5 8
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

MATEMATICAS PARA EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES TERCER SEMESTRE

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

SOFIA BLANCA ESTELA SALCEDO MARTINEZ

México, D. F. 1991

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

OBJETIVO

Esta tesis ha sido elaborada con el objetivo de servir como libro de texto, para los alumnos de Matemáticas del tercer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades, ya que no existe ningún libro que conjunte todos los temas relativos a su programa.

De étsa forma se quiere evitar la gran difucltad que para el alumno representa, el tener que consultar distintos textos, que en algunos casos contienen lenguaje y una exposisión elevadas, para su nivel de conocimientos.

Por eso es que con ésta tesis he tratado de hacer un texto que conjunte : Claridad en el lenguaje aunado con una sencillez y profundidad adecuada para su nivel. Ejemplificando cada tema, y de manera inmediata realizando peguntas acerca de él, con el objetivo de que el alumno razone cada tema y lo pueda aprender con mayor rapidez.

GEOMETRIA EUCLIDIANA

METODO DEDUCTIVO.

Platón (427-347 A.C.) discípulo de Sócrates pensaba que la abstracción matemática debía hacerse de la manera más clara posible, ya que sus predecesores no hacían una argumentación deductiva desde las premisas hasta la conclusion del problema .

Es por esta inquietud que Platón desarolla el Metodo Deductivo que consiste en encadenar proposiciones o premisas verdaderas ,-- argumentandolas hasta obtener como consecuencia lógica una conclusión , de tal manera que no exista ningun error en la argumentación .

¿ En que consiste el Método deductivo ?

Euclides afirmaba que : Si premisa es el principio del razonamiento , se debe proporcionar en las matemáticas el principio de su razonamiento.

A estos principios les llamó : Definiciones , Axiomas y Postulados .

DEFINICION .- Es una proposición que expresa con claridad las características de una persona o cosa que se pretende definir.

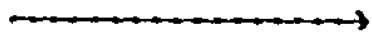
Ejemplos :

PUNTO.- Es la extensión más pequeña , no tiene dimensiones ,no tiene tiene largo , no tiene ancho ,nitampoco alto.

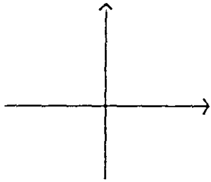
A

•

RECTA.- Es la sucesión de puntos alineados en una misma dirección , y solo tiene una dimensión que es el largo .

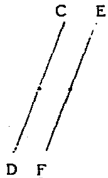


PLANO.- Es el area limitada por dos rectas perpendiculares - entre si que se cortan , y sólo tiene dos dimensiones que son ,el largo y el ancho.



RECTAS PARALELAS.- Son dos rectas que no tienen ningún punto - en común , es decir que nunca se cortan , ni forman ningún ángulo

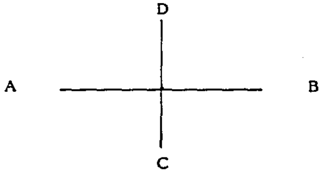
Para simbolizar que la recta que pasa por los puntos C,D es paralela a la recta que pasa por los puntos E,F se utiliza el símbolo // , es decir : $\overline{CD}//\overline{EF}$.



$\overline{CD}//\overline{EF}$

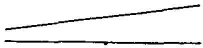
RECTAS PERPENDICULARES.- Son dos rectas que al intersectarse - forman un ángulo de 90° .

Para simbolizar que la recta que pasa por los puntos A,B es -- perpendicular a la recta que pasa por los puntos C,D se utiliza-- el simbolo $\perp$, es decir : $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.



$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

RECTAS CONVERGENTES-DIVERGENTES.- Son dos rectas que al prolongarse, por un lado se acercan y por el otro se separan. Por el lado en que se acercan son convergentes, por el lado en que se separan son divergentes.



Convergen divergen

EJERCICIOS:

Da la definición de:

a) Superficie.

____

b) Volúmen.

____

AXIOMA.- Es una premisa tan obvia que no necesita ser demostrada.

Ejemplos:

Todo número es igual a si mismo.

Cualquier cosa puede substituirse por su igual.

Euclides enunció en su libro ELEMENTOS, los siguientes axiomas o nociones comunes:

A1.- Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre si.-- Que actualmente se le conoce con el nombre de propiedad transitiva de la igualdad.

Si $a=b$ y $b=c$ entonces $a=c$.

Ejemplo: Si $2=1+1$ y $1+1=2(1)$ entonces $2=2(1)$.

Completa las siguientes proposiciones aplicando A1.

a) Si $4=2^2$ y $2^2=(2)(2)$ entonces $4=$ ____________

b) Si $27=$ ____ y $3^3=(9)(3)$ entonces $27=(9)(3)$

c) Si $x+y=z$, $z=10$ entonces $x+y=$ ____

d) Si {☆ , ✳ , O} = ____________ Y {O , ✳ , ☆} = {✳ , O , ☆}
entonces {☆ , ✳ , O} = {✳ , O , ☆}.

A2.- Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales, los resultados son iguales.

Si $a=b$ entonces $a+c=b+c$.

Ejemplo :

Si $x=3$ entonces $x+2=3+2$.

EJERCICIOS :

Completa las siguientes proposiciones aplicando A2.

a) Si $5+6=10+1$ entonces $(5+6)+4=$ ________

b) Si $x=5$ entonces _____ $= 5+3$

c) Si __________ $= y+x$ entonces $(x+y)+z=(y+x)+z$

d) Si $v=d/t$ entonces $v+x=$________

A3.- Si a cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados son iguales.

Si $a=b$ entonces $a-c=b-c$.

Ejemplos:

Si $y=15$ entonces $y-8=15-8$.

Si $4+1=5$ entonces $(4+1)-2=5-2$.

EJERCICIOS :

Completa las siguientes proposiciones aplicando A3.

a) Si $15=\frac{45}{3}$ entonces _______ $=\frac{45}{3}-5$

b) Si $x+y=x(y)$ entonces $(x+y)-z=$ ______

c) Si _____ $= \sqrt{x}$ entonces $9-1= \sqrt{x}-1$

d) Si $8=$ ______ entonces $8-2=(6+2)-2$

e) Si $h_1=h_2$ entonces $h_1-h_2=$______

Actualmente a los axiomas A2 y A3 se les conoce con el nombre de "propiedad de adicion de la igualdad."

A4.- Las cosas que coinciden mutuamente son iguales, y se les conoce con el nombre de "congruentes".

Ejemplo :

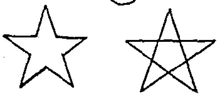
Si los cuadrados de la siguiente figura coinciden en todas sus partes, al sobreponerlos son iguales o congruentes

EJERCICIOS :

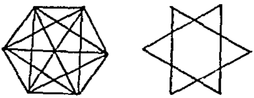
Completa las siguientes figuras para que sean congruentes .

a)

b)



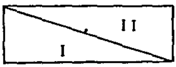
c)



A5.- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Ejemplo :

En la siguiente figura , si se considera al rectángulo como el todo , al triángulo I y al triángulo II , partes del rectángulo , se puede decir que el rectángulo es mayor que el triángulo I , y- también mayor que el triángulo II .



EJERCICIOS :

Sea el conjunto U= $\{ \{a,b\} , \{c,d\} , \{e,f\} \}$.

a) ¿Cuál conjunto corresponde al todo ? __________

b) ¿Cuales son las partes del todo ? __________

<u>POSTULADO</u>.- Es una premisa no tan obvia como el axioma , pero que se acepta como cierta .

Ejemplos:

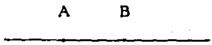
a) Toda figura puede cambiar de posición , sin alterar su forma ni sus dimensiones .

b) Existe una infinidad de puntos .

c) Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto .

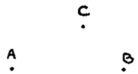
Euclides también enunció los siguientes postulados :

<u>P1</u>.- Dos puntos cualesquiera determinan una y sólo una línea recta .



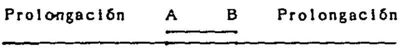
EJERCICIO :

Determina las rectas que pasan por los puntos AyB , ByC ,AyC .



<u>P2</u>.- Cualquier segmento de recta puede prolongarse en ambos sentidos, y determinar una recta.

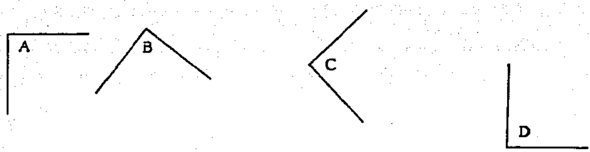
Un segmento de recta (recta finita) que tenga como extremos a los puntos A y B se simboliza como: $\overline{AB}$.



EJERCICIO :

¿Cuál es la diferencia entre segmento de recta y recta ?

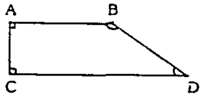
<u>P3</u>.- Todos los ángulos rectos son iguales .



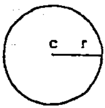
$\hat{A}=\hat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90°$

EJERCICIO :

En el siguiente trapecio rectángulo indica cuales son los angulos rectos .



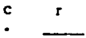
P4.-Se puede trazar una circunferencia ,si se dan un centro y un radio cualesquiera .



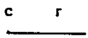
EJERCICIO :

Traza una circunferencia con el centro y radio que se da .

a)



b)

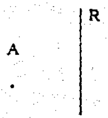


P5.- Si se tiene una recta y un punto exterior a ésta, por éste punto se puede trazar una y sólo una paralela a la recta dada.

EJERCICIOS :

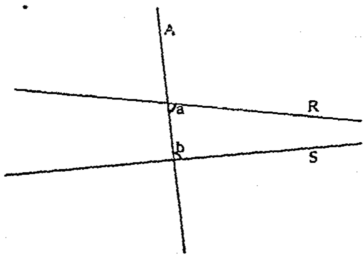
Traza la recta paralela a la recta R , y que pasa por el punto A .

a)



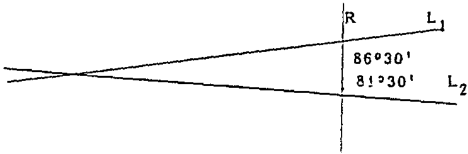
b)

Si la recta que pasa por el punto exterior A , no es paralela a la recta R , ni tampoco a la recta S , entonces , la recta que pasa por el punto A corta a las otras dos rectas de manera que la suma de los ángulos interiores formados sobre el mismo lado de la recta que pasa por el punto A , son menores que dos ángulos rectos , entonces las dos rectas R y S se cortan del lado de la recta que pasa por el punto A , en que la suma de los ángulos in es menor de 90º .



Ejemplo :

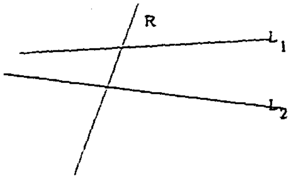
Si la recta L_1 no es paralela a la recta L_2 y R es transversal entonces L_1 y L_2 se intersectan .



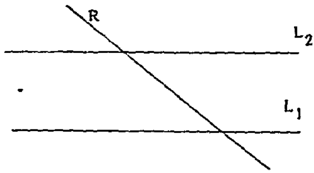
$81°30'+86°30' = 180°$, por lo tanto L_1 y L_2 no son paralelas .

EJERCICIOS :

a) ¿Cuanto suman los ángulos interiores que se forman sobre el lado de R en que las rectas L_1 y L_2 divergen ?

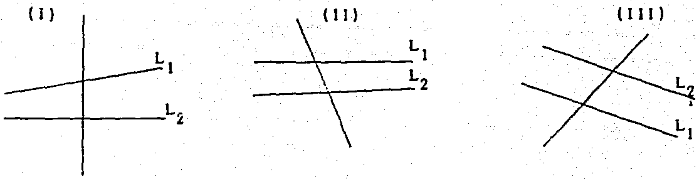


b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores que se forman sobre el lado de R , cuando las rectas L_1 y L_2 son paralelas ?



c) En cuales de las siguientes gráficas , las rectas L_1 y L_2 son : i) Paralelas

ii) No paralelas

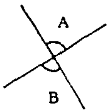


Paralelas ____________
No paralelas ____________

TEOREMA es una proposición que debe demostrarse .Los teoremas se demuestran basandose en razonamientos que se justifican mediante los axiomas y postulados .

Ejemplo :

Teorema .- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales .



Es necesario hacer hincapié que para demostrar un teorema , se debe de tener muy claro lo que es la hipótesis y lo que es la tesis.

La HIPOTESIS es todo lo que se supone cierto , como pueden serlos postulados y los axiomas .

La TESIS es lo que se tiene que demostrar , es decir , lo que se esta afirmando que es cierto .

En el teorema anterior la hipótesis es : Los ángulos son opuestos por el vértice .

La tesis es : Los ángulos son iguales .

EJERCICIOS :

Diga cuál es la hipótesis y cuál es la tesis de el siguiente teorema .

Si una gráfica admite un paseo euleriano cerrado , entonces es conexa y la valencia de todos sus vértices es par .

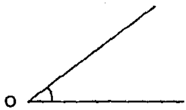
Hipótesis : ____________________

Tesis : ____________________

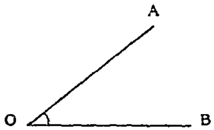
ANGULOS

Para poder proseguir con el estudio de la geometría euclidiana es necesario definir algunos otros elementos que se utilizarán en el curso , como son :

Angulo.- Es la medida de la abertura que se forma entre dos rectas que se intersectan en un punto (O) llamado vértice del ángulo .



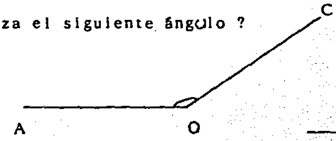
Si las rectas que forman el ángulo , son las que pasan por los puntos O,A y O,B respectivamente , el ángulo formado se puede simbolizar de las siguientes formas :



$\widehat{AOB}$, $\measuredangle AOB$, $\widehat{O}$, $\measuredangle O$, $\widehat{BOA}$, $\measuredangle BOA$

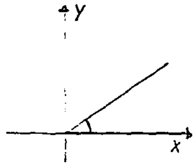
EJERCICIOS :

¿ Como se simboliza el siguiente ángulo ?



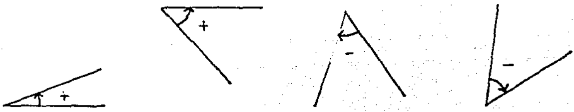
____

Un ángulo se dice que se encuentra en posición NORMAL , cuando está situado en un plano bidimensional , su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con el eje de las abscisas - (Y) .



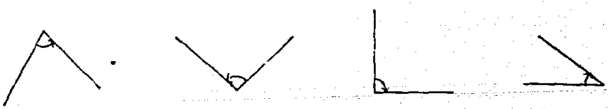
Se ha convenido arbitrariamente que los ángulos que se engen-- dran en sentido contrario a las manecillas del reloj son positi-- vos (+) , y si el ángulo se engendra en el sentido de las maneci- llas del reloj , será negativo (-) .

Ejemplos :



EJERCICIO :

¿Cuál es el sentido de los siguientes ángulos ?



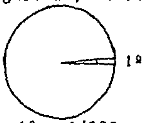
a) ________ b) ______ c) _____ d) _____

Para medir los ángulos se usa el transportador .

Las unidades que se utilizan son las siguientes :

GRADO , MINUTO , SEGUNDO Y RADIAN

GRADO .- Es la medida de la abertura que se obtiene al dividir un círculo en 360 partes iguales , se simboliza por º .



1º = 1/360

MINUTO .- Es la sesentava parte de un grado , se simboliza por (') .

SEGUNDO .- Es la sesentava parte de un minuto , se simboliza por (") . El segundo también equivale a la trscientos sesentava parte de un grado .

$$1º=60'=360''$$

EJERCICIOS :

a) ¿ A cuantos grados corresponde la mitad de un círculo ? ____

b) ¿ A que parte del círculo corresponden 90º ? ________

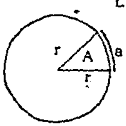
c) ¿ Cuantos minutos tiene 8º ? ________

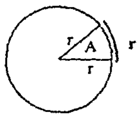
d) ¿ Cuantos segundos tiene 1º 10' ? ________

e) ¿ Cuantos grados forman 1200" ? ________

RADIAN .- Es la medida del ángulo que se forma , con un arco que mide un radio de la circunferencia , es decir , es el cociente entre la la longitud de arco y el radio .

$$A=\frac{\text{longitud de arco}}{\text{Longitud de radio}}=\frac{a}{r}=\frac{r}{r}=1$$





A es la medida del ángulo que se forma con un arco que mide un radio de la circunferencia y a la longitud de arco.

Ejemplo :

Si la longitud de un arco de una circunferencia mide 20 unidades , y el radio 13 unidades ¿Cuanto mide el ángulo que se forma?

$$A = \frac{20}{13} = 1.54 \text{ rad.}$$

EJERCICIOS :

¿Cuánto mide el ángulo si:

a) La longitud de arco mide 10 cm. y el radio mide 5 cm. ____

b) La longitud de arco mide 28 cm. y el radio mide 28 cm. ____

CONVERSION DE GRADOS A RADIANES .- Se sabe que la circunferencia mide un ángulo (A) de 360° , y la longitud del arco de la circunferencia (a) mide $2\pi r$, entonces $2\pi r$ es igual a 360° .

$$A = \frac{a}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por tanto para convertir grados a radianes basta con multiplicar los grados por $\pi/180°$.

Ejemplo :

Convertir a radianes el ángulo que mide 25° 30' .

Para poder operar con el ángulo , hay que tenerlo expresado -- con la misma unidad , en este caso hay que expresar los minutos - como grados , esto se hace dividiendo los minutos entre 60 .

$$30' = \frac{30}{60} = 0.5°$$

por tanto : 25° 30' = 25.5°

$$X = \frac{\pi(25.5)}{180} = \frac{3.1416(25.5)}{180} = \frac{80.11}{180} = 0.445 \text{ rad.}$$

EJERCICIOS :

¿Cuantos radianes mide un ángulo de 270° ? ________

Conversión de radianes a grados .- Para convertir radianes a grados , basta con multiplicar los radianes por $180°/\pi$.

Ejemplo :

Convertir a grados $\pi/3$ rad.

$$X = (\pi/3)\frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$$

EJERCICIO :

¿Cuantos grados mide $2\pi/3$ rad. ? ________

OPERACIONES ENTRE MEDIDAS ANGULARES .

SUMA.- Para sumar la medida de dos ángulos , se coloca un sumando debajo del otro , de manera que coincidan las unidades del mismo orden . Después se suman grados con grados , minutos con minutos y segundos con segundos .

Si la suma de los segundos es mayor o igual a 60 , ésta se convierte a minutos dividiendola entre 60 .El cociente es la cantidad de minutos , y el residuo es la cantidad de segundos . Estos minutos se suman a los obtenidos en la suma anterior .

De la misma forma , si la suma de los minutos es mayor o igual a 60 , estos se convierten a grados dividiendo la suma entre 60 . El cocinte es la cantidad de grados y el residuo la cantidad de minutos.

Ejemplo :

Sumar 3° 15' 45" y 8°50'25" .

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 3^\circ & 15' & 45'' \\
+ & 8^\circ & 50' & 25'' \\
\hline
 & 11^\circ & 65' & 70'' \\
+ & & 1' & 10'' \\
\hline
 & 11^\circ & 66' & 10'' \\
+ & 1^\circ & 6' & \\
\hline
 & 12^\circ & 6' & 10''
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
60 \,\overline{)\,70''}\; = 1' \\
10'' \\[1em]
60 \,\overline{)\,66'}\; = 1^\circ \\
6'
\end{array}
$$

Por tanto :

$$3^\circ\ 15'\ 45'' + 8^\circ\ 50'\ 25'' = 12^\circ\ 6'\ 10'' \ .$$

EJERCICIOS :

¿Cuanto mide la suma de los ángulos A Y B ?

a) A=41°26'42"
   B=58°39'29" ________

b) A=69°59'18"
   B=35°18'45" ________

RESTA.-Para restar la medida de dos ángulos , se coloca el sustraendo debajo de el minuendo , de tal forma que coincidan las unidades del mismo orden .

Si en el minuendo los minutos son menores que los del sustraendo , se transforma un grado del minuendo en sesenta minutos , y se les suman a los minutos del minuendo .

De igual forma , si en el minuendo hay menos segundos que en el sustraendo , se transforma un minuto del minuendo en sesenta segundos , y se les suman a los segundos del minuendo .

Después se restan grados con grados , minutos con minutos y segundos con segundos .

