



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

MODELO DE EYRING APLICADO AL FLUJO ISOTERMICO DE  
UN POLIMERO FUNDIDO EN UN EXTRUSOR PLASTIFICANTE

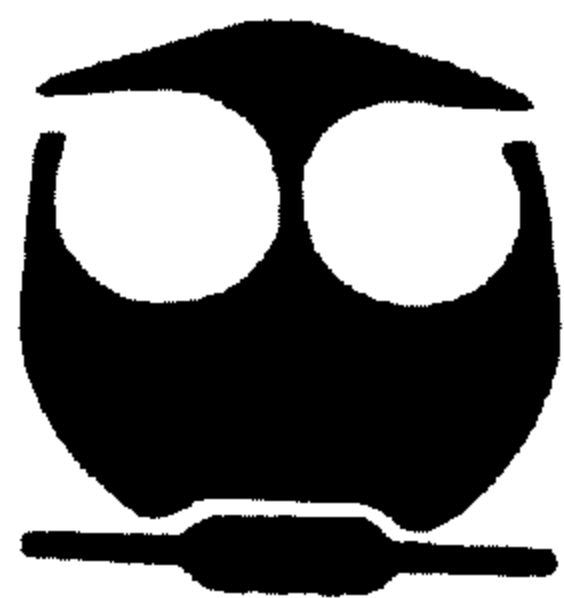
**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**I N G E N I E R O Q U I M I C O**

P R E S E N T A :

**OSCAR ARELLANO FLORES**



MEXICO, D.F.



EXAMENES PROFESIONALES  
FACULTAD DE QUIMICA

2005

M 351998



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

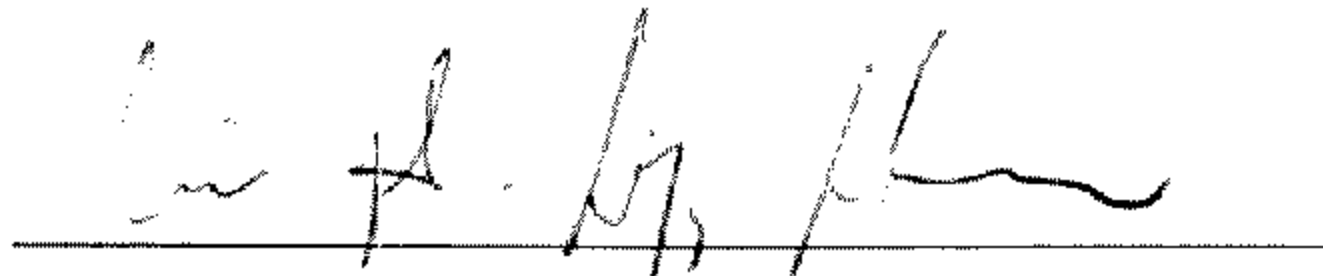
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.


**Jurado asignado:**

<b>Presidente</b>	<b>Prof. Luis Ángel López Latorre</b>
<b>Vocal</b>	<b>Prof. Martha Imelda Moreno Bravo</b>
<b>Secretario</b>	<b>Prof. Ricardo Pérez Camacho</b>
<b>1er. Suplente</b>	<b>Prof. Martín Rivera Toledo</b>
<b>2º. Suplente</b>	<b>Prof. Blanca Estela García Rojas</b>

**Sitio en donde se desarrolló el tema:**

**Facultad de Química. Ciudad Universitaria, D.F.**

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Luis Ángel López Latorre.**  
Asesor

  
\_\_\_\_\_  
**Oscar Arellano Flores**  
Sustentante.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Oscar Arellano Flores  
FECHA: 24 NOV 2005  
FIRMA: Oscar Arellano Flores

# Índice

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 OBJETIVOS	3
2. CONCEPTOS GENERALES	5
2.1 CARACTERÍSTICAS DE FLUJO EN EXTRUSOR PLASTIFICANTE.	5
2.2 CURVA DE FLUJO	7
3. DESARROLLO MATEMÁTICO.	14
3.1. MODELADO DEL FLUJO EN EXTRUSOR PLASTIFICANTE	14
3.1.1. Perfil de velocidades	14
3.1.2. Gasto volumétrico	17
3.1.3. Intervalos de perfiles de velocidades	19
3.2. SOLUCIÓN NEWTONIANA.	26
3.3. VISCOSIDAD NEWTONIANA EQUIVALENTE	27
3.4. VISCOSIDAD DEPENDIENTE DE LA POSICIÓN.	27
4. RESULTADOS	28
4.1. Curva de la bomba	28
4.2. Efecto de la velocidad de placa	28
4.3. Efecto de la presión en el gasto volumétrico	28
4.4. Efecto de la temperatura	28
4.5. Variación de la viscosidad con la posición y temperatura	29
4.6. Resultados del modelo de flujo newtoniano	29
4.7. Viscosidad newtoniana equivalente	29
5. ANÁLISIS DE RESULTADOS	57
5.1. Efecto de la velocidad de placa bajo gasto volumétrico constante	57
5.2. Condiciones de recirculación del material	57
5.3. Efecto de la presión sobre el gasto volumétrico a una velocidad de placa constante	57
5.4. Efecto de la temperatura del material fundido sobre la presión del fluido	58
5.5. Variación de la viscosidad con la posición entre las placas del extrusor y con la temperatura	58
5.6. Validación del modelo	58
5.7. Viscosidad equivalente	59
6. CONCLUSIONES	60
7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.	62
APENDICE A: PROGRAMA DE CÁLCULO TIPO I.	63
APENDICE B: PROGRAMA DE CÁLCULO TIPO II.	65
APÉNDICE C: PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD.	68
APÉNDICE D: PROGRAMA DE CÁLCULO PARA EL FLUJO NEWTONIANO	70

## INDICE DE GRAFICOS Y ESQUEMAS

	Pág.
Figura 1.1. Representación de un extrusor plastificante.	4
Figura 2.1. Extrusor simple.	6
Figura 2.2. Flujo entre placas paralelas.	8
Figura 2.3. Flujo unidimensional entre placas paralelas	8
Figura 2.4. Planteamiento general del modelado matemático.	13
Figura 3.1. Comportamiento numérico de la ecuación de flujo volumétrico.	19
Figura 3.2. Perfiles de Velocidad Mezclados tipo1, PVM1. $\lambda = 2$ 1) $\Gamma = -2.466482$ , 2) $\Gamma = -6$ , 3) $\Gamma = -9$ .	21
Figura 3.3. Perfiles de Velocidad Simples tipo 1, PVS1. $\lambda = 2$ , 1) $\Gamma = -1$ , 2) $\Gamma = -2$	22
Figura 3.4. Perfiles de Velocidad por Arrastre, PVA. $\lambda = 2$ , $\Gamma = 0$	22
Figura 3.5. Perfiles de Velocidad Simples tipo 2, PVS2. $\lambda = 2$ . 1) $\Gamma = 1$ , 2) $\Gamma = -2$	23
Figura 3.6. Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 2, PVM2. $\lambda = 2$ : 1) $\Gamma = 2.466505$ 2) $\Gamma = 6$ 3) $\Gamma = 8$ .	24
Figura 3.7. Esquema de los intervalos de perfiles de velocidad.	24
Figura 4.1.1 Curvas de flujo para diferentes valores de $\lambda$ .	30

Figura 4.2.1. Efecto del cambio en la velocidad de placa en los perfiles de velocidad. $\Psi = 1.0$ ; 1) $\lambda = 1.0$ , 2) $\lambda = 10.0$ , 3) $\lambda = 32.0$	33
Figura 4.2.2. Recirculación de material a diferentes velocidades de placa. $\Psi = 0$ ; (1) $\lambda = 1$ , (2) $\lambda = 10$ , (3) $\lambda = 32$ .	34
Figura 4.3.1. Efecto de la presión en la velocidad del flujo cuando $\lambda = 1$ . $\Gamma$ : (1) $= 3.711239$ , (2) $= -2$ , (3) $= 0.5$ , (4) $= 0$ , (5) $= -0.5$ , (6) $= -2$ , (7) $= -3.711239$ .	36
Figura 4.4.1. Efecto de la temperatura en la caída de presión bajo condiciones de gasto volumétrico constante. $\Psi = 1$ .	38
Figura 4.4.2. Variación de la velocidad de rotación con la temperatura.	39
Figura 4.5.1. Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante y a $170^\circ \text{C}$ ., $\lambda = 2$ .	41
Figura 4.5.2. Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante y a $244^\circ \text{C}$ ., $\lambda = 2$ .	43
Figura 4.5.3. Comportamiento de la viscosidad bajo gasto volumétrico constante a $244^\circ \text{C}$ y a diferentes velocidades de placa. $\Psi = 1$ .	45
Figura 4.5.4. Efecto de la temperatura en la viscosidad bajo condiciones de gasto volumétrico y velocidad de placa constantes. $\lambda = 2.0$ , $\Psi = 1$ .	48
Figura 4.6.1. Curva de la bomba de flujo newtoniano a velocidad constante. $\lambda = 1$ .	50

Figura 4.6.2. Curva de la bomba de flujo newtoniano a velocidad constante. $\lambda = 4$ .	51
Figura 4.7.1. Viscosidad newtoniana equivalente de ABS a 170°C y a medida que el gasto volumétrico aumenta.	53
Figura 4.7.2. Modelo newtoniano con viscosidad equivalente para flujo creciente y $\lambda = 1$	56

## ÍNDICE DE TABLAS DE RESULTADOS

	Pág.
Tabla 4.1.1. Curva de la bomba mediante el cálculo de tipo II. Modelo de Eyring aplicado al flujo de termoplásticos en extrusor.	31
Tabla 4.2.1. Efecto de la velocidad de placa en el perfil de velocidades. $\Psi = 1.0$	35
Tabla 4.2.2. Perfiles de velocidad con recirculación de material a diferentes velocidades. $\Psi = 0.0$	35
Tabla 4.3.1. Efecto de la presión en los perfiles de velocidad del flujo cuando $\lambda = 1$	37
Tabla 4.4.1. Efecto de la temperatura sobre la caída de presión y en la velocidad rotacional bajo flujo volumétrico constante: $\Psi = 1.0$	40
Tabla 4.5.1 Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante. $\lambda = 2.00$ $T = 170^\circ\text{C}$	42
Tabla 4.5.2 Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante. $\lambda = 2.00$ , $T = 244^\circ\text{C}$	44
Tabla 4.5.3 Comportamiento de la viscosidad bajo gasto volumétrico constante a 244 °C y a diferentes velocidades de placa. $\Psi = 1.0$	46
Tabla 4.5.4 Efecto de la temperatura en la viscosidad bajo condiciones de gasto volumétrico y velocidad de placa constantes. Viscosidad a diferentes condiciones de flujo, velocidad y temperatura.	49
Tabla 4.6.1 Resultados del modelo de Flujo newtoniano.	52
Tabla 4.7.1 Viscosidad newtoniana equivalente a diferentes valores de gasto volumétrico para ABS a 170 °C y distintas velocidades de placa.	54
Tabla 4.7.2 Viscosidad newtoniana equivalente en el modelo newtoniano.	56

## 1. INTRODUCCIÓN

El procesamiento de los polímeros es un área muy amplia de la ingeniería por la cual se lleva a cabo la conversión de éstos en artículos útiles de formas geométricas muy diversas como botellas, autopartes, tuberías, laminas, entre otras. En particular, la técnica de extrusión se ocupa de la transformación directa de la mayoría de los materiales termoplásticos como el poliéster, poliestireno, polivinilos como PVC, poliamidas, polipropileno, poliacetales como el poli formaldehído, etc.

En la transformación de tales materiales el problema queda reducido al conocimiento de las propiedades esenciales de los materiales a procesar, además de las características deseables de los productos finales, sin olvidar el costo para producirlos.

Por lo anterior, la selección de una técnica de procesamiento de polímeros en particular está determinada por el diseño de la maquinaria y equipo, por el material polimérico de interés, la producción planeada y por los costos de transformación.

Las dos técnicas de procesamiento más comúnmente empleadas son la extrusión y el moldeo por inyección, operaciones que requieren de un tratamiento matemático previo en el que se hace una clara descripción de las condiciones de operación para el proceso.

La industria que maneja fluidos no newtonianos, como las sustancias de comportamiento pseudoplástico, o fluidos viscoelásticos como los termoplásticos fundidos; durante su planeación y antes de su etapa de desarrollo atraviesa una etapa de investigación y diseño de los procesos adecuados para producir y vender artículos bajo las condiciones óptimas de mercado y productividad. De tal forma que este proyecto abarca esa etapa de investigación y diseño de los procesos, y como esencia fundamental, se adentra en la investigación del diseño de operación óptimo para el proceso a través de un extrusor a partir del modelo empírico no lineal de curva de flujo de Eyring. El grado de complejidad que se involucra en la solución difiere notablemente de la linealidad seguida en diversos tratamientos matemáticos con relación a los mismos materiales poliméricos<sup>1</sup>.

Dentro del mismo rubro, no se ha encontrado referencia bibliográfica alguna que trate del mismo modo tal problema de flujo ni mucho menos se encuentra disponible software alguno que se ajuste a la naturaleza del proyecto. Por tanto, la cuantificación del flujo se realiza a través de una simulación por computadora, manejando un lenguaje de programación apropiado como lo es FORTRAN 90. Esta técnica de simulación ofrece los medios para aplicar toda la capacidad posible en la ingeniería de plásticos de manera rutinaria y económica, así como para optimizar otras operaciones concernientes al procesamiento de los polímeros, tales como el moldeo y mezclado, entre otras.

<sup>1</sup> Tratamientos como la linealización de los problemas no lineales mediante elementos finitos. Otros como la aproximación a la linealidad cuando se emplea el modelo de la ley de potencia en fluidos pseudoplásticos y dilatantes. Ejemplos de comportamientos no lineales aplicando la ley de potencia se presentan aún en la industria petrolera donde se manejan suspensiones de bentonita, lodos, fluidos poliméricos y algunas sustancias que se comportan como plásticos de Bingham, entre otros, ( Darley y col. 1988).



Antes de comenzar con el punto central del tema, que es el modelado de flujo, resulta importante mencionar algunas características del proceso y del equipo de extrusión, de acuerdo a algunos autores; que pueden ser útiles para la mejor comprensión de los objetivos del proyecto así como del planteamiento del mismo. Esto porque muchos estudiantes de licenciatura tenemos una idea vaga del proceso de extrusión y aún más del funcionamiento del equipo.

Resulta importante mencionar que los extrusores se clasifican de acuerdo al husillo y por la estructura del cilindro (el extrusor simple es el que cuenta con un solo husillo). Estos pueden ser con calentamiento eléctrico resistivo, inductivo o dieléctrico; con calentamiento por diversos agentes transportadores de calor como agua o vapor y sin calentamiento externo. Básicamente para el accionamiento del husillo suelen emplearse motores eléctricos, de corriente alterna o continua acoplados a una caja de cambios de velocidad. Suelen existir extrusores de una o varias etapas y de uno o varios cilindros. Se distinguen por el perfil del husillo, que puede ser simple (husillo cilíndrico de profundidad de canal fijo o variable) y complejo (escalonado, interrumpido, cónico, parabólico), con paletas formando espiral, de levas, etc.

Las máquinas de extrusión generalmente se emplean para la granulación de materiales termoplásticos, en la aplicación de revestimientos delgados en papel, tela, cartón; para formar envolturas aislantes de alambres y cables eléctricos, y también en la fabricación de películas, láminas, mangueras, tubos y artículos laminados de materiales termoplásticos con y sin sustancias de relleno, espumosos y no espumosos. Se emplean por igual en la desgasificación, coloración, deshidratación, mezclado, plastificación simple y química de termoplásticos y materiales plásticos reactivos. Algunos extrusores pueden emplearse para efectuar ciertos procesos y reacciones químicas (Savgorodny, 1978).

En general, el equipo de procesamiento de polímeros termoplásticos no es más que una bomba de husillo con características de operación especiales. Gracias al husillo se consigue la homogenización del termoplástico fundido y su extrusión a través de las mallas filtrantes, rejilla y cabezal perfilador o dado. La figura 1 muestra las partes principales de un extrusor simple. En ésta se puede observar que la predicción del flujo que ocurre en la zona 2 no es un objetivo sencillo porque hay dos fases presentes en la que la fase sólida se reduce progresivamente mientras que la fase líquida aumenta hasta alcanzar la zona 3 donde el flujo ocurre solamente en fase líquida. La dificultad en la descripción del flujo en la zona 2 se debe a que se llevan a cabo en forma simultánea dos procesos: bombeo y fusión. Por lo tanto, la descripción del flujo en la zona 3 es mucho más simple de analizar y constituye por tanto la zona física de estudio. Es decir, en el extrusor se analiza la zona de dosificación puesto que al flujo se le pueden aplicar las leyes de la hidrodinámica para líquidos viscosos, y además, esta zona es la que determina la producción.

Por lo anterior, es de observar que los termoplásticos se procesan en estado líquido para darle una forma final en estado sólido y que durante el proceso pasan por lo menos una vez a través de un extrusor. De aquí que debe ser importante conocer el flujo de los materiales, como fluidos no newtonianos que son, por medio de su curva de flujo.

En particular, los plásticos son materiales viscoelásticos cuyo comportamiento en respuesta a una carga o fuerza externa es una función del tiempo. Bajo una carga constante la deformación se incrementa con el tiempo y ante una deformación constante el esfuerzo decrece con el tiempo. Los plásticos son materiales no lineales debido a que al duplicar la magnitud de la carga en el mismo periodo de tiempo la deformación aumenta en más del doble y cuando la deformación se duplica en el mismo periodo de tiempo el esfuerzo es

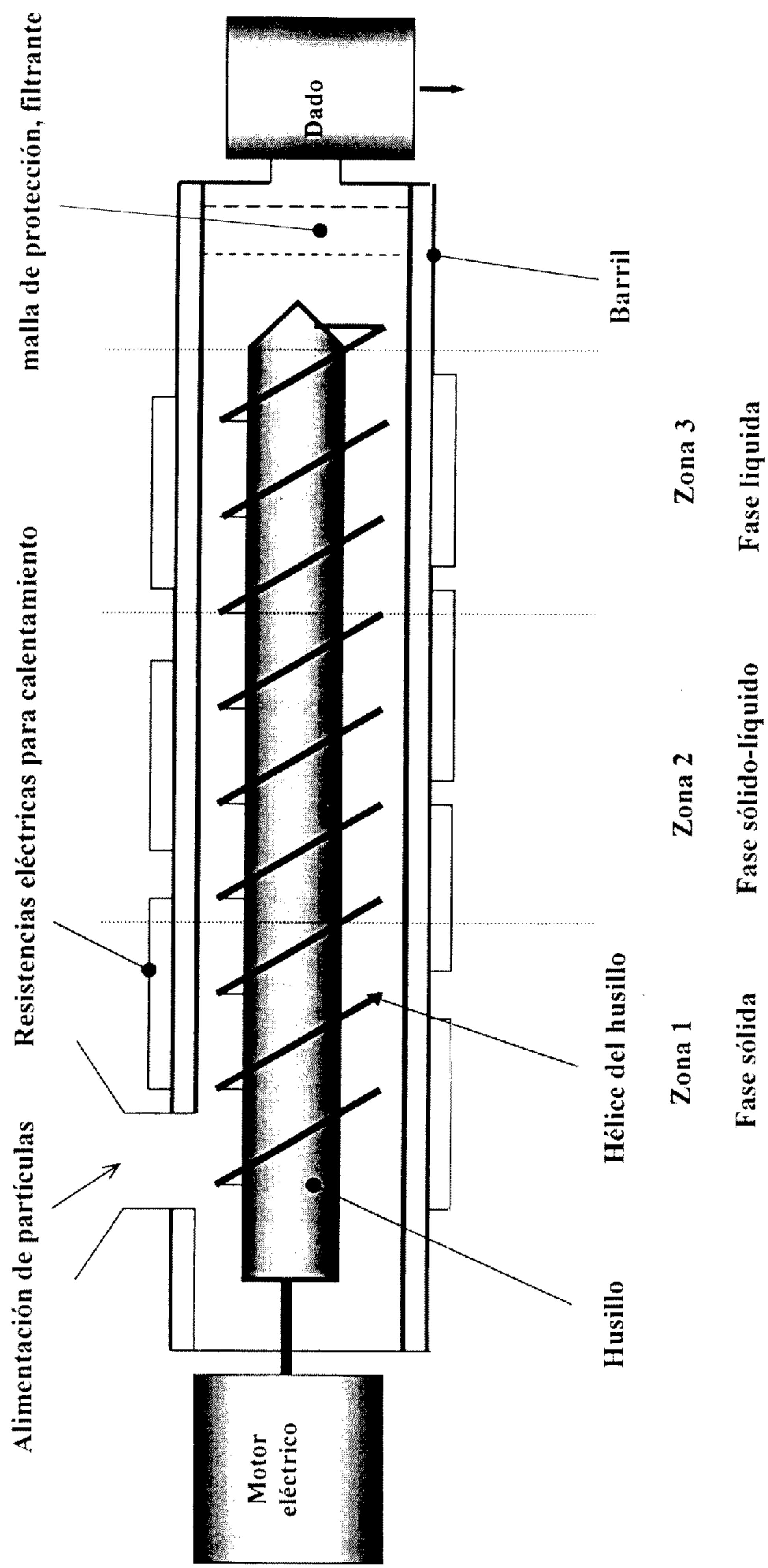
menor al duplicado (Walter, 1992). Por la dependencia con el tiempo es evidente que un fluido viscoelástico no puede ser caracterizado por una simple ecuación reológica que ignore la variable tiempo (Wilkinson, 1960), lo que hace que su curva de flujo sea sumamente complicada y difícil de manejar. Lo anterior representa en sí la primera dificultad para llevar a cabo el modelado de flujo. Diversos autores de la ingeniería de procesamiento de los termoplásticos coinciden en que el modelo matemático más complejo suele describir mejor la situación real que concierne a una operación de proceso, y siendo los termoplásticos de naturaleza viscoelástica, estos no pueden ser tratados siempre como sustancias de comportamiento simple y lineal; pero sí es válido hacerlo por medio de modelos menos complicados a los modelos estrictamente adecuados a la naturaleza viscoelástica, sobre todo si se tienen fines industriales. Por lo que en este proyecto se aborda la alternativa de desarrollar un modelo que aproxime el flujo viscoelástico al de un fluido pseudoplástico para ser analizado y comparado posteriormente.<sup>2</sup> Por tanto, en base a lo que se ha dicho quedan planteados los siguientes objetivos:

### 1.1 OBJETIVOS

- Aproximar el flujo viscoelástico de un material termoplástico fundido que fluye en la zona de bombeo de un extrusor plastificante, al de un fluido pseudoplástico mediante el modelo empírico de flujo propuesto Eyring.
- Desarrollar una viscosidad equivalente para ser usada con el modelo newtoniano.
- Cuantificar el flujo volumétrico mediante simulaciones por computadora.

<sup>2</sup> La comparación con otros modelos requiere de resultados experimentales que comprenden la fase experimental del proyecto, primero para observar la validez del modelo y luego para compararlo con otros modelos. Pero lógicamente tal etapa de investigación está fuera de los objetivos de la primera, que aquí se presenta.

Figura 1.1. Representación de un extrusor plastificante.



## 2. CONCEPTOS GENERALES

### 2.1 CARACTERÍSTICAS DE FLUJO EN EXTRUSOR SIMPLE

El desarrollo del modelo deseado requiere la aplicación de ciertos principios fisicoquímicos y de fenómenos de transporte, así como de hacer algunas suposiciones que guardan relación directa con las condiciones físicas del sistema bajo estudio. Es decir, el comienzo del modelado requiere en primer lugar de una clara comprensión de la situación física del problema para luego aplicar al sistema de flujo propuesto los principios de fenómenos de transporte que rigen sobre el problema. Se ha visto en estudios realizados que los resultados que puede dar un extrusor dependen en gran parte de la velocidad de giro del husillo (ver figura 1.1) y de la fricción en éste como consecuencia del contacto entre el material y las paredes metálicas del cilindro, así como de la superficie del husillo, por lo que se debe establecer el material a procesar adecuadamente y determinar que gasto volumétrico se quiere y se puede obtener con el equipo y bajo que condiciones se logra. Por esto, son necesarias algunas suposiciones relacionadas con el fluido y el equipo para simplificar el tratamiento matemático.

Para comenzar, al haber hablado ya de que se analiza el flujo en la zona de dosificación, se puede suponer que el material está totalmente fundido, y por tanto, se trata como un **fluido homogéneo**. De igual manera se supone que el material fundido se mantiene a una sola temperatura en dicha zona del extrusor, lo que implica tratar el problema como de **flujo isotérmico**.

La figura 2.1 representa la parte interna de un extrusor simple en la que se observan sus características. En éste, el fluido fluye en forma helicoidal, arrastrado por la superficie del husillo en movimiento en un canal recto de anchura constante,  $w$ , formado por la hélice del husillo; entre la superficie del husillo y de la superficie interna del barril, que lo envuelve concéntricamente, sin que se vea afectado por la fricción con las paredes laterales de la hélice del husillo (válido cuando la relación  $(H - c) / w$  es muy pequeña, por ejemplo, de  $1/10$ , ver fig. 2.1), y sin que fluya entre la pared interna del barril y el claro de la hélice del husillo (este tipo de flujo es conocido como flujo por fuga). Lo que se traduce finalmente a que el flujo ocurre en un canal formado por placas paralelas correspondientes a las superficies interna y externa del barril y del husillo respectivamente; de profundidad,  $w$ , y altura,  $H$ , constantes. Ver figura 2.1.

Es de suma importancia considerar que el gasto volumétrico en un extrusor es igual a la diferencia entre el flujo directo e inverso, sin olvidar la contribución por fugas. Al flujo directo se le conoce también como flujo forzado y es el ocasionado por el arrastre del material con la superficie del husillo en movimiento. El flujo inverso ocurre en dirección contraria a la de la salida del extrusor y es conocido también como flujo de presión, debido a un gradiente de presión entre la entrada y descarga del extrusor que impide la salida del material, haciendo que recircule el material.

