56
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE UNA ESTRUCTURA RETICULAR

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A N :

RICARDO GARCIA MARTINEZ

MARCO ANTONIO HERNANDEZ NOLASCO

MEXICO, D. F. 1991

INDICE

CAPITULO 1.- INTRODUCCION

Como es sabido por todos nosotros, la Tierra es un planeta en constante actividad sismica, ya sea volcánica o tectónica. Este fenómeno natural afecta de diversas formas a la mayoría de las poblaciones humanas en las regiones y zonas circundantes donde se presenta, ocasionando daños en edificios, estructuras, vías de comunicación, etc.

Las zonas de mayor actividad sismica en el mundo son presentadas en la Figura 1-1, donde se puede apreciar que la República Mexicana se localiza dentro de éstas. Es por ello nuestro afán de estudiar más a fondo las respuestas fisicas y mecánicas de las estructuras provocadas por esta actividad, para obtener con ello un diseño que brinde mayor seguridad a los usuarios.

Si bien a la fecha no es posible determinar la naturaleza de los sismos, ya que estos son fenómenos accidentales de comportamiento irregular, si podemos inferir o suponer los daños que éstos pueden provocar a las estructuras basandonos en experiencias anteriores, tomando en cuenta el tipo de construcción y suelo donde se encuentre asentada.

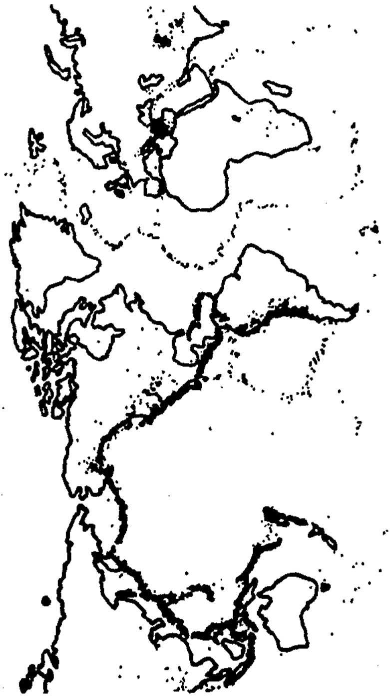


Figura 1-1 Representacion mundial de zonas sismicas

Las investigaciones dedicadas a estructuras de más de un nivel, son generalmente orientadas a estrategias que permitan simplificar el problema matemático que presenta un edificio completo, donde se transforma un sistema de n grados de libertad a n sistemas de un grado de libertad y poder entonces generalizar los resultados encontrados para éste; presentando sus resultados en un sistema coordenado unidimensional y no tridimensionalmente, tal como ocurre en la realidad.

La mayoría de las investigaciones sobre comportamiento sísmico de estructuras, han orientado sus formulaciones con razonamientos meramente estáticos, y del conocimiento de la respuesta de la estructura simétrica asociada, aproximan las respuestas dinámicas de estructuras asimétricas.

Generalmente los estudios realizados suponen que el movimiento del terreno es idéntico en todos los puntos que se encuentran en contacto con la estructura en cuestión. Por tanto, las respuestas en cuanto a torsión se refieren, son única y exclusivamente características de la estructura, y no del movimiento propio del terreno, ésto hace ver que los efectos torsionales inducidos por el desacoplamiento en el movimiento de los diferentes puntos de la fundación o base, no son considerados, cayendo así en mayores errores de cálculo.

Si bien la suposición del comportamiento elástico lineal permite soluciones matemáticas simples, que además en muchos casos reflejan en buena medida el comportamiento real de las estructuras, también es cierto que si éstas son afectadas por acciones sísmicas de mediana o alta intensidad, pueden ingresar al rango inelástico, de manera que las respuestas no serán las esperadas en el cálculo de cada una de ellas.

La información contenida en esta tesis esta encaminada a la solución de un modelo a escala de una estructura reticular de geometría asimétrica, sometido a acciones sismicas. Para lo cual se han propuesto tres tipos de análisis; siendo los dos primeros de tipo dinámico modal espectral, con uno y tres grados de libertad por nivel (A.D.M.E. y Tridimensional) referidos al espectro de diseño del Distrito Federal y el tercero es un análisis de tipo estático. El Análisis paso a paso no está considerado en este trabajo.

Es muy importante el buen criterio de un profesional para lograr soluciones adecuadas del tipo estructural, y poder elegir el análisis que mas se apegue al problema que se pueda presentar, llegando a tener considerable ahorro en tiempo y trabajo, y mas aún, la obtención de resultados confiables.

CAPITULO 2- DINAMICA ESTRUCTURAL

2.1.- INTRODUCCION

Considérese el marco típico de la Figura 2-1 (a), el cual muestra sus características de masa, rigidez y amortiguamiento. Por comodidad dichas caracteristicas son omitidas al dibujar los elementos estructurales, sin embargo no hay que olvidar que son propiedades intrinsecas necesarias para formular el diagrama de cuerpo libre.

En muchos casos, la masa se considera concentrada en el nivel superior del marco, por facilidad en la formulacion de las ecuaciones. La fuerza necesaria para cambiar el estado de reposo o movimiento de una masa m esta dada por la segunda ley de Newton, es decir:

$$F_i = m\,a = m\,\ddot{x}$$

como se indica en la Figura 2-1 (b).

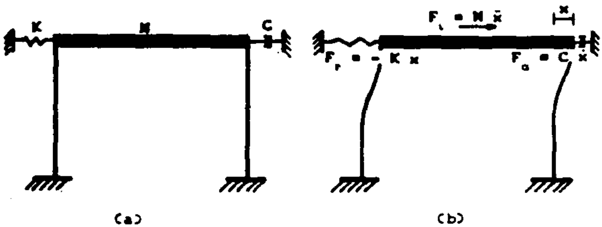


Figura 2-1 Marco tipo

Las rigideces varian dependiendo del material, de sus dimensiones y de las condiciones de apoyo que se tengan. Para efectos de dinámica estructural, la rigidez angular no se considera, de hecho los grados de libertad que interesan, son aquellos en los que se considera fuerzas generalizadas de inercia, por lo que en el marco tendremos un grado de libertad por cada nivel que. De cualquier modo, si consideramos que dichas fuerzas siempre caen dentro del rango elástico, la fuerza opositora a cualquier desplazamiento estará dada por la ley de Hooke, es decir:

$$Fr = k\ x$$

Por último, el amortiguamiento es una caracteristica de toda estructura, la cual depende de las conexiones de los elementos tanto estructurales como no estructurales y, nuevamente de los materiales utilizados. Existen varios tipos de amortiguamiento entre los más conocidos tenemos los siguientes tres:

a) Amortiguación viscosa.- Ocurre cuando un cuerpo vibra en un fluido, tal como el aceite, el agua, o el aire. La fuerza amortiguadora Fa es, en este caso proporcional a la velocidad de dicho cuerpo, es decir:

$$F_a = c\ v = c\ x$$

b) Amortiguación por fricción.- En este caso la amortiguación ocurre por fricción del cuerpo con una superficie rugosa. La fuerza de fricción desarrollada es proporcional a la fuerza normal de superficie, es decir:

$$F_a = \mu\ N$$

c) Amortiguación estructural.- En este tipo de amortiguamiento, la energia se disipa por fricciones internas en el material.

Recordando el principio de D'Alambert el cual menciona que un problema de equilibrio dinámico se convierte en un problema de equilibrio estático, transformando las aceleraciones de las masas a fuerzas aplicadas en sus centroides, es decir, si la fuerza calculada se aplica a un cuerpo en forma opuesta a su aceleración, el cuerpo se pueden considerar en un estado instantáneo de equilibrio estático.

Con estas bases estamos en condición de plantear la ecuación de equilibrio dinámico, que es la suma de todas las fuerzas dinámicas aplicadas a la estructura:

$$F_i - F_a + F_r + P = 0$$

siendo F_i la fuerza de inercia de la masa en movimiento, F_a la fuerza de amortiguamiento viscoso de la propia estructura, F_r la fuerza de rigidez o fuerza opositora al movimiento y P una fuerza excitatriz cualquiera. Los signos de esta ecuación son los debidos a las direcciones que toma cada fuerza.

Sustituyendo la ecuación anterior por sus valores correspondientes, obtenemos:

$$m\,\ddot{u} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

Considerando que $u = s_o + x$ y sustituyendo u en la última ecuación resulta:

$$m\,\ddot{x} + m\,\ddot{s}_o + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = -m\,\ddot{s}_o \qquad (2.1)$$

2.2.- SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

2.2.1.- Movimiento a lo largo de una trayectoria curva

La particula de la Figura 2-2 se mueve con una rapidez constante v en un circulo de radio r. El ángulo θ entre el vector de posición de la particula y el eje X es una función del tiempo con valor inicial θ_o. Entonces, el desplazamiento angular $\theta - \theta_o$ esta relacionado con la distancia s (medida a lo largo de la trayectoria desde la posición inicial de la particula) por:

$$\theta - \theta_o = \frac{s}{r} \tag{2.2}$$

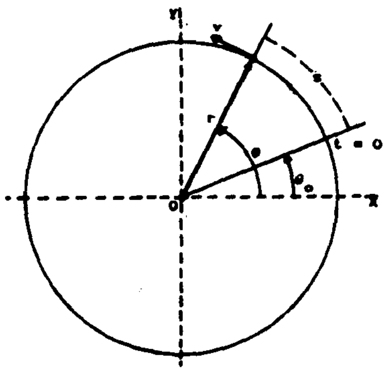


Figura 2-2 Movimiento de una particula con velocidad constante v, a lo largo de un circulo de radio r.

La razón de cambio de θ esta definida como la rapidez angular ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo, es la frecuencia de revolución f, usada para espeficicar rapidez angular. La conversión se efectúa como:

$$\omega = 2 \pi f \tag{2.3}$$

Derivando la ecuación 2.2 se obtiene la relación entre la rapidez angular ω y la rapidez lineal v para el movimiento circular:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (r \text{ constante}) \tag{2.4}$$

donde se utilizó $v = ds/dt$. La ecuación 2.2 con $s/r = vt/r = \omega t$, resulta:

$$\theta - \theta_o = \omega t \quad (\omega \text{ constante}) \tag{2.5}$$

El tiempo T requerido para completar una revolución es el periodo del movimiento. Como estas son f revoluciones por unidad de tiempo, tenemos:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2p}{\omega} \quad (\omega \text{ constante}) \tag{2.6}$$

Las coordenadas X e Y (Figura 2-3) de la partícula, estan relacionadas con r y θ por:

$$x = r \cos(\omega t + \theta_o)$$
$$y = r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o) \qquad (2.7)$$

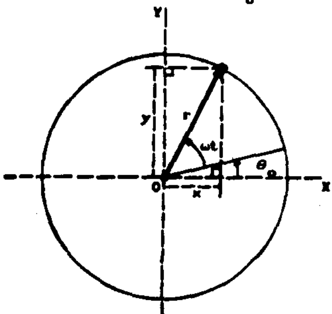


Figura 2-3 En el instante t, la partícula tiene las coordenadas:
$x = r \cos(\omega t + \theta_o)$,
$y = r \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o)$.

Las componentes a_x y a_y de la aceleración a, pueden encontrarse derivando las expresiones de las coordenadas. Usando la regla de la cadena:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = - r \text{ sen } (\omega t + \theta_o) \frac{d}{dt}(\omega t + \theta_o)$$

$$= - \omega r \text{ sen } (\omega t + \theta_o) \qquad (2.8)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = - \omega r \cos (\omega t + \theta_o) \frac{d}{dt}(\omega t + \theta_o)$$

$$= - \omega^2 r \cos (\omega t + \theta_o) \qquad (2.9)$$

Esto muestra que:

$$a_x = - \omega^2 x \quad (r \text{ constante}) \qquad (2.10)$$

analogamente:

$$a_y = - \omega^2 y \quad (r \text{ constante}) \qquad (2.11)$$

Asi pues, x e y son las componentes del vector de posición r. Las ecuaciones 2.10 y 2.11 son equivalentes al vector:

$$a = - \omega^2 r \quad (r \text{ constante}) \qquad (2.12)$$

El signo menos muestra que la aceleración tiene dirección contraria a la de r, esto es, una dirección hacia el centro del circulo. La magnitud de la aceleración es $a = \omega^2 r = (v/r)^2 r = v^2/r$. Es decir, una particula móvil con rapidez v en una trayectoria circular de radio r, tiene una aceleración centripeta de magnitud:

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (2.13)$$

2.2.2.- Movimiento armónico simple

Cualquier movimiento que se repita en iguales intervalos de tiempo T es llamado periodico, donde T es el periodo del movimiento. El movimiento es oscilatorio, si éste ocurre de una parte a otra sobre la misma trayectoria, y una ejecución completa del movimiento será un ciclo. Por ejemplo, la masa m de la Figura 2-4 completará un ciclo si parte del punto O hasta x = A y de este punto, a x = -A, completando el rrecorrido al llegar nuevamente al punto O de partida. Así pues, un ciclo es ejecutado en un tiempo T y el número de ciclos por unidad de tiempo 1/T es la frecuencia f del movimiento:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (2.14)$$

El movimiento armónico simple es un caso particular del movimiento oscilatorio ejecutado por el punto P, indicado en la figura 2-5, mientras el vector de posición A (de longitud constante) gira alrededor del origen con una rapidez angular ω. El punto P es en este caso la proyección del extremo del vector sobre el eje X en el instante t, por lo tanto el vector forma un ángulo:

$$\theta = \omega t + \theta_o \quad (2.15)$$

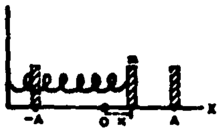


Figura 2-4 Movimiento armonico simple. La masa m oscila entre los puntos x=A y x=-A.

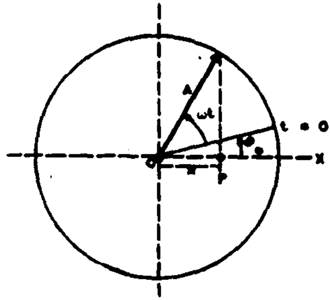


Figura 2-5 El punto P realiza un movimiento armonico simple a lo largo del eje X mientras el extremo del vector recorre el circulo con velocidad angular constante.

A medida que pasa el tiempo θ cambia y el vector gira alrededor del eje perpendicular que atraviesa el punto O, mientras el punto P se mueve a lo largo del eje X:

$$x = \text{proyección de A en el eje X}$$

$$x = A \cos \theta$$

$$x = A \cos (\omega t + \theta_o) \quad (2.16)$$

donde A, θ_o y ω son constantes. La Figura 2-6 muestra la gráfica correspondiente de x en función del tiempo.

La constante positiva A es la amplitud del movimiento armónico simple realizado por el punto P. Así como el vector de longitud A gira, el punto P se mueve de un lado a otro a lo largo del eje X entre los puntos x = A y x = -A. Vemos que la amplitud es el máximo valor realizado por la posición coordenada X. El rango total del movimiento es 2A. El punto O, situado en el centro del rango del movimiento es la posición de equilibrio.

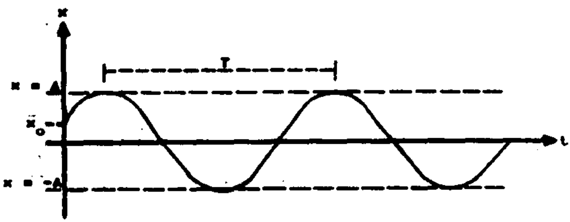


Figura 2-6 La grafica muestra la coordenada en X como una funcion del tiempo de una particula oscilando con movimiento armonico simple de amplitud A, con una posicion inicial x_o = A cos θ_o y un periodo de T = $2\pi/\omega$.

El ángulo θ es el ángulo de fase. Este cambia proporcionalmente a ω. Cuando $t = 0$, $\theta = \theta_o$, que es la fase inicial del movimiento.

El punto P completa un ciclo en su movimiento mientras el vector de posición realiza una revolución completa. Por lo tanto el periodo T es el tiempo requerido por un ciclo o una revolución del vector (2π rad), girando con una rapidez angular ω. La frecuencia f del movimiento armónico simple de el punto P es igual al número de revoluciones por unidad de tiempo de el vector de posición. Por lo tanto:

$$f = \frac{1}{T}$$

y de la ecuación 2.3:

$$\omega = 2\,\pi\,f$$

Donde ω esta dada en radianes por unidad de tiempo. La constante ω, que es la rapidez angular del vector, se llama frecuencia angular del movimiento armónico simple, producida por P.

En resumen, un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω, amplitud A y fase inicial θ_o, es un movimiento que puede ser considerado como la proyección del vector de posición atraves del tiempo sobre el el eje X. El vector tiene una longitud A, forma un ángulo de fase $\theta = \omega t + \theta_o$ con el eje X y gira sobre su origen con una constante de rapidez angular ω.

Por otra parte, la velocidad en X del punto P se establece derivando la expresión 2.16. Esto se muestra en la Figura 2-5:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = - A \sin (\omega t + \theta_0) \frac{d}{dt} (\omega t + \theta_0) = - \omega A \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0) \tag{2.17}$$

La aceleración en el movimiento armónico simple es:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = - \omega A \cos (\omega t + \theta_0) \frac{d}{dt} (\omega t + \theta_0)$$
$$= - \omega^2 A \cos (\omega t + \theta_0) \tag{2.18}$$

Un método alterno para encontrar v_x y a_x es el que se refiere al vector giratorio (Figura 2-7). Ya que el extremo del vector se mueve sobre un circulo de radio A con una rapidez angular ω, su velocidad se puede calcular con la ecuación 2.4:

$$v = \omega A$$

Siendo su dirección tangente a la trayectoria circular. El ángulo entre esta velocidad y la linea vertical es θ. El punto P se mueve a lo largo del eje X con una velocidad v_x la cual es la componente en X de la velocidad del extremo del vector:

$$v_x = - v \operatorname{sen} \theta = - \omega A \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$

El signo negativo en esta expresión corresponde al hecho de que para valores de θ entre 0 y π rad., el punto P se mueve en dirección negativa de x y para θ entre π y 2π el punto P se mueve en dirección positiva.

Los resultados muestran que el punto P se mueve de un lado a otro con velocidad variable, alcanzando una velocidad máxima ωA cuando éste pasa por la posición de equilibrio ($\theta = \pi/2$ ó $-\pi/2$ rad) y deteniendose en $x = A$ ($\theta = 0$) y $x = -A$ ($\theta = \pi$).

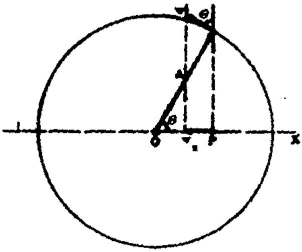


Figura 2-7 El punto P se mueve con una velocidad, la cual es la componente en X de la velocidad del extremo del vector.

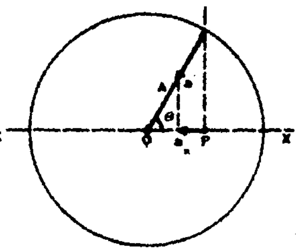


Figura 2-8 El extremo del vector tiene una acelecion centripeta a. El punto P tiene una aceleracion, que es la proyeccion en el eje X de a. La acelecion de P esta siempre dirigida hacia la posicion de equilibrio O.

La aceleración del extremo del vector (Figura 2-8) es sólo la aceleración centripeta dirigida hacia O con una magnitud dada por:

$$a = \omega^2 A$$

La componente en X de la aceleración del extremo del vector es la aceleración a_x del punto P que se mueve a lo largo del eje X:

$$a_x = -\omega^2 A \cos\theta = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_o) \tag{2.19}$$

Ahora, ya que $x = A\cos\theta$, llegamos a que:

$$a_x = -\omega^2 x \tag{2.20}$$

La ecuación aterior afirma que en el movimiento armónico simple un punto P se mueve de un lado a otro sobre su misma trayectoria, de manera que esta aceleración es proporcional a la distancia del punto fijo O y siempre dirigida hacia éste. Esta declaración es una definición alternativa del movimiento armónico simple.

La relación entre a_x y x es inversa con respecto a v_x. En la posición de equilibrio, donde x y a_x son cero la rapidez llega a un máximo. Cuando x y a_x alcanzan su máxima longitud, la rapidez se hace cero.

La amplitud A y el ángulo θ_o determinan la posición y velocidad iniciales x_o y v_{xo} respectivamente, del movimiento realizado por una partícula P. De manera que al hacer t = 0 en las ecuaciones 2.16 y 2.17, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_o &= A\cos\theta_o \\ v_{ox} &= -\omega A \,\text{sen}\,\theta_o \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por el contrario, la posición inicial de la partícula y la velocidad inicial determinan la amplitud y la fase inicial del movimiento armónico simple. Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones 2.21 obtenemos:

$$A^2 = x^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} \tag{2.22}$$

Dividiendo la segunda ecuación de 2.21 entre la primera, obtenemos:

$$\tan \theta_0 = - \frac{v_{0x}}{\omega_{0x}} \tag{2.23}$$

Estas relaciones pueden ser obtenidas por inspección del triángulo mostrado en la Figura 2-9.

Hasta este punto sólo hemos desarrollado la descripción del movimiento armónico simple, ahora sólo queda desarrollar bajo qué circunstancias una partícula realiza tal movimiento y, qué características tiene la fuerza actuante que causa este tipo de oscilación sobre dicha partícula.

Cuando una partícula de masa m realiza movimiento armónico simple, su aceleración vale:

$$a_x = - \omega^2 x$$

Entonces, la segunda ley de Newton, $F_x = m\, a_x$, implica que la fuerza resultante F_x, actuando sobre la partícula debe ser:

$$F_x = - m\, \omega^2 x \tag{2.24}$$

La fuerza resultante que causa el movimiento armónico simple es una fuerza restauradora siempre dirigida hacia O (semejante a la aceleración), donde ésta es proporcional a la distancia de la partícula a partir de O. El punto O donde la fuerza resultante es cero es una posición de equilibrio estable.

La magnitud de la constante de proporcionalidad en la ecuación 2.24 es llamada constante k, entonces:

$$F_x = -kx \tag{2.25}$$

y

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{2.26}$$

De las ecuaciones 2.14 y 2.17, el periodo T del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.27}$$

Esto muestra que el periodo se determina exclusivamente por la constante k y la masa de la partícula. En cualquier movimiento armónico simple el periodo es independiente de la amplitud A y del ángulo inicial θ_o.

La ley de fuerza:

$$F_x = -kx$$

es conocida como la ley de Hooke. Siempre que las fuerzas actuantes en una particula tengan una posición de equilibrio estable, entonces, por pequeños que sean los desplazamientos en X a partir de esa posición, la fuerza resultante F_x actuando sobre la particula, deberá obedecer la ley de Hooke.

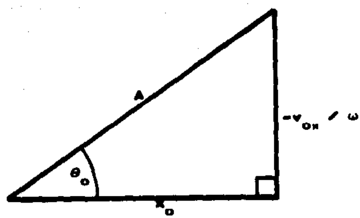


Figura 2-9. La relacion entre (A,θ_0) y (x_0,v_{0x}) puede ser determinada por este triangulo.

2.2.3.- Vibraciones libres sin amortiguamiento

Para un sistema de un sólo grado de libertad, como el mostrado en la Figura 2-1, sin considerar amortiguamiento y sin excitación externa, la ecuación 2.1 se reduce a:

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad (2.28)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, primer grado y no homogenea. Su solución se realiza de la siguiente manera.

La solución general de una ecuación diferencial lineal de constantes reales, esta dada en la forma:

$$x(t) = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t} \qquad (2.29)$$

siempre y cuando se cumpla que:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a^n)\,e^{\lambda t} = 0$$

Aplicando el operador a la funcion $e^{\lambda t}$, la ecuacion queda:

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n)\,e^{\lambda t} = 0$$

Dado que $e^{\lambda t}$ es siempre diferente de cero, se tiene que:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2.30)$$

De lo anterior, se concluye que $y = e^{\lambda t}$ es solución de la ecuación 2.28 si λ es una raiz de la ecuación 2.30.

Para poder aplicar esto a nuestro caso, dividiremos la ecuación 2.28 entre el factor m.

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \qquad (2.31)$$

Utilizando el operador lineal, se tiene:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

por lo que:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, i \qquad (2.32)$$

Al factor $\sqrt{k/m}$ se le llama frecuencia natural angular y se le denomina por la letra ω (ecuación 2.28). Con esto, encontramos la solución de la ecuación 2.29, resultando:

$$x(t) = C_1 e^{+\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t} \qquad (2.33)$$

Recordando la fórmula de Euler, la cual nos dice que, para todo número complejo z:

$$e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\ z \qquad (2.34)$$

Sustituyendo 2.34 en 2.33, obtenemos:

$$x(t) = C_1 (\cos \omega t + \iota \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - \iota \operatorname{sen} \omega t)$$

Desarrollando la ecuación anterior, resulta:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \cos \omega t + C_1 \iota \operatorname{sen} \omega t - C_2 \iota \operatorname{sen} \omega t$$

Si hacemos:

$$B = C_1 + C_2 \qquad y \qquad C = C_1\iota + C_2\iota$$

tenemos:

$$x(t) = B \cos \omega t + C \operatorname{sen} \omega t \qquad (2.35)$$

que es la expresión general de la posición de un cuerpo en cualquier instante t con movimiento armónico simple. Si derivamos la ecuación 2.35 con respecto al tiempo, encontramos la expresión de la velocidad:

$$\dot{x}(t) = - B \omega \operatorname{sen} \omega t + C \omega \cos \omega t$$

Esta ultima ecuación junto con la de posición nos serviran para poder encontrar los valores de las constantes B y C. Introduciendo la condición inicial t = 0 tenemos:

$$x(0) = x_o = B \cos \omega(0) + C \operatorname{sen} \omega(0)$$

y

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o = - B \omega \operatorname{sen} \omega(0) + C \omega \cos \omega(0)$$

De donde:

$$x(0) = x_o = B + 0$$

y

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o = 0 + C \omega$$

Por lo tanto:

$$B = x_o \qquad y \qquad C = \frac{\dot{x}_o}{\omega}$$

Sustituyendo las dos constantes B y C en la ecuación 2.35, nos queda:

$$x(t) = x_o \cos \omega t + \frac{\dot{x}_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \tag{2.36}$$

La expresión anterior puede escribirse en forma más compacta introduciendo la noción de ángulo de fase. El método a seguir permite sumar las funciones cos y sen de la misma frecuencia angular ω. Así pues, recordando el triángulo formado en la Figura 2-9, obtenemos el ángulo de fase:

$$\tan \theta_o = \frac{-v_{ox}}{\omega x_o} = \frac{-C}{B} \qquad (2.37)$$

Escribiendo la ecuación 2.38 en otra forma:

$$x(t) = C\left(\frac{B}{C}\cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t\right)$$

Sustituyendo la ecuación 2.37 en la ecuación anterior resulta:

$$x(t) = C\left[\frac{1}{\tan \theta_o}\cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t\right]$$

$$x(t) = C\left[\frac{-\cos \theta_o}{\operatorname{sen} \theta_o}\cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t\right]$$

$$x(t) = \frac{C}{\operatorname{sen} \theta_o}\left[-\cos \theta_o \cos \omega t + \operatorname{sen} \theta_o \operatorname{sen} \omega t\right]$$

Observando de nuevo el triángulo de la Figura 2-9, veremos que:

$$x(t) = \sqrt{B^2 + C^2}\,(\cos \omega t + \theta_o)$$

Ya que B y C son constantes, podemos escribir:

$$A^2 = B^2 + C^2$$

con lo cual la expresión de desplazamientos queda:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \theta) \qquad (2.38)$$

Donde A es la amplitud del movimiento, ya que:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left[\frac{v_o}{\omega} \right]^2}$$

que es la expresión 2.22, concordando con la Figura 2-9. Cabe mencionar que el ángulo de fase esta definido como (ecuación 2.41):

$$\theta = \tan^{-1} \left[- \frac{\dot{x}_o}{\omega x_o} \right]$$

Asi como tenemos dos constantes en la ecuación 2.36 (B y C), encontramos la misma cantidad de constantes en la ecuación 2.38, las cuales son A y θ_o. Las expresiones para poder encontrar la velocidad y la aceleración de la particula en cualquier instante t, a partir de las condiciones iniciales antes descritas, se obtienen de derivación consecutiva. Los resultados, se expresan en las gráficas de la Figura 2-10. En dicha grafica se observa que la posición de la particula se repite al cabo de cierto tiempo. El movimiento es, como ya dijimos, periodico, si para entonces ha transcurrido un tiempo t' tal que no modifique el valor del desplazamiento, es decir:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_o) = A \cos(\omega t' + \theta_o)$$

donde $t' = t + T$ por lo que la igualdad anterior queda:

$$\cos(\omega t + \theta_o) = \cos(\omega t + \omega T + \theta_o)$$

para que se cumpla lo anterior se requiere que $\omega T = 360^o = 2\pi$, por lo que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

que es la fórmula del periodo.

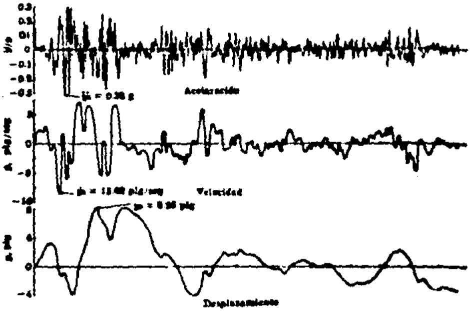


Figura 2-10 Graficas de desplazamiento, velocidad y aceleracion de una particula en cualquier instante t, con la condicion inicial t = 0.

2.2.4.- Vibraciones libres con amortiguamiento

En los sistemas vibratorios reales, encontramos que la masa tiende a detener su movimiento al paso del tiempo. La amplitud de su movimiento va decreciendo hasta hacerse nula. Esta es una caracteristica propia de los sistemas vibratorios, denominada amortiguación. Tomar en cuenta la existencia de esta fuerza de amortiguamiento nos llevará a una idealización más cercana a la realidad.

Existen esencialmente tres tipos de amortiguación, a saber:

a) Amortiguación viscosa

b) Amortiguación por fricción y

c) Amortiguación estructural

a) Amortiguación viscosa.- La amortiguación viscosa ocurre cuando el sistema vibra en un fluido tal como el agua, aire, aceite, etc. Es lineal, ya que las fuerzas cortantes generadas, son proporcionales a la velocidad, siendo su ecuación:

$$Fa = - c\ \dot{x}(t)$$

siendo c una constante que depende de las propiedades del fluido y de la geometría del sistema y $\dot{x}(t)$, la velocidad relativa de las partes dentro del amortiguador.

Es importante notar que el efecto amortiguador del aire es lineal sólo en velocidades relativamente pequeñas (que es nuestro caso), ya que para velocidades mayores la expresión cambia a la siguiente:

$$Fa = - c\ v^{n}$$

A partir de la posición de equilibrio estático, se formula la ecuación diferencial del sistema mostrado en la Figura 2-1, la cual queda:

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \qquad (2.39)$$

donde, nuevamente se puede asumir que su solución es una función del tiempo, de la forma:

$$x(t) = e^{\omega t}$$

Dividiendo la ecuación 2.39 entre m, resulta:

$$x(t) + \frac{c}{m}\,x(t) + \frac{k}{m}\,x(t) = 0$$

Sustituyendo k/m por su valor ω^2 y utilizando el operador lineal, se tiene:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\,\lambda + \omega^2 = 0$$

De lo cual se obtienen sus dos raices como sigue:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\dfrac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{m}\right)^2 - 4\,\omega^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2\,m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2\,m}\right)^2 - \omega^2} \qquad (2.40)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación 2.39 es, en efecto, del tipo de la ecuación 2.40 y tiene dos partes, puesto que hay dos valores para λ. La solución general es pues:

$$x(t) = B\, e^{\lambda_1 t} + C\, e^{\lambda_2 t} \qquad (2.41)$$

donde B y C son constantes que dependen de la condiciones iniciales de la vibración. La ecuación 2.41 es la solución formal, sin embargo, esta ecuación puede tomar formas distintas, dependiendo de los valores de λ_1 y λ_2.

Supongamos en primera instancia que el valor del segundo término de la solución 2.44 toma el valor de cero:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2\,m}\right)^2 - \omega^2} = 0 \qquad (2.42)$$

lo que depende de las condiciones que rijan en el sistema vibratorio. La ecuación 2.42 nos llevará a tener:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2\,m} \qquad (2.43)$$

esto es, una sola solución para una ecuación que requiere de dos de ellas, por lo cual la ecuación 2.41 se transformará en:

$$x(t) = B\, e^{\lambda_1 t} + t\, C\, e^{\lambda_2 t} \qquad (2.44)$$

ya que corresponde al caso en el que una de las raices (λ_i) de la ecuación característica es de multiplicidad n.

Desarrollando la ecuación anterior, se tiene :

$$x(t) = (B + tC)e^{\lambda t} \tag{2.45}$$

El coeficiente λ tomará la forma c/2m, sin embargo haremos uso de la ecuación 2.42, de lo cual resulta:

$$c_{cr} = 2\ m\ \omega \tag{2.46}$$

donde hemos cambiado el coeficiente c por c_{cr}, llamado éste último coeficiente de amortiguamiento critico para diferenciarlo del coeficiente de amortiguamiento c que aparece en la primera parte de la solución 2.40. Adicionalmente haremos:

$$\beta = c/c_{cr} \tag{2.47}$$

que es el factor de amortiguamiento, representado en forma porcentual. Así, sustituyendo la ecuación 2.46 en la ecuación 2.47 tenemos:

$$\beta = \frac{c}{2\ m\ \omega}$$

o

$$\beta\ \omega = \frac{c}{2\ m} \tag{2.48}$$

Y sustituyendo 2.48 en 2.40 resulta:

$$\lambda_{1,2} = -\beta\,\omega \pm \sqrt{\beta^2\,\omega^2 - \omega^2}$$

o

$$\lambda_{1,2} = -\beta\,\omega \pm \omega\sqrt{\beta^2 - 1} \qquad (2.49)$$

El segundo término de la solución 2.49 es la frecuencia natural amortiguada:

$$\omega_a = \omega\sqrt{\beta^2 - 1} \qquad (2.50)$$

Así pues, la solución 2.41 toma formas distintas dependiendo del valor tanto de λ_1 como λ_2, o más concretamente, del valor de la frecuencia natural amortiguada ω_a, que como se puede observar, depende a su vez del valor β, para lo cual tomaremos los siguientes tres casos:

1) Cuando $\beta = 1$, ω_a toma el valor de cero y la amortiguación es crítica (β = 100%). Los valores de λ son iguales a $-\omega$ y la solución 2.41 ya no es valida para la ecuación original 2.39, ya que al reducirse en un solo término a la variable t, no puede satisfacer simultaneamente las dos condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, por lo que se asume una nueva solución de la forma 2.44 o 2.45. La gráfica de esta ecuación se muestra en la Figura 2-11, siendo su movimiento no oscilatorio y retornando a su posición original en el menor tiempo posible, es decir, sin vibración. Esto mismo se puede ver en la ecuación, ya que no contiene funciones periodicas y, además,

presenta exponenciación negativa, es decir, decreciente en el tiempo.

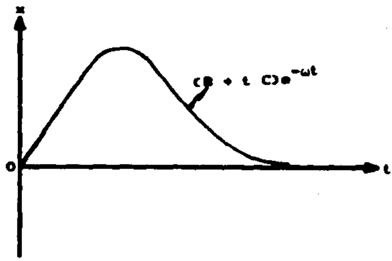


Figura 2-11 Grafica del amortiguamiento crítico. Para $t = 0$, $x(t) = x_0$.