Ejemplo :

Restarle a 39°18'15" la cantidad de 15°20'30" .

$$\begin{array}{rrrr}
 & 39 & 18' & 15'' \\
- & 15^{\circ} & 20' & 30'' \\
\hline
 & 39^{\circ} & 18' & 15'' \\
- & 1^{\circ} & +\ 60' & \\
\hline
 & 38^{\circ} & 78' & 15'' \\
 & 38^{\circ} & -\ 1' & +60'' \\
\hline
 & 38^{\circ} & 77' & 75''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & 38^{\circ} & 77' & 75'' \\
- & 15^{\circ} & 20' & 30'' \\
\hline
 & 23^{\circ} & 57' & 45''
\end{array}$$

EJERCICIOS :

¿Cuanto mide la resta de los ángulos A y B ?

a) A= 125° 28' 10" y B = 39° 45' 21" . __________

b) A= 345° 18' 20" y B = 29° 30' 45" . __________

PRODUCTO.-Para multiplicar un ángulo por un número, se multiplica dicho número por cada una de las unidades . Si en el resultado los segundos son mayores o iguales que sesenta , éstos se transforman a minutos , y estos minutos se suman a los del producto . Si esta suma es mayor o igual que sesenta , estos minutos se transforman a grados , y se suman a los grados del producto .

EJEMPLO

Multiplicar 10 por 15° 20' 15" .

$$10(15^{\circ})\ 10(20')\ 10(15'') = \begin{array}{rrrr}
 & 150^{\circ} & 200' & 150'' \\
+ & & 2' & 30'' \\
\hline
 & 150^{\circ} & 202' & 30'' \\
+ & 3^{\circ} & 22' & 30'' \\
\hline
 & 153^{\circ} & 22' & 30''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\quad 2 \\
60\overline{)150} \\
30
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\quad 3 \\
60\overline{)202} \\
22'
\end{array}$$

EJERCICIOS:

Efectua los siguientes productos :

a) 12 (21°15'19")

b) 18 (13°16'21")

COCIENTE.- Para dividir un ángulo entre cualquier número , basta dividir cada una de las unidades entre el número dado .

Si el cociente de los grados no es exacto , el residuo se convierte a minutos , multiplicando éste residuo por sesenta , y sele suma a éste producto los minutos del dividendo . Estos minutos se dividen entre el número dado , si el cociente no es exácto , el residuo se convierte a segundos , multiplicando éste residuo por sesenta , y se le suma a este producto los segundos del dividendo .El resultado se divide entre el número dado , y de ésta forma se termina la operación .

Ejemplo :

Dividir 122° 19' 30" entre 4 .

$$\begin{array}{r|lll} & 30° & 34' & 52'' \\ \hline 4 & 122° & 19' & 30'' \\ & 2° & & \\ & +\ 120' & & \\ & 139' & & \\ & & 3' & \\ & & +\ 180'' & \\ & & 210'' & \\ & & & 2'' \end{array}$$

$2°(60)=120'$

$3'(60)=180''$

Por tanto :

$$122°19'30''/4=30°34'52''$$

EJERCICIOS :

Efectua las siguientes divisiones :

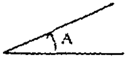
a) 345°20'16"/15 __________

b) 56°19'25"/9 __________

c) 219°10'21" __________

CLASIFICACION DE ANGULOS SEGUN SU ABERTURA.

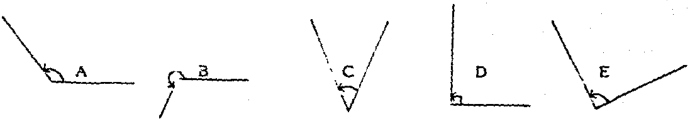
ANGULOS AGUDOS.- Son aquellos cuya abertura es menor a 90° .



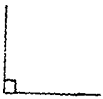
0° $\hat{A}$ 90°

EJERCICIO :

¿Cuales de los siguientes ángulos son agudos ?



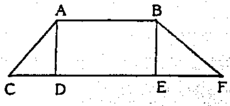
ANGULOS RECTOS.- Son los ángulos formados por dos rectas perpendiculares entre si y cuya abertura mide 90º .



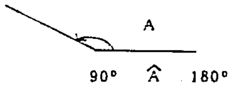
$\hat{A}$= 90°

EJERCICIO :

¿Cuales son los ángulos rectos de la siguiente figura ?

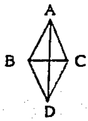


ANGULO OBTUSO .- Es aquel cuya abertura es mayor que 90° y menor que 180° .

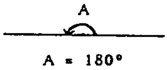


EJERCICIO :

¿Cuales son los ángulos obtusos de la siguiente figura ?

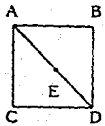


ANGULO LLANO .- ES aquel en los que sus lados pertenecen a la misma recta , miden 180° .

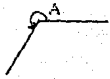


EJERCICIO :

¿Cuales son los ángulos llanos de la siguiente figura ?



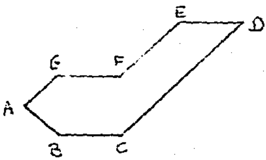
ANGULO ENTRANTE .- Es aquel cuya medida es mayor que --- 180° y menor que 360°



180° A 360°

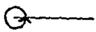
EJERCICIO :

Localiza un ángulo entrante en la siguiente figura .



ANGULO PERIGONAL .- Es aquel cuyos lados se sobreponen- al dar uno de ellos una vuelta completa , mide 360° .

A



A = 360°

EJERCICIOS :

a) ¿Cuantos ángulos de 45 º forman un ángulo conjugado ? _____

b) ¿Cuantos ángulos rectos forman un ángulo conjugado ? _____

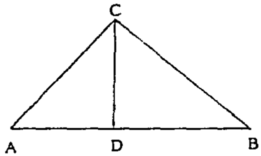
CLASIFICACION DE ANGULOS SEGUN LA RELACION EXISTENTE ENTRE ELLOS.

ANGULOS ADYACENTES O CONSECUTIVOS .- Son dos ángulos que solo tienen en común un vértice y un lado .

$\hat{A}$ es consecutivo a $\hat{B}$

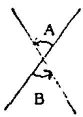
EJERCICIO :

Localiza dos ángulos consecutivos menores de 90° cada uno en la siguiente figura .



_____

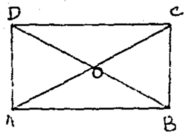
ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE .- Son los ángulos que tienen el mismo vértice y los lados de uno son la continuación del otro.



A es opuesto a B

EJERCICIO :

¿Cuantos pares de ángulos opuestos por el vértice hay , y cuales son , en la siguiente figura ?



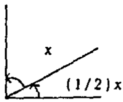
CLASIFICACION DE ANGULOS POR PAREJAS SEGUN EL VALOR DE SU SUMA

ANGULOS COMPLEMENTARIOS.- Son dos ángulos que forman un ángulo recto , es decir que suman 90° .

$\hat{A}+\hat{B}=90°$

Ejemplo:

¿Cuánto mide el ángulo que es la mitad de su complemento ?



$x+\frac{1}{2}x=90°$

$\frac{3}{2}x=90°$

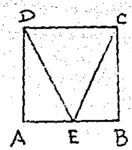
$x=60°$

$\frac{1}{2}x=30°$

30°

EJERCICIOS :

a) Localiza los ángulos complementarios de la siguiente figura en donde A B C D son los vértices de un cuadrado .



b)¿Cuál es el complemento del ángulo que mide 15° 10' 2" ?

____

c) ¿Cuánto mide el ángulo que es el triple de su complemento ?

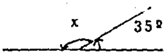
____

ANGULOS SUPLEMENTARIOS .- Son dos ángulos que forman un ángulo llano , es decir que suman 180° .

$\hat{A}+\hat{B}=180°$

Ejemplo :

¿Cuál es el suplemento del ángulo que mide 35° 20' 15" ?



$x+35°20'15"=180°$

$x=180°-35°20'15"$

$x=144°39'45"$

<u>144°39'45"</u>

EJERCICIOS :

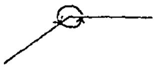
a)¿Cuál es el suplemento del ángulo que mide 131°15'10" ?

____

b)¿Cuánto mide el ángulo que es la cuarta parte de su suplemento ?

____

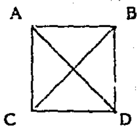
ANGULOS CONJUGADOS.- Son dos ángulos que forman un perígono , es decir , que suman 360° .



$\hat{A}+\hat{B}=360°$

EJERCICIOS :

a) Localiza dos ángulos conjugados en la siguiente figura .



____

b)¿Cuánto mide el ángulo conjugado, del ángulo-que mide 176°5"

____

c)¿Cuánto mide el ángulo que es las tres cuartas partes de su conjugado ?

____

EJERCICIOS

1.-ENUNCIA :

a) Un axioma .

b) Un postulado .

c) Un teorema .

2.-Convierte los siguientes ángulos que estan expresados en -- grados a radianes .

a) 20°

b) 15°10'

c) 60°40'15""

d) -15°

e) -10°20"

3.- Convierte los siguientes ángulos que están expresados en - radianes a grados .

a) 0.5 rad.

b) $\pi/2$ rad.

c) $3\pi/2$ rad.

d) 5π rad.

e) $3\pi/4$ rad.

4.- De la siguiente figura cuáles son los ángulos :

a) Agudos .

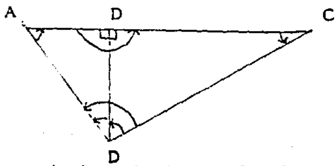
b) Rectos .

c) Adyacentes .

d) Suplementarios .

e) Obtusos .

f) Llanos .



5.- Obtener el complemento de los siguientes ángulos :

a) 20°30'10"

b) 16°15'20"

c) 84°10"

d) 15°20'

e) 89°13"

6.- Obtener el suplemento de los siguientes ángulos :

a) 23°15'10"

b) 90°45'23"

c) 125°14'18"

d) 182°12'10"

e) 135°20"

7.- Obtener el conjugado de los siguientes ángulos :

a) 30°16'15"

b) 24°25'

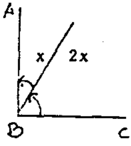
c) 120°18'23"

d) 45'36"

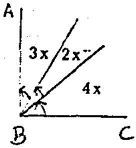
e) 215°25'16"

8.- Si $\widehat{ABC}=90°$, encontrar el valor de cada uno de los siguien tes ángulos :

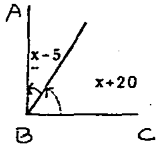
a)



b)

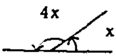


c)

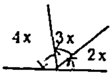


9.- Si $\widehat{ABC}$ es un ángulo llano , encontrar el valor de cada uno de los siguientes ángulos .

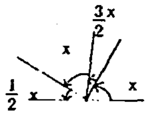
a)



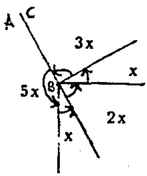
b)



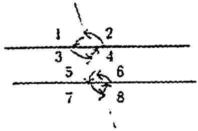
c)



10.- Si $\widehat{ABC}=360°$, encontrar el valor de los siguientes ángu-- los :



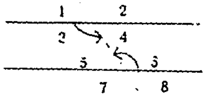
CLASIFICACION DE ANGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL (SECANTE) .



Los ángulos que se forman en la región interna son : $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ y $\hat{6}$.

Los ángulos que se forman en la región externa son : $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}$ y $\hat{8}$

ANGULOS ALTERNOS INTERNOS.- Son los ángulos internos no adyacentes , situados en lados distintos de la secante .

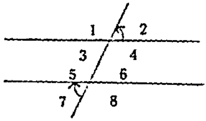


Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{6}$ son alternos internos

EJERCICIO :

¿Cuales otros ángulos alternos internos hay en la figura anterior ?

ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS .- Son los ángulos externos no adyacentes situados en lados distintos de la secante .

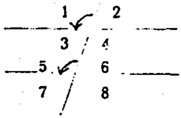


Los ángulos $\hat{2}$ y $\hat{7}$ son alternos externos

EJERCICIO :

¿Cuales otros ángulos alternos externos hay en la figura anterior ?

ANGULOS CORRESPONDIENTES .- Son los ángulos no adyacentes , -- uno alterno y el otro externo , situados del mismo lado de la secante .



Los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{5}$ son correspondientes

---

EJERCICIOS :

En la figura anterior , cuales son los ángulos :

a) correspondientes

b) Opuestos por el vértice

c) Suplementarios

TEOREMAS SOBRE ANGULOS .

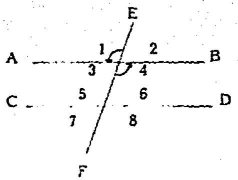
TA1.-Los ángulos opuestos por el vértice son iguales .

Hipótesis : $\overline{AB}//\overline{CD}$

$\overline{EF}$ es una secante

$\widehat{1}$ y $\widehat{4}$ son ángulos opuestos por el vértice

Tesis : $\widehat{1} = \widehat{4}$



Demostración :

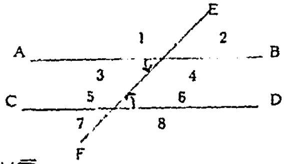
$\widehat{1}+\widehat{2}=180°$ por ser ángulos suplementarios .

$\widehat{2}+\widehat{4}=180°$ por ser ángulos suplementarios .

$\widehat{1}+\widehat{2}=\widehat{2}+\widehat{4}$ por A1 .

$\widehat{1}=\widehat{4}$ por A3 .

TA2.-Los ángulos alternos internos son iguales .



Hipótesis : $\overline{AB}//\overline{CD}$

$\overline{EF}$ es una secante

$\widehat{3}$ y $\widehat{6}$ son alternos internos

Tesis : $\widehat{3}=\widehat{6}$

Este teorema se demostrará en forma indirecta o reducción a lo absurdo . Esta forma consiste en suponer cierta la negación de la conclusión deseada , con ésta nueva premisa y junto con las premisas dadas (hipótesis) , se deduce una contradicción ,y por lo tanto se establece la conclusión deseada , como una inferencia lógica deducida de las premisas originales .

Demostración :

$\widehat{3}\neq\widehat{6}$ hipótesis contradictoria de la tesis

$\widehat{3}+\widehat{4}=180°$ por ser ángulos suplementarios

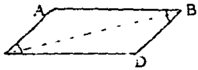
$\widehat{6}+\widehat{4}\neq 180°$ ya que $\widehat{3}\neq\widehat{6}$

Por el postulado 5 se sabe que si la suma de los ángulos interiores formados sobre el mismo lado de la recta secante es mayor o menor a 180° , las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan de lado en que la suma de los ángulos interiores formados sobre el mismo lado de la secante es menor a 180° .Esto quiere decir que las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelas .

Esta contradicción se obtiene por suponer que los ángulos 3 y 6 no son iguales . Por tanto los ángulos 3 y 6 son iguales , que es lo que se quería demostrar .

Ejemplo :

Los ángulos internos opuestos de un paralelogramo son iguales.



Hipótesis : $\overline{AB}//\overline{CD}$

$\overline{AC}//\overline{BD}$

Tesis : $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}$

Demostración :

$\widehat{ACB}=\widehat{CBD}$ por ser ángulos alternos-internos .

$\widehat{BCD}=\widehat{ABC}$ por ser ángulos alternos internos .

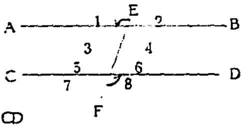
$\widehat{ACB}+\widehat{BCD}=\widehat{CBD}+\widehat{ABC}$ por A2 .

$\widehat{ACD}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}$ por A1 .

$\widehat{ABD}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}$ por A1 .

$\therefore$ $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}$ por A1 .

TA3.- Los ángulos alternos externos son iguales .



Hipótesis : $AB//CD$

EF es secante

$\hat{1}$ y $\hat{8}$ son ángulos alternos externos

TESIS : $\hat{1}=\hat{8}$

Demostración :

$\hat{1}=\hat{4}$ por ser opuestos por el vértice

$\hat{4}=\hat{5}$ por ser alternos internos

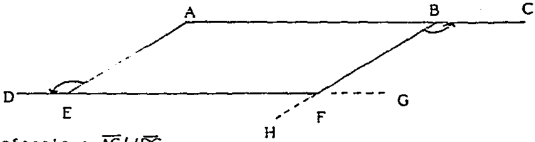
$\hat{1}=\hat{5}$ por A1

$\hat{5}=\hat{8}$ por ser opuestos por el vértice

$\hat{1}=\hat{8}$ por A1

Ejemplo:

Los ângulos externos opuestos de un paralelogramo son iguales



Hipótesis : $\overline{AC}//\overline{DG}$

$\overline{AE}//\overline{BH}$

$\widehat{AED}$ y $\widehat{CBH}$ son ângulos externos opuestos

Tesis : $\widehat{AED}=\widehat{CBH}$

Demostración :

$\widehat{AED}=\widehat{GFH}$ por ser alternos externos

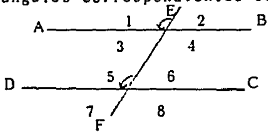
$\widehat{GFH}=\widehat{BFE}$ por ser opuestos po el vêrtice

$\widehat{AED}=\widehat{BFE}$ por A1

$\widehat{CBH}=\widehat{BFE}$ por ser alternos internos

$\widehat{AED}=\widehat{CBH}$ por A1

TA4.- Los ângulos correspondientes son iguales .



Hipótesis : $\overline{AB}//\overline{CD}$

$\overline{EF}$ es una transversal

$\widehat{1}$ y $\widehat{5}$ son correspondientes

Tesis : $\widehat{1}=\widehat{5}$

Demostración :

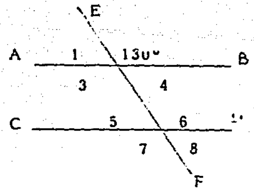
$\widehat{1}=\widehat{4}$ por ser opuestos por el vêrtice

$\widehat{4}=\widehat{5}$ por ser alternos internos

$\widehat{1}=\widehat{5}$ por A1

Ejemplos :

a)Si $\widehat{2}=130º$,$\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ es una transversal, obtener el valor de los demas ângulos .



Desarrollo :

$\hat{1}+\hat{2}=180°$ por ser suplementarios

$\hat{1}+130°=180°$ por sustitución

$\hat{1}=50°$ por A3

$\hat{1}=\hat{4}=50°$ por ser opuestos por el vértice

$\hat{2}=\hat{3}=130°$ por ser opuestos por el vértice

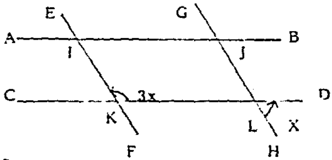
$\hat{1}=\hat{5}=50°$ por ser correspondientes

$\hat{3}=\hat{7}=130°$ por ser correspondientes

$\hat{6}=\hat{7}=130°$ por ser opuestos por el vértice

$\hat{4}=\hat{8}=50°$ por ser correspondientes

b) Obtener el valor de los ángulos $\widehat{AIE}$ y $\widehat{BJG}$. Si $\overline{AB}//\overline{CD}$ y ---- $\overline{EF}//\overline{GH}$, si $\widehat{LKI}=3x$ y $\widehat{HDL}=x$



Desarrollo :

$\widehat{IKL}=\widehat{JLD}$ por ser correspondientes

$\widehat{JLD}+\widehat{DLH}=180°$ por ser suplementarios

$\widehat{3x}+\widehat{x}=180°$ por sustitución

$\widehat{4x}=180°$

$\widehat{x}=180°/4$

$\widehat{x}=45°$

$\widehat{3x}=135°$

$\therefore$ $\widehat{HLD}=45°$

$\widehat{LKI}=135°$

$\widehat{AIE}=\widehat{IKC}$ por ser correspondientes

$\widehat{IKC}=\widehat{DLH}$ por ser alternos externos

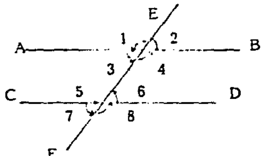
$\widehat{AIE}=\widehat{DLH}$ por A1

$\widehat{AIE}=45°$

$\widehat{BJG}=\widehat{JLD}$ por ser correspondientes
$\widehat{JLD}=\widehat{LKI}$ por ser correspondientes
$\widehat{BJG}=\widehat{LKI}$ porA1
$\therefore$ $\widehat{BJG}=135°$ por A1

EJERCICIOS

1.- Si $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ es secante, y los ángulos están colocados de la siguiente forma:



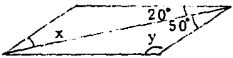
Obtener el valor de los siguientes ángulos :

a) $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}$, si se sabe que $\hat{8}=138°$.

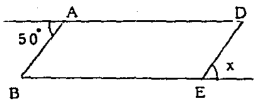
b) $\hat{1}$ y $\hat{6}$ si se sabe que $\hat{3}=2x$ y $\hat{5}=5x$.

c) El valor de $\hat{2}$ si $\hat{7}=2x+15°$ y $\hat{3}=4x+3°$.

