UNIVERSIDAD PANAMERICANA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

LAS MATEMÁTICAS Y SU RELACIÓN CON EL MUNDO FÍSICO EN ARISTÓTELES

TESIS QUE PRESENTA:

MIGUEL MARIO URIBE DUARTE

PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. HÉCTOR JESÚS ZAGAL ARREGUÍN

MÉXICO, D. F. 2005

En el gran misterio de la vida
el arte es un rayo de luz.

Aprende, estudia sin tiempo y sin medida,
y cuando puedas dar algo de ti mismo a los demás,
esa luz surgirá de tus manos.

Placa en el Museo de la Acuarela, Coyoacán.

Quiero agradecer el apoyo y la paciencia del doctor Héctor Zagal, a Ulises Sánchez por sus traducciones del griego al español, a Lety Benítez y Jessica Arellano por sus comentarios que motivaron el desarrollo del presente texto, a Aurora Jiménez, Carla Sonia García y Gabriela Ramírez por su apoyo en la revisión final de este trabajo.

A la Vida, el Amor y la Verdad.
A Ti, Señor, Vértice de los Encuentros.
A la Ternura, María de Guadalupe.
Quienes siempre me han acompañado en este mi andar y camino.

A Miguel y Leticia,
María Esther, Víctor y Sebastián Rigel,
Horacio, Mónica, Pablito y tu que vienes en camino.

A los próximos: mi gran familia grande,
a los amigos y amigas,
a mis maestros.

A los que me han apoyado en el transcurso y en el desarrollo.

Para Gaby con cariño.

A mis alumnos que me enseñan,
a los que viven y de quienes aprendo,
a la naturaleza-realidad que me instruye.

Y a todos con los que he caminado,
y que no menciono,
porque no restan,
sino porque desde entonces me están acompañando.

Todos, somos susceptibles del Vértice de los Encuentros.

ÍNDICE

CAPÍTULO SEGUNDO
DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PITAGÓRICA

CAPÍTULO TERCERO
ALGUNOS PRESUPUESTOS LÓGICOS Y METODOLÓGICOS EN ARISTÓTELES

CAPÍTULO CUARTO
ANÁLISIS DE TEXTOS Y CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN

Aristóteles no dedicó un tratado particular a la reflexión sobre las ciencias matemáticas, sin embargo estudia este tema de manera frecuente en algunas de sus obras, abordando las siguientes cuestiones:

Aritmética y geometría
Matemáticas y mundo físico: las ciencias mixtas
La teoría de las categorías: cantidad y cualidad
Objetos matemáticos y objetos físicos

El objetivo de este trabajo es dar una visión sintética, integral y de conjunto de las ciencias matemáticas en la obra de Aristóteles, para lo cual es necesario resolver los siguientes objetivos parciales:

Seleccionar en el *corpus aristotelicum* textos y fragmentos que traten sobre las ciencias matemáticas y materias afines.
Clasificar y organizar los materiales por tema o por problema
Analizar cada uno de los textos
Comparar los materiales y sus interpretaciones

Aristóteles conoce el adelanto que tienen las ciencias matemáticas en su tiempo, sus principales problemas, soluciones y propuestas de desarrollo. Al realizar el análisis de textos es evidente que Aristóteles habla de problemas o de principios que se tenían por supuestos o que eran evidentes en el discurso de esa época. Para nosotros, en muchas ocasiones, no resultan tan claros, por lo que es necesario estudiar el desarrollo histórico de las ciencias matemáticas para comprender los contenidos sobre los cuales Aristóteles hace sus reflexiones. Lo mismo ocurre con algunos presupuestos lógicos o metodológicos que requieren ser explicitados y así tener elementos suficientes para hacer una interpretación de los textos seleccionados. Así, que antes de iniciar el análisis de textos se dará una visión de conjunto del desarrollo histórico de las ciencias matemáticas hasta el tiempo de Aristóteles, y un estudio general de algunos de los presupuestos lógicos y metodológicos que intervienen en la reflexión aristotélica sobre estos temas. Después se procederá al análisis de cada uno de los fragmentos, reuniendo varios de ellos en un eje temático o problemático.

Una vez estudiados se hará una comparación de los textos y sus interpretaciones para elaborar una visión en conjunto de las reflexiones aristotélicas sobre las ciencias matemáticas y temas afines.

El material seleccionado proviene principalmente de *Categorías, Tópicos IV, Analíticos primeros, Analíticos segundos, Física II* y *Metafísica II, V, VI,* y *XIII.*

El hecho de que las reflexiones de Aristóteles sobre estos temas se encuentren dispersas en varias de sus obras, trae consigo algunos problemas junto con la interpretación de cada fragmento. Generalmente Aristóteles cita ejemplos o comenta ejemplos que utiliza para validar proposiciones más generales, por lo que es necesario determinar los distintos contextos en los que se presenta el ejemplo, el comentario o la reflexión aristotélica; también se dan aparentes contradicciones o irregularidades en el discurso, necesarias para resolver o explicar los diferentes problemas.

Es importante señalar, que éste no es un estudio exahustivo sobre el tema, y que solamente se abordan algunos de los problemas que ocupan un sitio de importancia en el discurso aristotélico.

En el capítulo I se hace un análisis de las aportaciones matemáticas y geométrico-físicas de Tales de Mileto. En el capítulo II se estudian las principales aportaciones matemáticas y físico-matemáticas de la primera Escuela Pitagórica. Además se da una visión general y en conjunto del desarrollo de algunas ciencias mixtas hasta el tiempo de Aristóteles. En el capítulo III, se tratan los conceptos, relaciones y métodos necesarios para explicitar, comprender y comentar los pasajes seleccionados. En el capítulo IV se hace un análisis de cada uno de los textos seleccionados y finalmente se exponen las conclusiones.

Los anexos se han puesto para facilitar la consulta de los argumentos que dieron lugar, o en los que se apoyan, los pasajes que remiten a ellos, para que la curiosidad del lector pueda ser satisfecha de forma rápida, y para que pueda abundar en los problemas y argumentos citados sin necesidad de salir del texto.

PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS

Los textos seleccionados que tratan sobre las ciencias matemáticas y temas afines los he reunido en los siguientes ejes temáticos:

Aritmética y geometría
Ciencias mixtas
Cantidad y cualidad
Objetos matemáticos y objetos físicos

A cada uno de estos ejes temáticos les corresponden varios problemas por resolver:

Aritmética y geometría

Por una parte Aristóteles afirma que aritmética y geometría son ciencias que pertenecen a géneros distintos, exclusivos y excluyentes. Aritmética y geometría son cosas de distinto género (*Analíticos segundos,* I, 7, 75b 4-7). No se puede demostrar lo geométrico por la aritmética (*Analíticos segundos,* I, 7, 75a 37-39). Hay principios exclusivos en cada ciencia por ejemplo, el número y la magnitud. (*Analíticos segundos,* I, 32, 88b 25-29). Por otra parte, afirma que aritmética y geometría se pueden relacionar en algunos casos, si hay una subordinación o inclusión de ciertas cuestiones de una ciencia en otra ciencia, por ejemplo las cuestiones ópticas incluídas en la geometría o las cuestiones armónicas incluídas en la aritmética. (*Analíticos segundos,* I, 7, 75b 4-6, 8-10).

Respecto a este tema los problemas por resolver son los siguientes:

1) Encontrar las razones que ofrece Aristóteles para afirmar que aritmética y geometría son ciencias que pertenecen a géneros distintos, exclusivos y excluyentes.

2) Encontrar las explicaciones que presenta Aristóteles para afirmar que aritmética y geometría se relacionan. Exponer en qué casos y cómo se relacionan.

3) Resolver o explicar la contradicción suscitada entre estas dos afirmaciones.

4) Encontrar presupuestos históricos o lógico-metodológicos que permitan explicar más ampliamente estos fragmentos.

Ciencias mixtas

Lo que Aristóteles llama ciencias mixtas, hoy en día se concoce como ciencias físico-matemáticas, esto es, la aplicación de las matemáticas para explicar fenómenos del mundo físico. Aristóteles se refiere a ellas como óptica-geométrica, la armonía-física-geométrico-aritmética, la mecánica-estereométrica, la astronomía-geométrica, la geografía-geométrica y algunas otras ciencias más.

Por una parte, Aristóteles afirma que el método matemático no es propio de la física (*Metafísica,* II, 3, 995a 15-18); por otra, tiene la necesidad de explicar cómo es que surgen las relaciones entre aritmética-mundo físico y geometría-mundo físico en las ciencias mixtas, que son un hecho evidente para él y sus contemporáneos, su existencia, desarrollo y logros son bien conocidos. Este tema se presenta los siguientes problemas:

1) Qué razones presenta Aristóteles para afirmar que el método matemático no se puede aplicar a la física.

2) Cuales son las razones que Aristóteles ofrece para explicar la existencia de las ciencias mixtas. En que forma se relacionan las ciencias matemáticas con el mundo físico.

3) Resolver o explicar la contradicción entre las afirmaciones anteriores.

4) Encontrar presupuestos históricos o lógico-metodológicos que permitan explicar ampliamente estos fragmentos.

Cantidad y cualidad

Cantidad y cualidad son dos *géneros de términos referentes* [1] que forman parte de la teoría aristotélica de las *categorías.* Algunos de

[1] En algunas ocasiones prefiero utilizar la expresión *Géneros de términos referentes,* en lugar del término *Categorías,* pues permite establecer con mayor claridad las relaciones entre cantidad y cualidad. Para una explicación más detallada ver el capítulo III, inciso 2 , página 97 y ss. de esta tesis.

los problemas respecto de este tema son más complejos que los anteriores. En primer lugar, porque la teoría de las *categorías* es una reflexión constructiva que hace Aristóteles sobre una parte del lenguaje (el estudio de algunos tipos de conceptos), mismos que le sirven para edificar y estructurar parte de su teoría del conocimiento humano y parte de su lógica. En segundo lugar, muchos de los ejemplos, comentarios de ejemplos y afirmaciones que explican o justifican esta teoría de las *categorías* provienen de algunas reflexiones sobre aritmética, geometría y ciencias mixtas. Así se enfrenta el problema de la construcción de una teoría del lenguaje, con implicaciones en la construcción de parte de su lógica, teoría del conocimiento y metodología, a partir de las reflexiones sobre las ciencias matemáticas, y las que establece al estructurar o explicar la teoría de las *categorías.*

Asimismo, por una parte la cantidad y la cualidad son dos *géneros de términos referentes:* distintos, exclusivos y excluyentes. (*Metafísica,* V, 28, 1024b 10-15). Además, Aristóteles afirma que no tiene nada de absurdo que una misma cosa se cuente en dos categorías distintas, como podría ser el *cual* y el *respecto a algo.* (*Categorías,* 11a 38-40).

Por lo tanto existen los siguientes problemas:

1) De qué manera influyen las reflexiones aristotélicas sobre aritmética, geometría y ciencias mixtas en la construcción de su teoría de las *categorías.*

2) Cómo es que Aristóteles afirma que cantidad y cualidad constituyen géneros distintos, exclusivos y excluyentes.

3) Por qué Aristóteles afirma que una misma cosa puede pertenecer a dos *categorías* distintas, y en cuyo caso establece algún tipo de relación entre ambas, cuando menos de coincidencia, de pertenencia de una misma cosa a dos géneros distintos; en que forma puede darse esta situación y cómo lo justifica Aristóteles.

4) Resolver o explicar la contradicción entre estas dos afirmaciones.

5) Encontrar presupuestos históricos o lógico-metodológicos que expliquen ampliamente estos fragmentos.

Objetos matemáticos y objetos físicos

Aristóteles plantea este problema de una forma completamente diferente; en los primeros tres casos, Aristóteles afirma una proposición en donde se subraya la diferencia, exclusión y exclusividad de los elementos que se estudian o subraya la inaplicabilidad del método matemático a la realidad física. Para admitir posteriormente excepciones, que explica dando una variedad de razones, aunque en ningún caso hace explícita la contradicción.

En este planteamiento, Aristóteles no parte de la diferencia, sino de lo que hay de común entre la física y las matemáticas, así que el problema consiste en encontrar los criterios y métodos para explicar sus diferencias (*Física* II, 2, 193b 21-25). En su discurso no se plantea contradicción alguna, ni explícita ni implícita; lo que sucede es que Aristóteles sostiene dos puntos de vista complementarios.

Sorprende este cambio de perspectiva y metodología para abordar esta problemática, pero parece ser una de las reflexiones más completas y que presentan menos problemas de interpretación, ya que son textos bastante extensos y analiza en forma detallada sobre estos temas.

Los problemas a resolver son:

1) Explicar las razones de Aristóteles para afirmar lo común entre los objetos matemáticos y los objetos físicos.

2) Explicar las razones de Aristóteles para distinguir los objetos físicos de los objetos matemáticos.

3) Explicar como son estas relaciones complementarias.

4) Encontrar presupuestos históricos o lógico-metodológicos que expliquen ampliamente estos fragmentos.

Por último se presentan las conclusiones, éstas tratan de ofrecer una visión sintética, integral y en conjunto de las ciencias matemáticas en la obra de Aristóteles, objetivo final de esta investigación.

Capítulo Primero
LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS EN TALES DE MILETO

Estructura

En este capítulo efectuaré un estudio histórico del desarrollo de las ciencias matemáticas en Tales de Mileto. Este análisis histórico lo continuaré en el segundo capítulo, a partir de las aportaciones de la primera Escuela Pitagórica. Al final, presentaré varias conclusiones parciales, útiles para comentar los textos seleccionados.

El objetivo de este capítulo es mostrar las principales aportaciones matemáticas de Tales, las cuales no fueron exclusivamente demostrativas, ya que en el análisis he podido distinguir entre otras, las aportaciones sobre: conceptos, definiciones, neologismos, métodos de relación sistemática y técnicas de construcción geométrica. Otro aspecto que deseo remarcar es el aspecto del descubrimiento, creativo o constructivo, que llevó a Tales a percatarse y establecer ciertos conocimientos. Por último deseo señalar las relaciones que estableció Tales entre las matemáticas y el mundo físico.

1. Tales: el primer matemático griego

Tales de Mileto nació hacia el año 625 a. C. y murió hacia el año 547 a. C. "Hombre de Estado, ingeniero, hombre de negocios, filósofo, matemático y astrónomo, abarcó casi el campo entero del pensamiento y la actividad humana" (Heath s/f: 81). En cuanto a sus escritos "es absolutamente claro que no había obra suya alguna en la Biblioteca Alejandrina, salvo la dudosa *Astrología Náutica*. Aristóteles no vio ningún libro escrito por él, al menos sobre temas cosmológicos, y fue sumamente cauto en atribuirle opiniones" (Kirk/Raven 1979: 126-127). A pesar de no contar con obras escritas por Tales durante el período Clásico, y de contar con datos inciertos o poco confiables "Tales se convirtió, de un modo especial, en un símbolo de ingeniosidad matemática y geométrica" (Kirk/Raven 1979: 114). Para mi análisis me concentraré en el estudio de sus aportaciones matemáticas, y en sus aplicaciones geométricas al mundo físico.

II. APORTACIONES MATEMÁTICAS DE TALES DE MILETO

Las tres fuentes que se conservan sobre las aportaciones geométricas son muy posteriores a él. Plutarco escribe 735 años después del Acmé de Tales de Mileto (d.A.T.) Diógenes Laercio escribe aproximadamente 835 años d.A.T. y Proclo 1037 años d.A.T., de ahí las muchas reservas que se tienen respecto a los conocimientos atribuídos a estos textos.

> Esas contribuciones se refieren a algunos teoremas geométricos y un par de problemas prácticos, cuyo interés reside esencialmente en que en ellos se alude a propiedades generales de rectas, a igualdades de ángulos, a semejanzas de figuras; es decir a cuestiones totalmente distintas de los conocimientos geométricos egipcios y que, por tanto, muestran ya la nueva fisonomía que lleva el sello inconfundible de la geometría griega (Babini 1952: 18-19).

Diógenes Laercio dice que Jerónimo de Rodas le atribuye a Tales de Mileto la medición de las pirámides por su sombra, a partir del momento en que nuestra sombra es igual a nuestra altura. Plutarco presenta una variante más compleja que la expuesta por Jerónimo de Rodas: "la relación de la altura de una pirámide a la longitud de su sombra es exactamente la misma que la existente entre la altura de cualquier objeto vertical mensurable y la longitud de sus sombra en el mismo momento del día" (Kirk/Raven 1979: 124).

Proclo, por su parte, dice que Eudemo atribuye a Tales el teorema de que *los triángulos que tienen un lado y sus ángulos adyacentes iguales son iguales entre sí,* porque es necesario que lo utilice para "la explicitación del método mediante el que dicen que demostró la distancia de las naves en el mar [a la costa]" (Kirk/Raven 1979: 124). Proclo, siguiendo a Eudemo, en este mismo comentario, le atribuye a Tales otros tres teoremas: la bisección del círculo por su diámetro; el que los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles sean iguales, y el que los ángulos verticales opuestos sean también iguales (Kirk/Raven 1979: 125; Prieto 1991: 5-6; Wussing 1998: 32; Collette 2000: 71).

Autores como G. S. Kirk, J. E. Raven, sir James Jeans, Juan David García Bacca o Sotero Prieto Rodríguez coinciden en conceder que Tales conoció las proposiciones atribuídas, y que su verdad sería conocida a partir de métodos semi-intuitivos. "[...] nos dice Proclo que Tales «descubrió muchas proposiciones [...] siendo su método de abordarlas en algunos casos más abstracto y en otros más observacional» [...]" (Jeans 1953: 34-35). Al igual que estos autores partiré de las constataciones más elementales de estas proposiciones. La manera de enunciar dichas proposiciones será la más sencilla, la menos abstracta y la que tenga menores connotaciones demostrativas. Así, por ejemplo, prefiero expresar: "El diámetro biseca a la circunferencia", o "El diámetro divide en dos áreas iguales al círculo", que decir: "Todo diámetro biseca a la circunferencia". Ya que en este último modo de expresar la proposición queda implícita una demostración o una inducción para todos los casos. En cambio, en las dos primeras formas de enunciar, queda implícita una descripción o una definición descriptiva. Por las razones que daré más adelante, creo que la aportación de Tales de Mileto fue más bien una descipción o una definición descriptiva, que la conclusión de una demostración o el resultado de una inducción. Esto me llevó a comprender la importancia que tienen las distintas maneras de enunciar un juicio dando distintos matices al construir diversas proposiciones. Así mientras que unas formas de expresar los teoremas nos llevan a pensar que son conclusiones de una demostración, otras maneras de enunciar estos mismos teoremas nos sugieren que las aportaciones de Tales no se relacionan con la demostración o con la inducción, sino que tienen más bien, un sentido definitorio, descriptivo o metodológico.

Desde la perspectiva anterior puedo ampliar el punto de vista que constriñe a estas proposiciones a la demostración o a la inducción, pues son vistas como teoremas. Si estas proposiciones dejan de verse como teoremas entonces se pueden explorar otras lecturas como ya he dicho arriba, (definiciones, descripciones o métodos constructivos). Es decir, que puedo vislumbrar las aportaciones de Tales en un sentido no demostrativo, y sí con un sentido heurístico o de descubrimiento, ya que él perfectamente pudo haber conocido estas proposiciones y las pudo haber aplicado, sin la necesidad de considerarlos como teoremas, es decir, como conclusiones de una demostración, menos o más rigurosa.

Un teorema es una proposición que se establece como la conclusión de una demostración o a partir de una inducción rigurosa, y lleva implícito un sistema formal de demostración o de inducción. Si se expresa la proposición de una manera simple, que permita desvincularla de todo sistema formal demostrativo o inductivo, podrá verse una serie de matices con los cuales se puede expresar una proposición con verdad y certeza.

Una proposición puede ser también un enunciado descriptivo de un hecho fácilmente constatable, o la expresión del descubrimiento de un hecho manifiesto, o la expresión de ciertas relaciones, o una definición, o una orientación técnica para la construcción geométrica; es decir, existen otras maneras de hacer una aportación matemática; además de la demostración.

Se le atribuyen a Tales de manera directa y de forma documentada, aunque tardía, el conocimiento de las siguientes proposiciones:

A. El diámetro biseca a la circunferencia.
B. Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales.
C. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Por lo que respecta a la geometría y su aplicación al mundo físico en la solución de estos problemas:

D. Midió la altura de las pirámides por medio de la sombra de una vara.
E. Determinó la distancia a la costa, de un barco en el mar.

Se le atribuyen de manera documentada las siguientes aportaciones astronómicas:

F. La predicción de un eclipse de sol.
G. Estudiar los solsticios.
H. El estudio del período variable de los solsticios.

Además se le atribuyen los siguientes conocimientos y aportaciones no documentados desde la Antigüedad:

Introducción de la geometría a Grecia (Prieto 1991: 5-6).

Crear la geometría de las líneas con carácter científico y abstracto.

La demostración de los conocidos teoremas que llevan su nombre, relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas (Baldor 1974: 3; Perero 1994: 19).

Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos (Proclo atribuye este teorema a Pitágoras) (Jeans 1953: 34; Wussing 1998: 32; Collette 2000: 71).

Es probable que haya conocido la suma de los ángulos de un triángulo.

La proporcionalidad de los lados de dos triángulos equiángulos.

En matemáticas se le atribuyen las primeras *demostraciones* de teoremas geométricos mediante razonamiento lógico (Perero 1994: 19).

A continuación analizaré con mayor detenimiento las tres proposiciones (A. B. C.) y los dos problemas (D. E.) que han llegado documentados desde la Antigüedad.

III. ANÁLISIS DE LAS APORTACIONES MATEMÁTICAS

1. El diámetro biseca a la circunferencia

Uno de los documentos que tratan de esta proposición y que han llegado hasta nuestros días desde la Grecia antigua es el texto titulado *Elementos de geometría,* en ella, Euclides establece la definición I.17: "Diámetro del círculo es una recta cualquiera que se haga pasar por el centro y cuyas dos partes tengan sus extremos en la periferia del círculo. Tal recta corta el círculo en dos" (Euclides 1944: 7; Euclides 1991/2000: 194).

Analizando con mayor detenimiento las palabras griegas utilizadas en esta definición, se advierte que tienen una estrecha relación con la técnica de construcción de la circunferencia y el círculo.

La construcción de una circunferencia se hace trazando una línea curva (por medio de un punto móvil) manteniendo una distancia constante (llamado radio) a partir de un punto fijo (llamado centro), es a partir de estos tres elementos: punto móvil, centro y radio, como se construye o define una circunferencia.

Las palabras griegas con las que se define la circunferencia o el círculo son: *diámetron:*[2] diámetro, palabra compuesta de: *di-, dia-:* a través; separadamente; en dos partes (de: *dya-:* diada, par; dualidad). *metron:* medida; instrumento de medida; vara o pértiga, (vara o varilla larga y flexible). *kentron,*[3] que significa: pincho, aguijón, espino o punta de lanza y *radios*[4]: que quiere decir: fácil, cómodo o hacedero, y que también hace referencia a las varillas con las que se unía la circunferencia de la rueda de los carros con el eje.

A partir de estos significados, resulta sencillo establecer la relación de estas palabras con la construcción de la circunferencia. El *metron* o varilla se fija con el *kentron* o punta, para poder girar la varilla y trazar la circunferencia.

---

2 Las referencias para las palabras griegas que aparecen en este párrafo son:
diámetron, to: porción, medida; soldada (García Hughes 1956: 169); ***diá-metros:*** diagonal; diámetro; cartabón (García Hughes 1956: 169); distribuir con medida; ser opuesto; edificar (García Hughes 1956: 169); ***diá-metros, e, on:*** marcado con medida, (Pabón 1997: 142), diámetro proviene del griego, ***dias, ados*** que significa, díada o par; o de ***di,*** duplicación y de ***metron,*** que quiere decir, medida. Así la palabra diámetro significaría: dos medidas o duplicación de la medida; duplicación del radio. ***dyas, ados, e:*** diada, par; dualidad. ***dia:*** a través; separadamente, en dos partes, en pedazos; entera, totalmente; **Cfr.** García Hughes 1956: 163/187; Pabón 1997: 136/160; Cardona 1997: 148/157. Liddell/Scott 1994: 388; ***metron,*** medida, espacio, longitud; proporción, regla; verso. Instrumento para medir, vara, pértiga; medida completa, plenitud (Pabón: 1997: 393; García Hughes 1956: 407; Liddell/Scott 1994: 1123). Aunque algunos autores han definido al diámetro a partir de la formación del prefijo *diá:* a través; y la palabra, *metrón:* medida; **Cfr.** Corripio 1996: 148, esta interpretación parece no apegarse a los hechos y circunstancias que dieron origen a la palabra, como he explicado.

3 ***kentron:*** pincho, agujón; punto; centro. ***kentro :*** armar con un pincho; pinchar; centrar || punta de lanza; espino; centro de una circunferencia (García Hughes 1956: 350; Pabón 1997: 343).

4 ***radios,*** radio: fácil, cómodo, hacedero, (rápido); (Pabón: 1997: 525; García Hughes 1956: 565); ***radios,*** radio: proviene de ***riza, es , e :*** raíz de una planta, especie medicinal; raíz o base de un órgano [del ojo, etcétera]; en sentido figurado: principio, origen, fundamento; tronco de una familia; raza, descendencia, prole, vástago. Radio hace también referencia a las varillas con las que se unía la circunferencia de la rueda con el eje. Referido a la construcción de las ruedas de los carros. Parece referirse a que une la base de la rueda o eje con la circunferencia (**Cfr.** Liddell/Scott 1994: 1563).

Todo indica que la palabra *radios* es posterior. Los griegos llamaron en un principio *metron* a lo que nosotros llamamos radio. Así pues, *Diámetro* es una palabra que expresa el siguiente concepto complejo: "línea recta compuesta por dos *metrón*". Euclides lo indica en la definición I.17 de sus *Elementos:* "[...] y cuyas dos partes tengan sus extremos en la periferia del círculo". Es muy probable que estas palabras fueran tomadas de disciplinas prácticas como la arquitectura, arte de la construcción, y de allí pasaran a la geometría.[5]

Para sir James Jeans, esta proposición es tan evidente que no necesita demostración lógica rigurosa, más bien, una corroboración empírica: basta con doblar un círculo por su diámetro, como si fuera una bisagra, para darse cuenta que las dos partes son iguales, es decir que el diámetro biseca, divide en dos partes iguales al círculo (Jeans 1953: 34).

Al ser claro que la aportación de Tales, respecto de esta proposición, no es demostrativa, propongo las siguientes opciones:

Se trata de la descripción de un hecho que puede ser fácilmente comprobado, esto conduce a que al verbalizar en la descripción se explicita y se toma conciencia de una serie de relaciones que permanecían, de alguna manera, oculta. Al manifestar estas relaciones en la descripción, se toma conciencia de ellas, y se pueden manejar y controlar. Aquí radica la importancia de la observación, descubrimiento, establecimiento de relaciones, descripción y verbalización.

Otra aportación metodológica se refiere a que se trata de un logro constructivo, ya como definición, ya como un principio técnico aplicable a otras construcciones geométricas. Así se cuenta con un instrumento explícito que permite tener la certeza de saber, de que manera el círculo y la circunferencia se dividen en dos partes iguales.

---

5 *kirko :* encerrar en un círculo; *kirkos, o :* circo, círculo; halcón que vuela trazando círculos (García Hughes 1956: 354; Pabón 1997: 346); *kyklos, o:* círculo; redondel; todo objeto o movimiento circular; esfera; ojo; reunión, (García Hughes 1956: 368) || derredor del campamento; muralla en torno a una ciudad; anfiteatro (Pabón 1997: 359); *circunferencia:* llevar alrededor. *Círculo:* diminutivo de redondel, cerco (Cfr. Corripio 1996: 98). *Bisección, bisector, bisectriz:* partir en dos partes iguales (Cfr. Cardona 1997: 158).

Además, podría tratarse de la invención de un neologismo, que ayuda a hacer más explícitas las relaciones observadas. Es claro que, al no ser demostrativa, la aportación de Tales tendría que dirigirse en alguno de los sentidos arriba citados o en algún otro similar.

Es en esta proposición donde se encuentra el gérmen de dos de las relaciones que tendrán una importancia fundamental en las matemáticas y en la lógica posteriores: la relación de igualdad, y la aplicación del principio de simetría para la relación de semejanza. La igualdad y su posterior desarrollo en las razones y proporciones, así como la simetría, el eje de simetría (en este caso identificado con el diámetro) y el establecimiento de la correspondencia de ciertas partes de las figuras, son los elementos básicos que permitirán establecer otras muchas relaciones más, y permitir el desarrollo y la construcción sistemática de la geometría griega.

2. Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales

Al igual que en el punto anterior, partiré de las demostraciones que han llegado hasta nosotros de forma escrita; para ello cuento con el teorema 1.5 de los *Elementos de Geometría* de Euclides (Euclides 1944: 23), y de manera indirecta, con la demostración que de este enunciado hace Aristóteles en los *Analíticos primeros* cuando la utiliza como ejemplo para explicar la petición de principio (*Analíticos primeros* I, 24, 41b 13-22. 1988: 175-176).

Ni la demostración de Euclides, ni la demostración a la que hace referencia Aristóteles, se pueden atribuir a Tales, ya que él conoció esta proposición por medio de procesos más sencillos, sensibles, semi-intuitivos y pre-demostrativos.

De los tres autores (Tales, Aristóteles y Euclides), la única demostración que ha llegado completa de manera directa y clara, es la elaborada por Euclides, que la enuncia y demuestra en el teorema 1.5 de sus *Elementos de Geometría* (véase anexo 1).

Características de la demostración de Euclides:

a) Es una demostración a partir de líneas, triángulos y ángulos rectilíneos.
b) Se construyen varios triángulos con algunos lados (líneas) y ángulos comunes.
c) Se suman y se restan magnitudes iguales.
d) Se establecen líneas, triángulos y ángulos iguales.
e) Las comparaciones se establecen a partir de relaciones de igualdad, y no por medio de la medida, es decir, no utiliza la cuantificación de las extensiones.
f) Es una demostración bien estructurada, que parte de la afirmación de una proposición que relaciona ciertos elementos de una manera determinada, estableciendo relaciones de hecho.
g) Parte de una hipótesis, es decir de la construcción de una figura determinada, con la cual se van a verificar ciertas características, condiciones o relaciones. La demostración consiste en hacer evidente, por medio de ciertas construcciones y relaciones, y a partir de ciertos principios, definiciones, nociones comunes, operaciones lógicas y teoremas ya demostrados, de la hipótesis se verifica la tesis.
h) Hay como antecedentes de esta demostración una serie de 23 definiciones, 5 postulados, 9 nociones comunes y 4 teoremas.