2) Cuando $\beta > 1$, ω toma valores positivos dentro del radical. A este amortiguamiento se le conoce como hipercrítico o movimiento sobreamortiguado. En este caso las dos raíces son reales y su solución si se podrá plantear a partir de la ecuación 2.41, siendo su gráfica la mostrada en la Figura 2-12. Nuevamente se trata de un movimiento aperiodico y su solución es la correspondiente a la ecuación 2.40. Así pues, sustituyendo la ecuación 2.40 en la ecuación 2.41 resulta:

$$x(t) = B\,e^{-\beta\omega t + \omega\sqrt{\beta^2-1}\;t} + C\,e^{-\beta\omega t - \omega\sqrt{\beta^2-1}\;t} \qquad (2.51)$$

este sistema retorna a su posición de equilibrio sin vibrar, en un lapso de tiempo mayor al del caso del amortiguamiento crítico.

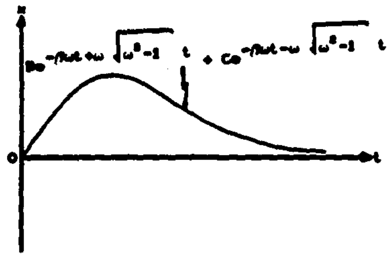


Figura 2-12 Grafica del amortiguamiento hipercritico

3) Cuando $\beta < 1$, ω toma valores negativos dentro del radical, por lo que se volverá imaginario, es decir, la ecuación 2.50 se tranformará en:

$$\lambda_{1,2} = -\beta\omega \pm \omega i\sqrt{1-\beta^2}$$

por lo que:

$$x(t) = C_1\, e^{-\beta\omega t \,+\, \omega i\sqrt{1-\beta^2}\; t} + C_2\, e^{-\beta\omega t \,-\, \omega i\sqrt{1-\beta^2}\; t}$$

o

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}\,(C_1\, e^{+\omega_a i t} + C_2\, e^{-\omega_a i t}) \qquad (2.52)$$

Este es el caso más común de las estructuras, ya que se han encontrado valores de factores de amortiguamiento viscoso menores al 20% (0.2), por lo que se desarrollará aún más su solución. Recordando la formula de Euler 2.34 y sustituyendola en la ecuación 2.52 se tiene:

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}\,(C_1 \cos \omega_a t + C_1\, i \,\mathrm{sen}\, \omega_a t + C_2 \cos \omega_a t - C_2\, i\, \mathrm{sen}\, \omega_a t)$$

o

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}\,(B \cos \omega_a t + C\, \mathrm{sen}\, \omega_a t) \qquad (2.53)$$

Por similitud con la ecuación 2.38 obtenemos:

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}\,(A \cos(\omega_a t + \theta_0))$$

o

$$x(t) = A\, e^{-\beta\omega t} \cos(\omega_a t + \theta_o) \qquad (2.54)$$

A este tipo de amortiguamiento se le conoce como subcritico o movimiento subamortiguado. En la Figura 2-13 se puede ver que se trata de un movimiento periodico, el cual va perdiendo amplitud segun lo indica el término exponencial de la ecuación 2.54. Cabe recordar que el factor A no es otra cosa que la suma de los cuadrados de los factores B y C, tal como se encontro en el caso de las vibraciones libres sin amortiguamiento. Así pues, la manera más fácil de encontrar dicho factor es a partir de las ecuaciones 2.53 y su derivada:

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta\omega t} \Big[- B\, \omega_a \,\mathrm{sen}\,(\omega_a t) - B\, \beta\, \omega \cos(\omega_a t) + C\, \omega_a \cos(\omega_a t) - C\, \beta\, \omega_a \,\mathrm{sen}\,(\omega_a t) \Big]$$

para $t = 0$, $x(0) = x_o$ y $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$, por lo que de la ecuación 2.53 resulta:

$$x(0) = x_o = B$$

y de su derivada:

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o = C\, \omega_a - B\, \beta\, \omega$$

por lo que:

$$C = \frac{\dot{x}_o + x_o \beta \omega}{\omega a}$$

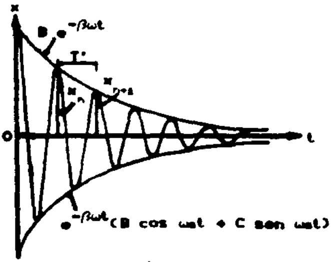


Figura 2-13 Grafica del amortiguamiento subcritico.

Debido a que los factores de amortiguamiento son comunmente pequeños suele despreciarse dicho efecto, facilitando así el análisis dinámico. Esto es conveniente sobre todo en un sistema vibratorio de varios grados de libertad. Lo anterior lo podemos comprobar dando valores de β inferiores a 20% y obteniendo con ello el valor de la frecuencia angular del sistema amortiguado. Veremos como el valor de ωa es muy similar al valor de ω, sin embargo la variación en la amplitud será considerable. Se puede apreciar en la Figura 2-13 como va perdiendo amplitud el movimiento vibratorio, (teoricamente hasta el infinito) manteniendose un periodo en el cual, al igual que en las vibraciones libres sin amortiguamiento, se presentan máximos desplazamientos. Así, tenemos que la condición de máximo o mínimo es que:

$$x(t) = 0$$

La expresión de $\dot{x}(t)$ se obtendrá a partir de derivar la ecuación 2.84:

$$\dot{x}(t) = A\, e^{-\beta \omega t} \left[\beta\, \omega . \cos\, (\omega a t + \theta_o) + \omega a\, \mathrm{sen}\, (\omega a t + \theta_o) \right] = 0$$

de lo cual obtenemos que:

$$\beta\, \omega\, \cos\, (\omega a t + \theta_o) + \omega a\, \mathrm{sen}\, (\omega a t + \theta_o) = 0$$

Dividiendo todo entre $\cos\, (\omega a t + \theta_o)$ y despejando:

$$\tan\, (\omega a t + \theta_o) = -\frac{\beta\, \omega}{\omega a} = -\frac{\beta}{1 - \beta^2}$$

Esta expresión es la cantidad para la cual se anula la ecuación de la velocidad. Los maximos y minimos ocurren pues para valores:

$$\omega a t = \tan^{-1} \left[-\frac{\beta}{1 - \beta^2} \right] - \theta_o + n\, \pi$$

con $n = 0, 1, 2, \ldots,$

y por consiguiente, los máximos tienen un periodo $Ta = 2\, \pi \,/\, \omega a$.

Dadas unas condiciones iniciales es posible graficar el movimiento vibratorio (Figura 2-13). En dicha gráfica podemos observar un decremento proporcional entre amplitudes consecutivas. veamos; teniendo en cuenta que el amortiguamiento lo provoca el término $A\, e^{-\beta \omega t}$, resulta:

$$A_1 = A\,e^{-\beta\omega t} \quad \text{y} \quad A_2 = A\,e^{-\beta\omega t'}$$

Como medida práctica del decremento de la amplitud se utiliza la razón entre dos máximos consecutivos:

$$\omega t - \omega t' = 2\pi$$

luego, $\cos(\omega t + \theta_o) = \cos(\omega t' + \theta_o)$, por consiguiente:

$$R = \frac{A_2}{A_1} = \frac{e^{-\beta\omega(t+T)}}{e^{-\beta\omega t}} = e^{-\beta\omega T} = e^{-\beta\omega 2\pi/\omega_a} = e^{-2\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2}}$$

Con el fin de evitar la exponencial se define el decremento logarítmico como la cantidad:

$$\ln R = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = -\frac{2\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

de donde el valor de β se obtiene por proceso iterativo:

$$\beta_{i+1} = - \frac{\ln R \sqrt{1 - \beta^2_i}}{2\pi}$$

Como se puede apreciar, al tener:

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-2\pi\beta/\sqrt{1-\beta^2}}$$

podemos desarrollar el factor $\sqrt{1-\beta^2}$ como la siguiente serie:

$$(1-\beta^2)^k = 1 - k\,\beta^2 - \frac{k(k-1)}{2\,!}(\beta^2)^2 - \ldots - \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n\,!}(\beta^2)^n$$

para todo número real k.

Ya que β es pequeño, se puede aproximar la serie con los dos primeros términos sin problema de grandes errores, por lo que:

$$e^{-2\pi\beta/(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}$$

Para reducir, separaremos el término:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\beta^2}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\beta^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\beta^2}{1 + \frac{1}{2}\beta^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\beta^2}{1 - \frac{1}{4}\beta^4}$$

Si de la serie sólo tomamos los dos primeros términos significa que $\frac{1}{4}\beta^4$ es aproximadamente cero, por lo que:

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-2\pi\beta(1 + \frac{1}{2}\beta^2)}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = D \qquad \text{donde} \qquad D = e^{-2\pi\beta(1 + \frac{1}{2}\beta^2)}$$

Cuando se calcula la relación A_3/A_1, el tiempo transcurrido para la amplitud A_3 será de $t' = 2T$. El desarrollo de la fórmula para esta relación será la misma, y sólo variará el exponente 2π por 4π.

$$\frac{A_3}{A_1} = e^{-4\pi\beta(1 + \frac{1}{2}\beta^2)} = D^2$$

En general se tiene:

$$Dj = \frac{A_{j+1}}{A_1}$$

Donde podemos ver que las amplitudes decrecen segun una progresión geométrica.

b) Amortiguamiento por fricción.- El amortiguamiento por fricción o también llamado no lineal, es causada por el movimiento de un cuerpo sobre una superficie seca. La fricción que se genera trata de detener al cuerpo, creandose una fuerza prácticamente constante y proporcional al peso del cuerpo, siendo su sentido inverso al de la velocidad. La ecuación es la siguiente:

$$Fa = \mu N$$

donde μ es el coeficiente de fricción, su valor depende de las superficies de contacto y N es el peso del cuerpo.

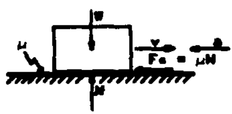


Figura 2-16 Movimiento de una masa sobre una superficie fija.

Experimentalmente se determinan dos valores para μ, cuando la masa está en reposo y cuando está en movimiento. En lo que respecta al siguiente desarrollo emplearemos el coeficiente μ dinámico, es decir, cuando la masa se encuentra en movimiento.

La Figura 2-14 muestra un cuerpo en contacto directo con una superficie sólida y sujeto por un resorte de rigidez k. Del diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2-15, para el primer tramo, podemos formular nuestra ecuación del movimiento, la cual partiendo de la segunda ley de Newton, $F = m\, a$ resulta:

$$F_r + F_e = m\, a \tag{2.55}$$

donde F_r es de signo contrario al de la posición que ocupe la masa, siendo su ecuación la conocida por la ley de Hooke y F_e, como ya se mencionó, toma el signo contrario al de la velocidad que tenga la masa. Por lo que para los tramos 3º y 4º de la Figura 2-16, la ecuación 2.55 se transforma en:

$$- k\, x(t) + F_e = m\, \ddot{x}(t)$$

o sea:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = - \frac{F_e}{m} \tag{2.56}$$

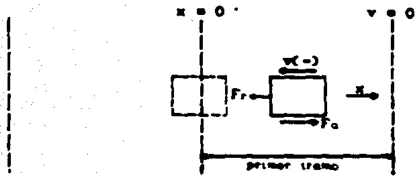


Figura 2-19 Diagrama de cuerpo libre para una masa en movimiento. Primer tramo.

La solución de esta ecuación diferencial no homogenea se obtiene con el principio de superposición, el cual nos dice que:

$$Y(t) = Y_c(t) + Y_p(t) \tag{2.57}$$

Utilizando el método de Variación de Parámetros, $Y_c(t)$ se determina a partir de la ecuación homogenea asociada, la cual es:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

y cuya solución es (ver ecuación 2.33):

$$Y_c(t) = C_1 e^{+\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$$

sólo nos queda por determinar la ecuación $Y_p(t)$, la cual dice:

$$Y_p(t) = U(t)\, Y_1(t) + V(t)\, Y_2(t)$$

siendo $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ las soluciones de la ecuación homogenea asociada $Y_c(t)$, por lo que la ecuación anterior queda:

$$Y_p(t) = U(t)\, e^{+\omega i t} + V(t)\, e^{-\omega i t} \qquad (2.58)$$

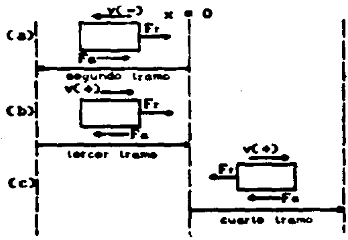


Figura 2-16 Diagrama de cuerpo libre para una masa en movimiento. Segundo, tercero y cuarto tramos.

El problema ahora consiste en encontrar $U(t)$ y $V(t)$, demostrando que la ecuacion 2.58 es una solución particular de la ecuación 2.56 si se cumple que:

$$\begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'(t) \\ V'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix} \qquad (2.59)$$

Sustituyendo $q(t)$, $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ con sus respectivas derivadas, resulta:

$$\begin{bmatrix} e^{+\omega_i t} & e^{-\omega_i t} \\ \omega_i\, e^{+\omega_i t} & -\,\omega_i\, e^{-\omega_i t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'(t) \\ V'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{F_o}{m} \end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

Obteniendo la inversa de la primera matriz y despejandola del sistema 2.60:

$$\begin{bmatrix} U'(t) \\ V'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\, e^{+\omega_i t}} & \dfrac{1}{2\, \omega_i\, e^{+\omega_i t}} \\ \dfrac{e^{+\omega_i t}}{2} & -\dfrac{e^{+\omega_i t}}{2\, \omega_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{F_o}{m} \end{bmatrix}$$

De donde resulta que:

$$U'(t) = -\frac{F_o}{2\, m\, \omega_i\, e^{+\omega_i t}} \qquad y \qquad V'(t) = \frac{F_o\, e^{+\omega_i t}}{2\, m\, \omega_i}$$

Integrando las variables anteriores resulta:

$$U(t) = -\frac{F_e\, e^{-\omega i t}}{2\, m\, \omega^2} \qquad y \qquad V(t) = -\frac{F_e\, e^{+\omega i t}}{2\, m\, \omega^2}$$

Sustituyendo éstas últimas variables en la ecuación 2.58 y desarrollandola, resulta:

$$Y_p(t) = -\frac{F_e}{m\, \omega^2}$$

Por lo que la solución a la ecuación 2.58 es:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_e}{m\, \omega^2} \qquad (2.61)$$

Las constantes C_1 y C_2 de la ecuación 2.60 dependen de las condiciones iniciales. Así pues tomaremos para $t = 0$, $x(0) = x_o$ y $\dot{x}(0) = 0$, por lo que la ecuacion 2.61 se transforma en:

$$x(t) = (x_o + \frac{F_e}{m\, \omega^2}) \cos \omega t - \frac{F_e}{m\, \omega^2} \qquad (2.62)$$

Para los tramos 1 y 2, el signo de la fricción es contrario al caso de los tramos 3 y 4, por lo que a la ecuacion 2.54 le debemos de cambiar el signo, quedandonos:

$$x(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_e}{m}$$

siendo su solución (para las mismas condiciones iniciales):

$$x(t) = (x_o - \frac{Fa}{m\,\omega^2}) \cos \omega t + \frac{Fa}{m\,\omega^2} \qquad (2.63)$$

Por inspección de las ecuaciones 2.62 ó 2.63 se puede ver que el periodo de este movimiento sigue siendo $T = 2\pi/\omega$. Su gráfica se muestra en la Figura 2-17, donde cabe recordar que debe utilizarse rangos distintos para cada ecuación (por su dependencia de los tramos utilizados). La amplitud del movimiento se ve disminuida en $4\ Fa / (m\ \omega^2)$ por cada ciclo, llegando a detenerse cuando $Fa < k\ x_o$.

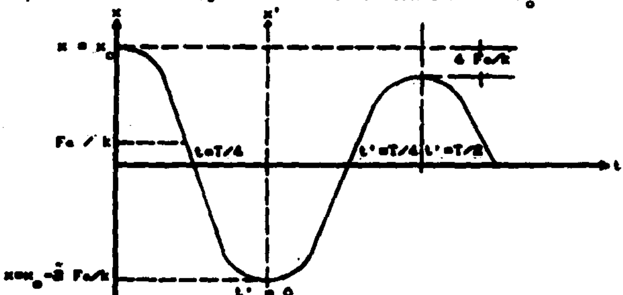


Figura 2-17 Gráfica de la vibración libre con amortiguamiento por fricción. Para $t = 0$ $x(t) = x_o$, para $t = T/4$ $x(t) = Fa/(m\omega^2)$ (la masa aun no pasa por la posición de equilibrio), para $t = T/2$ $x(t) = -(x_o - 2Fa/(m\omega^2))$ (la masa aun no se detiene a una distancia x_o).

c) Amortiguamiento estructural.- En este caso, las fuerzas amortiguadoras son proporcionales a las deformaciones de la estructura, las que a su vez, en el caso de un sistema elástico, son proporcionales a las fuerzas elásticas internas, Pe, es decir:

$$P_a = \iota \rho P_e$$

en donde ρ es una constante de proporcionalidad, e ι es la unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$). Para la mayoría de las estructuras ρ se puede tomar como 0.08.

2.2.5.- Vibraciones forzadas

Consideremos ahora la posibilidad de que nuestro sistema vibratorio se le adicione energía mediante la aplicación de alguna fuerza externa (Figura 2-10). En este caso y partiendo de nuevo del equilibrio dinámico, nos encontramos con una ecuación diferencial lineal no homogenea, la cual la podemos resolver con el principio de superposición, tal como lo hicimos para las vibraciones libres con amortiguamiento por fricción.

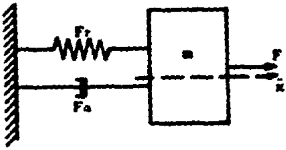


Figura 2-18 Masa sujeta por un resorte de rigidez k, atenuada por un amortiguador de valor c y excitada por una fuerza periodica.

En este caso trataremos tres tipos de fuerzas externas:

a) Excitación armónica

b) Excitación cualquiera

c) Excitación en la base

a) Excitación armónica.- La fuerza perturbadora es de tipo periódico provocada en la masa. Por ejemplo si ponemos a girar un cilindro con una masa fija en un extremo (ver Figura 2.19) de tal manera que la fuerza ejercida Fy es la correspondiente al movimiento armónico simple, (ver ecuaciones 2.16 y 2.24), de tal manera que la ecuación para las vibraciones forzadas sin amortiguamiento es la siguiente:

$$m\ \ddot{x}(t) + k\ x(t) = m\ \varphi^2\ r\ \cos\ (\varphi t + \phi_o)$$

Donde hemos cambiando los nombres de las variables, φ por ω y ϕ por θ. Dividiendo entre m y recordando que $\omega^2 = k/m$:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\ x(t) = \varphi^2\ r\ \cos\ (\varphi t + \phi_o) \qquad (2.64)$$

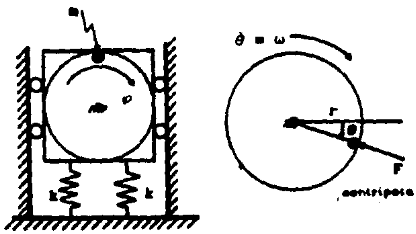


Figura 2.10 Representacion fisica de la excitacion armonica. $F_y = F_o \cos(\varphi t + \phi_o)$, siendo $F_o = m\varphi^2 r$.

La solución de la ecuación 2.64, por el método de Variación de Parámetros es, para $Y_c(t) = C_1\ e^{+\omega i t} + C_2\ e^{-\omega i t}$ y para $Y_p(t) = U(t)\ e^{+\omega i t} + V(t)\ e^{-\omega i t}$, tal como lo hicimos para las Vibraciones Libres con Amortiguamiento por Fricción, sólo que ésta vez el sistema de ecuaciones será (ver ecuaciones 2.59 y 2.60):

$$\begin{bmatrix} e^{+\omega_i t} & e^{-\omega_i t} \\ \omega_i\, e^{+\omega_i t} & -\,\omega_i\, e^{-\omega_i t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'(t) \\ V'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_o) \end{bmatrix}$$

Obteniendo la inversa de la primera matriz encontramos los valores de $U'(t)$ y $V'(t)$:

$$U'(t) = \frac{\varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_o)}{2\, \omega_i\, e^{+\omega_i t}} \quad y \quad V'(t) = -\frac{\varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_o)}{2\, \omega_i\, e^{-\omega_i t}}$$

Integrando las dos soluciones anteriores, obtenemos:

$$U(t) = \frac{\varphi^2\, r}{2\, \omega_i\, (\,\omega_i^2 + \varphi^2\,)\, e^{+\omega_i t}} \left[\varphi \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_o) - \omega_i \cos(\varphi t + \phi_o)\right]$$

$$V(t) = -\frac{\varphi^2\, r\, e^{+\omega_i t}}{2\, \omega_i\, (\,\omega_i^2 + \varphi^2\,)} \left[\varphi \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_o) + \omega_i \cos(\varphi t + \phi_o)\right]$$

Por lo que:

$$Y_p(t) = \frac{\varphi^2\, r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \cos(\varphi t + \phi_o) \qquad (2.66)$$

Y la solucion a la ecuación 2.64 es:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{\varphi^2 r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \cos (\varphi t + \phi_o)$$

Para encontrar las constantes C_1 y C_2 derivaremos la ecuacion anterior una vez con respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = -\omega C_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega C_2 \cos \omega t - \frac{\varphi^3 r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \operatorname{sen} (\varphi t + \phi_o)$$

Para la condición $t = 0$ resulta:

$$C_1 = x_o - \frac{\varphi^2 r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_o}{\omega}$$

Por último, sustituyendo estas constantes en la ecuación del desplazamiento:

$$x(t) = x_o \cos \omega t + \frac{\dot{x}_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{\varphi^2 r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \left[\cos(\varphi t + \phi_o) - \cos \omega t\right] \qquad (2.68)$$

Podemos dividir, la ecuación 2.68 en dos términos. Uno de ellos es la solución a las vibraciones libres sin amortiguamiento (término $x_o \cos \omega t + \dot{x}_o/\omega \operatorname{sen} \omega t$), el cual como recordaremos, transformamos en $A \cos (\omega t + \theta_o)$, llamandole a la variable A amplitud del movimiento armónico simple, por lo que el término $\varphi^2 r/\omega^2(1-(\varphi/\omega)^2)$ también es una amplitud. Así, el otro término es la fuerza excitatriz que recibe la masa, afectada por las condiciones iniciales y por una amplitud, a la cual llamaremos x_o, dependiente de las frecuencias tanto del sistema como de dicha fuerza. De tal manera que la ecuación anterior quedará:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_o) + x_o (\cos(\varphi t + \phi_o) - \cos \omega t) \quad (2.67)$$

siendo:

$$x_o = \frac{\varphi^2 r}{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} \quad (2.68)$$

Estudiemos más detenidamente la ecuación 2.68.

Cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz (φ) es mucho menor respecto a la del sistema (ω), el término $x_o = \varphi^2 r/\omega^2$ y cuando sucede lo contrario $x_o = 0$. Para el caso en el que las frecuencias tienden a igualarse, el valor de x_o tiende a infinito, es entonces cuando se presenta la resonancia. Sabiendo que:

$$F_o = m \varphi^2 r \qquad y \qquad m = \frac{k}{\omega^2}$$

por lo que:

$$\frac{F_o}{k} = \frac{\varphi^2}{\omega^2} \tag{2.69}$$

Sustituyendo 2.69 en 2.68:

$$x_o = \frac{F_o/k}{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]} = \frac{x}{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]}$$

Físicamente, el valor de F_o/k representa lo que se alargaría el resorte si estuviera sometido a una fuerza igual a la amplitud F_o de la excitación. De esta manera se puede graficar la acción de la resonancia colocando ambas amplitudes de un sólo lado de la ecuación para mantener como variables independientes a las frecuencias (Figura 2-20).

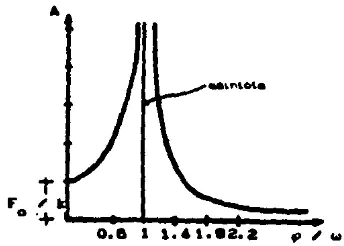


Figura 2-20 Representación gráfica de la resonancia

Resulta interesante el caso en el que el movimiento se inicia sólamente por la acción de la fuerza excitatriz, es decir, que tanto el desplazamiento como la velocidad iniciales son iguales a cero. En este caso la ecuación 2.67 se transforma en:

$$x(t) = \frac{\varphi^2 r}{\omega^2} \left[\frac{\cos(\varphi t + \phi_0) - \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2} \right]$$

Como podemos observar al igualarse las frecuencias, la ecuación anterior se convierte en una indeterminación por lo que aplicaremos la regla de L'Hôpital, la cual nos dice que:

$$\lim_{\varphi \to \omega} x(t) = \frac{\varphi^2 r}{\omega^2} \left[\frac{-t \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_0)}{-\frac{2\varphi}{\omega^2}} \right]$$

Por lo que la función quedará:

$$\lim_{\varphi \to \omega} x(t) = \frac{\varphi r}{2} t \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_0) \qquad (2.70)$$

Esta ecuación está formada por la función seno con amplitudes limitadas por la recta $\varphi rt/2$, creciendo infinitamente conforme transcurre el tiempo. La Figura 2-21 muestra cómo se comporta una masa entrada en resonancia.

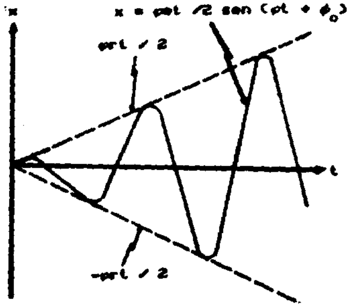


Figura 2-21 Grafica de la resonancia debida a una fuerza excitatriz senoidal.

Para el caso en el que colocamos un amortiguador en el sistema de la Figura 2-18, la ecuación 2.64 se transforma en:

$$\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varphi^2 r \cos(\varphi t + \phi_o) \qquad (2.71)$$

Cuya solución complementaria para el amortiguamiento subcrítico es la ecuación 2.52. Así, sólo nos resta encontrar la solución particular cuya expresión es $Y_p(t) = U(t)\, e^{-\beta\omega t}\, e^{+\omega a i t} + V(t)\, e^{-\beta\omega t}\, e^{-\omega a i t}$ y su sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} e^{-\beta\omega t}\, e^{+\omega_1 t} & e^{-\beta\omega t}\, e^{-\omega_1 t} \\ (-\beta\omega + \omega_{e1})e^{-\beta\omega t}\, e^{+\omega_1 t} & (-\beta\omega - \omega_{e1})e^{-\beta\omega t}\, e^{-\omega_1 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'(t) \\ V'(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_0) \end{bmatrix}$$

Nuevamente, invirtiendo la primera matriz obtendremos los valores de U'(t) y V'(t):

$$U'(t) = \frac{\varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_0)}{2\, \omega_{e1}\, e^{-\beta\omega t}\, e^{+\omega_{e1} t}} \quad y \quad V'(t) = -\frac{\varphi^2\, r \cos(\varphi t + \phi_0)}{2\, \omega_{e1}\, e^{-\beta\omega t}\, e^{-\omega_{e1} t}}$$

Integrando las dos soluciones anteriores, obtenemos:

$$U(t) = \frac{\varphi^2\, r\, e^{+\beta\omega t}\, e^{-\omega_{e1} t}}{2\, \omega_1 \left[(\beta\omega - \omega_{e1})^2 + \varphi^2 \right]} \left[(\beta\omega - \omega_{e1}) \cos(\varphi t + \phi_0) + \varphi \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_0) \right]$$

$$V(t) = -\frac{\varphi^2\, r\, e^{+\beta\omega t}\, e^{+\omega_{e1} t}}{2\, \omega_1 \left[(\beta\omega + \omega_{e1})^2 + \varphi^2 \right]} \left[(\beta\omega + \omega_{e1}) \cos(\varphi t + \phi_0) + \varphi \operatorname{sen}(\varphi t + \phi_0) \right]$$

Sustituyendo y desarrollando se obtiene:

$$Y_p(t) = \frac{\varphi^2 \, r \left[\left((\beta\omega)^2 - \varphi^2 - \omega a_t^2 \right) \cos (\varphi t + \phi_o) + 2\beta\omega\varphi \operatorname{sen} (\varphi t + \phi_o) \right]}{(\beta\omega)^4 - 2(\omega a_t \beta\omega)^2 + 2(\beta\omega\varphi)^2 + 2(\omega a_t \varphi)^2 + \omega a_t^4 + \varphi^4}$$

Donde los factores $(\beta\omega)^2-\varphi^2-\omega a_t^2$ y $2\beta\omega\varphi$ son las amplitudes de las funciones periodicas correspondientes; de tal manera que al introducir el ángulo de fase resulta:

$$Y_p(t) = \frac{\varphi^2 \, r \cos (\varphi t + a_o)}{\omega^2 \sqrt{\left[1 - \left[\frac{\varphi}{\omega}\right]^2 \right]^2 + 4\, \beta^2 \left[\frac{\varphi}{\omega}\right]^2}} \qquad (2.72)$$

Donde:

$$a_o = \tan^{-1} \left[\frac{-2\beta\omega\varphi}{(\beta\omega)^2 - \varphi^2 - \omega a_t^2} \right] + \phi_o$$

Sumando las soluciones complementaria y particular resulta:

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}(C_1 \cos \omega a t + C_2 \operatorname{sen} \omega a t) + \frac{\varphi^2 \, r \cos (\varphi t + a_o)}{\omega^2 \sqrt{\left[1 - \left[\frac{\varphi}{\omega}\right]^2 \right]^2 + 4\, \beta^2 \left[\frac{\varphi}{\omega}\right]^2}} \qquad (2.73)$$

La gráfica de la ecuación 2.73 la podemos apreciar en la Figura

2-22. Como podemos apreciar, la solución complementaria es la correspondiente a las vibraciones libres amortiguadas, en la cual, independientemente de sus características de vibración, llega a detenerse conforme pasa el tiempo, por lo que suele llamársele estado transitorio de la vibración. Ahora bien, la solución particular tiene dos coeficientes fácilmente identificables, que son:

$$\frac{\varphi^2 r}{\omega^2} = \frac{F_o}{k} = x$$

tal como lo habíamos visto en la ecuación 2.68 y:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]^2 - 4\,\beta^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}} \qquad (2.74)$$

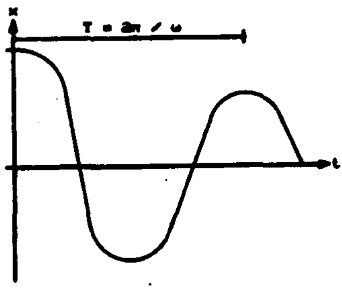


Figura 2-22 Grafica de la vibracion forzada senoidalmente con amortiguamiento.

A este término se le conoce como factor dinámico. Si colocamos de un sólo lado los desplazamientos la relación se llamará factor de amplificación y representa un multiplicador que, aplicado a la deflexión estática, da la amplitud o máxima deflexión dinámica. Para poder visualizar mejor la importancia del factor dinámico se presenta la Figura 2-23, donde se muestra la gráfica de la resonancia para diferentes valores de β.

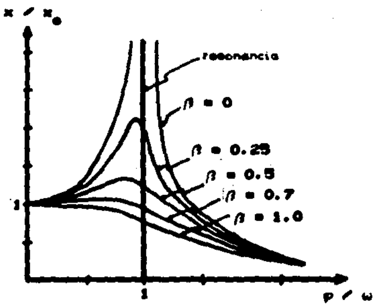


Figura 2-23 Grafica del factor dinamico

b) Excitación cualquiera.- Hemos llegado al planteamiento de una ecuación que determina la posición de una partícula para cualquier instante excitada por una fuerza variable en el tiempo, como sería el caso de un sismo. La gráfica de dicha fuerza se muestra en la Figura 2-24.

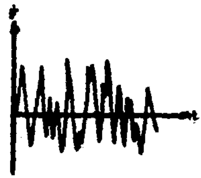


Figura 2-24 Gráfica de una fuerza variable con el tiempo

Existen diversos métodos para poder encontrar la respuesta de un sistema bajo este tipo de fuerza. El método seguido por nosotros será la Integral de Duhamel.

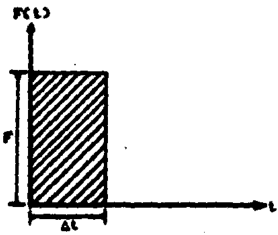


Figura 2-25 Respuesta de un sistema a una carga impulsiva

Considérese un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, excitado por una fuerza de magnitud F_o durante un lapso de tiempo muy breve de tal manera que no alcance a producir oscilaciones entretenidas (Figura 2-25). Bajo estas circunstancias, el principio de conservación del movimiento dice que la cantidad de movimiento debe ser igual al impulso que la imprime, entonces:

$$F_o \, \Delta t = m \, \Delta v$$

Si consideramos que la fuerza empieza a actuar en $t = 0$ la ecuación anterior toma la forma:

$$F_o \, \Delta t = m \, v$$

o lo que es lo mismo:

$$v = \dot{x}_o = \frac{F_o \, \Delta t}{m} \tag{2.75}$$

Como el impulso es insignificante, el desplazamiento inicial de la masa que ocurre durante el intervalo Δt también lo es. Así mismo, el movimiento después de dicho intervalo de tiempo es una vibración libre, siendo su ecuación la correspondiente a la 2.38 y de las condiciones iniciales que acabamos de ver, se tiene:

$$x(t) = \frac{F_o \, \Delta t}{m \, \omega^2} \operatorname{sen} \omega t \tag{2.76}$$

Ahora bien, si consideramos una fuerza variable con el tiempo, como la mostrada en la Figura 2-26, como una carga generada por una serie de impulsos cortos, la respuesta de desplazamiento debida a un incremento de carga que comienza en el tiempo τ y de duración $d\tau$, puede describirse en la forma de la ecuación 2.76 como:

$$dx = \frac{F(\tau)}{m \, \omega} \operatorname{sen} \omega \, (t - \tau) \, d\tau \tag{2.77}$$

En este caso $(t - \tau)$ es el tiempo que transcurre desde la presencia del impulso y la respuesta.

Como las ecuaciones diferenciales lineales tienen la propiedad de superponerse, la respuesta del sistema a una fuerza arbitraria es igual a la suma de las respuestas correspondientes a cada uno de los impulsos que la componen, es decir:

$$x(t) = \frac{1}{m \, \omega} \int_0^t F(\tau) \operatorname{sen} \omega \, (t - \tau) \, d\tau \tag{2.78}$$

Con este mismo razonamiento se puede demostrar que cuando el sistema tiene amortiguamiento viscoso, la ecuación para encontrar el desplazamiento en cualquier instante dado es:

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega_a}\int_0^t F(\tau)\, e^{-\beta\omega(t-\tau)}\, \operatorname{sen} \omega_a (t-\tau)\, d\tau \qquad (2.79)$$

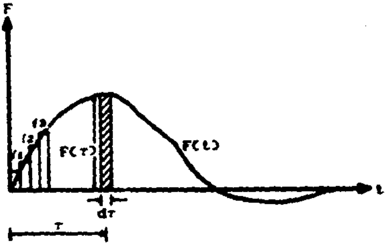


Figura 2-26 Respuesta de un sistema a una carga arbitraria

Las ecuaciones 2.78 y 2.79 son las integrales de convolución o de Duhamel. Debido a que estan basadas en el principio de superposición, sólamente son aplicables a sistemas lineales.

Como puede apreciarse, el desarrollo directo de estas integrales es bastante dificil, por lo que normalmente se utilizan métodos numéricos para su resolución.

c) Excitación en la base.- En el inciso anterior se vio como se obtienen las ecuaciones del movimiento para un sistema afectado por una fuerza cualquiera, sin embargo el problema sismico real consiste en una excitación dada a la base del sistema y no a la concentración de masa. En la Figura 2-27 se puede apreciar un marco (en el que se supone la masa concentrada en la trabe) en el momento en que sufre una excitación cualquiera en la base.

