19
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU

DIVERSOS ASPECTOS NUMERICOS PARA EL CALCULO DE LOS COEFICIENTES EN LA SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA: ROGELIO HERNANDEZ GARCIA

MEXICO D.F 1991

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

INTRODUCCION

Desde hace tiempo los fisicos creian que todo movimiento periodico compuesto de un punto (oscilación compleja), la oscilación mecanica de un punto de una cuerda sonora o la oscilación electromagnetica, o bien la oscilacion relacionada con la propagación del sonido se descompone en oscilaciones armonicas, es decir , el movimento periodico compuesto visto como la suma (finita o infinita) de las oscilaciones armonicas simples del mismo periodo. La separacion de una oscilación armonica, correspondiente a la frecuencia dada k, que forma parte de un movimento periodico compuesto tiene gran importancia practica.

Los fisicos obtienen tal separacion de la oscilación armonica a partir de un movimiento real con ayuda de aparatos especiales llamados resonadores. El matemático, si tiene dado el movimento en cuestión con ayuda de la función periódica $s=f(t)$, obtiene esta separación por medio de cálculos. Calcula simplemente los coeficientes de Fourier a_k y b_k de esta función y entonces el k-ésimo armónico respectivo tendra la forma siguiente:

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$$

Es por esto que el presente trabajo pretende describir algunos aspectos numéricos para el cálculo de los coeficientes antes mencionados.

Para plantear un panorama más explicito de las aplicaciones de los coeficientes de Fourier cabe mencionar un ejemplo práctico, tal es el caso de las pruebas de vibración y estimación de propiedades dinamicas del PUENTE DE TAMPICO, TAMAULIPAS.

Se describe el diposititvo instrumental empleado durante el programa de pruebas de vibracion ambiental y traccion forzada realizada en la super estructura del Puente de Tampico, así como el procedimiento numérico utilizado para el procesamiento de la informacion registrada. De los resultados del análisis especial se identificaron varios periodos naturales de vibrar y su configuracion.

Considerando como el puente más importante del país, el Puente Tampico se proyecto para dar continuidad a la carretera Costera del Golfo, interrumpida por el rio Pánuco. La designacion del sitio del cruce del rio fue el resultado del estudio exhaustivo de varias alternativas, eligiendose el sitio denominado como el 106, ya que representaba la menor longitud y en consecuencia la opción más económica; la elección de una estructura mixta atirantada se debio a las ventajas estructurales que representaba.

Dada la escacez de informacion relacionada con el comportamiento real de puentes atirantados, la SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES, a través de su Dirección General de Carreteras Federales, decidió relizar un conjunto de pruebas en el Puente Tampico con el objeto de evaluar su comportamiento dinámico a partir de la medicion de vibraciones ambientales y vibraciones libres produçidas por la liberacion repentina de una masa sujeta a la superestructura del puente.

Los resultados de las pruebas y un adecuado programa de monitoreo de la estructura permitiran estimar los cambios que se generen en las propiedades de la misma como resutado de los fenomenos de corrosión, fatiga, pèrdida de tension el los tirantes, perdidas de preesfuerzo y otros factores que modifican su comportamiento estructural.

La naturaleza de las excitaciones utilizadas obligaron a estudiar los resultados de las mediciones dentro del contexto de un análisis de frecuencias, tecnica que basa sus procedimientos en la decomposicion de una señal en sus diferentes componentes, las causas se estudian por separado o a partir de ellas se construyeron funciones que proporcionen informacion mas relevante.

Particularmente, la información obtenida de las pruebas de traccion resuta única en su género, debido a al disponibilidad de acceso a obras de esta magnitud para la identificacion de sus parámetros estructurales.

Entre las características estructurales más relevantes del Puente Tampico, cabe mencionar su longitud de 1543 mts y un claro central de 360 mts con una altura màxima de 50 mts sobre el nivel del mar; destaca también su estructuración mixta, única en su género en construccón de este tipo, constituida con tramos de concreto presforzado en los accesos y el 85% de su calro central con develas de acero ortótropico con sección trasversal, tanto en el acero como el concreto; el sistema de apoyo formado por 19 pilas y dos caballetes extremos; destacando la altura de las pilas y la profundidad de su cimentacion que llega a alcanzar 124 mts sobre el nivel del mar y una profundidad mayor que 80 mts, asi como los 44 tirantes en disposicion de semiabanico, constituidos por torones galbanizados de 1.60 cm de diametro y anclados de manera permanente en los mástiles o pilones, permitiendose el tensado desde los puntos de anclaje en la linea media de la calzada; el tirante más largo supera los 200 mts de longitud.

La realizacion de un experimento de esta naturaleza requiere, por una parte, de una solicitación y de un dispositivo instrumental que capte las señales generadas durante la excitación de la estructura; por otra parte es necesario contar con algoritmos de analisis que permitan la identificacion de los parámetros estructurales de interes.

Para excitar la superestructura del puente se utilizaron dos tipos de solicitaciones: la primera se obtuvo de la excitacion ambiental producida principalmente por el transito de vehiculos y el viento dominate en la zona del puente; la segunda se generó con la descarga instantanea de una masa de aproximadamente 20 t --previamente sujeta al puente por medio de un cable al centro de la estructura metálica del tablero-- ocasionandose en consecuencia la vibración de la superestructura. A esta última prueba se le denominará prueba de tracción.

El dispositivo experimental que se utilizó consta de dos servoacelerómetros, un acondicionador de señales, un convertidor analógico digital, un analizador de espectros y una microcomputadora personal.

Los servoacelerómetros captan directamente los movimientos vibratorios en los puntos de medición seleccionados y los envían a través de cables a los acondicionadores de señal en donde se ajustan a niveles de medicion apropiados. Del acondicionador se transmiten las señales a un analizador de espectros y directamente a la computadora a traves de un convertidor analógico digital.

El utilizar un analizador de espectros presenta la ventaja de observar las señales procesadas en diferentes puntos de medición y en consecuencia estimar algunos parametros estructurales durante la realizacion del experimento. Ademas se tiene la ventaja de registrar las señales en el dominio del tiempo, informacion que resulta de gran utilidad en el calculo del amortiguamiento.

Como primer paso se evalua la transformada finita de Fourier de la señal empleado el algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier mediante la siguiente expresión:

$$x(f) = \int_{0}^{t} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad (1)$$

donde x(t) es la señal registrada, t define la vibración de medición, $j = \sqrt{-1}$ y f es la frecuencia de análisis.

Esta expresión define la forma que una señal se distribuye con la frecuencia. Si al resultado de esta expresión se le calcula su módulo y se eleva al cuadrado se obtiene el espectro de potencia de x(t).

Por otro lado, durante el proceso de medición se pueden estar registrando varias señales simultáneamente por lo que se puede calcular su función de correlación cruzada, esto es:

$$R_{xy}(\pi) = 1/T \int_{0}^{t} x(t)y(t+\pi)\, dt \qquad (2)$$

donde y(t) representa otra de las señales registradas, y π es un tiempo de retrazo. Esta función permite estimar en que orden una señal se correlaciona con otra, en que medida las señales fueron originadas por la misma fuente y con que retrazo, y detectar la presencia de ruido o señales extrañas. Cuando la ecuación (2) se aplica sobre la misma señal se obtiene la funcion de autocorrelación:

$$R_{xx}(\pi) = 1/T \int_0^t x(t)x(t+\pi)\ dt \qquad (3)$$

Utilizando el concepto de la trnsformada de Fourier (1), en las ecuaciones (2) y (3) se obtienen:

$$F_{xy}(f) = \int_0^t Rxy(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt \qquad (4)$$

$$F_{xx}(f) = \int_0^t Rxx(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt \qquad (5)$$

las que se conocen como las transformadas de las funciones de correlación y autocorrelación, respectivamente.

Una aplicación de la función Fxy(f) consiste en el cálculo del ángulo de fase entre dos señales, el que se define de la siguiente manera:

$$\theta xy(f) = \tan^{-1} (\,Qxy(f)/Cxy(f)) \qquad (6)$$

donde Qxy(f) y Cxy(f) representan la parte imaginaria y real, respectivamente, de Fxy(f). La interpretación física de este concepto se basa en el hecho de que para cada frecuencia natural el ángulo de fase correspondiente es cercano a 0 o a 180 grados.

Las transformadas de las funciones de correlación y autocorrelacion resultan de utilidad en el cálculo de las funciones de coherencia y transferencia:

$$\gamma_{xy}(f) = \left|Fxy\ (f)\right| / Fxx(f)\ Fyy(f) \qquad (7)$$

$$Hxy(f) = Fxy(f) / Fxx(f) \qquad (8)$$

donde $\gamma_{xy}(f)$ es la función de coheremncia, Hxy es la función de transferencia y Fyy denota la función de autocorrelacion de la señal y(t).

La priincipal utilidad de la función de coherencia radica en que proporciona una medida de grado de linealidad entre dos señales.

Los valores de esta función van de 0 a 1. Cuando se alcanza el valor de 1.0 se dice que existe una perfecta relación lineal entre las señales.

Lo realizado abre una nueva etapa en lo que respecta a los programas de Mantenimiento y Conservación de Puentes, ya que con ayuda de técnicas de análisis de señales y programas de monitoreo adecuados, se pueden estudiar los cambios que sufren las propiedades elásticas de este tipo de estructuras, y en consecuencia tomar medidas pertinentes para la prevencion de fallas estructurales. Sin olvidar que estas pruebas se pueden hacer extensivas a puentes con estructuración diferente y a otro tipo de obras civiles.

Con el ejemplo anteriormente dado se observa la importancia de los resultados obtenidos a través de los coeficientes de Fourier originando nuevas areas de oportunidad para los estudiantes en las areas Fisico-Matematicas.

GENERALIDADES

Sea f(t) una función dada, con período $2l$, supongamos que ésta puede ser desarrolada en su serie trigonométrica como sigue:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right] \qquad (1)$$

es decir, ella ya es la suma de cierta serie trigonométrica para todo t, excepto tal vez para algunos valores. La pregunta es: ¿ como determinar a partir de la función f(t) los coeficientes a_k y b_k ?

Se observará que los coeficientes a_k y b_k de la serie trigonométrica que representa la funcion periodica f(t), de periodo $2l$, pueden ser calculados por las siguientes fórmulas.

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi}{l} t\, f(t)dt \qquad && k=0,1,2,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t\, f(t)dt \qquad && k=0,1,2,\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Los números a_k y b_k que se calculan por éstas fórmulas se llaman coeficientes de Fourier de la función f(t) y la serie trigonométrica (1) la cual en vez de a_k y b_k contiene los coeficientes respectivos de Fourier recibe el nombre de serie de Fourier de la funcion f(t).

Se deducirán las formulas (2) considerando que la funcion periodica f(t) de periodo $2l$ se desarrolla en serie trigonométrica la cual converge a ella.

CONJUNTOS ORTOGONALES DE FUNCIONES

Sean $\phi_m(x)$ y $\phi_n(x)$ dos funciones de valor real que estan definidas en un intervalo $a \leq x \leq b$ y son tales que la integral del producto $\phi_m(x)\ \phi_n(x)$ sobre ese intervalo existe. Denotaremos esta integral por (ϕ_m, ϕ_n).

Por tanto

$$(1) \qquad (\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\ \phi_n(x)\ dx$$

Se dice que las funciones son ortogonales sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ si la integral (1) es igual a cero, es decir

$$(2) \qquad (\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\ \phi_n(x)\ dx$$

Se dice que un conjunto de funciones de valor real $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_4(x)$, ... es un conjunto ortogonal de funciones sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ si estas funciones están definidas sobre ese intervalo y si todas la integrales (ϕ_m, ϕ_n) existen y son cero para todos los pares de funciones distintas en el conjunto.

La raíz cuadrada no negativa de (ϕ_m, ϕ_n) se llama norma de $\phi_m(x)$ y generalmente se denota por $\| \phi_m \|$ de donde

$$(3) \qquad \| \phi_m \| = \sqrt{(\phi_m, \phi_n)} = \sqrt{\int_a^b \phi_m^2(x)\ dx}$$

EJEMPLO

Las funciones 1, cos x, cos 2x, ..., cos nx, sen x, sen 2x, ... , sen nx ; forman un conjunto ortogonal sobre el intervalo $0 \leq x \geq 2\pi$.

Por demostrar

1) $$\int_0^{2\pi} \text{sen } mx \cos nx \, dx = 0$$

2) $$\int_0^{2\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

3) $$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

Demostración 1)

Aplicando la identidad trigonométrica

$$\text{sen } m \cos n = 1/2 \left[\text{sen } (m+n) + \text{sen } (m-n) \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\text{sen } (m+n)x + \text{sen } (m-n)x \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\,(m+n)x\;dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\,(m-n)x\;dx$$

$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos\,(m+n)x\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m-n)}\cos\,(m-n)x\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \quad \text{si } m \neq n$$

Si $m = n \neq 0$, y se utiliza la identidad trigonometrica $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\;dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2mx\;dx$$

$$= -\frac{1}{4m}\cos mx\,\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Demostración 2)

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} m \operatorname{sen} n = 1/2\left[-\cos\,(m+n) + \cos\,(m-n)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\;dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\,(m+n)x + \cos\,(m-n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\,(m-n)x\;dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\,(m+n)x\;dx$$

$$= -\frac{1}{2(m-n)} \operatorname{sen}\,(m-n)x\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m+n)}\operatorname{sen}\,(m+n)x\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

Si $m = n \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\;dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\,1 - \cos 2mx\,)\;dx$$

$$= \int_0^{2} \frac{1}{2}\;dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2mx\;dx$$

$$= \Pi$$

Demostración 3)

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos m \cos n = 1/2 \left[\;\cos\,(m+n) + \cos\,(m-n)\;\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\;dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\;\cos\,(m+n)x + \cos\,(m-n)x\;\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\,(m+n)x\;dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\,(m-n)x\;dx$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\,\text{sen}\,(m+n)x\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\,\text{sen}\,(m-n)x\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos^2\theta = 1/2\,(\,1 + \cos 2\theta\,)$$

y haciendo $m = n \neq 0$ se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\,\cos nx\;dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\,1 - \cos 2mx\,)\;dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\;dx + \frac{1}{4m}\;\text{sen}\;2mx\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \Pi$$

En un espacio euclidiano $\mathcal{U}$, todo conjunto ortogonal de elementos no nulos es independiente.

