34
2 ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION A LAS FORMAS MODULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

HEBERTH SERRANO CORONADO

MEXICO, D.F., 1991.

INDICE.

INTRODUCCION. 2.

CAPITULO 1.

§1.1. El grupo de los automorfismos del semi-plano superior. 4.

§1.2. Acciones de grupos. 11.

§1.3. Clasificación de las transformaciones fraccionales lineales. 17.

§1.4. La invarianza de la métrica y la medida en el semi-plano superior. 20.

CAPITULO 2.

§2.1. Dominio fundamental del grupo modular. 32.

§2.2. Formas modulares. 36.

BIBLIOGRAFIA. 40.

INTRODUCCION

El estudio de las formas cuadráticas y más precisamente la manera de ver de cuántas formas se puede expresar un número entero en suma de k cuadrados, motivaron a Jacobi para el surgimiento de las formas modulares.

Pero fue E. Hecke quien desarrolló más sistematicamente esta teoría, que es usada como una herramienta eficiente para resolver problemas clásicos de la teoría de los números.

En el presente trabajo daré una breve introducción a las formas modulares siguiendo el modelo clásico.

En el primer capítulo de este trabajo se estudian propiedades básicas de los automorfismos de la esfera de Riemann $\mathbb{P}$, con particular interés se estudian los automorfismos del semi-plano superior H, se dan también algunos resultados sobre espacios topológicos y acciones de grupos que resultarán de gran utilidad para el estudio de las formas modulares posterirmente; también se clasifican las transformaciones fraccionales lineales, y se define una métrica y una medida en el semi-plano superior H.

En el segundo capítulo se define el grupo modular G como la imagen del grupo discreto $SL_2(\mathbb{Z})$ en el grupo $PSL_2(\mathbb{R})$. Y se demuestra la existencia de un dominio fundamental para el grupo modular G. Aquí se da también la definición de *forma modular* y algunos ejemplos de éstas.

Agradezco al Dr. Félix Recillas la dirección de esta tesis y su interés por introducirme en esta rama de las matemáticas. No puedo dejar de mencionar a uno de mis mejores amigos por su valiosa ayuda en la realización de este trabajo, Mat. Rogelio Jimenez F. De particular importancia resulta el apoyo que me brindó el Instituto de Matemáticas para la redacción de este trabajo.

§1.1. EL GRUPO DE LOS AUTOMORFISMOS DEL SEMI-PLANO SUPERIOR.

DEFINICION 1.1. Denotemos por $\mathbb{P}$ la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y definimos la acción de un elemento $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{P}$ como:

$$\alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } z \in \mathbb{P}.$$

Este mapeo "$z \longmapsto \alpha z$" de $\mathbb{P}$ sobre sí mismo es analítico.

DEFINICION 1.2. $j(\alpha, z) = cz + d$ para $z \in \mathbb{C}$.

AFIRMACION.1.3. Si $z \in \mathbb{C}$ y $j(\alpha, z) \neq 0$, entonces

$$\alpha \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = j(\alpha, z) \begin{bmatrix} \alpha z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prueba.

$$\alpha \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = (cz + d) \begin{pmatrix} \dfrac{az + b}{cz + d} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= j(\alpha, z) \begin{pmatrix} \alpha z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculemos $\alpha\beta \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{C}))$ de dos maneras

$$\alpha\beta \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = j(\alpha\beta, z) \begin{bmatrix} (\alpha\beta)z \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\alpha(\beta \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}) = \alpha(j(\beta, z) \begin{bmatrix} \beta z \\ 1 \end{bmatrix})$$
$$= j(\alpha, \beta z) j(\beta, z) \begin{bmatrix} \alpha(\beta z) \\ 1 \end{bmatrix}$$

AFIRMACION.1.4. (i) $j(\alpha\beta, z) = j(\alpha, \beta z)j(\beta, z)$ con $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $(\alpha\beta)z = \alpha(\beta z)$ con $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{P}$.

Prueba.

Multiplicando por $j(\alpha\beta, z)$ y $j(\alpha, \beta z)j(\beta, z)$ a $\begin{bmatrix}(\alpha\beta)z\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}\alpha(\beta z)\\1\end{bmatrix}$ respectivamente, e igualando componente a componente se obtiene (i) y (ii).

Por Afir.1.4.(ii) el mapeo "$z \longmapsto \alpha^{-1}z$" es el mapeo inverso de "$z \longmapsto \alpha z$", y por lo tanto, "$z \longmapsto \alpha z$" es un automorfismo de la esfera de Riemann $\mathbb{P}$. Este automorfismo se llama *transformación fraccional lineal*.

AFIRMACION.1.5. $J(\alpha^{-1}, z) = j(\alpha, \alpha^{-1}z)$ con $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$.

Prueba. Si hacemos $\beta = \alpha^{-1}$ en Afir.1.4.(i) obtenemos el resultado:

$$j(1, z) = j(\alpha, \alpha^{-1}z)j(\alpha^{-1}, z) = 1.$$

LEMA.1.6. Una traformación fraccional lineal mapea círculos y rectas sobre $\mathbb{C}$ en círculos o rectas sobre $\mathbb{C}$.

Prueba. Recordemos que la ecuación $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ representa una recta si $A = 0$, y una circunferencia si $A \neq 0$, y A, C son números reales.

Sea $\beta = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ y consideremos el siguiente conjunto

$$C_\beta = \{ z \in \mathbb{P} : |\beta z| = 1 \}$$

Queremos verificar que este conjunto intresectado con $\mathbb{C}$ es una recta o una circunferencia. Sea pues $z \in C_\beta \cap \mathbb{C}$, entonces $z \in C_\beta \leftrightarrow |\beta z| = 1$ esto es , $|az + b| = |cz + d|$, elvando al cuadrado y multiplicando obtenemos

$$(|a|^2 - |c|^2)z\bar{z} + (a\bar{b} - \bar{d}c)z + (\bar{a}d - d\bar{c})\bar{z} + |b|^2+|d|^2 = 0,$$

de manera que, por el recordatorio que hicimos al principio, si $a = c$, obtenemos una recta. De otro lado, como $|a|^2, |b|^2, |c|^2, |d|^2$ son números reales, tenemos una circunferencia. Ahora, si partimos de la ecuación

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

podermos encontrar un elemento β de $GL_2(\mathbb{C})$ tal que

$$\{ z \in \mathbb{P} : Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \} = C_\beta .$$

Veamos ahora que, si C_β es un círculo o una recta arbitrarios, debemos verificar que $\alpha(C_\beta)$, la imagen de C_β bajo α, es un círculo o una recta. Sea $z \in \alpha C_\beta$ esto pasa si $\alpha^{-1}z \in C_\beta$, por definición de C_β tenemos

$$|\beta(\alpha^{-1}z)| = 1 = |\beta\alpha^{-1}z|$$

por lo tanto $z \in C_{\beta\alpha^{-1}}$. En consecuencia $C_{\beta\alpha^{-1}}$ es una recta o una circunferencia sobre $\mathbb{C}$.