Por otra parte está la demostración encontrada en la obra de Aristóteles (*Analíticos primeros*, libro I, capítulo 24, 41b 13-22), quien no expone esta demostración para probar la conclusión, sino más bien toma una demostración conocida en su tiempo y que supone conocida por el lector, para hacer notar de que forma puede incurrirse en una petición de principio. Por esta razón es una labor compleja establecer el sentido de la demostración y separarla de los elementos que como ejemplo la relacionan a la petición de principio. Es necesario reconstruir la demostración a partir de lo que dice Aristóteles (véase anexo 2).

Características de la demostración referida por Aristóteles:

1) Hace uso de un triángulo inscrito en una circunferencia.
2) Hace uso de ángulos curvilíneos, concepto no manejado por Euclides, pues en la definición I.8 define el ángulo, como ángulo rectilíneo (Euclides 1944: 5; Euclides 1944: 168, nota 4).

3) Emplea las proposiciones: "Los ángulos de las semicircunferencias son iguales". "Todos los ángulos de un mismo segmento de circunferencia son iguales". "Al sustraer cosas iguales de cosas iguales, quedarán cosas iguales".
4) Se establecen comparaciones a partir de relaciones de igualdad entre los ángulos a partir de relaciones angulares curvilíneas.
5) No podemos determinar qué grado de rigor formal se usó en la demostración, pues es una reconstrucción a partir de un ejemplo y no la demostración misma.

A partir del análisis de las dos demostraciones anteriores, se cuenta con mayores elementos para reconstruir una posible demostración realizada por Tales. Sir James Jeans presenta un ejemplo de como Tales pudo llegar a establecer la verdad de ciertas proposiciones, sin necesidad de demostrarlas con todo rigor lógico, ni usando un complejo sistema de demostración. Según sir James Jeans, Tales pudo haber conocido como un hecho la figura 1, observando un pavimento embaldosado. A partir de esta figura se pueden establecer muchas relaciones que de hecho se vinculan con las proposiciones atribuidas a Tales. En concreto sir James Jeans se refiere a que Tales fue el primero en descubrir que *el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto,* a partir de inscribir un triángulo rectángulo en un semicírculo. Así pues, a partir de la figura 1, Tales pudo saber "como materia de hecho que las dos diagonales en un cuadrilátero rectángulo son iguales y se cortan en partes iguales...no hay razón alguna para que una semidiagonal sea más larga que otra. Si Tales hubiera notado esto alguna vez, habría visto en seguida que puede circunscribirse un círculo a los cuatro vértices de cualquier rectángulo y el teorema quedaría demostrado" (Jeans 1953: 34).

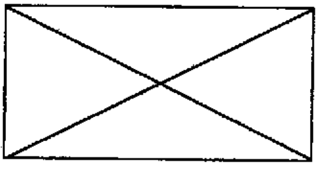


figura 1

Podemos establecer cuando menos dos posibles elaboraciones hechas por Tales: la primera es una constatación basada en la observación de la figura 1 en donde se evidencia que los triángulos isósceles tienen ángulos iguales. La segunda es una demostración a partir de un rectángulo (o cuadrado), inscrito en un círculo dividiéndolo por su diámetro (usado como eje de simetría), haciendo evidente que la figura de un semicírculo es igual a la figura del otro semicírculo, solamente que invertida. Esta demostración sería muy parecida a la referida por Aristóteles, aunque tal vez, menos elaborada. A partir del diámetro que funciona como eje de simetría, resulta evidente que al doblar el círculo por su diámetro y sobreponer las dos partes de la figura, todos sus elementos son correspondientes e iguales. Así se muestra que los dos ángulos adyacentes[6] del triángulo, son iguales.

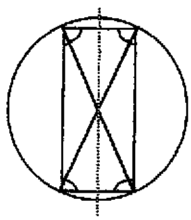


figura 2

A partir de estas posibilidades es claro que las aportaciones de Tales tienen que ver con el uso de figuras simétricas inscritas en una circunferencia, de ahí la importancia de la proposición sobre la bisección del círculo por su diámetro como parte de su metodología constructiva o demostrativa, ya que el diámetro tiene la función de eje de simetría. Sus demostraciones también se relacionan con la bisección de cuadriláteros por su diagonal.

Ahora puede establecerse que la demostración de Tales de Mileto, contará con los siguientes elementos de construcción y de metodología:

[6] Adyacente: que está situado en la inmediación o proximidad de otra cosa, en este caso ángulos próximos a la base del triángulo, se habla de ángulos adyacentes a la base. En otro sentido se habla de ángulos adyacentes que son los que "tienen el vértice común y un lado común que los separa" (Cardona 1997: 44).

1) Inscribir figuras en una circunferencia o semicircunferencia para establecer relaciones de igualdad.
2) Establecer y usar la proposición: el diámetro divide a un círculo en partes iguales, como herramienta constructiva y demostrativa para hacer y constatar igualdades de figuras o partes de figuras.
3) Inscribir figuras en una semicircunferencia para establecer relaciones de igualdad.
4) Usar las diagonales de los cuadriláteros para establecer relaciones de igualdad.
5) Relacionar el radio (llamado en principio *metron*) con los lados de las figuras inscritas en una circunferencia o semicircunferencia como método para tener la certeza de que las líneas son iguales.
6) El establecimiento de relaciones de igualdad.
7) El uso de la simetría de las figuras.
8) La constatación de la igualdad de las figuras por superposición.

3. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Esta proposición corresponde al teorema 1.15 de los *Elementos de Geometría* de Euclides (véase anexo 3).

Aunque la demostración hecha por Euclides es sencilla, es de suponer que Tales haya recurrido a procesos cognitivos menos elaborados y semi-intuitivos. A partir de los mismos elementos vistos y analizados en el punto anterior, determino los posibles procesos predemostrativos utilizados por Tales.

La verdad y certeza de esta proposición pudo haberse encontrado en alguno de los siguientes tres caminos:

a. Por la intersección de dos diámetros.
b. Por la inscripción de un cuadrilátero en un círculo.
c. Por la intersección de dos diagonales en un cuadrilátero.

a. Por la intersección de dos diámetros

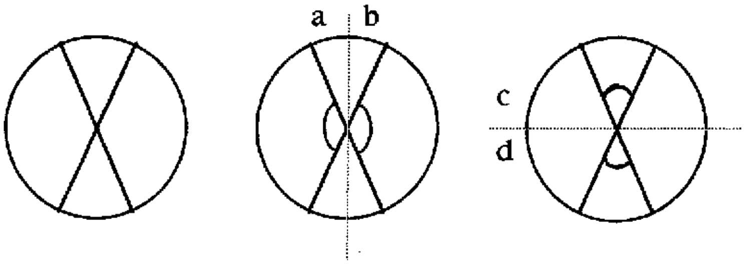


figura 3 A figura 3 B figura 3 C

Aparecen dos diámetros (en negro), que se intersecan en el centro del círculo (figura 3 A). Si dividimos el círculo mediante un diámetro vertical (punteado en las figuras), entonces es evidente que las figuras que se forman verticalmente son iguales (figura 3 B). Si se divide el círculo mediante un diámetro horizontal, entonces es evidente que las figuras que se forman horizontalmente son iguales (figura 3 C). Los ángulos opuestos por el vértice, y que están indicados, son iguales.

Las figuras que se forman en los lados a y b del semicírculo son iguales entre sí, y las figuras que se forman en los lados c y d del semicírculo son iguales entre sí. En ambos casos se han construido figuras simétricas.

Si se entiende por ángulo a la figura que se forma entre dos líneas (rectas o curvas) que se cortan o que se tocan en un punto, (Cardona 1997: 82), entonces resulta evidente que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

b. Por la inscripción de un cuadrilátero en un círculo
Procedimiento similar al anterior, en el que se hace evidente que los ángulos opuestos por el vértice son iguales (figura 2).

c. Por la intersección de dos diagonales en un cuadrilátero
Aunque la evidencia es suficiente, y es claro y comprobable empíricamente que las dos diagonales de un cuadrilátero son iguales,

que ambas se cortan por la mitad, y que su inclinación es igual, resulta más evidente aún, si el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia (figura 1).

Los elementos definitorios y metodológicos más importantes de esta demostración seguirán siendo:

La bisección del círculo
La formación de figuras simétricas y
El establecimiento de igualdades entre las figuras

IV. ANÁLISIS DE LAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS AL MUNDO FÍSICO

1. Determinar la altura de una pirámide

Se conocen dos fragmentos en los que se atribuye a Tales el haber determinado la altura de una pirámide, el primero es de Diógenes Laercio, I, 27: "Jerónimo afirma que (Tales) midió también las pirámides por su sombra, tras haber observado el momento en que nuestra sombra es igual a nuestra altura" (Kirk/Raven 1979: 123).

Otro fragmento atribuido a Plutarco es una variante más compleja citado por sir James Jeans dice:

> Plutarco atribuye a Tales, al menos por deducción, el más avanzado conocimiento de que, cuando dos triángulos tienen la misma forma (esto es, cuando tienen sus ángulos iguales), sus lados son proporcionales. Porque dice aquél que Tales medía la altura de una pirámide comparando la longitud de su sombra con la de un palo de longitud conocida. Si, por ejemplo, se hallaba que un palo de 3 pies arrojaba una sombra de 6 pies, entonces, una sombra de 600 pies sería producida por una pirámide de 300 pies de altura. Plutarco añade que este método de medida impresionó grandemente al rey egipcio Amasis, que estaba presente (Jeans 1953: 32-33).

Sobre este mismo fragmento Kirk y Raven comentan lo siguiente:

> En Plutarco (*Sept. Sap. Conv.* 2, 147 A -DK 11 A 21) hay una variante más compleja, a saber, que la relación de la altura de una pirámide a la longitud de su sombra es exactamente la misma que la existente entre la altura de cualquier objeto vertical mensurable y la longitud de su sombra en el mismo momento de día" (Kirk/Raven 1979: 124).

La importancia de la aportación de Tales en la solución de este problema, no es el establecimiento demostrativo de una proposición, sino la construcción de un método y de un sistema de relaciones. Las citas mencionadas refieren dos métodos de construcción basados en la experiencia y en el establecimiento de ciertas relaciones. La diferencia entre estos dos métodos se encuentra en el tipo de relaciones que establecen:

— Relaciones de comparación por igualdad en el primero.
— Relaciones de comparación por proporcionalidad en el segundo.

A. El método por igualdad

De los dos métodos atribuidos a Tales para encontrar la altura de la pirámide, el método por igualdad implica el razonamiento y la metodología más simples. En este tipo de razonamiento es necesario partir de la siguiente proposición: los objetos perpendiculares al suelo, en un momento determinado del día, proyectan una sombra de longitud igual a la altura de dichos objetos. Esta proposición es la expresión de un hecho que puede constatarse por observación.

Formalizada esta proposición queda de la siguiente manera:

$$(A = B) \bullet (C = D)$$

El símbolo • se lee: "y". Esta proposición se lee: A es igual a B y C es igual a D. El significado que tiene es que los objetos A o C, que son perpendiculares al suelo, tienen una altura igual a la longitud de su sombra B o D respectivamente, en determinado momento del día.

A partir de este momento las variables se definen de la siguiente manera:

A, Objeto perpendicular al suelo directamente accesible de ser medido.
B, Sombra del objeto A proyectada en el suelo.
C, Objeto perpendicular al suelo directamente innaccesible de ser medido.
D, Sombra del objeto C proyectada en el suelo.

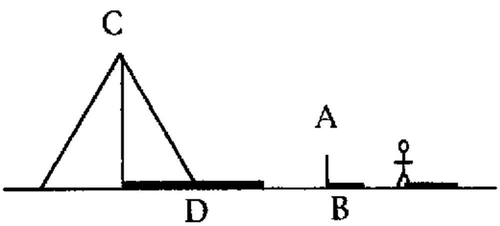


figura 4

A partir de esta proposición Tales de Mileto elaboró una metodología o estrategia para encontrar una solución a este problema: Parto de que se conoce la altura de una vara perpendicular al suelo. Se espera a que la longitud de su sombra sea igual a la altura de la vara, en ese momento sabemos que la longitud de la sombra de la pirámide es igual a la altura de la pirámide. Se mide la longitud de la sombra de la pirámide. Al añadir a la sombra la distancia del perímetro de la pirámide a su centro se conoce la altura de la pirámide.

Por lo tanto son muchos los elementos que intervienen en la construcción de esta metodología o estrategia:

1) Se establece una proposición por observación:

$$(A = B) \bullet (C = D)$$

2) Se determina la altura de una vara (se mide un objeto accesible).

3) Se espera a que se dé una condición determinada (a saber que la altura de los objetos perpendiculares al suelo sean iguales a sus sombras, cosa que se puede determinar a partir de A = B).

4) Se mide la longitud de la sombra de la pirámide (se mide una sombra accesible) en el momento que A = B. Dadas las

condiciones volumétricas de la pirámide, será necesario hacer un ajuste, añadiendo a la sombra proyectada por la pirámide la distancia del perímetro al centro siguiendo la dirección de la sombra.

5) A partir de las observaciones hechas, de la proposiciones establecidas y de las condiciones determinadas en las que se han realizado las medidas, se puede tener la seguridad de conocer la altura correcta de la pirámide, que es una altura directamente inaccesible. Al establecer las relaciones necesarias entre los elementos citados arriba.

6) Se conoce la altura de la pirámide.

Si se formaliza toda la estrategia de solución, queda de la siguiente manera:

Proposición formalizada:		Se establece por:
P1:	$(A = B) \bullet (C = D)$	Observación
P2:	A	Medición directa
P3:	$(A = B)$	Esperar a que se de esta condición
P4:	$(A = B) \bullet D$	Medición directa durante la condición P3
P5:	$[(A = B) \bullet (D)] \supset C$	Establecer relaciones entre P1 y P5
Cl:	C	P4 y P5 Modus Ponendo Ponens[7]

[7] P1, P2, P3, etc., son las proposiciones que se utilizan en el razonamiento.

El símbolo $\supset$: se lee: "si...entonces", y representa una operación lógica llamada condicional o implicación. A la parte que está antes del símbolo $\supset$ se le llama antecedente y a la parte que está después del símbolo $\supset$ se le conoce como consecuente. Esta operación lógica quiere decir que el consecuente está subordinado o depende de que se dé el antecedente, es decir que el consecuente está incluido en el antecedente. Se establece así, que si se da el antecedente entonces el consecuente ocurre.

La proposición P1 quiere decir que hay un momento del día en que la altura del objeto A es igual a la longitud de la sombra B y que la altura del objeto C es igual a la longitud de su sombra D.

P2 significa que se conoce la altura del objeto A por medición directa.

P3 significa que conociendo la altura A puede determinarse el momento en el que la altura del objeto A es igual a la longitud de la sombra B.

P4 significa que se determina la longitud de la sombra D en el momento en que A = B.

P5 significa que a partir de relacionar P1 y P4 puede conocerse la altura del objeto C.

Cl significa que se obtuvo la altura del objeto C y la conclusión del razonamiento.

Modus Ponendo Ponens es una ley lógica que permite obtener el consecuente del condicional (en este caso la altura de C), si se da el antecedente (en este caso: $[(A = B) \bullet D]$).

El análisis anterior permite ver, con mayor claridad, la importancia que tienen las relaciones de igualdad en la conformación del razonamiento matemático y en su aplicación al mundo físico.

Además, como hemos visto, el proceso matemático en este momento histórico o en alguna etapa de su desarrollo individual, no es un conocimiento exclusivamente conceptual o intelectual, sino que hay otros tipos de conocimiento que también intervienen: las sensaciones, la percepción, la experiencia, la observación, el establecimiento de relaciones, la acción directa sobre los objetos, la experimentación, la comparación, etctétera. La disciplina matemática no es un puro ejercicio intelectual, necesita también el desarrollo paralelo de otras habilidades y de la práctica o interacción con el mundo físico. Para transmitir un conocimiento firme y fundamentado, es necesario complementar la transmisión del conocimiento matemático por explicación verbal, con otros tipos de conocimiento como el empírico, realizando algunas actividades interactivas con el mundo físico.

En el análisis que he hecho, hay un razonamiento geométrico en estrecha relación con la realidad material. Se establecen proposiciones a partir de la observación y la constatación empírica, se realizan mediciones directas, se establecen proposiciones que se cumplen en determinadas condiciones, relaciones entre los elementos que conforman el problema para dar una solución, se conocen y se aplican ciertas leyes lógicas básicas para guiar y darle forma al pensamiento, etcétera. Ésta es la construcción de un sistema metodológico que no se encuentra exclusivamente en el ámbito de la demostración.

A partir de la solución de este problema, Tales hace un descubrimiento extraordinario, que marcará el desarrollo posterior de la ciencia: por medio de las relaciones geométricas y su aplicación al mundo físico, se puede desarrollar una metodología que permite trascender algunas limitaciones circunstanciales y materiales, que posibilitan conocer con certeza lo inmediatamente inaccesible y definir lo que antes parecía indeterminable.

Estos son algunos de los logros que pueden atribuirse a Tales de Mileto, más allá de las aportaciones demostrativas y de las proposiciones que se le atribuyen. Estas implicaciones metodológicas, constructivas, de relaciones y definición de conceptos, permiten comprender mejor, el por qué Tales de Mileto es considerado el primer matemático griego y precursor de la ciencia occidental, más que por una aportación exclusivamene demostrativa.

B. El método por proporcionalidad

De los dos métodos que estudiamos ahora, el de proporcionalidad implica el razonamiento más complejo. En este caso, se manejan proposiciones más generales, conceptos, relaciones, metodologías y formas de razonamiento de mayor dificultad. La base del razonamiento es "[...] que la *relación* de la altura de una pirámide a la longitud de su sombra *es exactamente la misma* que la existente entre la altura de cualquier objeto vertical mensurable y la longitud de su sombra en el mismo momento de día" (Kirk y Raven 1979: 124). En este tipo de razonamiento se identifican dos características que lo distinguen del razonamiento por igualdad:

Se amplían las posibilidades de relación entre el objeto A y su sombra B, ya que no se establece exclusivamente la relación de igualdad como en el caso anterior, sino que la relación puede ser también mayor o menor.

La característica principal del razonamiento por proporcionalidad es el establecimiento de *la igualdad de relaciones,* por ejemplo: si el objeto A es el doble de su sombra B, entonces también la relación entre el objeto C es el doble de su sombra D. Tales de Mileto pudo establecer este tipo de relaciones a partir del estudio de casos concretos, y de la ampliación del planteamiento por igualdad:

A es igual a B $\supset$ D es igual a C
A es el doble de B $\supset$ C es el doble de D
A es la mitad de B $\supset$ C es la mitad de D
A es la mitad de B $\supset$ D es el doble de C
A es el doble de B $\supset$ D es la mitad de C
A es la tercera parte de B $\supset$ D es el triple de C

En el primer grupo (los tres primeros condicionales) se establecen relaciones directamente proporcionales, en el segundo grupo (los tres últimos condicionales), relaciones un poco más complejas, relaciones inversamente proporcionales, que si bien más difíciles de establecer, tienen una relación directa con la solución del problema tratado.

Es a partir de la observación y comparación de casos concretos que se puede enunciar una proposición general que abarque estos casos particualares.

Por otra parte, es importante advertir que los egipcios, dado su sistema económico-político-social, desarrollaron técnicas de repartimientos proporcionales a partir de números fraccionarios. Así, las proporciones desempeñaron un papel esencial en la aritmética egipcia, como puede verse en los ejemplos del *Papiro Rhind* (Taton 1971: 41-42). Lo anterior, hace probable que Tales conociera y aplicara técnicas proporcionales, por medio de números fraccionarios y esto hace viable también el que Tales de Mileto hubiera solucionado el problema de la altura de la pirámide por medio de relaciones proporcionales.

La estructura lógica de las relaciones directamente proporcionales es la siguiente:

A es a B como C es a D
A se relaciona con B *de la misma manera que* C se relaciona con D

La palabra "como", del ejemplo anterior, denota idea de equivalencia, semejanza o igualdad (Cardona 1997: 267).

Así:

A se relaciona con B *igual* que C se relaciona con D.

Ejemplifico: la misma relación que hay entre A y B es la que hay entre C y D: el doble, la mitad, etcétera.

4 es el doble de 2 así como 16 es el doble de 8
(4 R 2) = (16 R 8)

R, para este caso concreto significa: "es el doble de". Pero de una manera general se lee: "se relaciona con". Leyéndose la proposición formalizada de la siguiente manera:

4 "se relaciona con" 2 así como 16 "se relaciona con" 8

Lo característico de la proporcionalidad es la igualdad entre las relaciones

$$R = R$$

La relación es la misma en los dos casos, la relación se mantiene aunque los valores de los términos varíen. Este tipo de relaciones pueden expresarse por medio de números fraccionarios, y como la relación es la misma, los números fraccionarios serán equivalentes. La relación que se puede establecer entre dos o más cantidades (en este caso alturas o tamaños) es por comparación. La proporción es entonces la igualdad de relaciones al hacer varias comparaciones.

En matemáticas pueden establecerse comparaciones a partir de dos técnicas:[8]

Tomar una unidad de medida, y medir las dos longitudes y responder en unidades a las siguientes preguntas: ¿qué tanto es mayor E respecto a F? o ¿qué tanto es menor F respecto de E? Esta técnica se conoce como resta. Por ejemplo, si tomamos la unidad de medida centímetro, y se mide la longitud E con un valor de 8 centímetros, y se mide la longitud F con un valor de 5 centímetros, al comparar las dos cantidades se observa que la longitud E excede en 3 centímetros a la longitud F.

Tomar la cantidad menor como unidad y determinar ¿cuántas veces contiene E a F?, ¿cuántas veces cabe F en E? Esta técnica se conoce como división. Por ejemplo, si se toma como unidad la longitud F, que mide 3 centímetros y se compara como unidad con la longitud E que mide 9 centímetros, ocurre que F cabe tres veces en la longitud E. En síntesis, las comparaciones en matemáticas se pueden establecer a partir de restas o de divisiones.

La proporción no es otra cosa que una igualdad de relaciones al haber

[8] A partir de este momento las variables significan lo siguiente: E, cantidad mayor. F, cantidad menor.

varias comparaciones, por lo que las proporciones pueden expresarse de la siguiente manera:

$$E - F = G - H$$

$$E/F = G/H$$

En donde G, significa una cantidad mayor respecto de H, y H, una cantidad menor respecto de G. A la primera relación se le llama proporción aritmética o equidiferencia, a la segunda se le llama proporción geométrica o equicociente. Un ejemplo de equidiferencia o proporción aritmética es:

$$18 - 3 = 19 - 4$$
$$15 = 15$$

Un ejemplo de equicociente o proporción geométrica es:

$$4/2 = 8/4$$
$$2 = 2$$

Establecer comparaciones por medio de proporciones aritméticas, esto es, determinar en cuánto excede una cantidad a otra, conduce a trabajar con unidades de medida, que pueden ser expresadas con números enteros y trabajar así con cantidades discretas.

Por otra parte, establecer comparaciones por medio de proporciones geométricas; es decir, determinar cuantas veces contiene una cantidad a otra, lleva a trabajar con la cantidad menor como unidad respecto de la cantidad mayor y a calcular los restos como números fraccionarios. Volviendo a la solución de proporcionalidad atribuida a Tales, puede formalizarse este método o razonamiento de la siguiente manera:

Caso 1

P1: $(A >=< B) \supset (A\,R\,B)$
P2: $(A\,R\,B) \supset (C\,R\,D)$
P3 $(A\,R\,B) \supset (D\,1/R\,C)$
P4: $[(C\,R\,D) \bullet D] \supset C$
P5: $[(D\,1/R\,C) \bullet D] \supset C$

---

(1)	$(A\,R\,B)$	Por comparación entre A y B
(2)	D	Por medición directa

---

(3)	$(C\,R\,D)$	De (1) y P2 Modus Ponendo Ponens
(4)	$(C\,R\,D) \bullet D$	De (2) y (3) Conjunción de elementos
(5)	C	De (4) y P4 Modus Ponendo Ponens
		Q.E.D.

Caso 2

P1: $(A >=< B) \supset (A\,R\,B)$
P2: $(A\,R\,B) \supset (C\,R\,D)$
P3 $(A\,R\,B) \supset (D\,1/R\,C)$
P4: $[(C\,R\,D) \bullet D] \supset C$
P5: $[(D\,1/R\,C) \bullet D] \supset C$

---

(1)	$(A\,R\,B)$	Por comparación entre A y B
(2)	D	Por medición directa

(3b)	$(D\,1/R\,C)$	De (1) y P3 Modus Ponendo Ponens
(4b)	$(D\,1/R\,C) \bullet D$	De (2) y (3b) Conjunción de elementos
(5b)	C	De (4b) y (P5) Modus Ponendo Ponens
		Q.E.D.

En otras palabras, si el objeto A es mayor, igual o menor que la sombra B entonces se establece la relación R (que puede ser por ejemplo: el doble, la mitad, la tercera parte, etcétera) (P1).

Si el objeto A y la sombra B tienen la relación R entonces el objeto C y la sombra D también tendrán la relación R, porque el razonamiento está construido con base en la igualdad de relaciones (P2).

La relación R se puede considerar a partir de cualquiera de los objetos o de sus sombras, así tenemos

A	R	B
B	1/R	A
C	R	D
D	1/R	C

Por ejemplo si A es el doble de B, entonces B es la mitad de A, y si C es el soble de D, entonces D es la mitad de C. Así en general, si A > B, entonces B < A.

Si la relación R es la misma entre A y B que entre C y D entonces la relación a partir de B o de C será inversa (1/R) a la planteada desde A o C.

Una de las combinatorias posibles es que si el objeto A y la sombra B se relacionan como R, entonces la sombra D y el objeto C se relacionan a la inversa de la original, es decir 1/R: por ejemplo, si el objeto A es el doble de la sombra B entonces la sombra D será la mitad del objeto C, que es lo que se exprena en P3.

Si se conoce la relación R entre el objeto C y la sombra D, y se sabe el tamaño de la sombra D, entonces se conocerá el tamaño del objeto C (P4).

lo mismo sucede (conocer el tamaño del objeto C), si se conoce la relación inversa entre la sombra D y el objeto C, además del tamaño de la sombra D (P5).

Se establece la relación R entre A y B por comparación y medición directa (1).

Se determina el tamaño de D, por medición directa (2).

A partir de este punto se tienen dos caminos para determinar C:

El primero (caso1) las proposiciones 3, 4 y 5; el segundo (caso 2) las proposiciones 3b, 4b y 5b.

Primer caso: se obtiene 3 a partir de 1 y P2, por el principio de que si se tiene el incluyente se tiene lo incluido (Modus Ponendo Ponens). Si se conoce cuál es la relación entre A y B, entonces se sabe cuál es la relación entre C y D, porque la relación (R) es la misma.

4 lo obtengo de 2 y 3, a partir del principio de que si se tienen dos cosas separadas pueden juntarse (conjunción de elementos). Si se conoce por por una parte cuál es la relación (R) entre C y D, y se sabe por otra cuánto mide D, es claro que se saben las dos cosas, y las puedo conjuntar.

5 se obtiene a partir de 4 y P4, a partir del principio de que si se cuenta con el incluyente se tiene lo incluido (Modus Ponendo Ponens). Si se sabe cuál es la relación entre C y D, y cuánto mide D, entonces se conoce cuánto mide C. El segundo caso: sigue la misma mecánica que el primero, solamente que en vez de tomar la relación directa entre C y D, se toma la relación inversa entre D y C. Y esto queda demostrado para cualquier tipo de relación de tamaño entre A•B y C•D, ya sea mayor, igual o menor, siempre y cuando exista una igualdad de relación.

El método y razonamiento proporcional es una de las muchas formas de pensamiento matemático en el cual interviene la igualdad entre relaciones, al comparar cantidades ya sea a partir de la resta o de la división. Algo importante, es que Tales de Mileto mantiene una estrecha relación entre el planteamiento matemático y el mundo físico. Es muy importante saber el contexto en el que surge el conocimiento, para vincular la expresión simbólica con su significado original, y así poder comprender mejor el desarrollo de la relación entre conocimientos matemáticos y el mundo físico.

2. Determinar la distancia de la costa a un barco en el mar

Existe un fragmento en el que se atribuye a Tales el haber determinado la distancia de la costa a un barco en el mar, Proclo, DK 11 A 21:

> Eudemo atribuye este teorema a Tales [que los triángulos que tienen un lado y sus ángulos adyacentes iguales son iguales entre sí] en la historia de la geometría; pues dice

> que es necesario que lo utilizara para la explicitación del método mediante el que dicen que demostró la distancia de las naves en el mar (Kirk y Raven 1979: 124).

Según sir James Jeans, Proclo [siguiendo a Eudemo] atribuye el teorema de proporcionalidad a Tales, porque su método para determinar las distancias de los navíos en el mar lo implicaba, y dice que esta proposición es más general que la de igualdad (Jeans 1953: 33). Como sir James no presenta la cita precisa, no se sabe con precisión si se está refiriendo al mismo fragmento citado arriba o no. Pero si se refiere a éste, es evidente que no se trata del *teorema* de proporcionalidad o semejanza entre dos triángulos sino de una *proposición* que establece la igualdad entre dos triángulos.

Al igual que en el caso de la determinación de la altura de la pirámide, Tales pudo haber solucionado el problema por cualquiera de los dos caminos, pero resulta bastante claro, que en este caso y a partir del fragmento a la mano, Tales resolvió el problema por igualdad. Aunque hay cierta tendencia a atribuirle la resolución por semejanza (Kirk y Raven 1979: 124).