Demostración.

Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de elementos no nulos de $\mathcal{U}$, y supongamos que existe una combinación lineal de elementos $\{\{\phi_n(x)\}$ ques es cero, siendo:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \phi_i (x) = 0$$

Formando el siguente producto escalar

$$< a_0\phi_0 (x) + a_1\phi_1 (x) + \ldots + a_n\phi_n (x), f_i > = 0$$

$$< a_0\phi_0 (x), f_i > + < a_1\phi_1 (x), f_i > + \ldots + < a_n\phi_n (x), f_i > = 0$$

$$a_0 < \phi_0 (x), f_i > + a_1 < \phi_1 (x), f_i > + \ldots + a_n < \phi_n (x), f_i >= 0$$

Como son diferentes de cero los elementos $\{\phi_n(x)\}$ y ortogonales se tiene

$$a_i < \phi_i (x), f_i > \neq 0$$

entonces

$$a_i = 0$$

SERIES DE FOURIER

Por serie trigonométrica entenderemos una serie de la forma

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad (1)$$

donde las a,b y A son constantes.

Si la serie de la forma (1) converge para cualquier valor de x, y la serie que ésta representa, dependerá de los números a_n y b_n. Pero si converge en cualquier intervalo cerrado de longitud 2π, debe por la periodicidad de las funciones sennx y cosnx converger para cada valor real de x y en consecuencia representará una función definida para todos los valores de x con periodo 2π. Por lo tanto es necesario tratar únicamente con el intervalo 2π, el comportamiento de la serie para otros valores de x se conoce completamente cuando sus propiedades para este intervalo están determinadas.

Para observar la naturaleza y comportamiento del las series del tipo (1), haremos uso de las siguientes fórmulas.

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= -\frac{L}{k\pi} \cos (k\pi) + \frac{L}{k\pi} \cos (-k\pi)$$

$$= 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{k\pi} \operatorname{sen}(k\pi) + \frac{L}{k\pi} \operatorname{sen}(-k\pi)$$

$$= 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx$$

$$= 0 \qquad\qquad m \neq n$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx$$

$$= 0 \qquad\qquad m \neq n$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[\operatorname{sen} \frac{(m-n)\pi x}{L} + \operatorname{sen} \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx$$

$$= 0$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx$$

$$= L \qquad m = n$$

$$\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx$$

$$= L \qquad m = n$$

Si la serie $A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ es uniformemente convergente en el intervalo $-L \leq x \leq L$ y tiene la suma $f(x)$, entonces para $n = 0,1,2 \ldots$

$$A = \frac{a_0}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{2}$$

Como la serie (1) es uniformemente convergente para $-L \leq x \leq L$ y debido a la periodicidad de las funciones $\operatorname{sen} n\pi x/L$ y $\cos n\pi x/L$, tenemos a (1) uniformemente convergente sobre el intervalo real de x por tanto la serie puede integrarse término a término.

Por definición de convergencia uniforme tenemos, que dado cualquier $\varepsilon > 0$

$$| f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

para n suficientemente grande y para cualquier x.

Si multiplicamos (1) por cosnx, la serie tambien es uniformemente convergente. Porque, tenemos como $|\cos n\pi x/k| \leq 1$,

$$|f(x)\cos nx - S_r(x)\cos nx| \leq |f(x) - S_r(x)| < \varepsilon$$

para cualquier x.

En consecuencia la nueva serie puede ser igualmente integrada termino a término; haciendolo tenemos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi x}{L}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right.$$

$$\left. + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$$= a_m L \qquad \text{si } m \neq 0$$

Finalmente si multiplicamos (1) por sen nx , nos dara otra serie uniformemente convergente e integramos, encontramos

$$\int_{-L}^{L} f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} \text{ sen } \frac{m\pi x}{L}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-L}^{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-L}^{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}\, dx \right\}$$

$$= b_m L \qquad \text{si} \quad m \neq n$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2AL$$

$$A = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{2L} (a_0 L) = \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

En la demostración anterior las series trigonometricas fueron dadas como uniformemente convergentes con alguna función $f(x)$.

Se observo que los coeficientes de la serie dada están relacionados con la función $f(x)$.

Ahora dada la función $f(x)$ se desea encontrar la serie que la representa, bajo esta consideracion se comprueban los números a_m, b_m asociados con $f(x)$, por medio de las ecuaciones (2) y entonces formalmente contruir la serie (1). Una serie asi se conoce como serie de fourier que pertenece a $f(x)$.

Cuando una funcion par $f(x)$ se desarrolla en una serie de Fourier sobre el intervalo $-L \leq x \leq L$, los coeficientes de la serie estarán dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \qquad b_n = 0$$

Sea $f(x)$ par de modo que $f(-x) = f(x)$. Tenemos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{0} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

sea $x = -u$ $\qquad dx = -du$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(-u)\ \cos\ \frac{n\pi x}{L}\ (-du) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\ \cos\ \frac{n\pi x}{L}\ du$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\ \cos\ \frac{n\pi x}{L}\ (du) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\ \cos\ \frac{n\pi x}{L}\ du$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \cos\ \frac{n\pi x}{L}\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ dx$$

sea $\quad x = -u \qquad\qquad dx = -du$

Entonces

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(-u)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ (-du) + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\ du$$

$$b_n = 0$$

Es decir

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

$$f(-x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos \frac{m\pi x}{L} - b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

Por lo tanto

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos \frac{m\pi x}{L} - b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0$$

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

CONVERGENCIA

Teorema de Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Demostración

Aplicando las fórmulas

$$a_0 L = \int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n L = \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n L = \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

y como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{m\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right]$$

Entonces

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right.$$

$$\left. + b_n \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \right\}$$

$$= \frac{a_0^2}{2} L + L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Sea

$$\operatorname{sen}\left[n + \frac{1}{2}\right]t - \operatorname{sen}\left[n - \frac{1}{2}\right]t = \cos nt \ \operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

Entonces para $n = 1, 2, 3, \ldots, M$ y sumarizando

$$\operatorname{sen}\frac{t}{2}\left\{(\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt)\right\} = \left[\operatorname{sen}\frac{3}{2}t - \frac{t}{2}\right]$$

$$+ \left[\operatorname{sen}\frac{5}{2}t - \operatorname{sen}\frac{3}{2}t\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\operatorname{sen}\left[M + \frac{1}{2}\right]t - \operatorname{sen}\left[M + \frac{1}{2}\right]t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left[M + \frac{1}{2}\right]t - \operatorname{sen}\frac{t}{2}\right]$$

Por lo tanto

$$\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt = \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt = \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}$$

Ahora integrando la igualdad anterior

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt\right] dt = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}\ dt$$

Entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}\ dt = \frac{1}{2}$$

Si f es una funcion continua en $[-\pi , \pi]$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\ dx \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx$$

Como

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2 + b_n^2\right] \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\ dx$$

es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Sea

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

Para determinar la convergencia de esta serie en un punto dado x hacia el valor de la funcion f(x) en ese punto tenemos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right) = S_m(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2} \, dt$$

Demostración

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos nu \, du \right) \cos nx$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \operatorname{sen} nu \, du \right) \operatorname{sen} nx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\cos nu \cos nx + \operatorname{sen} nu \operatorname{sen} nx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n\,(u-x) \, du$$

como $$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ du$$

Entonces

$$\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left[a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx\right]= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos u-x)\ du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(u-x)\right]\ du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen}\ t/2}\ dt$$

Haciendo $u - x = t$

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\ \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen}\ t/2}\ dt$$

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\ \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen}\ t/2} + \frac{1}{\pi}\int_{-0}^{0} f(t+x)\ \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)t}{2\operatorname{sen}\ t/2}$$

Entonces

$$S_M(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[t + x] - f(x) \quad \frac{\text{sen}(M+1/2)t}{2\text{sen } t/2} \, dt$$

De esta manera el problema de convergencia de $S_n(x)$ hacia $f(x)$ se reduce a la convergencia de la integral a cero.

Obteniendo los limites a la izquierda y a la derecha de la función f en el punto x, y

Considerando la diferencia

$$S_m(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

la cual puede ser representada en

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t+x) - f(x+0)] \frac{\text{sen}(M+1/2)t}{2\text{sen } t/2} \, dt \quad +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t+x) - f(x+0)] \frac{\text{sen}(M+1/2)t}{2\text{sen } t/2} \, dt \quad -$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2 \text{ sen } t/2} =$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{t} * \frac{t/2}{\text{sen } t/2}$$

Entonces $\lim \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{ sen } \left(M + \frac{1}{2}\right) x \, dx$

Si g es continua, entonces

$$S_m(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \longrightarrow 0$$

Es decir $\lim_{M \to \infty} S_M(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

De esta manera se observa que si f es una funcion acotada de periodo L con un numero finito de discontinuidades y que ademas existen en cada punto las derivadas por la derecha e izquierda su serie de Fourier converge en todo punto y a f(x) y en los puntos de discontinuidad a $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Sean a_n y b_n los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$,

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_0 x + b_n \operatorname{sen} nw_0 x)$$

en virtud de las formulas de Euler

$$\cos nw_0 x = \frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2}$$

$$\operatorname{sen} nw_0 x = \frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2i}$$

obtenemos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left[\frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2} \right] + b_n \left[\frac{e^{inw_0 x} + e^{-inw_0 x}}{2i} \right] \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[\frac{a_n - ib_n}{2} \right] e^{inw_0 x} + \left[\frac{a_n - ib_n}{2} \right] e^{-inw_0 x} \right.$$

$$\text{si } c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} , \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ y } \quad \frac{a_0}{2} = c_0$$

entonces

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inw_o x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n}\, e^{inw_o x}$$

por tantc

$$f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n\, e^{inw_o x}$$

de aqui

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{t}\left[\int_{-t/2}^{t/2} f(t)\cos(nw_0 t)dt - i\int_{-t/2}^{t/2} f(t)\mathrm{sen}(nw_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\int_{-t/2}^{t/2} f(t)\left[\cos(nw_0 t) - i\,\mathrm{sen}(nw_0 t)\right]dt\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\int_{-t/2}^{t/2} f(t)e^{-inw_o t}\, dt\right.$$

analogamente para

$$c_{-n} = \frac{1}{t}\left[\int_{-t/2}^{t/2} f(t)e^{inw_o t}\, dt\right.$$

Es importante señalar que si $f(x)$ es una funcion real, entonces a_k y b_k son numeros reales y los numeros c_k y c_{-k} aunque, en general, sean complejos, son mutuamente conjugados, es decir:

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Es evidente que la n-esima suma de la serie de Fourier de la función f se puede escribir en la forma siguiente

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos nw_o x + b_k \operatorname{sen} nw_o x)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_n e^{ikw_o x}$$

y la misma serie de Fourier de la funcion f(x) en forma de la serie

$$f(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \cong \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik}$$

Las funciones complejas

$$\{ e^{ikx} \} \quad k= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$$

forman un sistema ortogonal sobre [-t/2,t/2].

Como consecuencia de los resultados de la seccion anterior, se concluye que: Si f es derivable en $[\pi,\pi]$, entonces su serie de Fourier converge en todo el intervalo.

Es natural preguntarse si esta convergencia es uniforme, se vera que esto sucede si f es continuamente diferenciable en $[\pi,\pi]$. Para demostrarlo, se utilizara la serie de Fourier f^1 integrandola termino a termino para obtener la serie de Fourier de f.

En general una serie de funciones puede integrarse termino a termino si es uniformemente convergente.

En nuestro caso particular de las series de Fourier, la convergencia uniforme no es necesaria, es decir, tenemos el notable resultado de que la integración termino a termino siempre es posible.

TEOREMA:

Supongamos que $f(x) \in L_2 [-\pi,\pi]$ y sea su serie de Fourier formal $f(x)= \dfrac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \cos kx + \beta_k \cos kx \right]$ hacemos $g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(y)dy$, entónces la serie que se obtiene de integrar término a término $f(x)$, converge uniformemente a $g(x)$ en $[-\pi , \pi]$, entónces la expresión explícita de $g(x)$ es:

$$g(x)= \frac{\alpha_0}{2} (x+\pi) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \int_{-\pi}^{x} \cos kydy + \beta_k \int_{-\pi}^{x} \operatorname{sen} kydy \right]$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} (x+\pi) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\alpha_k}{k}\right) \operatorname{sen} kx - \left(\frac{\beta_k}{k}\right) \cos kx -(-1)^{k} \right]$$

Observaciones:

Es importante hacer notar que tampoco se necesita usar la convergencia puntual, para la serie de Fourier f. Esta última expresión de g(x) no es la serie de Fourier de g(x) si no una serie que converge uniformemente a g(x).