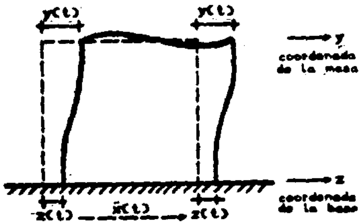


Figura 2-27 Excitacion cualquiera en la base del marco

Mientras que la estructura se desplaza una cantidad y(t), la base se desplazará otra diferente z(t). El planteamiento de las ecuaciones de fuerza se derivará del hecho de que la aceleración de la masa se tomará con referencia a la coordenada que mide su posición y(t), mientras que, tanto la rigidez como el amortiguamiento, toman la deformación y la velocidad respectivamente de las medidas relativas entre la base y la masa, por lo que la ecuación quedará:

$$m\,\ddot{y}(t) + c\,(\dot{y}(t) - \dot{z}(t)) + k\,(y(t) - z(t)) = 0$$

Si hacemos $x(t) = y(t) - z(t)$, obtenemos:

$$m\,(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

o sea:

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = -\,m\,\ddot{z}(t) \qquad (2.80)$$

Dada la semejanza de la ecuación 2.80 con las ecuaciones resueltas anteriormente para excitación en la masa, (ya que en ambos casos el desplazamiento x(t) representa la deformación relativa) se puede concluir que un sistema excitado en la base tiene el mismo comportamiento al de un sistema de base fija sometido a una fuerza excitatriz $F = - m \ddot{z}(t)$.

Como conclusión a lo anterior, se puede decir que los metodos de cálculo para excitación en la masa son válidos para resolver problemas de excitación en la base. La excitación en la base la podremos encontrar con los espectros de aceleración de sismos obtenidos.

2.3.- ESPECTRO DE DISEÑO

Hasta aquí se ha visto cómo se comportan los sistemas de un grado de libertad a una excitación cualquiera. Sin embargo el interés real esta concentrado en la obtención de la máxima respuesta que pueda presentar dicho sistema a una excitación dada. La manera de medir la fuerza actuante debida a un sismo sobre una estructura, es por medio de acelerogramas.

Figura 2-28 Acelerograma típico

Al contar con un registro de aceleraciones en la base de una estructura (Figura 2-28) podemos obtener, a base de integraciones, respuestas de velocidades y desplazamientos en ésta (Figura 2-29).

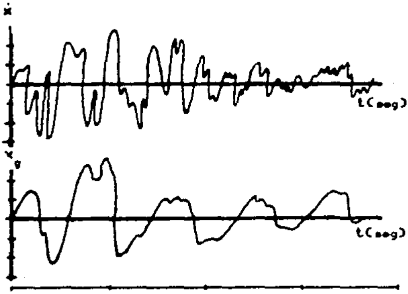


Figura 2-29 Respuestas de velocidad y desplazamiento

La integral de Duhamel aplicada a una fuerza variable con el tiempo implica un trabajo numérico largo y dificil. Sin embargo con la ayuda de las computadoras no sólo es posible obtener el desplazamiento máximo de una estruatura de un grado de libertad para un periodo determinado, sino que incluso podemos obtener cada desplazamiento máximo de estructuras con diversos periodos. En la Figura 2-30 se muestra dicha gráfica, a la cual la conocemos como espectro de respuesta. El espectro de respuesta es la gráfica amplitudes-periodos de diversas estructuras.de un grado de libertad, que mide las caracteristicas del sismo desde el punto de vista del efecto en el desplazamiento sobre dichas estructuras.

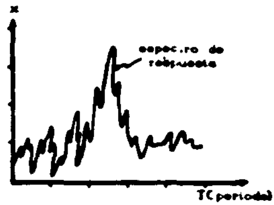


Figura 2-30 Espectro de respuesta típico

El espectro de respuesta nos brinda la opción de poder encontrar las fuerzas máximas que afectan a las estructuras a partir de sus desplazamientos máximos, y lo más importante, si contamos con una serie de acelerogramas, podemos superponer cada uno de los espectros de respuesta que con ellas se obtiene y contruir así lo que se llama espectro de diseño. Es decir que un espectro de diseño es la superposición de cada uno de los espectros de respuesta obtenidos a base de mediciones de aceleraciones en la base de las estructuras (Figura 2-31).

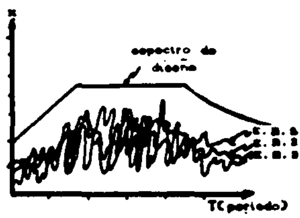


Figura 2-31 Espectro de diseño típico

En el Distrito Federal contamos con un espectro de diseño aplicable a tres zonas, mostrado en la Figura 2-32.

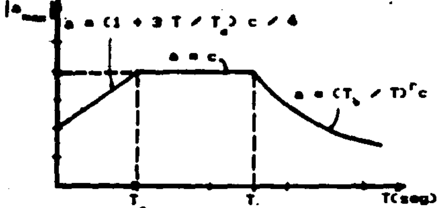


Figura 2-32 Espectro de diseño para el Distrito Federal

2.4.- SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

2.4.1.- Introducción

En incisos anteriores se estudió cómo se comporta un sistema con un grado de libertad. Sin embargo los sistemas reales, como por ejemplo la viga mostrada en la Figura 2-33, no puede ser idealizada como una masa concentrada en un punto determinado si se le calcula tanto sus frecuencias naturales como sus modos de vibración. Si ahora tratamos con un marco compuesto por diversos niveles y crujías los grados de libertad tienden a hacerse infinitos y estaremos tratando con un problema por demás complicado. Es por ello que trataremos con masas concentradas ubicadas en ciertos puntos, es decir, haremos lo que se conoce como discretización del sistema vibratorio. Para lo cual considérese el marco de la Figura 2-34 y supongamos que sus masas están concentradas en los niveles de piso.

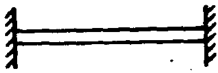


Figura 2-23 Viga empotrada

Suponiendo que las masas son excitadas y que en un momento dado sus posiciones son x_1, x_2 y x_3 sobre el eje de las X.

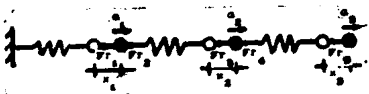


Figura 2-24 Sistema de tres grados de libertad

Entonces, las ecuaciones del movimiento a partir de la segunda ley de Newton estan dadas por:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = F_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 = F_3$$

Ordenando matricialmente las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \qquad (2.81)$$

Es importante notar que el desarrollo de estas ecuaciones fué en base a un sistema de coordenadas escogido con origen en las concentraciones de masa, por lo que a diferente sistema de coordenadas elegido las ecuaciones de movimiento variarán también. Así se hablará de acoplamiento ya sea estático o dinámico, cuando se desarrollen matrices diagonales en el sistema 2.81. En general, se plantean ecuaciones no acopladas al tener un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \qquad (2.82)$$

La ecuación anterior es una ecuación general para un sistema de tres grados de libertad con acoplamientos dinámico y estático. Para poder entender mejor el fenómeno de acoplamiento, se considera la viga soportada en resortes de la Figura 2-35.

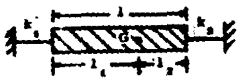
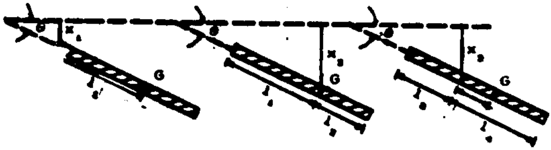


Figura 2-35 Barra rigida apoyada en dos resortes de rigidez diferente.

La viga cuenta con dos grados de libertad, desplazamiento vertical y giro, es decir, se requieren de dos coordenadas independientes para describir su posición en cualquier instante t. Se tomará como posición de referencia a la posición de equilibrio estático, el punto G como su centro de masa y como cordenadas de desplazamiento lineal y rotación al punto O.



(a) (b) (c)

Figura 2-38 Desplazamientos de la barra rígida a partir de las coordenadas escogidas.

Primeramente consideremos las coordenadas mostradas en la Figura 2-38 (a) y planteando las condiciones de equilibrio dinámico, bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos tenemos:

$$\sum F = 0 \quad ma_G + k_2(x + l_4\theta) + k_1(x - l_3\theta) = 0$$

$$\sum M_o = 0 \quad ma_G(l_1 - l_3) + k_2 l_4(x + l_4\theta) - k_1 l_3(x - l_3\theta)$$

Pero si $x_G = x + (l_1 - l_3)\theta$, entonces $\ddot{x}_G = a_G = \ddot{x} + (l_1 - l_3)\ddot{\theta}$, por lo que las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$m\ddot{x} + m(l_1 - l_3)\ddot{\theta} + (k_2 + k_1)x + (l_4 k_2 - l_3 k_1)\theta = 0$$

$$m(l_1 - l_3)\ddot{x} + m(l_1 - l_3)^2\ddot{\theta} + (k_2 l_4 - k_1 l_3)x + (k_2 l_4^2 + k_1 l_3^2)\theta = 0$$

Finalmente ordenando las ecuaciones anteriores en forma de matriz y recordando que el momento de inercia de la masa sobre el punto O está dada por $I_O = m(l_1 - l_3)^2$ tenemos:

$$\begin{bmatrix} m & m(l_1 - l_3) \\ m(l_1 - l_3) & I_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (k_2 + k_1) & (k_2 l_4 - k_1 l_3) \\ (k_2 l_4 - k_1 l_3) & (k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

En la ecuación 2.83 se aprecia que tanto la matriz de masas como la de rigidez son completas (no diagonales) y por consiguiente, sus variables se expresan simultaneamente en función de x y θ, entonces se dice que existe acoplamiento de coordenadas.

Ahora, consideremos el dibujo de la Figura 2-38 (b). El punto O lo hacemos coincidir con el centro de masa G, por lo que $l_1 = l_3$ y $l_2 = l_4$. Así la ecuación del movimiento 2.83 se transforma en:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

La ecuación 2.84 presenta un acoplamiento en la matriz de rigideces, (acoplamiento estático). Como podemos apreciar, una fuerza o una rotación que se aplique en el punto G producirá simultaneamente desplazamiento lineal y rotación. Este tipo de acoplamiento es reconocido porque la matriz de masas es diagonal y la de rigideces no lo es. En el caso de que el término $k_1 l_1$ sea igual a $k_2 l_2$ el acoplamiento de la matriz de rigideces desaparece y tanto x como θ son independientes entre si. Consecuentemente la fuerza aplicada en G no producirá rotación en la barra, mientras que la acción de un giro alrededor de G producirá rotación pura.

Por último, consideremos que el punto O se selecciona de tal manera que $k_1 l_2 = k_2 l_1$ (Figura 2-38 (c)), esto significa que si aplicamos una fuerza en el punto O y normal a la barra el movimiento de ésta será de traslación pura. En tal caso la ecuación 2.83 se transforma en:

$$\begin{bmatrix} m & m(l_1 - l_2) \\ m(l_1 - l_2) & I_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (k_2 + k_1) & 0 \\ 0 & (k_1 l_2^2 + k_2 l_1^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.85)$$

La ecuación 2.85 presenta un acoplamiento en la matriz de masas. (acoplamiento dinámico). En este caso, si aplicaramos una fuerza o una rotación en el punto O se generarían simultaneamente un desplazamiento lineal y uno rotacional. Este tipo de acoplamiento es reconocido porque la matriz de rigideces es diagonal, mientras que la de, masas no lo es.

Con lo estudiado anteriormente podemos llegar a la siguiente conclusión. El tipo de ecuaciones diferenciales para poder determinar el movimiento en un sistema de varios grados de libertad, depende únicamente del sistema de coordenadas escogido. Por otro lado, podemos desarrollar un sistema de coordenadas tal que no exista acoplamiento estático ni dinámico, lo que permitiría plantear ecuaciones independientes del movimiento. A este tipo de coordenadas se le conoce como coordenadas normales o principales y se encuentran mediante procesos de transformación matricial.

Antes de comenzar con los sistemas vibratorios, tocaremos un último tema. Al estar hablando de la matriz de rigideces, hemos mencionado que se trata de la matriz de rigidez lineal y no la común utilizada para el análisis de marcos. Esto es por considerar que se tienen desplazamientos debidos a las fuerzas generalizadas de inercia, es decir, no se consideran los desplazamientos angulares.

Así pues, de la condensación estática del planteamiento de ecuaciones por el método de rigideces, tenemos:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \\ \hline F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

O escrito de otra manera:

$$\left[M \right] = \left[K_{11} \right] \left[\varphi \right] + \left[K_{12} \right] \left[\delta \right] \tag{2.86}$$

$$\left[F \right] = \left[K_{21} \right] \left[\varphi \right] + \left[K_{22} \right] \left[\delta \right] \tag{2.87}$$

Al no estar considerando la aplicación de momentos externos, la ecuación 2.86 se transforma en:

$$\left[K \quad \right] \left[\varphi \right] + \left[K \quad \right] \left[\delta \right] = 0$$

Despejando la matriz de desplazamientos y sustituyendola en la ecuación 2.87 resulta:

$$\left[F \right] = \left(\left[K_{22} \right] - \left[K_{21} \right] \left[K_{11} \right]^{-1} \left[K_{12} \right] \right) \left[\delta \right] \qquad (2.88)$$

Donde $\left(\left[K_{22} \right] - \left[K_{21} \right] \left[K_{11} \right]^{-1} \left[K_{12} \right] \right)$ es la matriz de rigidez lineal $\left[K_{b} \right]$

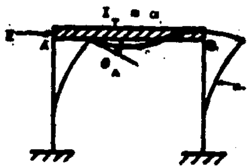


Figura 2-37 Desplazamiento de un marco con viga de rigidez infinita.

Si suponemos que la trabe de un marco es infinitamente rigida, la matriz de rigidez lineal es igual a $\left[K_{22} \right]$. Para demostrarlo considérese el marco de la Figura 2-37. Los momentos en los nudos A y B son:

$$M_A = \frac{4\ EI_v}{L}\ \theta_A - \frac{2\ EI_v}{L}\ \theta_B$$

$$M_B = \frac{4\ EI_v}{L}\ \theta_B - \frac{2\ EI_v}{L}\ \theta_A$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior y al no considerar deformación axial en las vigas $\theta_A = \varphi_A$ y $\theta_B = \varphi_B$ resulta:

$$\varphi_A = \frac{L}{6\ EI_v}\left[M_B + 2\ M_A \right]$$

$$\varphi_B = \frac{L}{6\ EI_v}\left[M_A + 2\ M_B \right]$$

Debido a que la rigidez de la viga es infinita, los giros de ésta siempre serán cero y la ecuación 2-87 se convierte en:

$$\left[F \right] = \left[K_{ss} \right] \left[\delta \right] \tag{2.89}$$

2.4.2.- Vibraciones libres sin amortiguamiento

Considerando el marco de tres niveles de la Figura 2-34, al cual no le consideraremos ni amortiguamiento ni fuerza externa, sus ecuaciones del movimiento estarán dadas por (ver ecuación 2-81):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En forma condensada la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad (2.90)$$

Convendrá, por facilidad, postular una solución a éste sistema de ecuaciones diferenciales. Recordando como solución, a las vibraciones libres sin amortiguamiento de un grado de libertad, la dada por la ecuación 2.38:

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$
$$x_2(t) = B \cos(\omega t + \theta)$$
$$x_3(t) = C \cos(\omega t + \theta)$$

siendo matricialmente su expresión:

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cos(\omega t + \theta) \qquad (2.91)$$

y su segunada derivada:

$$\left[\, \ddot{x} \,\right] = - \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \omega^2 \cos\,(\omega t + \theta) \qquad (2.92)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.91 y 2.92 en la ecuación diferencial 2.90 y simplificando el término cos $(\omega t + \theta)$ se obtiene:

$$\Big[\big[\, K \,\big] - \omega^2 \big[\, M \,\big] \Big] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.93)$$

La ecuación 2.93 representa el sistema homogeneo:

$$\left[\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

es decir:

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)\, A - k_2\, B = 0$$
$$- k_2\, A + (k_2 + k_3 - \omega^2 m_2)\, B - k_3\, C = 0$$
$$- k_3\, B + (k_3 - \omega^2 m_3)\, C = 0$$

donde las incognitas son las amplitudes A, B y C.

El sistema homogeneo planteadao, sólo tendrá una solución no nula en sus amplitudes cuando el determinante de los coeficientes de las incognitas sea nulo, es decir:

$$\det\,(\mathbb{K} - \omega^2\,\mathbb{M}) = 0$$

esto es:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - \omega^2 m_3 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma desarrollada:

$$\omega^6 - \omega^4 \left[\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} + \frac{k_3}{m_3}\right] + \omega^2 \left[\frac{(k_1+k_2)\,(k_2+k_3)}{m_1\,m_2} + \right.$$

$$\left. \frac{\omega^2\,(k_2+k_3)\,k_3}{m_2\,m_3} + \frac{\omega^2\,(k_1+k_2)\,k_3}{m_1\,m_3} - \frac{k_2^2}{m_1\,m_2} - \frac{k_3^2}{m_2\,m_3}\right] +$$

$$\frac{(k_1+k_2)\,(k_2+k_3)\,k_3 + (k_1+k_2)\,k_3^2}{m_1\,m_2\,m_3} = 0$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones característica del sistema vibratorio y los valores de ω^2 que de ella se obtienen son los valores propios de la matriz $\mathbb{K} - \omega^2\,\mathbb{M}$. Dicha ecuación característica contiene un número de raíces igual a los grados de libertad supuestos en el sistema, los cuales son siempre reales y positivos. Estos valores son las frecuencias naturales del sistema y tienen el mismo significado al dado para sistemas de un grado de libertad. La frecuencia ω_1 así obtenida, es la mayor de todas siendo la frecuancia angular fundamental.

Ya que se encontrarán un número de valores aceptables de frecuencias igual al número de grados de libertad supuesto, la solución general será una combinación lineal de soluciones del tipo de la ecuación 2.30, de tal modo que:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$$

$$x_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + B_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$$

$$x_3(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + C_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$$

Cabe hacer notar que las amplitudes no son independientes unas de otras, como lo podemos apreciar dando valores de ω_1, ω_2 y ω_3 en el sistema de ecuaciones 2.33.

Como hicimos el determinante de los coeficientes de las incognitas igual a cero, el sistema de ecuaciones se vuelve indeterminado, es decir, con un número infinito de soluciones, ya que el rango del sistema es menor que el orden. Al sustituir las frecuencias obtenidas en el sistema de ecuaciones 2.33 encontramos el vector caracteristico asociado al valor caracteristico ω_n^2. Estos vectores son los modos de vibrar y representa la configuración deformada de las masas que se mueven con igual frecuencia. Se tendrá asi una matriz singular, la cual no tendrá una solución única ni tampoco inversa.

2.4.2.1.- Propiedades de los modos

Los modos de vibración tienen algunas propiedades que nos facilitarán la solución de los sistemas de varios grados de libertad, pero antes de comenzar es conveniente demostrar la simetría de la matriz de rigideces.

Considérese una fuerza F_i que se aplica gradualmente a una estructura de modo que la energía cinética de su masa sea cero. Digamos que el desplazamiento resultante en el punto de aplicación y en la dirección de F_i es D_i. Si la estructura es elástica, la curva fuerza-desplazamiento sigue la misma trayectoria durante la carga y la descarga, como se ilustra en la Figura 2-30 (a).

Ahora supongamos que en alguna etapa de la aplicación de la carga se aumenta la fuerza F_i en ΔF_i y el aumento correspondiente en el desplazamiento D_i es ΔD_i. El trabajo realizado por este incremento de la carga es:

$$\Delta W \approx F_i \, \Delta D_i$$

lo anterior se ilustra en el rectángulo sombreado de la Figura 2-30 (a). Si los incrementos son suficientemente pequeños, puede verse que el trabajo externo total efectuado por F_i durante el desplazamiento D_i es el área que está bajo la curva entre 0 y D_i.

Cuando el material de la estructura obedece la ley de Hooke, la curva de la Figura 2-30 (a) se sustituye por la línea recta de la Figura 2-30 (b) y el trabajo que realiza la fuerza F_i se convierte en:

$$W = \frac{1}{2} F_i D_i$$

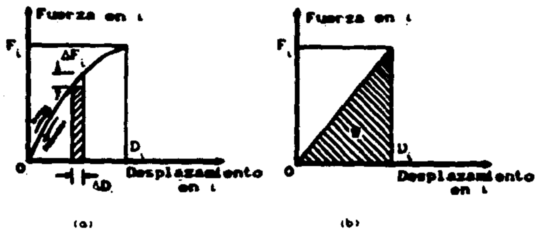


Figura 2-28 Relaciones de fuerza-desplazamiento en la coordenada i.

Si la estructura se somete a un sistema de fuerzas F_1, F_2, ... ,F_n que aumentan gradualmente desde cero hasta su valor final y causan desplazamientos D_1, D_2, ... ,D_n en la ubicación y en la dirección de las fuerzas, entonces el trabajo externo total es:

$$W = \frac{1}{2} (F_1 D_1 + F_2 D_2 + \ldots + F_n D_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i D_i$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$\left[W \right]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left[F \right]^{T}_{1 \times n} \left[D \right]_{n \times 1} \qquad (2.94)$$

donde $\left[F \right]^{T}$ es la transpuesta del vector columna $\left[F \right]$ que representa las fuerzas. El trabajo realizado es una cantidad escalar cuyas dimensiones son fuerza por longitud.

Los desplazamientos y las fuerzas se relacionan por la ecuación:

$$\left[f \right]_{n \times n} \left[F \right]_{n \times 1} = \left[D \right]_{n \times 1} \qquad (2.95)$$

donde $\left[f \right]$ corresponde a la matriz de flexibilidades. Sustituyendo la ecuación 2.95 en la ecuación 2.94 se obtiene:

$$\left[W \right]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left[F \right]^{T}_{1 \times n} \left[f \right]_{n \times n} \left[F \right]_{n \times 1} \qquad (2.96)$$

Tomando su transpuesta en ambos miembros, no se cambia el lado izquierdo de la ecuación por ser éste un escalar. El miembro de la derecha se convierte en el producto de la transpuesta de todas las matrices en orden inverso:

$$\left[W \right]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left[F \right]^{T}_{1 \times n} \left[f \right]^{T}_{n \times n} \left[F \right]_{n \times 1} \qquad (2.97)$$

De las ecuaciones 2.96 y 2.97 se deduce que la matriz de flexibilidad y su transpuesta son iguales, es decir:

$$\left[f \right]^{T} = \left[f \right]$$

Esto significa que para un elemento general de la matriz de flexibilidad $f_{ij} = f_{ji}$, conocido como relación reciproca de Maxwell. En otras palabras la matriz de flexibilidad es una matriz simétrica.

Por otro lado, de la ley de hooke se sabe que:

$$\left[F \right] = \left[K \right] \left[D \right] \qquad (2.98)$$

Despejando la matriz de fuerza de la ecuación 2.95:

$$\left[F \right] = \left[f \right]^{-1} \left[D \right] \tag{2.99}$$

De la comparación de las ecuaciones 2.98 y 2.99 podemos ver que:

$$\left[f \right]^{-1} = \left[K \right]$$

Dado que la matriz de flexibilidad es simétrica y puesto que la matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad, la matriz de rigidez también es simétrica.

Propiedad 1.- Las frecuencias cuadradas que conforman los modos de vibración, para estructuras estables, son siempre reales y positivas.

La demostración la desarrollaremos a partir de la ecuación 2.93, cuya forma matricial es:

$$\left[K \right] \left[y \right] = \lambda \left[M \right] \left[y \right] \tag{2.100}$$

siendo $\lambda = \omega^2$ y $\left[y \right]$ el vector de amplitudes. El escalar λ será real si es igual a su conjugado ($\lambda = \bar{\lambda}$).

Suponiendo que λ es complejo, los valores de $\left[y \right]$ deberán estar definidos también dentro de los números complejos, puesto que las matrices $\left[K \right]$ y $\left[M \right]$ están definidas dentro de los números reales. Considerando la expresión conjugada de 2.100 se tiene:

$$\left[K\right]\left[\bar{y}\right]=\bar{\lambda}\left[M\right]\left[\bar{y}\right] \qquad (2.101)$$

Multiplicando la ecuación 2.100 por $\left[\bar{y}\right]^T$ y 2.101 por $\left[y\right]^T$, se tiene:

$$\left[\bar{y}\right]^T\left[K\right]\left[y\right]=\lambda\left[\bar{y}\right]^T\left[M\right]\left[y\right] \qquad (2.102)$$

$$\left[y\right]^T\left[K\right]\left[\bar{y}\right]=\bar{\lambda}\left[y\right]^T\left[M\right]\left[\bar{y}\right] \qquad (2.103)$$

Tomando la forma transpuesta de 2.103 y como $\left[K\right]$ y $\left[M\right]$ son simétricas se concluye:

$$\left[\bar{y}\right]^T\left[K\right]\left[y\right]=\bar{\lambda}\left[\bar{y}\right]^T\left[M\right]\left[y\right] \qquad (2.104)$$

Restando miembro a miembro 2.102 y 2.104 se tiene:

$$(\lambda-\bar{\lambda})\left[\bar{y}\right]^T\left[M\right]\left[y\right]=0$$

Y puesto que un cálculo sencillo conduce a:

$$\left[\bar{y}\right]^T\left[M\right]\left[y\right]\neq 0$$

concluyendo:

$$\lambda=\bar{\lambda}$$

En consecuencia, todos los valores de ω^2 son reales.

La positividad de los valores de ω^2 se desprende de 2.100 al multiplicar por $\left[y \right]^T$, puesto que:

$$\lambda = \frac{\left[y \right]^T \left[K \right] \left[y \right]}{\left[y \right]^T \left[M \right] \left[y \right]}$$

Esto es, el valor de λ es el coeficiente de dos formas cuadráticas definidas positivas, luego el valor de ω^2 es positivo.

Propiedad 2.- Los modos de vibración diferentes son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez, es decir:

$$\left[y \right]_i^T \left[M \right] \left[y \right]_j = 0$$

$$\left[y \right]_i^T \left[K \right] \left[y \right]_j = 0$$

en donde $\left[y \right]_i$ y $\left[y \right]_j$ representan dos vectores asociados a las frecuencias ω_i^2 y ω_j^2, distintos entre sí.

La demostración la realizaremos a partir de la ecuación 2.100:

$$\left[K \right] \left[y \right]_i = \lambda_i \left[M \right] \left[y \right]_i \qquad (2.105)$$

$$\left[K \right] \left[y \right]_j = \lambda_j \left[M \right] \left[y \right]_j \qquad (2.106)$$

Premultiplicando la ecuación 2.105 por $\left[y \right]_j^T$ y la ecuación 2.106 por $\left[y \right]_i^T$, se obtiene:

$$\left[y \right]_j^T \left[K \right] \left[y \right]_i = \lambda_i \left[y \right]_j^T \left[M \right] \left[y \right]_i \qquad (2.107)$$

$$\left[y \right]_i^T \left[K \right] \left[y \right]_j = \lambda_j \left[y \right]_i^T \left[M \right] \left[y \right]_j \qquad (2.108)$$

y restando de 2.107 la transpuesta de 2.108:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \left[y \right]_j^T \left[M \right] \left[y \right]_i = 0$$

Dado que los valores de λ_i y λ_j son diferentes:

$$\lambda_i - \lambda_j \neq 0$$

por lo que:

$$\left[y \right]_j^T \left[M \right] \left[y \right]_i = 0$$

lo que demuestra la ortogonalidad de los modos de vibrar con respecto a la matriz de masa.

Para demostrar la ortogonalidad de los modos de vibrar con respecto a la matriz de rigidez, basta sustituir la ecuación anterior en la ecuación 2.107, de lo que resulta:

$$\left[y \right]_j^T \left[K \right] \left[y \right]_i = 0$$

Propiedad 3.- Desacoplamiento de los modos de vibración.

Antes de comenzar con la demostración de esta propiedad haremos algunos comentarios adicionales.

Como se ha visto, las amplitudes de los modos de vibrar pueden ser infinitas, si es que no se conovce de antemano alguna de dichas amplitudes. Sin embargo, más que el vector de las amplitudes, interesa la relación existente entre ellas. Existe un procedimiento que hace manejables estos valores y crea una cierta uniformidad, siendo posible la comparación de resultados para diferentes problemas. A este proceso se le llama normalización de los modos.

La convención usada para la normalización de los modos consiste en elegir un valor del vector aplitudes $\left[y \right]_i$, tal que:

$$\left[y \right]_i^T \left[M \right] \left[y \right]_i = 1$$

Cuando los modos cumplen con esta condición se dice que están normalizados. Así, la normalización de los modos se realizará mediante la fórmula:

$$\left[Y \right]_i = \left[y \right]_i \frac{1}{\sqrt{\left[y \right]_i^T \left[M \right] \left[y \right]_i}}$$

Donde $\left[y \right]_i$ son los modos de amplitudes arbitrarias.

Por otro lado, al encontrar los modos de vibrar en una estructura, se están obteniendo soluciones particulares al sistema de ecuaciones diferenciales. La solución general es la combinación lineal de todas las soluciones particulares, es decir, la combinación lineal de todos sus modos:

$$x_1(t) = C_1\, y_{11} \cos (\omega_1 t + \theta_1) + \ldots + C_n\, y_{1n} \cos (\omega_n t + \theta_n)$$

$$x_2(t) = C_1\, y_{21} \cos (\omega_1 t + \theta_1) + \ldots + C_n\, y_{2n} \cos (\omega_n t + \theta_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n(t) = C_n\, y_{n1} \cos (\omega_1 t + \theta_1) + \ldots + C_n\, y_{nn} \cos (\omega_n t + \theta_n)$$

donde el escalar y_{ij} tiene como primer subíndice el número del modo y como segundo el número ascendente en el vector modal ya normalizado, mientras que los términos C_j son constantes.

Vectorialmente, el sistema de ecuaciones anterior se puede escribir como:

$$\left[x \right] = \left[Y \right]_1 C_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1) + \ldots + \left[Y \right]_n C_n \cos (\omega_n t + \theta_n)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1) \\ C_2 \cos (\omega_2 t + \theta_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_n \cos (\omega_n t + \theta_n) \end{bmatrix}$$

y condensando:

$$\Big[x \Big] = \Big[Y \Big] \Big[U(t) \Big] \qquad (2.109)$$

Ahora bien, recordando que los modos están normalizados, en forma matricial podemos escribir:

$$\Big[Y_1 \,\Big|\, Y_2 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, Y_n \Big]^T \Big[M \Big] \Big[Y_1 \,\Big|\, Y_2 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, Y_n \Big] = \Big[I \Big]$$

La demostración de la propiedad de desacoplamiento de los modos la haremos a partir de la ecuación 2.109, la cual es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que definen el movimiento en vibración libre sin amortiguamiento.

Dado que $\Big[U(t) \Big] = \Big[C_j \cos (\omega_{jj} t + \theta_j) \Big]$, al derivar la ecuación 2.109 tenemos:

$$\Big[\dot{x} \Big] = \Big[Y \Big] \Big[- \omega_{jj} C_j \operatorname{sen} (\omega_j t + \theta_j) \Big]$$

Podemos obtener del vector $\Big[\dot{U}(t) \Big]$ las frecuencias y escribirlas matricialmente, quedando una matriz diagonal de frecuencias:

$$\left[\dot{x}\right] = \left[Y\right]\left[-\omega_{jj}\right]\left[Q(t)\right]$$

Derivando nuevamente encontramos la aceleración de las masas:

$$\left[\ddot{x}\right] = \left[Y\right]\left[-\omega^2_{jj}\right]\left[Q(t)\right]$$

Ahora bien, si tenemos fuera del vector $\left[Q(t)\right]$ a las frecuencias cuadradas, entonces: $\left[U(t)\right] = \left[Q(t)\right]$ y la ecuación anterior queda:

$$\left[\ddot{x}\right] = \left[Y\right]\left[-\omega^2_{jj}\right]\left[U(t)\right] \qquad (2.110)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.109 y 2.110 en la ecuación del movimiento 2.90:

$$\left[M\right]\left[Y\right]\left[-\omega^2_{jj}\right]\left[U(t)\right] + \left[K\right]\left[Y\right]\left[U(t)\right] = \left[0\right]$$

Si premultiplicamos toda la ecuación por $\left[Y\right]^T$, encontramos que el término:

$$\left[Y\right]^T\left[M\right]\left[Y\right] = \left[I\right] \qquad (2.111)$$

ya que los modos están normalizados, resultando:

$$\left[\omega^2_{jj}\right]\left[U(t)\right] = \left[Y\right]^T\left[K\right]\left[Y\right]\left[U(t)\right]$$

Como $\left[U(t) \right]$ se encuentra postmultiplicando a los dos términos, lo podemos eliminar, quedando:

$$\left[\omega^2_{jj} \right] = \left[Y \right]^T \left[K \right] \left[Y \right] \qquad (2.112)$$

Si ahora consideramos nuevamente la ecuación 2.109, pero al derivar esta, no sacamos las frecuencias cuadradas del vector $\left[U(t) \right]$, como lo hicimos anteriormente, nos resultará la notación matemática:

$$\left[x \right] = \left[Y \right] \left[U(t) \right] \qquad (2.109)$$

$$\left[\dot{x} \right] = \left[Y \right] \left[\dot{U}(t) \right]$$

$$\left[\ddot{x} \right] = \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right] \qquad (2.113)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.109 y 2.113 en la ecuación del movimiento 2.90, resulta:

$$\left[M \right] \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right] + \left[K \right] \left[Y \right] \left[U(t) \right] = \left[0 \right]$$

Premultiplicando toda la ecuación por $\left[Y \right]^T$ y sustituyendo en ésta las ecuaciones 2.111 y 2.112 resulta:

$$\left[I \right] \left[\ddot{U}(t) \right] + \left[\omega^2_{jj} \right] \left[U(t) \right] = \left[0 \right]$$

o bien:

$$\ddot{u}_1(t) + \omega_1^2\, u_1(t) = 0$$

$$\ddot{u}_2(t) + \omega_2^2\, u_2(t) = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2\, u_n(t) = 0 \; .$$

que son n ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden desacopladas. Por lo que un sistema de n grados de libertad se puede transformar a n sistemas de un grado de libertad.

2.4.2.2.- Metodos iterativos para obtener modos y frecuencias de vibrar

Desarrollar la ecuación 2.90 para la obtención de las frecuencias y los modos de vibrar, puede llegar a ser muy laborioso para sistemas de varios grados de libertad. Así que suelen llevarse a cabo métodos diversos para la obtención de estos datos, todos pensados en desarrollos de procesos iterativos a partir de la ecuación de equilibrio dinámico 2.90.

A continuación trataremos tres métodos, los cuales son:

a) Método Stodola-Vianello

b) Método Stodola-Flexibilidades

c) Método de Holzer

a) Método Stodola-Vianello.- Partiendo de la ecuación de equilibrio dinámico 2.93:

$$\left[K \right] \left[x \right] - \omega^2 \left[M \right] \left[x \right] = \left[0 \right] \qquad (2.114)$$

multiplicando por $\left[M \right]^{-1}$ y despejando resulta:

$$\left[x \right] = \frac{1}{\omega^2} \left[M \right]^{-1} \left[K \right] \left[x \right]$$

El método sugiere proponer un valor para $\left[x \right]$ premultiplicarlo por $\left[M \right]^{-1} \left[K \right]$ y si resulta ser un vector proporcional al propuesto (hablamos de proporcional puesto que lo que importa es la relación guardada entre ellos) el problema estará resuelto para ese modo, en caso contrario, se toma como nuevo vector modal el encontrado en la iteración anterior y se procede de nueva cuenta. Se repite el ciclo hasta que la comparación se convierte en proporcionalidad. Una vez encontrado el modo vibratorio, se procede a normalizarlo, obteniéndose el vector $\left[Y \right]$.