Es un hecho que Tales para resolver el problema de la distancia del barco a la costa, conocía cuando menos la *proposición* de la igualdad de los triángulos. Tales de Mileto seguramente lo usó para resolver el problema, lo que se desconoce es de qué manera conocía este *teorema:* pudo haber tenido noticia de él por tradición o pudo haber elaborado una serie de relaciones que lo llevarán a establecer y enunciar dicho *teorema.* En el caso de que Tales no conociera por tradición este *teorema,* es decir, en el caso de que lo haya elaborado él mismo, cuando menos existen dos caminos posibles por los cuales Tales pudo haber establecido este *teorema,* y en esos casos el *teorema* sería:

— La expresión de un hecho corroborado empíricamente (proposición)
— La expresión de un método de construcción

— Como la expresión de un hecho corroborado empíricamente. La corroboración empírica de esta proposición puede realizarse a partir de dos diagonales en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

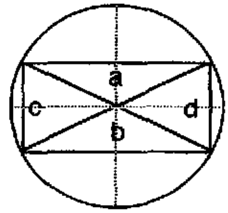


figura 5

A partir de la figura 5, se observa que los dos triángulos con las bases más largas (a, b) son iguales entre sí y que los triángulos con las bases más cortas (c, d) también son iguales entre sí. Los cuatro triángulos son isósceles, pues sus lados iguales son el radio del círculo. Además las bases largas son iguales entre sí y que las bases cortas son iguales entre sí. Bastaría doblar la figura por uno de los diámetros del círculo (punteados), para comprobar que las figuras son simétricas (esta metodología también se le atribuye a Tales de Mileto cuando trata sobre la bisección de la circunferencia por su diámetro).

Otra corroboración empírica de este teorema se establece a partir de la construcción de un triángulo inscrito en una circunferencia, cuya base se encuentre en uno de los diámetros del círculo, y a partir de los dos ángulos adyacentes a la base se construye un triángulo simétrico y se corrobora que son iguales: basta con doblar el círculo sobre el diámetro para corroborar que las dos figuras son iguales.

Al colocar los triángulos de manera que sus bases iguales hagan un lado común en el diámetro del círculo, quedan las figuras 6 A y 6 B:

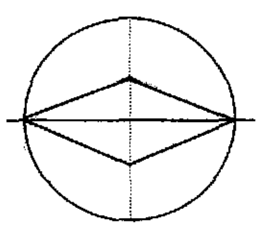


figura 6 A

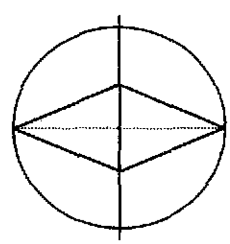


figura 6 B

— Como la expresión de un método de construcción. Partiendo de que Tales conociera esta proposición y lo hubiera aplicado para resolver el problema de la distancia de las naves en el mar, esto no implicaría su demostración compleja, y como en casos anteriores optaré por la demostración más sencilla que implica métodos semi-intuitivos.

Sotero Prieto propone un método de construcción sencillo y de resolución práctica:

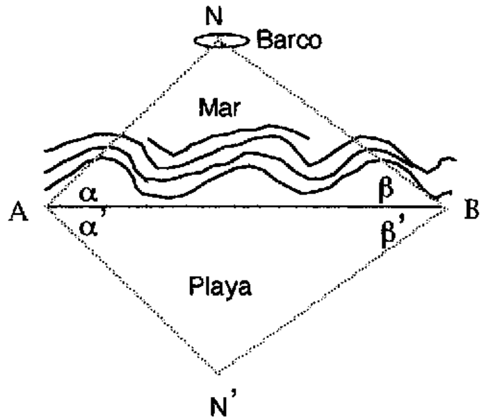


figura 7

Se determina una distancia paralela a la orilla de la playa (segmento AB), se determinan los ángulos α y β que se forman entre la distancia AB y el barco, desde los puntos A y B (por medio de un medidor de ángulos rudimentario), se reproduce en la playa un triángulo igual al que forma el barco con la base (véase figura 7). Para resolver este problema es necesario conocer la proposición: los triángulos que tienen un lado y sus ángulos adyacentes iguales son iguales entre sí.

Ya señalé que lo interesante de este teorema no es la forma en que Tales pudo haber establecido su demostración, pues contaba con elementos suficientes para realizarla, sino las implicaciones que tiene esta proposición en el campo constructivo o metodológico. La proposición dice que dos triángulos son iguales, si uno de sus lados y los ángulos adyacentes son iguales. Y así Tales está estableciendo las condiciones mínimas necesarias para que un triángulo sea igual a otro. Es muy probable que Tales no tuviera la intención de establecer las condiciones mínimas necesarias, ya que el caso enunciado probablemente por Tales, es uno de los tres que existen (véase anexo 4).

No se sabe si de hecho Tales enunció esta proposición, ni de que manera, pero en caso de haberlo hecho, la afirmación fue hecha, con mayor probabilidad, como resultado de una observación empírica o de un método de construcción para resolver este problema, más que como un resultado de una demostración que utilizara una rigurosa lógica formal.

CONCLUSIONES

Tales resuelve problemas que tratan sobre la determinación de distancias o tamaños directamente inaccesibles. Con la aplicación de las relaciones geométricas al mundo físico, Tales desarrolla paulatinamente una metodología que permite trascender algunas limitaciones materiales y potencializa la capacidad del ser humano para conocer con certeza lo que anteriormente era inaccesible de una manera inmediata y empírica, su método permite también definir lo que antes parecía indeterminable. Estas dos nuevas capacidades: la definición y el conocimiento mediato que permite certeza, influirán de una manera determinante el pensamiento, la ciencia y la cultura griegas de la Antigüedad.

Los problemas propuestos y las proposiciones enunciadas mantienen un estrecho vínculo con las técnicas de la igualdad de figuras o cantidades (simetría, razones), o con la técnica de la igualdad de relaciones (proporcionalidad).

Todas las proposiciones atribuidas a Tales de Mileto pueden ser corroboradas empíricamente a partir de los principios de simetría, equidistancia, o el uso constructivo del círculo o del semicírculo, a partir de las siguientes técnicas: aplicación de un eje de simetría a la figura, o la inscripción de la figura en un círculo, o ambas, en cuyo caso el eje de simetría coincide con el diámetro del círculo. El hecho de que todas las proposiciones atribuidas a Tales puedan ser corroboradas empíricamente por estos métodos, permite afirmar, que sus aportaciones geométricas no necesariamente son demostrativas o producto de una demostración rigurosa.

El sistema de la división de la magnitud tiene varios supuestos: la exactitud de la división, el establecimiento de la unidad de medida a partir de la subdivisión por partes alícuotas (partes iguales), el establecimiento de números enteros y de números fraccionarios, que permitan expresar con exactitud las magnitudes sin dejar restos.

Además de la solución de problemas o la constatación de proposiciones por métodos de igualdad, es muy probable que Tales pusiera las bases para resolver problemas por medio de métodos proporcionales.

Tales inicia una tendencia a relacionar el conocimiento matemático con el mundo físico, cuyos buenos resultados explicativos y prácticos se convertirán muy pronto en un paradigma aplicado por Anaximandro, Pitágoras y la Escuela Pitagórica, dando lugar al desarrollo de las matemáticas y de las ciencias físico-matemáticas.

A partir de éste análisis se hace evidente que los inicios de la geometría están relacionados con métodos constructivos y semi-intuitivos, más apegados a los procesos cognocitivos sensibles y predemostrativos, que ayudan al primer desarrollo de las ciencias matemáticas y físico-matemáticas, y que ponen la base para el posterior desarrollo del método demostrativo riguroso.

La bisección del círculo, más que como una aportación demostrativa, se considera como una definición o una herramienta de construcción geométrica. Dentro de este contexto, Tales pudo haber aportado el neologismo *diametro.*

La elaboración del pensamiento matemático no es exclusivamente mental, pues en él intervienen muchos otros tipos de conocimientos: sensorial, perceptivo, memorístico, etcétera. También intervienen en él muchas actividades como la de comparar, medir, contar, etcétera. A partir de las matemáticas altamente desarrolladas se ha sostenido en ocasiones, que el pensamiento matemático es exclusivamente racional y demostrativo, si bien esto es cierto para las matemáticas con un alto grado de desarrollo, históricamente no siempre fue así, ni tiene por que enseñarse de esta manera. Como hemos visto, parece que existen otros caminos más adecuados para iniciar el aprendizaje de las matemáticas que el método demostrativo. Lo que hemos estudiado hasta ahora nos ha ayudado a reencontrar caminos no demostrativos o previos a la demostración, que se encuentran en el nivel del descubrimiento o heurístico.

Para el estudio de las matemáticas y para el desarrollo del pensamiento matemático, es necesario contextualizar las operaciones, actividades, metodologías, estrategias, técnicas y simbología en problemas concretos, que son los únicos que darán un sentido y significado al pensamiento matemático.

Finalmente, he estudiado los primeros acercamientos sistemáticos en el desarrollo de la geometría, aritmética y su aplicación al mundo físico. Las grandes aportaciones: la definición geométrica, la certeza que brinda el método de conocimiento mediato. Las técnicas de construcción geométrica, como la bisección del círculo, la simetría de las figuras, la igualdad de las figuras, el diámetro y el metrón (radio) como herramientas geométricas para la verificación de igualdades, etcétera Los métodos de comparación como la resta, la división, los métodos por igualdad aritmética o por igualdad de relaciones, como las razones y las proporciones. Todas estas aportaciones van a contribuir en el sólido desarrollo de la geometría y de la aplicación de la geometría y la aritmética al mundo físico. Estos sistemas se construyen sobre conceptos que poco a poco se dan por presupuestos, como la unidad, parte alícuota, resta o división exacta, sistemas de números enteros y fraccionarios, que van creando paradigmas exitosos y cada vez más confiables. Y todos estos elementos se conservan y se desarrollan en la primera Escuela Pitagórica, aportando nuevos elementos y nuevas relaciones que aumentan la fuerza y los alcances de estos paradigmas. Hasta que la intuición de la inconmensurabilidad y su posterior demostración cimbran desde sus cimientos a la cienca matemática, a las ciencias físico-matemáticas y a todo el sistema de principios, relaciones y proposiciones, tenidas por ciertas hasta entonces. Paso ahora, a estudiar en el siguiente capítulo, las aportaciones, descubrimientos y reveses de la primera Escuela Pitagórica.

CAPÍTULO SEGUNDO
DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PITAGÓRICA

En este capítulo se tratará de la escuela pitagórica y sus aportaciones a la relación entre matemáticas y mundo físico.

En un primer momento analizaré las relaciones entre aritmética y geometría y los conceptos pitagóricos que sustentan estas relaciones (número, extensión, unidad, gnomon, etcétera). Después explicaré las relaciones entre aritmo-geometría y el mundo físico creadas por esta escuela.

En seguida estudiaré un caso muy especial e importante en las relaciones entre las matemáticas y el mundo físico: el inicio y desarrollo de la ciencia de la armonía, ésta es la aplicación de la aritmo-geometría a la altura del sonido, desde un punto de vista acústico; existen dos conceptos importantes que sustentan esta relación: el de razón y el de proporción.

A continuación estudiaré el problema de la inconmensurabilidad, que tuvo como consecuencia la separación y desarrollo independiente de la aritmética y la geometría.

Para concluir el capítulo expondré una síntesis del desarrollo de las ciencias mixtas (o físico-matemáticas) hasta el tiempo de Aristóteles. Si bien el problema de la inconmensurabilidad provoca la separación y desarrollo independiente de la aritmética y la geometría, parece no haber afectado de la misma manera el interés por seguir estableciendo relaciones entre las matemáticas y el mundo físico, pues este tipo de ciencias aparecieron de una manera paulatina y sistemática, antes, durante y después del tiempo de Aristóteles.

Los objetivos básicos de este capítulo son :

Mostrar el proceso sistemático y continuado de relación entre aritmética y geometría.

Señalar el proceso sistemático y continuado de relación entre matemáticas y el mundo físico.

Explicar de qué manera establecieron los pitagóricos las relaciones entre matemáticas y el mundo físico y cuales fueron los principales conceptos, leyes, técnicas, métodos, etcétera, para desarrollar estas relaciones.

Indicar el proceso de separación entre aritmética y geometría a partir de la inconmensurabilidad. Y el desarrollo de este proceso.

Finalmente, aunque el problema de la inconmensurabilidad tiene como consecuencia la separación y desarrollo independiente de la aritmética y geometría, existen intentos posteriores de desarrollo de ciencias mixtas que relacionan las matemáticas con el mundo físico.

I. LA ARITMOGEOMETRÍA, UNA APORTACIÓN PITAGÓRICA

Desde los primeros planteamientos y desarrollos de la ciencia griega de los que se tiene noticia, se manifiesta claramente una tendencia por relacionar las diferentes ciencias matemáticas entre sí, y las ciencias matemáticas con el mundo físico.

Una de las primeras relaciones que se establecen entre las ciencias matemáticas y el mundo físico es a partir de la técnica de contar, en la que se asignan números a las cosas, se realizan operaciones de cálculo que después se corroboran con las cosas contadas. A estas técnicas de cálculo se le conoce como *aritmética,* Platón en cambio las llama *logística* (Taton 1971: 248). Los griegos reservaron el término *aritmética* para el estudio de los números que inició con Pitágoras, y que se conoce como *teoría de los números.* Por otra parte, y de manera simultánea, la geometría se relaciona con el mundo físico a partir de la medida, ya sea para determinar la distancia o el tamaño. Es claro que muchas de las técnicas necesarias para establecer las relaciones antes mencionadas, se localizan en las aportaciones hechas por Tales de Mileto. La relación entre la aritmética (como teoría de los números) y la geometría, es un poco posterior y se debe a la escuela pitagórica, se establece a partir de operaciones, técnicas y conceptos como *número, medida, unidad* o *figura.*

Los griegos incluyeron como parte de su educación superior las denominadas *mathemata*, [9] enseñanzas o estudios de origen pitagórico (s. VI a. C.): *aritmética, geometría, armonía* y *astronomía* (Jaeger 1978: 289) los sofistas (s. V a. C.) por su parte contribuyen con la primera elaboración y desarrollo de ciencias formales como *gramática, dialéctica* y *retórica* (Jaeger 1978: 287).

Aristóteles consideraba a *los llamados pitagóricos* como los fundadores de un nuevo tipo de ciencia que a diferencia de la *metereología* de los jonios, llamaron *mathemata*, es decir, *los estudios*. Bajo este nombre general se agrupaban: la doctrina de los números, los elementos de la geometría, los primeros fundamentos de la acústica, la doctrina de la música, el conocimiento de los tiempos de los movimientos de las estrellas. De estos conocimientos se puede atribuir a Pitágoras el conocimiento de la filosofía natural milesia (Jaeger 1978: 160-161). La aritmética y la geometría se planteaban como estudios puros: la aritmética se ocupaba de las relaciones entre los números, la geometría de las relaciones entre las figuras. La acústica y la astronomía eran estudios aplicados a la realidad física, a la realidad en movimiento. La acústica era la aplicación de la aritmética a la altura del sonido (la cuerda en movimiento), y la astronomía la aplicación de la geometría a los fenómenos celestes (los cuerpos celestes en movimiento).

Por otra parte, las ciencias formales que aportaron los sofistas, se referían al aspecto metodológico, a la transmisión de conocimientos o pensamientos. La gramática estudiaba la estructura del lenguaje, la lógica la estructura formal de los pensamientos y la retórica la eficaz transmisión oral del pensamiento.

---

[9] *Mathēma, atos:* ciencia; enseñanza; estudio. *Mathēmatikos:* tocante a la ciencia; matemático. *Mathēsis:* aprendizaje; deseo de aprender; conocimiento; ciencia (García Hughes 1956: 392-393).

II. EL NUMERO DESDE UN PUNTO DE VISTA PITAGORICO

1. Sistemas de numeración

Los griegos utilizaron muchos sistemas de numeración; entre los más usados destacan dos: el sistema *ático* o *herodiano,* que puede encontrarse con frecuencia en las inscripciones atenienses, y cuyo origen aproximado se fecha en el siglo VI a. C. y el sistema *jónico* o *alfabético* que se empleó desde el siglo V a. C., y sustituyó al sistema ático hacia el siglo III a. C. Estos dos sistemas numéricos son aditivos de base diez. El sistema ático es muy parecido al sistema romano actual. El sistema jónico representa los números a partir de las letras del alfabeto añadiendo signos como - o ' para indicar que se trata de números y no de letras (Collette 2000: 68-70).

En el sistema ático la unidad se representaba por la letra *iota* y los números base correspondían a las iniciales Π, Δ, H, X, y M de las palabras griegas cinco, diez, cien, mil y diez mil. Los números intermedios se escribían por combinaciones de estos signos fundamentales. Las letras griegas utilizadas eran las siguientes: I, inicial de la *iota*, para el número 1; Π, de *pente*, 5; Δ, de *deka*, 10; H, de *hécaton*, 100; X, de *jilioi*, 1000; M, de *myrioi*, 10 000. (Bowen 1990: 126-127).

En el sistema jónico se utilizaban las 24 letras de su alfabeto, más tres símbolos arcaicos para poder representar tres grupos de nueve signos que permitían representar las unidades, las decenas y las centenas (Collette 2000: 69 ; Bowen 1990: 126-127).

Los pitagóricos seguramente conocieron y utilizaron estos sistemas de numeración, pero debido a su particular forma de concebir y estudiar al número, idearon un sistema numérico que les permitera expresar las leyes y algoritmos descubiertos por ellos. Este sistema se conoce como números figurados, mismo que analizaré más adelante después de estudiar el concepto pitagórico de número.

2. El concepto griego de número: *arithmos*

"El sentido cotidiano de *arithmos* está estrechamente ligado con el acto de contar y por ello siempre dirige su atención a las cosas contadas" (Aristóteles 2001: XXIV). En sus inicios no se piensa el número en general o por sí mismo, es decir sin referencia a las cosas sensibles. "*Arithmos* siempre está vinculado con una multitud perceptible de algo, sean piedras, caballos, hombres o cualquier otra cosa. Por consiguiente siempre es "5-piedras" o 4-caballos". De ahí que la definición de número siempre refiere a una multitud de unidades" (Aristóteles 2001: XXIV). Euclides define al número, en el libro VII de sus *Elementos,* como *la multitud compuesta de unidades,* a la unidad la define en el mismo lugar como *aquello en virtud de lo cual se llama una a cada una de las cosas* (Aristóteles 2001: XXIV; Euclides 1994: 111-112).

Así, en un primer momento, el número es resultado de la presencia de la multitud de unidades. El número no tiene existencia separada de la multitud, sino que está en ella. El número no es pensado como algo general, sino que está en relación estrecha con las cosas concretas.

Durante el tiempo que va de estos primeros momentos de concebir y reflexionar sobre el número hasta los tiempos de Aristóteles, hay un claro proceso de abstracción y generalización, pues cuando Aristóteles habla de número matemático se refiere a una representación abstracta (*Metafísica,* XIII, 1080b 16 y 30-36. Aristóteles 1994/1998: 522-523).

El número tiene su comienzo en la práctica de calcular. En un principio el que cuenta tiene que ver las cosas que está contando. Pronto la "piedrecilla" o "cálculo" comienza a substituir las cosas contadas, convirtiéndose en "símbolo" de las cosas contadas. El símbolo es producto de una substitución, así se convierte en representación, en indicativo o señal de otra cosa. El símbolo es un substituto que señala otra cosa. Este proceso no concluye en la simbolización de las cantidades. En un paso posterior, la familiaridad del calculista "[...] con las operaciones aritméticas le permite poner la atención en las peculiaridades del número sin atender a su relación con las cosas numeradas. [...] Las propiedades que el calculista descubre las atribuye al número y no a la cosa numerada" (Aristóteles 2001: XXV).

3. El concepto pitagórico de número

De modo general, Platón critica a los pitagóricos "[...] por aferrarse a lo sensorial y no remontarse hasta el pensar puro" (Jaeger 1978: 705; *República*, 531 a y b. Platón 2000: 264).

De manera más específica, Aristóteles aborda el concepto pitagórico de número (*Metafísica*, XIII, 6, 1080b 16. Aristóteles 1994/1998: 522; *Metafísica*, XIII, 8, 1083b 1-23. Aristóteles 1994/1998: 535-536) y sus principales características que son:

Los pitagóricos creen que el número matemático no está separado.
(no conciben que el número sea capaz de existir separadamente).

De números se componen las sustancias sensibles.
(los cuerpos están compuestos de números).

Suponen que las unidades tienen magnitud espacial.
(los pitagóricos suponen que los números tienen magnitud).

Por otra parte, Aecio nos dice que Ecfanto de Siracusa, uno de los pitagóricos, fue el primero en afirmar que las unidades pitagóricas eran corpóreas (Kirk y Raven 1979: 347).

Todas estas características del número pitagórico, llevan a considerar más detenidamente su sistema de números figurados.

4. El sistema pitagórico de números figurados

Diógenes Laercio (VIII 12) dice que Pitágoras estudió en especial *la forma aritmética de la geometría* (Kirk y Raven 1979: 341). Conocida como teoría de los números figurados; esta teoría desempeñó una función importante hasta el siglo XVII (incluyendo a Fermat y Pascal), pero ahora solamente tiene un interés histórico y pedagógico. Ésta permite ver la relación entre las nociones de número y extensión y da testimonio del primer esfuerzo de pensar el número según sus estructuras profundas (Tatón 1971: 248).

Esta técnica de disponer los números en figuras es el primer intento del que se tiene noticia en donde los números se representan gráficamente, relacionando también por primera vez la aritmética y la geometría, a esta técnica se le define como semiaritmética o semigeométrica, y puede llamarse aritmogeometría; esta forma gráfica da lugar a una clasificación de los números:

Lineales, también llamados números primos, como el 7.

Planos, que pueden ser:
Cuadrados, como el 4,
Oblongos o rectangulares, como el 6, y
Triangulares, como el 3.

Sólidos, dispuestos en paralelepípedos, como el número 8, que forma un cubo.

Los números más notables son entre los planos, los cuadrados, y entre los sólidos, los cubos. Gracias a la disposición de los puntos en figuras, los Pitagóricos encontraron muchas propiedades y relaciones constantes, estableciendo leyes o algoritmos que permitían saber o preveer con certeza cuál sería el próximo número con esas características.

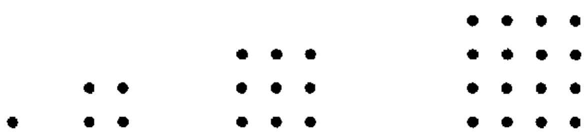
Además, esta disposición en figuras permitía hacer una clasificación tomando en cuenta las propiedades de los números, así se lograba una correspondencia entre ciertas características numéricas y las figuras con las que se representaban, formando conjuntos por propiedades y figura: números triangulares, cuadrados, cúbicos, etcétera.

Los números figurados se construyen a partir de la unidad o de la diada, en cuyo rededor se colocan *gnómones* para construir la figura que representa ese número. El término *gnómon* en un principio se refería al reloj de sol, o a la aguja o escuadra indicadora en los relojes de sol (García Hughes 1956: 149; Pabón 1997: 121), con el tiempo este término se aplicó especialmente en la aritmética pitagórica para denominar las escuadras de puntos que se añadían o sustraían para conformar las figuras cuadradas o rectangulares que representaban en figuras la serie de números que tenían las mismas características, por extensión se aplicó después "para referirse a cualquier número que, añadido a un número figurado, origina el número siguiente de la misma figura" (Kirk y Raven 1979: 343 nota 1). A continuación doy un ejemplo de número cuadrado, triangular y oblongo:

La unidad y la diáda se representan por ∘ , mientras que los gnómones se representan por puntos negros, •.

Estos son algunos ejemplos de números figurados acompañados por sus algoritmos:

NÚMEROS CUADRADOS



1; 1 + 3; 1 + 3 + 5; 1 + 3 + 5 + 7
(se obtienen por la suma de los impares consecutivos)

NÚMEROS TRIANGULARES

1; 1 + 2; 1 + 2 + 3; 1 + 2 + 3 + 4
(se obtienen por la suma de enteros consecutivos)

NÚMEROS HETEROMECOS O RECTANGULARES

2; 2 + 4: 2 + 4 + 6
(se obtienen por la suma de pares consecutivos)

La figura de un heteromeco además de ser la suma de números pares sucesivos, muestra también que es producto de dos números enteros consecutivos; también que es el doble de un triángulo equilátero.

2; 2 x 3: 3 x 4

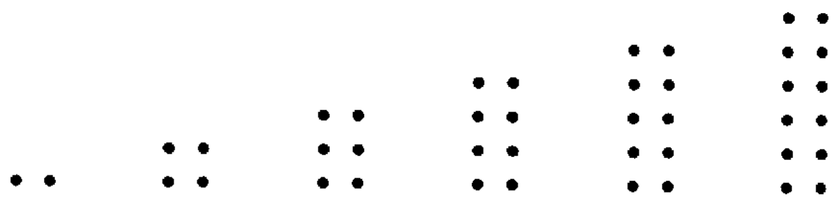
Con respecto a los números cúbicos puede señalarse un resultado que se encuentra ya en Nicómaco: el cubo de 1 es 1; el de 2 es la suma de los dos impares siguientes: 3 + 5; el cubo de 3 es la suma de los tres impares siguientes: 7 + 9 + 11, etcétera.

La aritmogeometría, es una técnica eficaz, intuitiva, en la cual las pruebas de las relaciones numéricas son puramente visuales y fácilmente generalizables (Tatón 1971: 248-250).

Otro ejemplo es cómo los números impares no siguen un patrón de figura definida, mientras que los números pares sí siguen un patrón definido.

NÚMEROS IMPARES

NÚMEROS PARES



En el caso de los números pares una misma estructura puede llevarse hasta el infinito, simplemente con agregar pisos.

Una vez establecida esta relación entre número y figura, es decir entre la aritmética y la geometría a través del punto, los pitagóricos extendieron esta relación al mundo físico.

Ya mencioné que Ecfanto de Siracusa, según Aecio, fue el primero en afirmar que las unidades pitagóricas eran corpóreas (Aecio, I, 3, 19, citado por Kirk y Raven 1979: 347)). Aristóteles por su parte dice: "Mas los pitagóricos, al ver que muchos atributos de los números pertenecían a los cuerpos sensibles, concibieron que las cosas eran números, pero no separados, sino como elementos de los que constan los seres reales" (*Metafísica,* XIV, 3, 1090a 20-29. Aristóteles 1994/1998: 565).

Los pitagóricos relacionaron estas unidades-punto con elementos materiales, estableciendo una relación aritmética-geometría-mundo físico: "Estas unidades-puntos funcionaban también como la base de la materia física: las consideraban, de hecho, como una forma primitiva de átomo. Cuando, en consecuencia, Aristóteles habla del número como *os hylen tois ousi,* "como elemento material para las cosas", o cuando afirma, como lo hace con frecuencia, que los pitagóricos consideraban al universo compuesto de números, quiere significar que los objetos concretos se componían literalmente de agregaciones de unidades-puntos-átomos" (Kirk y Raven 1979: 348).

Las afirmaciones que se atribuyen a los pitagóricos de que el mundo está constituído por números, no debe ser tomada literalmente o como una aseveración simple, sino que más bien indica todo un sistema de relaciones y constituye una aseveración compuesta a partir de estas relaciones. Se puede decir que el mundo está constituído por números a partir de la relación número-punto-átomo (unidad aritmética - punto geométrico - átomo). Algo bastante claro para los griegos antiguos, aún en el tiempo de Aristóteles (*Metafísica,* XIII, 6, 1080b 16. Aristóteles 1994/1998: 522).

En esta etapa del pensamiento, el concepto se encuentra estrechamente ligado a los conceptos de materia-espacio-tiempo. "Hemos de recordar, no obstante, una vez más, que los pensadores griegos tardaron en concebir la existencia de cualquier ser sin una extensión espacial" (Kirk y Raven 1979: 351). El siguiente paso en el proceso de abstracción es la consideración simbólica, el pensamiento abandona la consideración del objeto material para dirigir la atención al símbolo, atribuyendo las características y relaciones encontradas al símbolo y no al objeto. Por último las ideas se conciben como algo que no tiene ubicación espacial. "Parece que fue Platón el primero en pensar, de un modo consciente, en la posibilidad de la existencia de cualquier ser sin la necesidad del espacio y, en esta concepción, le siguió Aristóteles" (Kirk y Raven 1979: 351). En este sentido, las críticas más fuertes tanto de Platón como de Aristóteles respecto al concepto de número pitagórico, se comprenden mejor al entender que se refieren a dos momentos en el proceso de abstracción: el concepto pitagórico ligado a la materia-espacio-tiempo, y el concepto abstracto platónico o aristotélico que postula la existencia del concepto desligada de la materia-espacio-tiempo (*Metafísica,* XII, 7, 1073a 5. Aristóteles 1994/1998: 489; *Timeo,* 52c).

III. LA MÚSICA COMO EL ARTE DE COMBINAR SONIDOS

Presento una caracterización del concepto de música en la grecia antigua:

> La palabra *música* tenía, para los griegos, un significado mucho más amplio que el que tiene para nosotros. Era una forma adjetivada de *musa*, palabra que, en la mitología clásica, designaba a cada una de las nueve diosas hermanas que presidían determinadas artes y ciencias Esta relación verbal sugiere que los griegos pensaban en la música como algo fundamental para las actividades concernientes a la búsqueda de la verdad o de la belleza (Jay 1984: 20).

Los antiguos griegos utilizaron además otro sentido del concepto música, más restringido que el anterior y que coincide con el actual concepto de música: como el arte de combinar los sonidos, que incluye la composición y la ejecución musical.

Además, lograron estructurar un complejo y rico sistema musical a partir de la práctica, la intuición, el desarrollo de la sensación y de la memoria auditivas, la teoría musical directamente relacionada con su práctica, el contacto con tradiciones musicales de otras culturas, el desarrollo de varios sistemas de alturas y dos sistemas de escritura musical. Pitágoras y sus discípulos construyeron la ciencia de la armonía dentro de este contexto y este cúmulo de conocimientos. Así pues, se hace necesario comprender y tener una noción, si bien general, de como estaba constituido el sistema musical griego en tiempos de Pitágoras. Toda teoría presupone un hecho a explicar o un problema a resolver, así para entender cabalmente la teoría pitagórica de la armonía es indispensable adentrarse al mundo de los hechos musicales, y comprender el problema que se plantea resolver, esto permitirá comprender y valorar la importancia de las aportaciones pitagóricas, como el sentido y significado de sus conclusiones.

En resumen los avances musicales respecto al manejo de alturas hasta el tiempo de Pitágoras son los siguientes:

1) La ejecución de la música griega se daba en tres sistemas de alturas: pentáfono (por ejemplo Re-Mi-Sol-La-Do-(Re)) , heptáfono (por ejemplo Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do-(Re)) y por tetracordios (1/2-1-1; 1-1/2-1; 1-1-1/2).

2) Las melodías cantadas tenían una fuerte influencia oriental con cromatismos, microtonalismos melismáticos y glissandos.