DEFINICION. Sean H y K dos dominios de $\mathbb{C}$ definidos por

$$H = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

y

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

a H se le llama *semi-plano superior* y á K *disco unitario*.

LEMA.1.6'. El semi-plano superior H y el disco unitario K son analiticamente isomorfos.

Demostración. Sea $\rho = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Entonces "$z \longmapsto \rho z$" es un automorfismo de $\mathbb{P}$, y cumple con $|\rho z| = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\rho^{-1} w) &= \operatorname{Im}\left(i \frac{w + 1}{-w + 1}\right) \\ &= 1/2i \left(i \frac{w + 1}{-w + 1} + i \frac{\bar{w} + 1}{-\bar{w} + 1}\right) \\ &= 1/2 \frac{(w + 1)(1 - \bar{w}) + (\bar{w} + 1)(-w + 1)}{(-w + 1)(-\bar{w} + 1)} \\ &= 1/2 \frac{w - w\bar{w} + 1 - \bar{w} - w\bar{w} + \bar{w} - w + 1}{|1 - w|^2} \\ &= \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} > 0, \end{aligned}$$

ya que $|w| < 1$. Por lo tanto ρ es isomorfismo analítico.

Denotemos por Aut(H) y Aut(K) los grupos de todos los automorfismos (analíticos) de H y K respectivamente.

PROPOSICION.1.7. Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, y $z \in H$. Entonces

$$\operatorname{Im}(\alpha z) = \frac{\operatorname{Im}(z) \det(\alpha)}{|cz + d|^2}$$

Prueba._ Calculando

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\alpha z) &= 1/2i \frac{z(ad - bc) - \bar{z}(ad - bc)}{|cz + d|^2}. \\ &= \frac{\operatorname{Im}(z) \det(\alpha)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

En particular si $\det(\alpha) > 0$, como $\operatorname{Im}(\alpha z) > 0$, entonces el mapeo "$z \longmapsto \alpha z$" induce un automorfismo en H.

Sea

$$GL_2^+(\mathbb{R}) = \{ \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) : \det(\alpha) > 0 \}$$

denotaremos por $\iota(\alpha)$ con $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$ el automorfismo de $\tilde{H}$:

$$\begin{aligned} \iota(\alpha) : H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto \alpha z \end{aligned}$$

AFIRMACION.1.8. El mapeo

$$\begin{aligned} \iota : GL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(H) \\ \alpha &\longmapsto \iota(\alpha) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Prueba. Es inmediato, a partir de Afirmación 1.4.(ii)

Definimos

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 < \theta < 2\pi \right\}.$$

Identificaremos $\alpha \in \mathbb{R}^\times$ con $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$.

AFIRMACION 1.9. Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$, y $\iota(\alpha)$ es la identidad de H, entonces $\alpha \in \mathbb{R}^\times$.

Prueba. Como $\frac{az + b}{cz + d} = z \ \forall \ z \in H$, entonces $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ por lo tanto $b = c = 0$ y $a = d$, i.e. $\alpha \in \mathbb{R}^{\times}$.

TEOREMA.1.10. (1) Para todo $z \in H$, existe un elemento α en $SL_2(\mathbb{R})$ que satisface $\alpha i = z$;

(2) El homomorfismo ι induce un isomorfismo

$$GL_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{R}^{\times} \cong SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\} \cong \mathrm{Aut}(H).$$

(3) $SO_2(\mathbb{R}) = \{ \alpha \in SL_2(\mathbb{R}) : \alpha i = i \}$

y

$$\mathbb{R}^{\times}.SO_2(\mathbb{R}) = \{ \alpha \in GL_2^+(\mathbb{R}) : \alpha i = i \}.$$

Demostración. Sea $z \in H$, $z = x + iy$ y tomemos $\alpha = \sqrt{y}^{-1}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Entonces $\det(\alpha) = 1$, y $\alpha i = z$, esto prueba (1).
Para probar el primer isomorfismo, sea

$$\iota' : GL_2^+(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2^+(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$$

definido por $\alpha \longmapsto \iota'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\det(\alpha)}}$, obviamente ι' es sobre y $\det(\iota'(\alpha)) = 1$. Además ι' es homomorfismo:

$$\begin{aligned} \iota' : GL_2^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow SL_2(\mathbb{R}), \\ \alpha &\longmapsto \iota'(\alpha) \end{aligned}$$

obviamente ι' es sobre y $\det(\iota'(\alpha)) = 1$. Además ι' es un homomorfismo:

$$\iota'(\alpha\beta) = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\det(\alpha\beta)}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\det(\alpha)}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\det(\beta)}} = \iota'(\alpha)\ \iota'(\beta).$$

Por lo tanto ι' induce el siguiente isomorfismo, notese que

$\mathrm{Ker}(\iota') = \mathbb{R}^{\times}$.

$$GL_2^{+}(\mathbb{R})/\mathbb{R}^{\times} \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}.$$

Para probar el segundo isomorfismo basta probar la suprayectividad. Para esto es suficiente verificar que un elemento ψ de $\mathrm{Aut}(H)$ satisface $\psi(i) = i$, entonces existe un elemento $\beta \in SO_2(\mathbb{R})$ tal que $\psi = \iota(\beta)$. De hecho para cada $\phi \in \mathrm{Aut}(H)$ con $\phi(i) = z$ por (1) existe $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $\alpha^{-1}(\phi(i)) = \phi^{-1}(z) = i$, por lo tanto $\alpha^{-1}\phi(i) = i$. Como ϕ fue tomado arbitrariamente sea $\iota(\alpha^{-1})\phi = \psi$, entonces $\iota(\alpha^{-1})\phi =$ $= \iota(\alpha)^{-1}\phi = \psi = \iota(\beta)$, para alguna $\beta \in SO_2(\mathbb{R})$, entonces $\phi = \iota(\beta)\iota(\alpha) = \iota(\beta\alpha)$.