Demostracion:

Puesto que $f(x) \in L_2 \left[-\pi, \pi \right]$, existe una sucesion de funciones $S_n(x)$ que converge a $f(x)$ en la norma cuadrática.

$$\text{Sean} \quad g_n(x) = \int_{-\pi}^{x} S_n(y)\, dy \qquad g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(y)\, dy$$

entónces

$$| g_n(x) - g(x) |^2 \leq \left[\int_{-\pi}^{x} | S_n(x) - f(x) | dx \right]^2$$

Para poder hacer uso de la desigualdad de Schwarz, introduciremos las funciones $h(x)=|S_n(x) - f(x)|$, $p(x) = 1$, entónces por la desigualdad de Schuarz

$$\left[\int_{-\pi}^{x} p(x)\, h(x)\, dx \right]^2 \leq \int_{-\pi}^{x} p^2(x) dx \int_{-\pi}^{x} h^2(x)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{x} | S_n(x) - f(x) |^2 dx \int_{-\pi}^{x} p^2(x)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{x} | S_n(x) - f(x) |^2 dx\ (x + \pi)$$

la última expresión de la derecha está acotada por

$$2\pi \, \| S_n - f \|^2$$

finalmente $\qquad | g_n(x) - g_n(x) |^2 \leq \| S_n - f \|^2 (2\pi)$.

como el lado derecho tiende a cero solamente con N, es decir, no depende de x, entónces $\left\{ g_n \right\}$ converge uniformemente a g(x).

Ahora surge de manera natural la siguiente pregunta:

¿ Cuándo la serie anterior es la serie de Fourier de g(x)?

El principal problema que surge aquí, es la presencia de la función $x + \pi$. Una posibilidad es desarrollar la función "x" en serie de Fourier y agrupar términos, sin embargo, consideremos el caso especial, cuando $\alpha_0 = 0$, y calculemos los coeficientes de Fourier de g (x) , observaremos que éstos son exactamente los que aparecen en el desarrollo anterior de g (x).

Primero identifiquemos el término constante. Si formalmente la serie de Fourier de g (x) es

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right]$$

entónces formalmente $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx$, como se dedujo del teorema anterior, la convergencia es uniforme, entónces es posible integrar la serie

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \beta_k}{k} + \left[\frac{-\beta_k}{k} \cos kx + \frac{\alpha_k}{k} \operatorname{sen} kx \right] \right]$$

término a término, ésto es

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = 2\pi \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k}{k} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\beta_k}{k} \cos kx dx \right] \right.$$

$$\left. + \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha_k}{k} \operatorname{sen} kx\, dx \right] \right]$$

como $\frac{-\beta_k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{\alpha_k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx dx = 0$

entónces $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k}{k} \right] (2\pi)$, $\displaystyle a_o = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k}{k}$

una vez identificado el término constante identifiquemos los restantes coeficientes de Fourier de g(x):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kxdx = \frac{-\beta_k}{\pi\ k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \frac{-\beta_k}{k}$$

y $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{ sen } kxdx = \frac{\alpha_k}{\pi\ k} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 kxdx = \frac{\alpha_k}{k}$$

por lo tanto

$$g(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k}{k} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-\beta_k}{k} \cos kx + \frac{\alpha_k}{k} \text{ sen } kx \right]$$

es la serie de Fourier de g(x).

El resultado anterior nos permite obtener el siguiente:

TEOREMA:

Supongamos que f(x) es continuamente diferenciable, $[-\pi,\pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$. Entónces la serie de Fourier de f(x) converge uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Demostracion:

Consideremos la serie de Fourier de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\alpha'_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha'_k \cos kx + \beta'_k \text{ sen } kx \right] ,$$

$\alpha'_o = 0$ pues $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0$, entónces

$f(x) = f(-\pi) + f(x) - f(-\pi) = f(-\pi) + \displaystyle\int_{-\pi}^{x} f'(y)dy$, de donde

$$f(x) = f(-\pi) + g(x)$$

Usando el resultado anterior, la serie de Fourier de g(x):

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-\beta_k}{k} \cos kx + \frac{\alpha_k}{k} \operatorname{sen} kx \right]$$

converge uniformemente.

Ahora para lograr el resultado que deseamos solo necesitamos observar que f(x) y g(x) tienen la misma serie de Fourier, excepto por el primer termino.

Si $k \neq 0$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(-\pi) + g(x) \right] \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-\pi) \cos kx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx dx = \frac{-\beta_k}{k} ,$$

analogamente

$$\beta_k = \frac{\alpha'_k}{k}$$

CORDLARIO:

Si f(x) satisface las condiciones del teorema anterior, entónces los coeficientes de Fourier de f(x) cumplen con:

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \alpha_k | < \infty \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} | \beta_k | < \infty$$

y $\quad k\alpha_k \longrightarrow 0 \quad , \quad k\beta_k \longrightarrow 0$

Demostracion:

Por la desigualdad de Bessel para $f'(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta'^2_k$ converge.

Hagamos $\quad O_n = \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k |$, entónces

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\beta_k'}{k} \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{{\beta_k'}^2}{k^2}} \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} {\beta_k'}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

por la desigualdad de Schwarz.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \quad \infty \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \infty$

y Q_n es creciente, entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} Q_n = |\alpha_k| < \infty ,$$

análogamente, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \beta_k | < \infty ,$$

como $\alpha_k' \longrightarrow 0$, $\beta_k' \longrightarrow 0$, y $k\alpha_k = -\beta_k'$, $k\beta_k = \alpha_k'$,

concluimos que las sucesiones $\left\{ \alpha_k \right\}$ y $\left\{ \beta_k \right\}$, tienden a cero más rápidamente que la sucesión $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$.

Observación.

Los resultados anteriores son válidos cuando la función f(x) sea diferenciable, excepto en un número finito de punto [ ], pero a nosotros no nos interesa tanta generalidad.

Es natural preguntarnos si el hecho de que las funciones tengan s-derivadas contínuas nos garantiza que las sucesiones $\left\{ \alpha_k \right\}$, $\left\{ \beta_k \right\}$ tienden a cero más rápido que la sucesión $\left\{ \frac{1}{k^s} \right\}$.

Con el siguiente teorema contestaremos a la pregunta anterior.

TEOREMA.

Sea $f(x) \in p^{s}\left[-\pi \ , \ \pi \right]$, y la s+1 derivada es continua por pedazos, entónces los coeficientes α_k, β_l de sus series de Fourier tienden a cero como $O\left(k^{-s} \right)$.

Para demostrar este teorema , primero introduzcamos la siguiente notacion en los coeficientes de Fourier. El índice superior indicará el orden de derivación de la funcion, por ejemplo: $\alpha_k^{(o)}$, $\beta_k^{(o)}$ serán los coeficientes de la función; $\alpha_i^{(1)}$, $\beta_k^{(1)}$ los coeficientes de su derivada...... etc.

Aplicando sucesivamente el teorema anterior, tenemos

$$\alpha_k^{o} = \frac{-\beta_k^{(1)}}{k} = \frac{\alpha_k^{(2)}}{k^{2}} = - \ \ldots = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{(s)}}{k^{(s)}} & \text{si s es par} \\ \dfrac{-\beta^{(s)}}{k^{(s)}} & \text{si s es impar} \end{cases}$$

$$\beta_k^{o} = \frac{\alpha_k^{(1)}}{k} = \frac{-\beta_k^{(2)}}{k^{2}} = \ \ldots \ = \begin{cases} \dfrac{-\beta_k^{(s)}}{k^{(s)}} & \text{si s es par} \\ \dfrac{\alpha_k}{k^{s}} & \text{si s es impar} \end{cases}$$

A partir de las relaciones anteriores se puede sintetizar el resultado que se quiere, sin embargo, vamos a dar otra demostración.

Demostracion:

La idea es trabajar simultánemaente con α_k y β_k. Esto es posible usando la representación compleja de las series de Fourier.

Como habiamos visto antes, en la representación compleja de los coeficientes de Fourier, la relación entre su representación real y compleja es de la forma

$$C_k^{(o)} = \alpha_k^{(o)} - i\,\beta_k^{(o)}, \quad k > 0 \quad ; \quad C_k^{(o)} = \alpha_k^{(o)} + i\,\beta_k^{(o)}, \quad k < 0$$

De las relaciones anteriores entre los coeficientes de la función y los de la derivada, tenemos

$$C_k^{(o)} = \frac{1}{ik}\, C_k^{(1)} \quad , \; k > 0 \; ,$$

la cual se puede obtener por substitucion directa como indicaremos a continuacion, integrando por partes. Recordemos que la expresion compleja de los coeficientes nos queda como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(o)}\, e^{ikx} \quad , \quad \text{donde } 2\pi\, c_k^{(o)} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt \; .$$

Al integrar por partes $c_k^{(o)}$, tenemos

$$2\pi\, c_k^{(o)} = -\frac{f(t)}{ik}\, e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-ikt} dt \; .$$

el primer termino de la derecha se anula, ya que supusimos continuidad y periodicidad en la función f(x) , obteniendo

$$2\pi\, c_k^{(o)} = \frac{1}{ik}\, c_k^{(1)} ,$$

ahora bien

$$c_k^{(1)} = \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-ikt} dt \; ,$$

puede ser inversamente integrado por partes ... después de s-integraciones, obtenemos

$$2\pi \left(ik \right)^{s} c_k^{(o)} = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(s)}(t)\, e^{-ikt} dt$$

$$= 2\pi\, c_k^{(s)}$$

Entónces por el lema de Riemann-Lebesgue, conforme k crece $c_k^{(s)}$ tiende a cero como $O\left(k^{-s} \right)$.

Ilustraremos el teorema anterior con algunos ejemplos, y observaremos algunas consecuencias importantes.

Ejemplo # 1 :

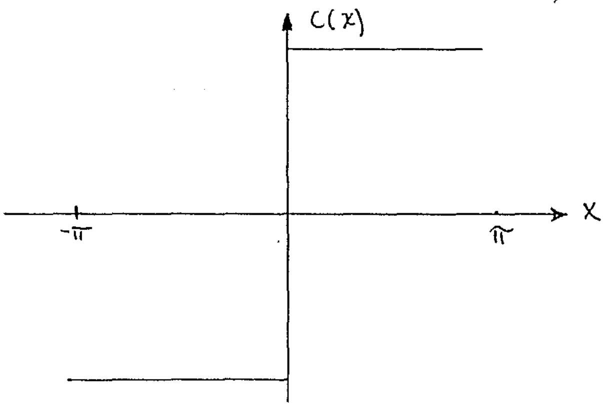
La funcion "onda cuadrada" c(x) dada por la regla de correspondencia

$$c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

su serie de Fourier es

$$c(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(2k - 1\right) x}{2k - 1} ,$$

ésta función tiene discontinuidad de salto en x=0 , como se ve en su gráfica



por lo tanto, el orden de convergencia de sus conjuntos es

$$O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Ejemplo # 2 :

Para la función que tiene por regla de correspondencia

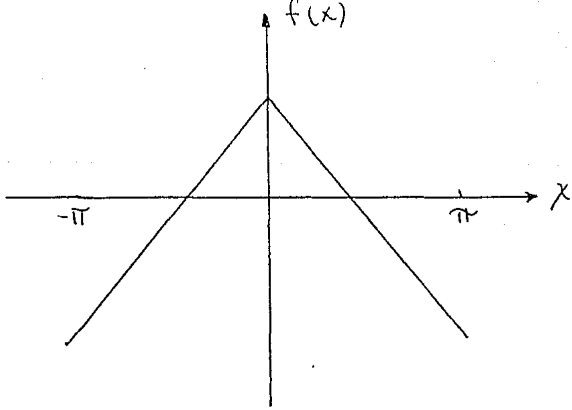
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) & \text{si } 0 \le x < \pi \\ \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) & \text{si } -\pi < x \le 0 \end{cases}$$

su serie de Fourier es

$$\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots$$

en x=0 tiene discontinuidad en la derivada.

Su grafica es:.



Entónces sus coeficientes de Fourier tienen un orden de convergencia de $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Ejemplo # 3 :

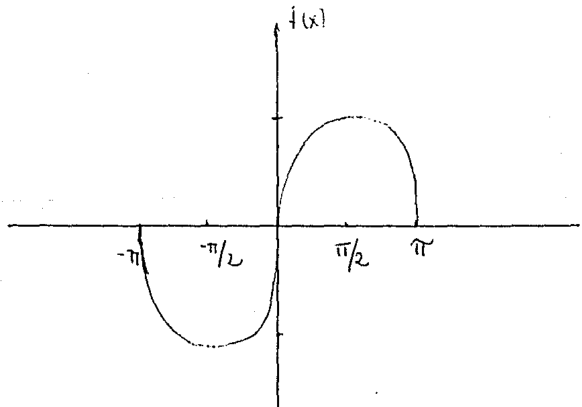
La función que tiene por regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{8} \left[\pi x - x^2 \right] & \text{si } 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{8} \left[\pi x + x^2 \right] & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}.$$

su serie de Fourier es

$$\text{sen } x + \frac{1}{3^3} \text{ sen } 3x + \frac{1}{5^3} \text{ sen } 5x + \ldots$$

está funcion tiene discontinuidad en la segunda derivada.



entónces el orden de convergencia de sus coeficientes es $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$

Tenemos que

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx = L \qquad \text{entonces} \qquad \int_{-L}^{L} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) dx = 1$$

$$\int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx = L \qquad \text{entonces} \qquad \int_{-L}^{L} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{m\pi x}{L} \right) dx = 1$$

$$\int_{-L}^{L} 1^2 dx = 2L \qquad \text{entonces} \qquad \int_{-L}^{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2L}} \right) dx = 1$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}$$

forman un conjunto ortonormal

Sea $\left\{\phi_n(x)\right\}$ un conjunto ortonormal y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en el intervalo (a,b) entonces

$$c_n = \int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, dx$$

Demostracion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\, \phi_m(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ \int_a^b \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx \right\}$$

$$= c_n \quad \text{si } m=n$$

si $\quad s_M(x) = \sum_{n=1}^{M} \alpha_n \phi_n(x)$

entonces

$$\int_a^b \left[f(x) - s_M(x) \right]^2 dx = \int_a^b f(x)^2 - 2 \sum_{n=1}^{M} \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{M} \alpha_n^2$$

demostracion

$$\left[f(x) - s_M(x) \right]^2 = \left[f(x) - \sum_{n=1}^{M} \alpha_n \phi_n(x) \right]^2$$

$$\left[f(x) - s_M(x) \right]^2 = f(x)^2 - 2 \sum_{n=1}^{M} \alpha_n f(x) \phi_n(x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} \alpha_m \alpha_n \phi_m(x) \phi_n(x)$$

entónces

$$\int_a^b \left[f(x) - s_M(x) \right]^2 dx = \int_a^b f(x)^2 dx - 2 \sum_{n=1}^{M} \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{M} \alpha_n^2$$

ya que

$$c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx$$

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

por lo tanto

$$\int_a^b \left[f(x) - s_M(x) \right]^2 dx = \int_a^b f(x)^2 - 2 \sum_{n=1}^{M} \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{M} \alpha_n^2$$

$$\int_a^b f(x)^2 - 2\sum_{n=1}^{M} \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^{M} \alpha_n^2 = \int_a^b f(x)^2 \, dx - \sum_{n=1}^{M} c_n^2 + \sum_{n=1}^{M} (\alpha_n - c_n)$$

se observa que la anterior expresion alcanza su minimo cuando el ultimo sumando es igual a cero , es decir

$$\sum_{n=1}^{M} (\alpha_n - c_n)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = c_n \quad \forall_n$$

SPLINES CUBICOS

Una técnica que puede usarse para obtener funciones interpolantes consiste en dividir el intervalo en una coleccion de subintervalos y construir un polinomio aproximante diferente (generalmente) en cada subintervalo. La aproximacion con funciones de este tipo se llama aproximacion polinómica segmentaria.