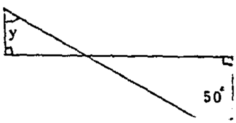
2.-¿Cuánto miden los ángulos X y Y del siguiente paralelogramo?



3.- ¿Cuánto mide el ángulo x si ABCD son los vértices de un paralelogramo ?



4.-¿Cuánto miden los ángulos X y Y de la siguiente figura ?



TRIANGULO.

El triángulo es una superficie plana limitada por tres lados.

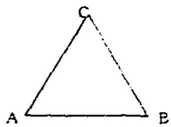
Es el polígono con el menor número de lados.

Para simbolizar que un triángulo es el formado por los vértices A,B,C se usa la siguiente notación : Δ ABC .

Los triángulos se clasifican de acuerdo con sus lados y con sus ángulos .

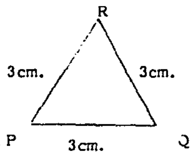
CLASIFICACION DE TRIANGULOS DE ACUERDO CON LA MEDIDA DE SUS LADOS

Triángulos equiláteros .- Son aquellos en los que todos sus lados son iguales .



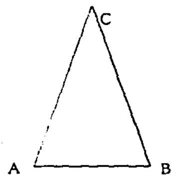
$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$

Ejemplo :



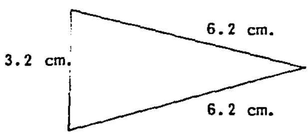
$\overline{PR}=\overline{PQ}=\overline{QR}$

Triángulos isósceles .- Son aquellos que sólo tienen dos lados iguales .



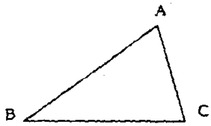
$\overline{AC}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$

Ejemplo :



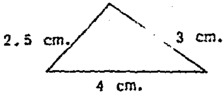
$\overline{PQ}=\overline{PR}\neq\overline{QR}$

<u>Triángulo</u> <u>escaleno</u> .- Es aquel que tiene sus tres lados desiguales



$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

Ejemplo:

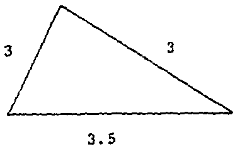


$\overline{PQ} \neq \overline{PR} \neq \overline{QR}$

EJERCICIOS :

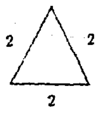
Clasifica los siguientes triángulos de acuerdo con la medida de sus lados .

a)



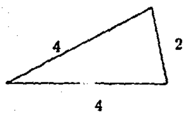
____

b)



____

c)



____

CLASIFICACON DE TRIANGULOS DE ACUERDO CON LA MEDIDA DE SUS ANGULOS los .

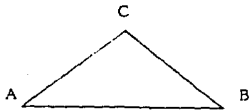
Triángulo rectángulo .- Es el que tiene un ángulo recto y dos-agudos .
El lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa , y los lados adyacentes al ángulo recto se denominan catetos .

$A = 90^\circ$, $B \angle 90^\circ$, $C \angle 90^\circ$

Ejemplo :

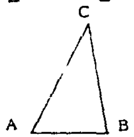
$A = 90^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 60^\circ$

Triángulo acutángulo .- Es al que tiene sus tres ángulos agu - dos .



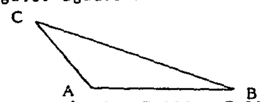
$A \angle 90^\circ$, $B \angle 90^\circ$, $C \angle 90^\circ$

Ejemplo :



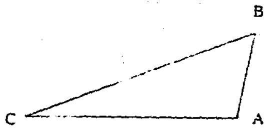
$A = 60^\circ$, $B = 80^\circ$, $C = 40^\circ$

Triángulo obtusángulo .- Es el que tiene un ángulo obtuso , y los otros dos ángulos agudos .



$A > 90^\circ$, $B \angle 90^\circ$, $C \angle 90^\circ$

Ejemplo :

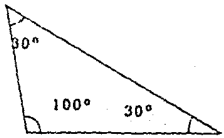


A=100° , B=60° , C=20°

Ejercicio:

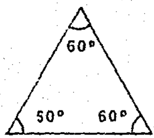
Clasifica a los siguientes triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos .

a)



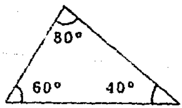
______

b)



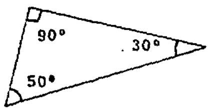
______

c)



______

d)

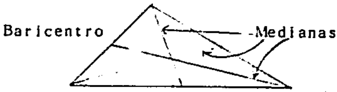


______

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIANGULO

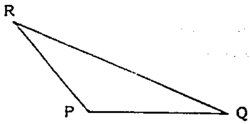
MEDIANA .- Es el segmento de recta que va desde el punto medio de un lado de un triángulo al vértice opuesto .

BARICENTRO .- Es el punto donde se intersectan las tres medianas .



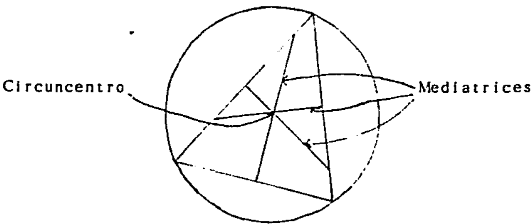
EJERCICIO :

Traza las medianas y el baricentro en el siguiente triángulo .



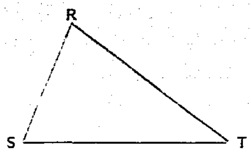
MEDIATRIZ .- Es el segmento de recta perpendicular a un lado en el punto medio .

CIRCUNCENTRO .- Es el punto donde se intersectan las tres mediatrices , y además es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo .



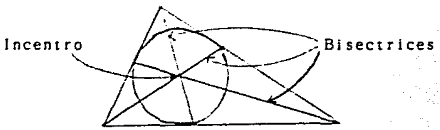
EJERCICIO :

Traza las mediatrices y el circuncentro en el siguiente triángulo .



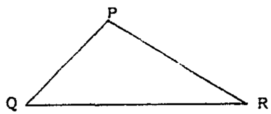
BISECTRIZ.- Es la recta que parte en dos ángulos iguales , a - uno de los ángulos interiores del triángulo .

INCENTRO. - Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices , y es el centro de la circunferencia .



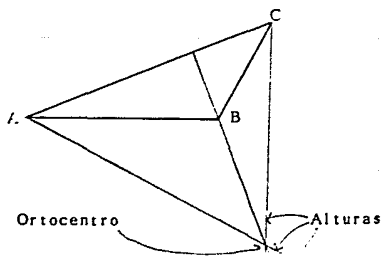
EJERCICIO :

Traza la bisectrices y el incentro en el siguiente triángulo .



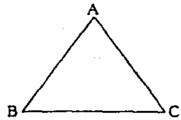
ALTURA .- Es la recta perpendicular a un lado del triángulo , que va al vértice opuesto .

ORTOCENTRO .- Es el punto donde se intercectan las tres alturas



EJERCICIO :

Traza las alturas y el ortocentro en el siguiente triángulo .



TEOREMAS SOBRE TRIANGULOS

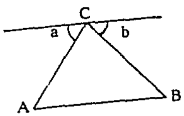
TT1.- En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores miden 180°

Hipótesis ; A,B,C son vértices de un triángulo

Tesis : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$

Demostración :

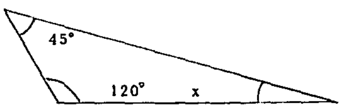
Si se traza una recta paralela al lado $\overline{AB}$ se tiene que :



$\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{C} = 180°$	El todo es igual a la suma de sus partes .
$\widehat{A}=\widehat{a}$	por ser ángulos alternos internos
$\widehat{B}=\widehat{b}$	por ser ángulos alternos internos
$\therefore \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$	cualquier cosa puede substituirse por su igual

Ejemplo :

Obtener el valor del ángulo x en la siguiente figura



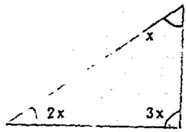
$x+45°+120 = 180°$

$x= 180° -165°$

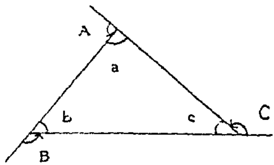
$x=15°$

EJERCICIO :

¿Cuánto miden cada uno de los ángulos interiores del siguiente triángulo ?



TT2.- En todo triángulo la suma de sus ángulos exteriores mide 360 ° (Angulo externo es el que se forma con un lado , y la prolongación del lado adyacente , para obtener los demás ángulos externos , los lados se prolongan en el mismo sentido).



Hipótesis : $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$ son ángulos externos del triángulo

$\widehat{a},\widehat{b},\widehat{c}$ son ángulos internos del triángulo

Tesis : $A+B+C=360°$

Demostración :

$\widehat{a}+\widehat{A}=180°$ por ser ángulos suplementarios

$\widehat{b}+\widehat{B}=180°$ por ser ángulos suplementarios

$\widehat{c}+\widehat{C}=180°$ por ser ángulos suplementarios

Sumando las igualdades anteriores se obtiene :

$\widehat{a}+\widehat{A}+\widehat{b}+\widehat{B}+c+\widehat{C}=540°$ Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales los resultados son iguales .

Pero $\widehat{a+b+c} = 180°$ porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180°

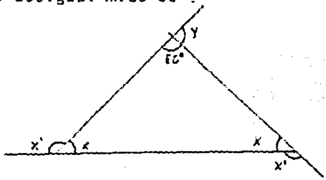
$180°+\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 540°$ cualquier cosa puede substitu

$180° + A + B + C - 180° = 540°$	cualquier cosa puede substituirse por su igual
$180° + A + B + C - 180° = 540° - 180°$	Si a cantidades iguales se restan cantidades iguales los resultados son iguales.

$\therefore\ A + B + C = 360°$

Ejemplo :

¿Cuanto miden los ângulos exteriores de un triângulo isósceles cuyo ângulo desigual mide 80° ?



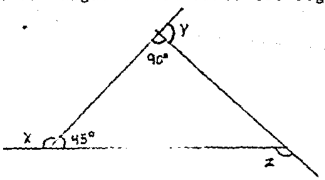
$80° + x + x = 180°$	$x + x' = 180°$	$x' + x' + y = 360°$
$2x + 80° = 180°$	$50° + x = 180°$	$130° + 130° + y = 360°$
$2x = 180° - 80°$	$x' = 180° - 50°$	$260° + y = 360°$
$2x = 100°$	$x' = 130°$	$y = 360° - 260°$
$x = 100° / 2$		$y = 100°$
$x = 50°$		

$\underline{x' = 130°}$

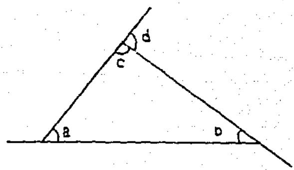
$\underline{y = 100°}$

EJERCICIO :

¿Cuânto miden los ângulos exteriores del siguiente triângulo ?



<u>TT3.- En todo triângulo un angulo externo</u> es igual a la suma de los dos ângulos internos no adyacentes a él .



Hipótesis: d es un ángulo externo

a y b son ángulos interiores no adyacentes

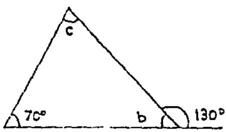
Tesis : $d=a+b$

Demostración :

$a+b+c=180°$	porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180 .
$d+c=180°$	por ser suplementarios
$a+b+c=d+c$	dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si
$\therefore a+b=d$	si a cantidades iguales se restan cantidades iguales los resultados son iguales .

Ejemplo :

Obtener el valor del ángulo c de la siguiente figura .



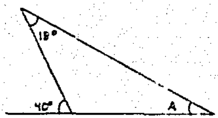
$c+70°=130°$

$c=130°-70°$

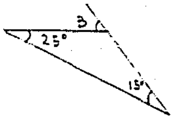
$\therefore c=60°$

EJERCICIOS :

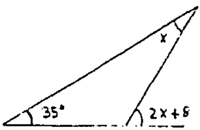
a) ¿ Cuánto mide el ángulo A de la siguiente figura ?



b) Cuánto mide el ángulo B de la siguiente figura ?

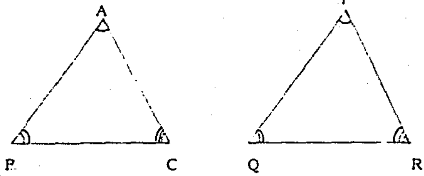


c) Utiliza la siguienten figura para obtener el valor del án gulo x ?



CONGRUENCIA DE TRIANGULOS.

Dos triángulos son iguales o congruentes , si sus lados y sus ángulos son respectivamente iguales .



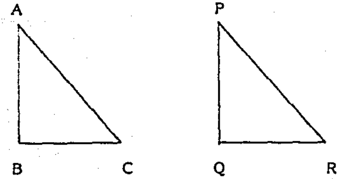
$\widehat{A}=\widehat{P}$ $\overline{AB}=\overline{PQ}$

$\widehat{B}=\widehat{Q}$ $\overline{AC}=\overline{PR}$

$\widehat{C}=\widehat{R}$ $\overline{BC}=\overline{QR}$

$\Delta ABC=\Delta PQR$

Ejemplo :



$\widehat{A}=40°$ AB=3 $\widehat{P}=40°$ PQ=3

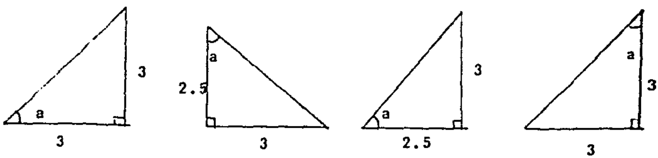
$\widehat{B}=90°$ AC=3.9 $\widehat{Q}=90°$ PR=3.9

$\widehat{C}=50°$ BC=2.5 $\widehat{R}=50°$ QR=2.5

EJERCICIO :

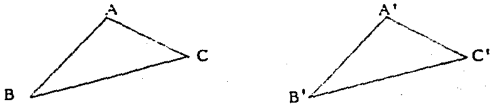
Cuales de los siguientes triángulos son congruentes ?

a) b) c) d)



TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS.

TEOREMA LAL .- Dos triángulos son iguales , si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre los lados iguales .



Hipótesis : $\overline{AC}=\overline{A'C'}$
$\overline{BC}=\overline{B'C'}$
$\widehat{C}=\widehat{C'}$

Tesis : $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

Demostración :

Si se enciman los dos riángulos se tine que :

$\overline{AC}$ coincide con A'C' ya que $\overline{AC}=\overline{A'C'}$

$\overline{BC}$ coincide con $\overline{B'C'}$ ya que $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ y $\widehat{C}=\widehat{C'}$

$\therefore$ El vértice A coincide con A'

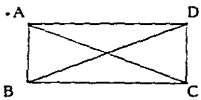
El vértice B coincide con B'

$\overline{AB}$ coincide con $\overline{A'B'}$ ya que por dos puntos pasa un solo segmento de recta

$\therefore$ $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ Dos cosas que coinciden son - iguales .

Ejemplo :

Las diagonales de todo rectángulo son iguales .



Hipótesis : ABCD son vértices de un rectángulo .

Tesis : $\overline{AC}=\overline{BD}$

Demostración :

$\overline{AD}=\overline{BC}$ por ser lados paralelos del rectángulo

$\overline{AB}=\overline{AB}$ Por ser lado común

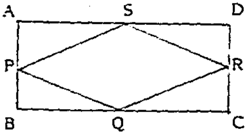
$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}$ por ser ángulos rectos

$\triangle ABD=\triangle ABC$ por teorema LAL ya que $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AB}$ es lado común y $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}$

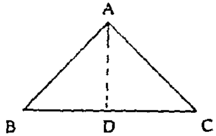
por tanto ; $\overline{AC}=\overline{BD}$

EJERCICIO :

a) Si A,B,C,D son los vértices de un triángulo rectángulo y P, Q,R,S son los puntos medios de sus lados . Demuestrese que P,Q,R,S son vértices de un paralelogramo .



<u>TEOREMA T1</u> .- En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales .



Hipótesis : A,B,C son vértices de un triángulo isósceles

Tesis : $\widehat{B}=\widehat{C}$

Demostración :

Si se traza la bisectriz $\overline{AD}$ al ángulo $\widehat{BAC}$ entonces- $\overline{CD}$ es común en los triángulos ABD y ACd

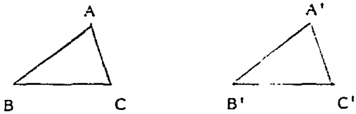
$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ por ser $\overline{CD}$ bisectriz al ángulo $\widehat{BAC}$

$\overline{AB}=\overline{AC}$ por se el $\triangle ABC$ isósceles

$\triangle ABD=\triangle DAC$ por teorema LAL

$\therefore \widehat{B}=\widehat{C}$

TEOREMA ALA .- Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado .

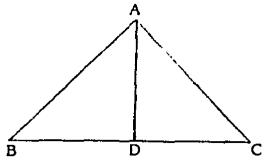


Hipótesis : $\overline{AB}=\overline{A'B'}$
$\widehat{A}=\widehat{A'}$
$\widehat{B}=\widehat{B'}$

Tesis : $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

Demostración : Si se enciman los dos triángulos se tiene
$\overline{AB}$ coincide con $\overline{A'B'}$ por ser $\overline{AB}=\overline{A'B'}$
El segmento $\overline{AC}$ queda encima del $\overline{A'C'}$ porque $\widehat{A}=\widehat{A'}$
El segmento $\overline{BC}$ queda encima del $\overline{B'C'}$ porque $\widehat{B}=\widehat{B'}$
El vértice $\widehat{C}$ coincide con el $\widehat{C'}$ ya que dos rectas se cortan en un sólo punto .
$\therefore$ $\overline{AC}$ coincide con $\overline{A'C'}$
$\overline{BC}$ coincide con $\overline{B'C'}$
$\therefore$ $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ Dos cosas que coinciden son iguales .

Ejemplo :
En todo triángulo isósceles la altura al lado desigual divide al triángulo en dos triángulos iguales .



Hipótesis : ABC es isósceles
$\overline{AD}$ es altura al lado desigual

Tesis : $\triangle ABD=\triangle ACD$

Demostración : $\widehat{B}=\widehat{C}$ por TI
$\widehat{ADB}=\widehat{ADC}$ por ser ángulos rectos , ya que la altura $\overline{AD}$ es perpendicular al lado $\overline{BC}$

$\widehat{B}+\widehat{BAD}+\widehat{ADB}=180°$ por TT1

$\widehat{C}+\widehat{CAB}+\widehat{ADC}=180°$ por TT1

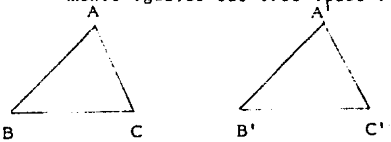
$\widehat{B}+\widehat{BAD}+\widehat{ADB}=\widehat{C}+\widehat{CAB}+\widehat{ADC}$ por A1

$\widehat{ADC}=\widehat{BAD}$ por A3

$\overline{AD}$ es lado común en el $\triangle ABD$ y en el $\triangle ACD$

$\therefore \triangle ABD = \triangle ACD$ por teorema ALA

TEOREMA LLL .- Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres lados .



Hipótesis : A,B,C y A',B',C' son vértices de dos triángulos respectivamente

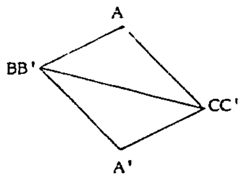
$\overline{AB}=\overline{A'B'}$

$\overline{AC}=\overline{A'C'}$

$\overline{BC}=\overline{B'C'}$

Tesis : $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Demostración : Si se colocan los triángulos de tal forma que uno de sus lados sea común a ellos , entonces se forma el paralelogramo de vértices A,B,A'C



$\widehat{A}=\widehat{A'}$ porque en todo paralelogramo los angulos opuestos son iguales

como $\overline{AB}=\overline{A'B}$

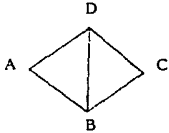
$\overline{AC}=\overline{A'C'}$

$\widehat{A}=\widehat{A'}$

$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ por teorema LAL

Ejemplo :

En la siguiente figura $\overline{AD}=\overline{DC}$ y $\overline{AB}=\overline{BC}$. Demuestrese que $\overline{DB}$ es bisectríz del ángulo $\widehat{ADC}$



Hipótesis : $\overline{AD}=\overline{DC}$

$\overline{AB}=\overline{BC}$

Tesis : $\overline{DB}$ es bisectríz de $\widehat{ADC}$

Demostración : $\overline{BD}$ es lado común en el $\triangle$ ABD y en el $\triangle$ BCD

$\triangle$ ABD= $\triangle$ BCD por teorema LLL

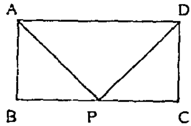
$\widehat{ADB}=\widehat{BDC}$

$\therefore$ $\overline{DB}$ es bisectríz de $\widehat{ADC}$

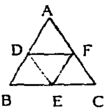
EJERCICIOS :

a) Demuestra que la altura en cualquiera de los lados de un triángulo equilátero , divide a éste en dos triángulos iguales (La altura es un eje de simetría del triángulo)

b) Demuestra que si A,B,C,D son vértices de un rectángulo y P punto medio del lado BC , entonces AP=DP



c) Si A,B,C son los vértices de un triángulo equilátero , y D, E,F son puntos medios de sus ladsos ,demuestrese que los cuatro triángulos interiores que se forman son también equiláteros .



