

01182

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

REVESTIMIENTO DE TUNELES: UN METODO DE ANALISIS.

*Pablo Lorenzo Sánchez Orth*

T E S I S

*Presentada a la División de Estudios de Posgrado de la*

*Facultad de Ingeniería*

*de la*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

*Como requisito para obtener el grado de*

MAESTRO EN INGENIERIA

*(Mecánica de Suelos)*

01182

*Ciudad Universitaria*

*(Junio 1988)*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

1. - INTRODUCCION
  
2. - PROCEDIMIENTO DE ANALISIS DEL REVESTIMIENTO DE TUNELES Y ALCANTARILLAS
  - 2.1 Valuación de las cargas sobre el revestimiento con métodos semi-empíricos
  
  - 2.2 Diseño del revestimiento de túneles y alcantarillas usando la teoría de la elasticidad
  
3. - PROCEDIMIENTO ANALITICO
  - 3.1.- Método del elemento finito
  
  - 3.2.- Modelo para el revestimiento
  
  - 3.3.- Verificación del método
  
  - 3.4.- Condición de Carga externa
  
  - 3.5.- Condición de Descarga por excavación
  
4. - EFECTO DEL LA GEOMETRIA EN TUNELES Y ALCANTARILLAS
  - 4.1.- Sección elíptica
  
  - 4.2.- Elementos mecánicos de la Sección Herradura
  
  - 4.3.- Sección *Gota de Agua*

**5.- METODO DE ANALISIS**

**6.- CONCLUSIONES**

**Anexo A.- Solución elástica para el sistema suelo-soporte**

**Anexo B.- Teoría del Método del Elemento Finito**

**Anexo C.- Planteamiento de la matriz de Rigidez del elemento viga**

**Anexo D.- Manual del usuario del programa MEFPC**

## **1.-INTRODUCCION**

El desarrollo de los sistemas de transporte masivo, así como los sistemas de drenaje y agua potable de las grandes ciudades han provocado un impulso en las obras para la construcción de túneles y alcantarillas, en suelos de diferentes características.

La construcción de un túnel involucra los siguientes aspectos geotécnicos: la estabilidad del frente del túnel durante la construcción, las deformaciones inducidas por el tuneleo y la interacción entre el suelo y el soporte del túnel. La estabilidad de un túnel durante su construcción depende del procedimiento seguido para excavarlo y de las propiedades esfuerzos-deformación-resistencia del suelo. Durante la construcción de un túnel, el estado

de esfuerzos *in situ* se modifica debido al proceso de descarga que origina la excavación del mismo; en zonas urbanas es de vital importancia que los asentamientos que se inducen en la superficie, sean absorbidos por las estructuras aledañas al túnel, sin sufrir daño. El revestimiento de un túnel plantea un problema clásico de *interacción suelo-estructura*, en el que intervienen la rigidez del sistema *suelo-soporte*, las deformaciones que experimenta, así como las propiedades del suelo y del soporte.

La construcción de una alcantarilla involucra los siguientes aspectos geotécnicos: la estabilidad de los cortes que se realizan en el subsuelo, y la interacción del suelo y el soporte de la alcantarilla. La estabilidad de los cortes que se realizan en el terreno para construir una alcantarilla es un problema típico de estabilidad de taludes, donde intervienen la geometría de la excavación y las propiedades de resistencia y permeabilidad del suelo. También en este caso el revestimiento plantea un problema clásico de *interacción suelo-estructura*, donde intervienen las características geomecánicas del revestimiento, del subsuelo, y del relleno sobre la alcantarilla como un sistema *suelo-soporte*.

Esta tesis versa sobre el diseño de revestimientos para túneles

y alcantarillas en suelos firmes, de acuerdo con el procedimiento constructivo para excavar el túnel o para construir la alcantarilla, así como las características geométricas de las obras y las propiedades del sistema *suelo-soporte*; pero sin tomar en cuenta la influencia del tiempo en la variación de las presiones sobre el soporte, ni el efecto tridimensional en el frente de túnel, tampoco se consideran túneles en roca donde las cargas se transmiten al deslizarse bloques por las discontinuidades de los macizos rocosos.

Se utiliza el método del elemento finito para estudiar el problema de interacción *suelo-soporte* y a través de simulaciones numéricas se establece un procedimiento de análisis simplificado para el diseño de revestimientos para túneles y alcantarillas con secciones diferentes a la circular. De igual manera, se estudian las secciones geométricas óptimas que induzcan los momentos flexionantes menores en el revestimiento, y provoquen el menor cambio de esfuerzos normales y cortantes en el medio.

## 2. PROCEDIMIENTOS DE ANALISIS DEL REVESTIMIENTO DE TUNELES Y ALCANTARILLAS

### 2.1 Calculo de las cargas sobre los revestimientos con métodos semi-empíricos

Gran parte de los métodos para calcular las presiones sobre los revestimientos se han establecido intuitivamente, ideando mecanismos de falla e ignorando las deformaciones de los soportes que interactúan con el medio, por ejemplo los métodos semiempíricos de Terzaghi, Bierbäumer y Protodyakonov (Referencias 10 y 13).

El método semiempírico de Terzaghi define la carga sobre el revestimiento, como el peso de la masa de material que tendería a caer si no se colocará el soporte. Terzaghi analizó las superficies de falla que se desarrollan en un medio de extensión infinita, cuya ley de resistencia se establece por medio de la envolvente Mohr-Coulomb, y que descansa en una superficie horizontal rígida. Al ceder una parte de la superficie horizontal el suelo apoyado en ella tiende a descender y el medio a desarrollar el fenó-

meno de arqueo. El método se resume en las expresiones que determinan la altura desde la clave del túnel del suelo que gravitaría sobre el revestimiento, ignorando las deformaciones del medio y la presencia del soporte. Con la experiencia en varios tipos de suelos y rocas se calibró el método, estableciendo rangos para la altura de la zona de arqueo.

El método semiempírico de Protodyakonov desarrollado para materiales friccionantes, también parte del concepto de arqueo e ignora la presencia del soporte. Protodyakonov supuso que sobre la cavidad se desarrolla un arco triarticulado que limita al suelo que gravita sobre el revestimiento, y es tal que sobre la curva que lo define solo se presentan esfuerzos de compresión, estas hipótesis permiten definir la curva y establecer una expresión para calcular la altura de la zona de arqueo. El parámetro de la resistencia del suelo  $f$ , que interviene en el método se calibró con experiencias en cada tipo de suelo o roca.

El método de Bierbäumer se ha desarrollado para materiales friccionantes y es similar a los anteriores, pero ahora la carga de suelo o roca es el peso de la masa que se encuentra circunscrita en una parábola que gravita sobre el revestimiento. Las dimensiones

de la parábola se deducen al suponer superficies de falla rectas, así como las expresiones para calcular la altura de la zona de arqueamiento.

En la referencia 12 se presenta el detalle del planteamiento de estos métodos y otros similares, sus principales desventajas son: a) ignorar los desplazamientos y la rigidez del soporte, b) suponer superficies de falla y c) no considerar las propiedades esfuerzo-deformación del medio.

## 2.2 Diseño del revestimiento de túneles y alcantarillas usando la teoría de elasticidad

El campo deformativo elástico, en un túnel o en una alcantarilla, se determina en forma análoga a cualquier otro sistema hiperestático plano, siempre y cuando se ignore el efecto tridimensional de *medio domo* que en el frente del túnel incrementa las cargas en los tramos del revestimiento en la cercanía del frente. Se puede visualizar así el sistema *suelo-soporte* a través de curvas características como la que se presenta en la figura 2.2.1, donde se observa que la carga que recibe un soporte depende de su rigi-

dez, pues mientras más rígido sea el revestimiento menores deformaciones experimenta redistribuyendo el medio un menor gradiente de esfuerzos. El estado de esfuerzos en el suelo en contacto con el revestimiento es, en general anisotrópico, por lo que un soporte totalmente flexible se adaptará a ese estado de esfuerzos de tal manera que no desarrolle momentos flexionantes; por el contrario, un soporte infinitamente rígido soportará la totalidad de los esfuerzos en el medio sin deformarse, como se muestra en la figura 2.2.1 (Referencia 7).

Existen soluciones cerradas de la Teoría de elasticidad para el sistema *suelo-soporte* (Referencias 1, 8 y 11). Estas soluciones suponen que el revestimiento es circular, linealmente elástico y de sección constante, que el medio es homogéneo, isótropo, linealmente elástico, y de extensión infinita, que las cargas se aplican al revestimiento independientemente de la profundidad y que el problema es de deformación plana. Se consideran dos condiciones de carga; la correspondiente a los túneles que se denomina Descarga por Excavación (DE) y la correspondiente a las alcantarillas que se denomina Carga Externa(CE). Y aplican dos condiciones de frontera al permitir o no el deslizamiento en el contacto entre el re-

vestimiento y el medio.

En el Anexo A y en las referencias 8 y 11 se presenta una de las soluciones de la teoría de elasticidad para el sistema *suelo-soporte*, la cual usa los coeficientes de compresibilidad y flexibilidad para evaluar la rigidez relativa del sistema, estos factores son relaciones entre la rigidez del medio y la de un anillo circular de sección constante, se ha difundido su uso pues proporcionan algunas ventajas para estudiar la interacción entre el medio y el revestimiento, ya que su utilización es directa y su planteamiento sencillo. El factor de compresibilidad mide la rigidez a la extensión y se determina obteniendo la deformación diametral de un anillo sujeto a una presión uniforme dentro de un medio elástico, de tal manera que no se presentan cambios en su geometría. Se expresa según la ecuación:

$$C^* = \frac{E R (1-\nu^2)}{E_s A_s (1-\nu_s^2)} \dots\dots\dots (1.2.1)$$

donde:  $C^*$  es el factor de compresibilidad, E el módulo de elasticidad del medio, R el radio del anillo,  $\nu$  la relación de Poisson

del medio,  $E_s$  el módulo de elasticidad del soporte,  $A_s$  el área transversal del soporte, y  $\nu_s$  la relación de Poisson del soporte.

El factor de flexibilidad mide la rigidez relativa a la flexión del sistema *suelo-soporte*, y se determina al obtener la deformación diametral unitaria de un anillo que en un medio elástico está sujeto a un estado de esfuerzo cortante puro provocando el ovalamiento del círculo inicial, y se expresa según la ecuación:

$$F^* = \frac{E R^3 (1-\nu^2)}{E_s I_s (1-\nu_s^2)} \dots\dots\dots (1.2.2)$$

donde  $F^*$  es el factor de flexibilidad e  $I_s$  el momento de inercia de la sección.

En el Anexo A se presentan las fórmulas que se derivan para los elementos mecánicos en el revestimiento de acuerdo con las hipótesis mencionadas, y en función de los coeficientes de compresibilidad y flexibilidad, y en las referencias 8 y 11 el procedimiento para plantear las ecuaciones de equilibrio.

En la referencia 1 se presenta el análisis del problema bajo otro enfoque, y se incluye el planteamiento considerando un comportamiento del medio viscoelástico. Los resultados finales de ambos enfoques para las mismas propiedades suelo-soporte son equivalentes (Referencia 4).

### **3.-PROCEDIMIENTO ANALITICO**

Debido a las limitaciones de la teoría de elasticidad, para resolver el campo deformativo del sistema *suelo-soporte* en revestimientos con formas geométricas no circulares, o en medios con comportamientos no lineales, se desarrolló un programa de elementos finitos para analizar cualquier sección geométrica, en una computadora *personal IBM compatible*. El revestimiento se modela con elementos barra representando los grados de libertad de traslación y rotación, y el medio se simula con elementos isoparamétricos con ocho grados de libertad.

#### **3.1.- Método del Elemento Finito**

##### **3.1.1 Descripción general**

El método del elemento finito (MEF) es una poderosa herramienta que permite obtener soluciones aproximadas a problemas complejos, al discretizar el dominio de las variables que intervienen. La hidráulica, la electricidad, la dinámica, la estática, la con-

ducción de calor etc., plantean problemas donde la geometría, las condiciones de frontera o las acciones sobre el medio, etc., dificultan la solución directa de las ecuaciones que explican un fenómeno en particular. El método del elemento finito con la ayuda de un equipo de cálculo electrónico, nos permite conocer las incógnitas del sistema, planteado para un número finito de puntos del medio.

En esta tesis se aplica el método del elemento finito para resolver el problema de *interacción* entre el suelo y el revestimiento de un túnel o una alcantarilla, simulando el proceso de excavación o construcción.

El método consiste en discretizar el medio en un número finito de *elementos* de formas arbitrarias, interconectados en sus fronteras por *nodos* comunes a dos o más *elementos*, el conjunto se denomina *mall*a de *elementos*. El campo de desplazamientos en cada *elemento* se interpola usando una función polinomial, para poder calcular la matriz de rigideces del *elemento*. Las matrices de los *elementos* se ensamblan para obtener la matriz de rigidez del sistema. El vector de cargas se aplica en los *nodos*, y se plantean las

ecuaciones de equilibrio del sistema. Es importante señalar que el dominio infinitesimal de la variable se aproxima en un número finito de puntos localizados en los *nodos*, por lo que mientras más sean éstos mejor será la aproximación a la solución exacta.

Existen incontables tipos de *elementos*, sus mayores diferencias están en el número de *nodos* de cada uno y las características de la función polinomial que interpola las variables del medio dentro del *elemento*. Si el número de variables que intervienen en un *elemento* es el mismo que el número de coordenadas que lo definen, el *elemento* se denomina isoparamétrico; en el caso del cálculo de desplazamientos, las variables que intervienen son los grados de libertad presentes en el medio. Los *elementos* isoparamétricos se definen en coordenadas locales, lo que facilita su procesamiento, permite modelar lados curvos y formar *mallas* que van en un mismo arreglo de la gruesa a la fina.

Con objeto de que el programa de procesamiento electrónico del MEF optimizara la memoria interna de la computadora donde se llevaron a cabo todos los análisis, se eligió un *elemento* isoparamétrico plano de cuatro nodos y ocho grados de libertad. Además de que el *elemento* es de fácil formulación, se tienen experiencias

favorables en su uso en múltiples aplicaciones (Referencias 5 y 12), y permite modelar al suelo que rodea al revestimiento, interpolando los desplazamientos verticales y horizontales que constituyen dos de los más importantes grados de libertad del medio.

En la referencia 15 se presenta un modelo para estudiar el sistema *suelo-soporte* en rocas, donde las cargas se aplican al deslizarse bloques por las discontinuidades del macizo rocoso, el medio se modela con un conjunto de resortes con las propiedades esfuerzo-deformación de la roca. La limitación de este tipo de modelo es que el suelo no se modela como un medio continuo y es difícil establecer la rigidez de los resortes para un determinado caso.

### **3.1.2 Determinación de la matriz de rigidez**

La matriz de rigidez de una *mall*a de *elementos* se puede plantear aplicando el principio de la mínima energía potencial, el detalle del procedimiento se puede consultar en el anexo B. La suma de la energía potencial de un sistema elástico se puede expresar como:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_1^{\text{numel}} (d)^T [k] (d) - \sum_1^{\text{numel}} (d)^T (r) - (D)^T (P) \quad (3.1.2.1)$$

donde [k] es la matriz de rigidez de un elemento {d} sus desplazamientos, {r} la fuerzas internas de un elemento, {P} las cargas externas y {D} los desplazamientos totales del sistema. De acuerdo con el principio de la mínima energía potencial y llamando a la la matriz de rigidez global como;

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \dots \dots \dots (3.1.2.2)$$

donde, [B] se deriva a partir de la formulación de un elemento isoparamétrico (ver anexo B) y establece la relación entre sus desplazamientos y sus deformaciones, [E] es la matriz de las propiedades de elasticidad y V el volumen del elemento. Llamando {R} al conjunto de cargas del sistema y manipulando las ecuaciones (3.1.2.1) y (3.1.2.2) se puede formular la ecuación siguiente;

$$[K] \{D\} = \{R\} \dots \dots \dots (3.1.2.3)$$

la cual establece el equilibrio del sistema y proporciona al resolverla los desplazamientos totales del medio.

### 3.2 Modelo para el revestimiento

El revestimiento de un túnel o una alcantarilla se modela como un cilindro de pared gruesa o un cascarón delgado, pero se pueden obtener buenas aproximaciones usando un conjunto de vigas (con tres grados de libertad por nodo, dos desplazamientos y un giro), interconectadas para formar un anillo.

En este trabajo los elementos viga se usan para modelar el revestimiento, conectándose a través de sus grados de libertad de desplazamiento en  $x$  e  $y$  con los elementos isoparamétricos que modelan el suelo que rodea al soporte, logrando compatibilidad en desplazamientos horizontales y verticales para los dos tipos de elementos. Para tener una buena precisión del campo deformativo del sistema *suelo-soporte*, fue necesario usar mallas finas en el contacto entre los elementos viga y los elementos isoparamétricos, pues cada tipo de elemento posee diferente modo teórico de deformación.

La matriz de rigidez del elemento viga se determina por medio de los métodos energéticos clásicos, (ver Anexo C) y se expresa por medio de las siguientes ecuaciones;

$$[K] = \begin{bmatrix} F & G & H & -F & -G & H \\ G & P & Q & -G & -P & Q \\ H & Q & A & -H & -Q & B \\ -F & -G & -H & F & G & -H \\ -G & -P & -Q & G & P & -Q \\ H & Q & B & -H & -Q & A \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3.2.1)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{donde } S = A E / L & F = S l^2 + D m^2 \\ A = 4 E I / L & G = S m l - D m l \\ B = 2 E I / L & H = - C m \\ C = 6 E I / L^2 & P = S m^2 + D l^2 \\ D = 12 E I / L^3 & Q = C l \\ l = \cos \beta & m = \text{sen } \beta \\ \beta \text{ es el ángulo que forma la viga con} & \\ \text{el eje } x \text{ (eje de los desplazamientos } \mu \text{)} & \text{de las coordenadas globales} \end{array} \right\} \dots(3.2.2)$$

### 3.3. Verificación del método

#### 3.3.1 Verificación del programa elaborado

Para probar todo el programa se establecieron varios ejemplos, en los que se conocía de antemano la solución cerrada de la teoría de elasticidad. A continuación se presentan tres de los ejemplos que prueban los procedimientos del programa.

En la figura 3.3.1.1 se presenta el modelo de una viga en cantiliver formada por *elementos* finitos, así como las flechas calcula-

das con la teoría de elasticidad y con el programa del *MEF*. En la figura 3.3.1.2 se presenta la relación entre el número de grados de libertad de la malla con la que se lleva a cabo el análisis y la aproximación que se logra, se puede observar que a medida que el número de grados de libertad aumenta, la aproximación mejora, esta gráfica se formó con mallas cuyos *elementos isoparamétricos* eran cuadriláteros regulares. En la figura 3.3.1.3 se presenta una malla de *elementos finitos* donde se usaron triángulos y cuadriláteros para modelar la viga, los triángulos se formaron *deformando* cuadriláteros; la aproximación que se obtiene con este arreglo es inferior a la que se obtendría si se usaran solo cuadriláteros regulares, aún con el mismo número de grados de libertad, por lo tanto para este programa se recomienda usar solamente cuadriláteros que se asemejen lo más posible a formas regulares.

Como se verá más adelante, para poder modelar los procesos de descarga en el medio, es necesario conocer en algunos *elementos isoparamétricos* el producto de un campo deformativo determinado y la matriz de rigidez del *elemento*. Para probar esta capacidad del programa se usó la malla de *elementos finitos* de la figura 3.3.1.4 donde se presenta el vector de cargas calculado, al aplicar el pe-

so propio de cada elemento como única acción, y al multiplicar el campo deformativo obtenido por la matriz de rigidez del elemento, descargándolo.

En la figura 3.3.1.5 se presenta un marco formado por elementos viga y su sistema de cargas, se presentan también las reacciones obtenidas con la teoría de elasticidad o con el programa, pues el resultado es el mismo..

### 3.3.2 Condición de Carga Externa

Para modelar la condición de carga externa con el MEF y poderla comparar con la solución cerrada presentada en el Anexo A, se forma una *mall*a de elementos finitos que tenga las condiciones de frontera del medio (en un eje de simetría vertical los giros son nulos y en puntos *alejados* de la alcantarilla los desplazamientos horizontales son cero), y se aplican en los nodos de la frontera las cargas equivalentes al estado de esfuerzos en el centro del túnel. Solamente recordaremos que de acuerdo con la teoría de elasticidad la relación entre los esfuerzos verticales y horizontales iniciales es la siguiente;

$$k_o = \frac{\nu}{1-\nu} \dots\dots\dots (3.3.2.1)$$

En la tabla 3.3.2.1 se presenta la comparación entre el *MEF* y la solución para deslizamiento nulo del Anexo A, para el caso del momento en la clave del revestimiento. La malla de elementos finitos que se usó se presenta en la figura 3.3.2.1.. Se comprueba que para esta malla la diferencia entre ambos métodos es menor que 7%. En la figura 3.3.2.2 se ha graficado la aproximación que se logrará con cuatro diferentes *mallas* de elementos, cada una con un diferente número de grados de libertad que modelan tanto el medio como el revestimiento, se puede observar que a medida que el número de barras que modelan el soporte de la alcantarilla aumenta, mejora la aproximación del método, por lo que se recomienda para llevar a cabo análisis con el programa usar un mínimo de 10 barras modelando el revestimiento.

### 3.3.3 Condición de Descarga por Excavación

Para modelar la condición de descarga por excavación y poderla comparar con la solución cerrada de la teoría de elasticidad que se presenta en el Anexo A, es necesario simular el proceso de ex-

cavación del túnel antes de cargar el revestimiento. En el programa de computadora que se elaboró, el procedimiento para simular la excavación se llevó a cabo por etapas y fue el siguiente: se formó una *mall*a de elementos con las propiedades y las condiciones de frontera del medio antes de excavar el túnel y se determinaron las deformaciones de los *elementos* debidas a las cargas que les impone su peso propio, se eliminaron por etapas los *elementos* en el contorno interior del revestimiento, formando círculos concéntricos de *elementos* desconectados, sustituyéndolos por las cargas que se obtienen del producto de la matriz de rigidez del *elemento* por los desplazamientos acumulados de éste último, en la etapa de carga anterior. Fue necesario, a medida que progresaba la excavación, anular los grados de libertad de los *elementos* ya desconectados en etapas anteriores. En la última etapa, cuando están ya en el perímetro del revestimiento las cargas aplicadas por *descargas*, se conectaron los elementos barra que modelaron el revestimiento del túnel.

En la tabla 3.3.3.1 se presenta la comparación entre el *MEF* y la solución de la teoría de elasticidad que se presenta en el Anexo A , para el caso del momento en la clave del revestimiento. La *mall*a

de elementos utilizada se presenta en la figura 3.3.3.1. Se comprueba que para esta *mall*a, la diferencia entre el *MEF* y la solución cerrada de desplazamiento nulo es inferior a 5% y el error disminuye a medida que la *mall*a de elementos es más fina.

## 4.-EFECTO DE LA GEOMETRIA EN TUNELES Y ALCANTARILLAS

### 4.1 Sección elíptica

Siguiendo el razonamiento del capítulo 2, el estado de esfuerzos en el medio jugará un papel vital en las deformaciones y los elementos mecánicos que experimenta el soporte, es así que un túnel o una alcantarilla con una forma elipsoidal cuyos semiejes tengan la relación de los esfuerzos *in situ* no tendrá deformaciones que induzcan momentos fleccionantes (Referencia 7).

Con el *MEF* se llevaron a cabo análisis de túneles y alcantarillas con formas elipsoidales cuya relación entre los semiejes varió desde 1.0 hasta la relación de esfuerzos *in situ* que se aplicó en el análisis. Como lo muestra la figura 4.1.1 los momentos en el revestimiento se pueden estimar si se traza una parábola, que una todos los análisis que bajo las mismas condiciones de carga poseen el mismo semieje mayor, la ecuación de la curva será:

$$M^2 = \frac{M_c^2}{1 - K_o} (Rej - K_o) \dots\dots\dots(4.1.1)$$

Válida para  $K_o < 1$

M = Momento en el revestimiento

$M_c$  = Momento en el punto correspondiente del revestimiento, pero del tunel o de la alcantarilla circular

$K_o$  = Relación de esfuerzos *in situ*

Rej = Relación de semiejes de la elipse

La ecuación (4.1.1) permite calcular los momentos flexionantes en el revestimiento de un túnel o una alcantarilla con una sección elíptica, a partir de las ecuaciones dadas en el Anexo A para túneles o alcantarillas de sección circular.

#### 4.2 Elementos Mecánicos de la Sección Herradura

Gran parte de los túneles que se construyen en suelos firmes usan secciones herradura como las que se muestran en la figura 4.2.1.. Con el objeto de estudiar por medio del método propuesto

en el capítulo 3 el sistema interacción *suelo-soporte* de una sección herradura se ha idealizado su geometría, suponiéndola formada en su parte superior por la mitad de un círculo y en su parte inferior por una sección rectangular, como lo muestra la figura 4.2.2., el radio  $R$  define la parte superior de la sección y el radio  $R_1$  la porción inferior.

Para establecer el número de elementos barra que modelan adecuadamente el soporte, se llevaron a cabo análisis de alcantarillas con secciones herradura y un número diferente de barras modelando el revestimiento. En la figura 4.2.3a se presenta la aproximación que se obtiene con las diferentes mallas. De la figura se concluye que si se usan más de 14 barras para modelar el revestimiento, la diferencia entre la solución obtenida y la correspondiente a una *malla* con 20 vigas es menor de 10%, por lo que se usaron *mallas* con 14 vigas modelando el revestimiento con el objeto de tener buenas aproximaciones y rapidez al llevar a cabo los análisis.

Primeramente se llevaron a cabo análisis que demostraron que en las secciones donde  $R_1$  varía entre  $R$  y  $0.75R$  los elementos mecánicos en la clave de la sección y a  $45^\circ$  de ésta, son los mismos

que los de una sección circular de radio  $R$ ; en las figuras 4.2.3. b , c, d y e se presentan las diferencias entre los momentos para el caso de descarga por excavación de una sección circular de radio  $R$  y una sección herradura donde  $R = R_1$ , normalizadas con respecto al momento en la clave de la sección circular, se puede observar que mientras el ángulo  $\alpha$  sea menor de  $45^\circ$  los momentos de la sección herradura practicamente coinciden con los de la circular . En tabla 4.2.1 presentan los cortantes para el caso de descarga por excavación en la clave de una sección circular de radio  $R$  y de una sección herradura donde  $R = R_1$ , y se puede apreciar la buena concordancia entre ambas. En el caso de una sección herradura en la que  $R_1 = 0.75R$ , al comparar los momentos y los cortantes con una sección circular de radio  $R$ , se tienen diferencias menores a 5%, no así si  $R_1 = 0.5R$  pues ahora las diferencias entre ambas secciones son superiores a 10%. Cuando la sección herradura es tal que  $R_1 > R$  la forma de los diagramas de los elementos mecánicos cambian, por lo que es difícil normalizarlas con relación a la sección circular.

Los resultados anteriores permitieron que se pudieran definir los momentos flexionantes y los cortantes de la porción inferior

de la sección, en función de los elementos mecánicos de una sección circular de radio  $R$ .

Se llevaron a cabo análisis con secciones herradura que tenían tamaños diferentes y relaciones de Poisson que variaron de 0.35 a 0.25, pero al considerarlos como circulares con radio  $R$ , los factores de compresibilidad y flexibilidad resultantes eran iguales entre sí. Al normalizar los elementos mecánicos resultantes con respecto a los de la clave, los diagramas de momentos y cortantes para los mismos valores de  $F$  y  $C$  para túneles y alcantarillas de diferentes tamaños resultaron iguales, en la figura 4.2.4 se presentan dos diagramas de momentos de dos túneles con secciones herradura con diferente tamaño, pero con el mismo valor de  $F$  y  $C$ .

Las gráficas que resumen los resultados normalizados para todos los valores usuales de los coeficientes de compresibilidad y flexibilidad cuando la relación de Poisson está en el intervalo mencionado, se presentan en las figuras 4.2.5 a la 4.2.18. Para el caso de carga externa (alcantarillas), la gráfica de las figura 4.2.5 representa los momentos normalizados de la cubeta con respecto a la clave, para los casos donde  $R_1 = R$  y  $R_1 = 0.75R$ . Análo-

gamente la figura 4.2.6 muestra el momento en el quiebre de la sección y la figura 4.2.7 el momento en la parte inferior de la alcantarilla a  $0.75R_1$  de la cubeta de la sección. Similarmente para el caso de descarga por excavación (túneles) las figuras 4.2.8, a la 4.2.10 representan los momentos normalizados, en los puntos mencionados. Los cortantes para el caso de carga externa cuando  $R = R_1$ , se presentan; para el quiebre de la sección en las figuras 4.2.11a,b, y en la figura 4.2.12 el cortante en el punto a  $0.75R_1$  de la cubeta de la sección. Análogamente las figuras 4.2.13a, b c y 4.2.14 representan los cortantes para el caso de descarga por excavación. De la misma forma las figuras 4.2.15a, b, 4.2.16, 4.2.17a, b y 4.2.18 muestran los cortantes para la sección donde  $R_1 = 0.75R$ , para las condiciones de descarga por excavación y de carga externa.