3) Se desarrollan dos sistemas de clasificación y sistematización de alturas:

Los *nomos* o *nomoi,* clasificación de melodías en uso, en forma de melotipos o esquemas melódicos (principalmente para voz).

Los *harmoniai*, o estructuras de relaciones constantes entre sonidos fijos. La estructura heptáfona más antigua es la dórica (Mi-Mi), le siguen la frigia (Re-Re) y la lidia (Do-Do) (principalmente para instrumentos).

Dórico:	Mi-Mi	(1-1-1/2) + (1) + (1-1-1/2)
Frigio:	Re-Re	(1-1/2-1) + (1) + (1-1/2-1)
Lidio:	Do-Do	(1/2-1-1) + (1) + (1/2-1-1)

Es importante señalar que las escalas griegas se forman de manera descendente, es decir del agudo hacia el grave, y recordar que el elemento principal del sistema griego de alturas es la cuarta descendente, el tetracordo (cuatro cuerdas), que corresponde a las cuerdas del phormix (Michels, 1982: 177).

4) Existen instrumentos de cuerda con puente (lira, kithara y barbiton).

5) Se ha desarrollado una nomenclatura para las alturas sonoras. Es probable que entre los siglos XI y VIII a. C. comenzara a desarrollarse una nomenclatura de los sonidos a partir del nombre de las cuerdas del phormix o de la kithara de 4 o 5 cuerdas, y que tal nomenclatura se desarrollara para adaptarse al nuevo sistema heptáfono hacia el siglo VII a. C., ya que este sistema heptáfono se concibió con posterioridad como la yuxtaposición o sobreposición de dos tetracordios. Hasta el tiempo de pitágoras, los nombres de las cuerdas y los sonidos que producen son las siguientes:

Nombre de la cuerda en griego:	Traducción:	Altura equivalente:
	Meson	
Hypate (chorde)	la (cuerda) «superior»	Mi4
Parhypate	la «adyacente a la superior»	Fa4
Lichanos	el «índice»	Sol4
Mese (chorde)	la (cuerda) «media»	La4

Nombre de la cuerda en griego:	Traducción:	Altura equivalente:
	Diezeugmenon	
Paramese	la «adyacente a la media»	Si4
Trite	la «tercera» cuerda desde abajo	Do5
Paranete (Paraneate)	la «adyacente a la inferior»	Re5
Nete (chorde) diez, Neate.	la (cuerda) «inferior» o «nueva»	Mi5

(Michels 1982: 175-177; Salazar 1967: 84-85)

Este sistema de clasificar las alturas de sonido se conoce como Sistema Diatónico Téleion. Este sistema es la organización de alturas fijas de sonido más completo al que llegaron los griegos de la Antigüedad, ordenando los sonidos de forma conjunta y gradual por intervalos de tono y de medio tono, sin alteraciones.[10]

El Sistema Diatónico Téleion es producto de un largo proceso histórico y cultural que contempla los siguientes elementos fundamentales:

a) Agregar nuevos sonidos al sistema de alturas.
b) Organizar en un solo sistema las estructuras parciales de alturas en práctica.
c) Dar nombre a cada una de las alturas que conforman el sistema completo.
d) La escritura musical para música vocal y para música instrumental.

[10] El concepto sistema diatónico téleion viene del griego: Sistema, *sy-stema, atos:* conjunto; organización; sistema; acorde (García Hughes 1956: 625). Diatónico, *diatonos:* intenso; la diatónica; atravesado. *dia-:* -entre dos; -entre varios; por todas partes; -del todo; *sin movimiento:* entre; en medio de; *con movimiento:* por entre, por enmedio, a través de; de lado a lado [...] (García Hughes 1956: 163). Diatónico griego *diá:* a través, y *tónos:* tono - Aplícase al sistema músico que procede por dos tonos y un semitono (Corripio 1996 :149) y *téleion, teleo,* terminar(se), cumplir(se); *teleeis,* perfecto, acabado (García Hughes 1956: 637). Así el sistema diatónico téleion es la organización acabada o perfecta de sonidos fijos (este es el sentido de diatónico: a través de las cuerdas de la kithara, aplicado al canto, es decir abandonando los melismas microtonales y cromáticos).

De los dos sistemas de escritura de alturas de sonido, el más antiguo es el instrumental (muy probablemente en sistema ático, siglo VI a. C.) y el más resciente es el vocal (en alfabeto jónico, desde el siglo V a. C.) (Collette 2000: 68; Michels, 1982: 174-175).

A medida que nos acercamos al tiempo en que vivió Pitágoras (siglo VI a. C.), y se consideran exclusivamente las fuentes musicales, resulta más difícil diferenciar los elementos que desarrollaron Pitágoras y su escuela, de los elementos que se desarrollaron independientemente, y mucho más difícil resulta determinar su interacción y mutua influencia. Sin embargo, existen algunas aportaciones pitagóricas respecto a la armonía que se pueden determinar con toda claridad; afortunadamente quedan algunas fuentes desde la filosofía que pueden ayudar a complementar el panorama; es claro que una visión más completa surgirá de la comparación y complementación de informaciones obtenidas desde la música y desde la filosofía.

1. La armonía pitagórica

Los griegos en general y en especial los pitagóricos, abordaron la música desde varios puntos de vista: como una disciplina místico-religiosa, un instrumento catártico o terapéutico para purificar el alma, como un modelo educativo, un instrumento didáctico-formativo capaz de transformar las emociones y la conducta del ser humano, o un estudio aritmético-geométrico del sonido. Es en este último punto, en el que me detendré.

Los pitagóricos fueron los primeros en desarrollar un estudio aritmético-geométrico de la altura sonido al que dieron el nombre de armonía y al que se le conoce como acústica. La armonía pitagórica es el primer estudio físico-matemático experimental del que se tiene noticia.

La altura del sonido se puede determinar por medios mecánicos a partir de la longitud, grosor o tensión de cuerdas o tubos. Durante mucho tiempo la altura de los sonidos, cuando menos su altura relativa, se podía determinar a partir de individuos especializados en el arte musical ya fuera como constructores de instrumentos (las flautas tienen un sistema de sonidos fijos), o como ejecutantes por medio de la repetición de sensaciones sonoras y el desarrollo de una memoria auditiva de alturas. Así, en tiempos de Pitágoras, los criterios para determinar en la práctica las alturas de los sonidos eran dos:

— El criterio mecánico-empírico (instrumental-cultural).
— El criterio subjetivo-sensorial-memorístico (auditivo-cultural).

El criterio mecánico-empírico se conformó en la práctica, por el uso de la intuición y la experiencia, conservada y transmitida por tradición en fórmulas de construcción de instrumentos de aliento. El criterio subjetivo-sensorial-memorístico se conformó por la tradición, la práctica y el adiestramiento subjetivo en la ejecución-audición de instrumentos o de la voz. Los pitagóricos encontraron un tercer criterio: la ley y el orden en el funcionamiento de la naturaleza, a partir de un método aritmético-geométrico aplicado al estudio de las alturas de los sonidos.

Como expuse en el capítulo I, una de las aportaciones más importantes de Tales de Mileto consiste en un sistema de relaciones que permite la determinación mediata de cosas no directamente determinables, a partir de cosas directamente determinables, por medio de la aplicación de la geometría al mundo físico, y a partir de métodos concretos y sistemas de relaciones de longitudes, ángulos, triángulos, razones y proporciones.

Tales de Mileto fue maestro de Anaximandro y éste fue preceptor de Pitágoras, no es de extrañar que Pitágoras siguiera con el estudio de la geometría, de las razones y las proporciones, aplicadas a cosas no directamente determinables, dados los buenos resultados obtenidos con los métodos propuestos por Tales. Pitágoras aprovecha el conocimiento de estos métodos y la experiencia de los problemas resueltos con ellos y une a éstos su curiosidad, nuevos planteamientos y nuevos problemas.

Las cuerdas de la lira o la kithara son magnitudes en movimiento, por lo que resulta claro el interés de Pitágoras por determinar el sonido a través de las longitudes de las cuerdas e intentar describirlas por medio de razones o proporciones. A continuación describo el camino que Pitágoras, en líneas generales y procedimientos lógicos, tuvo que recorrer para desarrollar los conocimientos armónicos.

En primer lugar, tuvo que partir de hechos observados o de experiencias transmitidas por personas expertas en el área de su interés, en este caso, la música.

El sonido de una cuerda puede variar de altura por medio de los siguientes procedimientos:

a) Variando la **tensión** de la cuerda: a mayor tensión el sonido es más agudo, a menor tensión el sonido es más grave.
b) Variando el **grosor** de la cuerda: a mayor grosor el sonido es más grave, a menor grosor el sonido es más agudo.
c) Variando la **longitud** de la cuerda: a mayor longitud de la cuerda el sonido es más grave, a menor longitud el sonido es más agudo.

Estos procedimientos para variar la altura del sonido eran conocidos y utilizados en tiempos de Pitágoras. El procedimiento más sencillo para controlar las alturas de sonido y compararlas entre sí es tomar como referencia la longitud de la cuerda. Controlar y medir las alturas sonoras a partir de la tensión o el grosor de las cuerdas, para después compararlas, representaba una gran dificultad en en tiempo de Pitágoras, pues éstos no contaban ni con la tecnología ni con la estructura teórica suficiente y necesaria para controlar las alturas sonoras a paritr de estos dos procedimientos. Si hubo algunos intentos para establecer relaciones que definieran las alturas sonoras a partir de experimentos que tomaran en cuenta estos dos procedimientos (tensión o grosor), tuvieron que haber sido abandonados y continuar su investigación por el único camino viable que tenían a su disposición: la longitud de las cuerdas.

Una vez encontrado el criterio a seguir para determinar las alturas sonoras, fue necesario aislar los otros dos factores que intervenían en la alteración de la altura del sonido. Por lo que era importante controlarlos de alguna manera y neutralizarlos para tener la seguridad de que no intervendrían en la relación: medida-de-longitud — altura-sonora, es decir, establecer las condiciones de certeza que permitieran reconocer la variación de longitud como único factor para el cambio de altura.

Se hizo necesaria la construcción de un instrumento especial que mantuviera estas dos variables bajo control. Este instrumento es el

Monocordio: instrumento de una sola cuerda[11] tensada entre dos puentes fijos, sobre una caja hueca con aberturas para el sonido, uno de los extremos de la cuerda va atada a una clavija de giro, para variar la longitud de la cuerda se contaba con un puente triangular móvil, con el tiempo se pudo perfeccionar este instrumento con una escala graduada dividida en 120 partes, para determinar la longitud de la cuerda con exactitud (Levi/Thema II 1993: 154-155). Un instrumento de una sola cuerda garantiza que tanto la tensión como el grosor de la cuerda no varíen, se puede trabajar exclusivamente con la longitud de la cuerda y su resultante de altura sonora.

Monocordio.

Así la cuerda del Monocordio, que se utilizó como instrumento de control, podía afinarse con la cuerda más larga o más corta de la lira o de la kithara, y a partir de esta afinación y utilizando el puente móvil se determinaron las longitudes en el monocordio para las cuerdas restantes de la lira o la kithara. Probablemente los primeros resultados que se encontraron eran indicativos y aproximados dada la afinación empírica y probablemente un poco imprecisa que se utilizaba entonces para los instrumentos. Empero, a partir de estas observaciones y experimentos pudo establecerse con posterioridad una relación más exacta; por ejemplo, se establecieron las razones de longitud de las cuerdas para los distintos intervalos o alturas de sonido.

En el fragmento 6 atribuido a Filolao se expresa de la siguiente manera la relación de longitudes de las cuerdas con las alturas de sonido correspondientes:

"[...] La extensión de la armonía (una octava) comprende la cuarta justa y la quinta justa; la quinta es mayor que la cuarta en un tono entero (8:9),

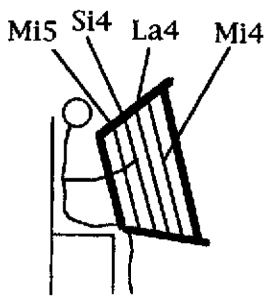
[11] Como su nombre lo indica, del griego: *monos, e, on:* solo, único; solitario; aislado, abandonado, separado o apartado [...] y *corde, e:* tripa; cuerda de tripa, cuerda musical; intestinos o tripas comestibles; embutido (García Hughes 1956: 414/711) (Pabón 1997: 401/644) que se traduciría por *cuerda única.*

porque desde la cuerda superior (nota más baja: E4, mi4) hasta la cuerda media (A4, la4) hay una cuarta, y desde la cuerda media a la cuerda inferior o nueva (nota más aguda: (E5, mi5) una quinta. Desde la cuerda inferior o nueva (E5, mi5) a la tercera cuerda (H4, si4) hay una cuarta, y desde la cuerda tercera (H4, si4) hasta la cuerda superior (E4, mi4) hay una quinta. Entre la media (A4, la4) y la tercera (H4, si4) hay un tono entero. La cuarta justa tiene la razón 4:3, la quinta 3:2 y la octava 2:1. La armonía (una octava) se constituye de cinco tonos enteros y dos semitonos; la quinta, de tres tonos enteros y un semitono; y la cuarta, de dos tonos y un semitono" (Freeman 1952: 74; traducción de Ulises Sánchez).

Hay que tener presente que los intervalos musicales en la Grecia antigua se tomaban de manera descendente, es decir, del sonido agudo (longitud más corta) al sonido grave (longitud más larga); así lo indican los términos empleados para nombrar las razones que describen los distintos intervalos: *diplarios logos,* relación o razón doble (2:1); *hemiolios logos,* relación o razón entero y medio (3:2); *epi-tritos logos,* relación o razón [uno] más de tres (4:3) y *epogdos logos,* relación o razón sobre el sonido sordo o sobre el ruido al caer o golpear (9:8).

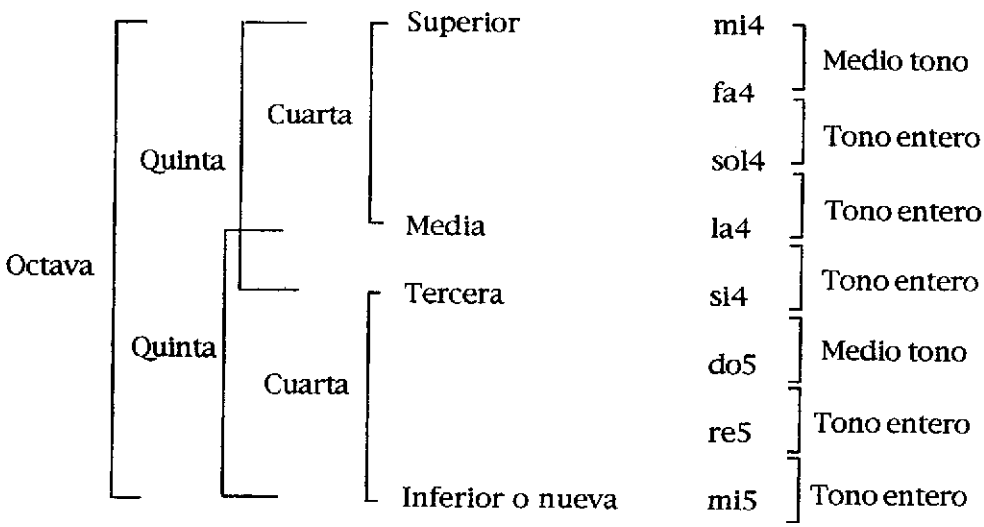
En este fragmento se expresan todas las relaciones interválicas posibles entre las principales notas de un sistema octocorde heptatónico, con ello, se obtiene una definición exhaustiva como a continuación indico:

		Superior	mi4	Cuarta
	Quinta	Media	la4	
Octava				Tono entero
		Tercera	si4	
	Quinta			Cuarta
		Inferior o nueva	mi5	



Ubicación de las notas en el arpa

En seguida, a manera de resumen, señalo el sistema completo de alturas en forma graduada:



El establecimiento de razones numéricas para describir o determinar intervalos sonoros de altura es de gran impacto y tiene importantes consecuencias en la teoría y práctica musicales, y en el desarrollo de la ciencia y la filosofía.

Uno de los logros importantísimos de Pitágoras es haber podido establecer criterios y relaciones objetivas para describir un fenómeno hasta entonces indefinible en términos objetivos, y solamente determinable por una relación mecánico-empírica o por una relación cultural-subjetiva.

2. Aportaciones de la armonía pitagórica a la música

En el terreno musical las aportaciones y consecuencias de la investigación armónica pitagórica son las siguientes:

Construcción del monocordio como instrumento de control y primer instrumento de experimentación científica del que se tiene noticia, éste permite el aislamiento de dos variables que intervienen en la altura del sonido (grosor y tensión), reduciendo a una variable la altura del sonido: la longitud.

Establecimiento de razones numéricas entre las longitudes de cuerda que describen intervalos de altura de sonido. Definición del intervalo sonoro a partir de una razón numérico-longitudinal.

Introducción de una nueva cuerda *neate* que forma el intervalo de octava con la cuerda *hypate* o superior.

El establecimiento de una técnica o método objetivo de afinación. La palabra *harmoniai* (en su sentido de ajuste), así lo indica. Este método permite tener un sistema de sonidos fijos o ajustados para la afinación de instrumentos de cuerda, teniendo en cuenta un criterio aritmético-geométrico-físico.

Establecimiento de las relaciones y la descripción de la estructura interválica del *harmoniai* dórico, por medio de razones numéricas. En este sentido, la estructura interválica del *harmoniai* dórico queda perfectamente determinado, descrito y definido por medio de razones numéricas. Es muy probable que esta descripción se extendiera a los "harmoniai" frigio y lidio, que eran los que con seguridad se conocían en tiempos de Pitágoras.

El monocordio, utilizado en un primer momento como herramienta de investigación, es muy probable que cambiara de uso después de las primeras investigaciones armónicas de Pitágoras, para convertirse en un aparato de afinación para los instrumentos musicales de cuerda.

Ajuste del sistema de canto. La cultura griega aunque se constituye como un punto inicial e importante en la conformación y desarrollo de la cultura occidental, es en sí misma una cultura oriental. Ya he indicado que las melodías griegas eran más parecidas a lo que en la actualidad se escucha en la música bizantina, turca o árabe: melodías melismáticas con ricos giros microtonales. Una vez ajustada la afinación en sonidos fijos en los instrumentos de cuerda, se propuso una técnica de canto que deja a un lado los giros microtonales y los melismas, desarrollando melodías que utilizan exclusivamente los sonidos fijos. A esta técnica melódico-vocal se le dió el nombre de Diatónica,[12] que puede traducirse como *cantar a través de las cuerdas,* refiriéndose a la entonación vocal de la melodía a través de los *sonidos fijos;* ejemplos de esta técnica son el Himno Délfico a Apolo (pista 3) y el Epitafio de Seikilos (pista 11) (Paniagua 1979: pist. 3 y 11; Tabouris s/f: pist. 4. Halaris s/f: pist. 5 y 7).

Explicación del sistema pentáfono y del sistema heptáfono a partir del establecimiento de relaciones por intervalos de quinta. Se atribuye a Pitágoras la técnica de las quintas para establecer su sistema de ajuste de sonidos; este sistema por intervalos de quinta permite dar una explicación interválica de los sistemas pentáfono y heptáfono.

---

[12] Del griego *tonos, o:* todo ligamento que se pueda tensar, cuerda, hilo, fibra muscular; tensión; intensidad; fuerza, vigor; tono musical; ritmo; acento (García Hughes 1956: 647). *Tenon, ontos:* tendón; cogote; cima (García Hughes 1956: 638). Y de *dia, prep. del valor de dyo:* entre (dos extremos de una cosa; dos cosas); por; *con gen. Sin movimiento:* entre; en medio de; *con movimiento:* por entre, por en medio, a través de; de lado a lado; *con acus.:* por medio de; por causa de. *En composición; como el* dis- *latino y el* di- o dis- *castellano, indica:* distribución; duda; entremeter; difusión; acción entre los dos extremos de una cosa o entre dos cosas; de un extremo al otro, a fondo, del todo (García Hughes 1956: 163).

Grado de parentesco por intervalos de quintas

				Re				
1°			Sol		La			Intervalos tetracorde
2°		Do				Mi		Pentáfono
3°	Fa						Si	Heptáfono
4°		Sib (La#)				Fa# (Solb)		Cromático
5°			Mib (Re#)		Do# (Reb)			Cromático
6°				Lab = Sol#				

Con este esquema se puede establecer el siguiente resumen:

Primer grado de parentesco: cuerdas principales en una octava: fundamental, cuarta, quinta y octava (descritas en el fragmento 6 de Filolao). Primero y segundo grados de parentesco: escala pentáfona. Primero, segundo y tercer grado de parentesco: escala heptáfona. Del primero al sexto grado de parentesco: escala dodecáfona o cromática.

Se puede concluir que el ser humano llegó a establecer estos sistemas graduales de alturas o escalas, primero por intuición, por la práctica y de una manera empírica; pero Pitágoras o los primeros pitagóricos encontraron una explicación a partir de relaciones interválicas, que permiten expresar un orden o una ley que puede encontrarse en la naturaleza, este es uno de los muchos ejemplos que encontraron los pitagóricos para calificar al mundo como Cosmos [orden].

Establecimiento de los principios de notación musical para instrumentos a partir del alfabeto ático. El sistema de notación musical para la voz se desarrolló más tarde, a parir de alfabeto jónico.

Establecimiento de los principios de organización y descripción de un sistema musical que culminaría siglos más tarde con el desarrollo del sistema diatónico téleion u organización completa de sonidos fijos.

Los primeros pitagóricos intentaron transformar la práctica musical (y lo lograron por algún tiempo), para ajustar los usos musicales a los nuevos descubrimientos armónicos, como es el caso del canto diatónico. Pero la tradición melódica oriental era muy fuerte, y después de Pitágoras y los primeros pitagóricos se regresó paulatinamente al canto melismático microtonal, y en vez de plantearse abandonarlo hubo otros teóricos (Aristoxeno), que trabajaron para describir con mayor exactitud las melodías melismáticas y microtonales a partir de géneros (diatónico —tonos y medios tonos—, cromático —medios tonos— y enarmónico —cuartos de tono—) y de giros microtonales más pequeños como los *kroai* o la coma pitagórica de hasta 1/12 de tono.

Desarrollo de toda una nomenclatura y un lenguaje técnico que permite describir el fenómeno sonoro; ejemplo de ello es la introducción del término *neate.*

IV. LAS TÉCNICAS ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS DESARROLLADAS EN LA ARMONÍA PITAGÓRICA

Aunque la reconstrucción de la matemática griega entre los siglos VI y III a. C. es difícil de establecer, las fuentes egipcias y babilónicas permiten determinar con toda seguridad cómo eran éstas antes del siglo VI. También se sabe con certeza cómo eran las matemáticas griegas desde principios del siglo III a. C. gracias a fuentes de la matemática helenística como los *Elementos de geometría* de Euclides de Alejandría. El establecimiento seguro de estos dos momentos indica el comienzo y el final de este proceso, aunque queda por resolver la manera en la que éste se desarrolló; en esta tarea se cuenta con numerosos fragmentos, citas, comentarios y obras de filósofos y matemáticos que permiten detallar la manera en la que se dio este proceso.

Las aportaciones matemáticas de la primera escuela pitagórica (siglos VI y V a. C.) se pueden organizar en temáticas, aunque para su íntegra comprensión no deben desligarse de su planteamiento problemático:

Desarrollo de la geometría plana:

Continuación de los planteamientos de Tales de Mileto.
Principios de trigonometría.
Teorema de Pitágoras.
Métodos por igualdad, razón y proporción.

Las razones, progresiones y proporciones como técnicas para descibir los fenómenos armónicos:

Razones.
Progresiones.
Proporciones. La proporción áurea.
Mediedades
Medias.

Teoría de los números enteros:

Definición de "unidad" en la primera escuela pitagórica.
Teoría de lo par y lo impar.
Teoría y técnica de lo múltiplo.
Los números primos.
Técnica del Máximo Común Multiplo.
Técnica del Mínimo Común Divisor.

Teoría de los números figurados:

Relación entre magnitudes (geometría) y números (aritmética).
Primer intento de establecer una aritmo-geometría.
Series, progresiones fórmulas, algoritmos y leyes de los números figurados.

Los números fraccionarios:

Las partes alícuotas.
Las partes alicuantas.
Razones, progresiones y proporciones, y números fraccionarios.
Teoría de lo submúltiplo.

El problema de la inconmensurabilidad:

La imposibilidad de una descripción aritmética, con números enteros y fraccionarios, de la magnitud. Demostraciones de la inconmensurabilidad. Los números irracionales.

Es importante volver a señalar que las aportaciones matemáticas de los pitagóricos no se restringen al campo de la organización de la comprensión (definiciones, clasificaciones, principios o leyes) , sino que sus aportaciones abarcan también el campo definitorio y operativo (algoritmos, fórmulas, métodos o técnicas). Aunque las aportaciones aritméticas y geométricas de los pitagóricos son de gran interés y pueden dar muchos indicios y pistas para comprender el desarrollo posterior de la ciencia y la filosofía, en este trabajo me limitaré a tratar las aportaciones matemáticas que tengan una estrecha relación con el estudio de la armonía.

1. Razones y proporciones

Existen varios conceptos y técnicas, aritméticas y geométricas estrechamente relacionadas con la descripción del fenómeno armónico. Mi punto de partida es el estudio de las longitudes de las cuerdas y su relación con el sonido que producen; en un primer momento se describieron cuatro sonidos; las relaciones se establecieron a partir de razones, es decir, relaciones entre dos magnitudes, estudiando pares de cuerdas; estas relaciones se establecen respecto a una misma cuerda que sirve como referencia y punto de comparación para las demás. Los griegos estudiaron los intervalos de manera descendente, es decir del sonido agudo al grave; en este caso la cuerda de referencia es la más corta y la que produce el sonido más agudo, las otras cuerdas producen los sonidos que se encuentran a intervalos de cuarta descendente, quinta descendente y octava descendente, respecto de la cuerda de referencia, para este caso la longitud de la cuerda va en aumento conforme aumenta el intervalo.

Las relaciones o razones que definen las longitudes de cuerda y los intervalos descendentes respecto a la cuerda de referencia se encuentran en el segundo párrafo del fragmento 6 atribuído a Filolao:

Diplarios logos, razón doble (2:1), intervalo de octava descendente.

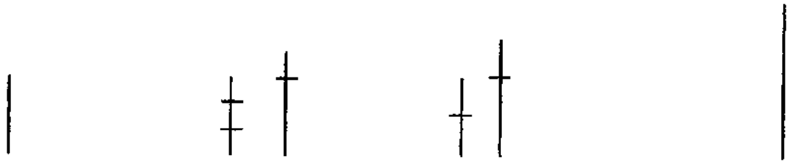
Epi-tritos logos, razón [uno] además del tercero (4:3), para la cuarta descendente.

Hemiolios logos, razón entero y medio (3:2), para la quinta descendente.

Epogdos logos, razón sobre el sonido sordo o golpe (9:8), para el tono descendente.

Las razones entre cada una de las cuerdas y la cuerda de referencia quedan de la siguiente manera:

Fundamental	Cuarta descendente	Quinta descendente	Octava descendente
Do6	Sol5	Fa5	Do5
1:1 Cuerda de referencia	4:3	3:2	2:1



A manera de ejemplo y para concretar más las razones entre dos cuerdas, he colocado sonidos específicos que cumplen con estos intervalos.

Todas las longitudes de cuerda están definidas respecto a la longitud de la cuerda de referencia: la cuarta es mayor en un tercio, la quinta mayor en una mitad, y la octava es el doble de la longitud de la cuerda de referencia.

La teoría de la proporcionalidad se encuentra compendiada y distribuída en los libros V, VI, VII y X, de los *Elementos* de Euclides. Aunque esta teoría corresponde a un ajuste hecho por Eudoxo de Cnidos posterior al descubrimiento de la inconmensurabilidad y de los números irracionales, existen indicios de conceptos anteriores, más limitados y concretos como lo son las nociones de razón y proporción (Euclides 2000: 73) Según la definición V.3, "Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas" (Euclides 1994: 9). Los términos "tamaño" y "magnitudes" son indicativos de que el concepto de "razón" se relacionaba estrechamente con la geometría. Además; permite establecer con claridad la relación entre este concepto y el problema de la descripción de alturas de sonido por medio de "tamaño" o longitud de la cuerda; "Magnitudes homogéneas", se refiere a magnitudes que tienen una unidad común que las mide exactamente.

Junto con las razones como método para describir las alturas de sonido, los pitagóricos utilizaron cuando menos tres métodos más: el método múltiplo, el submúltiplo y el geométrico.

En la definición V.1 Euclides dice lo siguiente: "una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor" (Euclides 1994: 9). En la definición V.2 establece: "Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor" (Euclides 1994: 9). Así cada una de estas palabras tiene un significado restringido y muy concreto, y define perfectamente un sistema de relaciones. La razón es una relación que se da entre dos magnitudes, una mayor y otra menor. Estas dos magnitudes se pueden relacionar como parte o como múltiplo. Una magnitud menor *es parte* de una magnitud mayor cuando *la mide.* Una magnitud mayor es *múltiplo* de una magnitud menor cuando *es medida* por la menor. Tanto la noción de *"parte"* como la noción de *"múltiplo"* están en función del concepto de *"mide"* o *"es medida".* Por "mide" o "es medida" se entiende que la magnitud menor está contenida en la magnitud mayor *un número exacto de veces.* Este número exacto puede ser un número entero o un número fraccionario. El método múltiplo trabaja con números enteros, mientras que el método submúltiplo con números fraccionarios. Así "parte" se entiende como «submúltiplo» o «parte alícuota» (alícuota: "la parte que mide exactamente a su todo" (Salvat 2000: 2972). Y «múltiplo» se entiende como el "[...] número o la cantidad que contiene a otro u otra varias veces exactamente" (Larousse 1997: 696). Así se tienen dos tipos de razones:

La razón múltiplo: doble, triple, cuádruple, etcétera, que toma como base de medida la unidad y que permite "medir" la cantidad discreta o la multiplicidad de individuos.

La razón submúltiplo: mitad, tercio, cuarto, etcétera, que toma como base de medida la "parte" de la unidad que permite "medir" la cantidad continua.

