17
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN JUEGO DE POLUCION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PROCORO GUADALUPE GOMEZ ALONSO

DIRECTOR DE TESIS:

MAT. JOSE ZAPATA LILLO

México, D. F. 1991

CONTENIDO

SEGUNDA PARTE.

La Teoría de Juegos nos proporciona medios para analizar un Sistema Económico con Externalidades. En estos sistemas, interesa establecer acuerdos sociables estables, tendientes a repartir los costos, ó beneficios que se derivan de las externalidades.

En su trabajo, Bayart, Collomb, y Ponssard estudian un Sistema Económico con Externalidades; a través de un juego 5-personal. Este juego, además de ser un buen modelo teórico, permite realizar experimentos para clasificar y evaluar las conductas de los "productores".

Además en relación con el estudio teórico, los autores consideran el juego de dos maneras:

I. NO COOPERATIVO. Encuentran cierto tipo de equilibrio (Nash).

II. COOPERATIVO. Encuentran distribuciones que corresponden a acuerdos estables (Core).

Prueban además que ambos tipos de solución (Nash y Core) coinciden en el caso de una infinidad de estados. También se estudia la relación entre la contaminación y la tasa de interés.

En lo que se refiere a la utilización experimental del juego, diremos que éste ya había sido probado por psicólogos en varias ciudades (como Suecia, USA, etc.). En la segunda parte de su trabajo BCP, describen detalladamente el experimento que realizaron con un grupo de escolares franceses.

Los resultados de este experimento coinciden esencialmente con aquellos de los psicólogos. Estos resultados evidencian conductas poco eficientes, que se derivan del desconocimiento; teniendo en cuenta que este juego simula un conjunto de productores que comparte un medio ambiente. Se reconocerá la importancia de este juego con propósitos didácticos.

En el capítulo 0, se trata de lo que es un juego bipersonal de suma cero, el cual se caracteriza por un conjunto de reglas que tienen una estructura formal, la cual gobierna el comportamiento de los jugadores que intervienen en él. Y los cuales se encuentran en una situación de conflicto, en donde lo que uno gana el otro lo pierde, y viceversa.

Las reglas permiten dos clases de movidas: personales, y de azar; llamadas la elección, y el resultado ó lotería resp. Se estudia la forma extensiva del juego, los conjuntos de información, y los juegos con información perfecta.

En seguida el concepto de estrategia, que se puede considerar, como un conjunto de acciones, ó instrucciones que puede hacer un determinado jugador en toda circunstancia que se le presente a través del juego.

Finalmente se trata la forma normal de un juego, que es una matriz de pagos. En éste caso para algún jugador; para observar si hay punto silla notando si las estrategias maximín, y minimáx coinciden. Este capítulo esta basado en el libro: The Game Theory And Statistical Decisions de Blackwell y Girshick.

rados se sustituye el valor esperado, y se resuelve la nueva matriz; es decir se usa una ecuación de recurrencia, la cual puede ó no ser resuelta. Si lo es se encuentran las estrategias óptimas, y el valor; si no entonces se hallan aproximaciones razonables. Se ilustran estos conceptos en el juego de la Inspección.

Estocástico : Hay un número finito de posiciones distintas, es posible regresar a una posición previa, así que los juegos pueden continuar indefinidamente, pero hay una probabilidad de juego infinito igual a cero, y el pago esperado finito. Puede ocurrir una estrategia estacionaria (cuando se usa el mismo esquema aleatorio cada vez que aparece el mismo elemento de juego). Puede haber truncamiento para convertirse en juego de exhaustión. Se analizan éstos conceptos en juego con cinco unidades, el lanzamiento de una moneda y condiciones iniciales.

Recursivo: Es un juego que posee n-elementos de juego, los cuales pueden ser repetidos. Cada uno del cual tiene su propia solución. Hay un pago solo cuando termina, aunque puede haber un pago estipulado en caso de juego inconcluso. La posibilidad de truncamiento no es factible, ya que la probabilidad de juego infinito es positiva. No hay r tal que los efectos de truncamiento después de r pasos sea despreciable La solución es aproximada con las llamadas estrategias ε-óptimas.

El resto de los conceptos esta en los apéndices. En el apéndice A se trata el algoritmo de Lemke-Howson. El cual sirve para resolver juegos bimatriciales. Este esta basado en el libro: The Theory Of Games and Markets, por J. Rosenmüller (1981).

En el apéndice B, se trata los juegos n-personales de suma general desde el punto de vista de J. Nash al modo de Voroeb'ev (en Game Theory). Se siguió esta línea debido a que éste autor da conceptos de solución para juegos n-personales con dos estrategias para cada jugador.

En el apéndice C, están los elementos de los juegos n-personales cooperativos, como coalición (cualquier subconjunto del conjunto de los jugadores); el Core (que es un conjunto de distribuciones socialmente estables, las cuales no pueden ser derribadas por ninguna coalición que trate de actuar en su propio interés). Imputación (una distribución de pagos posible). Y las condiciones razonables para las imputaciones:

i. Racionalidad Individual (R.I.).

$x_i \geq v(\{i\})$ para toda $i \in I$.

Es decir cada individuo no formará parte de ninguna coalición, si no recibe por lo menos lo que él por si mismo es capaz de obtener.

ii. Racionalidad de Grupo (R.G.)

$$\sum_{i \in I} x_i = v(\{I\}).$$

JUEGOS DE SUMA CERO.

0.1. INTRODUCCION.

Un juego es caracterizado por un conjunto de reglas que tienen una cierta estructura formal, la cual gobierna el comportamiento de ciertos individuos, que se encuentran en una situación de conflicto. El ajedrez y el bridge son dos juegos en este sentido, y serán usados para propósitos ilustrativos.

Informalmente hablando, las reglas estipulan que el juego consistirá de una sucesión finita de movidas en un orden especificado, y las cuales serán vigiladas por un árbitro; además la naturaleza de cada movida está preescrita.

Las movidas son de dos tipos: MOVIDAS PERSONALES Y DE AZAR.
Una movida personal es una elección por alguno de los jugadores, de un conjunto especificado de alternativas posiblemente infinito. Por ejemplo la primer movida en el ajedrez es una movida personal; la cual es una elección por las blancas de 1 de 20 alternativas.

La decisión hecha en una jugada particular de un juego, desde el punto de vista de movida personal la llamaremos LA ELECCION en esa movida.

La movida de azar, también resulta de la selección de un conjunto especificado de alternativas. Aquí la alternativa es seleccionada por un mecanismo de azar y no por algún jugador. Y por consiguiente existe un conjunto de probabilidades con las cuales el mecanismo selecciona, las varias alternativas especificadas por las reglas del juego.

Por ejemplo, la primer movida en el bridge consiste en distribuir la primer carta al primer jugador, el cual tiene 52 alternativas de selección; y entonces las reglas estipulan, que tenga probabilidad de 1/52 de ser escogida.

La selección real hecha en una jugada particular de un juego, de una movida de azar la llamaremos el RESULTADO en ésa movida.

En términos de movidas, las reglas de un juego tienen la siguiente estructura. Para la primer movida las reglas especifican, si es una movida personal (elección), las reglas enlistan las posibles alternativas y especifican cual jugador hará su elección. Si es una movida de azar (resultado), las reglas enlistan las posibles alternativas, y especifican las probabilidades con la cual ella será seleccionada.

Para mover después de la primera, digamos la k-ésima (k > 1).
Las reglas especifican como una función de las elecciones y resultados, de las k-1 movidas anteriores que:

a). Si la k-ésima movida es personal o de azar.

b). Si es de azar, las alternativas y sus probabilidades de selección.

c). Si es personal; las alternativas y el jugador que hará la elección, además de la información concerniente a las elecciones y resultados en las primeras k-1 movidas, antes de hacer su elección.

Finalmente las reglas especifican cuando el juego terminará, y el marcador asignado a cada jugador no necesariamente numérico.

0.2. DESCRIPCION FORMAL DE LA FORMA EXTENSIVA DE UN JUEGO.

0.2.1. Un juego, Γ n-personal en forma extensiva; puede ser observado como un árbol de la teoría de gráficas. De vértices y aristas con ciertas propiedades :

i). Tiene un vértice distinguido $\mathcal{O}$ llamado el estado inicial

ii). Hay una función de pago, la cual asigna a cada elección o resultado una n-ada ($P_1,\ldots,P_n$). Donde P_i denota el pago para el jugador i.

iii). Cada vértice no terminal de Γ , le es puesto una de n+1 posibles etiquetas. De acuerdo a cual jugador hará la elección en ése vértice; si el vértice corresponde a un resultado (jugada de azar), se etiqueta con la letra N (Naturaleza).

iv). Cada vértice etiquetado con una N, será equipado con una distribución de probabilidad π , sobre las aristas que se alejan del vértice.

v). Los vértices de cada jugador, son partidos en subconjuntos conocidos como conjuntos de información; y son tales que :

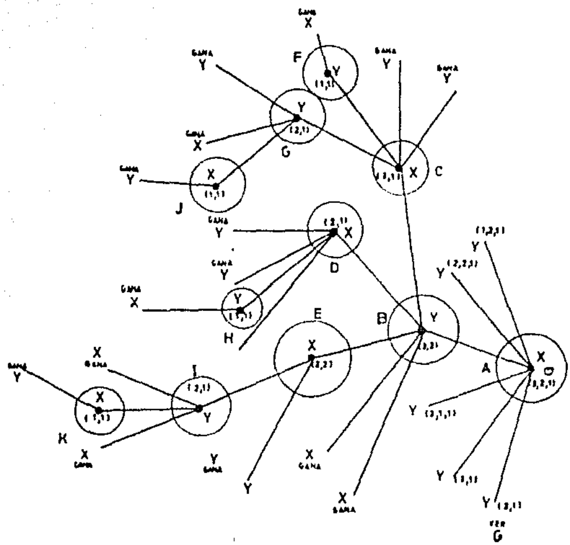
a). Para cualquier par de vértices en el mismo conjunto de información, deben tener igual número de aristas que se alejan de ésos vértices.

b). Ningún vértice puede seguir a otro vértice en el mismo conjunto de información.

El jugador i ($1 \leq i \leq n$), se dice que tiene <u>información perfecta</u> en Γ , si cada conjunto de información para éste jugador consta de <u>un</u> elemento.

El juego Γ en forma extensiva, se dice que tiene información perfecta; si todo jugador en Γ tiene información perfecta.

fig. [illegible]



El juego del Nim . Un conjunto de cerillos son arreglados en montones, el número de elementos de cada montón, y el total de montones es arbitrario. Hay dos jugadores X,Y. El primer jugador toma cualquier cantidad de cerillos de algún montón (solamente de uno), inclusive todos los cerillos del montón elegido. El otro jugador hace lo propio con las mismas condiciones; así continua el juego alternadamente hasta que el jugador que tome al final gana.

Este juego es de información perfecta, ya que cada vértice etiquetado con X ó Y está contenido en un solo conjunto de información; es decir cada jugador sabe en que posición está.

0.2.3. LA RULETA RUSA.

Considérese este juego con información perfecta con jugadas aleatorias y personales, cuya forma extensiva se representa en la figura 0.2.3.1.

Dos guardias soviéticos; un capitán y un cabo. Deciden jugar la ruleta rusa la cual consiste en lo siguiente: de entrada cada jugador deposita una cajetilla de cigarros. Cada uno tiene dos elecciones; el capitán juega primero debido a su rango, él puede tomar una pistola para seis balas; pero cargada con una sola; girar del cilindro y apretar del gatillo en su propia cabeza. (Aunque previamente dejó otra cajetilla de cigarros). O bién paga con dos cajetillas de cigarros y sin probar le pasa la pistola al cabo.

El cabo tiene las mismas opciones. En seguida el juego termina; el pago es: si ambos sobreviven se reparten las cajas de cigarrillos, y si alguno sobrevive se queda con todo.

Los conjuntos de información, están representados en la figura 0.2.3.1. con círculos. En donde el jugador X (el capitán), tiene un conjunto de información; y el jugador Y (el cabo), tiene dos.
Los vértices etiquetados con N corresponden a la naturaleza, y de sus alternativas que se alejan; se asocia un número que es la probabilidad con la cual se selecciona. A saber 1/6 y 5/6. Si no sobrevive y sobrevive respectivamente.

En los vértices finales, se dá un par de coordenadas que corresponden; a cada pago de cada jugador.

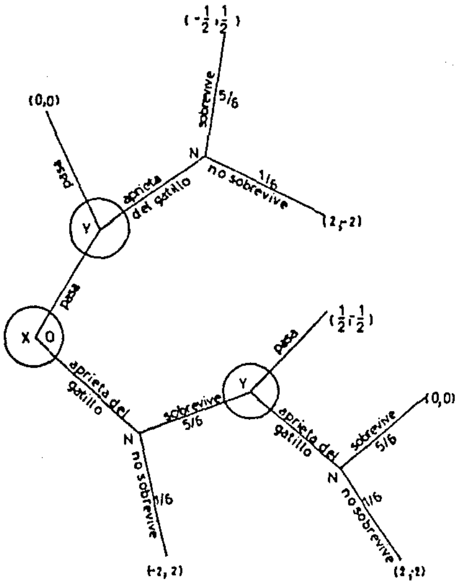


fig. 0.2.3.1. Este juego cuya forma extensiva se presenta, es de información perfecta. Aunque hay dos vértices etiquetados con la letra N (naturaleza, resultado o lotería); los cuales representan jugadas de tipo aleatorio, en donde las aristas que se alejan tienen probabilidad 5/6 y 1/6 de sobrevivir, y no sobrevivir respectivamente. Al final de cada trayectoria hay una pareja de números que corresponden a los pagos de los jugadores en cajetillas; por ejemplo (-2,2) significa que el primer jugador pierde 2 cajetillas y el segundo gana 2. Cuando el juego tiene esta característica para cada vértice del juego se llama de suma cero, y en este caso bipersonal. Después se estudiarán formas de solución sin embargo ahora se dan las estrategias óptimas para cada jugador: para X, apretar del gatillo, y para Y, siempre disparar.

0.3. EL CONCEPTO DE ESTRATEGIA

0.3.1.

Imagina que vas a jugar las blancas en un juego de ajedrez, y te ves imposibilitado de estar presente en la ocasión. Hay la posibilidad de un representante, quién llevará tus instrucciones exactamente; pero es incapaz de hacer alguna decisión por sí mismo.

Entonces a fin de garantizar que tu delegado podrá conducir las blancas, a través del juego con tus instrucciones. Se debe presentar a él toda posible circunstanccia en la cual él estará necesitado a mover, una vez presentada tal - situación; por lo cual se debe especificar para cada circunstancia, que elección hará. Tal concepto de instrucciones constituye lo que se llamará una estrategia.

Entonces una estrategia para las blancas, debe especificar una primer movida. Y para cada posible respuesta por las negras; una correspondiente movida siguiente. Y en general para cada posible sucesión de elecciones o movidas $m_1, \ldots, m_{2k}$. $k>0$; una elección $E(m_1, \ldots, m_{2k})$, para su (k+1)-ésima movida (la 2k+1 ésima del juego). entre las alternativas posibles para él, como una respuesta a la situación $m_1, \ldots, m_{2k}$.

Naturalmente que la especificación de una estrategia, que requiera de una oportunidad razonable de ganar, contra un oponente que realmente esta presente; sería de una tarea formidable, principalmente porque tendría que hacer una descripción enorme de decisiones muchas de las cuales resultarían irrelevantes, en cualquier movida particular del juego. Ya que muchas situaciones que fueron descritas para el delegado no se presentarán.

Por ejemplo, el jugador que tiene las blancas; y que supondremos que realmente está presente, debe hacer dos decisiones a fin de hacer sus primeras dos movidas, mientras que uno que está actuando por representatividad; debe describir 20 decisiones para garantizar que su representado podrá hacer una movida.

De todos modos el de estrategias haría la partida real, de un solo juego de ajedrez una mejor garantía; por lo cual se verá que el concepto de estrategia lleva a una grata simplificación en teoría.

En general, una estrategia para un jugador dado en un juego; consiste de una especificación. Para cada situación que pudiera surgir, en la cual él estaría requerido a hacer su movida personal en esa situación.

Se enfatiza que la elección de una estrategia no impone ningún estorbo teórico sobre un jugador; concretamente él no hará ninguna decisión sobre la base de menos información que lo que él dispone en el juego real , en que ésta decisión fuese requerida, ya que las decisiones cuya totalidad constituye una estrategia; son condicionales de la forma: Si una situación surgiera en la cual yo estoy informado que me toca tirar, y estoy dando información z; acerca de los resultados de las movidas previas (azar y personal). Y estoy decidiendo sobre el conjunto de alternativas abierto para mi que es denotado S; mi elección será $s \in S$

Hablando propiamente, la información z acerca del resultado de movidas previas incluye la información de que es mi turno mover y la especificación de las alternativas abiertas para mi, podemos describir una estrategia de un jugador como una lista de posibles zetas y una asignación para cada z de una $s \in S$ de posibles alternativas, es decir si Z es el espacio de posibles zetas (en términos del árbol, el espacio de todos los conjuntos de información V con la etiqueta del jugador) y $S(z)$ es el conjunto de alternativas especificadas por z (el conjunto de aristas que nos llevan fuera de un vértice del conjunto de información particular).

La estrategia de un jugador es una función f tal que $f(z) \in S(z)$ para toda $z \in Z$ (es decir f es una regla que especifica, para cada conjunto de información cual arista será seleccionada).

El espacio de todas las posibles estrategias f para un jugador dado será simbolizado por F. el número de elementos de F es :

$$\prod_{i=1}^{n} r_i$$

donde n es el número de conjuntos de información con la etiqueta del jugador.

r_i es el número de alternativas para el i-ésimo conjunto de información.

Sea Z_1, Z_2 los Z - espacios para las blancas y negras en el ajedrez y sea f_1, f_2 cualquier par de estrategias para las blancas y negras respectivamente.

Un árbitro conduciría el juego sin posteriores instrucciones de cada jugador y anunciaría el resultado una vez dicha f_1, f_2.

Para la información z_1 que ninguna movida previa ha sido hecha, y que es el turno de las blancas y que $S(z_1)$, consiste de 20 movidas legales para las blancas así es como $m_1 = f_1(z_1) \in S(z_1)$, es una movida de apertura para las blancas.

La información z_2 de que la movida de apertura de las blancas fué m_1 y de que ninguna otra movida na sido hecha por el otro jugador, y que es el turno mover para las negras y que $S(z_2)$ consiste de 20 movidas legales; así que $f_2(z_2) = m_2$ será una respuesta, etc.

Entonces el resultado del juego está determinado únicamente por las estrategias f_1, f_2 escogidas por los jugadores al menos teóricamente .

0.3.1. TEOREMA. Todo juego finito n-personal con información perfecta tiene una solución

El hecho notado antes por el ajedrez, que el resultado del juego está determinado una vez que cada jugador ha seleccionado una estrategia, se cumple claramente en función del teorema.

Pero para el bridge no se puede afirmar lo mismo que con el ajedrez, ya que las movidas de azar ocurren mas frecuentemente.

Al discutir las movidas de azar, se hace la siguiente simplificación conceptual. Sea W el conjunto de toda posible circunstancia w en el cual una movida de azar es requerida. Cada w incluye una especificación de la naturaleza de la movida de azar para ser ejecutada, es decir del conjunto $S(w)$ de las alternativas entre las cuales una es seleccionada, y para cada w la distribución de probabilidad p en $S(w)$ de acuerdo a la cual la selección de $s \in S(w)$ se hará conforme a la distribución p.

Las selecciones para diferentes w's siendo independientes.

Ahora una selección particular de una $s \in S(w)$ para cada w constituye una función h definida en W con $h(w) \in S(w)$.
(En términos del árbol, h es una regla la cual especifica, para cada conjunto de información etiquetado "movida de azar", cual arista es seleccionada).

También las distribuciones p junto con los requerimientos de selección independiente, determinan una distribución sobre todo P en las funciones h. Consecuentemente, la totalidad de los experimentos ejecutados por el árbitro pueden ser vistos como un solo experimento; a saber, seleccionando una función $h \in \mathcal{H}$. Conforme a la función de probabilidad P.

Entonces como la totalidad de las decisiones van a ser hechas por un solo jugador, éstas pueden ser descritas por una sola decisión: la elección de una estrategia, así que la totalidad de los experimentos de azar a ser ejecutados sean sustituidos por un solo.

Se puede describir ahora entera y simplemente la estructura de un juego:

Supóngase que hay k jugadores, y sea F_i el espacio de posibles estrategias f_i para el jugador i.

$\mathcal{H}$ es el espacio de resultados h sobre todo el azar.

G el espacio de (k+1)-adas; $g=(f_1,\ldots,f_k,h)$ donde $f_i \in F_i$; $h \in \mathcal{H}$ cualquier (k+1)-ada, $g \in G$ determina el curso del juego.

Para cada jugador las reglas determinan un único resultado r, perteneciente al espacio de resultados R. Y consecuentemente para cada jugador hay una función q definida en el espacio G en R es decir $q: G \to R$.

Para f fijo la distribución de probabilidad de P, conforme a la cual h es seleccionada, determina una distribución de probabilidad Q en G y entonces una distribución de probabilidad π_f en R .

0.3.1.1. E J E M P L O .

Consideramos el siguiente ejemplo que ilustran los conceptos introducidos en esta sección :

1a - El jugador X mueve primero y selecciona uno de los enteros 1, 2.

2a - El árbitro lanza una moneda, si el resultado es águila, él informa al jugador Y la elección hecha por X, y no le informa en caso contrario.

3a - El jugador Y mueve y selecciona uno de los enteros 3 y 4.

4a - La siguiente jugada es aleatoria otra vez y consiste en seleccionar uno de los tres enteros 1, 2, 3 con probabilidades 0.4,0.2,0.4 respectivamente.

Los números seleccionados en la 1a, 3a y 4a movidas son sumados,esa cantidad es pagada por Y a X si la suma es par y en caso contrario X a Y.

El árbol de este juego se muestra en la fig.0.3.1.1. Los números en los vértices terminales representan las ganancias posibles del jugador X, ya que es de suma cero. El símbolo N es usado para designar movidas de azar.

En términos de los dos espacios F_1, F_2 las estrategias de los dos jugadores pueden ser descritas como sigue:

$$F_1 = \{1, 2\}$$

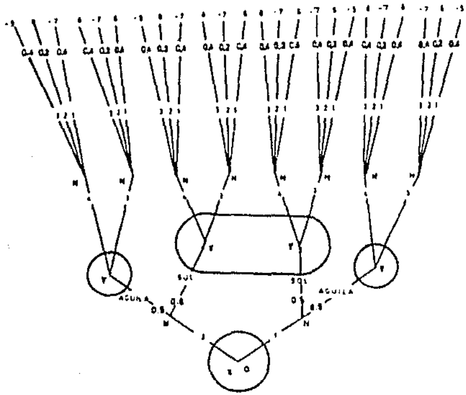
$$F_2 = \{(i,j,k) : i,j,k = 3,4\}$$

Donde la 1a. posición en la tríada está condicionada a que la moneda caiga águila y el jugador X escoja 1.

La segunda posición de la tríada está condicionada a que la moneda caiga águila y el jugador X escoja 2.

La tercera posición es cuando cae sol.

Fig. II.3.2.1. Cada vértice tiene una etiqueta N o X, Y. Cada arista tiene un número asociado con la elección" hecha por el mecanismo aleatorio (N) o por algún jugador; Si tiene etiqueta N además del resultado se tiene una probabilidad con la cual resultó seleccionado.



El espacio $\mathcal{H}$ de eventos y los valores de la distribución de probabilidad P para cada $h \in \mathcal{H}$ son dados por :

$$\mathcal{H} = \{ (A, 1), (A, 2), (A, 3), (S, 1), (S, 2), (S, 3) \}$$

Donde la letra A significa águila y S Sol.

$$P = \{0.2, 0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2\}$$

El espacio G de todas las tríadas $g = (f_1, f_2, h)$; contiene 96 elementos. El espacio de resultados R consiste de los 5 elementos : 5, 6, 7, 8, 9.

Algunos valores de la función $q : G \longrightarrow R$ son:

$q(g) = -5$ si $g = (1, (3,3,4), (A,1))$.

$q(g) = 8$ si $g = (1, (4,4,3), (A,3))$.

$q(g) = -7$ si $g = (2, (3,4,4), (S,1))$

$q(g) = -9$ si $g = (2, (4,3,4), (S,3))$

Si se observa el árbol del juego se pueden calcular fácilmente los valores de $\Pi_f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0.2.\ 0.3,\ 0.4,\ 0.\}$

Notación sea : f_{ij} la elección i = 1,2 para el jugador X y j=1,...8 para el jugador Y.

Tabla.0.3.1.1

$f_{11} = (f_1,f_1) = (1,(3,3,3))$	$f_{21} = (f_2,f_1) = (2,(3,3,3))$
$f_{12} = (f_1,f_2) = (1,(3,3,4))$	$f_{22} = (f_2,f_2) = (2,(3,3,4))$
$f_{13} = (f_1,f_3) = (,(3,4,3))$	$f_{23} = (f_2,f_3) = (2,(3,4,3))$
$f_{14} = (f_1,f_4) = (1,(3,4,4))$	$f_{24} = (f_2,f_4) = (2,(3,4,4))$
$f_{15} = (f_1,f_5) = (1,(4,3,3))$	$f_{25} = (f_2,f_5) = (2,(4,3,3))$
$f_{17} = (f_1,f_7) = (1,(4,4,3))$	$f_{26} = (f_2,f_6) = (2,(4,3,4))$
$f_{18} = (f_1,f_8) = (1,(4,4,4))$	$f_{27} = (f_2,f_7) = (2,(4,4,3))$
$f_{16} = (f_1,f_6) = (1,(4,3,4))$	$f_{28} = (f_2,f_8) = (2,(4,4,4))$

CALCULO DE π_f:

$f_{11} = (1,(3,3,3))$: $\pi_f(-5) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(6) = 0.1+0.1=0.2$ $\pi_f(-7) = 0.2+0.2=0.6$ $\pi_f(8) = 0$ $\pi_f(-9) = 0$	$f_{13} = (1,(3,4,3))$ $\pi_f(-5)=.4=0.2+0.2$ $\pi_f(-7)=.4=0.2+0.2$ $\pi_f(6)=.2=0.1+0.1$ $\pi_f(8) = 0$ $\pi_f(-9)= 0$	$f_{14} = (1,(3,4,4))$ $\pi_f(-5) = .2$ $\pi_f(6)=0.3=0.1+0.2$ $\pi_f(-7)=0.3=0.2+0.1$ $\pi_f(8) = .2$ $\pi_f(-9)= 0$	$f_{15}(1,(4,3,3))$ $\pi_f(-5) = .2$ $\pi_f(6)=.3=0.2+0.1$ $\pi_f(-7)=0.3=0.1+0.2$ $\pi_f(8) = 0.2$ $\pi_f(-9)= 0$
$f_{16}(1,(4,3,4))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = .4 = 0.2+0.2$ $\pi_f(-7) = .2 = 0.1+0.1$ $\pi_f(8) = .4 = 0.2+0.2$ $\pi_f(-9) = 0$	$f_{17} = (1,(4,4,3))$ $\pi_f(-5)= .2$ $\pi_f(6)= 0.2+0.1=0.3$ $\pi_f(-7)=0.1+0.2=0.3$ $\pi_f(8) = 0.2$ $\pi_f(-9)= 0$	$f_{18} = (1,(4,4,4))$ $\pi_f(-5)= 0$ $\pi_f(6)= .4 = 0.2+0.2$ $\pi_f(-7)=.2 = 0.1+0.1$ $\pi_f(8) =0.4= 0.2+0.2$ $\pi_f(-9)=0$	$f_{12}=(1,(3,3,4))$ $\pi_f(-5)= .2$ $\pi_f(6)= .3=0.1+0.2$ $\pi_f(-7)=.3=0.2+0.1$ $\pi_f(8) =.2$ $\pi_f(-9)= 0$
$f_{21} = (2,(3,3,3))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(-7) = 0.1.0.1=0.2$ $\pi_f(8) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(-9) = 0$	$f_{22} = ((2,(3,3,4))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0.2$ $\pi_f(-7) = 0.2+0.1=0.3$ $\pi_f(8) = 0.1+0.2=0.3$ $\pi_f(-9) = 0.2$	$f_{23} = (2,(3,4,3))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = .2$ $\pi_f(-7) = 0.1+0.2=0.3$ $\pi_f(8) = 0.2+0.1=0.3$ $f(-9) = 0.2$	$f_{24} = (2,(3,4,4))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0$ $\pi_f(-7) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(8) = 0.1+0.1=0.2$ $\pi_f(-9) = 0.2+0.2=0.4$
$f_{25} = (2,(4,3,3))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(-7) = 0.2=0.1+0.1$ $\pi_f(8) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(-9) = 0$	$f_{26} = (2,(4,3,4))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0.2$ $\pi_f(-7) = 0.3=0.1+0.2$ $\pi_f(8) = 0.3=0.2+0.1$ $\pi_f(-9) = 0.2$	$f_{27} = (2,(4,4,3))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0.4$ $\pi_f(-7) = 0.3=0.1+0.2$ $\pi_f(8) = 0.3=0.1+0.2$ $\pi_f(-9) = 0.2$	$f_{28} = (2,(4,4,4))$ $\pi_f(-5) = 0$ $\pi_f(6) = 0$ $\pi_f(-7) = 0.2+0.2=0.4$ $\pi_f(8) = 0.2=0.1+0.1$ $\pi_f(-9) = 0.2+0.2=0.4$

Tabla. 0.3.1.2

Resumiendo en una tabla. O.3.1.3

π_t : $R \longrightarrow \{0,1\}$

π_f : $\{-5,6;7,8,-9\} \longrightarrow \{0,0.2,0.3,0.4\}$

v \ π_f	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}
-5	0.4	0.2	0.4	0.2	0.2	0.	0.2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
6	0.2	0.3	0.2	0.3	0.3	0.4	0.3	0.4	0.4	0.2	0.2	0.	0.4	0.2	0.2	0.
-7	0.4	0.3	0.4	0.3	0.3	0.2	0.3	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.2	0.3	0.3	0.4
8	0.	0.2	0.	0.2	0.2	0.4	0.2	0.4	0.4	0.3	0.3	0.2	0.4	0.3	0.3	0.2
-9	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.2	0.2	0.4	0.	0.2	0.2	0.4

Para resolver este juego se recurre a los teoremas y definiciones que se ven en el apéndice B sin embargo aquí se encontrará la matriz de pago porque hay una manera muy sencilla de resolverlo y es la sig.: se calcula el producto escalar del vector columnatranspuesto de resultados con cada vector columna de la distribución de probabilidades de la tabla anterior. por ejemplo:

$$(-5,6,-7,8,-9)\begin{pmatrix}0.4\\0.2\\0.4\\0.\\0.\end{pmatrix} = -2.0+1.2-2.8+0+0 = -3.6$$

Haciendo todos los productos se obtiene la matriz 2x8.