Todo el conjunto de gráficas presentan un método para estimar los elementos mecánicos del revestimiento de secciones herraduras en túneles y alcantarillas, suponiendo que el medio es homogéneo, isótropo y linealmente elástico, el revestimiento es elástico y de sección constante, y el problema se trata como uno de deformación plana.

### 4.3. Sección *Gota de Agua*

En esta tesis se propone la sección geométrica denominada *Gota de Agua*, con el objeto de disminuir el volumen de excavación y los elementos mecánicos en el revestimiento para el caso de túneles, evidentemente con la finalidad de un ahorro económico. La sección *Gota de Agua* esta formada por una elipse y un arco de círculo como se muestra en la figura 4.3.1. En la figura 4.3.2 se compara una sección *Gota de Agua* con una sección Herradura equivalente para mostrar el ahorro potencial en el volumen por excavar en una sección *Gota de Agua*.

R. Richards et al (Referencia 9) proponen la sección geométrica *Deloid* para túneles en roca sin revestimiento, sus características son similares a la sección *Gota de Agua*, y en algunos casos sus formas son equivalentes. El estado de esfuerzos inducido por el tuneleo, depende de la sección geométrica; en general la sección *Deloid* provoca menores modificaciones al estado de esfuerzos *in situ*, que una sección circular con el mismo ancho.

Para evaluar los elementos mecánicos de una sección *Gota de Agua* se llevaron a cabo análisis con el método del elemento finito

cuyas conclusiones se presentan a continuación; los momentos de una sección *Gota de Agua* son menores que los momentos correspondiente de una sección herradura, como lo muestra la figura 4.3.3, donde se han graficado las diferencias entre los máximos momentos de una sección *Gota de Agua* y una herradura, calculando los coeficientes de compresibilidad y flexibilidad de tal manera que el máximo ancho de la sección sea el diámetro equivalente de la sección circular; las fuerzas normales de una sección *Gota de Agua* normalmente son mayores a las fuerzas normales correspondientes de una sección herradura, por último los asentamientos en la superficie del terreno son en general menores para una sección *Gota de Agua*.

La forma de los diagramas de fuerzas normales, cortantes y momentos para una sección *Gota de Agua* dependen significativamente de la rigidez relativa del sistema *suelo soporte*, por lo que su normalización es más complicada.

## 5.- METODO DE ANALISIS

En un túnel intervienen además de la geometría y la rigidez del sistema *suelo-soporte*, el procedimiento de excavación, las deformaciones que se provocan y las propiedades esfuerzo-deformación no lineales del medio y del revestimiento, por lo tanto un método de análisis debe incluir al menos las más importantes variables del problema. En esta tesis se propone como método de análisis el método del elemento finito, simulando los procesos de excavación por medio de fuerzas concentradas, con la posibilidad de modelar las características no lineales del medio, en caso de que fueran determinantes, a través de procesos iterativos (Referencias 2 y 16), donde se varíen los parámetros de elasticidad a través de modelos hiperbólicos (Referencia 5).

En el caso de un comportamiento lineal y cuando no se tenga en disponibilidad un equipo de procesamiento electrónico, se pueden obtener buenos resultados para estimar los elementos mecánicos del revestimiento, usando las gráficas que se han presentado en el capítulo 4 de esta tesis, de esta forma se ha establecido un método simplificado para el análisis del sistema *suelo-soporte* de túneles y alcantarillas con secciones herradura. El procedimiento consiste en: a) idealizar la sección herradura según se muestra en la fi-

gura 4.2.2.; b) determinar los elementos mecánicos en la clave de la sección, utilizando la solución analítica del Anexo A para una sección circular de radio R; y c) evaluar los elementos mecánicos en la cubeta (punto A, figura 4.2.4), el quiebre (punto B) y la pared de la sección herradura (punto C) a partir de las gráficas de las figuras 4.2.5 a 4.2.18. Los valores de estos cuatro puntos se unen con línea continúa para definir los diagramas de momentos y cortantes de la sección herradura. Otra ayuda para dibujar los diagramas se presenta en las figuras 4.2.3.b-e con las que se puede determinar el momento en la clave de una sección herradura para un amplio rango de valores del ángulo  $\alpha$ . En la figura 4.2.4. se presentan los diagramas de momentos y cortantes de dos secciones herradura, que ejemplifican el método.

## 6.- CONCLUSIONES

Primeramente se demostró que es posible tener buenas aproximaciones del estado de esfuerzos y deformaciones del sistema *suelo-soporte* para el caso de un túnel o una alcantarilla, por medio de elementos *isoparamétricos* y elementos viga. Los resultados indican que para las secciones de túneles y alcantarillas comúnmente encontradas en la práctica, el revestimiento debe modelarse con un mínimo de 10 vigas para obtener resultados confiables.

Sin embargo conviene dejar bien claro que el uso de elementos sólidos de geometría irregular puede, en algunos casos, rigidizar artificialmente la estructura. Esto conduce al cálculo de deformaciones menores que las teóricas, como se demostró en los análisis de una viga empotrada (fig. 3.3.1.3), cuyos resultados se muestran en la figura 3.3.1.2.

Se estableció un método simplificado para estimar los elementos mecánicos del revestimiento de túneles y alcantarillas con secciones herradura idealizadas, comportamientos del medio lineales y elásticos, soportes de sección constante, y con las hipótesis de

deformación plana. El método se resume en las figuras 4.2.5 a 4.2.18.

Se planteó la forma geométrica *Gota de Agua*, que induce menores momentos flexionantes en el revestimiento que una sección herradura *equivalente*, y además requiere un volumen menor de excavación.

En la misma forma en que se han estudiado las secciones herradura, se podrían analizar otras secciones geométricas incluyendo el comportamiento no lineal del suelo, para desarrollar procedimientos de análisis similares al establecido en esta disertación.

## REFERENCIAS

- 1.- Alberro J., Presiones de Roca en túneles e interacción Roca-Revestimiento, Serie del Instituto de Ingeniería No. 468 UNAM 1983.
- 2.- Cook D.R., Concepts and Applications of Finite Element Analysis John Wiley, New York (1974).
- 3.- Duncan James and Chang Chin-Yung, Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division (Sep. 1970)
- 4.- Hernández H. Gabriel, Diseño de Túneles en Suelos Blandos, Tesis para obtener el Título de Ingeniero Civil, Facultad de Ingeniería UNAM, 1986
- 5.- Kulhawy F. and Duncan Finite Element Analysis of stress and Movements in Embankments During Construction Report # TE-69-4 University of California (1969).
- 6.- Leonard Obert and Wilbur I. Duvall, Rock Mechanics and the Design of Structures, John Wiley and Sons Inc. (1967).
- 7.- Peck R.B. State-of Art Report; Deep Excavations and Tunneling in Soft Ground. Proceedings, Seventh International Conference on Soil Mechanics, México (1969).
- 8.- Ranken R.E., Analysis of Ground-Liner Interaction for Tunnels Ph.D. Thesis, University of Illinois Urbana Champaign (1978).
- 9.- R. Richards and G. S. Bjorkman, Optimun Shapes for Unlined Tunnels and Cavities, Engineering Geology and International Journal, Julio 1978.
- 10.- Rico Alfonso y del Castillo Hermilo, La Ingeniería de Suelos en la Vias Terrestres, Limusa, México, 1977.

- 11.- Romo M.O., Diseño del Recubrimiento de Túneles, XII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Queretaro México ,SMMS (1984).
- 12.- Romo M.O. y Magaña del Toro, Análisis Dinámico de la Presa Peñitas, Informe interno del Instituto de Ingeniería
- 13.- Szechy K., The art of Tunneling, Akademiai Kiado, Budapest (1966).
- 14.- Terzaghi K., Theoretical Soil Mechanics, John Wiley and Sons 1943
- 15.- U.S. Department of Commerce, Design Recommendations for Concrete Tunnel Linings, National Technical Information Service.
- 16.- Valliappan S., Finite Element Method Theory and Applications Seminario impartido en la DEPMI, México (1979).

TABLA 3.3.2.1 Momentos en la clave del revestimiento para la condición de Carga Externa, calculados con el *MEF* y la solución cerrada de la Teoría de elasticidad (Anexo A).

| Factor de compresibilidad<br>$C^*$ | Factor de Flexibilidad<br>$F^*$ | Momento calculado con el <i>MEF</i><br>(Ton-m) | Momento calculado con la Teoría de elasticidad<br>(Ton-m) |
|------------------------------------|---------------------------------|--|---|
| 0.001                              | 300                             | 8.52   | 9.10  |
| 0.01                               | 500                             | 5.29   | 5.65  |
| 0.001                              | 600                             | 4.44   | 4.13  |

Alcantarilla de 3.35 mts. de diámetro a 20.15m. de profundidad

**TABLA 3.3.3,1 Momentos en la clave del revestimiento para la condición de Descarga por Excavación, calculados con el MEF y la solución cerrada de la Teoría de elasticidad**

| Factor de compresibilidad<br>$C^*$ | Factor de Flexibilidad<br>$F^*$ | Momento calculado con el MEF<br>(ton-m) | Momento calculado con la teoría de elasticidad<br>(Ton-m) |
|------------------------------------|---------------------------------|---|---|
| 100                                | 100                             | 11.29                                   | 10.70   |
| 1                                  | 100                             | 12.18                                   | 12.85   |
| 0.01                               | 100                             | 12.57                                   | 12.60   |
| 0.01                               | 300                             | 4.91                                    | 5.01  |
| 0.01                               | 500                             | 3.14                                    | 2.99  |
| 0.01                               | 700                             | 2.34                                    | 2.21  |

Túnel de 2.50 m. de diámetro, a 22.50 m. de profundidad en un medio con un peso volumétrico de  $1.8 \text{ ton/m}^3$ .

TABLA 4.2.1 Cortante a 45° de la clave para el revestimiento de una sección circular en la condición de Descarga por Excavación, calculados con el *MEF* y la solución cerrada de la Teoría de elasticidad (Anexo A),

| Factor de Flexibilidad<br>$C^*$ | Factor de Compresibilidad<br>$F^*$ | Cortante calculado con el <i>MEF</i> (Ton) | Cortante calculado con la teoría de elasticidad (ton) |
|---------------------------------|------------------------------------|--|---|
| 100                             | 100                                | 7.95                                       | 8.10  |
| 1                               | 100                                | 57.66                                      | 56.60   |
| 0.01                            | 100                                | 99.42                                      | 104.00  |
| 0.01                            | 300                                | 99.08                                      | 104.00  |

Túnel de 2.50 mts. de diámetro a 22.5 mts. de profundidad en un medio con  $\gamma = 1.8 \text{ ton/m}^3$ .

CARGA P

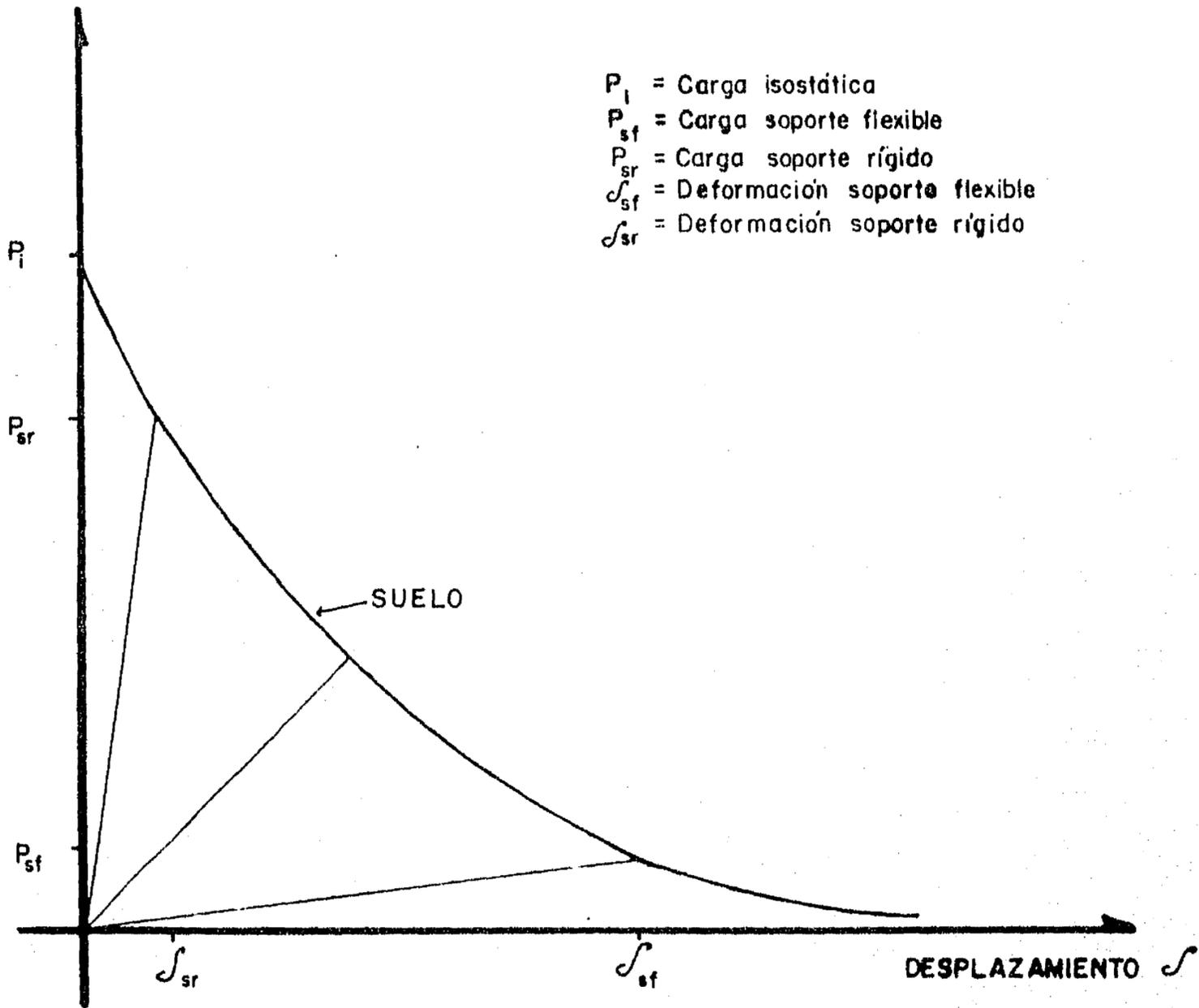
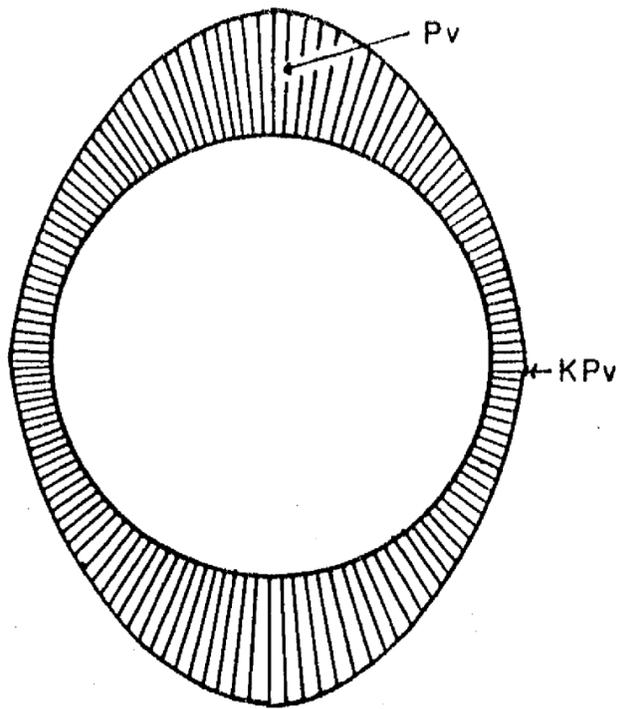
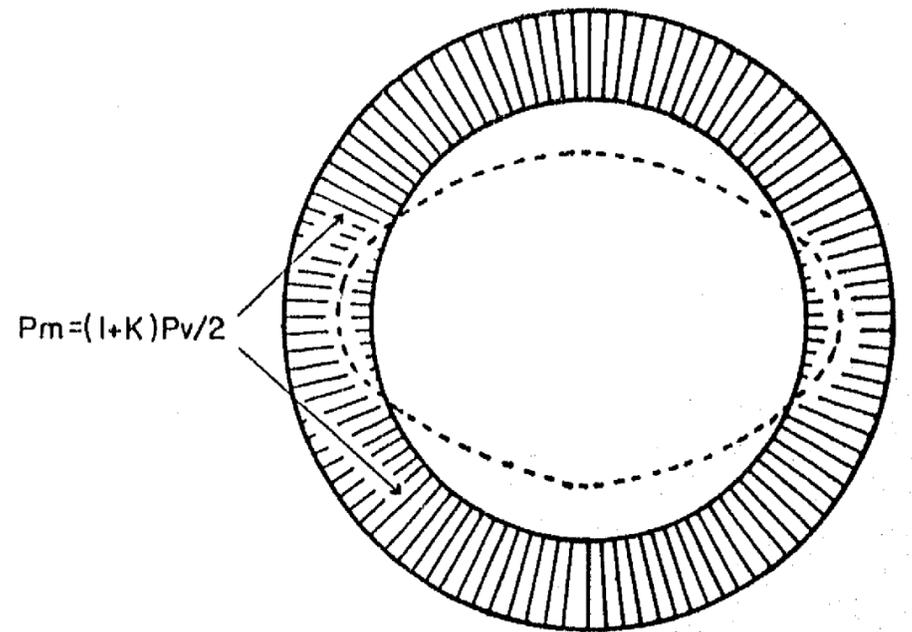


FIG. 2.2.1 CURVA CARACTERISTICA DE UN SISTEMA SUELO-SOPORTE



INFINITAMENTE RIGIDO

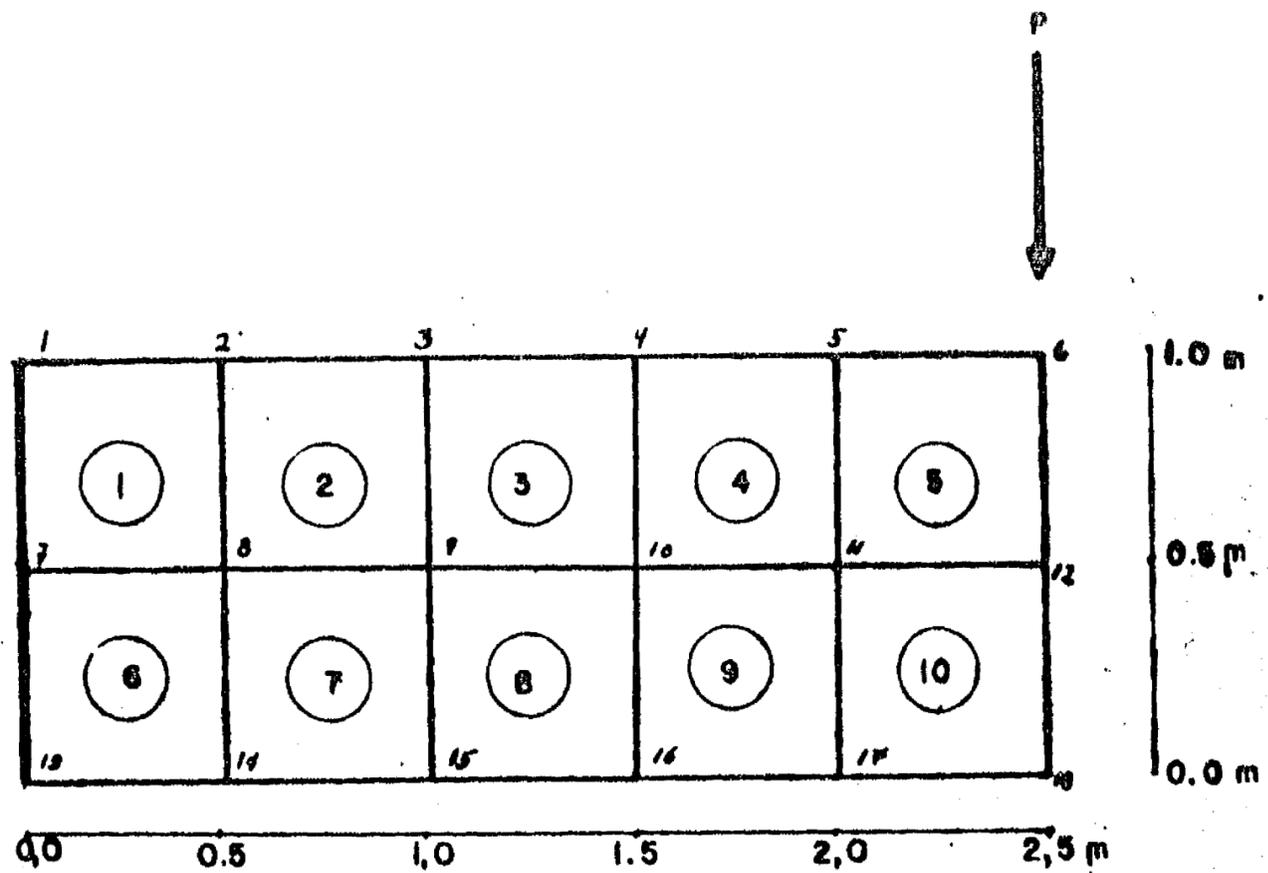


INFINITAMENTE FLEXIBLE

$P_v$  = Esfuerzo vertical "in situ"

$K$  = Relación de esfuerzos horizontales  
y verticales

FIG. 2.2.2 Deformación de un revestimiento con relación a su rigidez



ANCHO = 0,5 m

P = 90 TON

E = 150 000 TON/m<sup>2</sup>

ν = 0.15

DEFORMACIONES

$$\int_6 = 0,0073$$

$$\int_{12} = 0,0071$$

$$\int_{18} = 0,0070$$

$$\int_{\text{teorico}} = 0,0075$$

FIG.3.3.1.1 MODELO DE UNA VIGA CON EL MEF

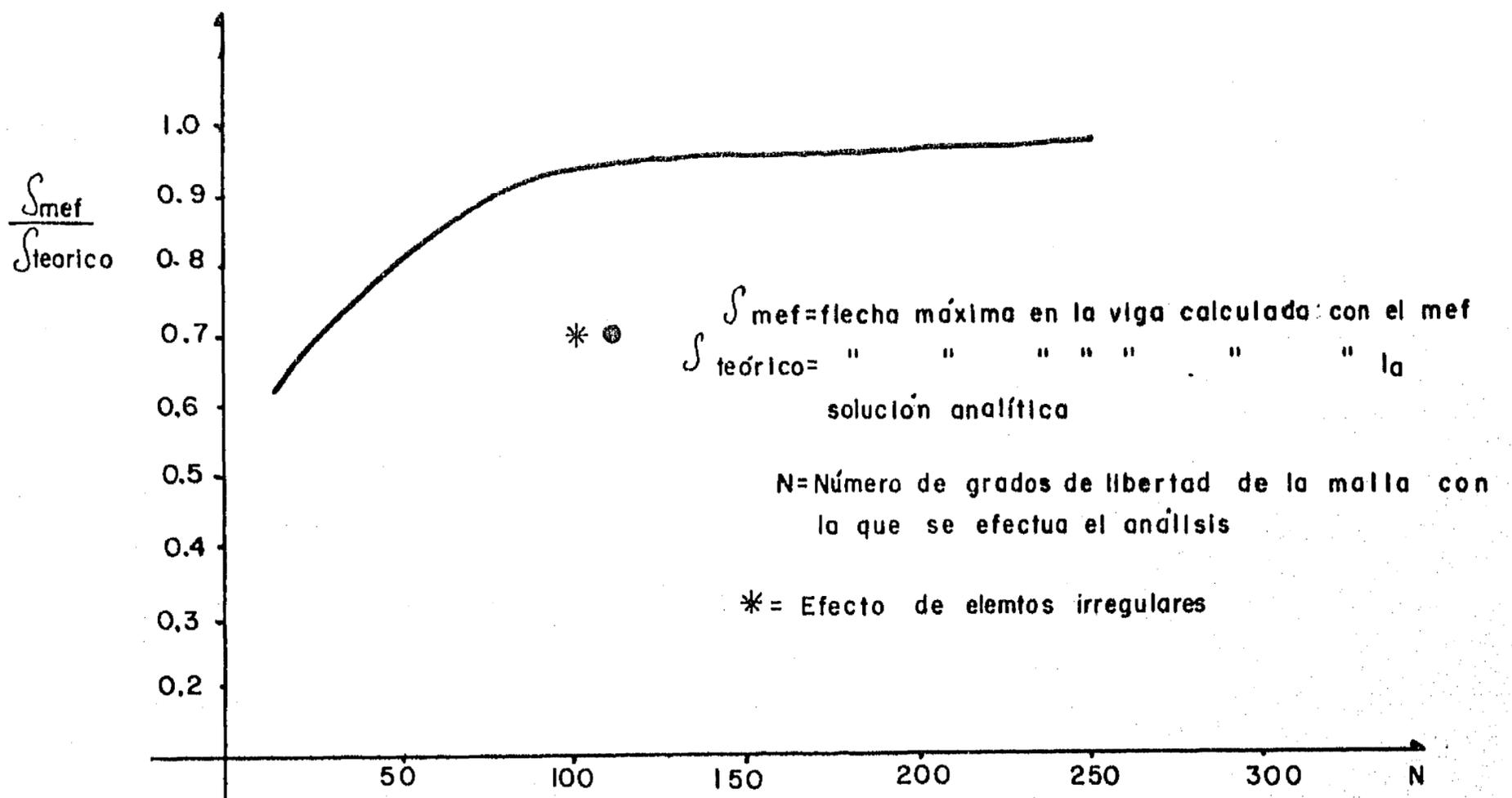
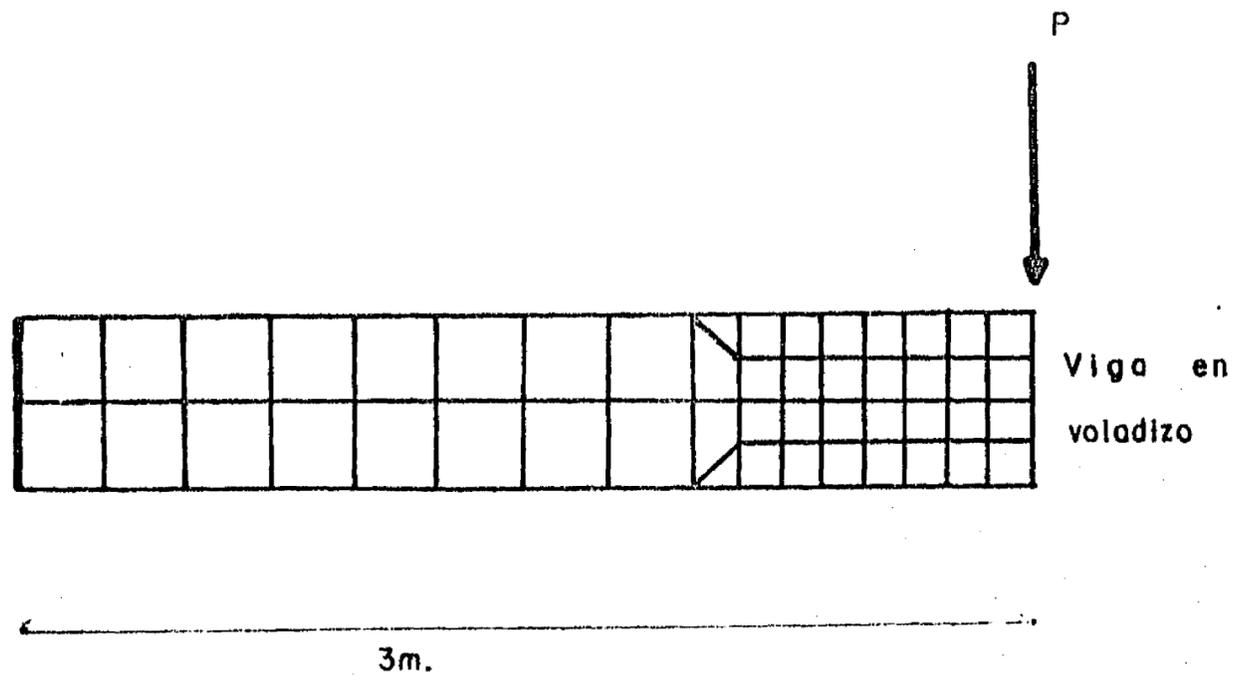