El tipo mas simple de aproximacion polinómica segmentaria es la interpolacion lineal segmentaria que consiste en unir un conjunto de puntos

$$\{(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\ldots\ldots(x_n,f(x_n))\}$$

con una serie de lineas rectas.

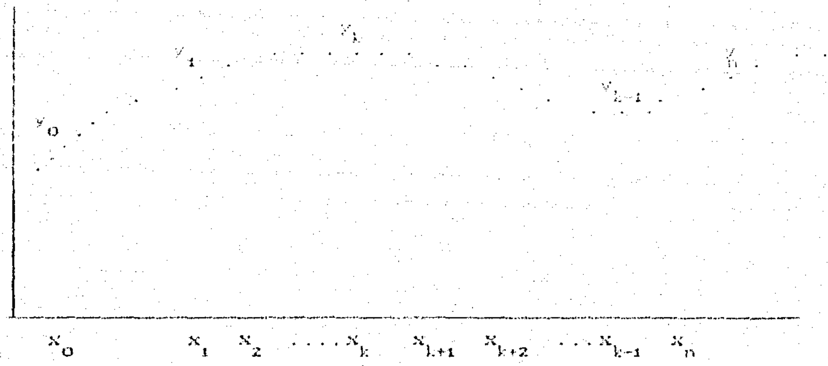
La desventaja de enfocar un problema de aproximacion usando funciones de este tipo es que en cada uno de los extremos de los subintervalos , no hay ninguna seguridad de diferenciabilidad, lo cual, en un contexto geometrico, significa que la función interpolante no es lisa en esos puntos. Frecuentemente por las condiciones físicas es claro que se requiere esta condición y en estos casos la funcion aproximante debe ser continuamente diferenciable.

Para nuestro caso es necesario que en cada uno de los extremos de los subintervalos en los cuales la funcion se está aproximando se tenga informacion de la derivada.

Posiblemente el tipo mas simple de función polinómica segmentaria diferenciable en un intervalo $[x_0,x_1]$ es la función que se obtiene ajustando un polinomio cuadrático entre cada par de nodos sucesivos. Esto se hace construyendo una cuadrática en $[x_0,x_1]$ que coincida con la función en x_0 y x_1, otra cuadrática en $[x_1,x_2]$que coincida conlafunción en x_1y x_2, y así sucesivamente.Como un polinomio cuadrático general tiene tres constantes arbitrarias --- el término constante, el coeficiente de x y el coeficiente de x^2 --- y solo se requieren dos condiciones para ajustar los datos en los extremos de cada subintervalo, existe la flexibilidad suficiente para permitir que las cuadráticas se escojan además de tal manera que, la interpolante tenga derivada continua en $[x_0,x_n]$. La dificultad de este procedimiento surge cunado hay la necesidad de especificar que la derivada de la interpolante coincida con la de la función en los extremos x_0 y x_n.

En este caso se puede demostrar que no hay un numero suficiente de constantes para asegurar que las condiciones se satisfacen.

La aproximación polinomica segmentaria mas común usando polinomios cúbicos entre parejas sucesivas de nodos se llama interpolación por splines. Un polinomio cúbico general involucra cuatro constantes; así que hay suficiente flexibilidad en el procedimiento del spline cúbico para garantizar no solamente que la interpolante sea continuamente diferenciable en el intervalo, sino que tenga una segunda derivada continua. La construcción del spline cúbico, sin embargo, no supone que las derivadas de la interpolante coinciden con las de la funcion ni siquiera en los nodos (ver la siguiente fig.)



Definición.

Dada una función f definida en $[a,b]$ y un conjunto de números llamados nodos, $a=X_0 < X_1 < \ldots\ldots < X_n = b$, un spline cubico S, para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

a) S es un polinomio cubico, denotado p_k, en el subintervalo $[X_{k-1}, X_k]$ para cada $k = 0,1,\ldots n-1$;

b) $p_k(X_{k-1}) = f(X_{k-1}) = y_{k-1}$ para cada $k = 0,1,\ldots n-1$;

c) $p_k(X_k) = f(X_k) = y_k$ para cada $k = 0,1,\ldots,n-1$;

d) $p'_{k-1}(X_k) = p'_k(X_k)$ para cada $k = 0,1,\ldots,n-1$;

e) $p''_{k-1}(X_k) = p''_k(X_k)$ para cada $k = 0,1,\ldots,n-1$;

f) Se satisface una del siguiente conjunto de condiciones de frontera:

1) $p''_n(X_0) = p''(X_n)$

2) $p'(X_0) = f'(X_0)$ y $p'(X_n) = f'(X_n)$

Las 2n condiciones en b) c), junto con las n-1 condiciones en cada d) e) asegura que la primera y la segunda derivada de $S(x)$ son continuas en $[x_0, x_n]$. De tal forma que su grafica $y=S(x)$ es suave. De aqui que cualquier $S(x)$ que satisfaga b) c) d) y e) se le llamara interpolacion splines para $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$

Sea P una transformacion tal que:

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longrightarrow a + bs + cs^2 + ds^3 = P(s)$$

Por lo tanto

$$p(0) = a = y_0$$

$$p(1) = a + b + c + d = y_1$$

entonces

$$b = y_1 - y_0 - c - d$$

sustituyendo en $a + bs + cs^2 + ds^3$ obtenemos

$$p(s) = y_0 + (y_1 - y_0 - c - d)s + cs^2 + ds^3$$

$$p(s) = y_0(1-s) + y_1 s + c(s(s-1)) + d(s(s^2-1))$$

$$p'(s) = y_1 - y_0 + c(2s-1) + d(3s^2-1)$$

$$p''(s) = 2c + 6ds$$

Evaluando $p'(s)$ y $p''(s)$ en 0 y 1 respectivamente

$$p'(0) = y_1 - y_0 - c - d \qquad p''(0) = 2c$$

$$p'(1) = y_1 - y_0 + c + 2d \qquad p''(1) = 2c + 6d$$

Si $\sigma_0 = p''(0) = 2c$ y $\sigma_1 = p''(1) = 2c + 6d$ entonces

$$c = \frac{\sigma_0}{2} \qquad d = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{6}$$

Susteituyendo en $p\Big|^{(s)}_{[0,1]}$ obtenemos

$$p\Big|^{(s)}_{[0,1]} = y_0(1-s) + y_1 s + \frac{\sigma_0}{6}(3s^2 - 3s) + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{6}(s(s^2 - 1))$$

$$p\Big|^{(s)}_{[0,1]} = y_1 s + y_0(1-s) + \frac{\sigma_1}{6}(s^3 - s) - \frac{\sigma_0}{6}(s^3 - 3s^2 - 3s - s)$$

$$p_i(x) = p\Big|^{(s)}_{[x_i, x_{i+1}]} = y_{i+1} s + y_i(1-s) + \frac{\sigma_{i+1}}{6}(s^3 - s)$$

$$- \frac{\sigma_i}{6}(s^3 - 3s^2 - 2s)$$

Tenemos
$$a = y_0$$
$$b = y_1 - y_0 - c - d$$
$$c = \frac{\sigma_0}{2}$$
$$d = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{6}$$

Queremos que satisfaga

$$p'_i(x_i) = p'_{i-1}(x_i)$$

$$p'_i(x) = \frac{1}{h_i}\left[y_{i+1} - y_i + \frac{\sigma_{i+1} h_i^2}{6}(3s^2 - 1) - \frac{\sigma_i h_i^2}{6}(3s^2 - 6s + 2)\right]$$

$$p'_{i-1}(x) = \frac{1}{h_{i-1}}\left[y_i - y_{i-1} + \frac{\sigma_i h_{i-1}^2}{6}(3s^2 - 1) - \frac{\sigma_{i-1} h_{i-1}^2}{6}(3s^2 - 6s + 2)\right]$$

$$p'_i(x_i) = \frac{1}{h_i}\left[y_{i+1} - y_i + \sigma_{i+1} h_i^2(-1) - \frac{\sigma_i h_i^2}{6} h_i^2(2)\right]$$

$$p'_{i-1}(x_i) = \frac{1}{h_{i-1}}\left[y_i - y_{i-1} + \frac{\sigma_i h_{i-1}^2}{6}(3) - \sigma_{i-1} h_{i-1}^2(-1)\right]$$

Igualando $p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$ y agrupando

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\sigma_i h_{i-1}}{6} + \frac{\sigma_{i-1} h_{i-1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\sigma_{i+1} h_i}{6} - 2\frac{\sigma_i h_i}{6}$$

$$\frac{\sigma_{i-1} h_{i-1}}{6} + 2\frac{(h_{i-1}+h_i)}{6}\sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} h_i}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

multiplicando por $\frac{12}{h_{i-1} + h_i}$

$$\frac{2 h_{i-1}}{h_{i+1} + h_i}\sigma_{i-1} + 4\sigma_i + \frac{2 h_i}{h_{i+1} + h_i} = \frac{12}{h_{i-1} + h_i}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right]$$

Entonces sea

$$\alpha_i \sigma_{i-1} + 4\sigma_i + \beta_i \sigma_{i+1} = \frac{12}{h_{i+1} + h_i}\left[x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \right]$$

Si utilizamos puntos igualmente espaciados y las condiciones $p''(0) = 0$, $p''(X_n) = 0$ entonces $\sigma_0 = \sigma_n = 0$.

Podemos denotar el sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\sigma_{i-1} + 4\sigma_i + \sigma_{i+1} = \delta_i$$

Para i = 1,2,3....n se tiene que

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0. & . & . & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0. & . & . & 0 \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \\ \\ \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \\ \\ \\ \delta_{n-1} \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

.....Para construir el spline cúbico para una funcion dada f. se pueden aplicar las condiciones de la definicion a los polinomios.

Escribamos el spline cúbico en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ en la forma siguiente

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

para $j = 0,1,2,3,\ldots,n-1$

dadas las condiciones siguientes

$$S(x_j) = f(x_j) = y_j$$

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$$

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$$

$$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$$

Entonces

$$S_i(x_i) = a_i = y_i$$

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3$$

Sea $h_i = x_{i+1} - x_i$, entonces

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}$$

Ahora necesitamos la primera y segunda derivadas para relacionar las pendientes y curvaturas de los polinomios unidos, de modo que derivamos.

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

Tenemos

$$S'_i(x_i) \quad = b_i$$

$$S'_i(x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 = b_{i+1}$$

$$S'_i(x_{i+1}) = b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1}$$

para la segunda derivada

$$S''_i(x) \quad = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

$$S''_i(x_i) \quad = 2c_i$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) = 2c_{i+1}$$

por lo tanto

$$2c_i + 6d_ih_i = 2c_{i+1}$$

$$c_{i+1} = c_i + 3\ d_ih_i$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Como $$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \left[\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}\right] h_i^3$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + h_i^2 \left[c_{i+1} + 2c_i\right]$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 + 3\left[\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}\right] h_i^2$$

$$b_{i+1} = b_i + h_i\,(c_{i+1} + c_i)$$

despejando b_i

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\,(2c_i + c_{i+1})$$

reduciendo un indice b_i y b_{i+1}

$$b_{i-1} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}\,(2c_{i-1} + c_i)$$

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

Entonces

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\,(2c_i + c_{i+1}) = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}\,(2c_{i-1} + c_i)$$
$$+ h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

$$\frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - h_i(2c_i + c_{i+1}) = \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}} - h_{i-1}(2c_{i-1} + c_i)$$

$$+ 3h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

$$\frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}} = h_i(2c_i + c_{i+1}) + 3h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

$$- h_{i-1}(2c_{i-1} + c_i)$$

$$\frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}} = h_i(2c_i + c_{i+1}) + h_{i-1}(c_{i-1} + 2c_i) + h_i c_{i+1}$$

Desde otro punto de vista, el polinomio de interpolación mas sencillo es simplemente unir consecutivamente con lineas rectas los puntos y_k para $k = 0,1, \ldots, n-1$

Sea

$$S \Big|_{[x_i, x_{i+1}]} = s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

Si $s(x)$ es un spline cubico en $[x_0, x_n]$, entonces su segunda derivada $s''(x)$ es lineal en $[x_0, x_n]$; y además interpola a $(x_k, s''(x_k))$ y $(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$ en $[x_k, x_{k+1}]$. De modo que si

$$s''_i(x_i) = c_i \qquad s''_{i+1}(x_{i+1}) = c_{i+1}$$

Entonces

$$s''_i(x) = c_i\left[\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right] + c_{i+1}\left[\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right]$$

$$k = 0,1,2,3,4, \ldots, n-1$$

Denotemos el incremento de x a x como

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

Entonces

$$s''_i(x) = \frac{c_i}{h_i}\left[x_{i+1} - x\right] + \frac{c_{i+1}}{h_i}(x - x_i)$$

Donde h_i y c_i son constantes, en c_i por determinar.

