right\}$. Uniendo esta desigualdad con (II) obtenemos $a(G) = \left\{ \frac{l+m}{2} \right\} = \left\{ \frac{n}{2} \right\}$. ■

Para los siguientes Lemas 10, 11, 12 y 13 consideremos la siguiente gráfica.

Sea $G = K(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p)$ una gráfica n -partita completa, $a_i = 1, b_j = 2, c_k = 3$ para todo $i, j, k, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p$.

Sea $A_1, \dots, A_l, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_p$ la n -partición natural de G donde $|A_i| = 1, |B_j| = 2, |C_k| = 3$.

Sea U_1, \dots, U_l una partición minimal de G.

Lema 10

$$|U_i| \leq 3.$$

Demostración:

Supongamos que existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $|U_i| \geq 4$.

Sea $v = \max\{|U_i \cap A_i|, |U_i \cap B_i|, |U_i \cap C_i|\} \geq 3$

Caso 1: $v = 3$

Si $v = 3$, existe un vértice $v \in U_i$ tal que v ady u para todo $u \in (U_i - \{v\})$, entonces $\langle U_i \rangle$ no es un bosque lo cual es una contradicción.

Caso 2: $v = 2$.

En este caso existen $v, v' \in U_i$ tal que v ady u y v' ady u , para todo $u \in (U_i - \{v, v'\})$, entonces $\langle U_i \rangle$ no es un bosque lo cual es una contradicción.

Caso 3: $v = 1$.

En este caso $\langle U_i \rangle \cong K_{|U_i|} \cong K_4$ lo cual es una contradicción con la linealidad de $\langle U_i \rangle$.

Por lo tanto $|U_i| \leq 3$. ■

Sea $\mathcal{U} = (U_i \setminus \{U_i\}) = 3$.

Lema 11

Si $V \in \mathcal{U}$ entonces sucede alguna de las siguientes proposiciones:

- i. $V = C_i$ para algún $i, 1 \leq i \leq p$.
- ii. $|V \cap B_i| = 2$ para algún $i, 1 \leq i \leq p$.
- iii. $|V \cap C_i| = 2$ para algún $i, 1 \leq i \leq p$.

Demostración:

Sea $V \in \mathcal{U}$, si $V = C_i$ para algún $i, 1 \leq i \leq p$, no hay nada que demostrar, entonces supongamos $V \neq C_i$ para todo $i, 1 \leq i \leq p$, y además que no sucede ni i) ni ii).

Entonces $|V \cap B_i| \leq 1$ y $|V \cap C_i| \leq 1$ para todo i y todo j .

1 Si $i = m$ y 1 Si $j = p$. De aquí que V conste de tres vértices de diferentes particiones por lo cual $\langle V \rangle = K_3$, esto contradice la linealidad de V .

De aquí que el lema sea cierto. ■

Lema 12

$$|w| \leq m + p.$$

Demostración:

A consecuencia de los lemas 9 y 10, podemos hacer la siguiente partición de w .

$$D_1 = \langle V \in w \wedge |V \cap A_i| = 1 \vee |V \cap B_i| = 2 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_2 = \langle V \in w \wedge |V \cap A_i| = 1 \vee |V \cap C_i| = 2 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_3 = \langle V \in w \wedge |V \cap B_i| = 1 \vee |V \cap C_i| = 2 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_4 = \langle V \in w \wedge |V \cap B_i| = 1 \vee |V \cap B_j| = 2 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_5 = \langle V \in w \wedge |V \cap B_i| = 2 \vee |V \cap C_i| = 1 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_6 = \langle V \in w \wedge |V \cap C_i| = 1 \vee |V \cap C_j| = 2 \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

$$D_7 = \langle V \in w \wedge V = C_i \text{ para algún } i \vee j \rangle$$

Sea $|D_i| = d_i$.