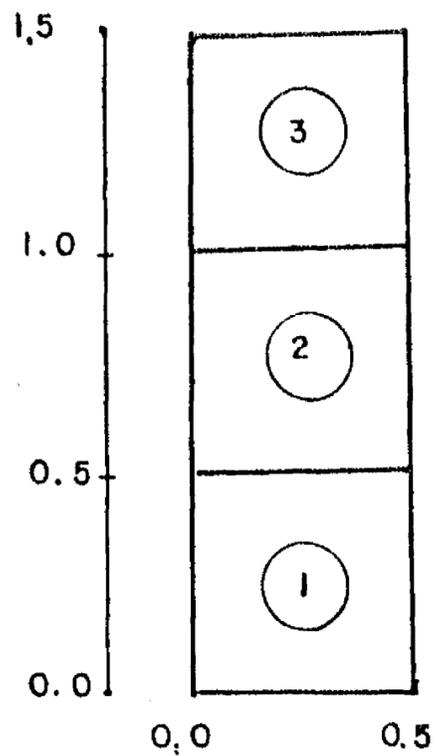
FIG.3.3.1.2 Aproximación del método del elemento finito (mef), con relación al número de grados de libertad de la malla (formada por cuadriláteros regulares), para una viga en voladizo de 3 m.



$$\frac{f_{mef}}{f_{teorico}} = 0.7$$

$f_{mef}$  = flecha máxima calculada con el mef  
 $f_{teorico}$  = " " " " la solución analítica de la teoría de elasticidad

FIG. 3.3.1.3 Malla de elementos finitos con 128 grados de libertad, usando dos triángulos



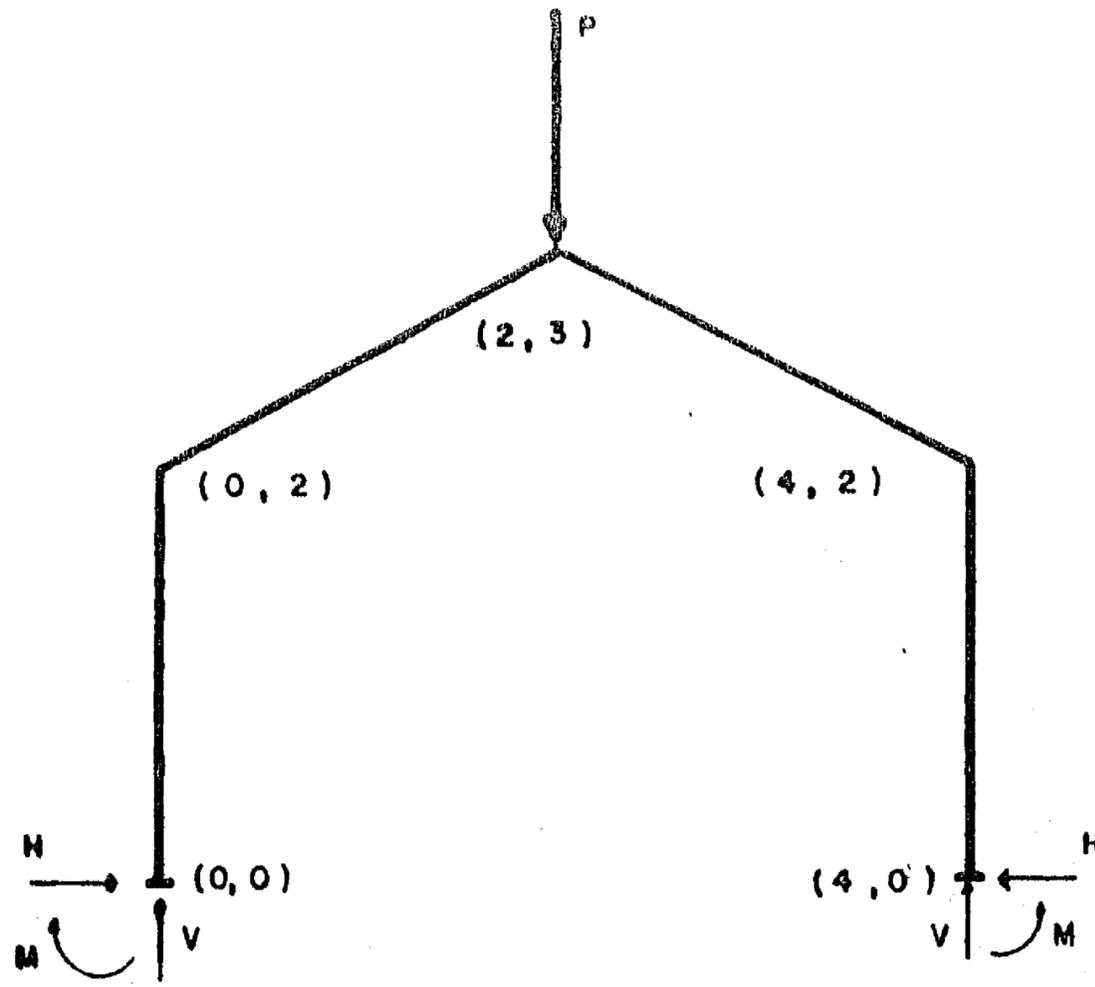
$E = 150,000 \text{ TON/m}^2$   
 ancho = 0,5 m  
 $\nu = 0.15$   
 $\gamma = 1.8 \text{ TON/m}^3$

$V_I$  = Vector de cargas calculado a partir del peso propio

$V_{II}$  = Vector de cargas calculado a partir del campo deformatario

$$V_I = \begin{bmatrix} .056 \\ .112 \\ .112 \\ .056 \\ .056 \\ .112 \\ .112 \\ .056 \end{bmatrix} \quad V_{II} = \begin{bmatrix} .056 \\ .112 \\ .112 \\ .056 \\ .056 \\ .112 \\ .112 \\ .056 \end{bmatrix}$$

FIG. 3.3.1.4 PRUEBA PARA "DESCARGAR" UN ELEMENTO



$$E = 150\,000 \text{ ton/m}^2$$

$$V = 0.15$$

$$b = 0.30$$

$$I = 0.000675$$

$$P = 9 \text{ ton}$$

$$H = 2.72$$

$$V = 4.50$$

$$M = 2.5$$

FIG.33.15 MARCO FORMADO POR BARRAS INTERCONECTADAS

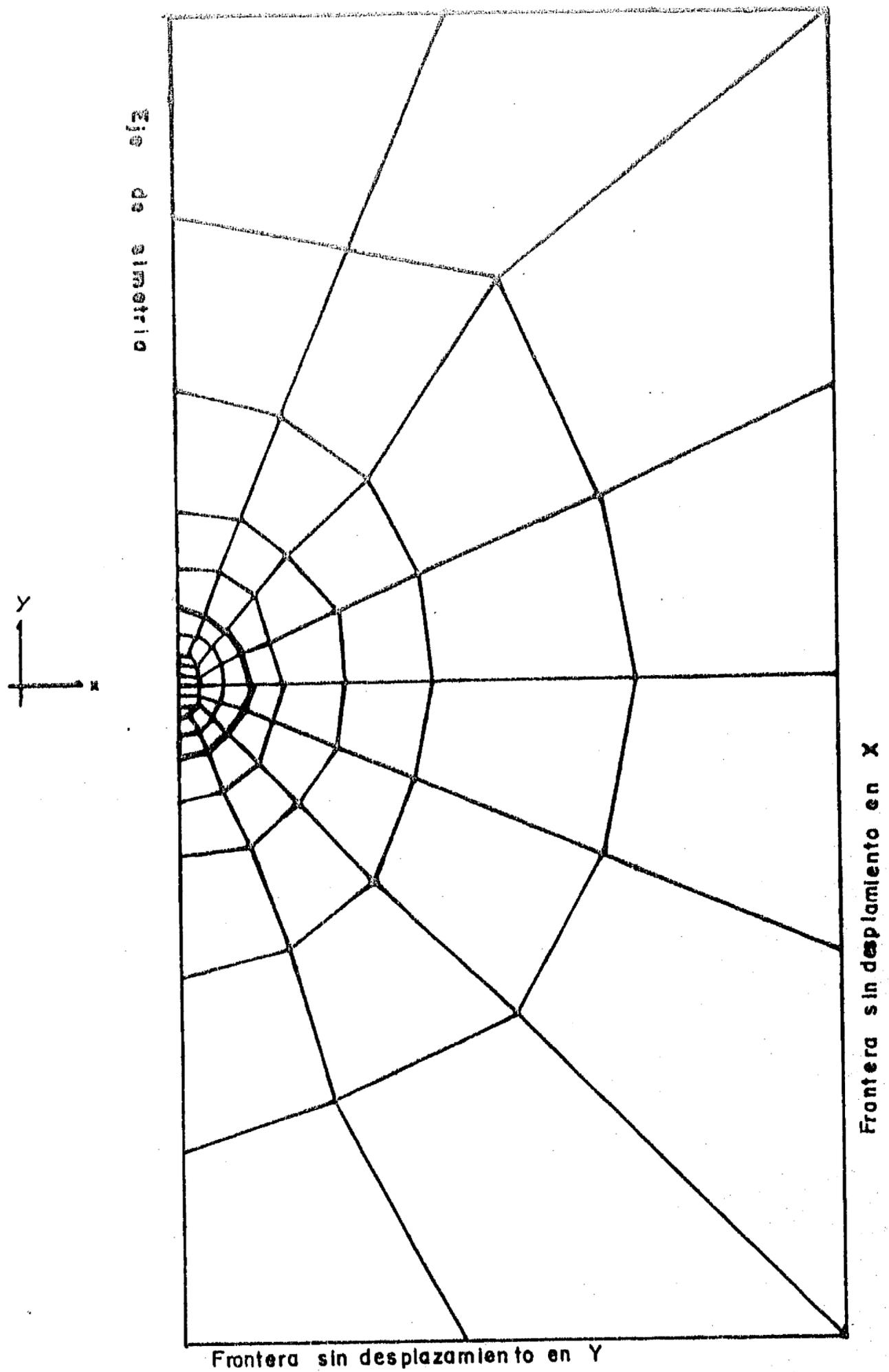


FIG.3.3.3.1 MALLA DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL CASO DE DESCARGA POR EXCAVACION

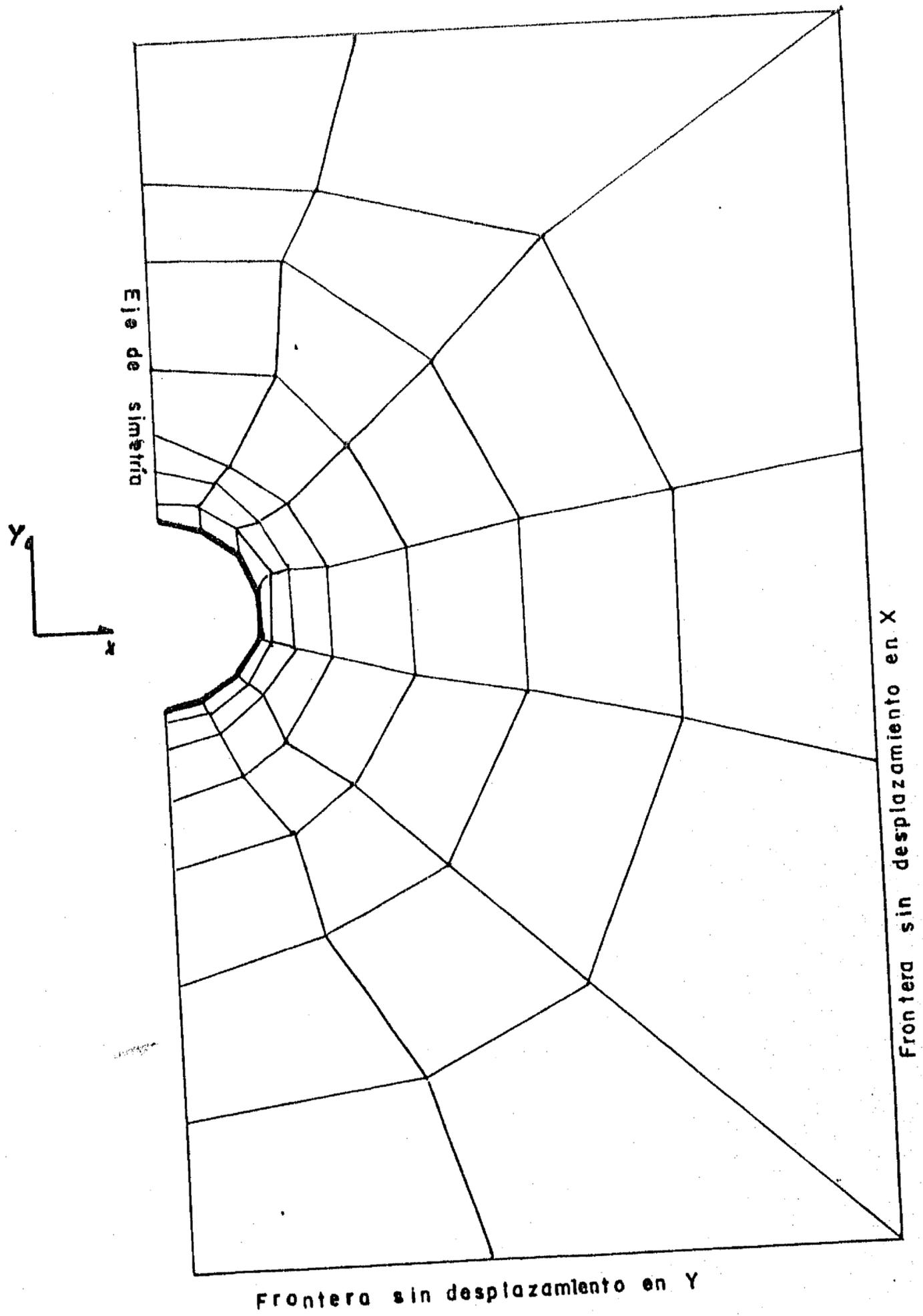


FIG.3.32.1 MALLA DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL CASO DE CARGA EXTERNA

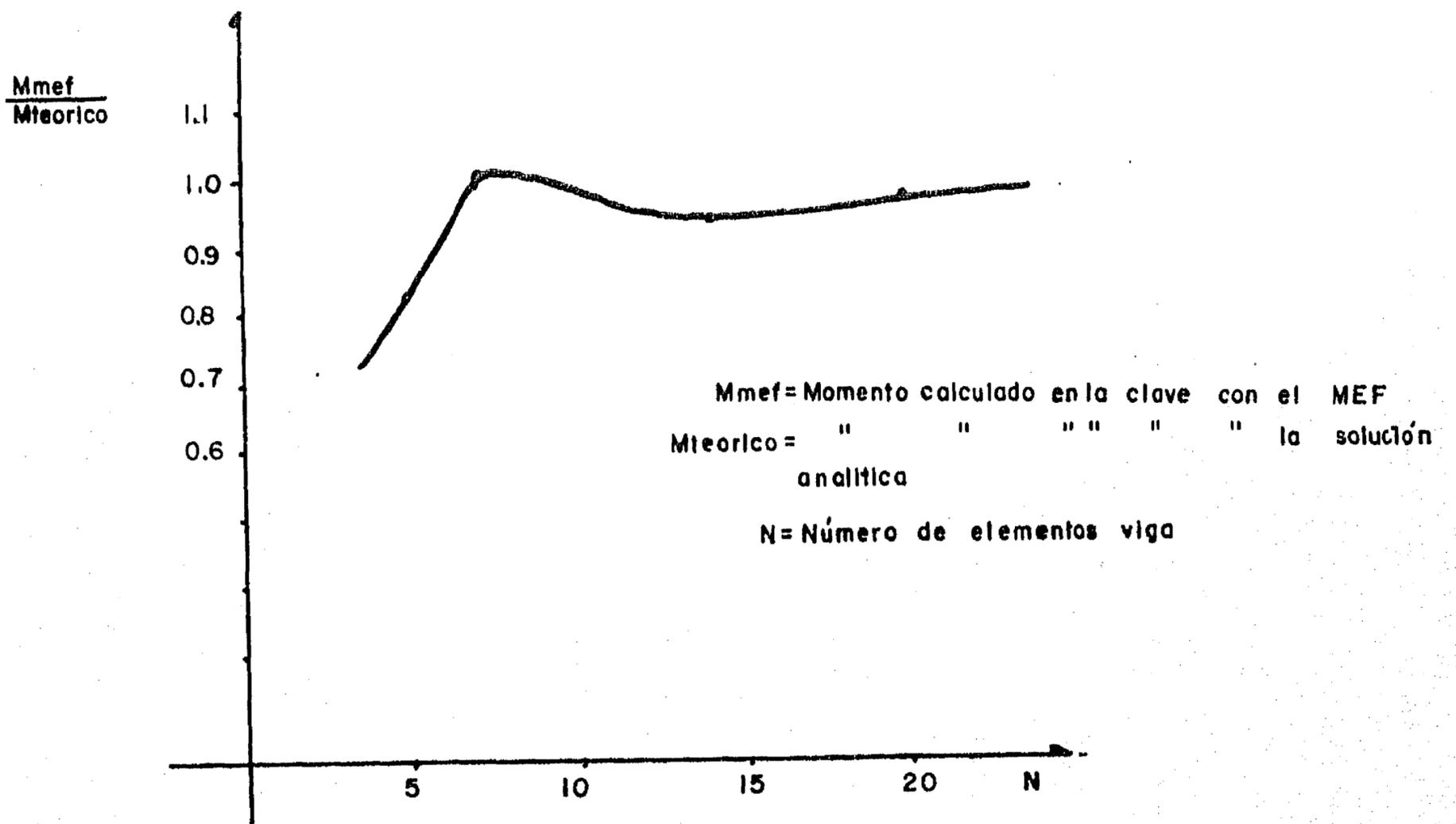


FIG.3.3.2.2 Aproximación del método del elemento finito (MEF) con relación al número de vigas que modelan el revestimiento, (alcantarilla de 8m. de diámetro a 27.5 m. de prof.)

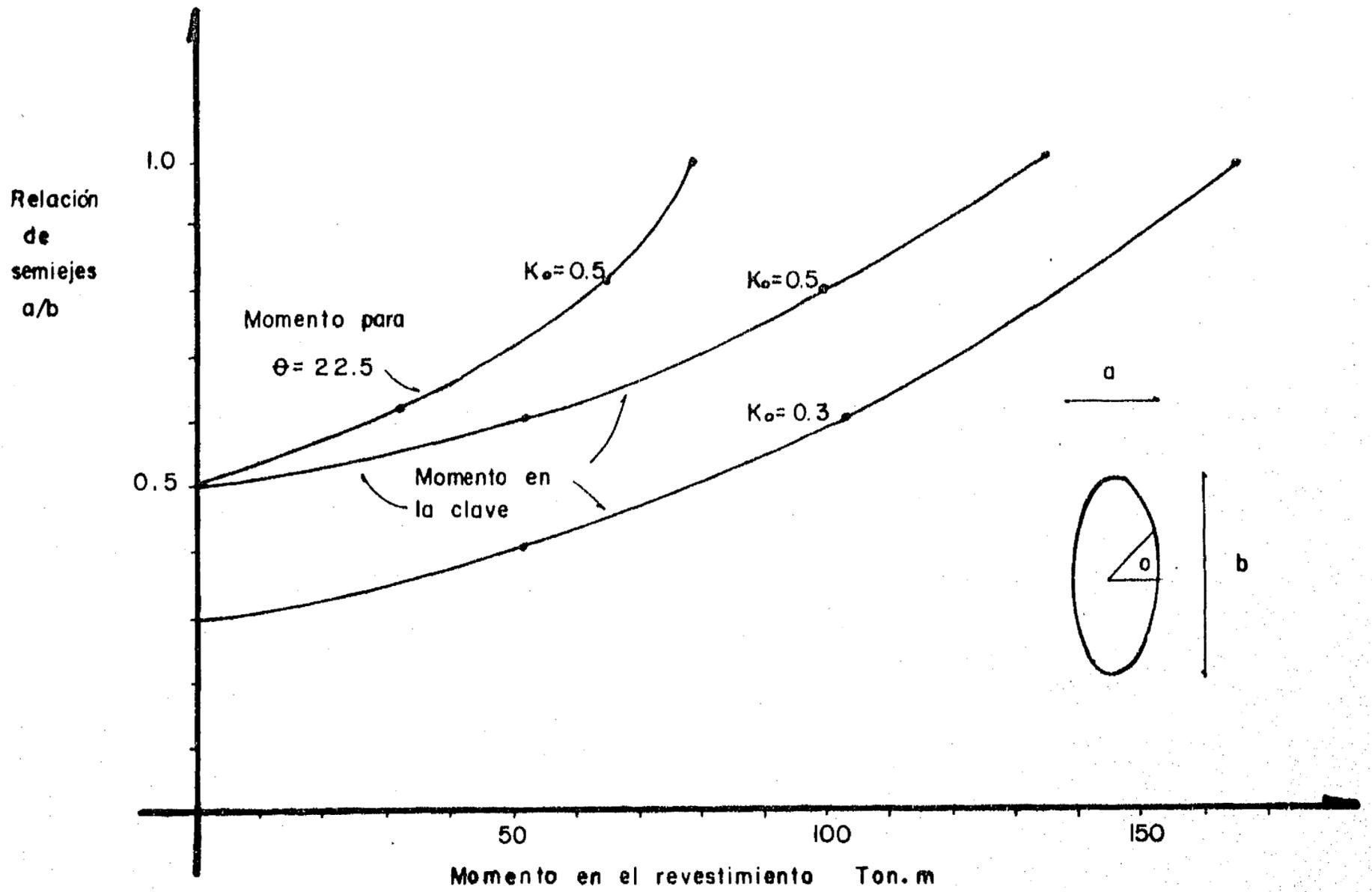


FIG. 4.1.1 MOMENTOS EN EL REVESTIMIENTO DE SECCIONES ELIPTICAS

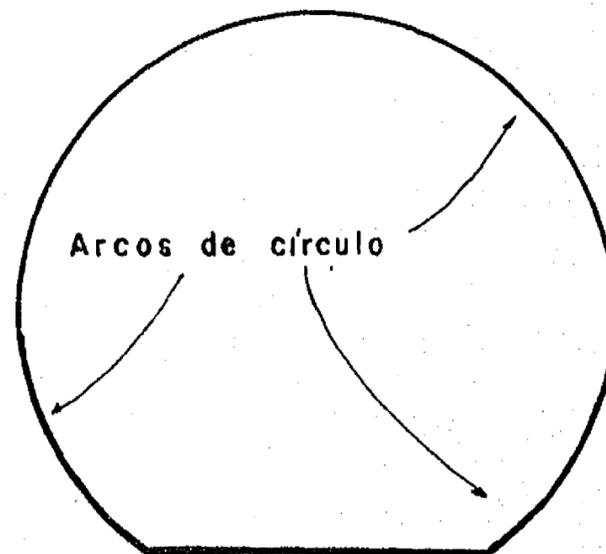
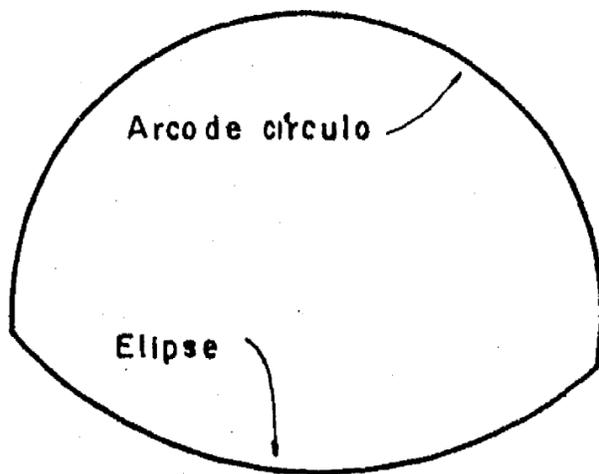
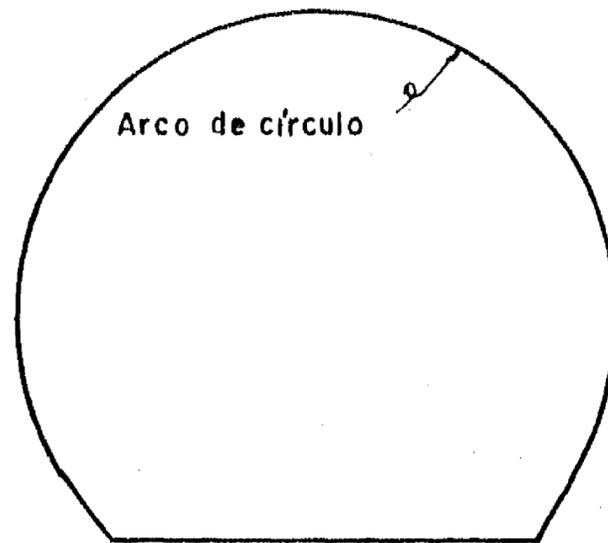
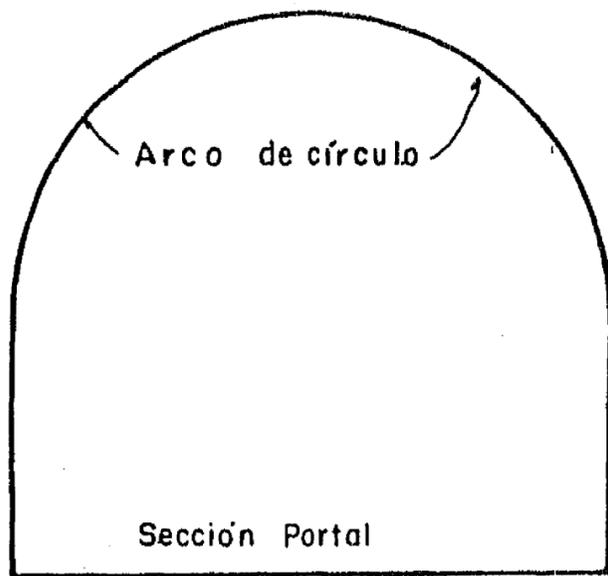
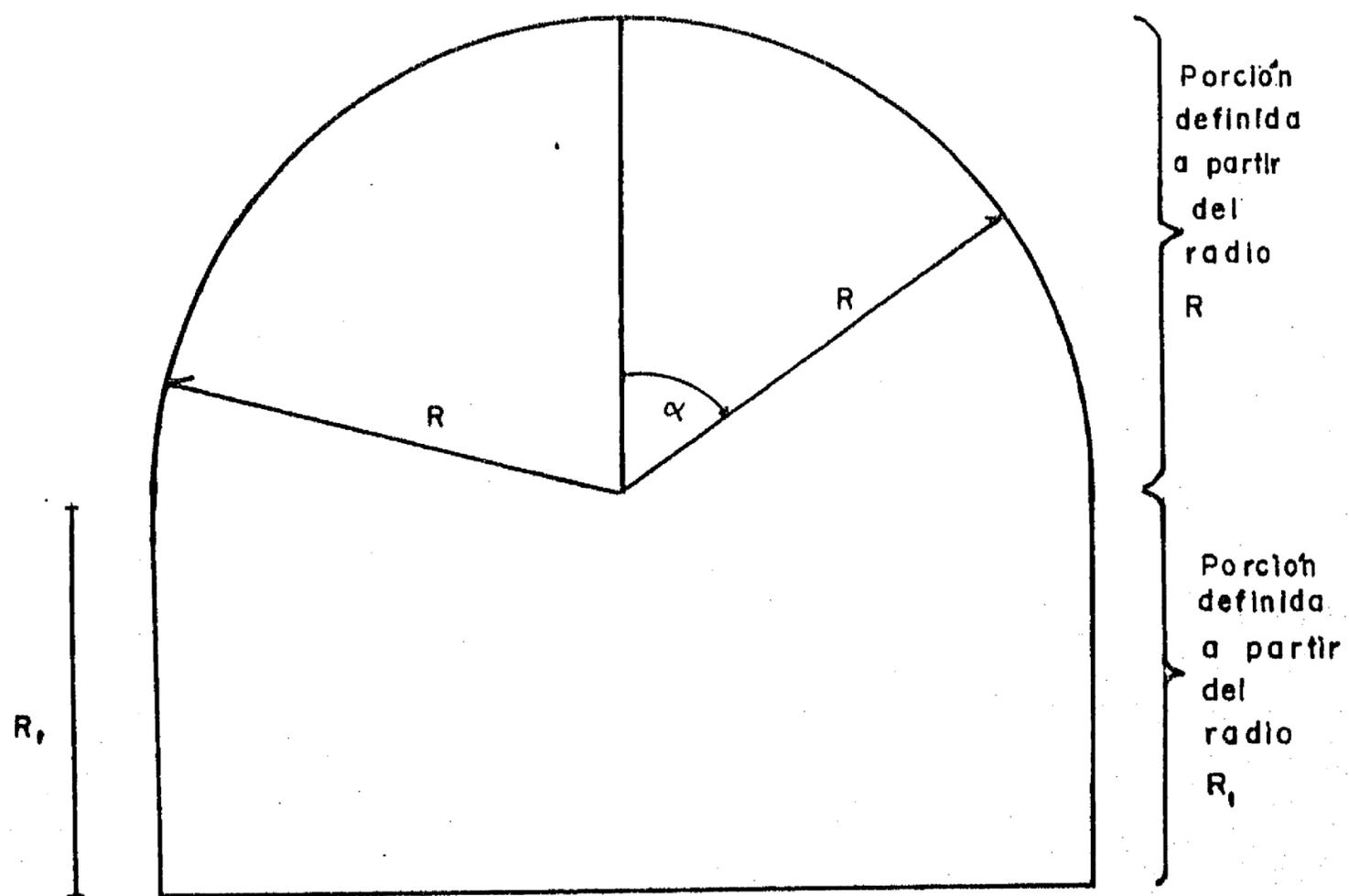
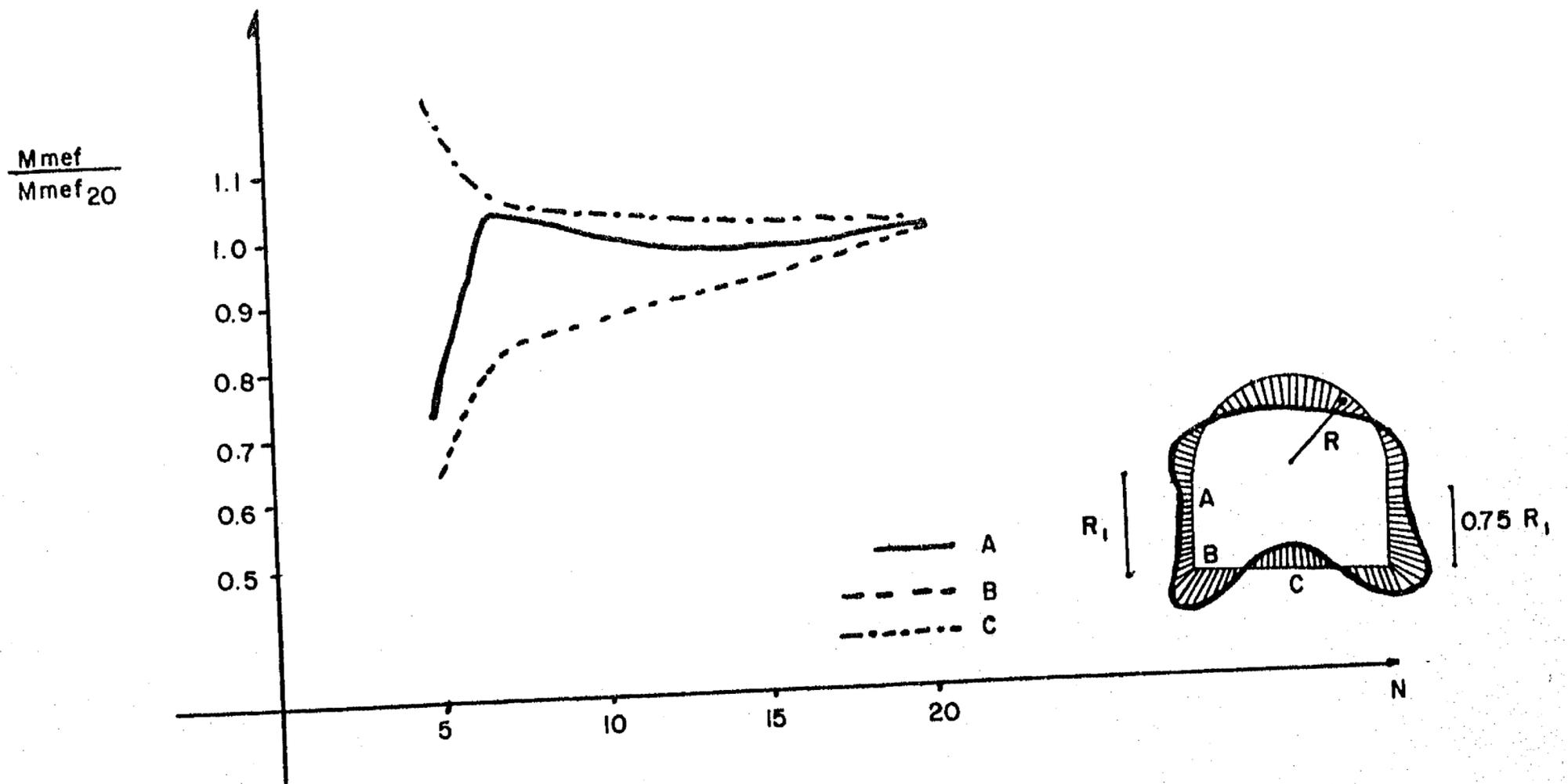