Todos estos métodos y los conceptos implicados en ellos tienen como presupuesto principal y común *la exactitud de la medida* en cantidades discretas (números enteros) o en cantidades continuas (números fraccionarios). Esta característica se sintetiza en la definición de conmensurabilidad expresada en la definición X.1: "se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida [...]" (Euclides 1996: 9). Este concepto se relaciona con la noción de magnitud homogénea que aparece al final de la definición V.3. Las magnitudes son *homogéneas* o *conmensurables*, porque tienen *una medida común y exacta*, ya sea expresada en múltiplos de unidad, o en submúltiplos o partes de unidad. A continuación presento un cuadro comparativo con ejemplos en los distintos sistemas que he descrito.

	Fundamental	Cuarta descendente	Quinta descendente	Octava descendente
	Do6	Sol5	Fa5	Do5
Razón:	1:1	4:3	3:2	2:1
múltiplo:	6	8	9	12
submúltiplo:	6/6	8/6	9/6	12/6
	12/12	16/12	18/12	24/12

Las definiciones V.1 y V.2 están planteadas desde el punto de vista de la extensión, es decir, desde una perspectiva geométrica, y tienen su correspondencia desde el punto de vista aritmético en las definiciones VII.3 y VII.5. (VII.3: "Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor." VII.5: "y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor" (Euclides 1994: 113)). Tanto el concepto de "razón" como la noción de "conmensurabilidad", en sus inicios parecen estar exclusivamente relacionados con el punto de vista geométrico, aunque con el tiempo se elaboró un equivalente aritmético, localizado en la definición VII.15: "números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común" (Euclides 1994: 117).

2. La unidad

Como he comentado, la medida común y exacta puede ser una "parte" o la "unidad". Hasta aquí, he definido lo que significa "parte", a continuación estudiaré los significados que daban los pitagóricos al concepto de "unidad". Euclides en la definición VII.1 dice: "una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una" (Euclides 1994: 111). Jámblico en su *Comentario a la introducción a la aritmética de Nicómaco* 11, 5, "ésta es la definición de unidad de los <pitagóricos> modernos; los pitagóricos antiguos la habían definido en ocasiones como una «divisoria entre número y partes» o «como una cantidad delimitante»" (Euclides 2000: 82). En este contexto Jámblico recuerda varias definiciones anteriores de unidad, de las cuales tomaré tres: una que atribuye a algunos pitagóricos, que supongo son los más antiguos, otra que atribuye a un pitagórico también antiguo llamado Timaridas y por último la que se atribuye a Teón de Esmirna (Euclides 1994: 111).

A. "«La unidad es una frontera *(methórion)* entre número y partes», en opinión de algunos pitagóricos" (Euclides 1994: 111). *Methórion* significa: *meth-orios,* 3: limítrofe (García Hughes 1956: 398). *Meth-orios, a, on:* fronterizo, que separa o delimita (Pabón 1997: 382). Así que la unidad es aquello que separa o delimita al número de las partes. Así el concepto de unidad se encuentra estrechamente ligado a la multiplicidad y a la divisibilidad. La unidad es un criterio de separación: por un lado, el *número* que se entiende como "[...] una pluralidad compuesta de unidades" (Euclides 1994: 112), y la *parte* como una medida exacta de una magnitud menor a una magnitud mayor. La unidad es precisamente, la que delimita el mundo de la pluralidad y el mundo de las partes, pero es también el nexo que relaciona estos dos conceptos, técnicas y métodos.

B. Un pitagórico antiguo, Timaridas, la define a su vez como «cantidad limitada» *(peraínusa posótes).* Teón de Esmirna añade la explicación de que una unidad es «aquello que, cuando la cantidad disminuye mediante sustracción continua, se ve privado de todo número y toma una posición y un resto permanentes». Si, tras haber llegado a la unidad por este medio, procediéramos a dividirla en partes, tendríamos de nuevo una cantidad" (Euclides 1994: 111).

Más que como «cantidad limitada», se podría entender como «cantidad en la que se acaba», de *peraino:* llevar o llegar a término; acabar... (García Hughes 1956: 502). *Peraino:* cumplir; acabar, realizar, terminar, concluir... (Pabón 1997: 468). El mundo de la pluralidad o de la multiplicidad termina en la unidad, mediante una sustracción continua se llega a la privación de todo número, y se llega a la unidad que es una posición y un resto permanentes, esta unidad, puede dividirse, pero entonces ya no es una unidad, sino una cantidad divisible o dividida; en este sentido es interesante recordar que la unidad es componente de los números: "un número es una pluralidad compuesta de unidades" (Euclides 1994 :112), que además los mide: "número primo es el medido por la sola unidad [..] números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común" (Euclides 1994: 116).

3. La gama sonora: intervalos ascendentes y descendentes

Hasta aquí, se ha visto como se establecen diferentes métodos para describir las longitudes de cuerda, y relacionarlas con los intervalos y las distintas alturas sonoras. El método de razones relaciona pares de cuerdas, donde siempre una de ellas es la cuerda de referencia. Los métodos múltiplo y submúltiplo encuentran una unidad común para todas las cuerdas ya sea a partir de la unidad, y los números enteros (múltiplo) o a partir de la división en partes alícuotas (submúltiplo), estos dos métodos se basan en unidades o en partes comunes, homogéneas y exactas. El sonido puede ser descrito con exactitud a partir de números enteros o de números fraccionarios.

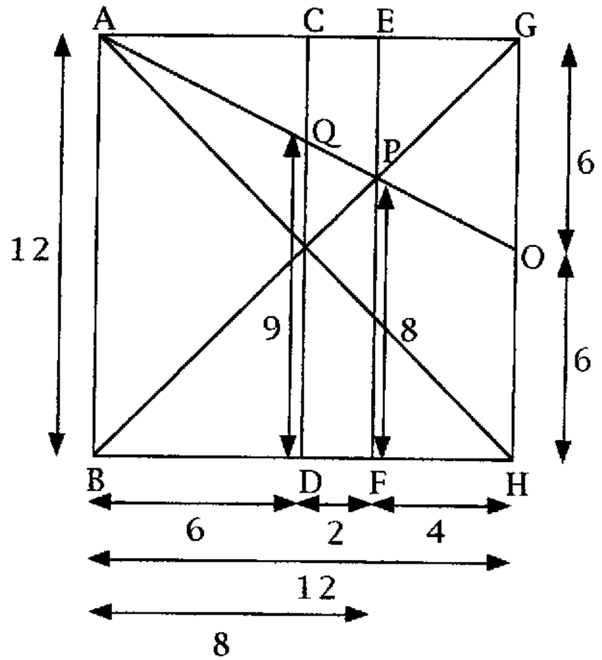
Conforme fueron avanzando los estudios de armonía, pudieron establecerse con exactitud definiciones (en números enteros o fraccionarios) para los intervalos y alturas de sonido en un sistema heptáfono-octocorde.

Estos ejemplos son para intervalos ascendentes.

fundamental	1	972
segunda mayor	8/9	864
tercera mayor	64/81	768
cuarta justa	3/4	729
quinta justa	2/3	648
sexta mayor	6/27	576
séptima mayor	128/243	512
octava justa	1/2	486

Además de estas técnicas aritméticas para describir las relaciones interválicas entre las distintas alturas de sonido, existe un método geométrico que relaciona las longitudes de las cuerdas. Por su interés cito la nota 12 del libro *Sobre la música* de Arístides Quintiliano (Quintiliano 1996: 177).

> Ptol., *Arm.* 46-49 en la descripción de Arístides falta indicar que la segunda cuerda debe estar justo en medio de la primera y de la cuarta, y que el punto de intersección de las dos rectas trazadas señala la posición de la tercera cuerda. El esquema del helicón, basado en el de Ptolomeo, con los cuatro números paradigmáticos de estas proposiciones es el siguiente:



La cuerda primera AB sonará entera y dará el sonido más grave; en la cuerda segunda sonará la longitud QD, las tres cuartas partes del total, en consonancia de cuarta respecto a la primera [9/12]; en la tercera cuerda sonará la longitud FP, los dos tercios del total, en consonancia de quinta [8/12]; en la cuarta cuerda sonará la longitud HO, en intervalo de octava respecto a la primera [6/12].[13]

Los pitagóricos abordaron otros dos problemas, para cuya descripción y solución debieron elaborar nuevos conceptos y nuevas técnicas, éstos son:

El problema de la descripción de la reciprocidad o inversión interválica.
El problema de la descripción de la continuidad de la gama sonora.

[13] Nota: los números entre [ ] son correcciones hechas por mí al texto original, ya que es claro que la unidad base es 1/12, y todo el sistema debe estar referido a esta unidad común.

Los conceptos y técnicas que utilizaron los pitagóricos son los siguientes:

Los números recíprocos.
Las progresiones aritméticas, geométricas y armónicas.
Las medias aritméticas, geométricas y armónicas.

A. Los números recíprocos

Recíproco viene del latín *reciprocus,* [14] y significa: que se mueve hacia atrás y hacia adelante, que va y viene. En matemáticas es el número que resulta cuando se divide 1 por un número dado. Por ejemplo: el recíproco de 2 es 1/2, el de 3 es 1/3 y el de 5 es 1/5; el reciproco de 1/5 es 5 y el de 1/3 es 3. El número dado multiplicado por su recíproco dan como resultado (producto) la unidad (Marks 1968: 179). Estos números fueron utilizados para describir la reciprocidad interválica y la continuidad de la gama sonora.

B. Las progresiones aritméticas, geométricas y armónicas

Las progresiones son sucesiones de números que mantienen un aumento o una disminución constante. A este aumento o disminución constante se le llama diferencia común.

Las progresiones aritméticas se dan entre números enteros, por ejemplo:

1, 3, 5, 7, 9.... tienen una diferencia común de + 2.

25, 22, 19, 16... tienen una diferencia común de -3.

La progresión geométrica es una serie de números, que después del primero, es el producto del número precedente por un número constante, llamado razón común. Ejemplo: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... tienen una razón común igual a 2.

---

[14] Recíproco: hacer volver atrás, mover alternativamente, movimiento alternativo de las olas, tener flujo y reflujo (*Diccionario Spes Latín* 1979: 422). Que va y que viene (Corripio 1984: 399) *Reciprocus -a, -um:* mar que hace reflujo, alternativo, recíproco (*Diccionario Spes Latín* 1979: 422).

La progresión armónica es la sucesión de números formada por los recíprocos de los números enteros que forman una progresión aritmética: por ejemplo: 1/3, 1/5, 1/7... es una progresión armónica porque los recíprocos de estos valores 3, 5, 7...forman una progresión aritmética (Marks 1968: 171-173).

C. Las medias aritméticas y armónicas

La media o medio es el valor intermedio entre dos extremos (Marks 1968: 128).

La media aritmética entre dos números enteros es la suma de esos números dividida entre dos. Ejemplo: la media aritmética entre 12 y 6 es 9.

La media armónica es el término medio de una progresión armónica. El medio armónico de dos números es la mitad de la suma de los recíprocos de dos números. Ejemplo: El medio armónico de 2 y 4 es:

$$1/2 \bullet (1/2 + 1/4) = 1/2 \bullet 3/4 = 3/8.$$ [15]

Estos conceptos y técnicas surgen de la necesidad de describir el fenómeno sonoro. Los intervalos melódicos pueden ser ascendentes o descendentes y se describen fácilmente mediante los números recíprocos. Cuando se quiere encontrar el medio entre dos números enteros se utiliza la técnica de media aritmética, y cuando se quiere encontrar el medio entre números fraccionarios se utiliza la técnica de media armónica. Conforme se fue ampliando la gama sonora a dos o más octavas, estas técnicas resultaron de gran utilidad para describir estos sistemas de alturas sonoras. A continuación daré dos ejemplos de como se aplican los conceptos anteriores en la descripción de inversión de intervalos y en la extensión de la gama sonora, empero para comprender estos esquemas es necesario tener en cuenta lo siguiente:

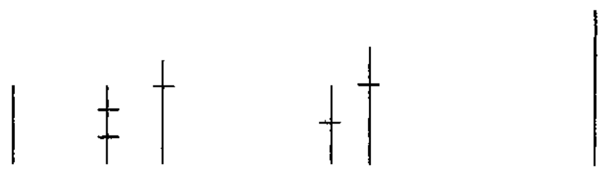
Intervalo descendente: de sonido agudo a sonido grave, de menor longitud a mayor longitud.

[15] Aquí: •, significa multiplicación.

Intervalo ascendente: de sonido grave a sonido agudo, de mayor longitud a menor longitud.

Sonido grave = cuerda de mayor longitud
Sonido agudo = cuerda de menor longitud

	Cuerda de referencia	Cuarta descendente	Quinta descendente	Octava descendente
	Do6	Sol5	Fa5	Do5
Razón:	1:1	4:3	3:2	2:1
múltiplo:	6	8	9	12
submúltiplo:	6/6	8/6	9/6	12/6
	12/12	16/12	18/12	24/12



	Cuerda de referencia	Cuarta ascendente	Quinta ascendente	Octava ascendente
	Do5	Fa5	Sol5	Do6
Razón:	1:1	3:4	2:3	1:2
múltiplo:	12	9	8	6
submúltiplo:	12/12	9/12	8/12	6/12

Intervalos ascendentes y descendentes con notas en un rango de octava.

Cuerda de referencia: $|\underline{1:1}|$

Intervalo descendente: ↓ ← (se lee de derecha a izquierda)

Intervalo ascendente: → ↑ (se lee de izquierda a derecha)

	Do4	Fa4	Sol4	Do5
			4:3 ↓ ←	$|\underline{1:1}|$
		3:2 ↓ ←		$|\underline{1:1}|$
	2:1 ↓ ←			$|\underline{1:1}|$
Múltiplos	12	9	8	6
	$|\underline{2:1}|$ → ↑	3:4		
	$|\underline{2:1}|$ → ↑		2:3	
	$|\underline{2:1}|$ → ↑			1:1

En el esquema anterior podemos observar claramente que:

El intervalo de cuarta ascendente (3:4) es recíproco al intervalo de cuarta descendente (4:3).

El intervalo de quinta ascendente (2:3) es recíproco al intervalo de quinta descendente (3:2).

El intervalo de octava ascendente (1:2) es recíproco al intervalo de octava descendente (2:1).

Continuidad de la gama sonora:

Do4	Fa4	Sol4	Do5	Fa5	Sol5	Do6
2	3/2	4/3	|1|	3/4	2/3	1/2
12	9	8	|6|	9/2	4	3

1/2 1/2

1/2

1/2

1/4

Para este ejemplo, tomaré como cuerda de referencia la unidad |1| y como número proporcional de referencia el número |6|. En el esquema existe una organización del sistema "al espejo" y es fácil establecer las relaciones interválicas por los números recíprocos. Es importante recordar que esta descripción es en un sistema de dos octavas. En este ejemplo se aplica una de las medias aritméticas y armónicas, la media aritmética entre el Do4 y el Do5 es: 2 + 1 = 3, que hay que dividir entre 2, 3/2, que corresponde al Fa4. Por otra parte, la media armónica entre 1 y 1/2 es: 1/2 • (1/1 + 1/2) = 1/2 • 3/2 = 3/4, que corresponde al Fa5. Así tanto los números recíprocos como las medias aritméticas y armónicas son herramientas muy útiles en la descripción de los sistemas armónicos.

Hasta aquí la descripción general del desarrollo aritmético y geométrico propiciado por el estudio de la armonía en los pitagóricos sobre las relaciones entre la concepción inicial de las razones y proporciones con la teoría musical.[16]

V. EL PROBLEMA DE LA INCONMENSURABILIDAD

Platón, en su diálogo *Teeteto,* dice que Teodoro de Cirene "[...] demostró el carácter irracional de las raíces de los números enteros no cuadrados desde 3 a 17" (Tatón 1971: 279). Estos trabajos pueden fecharse aproximadamente hacia el 430 a. C. El hecho de que Teodoro proporcione una serie entera de demostraciones de la irracionalidad de estos números, hace suponer que el descubrimiento de la irracionalidad es anterior. Fritz y Junge han sostenido la opinión de que el descubrimiento de la inconmensurabilidad entre dos magnitudes la realizó el pitagórico Hipaso de Metaponto o algún contemporáneo suyo, aproximadamente entre los años 538-480 a. de C. (Becker 1966: 105; Fraile 1976: 165; González Urbaneja 2001: 207).

Respecto a este problema existen dos niveles de acercamiento: por una parte un proceso heurístico que consiste en el percatarse, notar, intuir o descubrir que no hay unidad común o parte alicuota entre dos magnitudes definidas geometricamente. Por otra parte, un proceso posterior, el demostrativo, que tiene como finalidad confirmar el hecho o la intuición descubierta, articulando razonamientos con una estructura lógica que permitan llegar a la conclusión, en un primer momento intuida, y en un segundo momento establecida como una proposición verdadera que brinda certeza mediata (como teorema).

[16] Véase el análisis filológico de: A. Szabó, *The Beginnings of Greek Mathematics,* Dordrecht-Boston-Budapest, 1978, § 2.8, pp. 134-137 (Euclides 2000: 75)

Mucho se ha discutido, cuáles serían los ejemplos más viables a partir de los cuales se descubrió la inconmensurabilidad o la irracionalidad, por otra parte, cuáles serían las primeras demostraciones utilizadas por los pitagóricos para establecer con certeza la inconmensurabilidad o la irracionalidad.

Parece que el caso de $\sqrt{2}$ ya era conocido por los babilonios, quienes lo resolvieron de una manera empírica y por un método aproximativo, sin tener una clara conciencia de la inconmensurabilidad (Tatón 1971: 253). Así, los pitagóricos parecen ser los primeros en tomar conciencia plena de la inconmensurabilidad y en demostrarla. Existen tres tipos de problemas a partir de los cuales los pitagóricos pudieron intuir o notar por primera vez la inconmensurabilidad: aritméticos, geométricos y armónicos, que trataré a continuación.

A partir del contexto pitagórico y de la teoría de los números figurados es prácticamente imposible que hubieran descubierto la inconmensurabilidad o la irracionalidad a paritr de un planteamiento aritmético. Este planteamiento, en su forma más sencilla, relaciona la inconmensurabilidad con $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, pero ni el 2 ni el 5 están clasificados como números cuadrados en la teoría pitagórica de los números figurados. El 2 es considerado número par y por lo tanto como número rectangular. El 5 es número impar, primo, y por lo tanto se considera lineal o pentagonal. Así que dentro del contexto pitagórico resulta poco natural y contrario a la lógica interna de los números figurados, intentar determinar el lado de un cuadrado de dos números no cuadrados, como lo son el 2 y el 5. Puede tenerse la seguridad que este tipo de demostraciones son posteriores al contexto del primer pitagorismo, y no son los ejemplos que llevaron a los pitagóricos a notar o intuir por primera vez la inconmensurabilidad.

Existen dos ejemplos totalmente viables a partir de los cuales los primeros pitagóricos pudieron descubrir la inconmensurabilidad, uno geométrico y otro armónico:

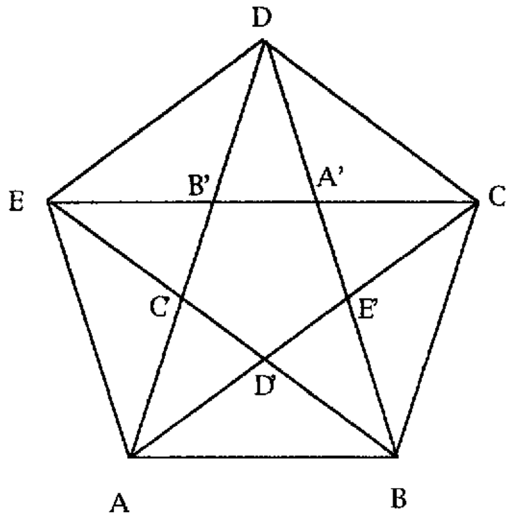
> La comparación entre un lado y la diagonal del pentágono.
> Determinar la longitud de la cuerda que divide en dos intervalos iguales la octava.

La inconmensurabilidad es un concepto exclusivo de la geometría. Aun en una obra muy posterior al primer planteamiento del problema y a las múltiples demostraciones subsecuentes como lo son los *Elementos de geometría* de Euclides, los conceptos de conmensurabilidad y de inconmensurabilidad pertenecen exclusivamente al planteamiento geométrico como se observa en el libro V definiciones de la 1-18 o en el libro X definiciones de la 1-4. Así los planteamientos geométricos se perfilan como los más viables para percatarse de la inconmensurabilidad por primera vez.

La técnica de medición mutua de dos segmentos conocida como *antanairesis,* [17] consiste en la comparación de dos segmentos para determinar cuántas veces está contenido el segmento más pequeño en el mayor, esto se puede hacer por el método de substracción, cuantas veces puedo quitar el segmento menor del mayor, si queda un resto sobrante, se le substrae al segmento menor, si queda un nuevo resto se le substrae al resto anterior, y así sucesivamente. Si este proceso concluye y no queda ningún resto, los segmentos son conmensurables entre si; en caso de que este proceso no termine, y siempre quede un resto, esto significa que no hay unidad o parte alícuota común, y por lo tanto los segmentos son inconmensurables.

[17] *Ant-anaireo, - o:* borrar o cancelar de una parte y otra (Pabón 1997: 54). *Ant-anaireo:* quitar de un lado y de otro para igualar cuentas (García Hughes 1956: 77).

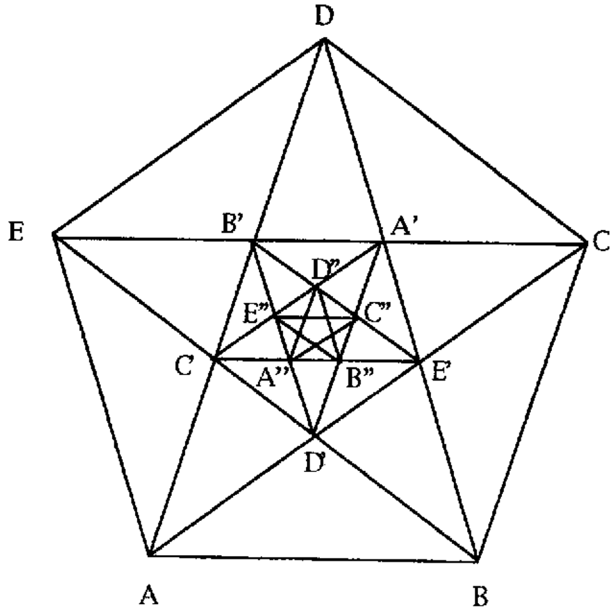
1. La comparación entre un lado y la diagonal del pentágono



Medir el lado DE con la diagonal AC

(1) DE y AC son paralelas por simetría.
(2) El cuadrilátero ED'CD, es un paralelogramo por simetría.
(3) CD' = DE. De (2)
(4) CD' está contenido una vez en AC, lo mismo que DE quedando como resto AD'.
(5) El cuadrilátero AE'DE, es un paralelogramo por simetría.
(6) ED = AE'. De (5)
(7) AD' está contenido una vez en ED quedando como resto D'E'. (6)

Esta estructura de *antanairesis* se repite al comparar D'E' con A'C'.



(8) D'E' y AC' son paralelas por simetría.
(9) El cuadrilátero D'E'D''C', es paralelogramo por simetría.
(10) C'D'' = D'E'
(11) CD''- ≡ D'E' esta contenido una vez en A'C', quedando como resto AD''.
(12) El cuadrilátero A'E''D'E', es un paralelogramo por simetría.
(13) E'D' = A'E''. De (12)
(14) A'D'' está contenido una vez en E'D' quedando como resto D''E'' (13) (Becker 1966: 106-107).

Es claro que este proceso de *antanairesis* es un proceso reiterativo, que puede seguirse repitiendo sin fin. A partir de este hecho hay una intuición de que no hay ni unidad, ni parte alícuota en la que se pueda terminar este proceso. Al no poder llegar a una unidad o parte alícuota, es claro que estas magnitudes —el lado de un pentágono y su diagonal paralela—, no tienen unidad o parte alícuota *común* y por lo tanto no son conmensurables.

2. Determinar la longitud de la cuerda que divide la octava en dos intervalos iguales

Aunque este problema sale del contexto de las primeras relaciones armónicas entre cuerdas e intervalos establecidas en el fragmento 6 de Filolao, es interesante explicarlo como un ejemplo en el cual se pudo percibir por primera vez la inconmensurabilidad. Por su estructura, es muy probable que no se haya elaborado durante el primer pitagorismo, aunque habría que esperar a definir con mayor precisión las aportaciones armónicas en su desarrollo cronológico para poder ubicar en el tiempo con mayor certeza este ejemplo. Ya he explicado el uso de las medias aritméticas y armónicas para definir ciertos intervalos *(diástema)* a partir de una o dos cuerdas (véase supra: 72-76).

En el fragmento 6 de Filolao, es claro que ya se tenía conciencia de que una octava estaba formada por cinco tonos y dos *leimmas*. Los *leimmas* son intervalos menores al medio tono. En sentido estricto, no se puede hablar que una octava tenga seis tonos, sino hasta planteamientos posteriores como los de Aristoxeno que divide la octava en tonos y medios tonos, haciendo los ajustes correspondientes para igualar los medios tonos y poder hacer la equivalencia de un tono a dos medios tonos. Haciendo estas salvedades, el problema se pudo haber planteado aún en la primera etapa del pitagorismo: hay un intervalo que divide exactamente a la mitad el intervalo de octava —ya sea que lo conciba como tres tonos o como dos tonos y medio más un *leimma*— , la pregunta es: ¿cómo puedo determinar la longitud de la cuerda entre 1 y 2, que de una nota determinada con anterioridad y que divida la octava interválicamente a la mitad?

Si se tienen como cuerdas extremas DO_5 y Do_4 la nota que corresponde al intervalo de tres tonos es Fa#$_4$, este intervalo lleva irremediablemente a establecer la siguiente media geométrica $\sqrt{(a \bullet b)}$, que para este caso concreto es $\sqrt{(1 \bullet 2)}$, es decir, $\sqrt{2}$. La comparación de estas cuerdas, mediante un proceso de *antanairesis* daría como resultado un proceso reiterativo sin fin, lo cual lleva a la intuición de la inconmensurabilidad.

3. Los procesos cognitivos posteriores a la intuición de la inconmensurabilidad

Una vez intuída o percibida por primera vez la inconmensurabilidad, existen varias reacciones inmediatas. A. el desconcierto de que métodos y conceptos que han tenido éxito hasta ahora ya no lo tengan, la ruptura de paradigmas; B. la necesidad de encontrar nuevos métodos y conceptos que permitan salvar los procesos anteriores; C. la necesidad de demostrar con toda certeza de que la inconmensurabilidad es un hecho irrefutable.

A. El desconcierto

El desconcierto tiene que ver con conceptos, métodos y técnicas que habían sido utilizados con éxito y que habían funcionado para explicar una serie de hechos. Incluso estos conceptos, métodos y técnicas habían sido incorporados como presupuestos que eran la base firme para otros conceptos, métodos y técnicas. Algunos de estos presupuestos son los siguientes: la aritmética, la geometría y el mundo físico se pueden relacionar a partir de la unidad-punto-átomo. Las magnitudes pueden compararse y relacionarse a partir de unidades o partes alicuotas comunes. Las magnitudes pueden ser expresadas con exactitud a partir de números enteros o fraccionarios. Las técnicas y métodos elaborados a partir de estos presupuestos también quedan cuestionadas por la inconmmensurabilidad: razones, proporciones, teoría de los números enteros, teoría de los números fraccionarios, teoría de las partes alícuotas, series, progresiones, medias (aritméticas, geométricas y armónicas), las técnicas del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. Como se ve, la inconmensurabilidad implica un duro golpe a muchos paradigmas y presupuestos establecidos hasta ese momento.

B. La búsqueda

Por el punto anterior es clara la búsqueda de conceptos, métodos y técnicas que puedan rescatar los paradigmas establecidos, uno de esos intentos va encaminado a encontrar unidades comunes, otro intento es encontrar partes alicuotas comunes. En el primer caso por el método de lo múltiple y en el segundo caso por el método de la división. En ambos casos la problemática se amplía: ¿los procesos reiterativos al infinito pertenecen al mundo material o son una proyección de la capacidad imaginativa del ser humano? ¿la limitación espacial pertenece al mundo físico o son una proyección de mi incapacidad técnica para seguir dividiendo el espacio material? Es necesario aclarar las paradojas entre límite e infinito físico, entre la capacidad humana de percatarse de procesos que se proyectan al infinito y la incapacidad técnica de seguir dividiendo hasta el infinito.

C. Las demostraciones

De los dos puntos anteriores se comprende la necesidad de demostrar con toda certeza que la inconmensurabilidad es un hecho irrefutable.

Las argumentaciones que han llegado hasta nosotros para demostrar la inconmensurabilidad son muchas de ellas posteriores a la primera escuela pitagórica, se pueden clasificar de la siguiente manera:

Aritméticas:

De $\sqrt{2}$, por el método de lo par y lo impar. Atribuida a Aristóteles.
De $\sqrt{5}$, por el método de números fraccionarios p/q,
o de p como factor de q.

Geométricas:

De $\sqrt{2}$, a partir de la comparación de la hipotenusa con uno de sus catetos que mide una unidad. O a partir de la comparación de un cuadrado de lado uno, con su diagonal, por el método de reiteración infinita, y la comparación a un segmento fijo (unidad de longitud).
De $\sqrt{5}$, a partir de la comparación de una de las diagonales del pentágono con uno de sus lados, por el método de segmento fijo (unidad de longitud).

Armónicas:

De $\sqrt{2}$, a partir de la búsqueda de una longitud con valor entre 1 y 2 (que definen el intervalo de octava), que establezca un intervalo que divida exactamente en dos el intervalo de octava.

Dada la extensión de este trabajo, no profundizaré en el análisis de cada una de las demostraciones arriba descritas, aunque señalaré que todas las demostraciones van encaminadas a refutar los planteamientos hechos en el punto dos: para ciertas magnitudes no hay unidad o parte alícuota común. Estas magnitudes son inconmensurables no importando qué unidad de medida establezca o la cantidad de divisiones que haga a las magnitudes, en el intento de encontrar una parte alícuota común. La inconmensurabilidad es un hecho para cierta parte de la realidad y para ciertas relaciones, aunque existen otras relaciones que sí pueden ser expresadas por números enteros o fraccionarios, lo que queda claro es que con métodos geométricos puedo seguir determinando con exactitud cosas que no puedo determinar con exactitud por métodos aritméticos. La aritmética encontró por su parte una solución en el establecimiento de los números irracionales expresados por $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π, ϕ, etcétera. Así, la separación entre aritmética y geometría es un hecho irreversible para los griegos de la Antiguedad; quedarán en su ciencia los vestigios de esta relación elaborados antes del descubrimiento de la inconmensurabilidad. Por otra parte, un hecho muy importante de señalar es que si bien la geometría y la aritmética se separan, la relación entre geometría y mundo físico se conserva y se seguirá desarrollando en las ciencias establecidas hasta ese momento, y en nuevas ciencias geométrico-físicas, conocidas como ciencias mixtas. A continuación daré una breve semblanza de su desarrollo hasta el tiempo de Aristóteles.