Una forma de obtener la frecuencia ω_i^2 correspondiente al modo vibratorio encontrado, es planteando la ecuación de equilibrio dinámico 2.114 para el modo $\left[x \right]_i$:

$$\left[K \right] \left[x \right]_i = \omega_i^2 \left[M \right] \left[x \right]_i$$

y premultiplicar la ecuación anterior por $\left[x \right]_i^T$. Al ser el término $\left[x \right]_i^T \left[M \right] \left[x \right]_i$ un escalar, se puede despejar ω^2:

$$\omega_i^2 = \frac{\left[x \right]_i^T \left[K \right] \left[x \right]_i}{\left[x \right]_i^T \left[M \right] \left[x \right]_i} \qquad (2.115)$$

Al valor de las frecuencias cuadradas así encontradas se le conoce como coeficiente de Rayleigh.

Este método converge hacia el modo más alto, en la medida en que avanza el proceso iterativo. De hecho, cada vez que se plantee el proceso a partir de un vector modal supuesto, el método de Stodola-Vianello nos llevará hacia el último modo, por lo que, para encontrar los demás modos, se deberá restar cada modo normalizado calculado. Esto se debe al hecho de que dado un vector modal cualquiera, siempre es posible expresar este como una combinación lineal de modos (dadas las condiciónes iniciales $t = 0$ y $\theta = 0$).

$$\left[x \right]_0 = C_1 \left[y \right]_1 + C_2 \left[y \right]_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + C_n \left[y \right]_n$$

Por su parte, el proceso iterativo de Stodola-Vianello hace que el modo $\left[x \right]_0$ inicial vaya ajustándose, perdiendo la presencia de los primeros $n - 1$ modos, quedándonos al final el último. Entonces, si hacemos que $\left[x \right]_0$ no contenga el último modo el proceso iterativo nos llevará al penúltimo de ellos, que es el más alto que contiene $\left[x \right]_0$. En general, restando cada modo encontrado, el método seguirá obteniendo el modo n - 1 más alto. Sin embargo, para quitarle el modo n a un vector modal $\left[x \right]_o$ cualquiera es necesario calcular sus constantes C_i. Esto se puede realizar premultiplicando la ecuación anterior por $\left[y \right]_n^T \left[M \right]$, obteniendo:

$$\left[y \right]_n^T \left[M \right] \left[x \right]_o = C_1 \left[y \right]_n^T \left[M \right] \left[y \right]_1 +$$

$$C_2 \left[y \right]_n^T \left[M \right] \left[y \right]_2 + \ldots + C_n \left[y \right]_n^T \left[M \right] \left[y \right]_n$$

de donde, por la ortogonalidad y la normalización de los modos, la ecuación anterior queda:

$$C_n = \left[y \right]_n^T \left[M \right] \left[x \right]_o$$

Fórmula para encontrar el valor de C_n. En general, si sustituimos cualquier valor de $\left[y \right]_i^T \left[M \right]$, la ecuación anterior resulta:

$$C_i = \left[y \right]_i^T \left[M \right] \left[x \right]_o$$

A continuación se muestran los pasos de que consta el método:

1) Determinación del número n de los grados de libertad en el sistema. Con éste número, se da lectura a las matrices de rigidez $\left[K \right]$ y de masa $\left[M \right]$.

2) Se invierte la matriz de masa $\left[K \right]^{-1} = \left[W \right]$ y premultiplicando ésta por la de rigidez, se obtiene una matriz que llamaremos $\left[E \right]$.

3) Se da un rango de tolerancia T para la comparación entre dos diferentes modos de vibración ya uniformizados. Por otro lado, hacer $i = n$, siendo i el número del modo de vibración ya normalizado $\left[Y \right]_i$ con su correspondiente constante C

4) Haciendo $j = 1$, dar lectura a un vector modal inicial cualquiera, por ejemplo: $\left[x \right]_j = \left[1,1,1 \right]$

5) Si el modo de vibración a calcular corresponde al último hacer $\left[x \right]_{j-i} = \left[x \right]_j$ y continuar con el paso 8), en caso contrario continuar con el paso 6).

6) Calcular las constantes con la fórmula $C_i = \left[Y \right]_i^T \left[M \right] \left[x \right]_j$.

7) Restar al modo de vibración j los modos de vibración ya calculados y normalizados con la fórmula $\left[x \right]_{j-i} = \left[x \right]_j - C_i \left[Y \right]_i$.

8) Calcular el modo de vibración $\left[x \right]_j = \left[E \right] \left[x \right]_{j-i}$.

9) Uniformizar los escalares del vector modal $\left[x \right]_j$ dividiendolos todos entre el valor del primero de ellos $(x_1)_j$ y finalmente igualamos el primero a uno.

10) Si $j = 1$ hacer $\left[z \right]_j = \left[x \right]_j$ y regresar al paso 5), en caso contrario continuar con el paso 11).

11) Si $\left[x \right]_j = \left[z \right]_j \pm T$ seguir con el paso 13), en caso contrario continuar con el paso 12).

12) Incrementar $j = j + 1$ y hacer $\left[x \right]_j = \left[z \right]_j$. Regresar al paso 5).

13) Calcular la frecuencia cuadrada con la fórmula:

$$\omega^2 = \frac{\left[x \right]_j^T \left[K \right] \left[x \right]_j}{\left[x \right]_j^T \left[M \right] \left[x \right]_j}$$

14) Normalizar el modo con la fórmula:

$$\left[Y \right]_i = \frac{\left[x \right]_j}{\sqrt{\left[x \right]_j^T \left[M \right] \left[x \right]_j}}$$

15) Imprimir el vector modal $\left[Y \right]_i$ ya normalizado y el valor de su frecuencia ω^2.

16) Disminuir $i = i - 1$.

17) Si el modo calculado en al paso 14) es el primero finalizar el algoritmo, en caso contrario regresar al paso 4).

b) Método Stodola-Flexibilidades.- El procedimiento para la obtención de los modos y frecuencias de vibración es similar al del método de Stodola-Vianello, salvo que a partir de la ecuación de equilibrio dinámico (2.114) se despeja la matriz de rigidez $\left[K \right]$, resultando:

$$\left[x \right] = \omega^2 \left[K \right]^{-1} \left[M \right] \left[x \right]$$

Recordando que $\left[K \right]^{-1} = \left[F \right]$ tenemos:

$$\left[x \right] = \omega^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[x \right]$$

El problema sigue siendo el mismo, encontrar los vectores $\left[x \right]$ y los escalares ω^2 diferentes de cero que satisfagan simultaneamente la ecuación de equilibrio dinámico.

La solución de este método se hace, nuevamente, de forma iterativa, con el mismo procedimiento del método Stodola-Vianello. Sin embargo, a diferencia del método anterior, el método de Stodolla-Flexibilidades no converge hacia el último modo, sino hacia el primero. Para demostrar lo anterior supongamos un vector $\left[x \right]_0$ cualquiera, expresado como una combinación lineal de sus modos. Entrando en la primera iteración, premultiplicando toda la combinación lineal por $\omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right]$ se obtiene un nuevo vector supuesto $\left[x \right]_1$:

$$\left[x \right]_1 = \omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[x \right]_0 = C_1 \omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_1 +$$

$$C_2 \omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_2 + \dots + C_n \omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_n$$

Antes de volver a premultiplicarlo por $\omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right]$ observemos que:

$$\left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_i = \frac{1}{\omega_i^2} \left[y \right]_i$$

Combinando las dos últimas ecuaciones resulta:

$$\left[x \right]_1 = c_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} \left[y \right]_1 + c_2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \left[y \right]_2 + \dots + c_n \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \left[y \right]_n$$

Con este valor de $\left[x \right]_1$ entramos en la segunda iteración y obtenemos el vector $\left[x \right]_2$:

$$\left[x \right]_2 = \omega_1^2 \left[F \right] \left[M \right] \left[x \right]_1 = c_1 \frac{1}{\omega_1^2} \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_1 +$$

$$c_2 \frac{\omega_1^4}{\omega_2^2} \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_2 + \dots + c_n \frac{\omega_1^4}{\omega_n^2} \left[F \right] \left[M \right] \left[y \right]_n$$

es decir:

$$\left[x \right]_2 = c_1 \frac{\omega_1^4}{\omega_1^4} \left[y \right]_1 + c_2 \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} \left[y \right]_2 + \dots + c_n \frac{\omega_1^4}{\omega_n^4} \left[y \right]_n$$

En general, para la iteración i el valor de $\left[x \right]_i$ es:

$$\left[x \right]_i = c_1 \frac{\omega_1^{2i}}{\omega_1^{2i}} \left[y \right]_1 + c_2 \frac{\omega_1^{2i}}{\omega_2^{2i}} \left[y \right]_2 + \dots + c_n \frac{\omega_1^{2i}}{\omega_n^{2i}} \left[y \right]_n$$

Cuando i tiende a infinito (despues de muchas iteraciones):

$$\lim_{i \to \infty} \left[x \right]_i = c_1 \left[y \right]_1 + c_2 (0) \left[y \right]_2 + \dots + c_n \left[y \right]_n$$

es decir:

$$\lim_{i \to \infty} \left[x \right]_i = C_1 \left[y \right]_1$$

ya que $\omega_n > \omega_{n-1} > \ldots > \omega_2 > \omega_1$.

Por lo que el método de Stodola-Flexibilidades converge al primer modo.

Una vez obtenido el primer modo, el mecanismo de obtención de los siguientes es exactamente igual que en Stodola-Vianello, sólo que la secuencia será a del primero al último.

La frecuencia cuadrada de cada modo, al igual que en Stodola-Vianello, se obtiene con el coeficiente de Rayleigh, ecuación 2.115.

La convergencia para cualquier vector $\left[x \right]$ propuesto hacia el primer modo por el método Stodola-Flexibilidades es de gran ventaja, dado que en ocasiones es necesario calcular sólamente algunos de los primeros modos. No así el método de Stodola-Vianello, en el cual para llegar a los primeros modos es necesario haber obtenido previamente todos ellos.

Por otro lado, este método tiene la desventaja de necesitar invertir la matriz de rigidez antes de iniciar el procedimiento iterativo.

c) Método de Holzer.- Este método es utilizable sólo en sistemas sencillamente acoplados, es decir, cuando sus trabes se consideran infinitamente rígidas.

El método de Holzer consiste en proponer (dado que lo que importa es la configuración) un valor cualquiera a la amplitud x_1, del movimiento de la primera masa m_1, así como un valor a la frecuencia cuadrada y con ello, empezar a despejar los valores de las demás amplitudes. Una vez obtenidas todas ellas, se tiene un vector que tentativamente puede ser un modo. La forma de comprobar su validez es demostrando la continuidad.

Para el caso de un sistema con tres grados de libertad, la ecuación 2.114 queda:

$$k_{11}\,x_1 + k_{12}\,x_2 = \omega^2\,m_1\,x_1 \tag{2.116}$$

$$k_{21}\,x_1 + k_{22}\,x_2 + k_{23}\,x_3 = \omega^2\,m_2\,x_2 \tag{2.117}$$

$$k_{32}\,x_2 + k_{33}\,x_3 = \omega^2\,m_3\,x_3 \tag{2.118}$$

Si suponemos un valor para ω^2 y para x_1 (comunmente la unidad), estamos en condición de despejar de la ecuación 2.116 el valor de x_2, de la misma manera, con la ecuación 2.117 se obtiene x_3. Si al llevar los valores de las amplitudes encontradas a la ecuación 2.118 nos resulta una desigualdad, se procede a proponer un nuevo valor para la frecuencia cuadrada.

Como se puede notar, este método no es iterativo, por lo que comúnmente se construye una gráfica de error como la que se muestra en la Figura 2-39, en la cual, en el eje de las abscisas se encuentran las frecuencias cuadradas y en el de las ordenadas el residuo obtenido de la comparación de la fuerza cortante y la fuerza de inercia del último nivel.

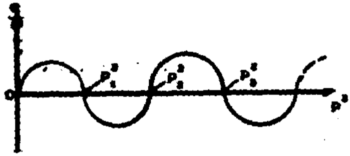


Figura 2-33 Grafica de errores para el metodo de Holzer

Cuando se tenga un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de ω^2, la frecuencia cuadrada estará comprendida entre dichos valores.

2.4.3.- Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

Considérese el caso de la Figura 2-34, en el que un marco de tres niveles sin amortiguamiento se encuentra excitado en sus masas por una fuerza F cualquiera. Nuevamente por facilidad en el planteamiento de las ecuaciones, no se considera amortiguamiento en el sistema. En este caso las ecuaciones del movimiento estarán dadas por (ver ecuación 2.81):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

En forma condensada la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \qquad (2.110)$$

Se hace notar que los comentarios hechos para vibraciones libres respecto a las matrices de masa y rigidez son igualmente aplicables en vibraciones forzadas. La solución a la ecuación 2.148 se hará postulando nuevamente una solución del tipo:

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \end{bmatrix} \qquad (2.109)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}(t) \end{bmatrix} \qquad (2.113)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.109 y 2.113 en 2.110 y representando matemáticamente a la fuerza F como una función del tiempo, resulta:

$$\left[M \right] \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right] + \left[K \right] \left[Y \right] \left[U(t) \right] = \left[F(t) \right]$$

Ahora, desacoplaremos los modos premultiplicando la ecuación anterior por $\left[Y \right]^T$:

$$\left[Y \right]^T \left[M \right] \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right] + \left[Y \right]^T \left[K \right] \left[Y \right] \left[U(t) \right] =$$

$$= \left[Y \right]^T \left[F(t) \right]$$

Dado que $\left[Y \right]^T \left[M \right] \left[Y \right] = \left[I \right]$ y $\left[Y \right]^T \left[K \right] \left[Y \right] = \left[\omega^2_{jj} \right]$, entonces:

$$\left[I \right] \left[\ddot{U}(t) \right] + \left[\omega^2_{jj} \right] \left[U(t) \right] = \left[Y \right]^T \left[F(t) \right]$$

o bien:

$$\ddot{u}_1(t) + \omega^2_1 \, u_1(t) = f_1(t)$$

$$\ddot{u}_2(t) + \omega^2_2 \, u_2(t) = f_2(t)$$

$$\ddot{u}_3(t) + \omega^2_3 \, u_3(t) = f_3(t)$$

donde $f_i(t) = \left[Y \right]^T_i \left[F(t) \right]$.

Se tienen así, tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, no homogeneas y desacopladas, es decir, se ha reducido un sistema de tres grados de libertad a tres sistemas de un grado de libertad. Entonces, es posible solucionar independientemente cada ecuación.

Como hemos visto, la solución a la ecuación diferencial homogenea:

$$\ddot{u}_i(t) + \omega_i^2 u_i(t) = 0$$

está dada por:

$$u_{Hi} = C_{1i} \cos(\omega_i t) + C_{2i} \operatorname{sen}(\omega_i t)$$

y a la particular:

$$u_{Pi} = A_i F(t)$$

entonces, la solución a la ecuación diferencial no homogenea es:

$$u_i = u_{Hi} + u_{Pi}$$

Sustituyendo las soluciones $\left[U(t) \right]$ en la ecuación 2.109 se encuentra la respuesta de las masas y en consecuencia del sistema a la fuerza excitadora propuesta:

$$\left[x \right] = \left[Y \right] \left[U(t) \right] = \left[Y_1 \,\middle|\, Y_2 \,\middle|\, Y_3 \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

Las constantes C_{1i} y C_{2i} de $\left[U(t) \right]$ se determinan con las condiciones iniciales del movimiento, por ejemplo, las nulas.

CAPITULO 3.- ANALISIS DINAMICO MODAL ESPECTRAL

Como se mencionó anteriormente, existen varios tipos de análisis sísmico aplicables a comportamientos tanto lineales como no lineales. Uno de ellos, que basa su simplicidad en la utilización de modos de vibración y espectros de diseño es el llamado análisis dinámico modal espectral.

Las Normas Técnicas Complementarias del Distrito Federal para diseño por sismo especifican en su sección 2.1 la utilización del análisis dinámico modal espectral para cualquier edificio. Estas incluyen el espectro de diseño en su sección 3, y en la sección 5 muestan los factores de reducción de fuerzas sísmicas Q, los cuales se adoptan dependiendo de algunas consideraciones estructurales de la edificación, tomando en cuenta el comportamiento inelástico de la estructura. Por su parte, la sección 4 de las mismas indican adoptar en su caso un factor Q', dependiente de las condiciones de regularidad indicadas en la sección 6 y de los periodos de vibración.

A continuacion plantearemos el método del análisis dinámico modal espectral aplicandolo a un modelo físico.

Para comenzar consideraremos el marco de tres niveles sin amortiguamiento mostrado en la Figura 3-1 (a), al cual se le idealiza su masa concentrada en las trabes y, por razones de simplicidad numérica, éstas son consideradas infinitamente rígidas.

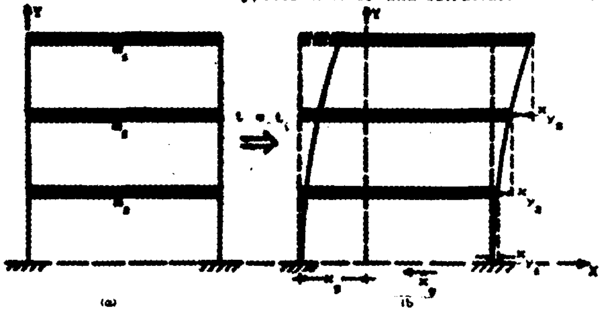


Figura 3-1 Marco de tres niveles con sus masas concentradas en las trabes.

Al presentarse un movimiento en su base, variable con el tiempo, la configuración de dicho marco en un instante t será la mostrada en la Figura 3-1 (b). Aplicando la segunda ley de Newton, el sistema de ecuaciones resulta ser:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{y_1} \\ \ddot{x}_{y_2} \\ \ddot{x}_{y_3} \end{bmatrix} = 0$$

donde $x_i = x_{y_i} - x_g$ es el desplazamiento relativo de la masa i. En forma condensada, la ecuación anterior se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_y \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

por lo que los desplazamientos relativos se escriben:

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_y \end{bmatrix} - x_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

y las aceleraciones:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_y \end{bmatrix} - \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

despejando las aceleraciones de la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} + \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

Sustituyendo 3.3 en 3.1 resulta:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \ddot{x} \end{bmatrix} + \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

o bien:

$$\left[K \right] \left[x \right] + \left[M \right] \left[\ddot{x} \right] = - \left[M \right] \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

Como se puede apreciar en la ecuación 3.4, se ha pasado de un problema de excitación en la base a un problema de fuerzas excitadoras sobre las masas, donde dichas fuerzas estan representadas como:

$$F(t) = - \left[M \right] \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación 3.4, Primeramente se desacoplarán los modos premultiplicando esta ecuación por $\left[Y \right]^T$:

$$\left[Y \right]^T \left[K \right] \left[x \right] + \left[Y \right]^T \left[M \right] \left[\ddot{x} \right] = - \ddot{x}_g \left[Y \right]^T \left[M \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

En la ecuación anterior tenemos contemplado el desplazamiento relativo $\left[x \right]$, el cual esta representado por:

$$\left[x \right] = \left[Y \right] \left[U(t) \right]$$

y la aceleración:

$$\left[\ddot{x} \right] = \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right]$$

por lo que, las ecuaciones:

$$\left[Y \right]^T \left[K \right] \left[Y \right] = \left[\omega^2_{jj} \right]$$

y:

$$\left[Y \right]^T \left[M \right] \left[Y \right] = \left[I \right]$$

serán sustituidas en la ecuación 3.5, quedando:

$$\left[\omega^2_{jj} \right] \left[U(t) \right] + \left[I \right] \left[\ddot{U}(t) \right] = - \ddot{x}_g \left[Y \right]^T \left[M \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Desarrollando el término $\left[Y \right] \left[M \right]^T$, resulta:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} y_{i1}\, m_i \\ \sum_{i=1}^{3} y_{i2}\, m_i \\ \sum_{i=1}^{3} y_{i3}\, m_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

La constante:

$$C_j = \sum_{i=1}^{3} y_{ij}\, m_i$$

es conocida como coeficiente de participación debido a que mide la influencia de cada modo en el proceso de vibración.

Sustituyendo la ecuación 3.7 en 3.8 resulta:

$$\omega_1^2\, u_1(t) + \ddot{u}_1(t) = - C_1\, \ddot{x}_g$$

$$\omega_2^2\, u_2(t) + \ddot{u}_2(t) = - C_2\, \ddot{x}_g \qquad (3.8)$$

$$\omega_3^2\, u_3(t) + \ddot{u}_3(t) = - C_3\, \ddot{x}_g$$

que son tres ecuaciones diferenciales no homogeneas, de segundo orden y desacopladas, ésto es, tenemos tres sistemas de un grado de libertad.

Ahora bien, en el análisis dinámico modal espectral no es necesario resolver este sistema de ecuaciones planteado, ya que se recurre al espectro de diseño.

Como se recordará, el espectro de respuesta es la gráfica que relaciona a todas las estructuras de un grado de libertad, cada una con un periodo T determinado, con el efecto máximo que se produce en ellas debido a una fuerza excitadora cualquiera. Dicho efecto bien puede ser la aceleración, la velocidad o el desplazamiento de la masa. Cuando se cuentan con varias fuerzas excitadoras o sismos, con cada uno de ellos se obtiene un espectro de respuesta. A la envolvente de los espectros de respuesta se le conoce como espectro de diseño.

Así, al contar con una ecuación diferencial de movimiento representativa de una estructura conoceremos su periodo T, (Figura 3-2) con él, estamos en condición de identificar a la estructura en el eje de las abscisas del espectro de diseño y así, localizar la respuesta de la masa en el eje de las ordenadas, es decir, la solución a la ecuación diferencial.

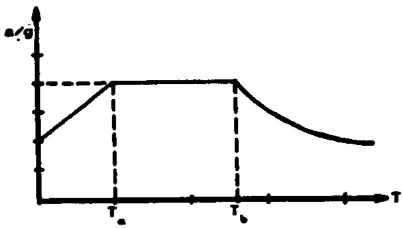


Figura 3-2 Espectro de diseño

Si bien el efecto que puede indicar un espectro de diseño es la aceleración, velocidad o desplazamiento de la masa, el espectro de diseño que marca el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal nos indica concretamente la aceleración. Este espectro varía según la zona donde se pretenda construir, y deja el amortiguamiento a criterio de los estructuristas, permitiendo reducir la aceleración de la masa en función de la ductilidad de la estructura.

A partir de la aceleración máxima encontrada, podemos calcular fácilmente los desplazamientos máximos $\left| u_{i\,max} \right|$ de la estructura. Esto lo podemos demostrar, considerando la ecuación diferencial del movimiento $\ddot{x} + \omega^2 x = - \ddot{x}_s$, cuya amplitud, velocidad y aceleración máximas estan dadas por:

$$x = x_{max} \cos \omega t$$

$$\dot{x} = - x_{max}\, \omega \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

$$\ddot{x} = - x_{max}\, \omega^2 \cos \omega t$$

Es lógico que la aceleración máxima será alcanzada cuando $\cos \omega t = 1$, por lo que la expresión de la aceleración queda:

$$a = \ddot{x}_{max} = - x_{max}\, \omega^2$$

Obtenida la aceleración máxima en el espectro de diseño, se sustituirá en la ecuación anterior para obtener el desplazamiento máximo.

$$\left| x_{max} \right| = \frac{a}{\omega^2}$$

El resultado se obtuvo a partir de una ecuación con movimiento diferente al sistema de ecuaciones 3.8. Sin embargo su única diferencia es que en el sistema de ecuaciones 3.8 se encuentra el coeficiente de participación, por lo que $\left| u_{imax} \right|$ será:

$$\left| u_{imax} \right| = \frac{C_i \; a_i}{\omega_i^2} \tag{3.9}$$

Cuando $u_i(t)$ sea máximo, los desplazamientos de la estructura también lo serán por lo que:

$$\left[x_{max} \right] = \left[Y \right] \left[U_{max}(t) \right] \tag{3.10}$$

o bien:

$$\left[x_{max} \right] = \left[Y \right]_1 u_{1max}(t) + \left[Y \right]_2 u_{2max}(t) + \ldots + \left[Y \right]_n u_{nmax}(t)$$

Como se puede observar, esta manera de obtener los desplazamientos máximos de las masas resulta un criterio muy conservador dado que es muy difícil que las amplitudes máximas se presenten simultaneamente. Existen diversos criterios para reducir dichos desplazamientos, uno de ellos es el propuesto por el Dr. Emilio Rosenblueth, el cual propone reducir los desplazamientos de tal forma que:

$$[x] = \begin{bmatrix} \sqrt{(u_{1max}\, Y_{11})^2 + (u_{2max}\, Y_{12})^2 + \ldots + (u_{nmax}\, Y_{1n})^2} \\ \sqrt{(u_{1max}\, Y_{21})^2 + (u_{2max}\, Y_{22})^2 + \ldots + (u_{nmax}\, Y_{2n})^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(u_{1max}\, Y_{n1})^2 + (u_{2max}\, Y_{n2})^2 + \ldots + (u_{nmax}\, Y_{nn})^2} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$[x] = \begin{bmatrix} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_{imax}\, Y_{1i})^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_{imax}\, Y_{2i})^2} \\ \vdots \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_{imax}\, Y_{ni})^2} \end{bmatrix}$$

Por su parte, las fuerzas en los niveles se pueden encontrar a partir de la ecuación del equilibrio dinámico, superponiendo el efecto de cada modo sobre los niveles:

$$\left[K \right] \left[\left[Y \right]_i \left[U_{imax} \right]_i \right] = \omega_i^2 \left[M \right] \left[\left[Y \right]_i \left[U_{imax} \right] \right]$$

donde es fácil ver que la primera parte de ésta ecuación es la fuerza máxima:

$$\left[F \right]_i = \omega_i^2 \left[M \right] \left[\left[Y \right]_i \left[U_{imax} \right] \right] \qquad (3.11)$$

El efecto total se obtendrá superponiendo los efectos $\left[F \right]$ de todos los modos. Al igual que en los desplazamientos, las fuerzas máximas no se presentan simultáneamente, por lo que se reducen mediante el mismo criterio.

A continuación se desarrollará la metodología del Análisis Dinámico Modal Espectral para el modelo, que se muestra en planta en la Figura 3-3.

El modelo esta construido con igual geometría en sus tres niveles, los cuales tienen una altura libre de 35 centímetros. Los entrepisos estan conformados por una placa de acero de calibre 16 (1.52 mm de espesor) cuyo peso es de 12.21 Kg/m^2, una malla, también de acero, la cual tiene un peso de 1 Kg/m^2 y una losa de concreto de 1.5 cm de espesor, la cual tiene un peso de 33 Kg/m^2, para sumar así un peso total de 46.21 Kg/m^2 por entrepiso.

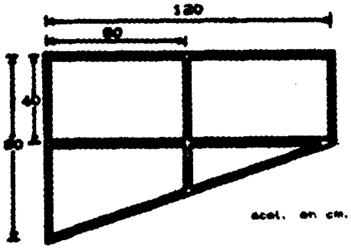


Figura 3-3 Dibujo en planta del modelo

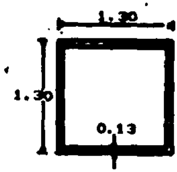
Tanto las columnas como las vigas tienen la misma sección de acero A-36 (Figura 3-4), con un peso de 0.5 Kg/m y un momento de inercia de 0.14052 cm^4. Nótese que las columnas del eje C estan giradas un ángulo θ, sin embargo hay que recordar que el momento de inercia con respecto a algún eje que atraviese el centroide de una sección cuadrada, es siempre constante, independientemente del ángulo que forme éste. Lo anterior se puede visualizar con la fórmula para rotación de ejes:

$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta \mp I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

siendo I_u e I_v los momentos de inercia de la sección con respecto a los eje u y v, girados un ángulo θ con respecto a los ejes x y y.

Al contar con una sección cuadrada, los momentos de inercia I_x e I_y son iguales y el producto de inercia I_{xy} es igual a cero.

comprobándose lo anterior. Por lo que el momento de inercia de las columnas del marco en el eje C también son iguales a 0.14082 cm^4.



acot. en cm.

Figura 3-6 Dimensiones geometricas de las vigas y columnas del modelo.

El módulo de elasticidad se comprobó en el Laboratorio de Materiales de la Facultad de Ingeniería realizando una prueba en la Maquina Universal a una sección. Los resultados se muestran en la Tabla 3-1.

fuerza (Kg)	elongación (cm^{-3})
0	0
100	1.0
200	2.1
300	3.2
400	3.9
500	4.8
600	5.9
700	7.0
800	8.1
900	9.2
1000	10.2
1100	11.1
1200	13.3
1300	15.0
1400	16.5
1500	18.0
1600	19.7
1700	21.0
1800	24.0
1900	25.0
2000	28.0
2100	30.1

Notas: La longitud calibrada fué de 15 cm.
El colapso del elemento llego a los 2650 Kg.

Table 8-1 Relacion fuerza-elongacion de la seccion de los vigas y columnas del modelo.

Al contar con un area de 0.6084 cm^2 y una longitud calibrada de 15 cm., iniciales, su módulo de elasticidad promedio, resulta de la división de los esfuerzos entre sus deformaciones respectivas. Sin embargo cabe aclarar que se tomaron las 15 primeras mediciones, ya que las restantes son las concernientes al estado inelástico del material. Así, el módulo elástico promedio fué de 2'367,065 Kg/cm^2.

Con estas bases, estamos en condición de formular tanto la matriz de rigidez como la de masa de cada marco.

La condición de los apoyos de todos los marcos se considerará como empotramiento. En la Figura 3-5 se muestra el esquema tipo de todos los marcos exceptuando el del eje 3 . Las matrices de rigidez de estos marcos se indican en las Tablas 3-2 a 3-5.

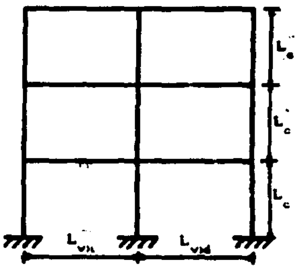


Figura 3-5 Marco tipo de todos los ejes exceptuando el del eje 3.

El marco del eje 3 se muestra en la Figura 3-6 y su matriz de rigidez esta indicada en la Tabla 3-6.

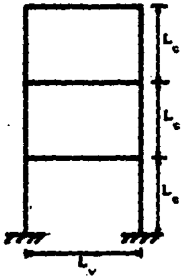


Figura 3-6 Marco del eje 2

Por su parte, la matriz de masas del modelo se muestra en la Tabla 3-7, expresada ésta, en función de la masa por cada nivel correspondiente. La distribución del peso en cada entrepiso es:

	peso entrepiso (Kg/cm^2)		área (cm^2)		peso viga (Kg/cm)		longitud (cm)		Total (Kg)
w_i =	0.004821	×	7200	+	0.005	×	546.5	=	38.0037

Tomando la gravedad g = 980 cm/s^2, tenemos que:

$$m_i = 0.038738 \text{ Kg-s}^2/\text{cm}$$

Si consideráramos que la inercia de las trabes es infinitamente mayor a la de las columnas, de la matriz general de rigidez, se deberá tomar sólo la parte correspondiente a los desplazamientos lineales originados por las fuerzas aplicadas en la dirección de esos desplazamientos. Sin embargo, y con el fin de llegar a una mayor exactitud en los resultados, se partirá de la matriz de rigidez lineal:

$$\left[K_D \right] = \left[K_{22} \right] - \left[K_{21} \right] \left[K_{11} \right]^{-1} \left[K_{12} \right] \qquad (2.69)$$

la cual toma en cuenta los giros en las vigas.

A manera de facilitar las operaciones se presenta a continuación un programa en lenguaje BASIC para resolver la ecuación 2.69 a partir de tener como datos la matriz de rigidez general:

```
10 REM PROGRAMA PARA CALCULAR LA MATRIZ DE DESPLAZAMIENTOS
20 REM SIN CONSIDERAR INFINITAMENTE RIGIDAS LAS TRABES
25 REM Lectura del orden de la matriz [ K21 ]
30 INPUT "N21 = ", P
40 INPUT "M21 = ", N
45 REM Dimensionamiento de las matrices utilizadas
50 DIM A(N,N): DIM B(N,P): DIM M(P,2*P)
60 DIM C(P,N): DIM X(N,P): DIM Y(N,N)
70 DIM Z(N,N)
75 REM Lectura de la matriz [ K22 ]
80 FOR I = 1 TO N
90 FOR J = 1 TO N
100 PRINT "K22 (";I;",";J;") = ";:INPUT A(I,J)
110 NEXT J
120 NEXT I
125 REM Lectura de la matriz [ K21 ]
130 FOR I = 1 TO N
140 FOR J = 1 TO P
150 PRINT "K21 (";I;",";J;") = ";:INPUT B(I,J)
160 NEXT J
170 NEXT I
175 REM Lectura de la matriz [ K11 ]
180 FOR I = 1 TO P
190 FOR J = 1 TO P
200 PRINT "K11 (";I;",";J;") = ";:INPUT M(I,J)
```

```
210 NEXT J
220 NEXT I
225 REM Lectura interna de la matriz [K12]
230 FOR I = 1 TO P
240 FOR J = 1 TO N
250 C(I,J) = B(J,I)
260 NEXT J
270 NEXT I
275 REM Proceso para invertir la matriz [K11] por el método de
276 REM transformaciones elementales
280 FOR I = 1 TO P
290 FOR J = P+1 TO 2*P
300 IF J = P+1 THEN M(I,J) = 1:GOTO 320
310 M(I,J) = 0
320 NEXT J
330 NEXT I
340 K = 0
350 K = K + 1
360 FOR R = 1 TO P
370 IF R = K THEN 430
380 IF M(R,K) = 0 THEN 430
390 D = - M(R,K)/M(K,K)
400 FOR J = 1 TO 2*P
410 M(R,J) = M(K,J) * D + M(R,J)
420 NEXT J
430 NEXT R
440 IF K = P THEN 460
450 GOTO 350
460 FOR I = 1 TO P
470 FOR J = P+1 TO 2*P
480 M(I,J) = M(I,J)/M(I,I)
490 NEXT J
500 NEXT I
505 REM Multiplicación de las matrices [X] = [K21] [K11]^-1
510 FOR I = 1 TO N
520 FOR J = 1 TO P
530 X(I,J) = 0
540 FOR R = 1 TO P
550 X(I,J) = X(I,J) + B(I,R) * M(R,J+P)
560 NEXT R
570 NEXT J
580 NEXT I
585 REM Multiplicación de las matrices [Y] =[X] [K12]
590 FOR I = 1 TO N
600 FOR J = 1 TO N
610 Y(I,J) = 0
620 FOR R = 1 TO P
630 Y(I,J) = Y(I,J) + X(I,R) * C(R,J)
640 NEXT R
650 NEXT J
660 NEXT I
```

```
665 REM Resta de las matrices [ Z ] = [ K22 ] - [ Y ]
670 FOR I = 1 TO N
680 FOR J = 1 TO N
690 Z(I,J) = A(I,J) - Y(I,J)
700 NEXT J
710 NEXT I
715 REM Lanzamiento en pantalla de la matriz de
716REM desplazamientos [ KD ]
720 FOR I = 1 TO N
730 FOR J = 1 TO N
740 PRINT "KD (";I;",";J;") = ";Z(I,J)
750 NEXT J
760 NEXT I
770 END
```

Tomando en cuenta los valores de las longitudes de vigas para cada marco en particular, se llega a las siguentes matrices de desplazamientos:

$$\left[K_D \right]_1 = \begin{bmatrix} 158.72 & -200.14 & 48.31 \\ -200.14 & 418.16 & -275.28 \\ 48.31 & -275.28 & 497.42 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_D \right]_2 = \begin{bmatrix} 177.99 & -214.10 & 41.86 \\ -214.10 & 438.21 & -277.11 \\ 41.86 & -277.11 & 507.30 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_b \right]_B = \begin{bmatrix} 98.42 & -128.14 & 34.99 \\ -128.14 & 260.75 & -183.35 \\ 34.99 & -183.35 & 327.87 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_b \right]_{A,B} = \begin{bmatrix} 136.84 & -182.28 & 54.29 \\ -182.28 & 388.74 & -272.91 \\ 54.29 & -272.91 & 485.89 \end{bmatrix}$$

$$\left[K_b \right]_C = \begin{bmatrix} 134.06 & -179.89 & 54.97 \\ -179.89 & 384.91 & -272.54 \\ 54.97 & -272.54 & 484.41 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de rigidez lineal en cada sentido (x,y), las matrices de cada marco se sumarán como se indica en el capitulo 4.