FIG. 4. 2. 1 SECCIONES HERRADURA TÍPICAS



IG, 4, 2.2 IDEALIZACION DE LA SECCION HERRADURA

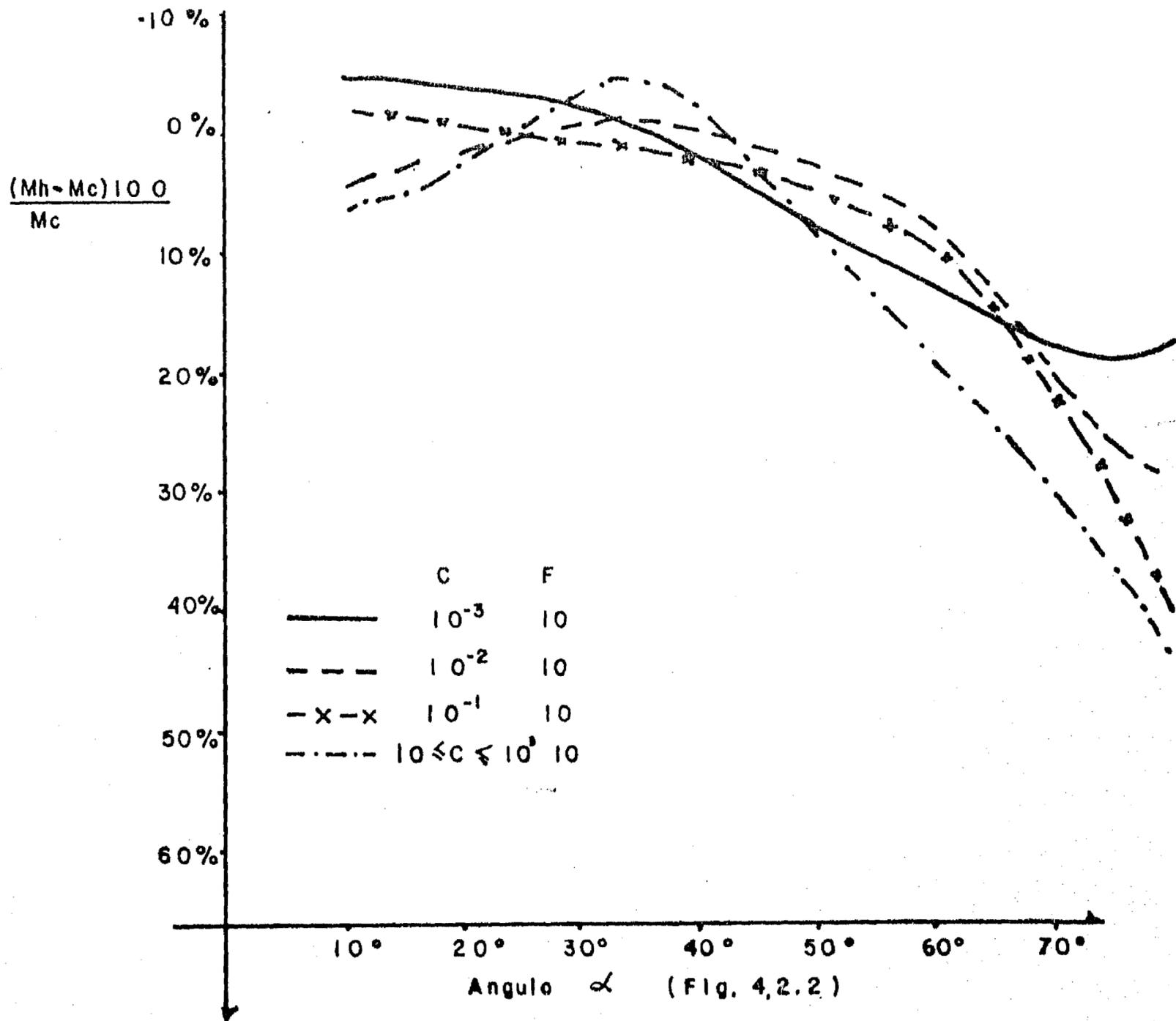


$M_{mef20}$  = Momento calculado en los puntos A, B y C con el  $mef$  para una malla con 20 vigas en el revestimiento.

$M_{mef}$  = Momento calculado en los puntos A, B ó C con el  $mef$  para un número determinado de vigas.

$N$  = Número de elementos viga que modelan el revestimiento.

FIG. 4.2.3 a Aproximación del  $mef$  con relación al número de vigas que modelan el revestimiento para una alcantarilla con  $R=R_1=4m.$  a 27.5 m de profundidad en un medio con  $\gamma=1.6 \text{ ton/m}^3$



Mc = Momento para la sección circular

Mh = Momento para la sección herradura

FIG.4.2.3 b Momento en la porción superior de una sección herradura y su relación con la sección circular

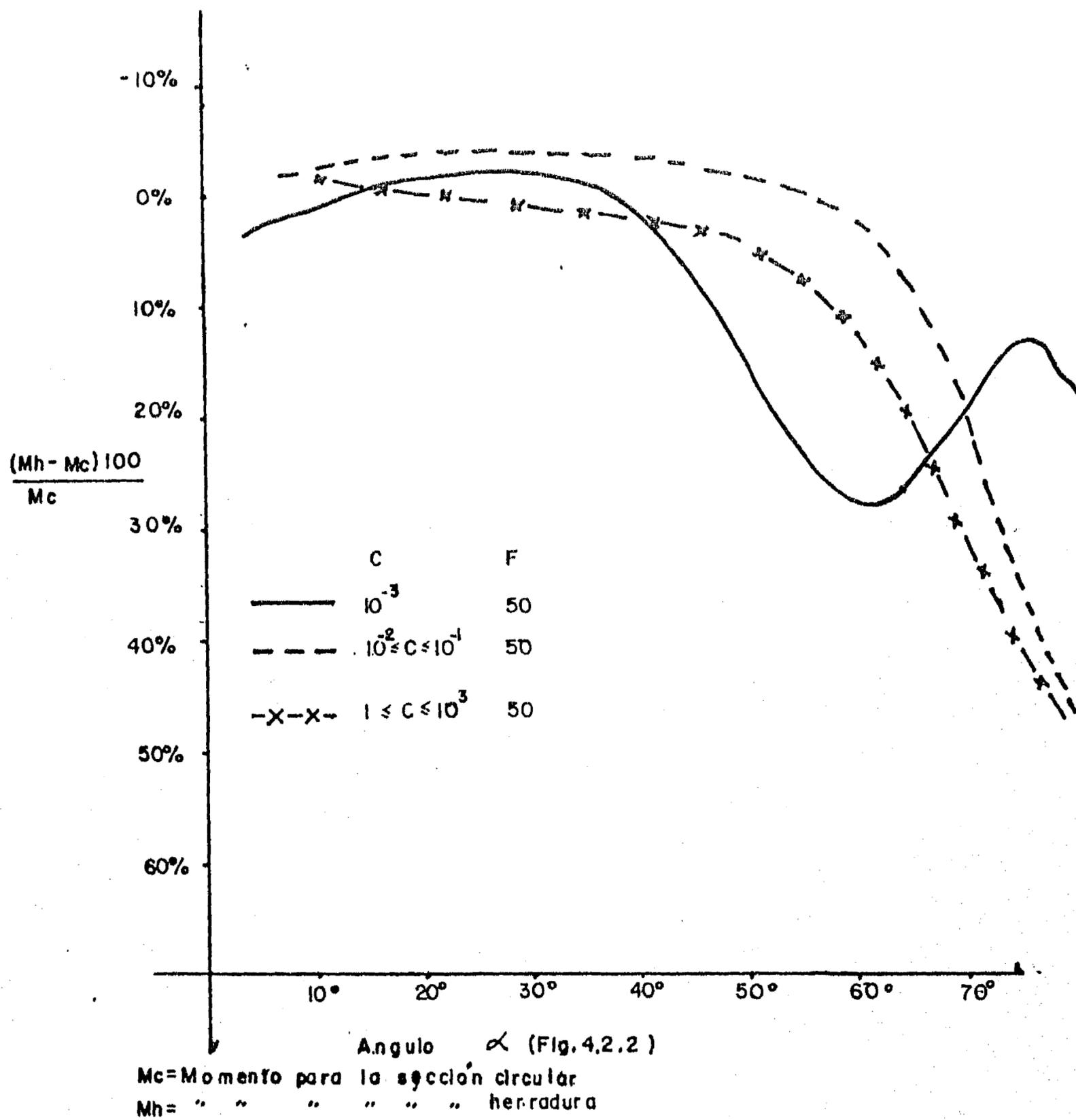


FIG. 4.2.3 c Momento en la porción superior de una sección herradura y su relación con la sección circular

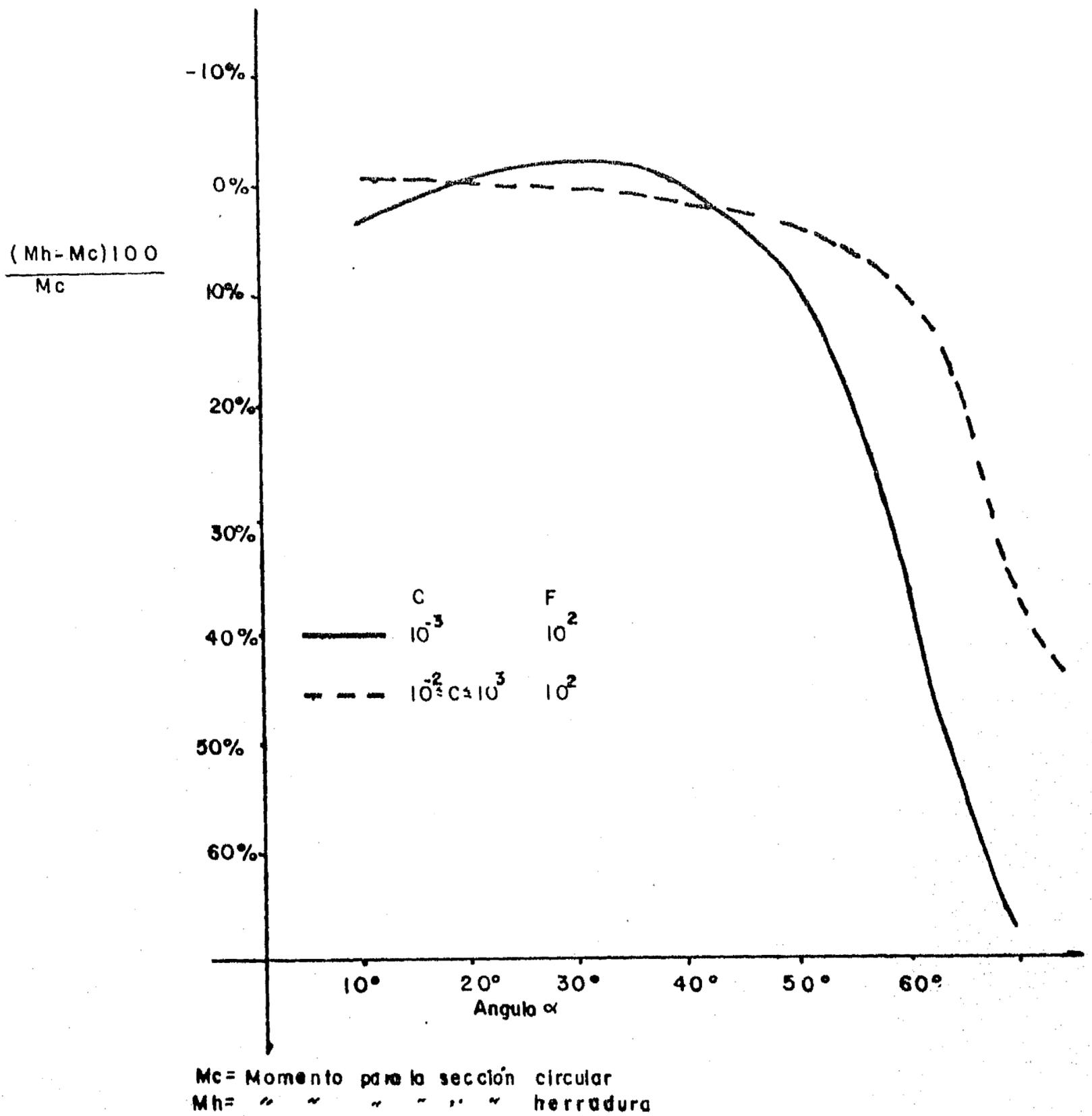


FIG. 4.2.3. d Momentos-en la porción superior de una sección herradura y su relación con la sección circular

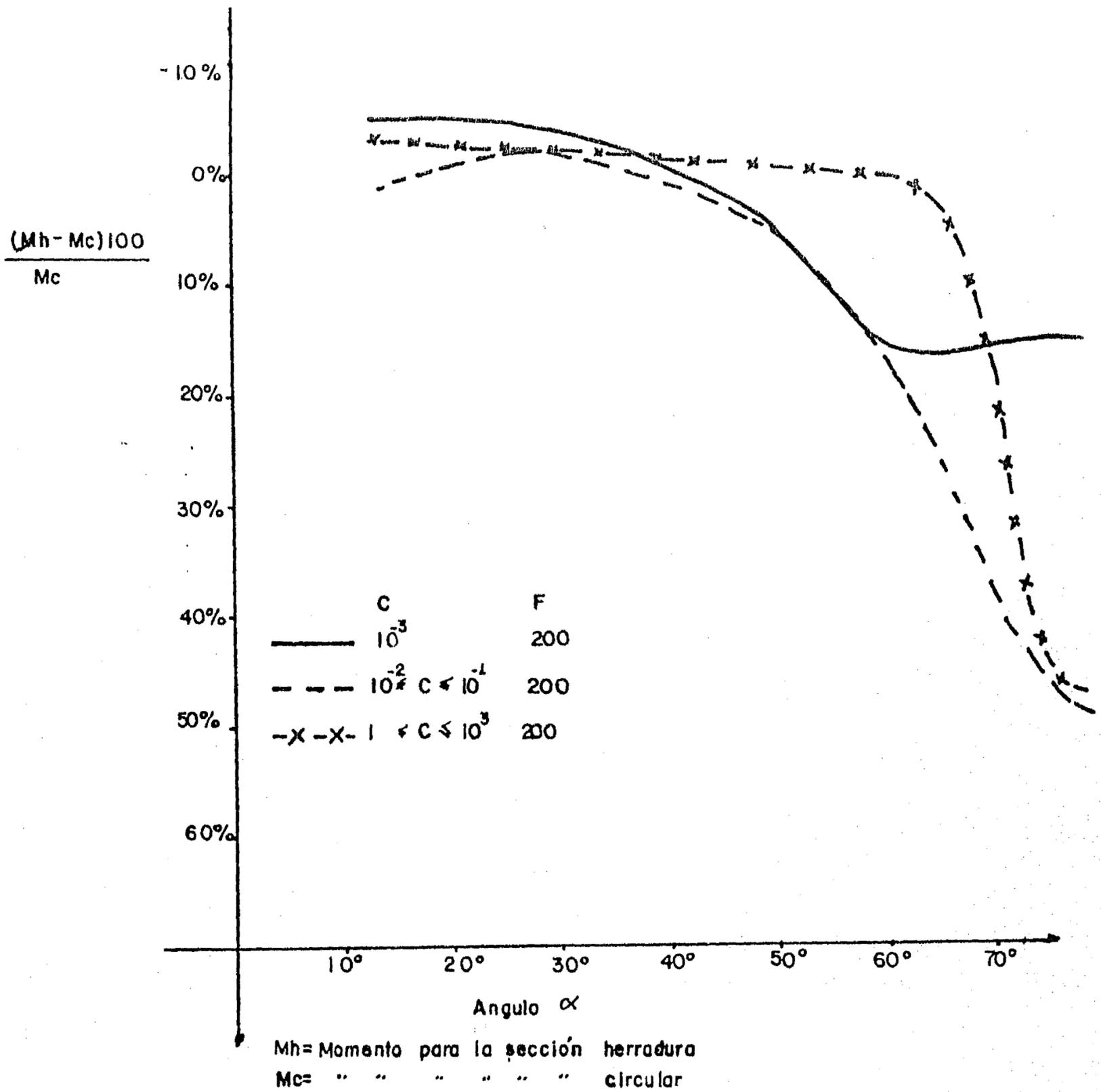
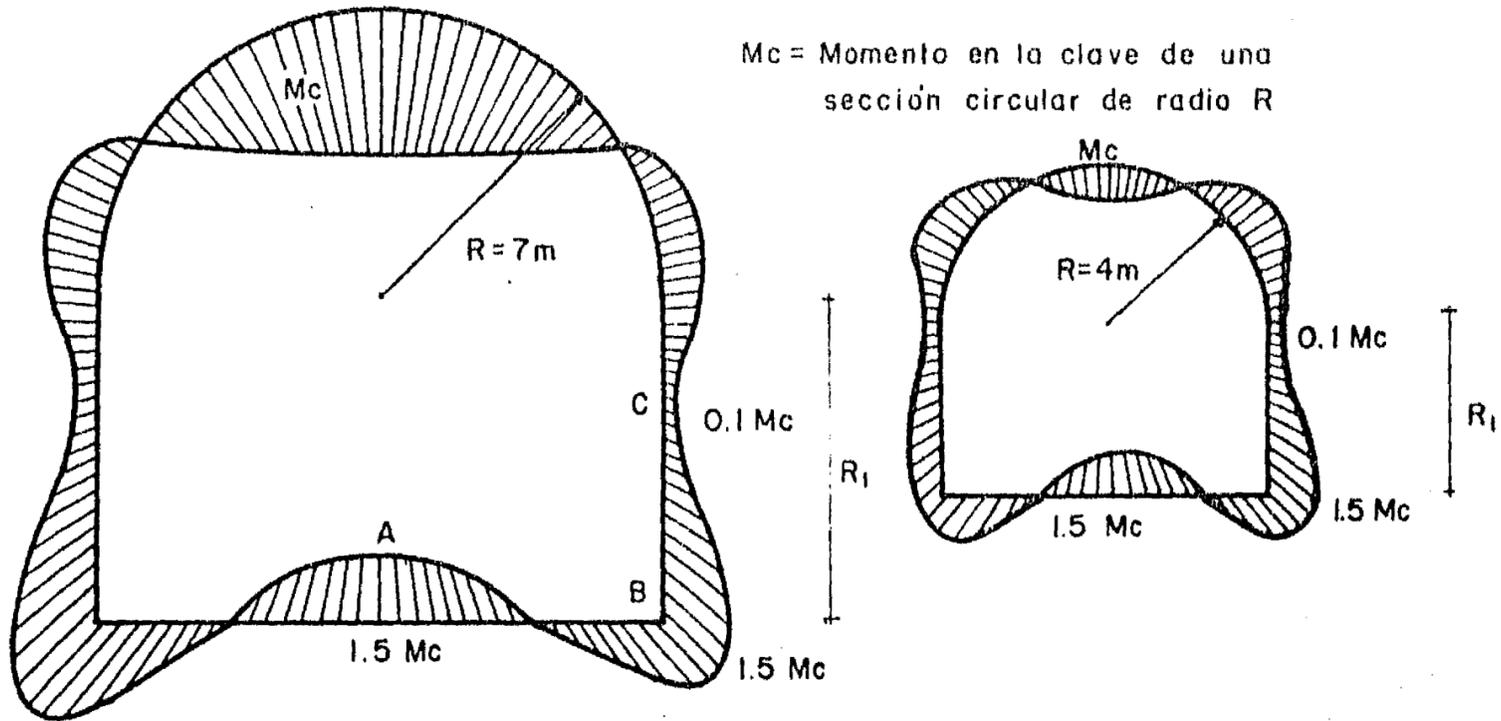


FIG. 4.2.3 e Momentos en la porción superior de una sección herradura y su relación con la sección circular

DIAGRAMAS DE MOMENTOS



DIAGRAMAS DE CORTANTES

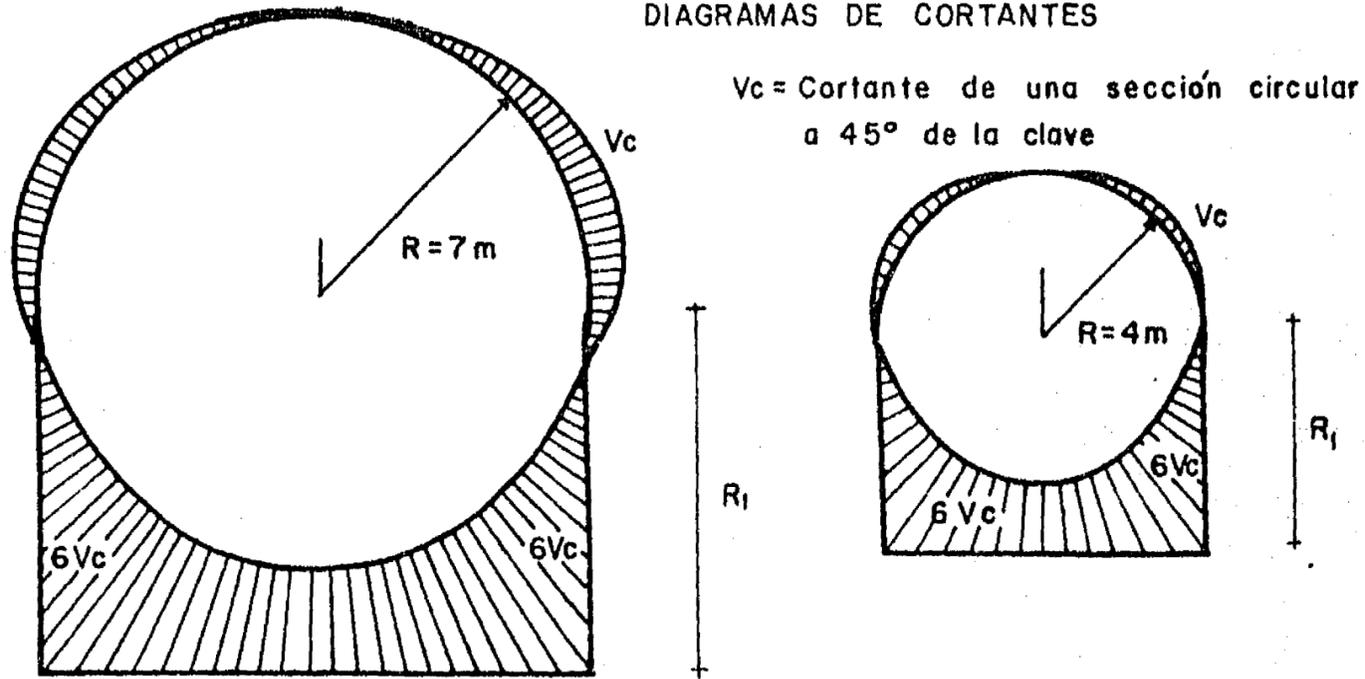


FIG. 4.2.4 Diagramas de momentos y cortantes para dos túneles de diferente tamaño con  $C=100$   $F=100$