2 estrategias puras para el jugador X en la columna y 8 estrategias puras del jugador Y en el renglón).

X \ Y	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,3)	(3,4,4)	(4,3,3)	(4,3,4)	(4,4,3)	(4,4,4)
I	- 3.6	0.3	- 3.6	0.3	.3	4.2	0.3	4.2
II	4.2	-0.3	- 0.3	-4.8	4.2	-0.3	-0.3	-4.8

El método general para resolver este juego se verá en el apéndice B pero por la forma de la matriz emplearé en ésta el método geométrico que analiza E.S.VENTT SEL[6] Ya que la matriz puede ser reducida a otra de tamaño 2X2 por dominancia de estrategias.

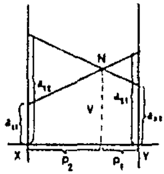
X \ Y	(3,4,3)	(3,4,4)
I	- 3.6	0.3
II	- 0.3	- 4.8

Esta matriz se puede representar por M donde

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Así pués el método se puede ver en el diagrama siguiente :

FIG. 0.3.1.4



En donde N el punto de intersección de las rectas,ydefinen la solución al juego de matriz M quese intepreta así :

Para el jugador X : El obtendrá un valor V si juega su primer estrategia conprobabilidad p_1, y su segunda con probabilidad p_2.

Resolviendo con los valores reales de la matriz se obtiene la solución con dos dígitos aproximados ver figura 0.3.1.4 para el caso 2xn.

$P_1 = 0.46$ $\qquad\qquad$ $P_1 = \frac{7}{15}$

$P_2 = 0.53$ $\qquad\qquad$ $P_2 = \frac{8}{15}$

$V^* = -2.1$ $\qquad\qquad$ $V^* = -2.1$

Análogamente para el jugador Y:

$q_1 = 0.6$ $\qquad\qquad$ $q_1 = \frac{2}{3}$

$q_2 = 0.4$ $\qquad\qquad$ $q_2 = \frac{1}{3}$.

La interpretación es ésta :

Con algún mecanismo de azar determinado por cada par de estrategias. El jugador X jugará más frecuentemente su primera estrategia pura que la segunda obteniendo como ganancia promedio - 2.1

El jugador Y. tiene a su disposición las estrategias, (3,4,3) y (3,4,4) que se interpretan así :

(3,4,3) : Si es águila el sabe lo que X puso : si fué 1 el elige 3; si fué 2 el elige 4. Si es sol él elige 3. Con frecuencia 0.6 de todas las veces.

(3,4,4) : Si es águila le dan información : si X elige 1 él elige 3; si X elige 2 él elige 4. Si es sol no hay información y entonces él elige 4, con menor frecuencia (0.4); obteniéndo también un pago promedio de-2.1.

0.4. FORMA NORMAL.

0.4.1. VALOR INFERIOR, VALOR SUPERIOR Y PUNTO SILLA.

Sea $\Gamma = (X, Y, M)$ un juego donde el primer jugador tiene m-estrategias puras, y el jugador tiene n-estrategias puras representadas en X e Y respectivamente. Al juego que origina se llama de mxn. Es decir los elementos de X son $x_1, \ldots, x_n$ y las de su contrario $y_1, \ldots, y_m$.

Supóngase que cada bando adopta una estrategia definida, digamos : x_i, y_j entonces estas estrategias determinan el resultado $a_{ij} = M(x_i, y_j)$. que quedará indicado en una matriz de tamaño mxn. A tal matriz se le llama matriz de pagos del jugador 2 al jugador 1, para quedar como en la siguiente tabla: 0.4.1.1.

1 \ 2	y_1	$y_2 \cdots$	y_n	
x_1	a_{11}	$a_{12} \cdots$	a_{1n}	α_1
x_2	a_{21}	$a_{22} \cdots$	a_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	a_{m1}	$a_{m2} \cdots$	a_{mn}	α_m
	β_1	$\beta_2 \cdots$	β_n	β \ α

El propósito de la teoría de los juegos es elaborar cursos de acción racionales para los jugadores en una situación antagónica. Si un juego se repite muchas veces, una estrategia óptima para el jugador es la que garantiza la ganancia media máxima posible. La hipótesis más importante que se establece es que el oponente es por lo menos tan racional como el mismo jugador, y hará lo posible para evitar que alcance su objetivo.

En la tabla 0.4.1.1 supóngase que las estrategias disponibles para 1 si se elige x_i se debe considerar la posibilidad de que el oponente conteste con la estrategia y_j cuyo pago es a_{ij} que sea tan pequeño como sea posible, DE modo que para un i fijo debe considerarse el menor de los números a_{ij} en el renglón i. Este número se denota por:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Si elegimos la estrategia x_i entonces no se puede esperar ganar más de α_i . Pero entonces se puede elegir en esta situación , de los números α_i el máximo , denotado por $\alpha = \max_i \alpha_i$.
A este valor se le llama <u>valor inferior</u> del juego ó maximín ya que:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Y la estrategia que se obtiene se le llama estrategia maximin, que es la más cautelosa o conservadora.

Analogamente para el jugador 2 ,. como esta interesado en minimizar las ganancias del contrario y como se considera que el pago es el negativo de la matriz de las entradas a_{ij} . Así que $\beta = \max_i a_{ij}$, y el valor $\beta = \min_j \beta_j$, se le llama el <u>valor superior</u> del juego o el minimáx, donde:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Que es la estrategia más conservadora para el jugador 2.

Cuando en algunos juegos el valor inferior y superior coinciden , las estrategias maximín y minimáx son estables. El valor común se le llama <u>valor del juego.</u> Que es lo que cada quién esperaría obtener al jugar muchas veces si emplean sus estrategias maximín y minimáx. Al punto en donde coinciden se le llama <u>punto silla</u>. Y al juego se dice que tiene punto silla.

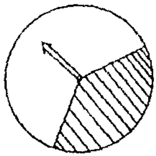
0.4.2. Extensión Mixta.

Entre los juegos finitos con punto silla se encuentran muy raramente en la practica , y por lo general los valores puros inferior y superior son diferentes.

Y es así como se tiene que resolver el juego para este caso por un método aleatorio que consiste en usar las estrategias puras en una proporsión definida (por un mecanismo aleatorio) . A tales estrategias se les conoce como mixtas.

Por ejemplo en el juego 0.3.1se puede usar una ruleta como se indica en la fig.0.4.2.1se gira la ruleta y donde para al indicar la flecha se juega la estrategia señalada.

fig.0.4.2.1



El resultado principal de este capítulo es conocido como el teorema fundamental de la teoría de juegos enunciado y demostrado por primera vez por John Von Newmann en 1928 y que afirma que todo juego bipersonal de suma cero tiene solución en estrategias posiblemente mixtas.

La ganancia promedio obtenida siguiendo la estrategia solución se llama valor del juego ν , y se encuentra entre α y β .

Es así como se ha llegado al punto en que se puede describir la secuencia de solución de un juego bipersonal suma cero como:

1°. Se clasifican las estrategias puras para cada jugador. 2° Se encuentra la matriz de pago para alguno de los jugadores. 3° Se observa si tiene punto silla , si lo tiene se interpreta si no se procede en base a las referencias [4] [6].

RESUMEN DEL CAPITULO 0

Este estudio proviene del excelente libro " The Game Theory and statistical decisions " de Blackwell and Girshick. Ya que a pesar de ser un texto anterior, hace un estudio riguroso de los juegos bipersonales de suma cero.

Un juego se caracteriza por un conjunto de reglas que tienen un estructura formal; la cual gobierńa el comportamiento de los individuos que intervienen en el. Y los cuales se encuentran en una situación de conflicto.

Los movimientos que se hacen en el juego son de dos tipos: personales y de azar, llamados "la elección" y el "resultado ó lotería".

La forma extensiva de u juego es un árbol como en la teoría de gráficascon ciertas reglas en donde aparece la idea de conjuntos de información.

Cuando todos los jugadores tienen información perfecta, el juego se dice que es de información perfecta.

Una estrategia, es un conjunto de acciones ó instrucciones que puede hacer un determinado jugador en toda circunstancia que se le presente en el desarrollo del juego.

El espacio de todas las posibles estrategias f se simboliza por F. El número de elementos que tiene F es : $\prod_{i=1}^{n} r_i$ donde n representa el número de conjuntos de información del jugador, y r_i es el número de aristas que se alejan de <u>cualquier</u> vértice de cada conjunto de información.

La estructura de un juego se puede describir en función de los siguientes elementos, suponiendo que hay k jugadores, y sea F_i el espacio de las posibles estrategias para el jugador i:

1). $\mathcal{H}$ es el espacio de resultados h sobre todo el azar.

2). G es el espacio de (k+1)-adas $g = (f_1,\dots,f_k,h)$ donde $f_i \in F_i$ y $h \in \mathcal{H}$.

3). Para cada jugador las reglas determinan un único resultado $r \in R$

4). Para cada jugador hay una función $q : G \longrightarrow R$ ver ejemplo 0.3.1.

5). Para f fijo, la distribución de probabilidad P, conforme a la cual h es seleccionada, determina una distribución Q en G, y así π_f: R $\longrightarrow$ R (del conjunto de resultados, al conjunte de los números reales).

Para ilustrar estos elementos se puede ver el ejemplo 0.3.1. En donde se ilustra también un método geométrico para resolver juegos 2x2 Tratados también en [4] y [6] .

Finalmente se trata la forma normal de un juego que es una matriz de pagos para algún jugador, y que es conveniente con el propósito de resolver el juego observando si tiene punto silla , es decir si la estrategia maximin y minimax coinciden. Si no entonces se procede a resolverlo por las técnicas de programación lineal (algoritmo de Tucker) ver [4] O el artículo [23] en donde se plantea el juego con ayuda de las llamadas estrategias mixtas, que es un mecanismo aleatorio que resulta del análisis de solución citado en [3] y [4] .

CAPITULO I

I JUEGOS MULTIESTADO.

I.1 Los títulos descriptivos de supervivencia, ruina, desgaste estocástico, recursivo exhaustión y multiestado nacen con la publicación de un grupo de matemáticos de la RAND Corporation en 1951.

Se puede encontrar un tratado de estos juegos en ANNALS OF MATEMATICS STUDIES No. 39. Contribution of the Theory of Games. H.W.Khun and A.W. Tucker.

Solamente nos interesan tres tipos de juegos de los mencionados por su gran parecido con el juego tratado en la parte central de la presente tesis " El juego de la Polución ". Estos tres tipos son : Exhaustion, Estocástico y Recursivo; dentro de los llamados juegos multiestado, también tratados en el libro: Game Theory autor G. Owen.

Cuando se consideran juegos con muchas movidas. Aunque sea un juego tan simple como el tic-tac-toe (gato). Si se desea contar el número de estrategias para el primer jugador se nota que él tiene 9 elecciones para la primer movida. Entonces para cualquiera de las ocho posibles réplicas, el tendría siete elecciones en su segunda movida; si se consideran solamente sus primeras dos movidas del primer jugador, encontramos que tiene $9.7^8 = 51,883,209$ estrategias puras.

Cualquier intento para clasificarlas, está fuera de lugar.

Como una estrategia pura es una función definida sobre la colección de los conjuntos de información del jugador, asignándole a cada conjunto de información un número entre 1 y k (donde k es el número de elecciones en el conjunto de información dado).

Así si un jugador tiene N conjuntos de información y k elecciones en cada uno, el número de estrategias puras es k^N el cual es muy grande.

Regresando al ejemplo del gato, encontramos que ninguna jugada del juego en realidad al jugarlo se considera toda posible estrategia pura (es decir, toda posible sucesión de movidas de la primera a la última). Sino más bién es jugado, considerando en cada movida todas las posibles elecciones para esa movida solamente. Y decidir de la experiencia o de otra manera cual es la mejor.

Entonces el número de estrategias se simplifica bastante, ya que como el jugador tiene N conjuntos de información él tendrá N estrategias y es así como se tiene la siguiente definición :

<u>DEFINICION</u>. Una <u>estrategia de comportamiento</u>, es una colección de N distribuciones de probabilidad, una para cada conjunto de información en las posibles elecciones.

Ejemplo. A un jugador se le dá una carta de un paquete de 52; después de ver su carta, el tiene una elección de una de dos; pasar o apostar una cantidad fija. El número total de estrategias puras es 2^{52}; entonces el conjunto de estrategias mixtas tendrá dimensión $2^{52} - 1$. Por otro lado una estrategia de comportamiento simplemente dá la probabilidad de apostar con cada mano. Entonces la dimensión del conjunto de estrategias de comportamiento es 52.

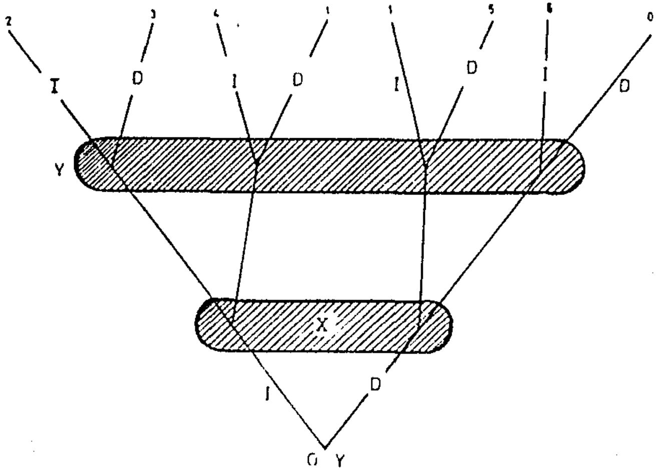
En general, el conjunto de estrategias del comportamiento es de menor dimensión que el conjunto de estrategias mixtas. Por otro lado será puntualizado que bajo ciertas condiciones, no toda estrategia mixta puede ser alcanzada, usando estrategias del comportamiento, como puede verse en el siguiente ejemplo :

Ejemplo. En el juego con árbol se etiquetan las estrategias puras del jugador Y como II, ID, DI, DD. Una estrategia mixta es un vector (x_1, x_2, x_3, x_4) satisfaciendo las restricciones usuales : Una estrategia de comportamiento es un par de números (y_1, y_2) satisfaciendo solamente $0 \leq y_i \leq 1$.

A la estrategia de comportamiento (y_1, y_2) le corresponde la estrategia mixta:

$$(y_1 y_2 , y_1(1 - y_2) , (1 - y_1)y_2 , (1 - y_1)(1 - y_2)). \qquad \text{I.1.1.}$$

La estrategia óptima para el jugador Y es el vector (0, 5/7, 2/7, 0) que no es de la forma I.1.1 Por consiguiente el juego no admite solución en términos de estrategias de comportamiento.



La dificultad con el anterior ejemplo es que el jugador Y no sabe en su segunda movida que hizo en la primera movida. Tales juegos se dice que tienen recordación imperfecta. Esta dificultad complica las cosas y no se llega a toda estrategia mixta por medio de una de comportamiento

El tipo de juego el cual nos proponemos estudiar, es muy cercano al de información perfecta: Después de un número dado de movidas a ambos jugadores se les dá la información simultáneamente (los cuales no tienen que olvidar para que el juego pueda ser recomenzado desde una posición dada.

El modelo general será :

PRIMERO. El jugador X tira

SEGUNDO. El jugador Y tira (ignorando lo que tiró el otro jugador).

TERCERO. Una movida aleatoria es hecha (un resultado).

CUARTA. Se les dá información a ambos jugadores.

Cada uno de estos ciclos será llamado un Stage (estado, período, etapa, etc) del juego.

I.2. JUEGOS DE EXHAUSTION

En este juego cada jugador empieza con un conjunto finito de recursos en cada estado del juego un recurso de algún jugador es disminuido en una unidad. El ganador será el que termine con el recurso del oponente

Alternativamente en cada estado el otro jugador podrá sumar un punto a su recurso; o bién :

El ganador será el que primero alcance un número fijado de puntos. Entonces estos juegos terminarán siempre; después de un cierto número de estados.

Es recomendable resolver estos juegos en reversa.

La idea general es que cada estado puede ser tratado como un juego separado. Cuando las estrategias para este estado son escogidas, el pago será una cantidad veradera (en caso que el juego multiestado termine) o bién una obligación de jugar un estado subsecuente del juego.

Como se trata con juegos separados se puede sustituir en lugar del juego su valor esperado y resolver la nueva matriz como se ve en los siguientes párrafos :

Ejemplo: Considérese el juego con matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{12} \end{pmatrix} \qquad \text{I.2.1.}$$

Donde las entradas Γ_1 y Γ_2 representa la obligación de jugar otros dos juegos con sus respectivas matrices :

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{I.2.3.}$$

Si los valores de Γ_1 y Γ_2 son v_1 y v_2 respectivamente. Se pueden sustituir sus valores en la matríz (I.2.2) quedando :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{12} \end{pmatrix} \tag{I.2.4.}$$

Al resolver (I.2.3) podemos conseguir las estrategias óptimas y el valor para (I.2.2).

Para juegos de exhaustión; se puede empezar con obtener la solución para el juego final (es), el cual tiene una unidad de recurso y como este juego termina en un solo estado se resuelve directamente. Después se resuelve el juego en el cual entre ambos jugadores tienen tres unidades de recurso. Estas soluciones ayudarán a resolver los juegos con cuatro unidades, cinco etc.

En general, para juegos con pocas unidades de recursos se resuelven directamente. Para juegos mas prolongados, una ecuación de recurrencia se obtiene, la cual puede o no puede ser fácilmente resuelta. Si lo es entonces dicha ecuación nos dará las estrategias óptimas y el valor del juego. Si no puede ser fácilmente resuelta

La matriz del juego se parece a ésta : Para el primer estado.

X \ V	INSPECCIONA	INSPECCIONA
ACTUA	-1	1
NO ACTUA	1	Γ_{N-1}

I.2.5.

La cual nos dã la definición recursiva :

$$V_N : \text{VALOR} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & V_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \text{I.2.6.}$$

donde $V_{N-1} < 1$; y por lo cual la matriz anterior no tiene punto silla.

Resolviendo el juego con matriz : (I.2.6)

$$\begin{array}{c|cc} & Y_1 & Y_2 \\ \hline X_1 & -1 & 1 \\ X_2 & 1 & V_{N-1} \end{array}$$

Se tiene que :

$$X_1 = \frac{1 - Y_{N-1}}{3 - Y_{N-1}} \qquad \text{I.2.7.}$$

$$X_2 = \frac{2}{3 - Y_{N-1}} \qquad \text{I.2.8.}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_N = \dfrac{Y_{N-1} + 1}{3 - Y_{N-1}} \\ \text{con condiciones iniciales} \quad Y_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{I.2.9.}$$

Ahora se puede definir una nueva ecuación en diferencias con la sustitución :

$$Y_N = \frac{1}{t_N} + 1 \qquad \text{I.2.10.}$$

O bién :

$$t_N = \frac{1}{Y_N - 1} \qquad \text{I.2.11.}$$

Y que al sustituir en la ecuación solución (I.2.9) se encuentra que :

$$t_N - t_{N-1} = -\frac{1}{2} \qquad \text{para toda } N \geq 2 \qquad \text{I.2.12.}$$

Resolviendo esta ecuación en diferencias :

$$t_N = t_{N-1} - \frac{1}{2} = t_{N-2} - \frac{2}{2} = t_{N-3} - \frac{3}{2} = \quad \ldots \quad = t_{N-j} - \frac{j}{2} = \quad \ldots$$

$$= t_1 - \frac{N-1}{2} = -1 - \frac{N-1}{2} = \frac{-2-N+1}{2} = -\frac{N+1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (I.2. 9) obtenemos :

$$V_N = \frac{1}{-\frac{N+1}{2}} + 1 = -\frac{2}{N+1} + 1 = \frac{-2+N+1}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}$$

Por tanto $$V_N = \frac{N-1}{N+1} \qquad \text{I.2.14.}$$

(I.2.14) es la solución en cada estado. Y las estrategías óptimas para el jugador X son :

$$X^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right) \qquad \text{I.2.15.}$$

Para el jugador Y

$$Y^* = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right) \qquad \text{I.2.16.}$$

Ya que el jugador tiene la matríz :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{N-2}{N} \end{pmatrix} \qquad \text{I.2.17.}$$

I.3 JUEGOS ESTOCASTICOS

Estos juegos son casi iguales a los anteriores. aunque son importantes sus diferencias.

Como hay un número finito de posiciones distintas, es posible para el juego regresar a una posición previa, así que los juegos pueden continuar indefinidamente. Además hay realmente un pago después de cada estado del juego, así que por un lado y otro, un pago infinito es teóricamente posible.

Existe sin embargo una probabilidad positiva para toda elección de estrategias; tal que la probabilidad de juego infinito es cero y el pago esperado es finito.

Específicamente, un juego estocástico es un conjunto de p " Elementos de juego " o posiciones Γ_k $_{k=1,\dots,p}$. Cada elemento del juego es representado por una matriz $m_k \times n_k$ cuyas entradas son de la forma.

$$\alpha_{ij}^{k} = a_{ij}^{k} + \sum q_{ij}^{kl} \Gamma_l \qquad \text{I.3.1.}$$

$$q_{ij}^{kl} \geq 0 \quad ; \quad \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} < 1 \qquad \text{I.3.2.}$$

Una estrategia se dice ser estacionaria si para toda k los vectores x^{kt} son independientes de t .

Una estrategia para el jugador II es una colección de n_k-vectores y^{kt} es decir el número x_i^{kt} es la probabilidad de que el jugador I usará su estrategia i-ésima, asumiendo que en el t-ésimo estado del juego, él se encuentra jugando el elemento Γ_k del juego. Como elemento Γ_k puede ser jugado varias veces, él no necesariamente usará las mismas probabilidades cada vez que es jugado. No obstan te si él usa el mismo esquema aleatorio cada vez que el elemento es jugado, la estrategia se dice ser estacionaria. Desde el punto de vista de la simplicidad se prefiere estas estrategias.

Dado un par de estrategias, un pago esperado puede ser calculado para $k=1,\ldots,p$ sobre la hipótesis de que el primer estado del juego será el elemento del juego Γ_k

Entonces el pago esperado para un par de estrategias puede ser pensado como un p-vector. Como con matrices de juegos ordinarios, conduciendo a la definición de estrategias óptimas y un valor, el valor siendo un p-vector $v=(v_1,v_2,\ldots,v_p)$

Es claro que, si el valor del vector existe, uno debe poder sustituir el elemento de juego Γ_k por el valor v_k de la componente.

Se sigue que podemos tener :

$$v_k = \mathrm{val}(B_k) \qquad \text{I.3.5.}$$

Donde B_k es la matriz $m_k \times n_k$ cuyas entradas son b_{ij}^k donde :

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k + \sum_{l=1}^{p} q_{ij}^{kl} v_l \qquad \text{I.3.6.}$$

Se ve que :

$$|\, b^{k}_{ij} - \bar{b}^{k}_{ij} | \leq \sum q^{kl}_{ij} \,| v_l - w_l | < c$$

Se sigue del lema anterior que

$$\operatorname{val}(B_k) < \operatorname{val}(\bar{B}_k) + c$$

Pero como v y w satisfacen (I.3.5) y (I.3.6); esto significa

$v_k < w_k + c$ pero hemos asumido que :

$v_k - w_k = c$ $\underset{o}{\nabla}$

<u>Existencia</u>. Construiremos una sucesión de vectores los cuales convergen al vector deseado. Definamos inductivamente

$v^{o} := (0,0,\ldots,0)$

$b^{kr}_{ij} := a_{ij} + \sum q^{kl}_{ij} v^{r}_{l}$ $\qquad r = 1,2,\ldots$

$v^{r+1}_{k} := \operatorname{val}(B^{r}_{k}) = \operatorname{val}(b^{kr}_{ij})$.

Debemos demostrar que la sucesión de vectores $v^{r} = (v^{r}_{1},\ldots,v^{r}_{p})$ converge, y segundo, que el límite tiene las propiedades deseadas (I.3.5) y (I.3.6). Sea.

$$s := \max_{k,i,j} \left\{ \sum_{l=1}^{p} q^{kl}_{ij} \right\}.$$

por consiguiente $v_k = w_k$.

La segunda parte de la prueba es constructiva en aquella que nos permita aproximar los valores de los elementos del juego Γ_k en una manera razonable y eficiente. Si asumimos que el juego continuará como un juego estocástico hasta que se haya jugado r- veces y entonces necesariamente termine obtenemos un juego de exhaustión (el juego truncado) en lugar de un juego estocástico. Si resolvemos este juego de exhaustión por los métodos descritos, obtenemos los valores v^r también como las estrategias óptimas para las matrices B_k^r . El número como se definió antes es tal que la probabilidad que el juego continue mas allá de r-estados, en cuanto que las estrategias deban ser empleadas, será a lo más s^r.

Entonces, si r es muy grande así que s^r es despreciable, podemos aproximar el juego estacástico, truncando después de r - estados.

Esto es lo que precisamente la sucesión de vectores v^r hace. Además las estrategias óptimas x^{kr} y y^{kr} para los juegos truncados convergi , en el límite a estrategias óptimas estacionarias para el juego estocástico.

I.3.1. Ejemplo.

Considérese el siguiente juego: Los jugadores Xavier e Yvette tienen entre ambos 5 unidades.

En cada estado del juego, Xavier elige cara o cruz e Yvette sin saber la movida de Xavier hace una elección similar.

Si las elecciones coinciden, Yvette le paga a Xavier una de dos: 3 unidades, si es cara o bién 1 unidad si es cruz.

Si las elecciones no coinciden Xavier le paga a Yvette 2 unidades.

Después de cada estado, una moneda es lanzada para determinar si el juego continuará o finalizará; además el juego terminará a algún jugador es "Aniquilado. Hacemos la estipulación adicional que ningún jugador puede pagar más que lo que él tiene.

Este juego puede ser representado por los cuatro elementos del juego Γ_k donde k es la cantidad que tiene Xavier al principio de un estado.

$$\Gamma_1 : \begin{pmatrix} 3+\frac{1}{2}\Gamma_4 & -1 \\ -1 & 1+\frac{1}{2}\Gamma_2 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_2 : \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1+\frac{1}{2}\Gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3 : \begin{pmatrix} 2 & -2+\frac{1}{2}\Gamma_1 \\ -2+\frac{1}{2}\Gamma_1 & 1+\frac{1}{2}\Gamma_4 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_4 : \begin{pmatrix} 1 & -2+\frac{1}{2}\Gamma_2 \\ -2+\frac{1}{2}\Gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si damos las condiciones iniciales :

$$v^{\circ} = (0,0,0,0)$$

y resolvemos cada elemento de juego: $\Gamma_k \quad k = 1,2,3,4$

con las formulas para matrices bipersonales suma cero:

$$v = \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{12}+a_{21}-a_{22}-a_{11}} \qquad (I.3.9)$$

$$x = \frac{a_{21}-a_{22}}{a_{12}+a_{21}-a_{22}-a_{11}} \qquad (I.3.10)$$

$$y = \frac{a_{12}-a_{11}}{a_{12}+a_{21}-a_{22}-a_{11}} \qquad (I.3.11)$$

Para Γ_1.

$$v_1^1 = \frac{(-1)(-1) - 3\cdot 1}{-1 - 1 - 1 - 3} = \frac{1}{3}$$

$$v_2^1 = \frac{(-2)(-2) - 3\cdot 1}{-2 - 2 - 3 - 1} = -\frac{1}{8}$$

$$v_3^1 = \frac{(-2)(-2) - 2\cdot 1}{-2 - 2 - 2 - 1} = -\frac{2}{7}$$

$$v_4^1 = \frac{(-2)(-2) - 1\cdot 1}{-2 - 2 - 1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad v^1 = (v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2})$$

Si sustituimos v^1 en los elementos de juego obtenemos v^2 al resolver de la misma manera.

$$v^2 = (v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2) = (\frac{101}{364}, -\frac{10}{55}, -\frac{73}{231}, -\frac{833}{1568})$$

Usando dos dígitos en cada representación.

$$v^2 = (.26, -.18, -.31, -.53)$$

Si sustituimos este valor nuevamente en cada elemento de juego obtenemos el vector v^3

$$v^3 = (.26, -.19, -.31, -.55)$$

Repitiendo el proceso hasta encontrar un vector en donde convergía la secuencia, se obtiene el vector v^4.

$$v^4 = (.26, -.19, -.32, -.55)$$

Que es el vector buscando (correcto o dos dígitos).