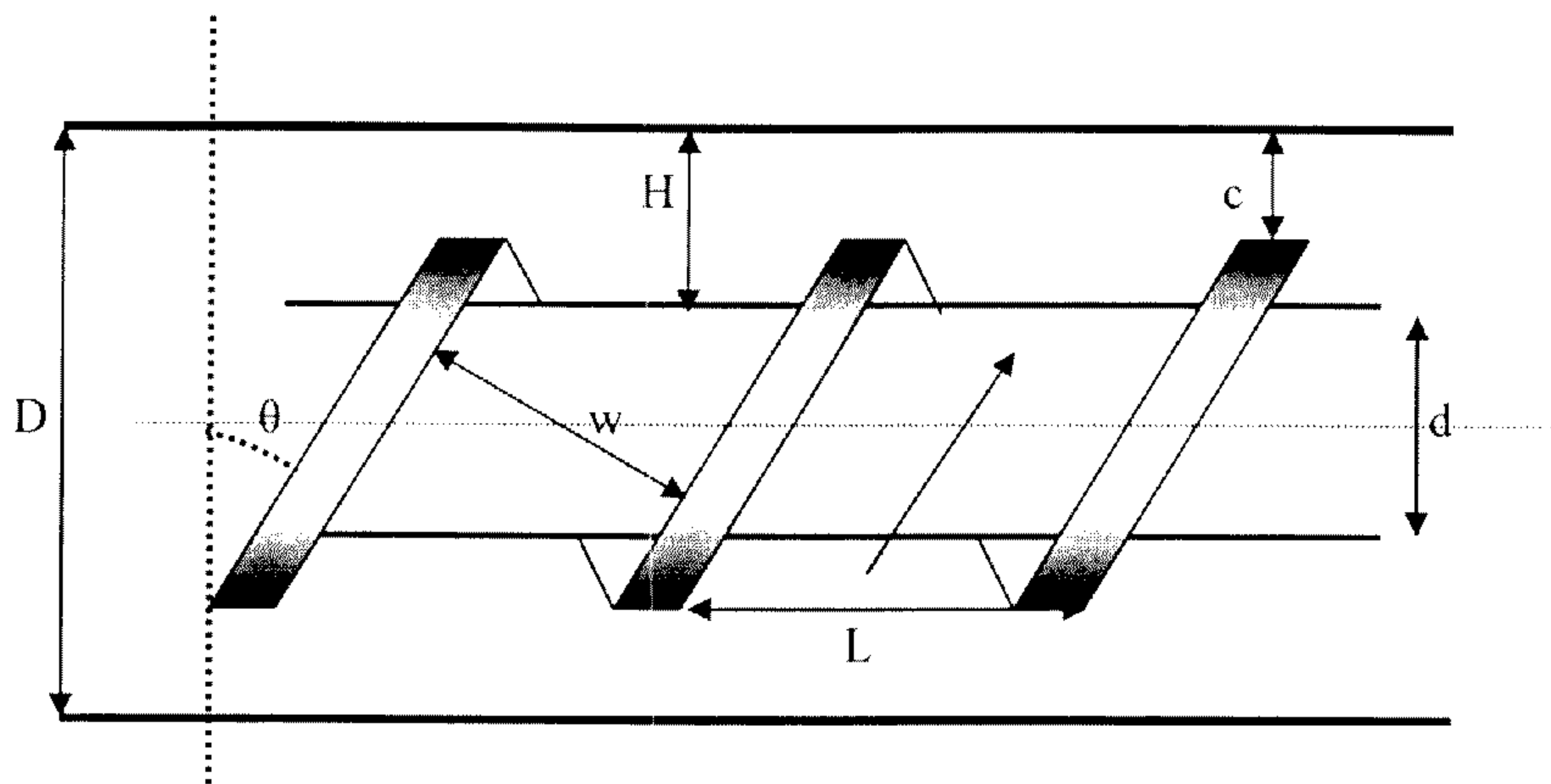
Los extrusores normalmente se caracterizan por su relación de longitud y diámetro del husillo:  $L/d$ ; pero en el proceso de flujo interesan más otras características como la velocidad de giro del husillo, ya que dicha velocidad conserva una relación con la rapidez de producción así como con la potencia requerida del motor eléctrico.

El motor eléctrico puede tener una velocidad de 1700 RPM mientras que en el mismo equipo el husillo puede estar girando a una velocidad de entre 20 y 200 RPM (Ebewele, 2000). De tal manera que la velocidad de giro es una variable importante sin lugar a dudas durante el modelado del flujo en el husillo del extrusor.

La presión interna que puede soportar un barril de extrusor se encuentra en un intervalo de 1000 a 10000 psi por lo que deben ser lo suficientemente sólidos, resistentes a la corrosión, al desgaste de las partes internas y a los efectos térmicos<sup>1</sup>.

La deflexión del husillo, el alabeo y otros efectos debidos a la presión generada sobre el husillo son consecuencias concernientes al diseño de tales máquinas, por lo que también es de especial interés analizar el gradiente de presión requerido para bombear el material polimérico fundido hacia el dado. Durante la operación de extrusión se pueden alcanzar presiones de más de 2000 psi (Ebewele, 2000).

**Figura 2.1. Extrusor simple.**



- w = ancho del canal
- H = altura entre superficies
- c = distancia entre la superficie interna y el claro de la hélice
- D = diámetro interno del barril
- d = diámetro del husillo
- $\theta$  = ángulo de la hélice
- L = longitud axial de una vuelta de álabe

<sup>1</sup> En realidad un tratamiento completo del flujo de polímeros en extrusores incluye el efecto de la variación de la temperatura mediante un balance de energía. Este aspecto fue considerado desde los primeros años en que comenzó el procesamiento de los polímeros en gran escala como lo hacen ver las fuentes consultadas, de las cuales destaca la obra de Böhme Gert, 1942.

## 2.2 CURVA DE FLUJO

Los fluidos pseudoplásticos han sido definidos como fluidos no newtonianos independientes del tiempo, lo que significa que en base a experimentos realizados sobre diversos materiales poliméricos, el tiempo que toma a estos para fluir es instantáneo debido al alineamiento de las partículas en la dirección del flujo. Esta tendencia aumenta con el aumento en la velocidad de deformación al mismo tiempo que la viscosidad efectiva disminuye (Darley y col. 1988). En el mismo contexto, la alta viscosidad de los polímeros fundidos no permite que alcancen el régimen turbulento cuando fluyen, por ejemplo, entre dos láminas planas y paralelas lo que los mantiene en el régimen de flujo laminar.

De cierto modo lo anterior justifica el empleo del modelo de flujo pseudoplástico presentado por Eyring para el tratamiento de los termoplásticos fundidos y que junto a las generalidades planteadas en la sección 2.1, permiten esquematizar el flujo entre placas paralelas como en la figura 2.2, la cual representa la primera aproximación de flujo hecha para comenzar el análisis y la que comúnmente se emplea para abordar los problemas de flujo. En este esquema, la deformación que sufre el material (definida como:  $\gamma = H/S$ ) ante el esfuerzo cortante aplicado en la placa superior de área superficial  $A_s$  (definido como:  $\tau = F/A_s$ ), está en función de la altura. La placa inferior se mueve con una velocidad constante transmitiendo movimiento al fluido y a medida que transcurre el tiempo el fluido mantiene un perfil de velocidades específico. En tal caso se ha alcanzado el estado estacionario y la fuerza aplicada para mantener el movimiento permanece constante. La velocidad a la cual se deforma el fluido está dada por los componentes cartesianos del tensor velocidad de deformación,<sup>1</sup>  $\Delta$ . Para el sistema de la figura 2.2  $\Delta = \Delta_{yz}$  donde además se tiene la siguiente igualdad en términos de derivadas.

$$\Delta_{yz} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{S} \right) = \frac{1}{S} \frac{dH}{dt} = \frac{V}{S} = - \frac{dv_z}{dy} \quad (2-1)$$

El signo negativo en (2-1) indica que el movimiento se transmite en la dirección en la que la velocidad decrece. La velocidad de deformación guarda una relación lineal con el esfuerzo cortante aplicado si el comportamiento es newtoniano. Para estos fluidos el coeficiente de proporcionalidad es la viscosidad newtoniana, la cual representa la resistencia que se opone al movimiento y sólo depende de la temperatura y la presión del fluido, de modo que la curva de flujo en este caso se encuentra descrita por la siguiente ecuación generalizada:

$$\tau = \mu \Delta \quad (2-2)$$

La figura 2.3 (equivalente a la figura 2.2) ubica el sistema de coordenadas rectangulares sobre la superficie del husillo manteniendo un sistema en movimiento tal que la placa con velocidad  $V$  corresponde a la superficie interna del barril y por tanto la placa fija corresponde a la superficie externa del husillo.

<sup>1</sup> Letras y símbolos en **negritas** se utilizan para la notación vectorial y tensorial.  $\Delta$  es el tensor de velocidad de deformación. Posee nueve componentes en correspondencia con los nueve componentes de  $\tau$ . Los componentes del sistema de coordenadas rectangulares se designan por (x, y, z).

Figura 2.2. Flujo entre placas paralelas.

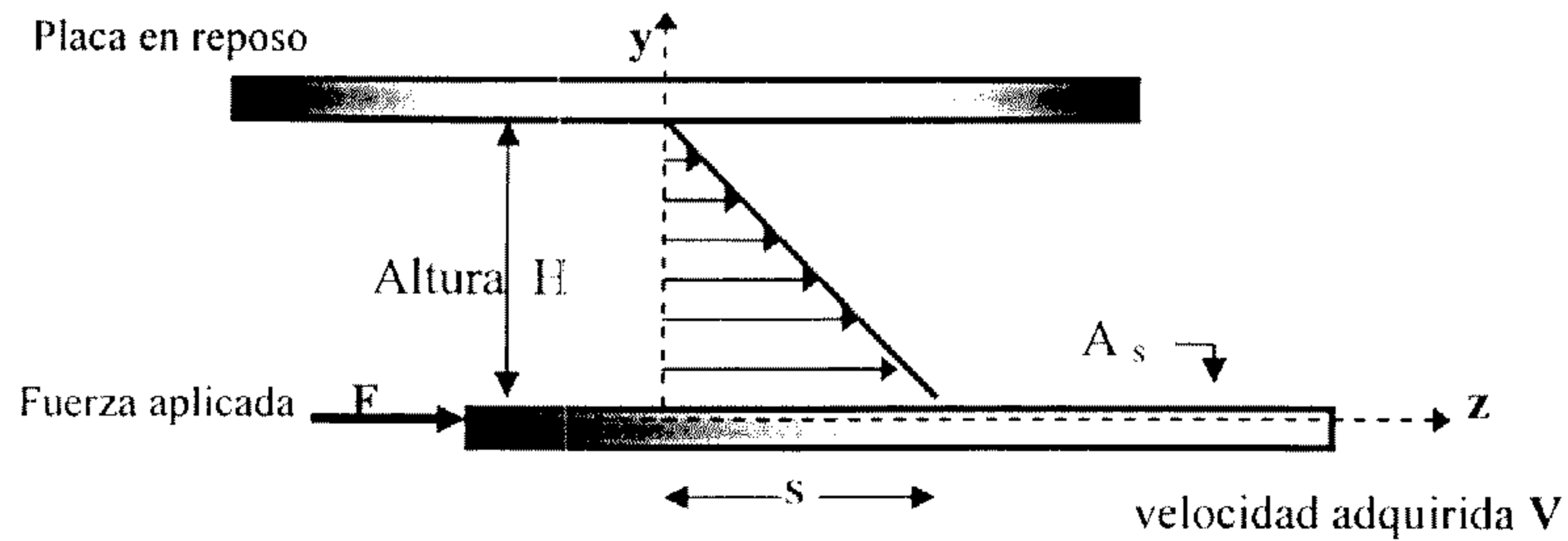
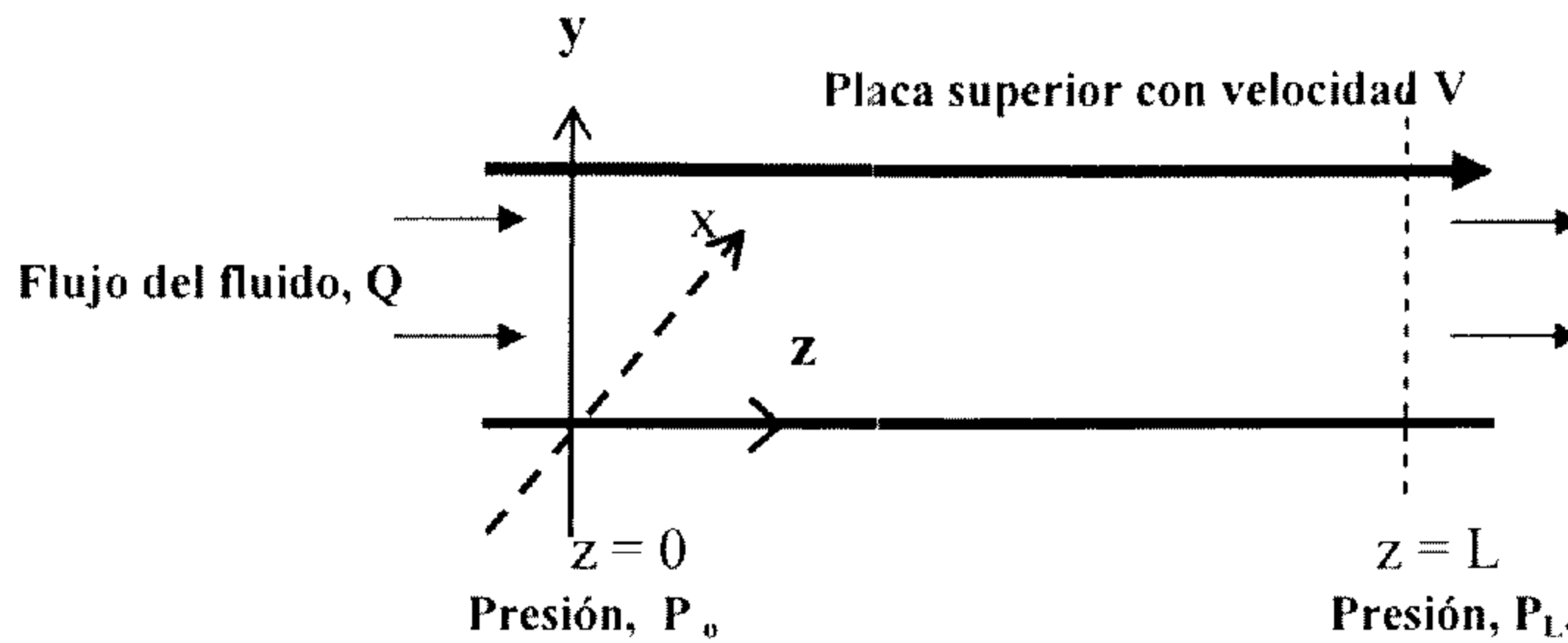


Figura 2.3. Flujo unidimensional entre placas paralelas



Es necesario recordar a partir de fenómenos de transporte que el movimiento laminar de cualquier fluido homogéneo sin reacción química, newtoniano o no newtoniano independiente del tiempo, en el volumen interno de un ducto cerrado debe necesariamente satisfacer los tres balances generales siguientes: (1) ecuación de continuidad, (2) ecuación de movimiento y (3) ecuación de energía.

Los anteriores balances dependen del campo de velocidades (expresado vectorialmente por  $\mathbf{v}$ ) y del campo de temperaturas (expresado en forma escalar por  $T$ ). Para el sistema de coordenadas rectangulares seleccionado en general son, respectivamente:

$$\mathbf{v} = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), v_z(x, y, z, t)); \quad T = T(x, y, z, t)$$

La suposición de flujo isotérmico elimina el uso de (3) porque  $T = \text{constante}$ . La forma general vectorial de (1) (o balance de materia) es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2-3)$$

En donde  $\rho$  es la densidad y  $\rho \mathbf{v}$  es la densidad de flujo de la materia.

La ec. (2-3) obliga antes que nada a efectuar suposiciones con el objeto de hacerla manejable ya que es una ecuación diferencial parcial (abreviada por las siglas EDP) a través del operador divergencia ( $\nabla \cdot$ ). La suposición adicional de régimen independiente del tiempo no basta para simplificarla por lo que tiende a suponerse que  $\rho$  es constante en el volumen de control, transformándola en

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-4)$$

La ec.(2-4) significa que el fluido es incompresible, lo que se asume ocurre para los termoplásticos fundidos por encontrarse en estado líquido. Además sigue siendo una EDP por lo que la única forma de reducirla a una ecuación diferencial ordinaria (EDO), mucho más simple de manipular, es concentrarse en la variabilidad de  $v$ .

Cuando se acepta como razonable un modelo inicial de flujo laminar unidimensional en la dirección del eje coordenado  $z$  a todo lo ancho del eje  $x$  (dirección perpendicular al plano de la figura 2.3) para simular el proceso deseado, se está fijando indirectamente que  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$  de tal suerte que (2-4) se reduce a la siguiente EDP.

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-5)$$

Esta conclusión corresponde a la situación de flujo completamente desarrollado en la que se ignoran los efectos de entrada y de salida al volumen, de forma similar a como se ha ignorado la presencia de las paredes normales a  $x$  (o flujo entre placas paralelas infinitas).

$\partial/\partial t = 0$ , (2-5) y la consideración hecha en el párrafo previo a ésta dejan el siguiente campo de velocidades.

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z(y)) \quad (2-6)$$

Al mismo tiempo, (2-6) establece que la única componente diferente de cero del tensor de esfuerzos es  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  siendo sólo función de  $y$ .

$v_z(y)$  representa el perfil de velocidades y no es estrictamente responsabilidad única del balance de materia porque tiene elementos de análisis de transferencia de cantidad de movimiento incluidos. Además es muy importante ya que informa que el perfil tendrá siempre la misma forma para determinadas condiciones de operación (velocidad de arrastre, etc.).

Las componentes escalares para la descripción tensorial de (2) sujetas a (2-6) se obtienen de las tablas existentes para la ecuación de movimiento (Bird y col., 1998) de manera que

$$\text{Componente } x: 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (2-7)$$

$$\text{Componente } y: 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (2-8)$$

$$\text{Componente } z: 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho g_z \quad (2-9)$$



En las que el vector aceleración de gravedad  $\mathbf{g}$  y sus componentes se relacionan para el sistema de coordenadas rectangulares como a continuación se indica.

$$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z) = (0, -g, 0) \quad (2-10)$$

Y en la que  $-g = |\mathbf{g}|$

La ec.(2-8) y  $g_y = -g$  dejan abierta la opción de que la presión,  $P$ , pueda ser una función de  $y$ ; pero cuando  $H$  es pequeña, usualmente no mayor a 1cm, el peso del fluido ( $\rho \simeq 1\text{g/cm}^3$ ) es mucho más pequeño que la presión aplicada permitiendo concluir razonablemente, usando además (2-7), que  $P$  no depende de  $x$  ni de  $y$  por lo que (2-7) y (2-8) no se necesitan en el análisis del flujo el cual se reduce sólo a sustituir (2-10) en (2-9) para obtener la siguiente EDP.

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (2-11)$$

Debido a que el lado izquierdo (LI) de (2-11) es sólo función de la variable  $y$  mientras su lado derecho (LD) es función a lo más de  $z$ , se concluye que la identidad es cierta si y sólo si son iguales a una constante. No se puede aceptar la constancia del LI porque se requeriría que  $\tau_{yz} = a y$  ( es decir, igual a otra constante) válida sólo en el caso de flujo por arrastre para el que de todas formas  $\partial P / \partial z = 0$ , de tal forma que la única constante posible es la del gradiente de presión; es decir, que se puede establecer la siguiente igualdad.

$$G = -\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{L} = \text{constante} \quad (2-12)$$

Donde, para satisfacer los signos y nomenclatura usados por Bird, Stewart y Lightfoot se define como caída de presión lo siguiente.

$$\Delta P = P_0 - P_L \quad (2-13)$$

Así (2-11) y (2-12) se combinan para producir la siguiente EDO.

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = G \quad (2-14)$$

Sujeta a las condiciones a la frontera (CF) siguientes, para encontrar su solución.

$$\text{CF1: } v_z(y=0) = 0 \quad (2-15)$$

$$\text{CF2: } v_z(y=H) = V \quad (2-16)$$

Es necesario entender que (2-14) es válida tanto para fluido newtoniano como para no newtoniano ya que no deja de ser el balance de fuerzas que provocan el movimiento.

Después de haber obtenido (2-14) llega el momento en que se debe tomar la decisión del tipo de fluido al que se le va a aplicar. A partir del fluido newtoniano básico (2-2) se ha generalizado la curva de flujo para un fluido no newtoniano independiente del tiempo conocido normalmente como **fluido puramente viscoso**, partiendo de la relación entre el tensor de esfuerzos tangenciales sobre el volumen,  $\tau$ , y el tensor de velocidades de deformación,  $\Delta$ .

$$\tau = \eta \Delta \quad (2-17)$$

En la que  $\eta$  es la viscosidad no newtoniana y para el proceso de flujo unidimensional se reduce a esta expresión en términos de sus componentes escalares.

$$\tau_{yz} = \eta \Delta_{yz} \quad (2-18)$$

Donde, por definición de (2-1) en su forma simple, se tiene:

$$\Delta_{yz} = - \frac{dv_z}{dy} \quad (2-19)$$

Y la propiedad material  $\eta$  es función de:

$$\eta = \eta ( | \Delta_{yz} | \text{ ó } | \tau_{yz} | ) \quad (2-20)$$

Es decir, que es una función escalar de  $\tau$  o de  $\Delta$  de acuerdo al sistema de flujo y para una temperatura y presión dadas no se mantiene constante como sucede en el comportamiento newtoniano. Los signos del valor absoluto en (2-20) son necesarios porque  $\eta$  tiene que ser exactamente del mismo valor para  $\pm \Delta_{yz}$  o para  $\pm \tau_{yz}$ .

La expresión de (2-20) más conocida en términos de  $| \Delta_{yz} |$  está dada por la siguiente ecuación.

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{\Delta_{yz}}{\Delta_0} \right)^{n-1} \quad (2-21)$$

En la que  $\eta_0$  y  $n$  son parámetros de ajuste experimental (dependientes de la temperatura) y suele tomarse  $\Delta_0 = 1s^{-1}$  como valor en el estado de referencia. Desafortunadamente a (2-21) se le conoce como viscosidad ley de potencia, pero dado que hay muchos fluidos de interés industrial para los que  $0 < n < 1$  y en los que nunca se han observado viscosidades infinitas deja automáticamente de tener características de ley aunque su mayor ventaja sea la de tener sólo dos parámetros de ajuste a una temperatura dada.

En el sentido anterior, con este trabajo se quiere investigar las dificultades tanto analíticas como numéricas que pudieran presentarse al emplear la viscosidad tipo Eyring que contiene también sólo dos parámetros de ajuste y que no predice viscosidad infinita cuando  $\Delta_{yz} = 0$ .

La expresión matemática para  $\eta$  tipo Eyring es la siguiente.

$$\eta = \frac{A}{\Delta_{yz}} \operatorname{sh}^{-1} \left( \frac{\Delta_{yz}}{B} \right) \quad (2-22)$$

Donde los parámetros A y B para fluidos puros siguen normalmente estas descripciones algebraicas.

$$A = A_1 \exp \left( -A_2 \frac{T - T_R}{T_R T} \right) \quad (2-23)$$

$$B = B_1 \exp \left( B_2 \frac{T - T_R}{T_R T} \right) \quad (2-24)$$

$A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son constantes verdaderas y  $T_R$  es una temperatura de referencia. Para una mezcla homogénea de dos o más componentes, A y B dependen de la concentración. Combinando (2-18) y (2-22) se obtiene la siguiente expresión de flujo para la velocidad de deformación.

$$\Delta_{yz} = B \operatorname{sh} \left( \frac{\tau_{yz}}{A} \right) \quad (2-25)$$

También, al insertar (2-22) en (2-18) se obtiene la curva de flujo de Eyring en su forma más conocida y en la que se observa el comportamiento no lineal de  $\tau_{yz}$ .

$$\tau_{yz} = A * \operatorname{sh}^{-1} \left( \frac{\Delta_{yz}}{B} \right) \quad (2-26)$$

La solución analítica del problema de flujo consiste en la integración de (2-14) sujeta a (2-15) y (2-16) para la que  $\tau_{yz}$  está dada por (2-26) y  $\Delta_{yz}$  corresponde a (2-19).

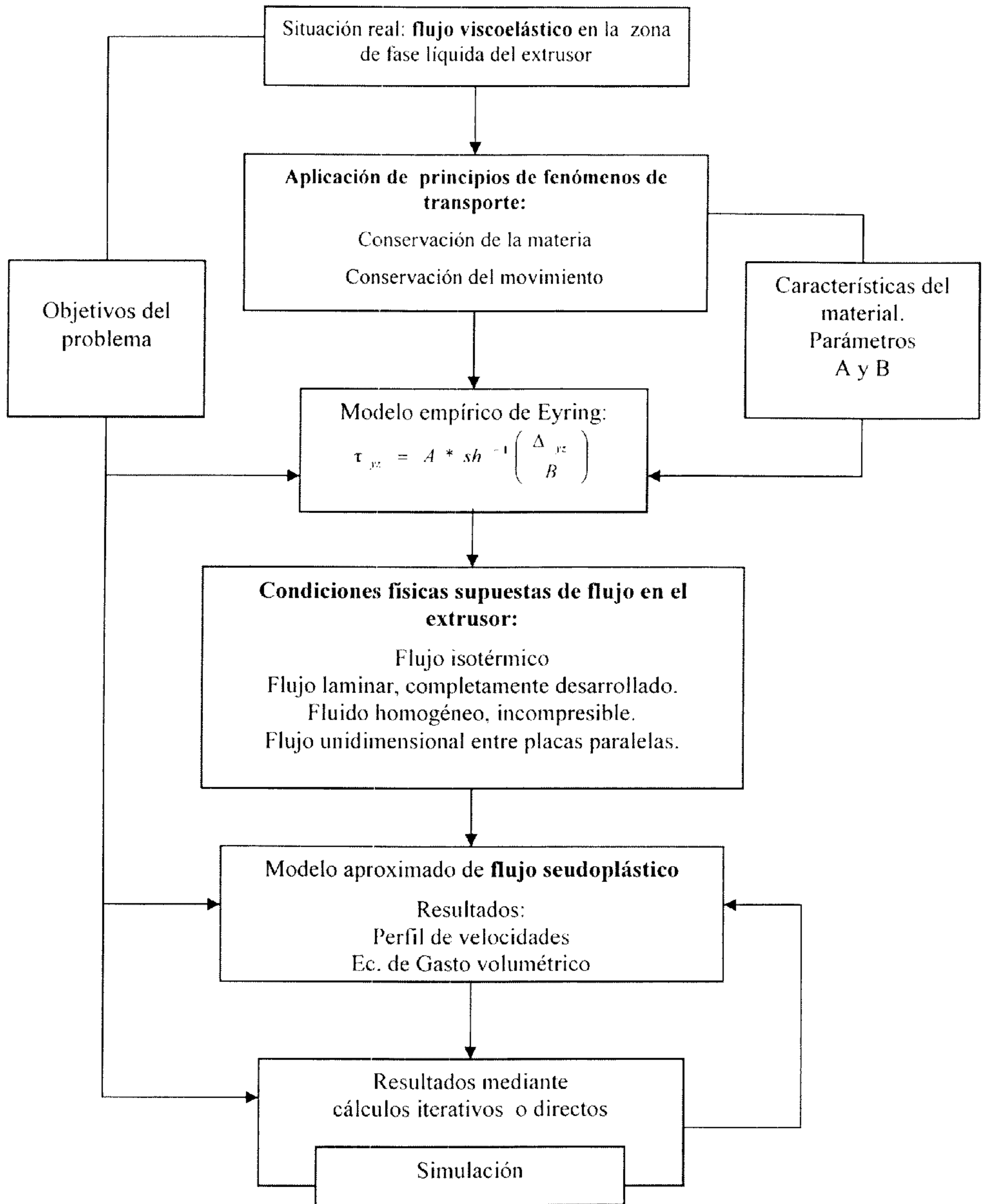
El desarrollo primario del modelado de flujo isotérmico tiene como finalidad obtener el perfil de velocidades  $v_z(y)$  para cierta diferencia de presiones,  $\Delta P$ , y velocidad de arrastre,  $V$ , porque es la única forma de conocer la velocidad volumétrica,  $Q$ , y que finalmente es la que determina la velocidad másica de producción o producto  $\rho Q$ ; es decir,  $Q$  corresponde a lo siguiente.

$$Q = \int_0^w \int_0^H v_z(y) dy dx \quad (2-27)$$

Donde  $w$  es el ancho de las placas a lo largo de la dirección  $x$ .