Sentido X $(A + B + C \cos^2\theta)$ siendo $\theta = 18.435^{\circ}$

$$\left[K_o \right]_x = \begin{bmatrix} 394.34 & -526.40 & 158.05 \\ -526.40 & 1123.90 & -791.10 \\ 158.05 & -791.10 & 1407.74 \end{bmatrix}$$

Sentido Y (1 + 2 + 3 + C $sen^2\theta$)

$$\left[K_o \right]_y = \begin{bmatrix} 448.54 & -560.36 & 130.66 \\ -560.36 & 1164.61 & -762.99 \\ 130.66 & -762.99 & 1381.04 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en $\left[K \right] \left[Y \right] - \omega^2 \left[M \right] \left[Y \right] = 0$, por cualquiera de los métodos vistos, encontramos los modos y periodos de vibración de la estructura. Nuestro método empleado es el de Stodola-Vianello que a continuación se muestra en otro programa diseñado en lenguaje BASIC. Este programa requiere tener como datos tanto la matriz de rigidez lineal, como la de masas; esta última tendrá que ser diagonal, tal como esta formada en la Tabla 3-7:

```
10 REM METODO STODOLA-VIANELLO DE CALCULO DE MODOS Y FRECUENCIAS
15 REM DE VIBRACION
16 REM Lectura del orden de las matrices
20 INPUT "N = ", N
25 REM Dimensionamiento de las matrices utilizadas
30 DIM K(N,N): DIM M(N,N): DIM X(N,N): DIM G(N,N): DIM O(N,N)
40 DIM A(N,N): DIM B(N,N): DIM C(N): DIM L(N,N): DIM Q(N)
50 DIM D(N,N): DIM E(N,N): DIM F(N,N): DIM P(N): DIM W(N)
55 REM Lectura de la matriz de rigidez lineal
```

```
60 FOR I = 1 TO N
70 FOR J = 1 TO N
80 PRINT "K (";I;",";J;") = ";:INPUT K(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
105 REM Lectura de los elementos de la diagonal principal de la
106 REM matriz de masa
110 FOR I = 1 TO N
120 PRINT "M (";I;",";I;") = ";:INPUT M(I,I)
130 NEXT I
135 REM Multiplicacion de las matrices [ X ] = [ M ]^-1 [ K ]
140 FOR I = 1 TO N
150 FOR J = 1 TO N
160 X(I,J) = 1/M(I,I) * K(I,J)
170 NEXT J
180 NEXT I
185 REM Iniciacion de un vector normalizado [ A ] = 0
190 H = 0
200 FOR I = 1 TO N
210 A(H,I) = 0
220 NEXT I
225 REM Suposicion de un vector modal [ B ] = 1
230 FOR H = 1 TO N
240 FOR I = 1 TO N
250 B(H,I) = 1
260 NEXT I
265 REM Calculo de los coeficientes C
270 FOR I = 1 TO N
280 D(H,I) = A(H-1,I) * M(I,I)
290 NEXT I
300 FOR K = 1 TO H
310 C(K) = 0
320 FOR I = 1 TO N
330 C(K) = C(K) + D(K,I) * B(H,I)
340 NEXT I
350 NEXT K
355 REM Calculo del vector modal uniformizado [ G ]
360 FOR I = 1 TO N
370 E(H,I) = 0
380 FOR K = 1 TO H
390 E(H,I) = E(H,I) + C(K) * A(K-1,I)
400 NEXT K
410 NEXT I
420 FOR I = 1 TO N
430 F(H,I) = B(H,I) - E(H,I)
460 NEXT I
470 FOR I = 1 TO N
480 G(H,I) = 0
490 FOR J = 1 TO N
500 G(H,I) = G(H,I) + X(I,J) * F(H,J)
510 NEXT J
520 NEXT I
```

```
530 FOR I = 2 TO N
540 G(H,I) = G(H,I) /G(H,1)
550 NEXT I
560 G(H,1) = 1: T = 0
570 FOR I = 2 TO N
580 IF G(H,I) > B(H,I)-0.001 AND G(H,I) < B(H,I)+0.001 THEN 590
585 GOTO 600
590 T = T + 1
600 NEXT I
610 FOR I = 2 TO N
620 B(H,I) = G(H,I)
630 NEXT I
640 IF T = N-1 THEN 660
650 GOTO 300
655 REM Calculo de las frecuencias de vibración W
660 FOR I = 1 TO N
670 L(H,I) = 0: O(H,I) = B(H,I) * M(I,I)
680 FOR J = 1 TO N
690 L(H,I) = L(H,I) + B(H,J) * K(J,I)
700 NEXT J
710 NEXT I
720 P(H) = 0: Q(H) = 0
730 FOR I = 1 TO N
740 Q(H) = Q(H) + O(H,I) * B(H,I)
750 P(H) = P(H) + L(H,I) * B(H,I)
760 NEXT I
770 W(H) = P(H) / Q(H)
775 REM Normalización y lanzamiento en pantalla de los modos de
776 REM vibración [ A ]
780 FOR I = 1 TO N
790 A(H,I) = B(H,I) / Q(H) ↑ 0.5
800 PRINT "Y (";H;",";I;") = ";A(H,I)
810 NEXT I
815 REM Lanzamiento en pantalla de las frecuencias de vibración
820 PRINT "W (";H;") = ";W(H)
830 NEXT H
840 END
```

Así, tenemos que los modos de vibración normalizados, las frecuencias y los periodos en cada sentido de la estructura son:

Modos de vibrar

Sentido X

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 4.0978 \\ 2.9713 \\ 1.2645 \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 2.9447 \\ -2.5979 \\ -3.4380 \end{bmatrix} \qquad Y_3 = \begin{bmatrix} 1.3270 \\ -3.4120 \\ 3.7171 \end{bmatrix}$$

$\omega_1^2 = 1669.7\ rad^2/s^2$ $\omega_2^2 = 18962.1\ rad^2/s^2$ $\omega_3^2 = 59621.6\ rad^2/s^2$

$T_1 = 0.154\ s$ $T_2 = 0.046\ s$ $T_3 = 0.026\ s$

Sentido Y

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 4.0330 \\ 3.0186 \\ 1.3574 \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 2.9958 \\ -2.4162 \\ -3.6225 \end{bmatrix} \qquad Y_3 = \begin{bmatrix} 1.4097 \\ -3.5025 \\ 3.6006 \end{bmatrix}$$

$\omega_1^2 = 1986.3\ rad^2/s^2$ $\omega_2^2 = 20328.4\ rad^2/s^2$ $\omega_3^2 = 59187.6\ rad^2/s^2$

$T_1 = 0.141\ s$ $T_2 = 0.044\ s$ $T_3 = 0.026\ s$

Sabiendo que:

$$\left[K \right] \left[Y \right] \left[U(t) \right] + \left[M \right] \left[Y \right] \left[\ddot{U}(t) \right] = - \left[M \right] \ddot{x}_g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

desacoplamos los modos premultiplicando por $\left[Y \right]^T$, resultando tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales, no homogeneas y desacopladas:

$$\omega_1^2 \, u_1(t) + \ddot{u}_1(t) = - C_1 \, \ddot{x}_g$$

$$\omega_2^2 \, u_2(t) + \ddot{u}_2(t) = - C_2 \, \ddot{x}_g \qquad (3.8)$$

$$\omega_3^2 \, u_3(t) + \ddot{u}_2(t) = - C_3 \, \ddot{x}_g$$

A pesar de que el modelo será probado con cargas estáticas, tomaremos como solución del sistema de ecuaciones anterior el espectro de diseño que indica la sección 3 de las Normas Técnicas Complementarias del Distrito Federal para diseño por sismo, (Figura 3-2) ya que los resultados que marque éste nos darán la pauta para probar el modelo a una serie de sistemas de carga congruentes. Así pues, y con el fin de obtener cargas elevadas en la estructura, supondremos que el edificio pertenece al grupo A, debiendose incrementar con 50% el valor del coeficiente sísmico c, que se encuentra en la zona III y que el factor de comportamiento sísmico es igual a uno.

La sección 4 de las Normas Técnicas Complementarias del Distrito Federal para diseño por sismo indica que:

$Q' = Q$, si se desconoce T o si éste es mayor o igual que T_a

$Q' = 1 + (T/T_a)(Q - 1)$, si T es menor que T_a

La aceleración de las masas se reducen dividiendolas entre el factor Q', tomando en cuenta así el comportamiento inelástico de la estructura.

Debido a que el modelo no cumple con las condiciones de regularidad que estipula la sección 6 de las Normas Técnicas Complementarias del Distrito Federal para diseño por sismo, el factor reductivo Q', que se calcula según la sección 4 de las mismas, deberá ser multiplicado por 0.8, tal como se indica en esta misma sección. Así pues, observando las formulas para el cálculo del factor reductivo Q' y teniendo en cuenta que ningun periodo calculado es mayor que T_a, encontramos que, en todos los casos, la aceleración calculada de las masas deberá ser dividida entre 0.8.

Primeramente calculamos los coeficientes de participación de la estructura en cada sentido con la fórmula 3.7.

Sentido X

$$C_1 = (4.0978 + 2.9713 + 1.2845)\ 0.036738 = 0.306183$$

$$C_2 = (2.9447 - 2.5978 - 3.4550)\ 0.036738 = -0.113452$$

$$C_3 = (1.3270 - 3.4120 + 3.7171)\ 0.036738 = 0.059961$$

Sentido Y

$$C_1 = (4.0330 + 3.0186 + 1.3574)\ 0.036738 = 0.308933$$

$$C_2 = (2.0055 - 2.4162 - 3.6225)\ 0.036738 = -0.108128$$

$$C_3 = (1.4097 - 3.5025 + 3.6006)\ 0.036738 = 0.055394$$

Cálculo de los desplazamientos y fuerzas en cada sentido

Primer modo

Sentido X

Con $T_1 = 0.154$ s $\rightarrow$ $a/g = 0.2853$ $\rightarrow$ $a = 325.02\ cm/s^2$

Utilizando la ecuación 3.9:

$$\left| u_{1x_{max}} \right| = \frac{0.306163 \times 325.02}{1669.7} = 0.059597\ cm$$

Los desplazamientos máximos son:

$$\begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0978 \\ 2.9713 \\ 1.2645 \end{bmatrix} 0.059597 = \begin{bmatrix} 0.2442 \\ 0.1770 \\ 0.0753 \end{bmatrix} cm$$

Las fuerzas máximas son:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = 1880.7 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2442 \\ 0.1770 \\ 0.0753 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9808 \\ 10.8624 \\ 4.6229 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Por consiguiente los cortantes son:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9808 \\ 25.8432 \\ 30.4661 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Sentido Y

Con $T_1 = 0.141 \quad \rightarrow \quad a/g = 0.2557 \quad \rightarrow \quad a = 313.28 \text{ cm/s}^2$

$$\left| u_{sy_{max}} \right| = 0.048725 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1965 \\ 0.1471 \\ 0.0661 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.3397 \\ 10.7329 \\ 4.8284 \end{bmatrix} \text{Kg} \qquad \begin{bmatrix} V_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.3397 \\ 25.0726 \\ 29.9010 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Segundo Modo

Sentido X

$$\text{Con } T_2 = 0.046 \quad \rightarrow \quad a/g = 0.1848 \quad \rightarrow \quad a = 228.38 \text{ cm/s}^2$$

$$\left| u_{2x_{max}} \right| = 0.001399 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0041 \\ -0.0036 \\ -0.0048 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7783 \\ -2.4509 \\ -3.2409 \end{bmatrix} \text{Kg} \qquad \begin{bmatrix} V_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7783 \\ 0.3274 \\ -2.9135 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Sentido Y

$$\text{Con } T_2 = 0.044 \quad \rightarrow \quad a/g = 0.1831 \quad \rightarrow \quad a = 224.24 \text{ cm/s}^2$$

$$\left| u_{2y_{max}} \right| = 0.001199 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0036 \\ -\ 0.0029 \\ -\ 0.0042 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6683 \\ -\ 2.1522 \\ -\ 3.1376 \end{bmatrix} \text{Kg} \qquad \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6683 \\ 0.5161 \\ -\ 2.6215 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Tercer Modo

Sentido X

Con $T_3 = 0.086 \rightarrow a/g = 0.1699 \rightarrow a = 207.39 \text{ cm/s}^2$

$$\left| u_{3x_{max}} \right| = 0.000209 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ -\ 0.0007 \\ 0.0008 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6062 \\ -\ 1.5587 \\ 1.6981 \end{bmatrix} \text{Kg} \qquad \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6062 \\ -\ 0.9525 \\ 0.7456 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Sentido Y

$$\text{Con } T_3 = 0.026 \rightarrow a/g = 0.1694 \rightarrow a = 207.48 \text{ cm/s}^2$$

$$\left| u_{3y_{max}} \right| = 0.000194 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0003 \\ -0.0007 \\ 0.0007 \end{bmatrix} \text{cm}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5952 \\ -1.4789 \\ 1.5203 \end{bmatrix} \text{Kg} \qquad \begin{bmatrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5952 \\ -0.8837 \\ 0.6366 \end{bmatrix} \text{Kg}$$

Hemos obtenido hasta ahora, tanto los desplazamientos como las fuerzas que se generarían si la estructura vibrara, en cada sentido, con la frecuencia de cada uno de los modos. Sin embargo la distribución de las fuerzas en cada marco, dependerá de las condiciones de rigidez que imperen en éstos, por lo que a continuación se plantea la distribución de la fuerza sísmica actuante en la estructura sobre cada uno de los elementos resistentes.

Para realizar esto, iniciaremos los cálculos suponiendo una rigidez en cada marco, calculadas con las fórmulas de Wilbur.

Cuando se suponen las columnas empotradas en la cimentación, las fórmulas enuncian que:

Para el primer entrepiso:

$$K_1 = \frac{48\ E}{h_1 \left[\dfrac{4\ h_1}{\Sigma\ k_{c1}} + \dfrac{h_1 + h_2}{\Sigma\ k_{t1} + \dfrac{\Sigma\ k_{c1}}{12}} \right]} \qquad (3.12)$$

Para el segundo entrepiso:

$$K_2 = \frac{48\ E}{h_2 \left[\dfrac{4\ h_2}{\Sigma\ k_{c2}} + \dfrac{h_1 + h_2}{\Sigma\ k_{t1} + \dfrac{\Sigma\ k_{c1}}{12}} + \dfrac{h_2 + h_3}{\Sigma\ k_{t2}} \right]} \qquad (3.13)$$

Para entrepisos intermedios:

$$K_n = \frac{48\ E}{h_n \left[\dfrac{4\ h_n}{\Sigma\ k_{cn}} + \dfrac{h_m + h_n}{\Sigma\ k_{tm}} + \dfrac{h_n + h_o}{\Sigma\ k_{tn}} \right]} \qquad (3.14)$$

donde:

m,n,o   índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba.

K_n rigidez del entrepiso en cuestión.

k_{tn} rigidez (I/L) de las vigas del nivel sobre el piso n.

k_{cn} rigidez (I/L) de las columnas del entrepiso n.

h_n altura del entrepiso n.

Así, al utilizar las ecuaciones 3.12, 3.13 y 3.14, las rigideces de cada marco resultan ser:

Marco 1:

$$K_1 = 159.65 \text{ Kg/cm}$$
$$K_2 = 107.16 \text{ Kg/cm}$$
$$K_3 = 102.93 \text{ Kg/cm}$$

Marco 2:

$$K_1 = 183.60 \text{ Kg/cm}$$
$$K_2 = 133.48 \text{ Kg/cm}$$
$$K_3 = 130.38 \text{ Kg/cm}$$

Marco 3:

$$K_1 = 95.03 \text{ Kg/cm}$$
$$K_2 = 60.03 \text{ Kg/cm}$$
$$K_3 = 56.69 \text{ Kg/cm}$$

Marcos A y B:

$$K_1 = 135.70 \text{ Kg/cm}$$
$$K_2 = 83.54 \text{ Kg/cm}$$
$$K_3 = 78.23 \text{ Kg/cm}$$

Marco C:

K_1 = 132.89 Kg/cm

K_2 = 80.73 Kg/cm

K_3' = 75.30 Kg/cm

Cabe aclarar que existiendo en la estructura una excentricidad entre sus centros de masa y rigidez, la presencia de un momento torsionante es inevitable. Dicho momento sera distribuido de una manera semejante a como se realiza en un Análisis Estático (tal como se hace en el capitulo 5), con la diferencia de que no serán consideradas las excentricidades accidentales, debido esto, a que el modelo fisico supone una construcción ideal.

Teniendo como datos las rigideces de entrepiso y la localización de los marcos en planta (Figura 3-3), los centros de rigidez son:

Primer nivel:

$$Y_T = \frac{135.70 \times 80 + 135.70 \times 40 + 119.42 \times 0}{135.70 + 135.70 + 119.42} = 41.67 \text{ cm}$$

$$X_T = \frac{159.65 \times 0 + 183.60 \times 80 + 95.03 \times 120 + 13.27 \times 120}{159.65 + 183.60 + 95.03 + 13.27} = 53.18 \text{ cm}$$

Segundo Nivel:

Y_T = 41.82 cm

X_T = 52.41 cm

Tercer Nivel:

Y_T = 41.87 cm

X_T = 52.19 cm

A continuación se presentan los resultados en forma de tablas:

Primer Modo

Primer Nivel

Sentido X

Y_T = 41.67 cm e_s = 7.22 cm V = 30.47 Kg M = 220.05 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	135.70	38.33	5202.05	199414.1	10.578	0.848	11.426
B	135.70	- 1.67	- 226.12	376.8	10.578	- 0.037	10.541
C	119.42	-41.67	-4975.93	207328.4	9.309	- 0.811	8.498
Sumas				407119.3			

Sentido Y

X_T = 53.18 cm e_s = 0.16 cm V = 29.90 Kg M = 4.69 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
1	159.65	-53.18	-8489.75	451458.4	10.571	- 0.029	10.542
2	183.60	6.82	1252.77	8549.1	12.157	0.004	12.161
3	95.03	66.82	6350.88	424347.4	6.292	0.022	6.314
C	13.27	66.82	886.70	59252.2	0.879	0.003	0.882
Sumas				943604.1			

Segundo Nivel

Sentido X

Y_T = 41.82 cm e_s = 7.07 cm V = 25.84 Kg M = 182.80 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	83.54	38.19	3189.82	121802.2	9.005	0.676	9.681
B	83.54	- 1.82	- 151.64	275.3	9.005	- 0.032	8.973
C	72.66	-41.82	-3038.17	127042.0	7.832	- 0.644	7.188
Sumas				249119.5			

Sentido Y

X_T = 52.41 cm e_s = 0.92 cm V = 25.07 Kg M = 23.18 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
1	107.16	-52.41	-5616.32	294345.0	8.703	- 0.151	8.552
2	133.48	7.59	1013.25	7691.7	10.840	0.027	10.867
3	60.03	67.59	4057.41	274245.0	4.875	0.109	4.984
C	8.07	67.59	545.68	36882.0	0.655	0.015	0.670
Sumas				613163.7			

Tercer Nivel

Sentido X

Y_T = 41.87 cm e_s = 7.02 cm V = 14.98 Kg M = 105.20 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	78.23	38.13	2983.17	113759.1	5.227	0.384	5.611
B	78.23	- 1.87	- 146.01	272.5	5.227	- 0.019	5.208
C	67.77	-41.87	-2837.17	118781.9	4.528	- 0.366	4.162
Sumas				232813.5			

Sentido Y

X_T = [illegible].10 cm e_s = 1.14 cm V = 14.34 Kg M = 16.38 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X_{iT}^2$	Directo	Torsión	Total
1	102.93	-52.19	-5372.37	280398.3	4.961	- 0.108	4.853
2	130.38	7.81	1017.94	7947.4	6.284	0.020	6.304
3	56.69	67.81	3843.96	260642.1	2.732	0.077	2.809
C	7.53	67.81	510.57	34620.3	0.363	0.010	0.373
Sumas				583608.1			

Las tablas de los siguientes modos se presentan en forma condensada para evitar repeticiones numéricas.

Segundo Modo

Primer Nivel

Sentido X

V = - 2.91 Kg M = 21.04 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	- 1.012	- 0.081	- 1.093
B	- 1.012	- 0.004	- 1.008
C	- 0.890	0.078	- 0.812

Sentido Y

V = - 2.62 Kg   M = 0.41 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	- 0.927	0.003	- 0.924
2	- 1.066	- 4 E^{-4}	- 1.066
3	- 0.552	- 0.002	- 0.554
C	- 0.077	- 3 E^{-4}	- 0.077

Segundo Nivel

Sentido X

V = 0.33 Kg   M = 2.32 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	0.114	0.009	0.123
B	0.114	- 4 E^{-4}	0.114
C	0.099	- 0.008	0.091

Sentido Y

V = 0.52 Kg   M = 0.49 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	0.179	$- 3\ E^{-4}$	0.179
2	0.223	0.001	0.224
3	0.100	0.002	0.102
C	0.014	$- 3\ E^{-4}$	0.014

Tercer Nivel

Sentido X

V = 2.78 Kg   M = 19.51 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	0.969	0.071	1.040
B	0.969	- 0.003	0.966
C	0.840	- 0.068	0.772

Sentido Y

V = 2.67 Kg   M = 3.04 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	0.923	- 0.020	0.903
2	1.169	0.004	1.173
3	0.508	0.014	0.522
C	0.068	0.002	0.070

Tercer Modo

Primer Nivel

Sentido X

V = 0.75 Kg   M = 5.39 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	0.259	0.021	0.280
B	0.259	- 0.001	0.258
C	0.228	- 0.020	0.208

Sentido Y

V = 0.64 Kg   M = 0.10 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	0.225	- 0.001	0.224
2	0.259	$9\ E^{-5}$	0.259
3	0.134	$5\ E^{-4}$	0.134
C	0.019	$7\ E^{-5}$	0.019

Segundo Nivel

Sentido X

V = - 0.95 Kg   M = 6.74 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	- 0.332	- 0.025	- 0.357
B	- 0.332	0.001	- 0.331
C	- 0.289	0.024	- 0.265

Sentido Y

V = - 0.88 Kg   M = 0.82 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	- 0.307	0.005	- 0.302
2	- 0.382	- 0.001	- 0.383
3	- 0.172	- 0.004	- 0.176
C	- 0.023	- 0.001	- 0.024

Tercer Nivel

Sentido X

V = 0.81 Kg   M = 4.28 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
A	0.212	0.015	0.227
B	0.212	- 0.001	0.211
C	0.183	- 0.015	0.168

Sentido Y

V = 0.80 Kg   M = 0.68 Kg-cm

Eje	Directo	Torsión	Total
1	0.206	- 0.005	0.201
2	0.261	0.001	0.262
3	0.114	0.003	0.117
C	0.015	$4\ E^{-4}$	0.015

En seguida presentamos las fuerzas y desplazamientos en cada marco, con lo cual resumimos este análisis.

Modo 1

Marco A

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	5.6110	5.6110	78.2294	0.07172	0.27182
2	4.0706	9.6816	83.5366	0.11590	0.20010
1	1.7443	11.4259	135.7041	0.08420	0.08420

Marco B

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	5.2078	5.2078	78.2294	0.06657	0.25167
2	3.7654	8.9732	83.5365	0.10742	0.18510
1	1.5684	10.5416	135.7041	0.07768	0.07768

Marco C (dir. X)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	4.1620	4.1620	67.7672	0.06142	0.23152
2	3.0264	7.1884	72.6570	0.09894	0.17010
1	1.3103	8.4987	119.4236	0.07116	0.07116

Marco 1

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	4.8533	4.8533	102.9335	0.04715	0.19298
2	3.6983	8.5516	107.1636	0.07980	0.14583
1	1.9901	10.5417	159.6519	0.06603	0.06603

Marco 2

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	6.3042	6.3042	130.3824	0.04835	0.19600
2	4.5626	10.8668	133.4775	0.08141	0.14765
1	1.2944	12.1612	183.6000	0.06624	0.06624

Marco 3

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	2.8091	2.8091	56.6880	0.04955	0.19903
2	2.1748	4.9839	60.0287	0.08303	0.14948
1	1.3305	6.3144	95.0309	0.06645	0.06645

Marco C (dir. Y)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.3731	0.3731	7.5297	0.04955	0.19903
2	0.2972	0.6703	8.0730	0.08303	0.14948
1	0.2114	0.8817	13.2693	0.06645	0.06645

Modo 2

Marco A

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	1.0406	1.0406	78.2294	0.01330	0.00672
2	- 0.9180	0.1226	83.5365	0.00147	- 0.00658
1	- 1.2153	- 1.0927	135.7041	- 0.00805	- 0.00805

Marco B

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.9658	0.9658	78.2294	0.01235	0.00628
2	- 0.8521	0.1137	83.5365	0.00136	- 0.00607
1	- 1.1218	- 1.0081	135.7041	- 0.00743	- 0.00743

Marco C (dir. X)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.7719	0.7719	67.7672	0.01139	0.00583
2	- 0.6808	0.0911	72.6570	0.00125	- 0.00556
1	- 0.9038	- 0.8127	119.4236	- 0.00681	- 0.00681

Marco 1

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.9031	0.9031	102.9335	0.00877	0.00462
2	- 0.7271	0.1760	107.1636	0.00164	- 0.00415
1	- 1.1003	- 0.9243	159.6519	- 0.00579	- 0.00579

Marco 2

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	1.1731	1.1731	130.3824	0.00900	0.00487
2	- 0.9494	0.2237	133.4775	0.00168	- 0.00413
1	- 1.2900	- 1.0663	183.6000	- 0.00581	- 0.00581

Marco 3

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.5227	0.5227	56.6880	0.00922	0.00510
2	- 0.4201	0.1026	60.0287	0.00171	- 0.00412
1	- 0.6562	- 0.5536	95.0309	- 0.00583	- 0.00583

Marco C (dir. Y)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.0694	0.0694	7.5297	0.00922	0.00510
2	- 0.0556	0.0138	8.0730	0.00171	- 0.00412
1	- 0.0911	- 0.0773	13.2623	- 0.00583	- 0.00583

Modo 3

Marco A

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.2271	0.2271	78.2294	0.00290	6.9 E^{-4}
2	- 0.5839	- 0.3568	83.5365	- 0.00427	- 0.00221
1	0.6364	0.2796	135.7041	0.00206	0.00206

Marco B

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.2107	0.2107	78.2294	0.00269	6.3 E^{-4}
2	- 0.5414	- 0.3307	83.5365	- 0.00396	- 0.00206
1	0.5887	0.2580	135.7041	0.00190	0.00190

Marco C (dir. X)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.1684	0.1684	67.7672	0.00248	5.7 E^{-4}
2	- 0.4334	- 0.2650	72.6570	- 0.00365	- 0.00191
1	0.4730	0.2080	119.4236	0.00174	0.00174

Marco 1

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.2014	0.2014	102.9335	0.00196	5.6 E^{-4}
2	- 0.5028	- 0.3014	107.1636	- 0.00281	- 0.00140
1	0.5259	0.2245	159.6519	0.00141	0.00141

Marco 2

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.2617	0.2617	130.3824	0.00201	5.5 E^{-4}
2	- 0.6447	- 0.3830	133.4775	- 0.00287	- 0.00146
1	0.6419	0.2589	183.6000	0.00141	0.00141

Marco 3

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.1166	0.1166	56.6880	0.00206	5.4 E^{-4}
2	- 0.2923	- 0.1757	60.0287	- 0.00293	- 0.00152
1	0.3101	0.1344	95.0309	0.00141	0.00141

Marco C (dir. Y)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.0155	0.0155	7.5297	0.00206	5.6 E^{-4}
2	- 0.0391	- 0.0236	8.0730	- 0.00292	0.00150
1	0.0424	0.0188	13.2693	0.00142	0.00142

CAPITULO 4.- ANALISIS TRIDIMENSIONAL

La mayoria de las estructuras son idealizadas en el plano. Aunque ésto no concuerda del todo con la realidad, si nos ofrece gran facilidad en la realización de los cálculos, resultando en ocaciones suficiente. Dependiendo de la complejidad de la estructura a resolver, es posible crearnos un criterio que nos conduzca a una solución óptima tanto estructural como económica, de tal manera que seamos capaces de elegir el tipo de análisis mas conveniente (Estático, A.D.M.E. Tridimensional, Paso a Paso, Elemento Finito, etc).

El método que utiliza la mayor cantidad de varibles que se presentan dentro de una estructura real es el del Elemento Finito, el cual idealiza cualquier parte estructural como elemento que tiene de tres a seis grados de libertad por nudo. Sin embargo, existen dos grandes dificultades en su utilización: primero, es demasiado alto el número de grados de libertad que se tendrian para un edificio incluso de un sólo nivel, para lo cual se deberá de contar con una capacidad muy grande de entrada-proceso-salida de computadora; y segundo, al ser tan elevado el número de datos que se manejan, es muy dificil tanto la organización como la interpretación de los datos necesarios para solucionar el problema.

Debido a los inconvenientes que se presentan en el método anteriormente mencionado, la práctica de éste se reserva a estructuras o partes estructurales muy importantes. Es por ello que para realizar un Análisis Tridimensional de menor complejidad, se idealiza a la estructura como un conjunto de subestructuras (marcos, muros, etc.) planas verticalmente, ligadas por un sistema de piso infinitamente rígido, es decir, indeformable en su plano. De esta manera, cuando las cargas laterales sean aplicadas a este sistema estructural, el problema se reducirá a sólo tres grados de libertad por nivel; dos desplazamientos laterales, uno a cada eje horizontal, y un giro alrededor de un eje normal a los dos anteriores situado en un punto cualquiera de cada piso.

Una de las ideas de generar tres grados de libertad por nivel es para considerar la torsión, que es un problema que se presenta en toda edificación de rigidez y/o geometría asimétrica. Así pues, la torsión en un edificio está definida como la tendencia de giro alrededor de un eje vertical generado en sus planos horizontales, provocando un esfuerzo adicional en sus elementos resistentes (Figura 4-1).

Fundamentalmente la torsión se debe a la no coincidencia entre la resultante de las cargas sísmicas que pasa por el centro de masa y a la de los elementos resistentes, cuyo punto de acción se localiza en el centro de rigidez o torsión.

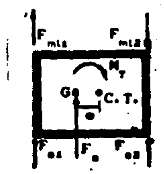


Figura 4-1 Efecto torsionante en un edificio

En cada piso, la resultante de los empujes producirá desplazamientos laterales y al ser multiplicada por la excentricidad existente entre el centro de masa y el de rigidez se generará un par o momento torsionante.

Habría que destacar que estos efectos torsionales son los producidos por condiciones inherentes a la estructura, sin embargo no hay que olvidar que las componentes rotacionales del movimiento del terreno mismo, introducen esfuerzos que pueden llegar a ser más elevados. De hecho la totalidad de la perturbación que origina los momentos torsionales puede ser de este tipo. también se ha visto que el comportamiento no lineal puede introducir pares de torsión, rara vez tomados en cuenta en un análisis convencional. En la actualidad sólamente se a podido inferir características de tales componentes a partir de los registros de traslación.

Así pues, la compleja situación que encierra los puntos arriba mencionados, hace hasta el momento imposible estimar con precisión estas torsiones adicionales.

Este capítulo estará referido a un análisis con tres grados de libertad por nivel, donde las matrices de rigidez lineal de cada marco (definidas en el capítulo 3), serán transformadas a un sistema coordenado tridimensional, siendo necesaria la demostración de una matriz de transformación de coordenadas planas a espaciales.

Consideremos un sistema de coordenadas en una estructura de comportamiento lineal que defina la ubicación y dirección de las fuerzas $\left[F \right]$ y los desplazamientos $\left[D \right]$ y digamos que la matriz de rigidez correspondiente es $\left[K \right]$. Podemos definir otro sistema de coordenadas para la misma estructura que se refiera a a fuerzas $\left[F^{*} \right]$ y desplazamientos $\left[D^{*} \right]$ con la matriz de rigidez $\left[K^{*} \right]$. Si los desplazamientos o fuerzas de los dos sistemas de coordenadas se relacionan por:

$$\left[D \right] = \left[H \right] \left[D^{*} \right]$$

o (4.1)

$$\left[F^{*} \right] = \left[H \right]^{T} \left[F \right]$$

entonces, la matriz de rigidez $\left[K \right]$ se puede transferir a $\left[K^{*} \right]$ con la ecuación:

$$\left[K^{*} \right] = \left[H \right]^{T} \left[K \right] \left[H \right] \qquad (4.2)$$

donde la matriz de transformación $\left[H \right]$ se forma con relaciones geométricas de los desplazamientos $\left[D \right]$ y $\left[D^{*} \right]$, y se deduce que estas relaciones son válidas independientemente de las fuerzas aplicadas a las coordenadas. Los dos sistemas de fuerzas $\left[F \right]$ y $\left[F^{*} \right]$ son equivalentes uno al otro, lo que significa que las fuerzas $\left[F \right]$ producen desplazamientos $\left[D \right]$ y $\left[D^{*} \right]$ de la misma magnitud que causarían las fuerzas $\left[F^{*} \right]$. También, los sistemas $\left[F \right]$ y $\left[F^{*} \right]$ hacen el mismo trabajo para producir el desplazamiento $\left[D \right]$ o $\left[D^{*} \right]$.

Para probar la ecuación 4.2, suponemos que la estructura esta sometida a fuerzas $\left[F \right]$ y expresamos el trabajo realizado por estas fuerzas como:

$$W = \frac{1}{2} \left[D \right]^{T} \left[K \right] \left[D \right] \qquad (4.3)$$

sustituyendo el valor de $\left[D \right]$ dado en la ecuación 4.1, obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \left[D^{*} \right]^{T} \left[H \right]^{T} \left[K \right] \left[H \right] \left[D^{*} \right]$$

Ahora, si suponemos que la estructura se somete a fuerzas $\left[F^{*} \right]$ y aplicamos otra vez la ecuación 4.3, obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \left[D^{*} \right]^{T} \left[K^{*} \right] \left[D^{*} \right]$$

Una comparación de las dos expresiones para W nos da la relación entre las matrices $\left[K^{*} \right]$ y $\left[K \right]$, que es la ecuación 4.2. Para formar la matriz de rigideces utilizaremos este principio, expresando las matrices $\left[K^{*} \right]$ en términos de los grados de libertad del edificio completo, es decir, de los dos desplazamientos y el giro de un punto en cada piso.