Integrando dos veces con respecto a x

$$s_i(x) = \frac{c_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + k_1(x - x_i)$$
$$+ k_2(x - x_i)$$

Evaluando en x_i

$$y_i = s_i(x_i) = \frac{c_i}{6} h_i^2 + k_2 h_i$$

Por lo tanto

$$k_2 h_i = y_i - \frac{c_i h_i^2}{6}$$

$$k_2 = \frac{y_i}{h_i} - \frac{c_i h_i}{6}$$

Ahora en x_{i+1}

$$y_{i+1} = s_i(x_{i+1}) = \frac{c_{i+1}}{6} h_i^2 + k_1 h_i$$

Tenemos $$k_1 = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{c_{i+1} h_i}{6}$$

Sustituyendo k_1 y k_2 en s_i

$$s_i(x) = \frac{c_i}{6h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{c_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{c_{i+1} h_i}{6}\right](x - x_i)$$

$$+ \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{c_i h_i}{6}\right](x_{i+1} - x)$$

Esta fórmula puede ser usada para evaluar $s(x)$ para $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ una vez que hayamos conocido los valores de $s''_i(x)$ y $s''_{i+1}(x_{i+1})$. Por lo tanto para poder usar $s(x)$ y aproximar $f(x)$ en $[x_0\ ,\ x_n]$, debemos conocer las segundas derivadas $c_0, c_1, \ \ ,c_n$ las cuales corresponden a las n+1 incognitas.

Por lo tanto

$$s'_i(x) = -\frac{c_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{c_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \left[\frac{y_{i+1}}{h} - \frac{c_{i+1}h_i}{6}\right]$$

$$+ \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{c_i h_i}{6}\right]$$

y haciendo i = i - 1 tenemos

$$s'_{i-1}(x) = -\frac{c_i}{2h_i}(x_i - x)^2 + \frac{c_i}{2h_{i-1}}(x - x_{i-1})^2 + \left[\frac{y_{i+1}}{h_{i-1}}\right]$$

$$- \frac{h_{i-1}}{6}\left[c_{i-1} - c_i\right]$$

Haciendo $\quad s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$

$$s'_i(x_i) = -\frac{c_i}{2}h_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i+1})$$

$$s'_{i-1}(x_i) = -\frac{c_i}{2}h_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(c_{i-1} - c_i) = s'_i(x_i)$$

Igualando

$$\frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_{i-1}}{6}(c_{i-1} - c_i) + \frac{c_i}{2}h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$h_i = h_{i-1} = h$$

$$h\left[\frac{c_i}{3}+\frac{c_{i-1}}{6}-\frac{c_i}{6}+\frac{c_i}{3}+\frac{c_{i+1}}{6}-\frac{c_i}{6}\right]=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h}$$

multiplicando por $\frac{3}{6}$

$$\frac{h}{6}\left[3c_i+c_{i-1}-c_i+3c_i+c_{i+1}-c_i\right]=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h}$$

Reduciendo tenemos

$$\left[c_{i-1}+4c_i+c_{i+1}\right]=\frac{6}{h^2}\left[\Delta^2 y_i\right]$$

donde $\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$

Para $i = 1,2, \ldots , n-1$

$$\begin{array}{llllll}
c_0 + 4c_1 + c_2 & & & & & = \delta_1 \\
 & c_1 + 4c_2 + c_3 & & & & = \delta_2 \\
 & & c_2 + 4c_3 + c_4 & & & = \delta_3 \\
 & & & c_{n-2} + 4c_{n-1} + c_n & & = \delta_{n-1}
\end{array}$$

Por lo tanto éstas ecuaciones se pueden representar en la siguiente forma:

Sea $Ax = b$

$$
\begin{bmatrix}
4 & 0 & 0 & 0. & . & . & 0 \\
1 & 4 & 1 & 0. & . & . & 0 \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & 0 & 0 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ \\ \\ \\ c_{n-1} \\ c_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ \delta_1 \\ \\ \\ \\ \delta_{n-1} \\ \delta_n
\end{bmatrix}
$$

APLICACION DE LOS SPLINES CUBICOS

La estrategia para desarrollar formulas para integracion numerica consiste en pasar un polinomio a traves de puntos donde la funcion es conocida, y entonces integrar este polinomio interpolante. Esto permite integrar una funcion conocida donde solamente se conocen ciertos valores de la funcion.

De este modo, los splines cubicos ademas de su uso en interpolacion puden ser usados para encontrar integrales de funciones.

CALCULO NUMERICO DE LAS INTEGRALES DE FOURIER

La formula mas usada para calcular las integrales de Fourier es la de Filón, la cual aproxima la función por una cuadratica en cada intervalo doble. Con el fin de obtener una mejor aproximación usaremos el spline cúbico.

Sean

$$\int_a^b f(x) \cos wx \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen} wx \, dx$$

las integrales de Fourier.

El procedimiento para calcular tales integrales es reemplazar la función $f(x)$ por un spline $s(x)$.

Los valores de $f(x)$ son dados en $N + 1$ puntos $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{N-1} < x_N = b$ y son denotados por $y_0, y_1, \ldots y_N$

Como se observo anteriormente la funcion spline $s(x)$ es una funcion cubica interpolante con segunda derivada continua, y lineal en [a,b]; e interpola a (x_{j-1}, M_{j-1}) y (x_j, M_j) en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. De modo que s:

$$s''_j(x_j) = M_j \qquad s''_{j-1}(x_{j-1}) = M_{j-1}$$

Entonces para $j = 0,1,2,........N$

$$s''_j(x) = M_{j-1}\left[\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}}\right] + M_j\left[\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right]$$

$$j = 1,2,3,4, \ldots , N$$

Denotemos el incremento $h_j = x_j - x_{j-1}$

Entonces

$$s''_j(x) = M_{j-1}\left[\frac{x_j - x}{h_j}\right] + M_j\left[\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right]$$

Donde h_i y M_j son constantes, en M_j por determinar.

Integrando dos veces con respecto a x

$$s_j(x) = \frac{M_{j-1}}{6}\frac{(x_j - x)^3}{h_j} + \frac{M_j}{6}\frac{(x - x_{j-1})^3}{h_j} + k_1(x - x_{j-1}) + k_2(x_j - x)$$

Como

$$s(x_j) = y_j = f(x_j)$$

$$s(x_{j-1}) = y_{j-1} = f(x_{j-1})$$

Entonces evaluando en x_j

$$y_j = s_j(x_j) = \frac{M_j}{6} h_j^2 + k_1 h_j$$

Por lo tanto

$$k_1 = \frac{y_j}{h_j} - \frac{M_j}{6} h_j$$

Ahora en x_{j-1}

$$y_{j-1} = s_{j-1}(x_{j-1}) = \frac{M_{j-1}}{6} h_j^2 + k_2 h_j$$

Tenemos $$k_2 = \frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_{j-1}}{6} h_j$$

Sustituyendo k_1 y k_2 en s_j

$$s_j(x) = \frac{M_{j-1}}{6} \frac{(x_j - x)^3}{h_j} + \frac{M_j}{6} \frac{(x - x_{j-1})^3}{h_j} + \left[\frac{y_j}{h_j} - \frac{M_j}{6} h_j \right] (x - x_{j-1})$$

$$+ \left[\frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_{j-1}}{6} h_j \right] (x_j - x)$$

Esta fórmula puede ser usada para evaluar $s(x)$ para $x_{j-1} \le x \le x_j$ una vez que hayamos conocido los valores de $s''_j(x)$ y $s''_{j-1}(x_{j+1})$. Por lo tanto para poder usar $s(x)$ y aproximar $f(x)$ en $[x_0 , x_n]$, debemos conocer las segundas derivadas $M_1, M_2, \ldots, M_N$ las cuales corresponden a las N incognitas.

Por lo tanto

$$s'_j(x) = -\frac{M_{j-1}}{2h_j}(x_j - x)^2 + \frac{M_j}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 + \left[\frac{y_j}{h_j} - \frac{M_j}{6}h_j\right] - \left[\frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_{j-1}}{6}h_j\right]$$

Agrupando tèrminos

$$s'_j(x) = -\frac{M_{j-1}}{2h_j}(x_j - x)^2 + \frac{M_j}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 + \left[\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right] - \left[\frac{M_j - M_{j-1}}{6}\right] h_j$$

Evaluando en x_j

$$s'_j(x_j) = \left[\frac{M_j h_j}{2} - \frac{M_j h_j}{6}\right] + \frac{M_{j-1}}{6} h_j + \frac{(y_j - y_{j-1})}{h_j}$$

Obteniendo el limite de la derivada por la derecha e izquierda

$$s'_j(x_j^-) = h_j \frac{M_{j-1}}{6} + \frac{h_j M_j}{3} + \frac{(y_j - y_{j-1})}{h_j}$$

$$s'_j(x_j^+) = -\frac{h_{j+1} M_j}{3} - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} + \frac{(y_{j+1} - y_j)}{h_{j+1}}$$

Donde las M_j estan definidas por la continuidad de $s'(x)$ en x_j para $j = 1,2,\ldots, N-1$

Para $j = 1,2,\ldots,N-1$ tenemos $N-1$ ecuaciones con $M_1, M_2, \ldots, M_N$ incognitas. Para nuestro caso requerimos que el sistema anterior sea valido para $j = N$. Por lo tanto hagamos $y_N = y_0$, $M_N = M_0$ y si $y_{N+1} = y_1$, $M_{N+1} = M_1$, $h_1 = h_{N+1}$ obtenemos el siguiente sistema

Esta ecuacion se puede representar en la siguiente forma:

Sea $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & 0 & 0 \\ & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ & & & & & \\ & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Ahora obtendremos la formula de cuadratura

Tenemos

$$s_j(x)\Big|_{[x_{j-1},x_j]} = \frac{M_{j-1}}{6}\,\frac{(x_j - x)^3}{h_j} + \frac{M_j}{6}\,\frac{(x - x_{j-1})^3}{h_j} + \left[\frac{y_j}{h_j} - \frac{M_j}{6}h_j\right](x - x_{j-1})$$

$$+ \left[\frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_{j-1}}{6}\,h_j\right](x_j - x)$$

Obtengamos la primera, seguna, tercera derivada de $s(x)$ es decir:

$$s'_j(x) = -\frac{M_{j-1}}{2h_j}(x_j - x)^2 + \frac{M_j}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 + \left[\frac{y_j}{h_j} - \frac{M_j}{6}\,h_j\right]$$

$$- \left[\frac{y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_{j-1}}{6}\,h_j\right]$$

$$s''_j(x)\Big|_{[x_{j-1},x_j]} = M_{j-1}\frac{(x_j - x)}{h_j} + M_j\,\frac{(x - x_{j-1})}{h_j}$$

$$s'''_j(x) = -\frac{M_{j-1}}{h_j} + \frac{M_j}{h_j} = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}$$

Evaluando $\int_a^b s(x)\cos wx\,dx$ obtenemos lo siguiente

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = \frac{s(x)\,\mathrm{sen}\,wx}{w}\Bigg|_a^b + \int_a^b s'(x)\left[-\frac{\mathrm{sen}\,wx}{w}\right]dx$$

Sea $u = s(x) \qquad v'(x) = \cos wx\,dx$

$$u' = s'(x) \qquad v(x) = \frac{\text{sen } wx}{w}$$

$$\int_a^b s'(x)\left[-\frac{\text{sen} wx}{w}\right] dx = s'(x)\,\frac{\cos wx}{w^2}\Bigg|_a^b - \int_a^b s''(x)\,\frac{\cos wx}{w^2}\,dx$$

Sea $u = s'(x) \qquad v'(x) = \dfrac{\text{sen } wx}{w}\,dx$

$$u' = s''(x) \qquad v(x) = \frac{\cos wx}{w^2}$$

$$-\int_a^b s''(x)\,\frac{\cos wx}{w^2}\,dx = -s''(x)\,\frac{\text{sen } wx}{w^3}\Bigg|_a^b + \frac{1}{w^2}\int_a^b s'''(x)\,\text{sen} wx\,dx$$

Sea $u = s''(x) \qquad v'(x) = \dfrac{\cos wx}{w^2}\,dx$

$$u' = s'''(x) \qquad v(x) = \frac{\text{sen } wx}{w^3}$$

$$\frac{1}{w^3}\int_a^b s'''(x)\,\text{sen} wx\,dx = \frac{1}{w^3}\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\,\text{sen} wx\,dx$$

$$= \frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\right]\Big[-\cos wx\Big]_{x_{j-1}}^{x_j}$$

$$= -\frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\right]\Big[\cos wx_j - \cos wx_{j-1}\Big]$$

Entonces

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = \left[s(x)\frac{\operatorname{sen} wx}{w} + s'(x)\frac{\cos wx}{w^2} - s''(x)\frac{\operatorname{sen} wx}{w^3} \right]_a^b$$

$$+ \frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{N} \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\left[\cos wx_j - \cos wx_{j-1} \right]$$