En la figura 2.4 se muestra el esquema general para la forma en la que se debería obtener la solución completa del problema.

**Figura 2. 4 Planteamiento general del modelado matemático.**



### 3. DESARROLLO MATEMÁTICO

#### 3.1 MODELADO DE FLUJO EN EXTRUSOR PLASTIFICANTE

De manera explícita se resumen las suposiciones hechas en las secciones 2.1 y 2.2 para comenzar el análisis. Estas son:

- S1. Régimen independiente del tiempo
- S2. Fluido seudo plástico homogéneo tipo Eyring
- S3. Flujo isotérmico, incompresible
- S4. Flujo laminar completamente desarrollado y unidimensional

La integración de (2-14) produce la ecuación de esfuerzo cortante a ser utilizada en la obtención del perfil de velocidades.

$$\tau_{yz} = a + Gy \quad (3-1)$$

##### 3.1.1 Perfil de velocidades.

Para comenzar el desarrollo es conveniente describir (2-25) empleando (2-19) de la siguiente forma<sup>1</sup>.

$$-\frac{dv_z}{dy} = Bsh\left(\frac{\tau_{yz}}{A}\right) \quad (3-2)$$

La ec. (3-1) en (3-2) produce la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal.

$$\frac{dv_z}{dy} = -Bsh\left[\left(\frac{a}{A}\right) + \left(\frac{G}{A}\right)y\right] \quad (3-3)$$

Sujeta a las mismas condiciones a la frontera (2-15) y (2-16); pero antes de continuar, la no linealidad del problema sugiere tratarlo de manera adimensional definiendo las siguientes cantidades.

$$\xi = \frac{y}{H} \quad (3-4)$$

$$\phi = \frac{v_z}{V} \quad (3-5)$$

De las que es válido aplicar la regla de la cadena.

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{d\xi}{dy} \frac{d\phi}{d\xi} \quad \frac{dv_z}{dy} = \frac{V}{H} \frac{d\phi}{d\xi} \quad (3-6)$$

<sup>1</sup> El seno y coseno hiperbólicos se abrevian en este texto como *sh* y *ch* respectivamente.

De tal manera que (3-4) a (3-6) afectan a las condiciones a la frontera (abreviadas por sus letras iniciales como CF) (2-15) y (2-16). Y por tanto (3-3) se rescribe como:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{1}{\lambda} sh(m + \Gamma\xi) \quad (3-7)$$

(2-15) y (2-16) se transforman respectivamente en las siguientes CF adimensionales.

$$\phi(\xi = 0) = 0 \quad (3-8)$$

$$\phi(\xi = 1) = 1 \quad (3-9)$$

Haciendo uso de (2-12) se definen ahora estas cantidades en términos adimensionales.

$$\lambda = \frac{V}{HB} = \text{velocidad adimensional de la placa superior} \quad (3-10)$$

$$m = \frac{a}{A} = \text{primer constante adimensional de integración} \quad (3-11)$$

$$\Gamma = \frac{HG}{A} = \frac{H\Delta P}{AL} = \text{gradiente adimensional de presión} \quad (3-12)$$

La integral de (3-7) fija este perfil de velocidades general,

$$\phi = b - \frac{1}{\lambda\Gamma} ch(m + \Gamma\xi) \quad (3-13)$$

En el que b es la segunda constante de integración adimensional. Al emplear (3-8) el perfil de velocidades queda finalmente como:

$$\phi = \frac{1}{\lambda\Gamma} (ch(m) - ch(m + \Gamma\xi)) \quad (3-14)$$

Por (3-9) en (3-14) se obtiene la siguiente ecuación en la que m se convierte en la raíz de esta misma ecuación,

$$ch(m) - ch(m + \Gamma) - \lambda\Gamma = 0 \quad (3-15)$$

Usando álgebra y funciones hiperbólicas es posible despejar la constante m de la siguiente forma:

$$m = \ln(\beta^{0.5} - 1) - \ln(\alpha) \quad (3-16)$$

Donde,

$$\alpha = \frac{e^{\Gamma} - 1}{\lambda\Gamma} \quad (3-17)$$

$$\beta = 1 + \frac{\alpha^2}{e^\Gamma} \quad (3-18)$$

El haber despejado a  $m$  es importante porque en una gran cantidad de ecuaciones no lineales esto no es posible; y es aún más significativo el hecho de que no es motivo de preocupación el signo de  $m$ . Su signo es independiente del signo de  $\Gamma$ , aunque claro, no es válido este desarrollo para  $\Gamma = 0$ .

Al insertar apropiadamente (3-16) en (3-14) se obtiene el perfil de velocidades en los términos adimensionales definidos arriba.

$$\phi = \frac{1}{2\alpha\lambda\Gamma(\beta^{0.5} - 1)} [\delta(1 - ch(\Gamma\xi) + \varepsilon sh(\Gamma\xi))] \quad (3-19)$$

Donde se han definido los siguientes términos para simplificar tal ecuación.

$$\delta = \alpha^2 + (\beta^{0.5} - 1)^2 \quad (3-20)$$

$$\varepsilon = \alpha^2 - (\beta^{0.5} - 1)^2 \quad (3-21)$$

De este modo se tiene que  $\Phi = \Phi(\lambda, \Gamma, \xi)$ .

El mayor logro de (3-19) es que se ha demostrado la falsedad del llamado principio de superposición cuando se manejan ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (Shepley, 1964).

Hasta (3-19) se tiene la solución de (3-7) estrictamente para  $\Gamma \neq 0$ . Esto es, para flujo combinado por arrastre y por presión.

El desarrollo cuando  $\Gamma = 0$  se verá a continuación, antes de proceder con la obtención del gasto volumétrico deseado.

### Desarrollo para $\Gamma = 0$

Si  $\Gamma = 0$  no existe un gradiente de presión, por lo que el material únicamente fluye por arrastre de la placa en movimiento. Entonces la solución de (3-7) es:

$$\phi = c_2 - \left[ \frac{sh(m)}{\lambda} \right]_\xi \quad (3-22)$$

Y de acuerdo a la condición (3-8) se demuestra que  $c_2 = 0$  y (3-22) se reduce a lo siguiente,

$$\phi = - \left( \frac{sh(m)}{\lambda} \right)_\xi \quad (3-23)$$

Luego, por la condición (3-9) se obtiene que:

$$-\left(\frac{sh(m)}{\lambda}\right) = 1 \quad (3-24)$$

Empleando propiedades hiperbólicas en (3-24) se deduce:

$$m = -\ln\left[\lambda + (\lambda^2 + 1)^{0.5}\right] \quad (3-25)$$

Dado que  $\lambda > 0$ , se debe notar que  $m$  solo puede ser menor a cero debido a que en (3-25) el término entre corchetes es mayor a uno y por tanto positivo.

Las ecs. (3-24) y (3-25) demuestran en forma indirecta que  $sh(m) = -\lambda$  para cualquier valor de  $\lambda > 0$  y solo cuando  $\Gamma = 0$ ; de esta manera, el perfil de velocidades resulta en lo siguiente.

$$\phi = \xi \quad (3-26)$$

### 3.1.2. Gasto volumétrico.

El gasto volumétrico definido en (2-27) se simplifica a lo siguiente.

$$Q = W \int_0^H v_z(y) dy$$

Con el uso de las cantidades adimensionales (3-4) y (3-5), la ecuación anterior se transforma del siguiente modo.

$$\psi' = \int_0^1 \phi(\xi) d\xi \quad (3-27)$$

Donde  $\psi'$  es el gasto volumétrico adimensional definido en esta forma.

$$\psi' = \frac{Q}{WVH} \quad (3-28)$$

Al insertar (3-14) en (3-27) se obtiene esta integral abstracta.

$$\psi' = \frac{1}{\lambda\Gamma} \left( ch(m) \int_0^1 d\xi - \int_0^1 ch(m + \Gamma\xi) d\xi \right) \quad (3-29)$$



Cuyas integraciones entre límites son:

$$\int_0^1 d\xi = 1 \quad (3-30)$$

$$\int_0^1 ch(m + \Gamma \xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma} [sh(m + \Gamma) - sh(m)] \quad (3-31)$$

Por tanto, (3-30) y (3-31) en (3-29) producen finalmente la ecuación de flujo volumétrico.

$$\psi = \frac{1}{\lambda \Gamma^2} \{ [1 - ch(\Gamma)] sh(m) + [\Gamma - sh(\Gamma)] ch(m) \} \quad (3-32)$$

Para el caso en que  $\Gamma = 0$  se sustituye (3-23) en (3-27) y se obtiene la ecuación integral siguiente,

$$\psi = - \left[ \frac{sh(m)}{\lambda} \right] \int_0^1 \xi d\xi \quad (3-33)$$

Cuya integración es:

$$\psi = - \frac{1}{2} \left[ \frac{sh(m)}{\lambda} \right] \quad (3-34)$$

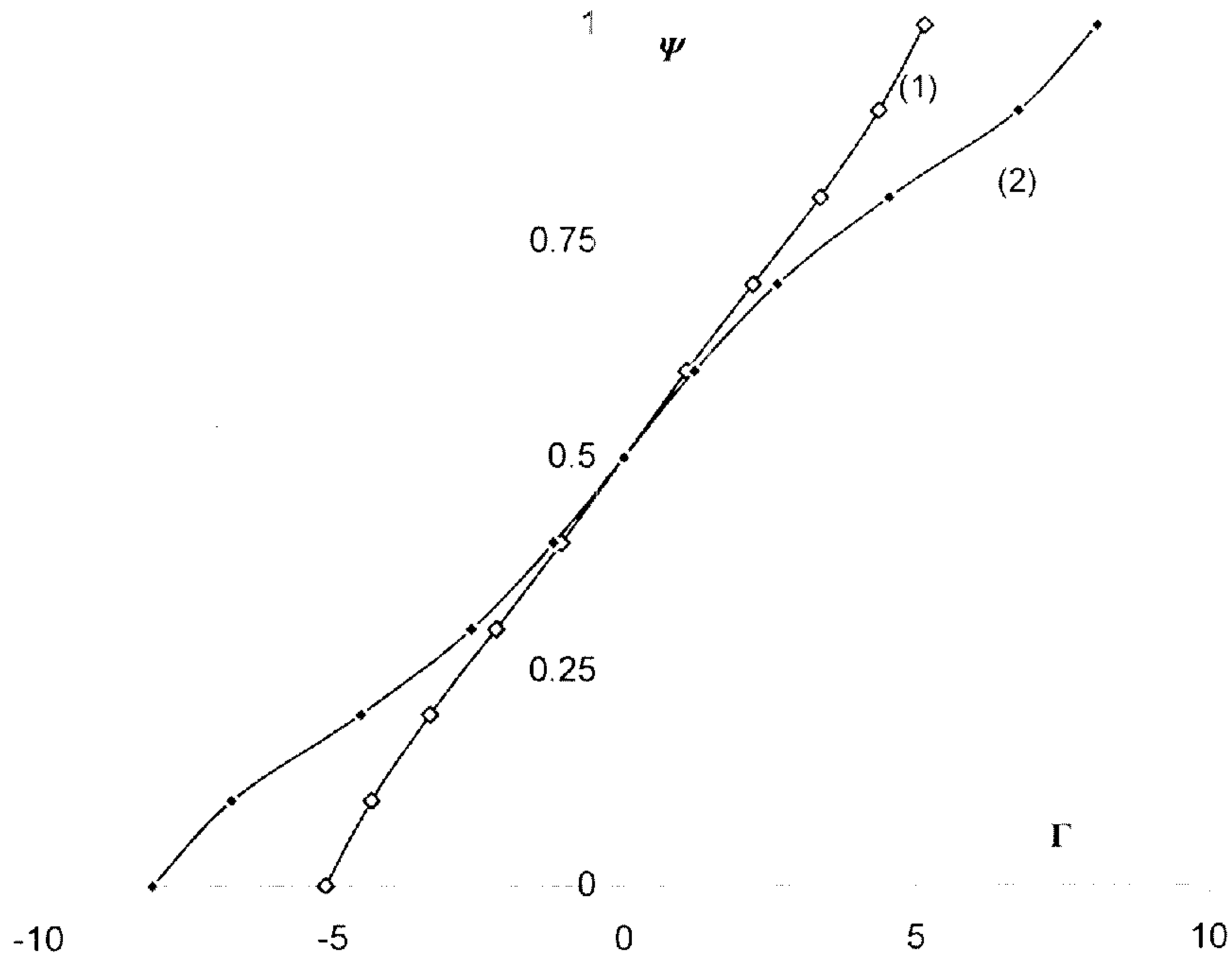
Retomando el último comentario de la sección anterior, por (3-24), (3-34) se simplifica a esta identidad característica para este flujo:

$$\psi = 0.5 \quad (3-35)$$

El significado de (3-35) es muy importante porque analizando el comportamiento numérico de (3-32) para diferentes valores de  $\lambda > 0$  se observa que cuando  $-\infty < \Gamma < 0$  entonces  $0 \leq \psi < 0.5$  y cuando  $0 < \Gamma < \infty$  entonces  $0.5 < \psi < \infty$ . Ver figura 3.1.

Es decir, la condición específica:  $(\lambda, \Gamma, \psi) = (\lambda, 0, 0.5)$  se toma como el valor de referencia a partir del cual se relacionan las demás condiciones permitiendo definir los intervalos de perfiles de velocidades.

**Figura 3.1 Comportamiento numérico de la ecuación de flujo volumétrico**  
**Para valores de: 1)  $\lambda=2$  y 2)  $\lambda=8$ .**



### 3.1.3 Intervalos de perfiles de velocidad

Para el tipo de flujo considerado en la figura 2.3 pueden existir diferentes tipos de perfiles de velocidades dependiendo de la aparición de un mínimo o un máximo o inclusive de la falta del punto crítico. La función objetivo a optimizar es la ecuación diferencial (3-7) de la cual se satisface la siguiente implicación,

$$\frac{d\phi}{d\xi} \Big|_{\xi=\zeta} = 0 \rightarrow m = -\Gamma\zeta \rightarrow \zeta = -\frac{m}{\Gamma} \quad (3-36)$$

Donde  $\zeta$  representa la posición real en el intervalo de acotación en  $0 \leq \xi \leq 1$  si existe punto crítico, y deja de serla cuando no lo hay. El flujo solo por arrastre es el caso más obvio de perfil de velocidades sin punto crítico.

De (3-36) se deducen dos posibilidades de valores para  $m$  y  $\Gamma$  dentro del intervalo  $0 \leq \zeta \leq 1$  que son:

- a)  $m > 0, \Gamma < 0$
- b)  $m < 0, \Gamma > 0$

Ahora bien, la segunda derivada predice la existencia de un máximo o mínimo dependiendo del signo algebraico que se obtiene.

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -\frac{\Gamma}{\lambda} \cosh(m + \Gamma\xi) \quad (3-37)$$

Y por propiedades de funciones hiperbólicas se sabe que el argumento del coseno hiperbólico es mayor que cero, es decir,  $\cosh(m + \Gamma\xi) > 0$ , por lo que el signo de la segunda derivada depende únicamente del signo de  $\Gamma$ . Se debe recordar que el modelo es aplicable para  $\Gamma \neq 0$ .

De lo anterior, se observa la existencia de estas dos posibilidades:

Si  $\Gamma < 0$ , la segunda derivada es positiva y se tiene un mínimo como punto crítico. (3-38)

Si  $\Gamma > 0$ , la segunda derivada es negativa y se tiene un máximo como punto crítico. (3-39)

Las ecs. (3-38) y (3-39) permiten concluir que el mínimo aparecerá cuando la presión a la salida,  $P_L$  sea mayor que la presión a la entrada,  $P_0$ . Si ocurre lo contrario, el punto crítico es máximo.

En cualquier caso el objetivo es conocer la magnitud de  $\Gamma$  que está íntimamente ligada a la magnitud de  $m$  y de  $\lambda$  de acuerdo al desarrollo hecho anteriormente.

La ec. (3-36) indica que el primer mínimo ocurre en  $\zeta = 0$  y este va subiendo a  $\zeta = 0.5$  a medida que  $\Gamma$  es cada vez más negativa provocando que  $m$  sea más positiva, condición extrema bajo la cual solamente hay recirculación en  $0 \leq \zeta \leq 1$ . La condición de recirculación similar al caso anterior obedece a la aparición de un máximo en  $m = -\Gamma$  o  $\zeta = 1$  y va descendiendo hacia  $\zeta = 0.5$  a medida que  $\Gamma$  es más positiva y  $m$  es más negativa. Estas son las condiciones extremas que acotan a las condiciones de flujo sin puntos críticos en medio de las cuales aparecería precisamente la condición de  $\Gamma = 0$ .

De este modo se pueden subdividir los perfiles de velocidad como se señala a continuación.

- **Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 1, PVM1.**

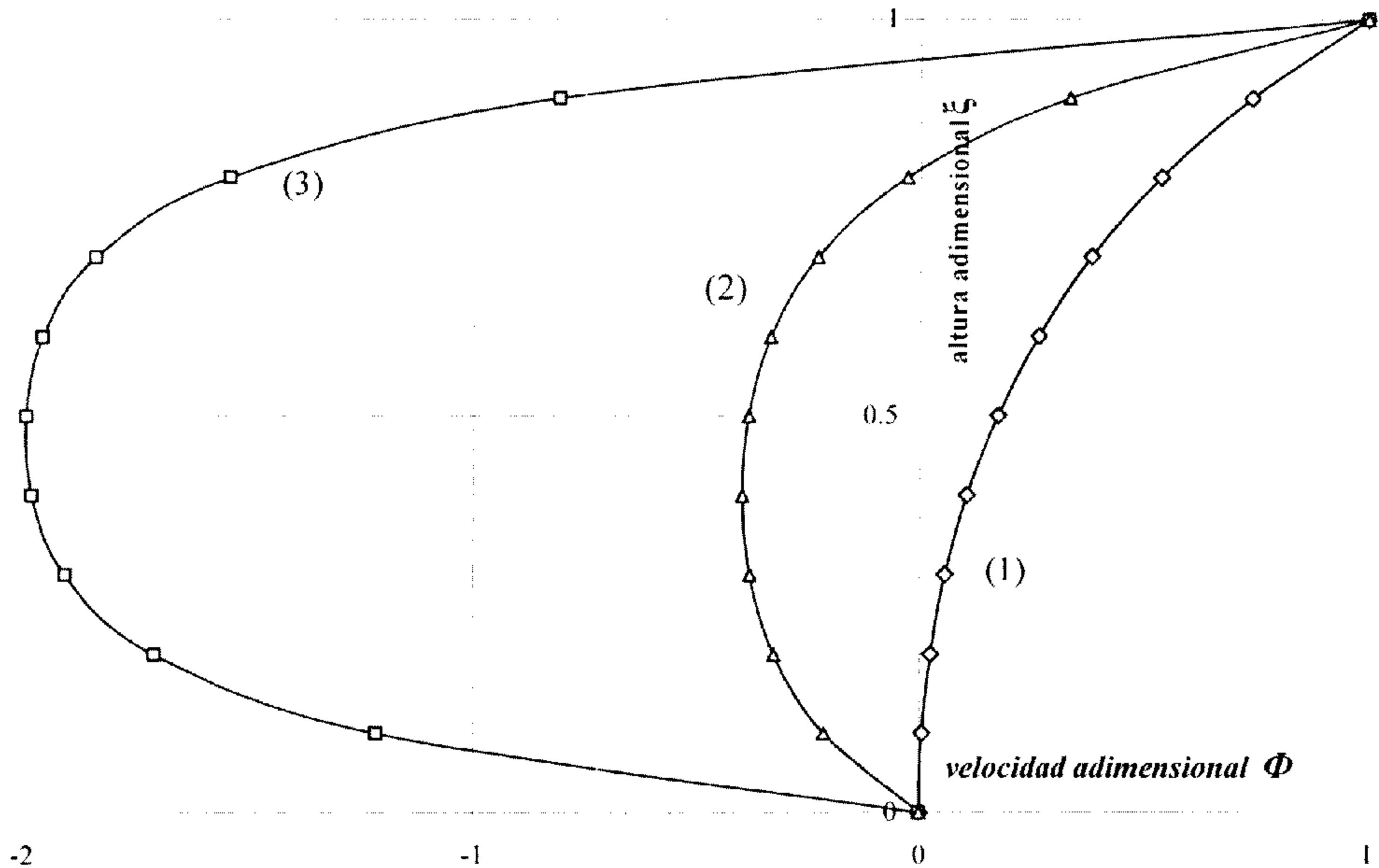
Los Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 1 se caracterizan por tener un mínimo en el intervalo  $0 \leq \xi \leq 0.5$  mientras que los intervalos de  $m$  y  $\Gamma$  son:

$$\infty > m \geq 0 \quad (3-40)$$

$$-\infty < \Gamma \leq \ln(\beta^{0.5} - 1) - \ln(\alpha) = 0 \quad (3-41)$$

En estos perfiles, la presión está acotada entre el infinito y la raíz en que  $m = 0$ , es decir, entre  $-\infty < \Gamma \leq \Gamma_{m=0}$  debido a que en  $m = 0$  aparece el primer mínimo. La figura 3.2 ilustra el hecho para un valor arbitrario de velocidad de placa. En este ejemplo, se determina que  $\Gamma_{m=0} = -2.466482$

**Figura 3.2. Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 1, PVM1.  $\lambda = 2$**   
 1)  $\Gamma = -2.466482$ , 2)  $\Gamma = -6$ , 3)  $\Gamma = -9$ .



• **Perfiles de Velocidad Simples tipo 1, PVS1.**

Estos perfiles no tienen un punto crítico y están acotados mediante los siguientes intervalos definidos en términos de las raíces que limitan su cambio.

$$0 > m > -\ln\left[\lambda + (\lambda^2 + 1)^{0.5}\right] \quad (3-42)$$

$$\ln(\beta^{0.5} - 1) - \ln(\alpha) = 0 < \Gamma < 0 \quad (3-43)$$

En este perfil la presión está acotada entre la raíz que acota PVM1 y  $\Gamma = 0$  sin que sea igual a estos valores. El desarrollo del modelo impide que  $\Gamma$  sea igual a cero. En la figura 3.3 la misma velocidad de placa nuevamente se utiliza como ejemplo y  $\Gamma_{m=0} = -2.466482$

• **Perfiles de Velocidad por Arrastre, PVA.**

Este Perfil de Velocidades por Arrastre corresponde a la condición única o local siguiente. Ver figura 3.4.

$$m = -\ln\left[\lambda + (\lambda^2 + 1)^{0.5}\right] \quad (3-44)$$

$$\Gamma = 0 \quad (3-45)$$

Figura 3.3 Perfiles de velocidad simples tipo 1, PVS1.  $\lambda=2$ , 1)  $\Gamma=-1$ , 2)  $\Gamma=-2$