$$d_1 + d_4 + d_5 \leq m \quad \vee \quad d_2 + d_3 + d_6 + d_7 \leq p.$$

$$\text{Además } |w| = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 =$$

$$= (d_1 + d_4 + d_5) + (d_2 + d_3 + d_6 + d_7) \leq m + p.$$

Por lo tanto $|w| \leq m + p$. ■

Lema 13

$$a(G) = \begin{cases} p + \left\{ \frac{2m + l}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Demostración:

$$3p + 2m + l = |V(G)| = \sum_{i=1}^l |U_i| \leq \sum_{i=1}^l 3 = 3l \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{3p + 2m + l}{3} = p + \frac{2m + l}{3} \leq t.$$

Por lo tanto: $p + \left\{ \frac{2m + l}{3} \right\} \leq t = a(G)$ (I)

Por otra parte sea $|U| = s \leq m + p$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $U = (U_1, \dots, U_s)$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 3p + 2m + l = |V(G)| &= \sum_{i=1}^s |U_i| = \sum_{i=1}^s \left[|U_i| + \sum_{(j>k)} |U_{ij}| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^s 3 + \sum_{(j>k)} 2 = 3s + 2(t - s) = s + 2t \geq \\ &\leq m + p + 2t, \text{ entonces;} \end{aligned}$$

$$\frac{3p + 2m + l - m - p}{2} = \frac{2p + m + l}{2} = p + \frac{m + l}{2} \leq t = a(G)$$

Por lo tanto $p + \left\{ \frac{m + l}{2} \right\} \leq t$ (II)

Consideremos $G' = K(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m) \subseteq G$

$$\text{Por el Lema 6 } a(G') = \begin{cases} \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Sean $U'_1, \dots, U'_{\lfloor \frac{l+2m}{3} \rfloor}$ y $U''_1, \dots, U''_{\lfloor \frac{l+m}{2} \rfloor}$ particiones

lineales minimales de G' en cada caso.

Entonces las particiones de $V(G)$:

$U'_1, \dots, U'_{\lfloor \frac{l+2m}{3} \rfloor}, C_1, \dots, C_p$ y $U''_1, \dots, U''_{\lfloor \frac{l+m}{2} \rfloor}, C_1, \dots, C_p$

son lineales para $l \leq m$ y $l > m$ respectivamente. Por lo tanto:

$$a(G) \leq \begin{cases} p + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Uniendo la desigualdad anterior con (I) y (II) obtenemos la igualdad:

$$a(G) = \begin{cases} p + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases} \quad \blacksquare$$

Proposición 2:

Sea G una gráfica n -partita completa:

$G = K(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_n)$ $a_1 = 1$,
 $b_1 = 2, c_1 = 3, d_1 \geq 4$, donde existe al menos un conjunto de la
partición natural de G con 1, 2 o 3 vértices, entonces:

$$a(G) = \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Demostración:

Sean (V_1, \dots, V_q) el conjunto de elementos de la partición
natural de G , donde $|V_i| = d_i$.

La demostración se hará por inducción sobre n , $n = \sum_{i=1}^q d_i$.

Si $n = 0$, entonces $(V_1, \dots, V_q) = \emptyset, q = 0$, por lo cual en
este caso $G = K(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p)$ y por el
lema anterior:

$$a(G) = \begin{cases} p + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases} = \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Supongamos la igualdad cierta para todo $k \leq \sum_{i=1}^q d_i = n$. Ahora
demostraremos la igualdad para $n = \sum_{i=1}^q d_i = n + 1$.

Sea $v \in V_q$.

Consideremos $G' = G - (v)$:

$$G' = K(a_1, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_n - 1)$$

Por hipótesis de inducción:

$$a(G') = \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

$$\text{Adem\u00e1s } a(G') = \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases} \leq a(G) \quad (I)$$

por ser $G' \subseteq G$.

Sea $G'' = K(a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p) \subseteq G$. Sean $U_1, \dots, U_{p+\frac{(l+2m)}{3}}$ y $U'_1, \dots, U'_{p+\frac{(l+2m)}{3}}$ las particiones lineales de G'' para $l \leq m$ y $l > m$ respectivamente.