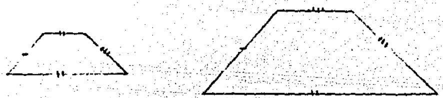
d) Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son i guales .

SEMEJANZA

Dos figuras son semejantes , cuando tienen sus ángulos congruentes y sus lados homólogos proporcionales .

El símbolo que se utiliza para indicar que las figuras son semejantes es ~ o ≅

Lados Homólogos son los que se oponen a ángulos iguales .

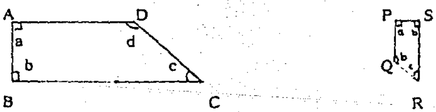


EJERCICIOS :

¿ En las siguientes figuras cuáles son los lados homólogos ?

a)

b)



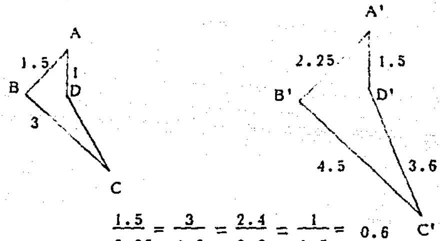
FORMA PARA DETERMINAR QUE LOS LADOS HOMOLOGOS SON PROPORCIONALES.

En el numerador se colocan los lados de la primera figura y en el denominador los lados homólogos de la segunda figura . Si los cocientes de cada una de las parejas de los lados homólogos son iguales , quiere decir que todas las parejas guardan entre sí la misma proporción , a esta proporción se le denomina razón o constante de proporcionalidad (r).

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'\ A_3'}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_3'A_4'}} = \cdots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{A_{n-1}'\ A_n'}}\ n$$

Ejemplo :

Si $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$, $\widehat{C}=\widehat{C'}$, $\widehat{D}=\widehat{D'}$, demuestre que las siguientes figuras son semejantes .



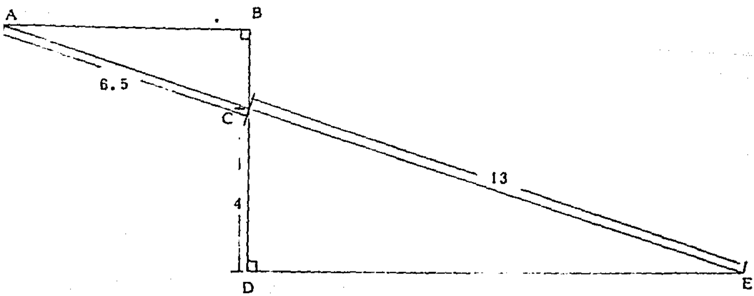
$$\frac{1.5}{2.25} = \frac{3}{4.5} = \frac{2.4}{3.6} = \frac{1}{1.5} = 0.6$$

$\therefore$ Como los ángulos son iguales respectivamente , y los lados homólogos son proporcionales entonces :

$$ABCD \simeq A'B'C'D'$$

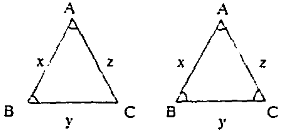
EJERCICIO :

Demuestre que los triángulos de la siguiente figura son semejantes , y obtenga el valor del lado $\overline{BD}$ .Si AB//CD.



<u>Todas las figuras semejantes cumplen con una relación de equivalencia .</u>

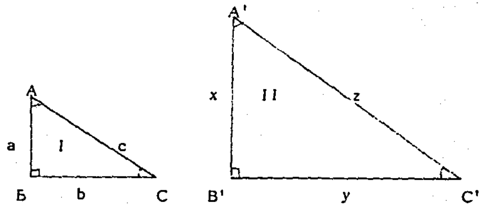
<u>Propiedad reflexiva</u> .- Toda figura es semejante a sí misma .



$$\widehat{A}=\widehat{A}\ ,\ \widehat{B}=\widehat{B}\ ,\ \widehat{C}=\widehat{C}$$

$$\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}=r=1$$

<u>Propiedad simétrica</u>.- Si la figura I es semejante a la figura II , entonces la figura II es semejante a la figura I .



$$\widehat{A}=\widehat{A'}\ ,\ \widehat{B}=\widehat{B'}\ ,\ \widehat{C}=\widehat{C'}$$

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=r$$

$$\therefore\ \triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$$

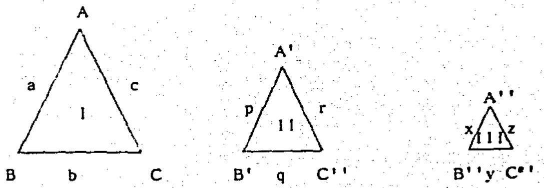
------ O ------

$$\widehat{A}=\widehat{A'}\ ,\ \widehat{B}=\widehat{B'}\ ,\ \widehat{C}=\widehat{C'}$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{r}$$

$$\therefore\ \triangle A'B'C' \simeq \triangle ABC$$

<u>Propiedad transitiva</u> .- Si la figura I es semejante a la figura II , y la figura II es semejante a la figura III , entonces la figura I es semejante a la fugura III .



$$\widehat{A}=\widehat{A'}=\widehat{A''} \quad , \quad \widehat{B}=\widehat{B'}=\widehat{B''} \quad , \quad \widehat{C}=\widehat{C'}=\widehat{C''}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=r_1 \quad \therefore \ \triangle ABC \simeq \triangle A'B'C' \quad \text{con } r=r_1$$

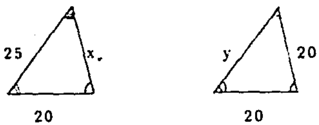
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}=r_2 \quad \therefore \ \triangle ABC \simeq \triangle A''B''C'' \quad \text{con } r=r_3=r_1 r_2$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A''C''}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B''C''}}=r_2 \quad \therefore \ \triangle A'B'C' \simeq \triangle A''B''C'' \quad \text{con } r=r_2$$

EJERCICIOS :

Los triángulos de los siguientes ejercicios son semejantes entre si . Obtener los lados faltantes .

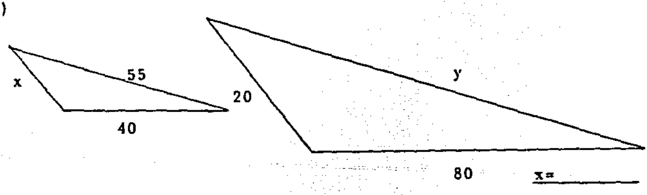
a)



x= ________

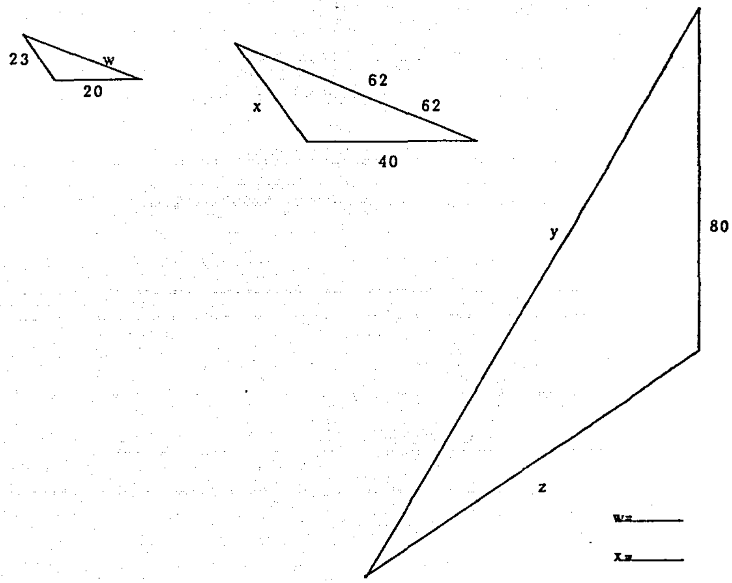
y= ________

b)



x= ________

c)



w= ______

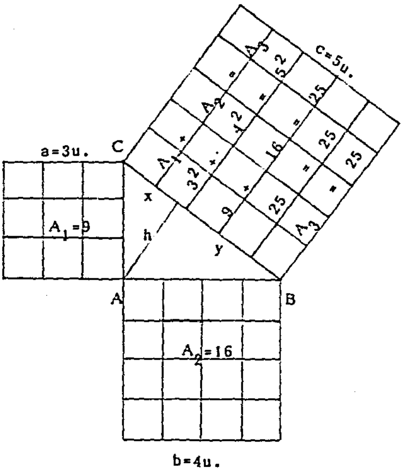
x= ______

y= ______

z= ______

TEOREMA DE PITAGORAS

En todo triángulo rectángulo , la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es equivalente al cuadrado construido sobre la hipotenusa .



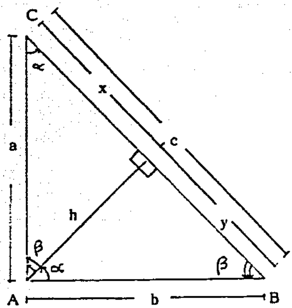
Ya que se ha estudiado semejanza de triángulos , se demostrará el teorema de Pitagoras utilizando las propiedades de semejanza ,

Hipótesis : El triángulo ABC es rectángulo , a y b son catetos y c es su hipotenusa .

Tesis : $a^2+b^2=c^2$

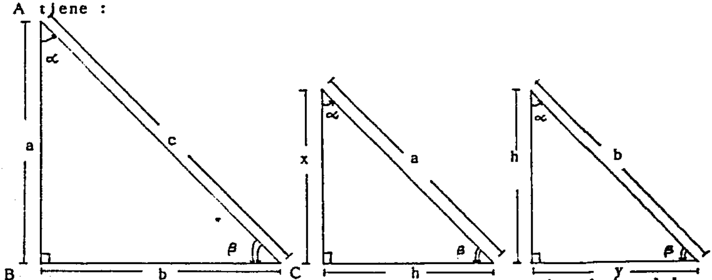
Demostración : Sea H la altura construida sobre la hipotenusa, x e y las partes en que la altura divide a la hipotenusa

La altura divide al triángulo ABC en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes también al triángulo ABC , ya que tienen un lado homologo proporcional y los tres ángulos interiores congruentes.



Δ ABC $\cong$ Δ ahx $\cong$ Δbhy

Si se separan los tres triángulos y se acomodan los lados de tal forma que los lados homólogos sean paralelos entre si , se tiene :



En donde la relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo <u>ABC</u> y el triángulo <u>ahx</u> , se representa como sigue :

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{h} = \frac{c}{a}$$

escogiendo la igualdad $\frac{a}{x} = \frac{c}{a}$

obteniendo $a^2 = cx$

Analogamente la relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo <u>ABC</u> y l triángulo <u>bhy</u> se representa como sigue :

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{y}=\frac{c}{b}$$

obteniendo : $b^2=cy$

sumando los valores obtenidos de a^2 y b^2 se obtiene :

$$a^2+b^2=cx+cy$$

sacando como factor común a c en el segundo miembro de la igualdad

$$a^2+b^2=c(x+y)$$

como la hipotenusa $c=x+y$, substituyendo se tiene :

$$a^2+b^2=c(c)$$

$$\therefore\ a^2+b^2=c^2$$

Con las relaciones anteriores de la proporcionalidad entre los triángulos ABC ,ahx , bhy se pueden obtener las relaciones entre los lados y la altura

$$\frac{x}{h}=\frac{h}{y}=\frac{a}{b}$$

de la igualdad $\frac{x}{h}=\frac{h}{y}$ se obtiene :

$$h^2=x(y)$$

$$\therefore\ h=\sqrt{xy}$$

de la igualdad $\frac{a}{h}=\frac{c}{b}$ se obtiene :

$$h=\frac{ab}{c}$$

de la igualdad $\frac{a}{x}=\frac{c}{a}$ se obtiene :

$$x=\frac{a^2}{c}$$

de la igualdad $\frac{b}{y}=\frac{c}{b}$ se obtiene :

$$y=\frac{b^2}{c}$$

Ejemplos :

Si a y b son catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa , obtener los valores que se piden en cada ejercicio .

a) a=5cm.

b=10cm.

Substituyendo los valores en la fórmula del teorema de Pitagoras $a^2+b^2=c^2$ se obtiene :

$$5^2+10^2=c^2$$
$$25+100=c^2$$
$$125=c^2$$
$$\sqrt{125}=c$$
$$\therefore\ c=11.18\text{cm}$$

b) a=7cm.
   c=12cm.
   Obtener el valor de b

$$7^2+b^2=12^2$$
$$49+b^2=144$$
$$b^2=144-49$$
$$b^2=95$$
$$b=\sqrt{95}$$
$$\therefore\ b=9.75\text{cm}$$

c) a=6
   b=5
   c=7.81
   Obtener el valor de la altura construida sobre la hipotenusa.

$$h=\frac{ab}{c}$$

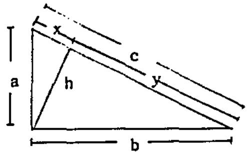
$$h=6(5)/7.81$$
$$h=30/7.81$$
$$\therefore\ h=3.84$$

d) x=9
   y=11
   Obtener el valor de la altura construida sobre la hipotenusa .

$$h=\sqrt{xy}$$
$$h=\sqrt{9(11)}$$
$$h=\sqrt{99}$$
$$\therefore\ h=9.95$$

EJERCICIOS :

Utiliza la siguiente figura para obtener los valores que se piden en cada ejercicio .



1) Si $a=8$
   $b=10$
   Obtener el valor de c ________
2) Si $a=5$
   $b=z$
   $c=2z$
   Obtener los valores de b y c ________
3) Si $a=9$
   $b=15$
   Obtener el perímetro del triángulo ________
4) Si $a=16$
   $b=12$
   Obtener el area del triángulo ________
5) Si $x=2$
   $y=5$
   Obtener la altura h del triángulo ________
6) Obtener la altura de un tetraedro cuyo lado mide **10 cm.** ________

TRIGONOMETRIA .

La trigonometría plana , es aquella rama de las matemáticas , que trata sobre las relaciones que conciernen a lados y ángulos - de un triángulo llano cualesquiera que sean los métodos que se a- dopten para deducir de algunas partes , otras que se buscan .

La palabra trigonometría deriva del griego Trigos (triángulo) y métron (medida) , y significa medida de tres ángulos .

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS O RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN - ANGULO AGUDO EN UN TRIANGULO RECTANGULO

Seno: Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa y se abrevia sen

Coseno (Cos): Es la razón entre el cateto adyacente y - la hipotenusa

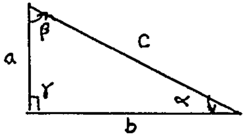
Tangente (Tan): Es la razón entre el cateto opuesto y - el cateto adyacente

Cotangente (Cot): Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto

Secante (Sec): Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente

Cosecante (Csc): Es la razón entre la hipotenusa y el - cateto opuesto.

Funciones Trigonométricas del ángulo agudo "α" del siguiente Triángulo rectángulo.



Como se observa en la figura, el cateto opuesto al ángulo "α" es el lado "a", el cateto adyacente es el lado "b", y la hipotenusa, que es el lado opuesto del ángulo recto "γ" es el lado "c", por tanto

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cot}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{Csc}\,\alpha = \frac{c}{a}$$

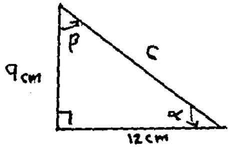
Como se puede observar, la cotangente, la secante y la cosecante son las funciones recíprocas de la tangente, coseno y seno respectivamente.

$$\text{Cot}\,\alpha = \frac{1}{\tan} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{Csc}\alpha = \frac{1}{\text{sen}} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}$$

Ejemplo: Obtener las funciones trigonométricas del ángulo agudo mayor del triángulo rectangulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm respectivamente.



Por medio del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa

$$9^2 + 12^2 = c^2$$

$$81 + 144 = c^2$$

$$c = \sqrt{225}$$

$$\therefore c = 15$$

Sabemos que a mayor lado se opone mayor ángulo, por lo tanto el ángulo agudo mayor es el angulo β ..

Substituyendo en las funciones se obtiene :

$\operatorname{Sen}\beta = \frac{12}{15} = 0.8$ $\qquad$ $\operatorname{Cot}\beta = \frac{9}{12} = 0.75$

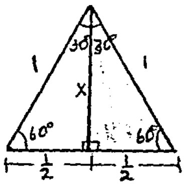
$\cos\beta = \frac{9}{15} = 0.6$ $\qquad$ $\sec\beta = \frac{15}{9} = 1.\overline{6}$

$$\tan \beta = \frac{12}{9} = 1.\overline{3} \qquad \csc \beta = \frac{15}{12} = 1.25$$

OBTENCION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS DE 30°, 45°, 60° .

Para obtener los valores de estas funciones se utilizarán figuras en las que alguno de sus ángulos sea el ángulo buscando, o bién se dividirá la figura en triángulos rectángulos para obtenerlo.

Para obtener los valores de las funciones de un ángulo de 30° se utiliza un triángulo equilátero ya que éste tiene sus tres ángulos iguales a 60°, y bisectando alguno de ellos se obtendra un ángulo de 30°, y si ademas el triángulo es de lados unitarios se tendrá:



Por tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo sombreado es una unidad, el cateto opuesto al ángulo de 30° es 1/2 unidad, y el cateto adyacente se obtiene mediante el teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

$$(1/2)^2 + x^2 = 1^2$$

$$1/4 + x^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - 1/4$$

$$x^2 = 3/4$$

$$x = \sqrt{3/4}$$

$$x = \sqrt{3}/2$$

$$x = 0.866$$

Sustituyendo los valores se tiene que :

$$\text{Sen } 30° = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$\cos 30° = \frac{0.866}{1} = 0.8666$$

$$\tan 30° = \frac{0.5}{0.866} = 0.577$$

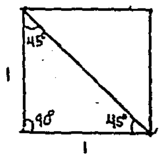
$$\cot 30° = \frac{0.866}{0.5} = 1.732$$

$$\sec 30° = \frac{1}{0.866} = 1.155$$

$$\csc 30° = \frac{1}{0.5} = 2$$

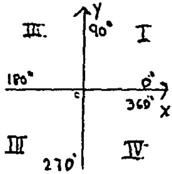
Ejercicios:

1) Obtener las funciones de un ángulo de 45° (se puede utilizar un cuadrado de lados unitarios, el cuál se divide formando - dos triángulos rectangulos mediante la diagonal como se mues tra en la siguiente figura.)

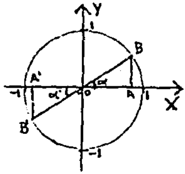


2) Obtener las funciones de un ángulo de 60°(utilizar el mismo triangulo equilatero que se utilizó para obtener las funciones de un ángulo de 30°)

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS QUE LIMITAN LOS CUADRANTES EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS



Para obtener estos valores, utilizaremos un círculo unitario, es decir que la medida del radio es igual a la unidad. El - cuál se girará hasta obtener el ángulo buscado (α) con este ra-- dio y el eje de las abscisas (x) se forman triángulos rectángulos de hipotenusa igual a la unidad como se ilustra en la siguiente figura.