Verifiquemos entonces que si $\psi \in \mathrm{Aut}(H)$ con $\psi(i) = i$, entonces existe $\beta \in SO_2(\mathbb{R})$ tal que $\iota(\beta) = \psi$. Sea pues $\psi \in \mathrm{Aut}(H)$, $\psi(i) = i$ hagamos $\rho(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ $(z \in H)$, por Lema ρ es automorfismo de H sobre K. Como $\rho(i) = 0$, $\eta = \rho\psi\rho^{-1}$ es un automorfismo de K tal que $\eta(0) = \rho(\psi\rho^{-1}(0)) = \rho(\psi(i)) = \rho(i) = 0$. De manera semejante se ve que $\eta^{-1}(0) = 0$. Por lo tanto aplicando lema de Schwartz a η y η^{-1} se ve que

$$|\eta w| = |w| \quad w \in K$$

y

$$\eta z = cw \quad |c| = 1$$

Sea $c = e^{2i\theta}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $\eta = \rho\eta\rho^{-1}$ entonces $\psi = \rho^{-1}\eta\rho$.

$\psi i = i$ si $\psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $\psi i = \dfrac{ai + b}{ci + d} = i$, i.e. $a = d$, $b = -c$, como $ad - bc = 1$, $a^2 + b^2 = 1$ de modo que

$$\psi z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} z \text{ por lo tanto } \psi = \iota(k_o)$$

donde $k_o = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.

fijo de $g \in G$ si $gx = x$.

DEFINICION.2.6. Para cada $x \in X$, definimos la *G-órbita de* x como:

$$Gx = \{ gx : g \in G \}$$

AFIRMACION.2.6'. El espacio X es la unión ajena de G-órbitas

Prueba. Sean $x,y \in X$, entonces $Gx = Gy$ o $Gx \cap Gy = \emptyset$,pues si existiera un z en la intersección de Gx con Gy, tendriamos que $z = gx$ y también $z = gy$, en tal caso $Gx = Gy$.

DEFINICION.2.7. Si X consta de una G-órbita, decimos que G *actúa transitivamente en* X.

Nótese que, para cualesquiera dos elementos de X, existe un $g \in G$ tal que $gx = y$ .De la Afirmación 2.4. se sigue que si G actúa transitivamente en X, entonces todos los estabilizadores son conjugados.

Denotamos por π el mapeo canónico de X en el conjunto de las G-orbitas $G\backslash X$;es decir, π es el mapeo que hace corresponder a cada elemento x de X el elemento Gx de $G\backslash X$:

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow G\backslash X \\ x &\longmapsto \pi(x) = Gx \end{aligned}$$

topológico X, entonces todos los estabilizadores son subgrupos cerrados de G, debido a que X es un espacio Hausdorff. Inversamente, si G es un grupo topológico y K es un subgrupo cerrado de G, entonces K actúa en G por multiplicación derecha. Denotamos por G/K el espacio cociente de G por K, y lo llamamos el *espacio de clases derechas de* G *por* K.

TEOREMA 2.10. Supongamos que un grupo topológico G actúa transitivamente en un espacio topológico X. Si G es un grupo localmente compacto con base numerable y X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces para cada elemento $x \in X$ el espacio de clases derechas G/G_x es homeomorfo a X por medio de la correspondencia "$gG_x \longmapsto gx$".

Demostración. La correspondencia

$$\begin{aligned} G/G_x &\xrightarrow{\ \varphi\ } X \\ gG_x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

es biyectiva:

(i) φ es inyectiva:

Si $\varphi(g_1G_x) = \varphi(g_2G_x)$, entonces $g_1G_x = gG_x$ de aquí se tiene que $g_2^{-1}g_1G_x = g_2^{-1}g_2G_x = x$. Por lo tanto $g_2^{-1}g_1x = g_1G_x$ i.e. $g_2 \in g_1G_x$

(ii) φ es sobre:

Si $y \in X$, entonces $y = gx$ donde g es el representante de la clase a que pertenece. Así es suficiente probar que el mapeo es bicontinuo. De la definición de la topología en G / G_x, es equivalente a decir que el mapeo "$g \longmapsto gx$" es abierto y continuo de G en X. Por definición este mapeo resulta ser continuo, y resta ver que es abierto.

Probemos que para cualquier conjunto abierto U de G, el conjunto $U^x = \{ gx;\ g \in U \}$ es también abierto en X. Sea gx cualquier punto de U^x. Tomemos una vecindad compacta V del elemento unitario de G tal que $V^{-1} = V$ y $gV^2 \subset U$, tomando $V = V' \cap (V')^{-1}$. Como G tiene base numerable, existe un número numerable de elementos g_n (n = 1,2,3,...) tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n V$. Haciendo $W_n = g_n V^x$, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Como W_n es compacto en un espacio Hausdorff X, entonces W_n resulta ser cerrado. Ahora supongamos que W_n no contiene un subconjunto abierto. Como X es regular, entonces existen subconjuntos abiertos U_n tales que las cerraduras $\overline{U}_n$ son compactas y además $U_{n-1} - W_{n-1} \supset \overline{U}_n$ $(n \geq 2)$.

Entonces $\overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \overline{U}_3 \supset \ldots$ gracias a que G actúa transitivamente en X. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \emptyset$, pues cada $\overline{U}_n \neq \emptyset$, y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$ no tiene puntos en común con ningún W_n, esto por la regularidad de X, esto contradice el hecho de que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{W}_n$. Entonces existe un conjunto $W_m = g_m V^x$ que contiene un subconjunto abierto de X. Como $g_m V^x$ es homeomorfo a V^x, entonces V^x también contiene un subconjunto abierto, digamos (S). Para un elemento $h \in V$ tal que $hx \in S$, se tiene que $gx \in gh^{-1}S \subset gV^2x \subset U^x$. En efecto, si $hx \in S$, entonces $x \in h^{-1}S$ de donde $gx \in gh^{-1}S$. Entonces gx es un punto interior de U^x. En consecuencia U^x es abierto.

Ahora por el Teor.1.10. se tiene que el grupo topológico $SL_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en el dominio complejo H. Y el estabilizador de i es $SO_2(\mathbb{R})$.

Corolario.2.11. El espacio de clases $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$ es homeomorfo a H, mediante la correspondencia "$\alpha SO_2(\mathbb{R}) \longmapsto \alpha i$".

§1.3. CLASIFICACION DE LAS TRANSFORMACIONES FRACCIONALES LINEALES

En esta sección clasificaremos las transformaciones inducidas por los elementos de $GL_2^+(\mathbb{R})$. Vamos a clasificar los elmentos de $GL_2^+(\mathbb{R})$.