Para encontrar las estrategías óptimas para cada elemento de juego Γ_k se usan los valores de v^4_4 y con las fórmulas (I.3.10) y (I.3.11).

$$x^1 = (.34,\ .66) \qquad Y^1 = (.34,\ .65)$$

$$x^2 = (.38,\ .62) \qquad y^2 = (.38,\ .62)$$

$$x^3 = (.40,\ .60) \qquad y^3 = (.40,\ .60)$$

$$x^4 = (.50,\ .50) \qquad y^4 = (.50,\ .50)$$

Ya que :

$$x_1^1 = \frac{a_{21} - a_{22}}{a_{12} + a_{21} - a_{22} - a_{11}} = \frac{-1 - .91}{-1 - 1 - 2.73 - .91} = \frac{-1.91}{-5.34} = 0.34$$

$$x_2^1 = \frac{a_{12} - a_{11}}{a_{12} + a_{21} - a_{22} - a_{11}} = \frac{-1 - 2.73}{-1 - 1 - .91 - 2.73} = \frac{-3.73}{-5.64} = 0.66$$

donde Γ_1 :

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 + .5(-.55) & -1 \\ -1 & 1 + .5(-.19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.73 & -1 \\ -1 & .91 \end{pmatrix}$$

Análogamente para : Γ_2; Γ_3 y Γ_4.

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1+.5(-.32) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & .84 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2+.5(.26) \\ 2+.5(.26) & 1+.5(-.55) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1.87 \\ -1.87 & .73 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2+.5(-.19) \\ -2+.5(-.19) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2.1 \\ -2.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este juego recursivo puede ser presentado por un solo elemento de juego

Una estrategia para un jugador (para una operación nocturna) consiste simplemente de una partición de sus unidades en fuerzas atacantes y defensoras. Si se denota con A (ataca) y D (defiende) la matriz para este juego es :

E N E M I G O

			A	0	1	2
			D	2	1	0
	A	D				
	0	3		Γ	Γ	Γ
BLOTTO	1	2		Γ	Γ	1
	2	1		Γ	1	-1
	3	0		1	-1	-1

Para la resolución de este juego se puede consultar EVERETT [20].

El valor de este juego es +1, con estrategias de la forma;

$$(0,\ 1-\varepsilon-\varepsilon^2,\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon^2)$$

para Blotto, y toda estrategia óptima para el enemigo

CAPITULO II. UN JUEGO DE POLUCION.*

1. INTRODUCCION.

El presente escrito investiga un juego 5-personal, multiestado[1], no-cooperativo[2] desarrollado en la teoria psicológica[3]. Este juego se presenta aquí como un sistema económico con externalidades[4].

La Primera Parte.

Se hace un estudio teórico para analizar la estructura básica del modelo, y sus conexiones en otras representaciones económicas tales como la POLUCION[5]. En particular se caracteriza el equilibrio de NASH[6], y el CORE del juego[7]. Además se exhibe que estos dos conceptos de solución, generan los mismos puntos para el juego con un número infinito de estados. Y el factor de descuento[8] es también investigado.

La segunda parte.

Se analiza en función de estos conocimientos teóricos, los resultados de un experimento, el cual fué realizado entre una población de escolares franceses[9]. Se estudia cohesividad de grupo y comportamiento individual en cuatro situaciones distintas: dos tipos de externalidades combinadas con dos diferentes situaciones iniciales. Se comparan los resultados significantes con otros obtenidos previamente[10]

Se piensa que este trabajo puede ser de algún interés, para psicólogos, economistas y otros, quienes han estado desarrollando modelos de polución en sus propios campos.

1. Ver capítulo I
2. Ver apéndice: juegos no-cooperativos.
3. F. Rubenstein, G. Watzke, R. Doktor, J. Dana.
4. Sistema económico con externalidades, es una actividad de producción ó consumo la cual afecta el bienestar de extraños a pesar de sus deseos.
5. Polución es contaminación.
6. Se verá más adelante en este capítulo, pero también se puede ver en el apéndice: juegos no-cooperativos.
7. Ver apéndice juegos cooperativos.
8. El factor de descuento es igual a $1/(1+r)$ donde r es la tasa de interés.
9. A "Pollution Game" A theoretical and experimental study. [illegible]. J.P. Ponssard.

10. Se sabe que se han llevado a cabo estos experimentos en USA., [illegible], y otros países.

Antecedentes.

Este escrito es devoto a un estudio teórico y experimental, de un juego de la polución, el cuál ha sido introducido en la literatura psicológica por Dana, Rubenstein[11]. Informalmente establecido, se puede decir, que el juego simula un medio ambiente económico, y dinámico con recursos limitados. Estos recursos son comunmente apropiados por la comunidad, y cada agente continuamente usa alguno de ellos para su consumo privado. Una vez usado(s) se degrada(n), y el agente económico tiene la elección entre regenerarlos o no; Entonces cada agente puede contribuir a la preservación o al mejoramiento del medio ambiente (a un cierto costo) o a su degradación. Esta situación ha sido abstraída por las siguientes reglas:

El juego es una sucesión de estados. Cada estado empieza con una distribución de siete cartas a cada jugador de un paquete de cincuenta cartas azules o rojas. Si un jugador recibe menos de tres cartas rojas, el gana cuatro unidades. De otra forma el pierde una unidad. En seguida el jugador tiene la opción de entre tres elecciones como observa la composición del paquete central:

OPCION ROJA. El repartidor hace un cambio automático de una carta azul por una roja a ningún costo.

OPCION STATUS QUO.[12] Eliminar el cambio anterior a un costo de dos unidades.

OPCION AZUL.[13] Ordenar un cambio de una carta roja por una azul a un costo de cuatro unidades.

La composición del paquete central para el siguiente estado es el resultado global de cada movida personal.

11. Dana J.A. Rubenstein F.D. " The Psychology of Pollution and other Externalities" STANFORD GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS
12. En el paquete central.
13. El costo es debido a un cambio. Primero que no se realice la acción roja y luego un cambio de roja por azul.

Este juego ha sido extensamente experimentado en diferentes paises y algunas hipótesis específicas concernientes a la polución parecen ser verificadas (W.D.R.D.).[14]

En estas condiciones pareció interesante investigar el modelo, desde un punto de vista teórico comparando sus aspectos; con economías con externalidades.[15]

* Polución puede ser definida como un cambio indeseable en las características físicas, químicas y biológicas del aire, agua o suelo que puede afectar la salud, la supervivencia o las actividades de los humanos y otros organismos.

* Tipos de polución desde el punto de vista de la biología: BIODEGRADABLES (pueden ser descompuestos, removidos o consumidos a niveles aceptables o uno de dos, por procesos naturales o inventados por el hombre). Estos son los rápidamente degradables (no-persistentes) [illegible] orgánicos pueden ser rápidamente degradados por procesos de descomposición de organismos como las bacterias / los lentamente degradables (persistentes); materiales radioactivos y compuestos sintéticos (DDT, PCB, plásticos, etc.)

NO BIODEGRADABLES: no pueden ser [illegible] por procesos naturales. Ejemplos: mercurio, plomo y derivados.
(Tomado del libro Environmental Science An Introduction / G. Tyler Miller, Jr. WADSWORTH PUBLISHING COMPANY 1975).

14. The Effect of [illegible] Incentive schemes upon the Conservative of Shared Resource by Five-Person Group. [illegible] ORGANIZATIONAL BEHAVIORAL AND HUMAN PERFORMANCE. 1975 . Jun . Vol [illegible]
15. Economías externas. Deseconomías o deseconomías.

Paso 3. Cambia el número de cartas en el paquete:

$$r_{n-1} = r_n + \sum_{i \in I} x_n^i .$$

(Excepto en los límites de (0,50), dónde se tiene:

si $r_n + \sum_{i \in I} x_n^i < 0$ entonces $r_{n-1} = 0$,

si $r_n + \sum_{i \in I} x_n^i > 50$ entonces $r_{n-1} = 50$).

Paso 4. Si $n - 1 = 0$, el juego se termina; de otro modo se juega el estado $n - 1$.

1.2. LOS CONJUNTOS DE INFORMACION.

Se considera que cada jugador conoce N (el número de estados a jugarse), y al principio de cada estado, antes de cada repartición el número de cartas rojas en el paquete central; es decir r_n. Sin embargo cada jugador i, no conoce $x_n^i, i \neq j$, es decir, lo único que conoce es cuánto se contaminó, o regeneró el ambiente, pero no quién lo hizo.

1.3. LOS PAGOS.

El pago final del juego para cada jugador, puede ser visto como su pago acumulativo[18] sobre los N-estados aunque puede haber varias otras variantes.

18. Lo que se va recibiendo en cada estado se le va sumando.

2. ANALISIS DEL JUEGO CON HORIZONTE FINITO Y NO COOPERATIVO.

2.1. FORMULACION.

Si el número de estados N es finito, se puede tomar ventaja de la estructura usando programación dinámica[19] junto con el juego I-personal, en un programa de computadora.[20] Además se tendrá en cuenta la consideración de partida final, ya que se desarrollará una tendencia directa para el caso infinito. A fin de derivar el equilibrio de Nash, se hará uso de una ecuación de recurrencia.

Sea $x_n = (x_n^i)_{i \in I}$ un vector de decisiones en el estado n. Entonces si $F_n^i (r_n, x_n)$ denota el pago acumulativo[21] del jugador i, en el n-ésimo estado, que depende del número de cartas rojas r_n , y de las decisiones de los jugadores x_n .

Y es así como:

$$F_n^i (r_n, x_n) =$$

<u>Paso 1</u>. $4 \text{ prob } (r_n^i < 3/ r_n)$[22] $- 1 \text{ prob } (r_n^i \geq 3/ r_n) +$

<u>Paso 2</u>. $- 2 (1 - x_n^i) +$

<u>Estado n-1</u> $F_{n-1}^i (r_n + \sum_{i \in I} x_n^i \; , \; x_{n-1})$
(en el cuál: $F_0^i = 0 \; (i \in I)$).

Como tal, el juego aparece como un juego de Markov,[23] y puede ser resuelto usando un programa de computadora, el cual combina una componente dinámica con un juego matricial para cada estado.

19. Se resuelve un conjunto de juegos en cada estado.
20. Algoritmo de Lemke-Howson para el caso 1-personal.
21. Se describe en seguida.
22. Esta probabilidad se describe en la pág. 18
23. Visto como cadena de Markov y con las características que se omiten.

2.2. EL EQUILIBRIO DE NASH.

A pesar de la simplicidad del juego, es una tarea difícil de calcular el equilibrio de Nash. Se presenta aquí un resultado obtenido para el caso bipersonal.[24] Se espera que estos resultados informen sobre la problemática general, y también den una idea de su complejidad.

Se recuerda que un equilibrio de Nash en este contexto es un vector:

$$X = (X^{i}_{n,r})_{i \in I} ; \quad n = N,\dots,1; \; r = 0,\dots,50$$

En el cuál $X^{i}_{n,r}$ es una distribución de probabilidades sobre $\{ -1,0,+1 \}$. La cuál especifica la movida del jugador i, en el n-ésimo estado si r $r_n = r$, tal que cada jugador no tiene incentivo para cambiar por si mismo sus propias decisiones.

Se representa un equilibrio de Nash, como un conjunto de trayectorias en un diagrama (r,n). (Empezando en algún (r,n), hay 5 posibles posiciones siguientes,[25] de las cuáles solamente algunas son parte de un equilibrio.

Las decisiones aleatorias,[26] serán tomadas en cuenta con lineas punteadas. Se etiquetarán los vértices dependiendo de cuál jugador tiene los pagos acumulados más altos en ese vértice. En caso de igualdad no habrá etiqueta.

Hay ciertamente un gran número de puntos de equilibrio. En la fig. se han representado algunos en dónde $I = \{ A,B \}$.

24. Bimatricial.

25. (r,n) →
- ambos continúan (1,1)
- uno continúa (1,0) ó (0,1)
- uno y uno ó ninguno continúa (0,0) ó (-1,1) ó (1,-1)
- uno descontinúa (-1,0) ó (0,-1)
- ambos descontinúan (-1,-1)

26. Algún dispositivo aleatorio.

Por ejemplo: en el punto (7,11), A juega +1, y B, -1, asi que A está en mejores condiciones por 4 unidades; en el punto (8,11); A juega 0, y B, -1 así que A está mejor por 2 unidades; no obstante en el punto (9,11) ambos jugadores juegan -1. Es muy simple representar las movidas de los jugadores desde cu lquier vértice del diagráma, excepto aquellos pocos en los cuáles se incluye aleatorización.[27]

Si el número de estados, antes del fin del juego, es menor, o igual a 10, ambos jugadores juegan +1 (es decir, agregan una carta roja al paquete central). Sin embargo, si el número de estados es mayor que 10, entonces dependiendo de r , los jugadores pueden jugar +1 o -1 .

Dos caminos (14,13) hasta (7,10) y (0,13) hasta (6,10); tienen la propiedad de que ambos jugadores obtienen el mismo pago en equilibrio. Es de interés notar que entre estas dos trayectorias, las trayectorias de equilibrio no son simétricas. Un jugador teniendo un pago más alto es inestable ya que ese mismo jugador es incapáz de conservar ese pago alto para dos estados sucesivos. Además parece que estos equilibrios se mueven hacia las dos trayectorias simétricas.*

Una interpretación del comportamiento de estos resultados puede ser así: se empieza en algún véretice (r,n), puede tener sentido contaminar (+1) ya que el par de movidas (+1,-1) es un equilibrio, y hay dos buenas razones para hacerlo así; primero es un modo de conseguir un pago más alto que el otro jugador; segundo (-1,+1) es también u equilibrio.

Si los dos jugadores son "difíciles", el número de cartas rojas se juntan hasta algún punto en donde no tiene sentido mas contaminación, Aún a pesar de que el otro este descontaminando, pero es su propio interés descontaminar , luego entonces se juega simétricamente.

27. Ver nota 26.

* Todo este párrafo tendrá que verificarse cuando se tenga implementado el algoritmo de Lemke- Howson en la computadora, sin embargo en vista de los resultados del artículo (nota 26) se pueden [illegible] afirmar.

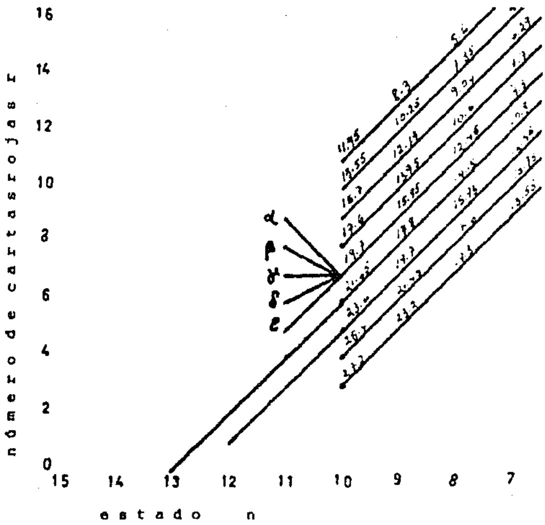


Fig. 2.2.2. En esta gráfica se pintan los puntos (r,n) donde r es el número de cartas rojas (en al columna), y n representa el estado. Los números en las líneas representan los pagos acumulativos en sentido regresivo hasta llegar al estado 10 en donde los posibles saltos son los puntos; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Para encontrar el equilibrio de Nash, en estos puntos se analiza uno por uno, encontrando la matriz de pago para cada jugador(dos jugadores). Desde cada punto hay 5 posibles alternativas para ambos jugadores 25 con tres estrategias para cada quien, por consiguiente en cada punto se encuentra una matriz 3x3, y siempre igual para los dos. Se va a mostrar que el punto (7,10) proviene de α . Asimismo β, γ, δ y ε pasan por el punto (7,10).

Que α pasa por (7,10) se debe a que:

Si el jugador 1 emplea sus tres estrategias -1,0,+1; y el 2º jugador también; se obtiene la matriz A,

B / A	-1	0	+1
-1	19.65	17.1	15.2
0	19.1	17.2	15.05
+1	15.2	17.05	14.95

Esta matriz se obtiene usando la función $F^i_{11}(r_{11},x_{11})$, y F^i_{10} donde x_{11} corresponde a las decisiones (x^1_{11},x^2_{11}) sobre las estrategias -1,0,+1 cuando $r_{11} = 9$ (α = (9,11). La probabilidad de ganar es .9 ver tabla 3.1.1.

Usando la fórmula $F^i_n(r_n,x_n)=4P(r^i_n\ \ 3|r_n)-1P(r^i_n=3|r_n)+(-2)(1-x^i_n)+ F^i_{n-1}(r_{n-1},x_{n-1})$.

Para estos valores se encuentra la matriz dada, donde las estrategias que se usarían son: (-1,-1), con pago esperado de 19.65, llegando al punto (7,10).

Las matrices para los puntos β,γ,δ y ε son respectivamente:

B / A	-1	0	+1
-1	21.3	19.35	17.25
0	21.35	19.25	17.35
+1	21.25	19.35	17.2

cuando $r_n=8$, $p = 0.93$, $n = 11$

B / A	-1	0	+1
-1	23.35	21.4	19.45
0	23.4	21.45	19.35
+1	23.45	21.35	19.45

cuando $r_{11}= 7$ $p = 0.95$

B / A	-1	0	+1
-1	25.25	23.45	21.5
0	25.45	23.5	21.55
+1	25.5	23.55	21.45

cuando $r_{11} = 6$ $p = 0.97$

B / A	-1	0	+1
-1	28.1	26.3	24.5
0	28.3	26.6	24.55
+1	28.5	26.55	24.6

cuando $r_{11}= 5$ $p = 0.98$

Estos juegos se resuelven usando el algoritmo de Lemke-Howson (apéndice A); excepto para aquellas matrices que tienen dominancia de estrategias que son muchas.

3. ANALISIS DEL JUEGO CON HORIZONTE INFINITO.

Mientras la sección precedente estuvo apegada a consideraciones de partida final, el interés de ahora en el caso con horizonte infinito para el juego, será usada una tendencia directa en lugar de una indirecta (la cual consiste en hacer que N tienda al infinito). Esto conduce a una reformulación del juego, el cuál conserva solamente los aspectos sobresalientes en un modelo simplificado. Así que el modelo estudiará el uso de conceptos cooperativo, y no cooperativo.

3.1. Selección de un criterio. El Factor de Descuento.

El criterio previo, la maximización del pago esperado, no resulta operacional en un modelo con horizonte infinito. Y será sustituído por la maximización del pago promedio por estado. Otro criterio el cuál es convenientemente usado, es la maximización del pago descontado.

Esta sección investiga el factor de descuento para el juego con un jugador.

Sea ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) , el factor de descuento, y sea $p(r)$[28] la probabilidad de ganar cuando hay r cartas rojas, en un cierto estado n .
En la tabla se tiene las probabilidades correspondientes al tener r cartas rojas en cada distribución . Entonces la política óptima se puede determinar comparando los valores descontados[29] asociados con cada decisión.

Comparando en dos estados sucesivos, la transición de r a r + 1 cuando $r \in (0,50)$.

Las eleciones posibles del jugador son dos:

28. $p(x_n=0/r_n) + p(x_n=1/r_n) + p(x_n=2/r_n) = \left[\binom{r}{0}\binom{50-r}{7} + \binom{r}{1}\binom{50-r}{6} + \binom{r}{2}\binom{50-r}{5}\right] / \binom{50}{7}$
Que es la probabilidad de que se reciban 7 cartas azules y ninguna roja ó 6 azules y 1 roja ó 5 azules y 2 rojas de un reparto de 7 cartas de un paquete de 50 cartas, r rojas y 50-r azules.

29. Con factor de descuento.

1° (0,+1). No hacer nada en el estado n ; y contaminar en el n-1.

2° (+1,0) . Contaminar en el estado n ; y no hacer nada en el n-1.

El pago que el esperaría obtener :

$$E_I(r) = -2 + p(r)\,4\rho + (1 - p(r))(-1)\rho + 0 = -2 + 5\rho p(r) - \rho$$ [30]

$$E_{II}(r+1) = 0 + p(r+1)\,4\rho + (1 - p(r+1)(-1)\rho + (-2)\rho =$$
$$= 5\rho\, p(r+1) - 3\rho .$$

$$E_{II}(r+1) - E_I(r) = 5\rho\,(p(r+1) - p(r)) - 2\rho + 2 =$$
$$= 5\rho\,(p(r+1) - p(r)) - 2(\rho - 1) > 0,$$

$$\therefore \quad p(r) - p(r+1) < 2(1 - \rho)/5\rho$$

Análogamente comparando dos estados sucesivos, la transición de r a r-1 se tienen dos también:

1° (0,-1). No hacer nada en el estado n , y descontaminar en el n-1.

2° (-1,0). Descontaminar en el estado n , y no hacer nada en el n-1.

$$E_I(r) = -2 + p(r)\,4\rho + (-1)\rho\,(1 - p(r)) - 4\rho = 5\rho\, p(r) - 5\rho - 2.$$

$$E_{II}(r-1) = -4 + p(r-1)\,4\rho + (-1)\rho\,(1 - p(r-1) - 2\rho =$$
$$= 5\rho\, p(r-1) - 3\rho - 4$$
$$E_{II}(r-1) - E_I(r) = 5\rho\,(p(r-1) - p(r)) + 2\rho - 2 > 0.$$

$$\therefore \quad p(r-1) - p(r) > 2(1 - \rho)/5\rho .$$

30. La primera acción es la presente, y la segunda corresponde al futuro; y en consecuencia lleva el factor de descuento

Y así se obtiene que para toda $r \in (1,50)$ que:

i). Si $p(r) - p(r-1) < 2(1-\rho)/5\rho$, y $r = 0$ entonces se juega $x = +1$.

ii). Si $p(r-1) - p(r) > 2(1-\rho)/5\rho$, entonces se juega $x = -1$.

iii). De otra manera , se juega $x = 0$.

Se sigue que después de un número finito de estados, el número de cartas rojas resultará estacionario (r_{∞}). Así se tiene que :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } \rho = 1 & \text{entonces} & r_{\infty} & = 2 \\ \text{Si } \rho = \rho^* & \text{entonces} & r_{\infty} & = r^* \\ \text{Si } \rho < \rho^* & \text{entonces} & r_{\infty} & = 50. \end{array}$$

Por lo cuál la función $r_{\infty}(\rho)$, no es contínua en ρ^* (ver fig. 3.1.1).

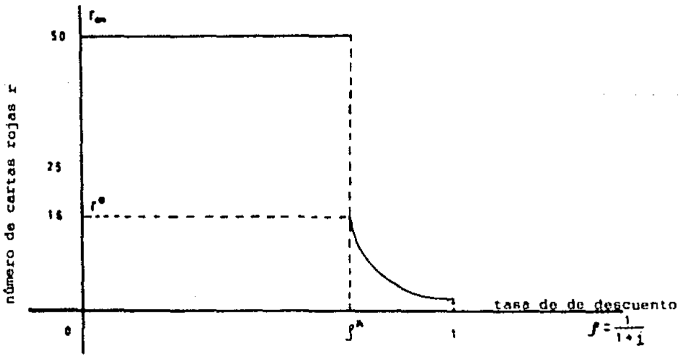


Fig.3.1.1. El número óptimo de cartas rojas como una función de la tasa de descuento.

cartas rojas. r	probabilidad de ganar. $p(r)$	incremento de la probabilidad. $\Delta_r = p(r)-p(r+1)$	cota para el factor de desc. β	interés asociado con la cota. i
0	1.0		1.0	0.0
1	1.0	$\Delta_1 = 0.0$	1.0	0.0
2	1.0	$\Delta_2 = 0.0$	0.995555591	0.0044
3	0.9982143	$\Delta_3 = 0.0017857$	0.987895319	0.0122
4	0.9933131	$\Delta_4 = 0.0049012$	0.978114445	0.0223
5	0.984363	$\Delta_5 = 0.0089501$	0.967139501	0.0339
6	0.9707722	$\Delta_6 = 0.0135908$	0.95321229	0.049
7	0.9511385	$\Delta_7 = 0.0196337$	0.946898635	0.056
8	0.9287068	$\Delta_8 = 0.0224317$	0.933732099	0.0709
9	0.9003184	$\Delta_9 = 0.0283884$	0.923918755	0.0823
10	0.8673788	$\Delta_{10} = 0.0329385$	0.9152144945	0.0926
11	0.8303241	$\Delta_{11} = 0.0370558$	0.907759597	0.1016
12	0.7896788	$\Delta_{12} = 0.0406453$	0.901629515	0.1091
13	0.7460376	$\Delta_{13} = 0.0436417$	0.8974457001	0.1142
14	0.7003338	$\Delta_{14} = 0.0457038$	0.892861321	0.1199
15	0.6523369	$\Delta_{15} = 0.0479969$	0.891362519	0.1218
16	0.6035857	$\Delta_{16} = 0.0487512$	0.890249665	0.1229
17	0.55442449	$\Delta_{17} = 0.0491608$	0.890943603	0.1224
18	0.5054627	$\Delta_{18} = 0.0489622$	0.892464299	0.1204
19	0.4572655	$\Delta_{19} = 0.0481972$	0.895021376	0.1172
20	0.4103488	$\Delta_{20} = 0.0469167$	0.898514576	0.1129
21	0.3651696	$\Delta_{21} = 0.0451792$	0.902838343	0.1076
22	0.3221224	$\Delta_{22} = 0.0430472$	0.907878891	0.1014
23	0.2815350	$\Delta_{23} = 0.0405874$	0.913518776	0.0946
24	0.2436677	$\Delta_{24} = 0.0378673$	0.919664956	0.0873
25	0.2087267	$\Delta_{25} = 0.034942$	0.926079629	0.0798
26	0.1767984	$\Delta_{26} = 0.0319283$	0.932809499	0.072
27	0.1479863	$\Delta_{27} = 0.0288121$	0.939616928	0.0642
28	0.1222809	$\Delta_{28} = 0.0257054$	0.946410902	0.0566
29	0.0996315	$\Delta_{29} = 0.0226494$	0.959384454	0.0423
30	0.0799381	$\Delta_{30} = 0.0196934$	0.959508501	0.0422
31	0.063058	$\Delta_{31} = 0.0168801$	0.965610972	0.0356
32	0.0488125	$\Delta_{32} = 0.0142455$	0.971301678	0.0295
33	0.036994	$\Delta_{33} = 0.0118185$	0.976512911	0.0240
34	0.0273732	$\Delta_{34} = 0.0096208$	0.981194187	0.0191
35	0.0197067	$\Delta_{35} = 0.0076665$	0.985311955	0.0149
36	0.0137439	$\Delta_{36} = 0.0059628$	0.989230008	0.0108
37	0.009389	$\Delta_{37} = 0.0043549$	0.991435405	0.0086
38	0.0059336	$\Delta_{38} = 0.0034554$	0.994227268	0.0058
39	0.0036111	$\Delta_{39} = 0.0023225$	0.996120360	0.0038
40	0.0020532	$\Delta_{40} = 0.0015579$	0.997546208	0.0024
41	0.0010693	$\Delta_{41} = 0.0009839$	0.998567056	0.0014
42	0.0004953	$\Delta_{42} = 0.0005740$	0.999244321	0.0007
43	0.0001928	$\Delta_{43} = 0.0003025$	0.999681115	0.0003
44	0.0000572	$\Delta_{44} = 0.0001356$	0.999881764	0.0001
45	0.0000099	$\Delta_{45} = 0.0000473$	0.999975252	0.0000
46	0.0	$\Delta_{46} = 0.0000099$	1.0	0.0
47	0.0	$\Delta_{47} = 0.0$	1.0	0.0
48	0.0	$\Delta_{48} = 0.0$	1.0	0.0
49	0.0	$\Delta_{49} = 0.0$	1.0	0.0
50	0.0	$\Delta_{50} = 0.0$	1.0	0.0

Tabla.1.1.1. En la primer columna se tiene el número de cartas rojas $r = r_n$ mientras que en la 2ª la probabilidad de ganar cuando hay r cartas rojas en el estado n, usando la fórmula (nota 25). En la 3ª se tiene el incremento $\Delta_r = p(r) - p(r+1)$ que junto con la 2ª se tiene la gráfica 1.1.3.

La cota para el factor de descuento β se da por la fórmula 1, ii de ésta sección, al despejar β. Y finalmente en función de esta se le asocia el interés de descuento i con la fórmula: $\beta = 1/(1+i)$.

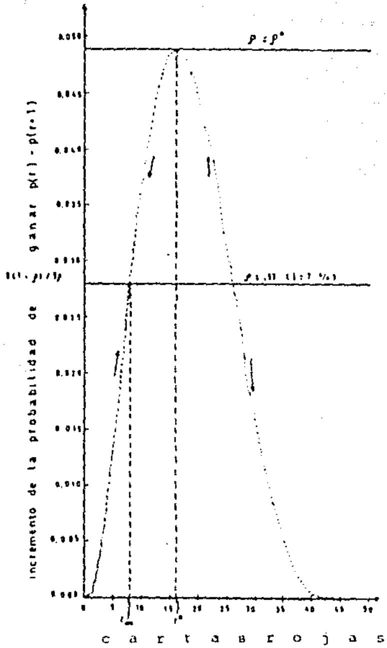


Fig. 3.1.3. Esta gráfica se encuentra en función de los valores de la tabla 3.1.1 entre la primera y tercera columna. Se puede observar los valores óptimos r_{ω}, r^*, y la dirección del movimiento de estado a estado. Aquí no hay coincidencias con los autores en $\rho^* = .89$ ellos encuentran $\rho^* = .77$ (i= 28%).

Por otro lado si el factor ρ se obtiene lo suficientemente más alto a ρ^*, entonces la situación se convierte completamente deteriorada; (es decir la tasa de interés mayor a 12% (tabla 3.1.1).