VI LAS MATEMÁTICAS Y EL MUNDO FÍSICO: EL DESARROLLO DE LAS CIENCIAS MIXTAS DESPUÉS DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA INCONMENSURABILIDAD

Las ciencias matemáticas se siguieron desarrollando a partir de los presupuestos encontrados antes del descubrimiento de la inconmensurabilidad. Como ya he dicho, el único caso en el que hubo un cambio radical fue el desarrollo independiente de la aritmética y de la geometría, respecto al intento anterior de relacionarlas. No abordaré detalladamente el progreso que cada una de estas ciencias siguieron hasta el tiempo de Aristóteles, simplemente señalaré algunas de las ciencias de las que no he hablado, para hacer manifiesto que a pesar del descubrimiento de la inconmensurabilidad, las ciencias geométrico-físicas continuaron desarrollándose.

1. Geografía matemática

Anaximandro de Mileto fue el primero en elaborar mapas del mundo conocido a partir de ciertos criterios geométricos. Después de él hubo quienes perfeccionaron su carta, como Hecateo de Mileto (Kirk/Raven 1979: 150-151). Sócrates habla y recomienda aprender la aplicación de la astrología al viaje, a la navegación o a la guardia (Jenofonte 1993: 343). También nos habla de la aplicación de la geometría a la agrimensura (Jenofonte 1993: 341). Por su parte, Aristóteles y sobre todo Dicearco, intentaron hacer de la geografía una disciplina científica (Taton 1971: 404).

2. Estereometría

La estereometría es la ciencia *que estudia la dimensión de profundidad* (*República,* 528d y e. Platón 2000: 260-261), es decir, el estudio de las magnitudes espaciales o volúmenes, su colocación en el orden de las ciencias es después de la geometría, que es la ciencia de las líneas y las superficies, y antes de la astronomía, que trata también de las magnitudes en el espacio, pero dotadas de movimiento. Eudemo, discípulo de Aristóteles, considera como el autor de la estereometría al notable matemático Teeteto de Atenas, en cuyo honor y recuerdo Platón escribió un diálogo que lleva su nombre. Los descubrimientos de Teeteto podrían ser la fuente del libro XIII de los *Elementos* de Euclides (Jaeger 1978: 707). Esta ciencia se aplica a la mecánica, desarrollándola como ciencia mixta.

"[...] Platón no sigue la tradición que sólo admite las cuatro disciplinas matemáticas señaladas, sino que introduce a la enseñanza, como él mismo nos dice, una ciencia matemática completamente nueva: la estereometría" (Jaeger 1978: 707). (*República,* 528b. Platón 2000: 260).

3. Óptica

Las primeras fuentes documentales conocidas datan del siglo III a. C. y corresponden al *Tratado de óptica* atribuido a Euclides. "Pero los fragmentos y la doxografía de los presocráticos, algunas páginas de

Platón y de Aristóteles y la terminología de los geómetras a propósito de la línea recta conservan huellas de una ciencia óptica ya constituida antes de la era helenística" (Taton 1971: 269).

Pueden distinguirse varias perspectivas desde las cuales se estudió la óptica desde la Antigüedad: óptica fisiológica, óptica física, óptica geométrica y óptica psicológica (Ferraz 1974: 4).

La óptica antigua ha buscado soluciones al problema del sustrato físico y al de la propagación de la luz, así como al mecanismo de la percepción visual (Taton 1971: 269).

Las expresiones "tensión" o "tensar" las aplican algunos autores a la luz. Por ejemplo Platón en *La República,* 616b - 617a. Platón 2000: 375-376. (Taton 1971: 270). También los términos "tonalidad" o "tono" se aplican al color. A partir del uso de estos términos, puede indicarse una muy probable influencia de la armonía en la óptica, ya que al parecer la armonía se desarrolló primero y en un intento por aplicar métodos y conceptos desarrollados con éxito primeramente en la armonía se intentaron aplicar al estudio de la óptica.

La teoría de la luz tiene un tratamiento geométrico como representación de la luz a partir de la ficción del rayo visual (imaginar que la luz es una linea recta) (Taton 1971: 271).

"Por último, un teórico contemporáneo de Aristóteles o situado entre Platón y Aristóteles, transforma ese cuerpo de la visión —que tiene para Platón la forma de un cilindro muy sutil— en la línea abstracta del "rayo visual" con el que vemos trabajar a Aristóteles y a los tratadistas de óptica de la época helenística" (Taton 1971: 272).

"La definición de la línea recta como "aquello cuya parte central da sombra a los dos extremos", dada por Platón (*Parménides,* 137 E), recogida por Aristóteles (*Tópicos,* VI, 11, 148b 23-33. Aristóteles 1982: 252), y citada por Teón de Alejandría en su Catóptrica, así como las expresiones "tensión", "tensar", que algunos autores aplican a la luz, muestran que la ley de la propagación rectilínea de la luz ha sido verificada mediante experimentos con ayuda del tendel, o cordel de albañil, por los cuales la forma del rayo de luz se ha visto como idéntica a la figura de equilibrio de un hilo tenso, o sea de una recta" (Taton 1971: 270). La teoría de la percepción visual también tiene un tratamiento geométrico a partir del presupuesto de la unión del ojo con el objeto por medio de una línea recta. El ángulo que produce la luz del Sol entre una vara vertical y su sombra, implica una línea imaginaria que complete el triángulo, los rayos del Sol serían rectos.

Aristóteles ya utiliza explícitamente la línea recta para describir la trayectoria de la luz, aunque su desarrollo geométrico aparece con mayor evidencia en la época helenística y comienzos de la alejandrina (Taton 1971: 378). Algunos ejemplos de óptica-geométrica dados por Aristóteles se encuentran en su *Meteorológica,* III, 3 y siguientes.

4. Astronomía

Tales enseñaba que la Tierra es de forma esférica. Conocía los planos fundamentales: eclíptica y ecuador. A su sucesor en la escuela jónica, Anaximandro, se le atribuye el conocimiento del zodiaco y la invención del *gnómon* para observar los solsticios y los equinoccios (Abetti 1983: 48-49).

Se atribuyen a los primeros pitagóricos las ideas del movimiento de la Tierra, ya sea sobre su eje, ya sea en torno al Sol, aunque parecen pertenecer a Filolao y algunos filósofos posteriores adscritos a la escuela pitagórica. "La escuela pitagórica hizo progresar notablemente la ciencia matemática y la astronomía" (Abetti 1983: 49). Pitágoras enseñó que la Tierra está en el centro del mundo y que es esférica, habitada en las antípodas. Pitágoras notó la inclinación de la eclíptica sobre el ecuador "Ya se deba a Parménides o a Pitágoras, la doctrina de la forma esférica de la Tierra hizo progresos notables durante la primera mitad del siglo V. a. C." (Abetti 1983: 50). Platón dice que Dios hizo al universo redondo y esférico, asignándole movimiento adecuado a su forma, hay siete movimientos, y uno en relación con la inteligencia y el pensamiento, adecuado a la forma del universo.

1) Movimiento de rotación en torno a su eje.
2) De arriba a abajo.
3) De abajo a arriba.
4) De derecha a izquierda.
5) De izquierda a derecha.
6) De adelante para atrás.
7) De atrás para adelante.

"Por tanto hizo que girase uniformemente, circularmente, sin cambiar de lugar, revolviéndose sobre sí mismo. En cuanto a los seis movimientos, según los cuales el mundo habría podido cambiar de un lugar a otro, no se los otorgó..." (Abetti 1983: 53).

La astronomía estudiaba la forma y figura de los astros, los movimientos de los mismos.

Aristóteles en *De caelo* se atiene a la interpretación según la cual la Tierra, aun siendo el centro, gira en torno de su eje que atraviesa el mundo, afirmando que así está escrito en el *Timeo.* Hay solamente un pasaje que se pueda interpretar en este sentido, todos los demás llevan a la conclusión de la inmovilidad de la Tierra. "Schiaparelli suministra pruebas de que justo en los últimos años de su vida, Platón pensaba efectivamente en el movimiento de la Tierra. En efecto, Plutarco cuenta que Platón, ya viejo, "se arrepentía muchísimo de haber colocado la Tierra en medio del universo, en lugar no conveniente para ella...el puesto central es el más noble, debiendo reservarse a alguna otra cosa más digna" (Abetti 1983: 53-54).

Hubo una notable transformación del concepto y de la forma del universo, Platón imaginaba en sus primeros escritos que los dioses recorrían la bóveda celeste en sus carros. En cambio, en el *Fedón* ponía en duda que la Tierra fuese plana o redonda, después afirmó la hipótesis de que la Tierra fuera una figura esférica. En la *República* y en el *Timeo* explicó un sistema geocéntrico, muy semejante al perfeccionado por la escuela de Alejandría, y que fuera el más aceptado durante muchos siglos (Abetti 1983: 54).

"Fue un discípulo de Platón, Eudoxio de Cnido, quien perfeccionó el sistema de su maestro con la teoría de las "esferas homocéntricas" genial invención de la geometría antigua. Completada por Aristóteles y por Calipo, esta teoría fue adoptada generalmente hasta que, por obra de Hiparco, principalmente, fue sustituida por la teoría de las "excéntricas" y de los "epiciclos", pero sin abandonar del todo las esferas homocéntricas que fueron, durante la Edad Media, la base de la astronomía de los escolásticos y la armazón del "paraíso" de Dante" (Abetti 1983: 54-55).

"La característica principal del sistema de Eudoxio es la eliminación de todo movimiento de traslación, recurriendo solamente a la combinación de los movimientos rotatorios con una solución que no encontró su igual sino hasta los tiempos de Kepler" (Abetti 1983: 56).

De manera semejante a la de Platón, Eudoxio imaginó "que cada astro era llevado en giro por una esfera, describiendo así, durante la rotación un círculo máximo situado en el plano perpendicular al eje de rotación de la misma" (Abetti 1983: 56). Para explicar las distintas velocidades de los planetas en sus órbitas, sus estaciones y retrogradaciones, y sus movimientos en latitud "era necesario suponer que el planeta estuviera dotado de muchos movimientos [regulares] que al combinarse producirían el movimiento único, en apariencia irregular que se observa" (Abetti 1983: 56). Eudoxio agregó esferas concéntricas para interpretar los movimientos observados en los astros. Así pudo explicar los movimientos de los siete astros errantes con tres o cuatro esferas concéntricas "que llevaban sucesivamente los polos de las otras y que giraban con velocidad propia alrededor de sus propios polos" (Abetti 1983: 56-57). Siguiendo a Platón, Eudoxio también supuso que el orden de los planetas era el siguiente:

1) Saturno	4 esferas	
2) Júpiter	4 esferas	
3) Marte	4 esferas	
4) Mercurio	4 esferas	
5) Venus	4 esferas	
6) Sol	3 esferas	
7) Luna	3 esferas	
8) Estrellas fijas	1 esfera	En total 27 esferas.

Calipo, instruido en las teorías de Eudoxio, probablemente por Polemarco, concibió la idea de reformarlas y se dirigió a Atenas donde enseñaba Aristóteles. Calipo agregó algunas esferas, que ayudaron a describir mejor los movimientos de los astros, y que se ajustaban mejor y tomaban en cuenta ciertas diferencias. Había grandes discordancias en la teoría de Eudoxio en los movimientos de Marte, Mercurio y Venus, Calipo agregó otra esfera a la de Eudoxio.

Además sumó dos esferas al Sol, para representar la anomalía de su movimiento en longitud, descubierta cien años antes por Metón y por Euctemón. Esta anomalía se ponía en evidencia por la desigualdad de los cuatro intervalos en que los equinoccios y los solsticios dividían el año. Calipo representó con precisión el movimiento del Sol en longitud. Las modificaciones de Calipo representaban con mayor exactitud el movimiento de la Luna que la teoría de Metón, el período calíptico de 27, 759 días comprendía 940 lunas por lo que la duración de la lunación resultaba sólo 10 segundos mayor que la conocida ahora. "Aristóteles volvió a los sistemas de Eudoxio y Calipo con el propósito de reunir los movimientos de las diversas esferas y formar así un sistema único..." (Abetti 1983: 59). Haciendo depender las esferas inferiores de las superiores y justificar su dinámica cósmica, "según la cual, la fuerza motora del universo debía estar colocada en la circunferencia y propagarse hacia el centro" (Abetti 1983: 59). Aristóteles agregó nuevas esferas que llamó compensadoras, "[...] después de la última esfera más interna de cada planeta y antes de la esfera más externa del planeta inmediatamente inferior [...]" (Abetti 1983: 59).

Hasta aquí he estudiado de manera general las relaciones entre geometría y mundo físico iniciadas por Tales de Mileto y desarrolladas por la escuela jónica. Las aportaciones de la escuela pitagórica: el desarrollo de la aritmo-geometría, el establecimiento de la armonía, el intento de relación entre la aritmética, geometría y el mundo físico, el descubrimiento de la inconmensurabilidad y la separación entre la aritmética y la geometría. También he revisado el desarrollo posterior de algunas de las ciencias mixtas o geométrico-físicas. Este es un panorama que considero indispensable para poder comprender cabalmente los planteamientos que expone Aristóteles sobre estos tópicos.

CAPÍTULO TERCERO
ALGUNOS PRESUPUESTOS LÓGICOS Y METODOLÓGICOS EN ARISTÓTELES

Después de haber estudiado de forma general el desarrollo histórico de la aritmética, geometría y de las ciencias mixtas, estudiaré algunas de las teorías lógicas y metodológicas que están presupuestas en el *corpus aristotelicum,* necesarias para el estudio de los problemas que trato.

Como ya mencioné, estos problemas son las exclusiones y relaciones que se establecen entre:

Aritmética y geometría
Ciencias mixtas
Cantidad y cualidad
Objetos matemáticos y objetos físicos

Es importante tener una noción general de la teoría aristótélica de las categorías para dar un contexto al estudio de las dos categorías que analizamos con mayor detenimiento: la cantidad y la cualidad. Por otra parte, los tres primeros problemas están estrechamente vinculados con la teoría de los predicables, especialmente con las relaciones entre géneros, entre género y especie, y entre género, especie e individuo. Estas dos teorías se enmarcan en una más general, la teoría de la predicación. Asimismo, es indispensable abordar algunos aspectos de la teoría aristotélica de la ciencia, los más convenientes e importantes respecto de los problemas que trato.

I. TEORÍA DE LA PREDICACIÓN

1. Existencia y predicación

En muchas de sus obras y en una variedad de pasajes, Aristóteles hace la siguiente aclaración: "Y puesto que 'ser' se dice en muchos sentidos..." (*Metafísica,* V, 11,1019a 4 . Aristóteles1970/1982: 257. Aristóteles1994/1998: 233).

En griego el verbo *eimi* (tomado de forma aislada, es decir, sin complemento), se traduce como ser, existir, vivir, haber (García

Hughes 1956: 205; Pabón 1997: 176-177). El infinitivo del verbo *eimi* es *einai.* Este es un verbo muy rico y complejo; un verbo con muchos sentidos o significados con una gran cantidad de usos o funciones, algunas veces resulta ambiguo por lo que es necesario determinarlo o definirlo en todas sus variantes y contextos.

Inicialmente el verbo *eimi* tiene dos significados principales: *a)* existir o haber y *b)* ser o estar. En el primer sentido se refiere a cosas que existen efectivamente, Aristóteles lo utiliza en dos formas no personales: como participio presente: existente *(on, ousía, óntos),* y como gerundio: existiendo *(on, 'óntos).* Usado generalmente como *lo existente* o *como lo que está existiendo.* Para efectos de este estudio, me centraré en este sentido del verbo *eimi.* El gerundio indica la acción simultánea, durativa, la coincidencia temporal o la anterioridad inmediata. El participio presente la efectividad presente de la acción.

2. División de los existentes en cuatro sentidos

En el capítulo 2 del libro de *Categorías,* Aristóteles divide a los existentes de la siguiente manera:[18]

- Lo que existe
  - Cosas que no se dicen de sujeto alguno
    - Individuo. Ni están en un sujeto, ni se dicen de un sujeto.
    - Determinación o afección de un individuo. Están en un sujeto, sin que se digan de sujeto alguno.
  - Cosas que se dicen de un sujeto.
    - Lo que se dice teniendo como referente al individuo. Término singular, género o especie. Se dicen de un sujeto, sin que estén en sujeto alguno.
    - Lo que se dice teniendo como referente a la determinación o afección del individuo. Término singular, género o especie. Se dicen de un sujeto, y están en un sujeto.

[18] *Categorías,* 2, 1a 16 - 1b 9. Aristóteles 1982: 31-32.

El primer criterio consiste en dividir el *existente* en *cosas que se pueden decir* y en *cosas que no se pueden decir*. El segundo criterio consiste en dividir las *cosas que no se dicen de sujeto alguno,* en *individuos* y en *determinaciones de individuos,* que son cosas que no se predican pues son cosas extralingüísticas, singulares y concretas. Por otra parte, las *cosas que se dicen* se dividen en correspondencia a las *cosas que no se dicen:* si se dicen de los *individuos* como referentes y como algo común, entonces son *especies* o *géneros.* Si se dicen de *determinaciones de individuos* como referentes, entonces son *atributos.*

A partir de esta reflexión del lenguaje abstracto-simbólico, Aristóteles da un criterio para distinguir entre el mundo de los concretos y el mundo de los pensamientos. Aristóteles es heredero de una tradición fundamental en el pueblo griego: la gran importancia que daba al lenguaje, elemento de identidad nacional, así era griego quien hablaba griego, un bárbaro (extranjero) el que no hablara griego. Aristóteles fundamenta su obra en el análisis y reflexión del lenguaje, que estudia con detenimiento en su obra lógica. Estos elementos lógicos estarán implícitos a lo largo de toda la obra de Aristóteles, y sin referencia a ellos es difícil entender correctamente el pensamiento aristotélico contenido en el *corpus.*

3. La predicación

En el siguiente texto Aristóteles establece una serie de relaciones de predicación:

> Cierto que a partir de la entidad primaria no hay predicación alguna — en efecto, no se dice de ningún sujeto—; en cuanto a las entidades secundarias, la especie se predica del individuo, el género se predica tanto de la especie como del individuo, y de igual modo también las diferencias se predican de las especies y de los individuos. Y las entidades primarias admiten el enunciado, tanto de las especies como de los géneros, y la especie por su parte, admite el enunciado del género. En efecto, cuanto se dice del predicado se dirá también del sujeto; del mismo modo también las especies y los individuos admiten el enunciado de las diferencias: precisamente dijimos que eran sinónimas aquellas cosas cuyo nombre es común y cuyo enunciado es el mismo. De modo que todo lo que se dice a partir de las entidades y las diferencias se dice sinónimamente (*Categorías,* 5, 3a 36 - 3b 9, Aristóteles 1982: 38-39; véase: *Categorías,* 5, 2b 15 -2 4, Aristóteles 1982: 36).

Como ya he dicho, la *entidad primaria (individuo),* no se predica de nada porque no es una cosa lingüística, en cambio todo puede predicarse de ella, pues el individuo es fundamento de toda predicación.

En cuanto a las *entidades secundarias (cosas que se dicen de un sujeto),* la especie se predica del individuo, el género se predica tanto de la especie como del individuo, al igual que las diferencias se predican tanto de la especie como del individuo. Los individuos admiten el enunciado, es decir la definición, tanto de la especie como del género. La especie por su parte admite la definición del género. Y aquí, Aristóteles enuncia una regla importante: *cuanto se dice del predicado se dirá también del sujeto.* Por otra parte, los individuos como las especies admiten las diferencias o su definición. Otra regla importante es que *todo lo que se dice a partir de las entidades y las diferencias se dice sinónimamente.*

Todas estas relaciones de predicación son posibles, porque las cosas que se dicen tienen como fundamento de predicación al sujeto-individuo: "[...] para Aristoteles, mencionar «hombre» es mencionar la palabra *que significa* hombre [concreto, individual, sujeto]". (Aristóteles 1982: 12 introducción).

De igual forma, Aristóteles hace una importante relación del lenguaje oral o escrito con los individuos, las nociones universales y los actos psicológicos de pensamiento al inicio del libro *Peri Hermeneías:*

> Así, pues, lo <que hay> en el sonido <articulado> son símbolos de las afecciones que hay en el alma, y la escritura <es símbolo> de lo <que hay> en el sonido. Y, así como las letras no son las mismas para todos, tampoco los sonidos son los mismos. Ahora bien, aquello de lo que esas cosas son signos primordialmente, las afecciones del alma, son las mismas para todos, y aquello de lo que éstas son semejanzas, las cosas, también <son> las mismas (*Sobre la interpretación*, 1, 16a 4-8. Aristóteles 1988: 35-36).

Esquematizando la relación que establece Aristóteles entre el lenguaje y las cosas singulares puede indicarse que el lenguaje escrito es ***símbolo*** del lenguaje hablado, y éste es ***símbolo*** de las afecciones del alma que son ***semejanza*** de las cosas.

Nuevamente, el fundamento de toda predicación se encuentra en el sujeto-individuo.

4. La transitividad de la predicación

La transitividad de la predicación es una reiteración de lo dicho en el punto anterior. Los términos de mayor extensión se predican de los términos de menor extensión y los términos tienen como referente último al sujeto-individuo:

> [...] de las cosas que se dicen de un sujeto, es necesario que tanto el nombre como el enunciado se prediquen de dicho sujeto; vgr., *hombre* se dice del hombre individual como de un sujeto, y se predica de éste el nombre —pues del hombre individual predicarás *hombre*—y se predicará también el enunciado de *hombre* —pues el hombre individual es también hombre—: de modo que se predicará del sujeto tanto el nombre como el enunciado (*Categorías*, 5, 2a 20-29, Aristóteles 1982: 34).

Todo lo que se dice del predicado se dice también del sujeto. Esta transitividad de la predicación es posible por inclusión, ya que el género incluye a la especie y la especie incluye al sujeto—individuo.

5. El término *Hypokeímenon* en la predicación

El término *hypo-keimai* quiere decir: yacer o estar debajo; servir de base; estar sumiso a (García Hughes 1956: 669-670) estar sometido, obedecer (Pabón 1997: 607), se ha traducido como *sujeto.*

En un primer sentido *hypokeímenon* sirve de base para toda predicación, y la predicación se refiere al individuo concreto. Como he mencionado en la teoría de la predicación, Aristóteles insiste en que el fundamento de toda predicación es el individuo concreto, pues todo se predica de él, y éste no se predica de nada pues no es una cosa lingüística, Aristóteles usa el término sujeto o individuo casi indistintamente, casi como sinónimos. En un segundo sentido *hypokeímenon* se utiliza como un término funcional, por analogía al individuo, significa *aquello de lo que se predica algo,* sin que *aquello* sea necesariamente un individuo. En este caso Aristóteles siempre aclara, *"cuando una cosa se predica de otra como de un sujeto",* (*Categorías,* 3, 1b 10. Aristóteles 1982: 32). Ahora bien, las cosas que no son individuos, pero que funcionan como sujetos pues se predica algo de ellos, *son las cosas que se dicen.* Cualquier término (singular, especie o género), del cual se predique algo, estará funcionando como *hypokeímenon.*

Las cosas que se dicen aisladas, esto es, los términos o palabras pueden funcionar de dos maneras en la predicación, como sujetos o como predicados. Sujeto y predicado son términos funcionales y significan: predicado, <u>lo que se dice de</u>; sujeto, <u>de lo que se dice</u>. El sujeto puede ser un individuo, una especie, un género o un atributo.

Así pues cualquiera de los siguientes términos funciona como sujeto si se predica algo de él:

<u>Los sujetos en la línea del sujeto-individuo.</u>

Individuo. (Sujeto primero y propiamente sujeto).

Cosas que no se dicen de sujeto alguno.
Cosas extralingüísticas

. . . .

(Sujetos por extensión y por funcionalidad).

Cosas que se dicen de un sujeto. Y que pueden funcionar como sujetos.
Cosas lingüísticas.

Nombre singular.

Nombre común	Especie
	Género
	Diferencias

<u>Los sujetos en la línea de las determinaciones o afecciones.</u>

Verbo

Atributos:	Propiedades principales
	Propiedades derivadas
	Coincidente
	Algunas categorías

Respecto a la función predicado, las *cosas que se dicen de algo,* todas las cosas lingüísticas pueden funcionar como predicados. El individuo, *hypokeímenon* por excelencia, es claro que no puede funcionar como predicado, pues no es algo lingüístico.

En un tercer sentido *hypokeímenon* se dice respecto de la *kategoría.* En este sentido *hypokeímenon* se traduce como *lo que está debajo,* en comparación con *kategoría* que se traduce como *de lo alto, de arriba abajo, hacia abajo* (García Hughes 1956: 334. Pabón 1997: 325).
Con estas palabras, Aristóteles se refiere a la extensión de los términos. La *kategoría* se refiere a términos de mayor extensión, y el *hypokeímenon* se refiere a términos de menor extensión.

II. LAS *CATEGORÍAS* O LOS *GÉNEROS DE TÉRMINOS REFERENTES*

En el capítulo segundo del libro de las *Categorías,* Aristóteles hace la siguiente clasificación de las *cosas que se dicen:*[19]

Cosas que se dicen
- Sin combinar.
- En combinación.

Entre los varios estudios que hace Aristóteles sobre la predicación, destacan dos:

> El estudio sobre los predicados o categorías, en el que trata sobre las cosas que se dicen sin combinar.
>
> El estudio sobre los predicables, en el que trata sobre las cosas que se dicen en combinación.

Realizaré un análisis sobre estos dos estudios:

Categoría viene del griego *cat-egoria:* que quiere decir acusación o atributo, de la misma familia que el verbo *cat-egoreo:* censurar, criticar, reprochar; acusar; revelar, descubrir, manifestar; expresar, significar, enunciar, afirmar (Pabón 1997: 339). Así pues, en uno de sus sentidos, categoría quiere decir, lo que se atribuye a alguien (Aristóteles 1982: 32, nota 13).

[19] *Categorías,* 2, 1 a 16. Aristóteles 1982: 31.

Por otra parte, *cat-egoria,* es una palabra compuesta de *cata:* abajo, de lo alto, de arriba abajo, hacia abajo (García Hughes 1956: 334. Pabón 1997: 325), y de *agoreuo:* hablar en público; hablar, declarar, proclamar, responder; publicar, decir (García Hughes 1956: 16. Pabón 1997: 5). Desde el punto de vista de la predicación, Aristóteles utiliza el término *hypokeímena* lo que está debajo, para referirse en primer lugar y principalmente al sujeto-individuo, concreto y singular. Si relacionase en este sentido *cat-egoria* con *hypokeímena,* su traducción quedaría como: *lo que se dice de arriba hacia abajo.* Aristóteles maneja la extensión de los términos utilizando la palabra *arriba,* para referirse a lo más general, y la palabra *debajo* para expresar lo singular y concreto; es sin duda, una analogía que parte de lo visual; por ejemplo, en un teatro griego, los que están hasta abajo tienen una visión más reducida, parcial, pero más en contacto con la escena y los actores, en cambio, el que se encuentra en la última fila, hasta arriba, tiene una visión más amplia, del todo, de la escena, los actores, las demás butacas, su visión incluye más cosas. En este sentido *cat-egoria* significa lo más general, acerca del todo, lo que más abarca, *hypokeímena,* por el contrario, se refiere a lo particular y concreto: al sujeto-individuo.

Aristóteles define las categorías de la siguiente manera: "Cada una de las cosas que se dicen fuera de toda combinación, o bien *significa* una entidad, o bien un cuanto, o un cual, o un respecto a algo, o un donde, o un cuando, o un hallarse situado, o un estar, o un hacer, o un padecer" (*Categorías* 4, 1b 25. Aristóteles 1982: 33).

Las palabras tomadas de manera aislada o sin combinar pueden clasificarse respecto a lo que hacen referencia. Estos términos se pueden clasificar en clases con características comunes (especies), y estas clases se pueden clasificar en clases de clases (géneros). Las categorías son precisamente clases de clases o géneros de palabras teniendo como criterio *a lo que se refieren.*

Los términos o palabras tomadas de manera aislada de la proposición *significan* una entidad, un cuanto, un cual, etcétera. Las categorías son una clasificación de términos por lo que *significan,* teniendo en cuenta *a lo que se refieren.*

En un primer momento las categorías son grupos de términos formados a partir de *criterios de distinción y de semejanza,* lo que tienen en común los términos que designan una clase de individuos o de determinaciones. Las categorías son producto de la observación de distinciones y de semejanzas en los términos respecto a lo que se refieren, agrupados en clases de individuos o determinaciones, que dan como resultado clases de términos ya sean nombres comunes o atributos. Así las categorías son géneros de términos por lo que significan, corresponden "[...] a *los distintos tipos de existencia* que puede tener el referente de un término cualquiera [...]" (Aristóteles 1982: 27. Introducción).

Aristóteles hace un análisis sintáctico-semántico de las categorías, algunos de los criterios que utiliza son: tipo de preguntas a las que responden, predicabilidad respecto a otros términos, adverbios que admiten, tipos de oposición en que entran, etcétera (Aristóteles 1982: 27. Introducción).

Según E. Benvéniste, en su obra *Problèmes de linguistique générale*, señala que todas las categorías aristotélicas son reductibles a morfemas [unidad mínima de significado; que contiene en sí mismo información léxica o gramatical]: "Ello encaja perfectamente con la consideración de que no son sino «modulaciones» de la afirmación [...] de *existencia* realizada por todo juicio declarativo; o lo que es lo mismo: esquemas referenciales sintácticamente condicionados, pero formalmente aislables de su «combinación» sintáctica" (Aristóteles 1982: 28. Introducción). Esto quiere decir que son conjuntos de términos con una función común y que modulan la afirmación de existencia. Son esquemas referenciales sintácticamente condicionados, es decir; son palabras que se combinan para formar unidades más grandes como las oraciones, pero se pueden aislar de esta combinación sintáctica.