DEFINICION 3.1. Un elemento no escalar α de $GL_2(\mathbb{R})$ se llama *elíptico, parabólico o hiperbólico*, si satisface

$$tr(\alpha)^2 < 4det(\alpha), \quad tr(\alpha)^2 = 4det(\alpha), \text{ o } \quad tr(\alpha) > 4det(\alpha).$$

Para ver la forma geométrica de la clasificacion estudiaremos los puntos fijos de los elementos de $GL_2^+(\mathbb{R})$ como automorfismos de la esfera de Riemann $\mathbb{P}$.

DEFINICION 3.2. Si la imagen de z bajo un elemento α de $GL_2^+(\mathbb{R})$ es z mismo, entonces diremos que z es un *punto fijo* de α.

TEOREMA 3.3. Un elemento no escalar α de $GL_2^+(\mathbb{R})$ está caracterizado por sus puntos fijos en $\mathbb{P}$ como sigue:

(1) α es elíptico si y solo si α tiene como puntos fijos a z_0 y $\bar{z}_0$ con $z_0 \in H$;

(2) α es parabólico si y solo sí α tiene un único punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

(3) α es hiperbólico si y solo sí α tiene dos puntos fijos

distintos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Demostración. Sea $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ no escalar. Primero supongamos que $c = 0$. Entonces $tr(\alpha)^2 - 4\det(\alpha) = (a + d)^2 - 4ad = (a - d)^2$. Por lo tanto α es parabólico si sólo sí $a = d$, en este caso α tiene un único punto fijo, ∞. También vemos de aquí que si $a \neq d$, entonces los puntos fijos de α son $b/(d-a)$ e ∞ y α es hiperbólico. Ahora supongamos que $c \neq 0$. evidentemente el ∞ no puede ser un punto fijo de α. Si un numero complejo z es punto fijo de α, enotnces z satisface la ecuación cuadrática

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Como el discriminante de esta ecuación es $tr(\alpha)^2 - 4\det(\alpha)$, entonces los puntos fijos de α son conjugados conplejos si α es elíptico, un número, real si α es parabólico, o dos reales distintos si α es hiperbólico.

Notemos que, para $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, el estabilizador de x $(GL_2^+(\mathbb{R})_x)$ contiene elementos parabólicos e hiperbólicos.

LEMA 3.4. (1) El estabilizador de i es $\mathbb{R}^\times . SL_2(\mathbb{R})$; el estabilizador de ∞, es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R},\ ad > 0\right\},$$

el estabilizador de ∞ con elementos parabólicos es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^{\times},\ b \in \mathbb{R}\right\}$$

el estabilizador de $0,\infty$, es el conjunto

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^{\times},\ ad > 0\right\}$$

(2) Los grupos $GL_2^+(\mathbb{R})_z$ con $z \in H$, $GL_2^+(\mathbb{R})_x^{(p)}$ con $x \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y $GL_2^+(\mathbb{R})_{x,x'}$ con x y $x' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ son conjugados de $GL_2^+(\mathbb{R})_i$, $GL_2^+(\mathbb{R})_{\infty}^{(p)}$ y $GL_2^+(\mathbb{R})_{\infty,0}$ respectivamente. Además esta conjugación está dada por un elemento de $SL_2^+(\mathbb{R})$.

Demostración. (1) no es mas que el Teor.1.3.(3)', la segunda igualdad, si fija el ∞, entonces $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$ es parabólico o hiperbólico, es decir, los puntos fijos estan dados por la

$$z = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

por lo tanto $c = 0$. La tercera igualdad, como α es parabólico y deja fijom ∞, tenemos que $tr(\alpha)^2 = 4\det(\alpha)$, de aquí tenemos que $(a - d)^2 + 4bc = 0$, entonces $d = a$ y $b = 0$ o $c = 0$, si $b = 0$, entonces α no fija ∞, por lo tanto $c = 0$. La última igualdad, α es hiperbólico y deja fijo ∞, luego $c = 0$, pero también deja fijo a 0, entonces $b = 0$.

(2): Como $SL_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en H, los estabilizadores de los puntos de H son conjugados por elementos de $SL_2(\mathbb{R})$. En particular, $GL_2^+(\mathbb{R})_z$ es conjugado de $GL_2^+(\mathbb{R})_i$ por $SL_2(\mathbb{R})$: $\alpha^{-1}GL_2^+(\mathbb{R})_i\alpha$ donde $\alpha = 1/\sqrt{y}\begin{pmatrix}-1 & x \\ 0 & -y\end{pmatrix}$. Además para cualesquiera dos elementos distintos x, $x' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, existe un $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $\alpha(x) = \infty$ y $\alpha(x') = 0$.

§1.4. LA INVARIANZA DE LA METRICA Y LA MEDIDA EN H.

En el semi-plano superior H existe una métrica y una medida las cuales son invariantes bajo la acción de elementos de $GL_2^+(\mathbb{R})$. La métrica es única y se llama la *métrica* de Poincaré.

DEFINICION.4.1. Para una función diferenciable $f(z)$ en H, su diferencial se define como:

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x})\, dx + (\frac{\partial f}{\partial y})\, dy$$

considerando a f como una función de $x = \mathrm{Re}(z)$ y $y = \mathrm{Im}(z)$. Además para $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$

$$(df) \circ \alpha = d(f \circ \alpha), \text{ donde } (f \circ \alpha)(z) = f(\alpha z).$$

Así para $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$ y para z, $\bar{z}$, se tiene que

$$dz = dx + i\, dy, \qquad d\bar{z} = dx - i\, dy,$$

y

$$dz \circ \alpha = (\frac{d(\alpha z)}{dz})dz, \qquad d\bar{z} \circ \alpha = (\overline{\frac{d(\alpha z)}{dz}})d\bar{z}.$$

DEFINICION.4.2. Definimos la *métrica* ds^2 y la *medida* dv en H como

$$ds^2(z) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \qquad dv(z) = \frac{dx\, dy}{y^2}.$$

PROPOSICION.4.3. (i) $dx^2 + dy^2 = dz . d\bar{z}$,

(ii) $dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$

(iii) $\frac{d(\alpha z)}{dz} = \det(\alpha)\ j(\alpha, z)^{-2}$, con $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$ y $z \in H$.