Para esto considérese la Figura 4-2 donde se llaman u_i, v_i y θ_i a los desplazamientos y el giro del centro de masas (punto elegido por conveniencia) del piso i, donde el marco j tiene en el piso i un desplazamiento lateral d_{ji} y considerando que el ángulo θ_i es pequeño se puede expresar de la siguiente manera:

$$d_{ji} = \left[\cos \phi_j, \ \mathrm{sen}\ \phi_j, \ r_{ji} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

ϕ_j es el ángulo que se forma entre las direcciones positivas de u_i y de d_{ji}; r_{ji} es la distancia de la proyección del marco j al centro de masas del piso, y tiene signo positivo cuando el giro de d_{ji} alrededor del centro de masas es del mismo sentido que θ_i.

En forma condensada la expresión 4.4 se escribe:

$$d_{ji} = h_{ji}^{T}\, u_i$$

donde la matriz de transformación es:

$$h_{ji} = \begin{bmatrix} \cos \phi_j \\ \operatorname{sen} \phi_j \\ r_{ji} \end{bmatrix}$$

y la matriz de desplazamientos es:

$$u_i = \begin{bmatrix} u_i \\ \nu_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

Cuando se consideran los n niveles de los marcos, se tiene:

$$\mathbb{D}_j = \mathbb{H}_j\, \mathbb{U} \qquad (4.5)$$

Las matrices de esta última expresión se definen como:

$$\mathbb{D}_j = \begin{bmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{jn} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{H}_j = \begin{bmatrix} h_{j1}^{T} & & & & \\ & h_{j2}^{T} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & h_{jn}^{T} \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbb{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}$$

(n elementos) (n × 3n elementos) (3n elementos)

Por lo que la matriz de rigidez $\left[K^{*} \right]$ se forma por la relación dada en la ecuación 4.2. Para nuestro caso realizaremos dicha operación mediante un programa de computadora, en el cual se deberá tener como datos las matrices lineales de cada marco, así como su ubicación en el espacio (Figura 4-2).

```
10 REM Programa para obtener la matriz de rigidez tridimensional
20 INPUT "No. de marcos =", N
30 INPUT "No. de niveles =", L
40 DIM K(N,L,L): DIM B(N,L,3*L): DIM C(N,3*L,L)
50 DIM X(N,3*L,L): DIM Y(N,3*L,3*L): DIM Z(3*L,3*L)
60 FOR H = 1 TO N
70 FOR I = 1 TO L
80 FOR J = 1 TO L
90 PRINT "K marco";H;"(";I;",";J;") = ";:INPUT K(H,I,J)
100 NEXT J
110 NEXT I
120 NEXT H
130 FOR H = 1 TO N
140 U = -2
150 FOR I = 1 TO L
160 U = U + 1
170 FOR J = 1 TO 3*L
180 IF J >= 2*I+U AND J <= 2*I+U+2 THEN 190 ELSE 210
190 PRINT "b marco";H;"nivel";I;"desplazamiento";J;
200 INPUT B(H,I,J): GOTO 220
210 B(H,I,J) = 0
220 NEXT J
230 NEXT I
240 NEXT H
250 FOR H = 1 TO N
260 FOR I = 1 TO 3*L
270 FOR J = 1 TO L
280 C(H,I,J) = B(H,I,J)
290 NEXT J
300 NEXT I
310 NEXT H
320 FOR H = 1 TO N
330 FOR I = 1 TO 3*L
340 FOR J = 1 TO L
350 X(H,I,J) = 0
360 FOR R = 1 TO L
370 X(H,I,J) = X(H,I,J) + C(H,I,R) * K(H,R,J)
380 NEXT R
390 NEXT J
400 NEXT I
410 NEXT H
420 FOR H = 1 TO N
430 FOR I = 1 TO 3*L
440 FOR J = 1 TO 3*L
```

```
450 Y(H,I,J) = 0
460 FOR R = 1 TO L
470 Y(H,I,J) = Y(H,I,J) + X(H,I,R) * B(H,R,J)
480 NEXT R
490 PRINT "K* marco";H;"(";I;",";J;") = ";Y(H,I,J)
500 NEXT J
505 STOP
510 NEXT I
520 NEXT H
530 STOP
540 FOR I = 1 TO 3*L
550 FOR J = 1 TO 3*L
560 Z(I,J) = 0
570 FOR H = 1 TO N
580 Z(I,J) = Z(I,J) + Y(H,I,J)
590 NEXT H
600 PRINT "K(";I;",";J;") = "; Z(I,J)
610 NEXT J
620 STOP
630 NEXT I
640 END
```

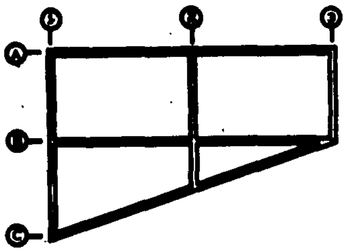


Figura 4-2 Planta de la ubicacion de los marcos del modelo

Tomando en cuenta las siguientes matrices de transformación de coordenadas (figura 4-2) para cada marco (iguales en los tres niveles del modelo):

$$h^T_{Ai} = \begin{bmatrix} 1.00, & 0.00, & -31.11 \end{bmatrix}$$

$$h^T_{Bi} = \begin{bmatrix} 1.00, & 0.00, & 8.88 \end{bmatrix}$$

$$h^T_{Ci} = \begin{bmatrix} 0.94868, & 0.31623, & 29.5145 \end{bmatrix}$$

$$h^T_{1i} = \begin{bmatrix} 0.00, & 1.00, & -53.33 \end{bmatrix}$$

$$h^T_{2i} = \begin{bmatrix} 0.00, & 1.00, & 6.66 \end{bmatrix}$$

$$h^T_{3i} = \begin{bmatrix} 0.00, & 1.00, & 66.66 \end{bmatrix}$$

y con las matrices de rigidez lineal (obtenidas en el capitulo 3), el programa muestra los siguientes resultados de las matrices de rigidez tridimensional en las Tablas 4-1 a 4-7.

La matriz de masas se muestra en la Tabla 4-8, donde la inercia rotacional de todos los niveles es M_ϕ = 1520.987654 M gr-s^2/cm, obtenida por las dos ecuaciones siguientes:

$$M_\phi = I_{rotacional} = M\, I_{polar}$$

$$I_{polar} = I_x + I_y$$

Al utilizar el programa visto en el capitulo 3 (Stodola-Vianello) para la obtención de los modos normalizados, las frecuencias y los periodos de vibración de la estructura, resulta:

Modos de vibración

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 3.75795 \\ -1.59407 \\ -0.00357 \\ 2.73017 \\ -1.19338 \\ -0.00257 \\ 1.16571 \\ -0.53688 \\ -0.00106 \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 1.62013 \\ 3.70099 \\ -0.00434 \\ 1.16464 \\ 2.77322 \\ -0.00339 \\ 0.48809 \\ 1.24956 \\ -0.00169 \end{bmatrix} \qquad Y_3 = \begin{bmatrix} 0.17543 \\ 0.13074 \\ 0.10417 \\ 0.16217 \\ 0.06156 \\ 0.07661 \\ 0.09585 \\ 0.00145 \\ 0.03346 \end{bmatrix}$$

$\omega_1^2 = 1594.1\ rad^2/s^2$ $\qquad \omega_2^2 = 2057.2\ rad^2/s^2$ $\qquad \omega_3^2 = 3313.7\ rad^2/s^2$

$T_1 = 0.157\ s$ $\qquad T_2 = 0.138\ s$ $\qquad T_3 = 0.109\ s$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 2.52370 \\ -1.54783 \\ -0.00135 \\ -2.22032 \\ 1.23424 \\ 0.00174 \\ -2.95677 \\ 1.80166 \\ 0.00191 \end{bmatrix} \qquad Y_5 = \begin{bmatrix} 1.50842 \\ 2.55956 \\ -0.00610 \\ -1.34044 \\ -2.06481 \\ 0.00437 \\ -1.73523 \\ -3.02690 \\ 0.00697 \end{bmatrix} \qquad Y_6 = \begin{bmatrix} 0.16838 \\ 0.16935 \\ 0.07573 \\ -0.14928 \\ -0.17724 \\ -0.06404 \\ -0.20044 \\ -0.15663 \\ -0.08913 \end{bmatrix}$$

$\omega_4^2 = 17212.3\ rad^2/s^2$ $\qquad \omega_5^2 = 21376.1\ rad^2/s^2$ $\qquad \omega_6^2 = 35016.2\ rad^2/s^2$

$T_4 = 0.048\ s$ $\qquad T_5 = 0.043\ s$ $\qquad T_6 = 0.034\ s$

$$Y_7 = \begin{bmatrix} 0.91514 \\ -1.02934 \\ 0.00076 \\ -2.35815 \\ 2.54000 \\ -0.00120 \\ 2.57507 \\ -2.58377 \\ 0.00005 \end{bmatrix} \qquad Y_8 = \begin{bmatrix} 0.95492 \\ 0.96154 \\ -0.00421 \\ -2.45247 \\ -2.40066 \\ 0.00996 \\ 2.66821 \\ 2.48516 \\ -0.00932 \end{bmatrix} \qquad Y_9 = \begin{bmatrix} 0.09445 \\ 0.10420 \\ 0.03495 \\ -0.24352 \\ -0.26767 \\ -0.08821 \\ 0.26707 \\ 0.27486 \\ 0.09321 \end{bmatrix}$$

$$\omega_7^2 = 53254.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \qquad \omega_8^2 = 65068.1 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \qquad \omega_9^2 = 107786.2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$T_7 = 0.027 \text{ s} \qquad T_8 = 0.025 \text{ s} \qquad T_9 = 0.019 \text{ s}$$

De acuerdo a la sección 9.1 de las Normas Tecnicas Complementarias despreciaremos los efectos que se producen en los modos superiores al tercero.

Debido a que en este caso se consideró como grado de libertad el giro en las plantas, los coeficientes de participación se calculan con la siguiente expresión:

$$C_j = \left[Y \right]^T \left[M \right] \left[R \right] \tag{4.6}$$

donde $\left[R \right]$ es el vector que contiene unos de los lugares correspondientes a los grados de libertad orientados en la dirección en que está actuando el sismo, y ceros en los demás lugares. Si se considera el sismo actuando en la dirección X se tiene:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que los coeficientes de participación para un sismo actuando en el sentido X son:

$$C_{1x} = 0.281190 \qquad C_{2x} = 0.120240 \qquad C_{3x} = 0.015557$$

y en el sentido Y son:

$$C_{1y} = 0.122130 \qquad C_{2y} = 0.283759 \qquad C_{3y} = 0.007118$$

Tomando en cuenta que las caracteristicas para referirnos al espectro de diseño del Distrito Federal son idénticas a las expuestas en el capitulo 3, llevaremos a cabo los calculos para la obtención de los desplazamientos y fuerzas del modelo.

Sismo actuando en la dirección X

Primer modo

Con $T_1 = 0.157$ s $\rightarrow$ $a/g = 0.2680$ $\rightarrow$ $a = 328.33$ cm/s^2

Utilizando la ecuación 3.9:

$$\left| u_{1x_{max}} \right| = \frac{0.281190 \times 328.33}{1594.1} = 0.057916 \text{ cm}$$

Los desplazamientos máximos son:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.75798 \\ -1.59407 \\ -0.00357 \\ 2.73017 \\ -1.19338 \\ -0.00257 \\ 1.16571 \\ -0.53688 \\ -0.00106 \end{bmatrix} 0.057916 = \begin{bmatrix} 0.21764 \\ -0.09232 \\ -2.1\text{ E}^{-4} \\ 0.15812 \\ -0.06911 \\ -1.5\text{ E}^{-4} \\ 0.06751 \\ -0.03109 \\ -6.1\text{ E}^{-5} \end{bmatrix} \text{cm}$$

Las fuerzas máximas son:

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.74634 \\ -5.40681 \\ -18.40636 \\ 9.26030 \\ -4.04775 \\ -13.26025 \\ 3.95391 \\ -1.82101 \\ -5.45672 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

Con $T_2 = 0.138$ s $\rightarrow$ $a/g = 0.2539$ $\rightarrow$ $a = 311.02$ cm/s^2

$$\left| u_{3x_{max}} \right| = 0.018178 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02945 \\ 0.06728 \\ -7.9\ E^{-5} \\ 0.02117 \\ 0.05041 \\ -6.2\ E^{-5} \\ 0.00887 \\ 0.02271 \\ -3.1\ E^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.22592 \\ 5.08486 \\ -9.07274 \\ 1.60012 \\ 3.81018 \\ -7.08585 \\ 0.67059 \\ 1.71678 \\ -3.53269 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

Con $T_3 = 0.109$ s $\rightarrow$ $a/g = 0.2319$ $\rightarrow$ $a = 284.03$ cm/s^2

$$\left| u_{3x_{max}} \right| = 0.018178 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3\ E^{-4} \\ 1.7\ E^{-4} \\ 1.4\ E^{-4} \\ 2.2\ E^{-4} \\ 8.2\ E^{-5} \\ 1.0\ E^{-4} \\ 1.1\ E^{-4} \\ 1.9\ E^{-6} \\ 4.5\ E^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02848 \\ 0.02122 \\ 25.72117 \\ 0.02833 \\ 0.00999 \\ 18.91555 \\ 0.01394 \\ 2.3\ E^{-4} \\ 8.28182 \end{bmatrix}$$

Sismo actuando en la dirección Y

Primer modo

Con $T_1 = 0.157$ s • $a/g = 0.2880$ • $a = 328.33\ cm/s^2$

$$\left| u_{1y_{max}} \right| = 0.025155\ cm \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.09453 \\ -0.04010 \\ -9.0\ E^{-9} \\ 0.06868 \\ -0.03002 \\ -6.5\ E^{-9} \\ 0.02932 \\ -0.01350 \\ -2.7\ E^{-9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.53618 \\ -2.34837 \\ -7.39452 \\ 4.02207 \\ -1.75808 \\ -5.75938 \\ 1.71732 \\ -0.79093 \\ -2.37004 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

Con $T_2 = 0.138$ s $\Rightarrow$ $a/g = 0.2539$ $\Rightarrow$ $a = 311.02$ cm/s^2

$$\left| u_{3y_{max}} \right| = 0.042900 \text{ cm} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06950 \\ 0.15877 \\ -1.9\ E^{-4} \\ 0.04996 \\ 0.11897 \\ -1.4\ E^{-4} \\ 0.02094 \\ 0.05361 \\ -7.2\ E^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.25305 \\ 11.99999 \\ -21.41115 \\ 3.77620 \\ 8.99181 \\ -16.72220 \\ 1.58257 \\ 4.05151 \\ -8.33695 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

Con $T_3 = 0.109$ s $\rightarrow$ $a/g = 0.2319$ $\rightarrow$ $a = 284.03\ cm/s^2$

$$\left| u_{3y_{max}} \right| = 6.10\ E^{-4}\ cm \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1\ E^{-4} \\ 8.0\ E^{-5} \\ 6.4\ E^{-8} \\ 1.0\ E^{-4} \\ 3.9\ E^{-5} \\ 4.7\ E^{-8} \\ 5.2\ E^{-5} \\ 6.8\ E^{-7} \\ 2.0\ E^{-8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{3\theta} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2\theta} \\ f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01303 \\ 0.00971 \\ 11.76863 \\ 0.01205 \\ 0.00457 \\ 6.65467 \\ 0.00639 \\ 1.1\ E^{-4} \\ 3.79004 \end{bmatrix}$$

Hasta ahora hemos obtenido tanto los desplazamientos como las fuerzas que se generarían en los centros de masa, debido a los sismos actuantes en las dos direcciones ortogonales, con lo que se ha considerado cada uno de los grados de libertad de toda la estructura. La distribución de los desplazamientos, en cada uno de los marcos, se realiza a partir de la ecuación 4.5, siendo los resultados:

$$\left[D_j \right] = \left[H_j \right] \left[U_{\cdot} \right] = \begin{bmatrix} d_{j3} \\ d_{j2} \\ d_{j1} \end{bmatrix}$$

Sismo actuando en la direccion X

Primer modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.08130 \\ -0.06118 \\ -0.02783 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} -0.09370 \\ -0.07011 \\ -0.03150 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} -0.10610 \\ -0.07904 \\ -0.03518 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.22407 \\ 0.16275 \\ 0.08942 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0.21581 \\ 0.15680 \\ 0.06697 \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.17118 \\ 0.12376 \\ 0.05241 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.07149 \\ 0.05370 \\ 0.02435 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0.06675 \\ 0.05000 \\ 0.02251 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 0.06202 \\ 0.04630 \\ 0.02067 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.03191 \\ 0.02309 \\ 0.00983 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0.02875 \\ 0.02062 \\ 0.00860 \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.04689 \\ 0.03421 \\ 0.01469 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.00723 \\ -0.00537 \\ -0.00238 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0.00110 \\ 7.6\ E^{-4} \\ 3.0\ E^{-4} \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 0.00943 \\ 0.00889 \\ 0.00298 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} -0.00409 \\ -0.00296 \\ -0.00127 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0.00147 \\ 0.00112 \\ 5.1\ E^{-4} \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.00438 \\ 0.00325 \\ 0.00143 \end{bmatrix}$$

Sismo actuando en la dirección Y

Primer modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.03531 \\ -0.02657 \\ -0.01209 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} -0.04070 \\ -0.03045 \\ -0.01368 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.03433 \\ -0.01526 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.09732 \\ 0.07069 \\ 0.03015 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0.09373 \\ 0.08810 \\ 0.02909 \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.07435 \\ 0.08375 \\ 0.02276 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.16871 \\ 0.12873 \\ 0.06747 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0.15763 \\ 0.11900 \\ 0.05312 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 0.14635 \\ 0.10927 \\ 0.04877 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.07528 \\ 0.05449 \\ 0.02319 \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 0.06785 \\ 0.04967 \\ 0.02029 \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.11065 \\ 0.08073 \\ 0.03468 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.00331 \\ -0.00245 \\ -0.00109 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 5.0\ E^{-4} \\ 3.5\ E^{-4} \\ 1.4\ E^{-4} \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 0.00432 \\ 0.00315 \\ 0.00136 \end{bmatrix}$$

$$D_A = \begin{bmatrix} -0.00167 \\ -0.00135 \\ -5.8\ E^{-4} \end{bmatrix} \qquad D_B = \begin{bmatrix} 6.7\ E^{-4} \\ 5.1\ E^{-4} \\ 2.3\ E^{-4} \end{bmatrix} \qquad D_C = \begin{bmatrix} 0.00200 \\ 0.00148 \\ 6.5\ E^{-4} \end{bmatrix}$$

Multiplicando por las matrices de rigidez lateral correspondientes, obtenemos las fuerza en cada marco.

$$\begin{bmatrix} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{j3} \\ f_{j2} \\ f_{j1} \end{bmatrix}$$

Sismo actuando en la dirección X

Primer modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} -2.00445 \\ -1.65008 \\ -0.92856 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} -2.98666 \\ -1.93108 \\ -0.47606 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} -1.54574 \\ -1.27638 \\ -0.75491 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} 4.77017 \\ 3.48681 \\ 1.47808 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 4.59129 \\ 3.34709 \\ 1.46382 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 3.56706 \\ 2.55670 \\ 1.06726 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} 1.77529 \\ 1.44402 \\ 0.78499 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} 2.11846 \\ 1.38171 \\ 0.35781 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} 0.89400 \\ 0.75474 \\ 0.45650 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} 0.69184 \\ 0.47844 \\ 0.20663 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 0.64246 \\ 0.43077 \\ 0.11086 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 0.93961 \\ 0.72771 \\ 0.37174 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.18837 \\ -0.14159 \\ -0.05426 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.04501 \\ 0.01595 \\ 0.01353 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} 0.14962 \\ 0.10456 \\ 0.04236 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} -0.08871 \\ -0.06887 \\ -0.03242 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 0.02382 \\ 0.02992 \\ 0.02123 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 0.08121 \\ 0.07343 \\ 0.04667 \end{bmatrix}$$

Sismo actuando en la dirección Y

Primer modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.87060 \\ -0.71669 \\ -0.40330 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} -1.29721 \\ -0.83873 \\ -0.20677 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} -0.67137 \\ -0.55437 \\ -0.32788 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} 2.07186 \\ 1.51444 \\ 0.64198 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 1.99416 \\ 1.45376 \\ 0.63579 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 1.54930 \\ 1.11046 \\ 0.46355 \end{bmatrix}$$

Segundo modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} 4.18959 \\ 3.40780 \\ 1.85254 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} 4.99945 \\ 3.26076 \\ 0.84442 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} 2.10978 \\ 1.78114 \\ 1.07730 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} 1.63271 \\ 1.12911 \\ 0.48784 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 1.51616 \\ 1.01660 \\ 0.26162 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 2.21742 \\ 1.71735 \\ 0.87728 \end{bmatrix}$$

Tercer modo

$$\mathbb{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.08618 \\ -0.06476 \\ -0.02515 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.02060 \\ 0.00725 \\ -0.00619 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_3 = \begin{bmatrix} 0.06846 \\ 0.04784 \\ 0.01938 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}_A = \begin{bmatrix} -0.04056 \\ -0.02694 \\ -0.01483 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_B = \begin{bmatrix} 0.01090 \\ 0.01369 \\ 0.00971 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{F}_C = \begin{bmatrix} 0.03715 \\ 0.03360 \\ 0.02135 \end{bmatrix}$$

CAPITULO 5.- ANALISIS ESTATICO

Una estructura excitada en la base con $\ddot{x}_g(t)$ tiene el mismo comportamiento al excitar su masa con $F = -m\,\ddot{x}_g(t)$. En ingeniería civil, la excitación en la base de las estructuras son los sismos.

Para hacer una simplificación de la fuerza excitadora que va a sustituir al sismo, se tomará $F = -m\,\ddot{x}_{gmax}$ en vez de $F = -m\,\ddot{x}_g(t)$ o sea, una fuerza que no depende del tiempo (fuerza estática). Los valores para $\ddot{x}_{gmax}$ dependen del sismo que se considere, usualmente son de una fracción de la gravedad:

$$\ddot{x}_{gmax} = c\,g$$

donde $c < 1$ y g es la aceleración de la gravedad.

La fuerza excitadora de la masa será entonces:

$$\left| f \right| = -m\,\ddot{x}_{gmax} = -m\,c\,g = -c\,w \qquad (5.1)$$

es decir que se trata de simular al sismo de manera simplificada, con una fuerza igual a una fracción del peso w de la masa.

Esta es la base del Análisis Sísmico Estático, donde al coeficiente c se le denomina Coeficiente Sísmico Estático.

Las Normas Técnicas Complementarias del Distrito Federal para diseño por sismo estipulan como alternativa en su sección 2.1, la utilización del Análisis Estático para estructuras que no pasen de 60 metros de altura. Este método, según se menciona en la sección 8.1 de las Normas, tiene como fundamento la distribución de fuerzas horizontales actuando en cada punto donde se considera una concentración de masa. Cada una de estas fuerzas se deben tomar igual al peso de la masa que corresponda, multiplicado por un coeficiente proporcional a la altura de dicha masa; sin incluir tanques, apéndices u otros elementos cuya estructuración difiera radicalmente del resto de la estructura. El coeficiente se debe de tomar de tal manera que la relación V_o/W_o sea igual a c/Q, siendo V_o la fuerza cortante basal, W_o el peso total de la construcción, Q el factor de comportamiento sísmico y c el coeficiente sísmico.

De lo expuesto anteriormente se llega a que la fuerza horizontal f_i aplicada en el centro de masas del nivel i, está dada por la fórmula:

$$f_i = \frac{W_i\, h_i}{\Sigma\, W_i\, h_i}\, c_e\, \Sigma\, W_i \qquad (5.2)$$

donde h_i es la altura del nivel i y $c_e = c/Q$

Por otra parte, para evaluar lás fuerzas en apéndices se debe aplicar la sección 8.4 de las Normas, según lo cual se supondrá actuando sobre dicho apéndice la misma distribución de aceleraciones que le corresponderia si se apoyara directamente sobre el terreno, multiplicada por 1 + 4 c'/c, donde c' es el factor por el cual se multiplican los pesos a la altura de desplante del elemento cuando se valúan las fuerzas laterales sobre la construcción.

Ahora bien, es posible hacer una reducción en las fuerzas cortantes calculadas, según lo describe la sección 8.2 de las Normas. Para ésto se requiere calcular el periodo fundamental de vibración T de la estructura en forma aproximada, con la expresión:

$$T = 6.3 \left[\frac{\Sigma\ W_i\ x_i^2}{g\ \Sigma\ f_i\ x_i} \right]^{1/2} \tag{5.3}$$

donde W_i es el peso de la masa del nivel i, f_i la fuerza horizontal que actúa en ella, de acuerdo con el procedimiento donde no se estima el periodo, x_i el desplazamiento correspondiente en la dirección de f_i y g la aceleración de la gravedad.

De acuerdo con el resultado de T, se aplica una de las opciones siguientes:

i) Si T es menor o igual que T_b las fuerzas laterales son proporcionales a las obtenidas con el procedimiento donde no se estima el periodo, pero reducidas de tal manera que la relación V_o/W_o sea igual a a/Q', calculándose a y Q' como se especifica respectivamente en las secciones 3 y 4 de las Normas.

ii) Si T es mayor que T_b se procederá como en el inciso i) pero de tal manera que cada una de las fuerzas laterales se tome proporcional al peso de la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente igual a $k_1 h_i + k_2 h_i^2$, siendo:

$$k_1 = q \left[1 - r (1 - q) \right] \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i)$$

$$k_2 = 1.5\, r\, q (1 - q) \Sigma W_i / (\Sigma W_i h_i^2)$$

$$q = (T_b / T)^r$$

donde r es un valor dado en la Tabla 3.1 de las Normas y a no se deberá tomar menor que c/4.

A continuación se presentan los resultados en forma de tablas, con las mismas características descritas en el capitulo 3.

La Tabla siguiente muestra los cálculos de los cortantes de entrepiso, para lo cual se utilizó la fórmula 5.2:

Sentidos X e Y

Nivel	W_i (Kg)	h_i (cm)	$W_i h_i$ (Kg-cm)	f_i (Kg)	V_i (Kg)
3	36.0037	105.00	3780.3885	40.5042	40.5042
2	36.0037	70.00	2520.2590	27.0028	67.5070
1	36.0037	35.00	1260.1295	13.5014	81.0084
Sumas	108.0111		7560.7770		

Dado que contamos con los mismos valores de Q para ambas direcciones, el valor de c_e es también el mismo y por lo tanto f_x es igual a f_y, expresado como:

$$f_{x,y} = \frac{W_i h_i}{7560.7770} \times 0.75 \times 108.0111$$

En la misma Tabla se pudo haber incluido el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad en cada entrepiso con las fórmulas:

$$Y_i = \frac{\Sigma\, r_{ix}\, \bar{Y}_i}{V_{ix}} \qquad\qquad X_i = \frac{\Sigma\, r_{iy}\, \bar{X}_i}{V_{iy}}$$

siendo $\bar{Y}_i$ y $\bar{X}_i$ las distancias de un punto cualquiera al centro de masa del entrepiso i. Sin embargo, al contar con la misma distribución de masa en todos los entrepisos, no es necesario incluirlo en la Tabla, ya que resultaría repetitivo. Dicho centro se obtuvo en el capítulo 3.

En las dos siguientes Tablas se muestran los cálculos del periodo fundamental de vibración del edificio para las direcciones X e Y:

Sentido X

Nivel	K_{ix} (Kg/cm)	V_{ix}/K_{ix} (cm)	X_{ix} (cm)	$W_{ix}\, X^2_{ix}$ (Kg-cm)^2	$r_{ix}\, X_{ix}$ (Kg-cm)
3	224.2260	0.18064	0.66951	16.13832	27.11788
2	239.7300	0.28160	0.48887	8.60459	13.20080
1	390.8318	0.20727	0.20727	1.54678	2.79846
Sumas				26.28969	43.11714

Sentido Y

Nivel	K_{iy} (Kg/cm)	V_{iy}/K_{iy} (cm)	X_{iy} (cm)	$W_{iy}\ X^2_{iy}$ $(Kg\text{-}cm)^2$	$f_{iy}\ X_{iy}$ (Kg-cm)
3	297.5335	0.13613	0.53418	10.27378	21.63871
2	308.7428	0.21865	0.39805	5.70460	10.74850
1	451.5518	0.17940	0.17940	1.15876	2.42215
Sumas				17.13712	34.80736

Y de la ecuación 5.3, los periodos fundamentales resultan:

$$T_x = 0.15714 \text{ s} \qquad y \qquad T_y = 0.14121 \text{ s}$$

y entrando al espectro de diseño obtenemos:

$$a_x = 0.26786 \quad \rightarrow \quad c_{ex} = 0.26786/0.8 = 0.33482$$

$$a_y = 0.25591 \quad \rightarrow \quad c_{ey} = 0.25591/0.8 = 0.31988$$

Los valores reducidos de las fuerzas cortantes se muestran a continuación:

Sentido X

Nivel	f_{ix} (Kg)	V_{ix} (Kg)	K_{ix} (Kg/cm)	V_{ix}/K_{ix} (cm)	X_{ix} (cm)
3	18.0822	18.0822	224.2280	0.08064	0.29889
2	12.0548	30.1370	239.7300	0.12571	0.21824
1	6.0274	36.1644	390.8318	0.09253	0.09253

Sentido Y

Nivel	f_{iy} (Kg)	V_{iy} (Kg)	K_{iy} (Kg/cm)	V_{iy}/K_{iy} (cm)	X_{iy} (cm)
3	17.2755	17.2755	297.5335	0.05806	0.22783
2	11.5170	28.7924	308.7428	0.09326	0.16977
1	5.7585	34.5509	451.5518	0.07652	0.07652

Cabe mencionar que los valores de las rigideces de cada entrepiso siguen siendo los mismos.

Los valores de f_{ix} y f_{iy} se expresan ahora como:

$$f_x = \frac{W_i h_i}{7560.7770} \times 0.33482 \times 108.0111$$

$$f_y = \frac{W_i h_i}{7560.7770} \times 0.31988 \times 108.0111$$

Una vez obtenida la fuerza cortante en cada entrepiso, es necesario distribuirla entre los elementos resistentes, tal como se hizo en el capítulo 3:

Primer Nivel

Sentido X

Y_T = 41.67 cm e_s = 7.22 cm   V = 36.16 Kg   M = 261.20 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	135.70	38.33	5202.08	199414.1	12.557	1.006	13.563
B	135.70	- 1.67	- 226.12	376.8	12.557	- 0.044	12.513
C	119.42	-41.67	-4975.93	207328.4	11.051	- 0.962	10.089
Sumas				407119.3			

Sentido Y

X_T = 52.18 cm e_s = 0.16 cm   V = 34.55 Kg   M = 5.41 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
1	159.65	-53.18	-8489.75	451456.4	12.216	- 0.034	12.182
2	183.60	6.82	1252.77	8548.1	14.048	0.005	14.053
3	95.03	66.82	6350.28	424347.4	7.271	0.025	7.296
C	13.27	66.82	886.70	59252.2	1.015	0.004	1.019
Sumas				943604.1			

Segundo Nivel

Sentido X

Y_T = 41.81 cm e_e = 7.07 cm   V = 30.14 Kg   M = 213.18 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	83.54	38.19	3189.82	121802.2	10.501	0.789	11.290
B	83.54	- 1.82	- 151.64	275.3	10.501	- 0.037	10.464
C	72.66	-41.82	-3038.17	127042.0	9.134	- 0.751	8.383
Sumas				249119.5			

Sentido Y

X_T = 52.41 cm e_e = 0.92 cm   V = 25.07 Kg   M = 23.18 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
1	107.16	-52.41	-5616.32	294345.0	9.994	- 0.173	9.821
2	133.48	7.59	1013.25	7691.7	12.448	0.031	12.479
3	60.03	67.59	4057.41	274245.0	5.598	0.125	5.723
C	8.07	67.59	545.68	36882.0	0.753	0.017	0.770
Sumas				613163.7			

Tercer Nivel

Sentido X

Y_T = 41.87 cm e_s = 7.02 cm   V = 18.08 Kg   M = 126.98 Kg-cm

Eje	K_{ix}	Y_{iT}	$K_{ix}\ Y_{iT}$	$K_{ix}\ Y^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
A	78.23	38.13	2983.17	113759.1	6.309	0.464	6.773
B	78.23	- 1.87	- 146.01	272.5	6.309	- 0.023	6.286
C	67.77	-41.87	-2837.17	118781.9	5.465	- 0.441	5.024
Sumas				232813.5			

Sentido Y

X_T = 52.19 cm e_s = 1.14 cm   V = 17.27 Kg   M = 19.71 Kg-cm

Eje	K_{iy}	X_{iT}	$K_{iy}\ X_{iT}$	$K_{iy}\ X^2_{iT}$	Directo	Torsión	Total
1	102.93	-52.19	-5372.37	280398.3	5.977	- 0.130	5.847
2	130.38	7.81	1017.94	7947.4	7.570	0.025	7.595
3	56.69	67.81	3843.86	260642.1	3.291	0.093	3.384
C	7.53	67.81	510.57	34620.3	0.437	0.012	0.449
Sumas				583608.1			

En seguida presentamos las fuerzas y desplazamientos en cada marco, con lo cual resumimos el analisis.

Marco A

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	6.7726	6.7726	78.2294	0.08657	0.32168
2	4.5176	11.2902	83.5365	0.13515	0.23509
1	2.2727	13.5629	135.7041	0.09994	0.09994

Marco B

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	6.2859	6.2859	78.2294	0.08035	0.29782
2	4.1782	10.4641	83.5365	0.12526	0.21747
1	2.0491	12.5132	135.7041	0.09221	0.09221

Marco C (dir. X)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	5.0237	5.0237	67.7672	0.07413	0.27397
2	3.3591	8.3828	72.6570	0.11537	0.19984
1	1.7055	10.0883	119.4236	0.08447	0.08447

Marco 1

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	5.8469	5.8469	102.9335	0.05680	0.22474
2	3.9735	9.8204	107.1635	0.09164	0.16794
1	2.3615	12.1819	159.6519	0.07630	0.07630

Marco 2

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	7.5949	7.5949	130.3824	0.05825	0.22828
2	4.8841	12.4790	133.4775	0.09349	0.17003
1	1.5743	14.0533	183.6000	0.07654	0.07654

Marco 3

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	3.3842	3.3842	56.6880	0.05970	0.23182
2	2.3391	5.7233	60.0287	0.09534	0.17212
1	1.5735	7.2968	95.0309	0.07678	0.07678

Marco C (dir. Y)

Nivel	Fuerza	Cortante	Rigidez	δ relativo	Δ total
3	0.4495	0.4495	7.5237	0.05970	0.23183
2	0.3202	0.7697	8.0730	0.09534	0.17213
1	0.2492	1.0189	13.2693	0.07679	0.07679

CAPITULO 6.- DISEÑO DEL MODELO

Al inicio de cualquier diseño se debe de tomar en cuenta todas las cargas que afecten a la estructura. Nuestro modelo experimental estará sujeto a una carga muerta ejercida por una losa construida con concreto armado y una placa de acero, y a cargas laterales en los entrepisos simulando un sismo.

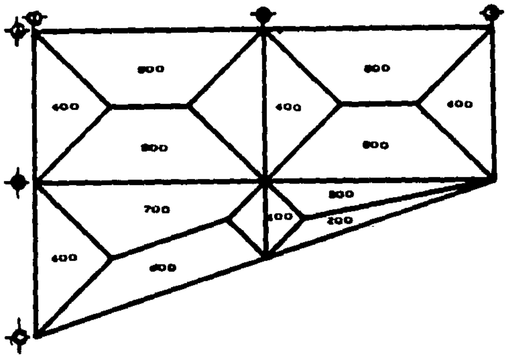


Figura 6-1 Distribucion de las cargas muertas en los marcos

La escala usada es de 1:10, por lo que la losa esta construida con 1.5 centimetros de espesor en sus tres niveles, cantidad que en un edificio real seria de 15 centimetros. Debido a que se tiene la misma geometria en cada uno de los entrepisos, la carga que se distribuye respectivamente en los marcos es igual en los tres niveles (Figura 6-1).