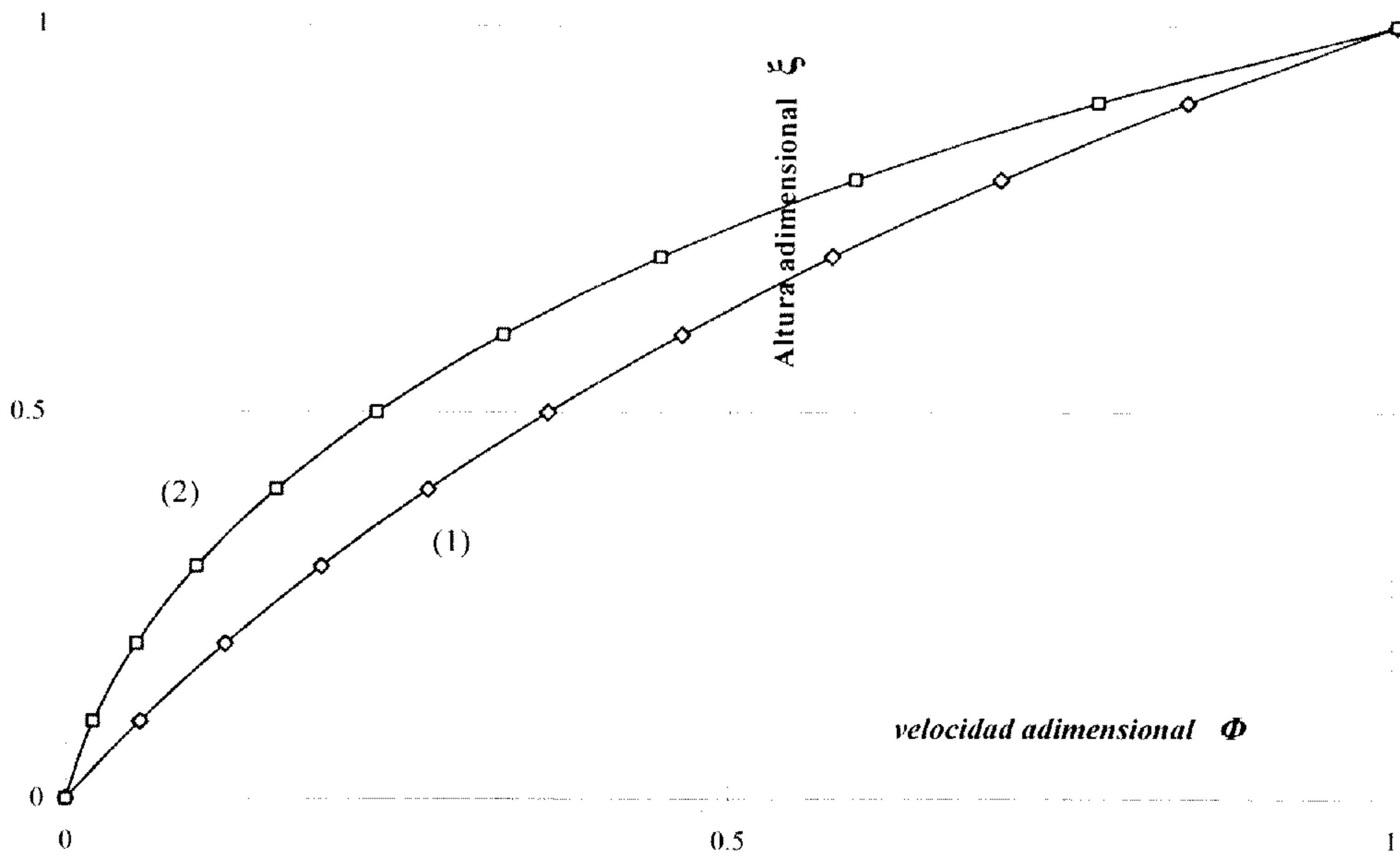
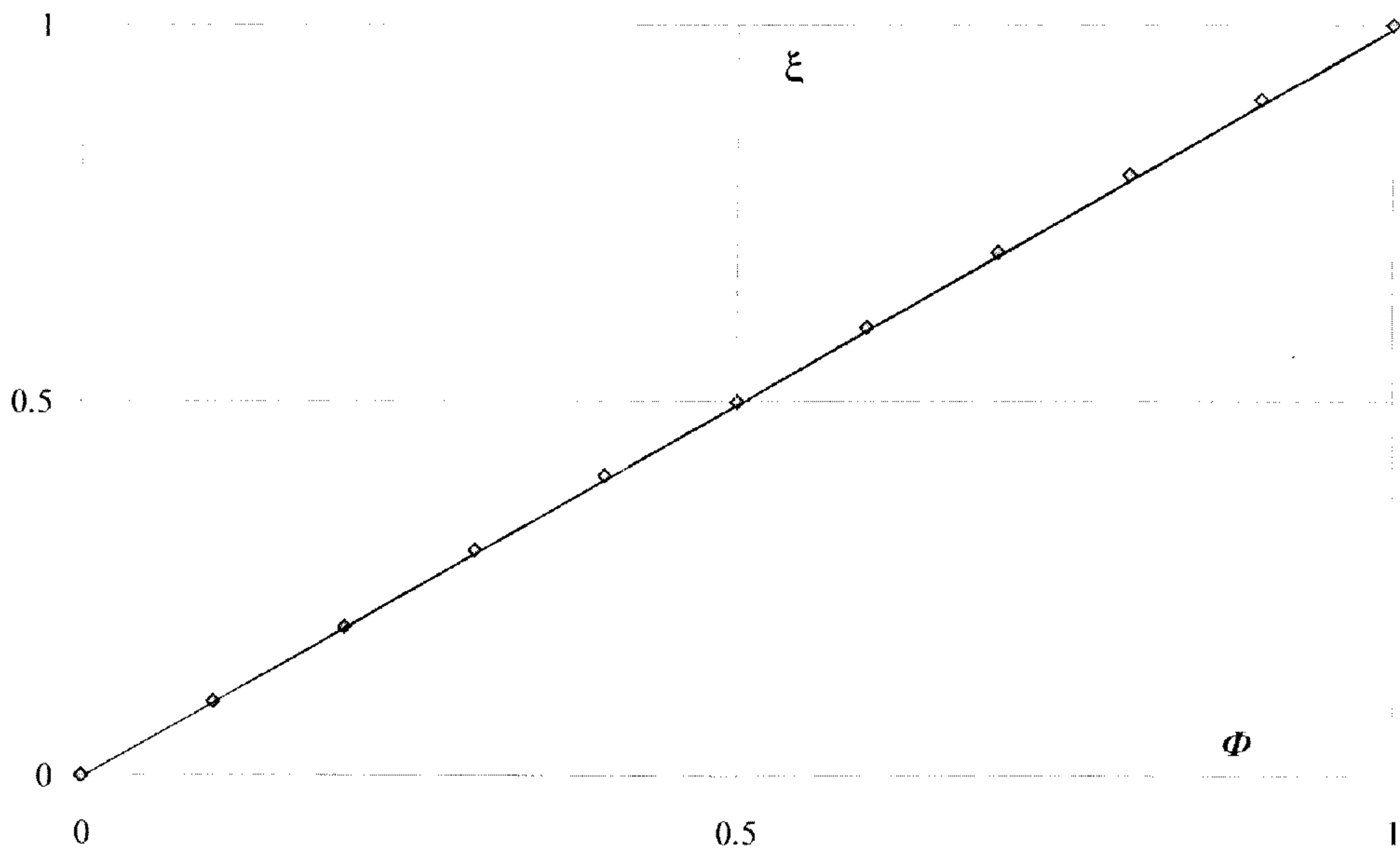


Figura 3.4. Perfiles de Velocidad por Arrastre, PVA.  
 $\lambda=2, \Gamma=0$



- **Perfiles de Velocidad Simples tipo 2, PVS2.**

Este tipo de perfil de velocidad no tiene puntos críticos y los intervalos quedan definidos del siguiente modo.

$$-\ln\left[\lambda + (\lambda^2 + 1)^{0.5}\right] > m \geq m = -\Gamma \quad (3-46)$$

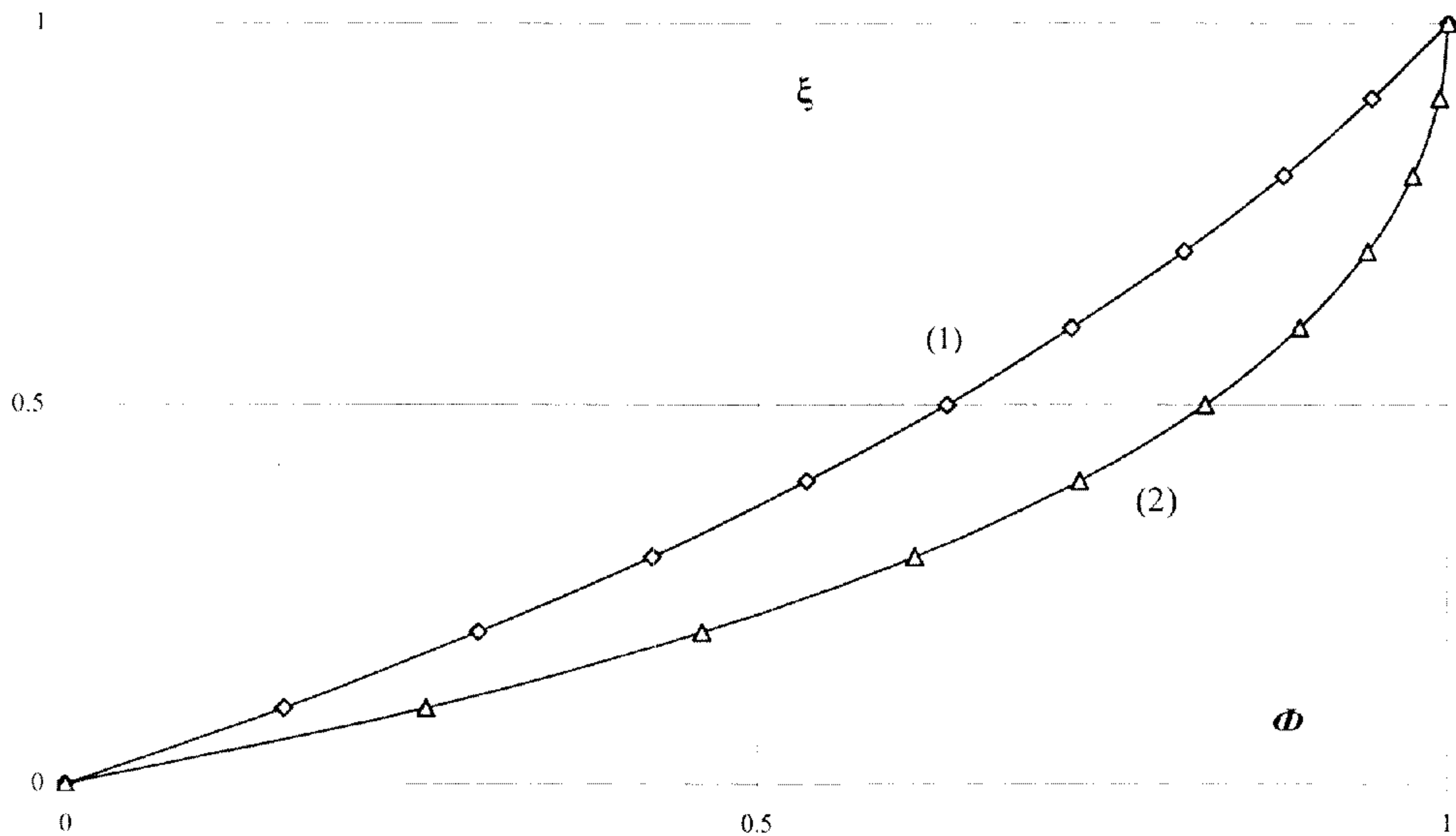
$$0 < \Gamma \leq \ln(\beta^{0.5} - 1) - \ln(\alpha) + \Gamma = 0 \quad (3-47)$$

Estos perfiles de velocidad quedan delimitados en un intervalo de presiones en el que no existe flujo únicamente por arrastre,  $\Gamma = 0$ , y cuando aparece el primer máximo, es decir, cuando  $m = -\Gamma$ , entonces  $\Gamma = \Gamma_{\max}$ . Además sin que  $\Gamma$  sea igual a cero como se indica en (3-47).

La figura 3.5 demuestra esta condición, en la que la raíz calculada de la ecuación (3-47) por métodos iterativos es  $\Gamma_{\max} = 2.466505$ . A partir de este valor comienzan los perfiles PVM2 que se explican enseguida.

**Figura 3.5 Perfiles de Velocidad Simples tipo 2, PVS2.**

$\lambda = 2$ . 1)  $\Gamma = 1$ , 2)  $\Gamma = 2$



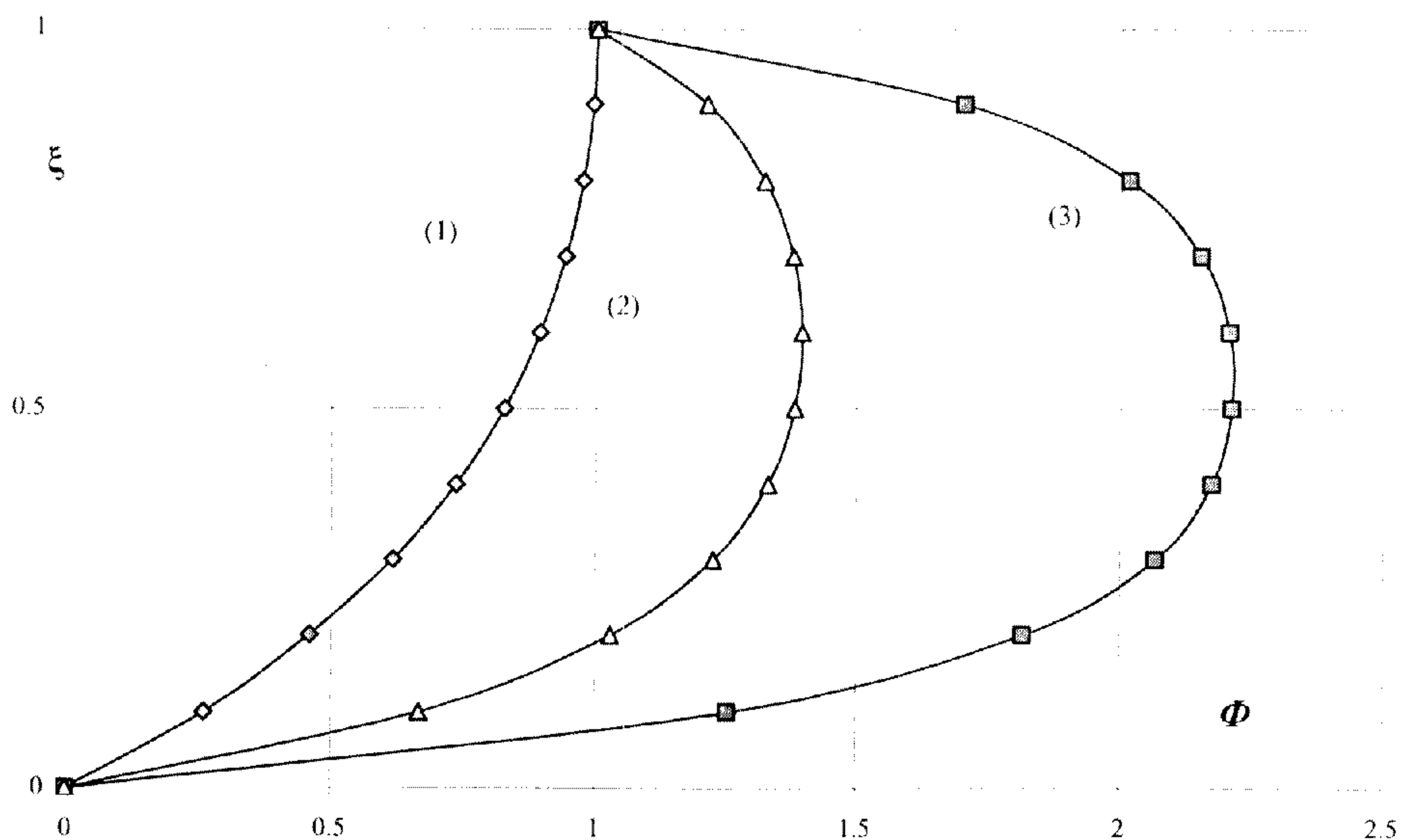
- **Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 2, PVM2.**

En  $\xi = 1$ ,  $m = -\Gamma$  y aparece el primer máximo descendiendo a medida que  $m$  es más negativa y  $\Gamma$  más positiva. Estos perfiles de velocidad mezclados quedan acotados por los siguientes intervalos. Ver figura 3.6.

$$m = -\Gamma \geq m > -\infty \quad (3-48)$$

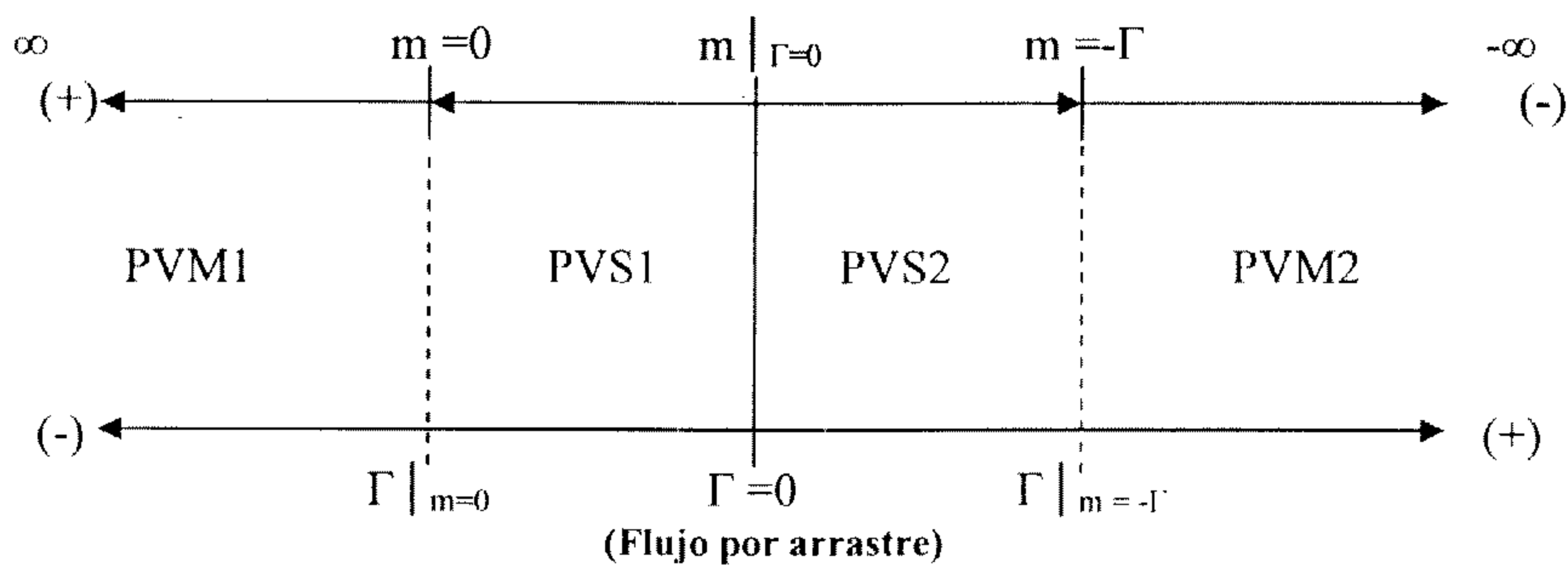
$$\ln(\beta^{0.5} - 1) - \ln(\alpha) + \Gamma = 0 \leq \Gamma < \infty \quad (3-49)$$

**Figura 3.6 Perfiles de Velocidad Mezclados tipo 2, PVM2.**  
 $\lambda=2$ ; 1)  $\Gamma = 2.466505$  2)  $\Gamma = 6$  3)  $\Gamma = 8$ .



Los anteriores tipos de perfiles de velocidades pueden visualizarse fácilmente por medio de dos escalas de sentidos opuestos y superpuestas. Sobre una de ellas se fijan los valores de las raíces para  $\Gamma$  que limitan los cambios y sobre la otra los valores de  $m$  que corresponden a los valores de la primera. Ver figura 3.7.

**Figura 3.7. Esquema de los intervalos de perfiles de velocidad.**



Lo anterior permite observar la correspondencia entre una distribución de presiones y una distribución de perfiles de velocidades para una velocidad de placa específica. Es decir, que el perfil de velocidades depende del gradiente de presión.

La ecuación (3-27) demuestra como el perfil de velocidades determina el gasto volumétrico a la salida del extrusor por lo que el gasto a su vez obviamente dependerá de la distribución de presiones para una velocidad de placa fija. De esta manera es lógico que la cuantificación del gasto volumétrico se realice con (3-32) y con ella se determinen las condiciones de operación correctas.

La cuantificación del flujo volumétrico se puede realizar de manera satisfactoria dependiendo de las variables proporcionadas. En este sentido, y como ya se ha visto, en un principio se ha fijado la velocidad de la placa en movimiento, representada por  $\lambda$ ; por lo que desde el punto de vista general de cálculo numérico teniendo (3-32) 3 incógnitas entonces los grados de libertad son 2; sin embargo, al fijar  $\lambda$  solo resta fijar  $\Gamma$  o  $\Psi$ , produciendo así dos formas de cálculo que se explican a continuación.

### **Cálculo tipo I.**

En este procedimiento los valores de  $\lambda$  y  $\Gamma$  son dados. Se tienen dos opciones para este tipo de cálculo:

I-1) Si  $\Gamma = 0$ ,  $m$  se obtiene de (3-25) y  $\Psi = 0.5$

I-2) Si  $\Gamma \neq 0$ , entonces  $m$  se obtiene de (3-16).  $\Psi$  se obtiene de (3-32).

### **Cálculo tipo II.**

Las cantidades fijadas son  $\lambda$  y  $\Psi$  y se sigue un método iterativo para determinar  $\Gamma$ .

II-1) Suponer el valor inicial de  $\Gamma_i$  en (3-32).

II-2) Obtener el valor de  $m$  usando (3-16).

II-3) Hallar la nueva raíz de (3-32).  $\Gamma_c$

II-4) Corroborar una tolerancia de error:  $\| \Gamma_i - \Gamma_c \| < 10^{-6}$ .

II-4a) Sí, entonces a II-5

II-4b) No, entonces  $\Gamma_i = \Gamma_c$  e ir a (II-2)

II-5) Fin del proceso de cálculo.



### 3.2. SOLUCIÓN NEWTONIANA

El primer punto de comparación con el modelo obtenido puede ser el tratamiento newtoniano. Los perfiles newtonianos son matemáticamente fáciles de obtener si se sigue la ley de Newton de la viscosidad. El desarrollo para este caso se presenta en esta sección de manera breve.

De sustituir (2-19) y (3-1) en (2-2) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal.

$$dv_z = - \left[ \frac{a}{\mu} + \frac{G}{\mu} y \right] dy \quad (3-50)$$

Sujeta a las siguientes condiciones límite (2-15) y (2-16). La integración de (3-50) resulta en la siguiente ecuación:

$$\frac{v_z}{V} = \frac{y}{H} + \frac{H^2 G}{2\mu V} * \left[ \left( \frac{y}{H} \right) - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \quad (3-51)$$

En términos adimensionales usando (3-4) y (3-5), se obtiene el perfil de velocidades como:

$$\phi = \xi + \beta(\xi - \xi^2) \quad (3-52)$$

En el que:  $\beta = \frac{H^2 G}{2\mu V}$  = gradiente de presión adimensional

$\xi = y/H$  = la distancia adimensional entre placas

El gasto volumétrico se obtiene insertando (3-52) en (3-27) e integrando la ecuación resultante.

$$\frac{Q}{WVH} = \left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{GH^2}{12\mu V} \right] = \Psi \quad (3-53)$$

Usando (3-10) y (3-12) se rescribe  $\Psi$  en términos totalmente adimensionales,

$$\Psi = \frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{12\lambda\Theta} \quad (3-54)$$

En donde

$$\Theta = \frac{B}{A} \mu \quad (3-55)$$

### 3.3. VISCOSIDAD NEWTONIANA EQUIVALENTE

Esta viscosidad se obtiene al combinar la ecuación de flujo volumétrico newtoniana y no newtoniana.

Igualando (3-54) con (3-32) se demuestra que la viscosidad newtoniana que satisface tanto el gasto volumétrico como la caída de presión en ambas ecuaciones es:

$$\Theta = \frac{1}{6} \left[ \frac{\Gamma^3}{2\{1 - ch(\Gamma)\}sh(m) + 2\{\Gamma - sh(\Gamma)\}ch(m) - \lambda\Gamma^2} \right] \quad (3-56)$$

(3-56) es la expresión mínima que se puede obtener porque es imposible hallar otra expresión explícita para  $\Gamma$ . Esta ecuación ha sido obtenida para investigar la magnitud de  $\mu$  a ser usada en (3-54) para que proporcione los mismos valores que (3-32); sin embargo, habiendo desarrollado toda una serie de ecuaciones no newtonianas no tiene mucho sentido lógico usar (3-56), ya que el manejo de (3-16) y (3-32) es inevitable.

### 3.4. VISCOSIDAD DEPENDIENTE DE LA POSICIÓN

Sustituyendo (2-19) y (3-3) en (2-22) se obtiene

$$\eta = \frac{A}{B} \left[ \frac{(a/A) + (Gy/A)}{sh[(a/A) + (Gy/A)]} \right] \quad (3-57)$$

Con (3-4), (3-11) y (3-12) se transforma en términos adimensionales como

$$\eta = \frac{A}{B} \left[ \frac{m + \Gamma\xi}{sh[m + \Gamma\xi]} \right] \quad (3-58)$$

Esta ecuación sigue siendo válida para  $\Gamma \neq 0$  y demuestra la posible gran variación de la viscosidad no newtoniana en términos de la posición entre placas paralelas. Dicha variación se muestra en el capítulo de resultados.

## 4. RESULTADOS

Por medio de la simulación computacional, ejecutando el cálculo de tipo II, se determina la distribución de presiones correspondientes a varios valores de velocidad de placa, para los que el flujo volumétrico se acota entre cero y uno de acuerdo a lo establecido en el desarrollo matemático. Se utiliza el método numérico de bisección para resolver las ecuaciones no lineales surgidas anteriormente. En esta sección también se obtiene el efecto de la temperatura en el proceso de flujo y en la viscosidad no newtoniana.

Los cálculos escritos en lenguaje FORTRAN, junto con el de tipo I, se reportan en el apéndice A y B para cada caso particular de los que a continuación se presentan.

### 4.1. Curva de la bomba.

La figura 4.1.1 muestra distintas curvas de flujo para valores arbitrarios de  $\lambda$ .

### 4.2. Efecto de la velocidad de placa.

El efecto de la velocidad de placa superior sobre el gasto volumétrico se muestra con los perfiles de velocidad en la figura 4.2.1 y 4.2.2. Estos perfiles se obtienen para  $\Psi=1$  debido al interés en la mayor producción posible y en  $\Psi=0$  por ser una condición no deseada.

### 4.3. Efecto de la presión en el gasto volumétrico.

Después de la figura 4.2.2 se muestra el efecto de la presión sobre el gasto volumétrico a través de los perfiles de velocidad para dos valores arbitrarios de  $\lambda$  como se indica en la figura 4.3.1. Este ejemplo corresponde al cálculo de tipo I.

### 4.4. Efecto de la temperatura.

Las variables adimensionales se relacionan con las cantidades dimensionales como se muestra en sus respectivas definiciones. En estas, se encuentran los parámetros A y B del material procesado. Tales parámetros, como se dijo antes, son constantes a una temperatura específica y bajo estos términos se han realizado las simulaciones de flujo; sin embargo es interesante averiguar el efecto de la temperatura sobre el gradiente de presión  $\Delta P$  y sobre la velocidad rotacional bajo condiciones de gasto volumétrico constante.

Los resultados se muestran en la tabla 4.4.1 y fueron obtenidos con los siguientes parámetros<sup>1</sup> del polímero comercialmente llamado por las siglas ABS.

Parámetros de la curva de flujo de Eyring.

T (°C)	A (kPa)	B (1/s)
170	123.390	1.820
192	81.480	6.123
210	61.325	9.992
244	40.525	17.524

<sup>1</sup> Datos proporcionados por el Dr. Luis A. López Latorre. Información particular sujeta a comunicación personal.

#### **4.5. Variación de la viscosidad con la posición y temperatura.**

Se analiza el comportamiento de la viscosidad a lo largo de la altura entre las placas a temperatura constante bajo flujo volumétrico en aumento con velocidad de placa constante y temperatura constante, figuras 4.5.1 y 4.5.2.

Luego se analiza la viscosidad bajo flujo volumétrico constante a temperatura constante y diferentes velocidades de placa. Figura 4.5.3.

Por último se analiza la viscosidad a diferentes temperaturas bajo flujo volumétrico y velocidad de placa constantes. Figura 4.5.4.

#### **4.6. Resultados del modelo de flujo newtoniano.**

Las figuras 4.6.1 y 4.6.2 muestran las curvas de la bomba a diferentes velocidades de placa.

#### **4.7. Viscosidad newtoniana equivalente.**

Esta viscosidad requiere de los parámetros del material a procesar como se señala en (3-55), pero el comportamiento no lineal se describe por el lado derecho de (3-56) para un valor fijo de  $\Gamma$  bajo condiciones de gasto volumétrico constante a diferentes velocidades de placa. Por tanto, se estudia su comportamiento para un aumento de gradiente de presión a medida que el gasto volumétrico aumenta desde cero hasta uno, a una velocidad constante. Ver tabla de resultados 4.7.1 y grafica 4.7.1.

Los resultados de la tabla 4.7.2 muestran los valores de la viscosidad newtoniana equivalente para el modelo newtoniano.

Por otro lado, en este punto surge la curiosidad por conocer otros tipos existentes de simulación numérica de fluidos no newtonianos y que difieren al que aquí se presenta, por lo que es recomendable consultar la bibliografía sugerida para tener una visión más clara del tema ( Crochet, 1984), y poder así notar las diferencias y comparaciones que pudieran haber.