Prueba. (i) es obvio, (ii) se obtiene calculando

$$\begin{aligned} dz \wedge d\bar{z} &= (i\ dx \wedge dy) + (dx + i\ dy) \\ &= (-i\ dxdy) + (-i\ dxdy) \\ &= (-2i\ dxdy), \end{aligned}$$

para la tercera igualdad, sea $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\alpha(z) = \frac{az + b}{cz' + d}$.

Ahora calculando

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha z)}{dz} &= \frac{(ad - bc)dx + i(ad - bc)dy}{(cz + d)^2} \\ &= \frac{(ad - bc)}{(cz + d)^2} \\ &= \det(\alpha)\ j(\alpha, z)^{-2}. \end{aligned}$$

AFIRMACION 4.4. La métrica ds^2 y la medida dv son invariantes bajo la acción de $GL_2^+(\mathbb{R})$.

Prueba. Calculando

$$\begin{aligned} ds^2(\alpha z) &= \frac{d(\alpha z)\ d(\overline{\alpha z})}{\mathrm{Im}(\alpha)^2} \\ &= \frac{\det(\alpha)^2\ |j(\alpha, z)|^{-4}\ dz d\bar{z}}{\det(\alpha)^2\ \mathrm{Im}(z)^2\ |j(\alpha, z)|^{-4}} \\ &= \frac{dz\ d\bar{z}}{\mathrm{Im}(z)^2}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos

$$\frac{d(\alpha z) \wedge d(\overline{\alpha z})}{\mathrm{Im}(\alpha z)^2} = (\frac{d(\alpha z)}{dz})dz \wedge (\frac{\overline{d(\alpha z)}}{dz})d\bar{z}$$

$$= \frac{|d(\alpha z)/dz|^2 \, dz \wedge d\bar{z}}{\mathrm{Im}(\alpha z)^2}$$

$$= \frac{\det(\alpha)^2 \, |j(\alpha,z)|^{-4} \, dz \wedge d\bar{z}}{\det(\alpha)^2 \, \mathrm{Im}(z)^2 \, |j(\alpha,z)|^{-4}}$$

$$= \frac{dz \wedge dz}{\mathrm{Im}(z)^2}$$

por lotanto

$$dv(\alpha z) = \frac{i/2 \, dz \wedge d\bar{z}}{y^2} .$$

DEFINICION.4.5. Sea ϕ un mapeo inyectivo continuo del intervalo [0,1] en H, que es C^∞ excepto en un número finito de puntos. La imágen C de ϕ se llama una *curva* en H. Y su longitud está dada por

$$l(C) = \int_0^1 ds(\phi(t)), \text{ donde } \phi(t) = x(t) + iy(t)$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx(t)/dt)^2 + (dy(t)/dt)^2}}{y(t)} dt$$

Como H es isomorfo al disco unitario K mediante $\rho = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$

DEFINICION.4.6 La métrica ds_K^2 y la medida dv_K en el disco unitario K se definen por

$$ds_K^2 = ds^2 \circ \rho^{-1}$$

y

$$dv_K = dv \circ \rho^{-1}.$$

AFIRMACION.4.7. La métrica ds_K^2 y la medida dv_K en el disco unitario son invariantes bajo la acción de SU(1,1). Además

$$ds_K^2(w) = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |w|^2)^2},$$

y

$$dv_K(w) = \frac{4\ dxdy}{(1 - |w|^2)^2} \quad \text{con } w = x + iy \in K$$

Prueba. Calculando

$$ds_K^2(w) = ds^2 \circ \rho^{-1}(w)$$

$$= \frac{d(\rho^{-1}w)\ d\overline{(\rho^{-1}w)}\ dwd\bar{w}}{\mathrm{Im}(\rho^{-1}w)^2}$$

$$= \frac{\det^2(\rho^{-1})\ |j(\rho^{-1},w)|^{-4}\ dwd\bar{w}}{\left(\frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2}\right)^2}$$

$$= \frac{4(\ dwd\bar{w}\ )}{(1 - |w|^2)^2},$$

de manera semejante se prueba para dv_K, usando la igualdad

$$dv(z) = \frac{i/2\ dz \wedge d\bar{z}}{y^2}.$$

Denotamos por $l_K(C_K)$ la longitud de la curva C_K en K.

AFIRMACION 4.8. Si C es una curva en H, entonces

$$l_K(\rho(C)) = l(C).$$

Prueba. Es inmediata de la definición.

DEFINICION 4.9.Sean $z_1, z_2 \in$ H, de todas las curvas que unen estos dos puntos a la mas corta de ellas se le llama una *geodesica*.

Nótese que, una curva C en H es una geodesica si y sólo sí $\rho(C)$ es una geodesica en K.

LEMA 4.10.(1) Dos puntos cualesquiera en H estan unidos por una única geodesica, que forma parte de un circulo ortogonal al eje real o forma parte de una linea ortogonal al eje real.
(2) Dos puntos cualesquiera en K estan unidos por una única geodesica, que forma parte de un diámetro de K o es parte de un círculo ortogonal al círculo unitario.

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in$ H y sea l la geodesica que une a z_1 con z_2. Dado que $SL_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en H, podemos suponer que $z_1 = iy_1$, $z_2 = iy_2$. Sea C cuaquier curva que une a z_1 con z parametrizada por $\phi(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [0,1]$ y $\phi(0) = z_1$, $\phi(1) = z_2$ entonces la longitud de C está dada por

$$
\begin{aligned}
l(C) &= \int ds(\phi(t)) \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx(t)/dt)^2 + (dy(t)/dt)^2}}{y(t)}\, dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt \\
&= \log y(t).
\end{aligned}
$$

por otro lado, tomemos la linea vertical C_0 que une a z_1 con z_2 Una parametrización de C_0 es $\phi(t) = iy(t)$, con $t \in [0,1]$ entonces

$$
\begin{aligned}
l(C_0) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dy(t)/dt)^2}}{y(t)} \\
&= \int^1 \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt \\
&= \log y(t)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $l(C) = l(C_0)$ siempre que $C = C_0$. En consecuencia C_0 es única.

DEFINICION 4.11. Para cualesquiera dos puntos z_1, z_2 de H o de K, la longitud de la geodesica que une a z_1 con z_2 se llama la *distancia* de z_1 y z_2, y la denotamos por $d(z_1,z_2)$.

Corolario 4.12. (1) Sea $z_0 \in$ H (resp. en K) y C el conjunto de puntos de H (resp. de K) que equidistan de z_0. Entonces C es un circulo ortogonal a cualquier geodesica que contiene a z_0.