Son géneros de palabras que tienen una función común, por ejemplo, responder a la pregunta ¿cuánto?, éstas en un juicio declarativo son "modulaciones" de la afirmación de existencia. En algunas ocasiones en lugar del término *categorías* utilizaré la paráfrasis *géneros de términos referentes*, para hacer explícito que hablo de conjuntos de palabras con una función común, que además son un modo de la afirmación de existencia, esto es, son estructuras referentes a la existencia, lo que en algunas ocasiones ayudará a comprender mejor el texto estudiado.

1. El *cuanto* como *género de términos referentes*

Existen dos obras en las que Aristóteles trata de manera particular y con amplitud la cantidad y la cualidad, *Categorías* y *Metafísica.*

A. El *cuanto* en el libro de *Categorías*

Aristóteles hace varias divisiones del *cuanto* siguiendo distintos criterios. En primer lugar distingue el cuanto considerado en sí mismo, y el cuanto considerado como coincidente y en relación con otro. Al cuanto en sí mismo lo divide usando dos criterios distintos.

A partir del primer criterio divide al cuanto en sí mismo como discreto o continuo. El cuanto discreto se conforma por partes separadas, esto es, sus partes no coinciden en un límite común; por ejemplo: el número y el enunciado. En el cuanto continuo *es posible tomar un límite común en el que coincidan sus partes,* porque no tiene partes separadas; ejemplos: la línea, la superficie, el cuerpo, el tiempo y el lugar. A partir del segundo criterio divide al cuanto en sí mismo en:

Cuanto que consta de partes componentes con una posición mutua, ejemplos: línea, plano, espacio y lugar.
Cuanto que no consta de partes componentes pero que mantienen una posición mutua, ejemplos: número, tiempo y enunciado.

Mantener una posición mutua significa, que cada una de sus partes se distingue y se halla en un lugar, además se puede decir de cada parte con cuál de las restantes partes se toca; su posición está relacionada con el lugar y la ubicación de las partes en el espacio, asimismo las partes componentes se tocan entre sí (mutuamente).

Aristóteles deja implícitas otras dos características: la existencia simultánea de las partes, en contraposición con la existencia sucesiva. Por ejemplo, las partes del tiempo o el enunciado cuando se dice, no permanecen juntas, es decir, no son partes simultáneas sino partes sucesivas. En las partes que se dan de manera simultánea puedo relacionar unas partes con otras, una con varias, o todas con todas, lo que Aristóteles llama "que mantienen una posición mutua", en cambio en las partes que son sucesivas, solamente se puede relacionar esa parte con la parte anterior y con la parte posterior, lo que Aristóteles llama mantener un cierto orden, *por ser una parte del tiempo anterior y otra posterior.* Asimismo, el número también guarda un cierto orden de anterior y posterior, el uno se cuenta antes que el dos y el dos se cuenta antes que el tres, y así sucesivamente, en cambio una posición en el número *no puede determinarse.* A estas cosas se les llama propiamente *cuantas.*

Al considerar unas cosas, llamamos también cuantas a las otras, por coincidencia o en relación con las otras, por ejemplo, blanco y acción. Se llama cuanto al blanco, porque coincide con una superficie. De igual forma si al blanco se le menciona cuanto es en relación con la superficie con quien coincide, se le denomina cuanto a la acción en relación con su duración o con su movimiento.

Aristóteles ofrece algunas características del cuanto: lo cuanto no tiene ningún contrario, donde parece darse la contrariedad de lo cuanto es en el lugar, por ejemplo, en arriba y abajo, abajo es la región más próxima al centro, la distancia entre el centro y los límites del mundo es la máxima; los contrarios se definen como aquellos que guardan recíprocamente la máxima distancia dentro del mismo género. En tanto, el cuanto no parece que admita el más y el menos. Lo más propio de lo cuanto es que se le llame igual o desigual (*Categorías,* 6, 4b 20 - 6a 35. Aristóteles 1982: 42-47).

B. El *cuanto* en el libro V de *Metafísica*

"Se dice que posee «cantidad» lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales —sean dos o más de dos— son por naturaleza algo uno, y algo determinado" (*Metafísica,* V, 13, 1020a 6-9. Aristóteles 1994/1998: 237-238).

Lo que es divisible posee *cantidad,* pero Aristóteles no se refiere a cualquier tipo de división, sino a la división en partes internas, en partes constitutivas, cada una de las partes en las que se divide son por naturaleza algo uno y determinado. En este libro Aristóteles define dos tipos de cantidad:

"Una pluralidad es una cantidad si es numerable, y también lo es una magnitud si es mensurable. Se llama «pluralidad» lo potencialmente divisible en partes discontinuas, y «magnitud» lo divisible en partes continuas" (*Metafísica,* V, 13, 1020a 9-11. Aristóteles 1994/1998:

238). Es muy interesante el proceso de definición: en primer lugar, define la cantidad a partir de un condicional: una pluralidad es cantidad si es numerable; una magnitud es cantidad si es mensurable; esto quiere decir que la pluralidad y la magnitud son cantidades en cuanto están relacionadas con una acción de contar o de medir, la pluralidad y la magnitud son cantidades, pues éstas son divisibles.

A continuación Aristóteles señala los tipos de magnitud continua: "[...] la magnitud que es continua en una dimensión es longitud, la que lo es en dos es latitud, y la que lo es en tres es profundidad" (*Metafísica,* V, 13, 1020a 11-12. Aristóteles 1994/1998: 238). En seguida, lleva su discurso de lo general a lo específico: "[...] la pluralidad limitada es número, la longitud es línea, la latitud es superficie y la profundidad es cuerpo" (*Metafísica,* V, 13, 1020a 13-14. Aristóteles 1994/1998: 238).

De ciertas cosas se dice que poseen cantidad en sí y de otras que poseen cantidad coincidentemente o en relación con otro.

Las cosas que poseen cantidad en sí son de dos tipos: las cosas que poseen cantidad en sí en virtud de su entidad, por ejemplo la línea, porque entra en su definición que *posee cierta cantidad.*

Las otras cosas que poseen cantidad en sí son las afecciones y posesiones de tal tipo de entidad, por ejemplo, mucho-poco, largo-corto, ancho-estrecho, alto-bajo, pesado-ligero, grande-pequeño, mayor-menor, tanto si se consideran en sí como en relación con otro.

Las cosas que se dice que poseen cantidad *coincidentemente,* son de dos tipos:

a) Existen cosas que se dicen que tienen cantidad por ser algo cuanto aquello en lo que están, por ejemplo, lo blanco que se da en la superficie o lo músico que se da en un cuerpo o en la acción.

b) Se dicen *cuanto* las cosas que poseen movimiento y tiempo. De otras cosas se dice que poseen cantidad *coincidentemente,* en el sentido en que poseen cantidad el movimiento y el tiempo, *éstos se dicen cuantos y continuos, por ser divisibles aquellas cosas de las que éstos son afecciones.* Me refiero no a lo que se mueve, sino a través de lo que fue movido (el espacio recorrido) el espacio es *cuanto,* y al ser *cuanto* el espacio, lo es el movimiento, y al ser *cuanto* el movimiento, es a su vez *cuanto* el tiempo. El tiempo y el movimiento son de las cosas que poseen cantidad *coincidentemente,* pues se les predica la cantidad en relación con otro (*Metafísica,* V, 13, 1020a 6-32. Aristóteles 1994/1998: 237-239. Aristóteles 1970/1982: 266).

2. El *cual* como *género de términos referentes*

A. El *cual* en el libro de *Categorías*

El *cual* es un criterio de distinción. De definición entre cosas parecidas, también es un criterio de identificación de un objeto a partir de una mayor determinación de sus características. El *cual* es una característica que distingue al objeto de otros semejantes o permite identificar al objeto gracias a una mayor precisión. "Llamo *cualidad* aquello según lo cual algunos se llaman *tales* o *cuales* [...]" (*Categorías,* 8, 8b 25 - 26. Aristóteles 1982: 55).

La cualidad es de las cosas que se dicen de varias maneras, y hay cuatro sentidos o géneros fundamentales:

a. La cualidad como estado y disposición
El estado es más estable y duradero que la disposición, no es fácilmente mudable o suceptible de cambio, tiene una mayor permanencia, se llaman disposiciones a las cosas que son fácilmente mudables y cambian con rapidez, los estados son disposiciones, pero las disposiciones no son estados.

b. La cualidad como capacidad o incapacidad natural
Tener capacidad natural para hacer algo con facilidad o para no padecer nada.

c. La cualidad como cualidad afectiva o afección
Se llaman cualidades afectivas por el hecho de que cada una es productora de una afección en los sentidos; "[...] cualquier disposición de la envoltura corporal que se produzca momentáneamente en uno al avergonzarse [...]" (*Categorías,* 8, 9b 16. Aristóteles1982: 57).

Las cualidades tienen una cierta permanencia, para ser llamados tales o cuales. En cambio, "todo lo que se origina a partir de cosas que se descomponen fácilmente y se retiran con rapidez, se llaman *afecciones:* en efecto, nadie es llamado *tal* o *cual* en virtud de estas cosas [...]" (*Categorías,* 8, 9b 28-30. Aristóteles 1982: 58).

d. La cualidad como figura y forma. Por ejemplo, recto o curvo, triangular o cuadrado, etcétera.

Las cualidades en su mayoría se dicen parónimamente (familias de palabras por medio de un cambio en la inflexión. Aristóteles toma como punto de partida sustantivos, haciendo derivar de ellos los adjetivos).

En lo *cual,* se presenta la contrariedad. Aunque hay excepciones, si una cosa es *cual,* su contario será también *cual.*

La mayoría de los *cuales* admiten el más y el menos. Las figuras no admiten el más y el menos, aun siendo *cuales.*

Lo semejante y lo desemejante se dice sólo de las cualidades. Lo más propio de lo *cual* es que se le llama semejante "[...] en efecto, una cosa no es semejante a otra más que en la medida en que es *tal* o *cual".* (*Categorías,* 8, 11a 16. Aristóteles 1982: 62). Muchas de las cosas *cuales* son *respecto de algo.* Se llaman *tales* o *cuales* por las singularidades, pero las singularidades no son *respecto de algo,* solamente los géneros son *respecto de algo* (Categorías, 8, 8b 25 - 11a 40. Aristóteles 1982: 55-63).

B. El *cual* en el libro V de *Metafísica*

Se llama cualidad a la diferencia de *lo que está existiendo* (*ousia,* en este caso se refiere al individuo o a la especie). La cualidad es una característica que diferencía un individuo de otro o una especie de otra especie.

La cualidad se aplica a las cosas inmóviles, es decir, a las realidades matemáticas: la entidad de cada número es lo que se da una sola vez, y en este sentido el número es cantidad, pero en la medida que el número se repite dos o tres veces, posee ciertas cualidades, ya que sus representaciones son la superficie o el sólido. Los números compuestos poseen ciertas cualidades, las cualidades de los números en general, son lo que comprende su entidad al margen de la cantidad.

"[...] *todas las afecciones de las entidades sometidas a movimiento*, como el calor y el frío, la blancura y la negrura, la pesadez y la ligereza y todas las de este tipo en las cuales se dice que sufren alteración los cuerpos de las cosas que cambian" (*Metafísica*, V, 14, 1020b 9-12. Aristóteles1994/1998: 239-240). "Además se habla de cualidad en el sentido de *la virtud y la maldad* y, en general, *del mal y del bien* "

De estos cuatro sentidos de cualidad, Aristóteles toma dos:

Diferencia del existente, pues en ésta incluye a la cualidad aplicada a las realidades matemáticas, pues son una diferencia de entidades no sometidas a movimiento o no en tanto que sometidas a movimiento.

Afecciones de las entidades sometidas a movimiento, en las que incluye el cuarto sentido (virtud, mal y bien), pues también son afecciones sometidas a movimiento. De estos dos sentidos, el primero es el principal *(Metafísica*, V, 14, 1020a 33-1020b 24. Aristóteles1994/98: 239-240).

Así, cabe hablar de la cualidad en dos sentidos, y de éstos hay un sentido principal.

III. DEFINICIÓN, PROPIO, GÉNERO Y COINCIDENTE

El estudio de los predicables es uno de los análisis que hace Aristóteles sobre las cosas que se dicen en combinación (*Categorías*, 2, 1 a 16. Aristóteles 1982: 31). Este estudio trata de los términos y sus relaciones mutuas en proposiciones y argumentos. Es un análisis más abstracto y funcional que el de las categorías, para clasificar estos términos funcionales Aristóteles toma dos criterios principales: su extensión relativa y si es parte componente de la definición o no.

Aunque el término *predicable* es adecuado, en algunas ocasiones me refiero a ellos como *funciones predicativas de los términos*, o simplemente *funciones predicativas*. Aristóteles estudió estos términos funcionales en el libro de los *Tópicos*. Literalmente *tópicos* significa lugares comunes, y se refieren a *los mecanismos relacionales entre términos comunes a un grupo de argumentos*, en *Tópicos* se estudian las diversas estructuras generales de ciertos grupos de argumentos a partir de las relaciones de las *funciones predicativas;* se estudia además, como se pueden establecer o no las *funciones predicativas* de una manera general, y los métodos, técnicas y criterios de razonamiento para estructurar una proposición en general a partir de estas *funciones predicativas.*

Las *funciones predicativas* se establecen a partir de los siguientes criterios: un predicado puede darse en la línea del sujeto-individuo como género, o darse en la línea de las determinaciones o afecciones del individuo ya como propio, ya como coincidente. Dentro de lo propio, está incluída la definición que siginifca el *que era ser esto* y el propio que no lo significa, dentro del género se estudian varios términos: la diferencia, la especie, el nombre singular, el individuo.

Antes de iniciar su estudio general sobre los argumentos, Aristóteles define las cuatro funciones predicativas, tomando dos criterios: la extensión del término, y si el término significa el *que era ser esto,* es decir, si el término forma parte o no, de la definición. Y si dos conceptos son intercambiables en la predicación, es decir, si tienen la misma extensión.

Desde el punto de vista de la predicación el *que era ser esto* se expresa en la definición, que se conforma a partir de las características necesarias y suficientes para determinar en qué consiste ser tal cosa. A partir de estos elementos importantes e indispensables puede identificarse y distinguirse la cosa a la que se refiere la definición.

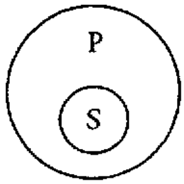
Aristóteles define cada una de las *funciones predicativas:*

El género: "es lo que se predica, dentro del *qué es* acerca de varias cosas que difieren en especie." (*Tópicos* I, 102a 31. Aristóteles 1982: 97). Más adelante, Aristóteles indicará que el género no es intercambiable en la predicación, porque es más extenso que la especie (*Tópicos* I, 103b 12-15, Aristóteles 1982: 102).

El género es un término que forma parte de la definición. Desde el punto de vista de la extensión y de la predicación S-P (sujeto-predicado) el género como P, incluye al S, es decir, que el género es más extenso. Su representación simbólica es:

$$S \supset P$$

su representación en diagramas de Venn-Euler es

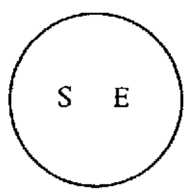


La definición: es un enunciado que significa el *qué es ser*. Se puede dar como explicación un enunciado en lugar de un nombre, o se puede presentar como explicación un enunciado en lugar de otro enunciado. Además de los enunciados explicativos que significan el *qué es*, Aristóteles dice que son enunciados definitorios, los enunciados que sin dar el género y la diferencia, dicen qué es la cosa. También son definitorios los problemas que plantean si algo es idéntico o distinto a otra cosa (*Tópicos* I, 101b 37. Aristóteles1982: 95-96).

La definición es un enunciado que responde a la pregunta *¿qué era ser esto?* Desde el punto de vista de la extensión y de la predicación S-E (sujeto-enunciado), el enunciado que constituye la definición funciona como P y es idéntico en extensión al S que define. Su representación simbólica es:

$$S \equiv E$$

su representación en diagramas de Venn-Euler es



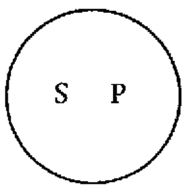
Las características o notas que constituyen la definición son propiedades principales, suficientes, indispensables y necesarias.

El propio: "es lo que no indica el *qué es ser*, pero se da sólo en tal objeto y puede intercambiarse con él en la predicación" (*Tópicos* I, 102a 19. Aristóteles 1982: 96).

El propio es una característica o propiedad derivada, es decir que no es una característica principal que conforme la definición; aunque se refiere al *qué era ser esto,* puede llegar a considerarse como una definición alternativa y no principal; empero, la definición es un enunciado y el propio es un término-predicado. El propio no forma parte de la definición, pero es exclusivo de S. Desde el punto de vista de la extensión y de la predicación S-P (sujeto-predicado) el propio como predicado es coextensivo e idéntico al S, su representación simbólica es:

$$S = P$$

su representación en diagramas de Venn-Euler es

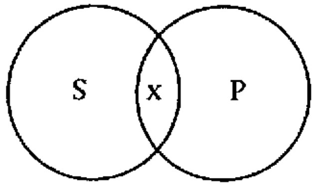


El coincidente: "es lo que no es ninguna de esas cosas: ni definición, ni propio, ni género, pero se da en un objeto; y también lo que puede darse o no darse en una misma cosa [...]" (*Tópicos* I, 102b 3-6. Aristóteles1982: 97). Nada impide que el *coincidente* llegue a ser un *propio en algunas ocasiones* y un *propio respecto a algo* (*Tópicos* I, 102b 22-23. Aristóteles1982: 98).

El coincidente como predicado es algo que de hecho se da en el individuo, pero que no es definición, ni propio, ni género, es algo que puede darse o no en el sujeto. Esta es otra manera de comparar el coincidente con la definición, el propio y el género; estas tres funciones predicativas tienen un grado de necesidad respecto al sujeto, en cambio el coincidente es algo que se predica del individuo, pero no es necesario, es un hecho, se da en el sujeto-individuo, no obstante, no es necesario, no tiene por qué darse así. Aunque no pertenece a la definición, ni es una propiedad derivada que se dé siempre y de manera exclusiva, el coincidente se predica del sujeto-individuo, porque es un hecho que se da o se relaciona con el individuo. De esta forma, hay un grado de identificación, simbólicamente se representa por la conjunción:

$$S \bullet P$$

su representación en diagramas de Venn-Euler es de la siguiente forma



Donde x representa la coincidencia entre S y P, o el sujeto-individuo, en el que coinciden S y P.

Después de definir las *funciones predicativas,* Aristóteles presenta una serie de conclusiones generales, sobre la estructura de los argumentos, sobre algunas relaciones generales entre los términos en la proposición; además, presenta métodos, técnicas y criterios para establecer y determinar qué *función predicativa* está desempeñando cierto término-predicado.

La elaboración de las proposiciones a partir de métodos, criterios y técnicas para relacionar los términos a partir de sus funciones predicativas, tendrá una gran importancia para lo que Aristóteles denomina la parte inductiva de la ciencia, que trataré en el apartado de la estructura de los principios en la ciencia.

Para terminar con el análisis de las *figuras predicativas* estudiaremos algunas relaciones establecidas por Aristóteles respecto a la extensión entre géneros y del género con la especie y el sujeto-individuo.

1. Relaciones entre género, especie, diferencia e individuo

A. Género

La definición de género la trata Aristóteles principalmente en *Tópicos* y en *Metafísica.* El género: "es lo que se predica, dentro del *qué es* acerca de varias cosas que difieren en especie" (*Tópicos,* I, 102a 31. Aristóteles1982: 97), el género se puede predicar tanto de la especie como del individuo.

En *Metafísica,* Aristóteles presenta cuatro sentidos de lo que es el género:

La generación, si es ininterrumpida, de los individuos de la misma especie.

Se toma la denominación como género, de aquél del cual se procede, del primero que inició el movimiento hacia la existencia. Se denominan como género Helenos, porque provienen de Heleno como su progenitor.

También se entiende como género el sujeto de las diferencias. Aquello de lo que se predican las diferencias; el sujeto es también el nombre común del cual se predican las diferencias.

Género se entiende también como el componente primero de las definiciones que aparece formulado en el *qué es.* Del género se denominan «diferencias», las determinaciones que pertenecen al conjunto de géneros, subgéneros y especies que responden a la pregunta *cuál* (*Metafísica,* V, 28, 1024a 29 - 1024b 6. Aristóteles 1994/1998: 258-259 Aristóteles 1970/1982: 294-295; García Hughes, 1956: 669).

Algunos de los principios respecto al género tratados en *Tópicos* son:

Participar de algo es admitir el enunciado <explicativo> de lo participado (*Tópicos,* IV, 1, 121a 10. Aristóteles 1982: 162).

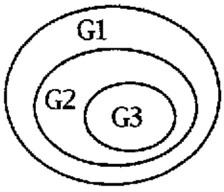
Las cosas individuales participan del género y de la especie (*Tópicos,* IV, 1, 121a 39-40. Aristóteles 1982: 164).

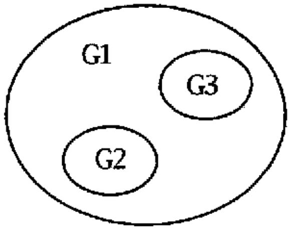
El género se dice sobre más cosas que la especie y la diferencia: pues también la diferencia se dice sobre menos cosas que el género (*Tópicos,* IV, 1, 121b 13-14. Aristóteles 1982: 164).

Cuando una especie está bajo dos géneros, uno de ellos está contenido en el otro (*Tópicos,* IV, 2, 121b 29-30. Aristóteles 1982: 165).

Los géneros de una misma cosa están subordinados entre sí o subordinados ambos al mismo género (*Tópicos,* IV, 2, 121b 35-36. Aristóteles 1982: 165).

Representación gráfica de





géneros subordinados entre sí géneros subordinados al mismo género

Si los géneros no están, ni subordinados entre sí, ni subordinados ambos al mismo, el género aplicado no será tal (*Tópicos,* IV, 2, 122a 1-2. Aristóteles 1982: 165).

Es necesario que los enunciados de los géneros se prediquen de la especie y de las cosas que participan de esa especie (*Tópicos,* IV, 2, 122b 8-9. Aristóteles 1982: 167).

Algunas cosas no es posible ponerlas en un único género, pueden estar en dos o varios géneros (*Tópicos,* IV, 5, 126b 7-9. Aristóteles 1982: 180).

Las especies de todo género son diferentes (*Tópicos,* IV, 6, 127a 25. Aristóteles 1982: 183).

El género dado como explicación se dice de la especie como de un sujeto (*Tópicos,* IV, 6, 127b 4. Aristóteles 1982: 183).

El género se predica sinónimamente de todas las especies (*Tópicos,* IV, 6, 127b 5. Aristóteles 1982: 183).

Si el género admite el *más* y la especie no, (ni ella ni lo que se dice de acuerdo con ella), lo dado como explicación no será género (*Tópicos,* IV, 6, 127b 23-25. Aristóteles 1982: 184).

Si alguien explica qué es la entidad primera, dará una explicación más comprensible y adecuada aplicando la especie que aplicando el género (*Categorías,* 5, 2b 10-14. Aristóteles 1982: 35).

B. Especie

La especie se predica del individuo (*Categorías,* 5, 3a 38. Aristóteles 1982: 38). Además, la especie tiene menor extensión que el género (*Tópicos,* IV, 2, 122b 37. Aristóteles 1982: 168.), de tal manera que en todo género hay varias especies (*Tópicos,* IV, 2, 123a 30. Aristóteles 1982: 170), asimismo, la especie es más extensa que el sujeto-individuo y las determinaciones del sujeto-individuo tomadas por separado y de igual extensión que las entidades concretas tomadas en su totalidad.

Con respecto a la intercambiabilidad de la predicación, la especie no puede intercambiarse con el individuo o con el género, puede intercambiarse con la definición o con las entidades concretas tomadas en su totalidad.

Respecto a la inclusión, la especie incluye a la entidad concreta considerada como numéricamente una; es igual, en extensión y comprensión, a las entidades concretas tomadas como totalidad; lo mismo ocurre con la definición; además, la especie está incluida en la diferencia y en el género, la *especie* indica el *qué es ser* tal cosa.

De las relaciones de extensión entre género y especie (*Tópicos,* II, 4, 111a 20-29. Aristóteles 1982: 129-130.), es importante señalar que:

Todo lo que se da en la especie es necesario que se dé también en el género.

No es necesario que todo lo que se da en el género se presente también en la especie.

Todo lo que no se da en el género tampoco surge en la especie.

Todo lo que no ocurre en la especie no es necesario que no ocurra en el género.

Es necesario que, de las cosas de las que se predica el género, se predique también alguna de las especies.

C. Diferencia

Diferencia en un género es el nombre común por el cual se distingue una especie de otra. La diferencia genérica se aplica a un género más universal en relación con un género menos universal, la diferencia específica se predica del género en relación con la especie, la diferencia específica distingue una especie de las demás especies contenidas en un género. En cuanto a la intercambiabilidad de la predicación, la diferencia no es intercambiable con ninguno de los demás universales.

Respecto de la inclusión, la diferencia está incluida en el género (*Tópicos*, IV, 1, 121b 12-14. Aristóteles1982: 164.), la diferencia incluye o es igual en extensión que la especie (*Tópicos*, IV, 2, 123a 1-2. Aristóteles 1982: 169), la diferencia está incluida en el enunciado de la definición (*Tópicos*, IV, 2, 123a 17-18. Aristóteles1982: 169).

La diferencia no indica *qué es* sino un *cuál* (*Tópicos*, IV, 2, 122b 16. 1982: 168). La diferencia no es género, ni especie, ni individuo. (*Tópicos*, IV, 2, 122b 15-17, 21-22. Aristóteles 1982: 168).

D. Individuo

Aristóteles se refiere al individuo utilizando distintas palabras y en especial usando palabras funcionales (*ousía:* entidad, *átomos:* individuo, *hypokeímenon:* sujeto, *kath'hékaston:* singular).[20] Al utilizar la palabra *ousía* que se traduce como *entidad* nos dice:

> Entidad [el que está existiendo o el existente], la así llamada con más propiedad, más primariamente y en más alto grado, es aquella que, ni se dice de un sujeto, ni está en un sujeto, vgr., el hombre individual o el caballo individual (*Categorías* 3, 1b 5. Aristóteles1982: 32).

---

[20] *ousía:* elemento primordial, || esencia, sustancia, ser; propiedad; naturaleza; realidad, existencia, vida; fortuna, hacienda, bienes, riqueza (García Hughes 1956: 468; Pabón 1997: 440).
átomos: no cortado; indivisible (García Hughes 1956: 116; Pabón 1997: 94).
hypó-keimai: yacer, estar debajo, servir de base, estar a los pies de,estar sometido, obedecer; estar a la vista, estar presente; estar resuelto, estar decidido, subsistir; corresponder (García Hughes 1956: 669-670; Pabón 1997: 607).
kath'hékaston: de *kath-ékọ:* llegar hasta; acabar en || lanzarse, bajar a la arena, al combate; bajar hasta, llegar a; venir; señalar, fijar (hablando de tiempo), o de *kath-íẹmi:* bajar, hacer bajar; hacer caer, lanzar hacia abajo; dejar caer (García Hughes 1956: 327; Pabón 1997: 317-318).

Así lo que se llama primeramente entidad, son las cosas concretas no lingüísticas. Al decir entidad en su primer y más fuerte sentido, no solamente se refiere a los individios, sino también a sus partes o a los elementos simples que los constituyen, pero que siguen siendo cosas extralingüísticas.

> Se llaman «entidad» <1> *los cuerpos simples* —por ejemplo, la tierra, el fuego, el agua y cuantos son tales— y, en general, *los cuerpos y sus compuestos,* animales y divinidades [se refiere a los cuerpos celestes], así como sus partes. Todas estas cosas se dice que son entidad porque no se predican de un sujeto; al contrario, las demás cosas <se predican> de ellos (*Metafísica,* V, 1017b 10-14. Aristóteles 1994/1998:226).

Cuando se utiliza *hypokeímenon,* sujeto, se hace referencia al individuo o a lo concreto existente fuera del lenguaje, que es base de toda predicación.

> [...] las cosas individuales y numéricamente singulares, en general, no se dicen de ningún sujeto, pero nada impide que algunas estén en un sujeto: en efecto, el concreto saber leer y escribir es de las cosas que están en un sujeto (*Categorías* 3, 1b 5. Aristóteles1982: 32).

Tanto *hypokeímenon* (sujeto) como *kath'hékaston* (singular), son palabras relativas (aplican *en relación con*), y tienen una palabra correlativa opuesta: *hypokeímenon* (hacia abajo) — *cat-egoreo* (de arriba); *kath'hékaston* (singular) — *kath'ólou* (total,en general). Había una analogía establecida para referirse a lo universal o lo particular, respecto al arriba (general) o abajo (particular) en la arena o el teatro.

> [...] la especie se predica del individuo, el género se predica tanto de la especie como del individuo, y de igual modo también las diferencias se predican de las especies y de los individuos. Y las entidades primarias admiten el enunciado, tanto de las especies como de los géneros, y la especie, por su parte, admite el enunciado del género. En efecto, cuanto se dice del predicado se dirá también del sujeto; del mismo modo también las especies y los individuos admiten el enunciado de las diferencias [...] (*Categorías* 5, 3a 38 - 3b 7. Aristóteles 1982: 38).

IV. LA CIENCIA

La ciencia es un tipo de conocimiento que tiene características bien definidas, es necesario el estudio general del concepto aristotélico de ciencia, para comprender con claridad las relaciones que se establecen entre las ciencias matemáticas y entre las diferentes ciencias que intervienen en la conformación de las ciencias mixtas.

1. Tipos de conocimiento

En el libro primero de la *Metafísica,* Aristóteles hace un estudio comparativo y gradual de distintos tipos de conocimiento:

Tipos de conocimiento
(Graduación del conocimiento de lo concreto a lo universal)

aísthesis	sensación:	singular-presente
fantasíai	imagen:	singular-ausente
mneme	recuerdo:	singular-ausente-pasado
empeiría	experiencia:	singular-casos semejantes
tecne	técnica o arte:	acerca del todo-por grupo
epistéme, sofía	ciencia o saber:	acerca del todo-por grupo-necesario

De estos conocimientos el hombre comparte con los animales la sensación, la imagen y hasta cierto punto la experiencia (se puede distinguir entre experiencia animal y experiencia humana), pero la técnica o arte, y la ciencia o saber son conocimientos propiamente humanos.