### 4.1.1 Curvas de flujo para diferentes valores de $\lambda$ .

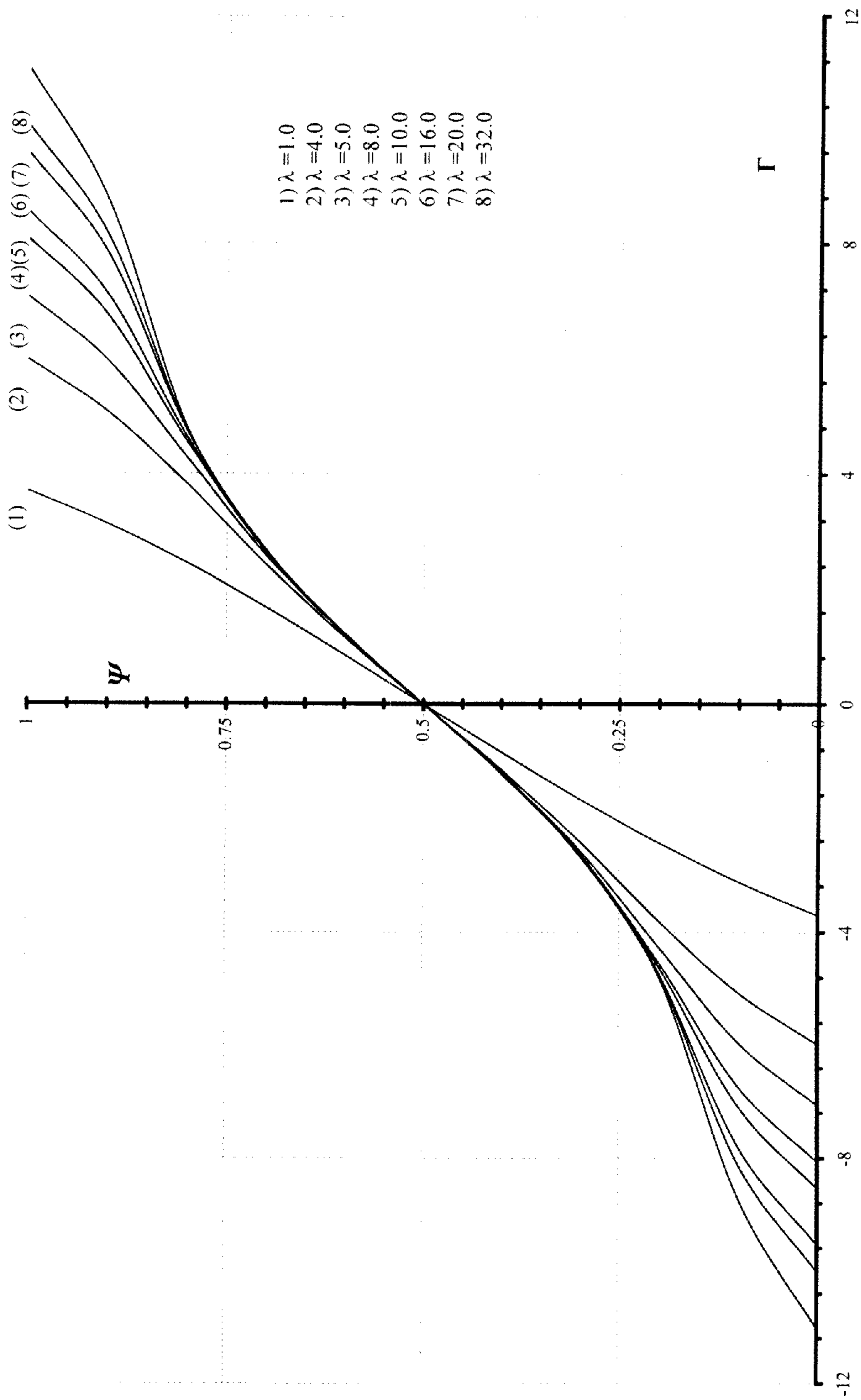


Tabla 4.1.1. Curva de la bomba mediante el cálculo de tipo II.  
Modelo de Eyring aplicado al flujo de termoplásticos en extrusor

$\lambda = 1.00$			$\lambda = 2.00$		
$\Psi$	$\Gamma$	m	$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-3.711239	1.291245	0.00	-5.128531	1.836093
0.10	-3.126414	0.922939	0.10	-4.347965	1.291272
0.20	-2.442343	0.497272	0.20	-3.349656	0.595949
0.30	-1.670994	0.032229	0.30	-2.212051	-0.165925
0.40	-0.845780	-0.437688	0.40	-1.083169	-0.858961
0.50	-0.004688	-0.879029	0.50	-0.004688	-1.441291
0.60	0.845780	-1.283468	0.60	1.083169	-1.942129
0.70	1.670994	-1.638765	0.70	2.212051	-2.377977
0.80	2.442343	-1.945071	0.80	3.349656	-2.753707
0.90	3.126414	-2.203475	0.90	4.347965	-3.056693
1.00	3.711239	-2.419994	1.00	5.128531	-3.292438

$\lambda = 3.00$			$\lambda = 4.00$		
$\Psi$	$\Gamma$	m	$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-5.980924	2.178503	0.00	-6.590621	2.429403
0.10	-5.064041	1.506208	0.10	-5.564658	1.654281
0.20	-3.808491	0.583193	0.20	-4.081939	0.529069
0.30	-2.419475	-0.390600	0.30	-2.515765	-0.595376
0.40	-1.156847	-1.187849	0.40	-1.186948	-1.445043
0.50	-0.004688	-1.816102	0.50	-0.004688	-2.092368
0.60	1.156847	-2.344696	0.60	1.186947	-2.631991
0.70	2.419475	-2.810075	0.70	2.515765	-3.111141
0.80	3.808491	-3.225298	0.80	4.081939	-3.552870
0.90	5.064041	-3.557833	0.90	5.564658	-3.910377
1.00	5.980924	-3.802420	1.00	6.590621	-4.161218

$\lambda = 5.00$			$\lambda = 6.00$		
$\Psi$	$\Gamma$	m	$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-7.065193	2.627786	0.00	-7.453627	2.791993
0.10	-5.946556	1.765064	0.10	-6.253462	1.852129
0.20	-4.259258	0.457426	0.20	-4.380529	0.378788
0.30	-2.566905	-0.774700	0.30	-2.596884	-0.931395
0.40	-1.201820	-1.653279	0.40	-1.210173	-1.827270
0.50	-0.004688	-2.310094	0.50	-0.004688	-2.489435
0.60	1.201820	-2.855099	0.60	1.210173	-3.037443
0.70	2.566905	-3.341605	0.70	2.596884	-3.528280
0.80	4.259258	-3.801832	0.80	4.380529	-4.001741
0.90	5.946556	-4.181491	0.90	6.253462	-4.401334
1.00	7.065193	-4.437407	1.00	7.453627	-4.661634

---

$\lambda = 8.00$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-8.067246	3.054442
0.10	-6.726538	1.981539
0.20	-4.529851	0.218886
0.30	-2.628477	-1.192118
0.40	-1.218681	-2.106499
0.50	-0.004688	-2.774128
0.60	1.218681	-3.325180
0.70	2.628477	-3.820595
0.80	4.529851	-4.310964
0.90	6.726538	-4.744999
1.00	8.067246	-5.012805

---



---

$\lambda = 10.0$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-8.543473	3.260452
0.10	-7.082397	2.073626
0.20	-4.613654	0.067523
0.30	-2.643767	-1.402230
0.40	-1.222691	-2.325670
0.50	-0.004688	-2.995878
0.60	1.222691	-3.548361
0.70	2.643767	-4.045997
0.80	4.613654	-4.546132
0.90	7.082397	-5.008771
1.00	8.543473	-5.283021

---



---

$\lambda = 16.0$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-9.546344	3.700039
0.10	-7.792400	2.236274
0.20	-4.720337	-0.311027
0.30	-2.660851	-1.857685
0.40	-1.227086	-2.791326
0.50	0.000586	-3.467004
0.60	1.227086	-4.018412
0.70	2.660851	-4.518536
0.80	4.720337	-5.031364
0.90	7.792400	-5.556126
1.00	9.546344	-5.846305

---



---

$\lambda = 18.0$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-9.797503	3.811214
0.10	-7.960287	2.268786
0.20	-4.736331	-0.415092
0.30	-2.663192	-1.973475
0.40	-1.227682	-2.908521
0.50	0.000586	-3.584583
0.60	1.227682	-4.136203
0.70	2.663192	-4.636667
0.80	4.736331	-5.151422
0.90	7.960287	-5.691501
1.00	9.797503	-5.986289

---



---

$\lambda = 20.0$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-10.022091	3.910960
0.10	-8.106505	2.294533
0.20	-4.748056	-0.510393
0.30	-2.664874	-2.077404
0.40	-1.228109	-3.013460
0.50	0.000586	-3.689797
0.60	1.228109	-4.241568
0.70	2.664874	-4.742278
0.80	4.748056	-5.258449
0.90	8.106505	-5.811972
1.00	10.022091	-6.111131

---



---

$\lambda = 32.0$		
$\Psi$	$\Gamma$	m
0.00	-11.022844	4.358890
0.10	-8.705725	2.363798
0.20	-4.779717	-0.953230
0.30	-2.669268	-2.543669
0.40	-1.229219	-3.482367
0.50	0.000586	-4.159420
0.60	1.229219	-4.711586
0.70	2.669268	-5.212937
0.80	4.779717	-5.732947
0.90	8.705725	-6.341928
1.00	11.022844	-6.663955

---

Figura 4.2.1. Efecto del cambio en la velocidad de placa,  $\lambda$ , en los perfiles de velocidad.  
 $\Psi = 1.0$ ; 1)  $\lambda = 1.0$ , 2)  $\lambda = 10.0$ , 3)  $\lambda = 32.0$

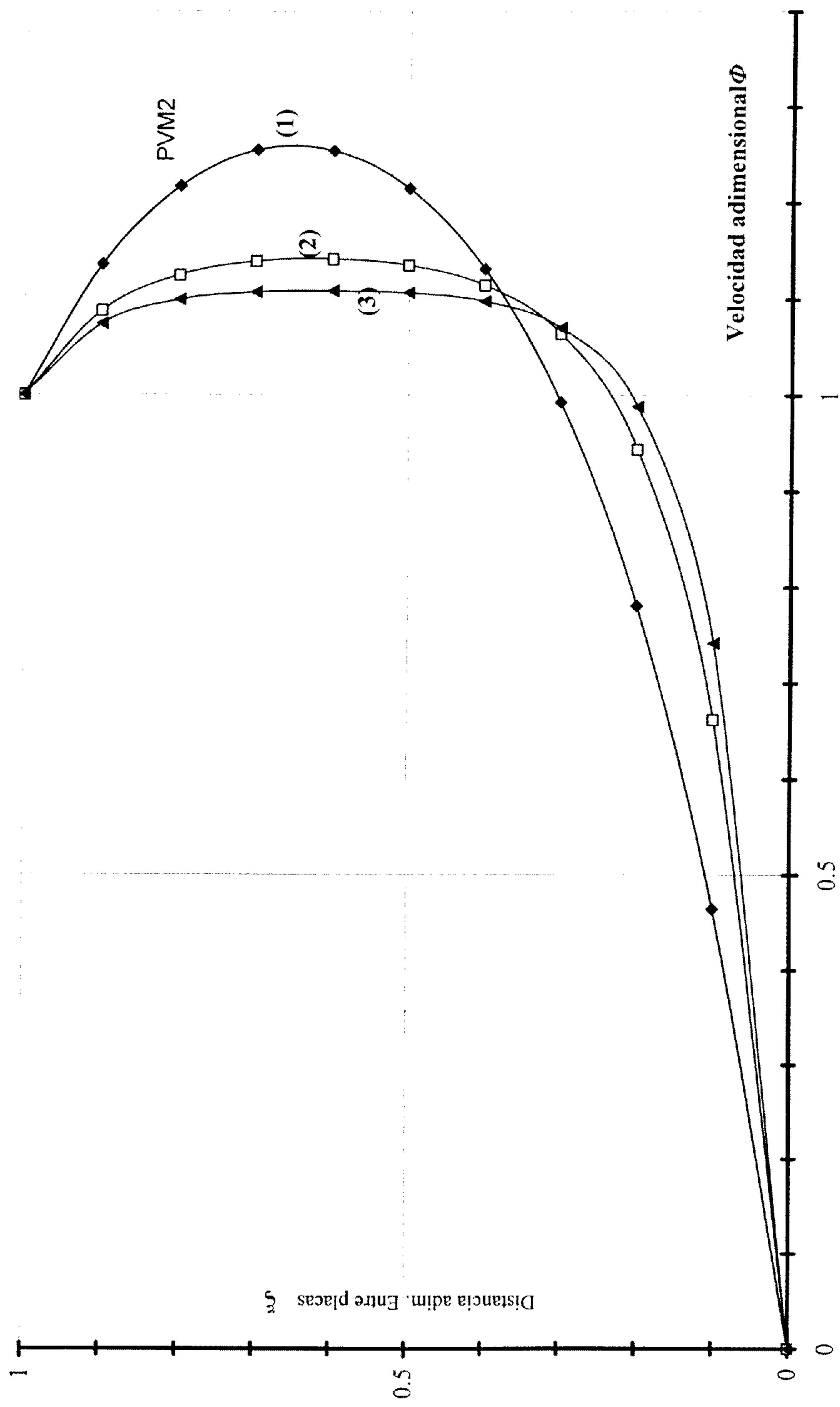




Figura 4.2.2. Recirculación de material a diferentes velocidades de placa.  
 $\Psi = 0$ ; (1)  $\lambda = 1$ , (2)  $\lambda = 10$ , (3)  $\lambda = 32$ .

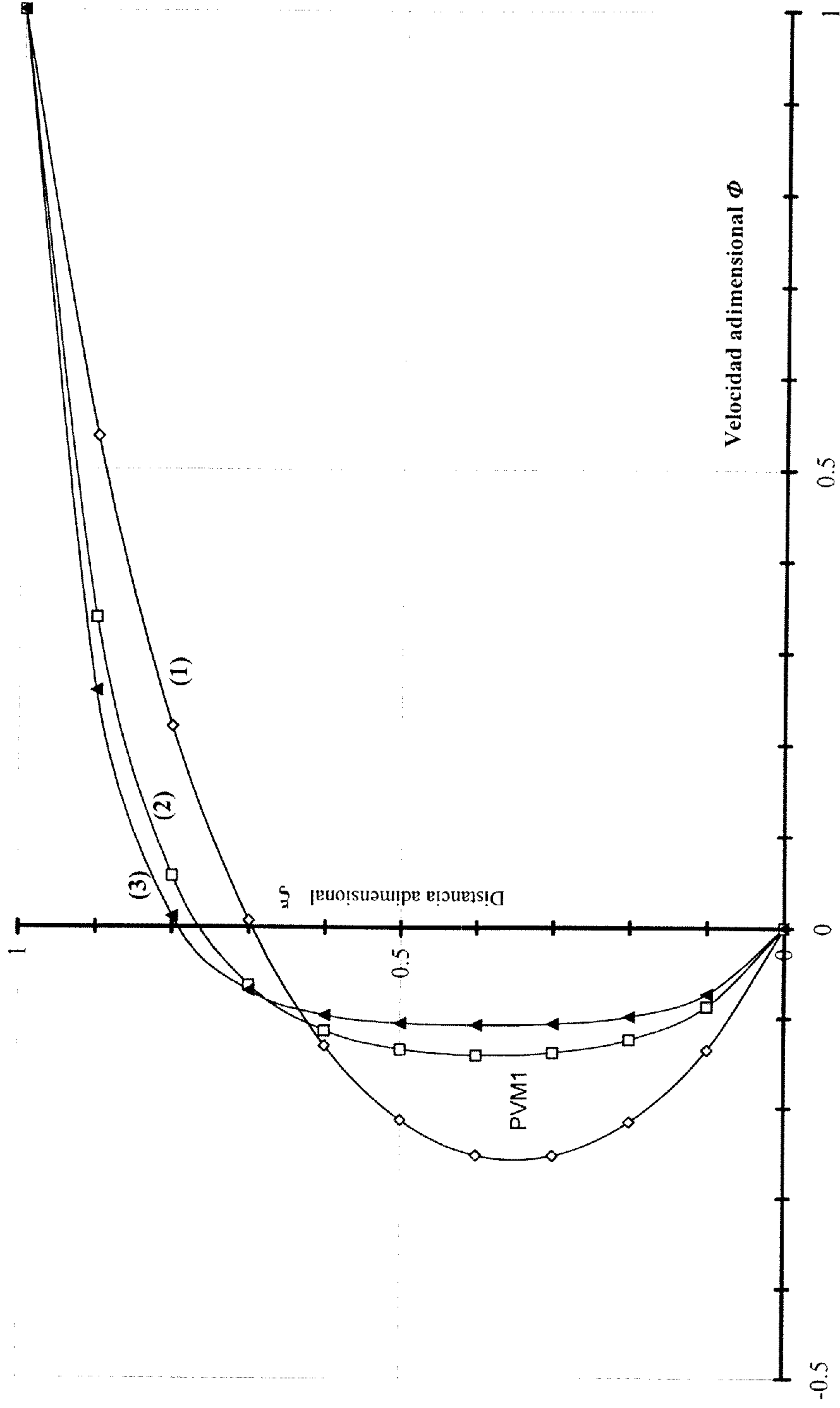


Tabla 4.2.1. Efecto de la velocidad de placa en el perfil de velocidades.

$$\Psi = 1.0$$

	$\Gamma =$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 32$
$\xi$				
0		3.71124	8.543753	11.0228
			$\Phi$	
0		0	0	0
0.1		0.4643239	0.6620742	0.741825
0.2		0.7806075	0.9437633	0.9882047
0.3		0.9929101	1.0634634	1.0700078
0.4		1.1308061	1.1139794	1.0970895
0.5		1.2135047	1.1344768	1.1058184
0.6		1.2525261	1.1408473	1.1079169
0.7		1.2533062	1.1380302	1.106203
0.8		1.2159536	1.1238414	1.098375
0.9		1.1352649	1.0872801	1.0739208
1		1	1	1

Tabla 4.2.2. Perfiles de velocidad con recirculación de material a diferentes velocidades.

$$\Psi = 0.0$$

	$\Gamma =$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 32$
$\xi$				
0		-3.71124	-8.543753	-11.0228
			$\Phi$	
0		0	0	0
0.1		-0.1352649	-0.0872801	-0.0739208
0.2		-0.2159536	-0.1238414	-0.098375
0.3		-0.2533062	-0.1380302	-0.106203
0.4		-0.2525261	-0.1408473	-0.1079169
0.5		-0.2135047	-0.1344768	-0.1058184
0.6		-0.1308061	-0.1139794	-0.0970895
0.7		0.0070899	-0.0634634	-0.0700078
0.8		0.2193925	0.0562367	0.0117953
0.9		0.5356761	0.3379258	0.258175
1		1	1	1

Fig. 4.3.1. Efecto de la presión en la velocidad del flujo cuando  $\lambda=1$   
 $\Gamma$ : (1)  $\approx 3.711239$ , (2)  $=-2$ , (3)  $=0.5$ , (4)  $=0$ , (5)  $=-0.5$ , (6)  $=-2$ , (7)  $=-3.711239$ .

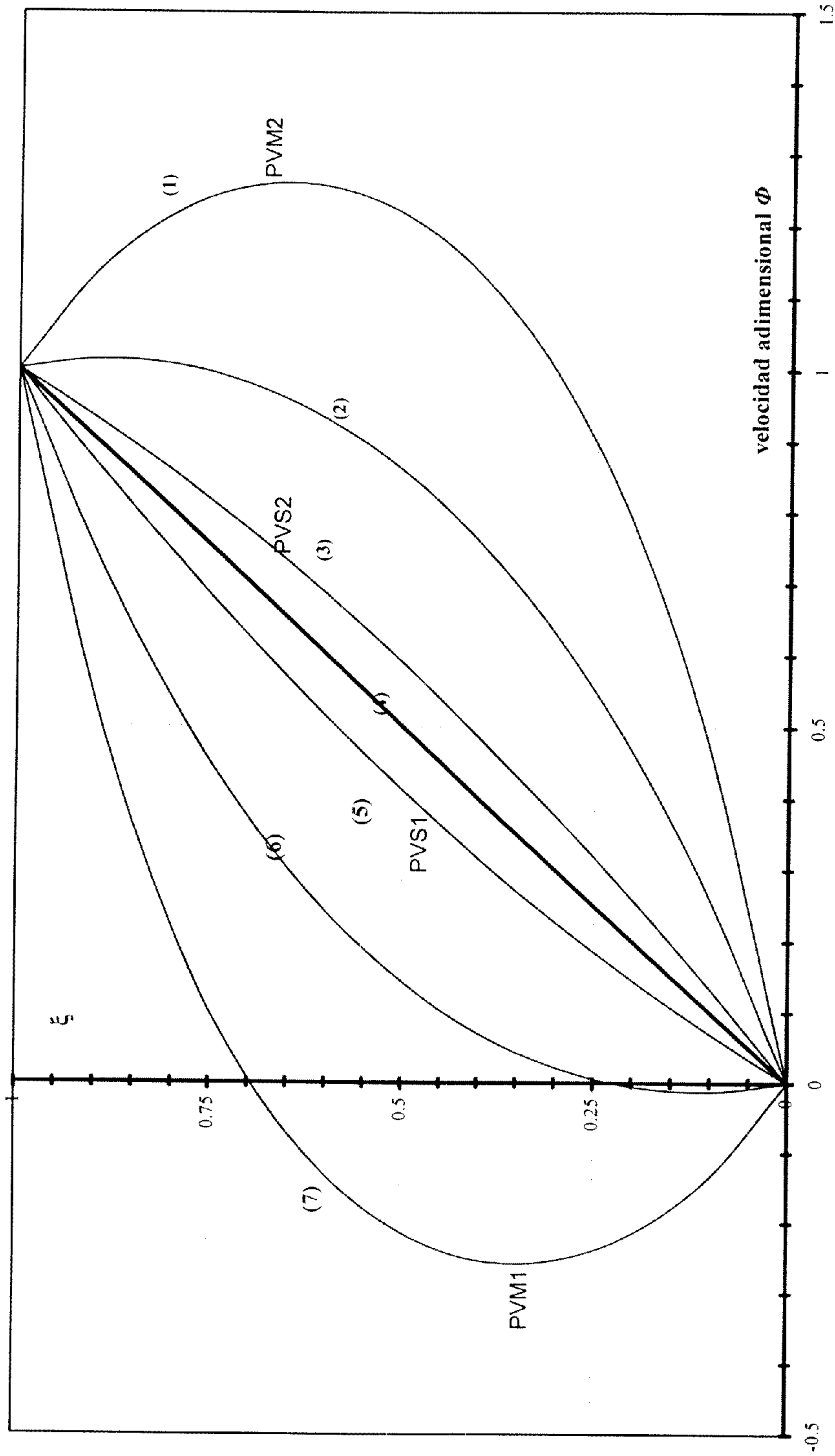


Tabla 4.3.1. Efecto de la presión en los perfiles de velocidad del flujo cuando  $\lambda=1$

$\xi$	$\lambda=1.0$									
	$\Gamma=-3.71124$	-2	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2	$3.71124$		
	$\phi$									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	-0.1352649	-0.0128628	0.0143422	0.0695653	0.1334189	0.2114383	0.2571573	0.4643239		
0.2	-0.2159536	-0.0056509	0.0440705	0.1453114	0.2586641	-0.390038	0.4639108	0.7806075		
0.3	-0.2533062	0.0219251	0.0898549	0.2274277	0.3760487	0.5398251	0.6285583	0.9929101		
0.4	-0.2525261	0.0709719	0.1527275	0.3161195	0.4858663	0.6641762	0.7577076	1.1308061		
0.5	-0.2135047	0.143458	0.2341057	0.4116085	0.5883915	0.7658943	0.856542	1.2135047		
0.6	-0.1308061	0.2422924	0.3358238	0.5141337	0.6838805	0.8472725	0.9290281	1.2525261		
0.7	0.0070899	0.3714417	0.4601749	0.6239513	0.7725723	0.9101451	0.9780749	1.2533062		
0.8	0.2193925	0.5360892	0.609962	0.7413359	0.8546886	0.9559295	1.0056509	1.2159536		
0.9	0.5356761	0.7428427	0.7885617	0.8665811	0.9304347	0.9856578	1.0128628	1.1352649		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 4.4.1. Efecto de la temperatura en la caída de presión bajo condiciones de gasto volumétrico constante.  
 $\psi = 1$ .

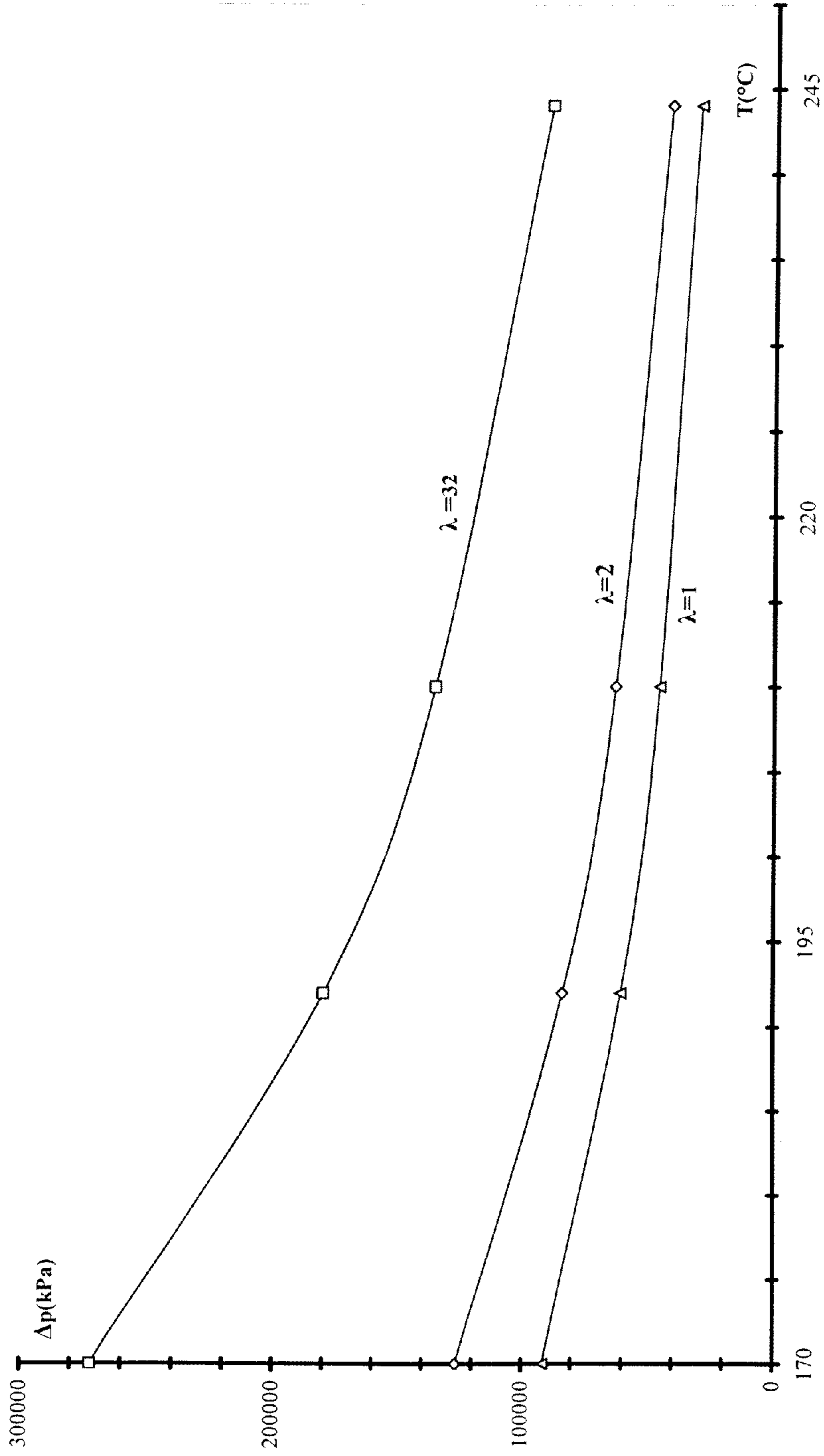


Figura 4.4.2. Variación de la velocidad de rotación con la temperatura.