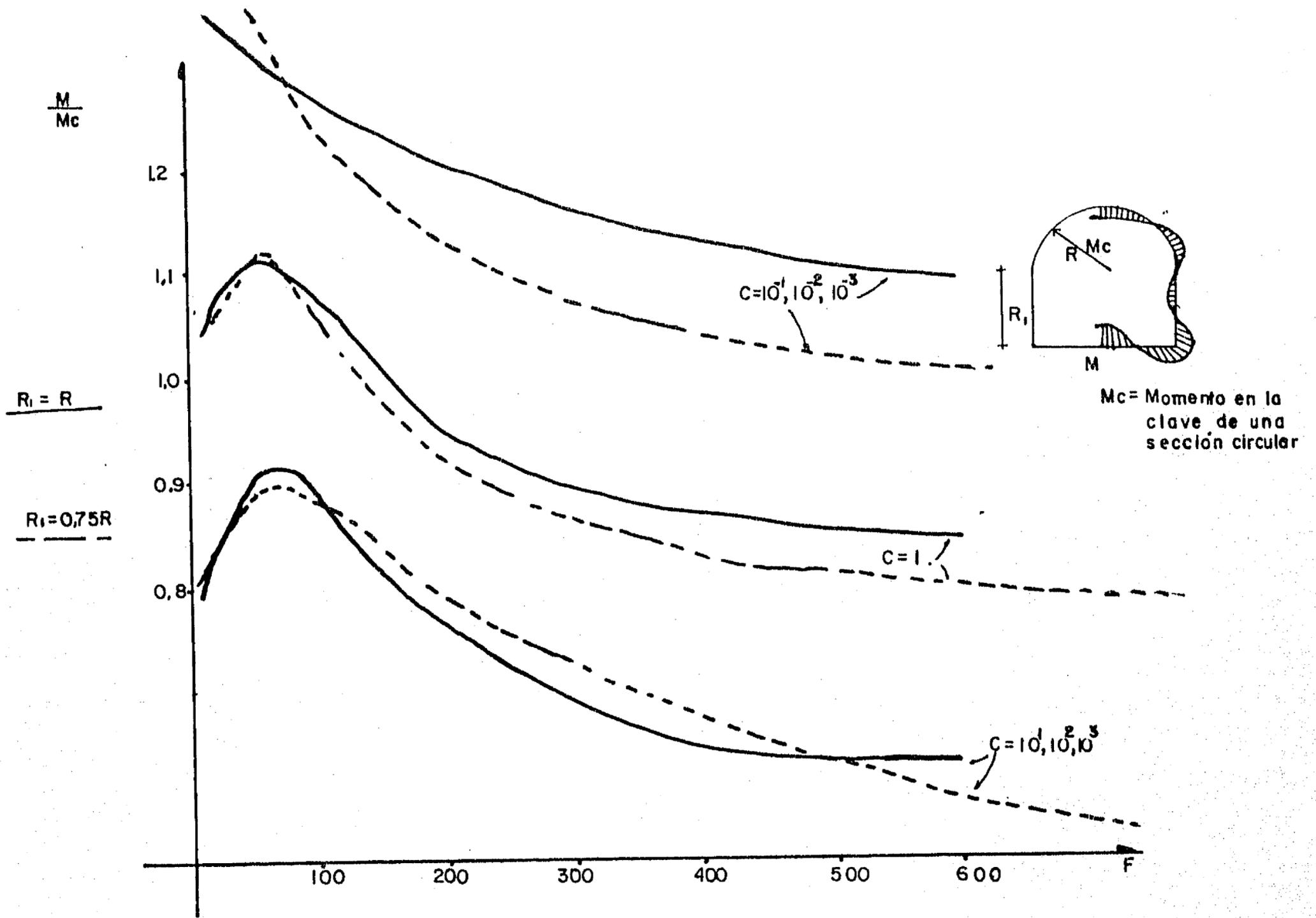


FIG.4.2.5 Normalización del momento de la cubeta de una alcantarilla de radio R

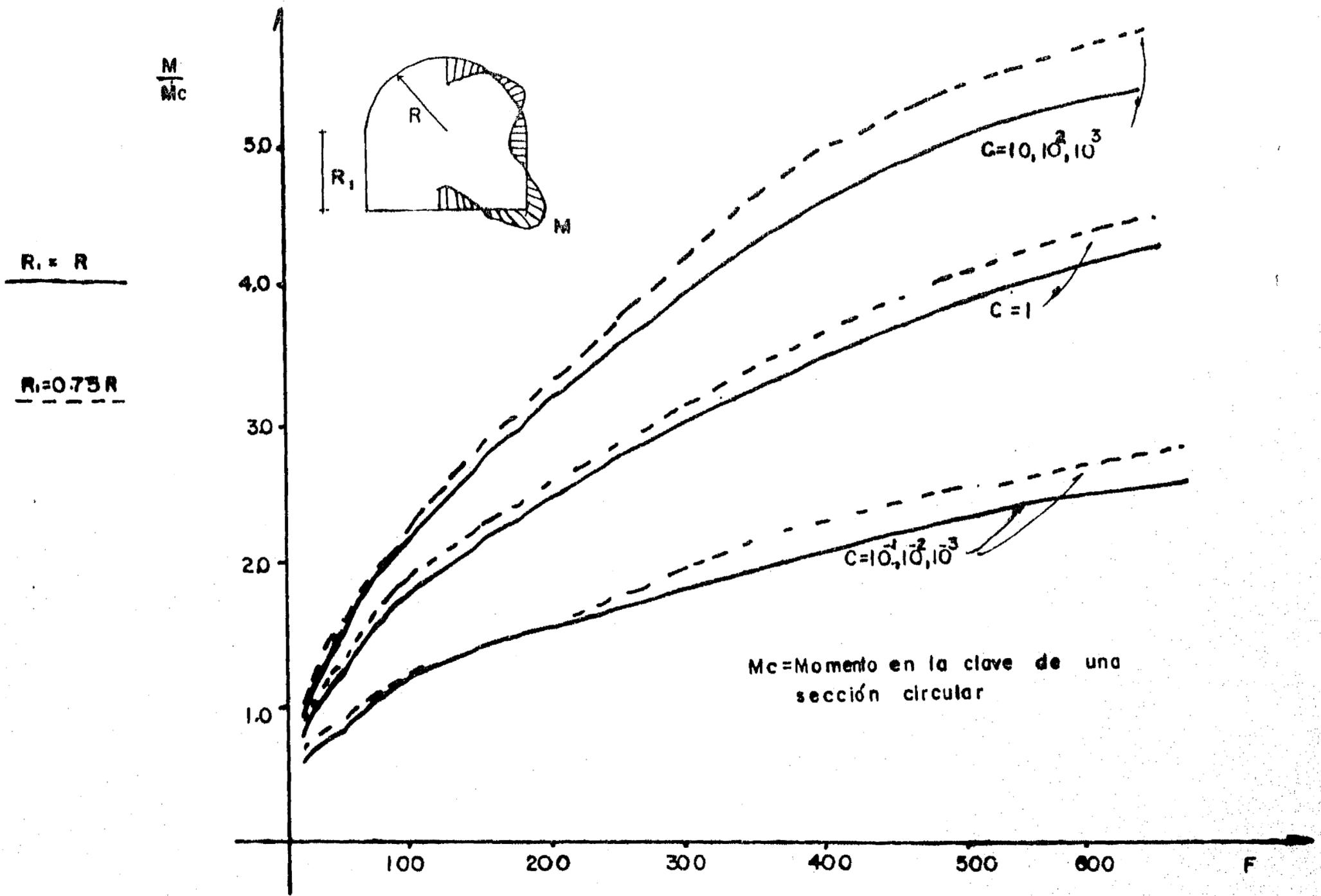


FIG. 4.2.6 Normalización del momento en el quiebre de una sección herradura de radio R

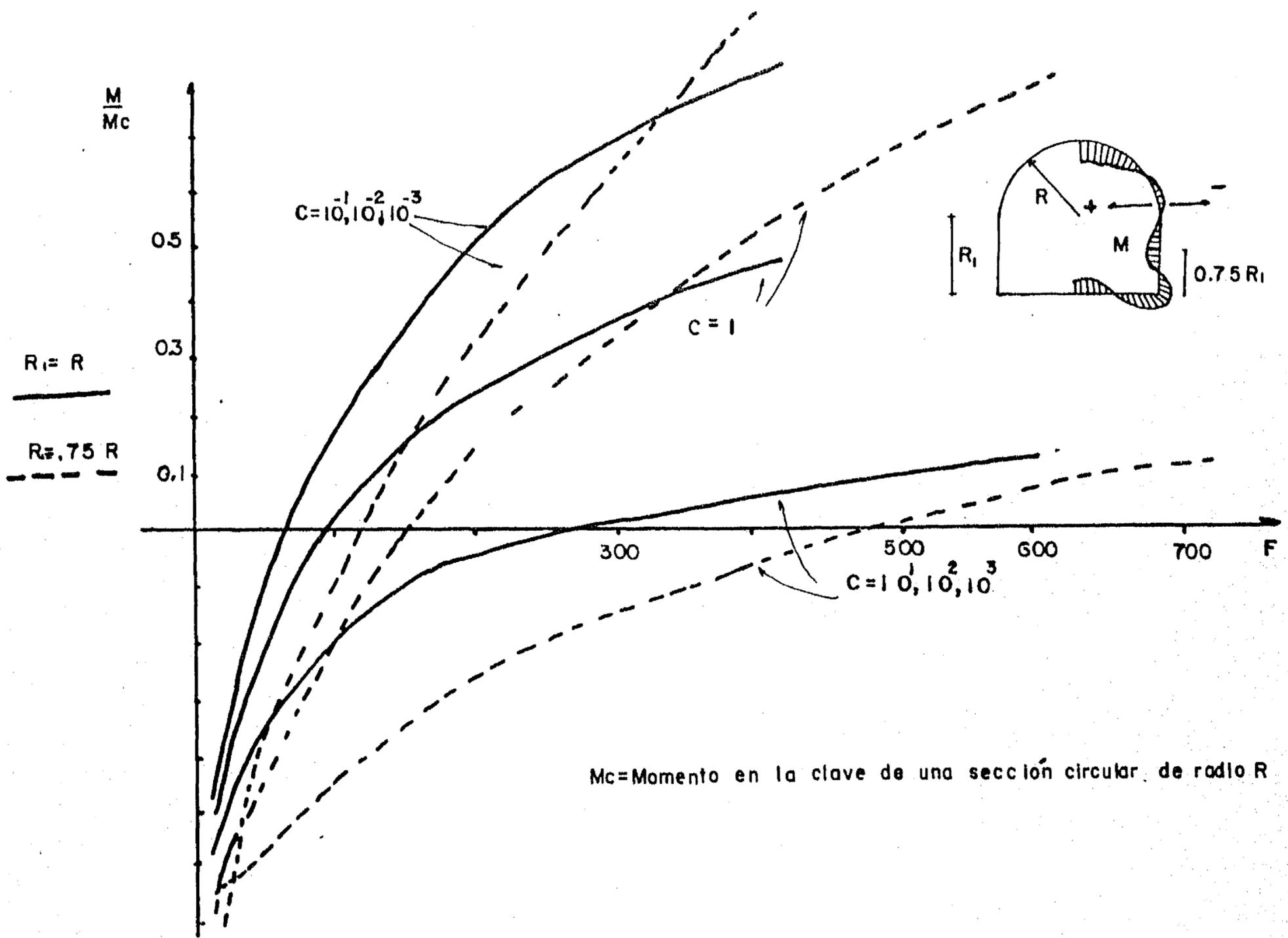


FIG.4,2.7 Normalización del momento a  $0.75 R_i$  de la cubeta de una alcantarilla de sección herradura

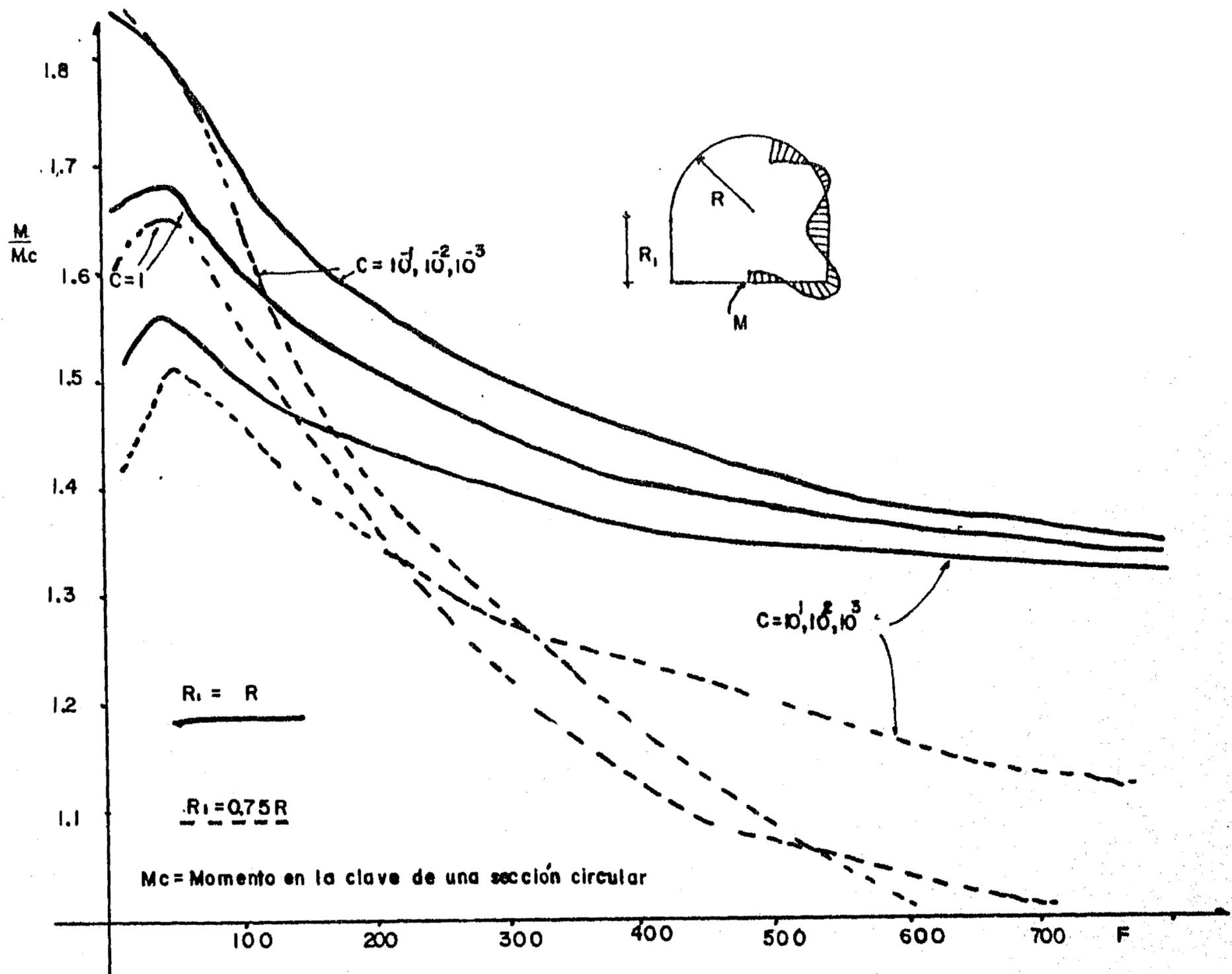


FIG.4.2.8 Normalización del momento en la cubeta de un tunel de sección herradura

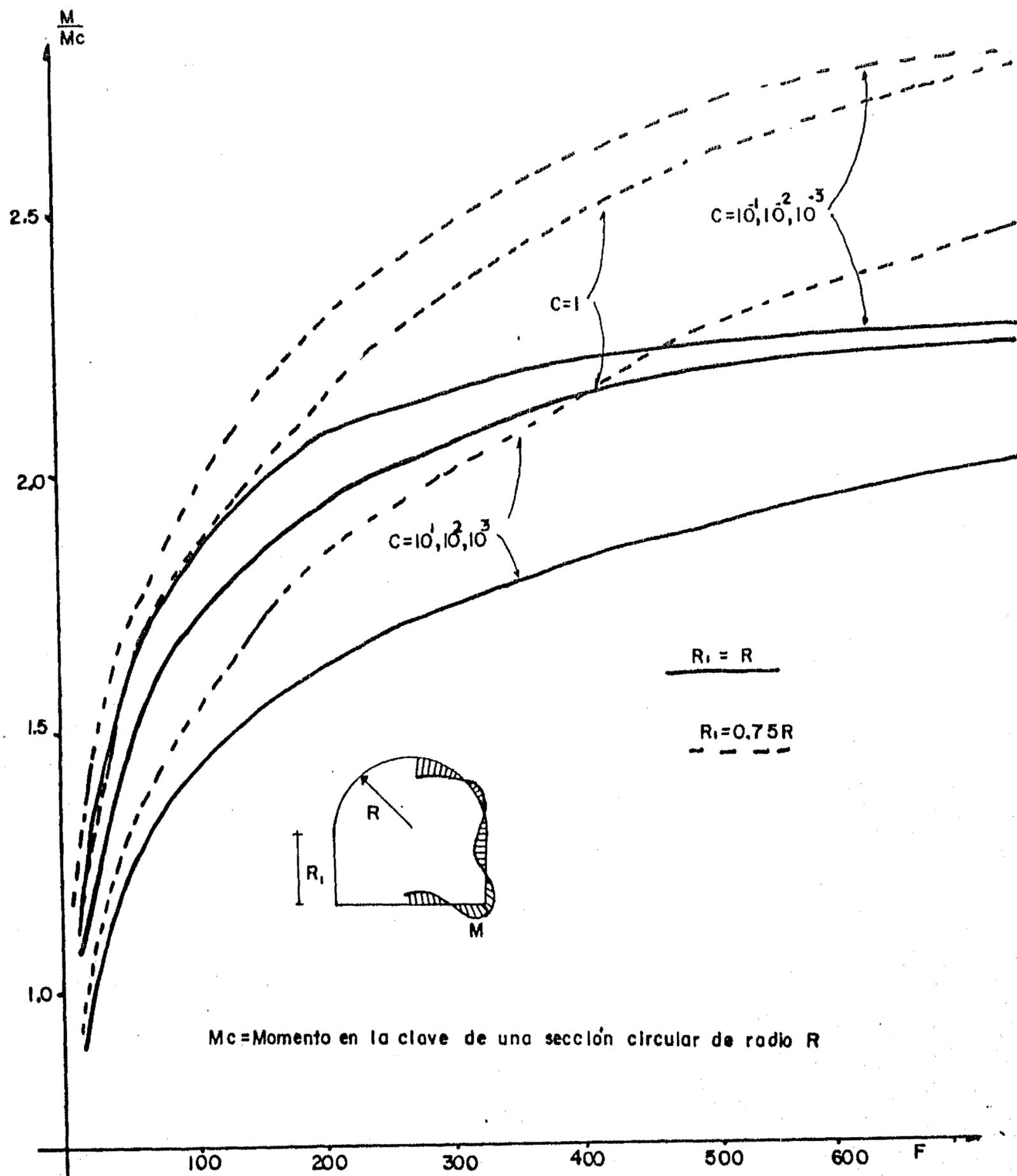
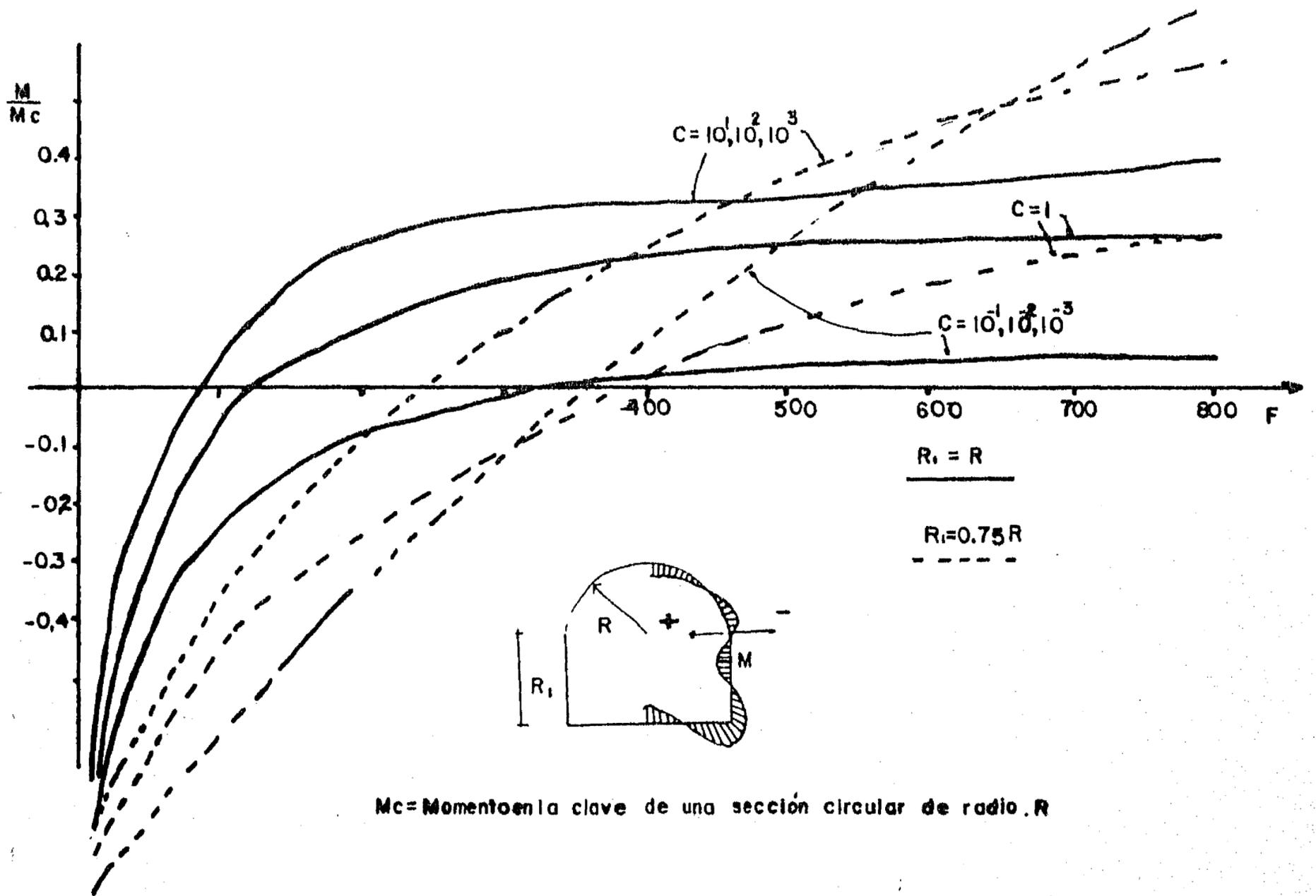


FIG. 4.2.9 Normalización del momento en el quiebre de un túnel de sección herradura



$M_c =$  Momento en la clave de una sección circular de radio  $R$

FIG.4.2.10 Normalización del momento de un línea de sección herradura a  $0.75R$  de la cubeta

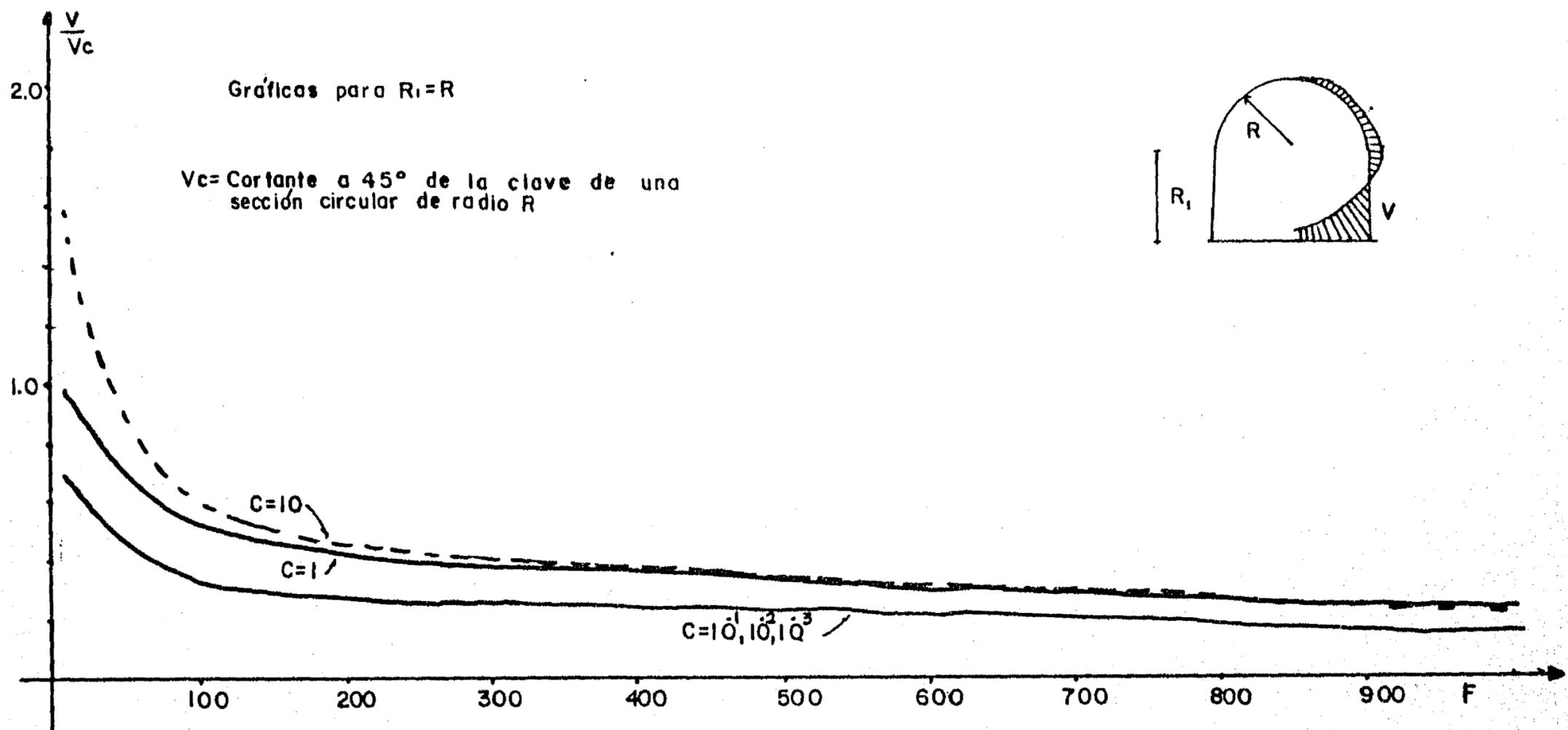


FIG.4.2.11a Normalización del cortante en el quiebre de una alcantarilla de sección herradura