Interpretación:

Esto se puede interpretar en terminos de la polución; como se esperaría, a lo más el futuro es descontado, y el presente contaminado. Además si el factor de descuento se obtiene lo suficientemente alto a ρ^* en le modelo), entonces la situacion se obtiene completamente deteriorada!.

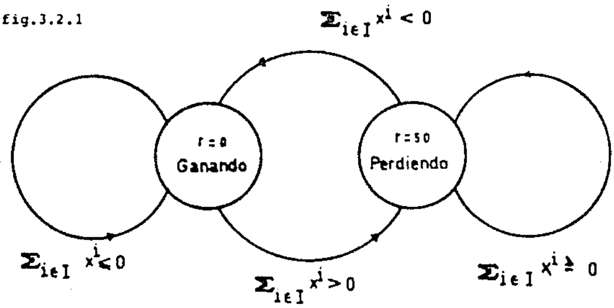
3.2. Formulación de un modelo simplificado.

A fin de facilitar el estudio del juego con horizonte infinito, solamente los dos estados extremos ($r = 0$, y $r = 50$) serán conservados en el modelo.

Una posible justificación para hacerlo asi es que, en una solución estacionaria los otros estados del juego de Markov serán transitorios.

Este modelo simplificado esta descrito en la fig. 3.2.1. (para especificidad se asume que los jugadores empiezan en el estado ganador, pero resultara de poco significado)[31].

fig.3.2.1



31. Por ser un estado transitorio.

3.3. EL CORE DEL JUEGO DE LA POLUCION

El análisis presente esta motivado por un interés teórico, y no esta directamente relacionado con el juego ya que la posibilidad de acuerdos conjuntos, no está reconocido explícitamente en las reglas. Sin embargo se argumenta que los puntos del core son también puntos de equilibrio de Nash. Esto es asi porque ahora se considera el juego con horizonte infinito.

Se recuerda que el criterio es la maximización del pago promedio por estado. En estas condiciones la funcion característica v, se encuentra como sigue:

Supóngase que I es el conjunto de jugadores, $|I|$ es la cardinalidad de I. Sea S un subconjunto de I. $|S|$ es el número de jugadores de la coalición S.

Como fuera de la coalición S está la minoría I - S, entonces la coalición S debe programar descontaminar para contrarestar a la minoría. Por tanto al contrarestar se tiene :

$(|I| - |S|)(-4)$. Los restantes miembros dentro de la coalición son $S - (I - S)$ cuya acción es preservar(no hacer nada),y por consiguiente reciben un pago de : $(|S| - (|I| - |S|))(-2)$.

Y finalmente todos los miembros de la coalición disfrutarán del medio ambiente en la forma ; $4(|S|)$. Para tener en suma:

$$(|I| - |S|)(-4) + (|S| - (|I| - |S|))(-2) + |S|\,4 =$$

$$= -2|I| + 4|S|.$$

$$\therefore \quad v(S) = 2(2|S| - |I|).$$

La función característica v para este juego es :

$$v(S) = \begin{cases} -|S| & \text{si} \quad |S| < |I|/2 \\ 2(2|S| - |I|) & \text{si} \quad |S| \geq |I|/2 \end{cases}$$

Sesigue que no hay incentivo para unirse a una coalición, excepto si el tamano de la coalición es exactamente $|I|/2 + 1$, si $|I|$ es par. Y $(|I| + 1)/2$ si $|I|$ es impar.

Sea $w \in \mathbb{R}^{|I|}$. El core de este juego, es el conjunto de pagos promedio por estado, los cuales son factibles, y no dominados vía ninguna coalición.

$$\text{Core } C(v) = \{ w \mid \sum_{i \in I} w^i = 2|I|, \sum_{i \in I - \{i_0\}} w^i \geq 2|I| - 4 \}$$

En vista del análisis de juegos cooperativos n-personales, se tiene:

$$\text{Core } D(v) = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} w^i = v(I), \sum_{i \in S} w^i \geq v(S) \}$$

Entonces se va a demostrar que C = D.

<u>Demostración</u>.

$D \subset C$.

$w^i \in \mathbb{R}^n$ y es tal que $\sum_{i \in I} w^i = v(I) = 2|I|$ y como

$\sum_{i \in S} w^i \geq v(S)$ para $S = I - \{i_0\}$ se tiene

$\sum_{i \in I - \{i_0\}} w^i \geq v(I - i_0) = 2|I| - 4.$

$\therefore \quad D \subset C.$

$C \subset D$

$w^i \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i \in I - \{i_0\}} w^i \geq 2|I| - 4$ sumando w^{i_0}

a cada lado de la desigualdad se tiene que:

$2|I| \geq 2|I| - 4 + w^{i_0}.$ por tanto $-w^{i_0} \geq -4.$

Sea S una coalición cualquiera. Se cumple que:

$$\sum_{i\in S} w^i = 2|I| - \sum_{i\notin S} w^i = 2|I| - (|I| - |S|)(-4) =$$
$$= 2|I| - 4.$$

$$\therefore \quad C \subset D$$

De las dos se tiene $C = D$.

Para el caso $|I| = 2$ la fig. 3.3.1 muestra el core.

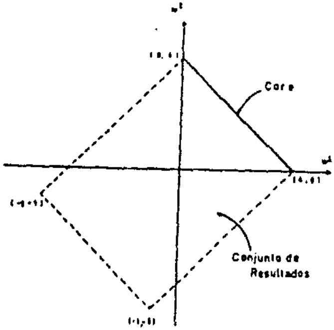


Fig. 3.3.1

Analizando el caso $|I| = 3$ se tiene $v(\emptyset) = 0$, $v(\{1\}) = -1$, $v(\{2\}) = -1$, $v(\{3\}) = -1$, $v(\{1,2\}) = 2$, $v(\{1,3\}) = 2$, $v(\{2,3\}) = 2$, $v(\{1,2,3\}) = 6$.

Sea $w = (w_1, w_2, w_3)$ una imputación. Como la racionalidad de grupo[12] implica que:

12. La racionalidad de grupo es que cada imputación le da por lo menos lo que puede conseguir en cada coalición.

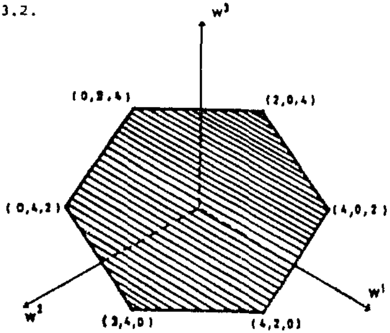
$$w_1 + w_2 \geq v(\{1,2\}) = 2$$
$$w_1 + \quad + w_3 \geq v(\{1,3\}) = 2$$
$$w_2 + w_3 \geq v(\{2,3\}) = 2$$

Y tambień

$$w_1 + w_2 + w_3 = v(\{1,2,3\}) = 6.$$

Se puede ver en la fig.3.32el core de este juego.
El punto $(w^i = 2)_{i \in I}$ está siempre en el core, y se le asocia con $(x^i = 0)_{i \in I}$, no obstante los puntos asimétricos, también pertenecen al core; por ejemplo el punto ($w^1 = 4$, $w^2 = 2$, $w^3 = 0$) , el cuál está asociado con ; ($x^1 = +1$, $x^2 = 0$, $x^3 = -1$).

Fig 3.3.2.



Interpretación:

Shapley y Shubik (1969) presentaron un ejemplo de un sistema económico con externalidades llamado "el lago", el cuál tiene una función característica muy similar[31]

Ciertamente, sus observaciones sobre la asimetría, y amplitud del core también se aplica aquí. Estas conexiones pueden dar algún sostén a la interpretación del juego en un contexto de la polución.

33. Nota. Esta función característica observa que no hay incentivo para formar coaliciones para conjuntos pequeños, pero para conjuntos más grandes la cooperación se convierte en más beneficiosa; y además puede controlar en el origen una fracción más significante de contaminación.

Sin embargo el core es tan grande que dice poco acerca de como asignar los costos de control de la contaminación. (ver el lago en Shapley y Shubik en: On The Core Of An Economic System With Externalities).

3.4. El Equilibrio de Nash y el Core.

El presente análisis, mientras se motivo por un interés teórico no está directamente relacionado al experimento, ya que la posibilidad de acuerdos legales no están reconocidos en las reglas. Sin embargo, se argumenta que los puntos del core , son también equilibrios de Nash. Así que realmente pueden ser obtenidos por acuerdos semilegales[34]* Que esto es así , es debido al hecho de que el juego es ahora con horizonte infinito.

Se demuestra que el punto $w = (2,2,\ldots,2)$ es un equilibrio de Nash. Un razonamiento similar puede ser usado con cualquier otro punto del core. La siguiente estrategia:

$$r = 0 \quad (i \in I)\,, \quad x^i = 0$$
$$r = 50 \quad (i \in I)\,, \quad x^i = +1 \ \text{ o } \ x^i = 0\,,$$

Están en equilibrio y el pago asociado, es precisamente $w = (2,2,\ldots,2)$. Nótese que si ningún jugador se desvía, entonces el juego estará en el estado ganador. Asi que la segunda parte de la estrategia ($r = 50$, $x^i = +1$ o $x^i = 0$) es solamente un acuerdo. Una vez que un jugador se desvía, entonces el juego estará o una de dos; en el estado perdedor ($x^i = +1$) o se estará "encima" del jugador que se desvió, hasta hacerlo regresar al estado ganador ($x^i = 0$).

Fuera del core , hay otro equilibrio de Nash que es:

$$r = 0 \qquad (i \in I) \qquad x^i = +1$$
$$r = 50 \qquad (i \in I) \qquad x^i = 0$$

El pago asociado $w = (-1,-1,\ldots,-1)$ no es"racional de grupo".

34. *Este tipo de acuerdo es cuando casi se obliga al agente económico a actuar desde el punto de vista del bienestar general.*

* *Del inglés enforceable.*

Interpretación.

Este último párrafo sugiere que la falta de comunicación entre los jugadores, no prevee la realización de algun punto en el core. El resultado simétrico $w = (2,2,...,2)$ se interpreta como sigue: cada jugador no está contaminando porque el esta convencido que los otros jugadores lo "castigaran" si el así lo hiciera. Lo extraño de tal convenio parece muy cuestionable en el contexto del juego, y ciertamente depende de actitudes psicológicas. Un posible modo de explorar ésta dirección puede ser permitiendo comunicación directa de tiempo en tiempo.

El punto de equilibrio $w = (-1,-1,...,-1)$ va a ser comparado con una "sociedad bloqueada" yéndose a la ruina por falta de confianza en sus miembros.

Finalmente, las conexiones entre la solución cooperativa, y no cooperativa puede en algún grado ilustrar el papel de la ley en la sociedad, como se observa la contaminación. Aunque si bien los puntos del core son realmente "semilegales"[35], el riesgo de desviación puede ser alto, de ser sostenido sin el curso de algún convenio legal contraído por la ley.[36]

35. Ver nota anterior.

36. Tomando en cuenta a los organismos internacionales sobre la lucha contra la contaminación ambiental: ver The International Law of Pollution; Protecting the Global Environmental in a World of Soverign States By Allen L. Springer ed. Quorum Books , Pags. 31-61.

Segunda Parte.

INTRODUCCIÓN. En esta parte se van a tratar los resultados obtenidos en el experimento del juego de la "polución".

Las condiciones precisas del experimento, el cuál fué realizado entre una población de estudiantes franceses de 16 años, se describe en la primera sección.

En la segunda sección, se presenta un análisis cualitativo de dos "corridas" típicas del juego.

En al tercera sección, se estudia el significado estadístico de algunas hipótesis de comportamiento.

Finalmente, en la última sección se dan conclusiones generales, en particular acerca del interés del juego como una herramienta pedagógica.

Primera Sección.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO.

El número de cartas será de 0 ó 25,[37] y al final del juego; ó una de dos: cada jugador recibirá una cantidad de dinero de acuerdo a su propio marcador (condición Keep). O todos los marcadores serán sumados, y divididos por igual entre los jugadores (condición Pool). Es así como se obtienen cuatro distintos grupos:

1). 0-Keep. El paquete tiene inicialmente 50 cartas,[38] y cada jugador conserva sus propias ganancias.

2). 0-Pool. El paquete con cero rojas, y al final del juego las ganancias de todos son divididas por igual entre todos.[39]

3). 25-Keep. El paquete central contiene 25 cartas azules, y cada jugador conserva sus propias ganancias.[40]

4). 25-Pool. El paquete con 25 cartas, y la ganancia se suma y es dividida por igual entre todos.

Como no se permite comunicación verbal entre los jugadores, éstos fueron puestos en grupos de 5 personas en círculo con la cara hacia afuera. A todos se les informaba del estado en que estaban, y cuantas cartas rojas en el paquete central. Originalmente planeado a 40 estados, aunque fue parado sorpresivamente en el estado 25 para prevenir contaminación de consideraciones finales.

37. Cartas rojas.
38. Cartas azules.
39. Tratando de buscar conductas de cooperación.
40. Medio ambiente muy contaminado, y sin cooperación.

Cada jugador recibió 30 unidades de entrada, y al final de los 25 estados una cantidad de acuerdo a la tasa 1u.=.20(fracción de franco).

Al final de la sesión las siguientes preguntas escritas, se les pidieron a los jugadores:

1). ¿Cuál fue tu estrategia al principio del juego?.

2). ¿Qué pensaste acerca de la probable evolución del número de cartas rojas en el paquete?.

3). ¿Tienes alguna idea del comportamiento de los otros jugadores?. ¿En qué grado?.

4). ¿Cambiaste tu propio comportamiento en algun momento?. ¿Porqué?.

5). ¿Te comportarías del mismo modo si jugaras otra vez?.

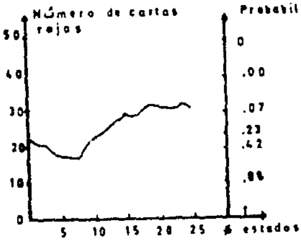
Las respuestas a este cuestionario[41] fueron muy útiles, y con el objeto de conseguir un análisis cualitativo del juego.

41. Este tipo de cuestionario es el que se puede aplicar en algún experimento, y puede resultar de interés en el campo de la psicología.

5.1. UN ESTUDIO DETALLADO DEL COMPORTAMIENTO DE DOS CORRIDAS DEL JUEGO.

Dos ejemplos típicos (25-Keep y 0-Pool); servirán como una ilustración del tipo de reacciones, las cuales pueden ser originadas en cierta situación implicadas por las actitudes de los jugadores. La primera gráfica, muestra el número de cartas rojas r, como una función del número de estados k. Esta curva r(k), ilustra la evaluación de la situación resultante de la conducta de los jugadores; también mustra con que probabilidad[41] los jugadores pueden marcar +4 con una buena mano (la probabilidad de ganar con 10 cartas rojas es .88, con 20 cartas rojas es .42, etc.).

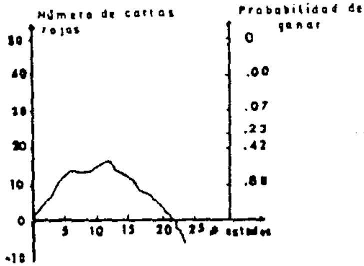
Fig. 5.1.1.



Grupo 2.

Grupo 1.

Fig. 5.1.2.



41. También se puede ver en la tabla 3.3.1.

La figura 5.2.1representa para cada estado del juego, el número de cartas rojas las cuales fueron agregadas por cada jugador; desde el principio del juego, y es así como se dibuja una curva para cada jugador. En cada estado la suma algebraica de esta variable, sobre todos los jugadores nos da el número real de cartas rojas en el paquete.

5.2. DESCRIPCION DE LOS RESULTADOS PARA EL GRUPO 1 (25-KEEP).

Como la actitud del grupo, fig. muestra que el desarrollo del paquete de cartas fue claramente bien controlado; a pesar de que la alta proporción de cartas rojas, no permitió a los jugadores hacer beneficios sustanciales: ya que cada jugador gana en promedio de 6 a 8 veces, que es muy cercano a 35 unidades, y se puede comparar a un costo promedio individual de 47 unidades; sus gastos se distribuyeron mal sobre el tiempo ya que con estas 47 unidades correctamente empleadas, habrían ganado por lo menos 13 veces: 20 unidades gastadas sobre las primeras 5 distribuciones habría inducido el nivel de cartas rojas a 0, y este nivel podía haberse mantenido por 13 reparticiones, gastando 2 unidades pero ganando 4 al mismo tiempo en cada repartición.

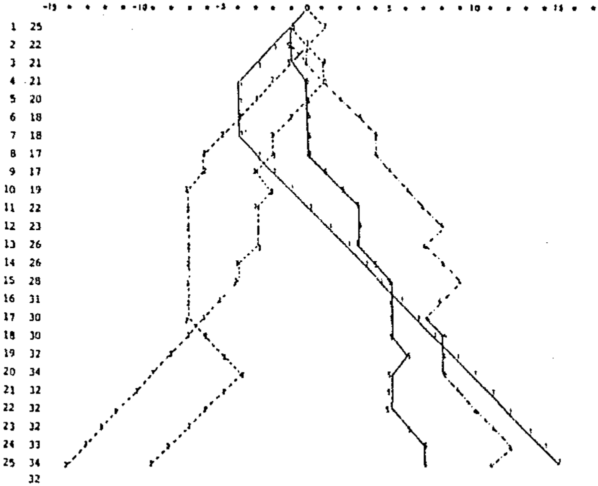
En el comportamiento individual fig.5.2.1aparece una clara distinción entre dos actitudes: contaminar,(es decir jugar +1) contra descontaminar(jugar -1 o 0); varios jugadores cambiaron sus estrategias por lo menos una vez en el juego.

Las diferencias individuales entre los jugadores, están bién señalados por la acción que ellos tuvieron en los costos totales, se pueden observar en la tabla con el porcentaje.

tabla. 5.2.1.

Jugador	Unidades consumidas	Acción del costo total. En %.
1	22	9.3
2	70	29.6
3	78	33.1
4	30	12.7
[illegible]	[illegible]	[illegible]
Total	236	100.0
Media	47.2	20.0

Figura 5.2.1. Comportamiento Individual. Grupo 1 (25-Keup).



La primer columna indica el número de estado, mientras que la segunda columna indica el número de cartas rojas que van teniendo los jugadores En el renglón se indica el número de cartas rojas para observar inmediatamente la jugada del jugador i, i = 1,...,5. Empezando desde 0, se observa la conducta contaminante de los jugadores 1,4 y 5. Y descontaminante de 2 y 3. Se puede leer enseguida de esta figura, que el jugador 3 descontaminó hasta -14; el jugador 2 hasta -9,etc. Hasta tener al final 32 cartas rojas en total.

La figura 5.2.1 muestra que los jugadores 2 y 3 descontaminaron, mientras que los jugadores 1,4 y 5 contaminaron; estos resultados están de acuerdo con lo dibujado en las figs.

Acorde a los cuestionarios, los jugadores describen sus propias estrategias como sigue:

-el jugador 3 establece que el actuó de acuerdo al número de cartas rojas que recibió en cada repartición, jugando -1 o 0; cuando recibió menos de 5 cartas azules. Sin cambiar su comportamiento a lo largo del juego, lo cual lo indujo a jugar -1 muy frecuentemente.

-los jugadores 1,2 y 5 entendieron que el interés del grupo, fue administrar el número de cartas rojas, y comentaron que empezaron a jugar de ese modo, en el cual se tenía por objeto posterior ganar más. Aunque todos declararon que cambiaron su actitud en algun momento, porque tuvieron la sensación individual de que eran los únicos que descontaminaban, y no querían dejar la ventaja a los otros.

-el jugador 4 quiso "alcanzar el marcador más alto posible", manteniendo al mismo tiempo más cartas azules que rojas en el paquete. Por lo cual jugó -1 desde la 13 a la 20 .

5.3. DESCRIPCION DE LOS RESULTADOS PARA EL GRUPO 2 (0-POOL):

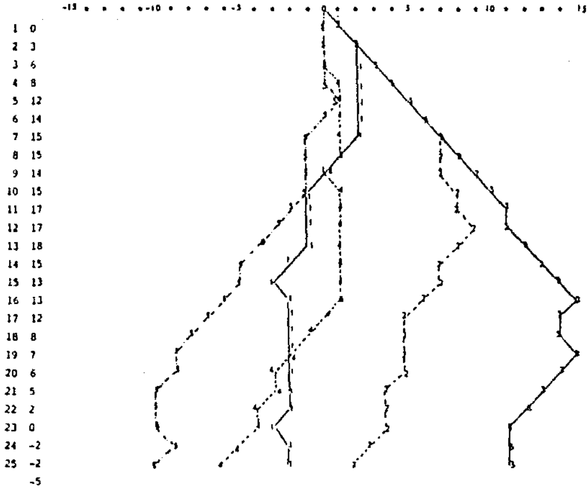
El número de cartas rojas alcanza un máximo de 18 (en la distribución 13), entonces bajó hasta el final de -5 (los jugadores no notaron que no había cartas rojas).

El promedio de gastos fue de 52 unidades ; con un promedio de 19 manos ganadoras. En la tabla se presentan los repartos de los jugadores y del gasto total.

tabla. 5.3.1.

Jugador	Unidades consumidas	Acción del costo total. En %.
1	54	20.8
2	46	17.7
3	28	10.8
4	62	23.8
5	70	26.9
Total	260	100.0
Media	52.	20.0

Figura 5.3.7. Comportamiento Individual. Grupo (0-Pool).



Esta figura presenta en las columnas y renglón las mismas características que la anterior, pero se puede observar el cambio de actitud de los jugadores 1,2 y 3,4; hasta llegar a una situación de -5, en donde no se dieron cuenta que no había cartas rojas[41]

41. Parece ser que esta actitud es irracional ya que es necesario ganar más en bién común, sin embargo la cooperación puede dar origen a conductas no razonables; en donde la teoría juega un papel muy importante.

5.4. DISCUSION DE LOS EJEMPLOS.

Las daclaraciones de los 105 jugadores involucrados en el experimento, nos permitieron establecer las siguientes clasificaciones; de acuerdo a su nivel de comprensión de la situación, al principio del juego, se puede checar esta clasificación con los ejemplos de antes:

1). Los jugadores quienes no entendieron que un aumento en el número de cartas rojas, disminuirían con certeza su probabilidad de ganar; algunos jugadores de este tipo confiaron al azar recibir una mano ganadora, aun a pesar de las leyes probabilisticas.

2). Los jugadores que entendieron la conexión básica entre el número de cartas azules en el paquete y la probabilidad de ganar, pero quienes no se dieron cuenta que su elecciónde -1 ó +1, tiene un efecto sobre el paquete, (ésto fue notado del siguiente comentario en el grupo 0-Pool: "nosotros teníamos que ganar lo más que pudiéramos al principio de la corrida, desde que el paquete era azul hasta que este se convertiría muy rápidamente en rojo".

3). Los jugadores quienes entienden que las cartas rojas generan pérdidas y que ellos pueden controlar la evolución del paquete.(Es decir que no deben permitir que el número de rojas se incremente más allá de un cierto nivel). Sin embargo estos jugadores no coinciden en la situación de ese nivel; se encontro tres tipos de actitudes:

1. Estimación intuitiva del nivel, el cual puede ser entre 20 hasta 35 cartas rojas.
2. Determinación implícita del nivel. Aunque si bien reaccionando al número de cartas rojas en la mano.
3. Estimación razonada, la cual es relativamente cierta (0 o 2 cartas rojas) ó falsa (2/7 cartas rojas contra 5/7 cartas azules).

Entonces se ve que las actitudes de los jugadores pueden variar considerablemente. Una consecuencia general de este estado de cosas es que no observaraa el mismo comportamiento, sobre un grupo en total por más de unas pocas distribuciones, a menos que un acuerdo tácito tenga lugar entre los jugadores.

Ahora examinaremos algunas consecuencias de esta diversidad, sobre el comportamiento de los jugadores en ambas condiciones (Keep y Pool).

En la condición Keep, el conflicto surge entre el interés individual y de grupo; por el hecho que si un miembro del grupo permanece jugando -1 y no los otros, solamente las pérdidas son generadas por este jugador. Como una consecuencia, los jugadores tenderán a ser prudentes, y si su intento de descontaminar no produce resultados rápidos y perceptibles, ellos pensarán que los otros tomarán ventaja de ellos, y muy pocos continuarán haciéndolo.

Ahora considerando el amplio rango de posibles reacciones de los jugadores en algún momento del juego, rara vez sucedería que el número de cartas rojas bajaría, por más de 2 unidades de una distribución a la otra; la fig. 3.1.3. muestra que esta cantidad tiene poca influencia sobre la probabilidad de ganar. Reacciones similares a aquellos jugadores 1,2,5 en el grupo 1, los cuales fueron decepcionados aún cuando el número real de cartas rojas del paquete, fue levemente disminuido. No obstante que algunos jugadores parecidos al jugador 3 en el grupo 1 no se sintió explotado, el cual les enseña el ser descuidados en su interés individual.

En la condición Pool por el contrario, no habría tal conflicto de interés de grupo contra individual; algunos jugadores permanecieron contaminando, se puede inferir que cada uno de ellos no tiene clara la situación del juego. Es decir pertenecen a las primeras dos clases, ó ellos tolerarían un alto nivel de cartas rojas). Si tales jugadores son de la minoría, los otros teoricamente pueden balancear su acción contaminante jugando -1, ningún obstáculo es surgido por el interés individual, para un jugador quien esta descontaminando, esta contribuyendo al beneficio total el cual será dividido; aunque su score sea bajo comparado con los otros. Sin embargo observemos que ningún jugador, en condición Pool gastará más de 70 unidades para mantener el recurso(el máximo siendodo 100 unidades). Ver tabla 6.2 aún cuando el mal estado del paquete estuvo demandando tal acción.

Entonces parece que un obstáculo esta en el modo de un comportamiento descontaminante de principio a fin: como se estableció en el cuestionario algunos jugadores descontaminantes reaccionaron con enojo hacia otros en el grupo que_

Estuvieron contaminando: "La siguiente vez, yo dejaré que los otros hagan la tarea (es decir agregar cartas azules). Y yo conservaré el score".
Esto lleva la hipótesis que el juego es visto como un juego donde, se desprecia el beneficio monetario final, la satisfacción y el sentimiento de triunfo están estrechamente ligados con el score individual. La frustración de los jugadores descontaminantes puede surgir del hecho que enterado de su superioridad al entender la situación del juego, no alcanzarían un alto score y a los cuales los pondría en forma real no recibiendo un reconocimiento por sus sacrificios. Por consiguiente el obstáculo principal para un comportamiento cooperativo en la condición Pool; parece ser que algunos jugadores no entienden claramente las consecuencias de sus elecciones y piensan en términos de minimizar al corto plazo las pérdidas, lo cual en el juego no es equivalente a maximizar a largo plazo el beneficio. Este obstáculo para la cooperación resulta naturalmente cierto en condición Keep, pero sumado a aquella falta de confianza entre los jugadores.

Condiciones externas	Grupo	Número final de cartas rojas	Total de unidades gastadas	Más alto gasto		Más bajo gasto		Dispersión	
				unidades	%	unidades	%	unidades	%
0-Pool	Po1	9	232	50	21.5	42	18.1	8	3.4
	Po2	10	230	60	26.1	24	10.4	36	15.7
	Po3	34	182	58	31.9	0	0.0	58	31.9
	Po4	36	178	68	38.2	12	6.7	56	31.5
	Po5	-5	260	70	26.9	26	10.8	44	16.2
Promedio		16.8	216.4	61.2	28.9	21.2	9.2	40.0	19.7
25-Pool	P11	17	266	60	22.6	48	18.0	12	4.6
	P12	12	276	70	25.4	42	15.2	28	10.2
	P13	30	240	64	26.7	24	10.0	40	16.7
	P14	4	292	64	21.9	50	17.1	14	4.8
	P15	0	300	62	20.7	58	19.3	4	1.4
Promedio		12.6	274.8	64.0	23.5	44.4	15.9	19.6	7.6
0-Keep	Ko1	22	206	58	28.2	26	12.6	32	15.6
	Ko2	22	206	64	31.1	22	10.7	42	20.4
	Ko3	4	242	62	25.6	36	14.9	26	10.7
	Ko4	58	134	40	29.9	16	11.9	24	18.0
	Ko5	19	212	76	35.5	26	12.3	50	23.5
Promedio		25	200	60	30.12	25.2	12.48	34.8	17.64
25-Keep	K11	31	238	60	25.2	40	16.8	20	8.4
	K12	28	244	74	30.3	38	15.6	36	14.7
	K13	6	288	62	28.5	46	16.0	36	12.5
	K14	32	236	78	33.1	22	9.3	56	23.8
	K15	24	252	72	28.6	2	0.8	70	27.6
	K16	8	284	80	28.2	44	15.5	36	12.7
Promedio		21.5	257.0	74.[illegible]	29.0	32.0	12.3	42.3	16.7

Tabla. 6.2 Los datos experimentales.

Condición probada	Número inicial de cartas rojas		Recompensa	
Población 1 Población 2	0-Pool 25-Pool	0-Keep 25-Keep	0-Pool 0-Keep	25-Pool 25-Keep
Variable probada:				
-total de unidades gastadas.	1 < 2 p < .008	1 < 2 p < .009	ninguna diferencia.	1 > 2 p < .123
-# final de cartas rojas	ninguna diferencia	ninguna diferencia	ninguna diferencia.	1 < 2 p < .123
Más alto consumo en unidades	ninguna diferencia	1 < 2 p < .041	ninguna diferencia	1 < 2 p < .033
Más bajo consumo en unidades	1 < 2 p < .028	1 < 2 p < .142	ninguna diferencia	1 > 2 p < .063
Dispersión en unidades	1 > 2 p < .075	ninguna diferencia	ninguna diferencia	1 < 2 p < .063
Más alto consumo en porcentaje	1 > 2 p < .048	ninguna diferencia	ninguna diferencia	1 < 2 p < .009
Más bajo consumo en porcentaje	1 < 2 p < .111	ninguna diferencia	1 < 2 p < .111	1 > 2 p < .009
Dispersión en porcentaje	1 > 2 p < .111	ninguna diferencia	ninguna diferencia	1 < 2 p < .041

Tabla 6.3 Muestra los resultados de la prueba de Mann-Whitney. Nota: "1< 2: p< α" significa que los valores de la variable probada sobre la población 1 son más pequeños que sobre la población 2 a un nivel de significancia α . "Ninguna diferencia" significa que el nivel de significancia α es más grande que .20.