Entonces $U_1, \dots, U_{p+\frac{(l+2m)}{3}}, V_1, \dots, V_{q-1}, V_q = (v)$ y $U'_1, \dots, U'_{p+\frac{(l+2m)}{3}}, V_1, \dots, V_{q-1}, V_q = (v)$ son particiones lineales de G' si $l \leq m$ y $l > m$ respectivamente, y como $\langle V_q \rangle$ son puntos aislados $U_1, \dots, U_{p+\frac{(l+2m)}{3}}, V_1, \dots, V_{q-1}, V_q$ y $U'_1, \dots, U'_{p+\frac{(l+2m)}{3}}, V_1, \dots, V_{q-1}, V_q$ ser\u00e1n tambi\u00e9n particiones lineales de G . De aqu\u00ed que:

$$a(G) \leq \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases}$$

Completando esta desigualdad con (I) llegamos a:

$$a(G) = \begin{cases} p + q + \left\{ \frac{l + 2m}{3} \right\} & \text{si } l \leq m \\ p + q + \left\{ \frac{l + m}{2} \right\} & \text{si } l > m \end{cases} \quad \square$$

Corolario:

Si $G = K(p_1, \dots, p_n)$, $p_1 \geq 3$, $p_i \geq -p_j$ si $i \geq j$, es una gr\u00e1fica n -partita completa entonces $a(G) = n$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AKIYAMA J. A Status on the Linear Arboricity. Lecture notes in com. science. 108. Nueva York. 1981. 38-44.
- [2] AKIYAMA J. - EXOO G. - HARARY F. Covering and Packing Ingraphs III: Cyclic and Acyclic Invariants. Math. Slovaca. 30-4. 1980. 405-417.
- [3] BEHZAD M. - CHARTRAD G. - LENIAK-FOSTER L. Graphs & Digraphs. Prindle, Weber & Schmidt. Massachusetts. 1979.
- [4] BERGE. C. Graphs and Hypergraphs. North-Holland. Amsterdam. 1973.
- [5] BONDY J. - MURTY U. S. R. Graph Theory With Applications. 1a. edición. The macmillan press. Londres. 1976.
- [6] CALVILLO. G.
- [7] CURCO COBOS. M. Una Introducción a la Teoría de Gráficas. Vínculos Matemáticos. 165. 1989.
- [8] CHARTRAND. G. - KRONK. H. - WALL. G. The Point-Arboricity of a Graph. Israel J. Math. 6. 169-175.
- [9] ENOMOTO. H. - PEROCHE. B. The Linear Arboricity of Some Regular Graphs. Journal Graph Theory. 8. 1984. 309-324.
- [10] GULDAN. F. Some Results on Linear Arboricity. Journal Graph Theory. 10. 1986. 505-509.
- [11] GULDAN. F. The Linear Arboricity of 10-Regular Graphs. Math Slovaca. 3. 1986. 225-228.
- [12] HARARY. F. Graph Theory. Tercera edición. Adison-Wesley Publishing Company. 1972.
- [13] MATSUMOTO. M. Bounds for the Vertex Linear Arboricity.

Journal Graph Theory. 14. 1990. 73-75.

[14] MOON, J. W. Topics on Tournaments. Holt, Rinehart and Winston. Nueva York. 1968.

[15] NASH - WILLIAMS. Edge-Disjoint Spanning Trees of Finite Graphs. Journal London Math. 36. 1961. 445-450.

[16] NEUMANN, V. Introducción a la Teoría de Gráficas. IV Coloquio del Departamento de Matemáticas. C. I. N. V. E. S. T. A. V. del I. P. N. 36. 1985.

[17] POH, K. On the Linear Vertex-Arboricity of a Planar Graph. Journal Graph Theory. 14. 1990. 73-75.

[18] SWAMY, M. N. S. - THULASIRAMAN, K. Graphs, Networks and Algorithms. John Wiley & Sons. Nueva York. 1981.

[19] TOMASTA, P. Note on Linear Arboricity. Math. Slovaca. 3. 1982. 239-242.