Para el diseño del modelo experimental utilizaremos el Método de Rigideces, para lo cual, emplearemos las matrices de rigidez de cada marco obtenidas en el capitulo 3.

Tomando en cuenta los pesos de la losa armada, de la placa y de las vigas (dados en el capitulo 3), y considerando que la losa está perimetralmente apoyada, las cargas muertas para cada marco son las siguientes:

		peso entrepiso (Kg/cm^2)		Área (cm^2)		peso viga (Kg/cm)		longitud (cm)		Total (kg)
w_1	=	0.004621	×	800	+	0.005	×	80.0	=	4.0968
$w_{2_{A-B}}$	=	0.004621	×	800	+	0.005	×	40.0	=	3.8968
$w_{2_{B-C}}$	=	0.004621	×	200	+	0.005	×	20.0	=	1.0242
w_3	=	0.004621	×	400	+	0.005	×	40.0	=	2.0484
w_A	=	0.004621	×	1600	+	0.005	×	120.0	=	7.9936
$w_{B_{1-2}}$	=	0.004621	×	1500	+	0.005	×	60.0	=	7.2315
$w_{B_{2-3}}$	=	0.004621	×	1100	+	0.005	×	60.0	=	5.3831
$w_{C_{1-2}}$	=	0.004621	×	600	+	0.005	×	63.2	=	3.0886
$w_{C_{2-3}}$	=	0.004621	×	200	+	0.005	×	63.2	=	1.2404

Por lo que la carga uniformemente repartida es:

$$\omega_{1} = 0.05121 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{2_{A-B}} = 0.09742 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{2_{B-C}} = 0.05121 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{3} = 0.05121 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{A} = 0.08881 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{B_{1-2}} = 0.12052 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{B_{2-3}} = 0.08972 \text{ Kg/cm}$$

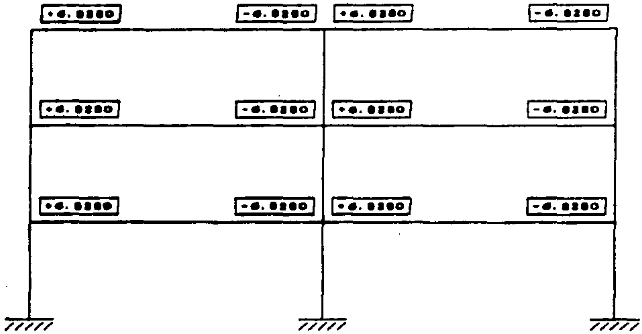
$$\omega_{C_{1-2}} = 0.04884 \text{ Kg/cm}$$

$$\omega_{C_{2-3}} = 0.01981 \text{ Kg/cm}$$

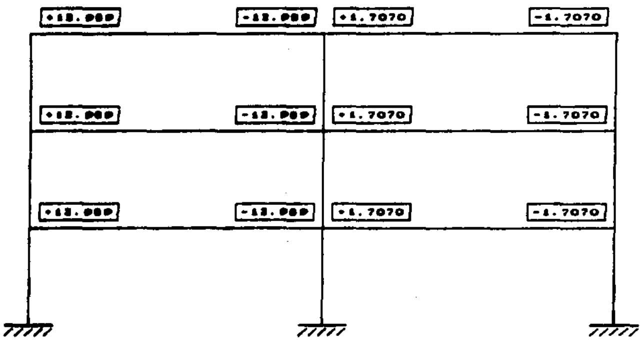
Utilizando la convención de signos:

los momentos de empotramiento en cada nudo de los marcos son:

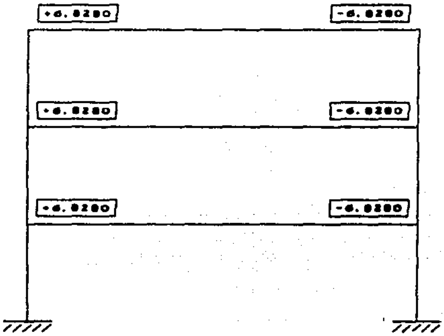
Marco 1



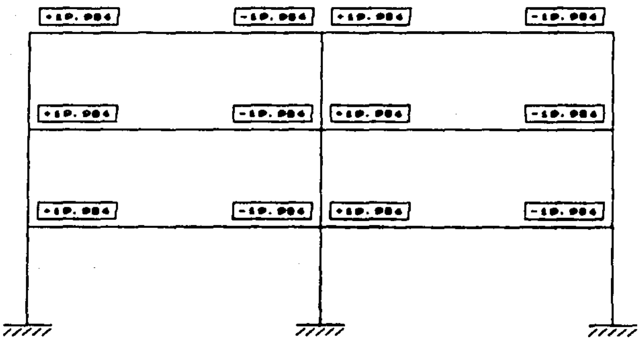
Marco 2



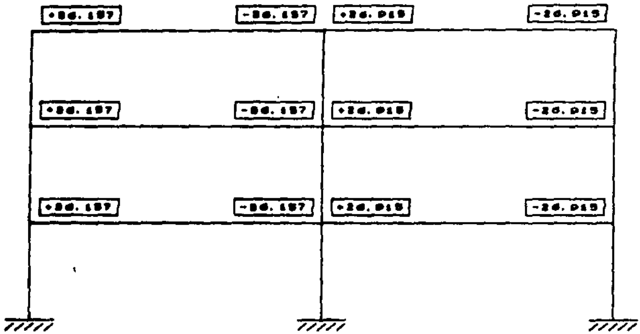
Marco 3



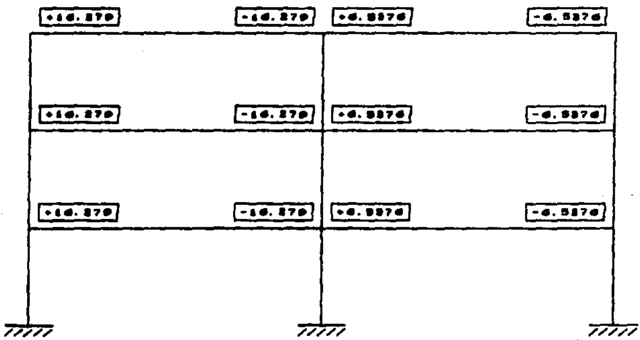
Marco A



Marco B



Marco C



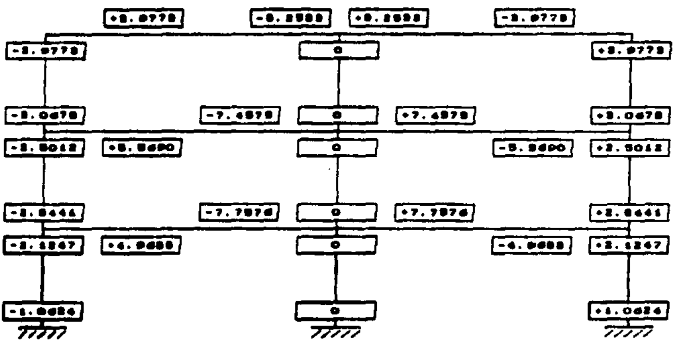
Al dar un giro a cada uno de los nudos y un desplazamiento unitarios en cada nivel de los marcos, formamos sus matrices de rigidez (capitulo 3) y con ello obtendremos, para las condiciones de empotramiento dadas inicialmente; los giros reales que tendrán cada nudo y superponiendo las condiciones deformadas del marco se obtendrán los momentos flexionantes reales en los nudos. Finalmente, tomando en cuenta el equilibrio del marco se encuentran tanto los esfuerzos cortantes como los normales que afectan a cada nudo.

Los resultados de las operaciones antes mencionadas, se muestran a continuación:

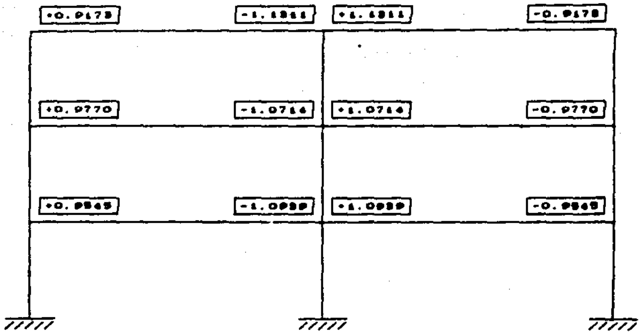
CARGAS GRAVITACIONALES

Marco 1

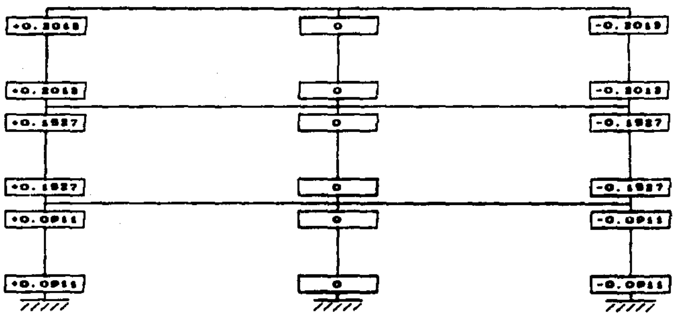
Momentos



Cortantes

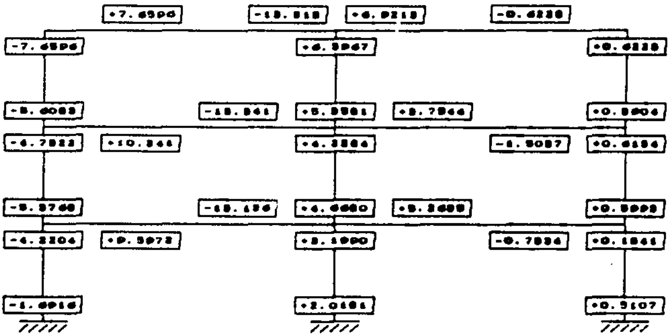


Axiales

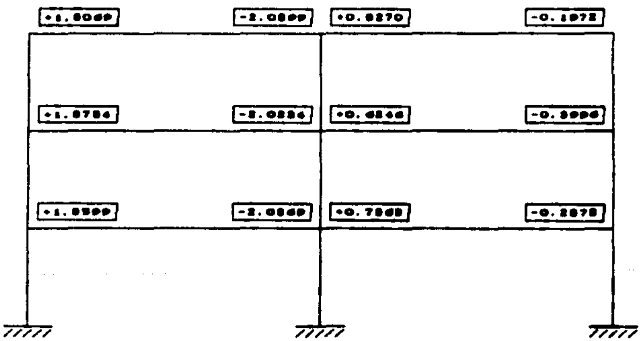


Marco 2

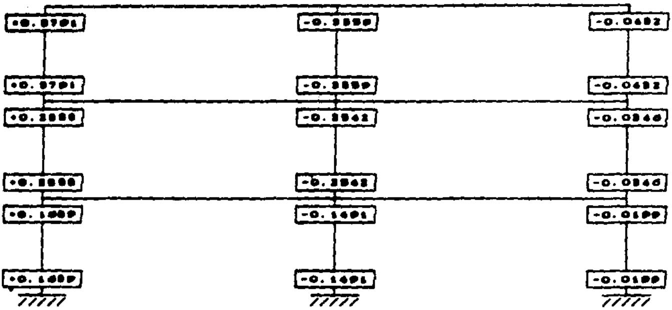
Momentos



Cortantes

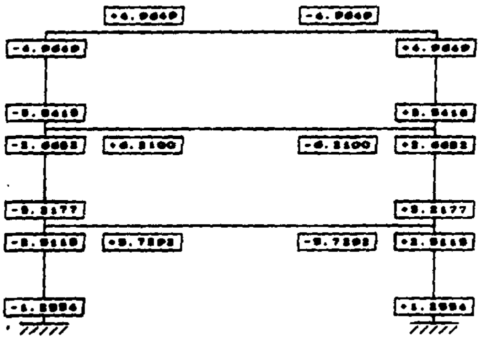


Axiales

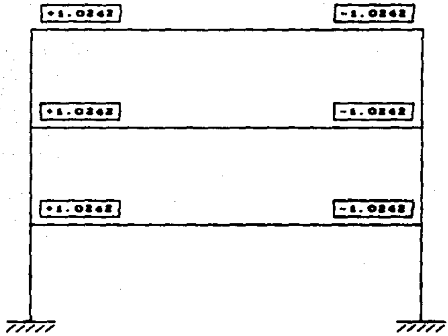


Marco 3

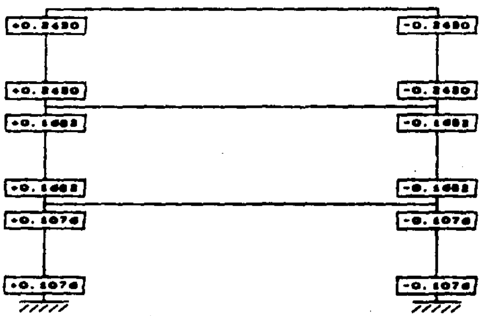
Momentos



Cortantes

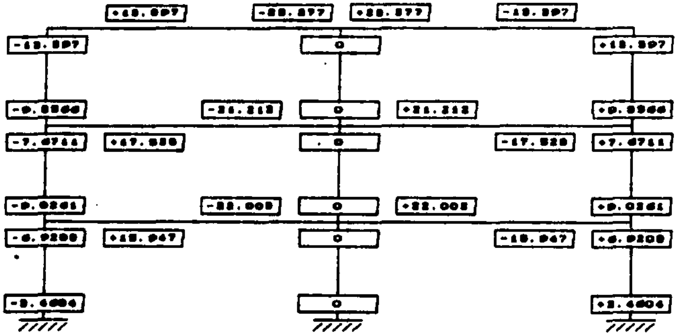


Axiales

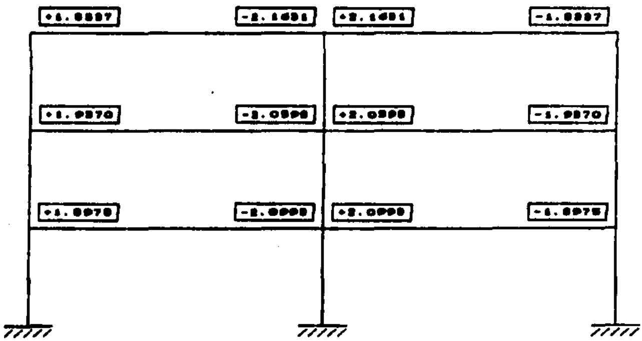


Marco A

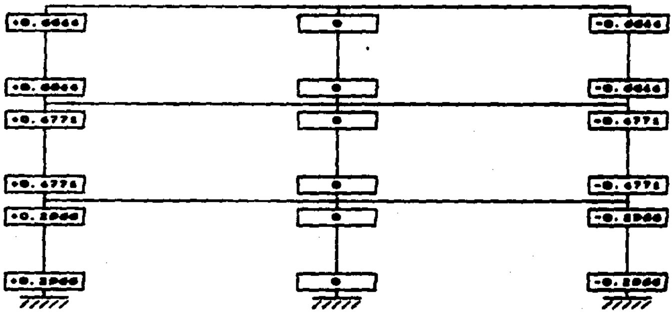
Momentos



Cortantes

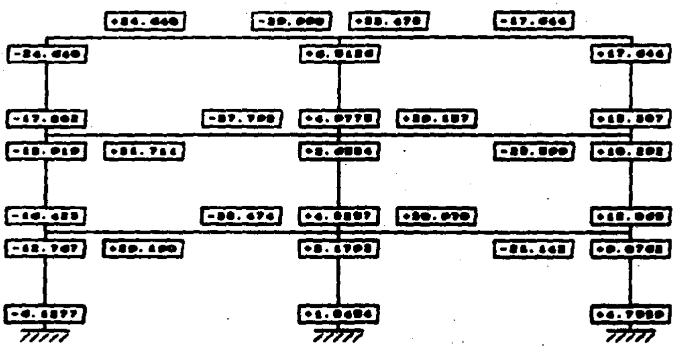


Axiales

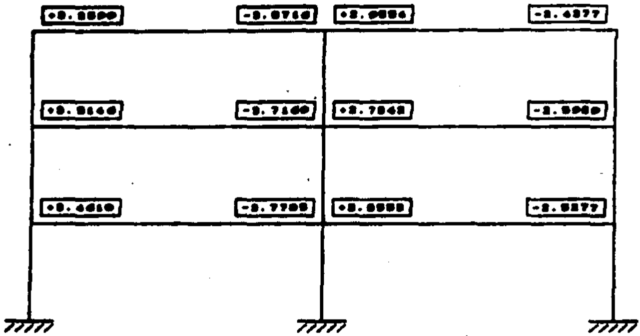


Marco B

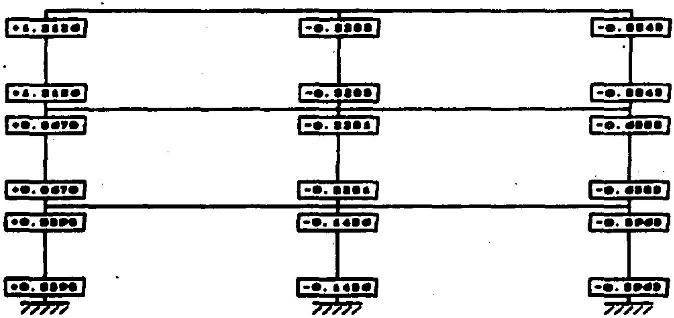
Momentos



Cortantes

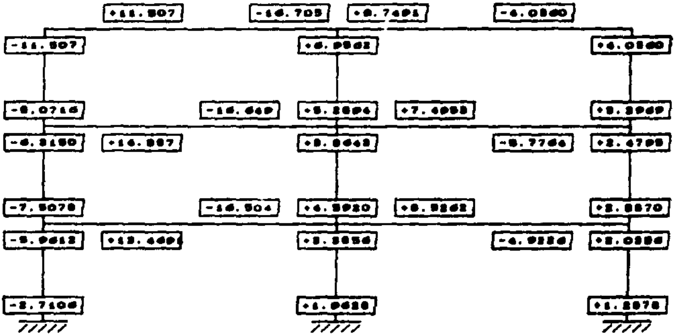


Axiales

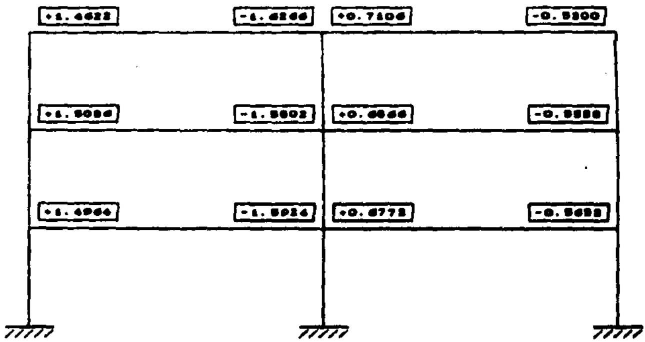


Marco C

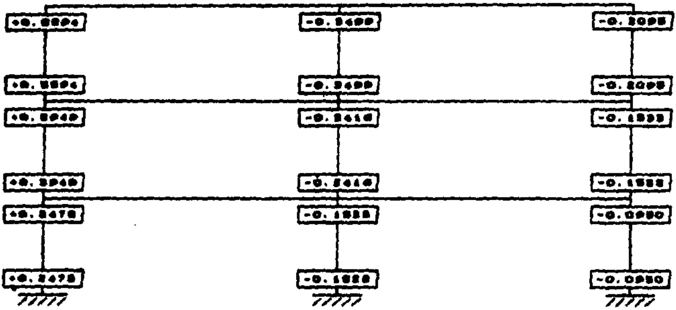
Momentos



Cortantes



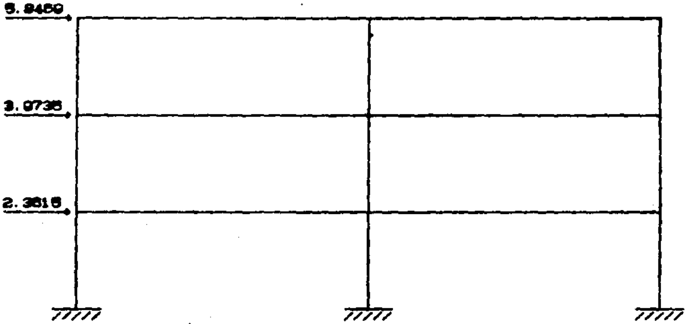
Axiales



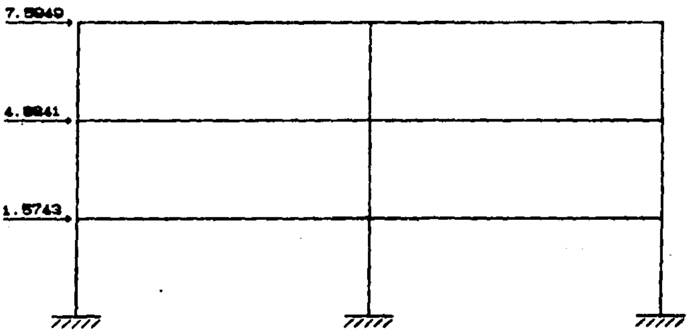
Para obtener los elementos mecánicos en cada nudo debidos a la acción sísmica, se le aplicarán a los marcos las fuerzas encontradas por el Método Estático (capitulo 4), ya que éstas resultaron ser las mayores.

El procedimiento para encontrar los elementos mecánicos en el caso del sismo, es el mismo que el descrito para las cargas muertas, sólo que ahora cada matriz de rigidez tendrá como condición inicial las fuerzas estáticas aplicadas en los entrepisos.

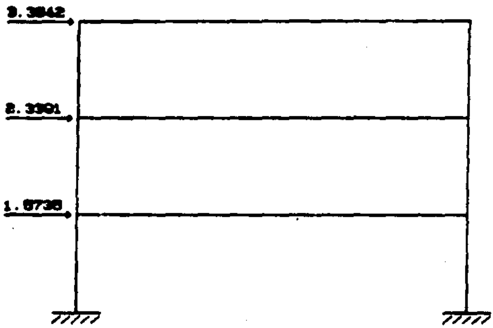
Marco 1



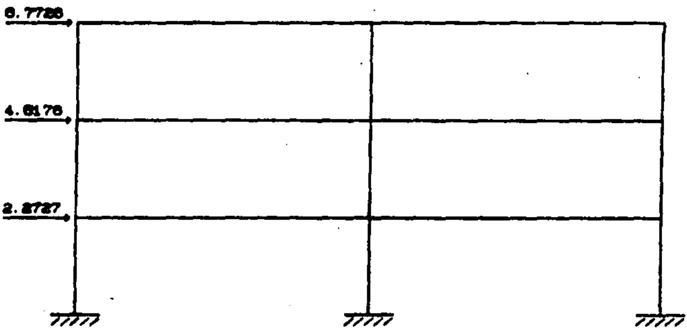
Marco 2



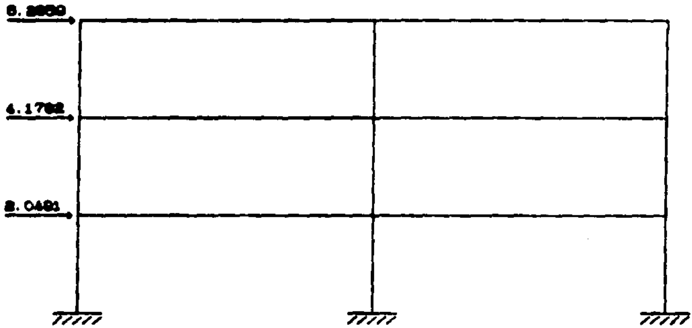
Marco 3



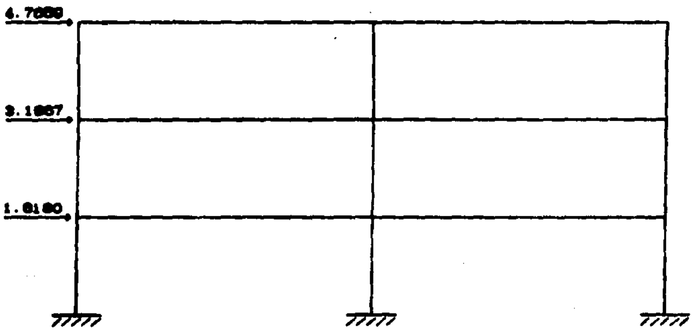
Marco A



Marco B



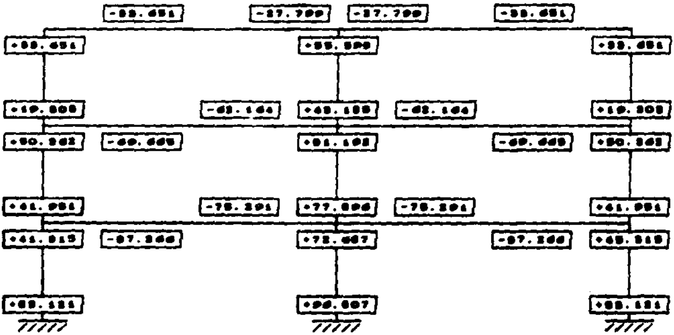
Marco C



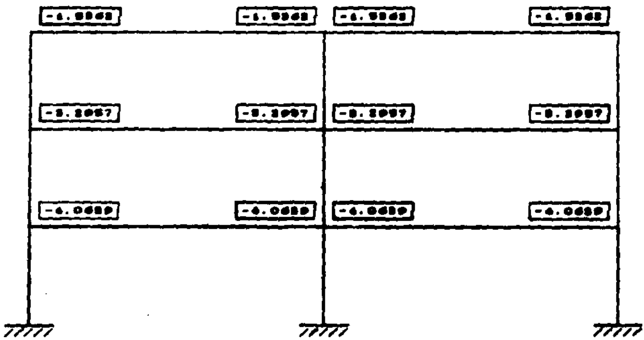
CARGAS SISMICAS

Marco 1

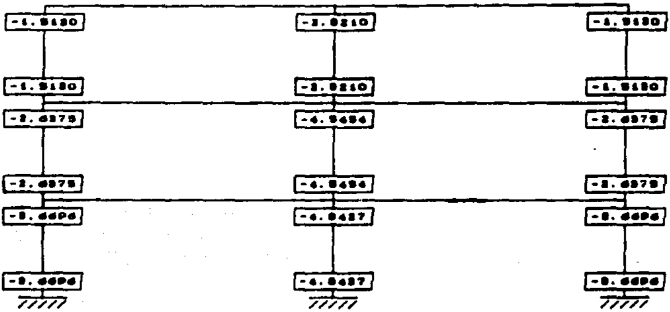
Momentos



Cortantes

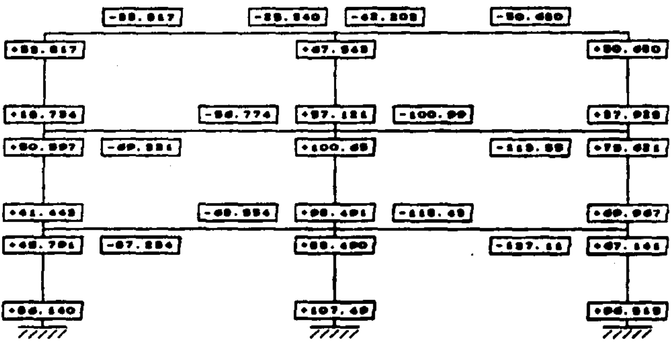


Axiales

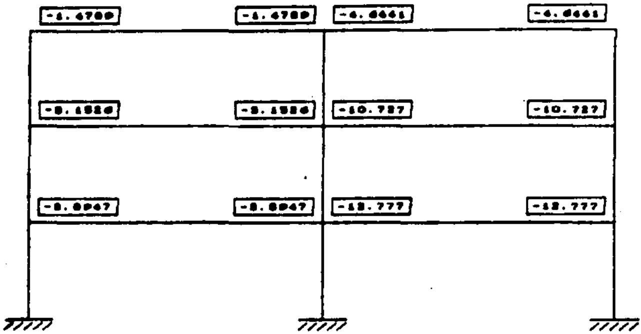


Marco 2

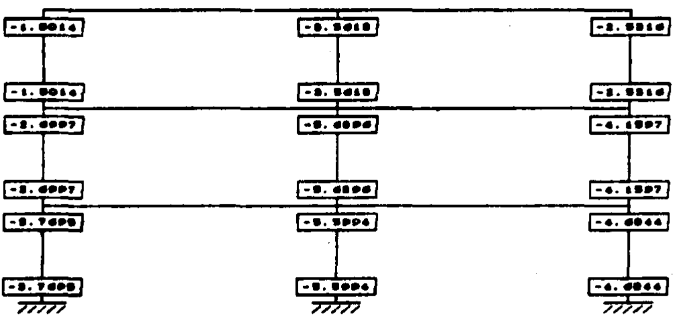
Momentos



Cortantes

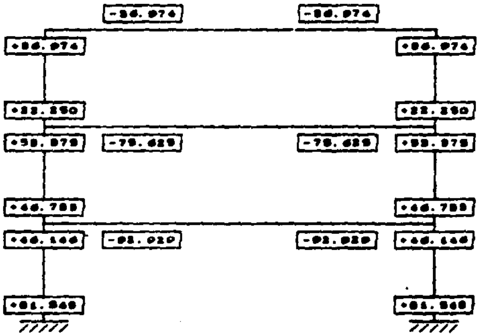


Axiales

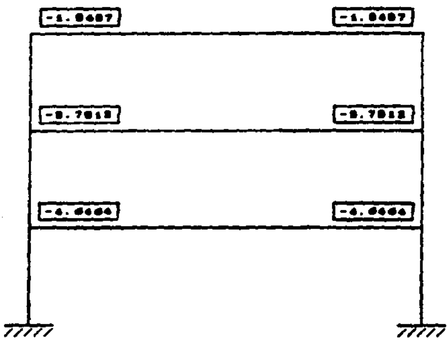


Marco 3

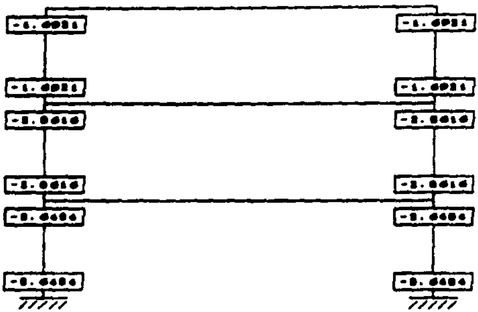
Momentos



Cortantes

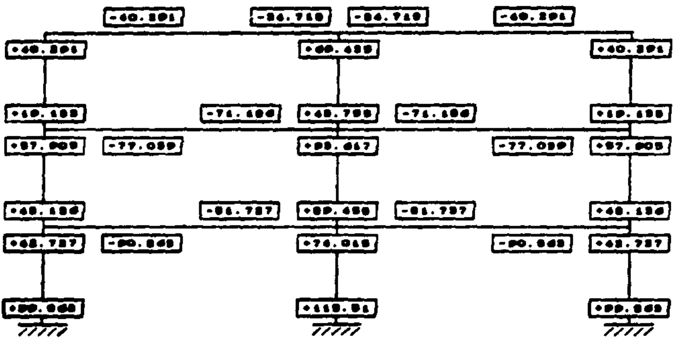


Axiales

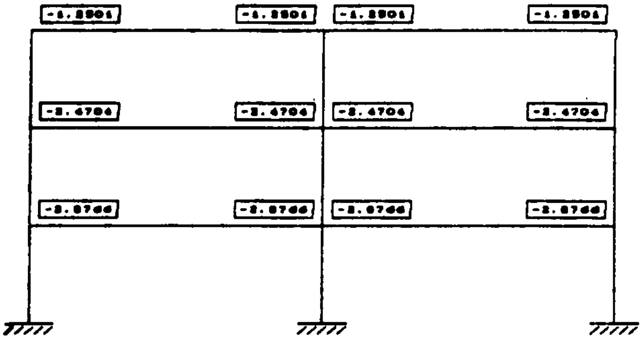


Marco A

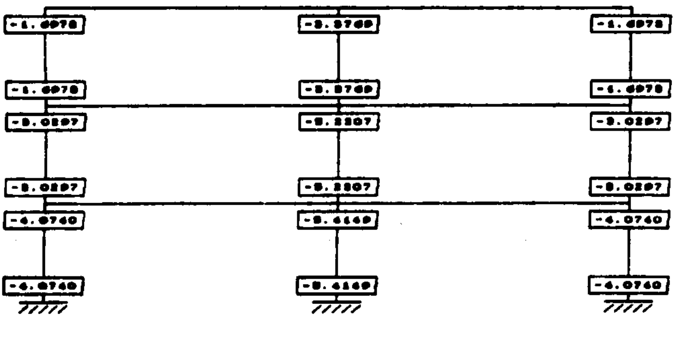
Momentos



Cortantes

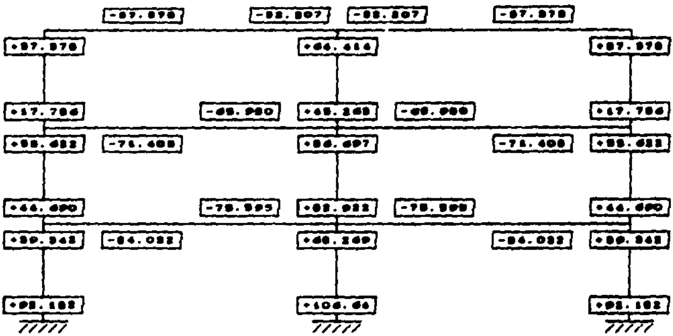


Axiales

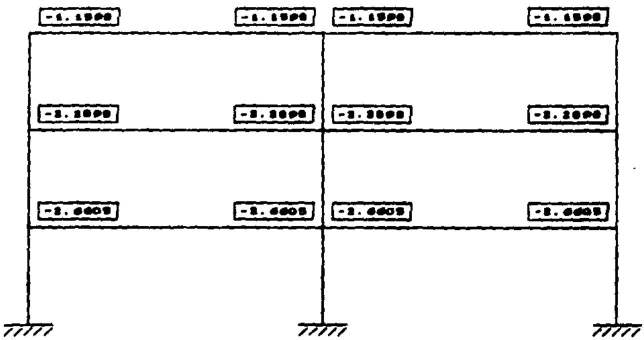


Marco B

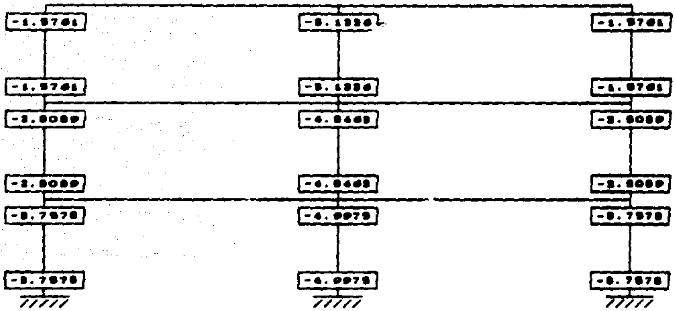
Momentos



Cortantes

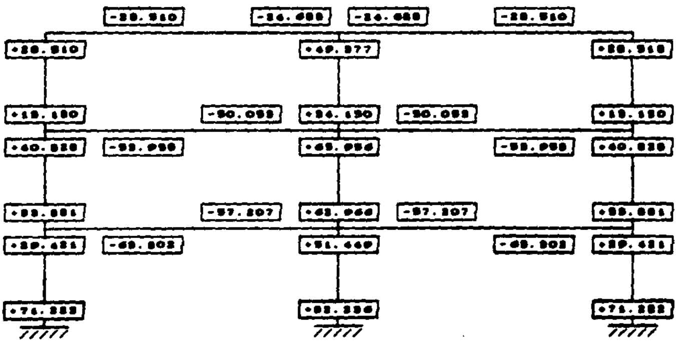


Axiales

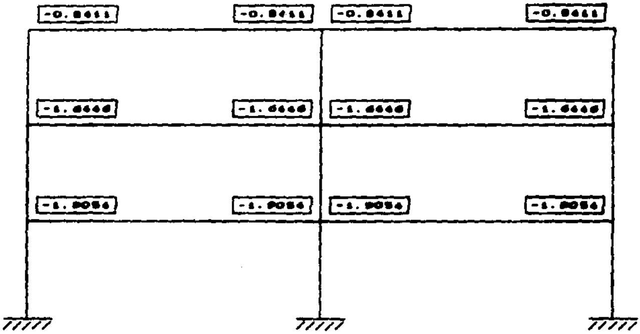


Marco C

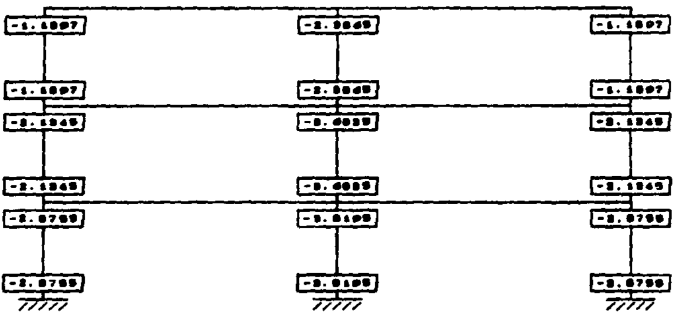
Momentos



Cortantes



Axiales



Como podemos apreciar, la columna más esforzada está localizada en los ejes B-2 del primer nivel. Las cargas y los momentos flexionante son:

Marco B

		cargas muerta		sismo		Total
P	=	- 10.9539	+	0	=	- 10.9539 Kg
M	=	1.8454	+	106.6400	=	108.4854 Kg-cm

Marco 2

		cargas muerta		sismo		Total
P	=	- 8.3381	-	19.6219	=	- 27.9600 Kg
M	=	2.0181	-	107.4900	=	106.4719 Kg-cm

De acuerdo con la sección 8.8 de las Normas Tecnicas Complementarias, los efectos de ambos componentes del movimiento del terreno se combinarán tomando, en cada dirección en que se analice la estructura, el 100% de los efectos que obra en esa dirección y el 30% de los efectos del que obra perpendicularmente a ella, con los signo que para cada concepto resulten más desfavorables.