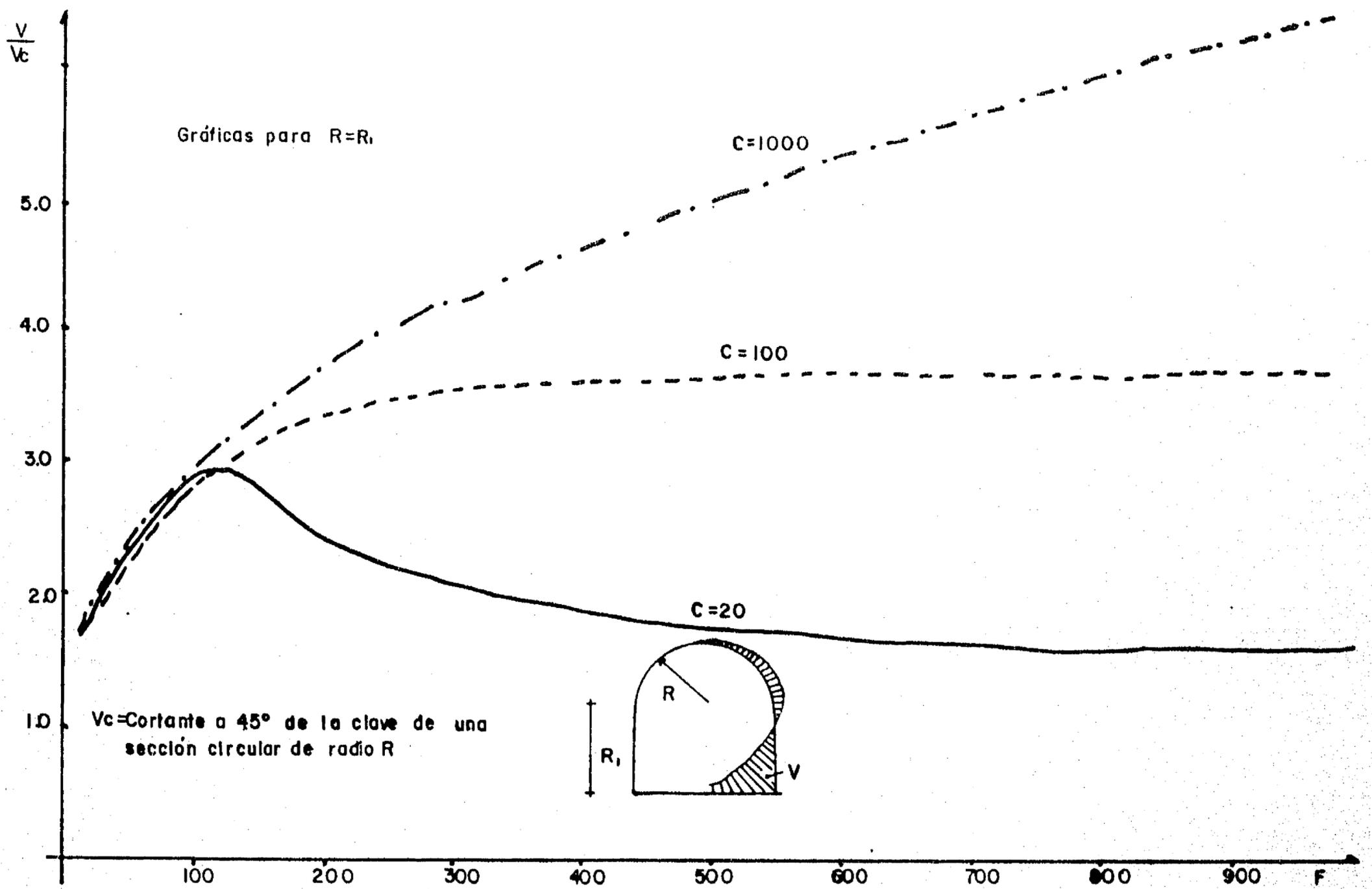
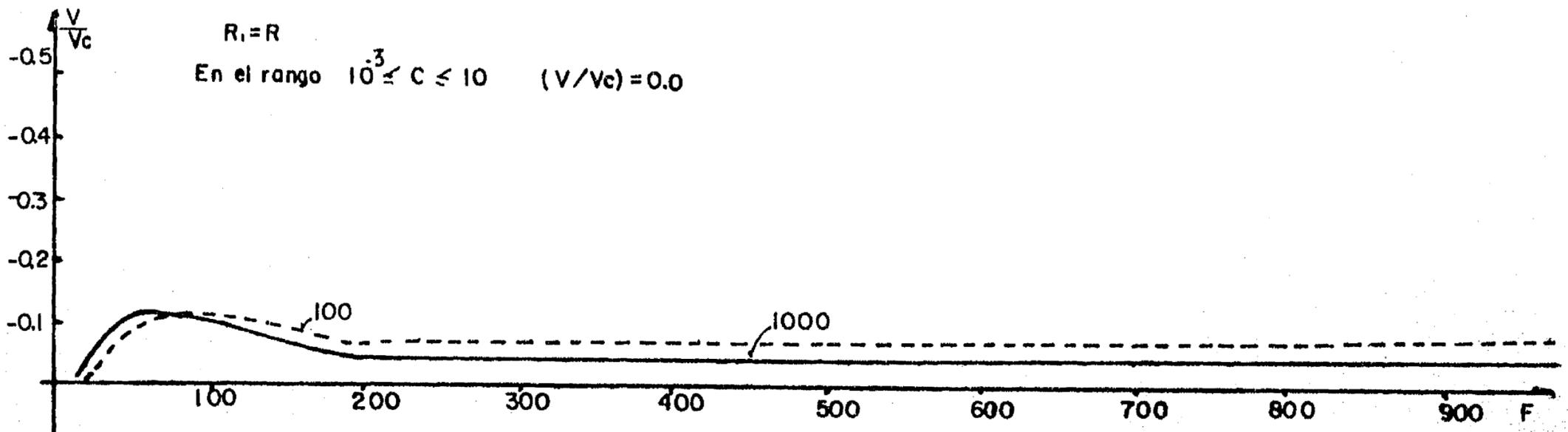


FIG.4.2.11b Normalización del cortante en el quiebre de una alcantarilla de sección herradura



$V_c =$  Cortante a  $45^\circ$  de la clave de una sección circular de radio  $R$

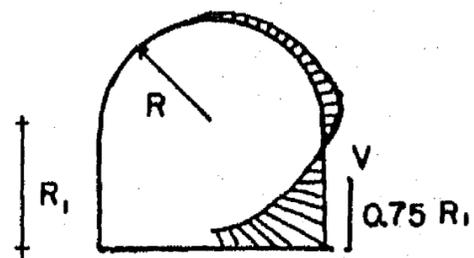


FIG.4.2.12 Normalización del cortante de una alcantarilla de sección herradura a  $0,75 R_1$  de la cubeta

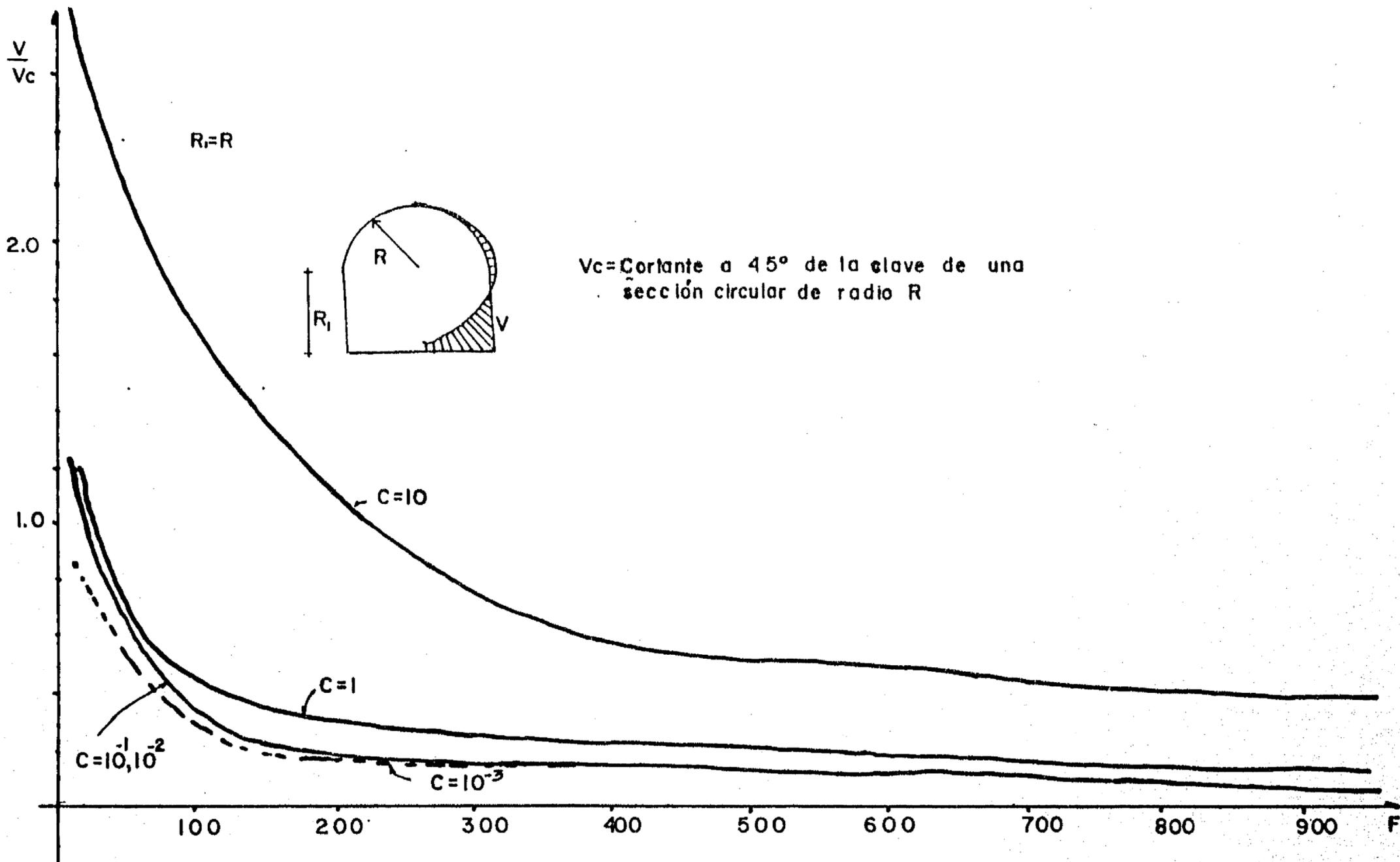


FIG.4.2.13a Normalizaci3n del cortante en el quiebre de un t3nel de secci3n herradura

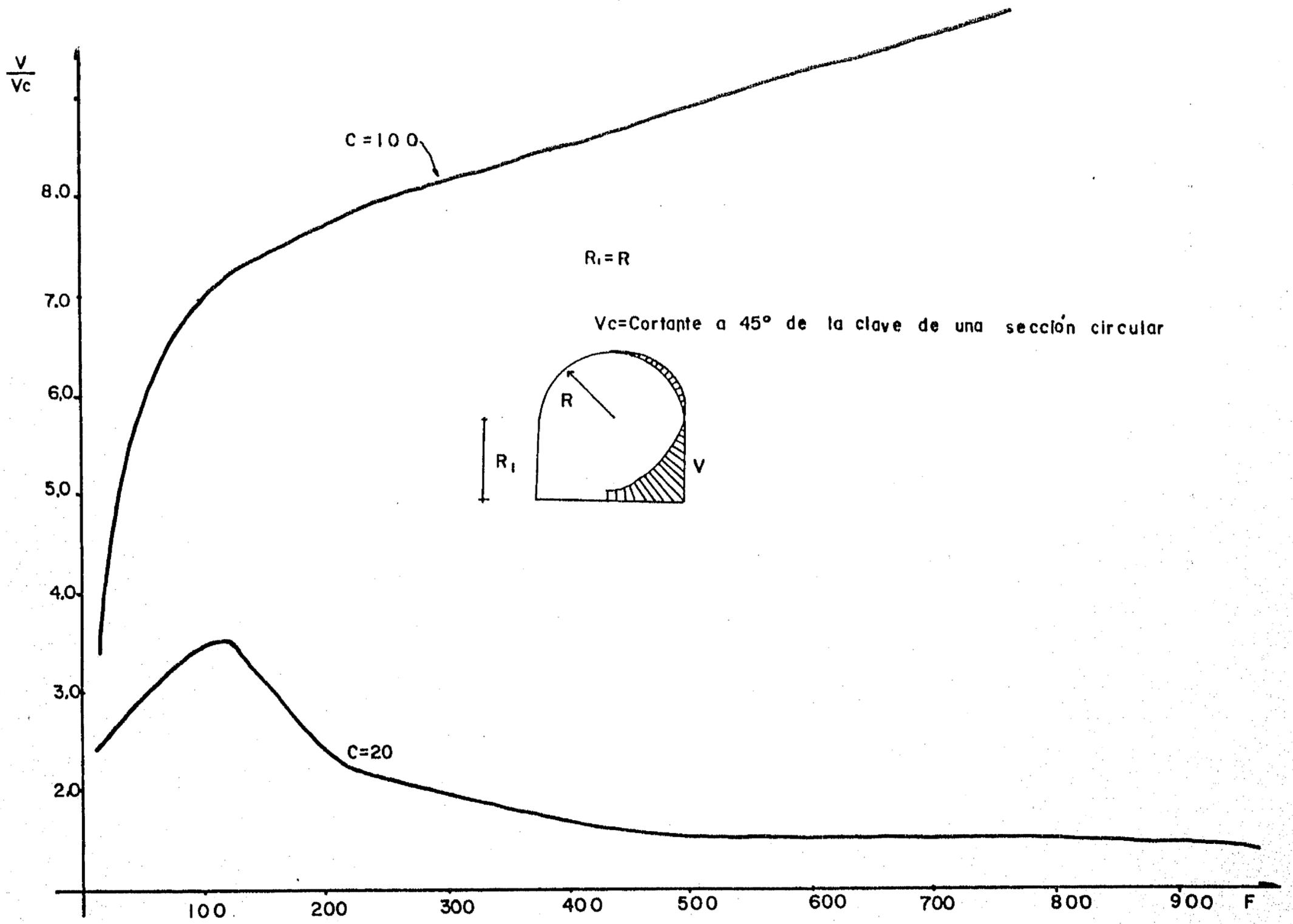


FIG.4.2.13 b Normalización del cortante en el quiebre de túnel de sección herradura

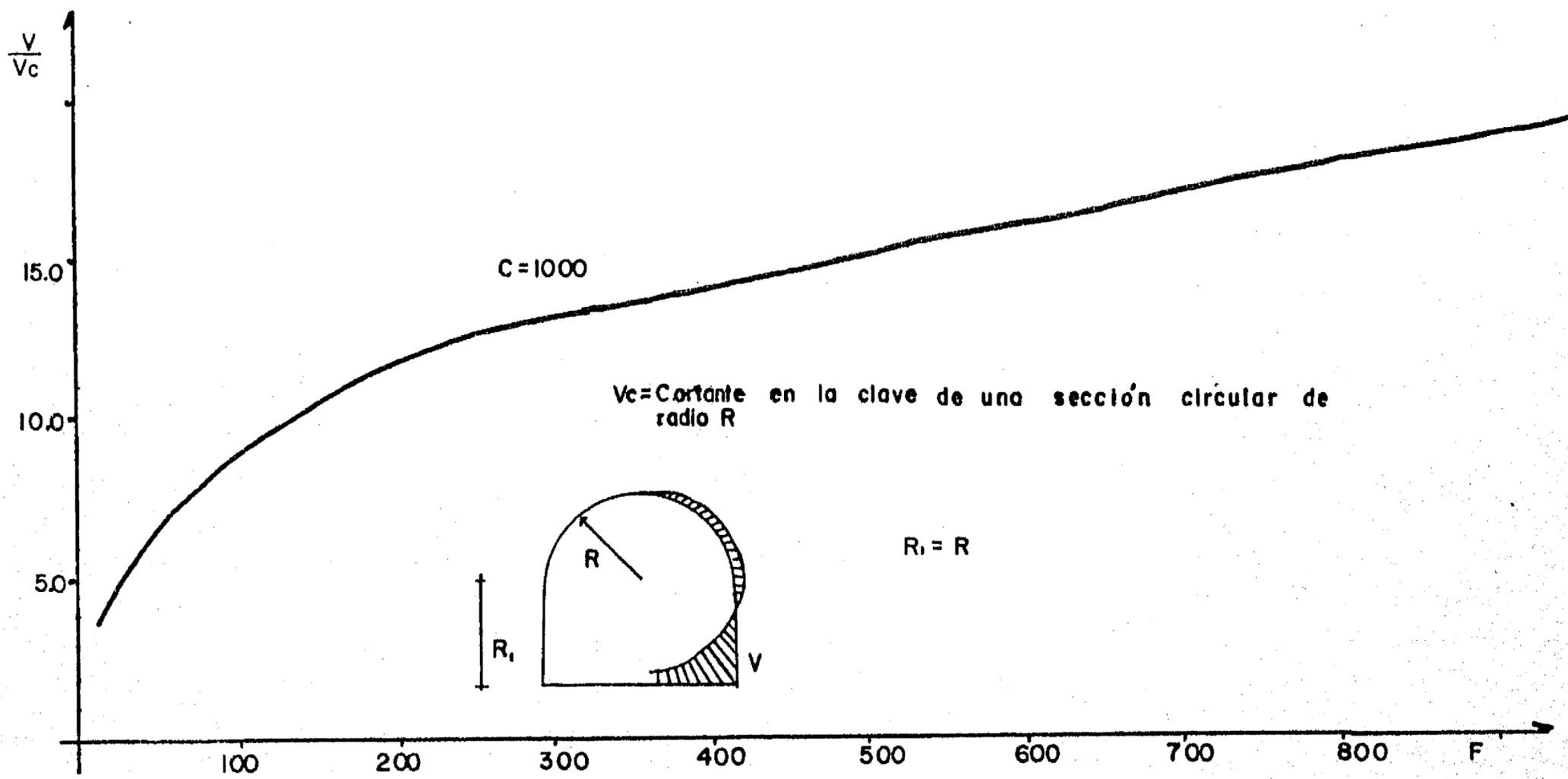


FIG.4,2,13 c Normalización del cortante en el quebre de un túnel de sección herradura

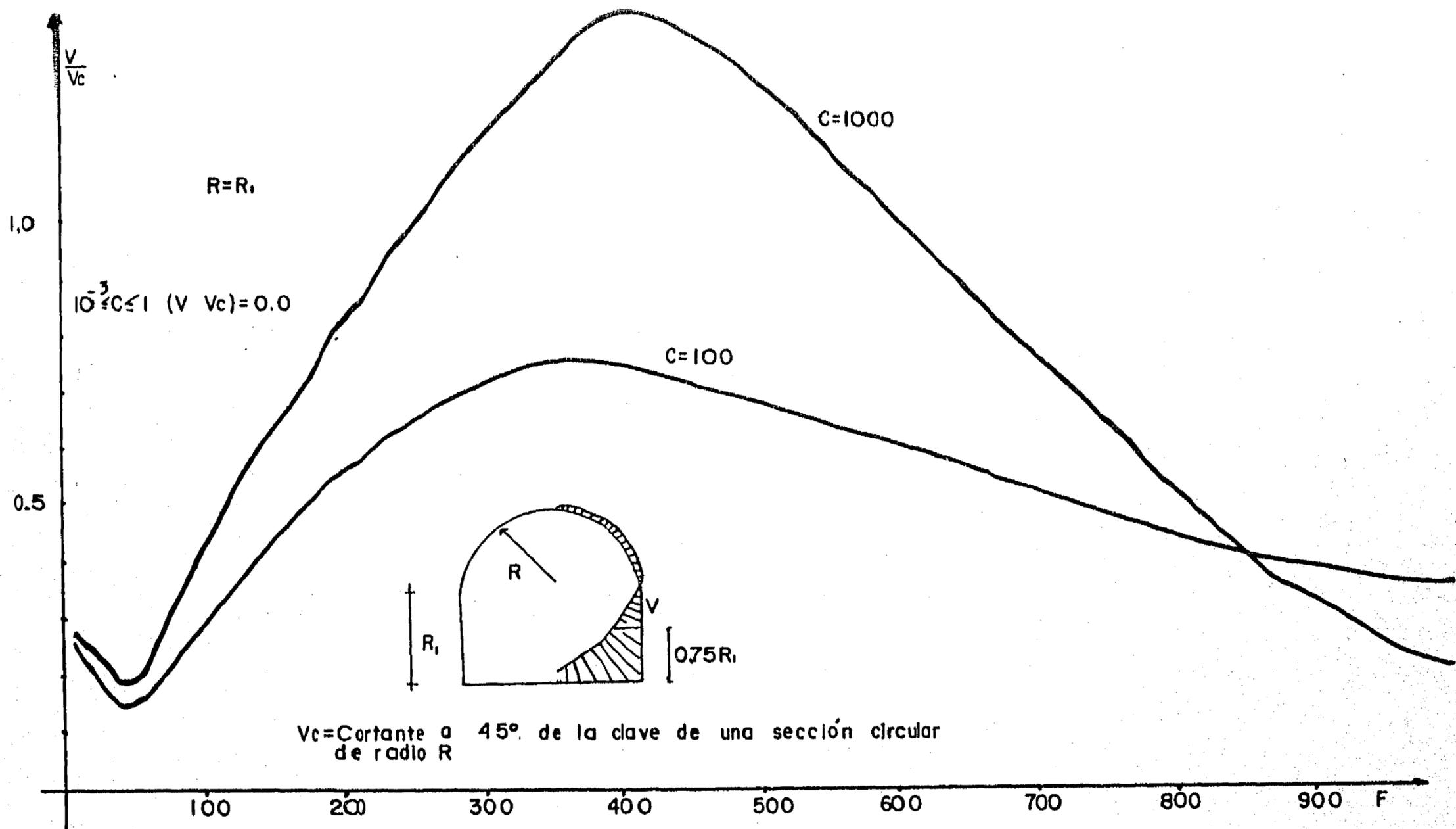


FIG.4.2.14 Normalización del cortante de un túnel de sección herradura a  $0.75R_1$  de la cubeta

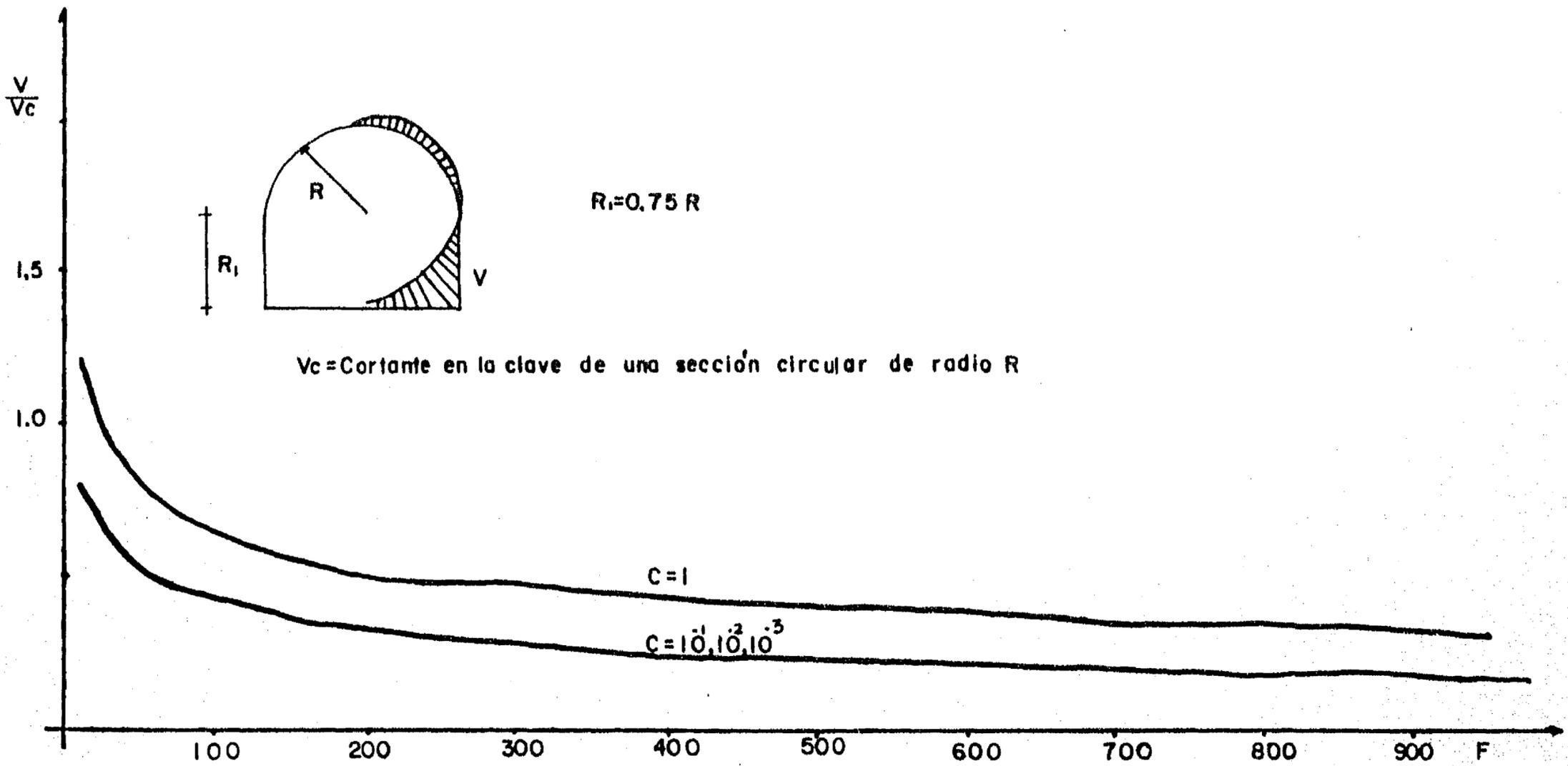


FIG. 4.2.15a Normalización del momento en el quiebre de una alcantarilla de sección herradura con  $R_1 = 0.75R$

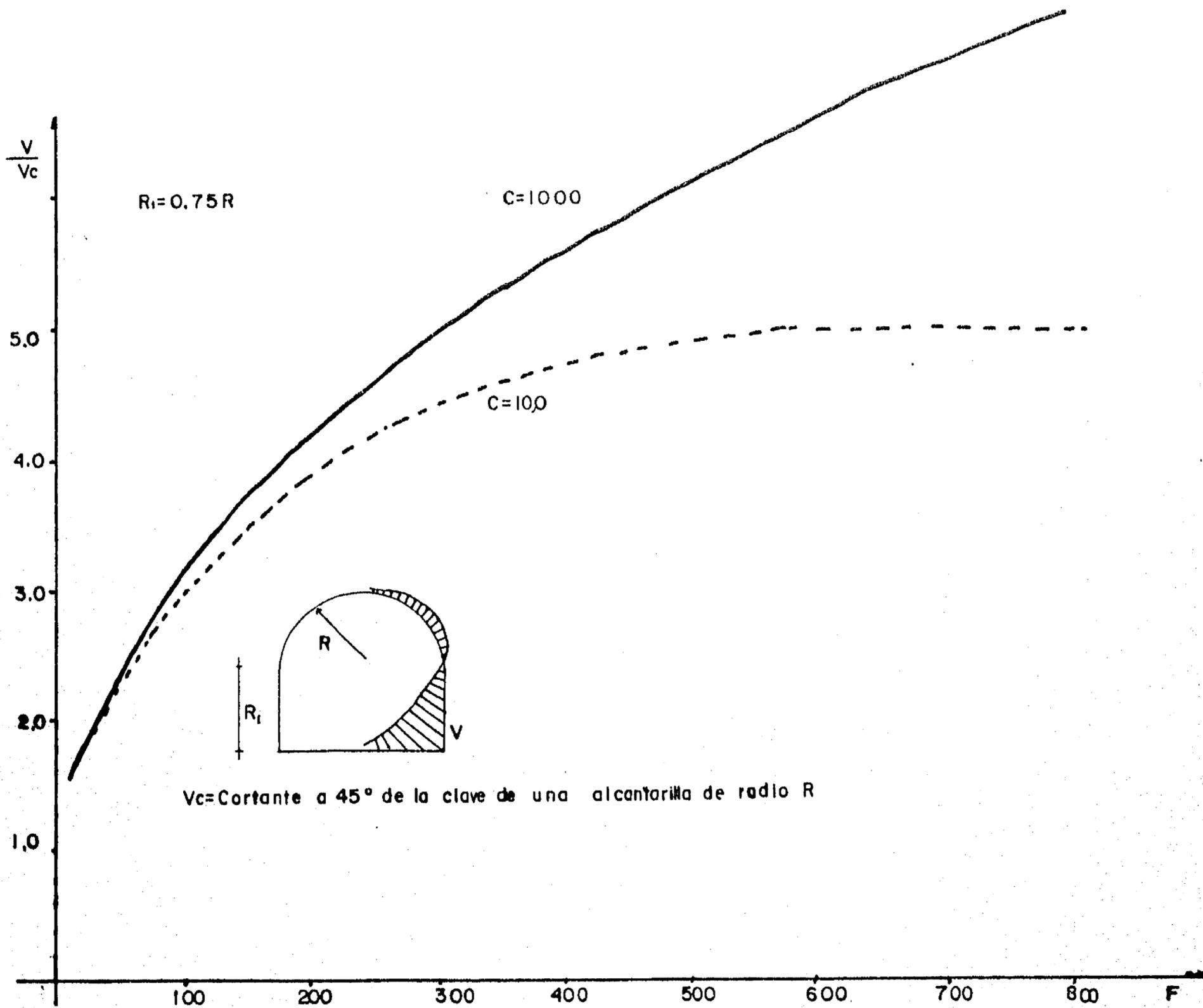


FIG. 4.2.15b Normalización del cortante en el quiebre de una alcantarilla con  $R_i=0.75R$