Ya que cualquier distancia de un punto al origen es siempre positiva tendremos que $\overline{OB}$ sera siempre positiva e igual a uno. Por tanto si el ángulo $\alpha=0°$ tendremos que el cateto opuesto $\overline{AB}$ - igual a 0, y el cateto adyacente $\overline{OA}$ coincidirá con la hipotenusa $\overline{OB}$ $\therefore$ $\measuredangle\,\alpha=0°$ $\overline{AB} = 1$ $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$

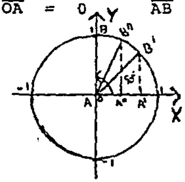
$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0$ $\text{cot } 0° = \frac{1}{0} \nexists$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = 0$ $\sec 0° = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$ $\csc 0° = \frac{1}{0} \nexists$

Si se hace girar el ángulo $\overline{OB}$ hasta que el ángulo α mida 90°, entonces $\overline{OB}$ coincidirá con el eje y se tendrá:

$\overline{OB} = 1$ $\overline{OA} = 0$ $\overline{AB} = 1$



por tanto:

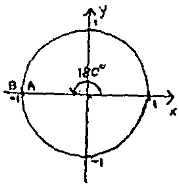
$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1$ $\cot 90° = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 90° = \frac{0}{1} = 0$ $\sec 90° = \frac{1}{0} \nexists$

$\tan 90° = \frac{1}{0} \nexists$ $\csc 90° = \frac{1}{1} = 1$

Si se sigue girando $\overline{OB}$ hasta que el ángulo α mida 180° se tendrá que:

$\overline{OA} = -1$ $\overline{AB} = 0$ $\overline{OB} = 1$



por tanto:

$$\text{sen } 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot 180° = \frac{1}{0} \nexists$$

$$\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \csc 180° = \frac{1}{0} \nexists$$

Ejercicio Sigue girando el radio hasta obtener un ángulo de 270°y - otro de 360° y obten las funciones respectivas.

Los valores obtenidos para las funciones las podemos resumir en la siguiente tabla:

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
cot	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$
sec	1	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
csc	$\nexists$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

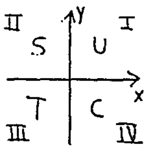
Observando la tabla anterior se deduce que:

El seno y el coseno toman valores entre -1 y +1 La tangente no esta definida para valores de 90° y 270°, de cero a 90° es positiva y varia en un intervalo de $[0,\infty)$, de 90°a 180° es negativa y varia en el intervalo $(-\infty, 0]$. De 180° a 270° vuelve a ser positiva y varia de $[0, \infty)$ y de 270° a 360° es negativa y varia en el intervalo $(-\infty, 0]$.

Las demás funciones varian analogamente, además los signos de las funciones en los cuadrantes, se representan en la siguiente tabla :

	I	II	III	IV
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

Para facilitar la memorización podemos utilizar las siglas CUST, que colocadas en los cuadrantes corresponden a:



En donde en el cuadrante I, todas las funciones (Universo) son positivo.

En el cuadrante II sólo el seno y su recíproca - (cosecante) son positivas

En el cuadrante III sólo la tangente y su recíproca (cotangente) son positivas.

E J E R C I C I O S :

1.- Calcular las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo cuyos lados miden 6 cm, 8 cm y 10 cm.

2.- Obtener los valores de las siguientes expresiones :

a) $3 \text{ sen } 60° + 2 \cos 60°$

b) $5 \cos 30° + 7 \text{ sen } 60°$

c) $2 \cos^2 45° + 3 \text{ sen}^2 90°$

d) $3 \tan 60° + 4 \sec 30°$

e) $\cot^2 30^2 + 3 \cos^2 60°$

f) $(\text{sen } 45° + \csc 60°) \ / \ (\cos 60° + \tan 30°)$

g) $(\tan^2 30° - \text{sen}^2 30°) \ / \ (\cos 60° + \text{sen } 45°)$

h) $(\csc^2 30° + \text{sen}^2 45°) \ / \ (\cos 60° + \csc 30°)$

i) $(\cos^2 60° + \tan 30°) \ / \ (\text{sen}^2 60° + \cos^2 30^2)$

j) $(\csc^2 60° - \sec^2 30) \ / \ (\cos 60° + \text{sen } 60°)$

3.- Obtener los signos de las siguientes funciones:

a) $\cos 30°$

b) $\text{sen } 45°$

c) $\sec 60°$

d) $\tan 130°$

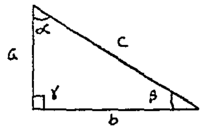
e) $\cot 275°$

f) $\csc 300°$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

IDENTIDAD TRIGONOMETRICA : Es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo, que se verifica para cualquier valor que se asigne a dicho ángulo.

En el siguiente triángulo rectángulo



Se tiene que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{a}{c} \quad y \quad \cos \beta = \frac{b}{c}$$

elevando al cuadrado estas dos igualdades
igualdades se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

por el teorema de Pitágoras se tiene :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

por tanto:

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{c^2}{c^2}$$

por tanto :

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

Si se divide miembro a miembro sen β y cos β se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \text{ que corresponde a } \tan\beta$$

$$\frac{\cos\beta}{\operatorname{Sen}\beta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} \text{ que corresponde a } \cot\beta$$

$$\therefore \quad \tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

$$\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

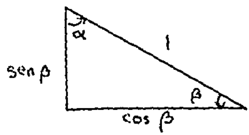
$$\sec\beta = \frac{c}{b} \quad \text{y} \quad \csc\beta = \frac{c}{a}$$

Elevando al cuadrado y substituyendo c^2 por a^2+b^2 se tiene que:

$$\sec^2\beta = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \tan^2\beta + 1$$

$$\csc^2\beta = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \cot^2\beta$$

si se construye un triángulo rectángulo con los valores obtenidos tendremos :



$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\cot\beta}$$

$$\cot \beta = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{\tan \beta}$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\csc \beta = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}$$

Ejemplo :

Dado cos a calcular las demas funciones del ángulo a .

$\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$ como $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$ tendremos

$$\operatorname{sen} a = \sqrt{1-\cos^2 a}$$

$$\tan a = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

$$\csc = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$$

Ejercicios :

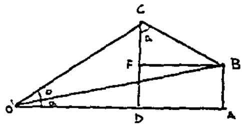
1) Dada csc a calcular las demas funciones del ángulo a ($\csc = \frac{1}{\operatorname{sen}}$)
2) dada tan a calcular las demas funciones
3) dada cot a calcular las demas funciones
4) dada sec a calcular las demas funciones
5) si sen a = 0.35 ¿cuál es el valor de cos a y csc a?
6) si sec a = 6 calcular el valor de cos a tan a cota
7) comprobar que sen a = (tan a) (cos a)
8) comprobar que tan a = sen a sec a

9) comprobar que sec a = tan a csc a

10) comprobar que csc a = cot a sec a

Fórmulas de sumas y diferencias de ángulos

$\measuredangle a + \measuredangle b < 90°$



$\overline{CD} \perp \overline{OA} \qquad \overline{CB} \perp \overline{OB} \qquad \overline{BA} \perp \overline{BF}$

$\text{Sen } a+b = \text{sen } \measuredangle DOC = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{CO}}$ (1)

$\cos\ a+b = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{CO}}$ (2)

De la figura se observa que:

$\overline{DC} = \overline{DF} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{FC}$

$\therefore \text{sen } (a+b) = \dfrac{DC}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CF}}{\overline{CO}}$ (3)

Como Δ ABO , Δ BFC y Δ CBO son triángulos rectángulos se tiene que:

$\overline{AB} = \overline{BO}\ \text{sen } a$

$\overline{CF} = \overline{BC}\ \cos a$

$$\overline{BO} = \overline{CO} \cos b$$

$$\overline{BC} = \overline{CO} \operatorname{sen} b$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CO} \cos b \operatorname{sen} a$$

$$\overline{CF} = \overline{CO} \operatorname{sen} b \cos a$$

substituyendo (3) en (1) se obtiene :

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{\overline{CO} \cos b \operatorname{sen} a + \overline{CO} \operatorname{sen} b \cos a}{\overline{CO}}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos b \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b \cos a$$

analogamente se obtiene cos (a+b)

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}} \quad \frac{\overline{AO}-\overline{AD}}{\overline{CO}} \quad \frac{\overline{AO} - \overline{BF}}{\overline{CO}}$$

$$\overline{AO} = \overline{BO} \cos a$$

$$\overline{BF} = \overline{BC} \operatorname{sen} a$$

Substituyendo

$$\overline{AO} = \overline{CO} \cos a \cos b$$

$$\overline{BF} = \overline{CO} \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

sustituyendo en (4) y en (2) se obtiene :

$$\cos(a+b) = \frac{\overline{CO} \cos a \cos b - \overline{CO} \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\overline{CO}}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\mathrm{Tan}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\mathrm{senacosb}}{\cos a \cos b} + \dfrac{\mathrm{senb}\ \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\mathrm{sen}\ a\ \mathrm{sen}\ b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\mathrm{sena}}{\cos a} + \dfrac{\mathrm{senb}}{\cos b}}{1 - \dfrac{\mathrm{sen}\ a\ \mathrm{sen}\ b}{\cos a \cos b}} =$$

$$\mathrm{Tan}\,(a+b) = \frac{\tan a + \mathrm{tab}\ b}{1 + \tan a \tan b}$$

La tangente de (a-b) se obtiene susbtituyendo b por (-b) en la - fórmula anterior

$$\tan (a-b) = \frac{\tan a + \tan (-b)}{1 - \tan a \tan (-b)}$$

como tan - b = - tan b se obtiene

$$\tan (a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Esta fórmula es importante ya que en geometría analítica se utilizará.

EJERCICIOS :

1) Calcular tan 90° , haciendo 90° = 60° + 30°

2) calcular tan (a-45°) sabiendo que:

a) $\tan a = \frac{12}{13}$

b) $\cos a = -\frac{3}{4}$

3) calcular tan (a+45°) sabiendo que:

a) $\tan a = \frac{1}{2}$

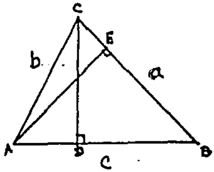
b) $\tan b = \frac{1}{3}$

LEY DE LOS SENOS

Para obtenerla se consideran dos casos.

1er. caso si el triángulo es acutángulo

si ABC son los vértices de un triángulo acutángulo y $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$ dos de sus alturas



En el triángulo ACD $\frac{\overline{CD}}{b} = \text{sen } A$

$\therefore \quad \overline{CD} = b \text{ sen } a$ --- (1)

$\frac{\overline{CD}}{a} = \text{sen } b$

$\therefore \quad \overline{CD} = a \text{ sen } B$ (2)

comparando 1 y 2 se tiene que

$b \text{ sen } A = a \text{ sen } B$

$\therefore \quad \frac{a}{\text{SEN } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$ -------- (3)

En el triángulo ACE $\frac{\overline{AE}}{b} = \text{sen } C$

$\therefore \quad \overline{AE} = b \text{ sen } c$ --------- (4)

En el triángulo ABE $\frac{\overline{AE}}{c} = \text{sen } B$

$\therefore \quad \overline{AE} = C \text{ sen } B$ ------- (5)

comparando 4 y 5 se tiene que:

$b \text{ sen } c = \text{sen } B$

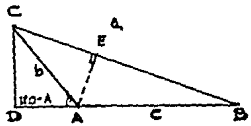
$\therefore \quad \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$ ----------(6)

Comparando 3 con 6 se tiene que :

$$\frac{A}{\operatorname{sen} A} = \frac{b.}{\operatorname{sen} B} = \frac{C}{\operatorname{sen} C}$$

2° caso si el triángulo es obtasángulo:

SI ABC son los vértices de un triángulo obtusángulo y $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$ las alturas



En el triángulo CDB $\frac{\overline{CD}}{a} = \operatorname{sen} B$

$$\therefore \quad \overline{CD} = a \operatorname{sen} B \quad ..... (1)$$

En el triángulo CDA $\frac{\overline{CD}}{b} = \operatorname{sen} (180-A) = \operatorname{sen} A$

$$\therefore \quad \overline{CD} = b \operatorname{sen} A \quad \text{--------} \quad (2)$$

comparando 1 y 2 se tiene que :

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{-- -- ---} (3)$$

En el triángulo AEC $\frac{AE}{b} = \operatorname{sen} c$

$$\therefore \quad \overline{AE} = b \operatorname{sen} c \quad \text{-------} \quad (4)$$

En el triángulo AEB

$$\frac{\overline{AE}}{C} = \operatorname{sen} B$$

$$\therefore \quad \overline{AE} = c \text{ sen } B \quad \text{--------} \quad (5)$$

comparando 4 y 5 se tiene que:

$$b \text{ sen } c = c \text{ sen } B$$

$$\therefore \quad \frac{b}{\text{sen } b} = \frac{C}{\text{sen } C} \quad \text{--------} \quad 6)$$

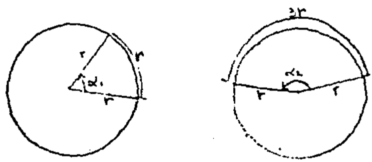
comparando 3 con 6 se tiene que :

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{C}{\text{sen } C}.$$

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

La medida de un ángulo puede expresarse en términos de la longitud de arco y no solo en grados como se ha estado haciendo.

Un ángulo central formado por un arco igual en longitud al radio del círculo mide un radian.



El número de radianes es igual al cociente de la longitud de arco (a) entre el radio.

$$\alpha_1 = \frac{r}{r} = 1 \qquad \alpha_2 = \frac{3r}{r} = 3 \qquad \alpha = \frac{a}{r}$$

Conversión de grados a radianes.

Sabemos que la circunferencia mide un 360º, y que la longitud de arco -- (a) de la circunferencia mide 2 r por lo tanto.

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por tanto 2π radianes es igual a 360º, lo que implica que:

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ \qquad y \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radianes}$$

EJEMPLOS:

1) Obtener la medida en radianes del ángulo α=60º.

Como

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{ radianes}$$

$$60^{\circ} = 60^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

2) Obtener la medida en grados del ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ como π radianes $=180^{\circ}$

$$\alpha = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\,(180^{\circ}) = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$$

EJERCICIOS:

I.- Calcular la medida en radianes de los ángulos.

a) 30°

b) 45°

c) 90°

d) 180°

e) 270°

f) 315°

II.- Calcular la medida en grados de los ángulos.

a) 2π

b) $\pi/6$

c) $\pi/4$

d) $\pi/3$

e) $\pi/2$

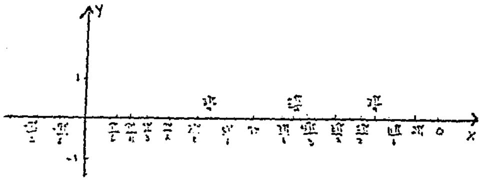
f) $\pi/6$

g) 3π

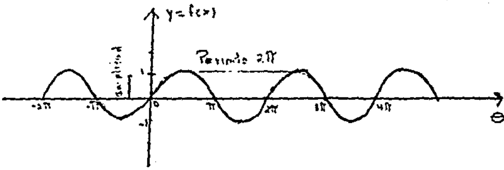
Para gráficar las funciones trigonométrica es necesario tabular los valores correspondiente a los principales ángulos de la siguiente forma.

GRADOS	RADIANES	r=1 x	y	VALORES DE LAS FUNCIONES sen	cos	tan	cot	sec	cosec
0º	0	1	0	0	1	0	∄	1	∄
30º	$\pi/6$	0.87	0.5					1.15	
45º	$\pi/4$	0.71	0.71						1.41
60º	$\pi/3$	0.50	0.87			1.73			
90º	$\pi/2$	0	1		1	∄			
120º	$2\pi/3$			0.87			-0.58		
135º	$3\pi/4$		0.71					-1.41	
150º	$5\pi/6$	-0.87							2
180º	π					0	∄		∄
210º	$7\pi/6$				-0.87				
225º	$5\pi/4$			-0.71					
240º	$4\pi/3$		-0.87						
270º	$3\pi/2$	0				∄	0		∄
300º	$5\pi/3$							2	
~~315º~~	~~$7\pi/4$~~								~~-1.41~~
330º	$11\pi/6$					-0.58			
360º	2π				1		∄		∄

Los valores anteriores representados en un sistema de ejes cartesianos quedan de la siguiente forma.

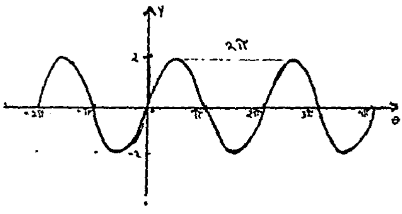


Gráfica de f(x)=sen θ



Amplitud 1
periodo 2π

Gráfica de f(x)=2 sen θ



Amplitud 2
Periodo 2π

Cuando una función toma todos sus valores posibles de "o" a "b" se dice que - el periodo de la función es "b".

Si y= a sen b(θ+c) entonces "a" corresponde a la amplitud. "b" al periodo - de la función en radianes y e al desplazamiento de fase

EJERCICIOS:

Trazar las gráficas de las funciones.

1) cos θ

2) cos 2θ

3) sen θ $+\frac{\pi}{2}$

4) tan θ

5) tan 3θ

6) tan, 2(θ+ π)

7) 3 tan 5(θ+ $\frac{\pi}{2}$)

8) cot θ

9) sec θ

10) csc θ

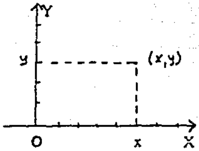
PLANO CARTESIANO.

El plano cartesiano también llamado sistema de ejes rectangulares , es la representación gráfica del producto cartesiano RxR está representado por dos ejes reales perpendiculares entre si , que se cortan en un punto llamado origen (O).

Las parejas (x,y) que pertenecen al producto cartesiano reciben el nombre de coordenadas del punto , el primer valor de la pareja (x) recibe el nombre de abscisa , el segundo valor de la pareja (y) recibe el nombre de ordenada .

El valor de la abscisa se localiza gráficamente en el eje horizontal (X), denominado eje de las abscisas .

El valor de la ordenada se localiza en el eje vertical (Y), denominado eje de las ordenadas .



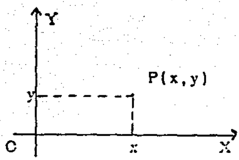
Las coordenadas de un punto , se escriben siempre encerradas dentro de un parértesis redondo y separadas mediante una coma , la letra que se le asigna al punto para nombrarlo siempre se escribe con mayúscula , y le antecede al paréntesis .

Ejemplos :

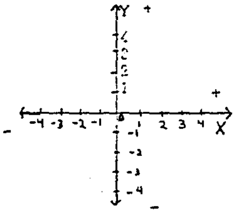
A(5,1)
B(-3,2)
C(r_1,r_2)
P(x,y)

Para localizar un punto cuyas coordenadas son los valores(x,y) en el plano cartesiano , se localizan dichos valores en sus respectivos ejes , y se trazan imaginariamente dos rectas perpendiculares a los ejes en estos valores .

En el punto donde se intersectan las rectas se encuentra situa do el punto P .



Recuerdese que los ejes a partir del origen (punto donde se -- intersectan) , son positivos hacia la derecha y hacia arriba , y son negativos hacia la izquierda y hacia abajo respectivamente . También recuerdese que se debe colocar la escala numérica en cada eje .



Ejemplo :

Localizar en el plano los siguientes puntos.

A(5,2)

B(3,-1)

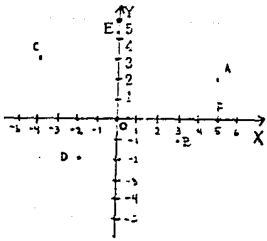
C(-4,3)

D(-2,-2)

E(0,5)

F(5,0)

O(0,0)



Ejercicios :

a) Localice los siguientes puntos en el plano cartesiano .

R(4,2)
S(-1,-4)
T(8,-3)
U(5,5)
V(-3,8)
W(-6,0)

b) Si un punto esta situado sobre el eje de las abscisas , a - la ordenada siempre se le asigna el valor de : ____________

c) Si un punto está situado sobre el eje de las ordenadas , a- la abscisa siempre se le asigna el valor de : ____________

d) En el punto O denominado origen , sus coordenadas siempre - reciben los valores numéricos de :

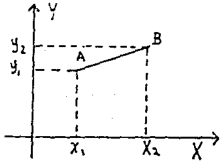
x= ___

y= ___

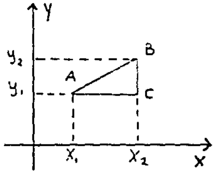
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS .

Supongase que se quiere obtener la distancia entre dos puntos-cualesquiera A yB , cuyas coordenadas son para $A(x_1,y_1)$y para - $B(x_2,y_2)$.

Graficando a los puntos A y B , y a la distancia que hay entre ellos, ésta está representada por el segmento AB , como lo muestra la siguiente gráfica .



Si se forma un triángulo rectángulo con los puntos A,B y otro-C que se escoge de tal manera que el segmento AC sea paralelo al-eje de las abscisas , y el segmento BC sea paralelo al eje de las ordenadas , entonces el punto C tendrá como coordenadas a los valores (x_2,y_1).



La distancia que hay entre los puntos AC es x_2-x_1, que es el - valor de la proyección del segmento AC sobre el eje de las abscisas .La distancia que hay entre los puntos ByC es y_2-y_1 , que es-el valor de la proyección sobre el eje de las ordenadas del seg--mento BC .