Para nuestro caso, tomaremos la combinación en ambas direcciones para poder observar los resultados más desfavorables, tomando en cuenta que la sección utilizada tiene valores de Area $A = 0.6084\ cm^2$, momento de inercia $I = 0.14052\ cm^4$, modulo de elasticidad $S = 0.21618\ cm^3$ y radio de giro $r = 0.48059$ cm.

DISEÑO DE COLUMNAS

El diseño se realizará de acuerdo con el Manual de Construcción en Acero del I.M.C.A.

Sección 1.6.1. Compresión axial y flexión (flexocompresión).

Los miembros sometidos simultáneamente a esfuerzos de compresión axial y a esfuerzos de flexión, deben estar diseñados de manera que satisfagan la fórmula:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \qquad (1.6\text{-}2)$$

siempre y cuando $f_a/F_a \leq 0.15$

donde el esfuerzo de compresión axial F_a es:

$$F_a = \frac{\left[1 - \dfrac{(Kl/r)^2}{2\, C_c^2} \right] F_y}{\dfrac{5}{3} + \dfrac{3\,(Kl/r)}{8\, C_c} - \dfrac{(Kl/r)^3}{8\, C_c^3}}$$

Si $Kl/r < C_c$. Donde K se encuentra en la figura C 1.8.2 de el Manual del A.I.S.C. Para lo cual se debe de calcular los valores de G_A y G_B.

El valor de G_A es de 1.0 debido a que se encuentra empotrado en la cimentación, y el valor de G_B se encuentra con la fórmula:

$$G_B = \frac{\Sigma\, I_c / L_c}{\Sigma\, I_v / L_v}$$

Por lo que:

$$K_x = 1.24 \quad y \quad K_y = 1.34$$

$$(Kl/r)_x = 90.31 \quad y \quad (Kl/r)_y = 97.59$$

Rigiendo la relación de esbeltez en el sentido Y.

Y de acuerdo con la sección 1.5.1.3.1. el valor de C_c es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{F_y}}$$

Tomando en cuenta el resultado obtenido en la Tabla 3-1, donde el esfuerzo de falla fué de F_y = 2660/0.6084 = 4358.7 Kg/cm² indicando que el acero es A-36, se considerará, por utilización común un esfuerzo F_y = 4200 Kg/cm²; de donde C_c = 105.40 que es mayor que $(Kl/r)_y$ = 97.59. Utilizandose la fórmula mencionada obtenemos que F_a = 1258.06 Kg/cm².

En la sección 1.5.1.4.4. se menciona que la tensión y compresión en las fibras extremas de miembros en cajón a flexión, cuyo patín en compresión o la relación ancho/espesor del alma no cumplan con los requisitos de la sección 1.5.1.4.1., pero que esté conforme con los requisitos de la sección 1.9; y debido a que nuestro modelo cabe dentro de este caso, entonces:

$$F_b = 0.6\ F_y$$

Considerando el 100% de los valores del sismo en sentido X (marco B):

$$f_a = 58.1779\ \text{Kg/cm}^2 \quad f_{bx} = 801.8179\ \text{Kg/cm}^2 \quad f_{by} = 139.8290\ \text{Kg/cm}^2$$

Utilizando la fórmula 1.6-2 se obtiene:

$$\frac{98.1779}{1255.06} + \frac{601.8179}{2520.0} + \frac{139.8290}{2520.0} = 0.2994 < 1.3333 \quad \text{l.q.q.d.}$$

Y considerando el 100% de los valores del sismo en sentido Y (marco 2):

$$f_a = 47.9139 \text{ Kg/cm}^2 \quad f_{bx} = 158.5207 \text{ Kg/cm}^2 \quad f_{by} = 487.8784 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\frac{47.9139}{1255.06} + \frac{158.5207}{2520.0} + \frac{487.8784}{2520.0} = 0.3184 < 1.3333 \quad \text{l.q.q.d.}$$

No se considerará el diseño de la viga ya que ésta tiene la misma sección que las columnas y se encuentran en condiciones menos desfavorables.

Para la revisión popr cortante se considerará el elemento más desfavorable:

La sección 1.5.1.2.1. menciona que exceptuando lo estipulado en las secciónes 1.5.1.2.2. (conexiones) y 1.10.5.2. (atiesadores), en el área efectiva de la sección transversal que resiste el esfuerzo cortante:

$$F_v = 0.40 \ F_y$$

Tomando en cuenta que la fuerza cortante máxima es:

	cargas muerta		sismo		Total
V =	0.7363	+	12.7770	=	13.5133 Kg

por lo que el esfuerzo cortante es:

$$f_v = 13.5133 / 0.3380 = 39.9802 \ Kg/cm^2 < 1600 \ Kg/cm^2 \quad \text{l.q.q.d.}$$

CAPITULO 7.- CORRELACION DE RESULTADOS TEORICOS VS. EXPERIMENTALES

De acuerdo con los desplazamientos obtenidos en el Laboratorio de Materiales de la Facultad de Ingenieria que a continuación se muestran en tablas, se hará la comparación con los resultados de los capitulos 3, 4 y 5. En las mediciones de los desplazamientos del modelo se consideraron únicamente los marcos extremos (A, C, 1 y 3), ya que las mediciones de los internos pueden deducirse de éstos; asi como también se consideraron para los casos de los dos métodos dinámicos los modos en los sentidos mas reprecentativos.

Metodo Estatico

Sentido X

Marco A

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.32186	0.38590	19.9
2	0.23509	0.31220	32.8
1	0.09994	0.16810	68.2

Marco C

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.27397	0.35800	30.7
2	0.19984	0.28810	44.2
1	0.08447	0.15080	78.3

Sentido Y

Marco 1

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.22474	0.44100	96.2
2	0.16794	0.34930	107.9
1	0.07630	0.17510	129.4

Marco 3

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.23182	0.46000	98.4
2	0.17212	0.34820	102.3
1	0.07679	0.17570	128.8

Metodo Dinamico Modal Espectral

Primer Modo

Sentido X

Marco A

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.27182	0.35500	30.6
2	0.20010	0.28310	41.5
1	0.08420	0.15220	80.8

Marco C

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.23152	0.32900	42.1
2	0.17010	0.26100	53.4
1	0.07116	0.13550	90.4

Sentido Y

Marco 1

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.19290	0.37490	94.3
2	0.14583	0.29880	104.9
1	0.06603	0.14890	125.4

Marco 3

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.19903	0.39290	97.4
2	0.14948	0.30010	100.7
1	0.06645	0.15380	131.5

Metodo Tridimensional

Primer Modo

Sentido X

Marco A

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.22407	0.27820	24.1
2	0.16275	0.22810	38.9
1	0.06942	0.12300	77.2

Marco C

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.16240	0.26210	61.4
2	0.11741	0.21100	79.7
1	0.04972	0.11040	122.0

Marco 1

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.08130	0.02790	191.4
2	0.06118	0.01300	370.6
1	0.02783	0.00790	252.3

Marco 3

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.10610	0.02310	359.3
2	0.07904	0.03910	102.1
1	0.03518	0.01650	113.2

Segundo Modo

Sentido Y

Marco A

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.07528	0.02600	189.5
2	0.05449	0.02110	158.2
1	0.02318	0.00660	251.4

Marco C

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.03499	0.00500	599.8
2	0.02553	0.01000	155.3
1	0.01097	0.00820	33.8

Marco 1

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.16871	0.37810	124.1
2	0.12673	0.30200	138.3
1	0.05747	0.15200	164.5

Marco 3

nivel	Teórico (cm)	Experimental (cm)	% error
3	0.14635	0.40090	173.9
2	0.10927	0.30600	180.0
1	0.04877	0.15980	227.7

CAPITULO 8.- CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

De acuerdo a los resultados obtenidos en laboratorio y al compararlos con los teóricos, podemos concluir que hay errores que se deben a:

1) Construcción del modelo.- Debido al tamaño de éste se tienen imprecisiones en el momento de el habilitado y el soldado de cada uno de sus componentes, razón por la cual se pueden tener errores en la consideración de sus dimensiones.

2) Materiales empleados.- Las caracteristicas mecánicas de los materiales empleados en la construcción del modelo y de acuerdo con la tabla 3-1 capitulo 3, no son exactamente las consideradas para los análisis, ya que se tomáron las más usuales.

3) Instrumentación.- El modelo es demasiado sensible a cargas, por pequeñas que estas sean, y ademas, por imprecisiones en la lectura de los micrometros.

Es difícil en terminos generales, resumir cual de los métodos es el más adecuado para la realización del análisis, ya que antes de considerar qué análisis se deberá emplear en una estructura, se tomará en cuenta los siguientes factores:

a) Grado de complejidada estructural.- La ortogonalidad de los marcos facilita los cálculos analíticos cuando se tienen estructuras menores a 60 metros. Cualquier ubicación de elementos resistentes no ortogonales proporciona una variación elevada, no considerada en los métodos Estático y Dinámico Modal Espectral. Por lo que la teoría desarrollada en ambos resulta inadecuada.

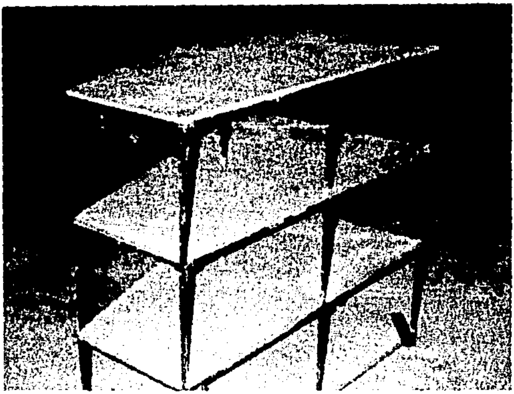
Es impresindible el conocimiento práctico del tipo de respuesta a qué esté sujeto una estructura con elementos no ortogonales, para poder decidir el empleo de un método diferente al Tridimensional.

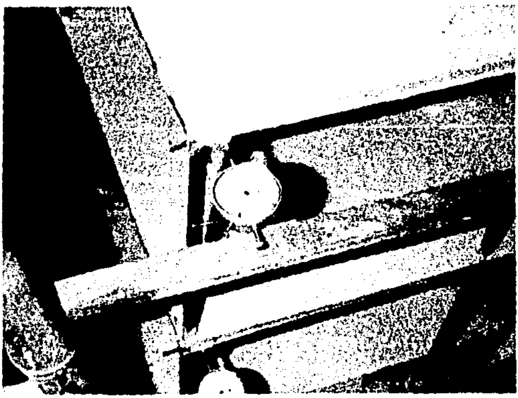
Por lo anterior, recomendamos utilizar el método Tridimensional para cualquier estructura con elementos no ortogonales, ya que éste considera la ubicación espacial de todos los elementos estructurales.

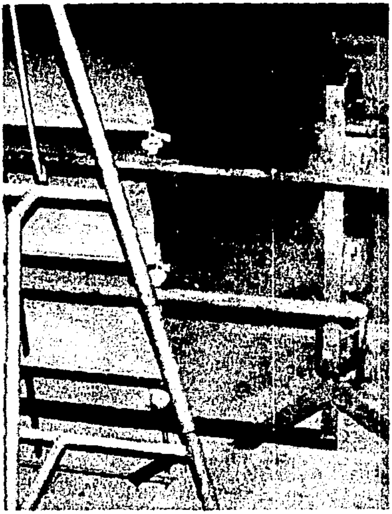
b) Rendimiento.- El ingeniero estructurista se deberá de valer de todos los equipos e implementos de cálculo, ya sean manuales o computacionales, para poder resolver cualquier estructura. De ésto concluimos que el método utilizado será aquel que nos produzca un menor tiempo de cálculo con un máximo de exactitud.

c) Economía.- Al considerar los dos incisos anteriores podemos decidir un análisis satisfactorio para el ingeniero, que requiere de cálculos adecuados; y poder presentar al cliente resultados que satisfagan sus necesidades de rapidéz y presupuesto.

Estudio experimental de una estructura reticular







Marco 1

0.21429	0.050	0	0.05714	0	0	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0.050	0.31429	0.050	0	0.05714	0	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0	0.050	0.21429	0	0	0.05714	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0.05714	0	0	0.32857	0.050	0	0.05714	0	0	- 0.00490	0	0.00490
0	0.05714	0	0.050	0.42857	0.050	0	0.05714	0	- 0.00490	0	0.00490
0	0	0.05714	0	0.050	0.32857	0	0	0.05714	- 0.00490	0	0.00490
0	0	0	0.05714	0	0	0.32857	0.050	0	0	- 0.00490	0
0	0	0	0	0.05714	0	0.050	0.42857	0.050	0	- 0.00490	0
0	0	0	0	0	0.05714	0	0.050	0.32857	0	- 0.00490	0
- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	0	0	0	8.4 E^{-4}	- 8.4 E^{-4}	0
0.00490	0.00490	0.00490	0	0	0	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 8.4 E^{-4}	1.7 E^{-3}	- 8.4 E^{-4}
0	0	0	0.00490	0.00490	0.00490	0	0	0	0	- 8.4 E^{-4}	1.7 E^{-3}

E I

Tabla 8-2

Marco 2

0.21429	0.050	0	0.05714	0	0	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0.050	0.41429	0.050	0	0.05714	0	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0	0.050	0.31429	0	0	0.05714	0	0	0	- 0.00490	0.00490	0
0.05714	0	0	0.32857	0.050	0	0.05714	0	0	- 0.00490	0	0.00490
0	0.05714	0	0.050	0.52857	0.050	0	0.05714	0	- 0.00490	0	0.00490
0	0	0.05714	0	0.050	0.42857	0	0	0.05714	- 0.00490	0	0.00490
0	0	0	0.05714	0	0	0.32857	0.050	0	0	- 0.00490	0
0	0	0	0	0.05714	0	0.050	0.52857	0.050	0	- 0.00490	0
0	0	0	0	0	0.05714	0	0.050	0.42857	0	- 0.00490	0
- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	0	0	0	8.4 E^{-4}	- 8.4 E^{-4}	0
0.00490	0.00490	0.00490	0	0	0	- 0.00490	- 0.00490	- 0.00490	- 8.4 E^{-4}	1.7 E^{-3}	- 8.4 E^{-4}
0	0	0	0.00490	0.00490	0.00490	0	0	0	0	- 8.4 E^{-4}	1.7 E^{-3}

E I

Tabla 8-3

Marcos A y B

$$
\begin{bmatrix}
0.18095 & 0.03333 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0.03333 & 0.24762 & 0.03333 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0 & 0.03333 & 0.18095 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0.05714 & 0 & 0 & 0.29524 & 0.03333 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0.05714 & 0 & 0.03333 & 0.36191 & 0.03333 & 0 & 0.05714 & 0 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03333 & 0.29524 & 0 & 0 & 0.05714 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0.29524 & 0.03333 & 0 & 0 & -0.00490 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03333 & 0.36191 & 0.03333 & 0 & -0.00490 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03333 & 0.29524 & 0 & -0.00490 & 0 \\
-0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & 0 & 0 & 0 & 8.4\,E^{-4} & -8.4\,E^{-4} & 0 \\
0.00490 & 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -8.4\,E^{-4} & 1.7\,E^{-3} & -8.4\,E^{-4} \\
0 & 0 & 0 & 0.00490 & 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.4\,E^{-4} & 1.7\,E^{-3}
\end{bmatrix} EI
$$

Tabla 8-4

Marco C

$$
\begin{bmatrix}
0.17753 & 0.03162 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0.03162 & 0.24078 & 0.03162 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0 & 0.03162 & 0.17753 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\
0.05714 & 0 & 0 & 0.29182 & 0.03162 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0.05714 & 0 & 0.03162 & 0.35506 & 0.03162 & 0 & 0.05714 & 0 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03162 & 0.29182 & 0 & 0 & 0.05714 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\
0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & 0.29182 & 0.03162 & 0 & 0 & -0.00490 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03162 & 0.35506 & 0.03162 & 0 & -0.00490 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.03162 & 0.29182 & 0 & -0.00490 & 0 \\
-0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & 0 & 0 & 0 & 8.4\,E^{-4} & -8.4\,E^{-4} & 0 \\
0.00490 & 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -8.4\,E^{-4} & 1.7\,E^{-3} & -8.4\,E^{-4} \\
0 & 0 & 0 & 0.00490 & 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.4\,E^{-4} & 1.7\,E^{-3}
\end{bmatrix} EI
$$

Tabla 8-5

Marco 3

$$\begin{bmatrix} 0.21429 & 0.050 & 0.05714 & 0 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\ 0.050 & 0.21429 & 0 & 0.05714 & 0 & 0 & -0.00490 & 0.00490 & 0 \\ 0.05714 & 0 & 0.32857 & 0.050 & 0.05714 & 0 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\ 0 & 0.05714 & 0.050 & 0.32857 & 0 & 0.05714 & -0.00490 & 0 & 0.00490 \\ 0 & 0 & 0.05714 & 0 & 0.32857 & 0.050 & 0 & -0.00490 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05714 & 0.050 & 0.32857 & 0 & -0.00490 & 0 \\ -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & -0.00490 & 0 & 0 & 5.6\,E^{-4} & -5.6\,E^{-4} & 0 \\ 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & -0.00490 & -0.00490 & -5.6\,E^{-4} & 1.1\,E^{-3} & -5.6\,E^{-4} \\ 0 & 0 & 0.00490 & 0.00490 & 0 & 0 & 0 & -5.6\,E^{-4} & 1.1\,E^{-3} \end{bmatrix} EI$$

Tabla 8-6

Matriz de Masa

$$\left[\begin{array}{c:c:c} M & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & M & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & M \end{array}\right]$$

Tabla 8-7

Marco 1

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4.7699\ E^{-4} & -2.5440\ E^{-2} & 0 & -6.0148\ E^{-4} & 3.2079\ E^{-2} & 0 & 1.4518\ E^{-4} & -7.7432\ E^{-3} \\
0 & -2.5440\ E^{-2} & 1.358774 & 0 & 3.2079\ E^{-2} & -1.710864 & 0 & -7.7432\ E^{-3} & 0.4129698 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6.0148\ E^{-4} & 3.2079\ E^{-2} & 0 & 1.2567\ E^{-3} & -6.7024\ E^{-2} & 0 & -8.2729\ E^{-4} & 4.4122\ E^{-2} \\
0 & 3.2079\ E^{-2} & -1.710864 & 0 & -6.7024\ E^{-2} & 3.574633 & 0 & 4.4122\ E^{-2} & -2.353193 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.4518\ E^{-4} & -7.7432\ E^{-3} & 0 & -8.2729\ E^{-4} & 4.4122\ E^{-2} & 0 & 1.4949\ E^{-3} & -7.9727\ E^{-2} \\
0 & -7.7432\ E^{-3} & 0.4129698 & 0 & 4.4122\ E^{-2} & -2.353193 & 0 & -7.9727\ E^{-2} & 4.252109
\end{bmatrix}
EI
$$

Tabla 4-1

Marco 2

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5.3492\ E^{-4} & 3.5862\ E^{-3} & 0 & -6.4343\ E^{-4} & -4.2895\ E^{-3} & 0 & 1.2581\ E^{-4} & 8.3873\ E^{-4} \\
0 & 3.5862\ E^{-3} & 2.3775\ E^{-3} & 0 & -4.2895\ E^{-3} & -2.8597\ E^{-2} & 0 & 8.3873\ E^{-4} & 5.5915\ E^{-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6.4343\ E^{-4} & -4.2895\ E^{-3} & 0 & 1.3169\ E^{-3} & 8.7796\ E^{-3} & 0 & -8.3280\ E^{-4} & -5.5520\ E^{-3} \\
0 & -4.2895\ E^{-3} & -2.8597\ E^{-2} & 0 & 8.7796\ E^{-3} & 5.8530\ E^{-2} & 0 & -5.5520\ E^{-3} & -2.7013\ E^{-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.2581\ E^{-4} & 8.3873\ E^{-4} & 0 & -8.3280\ E^{-4} & -5.5520\ E^{-3} & 0 & 1.5246\ E^{-3} & 1.0164\ E^{-2} \\
0 & 8.3873\ E^{-4} & 5.5915\ E^{-3} & 0 & -5.5520\ E^{-3} & -3.7013\ E^{-2} & 0 & 1.0164\ E^{-2} & 6.7760\ E^{-2}
\end{bmatrix}
EI
$$

Tabla 4-2

Marco 3

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2.9579\ E^{-4} & 1.9720\ E^{-2} & 0 & -3.8509\ E^{-4} & -2.5672\ E^{-2} & 0 & 1.0516\ E^{-4} & 7.0110\ E^{-3} \\
0 & 1.9720\ E^{-2} & 1.314642 & 0 & -2.5672\ E^{-2} & -1.71149 & 0 & 7.0110\ E^{-3} & 0.4673986 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3.8509\ E^{-4} & -2.5672\ E^{-2} & 0 & 8.1068\ E^{-4} & 5.4045\ E^{-2} & 0 & -5.5101\ E^{-4} & -3.6734\ E^{-2} \\
0 & -2.5672\ E^{-2} & -1.71149 & 0 & 5.4045\ E^{-2} & 3.603006 & 0 & -3.6734\ E^{-2} & -2.448928 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1.0516\ E^{-4} & 7.0110\ E^{-3} & 0 & -5.5101\ E^{-4} & -3.6734\ E^{-2} & 0 & 9.8536\ E^{-4} & 6.5691\ E^{-2} \\
0 & 7.0110\ E^{-3} & 0.4673986 & 0 & -3.6734\ E^{-2} & -2.448928 & 0 & 6.5691\ E^{-2} & 4.379369
\end{bmatrix} EI$$

Tabla 4-3

Marco A

$$\begin{bmatrix}
4.1124\ E^{-4} & 0 & -1.2794\ E^{-2} & -5.4770\ E^{-4} & 0 & 1.7040\ E^{-4} & 1.6315\ E^{-4} & 0 & -5.0757\ E^{-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.2794\ E^{-2} & 0 & 0.8980482 & 1.7040\ E^{-2} & 0 & -0.5301231 & -5.0757\ E^{-3} & 0 & 0.1579109 \\
-5.4770\ E^{-4} & 0 & 1.7040\ E^{-2} & 1.1683\ E^{-3} & 0 & -3.6347\ E^{-2} & -8.2016\ E^{-4} & 0 & 2.5516\ E^{-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.7040\ E^{-2} & 0 & -0.5301231 & -3.6347\ E^{-2} & 0 & 1.30781 & 2.5516\ E^{-2} & 0 & -0.793836 \\
1.6315\ E^{-4} & 0 & -5.0757\ E^{-3} & -8.2016\ E^{-4} & 0 & 2.5516\ E^{-2} & 1.4602\ E^{-3} & 0 & -4.5429\ E^{-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-5.0757\ E^{-3} & 0 & 0.1579109 & 2.5516\ E^{-2} & 0 & -0.793836 & -4.5429\ E^{-2} & 0 & 1.413356
\end{bmatrix} EI$$

Tabla 4-4

Marco B

$$\begin{bmatrix}
4.1124\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & 3.6555\ \mathrm{E}^{-3} & -5.4770\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & -4.8685\ \mathrm{E}^{-3} & 1.6315\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & 1.4502\ \mathrm{E}^{-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.6555\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & 3.2494\ \mathrm{E}^{-2} & -4.8685\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & -4.3275\ \mathrm{E}^{-2} & -1.4502\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & 1.2891\ \mathrm{E}^{-2} \\
-5.4770\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & -4.8685\ \mathrm{E}^{-3} & 1.1683\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & 1.0385\ \mathrm{E}^{-2} & -8.2016\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & -7.2903\ \mathrm{E}^{-3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4.8685\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & -4.3275\ \mathrm{E}^{-2} & 1.0385\ \mathrm{E}^{-2} & 0 & 9.2309\ \mathrm{E}^{-2} & -7.2903\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & -6.4803\ \mathrm{E}^{-2} \\
1.6315\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & 1.4502\ \mathrm{E}^{-3} & -8.2016\ \mathrm{E}^{-4} & 0 & -7.2903\ \mathrm{E}^{-3} & 1.4602\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & 0.0129798 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.4502\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & 1.2891\ \mathrm{E}^{-2} & -7.2903\ \mathrm{E}^{-3} & 0 & -6.4803\ \mathrm{E}^{-2} & 0.0129798 & 0 & 0.115376
\end{bmatrix} EI$$

Tabla 4-5

Marco C

$$\begin{bmatrix}
3.6260\ \mathrm{E}^{-4} & 1.2087\ \mathrm{E}^{-4} & 1.1281\ \mathrm{E}^{-2} & -4.8656\ \mathrm{E}^{-4} & -1.6219\ \mathrm{E}^{-4} & -1.5137\ \mathrm{E}^{-2} & 1.4868\ \mathrm{E}^{-4} & 4.9560\ \mathrm{E}^{-5} & 4.6256\ \mathrm{E}^{-3} \\
1.2087\ \mathrm{E}^{-4} & 4.0289\ \mathrm{E}^{-5} & 3.7603\ \mathrm{E}^{-3} & -1.6219\ \mathrm{E}^{-4} & -5.4063\ \mathrm{E}^{-5} & -5.0458\ \mathrm{E}^{-3} & 4.9560\ \mathrm{E}^{-5} & 1.6520\ \mathrm{E}^{-5} & 1.5419\ \mathrm{E}^{-3} \\
1.1281\ \mathrm{E}^{-2} & 3.7603\ \mathrm{E}^{-3} & 0.3509632 & -1.5137\ \mathrm{E}^{-2} & -5.0458\ \mathrm{E}^{-3} & -0.4709438 & 4.6258\ \mathrm{E}^{-3} & 1.5419\ \mathrm{E}^{-3} & 0.1439072 \\
-4.8656\ \mathrm{E}^{-4} & -1.6219\ \mathrm{E}^{-4} & -1.5137\ \mathrm{E}^{-2} & 1.0411\ \mathrm{E}^{-3} & 3.4703\ \mathrm{E}^{-4} & 3.2389\ \mathrm{E}^{-2} & -7.3717\ \mathrm{E}^{-4} & -2.4572\ \mathrm{E}^{-4} & -2.2934\ \mathrm{E}^{-2} \\
-1.6219\ \mathrm{E}^{-4} & -5.4063\ \mathrm{E}^{-5} & -5.0458\ \mathrm{E}^{-3} & 3.4703\ \mathrm{E}^{-4} & 1.1568\ \mathrm{E}^{-4} & 1.0796\ \mathrm{E}^{-2} & -2.4572\ \mathrm{E}^{-4} & -8.1908\ \mathrm{E}^{-5} & -7.6448\ \mathrm{E}^{-3} \\
-1.5137\ \mathrm{E}^{-2} & -5.0458\ \mathrm{E}^{-3} & -0.4709438 & 3.2389\ \mathrm{E}^{-2} & 1.0796\ \mathrm{E}^{-2} & 1.00766 & -2.2934\ \mathrm{E}^{-2} & -7.6448\ \mathrm{E}^{-3} & -0.7135095 \\
1.4868\ \mathrm{E}^{-4} & 4.9560\ \mathrm{E}^{-5} & 4.6256\ \mathrm{E}^{-3} & -7.3717\ \mathrm{E}^{-4} & -2.4572\ \mathrm{E}^{-4} & -2.2934\ \mathrm{E}^{-2} & 1.3102\ \mathrm{E}^{-3} & 4.3673\ \mathrm{E}^{-4} & 4.0762\ \mathrm{E}^{-2} \\
4.9560\ \mathrm{E}^{-5} & 1.6520\ \mathrm{E}^{-5} & 1.5419\ \mathrm{E}^{-3} & -2.4572\ \mathrm{E}^{-4} & -8.1908\ \mathrm{E}^{-5} & -7.6448\ \mathrm{E}^{-3} & 4.3673\ \mathrm{E}^{-4} & 1.4558\ \mathrm{E}^{-4} & 1.3587\ \mathrm{E}^{-2} \\
4.6260\ \mathrm{E}^{-3} & 1.5419\ \mathrm{E}^{-3} & 0.1439072 & -2.2934\ \mathrm{E}^{-2} & -7.6448\ \mathrm{E}^{-3} & -0.7135095 & 4.0762\ \mathrm{E}^{-2} & 1.3587\ \mathrm{E}^{-2} & 1.268144
\end{bmatrix} EI$$

Tabla 4-6

Suma de Rigideces

$$
\begin{bmatrix}
1.1851\,E^{-3} & 1.2087\,E^{-4} & 2.1421\,E^{-3} & -1.5820\,E^{-3} & -1.6219\,E^{-4} & -2.9663\,E^{-3} & 4.7498\,E^{-4} & 4.9560\,E^{-5} & 1.0001\,E^{-3} \\
1.2087\,E^{-4} & 1.3480\,E^{-3} & 1.6066\,E^{-3} & -1.6219\,E^{-4} & -1.6841\,E^{-3} & -2.9290\,E^{-3} & 4.9560\,E^{-5} & 3.9268\,E^{-4} & 1.6484\,E^{-3} \\
2.1421\,E^{-3} & 1.6066\,E^{-3} & 3.47669563 & -2.9663\,E^{-3} & -2.9290\,E^{-3} & -4.4952932 & 1.0001\,E^{-3} & 1.6484\,E^{-3} & 1.20066874 \\
-1.5820\,E^{-3} & -1.6219\,E^{-4} & -2.9663\,E^{-3} & 3.3776\,E^{-3} & 3.4703\,E^{-4} & 6.4273\,E^{-3} & -2.3775\,E^{-3} & -2.4572\,E^{-4} & -4.7084\,E^{-3} \\
-1.6219\,E^{-4} & -1.6841\,E^{-3} & -2.9290\,E^{-3} & 3.4703\,E^{-4} & 3.5000\,E^{-3} & 6.5966\,E^{-3} & -2.4572\,E^{-4} & -2.2930\,E^{-3} & -5.8083\,E^{-3} \\
-2.9663\,E^{-3} & -2.9290\,E^{-3} & -4.4952932 & 6.4273\,E^{-3} & 6.5966\,E^{-3} & 9.46691896 & -4.7084\,E^{-3} & -5.8083\,E^{-3} & -6.41128266 \\
4.7498\,E^{-4} & 4.9560\,E^{-5} & 1.0001\,E^{-3} & -2.3775\,E^{-3} & -2.4572\,E^{-4} & -4.7084\,E^{-3} & 4.2307\,E^{-3} & 4.3673\,E^{-4} & 8.3123\,E^{-3} \\
4.9560\,E^{-5} & 3.9268\,E^{-4} & 1.6484\,E^{-3} & -2.4572\,E^{-4} & -2.2930\,E^{-3} & -5.8083\,E^{-3} & 4.3673\,E^{-4} & 4.1504\,E^{-3} & 9.7147\,E^{-3} \\
1.0001\,E^{-3} & 1.6484\,E^{-3} & 1.20066874 & -4.7084\,E^{-3} & -5.8083\,E^{-3} & -6.41128266 & 8.3123\,E^{-3} & 9.7147\,E^{-3} & 11.49611387
\end{bmatrix}
\quad EI
$$

Tabla 4-7

Matriz de Masa

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & M_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_\phi & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_\phi
\end{array}\right]
$$

Tabla 4-8

REFERENCIAS

Dinámica Estructural

I. Martinez, A. Navarro, J. Cisneros

Universidad Autónoma de Zacatecas

University Physics for Science and Engineering

Donald E. Tilley

Ed. Cummings Publishing Company, Inc.

Estructuras Antisismicas

Gabriel Estrada Uribe

Ed. C.E.C.S.A.

Vibraciones Mecánicas

R. Roca Vila, Juan Leon L.

Ed. Limusa

Mecánica de Materiales

Egor P. Popov

Ed. Limusa

Análisis Estructural

A. Ghali, A. Neville

Ed. Diana

Fundamentos de Ingeniería Sísmica

N. M. Newmark, E. Rosenblueth

Ed. Diana

Cálculo con Geometría Analítica

Earl W. Swokowski

Grupo Editorial Iberoamérica

Diseño Estructural

Roberto Meli Piralla

Ed. Limusa

Configuración y Diseño Sísmico de Edificios

Christopher Arnold, Robert Reitherman

Ed. Limusa

Apuntes de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias

Prospero García

Facultad de Ingeniería

Apuntes de Diseño Estructural

Oscar de Buen, Francisco de Pablo Galán, Luis Esteva, Carlos Olagaray

Facultad de Ingeniería

Diseño de Estructuras Resistentes a Sismo

D. J. Dowrick

Ed. Limusa

Manual de Diseño Sismico de Edificios
Enrique Bazán Zurita, Roberto Meli Piralla
Ed. Limusa

Manual de Diseño de Obras Civiles
C.2.1. Análisis de Estructuras
Comisión Federal de Electricidad

Diseño de Estructuras de Acero
Bresler, Lin, Scalzi
Ed. Limusa

III Simposium Nacional sobre Ingenieria Sismica
Memorias
Sociedad Mexicana de Ingenieria Sismica

Manual de Construcción en Acero
Intituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C.
Ed. Limusa

Manual of Steel Construction
American Institute of Steel Construction