(2) Sean z_1, $z_2 \in$ H arbitrarios (resp. de K) y C el conjunto de puntos de H (resp. de K) que equidistan de z_1 y z_2. Entonces C es una geodesica en H (resp. de K).

Prueba. Solo probaremos para K.

(1) Sea $z_0 \in$ K. Como $SU(1,1)$ actúa transitivamente en K, podemos suponer que $z_0 = 0$. Entonces $\{z \in K: |z - z_0| = \text{cte.}\}$ es el círculo unitario con centro en origen , gracias a que la distancia es invariante bajo rotaciones.

(2) Sean z_1, $z_2 \in$ K y C la geodesica que une a z_1 con z_2. Sea z' el punto medio de la geodesica C. Mapeamos z' en 0 con un elemento de $SU(1,1)$, y supongamos que $z_1 = iy'$ y $z_2 = -iy'$ con $0 < y' < 1$. Para $r > 0$, sean C_1 y C_2 los conjuntos de puntos que equidistan en r de z_1 y z_2 respectivamente. Entonces C_1 C_2 son circulos, por (1). Como la metrica en Kes invariante por la transformación $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$,entonces C_1 y C_2 son simétricos con respecto al eje real. Por lo tanto la intesección de C_1 y C_2 está en el eje real:

Sea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, entonces $\alpha(z_1) = -z_1$ y $\alpha(x) = -x$, y $\alpha(z_2) = z_2$, $\alpha(-x) = x$. Ahora, sea $x \in \mathbb{E}$ el eje real, $d(z_1,x) = d(z_2,x)$, en efecto, sea C la geodesica que une z_1 con x. Como la métrica es invariante por la transformación $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$, tenemos que $l(C) = l(C')$ si C'es la geodesica que une a z_2 con x, ya que x queda fijo y z_1 es cambiado por z_2, y por el lama el eje una geodesica de K.

PROPOSICION 4.13. Sea $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ elíptica tal que $\alpha(z_o) = z_o$, y ρ un isomorfismo de H y K tal que $\rho(z_o) = 0$. Entonces

$\rho\alpha\rho^{-1} = \beta$, con $\beta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ $(-\pi < \theta < \pi)$. Además

$$j(\beta,0) = j(\rho,z_o)j(\alpha,z_o)j(\rho^{-1},0) = j(\alpha,z_o).$$

Prueba.

Sea $\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, y $\rho = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, tenemos que

$\alpha(z_o) = z_o$, con $z_o = i$ y $\rho(i) = 0$. Ahora calculando $\rho\alpha\rho^{-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\rho\alpha\rho^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2i & 1/2i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta-i\,\mathrm{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \beta.\end{aligned}$$

Ahora, como $\alpha(z_o) = z_o$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} j(\beta,0) &= j(\rho\alpha,\rho^{-1}(0))j(\rho^{-1},0) \\ &= j(\rho,\alpha(z_o))j(\alpha,z_o)j(\rho^{-1},0) \\ &= j(\rho,z)j(\rho^{-1},0)j(\alpha,z) \\ &= j(\alpha,z). \end{aligned}$$

De la proposición anterior se obtiene

$$\arg(j(\alpha,z_o)) = \arg(j(\beta,0)) = -\theta. \qquad (*)$$

Y como ρ es conforme, entonces el ángulo entre una geodesica que pasa por z_0 y su imágen por α es 2θ. (**)

LEMA 4.14. Para cualquier $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ se tiene:

(1) $(y^{-1}dz)\circ\alpha - y^{-1}dz = -2i\,d[\log(j(\alpha,z))]$;

(2) $(y^{-1}dx)\circ\alpha - y^{-1}dx = 2d[\arg(j(\alpha,z))]$.

Prueba. (1) Sea $\alpha = \begin{bmatrix} * & * \\ c & * \end{bmatrix}$.

Calculando

$$
\begin{aligned}
(y^{-1}dz)\circ\alpha - y^{-1}dz &= y^{-1}(d(\alpha z)/dz)dz - y^{-1}dz \\
&= \left[\frac{\mathrm{Im}(\alpha z)}{\mathrm{Im}(z)}\ |cz + d|^2\ j(\alpha,z)^{-2} - 1\right]y^{-1}dz \\
&= (|cz + d|^2\ j(\alpha,z)^{-2} - 1)y^{-1}dz \\
&= (\frac{c\bar{z} + d}{cz + d} - 1)\ y^{-1}dz \\
&= -2cyi\ \ j(\alpha,z)^{-1}y^{-1}dz \\
&= -2i\,d[\log(j(\alpha,z))].
\end{aligned}
$$

(2): se obtiene tomando la parte real de (1).

LEMA 4.15. Sea D el interior de un triángulo en $H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cuyos lados son geodesicas con ángulos θ_1, θ_2, θ_3. Entonces el área del triángulo D es:

$$\upsilon(D) = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3 los ápices del triángulo D correspondientes a los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ respectivamente. Primero supongamos que todos los ápices z_i $(i = 1,2,3)$ estan en H. Denotemos por x_{ij} $(j = 1,2,3)$ la intesección de la extención z_iz_j con $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, (ver figura No.1). Denotamos por ∂D

la frontera de D orientada en sentido positivo. Por el Teor. de Stokes tenemos que

$$\int_{D} y^{-2}dxdy = \int_{\partial D} y^{-1}dx$$

ya que,

$$d(y^{-1}dx) = -y^{-2}dxdy$$
$$= y^{-2}dx\wedge dy$$

Ahora,

$$\int_{\partial D} y^{-1}dx = \int_{z_1}^{z_2} y^{-1}dx + \int_{z_2}^{z_3} y^{-1}dx + \int_{z_3}^{z_1} y^{-1}dx$$

$$= \int_{z_1}^{x_{12}} y^{-1}dx + \int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx + \int_{z_2}^{x_{32}} y^{-1}dx + \int_{x_{32}}^{z_3} y^{-1}dx + \int_{z_3}^{z_1} y^{-1}dx$$

cada una de estas integrales es finita, ya que, si tomamos para cada número real x_0

$$z - x_0 = re^{i\theta}.$$

Entonces en el circulo $|z - x_0| = r$, tenemos $y^{-1}dx = -d\theta$.