Aplicando el teorema de Pitágoras , en donde AC y BC correspon den a los catetos , y AB corresponde a la hipotenusa se tiene que:

$$(AC)^2+(BC)^2=(AB)^2$$

Despejando a AB , y sacando raíz cuadrada en ambos miembros se tiene que :

$$AB=\sqrt{(AC)^2+(BC)^2}$$

Substituyendo los valores de los catetos se obtiene finalmente la fórmula para encontrar la distancia que hay entre los puntos - A y B .

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Para simbolizar la distancia existente entre los puntos A y B, se pueden utilizar cualquiera de las siguientes notaciones .

$$\overline{AB}\ ,\ D_{\overline{AB}}\ ,\ d_{\overline{AB}}$$

Siendo la más usual la tercera notación .

Ejemplos :

1) Obtener la distancia que hay entre los puntos A(-2,5) y -- B(4,-1) .

Datos | Fórmula | Substitición

A(-2,5) $\quad d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad dAB = \sqrt{(4-(-2))^2+(-1-5)^2}$

B(4,-1)

Desarrollo

$$D_{\overline{AB}} = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2}$$
$$= \sqrt{6^2+(-6)^2}$$
$$= \sqrt{36+36}$$
$$= \sqrt{72}$$
$$= 8.5$$
$$\therefore\ d_{\overline{AB}} = 8.5$$

2) Obtener el area del cuadrado cuyos vértices son los puntos A(1,2),B(3,4),C(5,2) y D(3,0).

Datos | Fórmula | Substitución

A(1,2) $\quad d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad d_{\overline{AB}} = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$

B(3,4) $\quad A = l(l) = (d_{\overline{AB}})^2$

C(5,2)

D(3,0)

Desarrollo

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{2^2+2^2}$$
$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8}$$
$$= 2.828$$

$A = (2.828)^2$

$A = 8$ unidades

3) Hallar las coordenadas de un punto , que se encuentra situado sobre el eje de las ordenadas y que equidista de los puntos A(0,5) y B(6,-7).

Datos

A(0,5)

B(6,-7)

P(0,y)

$d_{AP}=d_{BP}$

Fórmula

$d_{\overline{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1}^2$

Substitución

$\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(0-6)^2+(y-(-7))^2}$

Desarrollo

$$\left(\sqrt{0^2+(y-5)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-6)^2+(y+7)^2}\right)^2$$

$$0+y^2-10y+25 = 36+y^2+14y+49$$

$$-10y-14y = 36+y^2+49-y^2-25$$

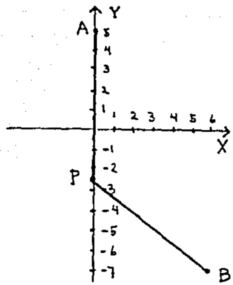
$$-24y = 60$$

$$y = 60/-24$$

$$y = -5/2$$

$\therefore$ P(0,-5/2)

Gráfica :



4) La distancia del segmento ST es de cinco unidades , el punto T tiene coordenadas (4,7) . Obtener la abscisa del punto S si su ordenada es 3 .

Datos

$d_{\overline{ST}}=5$

Fórmula

$d_{\overline{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Substitución

$5=\sqrt{(x-4)^2+(3-7)^2}$

Desarrollo

$$5^2= \left(\sqrt{(x^2-8x+16}\right)^2$$

$x^2-8x+32-25=0$

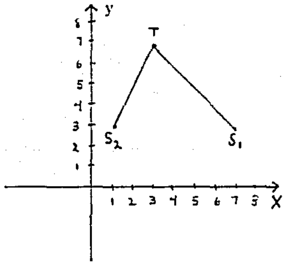
$x^2-8x+7=0$

$(x-7)(x+1)=0$

$x-7=0 \quad ; \quad x-1=0$

$x=7 \quad ; \quad x=1$

Como se obtuvierón dos valores distintos para x , existen dos puntos que satisfacen las condiciones dadas , y son los puntos -- S_1 (7,3) y S_2 (1,3) .



EJERCICIOS.

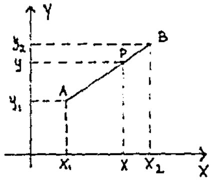
1) Obtener la distancia que existe entre los puntos cuyas coordenadas son :
   a) A(3,2)
      B(5,-1)
   b) P(8,9)
      Q(4,0)
   c) T(-3,0)
      U(o,-3)
   d) V(0,0)
      W(4,4)
2) La distancia que existe entre los puntos F y G es de 8 m. el punto F tiene coordenadas (5,-1) . Obtener la ordenada - del punto G si su abscisa es 2 .
3) Obtener las coordenadas de un punto que equidista de los -- puntos P(-1,3) ,Q(2,-4) y que se encuentra situado sobre el eje de las abscisas .

4) Demostrar que los puntos (2,2) , (4,2) y (-5,2) son colinea les .
5) Demostrar que los puntos (2,2), (3,-5) y (4,2) son vértices de un triângulo isósceles.
6) Obtener la abscisa de un punto B que se encuentra situado sobre el eje de las abscias .Si se sabe que la distancia que hay entre el punto A y el punto B es de 6 unidades, A(5,3).

COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas de los extremos del segmento AB respectivamente , sea $P(x,y)$ el punto que divide al segmento AB y r la razón o constante de proporcionalidad que nos indica que tan grande o pequeño es el segmento $\overline{AP}$ con respecto al segmento $\overline{AB}$.

$$r = \overline{AP}/\overline{PB}$$



La razón r no cambia si los segmentos se proyectan sobre el eje de las abscisas o el eje de las ordenadas , ya que la proporción en que el punto P divide al saegmento se conserva en ambos ejes .

$$r = (\overline{AP})_x / (\overline{PB})_x = (\overline{AP})_y / (\overline{PB})_y$$

Substituyendo los valores de las proyecciones se obtiene :

$$r = (\overline{AP})_x / (\overline{PB})_x = (x - x_1)/(x_2 - x)$$

despejando a x :

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$
$$rx_2 - rx = x - x_1$$
$$x + rx = x_1 + rx_2$$
$$x(1+r) = x_1 + rx_2$$
$$x = (x_1 + rx_2)/(1+r)$$

Analogamente se obtiene el valor de y .

$$r = (\overline{AP})_y / (\overline{PB})_y = (y - y_1) / (y_2 - y)$$

Despejando a y

$$r(y_2 - y) = y - y_1$$
$$ry_2 - ry = y - y_1$$
$$y + ry = y_1 + ry_2$$
$$y(1+r) = y_1 + ry_2$$
$$y = (y_1 + ry_2)/(1+r)$$

Por lo tanto las coordenadas del punto P que divide al segmento AB , en la Razón r son :

$$((x_1+rx_2)/(1+r) \quad , \quad (y_1+ry_2)/(1+r))$$

Si el punto P divide al segmento en dos partes iguales , la razón es igual a la unidad , ya que las longitudes del segmento AP es la misma que la del segmento PB .

$$d_{\overline{AP}} = d_{\overline{PB}}$$
$$r=(d_{\overline{AP}})/(d_{\overline{PB}})=1$$

Consecuentemente las coordenadas del punto medio $P_m(x_m,y_m)$ del segmento AB son:

$$P_m((x_1+x_2)/2 \ , (y_1+y_2)/2)$$

Ya que al substituir r=1 en las coordenadas de punto intermedio se tiene :

$$x_m=(x_1+1x_2)/(1+1) \qquad , \quad y_m=(y_1+1y_2)/(1+1)$$
$$\therefore \ x_m=(x_1+x_2)/2 \qquad , \quad y_m=(y_1+y_2)/2$$

Ejemplos :

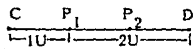
1) Obtener las coordenadas del punto medio que divide al segmento cuyos extremos son los puntos A(-1,3) y B(4,-2) .

Datos	Fórmula	Substitución
A(-1,3)	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$x_m=(-1+4)/2$
B(4,-2)	$y_m=(y_1+y_2)/2$	$y_m=(3+(-2))/2$

Desarrollo	Resultado
$x_m=3/2$	$P_m(3/2 \ , \ 1/2 \ )$
$y_m=(3-2)/2$	
$y_m=1/2$	

2) Obtener las coordenadas de los puntos que dividen al segmento cuyos extremos son los puntos C(5,0) y D(-6,8) en tres partes iguales .

Para obtener las coordenadas del primer punto P_1 la razón es 1/2 , ya que la longitud del segmento CP_1 es la mitad de la distancia que hay entre el punto P_1 y el punto D .

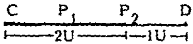


$$\therefore\ r_1=(\overline{CP_1})/(\overline{P_1D})=1/2$$

Datos	Fórmula	Substitución
$C(5,0)$	$x=(x_1+rx_2)/(1+r)$	$x=(5+(1/2)(-6))/(1+1/2)$
$D(-6,8)$		
$r_1=1/2$	$y=(y_1+ry_2)/(1+r)$	$y=(o+(1/2))/(1+1/2)$

Desarrollo	Resultado
$x=(5-(6/2))/3/2=(4/2)/(3/2)=4/3$	$P_1(4/3,8/3)$
$y=(8/2)/(3/2)=8/3$	

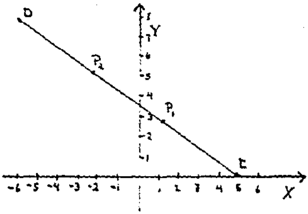
La razón del segundo punto P_2 es $r_2=2$, ya que la longitud del segmento CP_2 es el doble de la longitud del segmento P_2D .



$$\therefore\ r_2=(\overline{CP_2})/(\overline{P_2D})=2/1=2$$

Datos	Fórmula	Substitución
$C(5,0)$	$x=(x_1+rx_2)/(1+r)$	$x=(5+2(-6))/(1+2)$
$D(-6,8)$		
$r_2=2$	$y=(y_1+ry_2)/(1+r)$	$y=(0+2(8))/(1+2)$

Desarrollo	Resultado
$x=(5-12)/3=-7/3$	$P_2(-7/3,16/3)$
$y=16/3$	



3) Obtener las coordenadas del extremo R del segmento QR Si el punto S(3,-1) divide a QR en dos partes iguales, y las coordenadas de Q son (-2,3).

Datos	Fórmula	Substitución
S(3,-1)	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$3=(-2+x_2/2\ )$
Q(-2,3)		
$R(x_2,y_2)$	$y_m=(y_1+y_2)/2$	$-1=(3+y_2)/2$

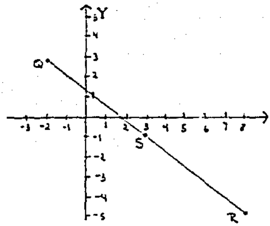
Desarrollo	Resultado
$6=-2+x_2$	R(8,-5)
$8=x_2$	

$6=-2+x_2$

$8=x_2$

$-2=3+y_2$

$y_2=-5$



4) Si un punto P divide al segmento AB con una razón r=BP/PA=3/4 y los extremos del segmento AB tienen coordenadas (5,-3) y (2,-2) respectivamente .Obtener las coordenadas de P .

Datos	Fórmula	Substitución
r=(BP)/(PA)=3/4	$x=(x_1+rx_2)/(1+r)$	$x=(2+(3/4)(5))/(1+3/4)$
A(5,-3)		
B(2,-2)	$y=(y_1+ry_2)/(1+r)$	$y=(-2+(3/4)(-3))/(1+3/4)$
P(x,y)		

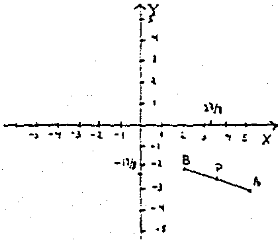
Desarrollo

Resultado

x=(2+15/4)/(7/4) = 23/7

y=(-2-(9/4))/(7/4) = -17/4

P(23/7 , -17/7)



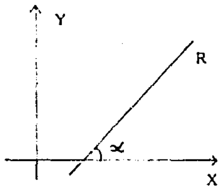
EJERCICIOS :

1) Obtener las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A(-2,5) y B(3,-4).
2) Obtener las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo cuyos vértices son los puntos A(3,3) , -- B(-3,-3) y C(5,-5).
3) Obtener las coordenadas de los puntos que dividen al seg-- mento cuyos extremos son los puntos Q(-6,1)y R(2,-4) en--- cuatro partes iguales
4) Obtener las coordenadas de los puntos que dividen al segmen to A(5,2) y B(8,-1) en la razón $r=(AP_1)/(P_1B)=1/2$ y en - $r_2=2$ respectivamente .
5) Obtener las coordenadas del extremo B del segmento AB si - el punto M(1,4) divide al segmento AB en dos partes iguales y las coordenadas del punto A son (-3,6).
6) Obtener el radio de la circunferencia , en la cual uno de - sus diámetros tiene como extremos a los puntos R(-2,-3) y- S(4,5) .
7) Demuestre que si el triángulo cuyos vértices son los puntos A(-2,0) ,B(2,0) y C(0,$\sqrt{3}$) , son vértices de un triángulo - equilátero , entonces los puntos medios de los lados del - triángulo , también son vértices de un triángulo equilátero

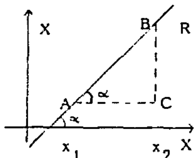
PENDIENTE DE LA RECTA .

Definición : Pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación (α) que dicha recta forma con el eje de las abscisas (X) .

El ángulo α se mide partiendo del eje de las abscisas y en sentido contrario a las manecillas del reloj , hasta la recta R .



Supongase que los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ se encuentran sobre la recta R , y se forma un triángulo rectángulo con los puntos A,B y $C(x_2,y_1)$ como se muestra en la siguiente gráfica :



El angulo $\widehat{BAC}$ que se forma en el triángulo rectángulo es igual a por ser correspondientes , ya que el segmento $\overline{AC}$ es paralelo al eje X y $\overline{AB}$ es la transversal .

Aplicando la función trigonométrica de la tangente al ángulo se obtiene :

$$tng\alpha = \overline{BC}/\overline{AC}$$

$$\therefore Tng\,\alpha = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$$

La notación que se utiliza para designar a la pendiente de la recta que pasa por los puntos AyB es m_{AB} .

$$\therefore m_{\overline{AB}} = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$$

Ejemplos :

1) Obtener la pendiente de la recta y el ángulo de inclinación que dicha recta forma con el eje X , si pasa por los puntos A(5,7) y B(3,-1).

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
A(5,7)	$m_{\overline{AB}}=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$	$m_{\overline{AB}}=(-1-7)/(3-5)$	$m_{\overline{AB}}=(-8/-2)=4$

Una vez que se obtiene la pendiente de la recta, este valor se busca en las tablas trigonométricas, en la sección de tangente natural.

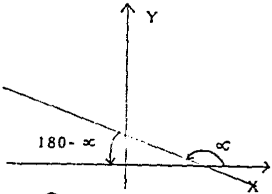
TANGENTE NATURAL

N	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Partes Proporcionales (Se suman)								
							1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	1.000	1.006	1.012	1.018	1.024	1.030	1	1	2	2	3	4	4	5	5
46	1.036	1.042	1.048	1.054	1.060	1.066	1	1	2	2	3	4	4	5	6
47	1.072	1.079	1.085	1.091	1.098	1.104	1	1	2	3	3	4	4	5	6
48	1.111	1.117	1.124	1.130	1.137	1.144	1	1	2	3	3	4	5	5	6
49	1.150	1.157	1.164	1.171	1.178	1.185	1	1	2	3	3	4	5	6	6
50°	1.192	1.199	1.206	1.213	1.220	1.228	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	1.235	1.242	1.250	1.257	1.265	1.272	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	1.280	1.288	1.295	1.303	1.311	1.319	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	1.327	1.335	1.343	1.351	1.360	1.368	1	2	2	3	4	5	6	7	7
54	1.376	1.385	1.393	1.402	1.411	1.419	1	2	3	3	4	5	6	7	8
55°	1.428	1.437	1.446	1.455	1.464	1.473	1	2	3	4	5	5	6	7	8
56	1.483	1.492	1.501	1.511	1.520	1.530	1	2	3	4	5	6	7	8	9
57	1.540	1.550	1.560	1.570	1.580	1.590	1	2	3	4	5	6	7	8	9
58	1.600	1.611	1.621	1.632	1.643	1.653	1	2	3	4	5	6	7	9	10
59	1.664	1.675	1.686	1.698	1.709	1.720	1	2	3	5	6	7	8	9	10
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65°	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2	4	7	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	3	5	8	10	13	16	18	21	24
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75°	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	Partes Proporcionales								
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066									
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576									
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953									
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	Para valores no considerados en esta parte, véase la tabla complementaria correspondiente.								
84	9.514	9.788	10.08	10.39	10.71	11.06									
85°	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07									
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10									
89	57.29	68.75	85.94	114.6	171.9	343.8									
90°	∞														
N	0'	10'	20'	30'	40'	50'									

El ángulo cuya tangente es 4 es :

angtng4=75° 58'

Si la pendiente es de signo negativo, se busca el valor absoluto de la pendiente en las tablas de tangente natural, y éste se le resta a 180°, ya que el ángulo negativo y el ángulo de su valor absoluto son suplementarios.



$\hat{\alpha} + (180° - \hat{\alpha}) = 180°$ por ser suplementarios

si m=-1

angtng1=45°
angtng-1=180° -45°
angtng-1=135°

2) Demostrar que los puntos A(1,0), B(3,2) y C(5,4) son colineales

Como los puntos estan situados sobre la misma recta, la pendiente del segmento $\overline{AB}$ es la misma que la del segmento $\overline{AC}$, y también es igual a la del segmento $\overline{BC}$, ya que la inclinación de la recta no cambia si ésta se mide con respecto a cualquier par de puntos que pertenezcan a ella.

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
A(1,0)	$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$m_{AB}=\frac{2-0}{3-1}$	$m_{AB}=\frac{2}{2}=1$
B(3,2)			
C(5,4)		$m_{AC}=\frac{4-0}{5-1}$	$m_{AC}\equiv\frac{4}{4}=1$
		$m_{BC}=\frac{4-2}{5-3}$	$m_{BC}=\frac{2}{2}=1$

∴ Los puntos A,B,C son colineales, ya que tienen la misma pendiente, tomados de dos en dos.

3) Una recta pasa por el punto A(6,2) y por el punto B, cuya abscisa es 3. Calcular la ordenada del punto B, si la recta tiene una pendiente igual a 1/3.

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
A(6,2)	$m_{\overline{AB}}=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$	$m_{\overline{AB}}=(y-2)/(3-6)$	$(y-2)/(-3)=1/3$
			$y-2=-3/3$
			$y-2=-1$
			$y=-1+2$
			$y=1$

$\therefore$ B (3,1)

EJRCICIOS :

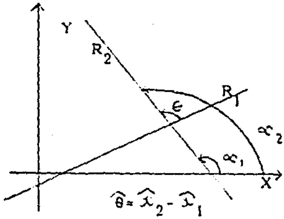
1) Obtener el ángulo de inclinación que la recta que pasa por- los puntos A(-1,1) y B(4,-1) forma con el eje de las abscisas.

2) Demostrar que los puntos A(2,1) ,B(3,3) y C(6,2) son vérti ces de un triángulo .(demuestrese que no son colineales).

3) Obtener el ángulo de inclinación de la recta que pasa por - el origen y por el punto (2,-1) .

ANGULO FORMADO ENTRE DOS RECTAS

Sea $\hat{\theta}$ el ángulo formado por las rectas R_1 y R_2, y sea $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\alpha}_2$ los ángulos formados con el eje de las abscisas y laas rectas, como se muestra en la siguiente gráfica :



Obteniendo la tng $\hat{\theta}$ se tiene que :

$$\operatorname{tng}\hat{\theta}=\operatorname{tng}(\hat{\alpha}_2-\hat{\alpha}_1)$$

como $\operatorname{tng}(\hat{\alpha}_2-\hat{\alpha}_1) = (\operatorname{tng}\hat{\alpha}_2-\hat{\alpha}_1)/(1+\operatorname{tng}\hat{\alpha}_2\operatorname{tng}\hat{\alpha}_1) = \dfrac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$

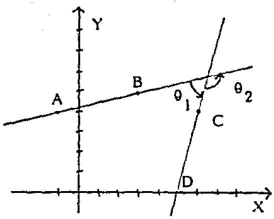
$$\therefore \operatorname{tng}\hat{\theta}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

Nota : Para obtener el ángulo, primero se grafican las dos rectas, ya que la recta R_1 corresponde a la recta en que se empieza a generar el ángulo $\hat{\theta}$, y la recta R_2 corresponde a la recta en la cuál se términa de generar el ángulo.

Ejemplo :

Obtener los ángulos que forman las rectas que pasan por los puntos A(-1,4) B(3,5) y C(6,4) D(5,0) respectivamente.