LOs pasos para usar la prueba de Mann-Whitney* son:

1. Se detrminan los valores de n_1, n_2, donde n_1 es el número de casos en el grupo más pequeño; n_2, es el número de casos en el grupo más grande .

2. Se ordenan los puntajes juntos de ambos grupos del orden menor al mayor.

3. Se determina el valor de U contando como en el ejemplo.

4. El método para determinar lasignificancia del valor observado de U, depende del tamaño de n_2 :

a) Si n_2 es 8 ó menor, la probabilidad exacta asociada con un valor tan pequeño como el observado de U aparece en la tabla J(ver ejemplo). Para una prueba de dos colas, se duplica el valor de p obtenido en la tabla. Si la U observada no aparece en la tabla J, es U', y deberá transformarse en U usando la fórmula $U = n_1 n_2 - U'$.

5. Si el valor observado de U tiene una probabilidad asociada igual ó menor que α , se rechaza H_o, y se acepta H_1 .

Ejemplo: Total de unidades gastadas se clasifican en dos poblaciones A, B. en este caso O-pool y 25-pool.

A	232	230	182	178	260
B	266	276	240	292	300

178	182	230	232	240	260	266	276	292	300
A	A	A	A	B	A	B	B	B	B

H_1 : Pob. 1 < Pob. 2 ; $n_1 = 5$, $n_2 = 5$, $U = 1$

Observando en la tabla J para éstos valores da : $p < .008$

Se aplicó sucesivamente la prueba de Mann-Whitney[44] a estas variables para cada pareja de condiciones externas: 0-Pool y 25-Pool; 25-Keep y 0-Pool; 0-Keep y 0-Pool; 25-Pool y 25- Keep. Una conclusión positiva a la prueba, tiene la siguiente forma con probabilidad de error $p < \alpha$,
los valores de la variable probada sobre la 1 población, son más pequeños (respectivamente más grandes) que sobre la 2 población. Una población es el conjunto de todos los grupos jugando en las mismas condiciones externas, de lo cual la presente observación se constituye una muestra.

Los resultados para la prueba estan en la tabla 6.3..

6.1. DISCUSION DE LOS RESULTADOS ESTADISTICOS.

Las primeras dos variables son representativas del comportamiento de grupo las unidades gastadas en total son una evaluación de los esfuerzos del grupo para mantener el recurso; mientras que el número final de cartas rojas representa los resultados que estos esfuerzos han producido durante 25 distribuciones. Otros investigadores (W.D.R.D.)[45] también han usado estas variables en el mismo sentido; por eso se comparan ambos resultados.

Comparando las condiciones todo-azul, mitad-azul. Se observo que en condiciones Pool y Keep, los grupos que empezaban con 25 cartas rojas gastaron significativamente más; que aquellos que empezaron con 0 rojas.

Por otro lado no hay tal diferencia en el número final de cartas rojas. Llegando al comentario siguiente: los grupos que empezaron con un medio semi-degradado, finalizaron en la 25 en situaciones las cuales pudieron ser generadas por grupos que empezaron con un medio puro. Se sigue que los primeros gastaron mas para mantener el recurso.

(W.D.R.D.) llegaron a la misma conclusión, observando además que esos grupos que empezaron con 25 cartas rojas, finalizaron en una mejor situación que los grupos que iniciaron con un paquete todo azul.

44. Ver la prueba de Mann-Whitney.

45. Watzke, Dwyer, Rubenstein y Dana. Nota (18).

Al comparar las condiciones Pool y Keep, las pruebas produjeron ninguna diferencia para los grupos con 0 rojas, y solamente una tendencia ($p < .123$) para 25-Pool que gastaron mas que los grupos 25-Keep.[46]

Los resultados de (W.D.R.D.) son que los grupos Pool gastaron más que los grupos Keep, ambos con 0 y 25 cartas rojas.

Las diferencias entre todo-azul y mitad-azul en condiciones iniciales es claramente establecido. Ahora se enfocará sobre la comparación en condiciones Pool y Keep, a fin de especificar las diferencias de conducta o comportamiento las cuales no aparecen si se usan solamente las variables descritas. Se estudian entonces las actitudes extremas en cada grupo (es decir alto y bajo consumo), el cual sera expresado en unidades y en porcentaje del consumo total del grupo.

Empezando desde la idea que a causa de sus intereses de corto plazo, los jugadores individualmente gastarían menos en una situación competitiva, que en una cooperativa. Se propondría probar las siguientes dos hipótesis:

i.- de los contaminadores más reacios en situación Keep, contaminarían más que los contaminadores más reacios en situación Pool.

ii.-de los descontaminadores más reacios en la situación Keep, no descontaminan tanto como los descontaminadores más reacios en situación Pool.

Las variables probadas son:

(1) El consumo más bajo en unidades.

(2) El consumo más alto en unidades.

La tabla 6.3 muestra que la primera hipótesis es confirmada para los grupos que empezaron con 25 cartas rojas, pero no para los grupos que empezaron con 0 cartas rojas. La segunda hipótesis, no es confirmada para ningún tipo de grupo por el contrario, la hipótesis opuesta es justificada a un nivel de significancia ($p < .033$). Para grupos que empezaron con 25 rojas.

46. Lo mismo los grupos 0-pool gastaron más que los grupos 0-Keep.

6.2. CONCLUSION DE LOS AUTORES.

Se pueden resumir los resultados de este estudio en los siguientes comentarios:

1.- El número inicial de cartas rojas aparece como un factor secundario, como se puede observar en la determinación de la situación al termino del juego. Ciertamente, considerando la gran variación sobre el número final de cartas rojas entre los grupos jugando en las mismas condiciones externas.

Parece que otros factores prevalecen; tales como un amplio sentimiento de confianza, ó un cierto nivel de comprehensión o algunas condiciones internas aún no exploradas.

2.- La influencia del tipo de recompensa es un poco más tangible, para los grupos que empezaron con 25 cartas rojas; sin embargo los resultados son mucho menos significativos que los obtenidos por (W.D.R.D.). Aquí se puede observar la influencia de algún factor cultural, el cual confirma la tendencia ya mencionada por (W.D.R.D.) con respecto al dato Sueco.

3.- Finalmente, se puede agregar que los jugadores en general fueron bastante entusiastas al experimento, opinando que el juego fue demostrativo y mal jugado. El mismo juego fue también experimentado con altos empresarios con caracter educativo; con la finalidad de introducir elementos económicos, y para mostrar la insuficiencia de tales consideraciones para generar un comportamiento racional de grupo. A pesar de que todavía no se han examinado diferencias significantes con los escolares. donde podrían ser observadas. Las situaciones finales fueron más contaminadas y los jugadores dificilmente se desviaron de su estrategia del principio.

CONCLUSION.

- Una medida tendiente a disminuir la contaminación es la educación de la población de acuerdo a un espíritu público, y responsable con cooperación formal e informal. Y para esto el modelo puede resultar de utilidad; con el objeto de que la gente tenga presente del peligro de contaminar indiscriminadamente, incluyendo por supuesto a los productores.

- Es necesario que para cada espacio físico se haga un análiis, ya que la polución depende del tiempo, forma y lugar aún más que en su volumen. Y que también para la gente que comparte un cierto medio, que se motive la comunicación de cuando en cuando para investigar los puntos del core que son estables, y a la vez equilibrios competitivos.

- En la educación de la gente se pueden usar cartas rojas y azules como lo hicieron estos investigadores, ó bién con otros juegos alternativos.

- Es necesario tener datos confiables sobre el control de la contaminación, para poder usar el modelo en cada situación ambiental, no solo de los disponibles del pasado; sino que llevar un registro de los futuros debido a que la polución no se puede evitar totalmente. En caso de no existir dichos datos, se puede estudiar lo que se ha hecho en otros países en cuestión del combate a la contaminación como es el caso de Suecia, Sudcorea, Japón y USA, cuya población tiene características ya mencionadas en el primer párrafo.

- Si se tiene una medida de contaminación medio-ambiental en cada espacio físico, se puede decidir sobre los límites realmente permisibles con ayuda del modelo teórico. Esto también se da para informar a la población del tipo de contaminante y grado de contaminación, y se pueda hacer un reclamo sobre tal peligro.

- El punto anterior nos lleva a decir que son necesarias las leyes que regulen la protección ambiental en función de las limitantes hasta el grado posible,tomando en cuenta la naturaleza, y el grado de los daños (suelo flora, fauna). Estas leyes deben ser flexibles para no perderse en trámites largos que tienden a olvidar ó desviar el problema.

- Así tambiénse debe implementar la tecnología para para abatir las descargas ambientales, y los costos de abatimiento.

- Otro dato que se obtiene de éste trabajo es la relación entre tasa de interés y polución. Es decir para cada tasa de interés le corresponde cierta contaminación, de ahí la importancia de bajar la tasa de interés.

- ¿ Si se hace un cambio de contaminación por corrupción en el modelo que resultaría?.

A. EL ALGORITMO DE LEMKE-HOWSON.

A.1. DEFINICION. Un juego bimatriz Γ_o, es una tetrada $(I,J;A,B)$ donde; $I = \{1,\ldots,m\}$. $J = \{1,\ldots,n\}$. Son conjuntos finitos y, $A = (a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$. Son matrices reales. I y J son conjuntos de estrategias puras; A y B son matrices de pago.

Notar que A y B pueden ser consideradas como funciones,

$$A : I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \qquad B : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definidas por $A(i,j) = a_{ij}$, $B(i,j) = b_{ij}$.

A.2 DEFINICION. Sea Γ_o un juego bimatriz. Entonces $(\bar{i},\bar{j}) \in I \times J$ es un punto de equilibrio de Γ_o si:

$$a_{\bar{i}\bar{j}} \geq a_{i\bar{j}} \ (i \in I), \tag{1}$$

$$b_{\bar{i}\bar{j}} \geq b_{\bar{i}j} \ (j \in J), \tag{2}$$

$\bar{i},\bar{j}$ son llamadas estrategias en equilibrio del jugador 1,2 respectivamente.

A.3 DEFINICION. $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+} \mid \sum_{i\in I} x_i = 1 \right\}$, $Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+} \mid \sum_{j\in J} y_j = 1 \right\}$ entonces $\Gamma(X,Y;A,B)$ es llamada la extensión mixta de $\Gamma_o = (I,J,A,B)$. $x \in X$ y $y \in Y$ se llaman estrategias mixtas del jugador 1 y 2 respectivamente. Por contraste $i \in I$ se llama estrategia pura del jugador 1.

Si 1 elige $x \in X$ y 2 elige $y \in Y$ en $\Gamma(X,Y,A,B)$ los pagos que les corresponden son xAy para 1 y xBy para 2.

A.4. <u>DEFINICION</u>. Un punto de equilibrio de $\Gamma(X,Y,A,B)$ es un par $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ tal que:

$$\bar{x} A \bar{y} \geq x A \bar{y} \quad (x \in X) \tag{3}$$

$$\bar{x} B \bar{y} \geq \bar{x} B y \quad (y \in Y) \tag{4}$$

Sea $A_i = (a_{i1},\ldots,a_{in})$ el i-ésimo renglón de la matriz A.

$A_{\cdot j} = (a_{1j},\ldots,a_{mj})$ la j-ésima columna de la matriz A.

A.5. <u>Lema</u>. $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto de equilibrio si y sólo si

$$\bar{x} A \bar{y} \geq A_{i\cdot}\bar{y} \quad (i \in I) \tag{5}$$

$$\bar{x} B \bar{y} \geq \bar{x} B_{\cdot j} \quad (j \in J) \tag{6}$$

<u>Demostración</u>. Si $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto de equilibrio

$\bar{x} A \bar{y} \geq e^{i} A \bar{y} = A_{i\cdot}\bar{y}$. Y $\bar{x} B \bar{y} \geq \bar{x} B e^{j} = B_{\cdot j}\,\bar{y}$.

Por otro lado, si (5) se satisface, entonces para $x \in X$

$\bar{x} A \bar{y} = (\sum_{i \in I} x_i)\, \bar{x} A \bar{y} = \sum_{i \in I} x_i A_{i\cdot}\bar{y} = x A \bar{y}$.

Y similarmente para $y \in Y$.

Nótese que al jugar la extensión mixta de Γ_o no se tiene pérdida de alguna elección estrategica de Γ_o , esto es , se puede siempre escoger $e^i \in X$ $e^j \in Y$ y entonces, se obtiene $e^i A e^j = a_{ij}$ un pago también obtenible escogiendo $i \in I$, $j \in J$ cuando se juega Γ_o .

En otras palabras, la identificación de $i \in I$ y $e^i \in X$ sugiere que Γ_o está " encajado" en Γ, entonces observando la igualdad $e^i A \; y = A_{i.} \, y$ el significado del lema es, que es suficiente comparar el pago $x A y$ de 1 en (x,y), contra el pago de solamente el uso de estrategias puras, dado que 2 juega $y \in Y$; a fin de asegurar que un punto de equilibrio está a la vista.

A.6. Como un ejemplo notar que;

$$I = \left(X \; Y, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

tiene un punto de equilibrio $x = (1/3, 2/3)$; $y = (2/3, 1/3)$

Sea $\mathcal{G}(\Gamma_o)$, $\mathcal{G}(\Gamma)$ denotan los conjuntos de puntos de equilibrio de Γ_o y Γ respectivamente.

A.7. <u>COROLARIO</u>. 1.- $(\bar{i},\bar{j}) \in \mathcal{G}(\Gamma_o)$ si y sólo si $(e^i, e^j) \in \mathcal{G}(\Gamma)$.

2.- $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ si y sólo si:

$$\bar{x} A \bar{y} = \max_{i \in I} A_{i.} \bar{y} \quad , \quad \bar{x} B \bar{y} = \max_{j \in J} \bar{x} B_{.j}$$

3.- $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ si y sólo si;

$\bar{x}_k > 0$ implica $A_{k.} \bar{y} = \max_{i \in I} A_{i.} \bar{y} \quad (k \in I)$

$\bar{y}_l > 0$ implica $\bar{x} B_{.l} = \max_{j \in J} \bar{x} B_{.j} \quad (l \in J)$.

<u>Demostración</u>. Si $(\bar{\imath},\bar{\jmath}) \in \mathcal{G}(\Gamma_o)$ entonces

$a_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \geq a_{i\bar{\jmath}} \quad i \in I$ es decir

$e^{\bar{\imath}} A e^{\bar{\jmath}} \geq e^{i} A e^{\bar{\jmath}} = A_{i.} e^{\bar{\jmath}} \quad (i \in I)$.

Similarmente $e^{\bar{\imath}} B e^{\bar{\jmath}} \geq e^{\bar{\imath}} B_{.j}$ $(j \in J)$ y el lema nos indica que $(e^{\bar{\imath}},e^{\bar{\jmath}}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$. La reversa es inmediata.

2. Si $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ entonces por el lema A.5

$$x A y \geq \max_{i \in I} A_{i.} y = \left(\sum_{i \in I} x_i\right) \max A_{i.} y \geq \sum_{i \in I} x_i A_{i.} y = x A y.$$

la inversa se sigue del lema A.5. Asimismo para el segundo jugador.

3. $\bar{x} A \bar{y} = \sum_{\substack{k \in I \\ \bar{x}_k > 0}} \bar{x}_k A_k \bar{y} \leq \max_{i \in I} A_{i.} \bar{y}$

y notando que si la desigualdad estricta se satisface entonces se viola la condición 2. Por otro lado si la condición 3, se satisface entonces $x A y = \max_{i \in I} A_i y$ se sigue por 2 que $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$. (Similarmente para 2).

Ejemplos . LOs tres puntos son de equilibrio para el ejemplo A.6

$(\bar{x},\bar{y})=(e^1,e^1)$; $\quad (\hat{x},\hat{y}) = (e^2,e^2)$; $(\tilde{x},\tilde{y}) = ((1/3, 2/3),(2/3, 1/3))$

La siguiente notación será de utilidad. Sea $\Gamma = (X,Y,A,B)$ y sea

$$K_i = \{ y \in Y \mid A_{i.}\, y \geq A_{k.}\, y \quad (k \in I) \} \quad (i \in I).$$

$$L_j = \{ x \in X \mid x B_{.j} \geq x B_{.l} \quad (l \in J) \} \quad (j \in J).$$

$$K_T = \bigcap_{i \in T} K_i \quad (T \subseteq I, \quad T \neq \emptyset)$$

$$L_R = \bigcap_{j \in R} L_j \quad (R \subseteq J, \quad R \neq \emptyset).$$

Además sea,

$$X_U = \{ x \in X \mid x_i = 0 \ (i \in U) \} \qquad (U \subsetneq I, \ U \neq I)$$

$$Y_V = \{ y \in Y \mid y_j = 0 \ (j \in V) \} \qquad (V \subsetneq J, \ V \neq J).$$

K_i es el conjunto de estrategias mixtas $y \in Y$, contra la cual i es óptima.

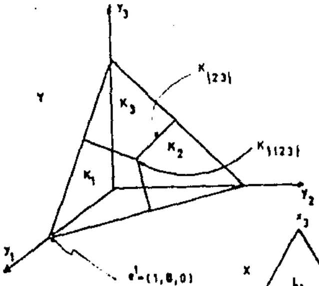
X_U es el subsimplex de X generado por $(e^i)_{i \in U^c}$.

A.8. Como un ejemplo considérese Γ (X,Y,A,B) donde m = n = 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{ y \in Y \mid y_1 \geq y_2 , y_3 \}$

Fig. 1



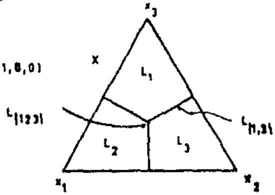


Fig. 2

Nótese que $\bar{y} \in K_{\{1\ 2\ 3\}}$ y $\bar{x} \in L_{\{123\}}$ producen un punto de equilibrio $(\bar{x},\bar{y})$.

A.9. Teorema. Sea $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ y póngase

$$T = \{ i \mid \bar{x}_i > 0 \} \qquad V = \{ i \mid \bar{x}_i = 0 \}$$

$$R = \{ j \mid \bar{y}_j > 0 \} \qquad U = \{ j \mid \bar{y}_j = 0 \}$$

Entonces $(\bar{x},\bar{y}) \in X_V \times Y_U$, es claro de la definición de U y de V. El resto se sigue del corolario A.7 . Por ejemplo, si $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ entonces $\bar{x}_k > 0$ $(k \in T)$ implica que $\bar{y} \in K_k$ y así sucesivamente.

En el ejemplo anterior considérese $x = (1/3, 1/3, 1/3)$ y $y = (1/3, 1/3, 1/3)$ escribiendo $T = I = \{1,2,3\}$; $R = J = \{1,2,3\}$, $V = U = \emptyset$ se encuentra $\bar{x} \in L_J \cap X_O$, $\bar{y} \in K_I \cap Y_O$. y por consiguiente $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$.

Para abreviar notación, sea;

$$H_{T,U} = K_T \cap Y_U \quad (T \subseteq I \; ; \; U \subseteq J)$$
$$G_{R,V} = L_R \cap X_V \quad (R \subseteq J \; , \; V \subseteq I).$$

DEFINICION

A.10. 1. Un juego bimatriz $\Gamma(X,Y,A,B)$ se dice ser no degenerado, si para cualquier $T \subseteq I$, $T \neq \emptyset$ y para cualquier $U \subseteq J$, $U \neq J$ se tiene que $H_{T,U} \neq \emptyset$ implica

$$\dim H_{T,U} = n - |T| - |U| \qquad (7)$$

y para $G_{R,V}$ ($R \subseteq J$; $R \neq \emptyset$; $V \subseteq I$; $V \neq I$) se sostiene una condición semejante.

$$\dim G_{R,V} = m - |R| - |V|$$

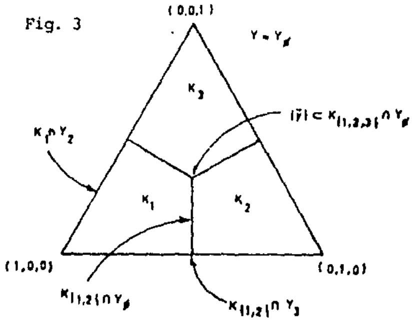
2. Una matriz A mxn se llama no-degenerada, si toda submatriz cuadrada de

$$\begin{vmatrix} & -1 \\ & \cdot \\ A & \cdot \\ & \cdot \\ & -1 \\ 1 \ldots 1 & 0 \end{vmatrix}$$

es no singular (excluyendo, naturalmente el cero de la última columna y renglón.

Nótese que por convención se asigna cualquier dimensión negativa al conjunto vacío. Por tanto (7)implica en particular que $H_{T,U} = \emptyset$ siempre que $|T| + |U| > n$

Fig. 3



A.11. Teorema. Si A y B son no degeneradas entonces así es Γ.

Demostración.

Paso 1 . Si $\bar{y} \in K_T \cap Y_U$ entonces

$A_{i.}\ \bar{y} = \ldots = A_{k.}\ \bar{y} =: \lambda$

para toda $i,\ldots,k \in T$. Por consiguiente $(\bar{y},\bar{\lambda})$ es una solución del sistema lineal en las variables $y_1,\ldots,y_n$, λ dado por

$$\begin{aligned} A_{i.}\ y - \lambda &= 0 \qquad i \in T \\ y_j &= 0 \qquad j \in U \qquad\qquad (8) \\ y_1 + \ldots + y_n &= 1 \end{aligned}$$

con matriz de coeficientes:

$$\left|\begin{array}{cc} & -1 \\ A_i & \vdots \\ & -1 \\ & 0 \\ e^j & \vdots \\ 1 \;.\;.\;.\; 1 & 0 \end{array}\right|_{i \in T,\ j \in U} \qquad (9)$$

Ahora si $n < |T| + |U|$, entonces se considera la submatriz de dada por:

$$\left|\begin{array}{cc} & -1 \\ A_i & \vdots \\ & -1 \\ e^j & 0 \end{array}\right|_{i \in T, j \in U} \qquad (10)$$

Claramente, el rango de(10)iguala

$$|U| + \text{rango} \left|\begin{array}{cc} & -1 \\ & \vdots \\ a_{ij} & -1 \end{array}\right|_{i \in T, j \in U^c}$$

Como $|U^c| = |J - U| = n - |U| < |T|$, se puede seleccionar una submatriz $(|U^c| + 1) \times (|U^c| + 1)$ de la anterior, la cual en vista de la condición de no-degeneración tiene rango $|U^c| + 1$. Por consiguiente(10)tiene rango $|U| + |U^c| + 1 = n + 1$. Esto significa que el sistema (8)correspondiente a(10)admite la solución trivial $(\bar{y}, \bar{\lambda}) = (0,0)$ solamente; así que (8) no tiene otra solución. Concluyendo que $H_{T,U} \neq \emptyset$ implica $n \geq |T| + |U|$.

Paso 2. Asúmase ahora que $H_{T,U} \neq \emptyset$ y por consiguiente $|T| + |U| \leq n$. Escójase $\bar{y} \in H_{T,U}$. Sea $\hat{H}_{T,U} = \{ (y,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in H_{T,U}, \ \lambda = A_{i.}y \ (i \in T)\}$, entonces la dim $\hat{H}_{T,U}$ = dim $H_{T,U}$.

Denotemos por $\bar{H}_{T,U}$ el espacio de soluciones de (8). Entonces

$$\dim \hat{H}_{T,U} = \dim \bar{H}_{T,U} \qquad (11)$$

como $\hat{H}_{T,U} = \bar{H}_{T,U} \cap \{ (y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \geq 0 \}$.

Ahora otra vez el rango de (9) es

$$|U| + \text{rango} \begin{vmatrix} a_{ij} & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 1 \ \ldots \ 1 & 0 \end{vmatrix}_{i \in T,\ j \in U^c}$$

Y como $|T| \leq n - |U| = |U^c|$, se puede seleccionar una submatriz $(|T| + 1) \times (|T| + 1)$. Por consiguiente, el rango de (9) es $|U| + |T| + 1$

y $\quad \dim \bar{H}_{T,U} = (n+1) - (|T| + |U| + 1) = n - |T| - |U| \qquad (12)$

por (11) se tiene

$$\dim \hat{H}_{T,U} \leq n - |T| - |U|.$$

Paso 3. Dada $\bar{y} \in H_{T,U}$; $\bar{\lambda} = A_{i.}\, \bar{y} \quad (i \in T)$ se define

$$T' = \{ i \mid i \in T^c,\ A_{i.}\, \bar{y} = \bar{\lambda} \},\ U' = \{ j \mid j \in U^c,\ \bar{y}_j = 0 \}$$

Se va a demostrar la existencia de $\bar{y} \in H_{T,U}$ tal que $T' = U' = \emptyset$

Ciertamente si $T' \, U' \neq \emptyset$, es suficiente demostrar que el tamaño de digamos T' puede ser reducido propiamente escogiendo un apropiado $\bar{y}$.

Para este fin sea $i_\circ \in T'$. Se tiene que $(\bar{y}, \bar{\lambda}) \in H_{T+T', U+U'}$ seguramente se encuentra $(y^\circ, \lambda_\circ) \in \bar{H}_{T+T'-\{i_\circ\}, U+U'}$ tal que

$$A_{i.} \, y^\circ = \lambda_\circ \, , \, i \in T + T' - \{i_\circ\} \, ,$$

$$A_{i_\circ} \, y^\circ \neq \lambda_\circ$$

así que $\bar{H}_{T+T', U+U'} \supseteq \bar{H}_{T+T' - \{i_\circ\}, U+U'}$, contradiciendo (12) .

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que

$$A_{i_\circ} \, y^\circ < \lambda_\circ$$

De otro modo tómese $(-y^\circ, -\lambda_\circ)$ y póngase

$$(y^\varepsilon, \lambda_\varepsilon) = (1 - \varepsilon)(\bar{y}, \bar{\lambda}) + \varepsilon(y^\circ, \lambda_\circ) \qquad (0 = \varepsilon = 1)$$

entonces

$$\begin{aligned} A_{i.} \, y^\varepsilon &= (1 - \varepsilon) \, A_{i.}\bar{y} + \varepsilon A_{i.} y^\circ = \\ &= (1 - \varepsilon) \, \bar{\lambda} + \varepsilon\lambda_\circ = \lambda_\varepsilon \qquad (i \in T + T' - \{i_\circ\} \,) \end{aligned} \tag{13}$$

Y similarmente

$$y_j^\varepsilon = 0 \quad (\, j \in U + U' \,) \tag{14}$$

Además

$$\begin{aligned} A_{i_\circ} \, y^\varepsilon &= (1 - \varepsilon) \, A_{i_\circ.} \bar{y} + \varepsilon A_{i_\circ.} y^\circ = (1 - \varepsilon)\bar{\lambda} + \varepsilon A_{i_\circ.} y^\circ \\ &< (1 - \varepsilon) \, \bar{\lambda} + \varepsilon\lambda_\circ = \lambda_\varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Por otro lado

$$A_{i.}\ \tilde{y} < \tilde{\lambda} \quad (i \in (T + T')^c) \ \text{y} \ \tilde{y}_j > 0 \quad (j \in (U + U')^c)$$

implica

$$A_{i.}\ y^{\varepsilon} < \lambda_{\varepsilon} \qquad (i \in (T + T')^c) \qquad (16)$$
$$y_j^{\varepsilon} > 0 \qquad (j \in (U + U')^c)$$

Para ε suficientemente pequeño, combinando (13)-(16) se encuentra que

$$(y^{\varepsilon}, \lambda_{\varepsilon}) \in H_{T+T'-\{i_0\},U+U'} \ , \quad (y^{\varepsilon}, \lambda_{\varepsilon}) \notin H_{T+T'-\{i_0\}+\{i\},U+U'}$$

Para cualquier $i \in (T + T')^c \cup \{i_0\}$. Por tanto $\bar{\bar{y}} = y^{\varepsilon}$ servirá para el propósito de "reducir T' " mencionado antes.

<u>Paso 4</u>. Se puede asumir por el resultado previo , que se puede encontrar $(\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \hat{H}_{T,U}$ satisfaciendo

$$A_{i.}\ \bar{y} < \bar{\lambda} \quad (i \in T^c) \quad y_j > 0 \quad (i \in U^c) \qquad (17)$$

Pero obviamente, (17) implica que una vecindad completa de $(\bar{y}, \bar{\lambda})$ relativa a $\bar{H}_{T,U}$ está aún contenida en $\hat{H}_{T,U}$.

Consecuentemente, comparando otra vez (11) y (12)

$$\dim H_{T,U} = \dim \bar{H}_{T,U} = n - |T| - |U|.$$

A.12. <u>COROLARIO</u>. Sea $\Gamma = (X,Y,A,B)$ no-degenerado.

1. El número de puntos de equilibrio es finito.
2. Si $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ y

$$T = \{ i \mid \bar{x}_i > 0 \} \quad R = \{ j \mid \bar{x}_j > 0 \}$$

entonces $|T| = |R|$ y,

$|\{(x,y)\}| = (L_R \cap X_T c) \times (K_T \cap Y_R c)$.