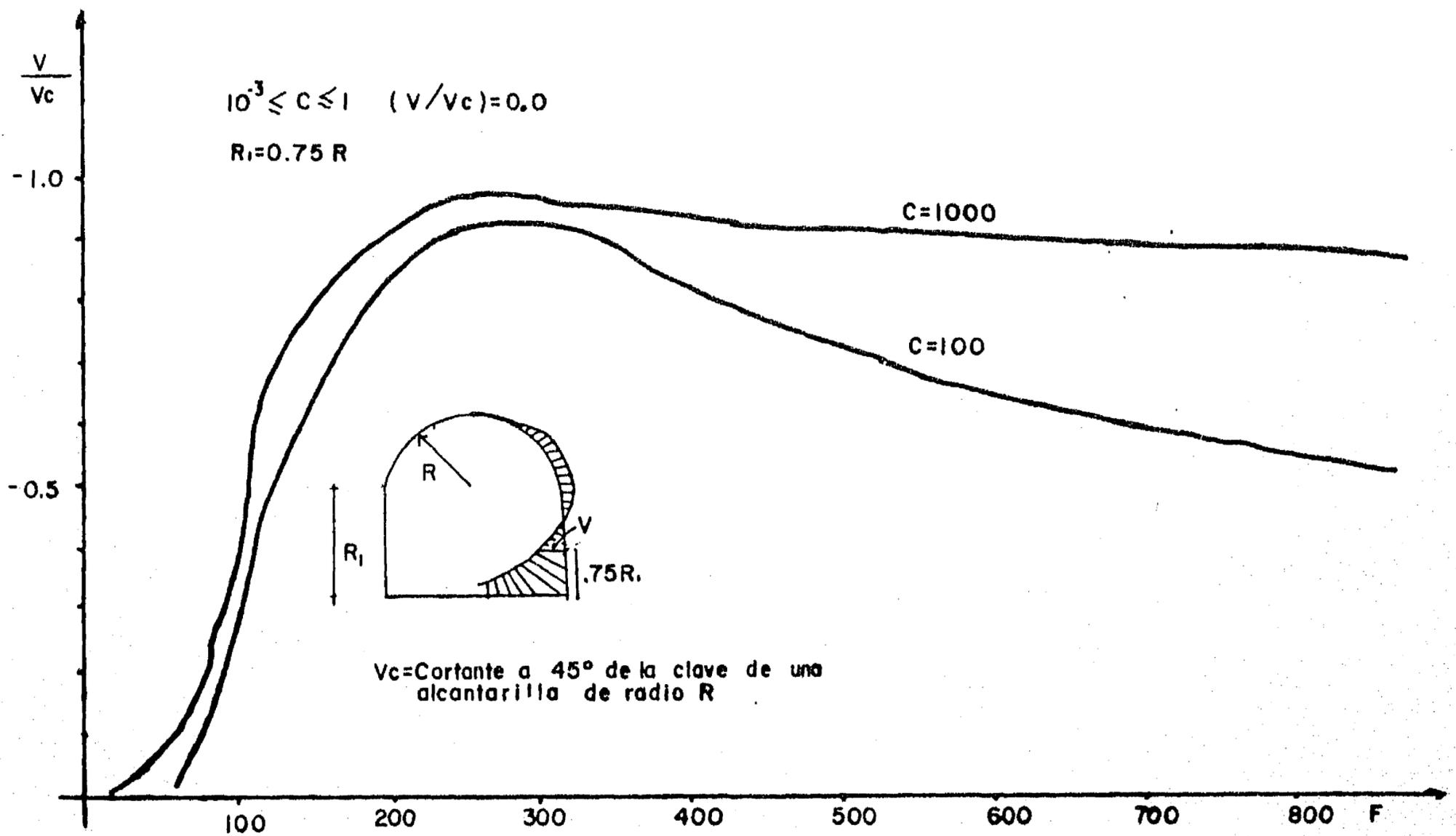


FIG.4.2.16 Normalización del cortante en una alcantarilla de sección herradura a  $0.75R$ , de la cubeta y para  $R_1 = 0.75R$

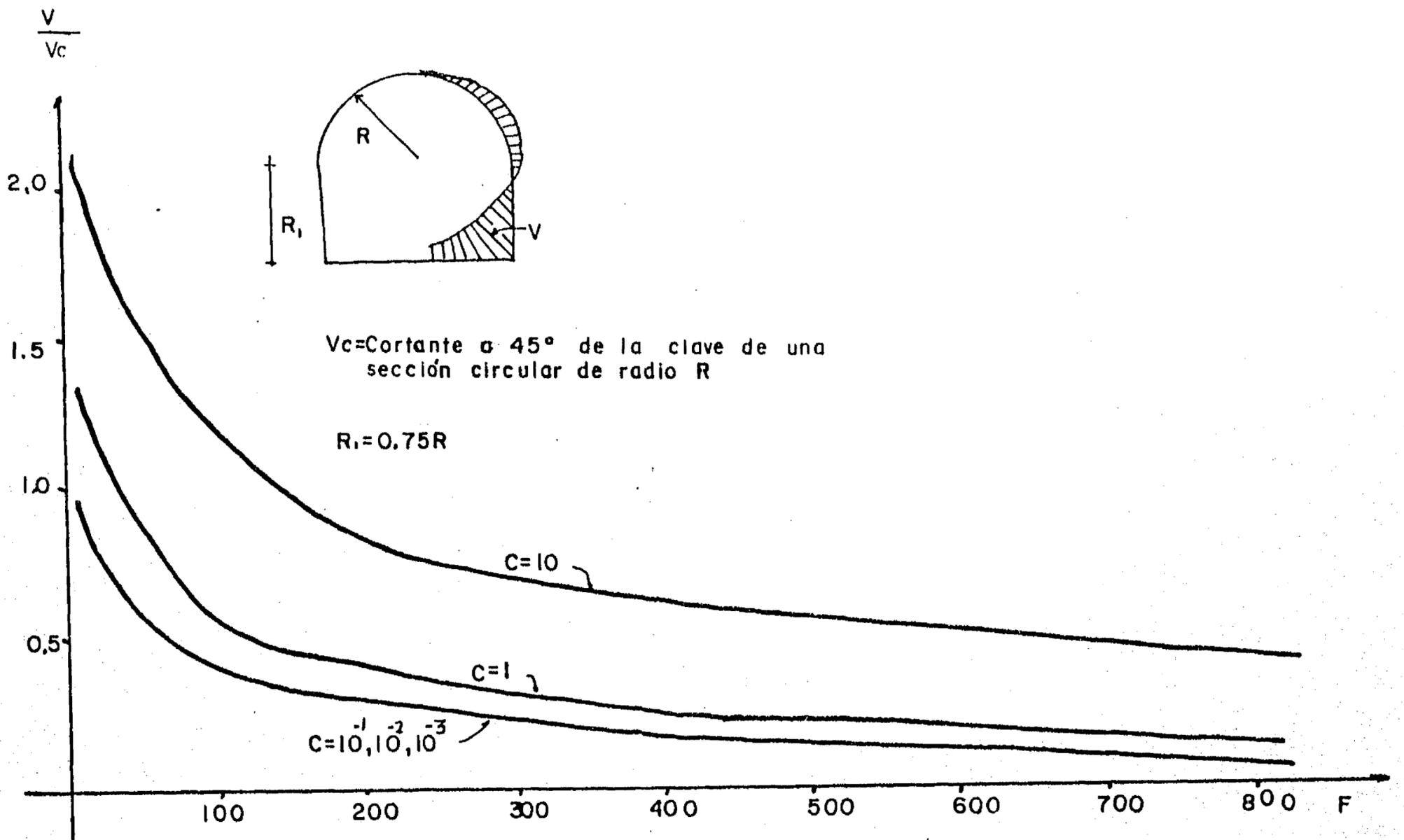


FIG.3.2.17a Normalizaci3n del cortante en el quiebre de un t3nel de secci3n herradura, con  $R_1 = .75R$

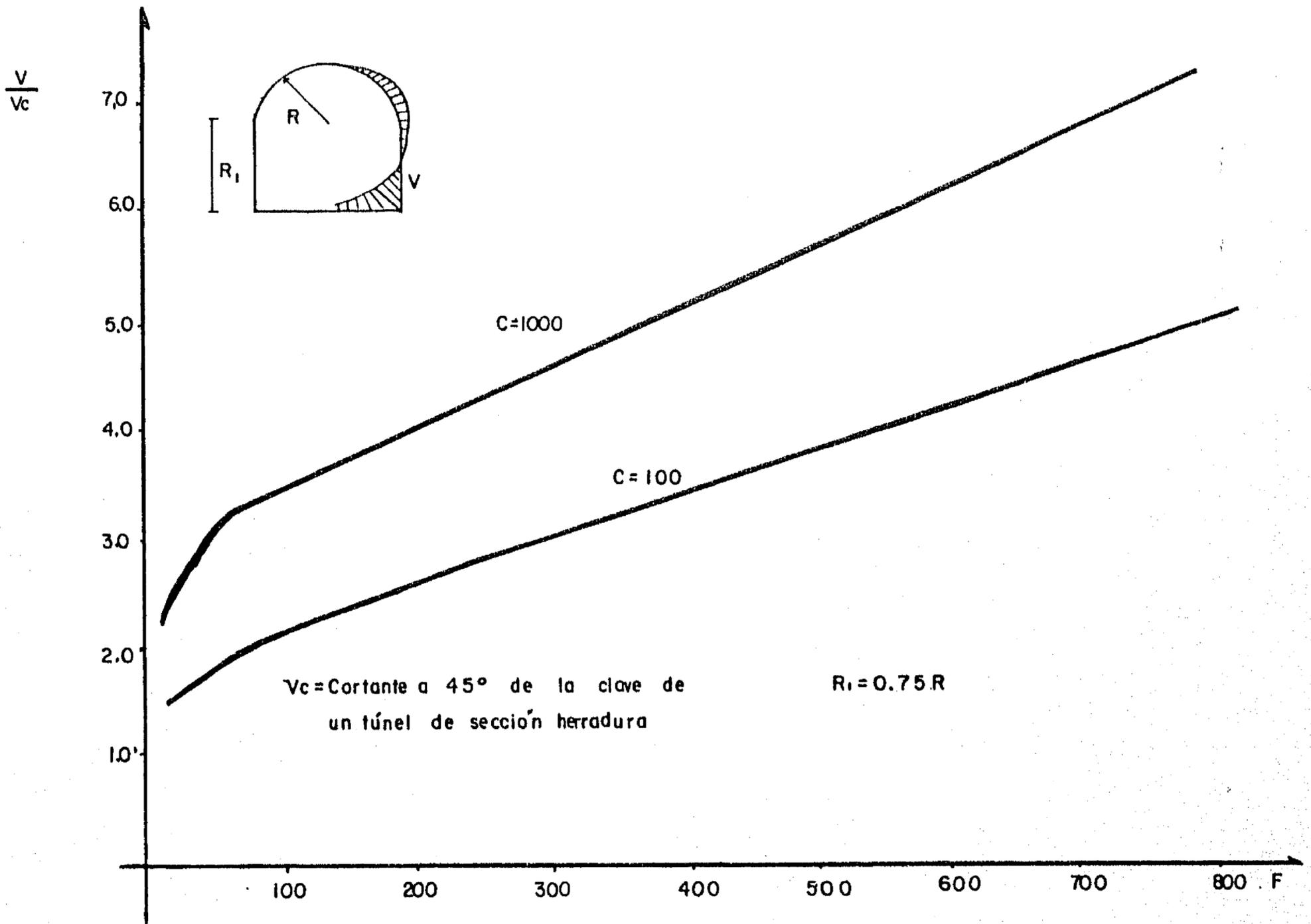


FIG.4.2.17b Normalización del cortante en el quiebre de un túnel de sección herradura, con  $R_i=0.75 R$

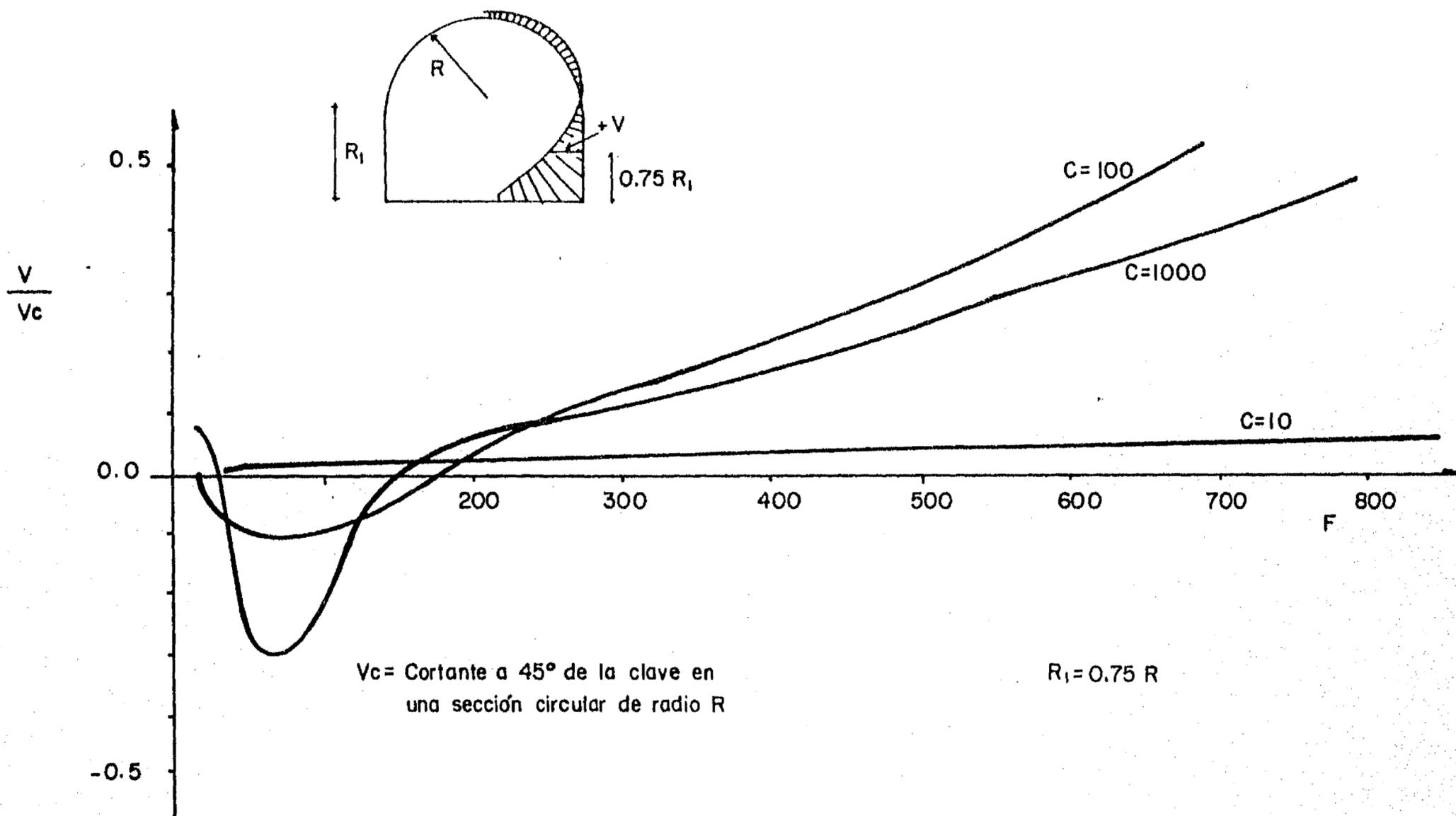


FIG.4.2.18 Normalización del cortante de un túnel de sección herradura a  $0.75 R_1$  de la cubeta, con  $R_1=0.75 R$

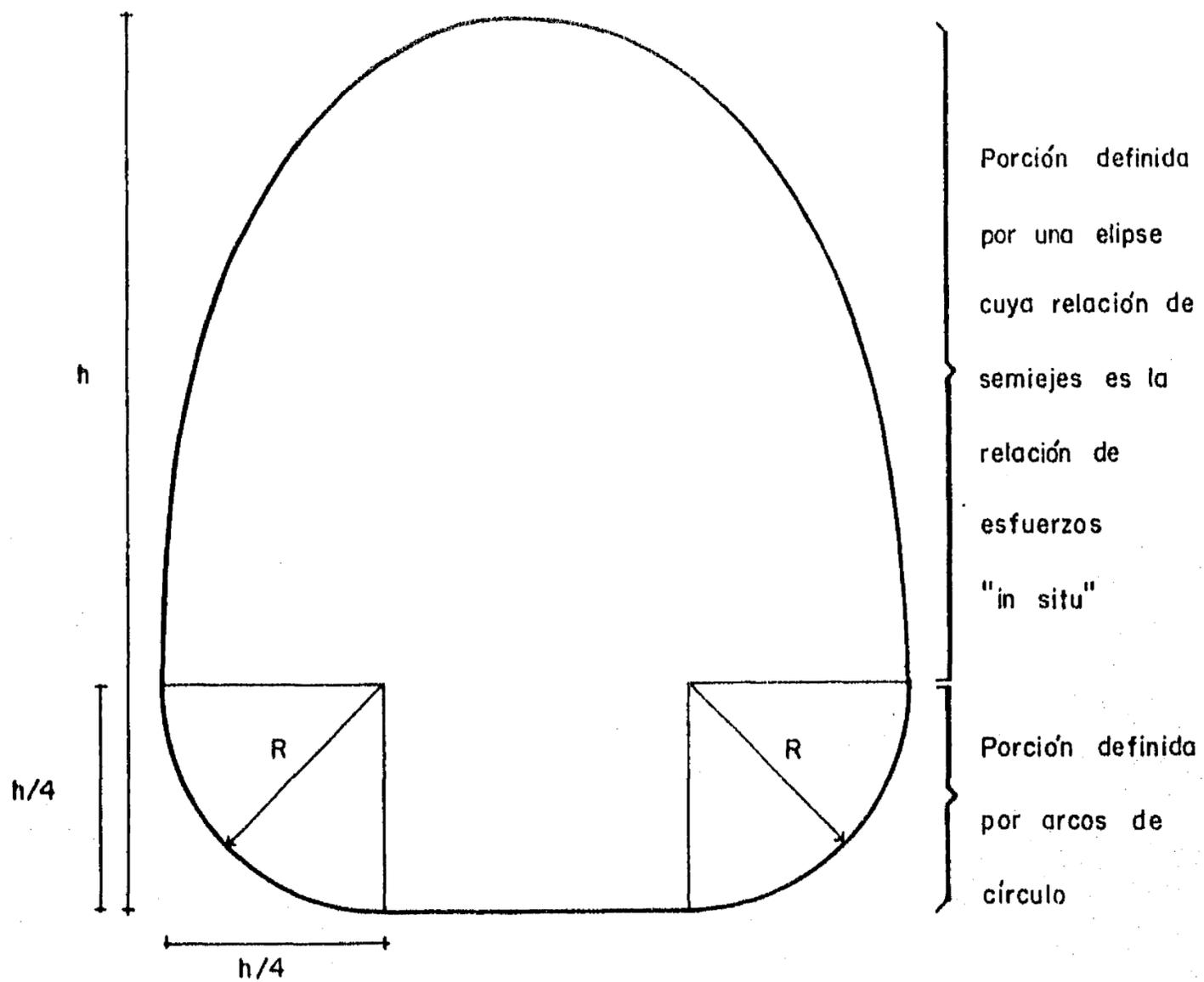


FIG.4.3.1 SECCION GOTA DE AGUA

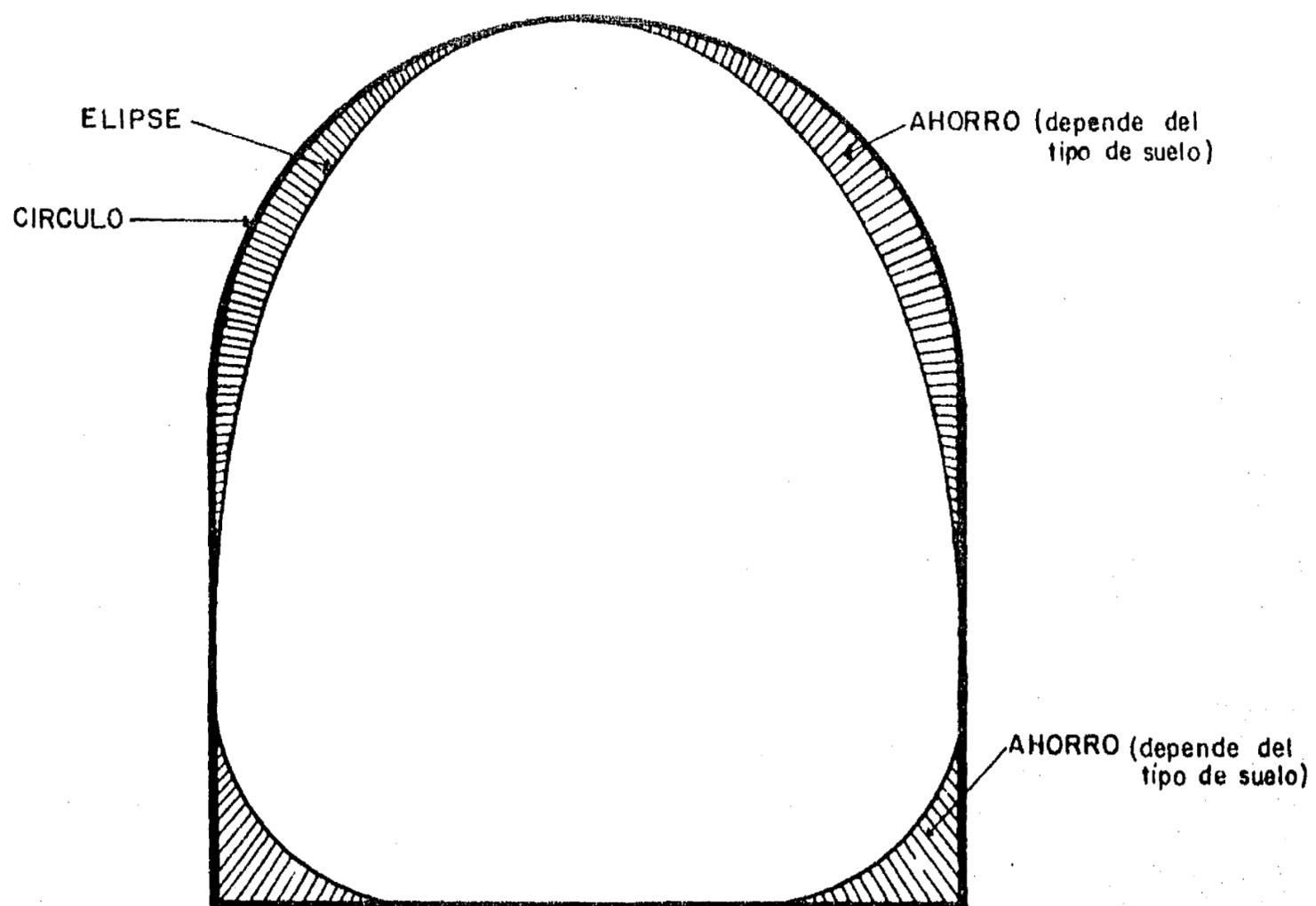


FIG.4.3.2 Ahorro potencial en excavación de una sección GOTA DE AGUA y una HERRADURA

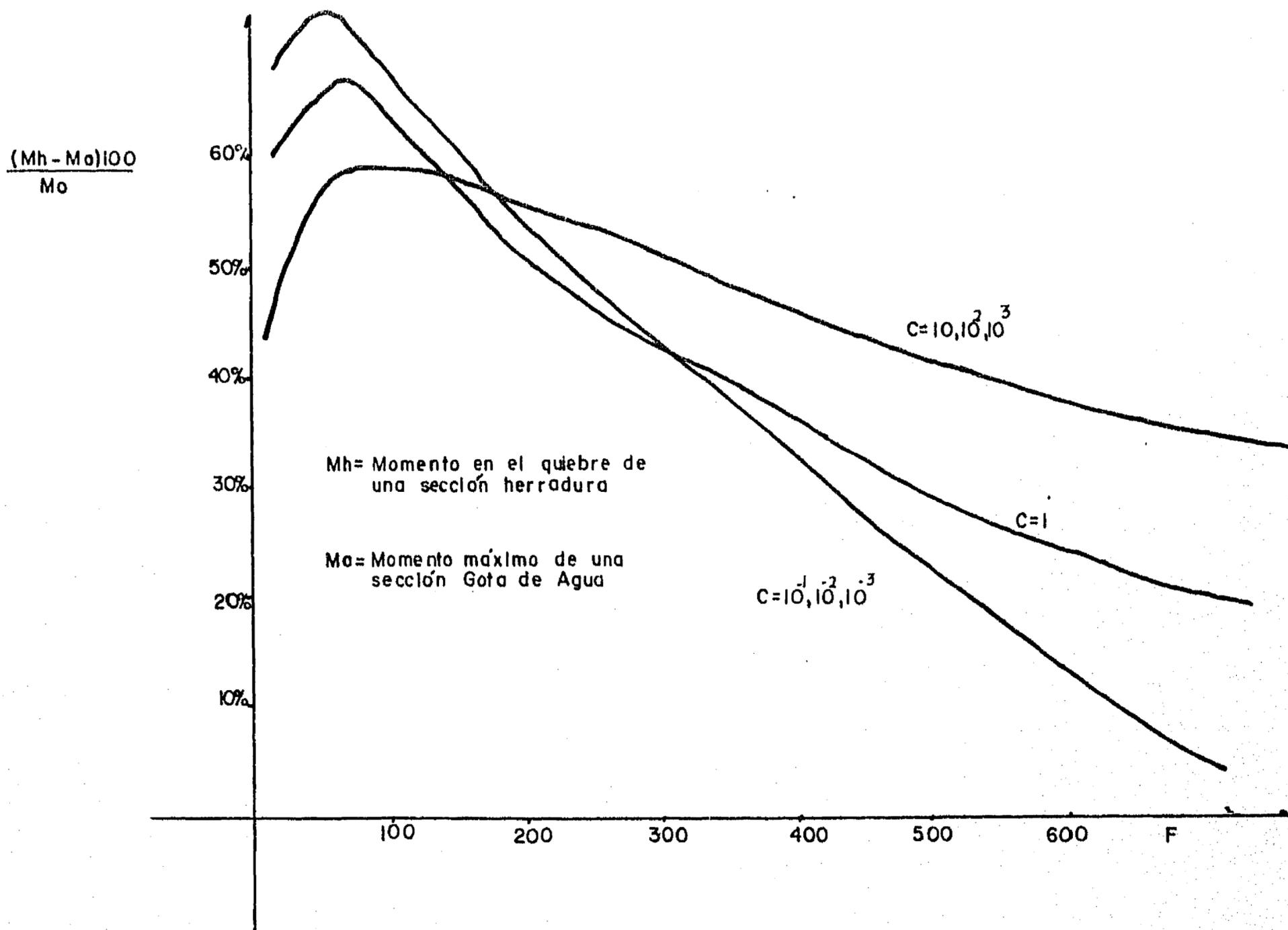


FIG.4.3.3. Momentos en túneles con secciones herradura y gota de agua equivalentes

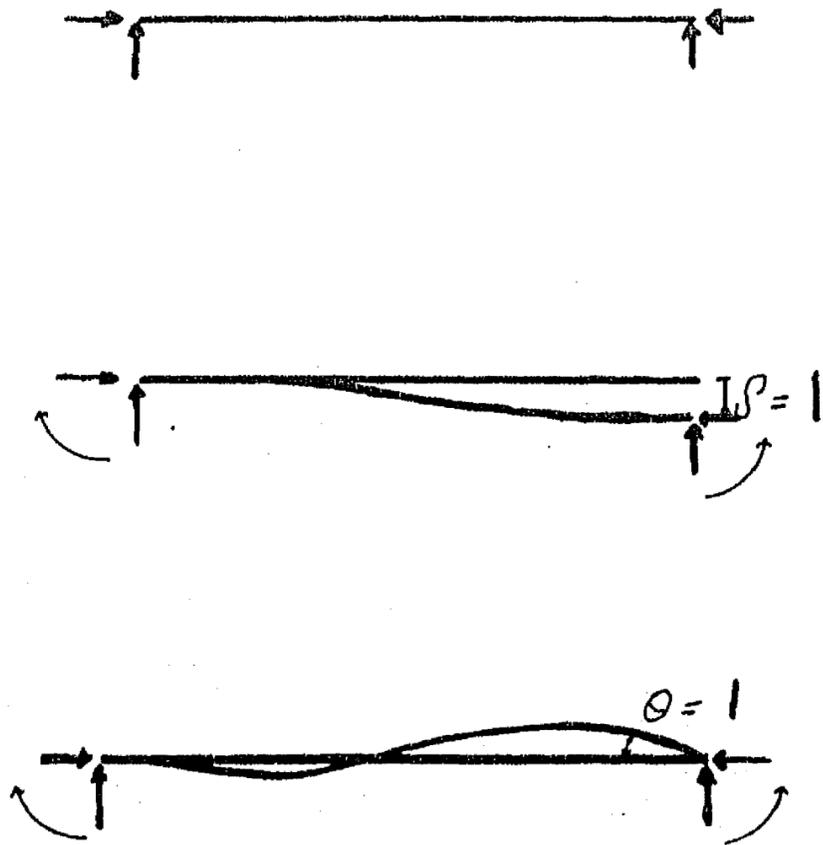


FIG. Anexo C-1 Diagramas para plantear la matriz de rigideces del elemento viga

## A N E X O S

A N E X O A. Solución elástica para el sistema  
suelo-soporte.

A N E X O B. Teoría del Método del Elemento Finito.

A N E X O C. Planteamiento de la matriz de rigidez del  
elemento viga.

A N E X O D. Manual del usuario del programa MEFPC.

Anexo A.- Solución elástica para el sistema suelo-soporte

Como se ha mencionado en el capítulo 2, el campo deformativo elástico del sistema *suelo-soporte* se puede determinar suponiendo que; el túnel o la alcantarilla es una cavidad cilíndrica, el revestimiento es un cilindro de pared gruesa, el medio es infinito, la masa de suelo es homogénea isotrópica y linealmente elástica, las cargas no varían con la profundidad y el sistema *suelo-soporte* es uno de deformación plana.