Datos	Fórmulas	Substitución	
A(-1,4)		$m_{\overline{AB}}=\dfrac{5-4}{3-(-1)}$	$m_{\overline{CD}}=\dfrac{0-4}{5-6}$
B(3,5)			
C(6,4)	$\operatorname{tng}\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$		
D(5,0)			



Para obtener el ángulo θ_1 , m_1 corresponde a $m_{\overline{AB}}$ y m_2 corresponde a $m_{\overline{CD}}$.

$m_{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$

$m_{\overline{CD}} = \frac{-4}{-1} = 4$

$\operatorname{tng}\theta_1 = \frac{m_{\overline{CD}} - m_{\overline{AB}}}{1 + m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}}}$

$\operatorname{tng}\theta_1 = \frac{4-(1/4)}{1+(1/4)(4)} = \frac{(16-1)/4}{1+4/4} = \frac{15/4}{1+1} = \frac{15/4}{2} = \frac{15/4}{2/1} = \frac{15}{8} = 1.875$

Buscando en las tablas de tangente natural el ángulo cuya tangente es 1.875 se obtiene el ángulo θ_1 .

$$\operatorname{angtng} 1.875 = 61^\circ\, 55'\, 39''$$

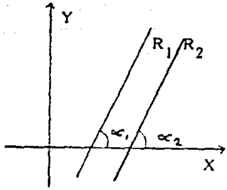
$$\therefore \ \hat{\theta}_1 = 61^\circ\, 55'\, 39''$$

EJERCICIOS :

1) Obtener el ángulo θ_2 de ejemplo anterior y verificar que el ángulo θ_2 corresponde al suplemento del ángulo θ_1 .
2) Obtener los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A(3,4) ,B(6,-1) y C(5,-3) , además verificar que la suma de éstos ángulos es 180° .

CONDICION DE PARALELISMO

Definición.- Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.



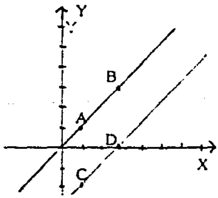
Esta condición se justifica, porque ambas rectas tienen el mismo ángulo de inclinación con respecto al eje de las abscisas, como se muestra en la gráfica anterior.

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\operatorname{tng}\alpha_1 = \operatorname{tng}\alpha_2$$
$$\therefore\ m_{R_1} = m_{R_2}$$

Ejemplos :

Demostrar que la recta que pasa por los puntos A(1,1), B(3,3) es paralela a la recta que pasa por los puntos C(1,-2) y D(3,0)

Datos	Fórmulas	Substitución	Desarrollo
A(1,1)	$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}}$	$\frac{3-1}{3-1} = \frac{0-(-2)}{3-1}$	$\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$
B(3,3)			
C(1,-2)	$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$1=1$
D(3,0)			$\therefore\ \overline{AB} // \overline{CD}$



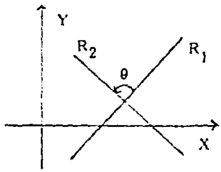
EJERCICIOS :

1) Demuestre que los vértices A(-4,-2), B(-1,0), C(1,-2) y D(-2,-4) son los vértices de un rectángulo (recordar que un rectángulo es un paralelogramo).

paralela a la recta que pasa por los puntos C(-2,y) y D(-1,2) Obtener las coordenadas del punto C .

CONDICION DE PERPENDICULARIDAD

Definición.- <u>Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1 , o bién sus pendientes son recíprocas y de signo contrario .</u>



$$R_1 \perp R_2 \text{ si } m_{R_1} \cdot m_{R_2} = -1 \quad \text{o} \quad m_{R_1} = -1/m_{R_2}$$

Como la recta R_1 es perpendicular a la recta R_2 , el ángulo que forman entre ellas es $\theta=90$. Si la recta R_1 tiene pendiente m_1 y la recta R_2 tiene pendiente m_2 , entonces al substituir estos valores en la fórmula para obtener el ángulo entre dos rectas se - tiene que :

$$\operatorname{tng}\theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

Como $\operatorname{tng}90° = \infty$, el valor de $1+m_2m_1 = 0$, ya que $a/0 \to \infty$ (que se- lee a/0 tiende a infinito o, a/0 se acerca a infinito).

$$\therefore\ 1+m_2m_1 = 0$$

Despejando a m_1 se obtiene :

$$m_1 = -1/m_2$$

Es decir m_1 y m_2 son recíprocas y de signo contrario .

Si se despeja al producto m_1m_2 se tiene :

$$m_1m_2 = -1$$

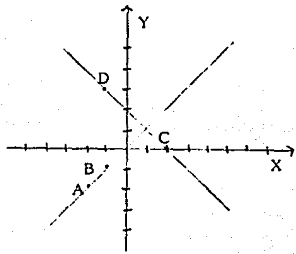
Es decir que el producto de las pendientes es igual a menos uno.

Ejemplo :

Demuestre que la recta que pasa por los puntos A(-2,-2) y --- B(-1,-1) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos - C(2,0) y D(-1,3) .

DATOS	Fórmulas	Substitución	Desarrollo
A(-2,-2)	$m_2 m_1 = -1$	$m_{\overline{AB}} = \frac{-1-(-2)}{-1-(-2)}$	$m_{\overline{AB}} = \frac{1}{1} = 1$
B(-1,-1)			
C(2,0)	$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$m_{\overline{CD}} = \frac{3-0}{-1-2}$	$m_{\overline{CD}} = \frac{3}{-3} = -1$
D(-1,3)			

$\therefore \ \overline{AB} \perp \overline{CD}$



EJERCICIO :

Utilizando la condición de perpendicularidad demuestre que los puntos A(-4,-2) ,B(-1,0) ,C(-2,-4) y D(1,-2) , son vértices - de un rectángulo.

ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO.

Uno de los problemas más importantes en geometría analítica , es el de poder obtener una ecuación que satisfaga alguna o algunas condiciones preestablecidas de algún problema .

Para poder obtener dicha ecuación se sigue el criterio siguiente :

1º Se establece una igualdad que satisfaga la ecuación del lugar geométrico , considerando siempre a un punto P(x,y) que pertenezca al lugar geométrico .

2º Se substituyen las coordenadas del punto P y los datos del problema en la igualdad anterior .

3º Se efectuan las operaciones correspondientes, y se obtiene así la ecuacion buscada .

Ejemplo :

Obtener la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano , de tal forma que equidista de los puntos A(2,5) y B(-1,3) .

1º $d_{\overline{AP}}=d_{\overline{BP}}$

2º $\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

3º $\left(\sqrt{(x-2)+(y-5)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2$

$(x-2)^2+(y-5)^2 = (x+1)^2+(y-3)^2$

$x^2-4x+4+y^2-10y+25 = x^2+2x+1+y^2-6y+9$

$\underline{6x+4y-19=0}$

GRAFICA DE LA ECUACIONDE UN LUGAR GEOMETRICO.

La gráfica de la ecuación de un lugar geométrico es la representación en el plano de todos los puntos que satisfacen a la ecuación .

Para graficar la ecuación del lugar geométrico se realizan los siguientes pasos :

1º Se despeja alguna de las variables de la ecuación , la cual se denomina variable dependiente .Por convención se despeja a la ordenada .

2º Se substituyen valores arbitrarios en la variable independiente (abscisa) , ya sea en orden creciente o decreciente .

3º Se resuelven las operaciones y se obtienen así las coordenadas de los puntos pertenecientes a la gráfica .

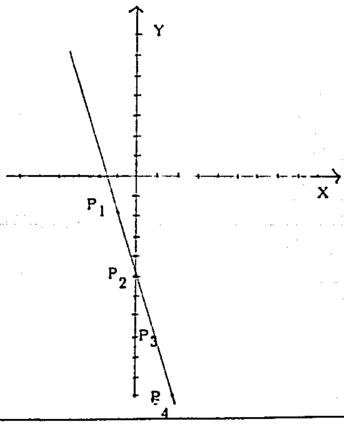
4º Se localizan en el plano todos los puntos obtenidos uniéndolos ordenadamente .

Ejemplo :

Graficar la ecuación $3x+y+5=0$.

Paso 1º	Paso 2º		Paso 3º	
$y=-3x-5$	x	$y=-3x-5$	y	$P_i(x,y)$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	-1	$y=-3(-1)-5$	-2	$P_1(-1,-2)$
	0	$y=-3(\ 0)-5$	-5	$P_2(0,-5)$
	1	$y=-3(1)-5$	-8	$P_3(1,-8)$
	2	$y=-3(2)-5$	-11	$P_3(2,-11)$
	⋮	⋮	⋮	⋮

Paso 4º



EJERCICIOS :

1) Obtener la ecuación del lugar geométrico de un punto que e-

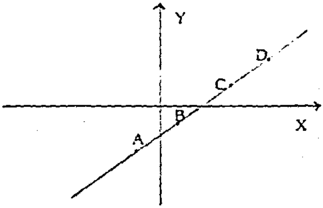
quidista de los puntos A(3,5) y B(4,2) .

2) Obtener la ecuación y la gráfica del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano , de tal forma que su distancia al eje de las ordenadas es siempre igual a su distancia al punto A(5,0).

3) Obtener la ecuación y la gráfica del lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal forma que su distancia al punto fijo (2,4) es siempre igual a tres.

ECUACION DE LA RECTA .

Definición .- Se da el nombre de recta , al lugar geométrico - del conjunto infinito de puntos alineados de tal forma que la pendiente de cualquier segmento que pertenezca a la recta es siempre constante , es- decir , la misma .



$$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} = m_{\overline{AC}}$$

Formas de la ecuación de la recta .

1º Forma de la ecuación de la recta conocidos un punto y su pendiente.

Sean $P(x,y)$ y $P_1(x_1,y_1)$ puntos que pertenecen a la recta , y - sea m la pendiente de la recta .

$$m_{\overline{P_1P}} = \frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

Eliminando denominadores se obtiene :

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

Ejemplos :

1) Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto A(5,-2) y que tiene una pendiente igual a tres .

Datos	Fórmula	Substitición	Desarrollo
A(5,-2)	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-(-2)=3(x-5)$	$y+2=3x-15$
m=3			$\therefore$ $3x-y-17=0$

2) Obtener la ecuación de la recta que pasa por el origen y cuyo ángulo de inclinación mide 45º.

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
$O(0,0)$	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-0=\text{tng}45^\circ(x-0)$	$y=1(x)$
$\alpha=45^\circ$			$\therefore\ \underline{x=y}$

EJERCICIOS:

1) Obtener las ecuaciones de los lados de un rectángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1,0)$, $B(1,-2)$, $C(5,2)$ y $D(3,4)$.
   Nota : Obtener sólo la pendiente de uno de los lados con la fórmula respectiva y para obtener la pendiente de los demás lados utilice la condición de perpendicularidad o la de paralelismo .
2) Obtener las ecuaciones de las alturas de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3,4)$, $B(5,6)$ y $C(7,0)$.

2º <u>Forma de la ecuación de la recta conocidos dos puntos que pertenecen a ella.</u>

Sean $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ y $P(x,y)$ puntos que pertenecen a la recta por lo tanto :

$$m_{\overline{P_1P_2}}=m_{\overline{P_1P}}=m_{\overline{P_2P}}$$

Substituyendo los puntos y el valor de la pendiente del segmento $\overline{P_1P_2}$ en la forma de la ecuación de la recta conocidos un punto y su pendiente se tiene :

$$y-y_1=m_{\overline{P_1P_2}}(x-x_1)$$

$$\therefore\ y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

obién :

$$y-y_2=m_{\overline{P_1P_2}}(x-x_2)$$

$$\therefore\ \boxed{y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)}$$

Ejemplo :

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $Q(-1,4)$ y $R(-2,-3)$.

Datos

$Q(-1,4)$
$R(-2,3)$
$P(x,y)$

Fórmula

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Substitución

$$y-4=\frac{3-4}{-2-(-1)}(x-(-1))$$

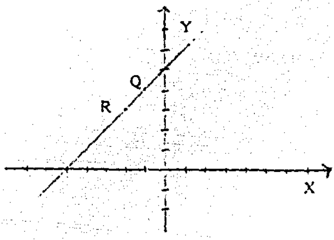
Desarrollo

$$y-4=\frac{-1}{-1}(x-(-1))$$

$y-4 = 1(x+1)$

$y-4 = x+1$

$\therefore$ $\underline{x-y+5=0}$



EJERCICIO:

Obtener las ecuaciones de las medianas del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-3,4), B(1,2) y C(-4,-3). Recordar que la mediana es la recta que une el punto medio del lado del triángulo con su vértice opuesto.

3º <u>Forma de la ecuación de la recta conocida su pendiente y su ordenada al origen.</u>

Esta forma es llamada <u>Forma tangencial</u> o <u>Forma simplificada.</u>

El punto cuya ordenada al origen es b, corresponde al punto de coordenadas (0,b). Substituyendo el valor de la pendiente y las coordenadas del punto en la fórmula para obtener la pendiente de la recta, se obtiene la forma simplificada de la recta.

$$m=\frac{y-b}{x-0}$$

$$m=\frac{y-b}{x}$$

$$mx=y-b$$

$$\therefore \boxed{y=mx+b}$$

Ejemplos :

1) Obtener la ecuación de la recta cuya pendiente es -1 y su ordenada al origen es 5.

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
$m=-1$	$y=mx+b$	$y=-1x+5$	$y=-x+5$
$b=5$			$x+y=5$
			$\underline{x+y-5=0}$

2) Determinar la ecuación de la recta cuya ordenada al origen es 6.5 y su ángulo de inclinación es de 135°

Datos	Fórmula	substitución	Desarrollo
$b-6.5$	$y=mx+b$	$y=tng135°(x)+6.5$	$y=-1(x)+6.5$
$=135°$			$y=-x+6.5$
			$\therefore\ \underline{x+y=6.5}$
			$\therefore\ \underline{x+y-6.5=0}$

EJERCICIOS:

1) Obtener la ecuación de la recta cuya ordenada al origen es 3 ,y que es paralela a la recta $2x+3y-5=0$.
2) Hallar la ecuación de la recta de ordenada al origen igual a 6 , y que es perpendicular al eje de las abscisas .

4º <u>Forma de la ecuación de la recta conocidas su abscisa y su ordenada al origen .</u> Esta forma es llamada <u>Forma simétrica</u> de la ecuación de la recta .

Sean $\underline{a}$, $\underline{b}$ la abscisa y la ordenada al origen respectivamente por consiguiente los puntos formados son $A(a,0)$ y $B(0,b)$. La pendiente del segmento AP es la misma que la del segmento BP de tal forma que :

$$m_{AP}=m_{BP}$$

Substituyendo las coordenadas de A y de B se tiene que :

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{y-b}{x-0}$$

$$\frac{y}{x-a}=\frac{y-b}{x}$$

$$x(y)=(y-b)(x-a)$$

$$xy=xy-ay-bx+ab$$
$$xy-ay-bx+ab-xy$$
$$-ay-bx+ab=0$$
$$bx+ay=ab$$

Dividiendo todos los términos entre ab se tiene :

$$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab}$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Ejemplos:

1) Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos ,uno cuya abscisa al origen es 5 , y otro de ordenada al origen igual a -3 .

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
$a=5$ $b=-3$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$	$-15(\frac{x}{5}+\frac{y}{-3})=-15(1)$ $-3x+5y=-15$ $-3x+5y+15=0$ $\therefore\ \underline{3x+5y-15=0}$

2) Los segmentos que una recta forma sobre los ejes cartesianos X,Y miden -4 unidades y -2 unidades respectivamente . Obtener la ecuación de dicha recta .

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
$a=-4$ $b=-2$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$	$8(\frac{x}{-4}\ \frac{y}{-2})=8(1)$ $-2x-4y=8$ $\underline{2x+2y+4=0}$

Ejercicio:

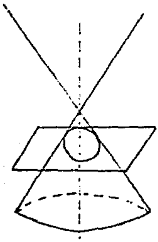
Obtener la ecuación de la hipótenusa del triángulo formado por los ejes coordenados , si la abscisa al origen es -6 , y la ordenada al origen es 8 .

EJERCICIOS

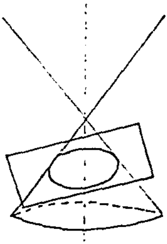
1) Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4,-2)$ y por la intersección de las rectas $2x+3y-5=0$.
2) Obtener la ecuación de cada una de las mediatrices del triángulo de vértices $A(5,2)$, $B(0,1)$ y $C(-4,-6)$.
3) Obtener la ecuación de la recta paralela al eje de las abscisas, cuya ordenada al origen es $\underline{C}$.
4) Obtener la ecuacion del eje de las ordenadas.
5) Obtener la ecuación de la recta que divide al cuadrante II en dos partes iguales .

SECCIONES CONICAS.

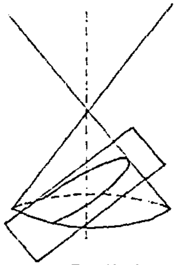
Definición.-Se denominan secciones cónicas a las curvas que pueden obtenerse de la intersección de un plano, con uno o dos conos circulares rectos. Estas secciones pueden ser :



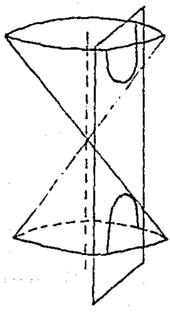
Circunferencia



Elipse



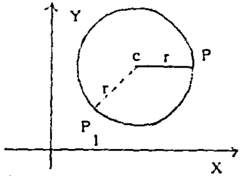
Parábola



Hiperbóla

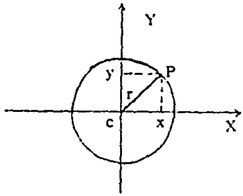
ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA.

Definición .-Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano , de tal forma que su distancia a un punto fijo llamado centro de la circunferencia es siempre constante . A está distancia se le denomina radio de la circunferencia .



Existen dos casos de la ecuación de la circunferencia.

1ª Circunferencia con centro en el origen (0,0) .



Como la distancia del punto P(x,y) al centro C(0,0) es constante (r)

$$d_{\overline{CP}} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad

$$r^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2$$

$$r^2 = x^2+y^2$$

$$\therefore \boxed{x^2+y^2=r^2}$$

A esta forma se le conoce como <u>Forma estandar</u>, <u>Forma cónica o -- forma ordinariade la ecuación de la circunferencia</u>.

Si la ecuación se desarrolla y se iguala a cero se llama <u>Forma general de la ecuación de la circunferencia.</u>

$$\boxed{x^2+y^2-r^2=0}$$

Ejemplos:

1) obtener la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen, y que pasa por el punto (3,5).

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
C(0,0)	$x^2+y^2=r^2$	$3^2+5^2=r^2$	$9+25=r^2$
P(3,5)			$34=r^2$
			$x^2+y^2=34$
			$\underline{x^2+y^2-34=0}$

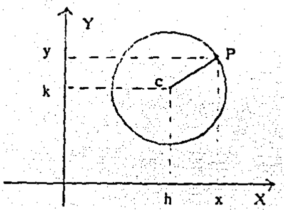
2) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio igual a cinco.

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
C(0,0)	$x^2+y^2=r^2$	$x^2+y^2=5^2$	$x^2+y^2=25$
r=5			$\therefore\ \underline{x^2+y^2-25=0}$

EJERCICIOS:

1) Un punto se mueve en el plano de tal forma que su distancia al origen es siempre siete unidaes.
2) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, en la cual uno de sus diámetros tiene como extremo a los puntos A(0,2) y B(0,-2).

2ºCaso. Ecuación de la Circunferencia con centro fuera del origen, C(h,k) .



$$d_{\overline{CP}} = r$$
$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene :

$$(r)^2=(\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2})^2$$
$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

$$\therefore \boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

Si se desarrollan los binomios y se iguala la ecuación a cero , esta toma la Forma general de la circunferencia .

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

que corresponde a :

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

en donde :

$$D=-2h$$
$$E=-2k$$
$$F=h^2+k^2-r^2$$
$$\therefore C(D/-2,E/-2) \quad y \quad r=\sqrt{h^2+k^2-F}$$

Ejemplos :

1) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (2,1) y cuyo radio mide 3 unidades .