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = s(b)\frac{\operatorname{sen} wb}{w} - s(a)\frac{\operatorname{sen} wa}{w} + s'(b)\frac{\cos wb}{w^2} - s'(a)\frac{\cos wa}{w^2}$$

$$- s''(b)\frac{\operatorname{sen} wb}{w^3} + s''(a)\frac{\operatorname{sen} wa}{w^3}$$

$$+ \frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{N} \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\left[\cos wx_j - \cos wx_{j-1} \right]$$

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = \frac{y_n}{w}\operatorname{sen} wb - \frac{y_0}{w}\operatorname{sen} wa + \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{w^2 h} + \left[\frac{2M_n + M_{n-1}}{6w^2} \right] h \right]\cos wb$$

ya que para el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ se tiene

$$s'(x) = -\frac{M_{n-1}}{2h_n}(x_n - x)^2 + \frac{M_n}{2h_n}(x - x_{n-1})^2 + \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right]$$

$$- \left[\frac{M_n - M_{n-1}}{6} \right] h_n$$

Por lo tanto

$$s'(x_n) = \frac{M_n}{2} h_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \left[\frac{M_n - M_{n-1}}{6}\right] h_n$$

$$s'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{2}{6} M_n h_n + \frac{M_{n-1}}{6} h_n$$

$$s'(x)_{[x_0, x_1]} = -\frac{M_0}{2h}[x_1 - x]^2 + \frac{M_1}{2h}[x - x_0]^2 + \left[\frac{y_1 - y_0}{h}\right] - \left[\frac{M_1 - M_0}{6}\right] h_1$$

$$s'(x_0) = -\frac{M_0}{2} h_1 + \left[\frac{y_1 - y_0}{h_1}\right] - \frac{M_1}{6} h_1 + \frac{M_0}{6} h_1 = \left[\frac{y_1 - y_0}{h_1}\right] - \frac{M_1}{6} h_1 - \frac{2}{6} M_0 h_1$$

Entonces

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = \frac{y_n}{w}\operatorname{sen} wb - \frac{y_0}{w}\operatorname{sen} wa + \left[\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{w^2 h_n}\right] + \left[\frac{2M_n + M_{n-1}}{6w^2}\right] h\right]\cos wb$$

$$+ \left[\left[\frac{y_1 - y_0}{w^2 h_1}\right] + \left[\frac{2M_0 + M_1}{6w^2}\right] h\right]\cos wa$$

$$- s''(b)\frac{\operatorname{sen} wb}{w^3} + s''(a)\frac{\operatorname{sen} wa}{w^3}$$

$$- \frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{N} \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\left[\cos wx_j - \cos wx_{j-1}\right]$$

obtengamos

$$s''(x)\Big|_{[x_{j-1},x_j]} = M_{j-1}\frac{(x_j - x)}{h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})}{h_j}$$

$$s''(x)\Big|_{[x_{n-1},x_n]} = M_{n-1}\frac{(x_n - x)}{h_n} + M_n\frac{(x - x_{n-1})}{h_n}$$

$$s''(x_n) = M_n$$

$$s''_{[x_0,x_1]} = M_0\frac{(x_1 - x)}{h_1} + M_1\frac{(x - x_0)}{h_1}$$

$$s''(x_0)_{[x_0,x_1]} = M_0$$

Por lo tanto

$$\int_a^b s(x)\cos wx\,dx = \frac{y_n}{w}\,\mathrm{sen}\,wb - \frac{y_0}{w}\,\mathrm{sen}\,wa + \left[\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{w^2 h}\right] + \left[\frac{2M_n + M_{n-1}}{6w^2}\right]h\right]\cos wb$$

$$+ \left[\left[\frac{y_1 - y_0}{w^2 h}\right] + \left[\frac{2M_0 + M_1}{6w^2}\right]h\right]\cos wa$$

$$M_n\,\frac{\mathrm{sen}\,wb}{w^3} + M_0\,\frac{\mathrm{sen}\,wa}{w^3}$$

$$\frac{1}{w^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}\left[\cos wx_j - \cos wx_{j-1}\right]$$

INTEGRACION

Una forma de desarrollar formulas de integración numérica es pasar un polinomio a travez de un conjunto de puntos de una funcion $f(x)$, e integrar este polinomio de aproximaciones. De tal manera que nos permite integrar una funcion conocida solamente en ciertos puntos.

Cundo los puntos son igualmente espaciados podemos utilizar el polinomio de interpolacion de Newton-Gregory, es decir:

$$f(x) = y_0 + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} \Delta y_0 + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \Delta^2 y_0 + \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \Delta^3 y_0 + \dots + \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} \Delta^n y_0$$

$$\text{donde} \quad \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!}$$

entonces

$$f(x) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Delta^3 y_0$$

$$+ \dots + \frac{k!}{n!\,(k-n)!}\Delta^n y_0$$

Integrando esta funcion y el polinomio de aproximación en un intervalo $[x_0, x_n]$ con subintervalos de longitud $h = x_{i+1} - x_i$ $i = 0,1,2,\dots,n-1$ obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} \mathbb{P}_n(x)\,dx$$

Existen varias formas en las cuales se puede utilizar esta relación. Cuando el intervalo de de integracion $[a,b]$ iguala a los puntos del polinomio en $[x_0, x_n]$ se obtiene la formula de Newton.

Para nuestro caso podemos obtener reglas de integración correspondientes a los grados de interpolación del polinomio.

Para un polinomio de grado 3 tenemos

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n}\left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Delta^3 y_0\right]$$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx h\int_0^3 \left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Delta^3 y_0\right] dk$$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx hky_0\Big]_0^3 + h\Delta y_0\frac{k^2}{2}\Big]_0^3 + h\Delta^2 y_0\left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4}\right)\Big]_0^3$$

$$+ h\Delta^3 y_0\left(\frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{4}\right)\Big]_0^3$$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right]$$

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{8}h\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right]$$

La cual es conocida como la regla de 3/8 de simpson.

Para un polinomio de grado 2

$$\int_0^2 f(x)dx \approx h \int_0^2 \left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0\right] dk$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx hky_0\Big]_0^2 + h\Delta y_0 \frac{k^2}{2}\Big]_0^2 + h\Delta^2 y_0 \left[\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4}\right]\Big]_0^2$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

la cual es conocida como la regla de 1/3 de simpson.

Para un polinomio de grado 1

$$\int_0^1 f(x)dx \approx h \int_0^1 \left[y_0 + k\Delta y_0\right] dk$$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx hky_0\Big]_0^1 + h\Delta y_0 \frac{k^2}{2}\Big]_0^1 \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]$$

EJEMPLO:

Dado la tabla siguiente, evaluar la integral utilizando la regla de Simpson, obtener las diferencias divididas para encontrar el polinomio y hacer una comprobación.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{ordenadas de orden par} + 4\sum \text{ordenadas de orden impar}\right]$$

$$= y_0 + y_8 + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)$$

$$= \frac{1}{3}\left[4 + 132 + 2(18 + 48 + 86) + 4(6 + 32 + 66 + 108)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[1280\right] = 426.667$$

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	1	-4	10	2	
x_1	2	6	12	2	0
x_2	3	18	14	2	0
x_3	4	32	16	2	0
x_4	5	48	18	2	0
x_5	6	66	20	2	0
x_6	7	86	22	2	0
x_7	8	108	24		
x_8	9	132			

x	$A^2x + Bx + C$			
1	$A + B + C$			
		$3A + B$		
2	$4A + 2B + C$		$2A$	
		$5A + B$		0
3	$9A + 3B + C$		$2A$	
		$7A + B$		0
4	$16A + 4B + C$		$2A$	
		$9A + B$		0
5	$25A + 5B + C$		$2A$	
		$11A + B$		0
6	$36A + 6B + C$		$2A$	
		$13A + B$		0
7	$49A + 7B + C$		$2A$	
		$15A + B$		
8	$64A + 8B + C$			

$$A + B + C = -4 \qquad C = -12$$
$$3A + b = 10 \qquad B = 7$$
$$2A = 2 \qquad A = 1$$

Sustituyendo estos valores en $Ax^2 + Bx + c$ se obtiene la cuadrática buscada, es decir

$$x^2 + 7x - 12$$

Integrando éste polinomio en el intervalo [1,9] tenemos

$$\int_1^9 x^2 + 7x - 12\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 12x \Big|_1^9$$

$$= \frac{729}{3} + \frac{567}{2} - 108 - \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 12$$

$$= 243 + 283.5 - 108 - \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 12 = 426.667$$

FORMULA DE FILON

Hemos observado que la integración numérica es un problema relativamente fácil. Sin embargo, existen casos excepcionales, y uno de tales casos es la integración de una función oscilante. Filon ha obtenido una fórmula de cuadratura como sigue:

$$\int_a^b f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = h\left[\alpha(\theta)\left\{f(a)\cos ka - f(b)\cos kb\right\} + \beta(\theta)S_{2n} + \gamma(\theta)S_{2n-1}\right]$$

donde

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta^2} - 2\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^3}$$

$$\beta(\theta) = 2\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\theta^2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\theta^3}\right)$$

$$\gamma(\theta) = 4\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2}\right)$$

siendo

$$S_{2r} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i})\operatorname{sen} kx_{2i}$$

$$S_{2r-1} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\operatorname{sen} kx_{2i-1}$$

$$\int_a^b f(x)\cos kx\,dx = h\left[\alpha(\theta)\left\{f(b)\operatorname{sen} kb - f(a)\operatorname{sen} ka\right\} + \beta(\theta)C_{2n} + \gamma(\theta)C_{2n-1}\right]$$

por lo tanto

$$a = y_r \,, \qquad b = \frac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2h} \qquad y \qquad c = \frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{2h^2}$$

y como $\qquad f(x) = a + b(x - x_r) + c(x - x_r)^2$

entonces $\qquad f'(x) = b + 2c(x - x_r)$

es decir: $\qquad y'_r = f'(x_r) = b = \dfrac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2h}$

$$y'_{r+1} = f'(x_{r+1}) = b + 2ch$$

sustituyendo b y c

tenemos $\quad f'(x_{r+1}) = \dfrac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2h} + 2\left[\dfrac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{2h^2}\right]h$

$$= \frac{y_{r+1} - y_{r-1} + 2y_{r+1} + 2y_{r-1} - 4y_r}{2h}$$

$$= \frac{3y_{r+1} + y_{r-1} - 4y_r}{2h}$$

ahora como $f'(x) = b + 2c(x - x_r)$

entonces $\qquad y'_{r-1} = f'(x_{r-1}) = b - 2ch$

sustituyendo b y c

tenemos que $\quad f'(x_{r-1}) = \dfrac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2h} - 2\left[\dfrac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{2h^2}\right]h$

$$= \frac{y_{r+1} - y_{r-1} - 2y_{r+1} - 2y_{r-1} + 4y_r}{2h}$$

$$= \frac{-y_{r+1} - 3y_{r-1} + 4y_r}{2h}$$

por lo tanto

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} f'(x)\,\frac{\cos kx}{k} = f'(x)\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}\Bigg|_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} - \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} f''(x)\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}$$

$$= \frac{f'(x_{r+1})\operatorname{sen}k(x_{r+1}) - f'(x_{r-1})\operatorname{sen}k(x_{r-1})}{k^2}$$

$$= \frac{y'_{r+1}\operatorname{sen}k(x_{r+1}) - y'_{r-1}\operatorname{sen}k(x_{r-1})}{k^2}$$

ahora calculando de la misma manera la siguiente integral

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} f''(x)\left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}\right] = \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} dc\left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}\right] = c\,\frac{\cos kx}{k^3}\Bigg|_{x_{r-1}}^{x_{r+1}}$$

donde

$$u = f''(x) \qquad v' = \frac{\operatorname{sen} kx}{k^2}$$

$$u' = f'''(x) \qquad v = \frac{\cos kx}{k^3}$$

obtenemos

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen}kx\cdot f(x)\,dx = -\frac{y_{r+1}\cos k(x_{r+1}) + y_{r-1}\cos k(x_{r-1})}{k}$$

$$+\frac{y'_{r+1}\operatorname{sen}k(x_{r+1}) - y'_{r-1}\operatorname{sen}k(x_{r-1})}{k^2}$$

$$+\frac{2c}{k^3}\left[\cos k(x_{r+1}) - \cos k(x_{r-1})\right]$$

ahora sustituyendo y'_{r+1}, y'_{r-1} y c en la integral anterior tenemos

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx \; f(x)\; dx = \frac{-y_{r+1}\cos k(x_{r+1}) + y_{r-1}\cos k(x_{r-1})}{k}$$

$$+\left[\frac{3y_{r+1} + y_{r-1} - 4y_r}{2h}\right]\cdot\left[\frac{\operatorname{sen} k(x_{r+1})}{k^2}\right]$$

$$-\left[\frac{-y_{r+1} - 3y_{r-1} + 4y_r}{2h}\right]\cdot\left[\frac{\operatorname{sen} k(x_{r-1})}{k^2}\right]$$

$$+2\left[\frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{2h^2k^3}\right]\cdot\left[\cos k(x_{r+1}) - \cos k(x_{r-1})\right]$$

reduciendo y agrupando tenemos que

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx \; f(x)\; dx = \frac{y_{r-1}\cos k(x_{r-1}) - y_{r+1}\cos k(x_{r+1})}{k}$$

$$+\left[\operatorname{sen} k(x_{r+1}) - \operatorname{sen} k(x_{r-1})\right]\left[\frac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2hk^2}\right]$$

$$+\left[\operatorname{sen} kx_{r+1} + \operatorname{sen} kx_{r-1} + \left[\frac{\cos kx_{r+1} - \cos kx_{r-1}}{hk}\right]\right]$$

$$\cdot\left[\frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{hk^2}\right]$$