Sea $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ elíptico tal que α fija a z_1 y mapea x_{12} en x_{31}: $\alpha(z_1) = z_1$ y $\alpha(x_{12}) = x_{31}$, con $j(\alpha, x_{12}) > 0$. Entonces por el Lema 4.14 (2), (*) y (**) tenemos que

$$\int_{z_1}^{x_{12}} y^{-1}dx = \int_{z_1}^{x_{12}} y^{-1}dx \circ \alpha - \int_{z_1}^{x_{12}} 2d[\arg(j(\alpha,z))],$$

$$= \int_{\alpha(z_1)}^{\alpha(x_{12})} y^{-1}dx - [2\arg(j(\alpha,z))]_{z_1}^{x_{12}}$$

$$= \int_{z_1}^{x_{31}} y^{-1}dx + (\pi - \theta_1).$$

De la misma forma se obtiene

$$\int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx = \int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx \circ \alpha - \int_{x_{12}}^{z_2} 2d[\arg(j(\alpha,z))]$$

$$= \int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx - [2 \arg(j(\alpha,z))]_{x_{12}}^{z_2}$$

$$= \int_{x_{12}}^{z_2} y^{-1}dx - \theta_2$$

finalmente

$$\int_{x_{32}}^{z_3} y^{-1}dx = \int_{x_{32}}^{z_3} y^{-1}dx \circ \alpha - \int_{x_{32}}^{z_3} 2d[\arg(j(\alpha,z))]$$

$$= \int_{x_{13}}^{z_3} y^{-1}dx + (\pi - \theta_3).$$

De todo lo anterior se concluye que

$$\int_D y^{-1}dxdy = \int_{z_1}^{x_{31}} y^{-1}dx + (\pi - \theta_1) + \int_{x_{32}}^{z_2} y^{-1}dx - \theta_2 + \int_{x_{13}}^{z_3} y^{-1}dx + (\pi - \theta_3)$$

$$= \int_{z_1}^{x_{31}} y^{-1}dx + \int_{x_{13}}^{z_3} y^{-1}dx + \int_{z_3}^{z_1} y^{-1}dx + 2\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 .$$

Ahora, sea x_0 el centro del arco que contiene a los puntos x_{31}, z_1, z_3, x_{13} y tomemos $z - x_0 = re^{i\theta}$, así obtenemos que

$$\int_{x_{13}}^{x_{31}} y^{-1}dx = -\int_0^{\pi} d\theta = -\pi$$

por lo tanto

$$\int_D y^{-1}dxdy = \int_{x_{13}}^{x_{31}} y^{-1}dx + (\pi - \theta_1) - \theta_2 + (\pi - \theta_3)$$
$$= \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

CAPITULO 2.

§2.1. DOMINIO FUNDAMENTAL DEL GRUPO MODULAR.

DEFINICION 2.1.1. Sea $SL_2(\mathbb{Z})$ el sub-grupo de $SL_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Llamamos *grupo modular* al grupo

$$G = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$$

la imagen del grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ en $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$.

AFIRMACION 2.1.2. $SL_2(\mathbb{Z})$ es discreto en $SL_2(\mathbb{R})$.

Prueba. Veamos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces x es un punto límite de α elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$. Sean $(b_n, d_n) = 1$ tales que $b_n/d_n \longrightarrow x$ resolviendo $a_n d_n - b_n c_n = 1$ para $a_n, c_n \in \mathbb{Z}$. Tomemos $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$, entonces $\alpha_n(0) \longrightarrow x$ para $n \in \mathbb{Z}$.

DEFINICION 2.1.3. Sea D el sub-conjunto de H formado por los puntos z tales que

$$|z| \geq 1 \qquad \text{y} \qquad |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$$

a D se le llama *dominio fundamental*.

Definimos los elementos S y T de G por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a probar que D es un dominio fundamental por la acción de G sobre el semi-plano superior H. Mas precisamente:

TEOREMA 2.1.4. (1) Para todo $z \in H$, existe un elemento g de G tal que $gz \in D$.

(2) Supongamos que dos puntos distintos z, $z' \in D$ son congruentes módulo G. Entonces $Re(z) = \pm \frac{1}{2}$ y $z = z' \pm 1$, o $|z| = 1$ y $z' =$

(3) Sea $z \in D$, y sea G_z el estabilizador de z en G. Entonces $G_z = \{1\}$, salvo en los tres casos siguientes:

(i) $z = i$, en este caso G_z es el grupo de orden 2 generado por S;

(ii) $z = \rho = e^{2\pi i/3}$, en este caso G_z es grupo de orden 3 generado por ST;

(iii) $z = -\bar{\rho} = e^{\pi i/3}$, en este caso G_z es el grupo de orden 3 generado por TS.

Demostración. Sea G' el grupo generado por S y T, y sea $z \in H$. Veremos que existe $g' \in G$ tal que $g'z \in D$, lo probaria (1).

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es elemento de G', sabemos que

$$Im(gz) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} ;$$

el conjunto de parejas (c, d) tales que $|cz + d| < k$, para k dado es finito, pues c y d son enteros. Entonces hay una pareja (c', d') que hace a $|cz + d|$ mínimo, en concecuencia existe un elemento $g \in G'$ tal que $Im(gz)$ es máximo. Por otra parte escojemos un entero n tal que $T^n gz$ tenga parte entera entre $-1/2$ y $1/2$,esto se hace tomando $n = -[Re(gz)]$. Ahora veamos que $z' = T^n gz$ está en D, i.e., $|z'| \geq 1$; supongamos por un momento que $|z'| < 1$, entonces $-1/z'$ tiene parte imagiria mayor que z', Demostración. Es inmediato a partir de (1) y (2).

TEOREMA 2.1.6. El grupo G está generado por S y T.

Demostración. Sea $g \in G$. Tomemos un punto z_o en el interir de D digamos $z_o = 2i$, y sea $z = gz_o$. Sabemos por la parte (1) del Teor.5.4. que existe $g' \in G'$ tal que $g'z \in D$. Los puntos z_o y $g'z = g'gz_o \in D$, y son congruentes modulo G, por (2) y (3) del Teor. 5.4., tenemos que $g'gz_o = z_o$, luego $g'g = 1$, por lo tanto $g \in G'$. La otra contención es obvia. (se da otra Dem. en [4]).

§2.2. FUNCIONES MODULARES

DEFINICION 2.2.1. Llamamos función *debilmente modular de peso* $2k$, con k entero, a toda función meromorfa f definida en el semi-plano superior H que satisface:

$$f(z) = (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

PROPOSICION 2.2.2. Sea f una función meromorfa en H. Para que f sea una función debilmente modular de peso $2k$, es necesario y suficiente que satisfaga las dos relaciones siguientes:

(i) $$f(z + 1) = f(z)$$

(ii) $$f(-1/z) = z^{2k} f(z).$$

Demostración. Sea f debilmente modular de peso $2k$. En particular para g y $g' \in SL_2(\mathbb{Z})$ definidas como:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos

$f(gz) = f(-1/z) = z^{2k} f(z)$ y $f(g'z) = 1^{2k} f(z)$.