Datos	Fórmula	Substitución
C(2,1)	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$
r=3		

Desarrollo

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=9$

$\therefore \underline{x^2+y^2-4x-2y-4=0}$

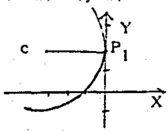
2) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (-3,2) y que es tangente al eje de las ordenadas

Datos

C(-3,2)

Fórmula

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



Substitución

$(x-(-3))^2+(y-2)^2=3^2$

Desarrollo

$(x+3)^2+(y-2)^2=9$

$x^2+6x+9+y^2-4y+4-9=0$

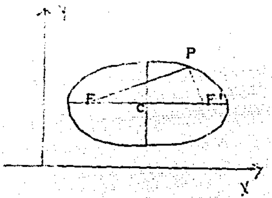
$\therefore \underline{x^2+y^2+6x-4y+4=0}$

Ejercicios:

1) Obtener la ecuación de la circunferencia en la cual uno de sus diámetrso tiene como extremos a los puntos Q(-4,-8) y R(0,1).
2) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (5,-3) y que es tangente al eje de las abscisas.
3) Obtener el centro y el radio de la circunferencia de ecuaci $x^2+y^2+4x-8y+5=0$

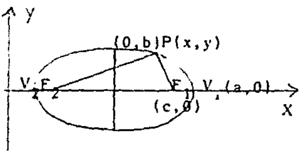
ECUACION DE LA ELIPSE .

Definición.-La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos de la lipse es siempre constante . El punto medio del segmento formado por los focos se denomina centro de la elipse .



Casos de la ecuación de la elipse .

1º Caso . Elipse con centro en el origen y focos sobre el eje de las abscisas .



F_1 y F_2 son focos
V_1 y V_2 son vértices
C es el centro

La suma de las distancias del punto P que se encuentra sobre la elipse a los focos es igual al doble de a , ya que si se hace coincidir el punto P con el vértice V_1 (0,a) de la elipse , se tiene que :

$$
\begin{aligned}
d_{\overline{V_1F_1}}+d_{\overline{V_1F_2}} &= \sqrt{(a-c)^2+(0-0)^2} + \sqrt{(a+c)^2+(0-0)^2} \\
&= \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(a+c)^2} \\
&= a-c+a+c \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad d_{\overline{V_1F_1}}+D_{\overline{V_1F_2}} = 2a$$

Cono ésta suma de distancias es siempre constante para cualquier punto situado sobre la elipse entonces :

$$\underline{d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 2a}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(0-y)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(0-y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+ y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+ x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dividiendo entre 4 ambos miembros

$$xc-a^2 =-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2c^2-2a^2cx+a^4= a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$x^2c^2-2a^2cx +a^4=a^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2$$

$$x^2c^2-2a^2cx+a^4=a^4x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2$$

$$a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2+a^2y^2$$

dividiendo entre $a^2(a^2-c^2)$ ambos miembros

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$$

pero como $a^2-c^2=b^2$ y $b^2>0$ la ecuación es por lo tanto :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

NOTA : Los focos estan sobre el eje X si el denominador de x^2 es mayor que el denominador de y^2 y viceversa , llos focos estan situados sobre el eje Y , si el denominador de y^2 es mayor que el denominador de x^2.

La excentricidad de la elipse se simboliza por la letra e , y es la relación que hay entre el valor de c y el valor de a ; Esta relación nos da la configuración de la elipse .

$$e = \frac{c}{a} \quad a > c > 0 \text{ -- } 0 > e > 1$$

si c/a que equivale a : $\sqrt{(a^2-b^2}\,/a$, es un valor cercano a uno , entonces b es pequeño, comparado con a , y por lo tanto la elipse es larga y angosta

Si c/a es un valor cercano a cero entonces , a se acerca al valor de b , y la ecuación $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ se convierte en $x^2+y^2=a^2$ que es la ecuación de la circunferencia de radio a , y de centro en el origen.Por lo que se puede considerar a la circunferencia como una elipse de excentricidad cero

Ejemplo:

1) Obtener la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (0,9) .(0,-9) , (12,0) y (-12,0).

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
(0,9)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{12^2}+\frac{y^2}{(-9)^2}=1$	$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$
(0,-9)			
(12,0)			
(-12,0)			

2) Obtener la excentricidadde la elipse del ejemplo anterior .

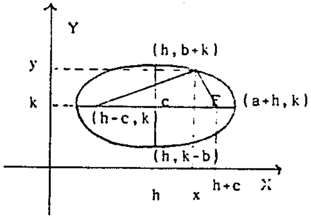
Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
a=12	e=c/a	$12^2=9^2+c^2$	$144=81+c^2$
b=9	$a^2=b^2+c^2$		$c=\sqrt{144-81}$
			$c=\sqrt{63}$
			c=7.93
		e=7.93/12	. . e=o.66

Ejercicios:

1) Obtener la ecuación de la elipse de centro en el origen que satisfaga que un foco es el punto (0,5) y $e=1/2$.

2) Obtener la ecuación de la elipse de centro en el origen , vértice (9,0) y $e=2/3$.

2º Caso <u>Ecuación de la elipse con centro fuera del origen (h,k) .</u>



En este caso el valor de las coordenadas (x,y) del punto que se encuentra sobre la elipse corresponden a (x-h,y-k) por tanto si el eje mayor es paralelo al eje X , la ecuación toma la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el eje mayor es paralelo al eje Y , la ecuación toma la forma :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Si se desarrollan los binomios y la ecuación se iguala a cero esta toma la <u>forma general</u> de la ecuación de la elipse .

$$a^2(x^2-2hx+h^2)+b^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$
$$a^2x^2-2a^2hx+a^2h^2+b^2y^2-2b^2ky+b^2k^2-a^2b^2=0$$
$$a^2x^2-2a^2hx+b^2y^2-2b^2ky+a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma general :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

en donde la correspondencia es :

$A=a^2$
$C=b^2$
$D=-2a^2h$
$E=-2b^2k$
$F=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$

Ejemplos :

1) Obtener la ecuación de la elipse cuyo centro es el punto - (8,2) y sus vértices son (10,-2) , (8,-1) .

Datos	Fórmula	Substitución
$C(8,-2)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$8+a=10$
$V_1(10,-2)$		$-2+b=-1$
$V_2(8,1)$	$V_1(h+a,k)$	$\frac{(x-8)^2}{2^2}+\frac{(y-(-2))^2}{1^2}=1$
	$V_2(h,k+b)$	

Desarrollo

$a=2$
$b=1$
$$\frac{(x-8)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$
$x^2-16x+64+4(y^2+4y+4)=4$
$x^2-16x+60+4y^2+16y+16=0$
$\therefore \underline{x^2+4y^2-16x+16y+76=0}$

2) obtener el centro, focos y vértices de la elipse :

$$9x^2+4y^2-54x+8y+49=0$$

$A=a^2=9 \rightarrow a=3$
$C=b^2=4 \rightarrow b=2$
$D=-2a^2h=-54 \rightarrow h=-54/-2(9) \rightarrow h=3$
$E= -2b^2k=8 \rightarrow k=8/-2(4) \rightarrow k=-1$
$F+ a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=49$

$C(h,k) \rightarrow C(3,-1)$
$F_1(h+c,k) \rightarrow F_1(3+\sqrt{5},-1)$
$F_2(h-c,k) \rightarrow F_2(3-\sqrt{5},-1)$
$V_1(h+a,k) \rightarrow V_1\ 6,-1)$
$V_2(h-a,K) \rightarrow V_2(0,-1)$
$V_3(h,k+b) \rightarrow V_3(3,1)$
$V_4(h,k-b) \rightarrow V_4(3,-3)$

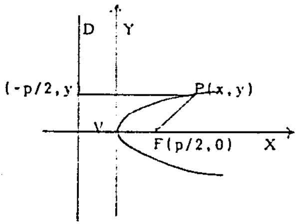
Ejercicios:

1) Obtenerla ecuación de la elipse con centro (4,4) y vértices $V_1(4,7)$, $V_2(-1,4)$, $V_3(4,1)$ y $V_4(9,4)$.
2) Obtener el centro , focos y vértice de la elipse :

$$4x^2+9y^2+24x-36y+36=0$$

ECUACION DE LA PARABOLA.

Definición.-Parabóla es el lugargeométrico de todos los puntos -- equidistantes de una recta fija llamada directyriz(D) y de un punto fijo llamado foco (F).



Casos de la ecuación de la parábola.

1º Caso.- Parábola con vértice en el origen , y eje parabólico en el eje X.

$$d_{PD} = d_{PF}$$

$$\sqrt{(x+p/2)^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-p/2)^2+ (0-y)^2}$$

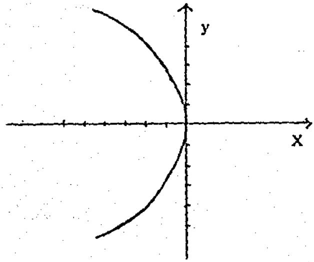
$$x^2+px+\frac{p^2}{4} = x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$\therefore \boxed{y^2=2px}$$

Ejemplo:

Obtenerla ecuación de la parabóla cuyo foco es el punto (-2,0) y su vértice esta en el origen .

Datos	Fórmula	Substitución	Desarollo
F(-2,0)	y=2px	(p/2)=-2	p=-4
V(0,0)		y^2=2(-4)	y^2=-8x

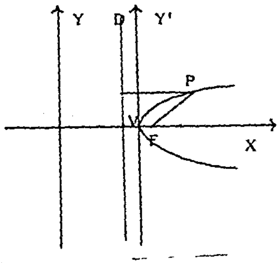


EJERCICIO :

Obtener la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en (3,0) .

2º Caso.- <u>Ecuación de la parábola con vértice en (h,k) y eje paralelo a uno de los ejes coordenados .</u>

Sise escogen ejes paralelos a los cartesianos, por translación se tiene que :



V(h,k)
F(h+p/2,k)

por tanto la transformación es :

$$x'=(x-h) \quad , \quad y'=(y-k)$$

$$\therefore \quad (y-k)^2 = 2p\ (x-h)$$

Si se desarrolla ésta ecuación y se iguala a cero se obtiene la <u>forma general</u> de la parábola

$$y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$y^2-2ky+k^2=2px-2ph$$

$$y^2-2px\ -2ky\ +k^2+2ph=0$$

en donde la correspondencia es:

$D=-2p$

$E=-2k$

$F=k^2+2ph$

Ejemplo :

Obtener las coordenadas del foco , y la ecuación de la directríz de la siguiente parábola :

$$y^2\ -6x-6y+39=0$$

$D=-2p=-6 \rightarrow p=3$

$E=-2k=-6 \rightarrow k=3$

$F=k^2+2ph=39 \rightarrow h=5$

$$(y-k)^2=2p(x-h)$$

$$\therefore\ (y-3)^2=6(x-5)$$

$F(h+p/2\ ,k) \rightarrow F(5+3/2,3) \quad \therefore F(13/2,3)$

Directriz $\quad x=h-p \rightarrow x=5-3/2 \quad \therefore x=7/2$

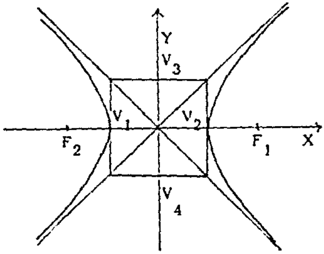
EJERCICIOS:

1) Obtener las ecuaciones de las parabólas que satisfacen las siguientes condiciones :
   a) Eje paralelo al eje X ,y que pasa por el punto (8,7) y vértice en (4,2) .
   b) Vértice en (3,-2) y foco en (3,4) .
2) Obtener las coordenadas del foco , la ecuación de la directríz y dar la ecuación en forma estandar de la parábola :

$$y^2-8y-3x+22=0$$

ECUACIO DE LA HIPERBOLA .

Definición.- Es el lugar geométrico de todos los puntos tales que la diferencia entre las distancias desde dos puntos - fijos llamados focos , a P es siempre constante.



$V_1(-a,0)$
$V_2(a,0)$
$V_3(0,b)$
$V_4(0,-b)$
$F_1(c,0)$
$F_2(-c,0)$

Asíntota.- Es una recta tangente a una curva en el infinito .
V_1V_2 Es el eje transverso
V_3V_4 Es el eje conjugado

1º Caso.-Ecuación de la hipérbola con centro en el rigen y eje - transverso igual al eje X.

La distancia del punto F_2a P menos la distancia del punto P a- F_1 cuando P9x,y) es igual al vértice V(a,0) corresponde a :

$$\left| \overline{F_2P}-\overline{PF_1} \right| = \left|(c+2a)-c\right| =2a$$

por tanto

$$\left| d_{\overline{F_1P}}-d_{\overline{F_2P}} \right| =2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

efectuando operaciones análogas a la deducción de la elipse se obtiene :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

como a z c entonces c^2-a^2 z 0 , y además si se substituye a -- c^2-a^2 por b^2 se obtiene la ecuación estandar de la hipérbola :

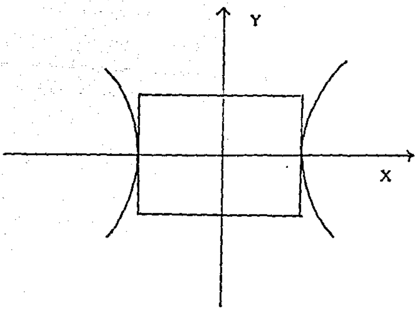
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

y se cumple con la relación ;

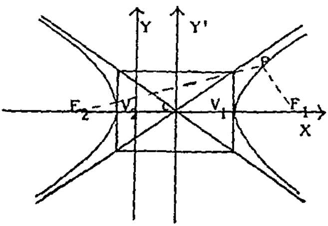
Ejemplo:

Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, vértices (8,0) y (-8,0), focos (10,0) y (-10,0).

Datos	Fórmula	Substitución	Desarrollo
$V_1(8,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$8^2+b^2=10^2$	$64+b^2=100$
$V_2(-8,0)$			$b^2=100-64$
$F_1(10,0)$			$b^2=36$
$F_2(-10,0)$	$a^2+b^2+c^2$		$b=6$
		$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$	$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
			$36x^2-64y^2=576$
			$36x^2-64y^2-576=0$



2ºCaso.-Ecuación de la hipérbola con centro en (h,k) y eje transverso paralelo al eje X.



$C(h,k)$
$V_1(h+a,k)$
$V_2(h-a,k)$

$F_1(h+c,k)$
$F_2(h-c,k)$
$P(x+h,y+k)$

Si los ejes de la hipérbola son paralelos a los ejes coordenados, la transformación por translación es :

$$x'=(x-h) \quad , \quad y'=(y-k)$$

$$\therefore \quad \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Desarrollando ésta ecuación e igualando a cero se obtiene la ecuación general de la hipérbola.

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2hx+h^2)-a^2y^2+2.\ ky-\ k^2-\ b^2=0$$

$$b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2ky+k^2)-a^2b^2=0$$

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2-a^2y^2+2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$$

Esta ecuación tiene la forma de :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

en donde :

$A=b^2$

$C=-a^2y^2$

$D=-2b^2h$

$E=a^2k$

$F=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$

Ejemplo:

Obtener la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en (-2,3) y vértices en (-2,3) y (6,3) .

Como : F(-4,3) corresponde a los valores (h-c,k)

V_1(-2,3) corresponde a los valores (h-a,k)

V_2(6,3) corresponde a los valores (h+a,k)

$$\begin{array}{r} +\ h-a=-2 \\ \underline{h+a=\ 6} \\ 2h\ \ =4 \end{array}$$

$\underline{h=2}$

$2-a=-2$

$a=4$

$h-c=-4$
$2-c=-4$
$\underline{c=6}$

$a^2+b^2=c^2$
$16+b^2=36$
$b^2=36-16$
$\underline{b^2=20}$

$$\therefore \quad \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{20}=1$$

Ejercicio:

Obtener las coordenadas del centro , los vértices y los focos de la hipérbola cuya ecuación es :

$$9x^2-4y^2=36$$

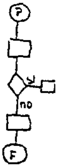
TEORIA DE GRAFICAS.

Definición.-Se da el nombre de gráfica al modelo geométrico -- que representa a un problema.

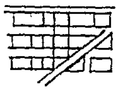
Las gráficas nos permiten apreciar visualmente las características del problema que representan , como podrían ser sus simetrías y su estructura.

Las gráficas pueden estar representadas por :

a) un diagrama de flujo.



b) El plano de una ciudad.



c)Las rutas de transporte o de repartidores

d) Electrocardiogramas

e) Organigramas

f) Diagramas de Venn Euler , etc.

Las gráficas constan de vértices y aristas.

Vértice .-Es aquello que no tiene dimensiones .

Arista .- Es la sucesión de puntos alineados , las aristas pueden ser rectas o curvas .

Las gráficas se pueden clasificar en :

a)Conexas .- Que son las que constan de una sola parte .

conexa

no conexa

b) Completa.-Es la que tiene unidos todos sus vértices mediante todas las aristas posibles de dibujar .

Gráficas completas   Gráficas no completas

Ejercicios:

Cuales de las siguientes gráficas son :

a) conexa ___

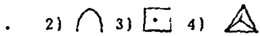
b) no conexa ___

c) completa ___

d) no completa ___

e) completa y conexa ___

1) 2) 3) 4)

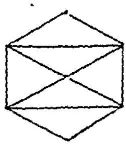


PASEOS EULERIANOS.

Definición .- Se da el nombre de paseo Euleriano al trazo continuo que recorre toda la gráfica , que se hace sin levantar el lápiz y sin pasar por una misma arista dos veces .

Se denomina abierto si el paseo no términa donde se inició ,y se denomina cerrado si el trazo termina donde se inició .

¿La siguiente gráfica puede admitir alguno de los paseos eulerianos ?



La respueta es si , ya que si se llega a un vértice con una arista , se sale de éste con otra arista diferente , formando pares de aristas , las de entrada y las de salida .

Si al final se llega al punto de partida , todos los vértices van a tener valencia par ((Valencia de un vértice , es el número de aristas que entran o salen del vértice) , y si no es así entonces habrá sólo dos vértices de valencia impar , el del inicio y el del final .

El matemático Leonard Euler enunció dos teoremas acerca de los paseos , y som-n :

Teorema 1.- Una gráfica admite un paseo Euleriano cerrado si y sólo si es conexa y la valencia de todos sus vértices es par .

Teorema 2.- Una gráfica admite un paseo Euleriano abierto si y sólo si es conexa y dos de sus vértices tienen valencia impar .

En esté capitulo se debe de hacer hincapié sobre la importancia de las demostraciones de teoremas , de no confundir hipótesis y tesis , además de lo importante de la generalización , como lo es el caso de las gráficas que admiten un paseo euleriano , se pueden verificar las condiciones pedidas para una o más , pero es tardado hacerlo para cada gráfica , por eso es que se obtienen las características comunes en todas las gráficas , y se generaliza mediante un teorema, que se demuestra una sola vez .

Demostración del teorema 1 de Leonard Euler .

Como ya se estudió en un curso anterior de Lógica el conectivo Si y sólo si es la bicondicional $P \rightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) A (Q \rightarrow P)$, por tanto se divide en dos partes la demostración .

1ª Parte .- Si una gráfica admite un paseo euleriano cerrado entonces es conexa y la valencia de todos sus vértices es par .

HIPOTESIS ._ La gráfica admite un paseo euleriano cerrado .

TESIS .- La gráfica es conexa , y la valencia de todos sus vértices es par .

DEMOSTRACION .- Por hacerse la gráfica sin levantar el lápiz es conexa , y a la vez , al ser el trazo continuo si se sale del prier vértice con una arista y se llega a -

otro , se sale de éste otro con una arista distinta , como no se pasa por ninguna arista dos veces se -- forman vértices de valencia par , por ser un paseo cerrado se termina donde se empezó , formando así el último vértice de valencia par .

Por tanto si la gráfica admite un paseo euleriano cerrado , es conexa y la valencia de todo sus vértices es par .

2ª Parte .- Si la gráfica es conexa y la valencia de todos sus -- vértices es par , entonces admite un paseo euleriano-cerrado.

HIPOTESIS .- La gráfica es conexa y la valencia de todos sus vértices es par .

TESIS .- La gráfica admite un paseo euleriano cerrado .

DEMOSTRACION .- Por ser la gráfica conexa está formada de una sola parte , y además por tener sus vértices de valencia par el trazo que recorre toda la gráfica es continuo , ya que de no ser así se tendría que regresar por la misma arista , o levantar el lápiz para dibujar otra arista , y se formarían vértices de valen-- cia impar , también por tener todos sus vértices de valencia par , el vértice final coincide con el inicial , formando un recorrido cerrado.

Por tanto si la gráfica es conexa y la valencia de todos sus vértices es par , entonces admite un paseo euleriano cerrado .

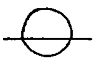
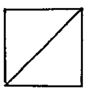
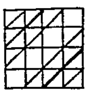
Ejercicio .

¿Cuales de las siguientes graficas admiten :

a) Un paseo Euleriano abierto? ____

b) Un paseo euleriano cerrado? ____

c) ninguno de los paseos ? ____

2) Demuestre el segundo teorema de Leonard Euler .