Observemos lo siguiente

como, $\cos k(x_{r+1}) = \cos k(x_r + h)$

$$= \cos(kx_r + kh)$$

$$= \cos(kx_r + \theta) \qquad kh = \theta$$

entonces $\cos k(x_{r+1}) = \cos kx_r \cos\theta - \operatorname{sen} kx_r \operatorname{sen}\theta$

$\cos k(x_{r-1}) = \cos kx_r \cos\theta + \operatorname{sen} kx_r \operatorname{sen}\theta$

y como: $\operatorname{sen} k(x_{r+1}) = \operatorname{sen} k(x_r + h)$

$$= \operatorname{sen}(kx_r + kh)$$

$$= \operatorname{sen}(kx_r + \theta)$$

entonces $\operatorname{sen} k(x_{r+1}) = \operatorname{sen} kx_r \cos\theta + \cos kx_r \operatorname{sen}\theta$

por lo tanto $\operatorname{sen} k(x_{r-1}) = \operatorname{sen} kx_r \cos\theta - \cos kx_r \operatorname{sen}\theta$

Es decir

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx f(x)dx = \frac{y_{r-1}\cos k(x_{r-1}) - y_{r+1}\cos k(x_{r+1})}{k}$$

$$+ \frac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2hk^2 = k\theta} \left[\operatorname{sen} kx_r \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos kx_r - \operatorname{sen} kx_r \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos kx_r\right]$$

$$+ \frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{hk^2 = k\theta} \left[\operatorname{sen} kx_r \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos kx_r + \operatorname{sen} kx_r \cos\theta\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\theta \cos kx_r + \frac{\cos kx_r \cos\theta - \operatorname{sen} kx_r \operatorname{sen}\theta - \cos kx_r \cos\theta - \operatorname{sen} kx_r \operatorname{sen}\theta}{hk = \theta}\right]$$

pero como

$$\frac{y_{r+1} - y_{r-1}}{2hk^2 = k\theta} \left[\operatorname{sen}kx_r \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos kx_r - \operatorname{sen}kx_r \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos kx_r\right]$$

es igual a $\dfrac{y_{r+1} - y_{r-1}}{k\theta} \left[2\operatorname{sen}\theta \cos kx_r \right]$

y

$$\frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{hk^2 = k\theta} \Bigg[\operatorname{sen}kx_r \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos kx_r + \operatorname{sen}kx_r \cos\theta$$

$$+ \operatorname{sen}\theta \cos kx_r + \frac{\cos kx_r \cos\theta - \operatorname{sen}kx_r \operatorname{sen}\theta - \cos kx_r \cos\theta - \operatorname{sen}kx_r \operatorname{sen}\theta}{hk = \theta}\Bigg]$$

$$= 2\operatorname{sen}kx_r \left[\frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{k\theta} \right] \cos\theta - 2\operatorname{sen}kx_r \left[\frac{y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r}{k\theta} \right] \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

$$= 2\operatorname{sen}kx_r \left[y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r\right] \left(\frac{\cos\theta - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{k\theta} \right)$$

Obtenemos que la

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen}kx f(x)dx = \frac{y_{r-1}\cos kx_{r-1} - y_{r+1}\cos kx_{r+1}}{k}$$

$$+ \cos kx_r \left[y_{r+1} - y_{r-1} \right] \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}$$

$$+ 2\operatorname{sen}kx_r \left[y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r\right] \left(\frac{\cos\theta - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{k\theta} \right)$$

Tenemos que la

$$\int_a^b \operatorname{sen}kx f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_0+2nh} \operatorname{sen}kx\ f(x)\, dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{2r-2}}^{x_{2r}} \operatorname{sen}kx\ f(x)\, dx$$

por lo tanto

$$\sum_{r=1}^{n} \left[\frac{y_{r-1}\cos kx_{r-1} - y_{r+1}\cos kx_{r+1}}{k} + \cos kx_r \left(y_{r+1} - y_{r-1}\right) \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta} \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{sen}kx_r \left(y_{r+1} + y_{r-1} - 2y_r\right) \left(\frac{\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}{k\theta}\right) \right]$$

Obtengamos la sumatoria para $r = 1, 2, \ldots, n$ de la siguientes relacion

$$\frac{y_{r-1}\cos kx_{r-1} - y_{r+1}\cos kx_{r+1}}{k}$$

Es decir

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\cos kx_{r-1}y_{r-1} - \cos kx_{r+1}y_{r+1}}{k}$$

$$= \frac{\cos kay(a) - \cos kx_2 y_2}{k}$$

$$+ \frac{\cos kx_1 y_1 - \cos kx_3 y_3}{k}$$

$$+ \frac{\cos kx_2 y_2 - \cos kx_4 y_4}{k}$$

$$+ \frac{\cos kx_3 y_3 - \cos kx_5 y_5}{k}$$

$$+ \frac{\cos kx_4 y_4 - \cos kx_6 y_6}{k}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{\cos kx_{2n-2} y_{2n-2} - \cos kx_{2n} y_{2n}}{k}$$

$$= \frac{\cos kay(a) - \cos kby(b)}{k}$$

Al fin

$$\int_a^b \operatorname{sen} kx\, f(x)\, dx = \left\{ \frac{\cos kay(a) - \cos kby(b)}{k} \right\}$$

$$+ \left\{ 2 \left(\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\frac{\theta}{\theta}}{k\theta} \right) \right\}$$

$$\cdot \sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} kx_{2r-1} \left[y_{2r} + y_{2r-2} - 2y_{2r-1} \right]$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta} \sum_{r=1}^{n} \cos kx_{2r-1} \left[y_{2r} - y_{2r-2} \right].$$

igualmente para

$$\cos kx_r \left(y_{r+1} - y_{r-1}\right) \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}\sum_{r=1}^{n} \cos kx_{2r-1}\left(y_{2r} - y_{2r-2}\right) = \Big[\cos kx_1\left(y_2 - y_0\right) + \cos kx_3\left(y_4 - y_2\right)$$

$$+ \cos kx_5\left(y_6 - y_4\right) + \cdots$$

$$+ \cos kx_{2n-1}\left(y_{2n} - y_{2n-2}\right)\Big] \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}\sum_{r=1}^{n} \cos kx_{2r-1}\left(y_{2r} - y_{2r-2}\right) = \Big[-y_0\cos kx_1 + y_2\cos kx_1 - y_2\cos kx_3$$

$$+ y_4\cos kx_3 - y_4\cos kx_5 + y_6\cos kx_5$$

$$- y_6\cos kx_7 + \ldots - y_{2n-2}\cos kx_{2n-1}$$

$$+ y_{2n}\cos kx_{2n-1}\Big] \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}\sum_{r=1}^{n} \cos kx_{2r-1}\left(y_{2r} - y_{2r-2}\right) = \Big[-y_0\cos kx_1 + y_{2n}\cos kx_{2n-1}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} y_{2r}\left(\cos kx_{2r-1} - \cos kx_{2r+1}\right)\Big] \frac{\operatorname{sen}\theta}{k\theta}$$

sabemos que

$$\cos kx_{2r-1} = \cos k\left(x_{2r} - h \right) = \cos\left(kx_{2r} - kh \right)$$

$$= \cos kx_{2r} \cos\theta + \operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\cos kx_{2r+1} = \cos k\left(x_{2r} + h \right) = \cos\left(kx_{2r} + \theta \right)$$

$$= \cos kx_{2r} \cos\theta - \operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen}\theta$$

entonces $\cos kx_{2r-1} - \cos kx_{2r+1} = 2\operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen}\theta$

Por lo tanto

$$\sum_{r=1}^{n} \cos kx_{2r-1}\left(y_{2r} - y_{2r-2} \right) = -y_0 \cos kx_1 + y_{2n} \cos kx_{2n+1}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} y_{2r} \left(\cos kx_{2r-1} - \cos kx_{2r+1} \right)$$

$$= -y_0 \cos kx_1 + y_{2n} \cos kx_{2n+1}$$

$$+ 2\operatorname{sen}\theta \sum_{r=1}^{n} y_{2r} \operatorname{sen} kx_{2r}$$

analogamente se puede probar que

$$\sum_{r=1}^{n} \operatorname{sen} kx_{2r-1}\left(y_{2r} - y_{2r-2} - 2y_{2r-1} \right) = y_0 \operatorname{sen} kx_1 - y_{2n} \operatorname{sen} kx_{2n+1}$$

$$+ 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} y_{2r} \operatorname{sen} kx_{2r}$$

$$- 2 \sum_{r=1}^{n} y_{2r-1} \operatorname{sen} kx_{2r-1}$$

sustituyendo todo lo anterior en

$$\int_a^b \text{sen } kx\ f(x)\ dx = \left\{ \frac{\text{cos}ka\,y(a) \quad \text{cos}kb\,y(b)}{k} \right\}$$

$$+ \left\{ c \left[\frac{\cos\theta \quad \text{sen}\,\frac{\theta}{\theta}}{k\theta} \right] \right\}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{n} \text{sen}kx_{2i-1} \left[y_{2i} \quad y_{2i-2} \quad 2y_{2i-1} \right]$$

$$+ \frac{\text{sen}\theta}{k\theta} \sum_{i=1}^{n} \cos kx_{2i-1} \left[y_{2i} \quad y_{2i-2} \right]$$

obtenemos

$$\int_a^b \text{sen } kx\ f(x)\ dx = \left\{ \frac{\text{cos}ka\,y(a) \quad \text{cos}kb\,y(b)}{k} \right\}$$

$$+ [\ 2\cos\theta\ (\cos\theta - \text{sen}\theta/\theta)/k\theta + \text{sen}^2\theta/\theta\ ]\sum_{i=1}^{n} 2y_{2i}\ \ \text{sen}kx_{2i}$$

$$- (4(\cos\theta - \text{sen}\theta/\theta)/k\theta\ .\ \sum_{i=1}^{n} 2y_{2i}\ \ \text{sen}kx_{2i-1}$$

$$+ (\ 2\cos\theta - \text{sen}\theta/\theta)/k\theta\ \}\ [y(a)\text{sen}k(a+h) - y(b)\text{sen}k(b+h)]$$

$$+ \text{sen}(\theta/k\theta)\ [\ \ y(a)\cos k(a+h) + y(b)\cos k(b+h) + h)]$$

y despues de otras transformaciones se llegará a

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = h\left[\alpha(\theta)\left\{f(a)\cos ka - f(b)\cos kb\right\} + \beta(\theta)S_{2r} + \gamma(\theta)S_{2r-1}\right]$$

donde

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2\theta^2} - 2\,\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\theta^3}$$

$$\beta(\theta) = 2\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\theta^2} - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{\theta^3}\right]$$

$$\gamma(\theta) = 4\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2}\right]$$

donde

$$S_{2r} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i})\ \mathrm{sen}\ kx_{2i}$$

$$S_{2r-1} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\ \mathrm{sen}\ kx_{2i-1}$$

siendo esta la ecuación que remplaza la formula de Simpson para este tipo de integral.

Haciendo el desarrollo en potencias de θ para γ obtenemos lo siguiente:

$$\gamma(\theta) = 4\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2}\right]$$

sabemos

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots$$

$$\gamma = 4\left[\frac{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots}{\theta^3} - \left[\frac{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots}{\theta^2}\right]\right]$$

$$\gamma = 4\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{3!} + \frac{\theta^2}{5!} - \frac{\theta^4}{7!} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{2!} + \frac{\theta^2}{4!} - \frac{\theta^4}{6!} \cdots\right]$$

$$\gamma = 4\left[\left[-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right] + \theta^2\left[+\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right] + \theta^4\left[-\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!}\right] + \cdots\right]$$

$$\gamma = 4\left[\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{30} + \ldots\right]$$

si $\alpha \longrightarrow 0$, $\beta \longrightarrow 2/3$, $\gamma \longrightarrow 4/3$

$$\int_a^b f(x)\operatorname{sen}kx\,dx = h\left[\alpha(\theta)\left\{f(a)\cos ka - f(b)\cos kb\right\} + \beta(\theta)S_{2n} + \gamma(\theta)S_{2n-1}\right]$$

se reduce a la formula de Simpson, es decir:

$$\frac{h}{3}\left[2S_{2n} + 4\,S_{2n-1}\right]$$

Veremos que si se tiene puntos igualmente espaciados, que es una parte fundamental en la aproximacion de Fourier se usara la siguiente notacion por conveniencia.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots\ldots\ldots + a_n\cos kx$$

$$+ b_1\operatorname{sen}x + b_2\operatorname{sen}2x + \ldots\ldots\ldots + b_n\operatorname{sen}kx$$

tal que
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\operatorname{sen}kx\,dx$$

sabemos que

$$\operatorname{sen}x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

porque

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen}x \qquad e^{-ix} = \cos x - i\operatorname{sen}x$$

entonces, en esta notación

$$F(x) = \sum_{k=n}^{m} c_k\, e^{(2\pi i/L)kx}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{(2\pi i/L)kx}\,dx$$

y

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k \quad ib_k}{2} & \text{si } k \quad 0 \\[2ex] \dfrac{a_k \quad ib_k}{2} & \text{si } k \quad 0 \\[2ex] \dfrac{a_0}{2} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Sea $y(t) = e^{2\pi i\omega t}$, si $2\pi\omega = w$ entonces

$y(t)=e^{iwt}$

Aplicando $\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$ la primera diferencia dividida de y_n en p_n a $y(t)$ obtenemos