Los coeficientes de compresibilidad y flexibilidad mencionados en el capítulo 2 se aplican para resolver el sistema *suelo-soporte*. El factor de compresibilidad mide la rigidez relativa a la extensión del revestimiento y del medio y se expresa según la ecuación (A.1)

$$C^* = \frac{E R (1-\nu^2)}{E_S A_S (1-\nu^2)} \dots\dots\dots (A.1)$$

donde  $C^*$  es el factor de compresibilidad, E el módulo de elasticidad

dad del medio, R el radio del anillo,  $\nu$  la relación de Poisson del medio,  $E_s$  es el módulo de elasticidad  $A_s$  el area transversal y  $\nu_s$  el módulo de Poisson del soporte. El factor de flexibilidad mide la rigidez relativa a la flexión del sistema *suelo-soporte* y se expresa según la ecuación (A.1)

$$F^* = \frac{E R^3 (1-\nu)}{E_s I_s (1-\nu_s^2)} \dots\dots\dots (A.2)$$

donde  $F^*$  es el factor de flexibilidad,  $I_s$  el momento de inercia del soporte y las demás literales tienen el mismo significado que en la formula (A.1).

El el caso de carga externa no existen cargas iniciales y se aplican los estados de esfuerzos después de haber colocado el revestimiento. Las expresiones que se obtienen al derivar los elementos mecánicos del revestimiento son las siguientes:

Para la condición de deslizamiento completo:

La fuerza axial T

$$\frac{T}{P R} = \frac{1}{2} (1+k)(1-a_1) + \frac{1}{6} (1-k)(1+3a_2 - 4a_3) \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

El momento flexionante M

$$\frac{M}{P R^2} = \frac{1}{6} (1-k)(1+3a_2 - 4a_3) \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

Desplazamiento radial de soporte  $\mu_g$

$$\frac{\mu_g E_g}{P R (1+\nu_g)} = (1+k) C^* (1-\nu_g) (1-a_1) - \frac{1}{18} (1-k) F^* (1-\nu_g) (1+3a_2 - 4a_3) \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots (A.5)$$

donde k = relación *in situ* de esfuerzos principales

$$a_1 = \frac{C^{**}(1-\nu_g) - 1 + 2\nu_g}{C^{**}(1-\nu_g) + 1} \dots\dots\dots (A.6)$$

$$a_2 = \frac{F^{**}(1-\nu_g) + 3 - 6\nu_g}{F^{**}(1-\nu_g) + 15 - 18\nu_g} \dots\dots\dots (A.7)$$

$$a_3 = \frac{F^{**}(1-\nu_g) - 3}{F^{**}(1-\nu_g) + 15 - 18\nu_g} \dots\dots\dots (A.8)$$

Para la condición de deslizamiento nulo:

Fuerza axial T

$$\frac{T}{PR} = \frac{1}{2} (1+k)(1-a_1) + \frac{1}{2} (1-k)(1+b_1)\cos 2\theta \dots\dots\dots (A.9)$$

Momento flexionante M

$$\frac{M}{P R^2} = \frac{1}{4} (1-k)(1-b_1 - b_2) \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.10)$$

Desplazamiento radial  $\mu_s$

$$\begin{aligned} \frac{U_s E_s}{P R (1+\nu_s)} = & \frac{1}{2} (1+k)(1-2\nu_s) \left[ 1 + \frac{a_1}{(1-2\nu_s)} \right] - \\ & - \frac{1}{2} (1-k) \left[ 1+b_1 + 4(1-\nu_s)b_2 \right] \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.11) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_1 = & \frac{1}{b_0} \left[ \frac{F^*(1-\nu_s)}{6} [(1-2\nu_s) - C^*(1-\nu_s)] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} C^*(1-\nu_s)(1-2\nu_s) + 2 \right] \dots\dots\dots (A.12) \end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{F^*(1-\nu_s)}{6} \left[ (3-2\nu_s) + C^*(1-\nu_s) \right] + \frac{C^*(1-\nu_s)}{(1-2\nu_s)} \left[ \frac{5}{2} - 8\nu_s + 6\nu_s^2 \right] + 6 - 8\nu_s \quad \dots (A.13)$$

$$b_2 = \frac{1}{b_0} \left[ \frac{F^*(1-\nu_s)}{6} [ C^*(1-\nu_s) + 1 ] - \frac{1}{2} C^*(1-\nu_s) - 2 \right] \dots \dots \dots (A.14)$$

En el caso de descarga por excavación se debe calcular primero el estado inicial de deformaciones en la masa del suelo cuando aún no existe el túnel, para posteriormente al derivar el campo de esfuerzos y deformaciones debido a la presencia del túnel y el revestimiento, sea posible restar las deformaciones iniciales en la masa del suelo. Las expresiones que se obtienen para los elementos mecánicos en el revestimiento son las siguientes:

Condición de deslizamiento completo

Fuerza axial T

$$\frac{T}{PR} = \frac{1}{2} (1+k)(1-a_0^*) + \frac{1}{2} (1-k)(1-2a_2^*) \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (A.15)$$

Momento Flexionante M:

$$\frac{M}{P R^2} = \frac{1}{2} (1-k)(1-2a_2^*) \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.16)$$

Desplazamiento radial del soporte  $\mu$

$$\frac{\mu_s E_s}{P R (1+\nu_s)} = \frac{1}{2} (1+k)a_0^* - (1-k) \left[ (5 - 6\nu) a_2^* - (1 - \nu) \right] \dots\dots\dots (A.17)$$

Desplazamiento tangencial del soporte  $V_s$

$$\frac{V_s E_s}{P R (1+\nu_s)} = \frac{1}{2} (1-k) \left[ (5-6\nu) a_2^* - (1-\nu_s) \right] \text{sen} 2\theta \dots\dots\dots (A.18)$$

donde

$$a_0^* = \frac{C^* F^* (1-\nu)}{C^* F^* + C^* F^* (1-\nu)} \dots\dots\dots (A.19)$$

$$a_2^* = \frac{(F^k + 6)(1 - \nu_s)}{2 F^k (1 - \nu) + 6(5 - 6\nu_s)} \dots\dots\dots (A.20)$$

Condición de deslizamiento nulo:

Fuerza axial T

$$\frac{T}{P R} = \frac{1}{2} (1+k)(1-a_0^*) + \frac{1}{2} (1-k)(1+2a_2^*) \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.22)$$

Momento Flexionante M

$$\frac{M}{P R^2} = \frac{1}{4} (1-k)(1 - 2a_2^* + 2b_2^*) \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.23)$$

Desplazamiento radial  $\mu_s$

$$\frac{\mu_s E_s}{P R (1 + \nu_s)} = \frac{1}{2} (1+k)a_0^* + \frac{1}{2} (1-k) \left[ 4(1-\nu)b_2^* - 2a_2^* \right] \cos 2\theta \dots\dots\dots (A.24)$$

Desplazamiento tangencial V

$$\frac{V}{P} \frac{E}{R(1+\nu)} = - (1-k) a_2^* + (1-2\nu) b_2^* \operatorname{sen} 2\theta \quad \dots\dots\dots (A.25)$$

donde:  $a^* = b_1^* b_2^* \quad \dots\dots\dots (A.26)$

$$b_1^* = \frac{(6 + F^*) C^* (1-\nu) + 2F^* \nu}{3F^* + 3C^* + 2C^* F^* (1-\nu)} \quad \dots\dots\dots (A.27)$$

$$b_2^* = \frac{C^* (1-\nu)}{2 [ C^* (1-\nu) + 4\nu - 6b_1^* - 3b_1^* C^* (1-\nu) ]} \quad \dots\dots (A.28)$$

## Anexo B.- Teoría del Método del Elemento Finito

### B.1 Determinación de la matriz de rigidez

La matriz de rigideces de una *mall*a de *elementos* se puede plantear aplicando el principio de la mínima energía potencial, se parte de la función de interpolación para un *elemento* y su relación con los desplazamientos nodales según se define en la siguiente expresión:

$$\{f\} = [N] \{d\} \dots\dots\dots(B.1.1)$$

donde  $\{f\}$  es el vector de desplazamientos del *elemento*,  $\{d\}$  los desplazamientos nodales y  $[N]$  la matriz que define las funciones de interpolación. Al derivar la expresión (B.1.1) se obtiene;

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\} \dots\dots\dots(B.1.2)$$

donde  $\{\epsilon\}$  es el vector de deformaciones y  $[B]$  se expresa para el

caso de desplazamientos según la expresión;

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} [N] \dots\dots(B.1.3)$$

La energía potencial de un sistema se puede calcular según la expresión siguiente;

$$\Pi_p = \int_V U_0 dV - \int_V \{d\}\{F\}dv - \int_S \{d\}\{\Phi\}dS - \{D\}\{P\} \dots(B.1.4)$$

donde  $\Pi_p$  es la energía potencial del sistema,  $\{d\}$  los desplazamientos,  $V$  es el volumen,  $S$  la superficie  $\{F\}$ , las fuerzas de cuerpo,  $\{\Phi\}$  las reacciones,  $\{P\}$  las cargas concentradas y  $\{D\}$  sus desplazamientos. El cambio de energía  $dU_0$  del sistema se calcula con la expresión siguiente;

$$dU_0 = \{ \tau \}^T \{ d\varepsilon \} \dots\dots\dots(B.1.5)$$

despreciando términos de segundo orden e integrando se tiene;

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{ \epsilon \} - \{\epsilon\} [E] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon\} \{\tau\} \quad (B.1.6)$$

sustituyendo la expresiones (B.1.1), (B.1.2) y (B.1.6) en (B.1.4) se obtiene;

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_1^{numel} \{d\}^T [k] \{d\} - \sum_1^{numel} \{d\}^T \{r\} - \{D\}^T \{P\} \quad \dots (B.1.7)$$

donde  $\{r\}$  son las cargas aplicadas por un elemento en sus nodos y llamando;

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad \dots \dots \dots (B.1.8)$$

$$\begin{aligned} \{r\} = & \int_V [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV - \int_V [B]^T \{\tau_0\} dV + \\ & + \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_V [N]^T \{\Phi\} dS \quad \dots \dots \dots (B.1.9) \end{aligned}$$

y considerando que todos los grados de libertad vector  $\{d\}$  están contenidos en el vector  $\{D\}$ , así como  $[K]$  representa el ensamble de todas las matrices  $[k]$  y  $\{R\}$  representa todas las cargas aplicadas a la estructura, con ello se puede escribir la expresión;

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\} \{R\} \dots (B.1.10)$$

De aquí se desprende que la energía mínima para el sistema se encuentra cuando;

$$[K] \{D\} = \{R\} \dots \dots \dots (B.1.11)$$

Por lo tanto la matriz de rigidez de un elemento está definida por la ecuación (B.1.8)

### B.2. Formulación del elemento isoparamétrico

En cuanto a la formulación de un elemento isoparamétrico plano,

se presenta a continuación un resumen de la teoría que se aplicó para elaborar la subrutinas del programa MEFPC.

Un elemento isoparamétrico se define en coordenadas locales  $\xi$   $\eta$ . La función de interpolación relaciona las variables del campo en la siguiente manera;

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [ N ] \{ d \} \dots\dots\dots(B.2.1)$$

donde  $\{ d \}$  es el vector de desplazamientos nodales y  $[ N ]$  la función de interpolación. La función de interpolación que se uso en el presente trabajo es un polinomio de primer grado en  $\xi$  y  $\eta$ , la que permitió que se obtubieran buenos resultados. La función de interpolación se definió de la siguiente forma;

$$[ N ] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \dots(B.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & \dots\dots\dots (B.2.3) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}$$

Para determinar la matriz de rigideces es necesario transformar las coordenadas locales al sistema global, lo cual se logra al aplicar la regla de la cadena para derivadas parciales definiéndose el Jacobiano  $J$  de la función en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \dots\dots\dots (B.2.4) \\
 \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{bmatrix} = [ J ] \begin{bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.2.5)$$

donde

$$[ J ] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (B.2.6)$$

sustituyendo las expresiones (B.2.5), (B.2.1) y (B.2.2) en la ecuación (B.1.8) se obtiene la ecuación siguiente;

$$k = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [ B ] [ E ] [ B ]^t j \, d\xi \, d\eta \dots\dots\dots (B.2.7)$$

donde t es el espesor del elemento y j el determinante del Jacobiano J. Los conceptos antes expuestos permiten plantear la siguiente ecuación para hacer intervenir las deformaciones y los esfuerzos iniciales, así como las cargas nodales

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([ B ] [ E ] \{ \epsilon_0 \} - [ B ] \{ \tau_0 \} + [ N ] \{ F \}) j \, t \, d\xi \, d\eta \dots (B.2.8)$$

Las ecuaciones (B.2.7) y (B.2.8) se resuelven por métodos numéricos. En este trabajo se usó el método de integración denominado

Cuadratura de Gauss. El método consiste en aproximar la solución de la integral por la suma de los productos que se obtienen al evaluar la función en puntos específicos y asignarles una función de peso. En dos dimensiones el método se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^{+1} \sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta) d\eta \\
 &\cong \sum_j W_j \left( \sum_i W_i \Phi(\xi_i, \eta_j) \right) = \sum_i \left( \sum_j W_j W_i \Phi(\xi_i, \eta_j) \right) \quad (\text{B.2.10})
 \end{aligned}$$

Anexo C.- Planteamiento de la matriz de Rigidez del elemento viga

La matriz de rigidez de un elemento viga se deduce a partir de los métodos energéticos clásicos en el análisis estructural, suponiendo un comportamiento linealmente elástico y despreciando las deformaciones producidas por el esfuerzo cortante. Comúnmente la matriz de rigideces se plantea aplicando el teorema de Castigliano, ó el principio del trabajo virtual, ó las ecuaciones de Bresse, siempre suponiendo válido el principio de superposición de causas y efectos.

Un método simple para plantear la matriz es a partir de las ecuaciones de Bresse, las cuales se expresan por medio de la siguientes formulas;

$$\phi_2 - \phi_1 + \int_1^2 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad \dots\dots\dots(C.1)$$

$$\xi_2 - \xi_1 = \phi_2 y_2 - \phi_1 y_1 + \int_1^2 \frac{M y}{EI} ds \quad \dots\dots(C.2)$$

$$-(\eta_2 - \eta_1) = \Phi_2 x_2 - \Phi_1 x_1 + \int_1^2 \frac{M x ds}{E I} \dots\dots (C.3)$$

Aplicando el principio de superposición de causas y efectos es posible conocer cada término de la matriz de rigideces, sumando las contribuciones que en cada término provocan el cortante, el momento y la fuerza normal. En la figura C.1 se presentan dos esquemas mas que representan desplazamientos y momentos unitarios, las reacciones  $F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$  se calcularon a partir de las ecuaciones de Bresse. Por ejemplo para el caso del momento unitario la ecuación de momentos será;

$$M = F_4 x + F_2 \dots\dots\dots (C.4)$$

Al aplicar la ecuación (C.1) se tiene que

$$0 = \int_1^2 \frac{F_4 x + F_2}{E I} ds \dots\dots\dots (C.5)$$

manipulando la expresión se obtiene

$$0 = \frac{F L^2}{2 E I} + \frac{F L}{E I} \dots\dots\dots(C.6)$$

análogamente aplicando la ecuación (C.3) se tiene

$$0 = 1 - \int_0^L \frac{(F + F x) x dx}{E I} \dots\dots\dots(C.7)$$

manipulando la expresión se obtiene

$$1 = \frac{F L^3}{3 E I} + \frac{F L^2}{2 E I} \dots\dots\dots(C.8)$$

sustituyendo la expresión (C.8) en la (C.6) se obtiene



Es necesario por último definir la matriz  $k^*$  en coordenadas globales, lo cual se logra a través de la siguiente matriz  $T$  de transformación

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(C.11)$$

La matriz de rigidez presentada en el inciso 2 del capítulo 3 de este trabajo será la que se obtiene del siguiente producto

$$k = T^T k^* T \dots\dots\dots(C.12)$$

#### Anexo D- Manual del usuario del programa MEFPC

El programa MEFPC se elaboró para analizar estáticamente sistemas hiperestáticos planos con dos o tres grados de libertad, bajo las hipótesis de deformación plana y sistemas de carga aplicados en los nodos. Posee dos diferentes tipos de elementos, vigas con tres grados de libertad por nodo e isoparamétricos con dos grados de libertad en cada uno de sus cuatro nodos.

Para la formación, prueba y aplicación del programa se usó una computadora *Personal Computer* (PC) compatible con sistemas IBM, con 256 Kbits de memoria *Ram* y una unidad de disco flexible 5.25", los formatos de impresión se establecieron para impresoras compatibles con IBM con un máximo de 70 columnas. El programa se creó usando el compilador denominado *Fortran 77*.

Una de las mayores dificultades para poder implantar un programa del MEF en una computadora PC son las limitaciones de memoria *Ram*, pues para obtener buenos resultados es necesario usar mallas con un número considerable de nodos. Para usar lo más efi-

cientemente posible la memoria disponible en la computadora se utilizó el sistema denominado de *memoria dinámica*, mediante el cual se almacena en dos variables (una real y otra entera) todas las variables con subíndice del problema. Asimismo para análisis importantes el programa permite definir fronteras de subestructuración para usar *mall*as sucesivamente más finas en zonas de interés.

El programa puede llevar a cabo análisis por etapas definiendo ó no un porcentaje del sistema de cargas a aplicar, modificando los parámetros de las propiedades de los diferentes materiales, adicionando, ó eliminando elementos, y/ó sustituyendolos por sistemas de cargas; todo ello con el objeto de poder simular procesos de excavación ó construcción en materiales con comportamientos lineales ó no.

El programa puede automáticamente, después de cada etapa, de acuerdo con el nivel de esfuerzos y la ley hiperbólica de M. Duncan (Referencia 3), modificar los módulos de elasticidad tangentes de los *elementos* isoparamétricos, para aplicarlos en la etapa siguiente. La ley para modificar los módulos de elasticidad tangentes

se expresa según la ecuación (D.1)

$$E_t = 1 - \left[ \frac{R(1 - \sin\phi)(\tau_2 - \tau_1)}{2C\cos\phi + 2\tau_2\sin\phi} \right]^2 K P_{at} (\tau_2/P_{at})^n \dots (D.1)$$

donde  $E_t$  = módulo de elasticidad tangente

$\phi$  = ángulo de fricción

$C$  = cohesión del suelo

$P_{at}$  = presión atmosférica

$\tau_2$  = esfuerzo principal mayor

$\tau_1$  = esfuerzo principal menor

$$R = \frac{(\tau_2 - \tau_1)_f}{(\tau_2 - \tau_1)_{ult}}$$

$(\tau_2 - \tau_1)_f$  = esfuerzo desviador a la falla

$(\tau_2 - \tau_1)_{ult}$  = valor de la asíntota de la curva hiperbólica esfuerzo deformación

$K$  y  $n$  = constantes para determinar la dependencia del ...

módulo de elasticidad y el nivel de esfuerzos

También es posible definir dentro del programa, las propiedades lineales elásticas de los elementos isoparamétricos, a partir del módulo G (módulo de elasticidad a la Cortadura) y el módulo K (*Bulks modulus*), esto con el objeto de poder llevar a cabo análisis donde los ordenes de magnitud de los parámetros de elasticidad sean pequeños.

El acceso de información es a través de archivos en el disco flexible, y la pantalla de la computadora. El análisis comienza cuando por la pantalla se pide el nombre del archivo en el disco que será la principal unidad de lectura del programa, en éste todas las tarjetas empezarán en la columna 1 separando por comas cada variable según se muestra a continuación:

\* MODEX,ICLE

\* NUMNP

Donde: MODEX (I2) es la clave para el modo de ejecución, igual a 1 si el análisis es lineal; igual a 2 para análisis no lineales donde el módulo de elasticidad se variará después de cada etapa de acuerdo con el nivel de es-

fuerzos de la etapa anterior y siguiendo la ley de M. Duncan (3), o bien para análisis lineales llevados a cabo en varias etapas, y igual a 3 para análisis lineales donde la matriz de elasticidad de los isoparamétricos se define con los parámetros  $K$  (*Bulks modulus*) y  $G$  (*Módulo al cortante*)

ICLE (I2) es una clave para indicar si se definirá más adelante una frontera de subestructuración, si es igual a 1 se subestructurará, si no debe ser igual a cero

NUMNP (I5) es el número de nodos de la *mall*a de elementos

\* NV,NIP

Donde: NV (I5) es el número de elementos viga

NIP (I5) es el número de *elementos* isoparamétricos

\* NTMV,NTMI

Donde:NTMV (I5) es el número de materiales de las vigas

NTMI (I5) es el número de materiales de los *elementos* isoparamétricos

\* IEDI

Donde:IEDI (I2) es una clave que indica, si es igual a 1 que existen deformaciones iniciales, si es igual a 2 esfuerzos iniciales, y si es igual a cero ninguno de los dos.

\* NEAC

Donde:NEAC (I5) representa el número de etapas para llevar a cabo el analisis, se lee esta variable solo si MODEX es igual a dos

\* X(N),Y(N),ID(1,N),ID(2,N),ID(3,N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como nodos tenga la estructura

Donde:X(N) (F7.2) es la coordenada X del nodo

Y(N) (F7.2) es la coordenada Y del nodo

ID(1,N) (I2) es una clave para indicar la condición del grado de libertad en X del nodo, si es igual a 1 el nodo estará libre, si es igual a 0 el nodo estará restringido

ID(2,N) (I2) es la clave para indicar la condición del grado de libertad en Y (ID = 1 libre, ID = 0 fijo)

ID(3,N) (I2) es la clave para indicar la condición del grado

de libertad del giro del nodo (ID = 1 libre, ID = 0 restringido), solo es libre en elementos barra

\* EV(N),AV(N),XIV(N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como materiales tengan las vigas, y establecerá los parámetros de las mismas para la primera etapa del análisis, al terminar ésta se podrán o no modificar los parámetros a través de la pantalla de la computadora, a cada grupo de materiales se le asigna secuencialmente un número clave.

Donde:EV(N) (F12.2) módulo de elasticidad lineal de los elementos vigas

AV(N) (F7.2) area transversal de la viga

XIV(N) (F12.6) momento de inercia de la viga

\* IOV(N),IPV(N),ITMV(N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como vigas existan

Donde:IOV(N) nodo inicial de la viga

IPV(N) nodo final de la viga

ITMV(N) clave del grupo del material de la viga ( EV(N),

AV(N) y XIV(N))

\* ANLK(N),ANLN(N),ANLO(N),ANLC(N),ANLR(N)

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 2, tantas veces como existan grupos de materiales no lineales en los *elementos isoparametricos*

Donde;ANLK(N) (F8.2),ANLN(N) (F8.2) y ANLR(N) (F8.2) son los parámetros que definen la curva esfuerzo deformación, cuyo significado preciso se puede consultar en la Referencia 3, y se han presentado en párrafos precedentes

\* PAT

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 2, siempre y cuando exista algún *elemento isoparamétrico*

Donde;PAT (F7.2) es la presión atmosférica

\* XNUIP(N),THCIP(N),WIP(N)

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 2, tantas veces como existan grupos de materiales de *elementos isoparamétricos*

Donde;XNUIP(N) (F5.4) es el módulo de Poisson del grupo de material isoparamétrico

THCIP(N) (F5.2) es el espesor del grupo de material

WIP(N) (F5.2) es el peso volumétrico del material

\* EIP(N),XNUIP(N),THCIP(N),WIP(N)

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 1, tantas veces como existan grupos lineales de materiales en los *elementos* isoparamétricos

Donde;EIP(N) (F12.2) es el módulo de elasticidad del *elemento* isoparamétrico

XNUIP(N) (F5.4) es el módulo de Poisson

THCIP(N) (F5.2) es el espesor

WIP(N) (F5.2) es el peso volumétrico

\* XG(N),XK(N),THCIP(N),WIP(N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como existan grupos lineales de materiales en los *elementos* isoparamétricos que definan las propiedades de elasticidad usando el módulo a la Cortadura G

Donde;XG(N) (F12.2) es el módulo de elasticidad a la Cortadura G

XK(N) (F5.2) es *BULK MODULUS*

THCIP(N) (F5.2) es el espesor de los *elementos*

WIP(N) (F5.2) es el peso volumétrico del material

\* IOIP(N), IPIP(N), IQIP(N), IRIP(N), ITMIC(N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como *elementos* isoparamétricos

Donde: IOIP(N), IPIP(N), IQIP(N) y IRIP(N) son los nodos de un *elemento* isoparamétrico numerados en sentido contrario a las manecillas del reloj

ITMIC(N) es la clave del grupo del material del isoparamétrico

\* EPP(M), M=1,N

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 2, y tendrá tantos datos como etapas el programa

Donde: EPP(N) Porcentaje de aplicación de las cargas por peso propio y los estados de esfuerzos y deformaciones iniciales para la etapa N

\* EACC(M), M=1,N

Esta tarjeta aparecerá solo cuando MODEX sea igual a 2, y tendrá tantos datos como etapas existan en el programa

Donde: EACC(N) Porcentaje de aplicación de las cargas nodales en la etapa N

\* EIX(1,M = 1,4),            EIXCNIP,M = 1,4)  
\* EIY(1,M = 1,4),            EIYCNIP,M = 1,4)  
\* EIM(1,M = 1,4),            EIMCNIP,M = 1,4)

Estas tarjetas aparecerán solo si IEDI es igual a 1 o 2 y tendrán tantos datos como haya nodos en los *elementos isoparamétricos*.  
Donde: EIX(S,M = 1,4), EIY(S,M = 1,4) y EIM(S,M = 1,4) (3F6.3) son las deformaciones o los esfuerzos iniciales en cada uno de los cuatro nodos del *elemento isoparamétrico S*.

\* NLOAD

Donde: NLOAD (I5) es el número de cargas concentradas a aplicar

\* NOD(N),IDIRN(N),FLOAD(N)

Esta tarjeta aparecerá tantas veces como existan cargas concentradas en la *mall*a de elementos

Donde: NOD(N) es el nodo donde se aplica la carga N

IDIRN(N) es el indicador del grado de libertad donde actúa la carga N, 1 si actúa en X, 2 si actúa en Y y 3 si actúa en el giro

FLOAD(N) magnitud de la carga N

\* NEDES

Donde;NEDES es el número de elementos desconectados al nulificar sus grados de libertad

\* NEDF

Donde;NEDF es el número de elementos desconectados que se sustituyen en sus nodos por las cargas que resultan del producto de su matriz de rigidez y sus desplazamientos.

\* NUMNP1

Donde;NUMNP1 es el número de nodos que se usarán en la etapa que lleva a cabo a continuación

\* NV1,NIP1

Donde;NV1 es el número de vigas que se aplicarán en la etapa por realizar

NIP1 es el número de elementos isoparámétricos que se usarán en la etapa siguiente

\* MEDF(1),MEDF(2),.....,MEDF(NEDF)

Esta tarjeta tendrá tantos datos como existan elementos que se sustituirán por cargas en esta etapa

Donde: MEDF(i) es el *i*ésimo elemento que se desconectará en la frontera para esta etapa

\* IED(1), IED(2), ..... , IED(NEDES)

Esta tarjeta tendrá tantos datos como elementos se deseen desconectar nulificando sus grados de libertad

Donde: IED(i) es el *i*ésimo elemento que se desconecta nulificando sus grados de libertad, para esta etapa

\* NNDES

Donde :NNDES es el número de nodos a eliminar

\* NED

Esta tarjeta aparecerá NNDES veces, es decir una vez por cada nodo eliminado al nulificar sus grados de libertad

Donde: NED es el nodo eliminado en esta etapa

\* IERR

Es la clave que indica si se desea cambiar alguna propiedad de las vigas

Donde solo si IERR es igual a 1 se procede a modificar las propiedades de alguna viga

\* M

Esta tarjeta aparecerá solo cuando IERR indique que se modificarán las propiedades de las vigas

Donde M es el número del grupo de materiales de las vigas a cambiar

\* EV(M),AV(M),XIV(M)

Donde ;EV(M) es el nuevo módulo de elasticidad para aplicarse en el grupo M de las propiedades de las vigas

\* IERR

Es la clave que indica si se desea cambiar alguna otra propiedad de las vigas

Donde solo si IERR es igual a 1 se pregunta por otro grupo M que se desee modificar

\* IERR

En una forma similar se vuelve a utilizar la variable IERR para saber si se desea modificar algún grupo de propiedades de los elementos isoparámetros

Donde solo si IERR es igual a 1 se procede a modificar algún grupo

de propiedades

\* NM

Donde NM es el número del grupo del material a cambiar

\* ANLK(NM), ANLNC(NM), ANLOC(NM), ANLCC(NM), ANLRC(NM)

Esta tarjeta aparecerá solo si IERR así lo indica

Donde :ANLK(NM), ANLNC(NM), ANLOC(NM), ANLCC(NM) y ANLRC(NM) tienen el significado antes señalado.