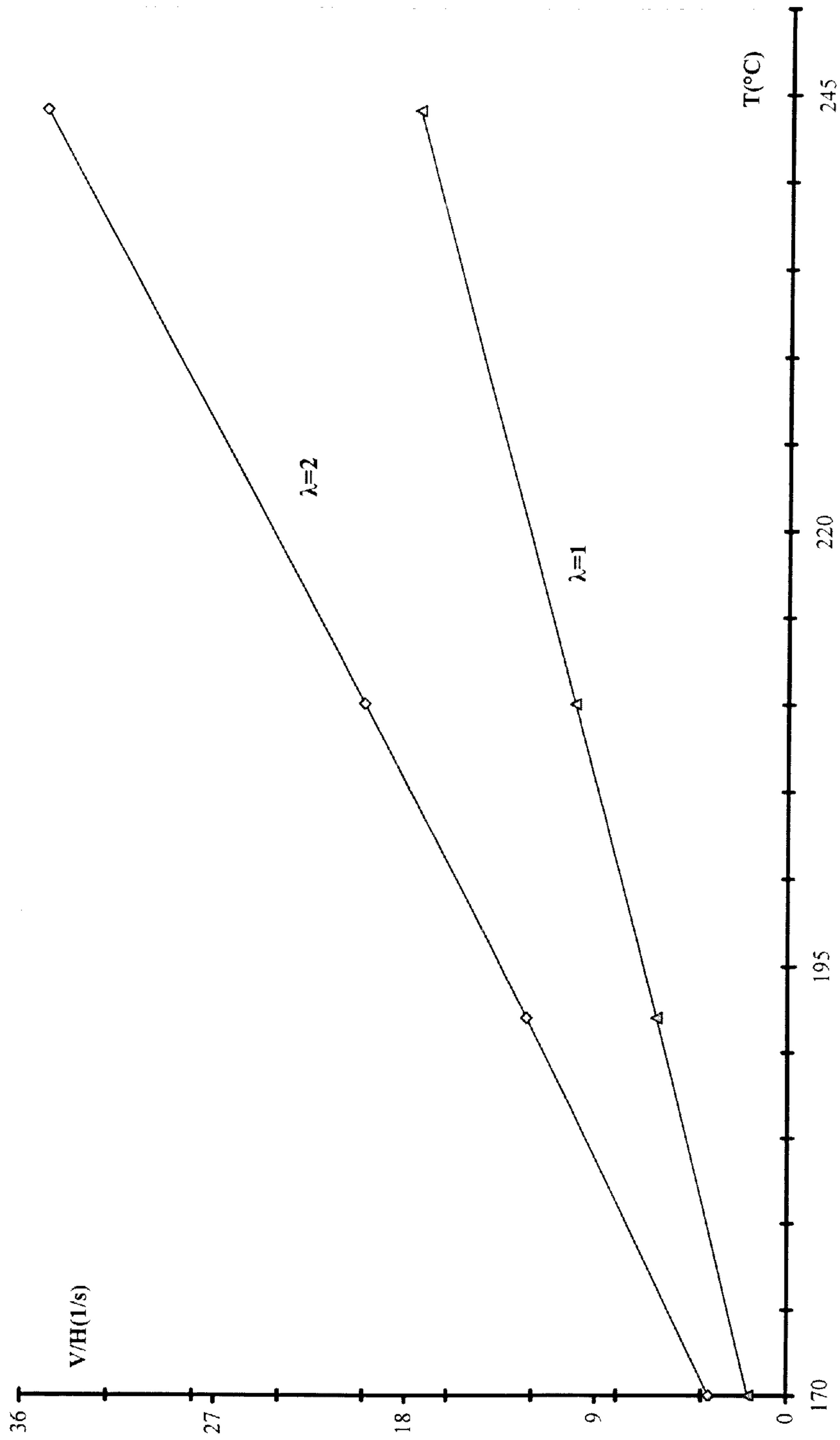


Tabla 4.4.1. Efecto de la temperatura sobre la caída de presión y en la velocidad rotacional bajo flujo volumétrico constante:  $\Psi=1.0$

	$\lambda$ 1	$\Gamma$ 3.71124	$\lambda$ 2	$\Gamma$ 5.12853	$\lambda$ 32	$\Gamma$ 11.0228
T (°C)	$\Delta P$ (kPa)	V/H (1/s)	$\Delta P$ (kPa)	V/H (1/s)	$\Delta P$ (kPa)	V/H (1/s)
170	91585.9807	1.82	126561.863	3.64	272020.658	58.24
192	60478.367	6.123	83574.5249	12.246	179627.549	195.936
210	45518.3586	9.992	62901.4205	19.984	135194.642	319.744
244	30079.6002	17.524	41566.7357	35.048	89339.794	560.768

Figura 4.5.1. Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante y a 170 ° C.  
 $\lambda=2.0$

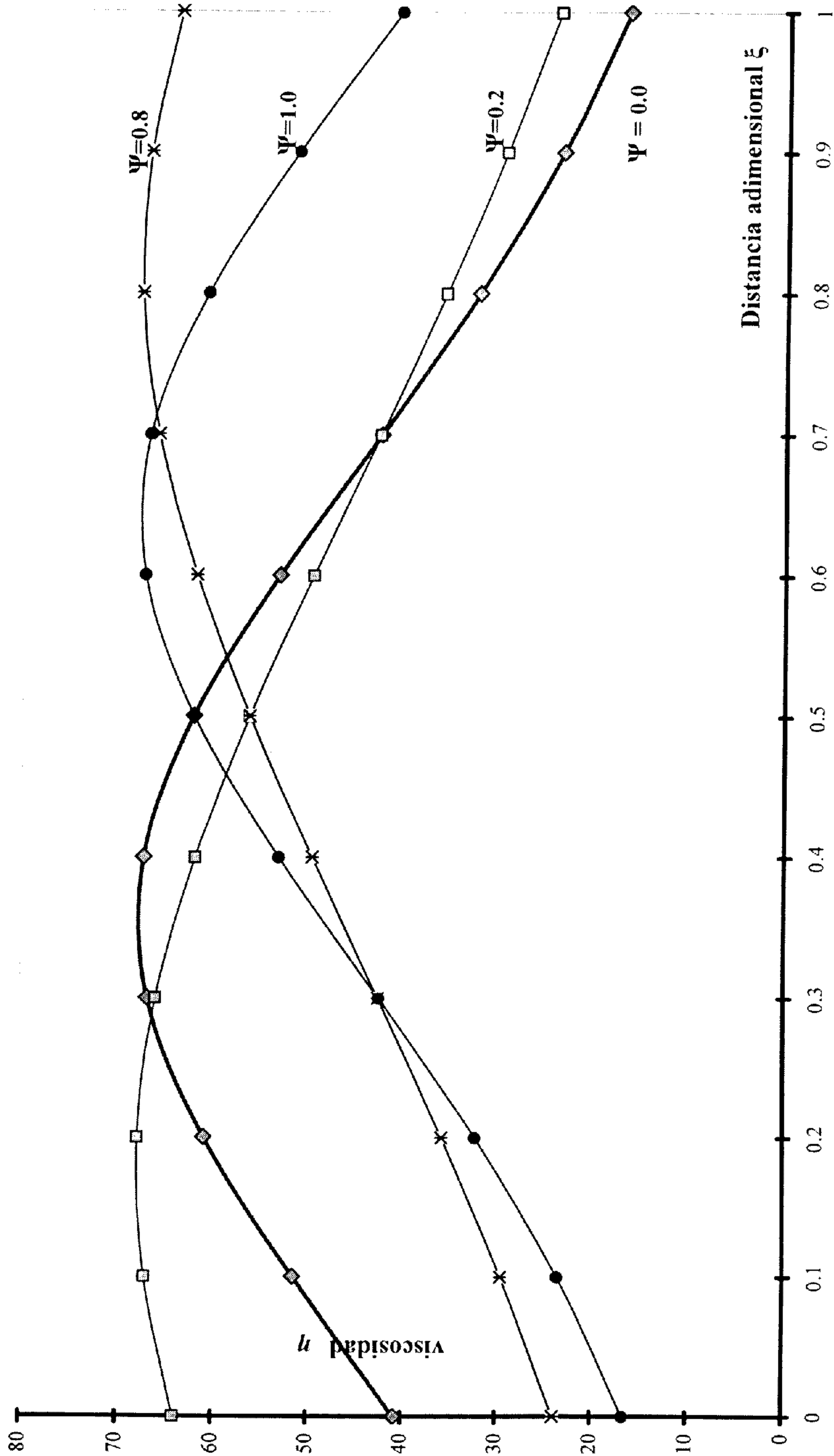




Tabla 4.5.1 Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del  
gasto volumétrico a velocidad de placa constante.  $\lambda = 2.00$   
 $T=170^{\circ}\text{C}$

$\Psi=0.00$	$\Gamma = -5.128531$	$m = 1.836093$	$\xi$	viscosidad	$\Psi=0.20$	$\Gamma = -3.349656$	$m = 0.595949$	$\xi$	viscosidad
			0.00	40.729678				0.00	63.943910
			0.10	51.420822				0.10	67.033140
			0.20	60.907714				0.20	67.734895
			0.30	66.806637				0.30	65.943233
			0.40	67.275651				0.40	61.924946
			0.50	62.156313				0.50	56.234589
			0.60	53.082359				0.60	49.555822
			0.70	42.437563				0.70	42.543333
			0.80	32.203318				0.80	35.718826
			0.90	23.482061				0.90	29.433258
			1.00	16.613789				1.00	23.878216

---

$\Psi=0.40$	$\Gamma = -1.083169$	$m = -0.858961$	$\xi$	viscosidad
			0.00	60.125534
			0.10	58.274764
			0.20	56.296320
			0.30	54.214089
			0.40	52.051557
			0.50	49.831343
			0.60	47.574819
			0.70	45.301819
			0.80	43.030424
			0.90	40.776835
			1.00	38.555308

---

$\Psi=0.60$	$\Gamma = 1.083169$	$m = -1.942129$	$\xi$	viscosidad
			0.00	38.555306
			0.10	40.776833
			0.20	43.030423
			0.30	45.301818
			0.40	47.574819
			0.50	49.831343
			0.60	52.051558
			0.70	54.214091
			0.80	56.296322
			0.90	58.274766
			1.00	60.125536

---

$\Psi=0.80$	$\Gamma = 3.349656$	$m = -2.753707$	$\xi$	viscosidad
			0.00	23.878216
			0.10	29.433258
			0.20	35.718826
			0.30	42.543333
			0.40	49.555822
			0.50	56.234589
			0.60	61.924946
			0.70	65.943233
			0.80	67.734895
			0.90	67.033139
			1.00	63.943910

---

$\Psi=1.00$	$\Gamma = 5.128531$	$m = -3.292438$	$\xi$	viscosidad
			0.00	16.613789
			0.10	23.482061
			0.20	32.203318
			0.30	42.437563
			0.40	53.082359
			0.50	62.156313
			0.60	67.275651
			0.70	66.806637
			0.80	60.907714
			0.90	51.420822
			1.00	40.729678

Fig. 4.5.2. Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante y a 244 °C.  
 $\lambda=2.0$

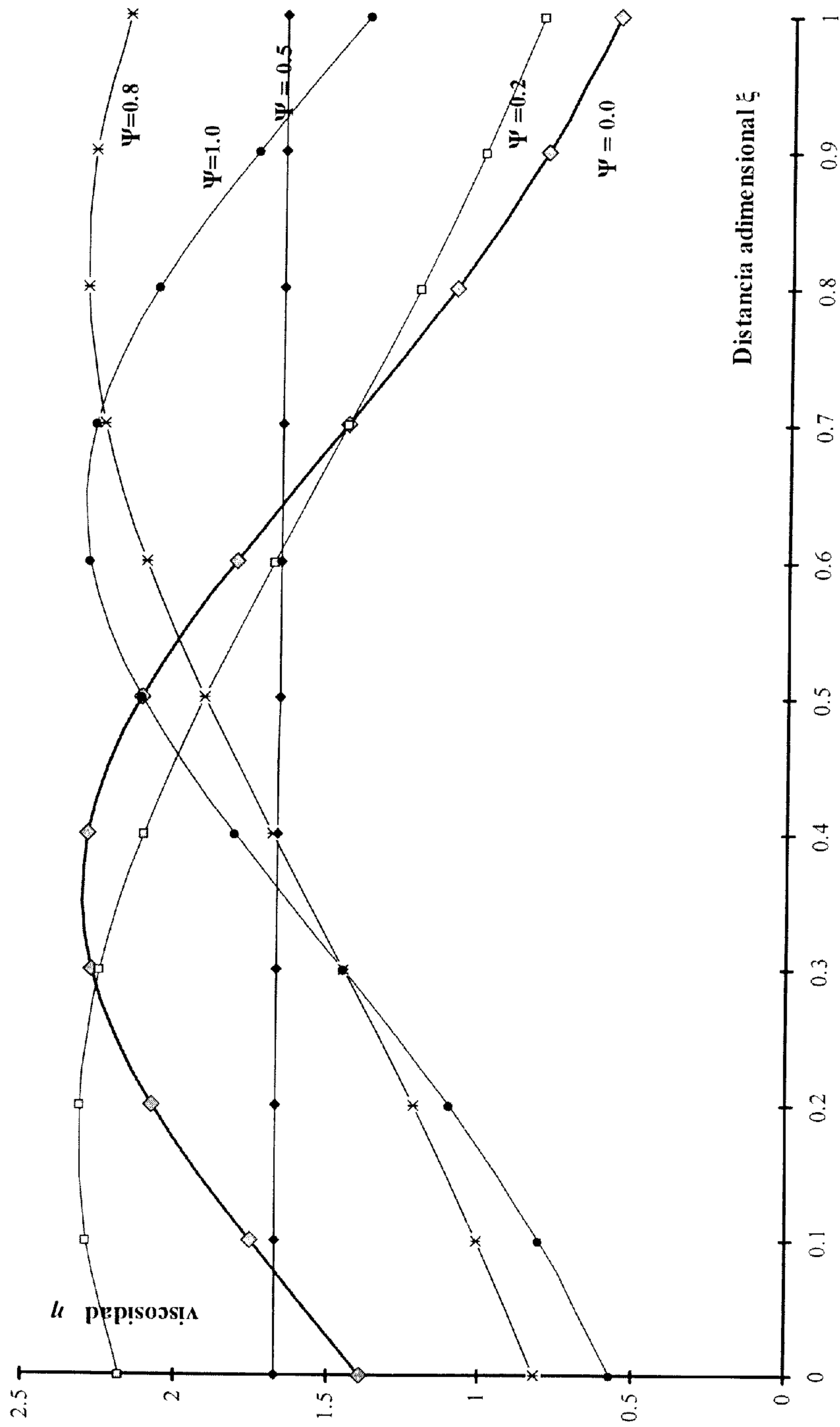


Tabla 4.5.2 Comportamiento de la viscosidad durante el aumento del gasto volumétrico a velocidad de placa constante.

$$\lambda = 2.00, \quad T = 244 \text{ } ^\circ \text{C}$$

-----			-----		
$\Psi=0.00$	$\Gamma= -5.128531$	$m = 1.836093$	$\Psi=0.20$	$\Gamma= -3.349656$	$m = 0.595949$
	$\xi$	<b>viscosidad</b>		$\xi$	<b>viscosidad</b>
	0.00	1.389288		0.00	2.181124
	0.10	1.753962		0.10	2.286498
	0.20	2.077560		0.20	2.310435
	0.30	2.278772		0.30	2.249321
	0.40	2.294770		0.40	2.112258
	0.50	2.120149		0.50	1.918160
	0.60	1.810637		0.60	1.690347
	0.70	1.447544		0.70	1.451151
	0.80	1.098454		0.80	1.218368
	0.90	0.800972		0.90	1.003967
	1.00	0.566696		1.00	0.814485
-----			-----		
$\Psi=0.40$	$\Gamma= -1.083169$	$m = -0.858961$	$\Psi=0.60$	$\Gamma= 1.083169$	$m = -1.942129$
	$\xi$	<b>viscosidad</b>		$\xi$	<b>viscosidad</b>
	0.00	2.050880		0.00	1.315120
	0.10	1.987750		0.10	1.390896
	0.20	1.920265		0.20	1.467766
	0.30	1.849240		0.30	1.545243
	0.40	1.775477		0.40	1.622775
	0.50	1.699745		0.50	1.699745
	0.60	1.622775		0.60	1.775477
	0.70	1.545243		0.70	1.849241
	0.80	1.467766		0.80	1.920265
	0.90	1.390896		0.90	1.987750
	1.00	1.315120		1.00	2.050880
-----			-----		
$\Psi=0.80$	$\Gamma= 3.349656$	$m = -2.753707$	$\Psi=1.00$	$\Gamma= 5.128531$	$m = -3.292438$
	$\xi$	<b>viscosidad</b>		$\xi$	<b>viscosidad</b>
	0.00	0.814485		0.00	0.566696
	0.10	1.003967		0.10	0.800972
	0.20	1.218368		0.20	1.098454
	0.30	1.451151		0.30	1.447544
	0.40	1.690347		0.40	1.810637
	0.50	1.918160		0.50	2.120149
	0.60	2.112258		0.60	2.294770
	0.70	2.249321		0.70	2.278772
	0.80	2.310435		0.80	2.077560
	0.90	2.286498		0.90	1.753962
	1.00	2.181124		1.00	1.389288

Figura 4.5.3. Comportamiento de la viscosidad bajo gasto volumétrico constante a 244 °C y a diferentes velocidades de placa.  
 $\Psi=1.0$

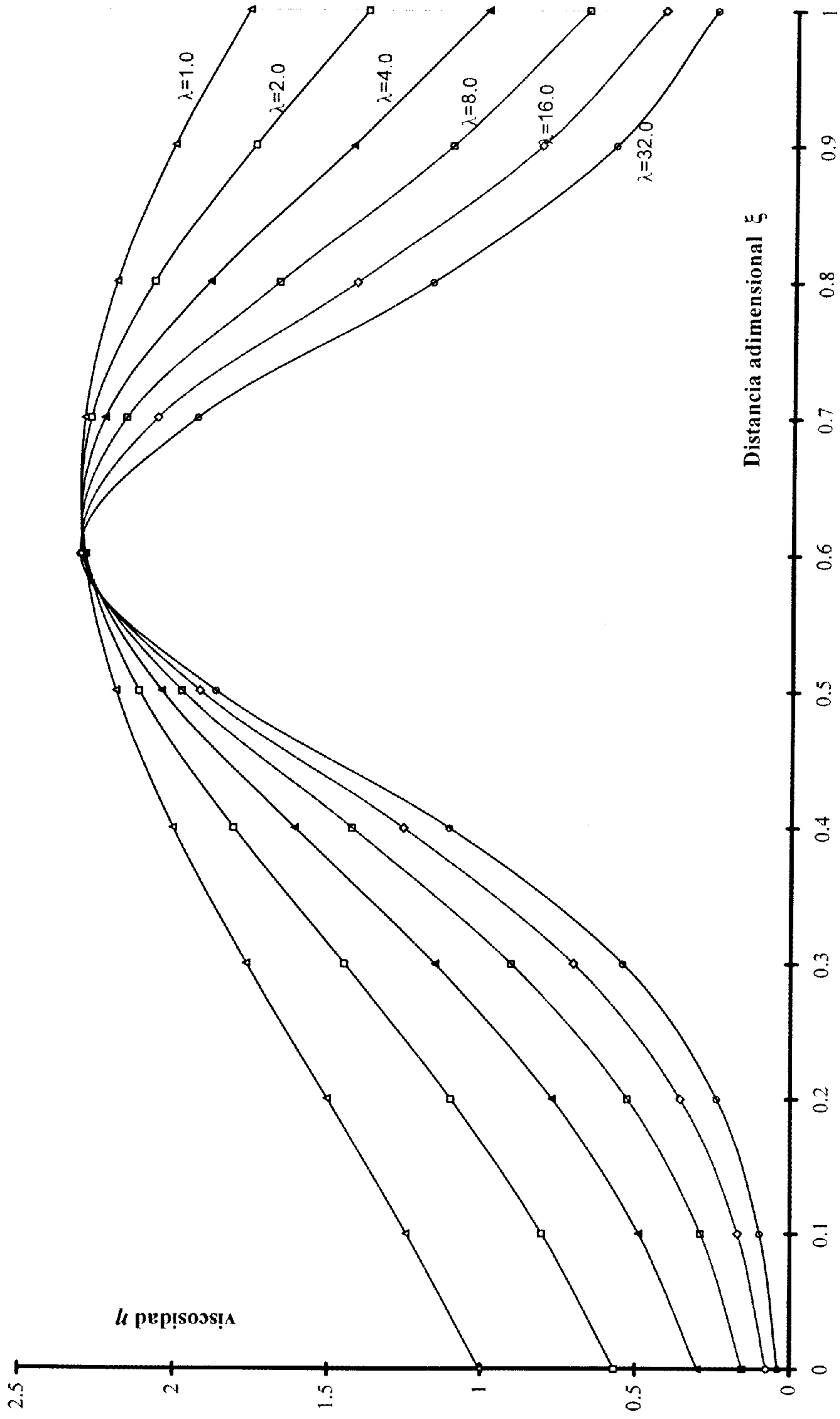


Tabla 4.5.3 Comportamiento de la viscosidad bajo gasto volumétrico constante a 244 ° C y a diferentes velocidades de placa.  $\Psi=1.0$

$\lambda = 1.00$			$\lambda = 2.00$		
$\Psi=1.00$	$\Gamma= 3.711239$	$m = -2.419994$	$\Psi=1.00$	$\Gamma= 5.128531$	$m = -3.292438$
$\xi$	viscosidad		$\xi$	viscosidad	
0.00	1.003209		0.00	0.566696	
0.10	1.241925		0.10	0.800972	
0.20	1.501877		0.20	1.098454	
0.30	1.765510		0.30	1.447544	
0.40	2.006759		0.40	1.810637	
0.50	2.194192		0.50	2.120149	
0.60	2.298211		0.60	2.294770	
0.70	2.300393		0.70	2.278772	
0.80	2.200336		0.80	2.077560	
0.90	2.015817		0.90	1.753962	
1.00	1.776156		1.00	1.389288	

$\lambda = 4.00$			$\lambda = 6.00$		
$\Psi=1.00$	$\Gamma= 6.590621$	$m = -4.161218$	$\Psi=1.00$	$\Gamma= 7.453627$	$m = -4.661634$
$\xi$	viscosidad		$\xi$	viscosidad	
0.00	0.300090		0.00	0.203786	
0.10	0.488521		0.10	0.360869	
0.20	0.768506		0.20	0.616539	
0.30	1.151877		0.30	0.999856	
0.40	1.611266		0.40	1.500133	
0.50	2.046978		0.50	2.007161	
0.60	2.296135		0.60	2.298766	
0.70	2.235564		0.70	2.197594	
0.80	1.897218		0.80	1.769222	
0.90	1.435837		0.90	1.243444	
1.00	0.997530		1.00	0.794551	

$\lambda = 8.00$			$\lambda = 10.00$		
$\Psi=1.00$	$\Gamma= 8.067246$	$m = -5.012805$	$\Psi=1.00$	$\Gamma= 8.543473$	$m = -5.283021$
$\xi$	viscosidad		$\xi$	viscosidad	
0.00	0.154236		0.00	0.124058	
0.10	0.290012		0.10	0.244403	
0.20	0.525629		0.20	0.463815	
0.30	0.902264		0.30	0.832343	
0.40	1.424787		0.40	1.368502	
0.50	1.980532		0.50	1.960811	
0.60	2.301119		0.60	2.303077	
0.70	2.164470		0.70	2.135198	
0.80	1.671111		0.80	1.592103	
0.90	1.110617		0.90	1.011630	
1.00	0.667561		1.00	0.579484	

---

$\lambda = 16.00$

$\Psi=1.00$     $\Gamma= 9.546344$     $m = -5.846305$

$\xi$	viscosidad
0.00	0.078160
0.10	0.169893
0.20	0.355321
0.30	0.700748
0.40	1.256262
0.50	1.921841
0.60	2.307140
0.70	2.063551
0.80	1.421337
0.90	0.818855
1.00	0.423336

---

$\lambda = 32.00$

$\Psi=1.00$     $\Gamma= 11.022844$     $m = -6.663955$

$\xi$	viscosidad
0.00	0.039331
0.10	0.098839
0.20	0.238653
0.30	0.541553
0.40	1.106067
0.50	1.870133
0.60	2.311570
0.70	1.935272
0.80	1.171392
0.90	0.581037
1.00	0.257944

Figura 4.5.4. Efecto de la temperatura en la viscosidad bajo condiciones de gasto volumétrico y velocidad de placa constante  
 $\lambda=2.0$ ,  $\Psi=1.0$

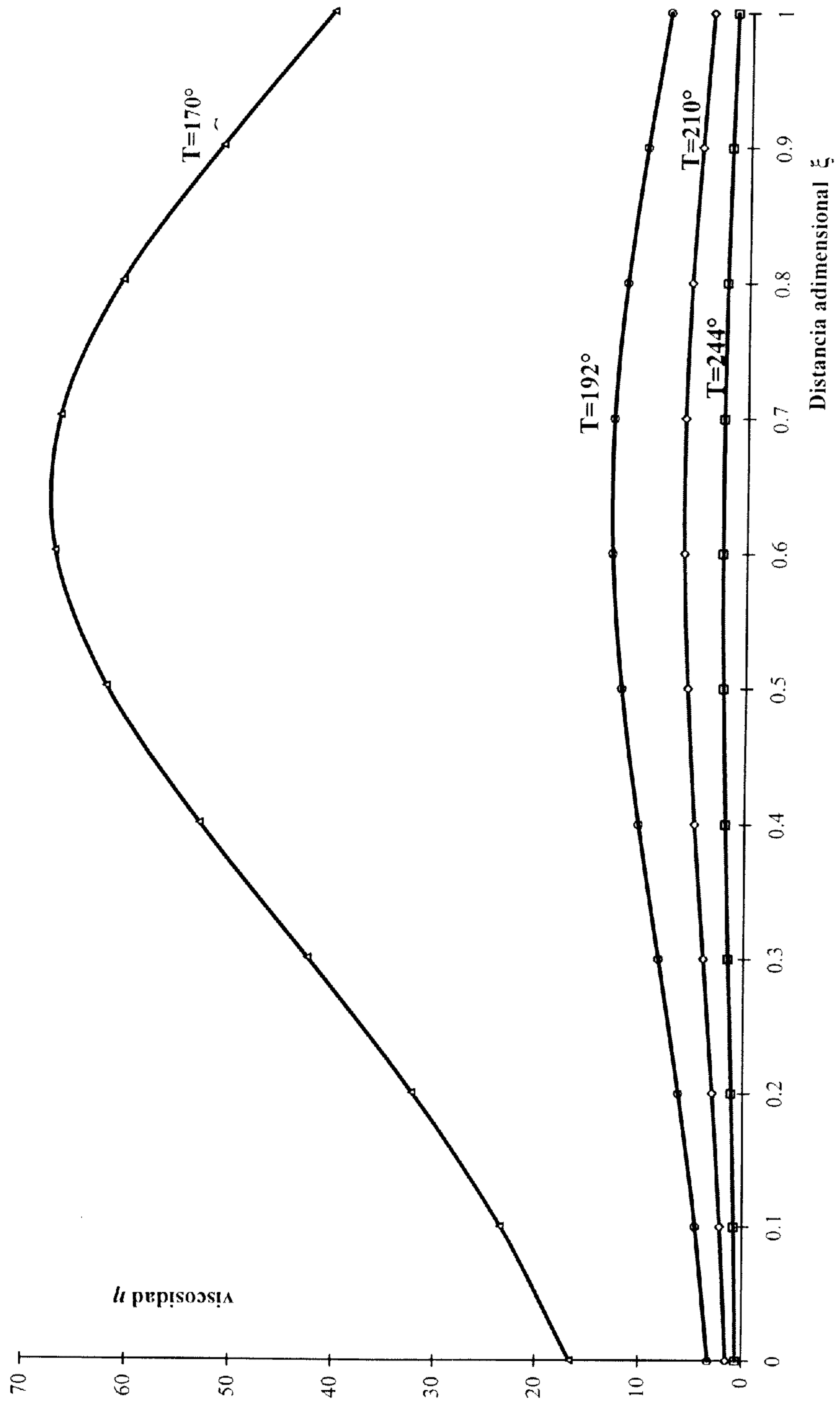


Tabla 4.5.4 Efecto de la temperatura en la viscosidad bajo condiciones de  
gasto volumétrico y velocidad de placa constantes.