Para probar la suficiencia, se hace por inducción.

Probaremos que $f(z) = (cz + d)^{-2k} f(z)$, o equivalentemente se probará que $f(gz) = \left(\frac{d(gz)}{dz}\right)^{2k} f(z)$.

Escribimos $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ como

$$g = ST^{n_1}ST^{n_2} \ldots ST^{n_i}.$$

Para $i = 1$,

$$\begin{aligned} f(gz) &= f(ST^{n_1}z) \\ &= (T^{n_1}z)^2\, f(T^{n_1}z) \\ &= (z + n_1)^2\, f(z), \end{aligned}$$

como $$\frac{d(ST^{n_1}z)}{dz} = j(ST^{n_1}, z)^{-2}$$

$$= (z + n_1)^{-2}.$$

Ahora supongamos que se cumple para $i = k$. Es decir, tenemos

$$f(gz) = (T^{n_1}S \ldots ST^{n_k}z)^{-2}.(T^{n_2}S \ldots ST^{n_k}z)^{-2} \ldots (T^{n_k}z)^{-2} f(z).$$

con

$$(T^{n_1}S \ldots ST^{n_k}z)^{-2}(T^{n_2}S \ldots ST^{n_k}z)^{-2} \ldots (T^{n_k}z)^{-2} = \frac{d(ST^{n_1} \ldots ST^{n_1})}{dz}$$

$$= j(ST^{n_1} \ldots ST^{n_k}, z)^{-2}.$$

Calculando $$(ST^{n_1} \ldots ST^{n_{k+1}}) = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n_{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_k & b_k n_{k+1} - a_k \\ d_k & d_k n_{k+1} - c_k \end{pmatrix}$$

por otro lado

$$(T^{n_1}S \ldots ST^{n_{k+1}}z)(T^{n_2}S \ldots ST^{n_{k+1}}z) \ldots (T^{n_{k+1}}z) =$$

$$\left(\frac{j(ST^{n_1} \ldots ST^{n_{k+1}}, z)}{j(ST^{n_2} \ldots ST^{n_{k+1}}, z)}\right)^{-2} . \left(\frac{j(ST^{n_2} \ldots ST^{n_{k+1}}, z)}{j(ST^{n_3} \ldots ST^{n_{k+1}}, z)}\right)^{-2} \ldots j(T^{n_{k+1}}, z)^{-2}$$

por lo tanto se tiene que

$$j(ST^{n_1} \ldots ST^{n_{k+1}}, z)^{-2} = (T^{n_1}S \ldots ST^{n_{k+1}}z)^{-2}.(T^{n_2}S \ldots ST^{n_{k+1}}z)^{-2} \ldots (T^{n_{k+1}}z)^{-2}.$$

El mapeo $z \longmapsto q = e^{2\pi i z}$ es de gran importancia en las formas modulares. Este mapeo manda el semi-plano superior H en el disco unitario K-{0} sin el origen. Usaremos este mapeo para definir una estrutura analítica en $H \cup \{\infty\}$.

Dada una función periodica f en H de periodo 1, como en la Prop.2.2.2., podemos expresar a dicha función f como una función de q, definiendo $f(z) = f'(q) = f'(1/2\pi i \log q)$, esta función $f'(q)$ es meromorfa en K-{0}. Diremos que f es meromorfa en ∞ si se puede expresar como una serie de potencias en la variable q, y que contenga al menos un número finito de terminos negativos, i.e. que tenga una expanción de Fourier de la forma

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$$

en la que $a_n = 0$ para n sufisientemente pequeña. Diremos que f es holomorfa en ∞ si $a_n = 0$ para todo n negativo; y diremos que f se anula en ∞ si f es holomorfa en ∞ y $a_n = 0$.
Cuando f es holomorfa en el infinito, ponemos $f(\infty) = f'(0)$ es el valor que toma f en el infinito.

DEFINICION 2.2.3. Una función debilmente modular se dice que es *modular* si es meromorfa en el infinito.

DEFINICION 2.2.4. Llamamos *forma modular* a toda función modular que es holomorfa en todas partes, incluso en el infinito; si tal función se anula en el infinito, se dice que es una *forma parabólica (Spitzenform o cusp-form)*.

Así una forma modular de peso $2k$ está dada por una serie

$$f(z) = \sum a_n e^{2\pi i z}.$$

que converge para $\mathrm{Im}(z) > 0$, y que verifica la igualdad

$$f(-1/z) = z^{2k} f(z).$$

En muchas aplicaciones que tienen las formas modulares a la teoria de los números la función $\theta(z)$ tiene un papel importante.

Ejemplos. (1) La función theta definida en H, como

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2},$$

es una forma modular de peso 1/2.

(2) La función eta

$$\eta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24},$$

es la forma parabólica de mayor peso posible para G, tiene peso 12

(3) La serie normalizada de Eisenstein

$$E_{2k}(z) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{(c,d)} (cz + d)^{-2k},$$

donde ζ es la funcion zetha y c, d distintos de cero.

Esta es una forma modular de peso $2k$.

Para una exposición de estos ejemplos favor de consultar [A.Ogg] o [N. Koblitz].

BIBLIOGRAFIA.

[1] T. Miyake, MODULAR FORMS, Spriger Verlag 1989.

[2] J.P. Serre, COURS D'ARTHMETIQUE, Presses universitaires de France 1970.

[3] L.R. Ford, AUTOMORPHIC FUNCTIONS, Chelsea 1929.

[4] Hua Loo Keng, INTRODUCTION TO NUMBER THEORY, Springer Verlag 1979.

[5] J. Lehner, A SHORT COURSE IN AUTOMORPHIC FUNCTIONS, Holt, Rinehart and Winston 1966.

[6] N. Koblitz, INTRODUCTION TO ELLIPTIC CURVES AND MODULAR FORMS, Springer Verlag 1984.

[7] A. Ogg, MODULAR FORMS AND DIRICHLET SERIES, W.A. Benjamin 1969.

[8] L.V. Ahlfors, COMPLEX ANALYSIS, Mc Graw-Hill 1979.

[9] A.Reyes Rodríguez, TESIS DE LICENCIATURA, Ciencias UNAM 1984.