$y(t)=e^{iwt}$

$\Delta y_n = y_{n+1}-y_n$

$\Delta y_n = e^{iw(t+1)} \quad e^{iwt} = e^{iwt}.\ iw \quad e^{iwt}$

$\Delta y_n = e^{iwt}\left[e^{iw} \quad 1\right] = e^{iwt}\left[e^{iw/2}\left[e^{iw/2} \quad e^{-iw/2}\right]\right]$

por lo tanto

$$\Delta v_n^k = \left[2i\,\text{sen}\,w\right]^k$$

Representemos el polinomio de Taylor para f_{k-1} y f_{k+1}, es decir:

$$f_{k-1} = f_k - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2!} f''(x_k)$$

$$f_{k+1} = f_k + hf'(x_k) + \frac{h^2}{2!} f''(x_k)$$

sumando y agrupando f_{k+1} f_{k-1} es decir,

$$f_{k+1} - f_{k-1} = 2hf'(x_k)$$

por tanto

$$f'(x_k) = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h}$$

$f_k = f(tk) = e^{iwk}$ si $tk=hk=k$ si $h=1$ entonces

$$f'(x_k) = \frac{e^{iw(k+1)} - e^{iw(k-1)}}{2}$$

$$= \frac{e^{iwk}.e^{iw} - e^{iwk}.e^{-iw}}{2}$$

$$= e^{iwk}\left[\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}\right]$$

$$= e^{iwk}\left[i\,\text{senw}\right]$$

como $f_k = e^{iwk}$

entonces $f'_k = iwe^{iwk} = e^{iwk}\left[i\,\mathrm{sen}\,w\right]$. de donde obtenemos la siguiente razón:

$$\frac{i\,\mathrm{sen}\,w\; e^{iwk}}{iw\; e^{iwk}} = \frac{\mathrm{sen}\,w}{w}$$

analogamente

$$f''_k = \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2}$$

$$f''_k = e^{iw(k+1)} - 2e^{iwk} + e^{iw(k-1)}$$

$$f''_k = e^{iwk}.e^{iw} - 2e^{iwk} + e^{iwk}.e^{-iw}$$

$$f''_k = e^{iwk}\left[e^{iw} - 2 + e^{-iw}\right] = e^{iwk}\left[-2 + e^{iw} + e^{-iw}\right]$$

$$f''_k = e^{iwk}\left[-2 + \cos w\right] = e^{iwk}\left[2\left[1 - \cos w\right]\right] = -w^2 e^{iwk}$$

si $f_k = e^{iwk}$

$f'_k = iwe^{iwk}$

$f''_k = -w^2 e^{iwk}$

obtenemos nuevamente otra razón, es decir:

$$\frac{2(1 - \cos w)}{w^2}$$

observemos lo siguiente

$$\frac{1-\cos\theta}{2} = \left[\operatorname{sen}\frac{w}{2}\right]^2. \qquad \text{la razon} \qquad \frac{2(1-\cos w)}{w^2} = \frac{\left[\operatorname{sen}\frac{w}{2}\right]^2}{\left[\frac{w}{2}\right]^2}$$

la serie de la función seno esta definida de la siguiente manera

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad . \quad . \quad .$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}\frac{w}{2} = \frac{w}{2} - \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^3}{3!} + \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^5}{5!} - \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^7}{7!} + \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^9}{9!} \quad \ldots.$$

$$\frac{\left[\operatorname{sen}\frac{w}{2}\right]}{\left[\frac{w}{2}\right]} = \left[1 - \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^2}{3!} + \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^4}{5!} - \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^6}{7!} + \frac{\left[\frac{w}{2}\right]^8}{9!} \quad \ldots\right]$$

la razon es igual a $\dfrac{\left[\operatorname{sen}\frac{w}{2}\right]^2}{\left[\frac{w}{2}\right]^2} = \left[1 - \dfrac{w^2}{24} + \dfrac{w^4}{1920} \;\ldots\right]^2$

La regla del trapecio esta dada por:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{iwk} = \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{f_n}{2}$$

ya que $T_k = e^{iwk}$

$$\sum_{k=0}^{n} T_k = e^{iwk}$$

por lo tanto para $k = 0,1,2,\dots\dots\dots n$

$$\frac{1}{2} + e^{iw} + e^{2(iw)} + e^{3(iw)} + \dots\dots\dots + e^{(n-1)(iw)} + \frac{e^{n(iw)}}{2}$$

sumando y restando $\frac{1}{2}$ y $\frac{e^{niw}}{2}$ tenemos

$$1 + e^{iw} + e^{2(iw)} + e^{3(iw)} + \dots + e^{n-1(iw)} + e^{n(iw)} - \frac{1}{2} - \frac{e^{niw}}{2}$$

como

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

entonces

$$1 + e^{iw} + e^{2(iw)} + e^{3(iw)} + \dots + e^{n-1(iw)} + e^{n(iw)} - \frac{1}{2} - \frac{e^{niw}}{2}$$

es

$$= \frac{1 - e^{n+1(iw)}}{1 - e^{iw}} - \frac{1}{2}\left[1 + e^{n(iw)} \right]$$

$$= \frac{2\left[1-e^{n(1+iw)}\right] \quad \left[1-e^{iw}\right]\cdot\left[1+e^{n(iw)}\right]}{2\left[1-e^{iw}\right]}$$

$$= \frac{2 - 2e^{n+1(iw)} \quad (1-e^{iw})\left[1+e^{n(iw)}\right]}{2\left[1-e^{iw}\right]}$$

$$= \frac{2 \quad 2e^{n+1(iw)} \quad 1 \quad e^{n(iw)} + e^{iw} + e^{(n+1)(iw)}}{2\left[1-e^{iw}\right]}$$

$$= \frac{1+e^{iw} \quad e^{niw} \quad e^{(n+1)iw}}{2\left[1-e^{iw}\right]} = \frac{(1+e^{iw})(1-e^{niw})}{2\left[1-e^{iw}\right]}$$

pero

$$\frac{e^{iwn}-1}{iw} = \int_0^n e^{iwt}\,dt = \frac{(1+e^{iw})(1-e^{niw})}{2\left[1-e^{iw}\right]}$$

es decir

la razón es igual a $\dfrac{\dfrac{(1+e^{iw})}{2(1-e^{iw})}}{\dfrac{1}{iw}}$

$$\frac{1}{iw} = \int_0^1 e^{iwt}\,dt = \frac{(1+e^{iw})}{2(1-e^{iw})}\, iw$$

$$= \frac{(1+e^{iw})\,iw}{2(1-e^{iw})} = \frac{(1+e^{iw})}{e^{iw}-1}\left[\frac{iw}{2}\right]$$

$$= \frac{iw}{2}\left[\frac{e^{iw/2}(e^{iw/2}+e^{-iw/2})}{e^{iw/2}(e^{iw/2}-e^{-iw/2})}\right]$$

$$= \frac{iw}{2}\left[\frac{(e^{iw/2}+e^{-iw/2})}{(e^{iw/2}-e^{-iw/2})}\right]$$

haciendo

$$e^{iw/2} = \cos\frac{w}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{w}{2}$$

$$e^{-iw/2} = \cos\frac{w}{2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{w}{2}$$

sustituyendo

$$" = \frac{iw}{2}\left[\frac{2\cos(w/2)}{2i\,\mathrm{sen}(w/2)}\right]$$

$$= \frac{w}{2}\left[\frac{\cos(w/2)}{\mathrm{sen}(w/2)}\right] = \left[\frac{w}{2}\cot\frac{w}{2}\right]$$

este resultado numérico es conocido como la regla de Filon Trapezoideal.

APROXIMACION DE UNA FUNCION UTILIZANDO LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

$$x(k) = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t)\, e^{\frac{i2\pi k(t)}{p}}\, dt$$

Sea $p = Nh$ y $t = nh \Rightarrow dt$

$\forall\ n = 0,1,2,3, \ldots N-1$

Entonces

$$x(k) = \frac{1}{Nh}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{i2\pi k(nh)}{Nh}}\, h \quad dt$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$$

ahora

$$x(k) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{11} f(t)\, e^{\frac{i2\pi kx}{6}}$$

$$a(k) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{11} f(t)\, \frac{\cos \pi kx}{6}$$

$$b(k) = \frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{N-1} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(\pi k x)}{\delta}$$

Observemos

$$x(k+hN) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{i2\pi(k+hN)n}{Nh}}$$

pero

$$e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \cdot e^{\frac{i2\pi kn}{N}} = e^{i2\pi kn}$$

ya que $e^{i2\pi kn} = 1$

Entonces

$$x(x) = x(k+hN) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$$

Sea k=j, n=k, por lo tanto

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(k)\, e^{\frac{i2\pi(jk)}{N}}$$

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(k)w_n(jk)$$

la cual representa las raices n esimas de la unidad

Entonces

$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8), f(9), f(10), f(11)$

los necesito agrupar de la siguiente manera

$f(\overline{0}), f(\overline{1}), f(\overline{2}), f(\overline{3}), f(\overline{4}), f(\overline{5}), f(\overline{6})$

$$\sum_{0}^{11} = \sum_{0}^{6} f(x) \frac{\cos \pi kx}{N} + \sum_{7}^{11} f(x) \frac{\cos \pi kx}{N}$$

$$\sum_{0}^{11} = \sum_{0}^{6} f(x) \frac{\cos \pi kx}{N} + \sum_{1}^{5} f(x) \frac{\cos \pi kx}{N} = \sum_{0}^{6}$$

sea la trasformación

$x^{1} = 12 - x$

para $x=7$ tenemos $x^{1} = 5$

para $x=8$ tenemos $x^{1} = 4$

para $x=9$ tenemos $x^{1} = 3$

para $x=10$ tenemos $x^{1} = 2$

para $x=11$ tenemos $x^{1} = 1$

por lo tanto

$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)$

$f(11), f(10), f(9),\ f(8),\ f(7)$

$$x(j) = \frac{1}{N} \left[\sum_{0}^{6} f(x) + \sum_{1}^{5} f(x) \right] e^{-\frac{i 2\pi k n}{N}}$$

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{0}^{6} \left[f(x) + f(x) \right] e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \qquad N=6$$

A cada intervalo lo puedo dividir en el numero de puntos que yo elija de preferencia multiplos de 2.

Es decir

$$\sum_{0}^{2\pi} f(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(k)\, e^{i2\pi jk/N}$$

de acuerdo con lo que acabamos de ver puedo agrupar los $f(x)$ de acuerdo a las caracteristicas de periodicidad.

El periodo se divide en el numero que yo elija, entonces esto implica que el numero de variables se reduce a lo mas a la mitad.

Para cada x(k) tenemos a_k y b_k por determinar, observe que

$$\left[f(\theta) + f(-\theta)\right]\cos$$

$$\left[f(\theta) - f(-\theta)\right]\cos$$

los puntos son simetricos

Las raices n-esimas de la unidad de un numero par.

Los puntos $f(\theta), f(2\theta), f(3\theta), \ldots f((n-1)\theta)$ geometricamente son simétricos respecto al eje x, por lo tanto $f(\theta)$ y $f(-\theta)$ tienen las mismas coordenadas trigonométricas, salvo el signo $\pm$ en el seno.

Es decir $f(\theta)$ y $f(-\theta)$ tienen el mismo valor de x, por tanto el mismo valor coseno aunque no sea el mismo angulo.

$f(\theta)$ y $f(-\theta)$ tienen el mismo valor de y excepto el signo, es decir puedo agrupar $\left[f(\theta)-f(-\theta)\right]\operatorname{sen}\theta$ y agrupo. esto implica que podemos reducir a la mitad estos valores de x(k).

CONCLUSIONES

En el presente estudio se considero el problema de aproximar una funcion arbitraria por una combinacion lineal de funciones ortogonales $\left\{ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \right\}$ en un espacio vectorial V. con un producto interior definido de la siguiente manera. es decir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \gamma_k$$

donde los $\alpha_k = \langle f, \gamma_k \rangle$ los cuales le llamamos los coeficientes de Fourier y estan determinados de la siguiente manera

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b f(x)\gamma_k}{\|\gamma_n\|}$$

Dichos coeficientes se pueden calcular como se oobservó de alguna manera numérica, desde el punto de vista de minimos cuadrados el spline cúbico es un amejor aproximacion.

Como también se observo estos coeficientes pueden ser determinados por la fórmula de Filón, pero la desventaja está en que hay que obtener todos los términos de la serie; es por esto que se presentó el estudio de la transformada rapida de Fourier ya que solo dado cierto numero de puntos se pueden conocer los coeficientes. esto es por la periodicidad de la función.

BIBLIOGRAFIA

1.- PUENTE TAMPICO

Pruebas de vibracion y estimacion de propiedades dinámicas

Construcción y Tecnologia Febrero 1990

2.- NUMERICAL METHODS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS

MC. Graw-Hill

R.W Hamming

3.- NUMERICAL INTEGRATION

P.S. Davis and P. Rabinowitz

4.- L.N.G Filòn, On a Quadrature

Proc. Proy, Soc. Edinburg

5.- ON THE CALCULATION OF FOURIER INTEGRALS

INFORMATION PROCESSING 71

North-Holanda Publishing Company

6.- NUMERICAL CALCULATION OF FOURIER INTEGRALS

WITH CUBIC SPLINES

Bo Einarsson

7.- A GUIDED TOUR OF THE FAST FOURIER TRANSFORM

IEEE Spectrum July 1969 pag.41-52

G.B. Bergland

8.- THE ACCURATE CALCULATION OF FOURIER INTEGRALS BY THE FAST FOURIER TRANSFORM TECHNIQUE

Journal of Comutational Physics 11,28-30 (1973)

Flavian Abramovici

9.- AN ALGORITHM FOR THE MACHINE CALCULATION OF COMPLEX FOURIER SERIES

Math. of Comp. vol 19 pp.297-301

James W. Cooley and John W. Tukey