3. Si $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$, entonces existe un único número real $\bar{\lambda}$ tal que $(\bar{y}, \bar{\lambda})$ es la única solución del sistema

$$\begin{aligned} A_{i.}y - \lambda &= 0 \quad (i \in T) \\ y_j &= 0 \quad (j \in R^c) \qquad\qquad (18) \\ y_1 + \ldots + y_n &= 1 \end{aligned}$$

(Es decir todos los puntos de equilibrio de Γ pueden ser encontrados colocando alguna submatriz cuadrada A. Resolviendo un sistema parecido (18) , procediendo similarmente para B, y finalmente observar si un punto de equilibrio ha sido obtenido).

<u>Demostración</u>. Por el teorema A11 si $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{G}(\Gamma)$, entonces

$(\bar{x},\bar{y}) \in (L_R \cap X_T c) \times (K_T \cap Y_R c)$

Y por no-degeneración se concluye que;

$$|R| + |T^c| \leq m \qquad |T| + |R^c| \leq n$$

sumando ambas desigualdades resulta

$$|R| + |T^c| + |T| + |R^c| \leq m + n.$$

Sin embargo el lado izquierdo iguala m + n, por consiguiente se tiene la igualdad, es decir

$$|R| = m - |T^c| = |T|,$$

demostrando la primera parte de 2, la 2 parte de 2 se sigue otra vez por la no-degeneración, ya que:

$$\dim L_R \cap X_{T^c} = m - |R| - |T^c| = 0$$

3. es obvio, por consiguiente, $\bar{y}$ es la única solución de (18) que corresponde unicamente a la submatriz;

$$(a_{ij})_{i \in T,\ j \in R^c}$$

(es decir a la pareja de subconjuntos (T,R). Como hay solo un número finito de submatrices cuadradas (i,e. parejas (T,R)). 1 es una consecuencia directa.

En lo que sigue se empleará la notación $T + i$, $T - i$ en lugar de $T + \{i\}$ $T - \{i\}$.

A.13.TEOREMA.(LEMKE-HOWSON). Sea $\Gamma = (X,Y,A,B)$ no-degenerado. Entonces

$\mathcal{G}(\Gamma) = \emptyset$ y $|\mathcal{G}(\Gamma)|$ es impar.

Demostración. Se llamara un conjunto no-vacío,

$$H_{T,U} = \{\bar{y}\}, \quad |T| + |U| = n$$

un vértice en Y. Y un conjunto no-vacío

$$H_{T,U}, \quad |T| + |U| = n - 1$$

una arista en Y. (Similarmente para X).

<u>Paso 1</u> Nótese que todo vector básico es un vértice. Se demuestra que para toda j , $e^j \in Y$ está contenido en exactamente n - 1 aristas mientras cualquier otro vértice esta contenido en exactamente n aristas. (19)

La proposición es casi inmediata para los vectores básicos Sea un conjunto:

$$H_{T,U} = y \; ; \; |T| + |U| = n \; , \; |T| \geq 2$$

para cualquier $i \in T$

$$H_{T-i,U} \; , \; |T - i| + |U| = n - 1$$

es una arista conteniendo $\{\bar{y}\}$, y similarmente , para cualquier $j \in U$,

$$H_{T,U-j} \; , \; |T| + |U - j| = n - 1$$

Entonces se han encontrado, al menos n aristas conteniendo $\{\bar{y}\}$ Si hubiera más, la intersección de todas ellas constituirían un conjunto $H_{T',U'}$ con $|T'| + |U'| > n$, a pesar de que $y \in H_{T',U'}$ contradiciendo no-degeneración.

Formalmente: si $\{\bar{y}\} \subseteq H_{T^{\circ},U^{\circ}}$ entonces

$$\{\bar{y}\} \subseteq H_{T,U} \cap H_{T^{\circ},U^{\circ}} = H_{T \cup T^{\circ},U \cup U^{\circ}} = H_{T',U'}$$

y $|T| + |U| = n$ implica $T' = T$, $U' = U$; $T^{\circ} \subseteq T$, $U^{\circ} \subseteq U$.

NOTA. La única diferencia entre vectores básicos e^j y otros vértices es que $|T| = 1$ en el primer caso y por tanto no se debe suprimir un indice de T con el objeto de obtener una arista conteniendo e^j . Aparte de esto, si $H_{T,U}$ es un vértice, entonces para algún $i \in T$ y $j \in U$ le corresponde exactamente una arista en ' $H_{T,U}$ ' , que es cancelar un índice de $T \cup U$ entendiéndose una arista bién definida en $H_{T,U}$.

Paso 2. Sea $Z = X \times Y$. Supóngase $H_{T,U} = \{\bar{y}\}$ y $G_{R,V} = \{\bar{x}\}$ son vértices en Y y X respectivamente, entonces identificándose con sus elementos, sea

$$\bar{z} = (\bar{x},\bar{y}) \in G_{R,V} \times H_{T,U} \subseteq Z$$

un vértice en Z. Analogamente, los conjuntos del tipo

$$G_{R,V} \times H_{T,U} = \{(x,\bar{y}) \mid x \in G_{R,V}, \{\bar{y}\} = H_{T,U}\}.$$

($G_{R,V}$ una arista $H_{T,U}$ un punto) .

y

$$G_{R,V} \times H_{T,U} = \{(\bar{x},y) \mid \bar{x} = G_{R,V} : y \in H_{T,U}\}.$$

($G_{R,V}$ un punto, y $H_{T,U}$ una arista).

Son llamadas aristas de Z. Además denótese

$$\mho_n = \mho = \{z \in Z \mid x_i > 0 \text{ implica } y \in K_i \ (i \in I), \quad y_j > 0 \text{ implica } x \in L_j \ (j \in J\text{-}n)\}$$

Se va a demostrar

Si $\bar{z} \in \mathcal{G}(\Gamma)$, entonces $\bar{z} \in \mho$ y $\bar{z}$ es un vértice en Z
(20)

$\bar{z} \in \mathcal{Y}$,solamente debilitamos la condición para puntos de equilibrio. (cotéjese igualmente con el corolario$_{A.7.1}$). Para demostrar la segunda parte , nos referimos al corolario$_{A.12.2}$ el cual nos dice que:

$$T = \{ i \mid \bar{x}_i > 0 \} , \quad R = \{ j \mid \bar{y}_j > 0 \}$$

Tienen aquella propiedad a saber,

$$\bar{y} \in G_{T,R^c} , \quad |T| + |R^c| = |T| + n - |R| = n$$

Y similarmente para $\bar{x}$.

Paso 3. Hay exactamente un $i_\circ \in I$ tal que $(e^{i_\circ}, e^n) \in \mathcal{Y}$. (21)

Para ver esto elíjase $i_\circ \in I$ tal que:

$$A_{i_\circ} e^n \geq A_i e^n \quad (i \in I)$$

entonces ciertamente $e^n \in K_{i_\circ}$ y $(e^{i_\circ}, e^n) \in \mathcal{Y}$. Además

$$e^n \in H_{i_\circ, J-n} , \quad |\{i_\circ\}| + |J - n| = n$$

es así como $i_\circ$ está únicamente determinado, para $e^n \in K_i$ $(i \neq i_\circ)$, implicaría que

$$e^n \in H_{\{i,i_\circ\}, J-n} , |\{i, i_\circ\}| + |J - n| = n + 1 > n$$

contradiciendo la no-degeneración. Esto demuestra (21)

Empezamos por

$z^\circ = (e^{i_\circ}, e^n)$ como se definió por $_{21}$ y es ó una de dos un punto de equilibrio y no hay arista en $\mathcal{Y}$ conteniendo a z° ó hay exactamente una arista en $\mathcal{Y}$ conteniendo z°. (22)

Para uno u otro $e^{i_\circ} \in L_n$. Entonces como $z^\circ \in \mathcal{Y}$, se tiene:

$e^{i_\circ}_i > 0$ implica $e^n \in K_i \quad (i \in I)$

$e^n_j > 0$ implica $e^{i_\circ} \in L_j \quad (j \in J)$

Y por consiguiente $z^{\circ} \in \mathcal{G}(\Gamma)$ (corolario A.7.3). Ahora de acuerdo a (19) hay exactamente $m + n - 2$ aristas en Z conteniendo z°, a saber los conjuntos:

$$\{e^{i_{\circ}}\} \times H_{\{i_{\circ}\},J-n-j} \qquad (j \in J - n)$$
$$G_{\{n\},I-i_{\circ}-i} \times \{e^{n}\} \qquad (i \in I - i_{\circ}) \qquad (23)$$

Ninguno de estos está contenido en $\mathcal{U}$:por ejemplo si se toma:

$$(e^{i_{\circ}},y) \in \{e^{i}\} \times H_{\{i_{\circ}\},J-n-j}$$

para alguna $j \in J - n$ entonces y_j es factible. Pero $e^{i_{\circ}} \in L_n$,$e^{i_{\circ}} \notin L_j$ $(j \neq n)$(por no-degeneración). Asi que las condiciones de $\mathcal{U}$ son violadas.

O alternativamente $e^{i_{\circ}} \notin L_n$ y hay alguna k definida única $k \neq n$, tal que $e^{i_{\circ}} \in L_k$. Entonces las aristas en Z que contienen a z° están dadas por:

$$\{e^{i_{\circ}}\} \times H_{\{i_{\circ}\},J-n-j} \qquad (j \in J - n)$$
$$G_{\{k\},I-i_{\circ}-i} \times \{e^{n}\} \qquad (i \in I - i_{\circ}) \qquad (24)$$

Ahora ello nos dice que:

$$\{e^{i_{\circ}}\} \times H_{\{i_{\circ}\},J-n-k}$$

es una arista en $\mathcal{U}$ conteniendo z°, y naturalmente $(e^{i_{\circ}}, e^{n}) \notin \mathcal{G}(\Gamma)$.

Paso 4. Se va a demostrar:

Supóngase $\bar{z} \in \mathcal{U}$, $\bar{z} \neq z^*$, es un vértice entonces, acorde a si $\bar{z} \notin \mathcal{G}(\Gamma)$ o $\bar{z} \in \mathcal{G}(\Gamma)$ hay exactamente una o dos aristas en $\mathcal{U}$ conteniendo $\bar{z}$. (25)

Sea

$$T = \{ i \in I \mid x_i > 0 \} . \qquad R = \{ j \in J \mid y_j > 0 \} .$$

Y supóngase que $\bar{y}_n = 0$. Esto implica $\bar{z} \in \mathcal{G}(\Gamma)$.

Por el corolario A.12

$$\bar{z} \in G_{R,T^c} \times H_{T,R^c} \; , \; |R| + |T^c| = m \; , \; |R| = |T| ,$$
$$|T| + |R^c| = n.$$

Como $n \in R^c$, se puede cancelar n de R^c, así que se obtenga una arista $x \times H_{T,R^c-n}$ la cual está contenida en $\mathcal{U}$. Ninguna arista más allá está contenida en $\mathcal{U}$ por ejem.

$$\{\bar{x}\} \times H_{T-i,R^c}$$

Para alguna $i \in T$, contiene puntos $(\tilde{x},\tilde{y})$, $\bar{x}_i$ 0, $\tilde{y} \notin K_i$ y por tanto no está contenida en $\mathcal{U}$. Supóngase ahora que $\bar{y}_n > 0$ y $\bar{x} \in L_n$. Entonces $\bar{z}$ es otra vez un punto de equilibrio. Claramente $n \in R$. Si $|R| = 1$, entonces $|T| = 1$ (corolario A.12) 2 y $\bar{z} = (e^{i\cdot}, e^n)$ un caso que se excluye de la presente consideración. Por consiguiente $|R| \geq 2$, es decir se puede obtener una arista

$$G_{R-n,T^c} \times \{\bar{y}\}$$

Cancelando n de R. Esta arista está ciertamente en $\mathcal{U}$ y se prueba facilmente que es la único conteniendo $\bar{z}$.

Finalmente supóngase $\bar{y}_n > 0$ (es decir $n \in R$) y $\bar{x} \notin L_n$, es decir $\bar{z} \notin \mathcal{G}(\Gamma)$. De que $\bar{z} \in \mathcal{U}$ se sigue que:

$$\bar{z} \in G_{R-n,T^c} \times H_{T,R^c}$$

Ahora z es un punto. Pero las ecuaciones;

$$|R - n| + |T^c| = m \ , \quad |T| + |R^c| = n$$

no pueden sostenerse simultáneamente(lo cual se ve al sumarlas). Por consiguiente se tiene ó una de dos $j_1 \in R^c$, $j_1 \neq n$, tal que $\bar{x} \in L_{j_1}$ ó se encuentra i_1, $i_1 \in T^c$, tal que $\bar{y} \in K_{i}$

En el primer caso

$$\{\bar{z}\} = G_{R-n+j_1,T^c} \times H_{T,R^c}$$

Y las dos aristas

$$G_{R-n+j_1,T^c} \times H_{T,R^c-j_1} \ ; \ G_{R-n,T^c} \times H_{T,R^c}$$

están contenidas en $\mathcal{U}$. En estos

$$\{\bar{z}\} = G_{R-n,T^c} \times H_{T+i_1,R^c} \ ,$$

y las dos aristas

$$G_{R-n,T^c-i_1} \times H_{T+i_1,R^c} \ ; \ G_{R-n,T^c} \times H_{T,R^c}$$

están contenidas en $\mathcal{U}$. En ambos casos aristas no alejadas de $\bar{z}$ están en $\mathcal{U}$, asi se ha demostrado (25).

<u>Paso</u> 5. Se ha hecho hasta aquí el trabajo principal. El argumento procede como sigue:

Si $z^\circ = (e^{i_\circ}, e^n) \notin G(I)$, entonces hay justo una arista en $\mathcal{U}$ conteniendo z° (por 22). Esta arista es un poliedro convexo de dimensión 1, teniendo dos puntos extremos, uno de ellos siendo naturalmente z°. Dejando z° se alcanza el otro extremo el cual naturalmente un vértice. Si este vértice no es punto de equilibrio se puede abandonar sobre una arista interior a $\mathcal{Y}$ la cual no es la arista de llegada(por (25)), así llegando a un vértice más allá perteneciendo a $\mathcal{Y}$. La trayectoria construida de éste modo nunca se cerrará ya que constituiría un vértice de tres aristas de incidencia (cotéjese la fig. (4)).

Como hay finitamente vértices, la trayectoria debe eventualmente terminar, es decir hay un punto (no siendo $(e^{i_\circ}, e^{n}) = z^{\circ}$) teniendo solamente una arista en $\mathcal{Y}$ (la arista de llegada). Este punto en necesariamente un punto de equilibrio (por (25)).

Entonces la trayectoria genera un punto de equilibrio su punto final (el cual coincide con el punto inicial si y sólo si z° es ya un punto de equilibrio).

Posiblemente, haya más puntos en $\mathcal{Y}$ que no se han encontrado por la trayectoria de ésta manera. Entonces se pueden construir otras trayectorias , empezando en un punto arbitrario de $\mathcal{Y}$.

Se puede observar que tales trayectorias son disjuntas, ellas p ueden ser o una de dos con dos puntos extremos o ser cerradas. Por tanto, ellas generan; una de dós, dos puntos de equilibrio o ninguno. En cualquier caso tenemos un numero impar de puntos de equilibrio.

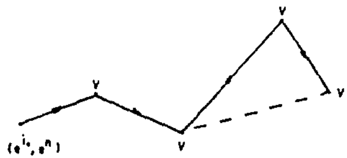


Fig. 4

Ejemplo. A.14(fig. 5 -6). Sea

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1. Obviamente $Y \ni e^3 \in K_3$. es decir $i_0 = 3$ y $z^0 = (e^3, e^3)$, es el punto inicial. $z^0 \notin \mathcal{G}(\Gamma)$ ya que $X \ni e^3 \notin L_3$.
2. Por consiguiente hay exactamente una arista en $\mathcal{A}$ dejando z^0, ésta es $\{e^3\} \times (K_3 \cap Y_2)$ ($H_{\{3\},\{2\}} = K_3 \cap Y_2$ es marcada por P_1). La arista finaliza en (e^3, y^1), el cual no es un punto de equilibrio. $(e^3 \notin L_{\{1,2\}})$.
3. Así que hay otra arista en $\mathcal{A}$ que abandona (e^3, y^1), esta es $(L_1 \cap X_2) \times \{y^1\}$ dirigiéndose a $(x^1, y^1) \notin \mathcal{G}(\Gamma)$. ($L_1 \cap X_2$ es marcada por P_2).
4. El siguiente paso, es ejecutado moviéndose sobre $x^1 \times (K_{\{1,3\}} \cap Y_{\emptyset})$ hacia $(x^1, y^2) \notin \mathcal{G}(\Gamma)$.
5. Finalmente, moviéndose sobre $(X_{\emptyset} \cap L_{\{2\}})$ hacia (x^2, y^2) se obtiene (x^2, y^2) que pertenece a $\mathcal{G}(\Gamma)$.

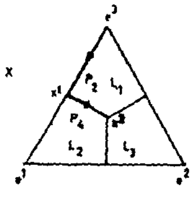


Fig. 5

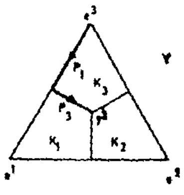
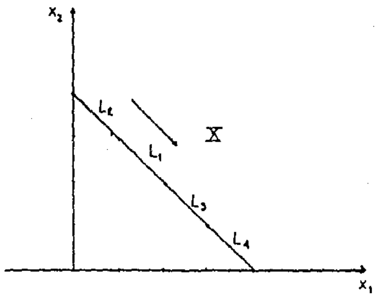


Fig. 6



Se ve fácilmente que

$$L_1 = \{ x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leq x_2 \leq \tfrac{3}{4} \} = \{ x \in X \mid \tfrac{1}{4} \leq x_1 \leq \tfrac{1}{2} \},$$

$$L_2 = \{ x \in X \mid \tfrac{3}{4} \leq x_2 \leq 1 \} = \{ x \in X \mid 0 \leq x_1 \leq \tfrac{1}{4} \},$$

$$L_3 = \{ x \in X \mid \tfrac{1}{4} \leq x_2 \leq \tfrac{1}{2} \} = \{ x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leq x_1 \leq \tfrac{3}{4} \}$$

$$L_4 = \{ x \in X \mid 0 \leq x_2 \leq \tfrac{1}{4} \} = \{ x \in X \mid \tfrac{3}{4} \leq x_1 \leq 1 \}.$$

Por otro lado Y es un tetrahedro y se verifica que al menos los puntos:

$y^1 = (0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$ $\qquad$ $y^2 = (\tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2})$

$y^3 = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0)$ $\qquad$ $y^4 = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)$

son elementos del hiperplano $\{ y \in R^4 \mid A_{1\cdot}\, y = A_{2\cdot}\, y \}$.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Aquí $m = 2$, $n = 4$, por consiguiente X es unidimensional y Y es tridimensional.

Como $x\,B_{.i} = x_1 b_{1i} + x_2 b_{2i} = x_1 b_{1i} + (1 - x_1) b_{2i}$, es una función afín en X ,s e puede dibujar una gráfica calculando dos valores, es decir

$$e^1 B_{.i} = b_{1i}\ , \qquad e^2 B_{.i} = b_{2i}\ .$$

Por ejemplo, $xB_{.1} = -x_1 + 3x_2$ tiene una gráfica como la que se indica por la figura (7) . Así que dibujando $x\,B_{.1},\ldots,xB_{.4}$ se obtiene un cuadro como en la figura (8) .

Fig. 7

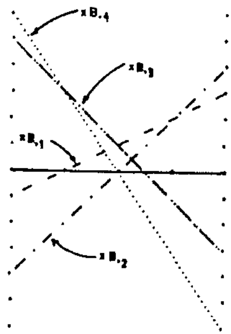


Fig. 8

Obviamente $e^1,e^2 \in K_1$; $e^3,e^4 \in K_2$ y el hiperplano divide a Y en dos piezas, la situación esta representada en la figura (10)

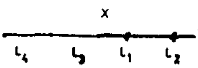


Fig. 9

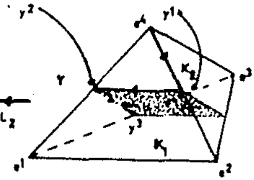


Fig. 10

El algoritmo procede como sigue:

1. $z^0 = (e^2,e^4)$ como $e^4 \in K_2$
2. $z^1 = (e^2,y^1)$ como $e^2 \in L_2$ ($y^1 = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$),
3. $z^2 = (x^1,y^1)$ como $y^1 \in K_{\{1,2\}}$ ($x^1 = (\frac{1}{2},{}^3)$),
4. $z^3 = (X^1,y^2)$ como $x^1 \in L_{\{1,2\}}$ ($y^2 = (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$),
5. $z^4 = (x^2,y^2)$ como $y^2 \in K_{\{1,2\}}$ ($x^2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$),
6. $z^5 = (x^2,y^3) \in \mathcal{G}(\Gamma)$ como $x^2 \in L_{\{1,3\}}$ ($y^3 = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$).

El proceso se mueve alternativamente, es decir si en un cierto estado del algoritmo, un vértice en X ha sido fijado, y una arista en Y es seguida. Con objeto de encontrar el siguiente vértice. Entonces en el siguiente estado un vértice en Y, va a dejarse fijo, y el movimiento tiene lugar en X.

APENDICE B. FORMA NORMAL DE UN JUEGO N PERSONAL NO COOPERATIVO.

B.1

Para nosotros un juego Γ, n-personal no-cooperativo será una tríada de conjuntos : n-jugadores; conjunto de estrategias puras para cada uno; y pagos esperados también para cada uno, simbólicamente :

$$\Gamma = \left\langle I, \ \{S_i\}_{i \in I}, \{E_i\}_{i \in I} \right\rangle$$

Se considera que el juego es finito es decir que el conjunto de estrategias puras es finito para todo jugador i.

Una estrategia mixta arbitraria σ_i para cada jugador i es una cierta distribución de probabilidaddefinida en el conjunto $\{S_i\}$.
Además la probabilidad asignada por σ_i a la estrategia pura s_i será denotada por $\sigma_i(s_i)$ y el conjunto de estrategias mixtas para el jugador i será denotado por Σ_i.

Supóngase que cada uno de los jugadores $i \in I$ aplican su estrategia mixta σ_i. Además sean las estrategias mixtas de todos los jugadores vistas conjunta e independientemente es decir la probabilidad de llegar a la situación $s = (s_1, s_2 \ldots, s_n)$ se considera como el producto de escoger sus componentes : $\sigma_1(s_1)\,\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_n(s_n)$.

Entonces se llega a la distribución de probabilidad σ definida en el conjunto de todas las situaciones en el juego Γ; tal que :

$$\sigma(s) = \sigma(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sigma_1(s_1)\,\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_n(s_n)$$

Estos tipos de distribuciones de probabilidad son llamadas "situaciones de juego Γ en estrategias mixtas".

Una situación del juego Γ en estrategias mixtas, es la realización de varias situaciones reales en estrategias puras, cada una ocurriendo con cierta probabilidad. Por consiguiente el valor de la función de pago para cada jugador es una variable aleatoria. En la teoría del juego el valor de la función de pago para el jugador i en una situación en estrategias mixtas nos lleva a introducir el concepto E_i de esperanza matemática de esta variable aleatoria, y así :

$$E_i(\sigma) = \sum_{s \in S} E_i(s)\, \sigma(s) = \sum_{s_1 \in S} \cdots \sum_{s_n \in S_n} E_i(s_1, \ldots, s_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i) \qquad \text{B.1.1.}$$

Por conveniencia introduciremos la notación de sustitución $(\sigma \| s_j^\circ)$ para indicar en el j-ésimo lugar de σ la sustitución s_j°. Y así : B.1.2.

$$E_i(\sigma \| s_j^\circ) = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_{j-1} \in S_{j-1}} \sum_{s_{j+1} \in S_{j+1}} \cdots \sum_{s_n \in S_n} E_i(s \| s_j^\circ) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sigma_i(s_i)$$

NOTA: En la parte derecha de la igualdad debe ir $\sum_{s_j \in S_j} E_i(s \| s_j^\circ)$ que es la esperanza con la que se sigue una trayectoria que conduce el hecho de jugar s_j° .

Definición. La extensión mixta Γ^* del juego Γ es la tríada :

$$\Gamma^* = \left\langle I, \{\Sigma_i\}_{i \in I}, \{E_i\}_{i \in I} \right\rangle$$

donde I es el conjunto de jugadores

$$\Sigma_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \longrightarrow [0,1]$$ donde Σi es el conjunto de estrategias mixtas del jugador i.

$$E_i : \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i \longrightarrow \mathbb{R}$$ Los pagos E_i del jugador i = 1,..,n

Se sabe que si para cualquier estrategia pura s_i del jugador i y algún número a se cumple la desigualdad $E_j\ (\sigma \,\|\, s_i) \leq a$ entonces para cualquier estrategia mixta σ_i^* de este jugador la desigualdad también es veradera.

$$E_j\ (\sigma \,\|\, \sigma_i^*) \leq a$$

NOTA: Como $\sigma_i^*\ (s_i) \geq 0$ pero menor o igual que 1. Implica éste resultado.

Una situación de equilibrio en un juego no-cooperativo Γ donde

$$\Gamma = \left\langle I,\ \{S_i\}_{i\in I},\ \{E_i\}_{i\in I} \right\rangle$$

Es una situación s^* tal que para cada $i \in I$ y $s_i \in S$

$$E_i\ (s^* \,\|\, s_i) \leq E_i\ (s^*)$$

Definición. Una situación de equilibrio en una extensión mixta Γ^* del juego Γ es llamada una "situación de equilibrio del juego en estrategias mixtas".

Entonces una situación σ^* es una situación de equilibrio en el juego Γ^* si para cualquier jugador i y para cualquier estrategia mixta σi para este jugador la desigualdad es válida.

$$E_i\ (\sigma^* \,\|\, \sigma_i) \leq E_i\ (\sigma^*) \qquad \text{B.I.6}$$

El siguiente teorema es a menudo muy últil.

B.1 <u>TEOREMA</u>. Con el objeto de que una situación σ^* en el juego Γ sea una situación de equilibrio para este juego (en estrategias mixtas) es necesario y suficiente que para cualquier jugador i y cualquier estrategia pura, s_i para este jugador la desigualdad se satisfaga.

$$E_i\ (\sigma^* \| s_i) \leq E_i\ (\sigma^*) \qquad \text{B.1.7}$$

Demostración:

<u>NECESIDAD</u> Es obvia, ya que una estrategia pura es un caso particular de una mixta y así cada una de las desigualdades B.1.7 (para cada i) es un caso particular de B.1.6.

<u>SUFICIENCIA</u>

Elíjase una estrategia mixta arbitrariamente σ_i para el jugador i multiplíquese la desigualdad B.1.7 por σ_i (s_i) y súmese con respecto a $s_i \in S_i$. Esto resulta en :

$$\sum_{s_i \in S_i} E_i\ (\sigma^* \| s_i)\, \sigma_i\ (s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\ E_i\ (\sigma^*)$$

Aplicando B.1.1 y B.1.2 en el lado izquierdo de esta desigualdad y tomando fuera el signo de suma con respecto a $E_i\ (\sigma^*)$ se obtiene la desigualdad B.1.6.

B.1 LEMA. Para cualquier situación en estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ cada uno de los jugadores $i \in I$ posee una estrategia pura s_i° tal que las siguientes dos desigualdades se satisfacen :

$$\sigma_i\ (s_i^{\circ}) > 0 \qquad \text{B.1.3}$$

$$E_i\ (\sigma \| s_i^{\circ}) \leq E_i\ (\sigma)$$

Demostración: Por contradicción, supóngase que todas las estrategias puras s_i para el jugador i satisfaciendo B.1.3 se tiene :

$$E_i\ (\sigma \| s_i) > E_i\ (\sigma)$$

entonces para todas estas estrategias.

$$E_i\ (\sigma \| s_i)\ \sigma_i\ (s_i) > E_i\ (\sigma)\ \sigma_i\ (s_i). \qquad \text{B.1.4}$$

esta desigualdad se cumple para toda s_i tal que $\sigma_i\ (s_i) > 0$. Sin embargo para las otras s_i tenemos:

$$E_i\ (\sigma \| s_i)\ \sigma_i\ (s_i) = E_i\ (\sigma)\ \sigma_i(s_i) = 0 \quad \text{B.1.5}$$

Sumando las desigualdades B.1.4 y las ecuaciones B.1.5 sobre toda estrategia s_i del jugador i obtenemos :

$$\sum_{s_i \in S_i} E_i\ (\sigma \| s_i)\ \sigma_i\ (s_i) > \sum_{s_i \in S_i} E_i\ (\sigma)\ \sigma_i\ (s_i)$$

Y cuando B.1.1. y B.1.2 se obtiene

$$E_i\ (\sigma) > E_i\ (\sigma)$$

lo cual es una contradicción

<u>TEOREMA DE NASH</u>* En cualquier juego no-cooperativo $\Gamma = \left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{E_i\}_{i\in I} \right\rangle$ existe al menos una situación en equilibrio en estrategias mixtas.

<u>Demostración</u>. Si el jugador i en el juego posee m_i estrategias puras y Σi representa sus estrategias mixtas. Geométricamente Σi es un $(m_i - 1)$ - simplejo ($S^{(i)}$ denotará este simplejo) Así que $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ puede ser visto como un punto del producto cortesiano $S^{(1)} x \ldots x S^{(n)}$ de los simplejos en estrategias mixtas. Claramente este producto es convexo cerrado y acotado en el espacio enclidiano de dimensión $m_1 + \ldots + m_n - n$.

Definamos ahora para una situación arbitraria σ y alguna estrate gia $\mathscr{A}_i^{(j)} S_i$ para el jugador i.

$$\emptyset_{ij}(\sigma) = \max\left\{0,\ E_i(\sigma \| \mathscr{A}_i^{(j)}) - E_i(\sigma)\right\} \qquad B.I.8$$

Las funciones $\emptyset_{ij}$ definidas asi toman valores no-negativos. Estas funciones miden el incremento en el pago para el jugador i en una situación σ debido a la sustitución de su estrategia σ_i por una cierta estrategia pura $\mathscr{A}_i^{(j)}$.