Viscosidad a diferentes condiciones de flujo, velocidad y temperatura

-----  
 $\lambda = 2.00$   $\Psi=1.00$   $\Gamma= 5.128531$   $m= -3.292438$   
 $T=170$  C

y/H	viscosidad
0.00	16.613789
0.10	23.482061
0.20	32.203318
0.30	42.437563
0.40	53.082359
0.50	62.156313
0.60	67.275651
0.70	66.806637
0.80	60.907714
0.90	51.420822
1.00	40.729678

T=192 C

y/H	viscosidad
0.00	3.213733
0.10	4.542316
0.20	6.229336
0.30	8.209025
0.40	10.268130
0.50	12.023375
0.60	13.013648
0.70	12.922923
0.80	11.781849
0.90	9.946726
1.00	7.878656

T=210 C

y/H	viscosidad
0.00	1.503991
0.10	2.125753
0.20	2.915259
0.30	3.841732
0.40	4.805370
0.50	5.626805
0.60	6.090241
0.70	6.047783
0.80	5.513773
0.90	4.654956
1.00	3.687123

T=244 C

y/H	viscosidad
0.00	0.566696
0.10	0.800972
0.20	1.098454
0.30	1.447544
0.40	1.810637
0.50	2.120149
0.60	2.294770
0.70	2.278772
0.80	2.077560
0.90	1.753962
1.00	1.389288



Figura 4.6.1. Curva de la bomba de flujo newtoniano a velocidad constante.  $\lambda = 1$ .

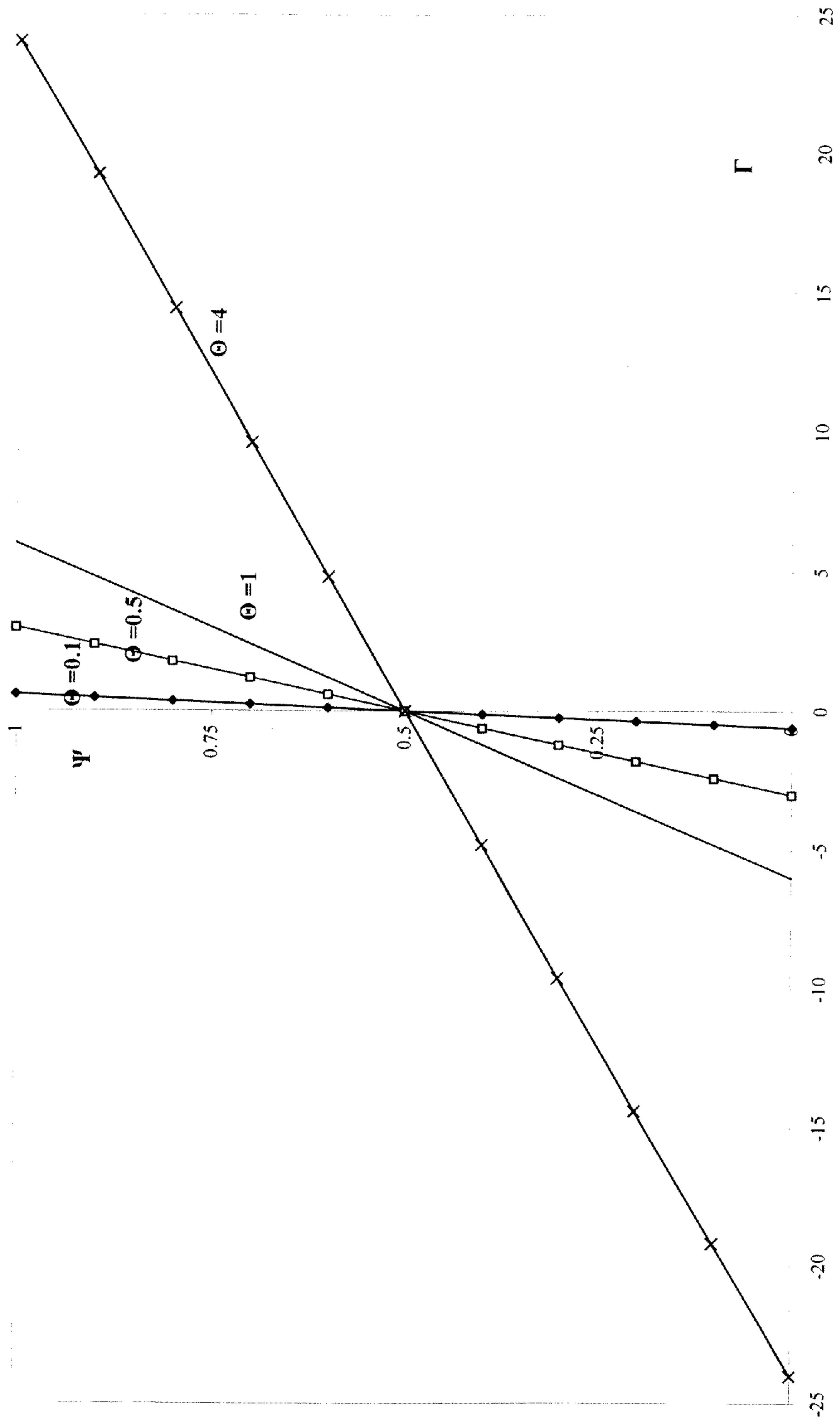


Figura 4.6.2. Curva de la bomba de flujo newtoniano a velocidad constante,  $\lambda=4$ .

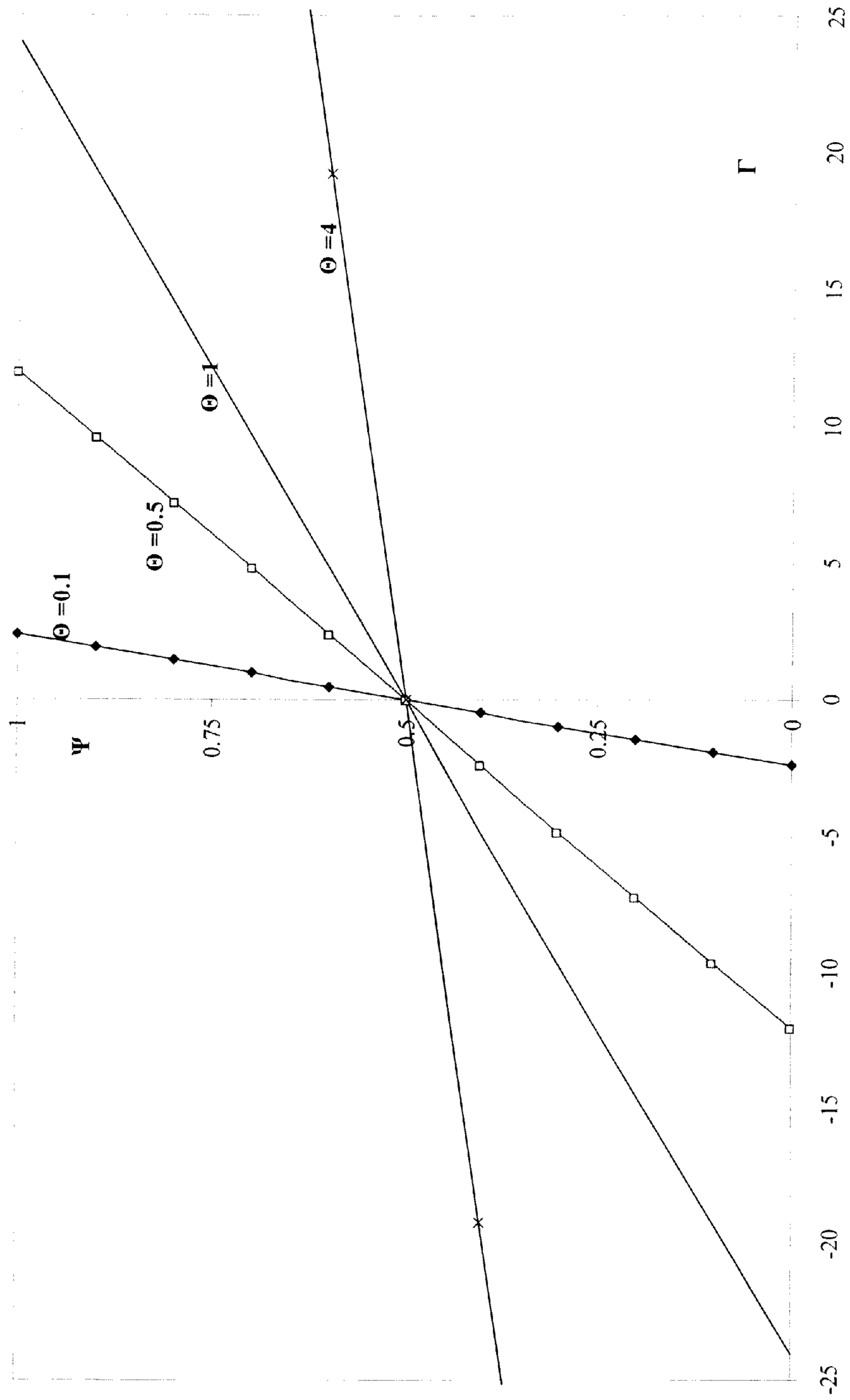
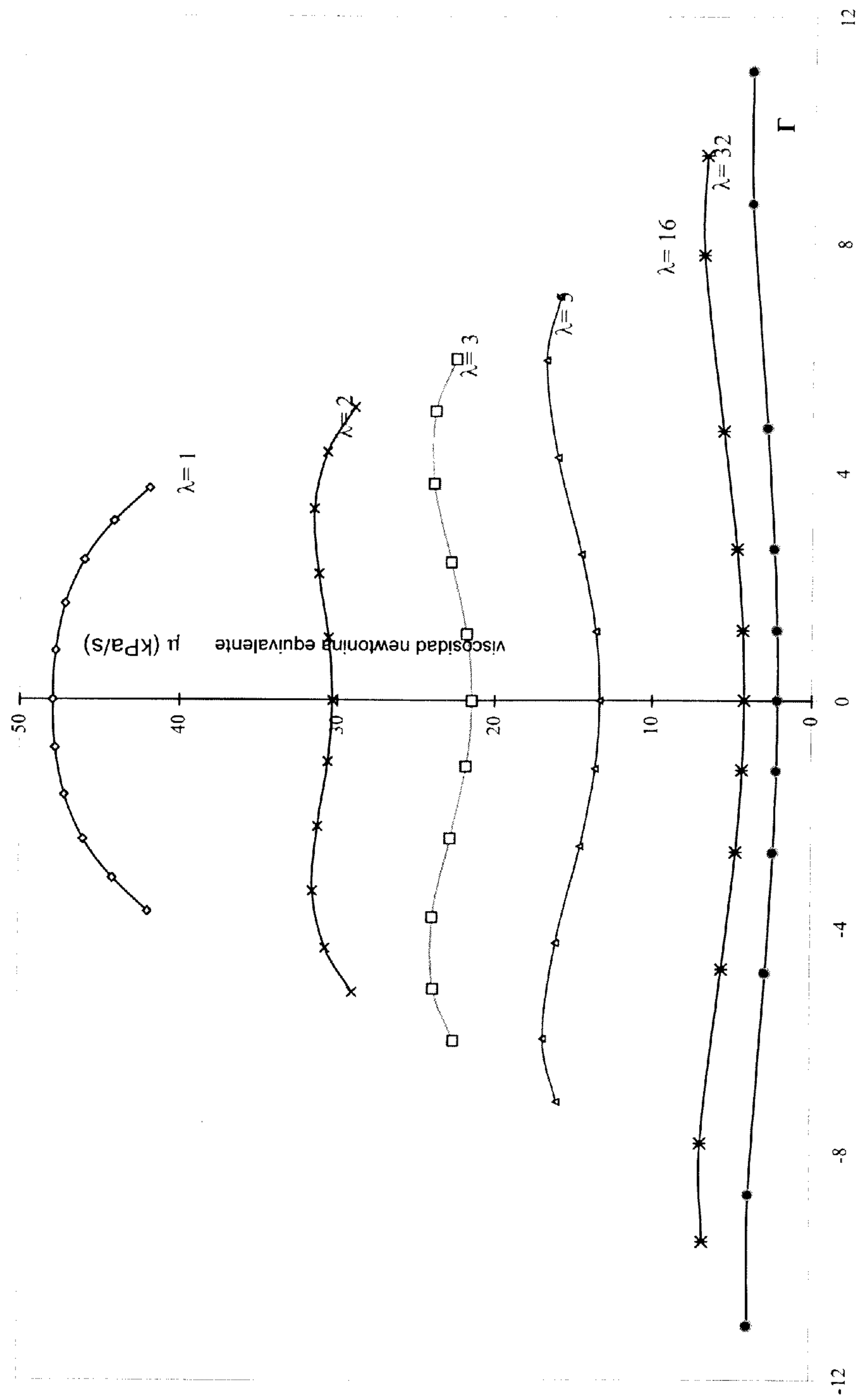


Tabla 4.6.1 Resultados del modelo de Flujo newtoniano.

$\lambda=1.00$		$\lambda=4.00$	
$\Theta = 0.10$		$\Theta = 0.10$	
$\Gamma$	$\Psi$	$\Gamma$	$\Psi$
-0.600000	0.0000	-2.400002	0.0000
-0.480000	0.1000	-1.919998	0.1000
-0.360000	0.2000	-1.439999	0.2000
-0.240000	0.3000	-0.959999	0.3000
-0.120000	0.4000	-0.480000	0.4000
0.000000	0.5000	0.000000	0.5000
0.120000	0.6000	0.480000	0.6000
0.240000	0.7000	0.959999	0.7000
0.360000	0.8000	1.439999	0.8000
0.480000	0.9000	1.919998	0.9000
0.600000	1.0000	2.400002	1.0000
$\Theta = 0.50$		$\Theta = 0.50$	
$\Gamma$	$\Psi$	$\Gamma$	$\Psi$
-3.000000	0.0000	-12.000000	0.0000
-2.400002	0.1000	-9.600006	0.1000
-1.799999	0.2000	-7.199997	0.2000
-1.200001	0.3000	-4.800003	0.3000
-0.599998	0.4000	-2.399994	0.4000
0.000000	0.5000	0.000000	0.5000
0.599998	0.6000	2.399994	0.6000
1.200001	0.7000	4.800003	0.7000
1.799999	0.8000	7.199997	0.8000
2.400002	0.9000	9.600006	0.9000
3.000000	1.0000	12.000000	1.0000
$\Theta = 1.00$		$\Theta = 1.00$	
$\Gamma$	$\Psi$	$\Gamma$	$\Psi$
-6.000000	0.0000	-24.000000	0.0000
-4.800003	0.1000	-19.200012	0.1000
-3.599998	0.2000	-14.399994	0.2000
-2.400002	0.3000	-9.600006	0.3000
-1.199997	0.4000	-4.799988	0.4000
0.000000	0.5000	0.000000	0.5000
1.199997	0.6000	4.799988	0.6000
2.400002	0.7000	9.600006	0.7000
3.599998	0.8000	14.399994	0.8000
4.800003	0.9000	19.200012	0.9000
6.000000	1.0000	24.000000	1.0000
$\Theta = 4.00$		$\Theta = 4.00$	
$\Gamma$	$\Psi$	$\Gamma$	$\Psi$
-24.000000	0.0000	-96.000000	0.0000
-19.200012	0.1000	-76.800049	0.1000
-14.399994	0.2000	-57.599976	0.2000
-9.600006	0.3000	-38.400024	0.3000
-4.799988	0.4000	-19.199951	0.4000
0.000000	0.5000	0.000000	0.5000
4.799988	0.6000	19.199951	0.6000
9.600006	0.7000	38.400024	0.7000
14.399994	0.8000	57.599976	0.8000
19.200012	0.9000	76.800049	0.9000
24.000000	1.0000	96.000000	1.0000

Figura 4.7.1. Viscosidad newtoniana equivalente para ABS a 170 °C a medida que el gasto volumétrico aumenta.



**Tabla 4.7.1 Viscosidad newtoniana equivalente a diferentes valores de  
gasto volumétrico.**

Para ABS a 170 °C y distintas velocidades de placa.

λ = 1.00				
Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	Θ
0.00	-3.711239	1.291245	41.934962	0.6185
0.10	-3.126414	0.922939	44.158451	0.6513
0.20	-2.442343	0.497272	45.995225	0.6784
0.30	-1.670994	0.032229	47.203284	0.6962
0.40	-0.845780	-0.437688	47.784319	0.7048
0.50	-0.004688	-0.879029	47.939504	0.7071
0.60	0.845780	-1.283468	47.784318	0.7048
0.70	1.670994	-1.638765	47.203284	0.6962
0.80	2.442343	-1.945071	45.995225	0.6784
0.90	3.126414	-2.203475	44.158451	0.6513
1.00	3.711239	-2.419994	41.934962	0.6185
λ = 2.00				
Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	Θ
0.00	-5.128531	1.836093	28.974794	0.4274
0.10	-4.347965	1.291272	30.706007	0.4529
0.20	-3.349656	0.595949	31.541063	0.4652
0.30	-2.212051	-0.165925	31.243708	0.4608
0.40	-1.083169	-0.858961	30.598036	0.4513
0.50	-0.004688	-1.441291	30.319613	0.4472
0.60	1.083169	-1.942129	30.598037	0.4513
0.70	2.212051	-2.377977	31.243708	0.4608
0.80	3.349656	-2.753707	31.541063	0.4652
0.90	4.347965	-3.056693	30.706007	0.4529
1.00	5.128531	-3.292438	28.974794	0.4274
λ = 3.00				
Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	Θ
0.00	-5.980924	2.178503	22.527051	0.3323
0.10	-5.064041	1.506208	23.842034	0.3517
0.20	-3.808491	0.583193	23.907696	0.3526
0.30	-2.419475	-0.390600	22.782284	0.3360
0.40	-1.156847	-1.187849	21.786228	0.3213
0.50	-0.004688	-1.816102	21.439206	0.3162
0.60	1.156847	-2.344696	21.786228	0.3213
0.70	2.419475	-2.810075	22.782284	0.3360
0.80	3.808491	-3.225298	23.907696	0.3526
0.90	5.064041	-3.557833	23.842034	0.3517
1.00	5.980924	-3.802420	22.527051	0.3323

-----  
 $\lambda = 5.00$

Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	$\Theta$
0.00	-7.065193	2.627786	15.966560	0.2355
0.10	-5.946556	1.765064	16.798203	0.2478
0.20	-4.259258	0.457426	16.042426	0.2366
0.30	-2.566905	-0.774700	14.502308	0.2139
0.40	-1.201820	-1.653279	13.579904	0.2003
0.50	-0.004688	-2.310094	13.296032	0.1961
0.60	1.201820	-2.855099	13.579904	0.2003
0.70	2.566905	-3.341605	14.502308	0.2139
0.80	4.259258	-3.801832	16.042426	0.2366
0.90	5.946556	-4.181491	16.798203	0.2478
1.00	7.065193	-4.437407	15.966560	0.2355

-----  
 $\lambda = 16.00$

Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	$\Theta$
0.00	-9.546344	3.700039	6.741778	0.0994
0.10	-7.792400	2.236274	6.878894	0.1015
0.20	-4.720337	-0.311027	5.555959	0.0820
0.30	-2.660851	-1.857685	4.697836	0.0693
0.40	-1.227086	-2.791326	4.332938	0.0639
0.50	0.000586	-3.467004	4.229042	0.0624
0.60	1.227086	-4.018412	4.332938	0.0639
0.70	2.660851	-4.518536	4.697836	0.0693
0.80	4.720337	-5.031364	5.555959	0.0820
0.90	7.792400	-5.556126	6.878894	0.1015
1.00	9.546344	-5.846305	6.741778	0.0994

-----  
 $\lambda = 32.00$

Flujo	Gamma	m	visc(kPa/s)	$\Theta$
0.00	-11.022844	4.358890	3.892253	0.0574
0.10	-8.705725	2.363798	3.842575	0.0567
0.20	-4.779717	-0.953230	2.812926	0.0415
0.30	-2.669268	-2.543669	2.356348	0.0348
0.40	-1.229219	-3.482367	2.170235	0.0320
0.50	0.000586	-4.159420	2.117613	0.0312
0.60	1.229219	-4.711586	2.170235	0.0320
0.70	2.669268	-5.212937	2.356348	0.0348
0.80	4.779717	-5.732947	2.812926	0.0415
0.90	8.705725	-6.341928	3.842575	0.0567
1.00	11.022844	-6.663955	3.892253	0.0574

-----  
Press any key to continue

Figura 4.7.2. Modelo newtoniano con viscosidad equivalente para flujo creciente y  $\lambda = 1$

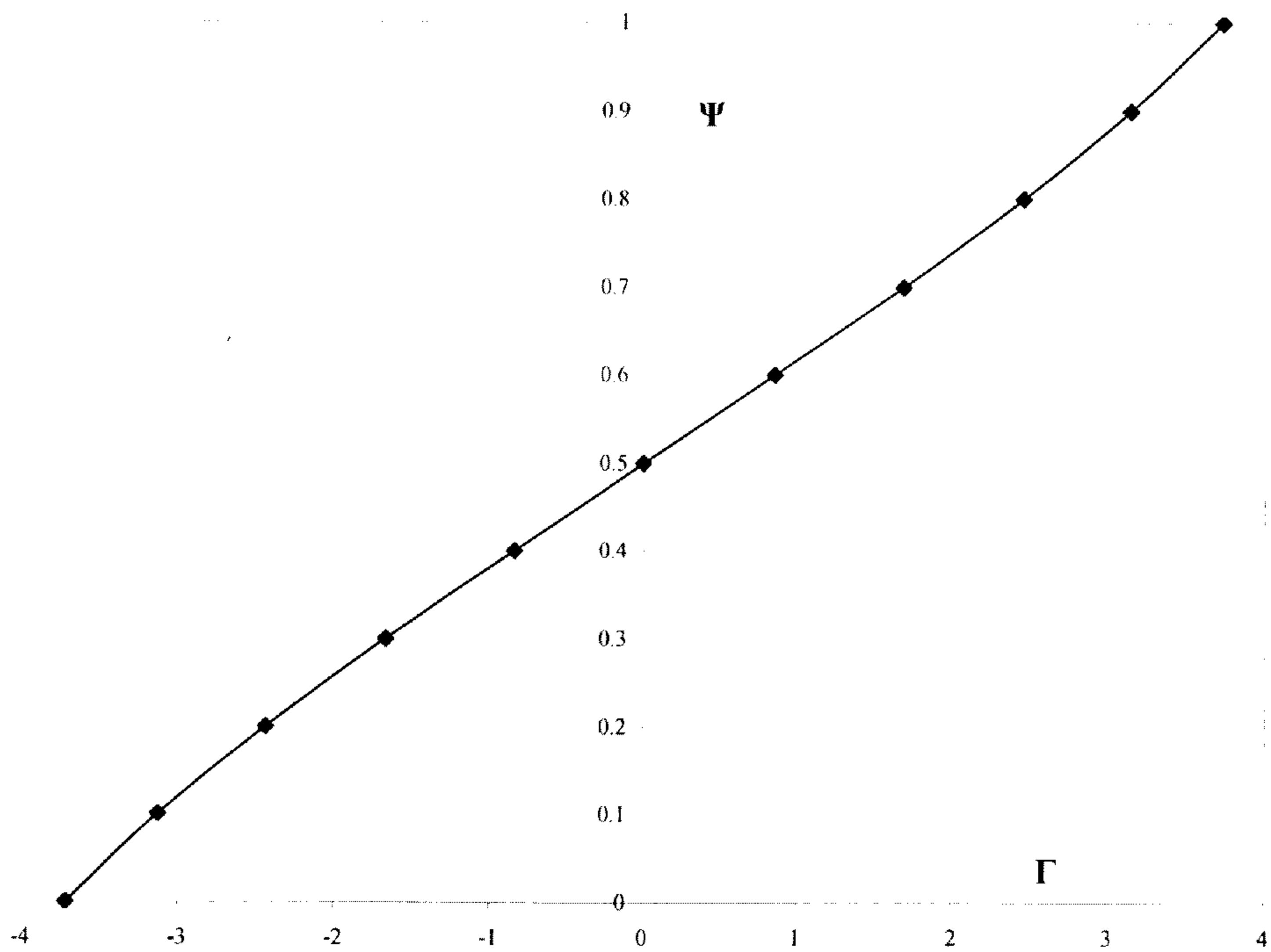


Tabla 4.7.2 Viscosidad newtoniana equivalente en el modelo newtoniano.