INDICE ANALITICO

Adyacente	8, 13
- a	14
- de	14
Arbol	12
- dirigido	10
Arborescencia	1, 19
- ajena	1, 10
- generadora	1, 10
Arboriscidad	
- lineal por	
- aristas	4
- vértices	3, 52
- por vértices	3, 45
Arista	8
Bipartición natural	11
Bipartita	11
- completa	11
Bosque	12
- lineal	52
Camino	9, 14
- cerrado	9, 14
- dirigido	14
Ciclo	9, 15
- dirigido	15
Coloración	56
- arista minimal	56
- minimal	56
n- -	56
Completa	10
n-partita -	11
Conexa	12, 15
débilmente -	15
fuertemente -	15
Débilmente conexa	15
Digráfica	13
-conexa	15
-débilmente conexa	15
-euleriana	18
-fuertemente conexa	15
-hamiltoniana	18
-inducida	17
-k-balanceada	17
Euleriana	13, 18

Flecha	13
Fuertemente conexa	15
Grado	8
- exterior	14
- máximo	14
- mínimo	14
- interior	14
Matriz de -	2
- máximo	14
- mínimo	14
- máximo	8
- mínimo	8
Gráfica	8
- bipartita	11
- completa	11, 12
- completa	10, 11
- conexa	12
- de líneas	5
- euleriana	13
(g_1, \dots, g_n) -	5
- hamiltoniana	13
- inducida	7
- isomorfa	8
- n-partita	11
completa	11
- plana	
- maximal	53
- internamente maximal	53
- regular	8
Incide	8, 14
- a	8, 14
- de	8, 14
Longitud	9, 15
Matriz de grado interior	2
Partición	
- lineal	52
- natural	11
T:Tr- -	53
Paseo	9, 15
- cerrado	15
- dirigido	15
- euleriano	13
Subgráfica	13
- inducida	17
Subgráfica	8
- inducida	8
Torneo	16, 17
Trayectoria	2
- dirigida	14

- hamiltoniana	13, 18
- minimal	53
uv- -	14
Vecindad	8
- interior	14
- exterior	14
Vecinos	8
- interiores	14
- exteriores	14
Vértice	8, 13
- terminal	12

LISTA DE SIMBOLOS

$a(G)$	Arboriscidad lineal por vértices de G .
$A(G)$	Conjunto de aristas de una gráfica G .
$F(D)$	Conjunto de flechas de una digráfica D .
$\text{grad}(v)$	Grado del vértice v .
$\text{grad}^-(v)$	Grado interior del vértice v .
$\text{grad}^+(v)$	Grado exterior del vértice v .
K_n	Gráfica completa de n vértices.
$K(m; n)$	Gráfica bipartita completa natural con partición de m y n vértices.
$K(p_1, \dots, p_n)$	Gráfica n -partita completa cuyos elementos de la partición natural tienen p_1, p_2, \dots, p_n vértices.
$N_G(S)$	Vecinos del conjunto S en la gráfica G .
$N_D^-(S)$	Vecinos internos del conjunto S en D .
$N_D^+(S)$	Vecinos externos del conjunto S en D .
$\rho(G)$	Arboriscidad por vértices de G .
t_D	Número máximo de arborescencias generadoras ajenas en una digráfica D .
$V(G), V(D)$	Conjunto de vértices de G y D .
$\{v_1, \dots, v_n\}$	Trayectoria de vértices v_1, v_2, \dots, v_n .
$\{\overrightarrow{v_1, \dots, v_n}\}$	Trayectoria dirigida de vértices v_1, v_2, \dots, v_n .
(v_1, \dots, v_n)	Ciclo de vértices v_1, v_2, \dots, v_n .
$(\overrightarrow{v_1, \dots, v_n})$	Ciclo dirigido de vértices v_1, v_2, \dots, v_n .

(S)

Gráfica inducida por el conjunto S.

[x]

Máximo entero menor o igual a x.

(x)

Mínimo entero mayor o igual a x.