El posible decremento debido a tal sustitución no es indicada por la función $\emptyset_{ij}$.

Ahora sea para toda $i=1,\ldots,n$ y $j=1,\ldots,m_i$ números de la forma

$$\frac{\sigma_i(\mathscr{A}_i^{(j)}) + \emptyset_{ij}(\sigma)}{1 + \sum_{j=1}^{mi} \emptyset_{ij}(\sigma)} \qquad B.I.9$$

Todas estas fracciones son no-negativas y suman uno en símbolos

$$\sum_{j=1}^{mi} \frac{\sigma_i (\mathcal{S}_i^{(j)}) + \phi_{ij} (\sigma)}{1 + \sum_{j=1}^{mi} \phi_{ij} (\sigma)} = 1$$

Ya que : $\sum_{j=1}^{mi} \sigma i (\mathcal{S}_i(j)) = 1$

Consecuentemente, para σ e i fijos las fracciones pueden ser vistas como probabilidades de las correspondientes estrategias puras $\mathcal{S}_i^{(j)}$ para el jugador i. Una colección de éstas fracciones para todas las estrategias puras puede ser interpretada como una estrategia mixta para el jugador i.

Ya que las fracciones B .1.9 son construidas para cada i, su totalidad determina un sistema de estrategias mixtas para todos los jugadores y entonces una situación en el juego Γ. Tal situación es una función de la situación inicial σ, (Denotada f (σ). La función f, mapea los conjuntos cerrados convexos y acotados de todas las situaciones Σ en sí mismo.

Además, esta función es contínua sobre las situaciones. Ciertamente cada componente de la situación que es el valor de la función f es una fracción de la forma B .1.9. El primer sumando en el numerador de esta fracción es la componente de la situación inicial y por consiguiente la dependencia aquí es continua. Como ϕ_{ij} en el segundo sumando depende de las funciones lineales E_i (σ) y E_i $(\sigma \| \mathcal{S}_i^{(j)})$ de la constante cero y del operador máx (obsérvese que la función máx $\{0,x\}$ es contínua) entonces ϕ_{ij} son contínuas en σ. Finalmente el denominador de la fracción B .1.9 es contínua y no se anula. Y es así que la función f es ciertamente una función contínua.

En vista de lo anterior, las condiciones del teorema del punto fijo de Brouwer son satisfechos. Este teorema afirma que un mapeo continuo f de un sub-conjunto convexo cerrado y acotado de un espacio de dimensión finita en sí mismo, posee al menos un punto fijo, es decir un punto σ° tal que $f(\sigma^\circ) = \sigma^\circ$. Siendo σ° uno de tales puntos.

Esto implica que para toda i y j.

$$\sigma_i^\circ(s_i^{(j)}) = \frac{\sigma_i^\circ(s_i^\circ) + \phi_{i\circ}(\sigma^\circ)}{1 + \sum_{l=1}^{m_i} \phi_{il}(\sigma^\circ)}$$

Por el lema B.1 existe para cualquier jugador i una estrategia pura s_i° tal que $\sigma_i^\circ(s_i^\circ) > 0$ y $\phi_{io}(\sigma^\circ) = 0$. Para esta estrategia particular la igualdad B.1.10 se convierte.

$$\sigma_i^\circ(s_i^\circ) = \frac{\sigma_i^\circ(s_i^\circ) + \phi_i(\sigma^\circ)}{1 + \sum_{l=1}^{m_i} \phi_{il}(\sigma^\circ)}$$

Por consiguiente:

$$\sigma_i^\circ(s_i^\circ) + \sigma_i^\circ(s_i^\circ) \sum_{l=1}^{m_i} \phi_{il}(\sigma^\circ) = \sigma_i^\circ(s_i^\circ) + \phi_{ij}(\sigma^\circ)$$

y como $\phi_{io}(\sigma^\circ) = 0$ en vista de la elección de s_i° se obtiene

$$\sigma_i^\circ(s_i^\circ) \sum_{l=1}^{m_i} \phi_{il}(\sigma^\circ) = 0$$

lo que implica que :

$$\sum_{l=1}^{m_i} \phi_{il}(\sigma^\circ) = 0$$

Y como $\emptyset_{ij}(\sigma^{\circ})$ son no negativos, se sigue de esta igualdad que $\emptyset_{ij}(\sigma^{\circ}) = 0$ para cada uno de ellos. Entonces en este caso no hay números positivos en $\emptyset_{ij}(\sigma^{\circ})$. En otras palabras:

$$E_i(\sigma^{\circ} \parallel s_i^{(j)}) \leq E_i(\sigma^{\circ})$$

Ya que esta desigualdad es satisfecha para cada jugador i, y cualquier estrategia pura $s_i^{(j)}$ para este jugador, el teorema B.1 implica que la situación σ° es de equilibrio.

En juegos no-cooperativos de suma general no existen nociones simples y convenientes tales como estrategia óptima para un jugador o el valor del juego. Además una colección de estrategias en equilibrio para diferentes jugadores no siempre forman una situación en equilibrio (solamente ciertas combinaciones de estrategias en equilibrio lo hacen). Estos hechos disminuyen la importancia de una situación en equilibrio en juegos no-cooperativos de suma general y por consiguiente también impiden su determinación.

En seguida se da sin demostración el teorema.

Teorema. Si una estrategia en equilibrio σ_i para el jugador i aparece en una situación en equilibrio σ y si para alguna estrategia pura s_i° para este jugador la desigualdad estricta se satisface

$$E_i(\sigma \,\|\, s_i^{\circ}) < E_i(\sigma)$$

Entonces $\sigma_i(s_i^{\circ}) = 0$

Este teorema puede ser visto de manera diferente como:
"Si una estrategia en equilibrio σ_i para el jugador i aparece en la situación en equilibrio σ y la estrategia pura s_i° esencial en la estrategia mixta σ_i entonces :

$$E_i(\sigma \,\|\, s_i^{\circ}) = E_i(\sigma) \qquad \text{B.1.11}$$

B.2 JUEGOS BIMATRICIALES

Algunos tipos de juegos no-cooperativos de suma general son solubles para situaciones en equilibrio como es el caso de los juegos bimatriciales.

Sea el jugador X (Xavier) poseé m estrategias puras e Ivette (jugador II) poseé n estrategias puras y sea a_{ij} el pago para X en la situación i, j y respectivamente b_{ij} Yvette.

Los pagos para ambos jugadores son convenientemente expresados por un par de matrices.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mn} \end{bmatrix}$$

"de aquí su nombre bimatriz"

Si X y Y son sectores representando estrategias mixtas para cada jugador (Xavier e Yvette respectivamente) entonces su pago esperado para cada uno es :

$$E_x\,(X,\,Y) = X\,A\,Y^t \;; \qquad E_y\,(X,\,Y) = X\,B\,Y^t$$

Una situación en equilibrio en un juego bimatriz puede ser definido de la siguiente manera : Una situación (X, Y) en un juego bimatriz con matrices de pago A y B es de equilibrio si :

$$A_i \;\; Y^t \leq X\,A Y^t \qquad\qquad i = 1, \ldots, m \qquad\qquad B.2.1$$

$$X\;B_j \leq X B\;Y^t \qquad\qquad j = 1, \ldots, n \qquad\qquad B.2.2$$

Para el caso particular de que A =-B el juego bimatriz se reduce en las relaciones B.2.1 y B.2.2 a su correspondiente :

$$A_i Y \leq XAY' \qquad i = 1,\ldots,m.$$

$$-XA_j \leq -XAY' \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Lo cual nos dá la condición de punto silla de los juegos de suma cero

$$A_i Y \leq XAY \leq XA_j \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,m. \\ j = 1,\ldots,n \end{matrix}$$

Soluciones de los juegos bimatriz.

El primer caso de juegos bimatriz son del tipo 2x2 (en los cuales cada jugador posee 2 estrategias puras).

Entonces sus matrices correspondientes son :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Para los jugadores X y Y respectivamente, sea x la probabilidad con la cual Xavier elige su 1a. estrategia pura entonces la probabilidad con que juega su 2a. estrategia pura es 1-X. Análogamente (y, 1-y) son las probabilidades con que juegan sus estrategias puras Yvette. Como $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ cualquier situación en un juego bimatricial 2x2 está perfectamente determinada por un punto del cuadrado unitario.

Los pagos como antes son denotados por: $E_X(x,y)$; $E_Y(x,y)$ respectivamente y así.

$$E_X(x,y) = XAY' = a_{11}xy + a_{21}(1-x)y + a_{12}x(1-y) + a_{22}(1-x)(1-y)$$

simplificando esta igualdad

$$E_X(x,y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$$

$$E_Y(x,y) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$$

Usando las desigualdades B.2.1 para Xavier se tiene :

$$E_x(1,y) = A_1Y^t \leq XAY^t = E_x(x,y)$$

$$E_x(0,y) = A_2Y^t \leq XAY^t = E_x^t(x,y)$$

Como una situación en un juego no cooperativo representa una situación que es admisible para cada uno de los jugadores. Se describirá en seguida en el cuadro unitario de todas las situaciones la geometría de las situaciones, las cuales son admisibles para cada jugador separadamente y así usando estas desigualdades explicativamente se tiene que :

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})y + (a_{12}-a_{22}) + (a_{21}-a_{22})y + a_{22} \leq$$

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})yx + (a_{12}-a_{22})x + (a_{21}-a_{22})y + a_{22}$$

y además $\qquad (a_{21}-a_{22})y + a_{22} \leq$

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy + (a_{12}-a_{22})x + (a_{21}-a_{22})y + a_{22}.$$

Simplificando estas desigualdades queda que :

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})(x'y)+(a_{12}-a_{22})(1-x) \leq 0 \qquad \text{B.2.5}$$

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy+(a_{12}-a_{22})x \geq 0 \qquad \text{B.2.5'}$$

Para simplificar la notación sea :

$$A = (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})$$

$$a = -a_{12}+a_{22}$$

Entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema B.2.6 y B.2.7 en la franja $[0,1] \times (-\infty, +\infty)$ consiste en :

a) Todas las situaciones de la forma $(0, y)$ donde $Ay - a < 0$

b) Todas las situaciones de la forma (x, y) donde $x \in [0,1]$; $Ay - a = 0$

c) Todas las situaciones de la forma $(1, y)$ donde $Ay - a > 0$

La estructura de este conjunto depende de los valores de los invariantes A y a. En seguida se hace un análisis de estos invariantes.

Si $A = a = 0$, todas las soluciones son del tipo b y su solución es toda la franja $[0,1] \times (-\infty, +\infty)$ por consiguiente las situaciones admisibles son todos los puntos del cuadrado unitario.

Si $A = 0$ pero $a \neq 0$, las soluciones en la franja son ó uno de dos del tipo a) ó c) dependiendo del signo de a. En este caso el conjunto de soluciones del sistema B.2.6 y B.2.7 es ó una de dos el segmento de línea $x=1$ ó el segmento de línea $x = 0$. en el cuadrado unitario.

Finalmente sea $A \neq 0$. En este caso todas las soluciones del sistema B.2.6 y B.2.7 de la forma (o, y) satisfacen :

$$y \leq \frac{a}{A} = \alpha \qquad \text{si} \quad A > 0$$

$$y \geq \frac{a}{A} = \alpha \qquad \text{si} \quad A < 0$$

Esto significa que el conjunto de valores "y" es ó una de dos la semirecta $(-\infty, \alpha]$ ó lo semirecta $[\alpha, +\infty)$.

Soluciones de la forma (l,y) son simétricas a las dadas en la forma (o,y) estas satisfacen

$$y \geq \alpha \quad \text{si} \quad A > 0$$

$$y \leq \alpha \quad \text{si} \quad A < 0$$

Es decir el conjunto de y en este caso es otra vez los semirectas $[\alpha, \infty)$ o $(-\infty, \alpha]$

Y soluciones de la forma (x, y) con $0 \leq x \leq 1$ se tiene

$$y = \frac{a}{A} = \alpha$$

Es decir el conjunto de estas soluciones representa el segmento uniendo los puntos (o, α) y $(1, \alpha)$

Por tanto el conjunto de todas las soluciones de B .2.6 y B .2.7 para $A \neq 0$ es un zig-zag. Todavía más si $A > 0$ este zig-zag es representado en la figura B .2.1 y para $A < 0$ en la figura B .2.2

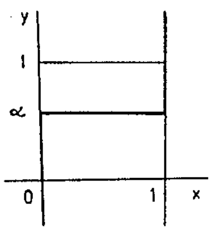


fig. B 2.1

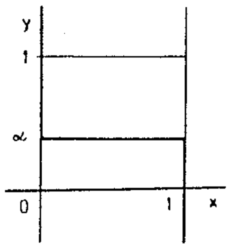


fig. B 2.2.

Recordemos que el conjunto de todas las situaciones admisibles para el jugador X es la intersección de este zig-zag con el cuadrado unitario. Se puede verificar directamente que para $\alpha < 0$ el conjunto de situaciones admisibles es uno de los lados verticales del cuadrado unitario; para $\alpha = 0$ el conjunto consiste de dos lados que forman un ángulo recto; para $0 < \alpha < 1$ es un zig-zag; para $\alpha = 1$ es otra vez un ángulo recto y pasa $\alpha > 1$ es otro lado vertical del cuadrado unitario de las situaciones.

La enumeración de las situaciones admisibles para Ivette son obtenidas similarmente. Primero las invariantes B y b tales que :

$$B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \quad ; \qquad b_{22} - b_{21} = b \qquad\qquad B.2.10$$

El conjunto de todas las situaciones admisibles para Ivette consisten en :

a) Todas las situaciones de la forma (x,o) donde $Bx - b < 0$

b) Todas las situaciones de la forma (x,y) donde $Bx - b = 0$

c) Todas las situaciones de la forma (x,1) donde $Bx - b > 0$

Si B = b = o, entonces toda situación en el juego será admisible para Ivette.

Si B = o pero b ≠ o el conjunto de todas las situaciones admisibles para Ivette será ó una de dos el lado inferior o el lado superior del cuadrado unitario de las situaciones dependiendo del signo de b.

Si B $\neq$ o, entonces el conjunto de situaciones será un zig-zag. Para B $>$ o se observa en la figura B.2.3 y para B $<$ o en la figura B.2.4

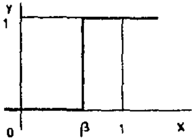


fig. B.2.3.

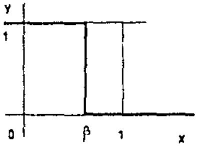


fig. B.2.4.

Una situación admisible para un jugador en un juego depende del pago para este jugador solamente. Por consiguiente, en nuestro caso todas las situaciones admisibles para Xavier dependen solamente de A y a ó bién de su matriz de pago A, y el conjunto de todas las situaciones admisibles para Ivette depende de los parámetros B y b ó de la matriz B.

En particular, la matriz A completamente determina el número α que indica la posición de la línea media en las situaciones admisibles para Xavier. En el contexto de la teoría de juegos α, representa la probabilidad en la cual el jugador Y escoge su la. estrategia pura en una cierta estrategia mixta para este jugador. Con otras palabras, si α cae en el intervalo (0, 1) ésta debe ser interpretada como una estrategia mixta para Ivette. Analogamente la matriz de pago B para Ivette determina un número β, el cual si se localiza en el intervalo (0,1), debe ser visto como una estrategia mixta para Xavier.

Supóngase que el juego posee una situación en equilibrio en estrategias completamente mixtas (no en estrategias puras). Se sigue de lo anterior que las estrategias mixtas en equilibrio para Xavier en este juego están completamente determinadas por la matriz de pagos de Ivette e inversamente.

La expresión explicita para α y β es:

$$\alpha = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \qquad \text{B.2.11}$$

$$\beta = \frac{b_{22} \quad b_{12}}{b_{11} \quad b_{12} \quad b_{21} \quad b_{22}}$$

Se observa que un juego 2 x 2 bi-matricial, bajo las condiciones de las situaciones de equilibrio en estrategias completamente mixtas, el comportamiento de Ivette coincide con el juego matricial cuya matriz es A, mientras el comportamiento de Xavier coincide con el comportamiento Ivette en la matriz de juego con matriz de pago B.

Consecuentemente, el comportamiento enequilibrio de los jugadores está dirigido hacia la minimización del pago para el aparente en lugar de la maximización de su propio pago.

<u>Definición</u>. Un juego bimatricial con matrices A y B es llamado casi antagónico si las relaciones $a_{ij} < a_{kl}$ ó $a_{ij} = a_{kl}$ implica que $b_{ij} < b_{kl}$ ó $b_{ij} = b_{kl}$ respectivamente.

Considérese el siguiente ejemplo de un juego casi-antagónico.
Xavier intenta vender una gran cantidad de mercancía en uno de los dos mercados que es controlado por el otro, para este propósito se emprende una acción específica en uno de los mercados (por ejemplo lleva una campaña intensiva). Ivette quién domina el mercado, puede intentar prevenir esta campaña tomando ciertas medidas preventivas. Xavier si no encuentra resistencia de la marca, captura el mercado, mie tras; mientras que si se le oponen,el mercado se pierde. Las estrategias para los jugadores son las posibles elecciones por las firmas.

Considérese que Xavier tiene una gran ventaja para penetrar el primer mercado, pero la lucha por este mercado es costosa. Por ejemplo, una victoria para Xavier en primer mercado le puede producir un doble pago compensado con el segundo, pero una pérdida del primer mercado le arruinaría completamente (pierde 10 unidades), mien - tras que para Ivette una victoria en el primer mercado resulta en la mera elimina - ción de un competidor (ganancia de 5 unidades).

El juego bimatriz correspodiente puede ser definido por las siguientes matrices de pago :

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para este juego se calculan los parámetros

$$A = -14$$
$$a = -3$$
$$\alpha = \frac{a}{A} = \frac{3}{14}$$

Esto implica que las situaciones admisibles para Xavier son todas las situaciones de la forma.

$$(o\,,y) \quad \text{para} \quad \frac{3}{14} \leq y \leq 1$$

$$(x\,,\tfrac{3}{14}) \quad \text{para} \quad o \leq x \leq 1$$

$$(1\,,y) \quad \text{para} \quad o \leq y \leq \frac{3}{14}$$

Las cuales se presentan en la figura B.2.5.

como :

$$B = 9 > 0$$
$$b = 2$$
$$\beta = \frac{b}{B} = \frac{2}{9}$$

Las situaciones admisibles para Ivette son todas aquellas de la forma :

$$(x, o) \quad \text{para} \quad o \leq x \leq \frac{2}{9}$$

$$(\frac{2}{9}, y) \quad \text{para} \quad o \leq y \leq 1$$

$$(x, 1) \quad \text{para} \quad \frac{2}{9} \leq x \leq 1$$

El conjunto de estas situaciones es indicada con líneas punteadas en la misma figura B.2.5.

El zig-zag de situaciones admisibles se intersectan en el único punto (2/9, 3/14) el cual es la única situación en equilibrio del juego.

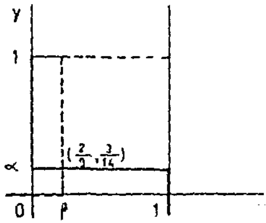


fig. B.2.5.

B.3 El dilema del prisionero

Dos hombres sospechosos de cometer un crímen juntos son detenidos y situados en celdas separadas. Cada sospechoso puede confesar o permanecer silencioso, y cada uno conoce las posibles consecuencias de su acción. Estas son :

1) Si un sospechoso confiesa y su cómplice no, el que confiesa queda libre y el otro va a la cárcel por 20 años.
2) Si ambos confiesan, los dos van a la cárcel por cinco años.
3) Si ambos permanecen silenciosos, ambos van a la cárcel por un año por el delito de llevar armas ilegalmente (cargo menor). Supondremos que no hay honor entre ladrones y que lo que a cada sospechoso concierne es su propio interés. Bajo estas condiciones ¿ Que harían los criminales ?

El juego bimatriz queda determinado por :

SOSPECHOSO I / SOSPECHOSO II	confiesa	no confiesa
confiesa	(-5, -5)	(0, -20)
no confiesa	(-20, 0)	(-1, -1)

Consecuentemente:

$$A = 14 > 0$$

$$a = -1$$

$$\alpha = -\frac{1}{14} < 0$$

Las situaciones admisibles para el jugador I son de la forma (1, y)

Las situaciones admisibles para el jugador II son de la forma (x, 1)

La única situación en equilibrio para este juego es por tanto (1,1) en la cual cada jugador confiesa. Y así cada jugador sufre una condena de 5 años ver la figura B.3.1

Por otro lado es evidente que la situación (o,o), donde cada jugador escoge su segunda estrategia pura y donde cada jugador obtiene 1 año de prisión es muy inestable: Si uno de los jugadores cambia su propia estrategia arbitrariamente entonces el pago para el jugador aumenta. Y es donde se presenta el dilema.

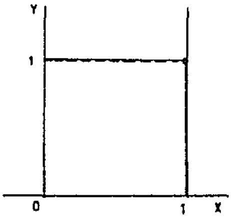


fig. B.3.1.

B.4 Juegos no cooperativos con dos estrategias puras para cada uno

Las simplificaciones que se originan para el caso en que cada jugador tiene solamente dos estrategias puras puede ser utilizado en el estudio de juegos con un número finito pero arbitrario de jugadores.

Consíderese un juego no-cooperativo de suma general

$$\Gamma = \langle I \quad \{S_i\}_{i\in I} \{E_i\}_{i\in I} \rangle$$

En el cual $S_i = \{1,2\}$ para todo $i \in I$. En este caso toda estrategia mixta para el jugador i está completamente descrita por la probabilidad x_i de elegir su la. estrategia pura. Por tanto, el conjunto Σ_i de todas las estrategias para el i-ésimo jugador puede ser representado como el segmento [0, 1] y el conjunto de todas las situaciones en estrategias mixtas como el cubo unitario n-dimensional. Situaciones en estrategias puras obviamente corresponden a los vértices de este cubo.

Cada vértice del cubo puede ser representado como una n-ada de unos y dos. A fin de identificar un vértice en el conjunto de todos los vértices, es suficiente espesificar el conjunto de todos los jugadores quienes eligen su la. estrategia pura en la situación correspondiente al vértice.

La descripción del conjunto de todas las situaciones admisibles para el jugador i en el juego Γ :

Escójase un arbitrario $K^i \subset 2^{I-i}$ (donde I-i es el conjunto excluyendo i) y sea (α_i , K^i) la situación en la cual el jugador i escoge su α_i estrategia pura (allí es o una de dos ($\alpha_i = 1$ ó $\alpha_i = 2$), los jugadores perteneciendo al conjunto K^i eligen su la. estrategia pura y todos los restantes seleccionan la segunda.

Ahora sea σ una situación arbitraria en estrategias mixtas y denotemos por x_j la probabilidad de elegir su la. estrategia para cada $j \in I - i$

$$\sigma(K') = \prod_{j \in K'} x_j \prod_{\substack{j \in K' \\ j \neq i}} (1 - x_j)$$

Y también

$$E_i(\sigma) = x_i \sum_{K'} E_i(1, K')\sigma(K') + (1 - x_i) \sum_{K'} E_i(2, K')\sigma(K')$$

Si la situación σ es admisible para el jugador i, entonces las desigualdades $E_i(\sigma \| \alpha_i) \leq E_i(\sigma)$ $(\alpha_i = 1,2)$ son satisfechas e inversamente.

Sustituyendo los valores de las funciones de pago $E_i(\sigma \| \alpha_i)$ y $E_i(\sigma)$

$$\sum_{K'} E_i(\alpha_i, K')\sigma(K') \leq x_i \sum_{K'} E_i(1, K')\sigma(K') + (1 - x_i) \sum_{K'} E_i(2, K')\sigma(K')$$

Sustituyendo los valores $\alpha_i = 1,2$ en la parte izquierda de esta desigualdad se tiene :

$$(1 - x_i) \sum_{K'} E_i(1, K')\sigma(K') \leq (1 - x_i) \sum_{K'} E_i(2, K')\sigma(K') \qquad \text{B.4.2}$$

$$x_i \sum_{K'} E_i(1, K')\sigma(K') \geq x_i \sum_{K'} E_i(2, K')\sigma(K') \qquad \text{B.4.3}$$

Para $x_i = 0$ la desigualdad B.4.3 se satisface automáticamente y la otra se reduce a :

$$\sum_{K'} E_i(1, K')\sigma(K') \leq \sum_{K'} E_i(2, K')\sigma(K') \qquad \text{B.4.4}$$

Para $x_i = 1$ la situación es simétrica y queda igual.

Denotemos por $A^i_<$ el conjunto de combinaciones de estrategias para los jugadores I - i tales que las situaciones de la forma $(1, \sigma^i)$ donde $\sigma^i \in A^i_<$ y la desigualdad B.4.4 es estrictamente satisfecha. Por $A^i_=$ el conjunto de combinaciones de estrategias tales que para las correspondientes situaciones B .4.4 se obtiene la igualdad. Y por $A^i_>$ el conjunto de todas las combinaciones restantes.

Se sigue de la discusión anterior que las situaciones admisibles para el jugador i son todas las situaciones de la forma :

$$(2, \sigma^i) \text{ donde } \sigma^i \in A^i_< \quad (1, \sigma^i) \text{ donde } \sigma^i \in A^i_> \qquad \text{B .4.5}$$

Y también todas las situaciones de la forma :

$$(x_i, \sigma^i) \text{ para toda } x_i \in [0, 1] \text{ y } \sigma^i \in A^i_= \qquad \text{B .4.6.}$$

Haciendo un análisis de cada elemento presentado antes se tiene :

$I = \{1,2,3\}$ $\qquad \sigma(K^i) = \prod_{j \in K^i} x_j \prod_{\substack{j \notin K^i \\ i \neq j}} (1 - x_j)$

K^1 :

$K_1^1 = \{2,3\}$	$\sigma(K_1^1) = x_2 x_3$	$E_1(1, K_1^1) = 0$	(1,1,1)
$K_2^1 = \{2\}$	$\sigma(K_2^1) = x_2(1-x_3)$	$E_1(1, K_2^1) = 0$	(1,1,2)
$K_3^1 = \{3\}$	$\sigma(K_3^1) = x_3(1-x_2)$	$E_1(1, K_3^1) = 0$	(1,2,1)
$K_4^1 = \emptyset$	$\sigma(K_4^1) = (1-x_2)(1-x_3)$	$E_1(1, K_4^1) = 0$	(1,2,2)

Por consiguiente :

$$\sum_{K^1} E_1(1, K^1)\,\sigma(K^1) = (1-x_2)(1-x_3)$$

y como:

$E_1(2, K_1^1) =$	(2,1,1)
$E_1(2, K_2^1) = 0$	(2,1,2)
$E_1(2, K_3^1) = 0$	(2,2,1)
$E_1(2, K_4^1) = 0$	(2,2,2).

$$\therefore \qquad \sum_{K^1} E(2, K^1)\,\sigma(K^1) = 2x_2x_3$$

La desigualdad B.4.4 para el jugador I se reduce en este juego a

$$(1 - x_2)\ (1 - x_3) \leq 2\, x_2\, x_3 \qquad \text{o bién} \qquad (1 + x_2)\ (1 + x_3) \geq 2$$

B.5 Falsa publicidad

Tres firmas (jugadores 1,2 y 3) ponen 3 artículos en el mercado para complacer a una cierta clase de compradores oconsumidores a quienes les agradaría comprar ese artículo en temporada de Navidad. Los consumidores obtienen la información de la mercancía de un comercial televisivo y cada firma publica su propio producto como el mejor. Cada firma tiene dos estrategias de publicidad :

1) Durante la programación de la mañana y

2) Durante la programación del atardecer

Si al menos dos firmas promueven su producto simultáneamente como el mejor, los consumidores sofisticados calificarán el mensaje como falso y no comprarán el producto. La firma que capture el auditorio de la mañana, ganará una unidad de utilidad en ventas y si se anuncia en la noche de manera única la utilidad en ventas será de 2 unidades.

El cubo de situaciones para este juego con los pagos para los jugadores (calculadas de las reglas del juego) para situaciones en estrategias puras en los vértices del cubo se presentan en la figura .5.1

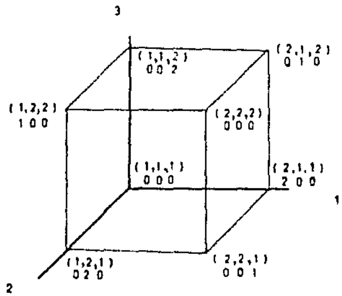


FIG. B.5.1.

Haciendo una tralsación de ejes en la ecuación anterior se observa el comportamiento de la gráfica para $x_2 \ x_3 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.

La cual es una hipérbola equilátera.

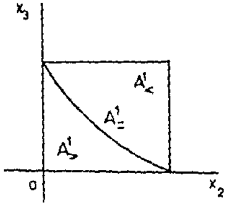


Fig. B.5. 2.

Por tanto el conjunto G_1 de todas las situaciones admisibles para el jugador I consiste de :

a) Situaciones de la forma $(0, x_2, x_3)$ donde $(x_2, x_3) \in A^1_<$

b) Situaciones de la forma (x_1, x_2, x_3) donde $(x_2, x_3) \in A^1_=$ y x_1 arbitraria

c) Situaciones de la forma $(1, x_2, x_3)$ $(x_2, x_3) \in A^1_<$.

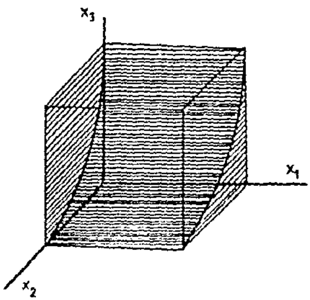


FIG.B.5. 3.