-----  
 $\lambda = 1.00$   
 -----

Flujo	Gamma	$\Theta$
0.00	-3.711239	0.6185
0.10	-3.126414	0.6513
0.20	-2.442343	0.6784
0.30	-1.670994	0.6962
0.40	-0.845780	0.7048
0.50	-0.004688	0.7071
0.60	0.845780	0.7048
0.70	1.670994	0.6962
0.80	2.442343	0.6784
0.90	3.126414	0.6513
1.00	3.711239	0.6185

-----

## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1. Efecto de la velocidad de placa bajo gasto volumétrico constante.

La curva de la bomba, figura 4.1.1, muestra que a bajas velocidades de placa se puede obtener el mismo valor de gasto volumétrico que si se manejan altos valores de velocidad. Numéricamente, se observa que a menor valor de  $\lambda$  se tiene menor magnitud de  $\Gamma$ . Por ejemplo, se tienen ( $\lambda=1$ ,  $\Gamma=3.71124$ ) y ( $\lambda=32$ ,  $\Gamma=11.0228$ ). En estos casos el flujo es constante, por lo que un aumento de velocidad a través de  $\lambda$  equivale a impregnar de mayor fuerza al fluido a lo largo del canal de extrusión. Es decir, el modelo responde correctamente a la segunda ley de Newton, ya que se tiene un flujo volumétrico constante en el que aumenta la presión del fluido debido al aumento proporcional de la velocidad del fluido. Ver figura 4.2.1.

La curva de la bomba se ha obtenido con el cálculo de tipo II.

### 5.2. Condiciones de recirculación del material.

Otro aspecto importante es el de la operación sin producción que se ilustra por medio de los perfiles de velocidades en la figura 4.2.2. En esta se ejemplifican condiciones de recirculación a tres velocidades diferentes bajo sus respectivos gradientes de presión negativos que impiden la salida del material. La recirculación del material se debe a que la presión a la salida del extrusor,  $P_L$ , es mayor a la de la entrada,  $P_o$ . Por lo que al superar estos valores de presiones el flujo comienza a salir del extrusor como se observa en la curva de la bomba, figura 4.1.1. Los valores negativos de velocidad significan que el fluido tiene una dirección contraria a la del fluido que se dirige a la salida. Aumentar  $\lambda$  implica que se arrastre mayor material a mayor velocidad por lo que necesita ampliar el área inferior del canal por la que regresa.  $\xi$  para  $\Phi < 0$  aumenta de 0.7 a 0.8.

Un aumento repentino en la presión del fluido, cuando recircula o cuando fluye normalmente puede provocar daños al ambiente que lo rodea si no se conocen las condiciones de presión del equipo que se encuentra a la salida del extrusor, que es generalmente el dado. Esta parte es responsable de que el gradiente de presión sea negativo debido a que representa una obstrucción al flujo.

### 5.3. Efecto de la presión sobre el gasto volumétrico a una velocidad de placa constante.

En la figura 4.3.1 se puede observar la transición del perfil de velocidades cuando  $\lambda = 1$ . La presión aumenta a partir de  $\Gamma = -3.711239$  (en tal caso  $\Psi = 0$ ) y aumenta hasta  $\Gamma = 3.711239$  (cuando  $\Psi = 1$ ). Los valores negativos de la velocidad adimensional,  $\Phi$ , significan que el flujo tiene una dirección contraria a la dirección de flujo positivo. Es decir, que el fluido regresa a la entrada por la parte inferior del canal entre  $0 \leq \xi \leq 0.7$ , y avanza entre  $0.7 \leq \xi = 1$ , de manera que no hay flujo de fluido. A medida que el gradiente de presión va aumentando el fluido es empujado de manera que la velocidad adimensional se hace totalmente positiva y se alcanza  $\Psi = 1$ .

En esta gráfica se presentan todos los tipos de perfiles mencionados en el desarrollo.



#### **5.4. Efecto de la temperatura del material fundido sobre la presión del fluido.**

La tabla 4.4.1 muestra que el aumento de la temperatura disminuye la presión del fluido al mismo tiempo que la velocidad rotacional aumenta con la temperatura. Lo anterior resulta lógico sabiendo que las fuerzas de fricción y las fuerzas viscosas disminuyen cuando la temperatura del líquido aumenta.

#### **5.5. Variación de la viscosidad con la posición entre las placas del extrusor y con la temperatura.**

En las figuras 4.5.1 y 4.5.2 cada curva muestra la gran variación de la viscosidad  $\eta$  a lo largo de  $\xi$  a temperatura constante. Con el aumento de la temperatura de 170 ° C a 244 ° C,  $\eta$  disminuye. También se observa la simetría de la viscosidad para los valores constantes de  $0 \leq \Psi < 0.5$  con los valores de  $0.5 < \Psi \leq 1.0$ . En  $\Psi = 0.5$ ,  $\eta$  se mantiene casi constante. La conformación de estas curvas obedece a la naturaleza hiperbólica de  $\eta$ .

La figura 4.5.3 muestra la disminución de  $\eta$  con el aumento de la velocidad de placa como se había predicho en el punto anterior. La figura 4.5.4 muestra la disminución de  $\eta$  con el aumento de la temperatura para una velocidad y un gasto volumétrico constantes.

#### **5.6. Validación del modelo.**

Los perfiles de velocidades que se pueden presentar van desde el tipo PVM1 hasta PVM2, en los que  $\Gamma$  es mayor o menor a la raíz que limita cada tipo de perfil. Al respecto, de antemano deben esperarse curvas similares independientemente del tipo de perfil cuando la magnitud de  $\Gamma$  es la misma, ya que el desarrollo analítico plantea el comportamiento simétrico de manera que el signo solo defina la magnitud de  $\Psi$  entre 0 y 1.

En el mismo contexto, se observa para todos los casos simulados que cuando  $\Psi = 0.5$ , el gradiente de presión se aproxima a cero, (ver tabla 4.1.1). Este resultado está de acuerdo con lo esperado para el desarrollo de flujo por arrastre, en el que  $\Gamma = 0$ . Es importante señalar que el modelo presenta este valor de gasto para flujo únicamente por arrastre.

En la validación de cualquier modelo que intenta describir un proceso se considera la comparación con modelos más simples además de la recopilación de resultados experimentales (Rodrigues, 2005) por lo que en este caso es oportuno referirse al modelo newtoniano como punto de comparación inicial (Pérez, 1992). La industria de los plásticos suele utilizar el modelo newtoniano cuando la eficiencia de producción asemeja a la que se obtiene con modelos más complicados así que no está de más observar la curva de la bomba de la figura 4.6.1 que se ha obtenido para ilustrar el caso y en donde se observa la diferencia con el modelo no newtoniano.

La ecuación de flujo newtoniano es lineal, lo que significa que  $\Psi$  es la suma del flujo volumétrico sólo por arrastre ( $\Psi = 1/2$ ) más el flujo volumétrico por presión; es decir, la gráfica de  $\Psi$  vs.  $\Gamma$  será siempre una línea recta a una temperatura dada mientras que  $\Psi$  para el flujo no newtoniano será recta sólo si  $\Gamma = 0$ . Esta semejanza da indicios de que la diferencia más notable entre ambos modelos está en la contribución del flujo por presión.

El modelo newtoniano predice mayores gradientes de presión con el aumento de  $\lambda$  y  $\Theta$ , como se puede estimar al comparar las gráficas 4.6.1 y 4.6.2. Las altas presiones que se requieren para valores ligeramente altos de  $\Theta$  hacen que su uso sea descartado, sobre todo considerando que se procesan materiales de muy grandes viscosidades.

### 5.7. Viscosidad equivalente.

Los resultados del modelo newtoniano obtenidos en 4.6.1 obligan a determinar cual debe ser el valor de  $\Theta$  para obtener el mismo gasto que con el modelo no newtoniano. Por lo que una vez obtenida la magnitud de  $\Theta$  por medio de (3-56) (ver tabla 4.7.1 para  $\lambda = 1$ ) esta es utilizada para comparar ambos modelos de flujo (ver figura 4.7.2.). Es decir,  $\Gamma$  y  $\Theta$  de la tabla 4.7.1 son utilizados en el modelo newtoniano descrito por (3-54) observando que la curva es exactamente de la misma forma que la descrita en el modelo no newtoniano (ver tabla 4.1.1 para  $\lambda = 1$ ) por lo que de esto se puede concluir que en el modelo newtoniano, el comportamiento de  $\Theta$  no puede ser constante ni lineal mientras el gasto volumétrico aumenta desde 0 hasta 1; pero sin duda llega a permanecer constante cuando alcance condiciones de gasto volumétrico constante como lo exige la linealidad de la solución newtoniana (3-54). Por otra parte, la obtención de  $\Theta$  sólo se puede lograr una vez que se ha modelado el flujo no newtoniano, (3-32), por lo que emplear esta cantidad en la solución newtoniana pierde mucho sentido para fines prácticos si no se opera bajo condiciones de flujo volumétrico constante.

## 6. CONCLUSIONES.

La simulación realizada produce curvas de flujo que se ajustan a las limitaciones matemáticas del modelo así como a la situación física del flujo en extrusor de acuerdo a las suposiciones hechas para su desarrollo. El modelo se comporta de manera congruente con el principio de conservación de movimiento, lo que se vio ante la aplicación de fuerzas o al efecto de la velocidad sobre el sistema de flujo. Los resultados siguen una secuencia de características, de manera lógica, de las que resaltan los siguientes aspectos.

- La fuerza del fluido aumenta con la velocidad de arrastre a flujo volumétrico constante, lo que equivale a impregnar de aceleración a la masa que fluye por el canal de flujo de modo que aumentan las fuerzas en el fluido a lo largo de la altura del canal (segunda ley de newton).
- El flujo volumétrico aumenta con el gradiente de presión.
- Flujos por arrastre muy grandes (equivalente a valores de  $\lambda$  muy grandes) contrarrestan los efectos de gradientes de presión muy negativos. Por lo que:
- Flujos por arrastre bajos son suficientes para contrarrestar los efectos de gradientes de presión menos negativos.
- El aumento de la temperatura disminuye la presión de operación debido muy probablemente a la disminución de la viscosidad del fluido y de las fuerzas de fricción, provocando también que la velocidad de arrastre aumente.
- La viscosidad no newtoniana disminuye con el aumento de la temperatura.
- Las condiciones de operación que predice el modelo no newtoniano se aproximan más a la realidad que las del modelo totalmente newtoniano, principalmente en la complicada descripción de la viscosidad concerniente al flujo puramente viscoso.
- La viscosidad equivalente es mayormente útil cuando se opera en sistemas de producción basados en el modelo newtoniano y bajo condiciones de flujo volumétrico constante; de tal manera que se puede operar efectivamente con la caída de presión y magnitud de viscosidad,  $\mu$ , que se predice mediante el modelo no newtoniano. De no ser así, el haber desarrollado el modelo no newtoniano resta importancia al modelo newtoniano y por tanto al uso de la viscosidad equivalente, sobre todo si se está iniciando un sistema nuevo de producción.

Como se ha visto, el modelo de Eyring aplicado al flujo de materiales termoplásticos relaciona adecuadamente las características de los materiales a procesar y de diseño del equipo con las variables deseadas para establecer las condiciones de operación, de modo que se puede predecir el comportamiento de flujo de diversos materiales viscoelásticos, aún sin conocer sus respectivos parámetros de ajuste A y B; y con un mejor acercamiento a la situación real del flujo como se propuso al inicio de este trabajo. Este modelo intenta describir el flujo de la manera más real y lógica con las herramientas teóricas disponibles tal que es permisible reiterar en características surgidas como la invalidez del principio de superposición en ecuaciones no lineales, y demostrada con la ecuación de flujo volumétrico, en donde se observa que no es una simple suma de soluciones como en la ecuación lineal del modelo newtoniano.

En resumen, con este modelo se representa el proceso de flujo en extrusor plastificante por medio de un conjunto de ecuaciones no lineales deducidas por una serie de suposiciones físicoquímicas (como flujo isotérmico, estadio estacionario, etc.) y que finalmente han permitido analizar el flujo mediante una serie de simulaciones por computadora. Para esto la metodología seguida ha sido la sugerida por el libro de Bird, Stewart y Lightfoot "Fenómenos de Transporte", en el que se encuentran las bases teóricas y en donde se hace uso de las técnicas, como la adimensionalización; que son imprescindibles en la ingeniería.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. **Fenómenos de Transporte.** Ed. Reverté, S. A. México 1998.

Böhme, Gert. **Non Newtonian Fluid Mechanics.** Deuschlan, 1942.

Crochet, M.J., Davies, A.R. y Walters, K. **Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow.** Rheology Series, 1. 1a.Edition. Elsevier Science Publishing Company, Inc. U.S.A. 1984.

Darley, H.C.H. y G.R. Gray. **Composition and Properties of Drilling and Completion Fluids.** 5a. Edición. Gulf Publishing Company, U.S.A. 1988.

Ebewele, R. O. **Polymer Science and Technology.** CRC Press. U. S. A. 2000

Pérez Xicohtencatl, M. (1992). Tesis de licenciatura. **Modelado del Flujo de Termoplásticos Fundidos en Extrusores Plastificantes: Ecuaciones Newtonianas Generalizadas Unidimensionales.** Facultad de Química. Universidad Nacional Autónoma de México. México D. F.

Rodrigues, A. E. y M. Minceva (2005). **Modelling and simulation in chemical engineering: Tools for process innovation.** *Computers and Chem. Eng.*, 29(6), 1167-1183.

Savgorodny, V.K. **Transformación de Plásticos.** Ed. Gustavo Gili, S.A. Barcelona Esp. 1978

Shepley L. y Ross. **Differential equations.** Ed. Ginn and Company. U.S.A. 1964.

Walter, M. **Plastics Processing an Introduction.** Hanser/Gardner Publications, Inc.U.S.A. 1992.

Wilkinson, W.L. **Non Newtonian Fluids. Fluids Mechanics, Mixing and Heat Transfer.** Pergamon Press Ltd. London 1960

Apéndice A  
Programa de computación en FORTRAN 90 para el cálculo tipo I

```

c Flujo entre placas paralelas ( Modelo de Eyring)
c Flujo isotérmico.
c Cálculo de tipo 1, para valores de lambda ( velocidad de
giro adimensional)
c y gamma ( gradiente de presión adimensional).
  IMPLICIT INTEGER(I-N)
  IMPLICIT double precision(A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION LAMBDA,M,LP
  CHARACTER T$*50
  T$='CALCULO TIPO 2: DADAS LAMBDA Y GAMMA'
  WRITE(*,1)T$
1   FORMAT (6X, A50)
2   DO 30 LAMBDA=1,2
   write(*,3)LAMBDA
3   format(/,16x,'Lambda=',F5.2,/)
4   DO 28 PRES=-20,20,5
   GAMMA=PRES/10.0
   WRITE(*,6)GAMMA
6   format(/,9x,'Gamma=',F10.6)
   IF(GAMMA.NE.0D+0) THEN
   lp=LAMBDA*GAMMA
   ex=DEXP(GAMMA)
   alfa=(ex-1)/lp
   cr=alfa**2/ex
   beta=1+cr
   term=DSQRT(beta)-1.0
   M=DLOG(term/alfa)
   write(*,10)M
10  format(2x,'m=',F10.6)
   print'(6x,A21)', 'Perfil de velocidades'
C---PERFIL DE VELOCIDADES-----
   write(*,20)
20  format(4x,'eps=',8x,'phi=')
21  DO 23 N=0,10
   E=N/10.0
   coef=1.0/lp
   R=M+GAMMA*E
   phi=coef*(dcosh(M)-dcosh(R))
   WRITE(*,22)E,phi
22  FORMAT(2x,F5.2,6x,F12.7)
23  CONTINUE
C---GASTO VOLUMÉTRICO-----
   dm=1.0/(lp*GAMMA)

```

```
    psi=dm*((1.0-cosh(GAMMA))*sinh(M)+(GAMMA-  
sinh(GAMMA))*cosh(M))  
    write(*,24)psi  
24  format(4x,'Flujo vol=',F10.6)  
    ELSE  
    psi=5D-1  
    write(*,25)psi  
25  format('Flujo vol=',F6.2)  
    ENDIF  
28  continue  
30  continue  
    END
```

**Apéndice B**  
**Programa de computación en FORTRAN 90 para el cálculo tipo II**

```

c Flujo en extrusor mediante el modelo de Eyring.
c Cálculo tipo 2: dados el gasto volumétrico y la velocidad
c Rev.Sep.2005
    implicit integer (I-N)
    implicit double precision(A-H,O-Z)
    double precision Lambda,m,Lg
    Common Lambda,gasto,m
    character T$*68
    T$='Modelo de Eyring aplicado al flujo de termoplásticos
    + en extrusor'
    write(*,1)T$
1   format(2x,A65)
2   Do 40 lambda=30,36,2
    write(*,5)Lambda
5   format('-----
    &-----',/,15x,'lambda=',f6.2,/)
    write(*,6)
6   format(1x,'Flujo=',8x,'Gamma=',12x,'m='/, '-----
    --
    &-----')
7   Do 30 Q=0,10
    gasto=Q/10.0
c-----Determinación de la raiz de la ecuación de flujo
c-----por el método de bisección.-----
    gmin=-30.0
    gmaxim=100.0
    error=1D-7
    itmax=500
    FMAX=1D+12
    ITE=0D+0
    deltg=27D-1
    CALL BISEC(gmin,gmaxim,error,FMAX,itmax,ITE,deltg,raiz)
    gcalc=raiz
c En donde: gcal=gamma calculada
    ex=Dexp(gcalc)
    Lg=lambda*gcalc
    calf=(ex-1D+0)/Lg
    cbet=1D+0 + (calf**2/ex)
    rg=Dsqrt(cbet)-1D+0
    m=Dlog(rg/calf) ;constante de integración;
    write(*,11)gasto,gcalc,m
11  format(1x,F4.2,6x,F11.6,6x,F11.6)
30  continue

```



```

40  continue
    end
c Subrutina: Método de bisección.
  SubroutineBISEC(x,gmaxim,error,FMAX,itmax,ITE,deltg,raiz)
  implicit double precision (A-H,O-Z)
  implicit integer (I-N)
  Funx=F(x)
41  x1=x+deltg
    ITE=ITE+1
    Funx1=F(x1)
    PRODC=Funx*Funx1
    IF(ITE.GT.itmax)THEN
      print '(10x,A46)', 'se realizó máximo de
        iteraciones(41) aumenteitmx'
      stop
    end if
    IF(PRODC.GT.0D+0)THEN
      if(x1.GT.gmaxim)then
        print '(10X,A27)', 'No hay raiz en el intervalo'
        write(*,*)x1
        stop
      else
        x=x1
        Funx=Funx1
        goto 41
      End if
    ELSE IF (PRODC.EQ.0D+0)THEN
      if(Funx.EQ.0D+0)then
        raiz=x
        GOTO 200
      ELSE IF(funx1.EQ.0D+0)THEN
        raiz=x1
        GOTO 200
      ENDIF
    ENDIF
45  cmed=5D-1*(x+x1)
    ITE=ITE+1
    F_cmed=F(cmed)
    VABS=DABS(F_cmed)
    IF(VABS.GT.FMAX)THEN
      print '(10x,A32)', 'la función tiende al infinito'
      stop
    ENDIF
    IF(VABS.LE.error)THEN
      raiz=cmed
      GOTO 200
    ENDIF

```

```

IF(ITE.GT.itmax)THEN
print '(10x,A46)', 'se realizó máximo de
iteraciones(45) aumente itmx'
stop
ENDIF
PRODCCT=Funx*F_cmed
IF (PRODCCT.GT.0D+0) THEN
x=cmed
Funx=F_cmed
GOTO 45
ELSEIF (PRODCCT.LT.0D+0) THEN
xl=cmed
Funxl=F_cmed
GOTO 45
ELSE
raiz=cmed
ENDIF
200 END subroutine
c Función FC(y) para el programa principal
double precision FUNCTION F(x)
implicit integer (I-N)
implicit double precision (A-H,O-Z)
double precision m,Lambda
Common Lambda,gasto
gm=x
ex=Dexp(gm)
vl=lambda*gm
alfa=(ex-1D+0)/vl
beta=1D+0 + (alfa**2/ex)
arg=Dsqrt(beta)-1D+0
sm=Dlog(arg/alfa)
term=((sinh(sm)*(1-cosh(gm)))+(cosh(sm)*(gm-sinh(gm))))
F=term-gasto*Lambda*gm*gm
END function

```

**Apéndice C**  
**Programa de computación en FORTRAN 90 para el cálculo de la viscosidad**  
**dependiente de la posición.**

c Flujo en extrusor mediante el modelo de Eyring.  
c Cálculo tipo 2: dados el gasto volumétrico y la velocidad  
c Sep.2005

```

implicit integer (I-N)
implicit double precision(A-H,O-Z)
double precision Lambda,m,Lg,num,N,K
Common Lambda,gasto,m
character T$*68
T$='Modelo de Eyring aplicado al flujo de termoplásticos
+ en extrusor'
write(*,1)T$
1 format(2x,A65)
2 Do 40 lambda=1,2,3
write(*,5)Lambda
5 format('-----'
&-----',/,15x,'lambda=',f6.2,/)
7 Do 30 Q=10,13,4
gasto=Q/10.0
c-----Determinación de la raiz de la ecuación de flujo
c-----por el método de bisección.-----
gmin=-30.0
gmaxim=100.0
error=1D-7
itmax=500
FMAX=1D+12
ITE=0D+0
deltg=27D-1
CALL BISEC(gmin,gmaxim,error,FMAX,itmax,ITE,deltg,raiz)
gcalc=raiz
c En donde: gcalc=gamma calculada
ex=Dexp(gcalc)
Lg=lambda*gcalc
calf=(ex-1D+0)/Lg
cbet=1D+0 + (calf**2/ex)
rg=Dsqrt(cbet)-1D+0
m=Dlog(rg/calf)
write(*,8)gasto,gcalc,m
8 format(/,1x,'gasto=',F4.2,4x,'gamma=',F11.6,5x,'m=',F11.6)
N=164.0
paso=2.0
9 K=N+paso
c-----
If(K.eq.170.0)Then
A=123.39
B=1.82
print '(22x,A6)', 'T=170C'

```

```

        goto 10
    ELSEIF(k.lt.170.0) then
        goto 26
    end if
c-----
    if(K.eq.192D+0) Then
        A=81.48
        B=6.213
        print '(22x,A6)', 'T=192C'
        goto 10
    elseif(k.lt.192.0) then
        goto 26
    end if
    if(K.eq.210D+0) then
        A=61.325
        B=9.992
        print '(22x,A6)', 'T=210C'
        goto 10
    Elseif(K.lt.210.0) then
        goto 26
    end if
        if(K.eq.244.0) then
            A=40.525
            B=17.524
            print '(22x,A6)', 'T=244C'
            goto 10
        else
            goto 26
        Endif
10    param=A/B
    Do 25 cord=0,10,1
        eps=cord/10.0
        num=m+(gcalc*eps)
        deno=sinh(num)
        visc=param*(num/deno)
13    format(10x,F4.2,15x,F11.6)
25    continue
26    N=K
        if(N.eq.244.0) then
            stop
        else
            goto 9
        endif
30    continue
40    continue
end

```

## Apéndice D

### Programa de computación en FORTRAN 90. Flujo newtoniano.

```
implicit integer (I-N)
implicit double precision(A-H,O-Z)
double precision lambda
common lambda,visc,Q
Do 17 lambda=4,6,3
write(*,1)lambda
1  format('-----
/,10x,'Lambda=',
&F4.2,/, '-----')
2  do 16 u=1,5,4
    visc=u/10.0
    write(*,3)visc
3  format(/,14x,'v=',F4.2,/,10x,'Q=',14x,'gamm=')
c ciclo interno DO:-----
4  DO 15 gasto=0,10
    Q=gasto/10.0
c Determinación de la distribución de presiones
    cmin=-150
    Cmax=150
    DELTC=5D-1
    FMAX=1D+99
    Itmax=700
    ITE=0D+0
    error=1D-6
    CALL BIS(cmin,cmax,error,FMAX,itmax,ITE,DELTC,raiz)
    gamma=raiz
    write (*,5)gamma,Q
5  format(6X,F11.6,10X,F6.4)
15 continue
16  CONTINUE
17 continue
    END
c Subrutina
    Subroutine BIS(x,cmax,error,FMAX,itmax,ITE,DELTC,raiz)
    implicit double precision (A-H,O-Z)
    implicit integer (I-N)
    Funx=F(x)
18  x1=x+DELTC
    ITE=ITE+1
    Funx1=F(x1)
    PRODC=Funx*Funx1
    IF(ITE.GT.itmax)THEN
    print '(10x,A46)', 'se realizó máximo de iteraciones,aumente
itmax'
    stop
    end if
    IF(PRODC.GT.0D+0)THEN
    if(x1.GT.cmax)then
    print '(10X,A27)', 'No hay raiz en el intervalo'
```

```

        write(*,*)x1
        else
        x=x1
        Funx=Funx1
        goto 18
        End if
ELSE IF (PRODCT.EQ.0D+0) THEN
    if(Funx.EQ.0D+0) then
        raiz=x
        GOTO 20
    ELSE IF(funx1.EQ.0D+0) THEN
        raiz=x1
        GOTO 20
    ENDIF
ENDIF
19  cmed=5D-1*(x+x1)
    ITE=ITE+1
    F_cmed=F(cmed)
    VABS=DABS(F_cmed)
    IF(VABS.GT.FMAX) THEN
        print '(10x,A32)', 'la función tiende al infinito'
        stop
    ENDIF
    IF(VABS.LE.error) THEN
        raiz=cmed
        GOTO 20
    ENDIF
    IF(ITE.GT.itmax) THEN
        stop
    ENDIF
    PRODCT=Funx*F_cmed
    IF (PRODCT.GT.0D+0) THEN
        x=cmed
        Funx=F_cmed
        GOTO 19
    ELSEIF (PRODCT.LT.0D+0) THEN
        x1=cmed
        Funx1=F_cmed
        GOTO 19
    ELSE
        raiz=cmed
    ENDIF
20  END subroutine
c Función FC(y) para el programa principal
double precision FUNCTION F(y)
implicit integer (I-N)
implicit double precision (A-H,O-Z)
double precision lambda
Common lambda,visc,Q
term=y/(6.0*visc*lambda)
F=term-(2.0*Q)+1.0
END function

```