Los conjuntos $\mathfrak{G}_2$ y $\mathfrak{G}_3$ de todas las situaciones admisibles para los jugadores 2 y 3 son obtenidos con permutaciones adecuadas de las coordinadas y el conjunto $\mathfrak{G}_r$ de todas las situaciones en equilibrio en este juego es determinado por la intersección.

$$\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_3 = \mathfrak{G}_r$$

La descripción de esta intersección geométricamente es: Primero para puntos interiores del cubo pertenecientes a $\mathfrak{G}_r$. Obviamente estos puntos son los interiores a cada $\mathfrak{G}_i$. Esto significa que todas las coordenadas son positivas y satisfacen las ecuaciones :

$$(1 + x_2)\ (1 + x_3) = 2 \qquad (1 + x_3)\ (1 + x_1) = 2 \qquad (1 + x_2)\ (1 + x_2) = 2$$

Multiplicando estas tres ecuaciones se obtiene

$$(1 + x_1)\ (1 + x_2)\ (1 + x_3) = \sqrt{8}$$

De donde : $\quad 1 + x_1 = \sqrt{2} \quad ; \quad 1 + x_2 = \sqrt{2}, \quad 1 + x_3 = \sqrt{2}$

Y consecuentemente :

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{2} - 1 \qquad (\text{y como } x_1, x_2, x_3 > 0)$$

Se toma la raiz de 2 positiva :

Puntos de $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ pertenecientes a las caras del cubo son localizados sobre las diferentes pares de caras opuestas, el interior de las diferentes caras del cubo son disjuntas por pares y así en este caso no hay situaciones de equilibrio correspondientes a los puntos interiores fuera de la ya encontrada.

Finalmente cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ contiene 6 aristas del cubo junto con los vértices localizados en estas aristas los cuales se muestran en la figura y que forman parte de las situaciones de equilibrio.

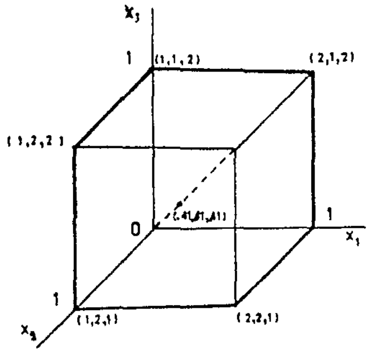


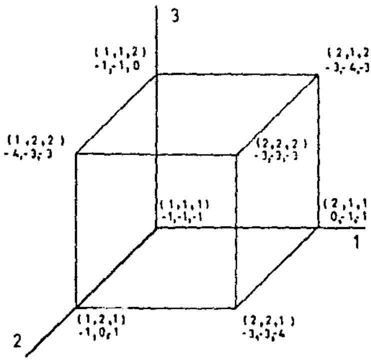
fig.B.5.4.

B.6 Preservación de la ecología

Considérese que cada una de tres empresas (jugadores 1, 2 y 3) usan agua de un cierto recurso natural (digamos un lago) para propósitos de producción cada empresa tiene dos estrategias :

1) Construir un dispositivo químico de purificación de las aguas residuales
2) O arrojar de regreso el agua sin purificación. Se considera que el recurso y los procesos tecnológicos son tales que si una empresa regresa el agua al lago, esta acción no afectaría sustancialmente la calidad del agua del lago y ninguna pérdida ocurriría para las empresas. No obstante, si al menos dos usuarios derraman el líquido de regreso al lago, cada uno de los tres usuarios sufriría una pérdida de tres unidades. El costo del dispositivo químico de purificación del agua es estimado en una unidad por empresa.

El cubo de situaciones por el juego, el cual indica en cada vértice la estrategia empleada por cada jugador y su correspondiente pago, se muestra en la figura B.6.1.



Las relaciones   para el jugador $i = 3$ en este caso se convierten:

$$-x_1x_2 - x_1(1-x_2) - (1-x_1)x_2 - 4(1-x_1)(1-x_2) \leq 3x_1(1-x_2) - 3(1-x_1)x_2 - 3(1-x_1)(1-x_2)$$

Simplificando y agrupando términos se obtiene :

$$(1 - 3x_1)(1 - 3x_2) \geq 3x_1x_2$$

Donde $A^3_=$ es una hipérbola en el cuadrado unitario y el conjunto de todas las situaciones admisibles para el jugador 3 se ven en la figura B.6.2 y B.6.3.

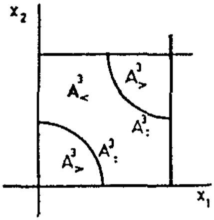
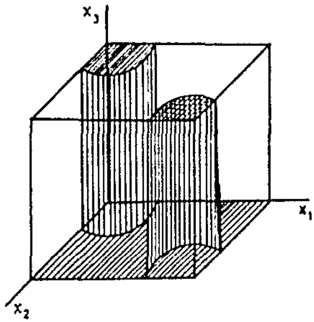
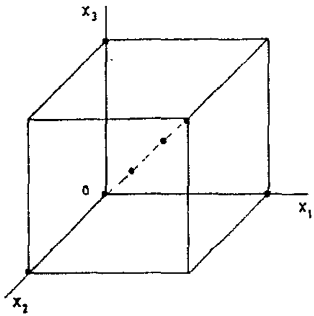


fig.B.6.2.

fig. B.6.3.



Los conjuntos de situaciones admisibles para los otros dos jugadores son construidas análogamente. La intersección de los conjuntos de situaciones admisibles para cada uno de los jugadores de el conjunto de situaciones en equilibrio del juego; este conjunto consiste de puntos aislados como se indica en la figura I.6.4



Nótese que a la situación de equilibrio ecológicamente irresponsable, en la cual todas las empresas contaminan el lago. Existen también otras dos situaciones en equilibrio simétricas mas aceptables desde el punto de vista ecológico.

Estas son:

$$(1/(3+\sqrt{3}),\ 1/(3+\sqrt{3}),\ 1/(3+\sqrt{3}))$$

$$(1/(3-\sqrt{3}),\ 1/(3-\sqrt{3}),\ 1/(3-\sqrt{3}))$$

nálisis más cercano mostrará que no es así. En efecto la coalición $|2,3|$ ahora se convierte en casi imposible de formar, a menos que haya alguna dificultad externa que complique la comunicación entre 1 y 3. Ya que si la coa-

lición $|1,3|$ se forma, cada uno gana una unidad lo cual hace que 2 este en una peor situación. En efecto, una de las dos coaliciones posibles en las que él se puede juntar; son muy inestables. Sin embargo él puede remediar la situación dándole a 3 un pago colateral de 0.1 unidades,(asumiéndose que tal cosa se puede hacer). Pero esto reduce el juego, al sentido previo.

El ejemplo anterior puede servir para ilustrar, la importancia de los pagos colaterales del juego y también la necesidad de algún tipo de estabilidad entre los diferentes pagos en una solución.

Por consiguiente asúmase la existencia de una comodidad linealmente transferible. La teoría asi desarrollada basada en esta hipótesis se la llama <u>teoría colateral de pagos</u>.

En esta teoría colateral de pagos, las funciones de utilidad para los varios jugadores puede ser elegida de tal forma que la tasa de transferencia de utilidad sea 1:1

Esto significa que si un subconjunto S (coalición) de los jugadores, puede obtener una utilidad total de v. Esta utilidad puede ser dividida entre los miembros de S de cualquier forma posible.

JUEGO N-PERSONAL CON FUNCION CARACTERISTICA.

C.1.1. Definición. Para un juego n-personal, se denota $N=\{1,2,\ldots,n\}$ el conjunto de jugadores. Cualquier subconjunto de N (incluyendo N mismo y todos los subconjuntos de un elemento) , se le llama COALICION.

C.1.2. Definición. Por la FUNCION CARACTERISTICA de un juego n-personal, se entiende a una función v definida en los subconjuntos de N. Tomando valores reales, la cual asigna a cada S N el valor maximín del juego bipersonal jugado entre S y N-S, considerándose que estas dos coaliciones se forman.

Así que v(S) es la cantidad de utilidad que los miembros de S pueden obtener del juego, siempre que los restantes jugadores lo permitan. De esta última definición se sigue que $v(\emptyset)=0$ C.1.

Ahora si S y T son coaliciones disjuntas , es claro que si unen sus fuerzas pueden conseguir más que si actuan de manera aislada.

Por lo cual se tiene la propiedad SUPERADITIVA O SUPERADITIVIDAD.

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad \text{si } S \cap T = \emptyset. \qquad \text{C.2.}$$

Ahora la esencia de los juegos n-personales no es la aleatorización; sino que es la formación de coaliciones. Por consiguiente se tratara no de la forma normal , sino de la función característica.

En efecto la función característica nos dice las capacidades de los diferentes coaliciones, como parte del juego.

C.1.3. Definición. Por un juego n-personal , en forma de función característica se entiende como una función v , definida en los subconjuntos de N la cual satisface las condiciones. C.1.1. y C.1.2.

Algunos autores que han estudiado juegos cooperativos, los tratan desde el punto de vista de la condición C.1.1 los cuales son llamados IMPROPIOS. Mientras que aquellos que satisfacen C.1.2 son llamados juegos PROPIOS.

Como se mencionó antes, la cantidad v(S) es el valor maximín del juego jugado entre S y N-S. Supóngase que la forma normal del juego es de suma constante (es decir la suma de la utilidad de todos los jugadores es siempre la misma). El juego entre S y N-S es entonces estrictamente competitivo, y se sigue que si es finito el teorema minimáx se satisface.
Asi se tendrá que:

$$v(S) + v(N-S) = v(N). \qquad C.3$$

Ahora que cuando algún tipo de entendimiento se haga factible, los jugadores tendrán una utilidad total v(N) para dividírsela en cualquier forma. Pero claro que ningún jugador aceptará menos del mínimo que él por si mismo puede obtener.

C.1.4. Definición. Una IMPUTACION (para el juego n-personal v), es un vector $x = (x_1, \ldots, x_m)$ satisfaciendo:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \qquad C.4$$

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad i \in N. \qquad C.5$$

Se usará la notación E(v) para el conjunto de todas las imputaciones de éste juego. A la primera propiedad se le conoce como racionalidad colectiva y a la segunda racionalidad individual.

C.1.5. Definición. Un juego v es Esencial si:

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}). \qquad C.6.$$

y es Inesencial en otro caso.

C.2. DOMINACION. EQUIVALENCIA ESTATEGICA. NORMALIZACION.

Dado un juego v , sean x,y dos imputaciones. Supóngase que los jugadores están confrontados por la elección entre x e y. ¿ Se puede encontrar algún criterio para determinar cuando una de éstas sea seleccionada en lugar de la otra?. Es claro que a menos que x=y, habrá algunos jugadores quienes prefieran x a y (aquellos i tales que $x_i > y_i$).

Puesto que los dos vectores son imputaciones , habrá también algunos jugadores quienes prefieran y a x.

Así que no es suficiente establecer que algunos jugadores preferirán x a y(ya que la suma de las componentes de cada una x ó y es v(N)).

Lo que es necesario es que los jugadores quienes prefieran x a y sean real y suficientemente fuertes para forzar la selección de x.

C2.7.Definición. Sea x e y dos imputaciones, y sea S una coalicion. Se dice que x domina a y vía S (notación: $x \succ_S y$), si:

$$x_i > y_i \ , \ \forall \ i \in S. \qquad C.7.$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S). \qquad C.8.$$

Se dice que x domina a y , si existe alguna coalición S tal que $x \succ_S y$.

Entonces la condición C.7 establece que los miembros de S todos prefieren x a y; la condición C.8 establece que ellos son capaces de obtener lo que x les da.

En cualquier juego la dominancia no puede ocurrir vía la coalición de 1-persona, o vía la gran coalición porque si $S=\{i\}$ y $x \succ_S y$ entonces, $y_i < x_i \leq v(\{i\})$. Pero en este caso y no es imputación. (No se cumple R.I.)

Si S = N y $x \in_S y$ entonces $x_i > y_i$ para toda $i \in N$ así que :

$$\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i = v(N). \qquad C.9$$

Entonces x no puede ser una imputación ya que no satisface la racionalidad colectiva.

Las siguientes dos definiciones son para analizar en cierto momento, los juegos con la misma estructura de dominación vía una transformación lineal.

C.2.8. <u>Definición</u>. Dos juegos n-personales u y v se dicen ser isomorfos si existe una función f 1-1, mapeando E(u) sobre E(v) de tal modo que para $x,y \in E(u)$ y $S \subset N$; $x \in_S y \rightarrow f(x) \in_S f(y)$.

C.2.9. <u>Definición</u>. Dos juegos n-personales u y v son S-equivalentes, si existe un número real positivo r , y n constantes reales $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tales que, para todo $S \subset N$.

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i \qquad C.10.$$

C.2.10. <u>Teorema</u>. Si u y v son S-equivalentes, entonces son isomorfos.

Es obvio que S-equivalencia es verdaderamente una relación de equivalencia de aqui la importancia de elegir un juego particular de cada clase de equivalencia. La cual nos conduce a la siguiente definición.

C.2.11. <u>Definición</u>. Un juego v se dice estar en normalizacion (0,1) si:

$$v(\{i\}) = 0 \text{ para toda } i \in N. \qquad C.11.$$

$$v(N) = 1. \qquad C.12.$$

C.2.12. Teorema. Si u es un juego esencial, es S-equivalente a exactamente un juego en normalización (0,1).

Resumiendo lo anterior en lo siguiente:

El conjunto de juegos n-personales en normalización (0,1) es tal que.

$$v(\theta) = 0. \qquad \text{C.1}$$

$$v(\{ i \}) = 0 \text{ para toda } i \quad N. \qquad \text{C.11.}$$

$$v(N) = 1. \qquad \text{C.12.}$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ si } S \cap T = \theta. \qquad \text{C.2.}$$

Si además el juego es de suma constante, se tiene la condición adicional

$$v(N-S) = v(N) - v(S). \text{ Para toda } S \subset N. \qquad \text{C.3.}$$

Un juego v se dice ser simétrico si v(S) depende solamente del número de elementos de S.

C.3. EL CORE. CONJUNTOS ESTABLES.

C.3.13. Definición. El conjunto de todas las imputaciones no dominadas para un juego v es llamado el CORE. La notación para el core es C(v).

C.3.14. Teorema. El core de un juego v es el conjunto de todos los n-vectores x satisfaciendo:

$$\sum_{i\in S} x \geq v(S) \text{ para toda } S \subset N. \qquad \text{C.13.}$$

$$\sum_{i\in N} x = v(N). \qquad \text{C.14.}$$

Este teorema muestra que C(v) es un conjunto convexo cerrado(es caracterizado por un conjunto de desigualdades lineales desligadas). Esto es lo más interesante ya que la teoría económica clásica realmente da el core como una solución a más problemas de teoría de juegos. Cualquier imputación en el core es estable, en este no hay imputación con ambas cosas ; el deseo y el poder para cambiar el resultado del juego.

Naturalmente, el core puede contener más de un punto, lo cual simplemente significa que más de un resultado es estable. Una dificultad mayor con el core, es que puede no existir(es vacío).

El siguiente teorema nos informa acerca de esto.

C.3.15. Teorema. Si v es un juego esencial de suma constante, el core $C(v) = \emptyset$

C.3.16. Ejemplo. El jugador 1 (un vendedor) tiene un caballo el cual es inútil para él a menos que él pueda venderlo. Los jugadores 2 y 3 (compradores), evaluan el caballo en 90 y 100 respectivamente.

Si 1 vende el caballo a 2 a un precio x, él tendrá un beneficio efectivo igual a x, mientras que el beneficio para 2 es 90-x. El beneficio total de la coalición 1,2 es entonces 90. Así que :

$$v(\{1,2\}) = 90.$$

$$v(\{1,3\}) = 100.$$

Por otro lado un solo jugador, o los dos jugadores juntos; no obtienen ningún beneficio.

$$v(\{i\}) = v(\{2,3\}) = 0 .$$

Finalmente la coalición de los tres jugadores no puede hacer ninguna mejoría, que asignar el caballo al jugador 3 (con posiblemente algunos pagos colaterales, los cuales no cambian la cantidad total de la utilidad). Así que:

$$v(\{1,2,3\}) = 100.$$

Se observa de esto que el core consiste de todos los vectores (x_1, x_2, x_3) que satisfacen;

$$x_1 + x_2 \geq 90,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$$
$$x_1 + x_3 \geq 100,$$

Esto implica que $x_1 \geq 90$, $x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 100$, $x_3 \geq 0$.

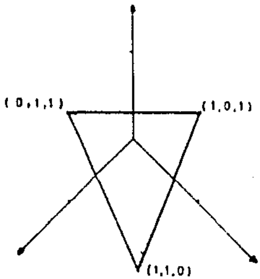
Por tanto:

$$C(v) = \{ (t, 0, 100-t) \mid 90 \leq t \leq 100 \}.$$

Heurísticamente, esto dice que el jugador 3 comprará el caballo a un precio de por lo menos 90. El jugador 2 es depreciado del mercado pero no antes de ofrecer al menos 90.

C.3.18. Ejemplo. Supóngase que A,B,C; son tres jugadores en un juego tripersonal en el que cualquier coalición con dos o tres jugadores puede obtener 2 unidades, un jugador solo no consigue nada. Este juego tiene muchas soluciones (un numero infinito). Pero considérese dos de ellas.

La primera solución, que consiste solamente en tres imputaciones: (1,1,0);(1,0,1) y (0,1,1), se indica en el diagrama.



Para demostrar que estas tres imputaciones, tomadas en conjunto son realmente una solución, deben comprobarse dos cosas:

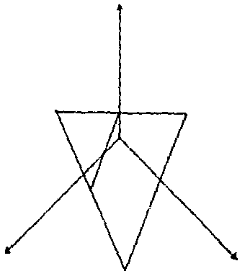
(1). No debe haber dominio entre imputaciones en la solución y,

(2). Cada imputacion fuera de la solución debe ser dominada por una imputación dentro de ella.

La primera es fácil de ver, la segunda se tiene ya que una imputación fuera de la solución, debe haber dos jugadores que obtengan menos de 1. Esto se sigue del hecho de que ningún jugador obtiene un pago negativo, y la suma de los pagos es 2 . Así, este pago estaría dominado por el pago en la solucion en la que ambos reciben 1 .

Los dos jugadores que originariamente recibieron menos de 1 estarían desde luego en la coalición.

Otra solución consiste en todas las imputaciones en los que un jugador recibe 1/2. La figura senala tal solución.



La primera solución puede ser interpretada del siguiente modo: en cada caso dos jugadores se unirán; dividirán 2 por igual y, no dejarán nada para el tercer jugador (sin embargo nada se dice acerca de cuales dos se unirán). También son los más eficientes en el sentido de que la ganancia por jugador es 1 , mientras que en una coalición de tres la ganancia por jugador sería de 2/3.

En la segunda solución (una solución discriminatoria) , se unen dos jugadores, dan al tercer jugador algo menos que su parte justa de 2/3, y toman el resto para ellos, que jugadores se unen, yqué se da al tercer jugadon,,, viene determinado por factores tales como tradición, caridad,temor de una revolución,etc. Una vez que se determina, qué se da a un cierto jugador, el juegodegenera en uno esencialmente bipersonal de regateo; con el resultado dependiente de la personalidad de los jugadores,y un tanto indeterminado.

C.4. COLECCIONES BALANCEADAS.

Ahora se debe determinar la estructura de los juegos n-personales en los que exista el core.

Supóngase que v y w tienen cores no vacíos, con $x \in C(v)$; $y \in C(w)$. Se puede demostrar que:

$$rx + sy \in C(rv + sw) \text{ con } r,s \text{ escalares no negativos.}$$

Como los cores C(v) y C(w) son conos convexos entonces C(rv + sw) es un cono convexo.

Como $C(v) \neq \emptyset$ entonces el programa lineal:

$$\text{P.L.} \quad \text{Mín } \sum_{i=1}^{n} x_i = z \qquad \text{C.15.}$$

sujeto a,

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) \text{ para toda } S \subset N. \qquad \text{C.16.}$$

Tiene un mínimo $z^* \leq v(N)$. Pero en tal caso algún mín x está en el core. Inversamente, si $x \in C(v)$ ent. satisface C.16.y además $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Así que el mín debe ser $z^* \leq v(N)$

Considérese el programa dual a P.L.

$$\text{P.D.} \quad \text{Máx } \sum_{S \subset N} y_S \, v(S) = q \qquad \text{C.17.}$$

sujeto a

$$\sum_{\substack{S \\ i \in S \subset N}} y_S = 1 \text{ para toda } i \in N. \qquad \text{C.18.}$$

$$y_S = 0 \text{ para toda } S \subset N.$$

Ambos programas primal y dual son factibles, y así el mín z^* debe igualar al máx q^*. Entonces $C(v) \neq \emptyset$ sí y sólo si el máx $q^* \leq v(N)$. Lo cual origina el siguiente resultado.

C.4.19. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que el juego v tenga un core no vacío; es que para todo vector no negativo $(y_S)_{S \subset N}$ satisfaciendo se tenga,

$$\sum_{S \subset N} y_S \; v(S) \leq v(N). \qquad \text{C.19.}$$

C.4.20. Definición. Sea $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ una colección de subconjuntoa no vacía de $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Se dice que $\mathcal{C}$ es N-balanceada (o simplemente balanceada cuando no haya confusión para especificar N), si existen m números positivos $y_1, \ldots, y_m$ tales que , para cada $i \in N$,

$$\sum_{\substack{j \\ i \in S_j}} y_j = 1. \qquad \text{C.20.}$$

Así $y = (y_1, \ldots, y_m)$ es el vector de balanceo para $\mathcal{C}$; los y son coeficientes de balanceo.

Ejemplos. C.4.20.

a). La colección N es claramente balanceado, y cualquier partición de N es balanceada. Los coeficientes de balanceo aquí son todos 1.

b). Sea $N = \{1,2,3\}$ entonces la colección;

$$\mathcal{C} = \{ \{1,2\} ; \{1,3\} ; \{2,3\} \}$$

Es balanceado, con vector de balanceo (1/2,1/2,1/2).

El caso mas general, para cualquier N; es la colección de todos los conjuntos $\binom{n}{s}$ con S elementos es balanceado; con todos los coeficientes iguales a $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$

c). Sea $N = \{1,2,3,4\}$ entonces,

$$\mathcal{C} = \{ \{1,2\} ; \{1,3\} ; \{1,4\} ; \{2,3,4\} \}$$

es balanceado, con vector de balanceo y = (1/3,1/3,1/3,2/3).

C.4.21. Teorema. La unión de colecciones balanceadas es balanceada.

C.4.22. Lema. Sea, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ colecciones balanceadas tales que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ pero $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$. Entonces existe una colección balanceada $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \mathcal{D}$ pero $\mathcal{B} \neq \mathcal{D}$. Además, el vector de balanceo para $\mathcal{D}$ no es único.

C.4.23. Definición. Una colección balanceada minimal es una colección balanceada la cual es tal que ninguna subcolección propia es balanceada.

C.4.24. Teorema. Cualquier colección balanceada es la unión de colecciones balanceadas minimales.

C.4.25. Teorema. Una colección balanceada tiene un único vector de balanceo sí y sólo si es minimal.

C.4.26. Teorema. Los puntos extremos del programa dual P.D. son los vectores de balanceo de las colecciones balanceadas minimales.

C.4.27. Corolario. Una colección N-balanceada minimal tiene a lo más n conjuntos.

C.4.28. Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que el juego n-personal v tenga un core no vacío, es que para toda colección N-balanceada minimal $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ con vector de balanceo $y = (y_1, \ldots, y_m)$ se cumpla:

$$\sum_{j}^{m} y_j \, v(S_j) = v(N). \qquad \text{C.21.}$$

C.4.29. Ejemplos.

Sea $N = \{1,2,3\}$. Aparte de las particiones hay solamente una colección balanceada minimal, a saber:

$$\mathcal{C} = \{\{1,2\};\{1,3\};\{2,3\}\}$$

Con vector de balanceo (1/2,1/2,1/2). Entonces un juego v, tripersonal tiene un core no vacío, sí, y sólo si;

$$v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) + v(\{1,3\}) = 2\, v(N).$$

b). Sea $N = \{1,2,3,4\}$. Las colecciones N-balanceadas minimales diferentes de las particiones son:

i). $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\};\{1,2,4\};\{1,3,4\};\{2,3,4\}\}$.

$y = (1/3,1/3,1/3,1/3)$.

ii). $\mathcal{C} = \{\{1,2\};\{1,3\};\{1,4\};\{2,3,4\}\}$.

$y = (1/3,1/3,1/3,2/3)$.

iii). $\mathcal{C} = \{\{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{4\}\}$

$y = (1/2,1/2,1/2,1)$.

iv). $\mathcal{C} = \{\{1,2\}; \{1,3,4\}; \{2,3,4\}\}$.

$y = (1/2,1/2,1/2)$.

Aparte de estas colecciones, otras pueden ser obtenidas por permutación, dando un total de 15; una del tipo i; cuatro del tipo ii y iii; seis del tipo iv. Si se supone el juego en forma de normalización (0,1) y superaditividad nos da un sistema de desigualdades:

i). $v(\{1,2,3\}) + v(\{1,2,4\}) + v(\{1,3,4\}) + v(\{2,3,4\}) \leq 3$

ii). $v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{1,4\}) + 2\,v(\{2,3,4\}) \leq 3$

iii). $v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leq 2$

iv). $v(\{1,2\}) + v(\{1,3,4\}) + v(\{2,3,4\}) \leq 2$.

Por superaditividad iv implica iii. Teniéndose once desigualdades; una del tipo i; cuatro del tipo ii y seis del tipo iv, las cuales deben ser satisfechas por v, para que tenga un core no vacío.

En el caso en que v sea un juego simétrico 4-personal con

$$v(S) = v_s$$

Donde s es la cardinalidad de S, estas desigualdades se reducirán a una desigualdad:

$$v_3 \leq 3/4.$$

BIBLIOGRAFIA

BASICA.

1. A POLLUTION GAME. A Theoretical and experimental study. DENIS BAYART Y BERTRAND COLLOMB, (ECOLE POLYTECHNIQUE.) JEAN PIERRE PONSARD, (ECOLE POLYTECHNIQUE AND CESMAP).
2. Equilibrium points of Bimatrix Games. C.e. Lemke and J.T.Howson Jr. SIAM J. Aplied, Math. Vol. 12,#2,Jun 1964. Pags 413-423.
3. GAME THEORY. Mathematical Models of Conflict. A. J. Jones. Ed. Ellis Horwood Limited.
4. GAME THEORY 2 Ed. G. Owen. ED. Academic Press 1982.
5. GAME THEORY (Aplications of Mathematics 7). Voroeb'ev. Ed. Springer Verlag.
6. INRODUCION A LA TEORIA DE JUEGOS. E.S. Venttsel. Ed. Limusa-Wiley.
7. NON COOPERATIVE GAMES. J.Nash. Annals of Math. Vol. 54 #2 Sept. 1951.
8. THE THEORY OF GAMES AND MARKETS . J. Rosenmüller. Institute of Math. Economics. University of Bielefeld. Bielefeld, Fed.Rep. Germany. North-Holland Publishing Company (1981). Amsterdam-New York - Oxford.
9. THEORY OF GAMES AND STATISTICAL DECISIONS .D. Blackwell and M.A.Girshick Dover Publications Inc. New York.

COMPLEMENTARIA.

9. AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF NUMBERS. G.H. Hardy and E.M.Wright. Ed Oxford at the Claredon Press.

10. CURSO DE ECONOMIA MODERNA. Paul A. Samuelson. Ed. Aguilar.

11. DE LA GUERRA I,II,III. K. VON Clausewitz. Ed. Diógenes

12. ECONOMICS OF ENVIRONMENTAL QUALITY BY Edwin S. Mills (Princeton University) 1978, ED. W.W. Norton & Company, Inc.

13. ENVIROMENTAL SCIENCE: An Introduction/ G. Tyler Miller Jr.. Wadsworth Publishing Company. 1985.

14. ESTADISTICA NO PARAMETRICA. Aplicada a las Ciencias de la Conducta. S. Siegel. Ed. Trillas.

15. GRAPH THEORY. B Bollobas. ED. Springer Verlag.

16. J. VON NEUMANN Y N. WIENER 1,2, S. J. Heims. Biblioteca Salvat.

17. TEORIA MICROECONOMICA. C.E. Fergusson y J.P.Gould. F.C.E.

18. THE EFFECT OF TWO INCENTIVE SCHEMES UPON THE CONSERVATION OF SHARED RE SOURCE BY FIVE PERSON GROUP. F.D. Rubenstein, (New York Univeesity) G. Watzke (Boston UNiversity Overseas Program, Brussela, Belgium). R.H. Doktor (State University of New York at Binghamton) and J. Dana (Stanford University). Organizational Behavior andHuman Performance. 1975 (Jun) Vol. 13(3). 330-338.

19. TOPOLOGY. J. Dugunyi. Allyn and Bacon Inc.

20. RECURSIVE GAMES. ANNALS OF MATH. STUDIES 28. Contributions of the theory of Games, Vol. II Edited by H.W. Khun and A.W.Tucker. Princeton University Press(1957). By H. Evverett.

21. ON THE CORE OF AN ECONOMIC SYSTEM WITH EXTERNALITIES. BY Lloyd S. Shapley and M. Shubik. The American Economic Review.

22. On a Generalization of the Lemke- Howson Algorithm to noncooperative N- Person Games By J. Rossenmüller . SIAM J. Appl. Math. Vol. 21#1, July 1971. Universität Erlangen- Nurnberg, Erlagen, West Germany.