El saber *—epistéme—* se dice de tres maneras: como saber productivo *(epistéme poietiké),* como saber práctico *(epistéme praktiké),* y como saber contemplativo *(epistéme theoretiké),* (*Tópicos,* VI, 6, 145a 15-19. Aristóteles 1982: 241; *Metafísica,* XI, 1064a 10-16. Aristóteles 1994/1998: 445; *Ética Nicomaquea,* VI, 2, 1139a 27-30. Aristóteles 1985/1988: 269).

El saber productivo es el saber hacer, producir o fabricar, éste se ajusta a reglas y principios, y no solamente a meras rutinas empíricas. El saber práctico es el saber actuar, el saber comportarse del modo óptimo o adecuado, no se trata de producir algo bueno, sino de actuar bien. El saber contemplativo no responde al interés por la producción ni por la acción y tiene el conocimiento como fin, algo deseable y satisfactorio por sí mismo. Aristóteles divide el saber contemplativo o ciencia en: física, matemática y teología (*Metafísica,* XI, 1064b 1. Aristóteles 1994/1998: 447).

Aristóteles señala además la existencia de ciencias mixtas como la óptica, armónica, astronomía o mecánica, cuya relación y explicación es objetivo de este trabajo.

2. La demostración

La demostración es un tipo especial de razonamiento, propio de la ciencia, y a partir del cual se sabe. El razonamiento se aplica con varios propósitos: el orador convence, el discutidor dialéctico refuta, y el científico demuestra. Una característica necesaria para todo razonamiento es que sea formalmente correcto, aunque no es suficiente para que el razonamiento sea considerado como científico.

> A la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel <razonamiento> en virtud de cuya posesión sabemos. Si, pues, el saber es como estipulamos, es necesario también que la ciencia demostrativa se base en cosas verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas, anteriores y causales respecto de la conclusión: pues así los principios serán también apropiados a la demostración. En efecto, razonamiento lo habrá también sin esas cosas, pero demostración no: pues no producirá ciencia (*Analíticos segundos,* I, 2, 71b 16-25. Aristóteles 1988: 316).

La ciencia demostrativa debe partir de cosas verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas, anteriores y causales respecto a la conclusión.

La ciencia parte de cosas verdaderas, de proposiciones que expresan hechos consumados o dados efectivamente, no meras suposiciones, conocimientos probables, plausibles o viables, pero para la ciencia no basta con enunciar verdades, sino que también debe de explicar esas verdades.

Además, las proposiciones de las que parte la demostración son primeras e inmediatas: "partir de cosas primeras es partir de principios apropiados: en efecto llamo a la misma cosa *primero* y *principio.* El principio es una proposición inmediata de la demostración, y es inmediata aquella respecto a la que no hay otra anterior" (*Analíticos segundos,* I, 2, 72a 4-8. Aristóteles 1988: 317). La demostración para que sea efectiva, probatoria y no circular, necesita de proposiciones que no se demuestren y que hagan referencia tanto al conocimiento sensible, como al objeto del que se está tratando.

Las premisas tienen que ser más conocidas que la conclusión, es necesario tener certeza de los principios, pues es a partir de ellos que conocemos las cosas posteriores (las conclusiones) (*Analíticos segundos,* I, 2, 72a 33-37. Aristóteles 1988: 318-319).

Respecto a la demostración Aristóteles distingue dos tipos de anterioridad: la anterioridad para nosotros y la anterioridad sin más. Se conoce antes en la medida en que algo es más concreto, particular y cercano a la percepción. Se conoce antes sin más en la medida de que algo es más abstracto, universal y alejado de la percepción sensible. El razonamiento científico puede establecerse a partir de cualquiera de estos sentidos anteriores, pero es muy importante saber y explicitar en qué sentido de anterioridad se está manejando la demostración.

Los principios universales y abstractos explican los hechos concretos. Las premisas no sólo implican la conclusión, también la explican. Las premisas son causas o explicaciones de la conclusión. La labor de la ciencia consiste en explicar de un modo causal y necesario las verdades que ya previamente se conocían por experiencia.[21]

> Creemos que sabemos cada cosa sin más, pero no del modo sofístico, accidental, cuando creemos conocer la causa por la que es la cosa, que es la causa de aquella cosa y que no cabe que sea de otra manera. Está claro, pues que el saber es algo de este tipo: y en efecto, <por lo que se refiere a> los que no saben y a los que saben, aquéllos creen que actúan de ese modo, y los que saben actúan <así realmente>, de modo que aquello de lo que hay ciencia sin más es imposible que se comporte de otra manera (*Analíticos segundos,* I, 33, 88b 31-33. Aristóteles 1988: 389).

[21] Lo cognoscible científicamente y la ciencia se diferencian de lo opinable y la opinión en que la ciencia es universal y <se forma> a través de <proposiciones> necesarias, y lo necesario no es admisible que se comporte de otra manera. En cambio, hay algunas cosas que existen y son verdaderas pero que cabe que se comporten también de otra manera. Está claro, pues, que sobre ésas no hay ciencia; en efecto, sería imposible que se comportara de otra manera aquello que es posible que se comporte de otra manera. Sin embargo, tampoco <hay sobre esas cosas> intuición (en efecto, llamo intuición al principio de la ciencia) ni ciencia indemostrable: esto es la aprehensión de la proposición inmediata [...] (*Analíticos segundos,* I, 32, 88b 30-40, Aristóteles 1988: 389).

Pero la ciencia no sólo trata de la explicación de las conclusiones a partir de principios universales y abstractos, además es indispensable que se trate de cosas necesarias; "en efecto, también es posible razonar a partir de cosas verdaderas sin demostrar, pero no es posible razonar a partir de cosas necesarias si no es al demostrar: en efecto, ya eso es <propio> de la demostración" (*Analíticos segundos,* I, 6, 74b 15-16. Aristóteles 1988: 328), "[...] la ciencia es universal y <se forma> a través de <proposiciones> necesarias, y lo necesario no es admisible que se comporte de otra manera" (*Analíticos segundos,* I, 33, 88b 31-33. Aristóteles 1988: 389).

Respecto a lo necesario y dentro del contexto de la ciencia, interesan dos significados de los cinco que presenta Aristóteles en el libro V de la *Metafísica;* se llama necesario: sentido número 4: *lo que no puede ser de otro modo que como es,* éste es el significado primero y primordial de necesario. El sentido 5: "también la demostración es de las cosas necesarias, ya que <lo demostrado>, si se ha demostrado estrictamente, no puede ser de otro modo. Y la causa de ello son las premisas primeras, si las cosas de que parte el silogismo no pueden ser de otro modo <que como son>" (*Metafísica,* V, 5, 1015b 6-9. Aristóteles 1994/1998: 217).

Así pues, la ciencia se conforma de proposiciones necesarias y que tratan sobre algún tipo de totalidad. El razonamiento propio de la ciencia es la demostración: "a la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel <razonamiento> en virtud de cuya posesión sabemos" (*Analíticos segundos,* I, 2, 71b 19-20. Aristóteles 1988: 316).

Existen tres elementos en la demostración:

Conclusión: lo que se demuestra
lo que se da en sí en algún género

Estimaciones o axiomas: a partir de los cuales se demuestra

El género, el sujeto del cual es la demostración, indica las afecciones y los accidentes en sí, se refiere a lo que se está demostrando (*Analíticos segundos,* I, 7, 75a 42 - 75b 4. Aristóteles 1988: 332).

Por otra parte, la ciencia demostrativa gira en torno a tres cosas:

Todo aquello cuyo existir establece, el género del que la ciencia estudia las afecciones en sí.

Cuestiones comunes, llamadas estimaciones, a partir de las cuales se demuestra.

Las afecciones de las que se da por supuesto qué significa cada una (*Analíticos segundos*, I, 10, 76b 11-23. Aristóteles 1988: 337-338).

3. Los principios en la ciencia

La demostración se constituye de varias proposiciones relacionadas entre sí de manera especial. De estas proposiciones a unas se les denomina premisas y a otras conclusiones. Las premisas pueden ser de dos tipos: proposiciones demostradas o proposiciones que no necesitan demostración. A éstas últimas se les llama también principios, los principios pueden ser comunes a varias ciencias, o propios de cada una que se establece, demuestra o enseña (*Analíticos segundos*, I, 32, 88a 36 - 88b 3. Aristóteles 1988: 387-388).

Un ejemplo de la aplicación de esta estructura demostrativa lo encontramos en los *Elementos de geometría* de Euclides. Es a partir de este texto y de lo que establece Aristóteles, que pueden determinarse los tipos de principios que constituyen la demostración y el problema. La demostración es un razonamiento en el cual se explica la necesidad de la conclusión a partir de ciertas premisas. El problema es un razonamiento en el cual se pide además de la explicación necesaria, que se construya algo.

En los *Elementos de geometría* Euclides expone teoremas o proposiciones que han de demostrarse o constuirse, es decir, las conclusiones a las que debe llegarse. Así pues, hay dos tipos de teoremas: demostrativos, que corresponden a las demostraciones y los constructivos, que corresponden a los problemas.

Las proposiciones a partir de las cuales se demuestra o se construye se llaman premisas, y como ya he dicho, pueden ser proposiciones ya demostradas (teoremas demostrados) o proposiciones que no necesitan demostración (principios) "el principio es una proposición inmediata de la demostración, y es inmediata aquella respecto a la que no hay otra anterior" (*Analíticos segundos*, I, 2, 72a 7-8. Aristóteles 1988: 316).

Se distingue entre los siguientes tipos de principios:

Los principios pueden dividirse en dos: *a)* Los axiomas, estimaciones o principios comunes, y *b)* Las tesis, principios propios o principios exclusivos de cada ciencia.

a) Los axiomas, estimaciones o principios comunes son proposiciones que establecen relaciones generales que pueden ser usadas como herramienta en varias demostraciones.[22]

"Todas las ciencias se comunican entre sí en virtud de las <cuestiones> comunes (llamo comunes a aquellas de las que uno se sirve demostrando a partir de ellas [...]" (*Analíticos segundos*, I, 11, 77a 26-28. Aristóteles 1988: 341). De estas cuestiones comunes o axiomas, podemos distinguir dos tipos: 1) los principios comunes a todas las ciencias, que son las fórmulas lógicas, como la inversión lógica, reducción al absurdo, silogismo proposicional corriente, silogismo relacional, ampliación lógica, etcétera; o las reglas de deducción lógica, empleadas en los procesos deductivos como el modus ponendo ponens, o la regla de sustitución (Hilbert 1944: 39), y 2) los principios comunes a varias ciencias, como los principios matemáticos para las ciencias geométrica, aritmética, mixtas y medicina; los principios biológicos para la botánica, zoología, anatomía, fisiología, antropología; los principios de conducta para la política, ética; etcétera.

b) Las tesis *(Thésis)* que quieren decir ordenar o establecer (Pabón 1997: 295). En Aristóteles tienen el sentido de la o las proposiciones inmediatas establecidas para demostrar la conclusión. En el caso de los *Elementos* de Euclides, el sentido es más bien de ordenación, pues la tesis, es lo que constituye la parte central de la demostración o de la solución. Es el establecimiento de las relaciones necesarias entre las proposiciones necesarias, para demostrar o construir algo. Las tesis en Aristóteles son de dos tipos: las hipótesis y las definiciones.

---

[22] Estimaciones o axiomas, de *axió:* satisfacer, atender; estimar, apreciar; juzgar recto (Pabón 1997: 62), *axioma:* consideración, honor, categoría; pretensión; voluntad; resolución (Pabón 1997: 62).

Las hipótesis, en Aristóteles son las proposiciones que están debajo de la tesis, es decir, las proposiciones que son menos extensas, más concretas y que señalan la existencia (afirmativas) o no existencia (negativas) de algo. Las hipótesis también pueden ser hipótesis demostradas o hipótesis no demostradas, y entre las hipótesis no demostradas caben tres posibilidades: que no se demuestran pues tienen otro fundamento como la sensación o la percepción; que no se demuestran, aunque pueden ser demostradas como es el caso de los postulados; o que son indemostrables, es decir que no se pueden demostrar, como los principios generales, el de no contradicción o el de tercero excluso.

Las definiciones, enunciados que significan el *qué era ser esto,* o que dicen el *qué es* algo, y que se construyen a partir de propiedades principales, para identificar y distinguir.

Así los principios pueden ser comunes o propios de cada ciencia. También pueden ser remotos o inmediatos a cada demostración.

Los principios comunes a varias ciencias pueden ser definiciones, postulados, axiomas, hipótesis, tesis y conclusiones (tesis demostradas), las fórmulas lógicas y las reglas de deducción lógica. Los principios propios de cada ciencia lo constituyen sus definiciones, postulados, hipótesis y tesis.

Los principios remotos lo constituyen todos los principios lógicos, y todos los principios que provienen de una ciencia más genérica; en cambio los principios inmediatos a cada demostración, son las definiciones, postulados, hipótesis y tesis que aporta cada ciencia.

Tanto la demostración como la solución, son un sistema articulado y funcional de proposiciones con el propósito de demostrar o de construir algo.

Ahora bien, Aristóteles menciona:

> La mayoría <de los principios> son exclusivos de cada cosa. Por eso es propio de la experiencia el suministrar los principios correspondientes a cada cosa; quiero decir, por ejemplo, que la experiencia astronómica <suministra los principios> del saber astronómico (en efecto, una vez captados correctamente los fenómenos, se encontraron las demostraciones astronómicas), de manera semejante

también acerca de cualquiera otra arte o saber existente: de modo que, si se toma lo que se da en relación con cada cosa, es ya <competencia> nuestra exponer cumplidamente las demostraciones. En efecto, si no se deja de lado en la descripción nada de lo que se da verdaderamente en las cosas, estaremos en condiciones, acerca de todo aquello de lo que hay demostración, de encontrar y probar esa <demostración>, y aquello de lo que no es natural que haya demostración hacerlo evidente (*Analíticos primeros*, I, 30, 46a 17-28. Aristóteles 1988: 196).

Así pues, la mayoría de los principios son exclusivos de cada cosa, son proposiciones que se relacionan o describen el objeto de estudio de cada ciencia. Ahora bien, además de la ciencia demostrativa, hay otros tipos de conocimiento científico: la intuición *(nous)*, que así llama Aristóteles al principio de la ciencia, y la ciencia indemostrable, es decir, la aprehensión de la proposición inmediata y necesaria (*Analíticos segundos*, I, 33, 88b 30 - 89a1. Aristóteles 1988: 389).

Llamo principio inmediato de razonamiento a una tesis que no es posible demostrar ni es necesario que tenga <presente> el que va aprender algo; [...]" (*Analíticos segundos*, I, 2, 71b 15-16. Aristóteles 1988: 317).

Estos principios inmediatos de la demostración, no son demostrables, pues la proposición se establece por otros caminos, a saber la observación, la experiencia, la percepción. Ésta es la otra parte del conocimiento científico, el establecimiento de las proposiciones necesarias, que permitan hacer relaciones necesarias entre ellas para conformar la demostración.

Es muy claro para Aristóteles que no todo en la ciencia es demostrable, y que existen proposiciones que deben establecerse a partir de la sensación, la experiencia y la corroboración. Cabe preguntarse: ¿cómo se establece la ciencia indemostrable, la aprehensión de las proposiciones inmediatas y necesarias? Esto lo trataré en el próximo apartado. A continuación presento en forma de esquema las distintas divisiones en las que Aristóteles ha clasificado los principios:

- Principios
  - Axiomas (Estipulaciones) o principios comunes
    - Comunes a todas las ciencias.
      - Fórmulas lógicas
      - Reglas de deducción lógica
    - Comunes a varias ciencias.
      - Principios matemáticos
      - Principios biológicos
      - Principios mecánicos
      - etc.
  - Tesis o principios exclusivos (propios)
    - Hipótesis: se refiere al existe o no existe.
    - Definiciones: se refiere al decir *qué es*.

- Principios
  - Demostrados
  - No demostrados
    - no necesitan ser demostrados, porque tienen otro fundamento.
    - no han sido demostrados, aunque son demostrables: Postulados.
    - no pueden ser demostrados, son indemostrables.

- Principios
  - Inmediatos de razonamiento
  - Remotos de razonamiento

- Principios
  - Comunes a varias ciencias: Aquellos desde los que se demuestra.
  - Propios o exclusivos de cada ciencia: Aquellos que versan sobre lo que se demuestra.

4. La ciencia indemostrable e inductiva

El fundamento de la ciencia deductiva es la ciencia indemostrable o inductiva, cuyo objetivo es establecer una proposición con un vínculo necesario entre el sujeto y el predicado; la ciencia inductiva tiene como fundamento la sensación, el recuerdo y la experiencia.

La inducción se ha querido explicar por medio de:

La ennumeración exahustiva
La ennumeración parcial, y la suposición de que todos los demás casos serán iguales
La intuición
La experiencia de casos semejantes, la experiencia y la conformación de la noción universal
Técnicas muy concretas como: comparación, identificación, distinción, semejanza, etcétera

Aristóteles proporciona una serie de técnicas para establecer proposiciones necesarias en su libro de *Tópicos,* éste además de ser un libro sobre la discusión dialéctica, tiene una segunda lectura, dar las técnicas necesarias y suficientes para establecer proposiciones necesarias que no se demuestran, pero se corroboran con la sensación, la percepción o la experiencia, estas proposiciones conforman la ciencia indemostrable e inductiva, fundamento necesario y suficiente para establecer la ciencia demostrativa.

5. La inducción

Además de la intuición, la experiencia de casos semejantes, la experiencia y la conformación de la noción universal, la inducción es para Aristóteles una serie de técnicas, métodos y criterios de razonamiento relacionados con la sensación, experiencia y corroboración, los cuales permiten establecer proposiciones necesarias.

Estas técnicas se refieren principalmente a la predicación y al establecimiento de proposiciones con un grado de necesidad. Algunas de estas técnicas son las siguientes:

Como establecer una/un:

a) Definición
b) Género adecuado
c) Especie adecuada
d) Propiedad principal
e) Propiedad derivada
f) Un coincidente como propio respecto de algo o para algunas ocasiones
g) Diferencia adecuada

Además establecer:

h) Como distinguir un coincidente de una propiedad principal y de una propiedad derivada

i) Como saber si una definición está bien establecida

Muchas de estas técnicas, métodos y criterios se encuentran en el libro de los *Tópicos*. Y aunque ya he señalado que *Tópicos* es un libro sobre técnicas dialécticas, es claro que mucho de su contenido se refiere al establecimiento de proposiciones necesarias y que constituye mucho del acervo técnico sobre la ciencia indemostrable o inductiva.

Hasta aquí los referentes lógicos y metodológicos en la obra de Aristóteles. Ahora pasaré a hacer el análisis de los textos seleccionados.

Capítulo Cuarto
Análisis de textos y conclusiones

I. El problema de la aritmética y la geometría

1. Geometría y aritmética, géneros distintos

A continuación estudiaré las razones por las que Aristóteles afirma que la geometría y la aritmética constituyen géneros distintos, exclusivos y excluyentes. Inicio mi análisis con la siguiente cita

> No es posible demostrar pasando de un género <a otro>, vgr., <demostrar> lo geométrico por la aritmética (*Analíticos segundos* I, 7, 75 a 37 - 39. Aristóteles 1988: 332).

En este pasaje Aristóteles hace una afirmación general, *no es posible demostrar pasando de un género a otro,* y la apoya dando un ejemplo de corroboración, *demostrar lo geométrico por la aritmética,* un hecho lo suficientemente evidente, que permita validar la proposición universal.

A partir del texto se deduce que la geometría y la aritmética son o pertenecen a géneros distintos, por otras fuentes, se conoce que la geometría estudia la cantidad continua y la aritmética la cantidad discreta, son dos géneros de la *figura de la predicación cantidad.* (*Categorías,* 4b 20 - 5a 14).

Ahora bien, el ejemplo es muy preciso, no se puede demostrar *lo geométrico* por la *aritmética,* es decir, que aritmética y geometría pertenecen a géneros distintos e incomunicables, no tienen ni pueden tener relación alguna. Este es un hecho y una conclusión probada por la ciencia anterior a Aristóteles, es una proposición conclusiva que se relaciona con el problema de la inconmensurabilidad, como ya señalé (véase supra: 76-84), es a partir del problema de la inconmensurabilidad que la geometría y la aritmética se separan, precisamente por la imposibilidad de demostrar aritméticamente cuestiones geométricas. Hay problemas que se pueden describir, determinar y solucionar con métodos geométricos, pero no con métodos aritméticos, como es el caso de determinar la diagonal de un cuadrado de lado uno. La solución geométrica se localiza en el libro I, proposición 47 de los *Elementos de geometría* de Euclides. En cambio, aritméticamente no hay una solución exacta de $\sqrt{2}$. Otro ejemplo, es el intentar determinar el número ϕ, que puede ser resuelto geométricamente a partir de la demostración de la proposición 11 del libro II o de la proposición 30 del libro VI de los *Elementos,* pero no existe una solución aritmética exacta para ϕ (González Urbaneja 2001: 184-188). Lo mismo podríamos decir para $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ o π, por nombrar algunos casos más. El ejemplo puesto por Aristóteles resultaba claro y contundente, y era un hecho lo suficientemente conocido y aceptado en su tiempo como para servir de apoyo para aclarar una proposición más general.

2. Los principios diferentes en género

Cualquier principio tiene en común ser algo *a partir de lo cual* (*Metafísica* V, 1, 1012b 33 - 1013a 22. Aristóteles 1994/1998: 205-207). En la siguiente cita Aristóteles distingue dos clases de principios: unos son los principios *a partir de los cuales se demuestra,* y otros *a partir de lo que se demuestra.*

> [...] los principios de las cosas diferentes en género son diferentes en género. Pues los principios son de dos clases: aquellos a partir de los cuales <se demuestra> y aquello sobre lo que <se demuestra>; así, pues, los primeros son comunes, los segundos, en cambio, son exclusivos, vgr., el número, la magnitud (*Analíticos segundos,* I, 32, 88 b 25 - 29. Aristóteles 1988: 389).

Los principios *a partir de los cuales se demuestra,* pueden ser principios lógicos como *todo se afirma o se niega* (*Analíticos segundos,* I, 32, 88a 40. 1988: 387), o leyes lógicas como el *modus ponendo ponens,* o principios que pueden ser aplicados a varias ciencias como *si se quitan partes iguales de cosas iguales, las que quedan son iguales* (*Analíticos segundos* I, 10, 76a 42. Aristóteles 1988: 336-337). Estos principios pueden aplicarse tanto a la aritmética como a la geometría y por esto son comunes.

Los principios *a partir de lo que se demuestra,* se refieren a lo que estudia cada ciencia y sobre lo que se demuestra, como el *número* para la aritmética y la *magnitud* para la geometría, que son principios exclusivos de cada ciencia, son lo que cada ciencia estudia en particular.

Si las cosas son diferentes en género, entonces los objetos de estudio de cada ciencia, es decir los principios *a partir de lo que se demuestra*, serán distintos en género. Y las ciencias que los estudian también serán distintas en género. Así pues, número y magnitud, pertenecen a géneros distintos, las cosas a las que se refieren pertenecen a géneros distintos, a saber, el número se refiere a las cosas discretas (que se pueden contar) y la magnitud se refiere a las cosas continuas (que se pueden medir), así que la aritmética que estudia el número será de un género distinto de la geometría que estudia la magnitud.

Al igual que la cita en la página 127, el ejemplo que se presenta es de corroboración, y está puesto para que se comprenda claramente que los principios que son propios y exclusivos de cada ciencia, pertenecen a géneros distintos. De nuevo se está ante una contundente distinción entre geometría y aritmética. Aunque el presente pasaje es más lógico y metodológico que el de la cita de la página 127, ahora hay en el fondo una razón histórica relacionada con el problema de la inconmensurabilidad y con la separación entre geometría y aritmética.

3. Los principios propios de cada ciencia son distintos en género

> [...] en efecto, tampoco los principios de todas las <conclusiones> verdaderas son los mismos. Pues, de muchas de ellas, los principios son distintos en género y no coinciden unos con otros, vgr., las unidades no coinciden con los puntos; pues aquéllas no tienen posición, éstos, en cambio, sí la tienen. Y necesariamente habrían de encajar siquiera, o como medios, o de arriba abajo, o de abajo arriba, o habrían de estar unos en medio de los términos y otros fuera de ellos. Pero ni siquiera de entre los principios comunes es posible que haya algunos desde los que se demuestre todo; llamo *comunes*, por ejemplo, a *todo se afirma o se niega*. En efecto, los géneros de las cosas existentes son distintos, y unas cosas se dan sólo entre los *cuantos*, otras entre los *cuales* <predicaciones> con las que se hacen las demostraciones a través de los <principios> comunes (*Analíticos segundos,* I, 32, 88a 31 - 88b 4. Aristóteles 1988: 387-388).[23]

En este texto Aristóteles se refiere a los principios *a partir de lo que se demuestra,* es decir las proposiciones que se refieren a los

[23] Respecto a los objetos materiales propios de cada ciencia véase: *Analíticos segundos* I, 10, 76b 2-4; Aristóteles 1988: 337; el texto citado hasta 76b 22, y *Metafísica,* V, 13, 1020 a 9-14. 1994/1998: 238.

principios propios de cada ciencia, Aristóteles dice que *tampoco los principios de todas las conclusiones verdaderas son los mismos*, y ya se vio en el comentario anterior que los principios *a partir de los cuales se demuestra*, son comunes.

Para muchas conclusiones los principios *a partir de lo que se demuestra* , no son los mismos en género, pero lo interesante de este fragmento es que agrega *y no coinciden unos con otros.* Aquí se refiere a un tipo especial de relación: la coincidencia. A este tipo de relación se le ha llamado *accidental,* aunque yo, siguiendo a Aristóteles, prefiero llamarlo *coincidencia.* Esta es una afirmación radical y contundente, para negar todo tipo de relación entre aritmética y geometría, incluso la más débil y fortuita; las cosas se pueden relacionar por identificación necesaria, como en el caso de la definición, en la que el término definido se identifica con una proposición o un enunciado definitorio, también se pueden relacionar por identificación no necesaria pero exclusiva, como en el caso de las propiedades.

Otro tipo de relación, necesaria, se da por inclusión, como cuando dos o más individuos, especies o géneros pertenecen a un género común, por último, está la relación no necesaria, no exclusiva, como cuando dos o más individuos, especies o géneros coinciden en algo, este tipo de relación es la que se está negando en este texto, eliminando cualquier posibilidad de relación entre los géneros, *los principios son distintos en género y no coinciden unos con otros,* y el ejemplo son *las unidades* que *no coinciden con los puntos; pues aquéllas no tienen posición, éstos, en cambio, sí la tienen.* Las unidades son objeto de estudio de la aritmética, los puntos de la geometría, de nuevo con la diferencia de géneros entre la aritmética y la geometría, aunque de manera más radical: estos géneros ni siquiera coinciden; es decir, no existe la más mínima posibilidad de relación, ni siquiera la más débil.

Por otra parte, analizando el ejemplo, puede verse que si bien Aristóteles no hace una crítica ni una referencia explícita a los pitagóricos, en esta proposición manifiesta una postura opuesta, en otras partes de su obra, Aristóteles sí hace referencia y una crítica directa a la escuela pitagórica respecto de este tema (véase *Metafísica,* XIII, 6, 1080b 16 y *Metafísica,* XIII, 8, 1083b 8).

Ya he señalado este asunto cuando traté del concepto pitagórico de número (véase supra: 43). Simplemente debe recordarse que para los pitagóricos el concepto de número se encontraba relacionado con los objetos concretos, y que sus experiencias matemáticas los habían llevado a establecer la relación número-magnitud-punto geométrico-punto físico.

Aristóteles critíca el concepto pitagórico de número pues los pitagóricos lo consideran compuesto de magnitudes; en cambio el concepto aristotélico de número, como el de muchos de sus contemporáneos, está compuesto de unidades abstractas, sin duda, un estado más avanzado en el proceso de abstracción del concepto de número, elaborado tras muchos años de avances conceptuales y metodológicos, y conservados por la tradición crítica; concepto que Aristóteles heredó y reelaboró.

Así pues, Aristóteles se encuentra en otro nivel del proceso de abstracción del concepto de número, respecto al nivel de abstracción del mismo concepto por parte de la primera escuela pitagórica (véase supra: 48).

4. La demostración aritmética no se adapta a las magnitudes

> [...] en cambio, de las cosas cuyo género es distinto, como la aritmética y la geometría, no es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes, si las magnitudes no son números; ahora bien, más adelate se explicará que esto es admisible en algunos casos (*Analíticos segundos*, I, 7, 75b 4-7. Aristóteles1988: 332).

Con lo comentado hasta ahora, la mayor parte de este fragmento puede darse por explicado, aunque hay algunas proposiciones que llaman la atención. La proposición *no es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes,* es congruente con lo expuesto hasta el momento, lo que llama la atención es la aclaración condicional *si las magnitudes no son números,* parece que Aristóteles dejara de lado la distinción radical entre géneros y abriera una posibilidad para la comunicación o relación entre los mismos; el condicional completo y ordenado formalmente quedaría de la siguiente manera:

Si las magnitudes no son números entonces *no es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes.*

Aquí, no existe una afirmación o negación tajante y contundente entre la demostración aritmética y el objeto material de la geometría, como podría establecerse a partir de los textos analizados hasta el momento. Llama la atención que se refiera a esta relación a partir de un condicional, pareciera que Aristóteles ha comenzado a abandonar la postura de una radical distinción entre géneros y vislumbra la posibilidad de algún tipo de relación entre los mismos.

La otra proposición: *más adelate se explicará que esto es admisible en algunos casos,* no es clara, pues no especifica a qué se refiere ni a qué se puede aplicar. La proposición es *admisible en algunos casos,* respecto a la relación entre aritmética y geometría, puede referirse, como hipótesis de trabajo, al condicional completo, que con la negación del antecedente y del consecuente sería la siguiente:

Caso 1

Si las magnitudes son números entonces *es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes*

Puede referirse solamente a la negación del consecuente:

Caso 2

Es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes

También puede estarse refiriendo sólo a la negación del antecedente:

Caso 3

Si las magnitudes son números

En cualquier caso, Aristóteles se refiere a que en algunos casos existe la posibilidad de que aritmética y geometría se relacionen, aun siendo de géneros diferentes, postura muy distinta a la estudiada en el texto del apartado 2.

Analizando un poco más a fondo la estructura del condicional original y de sus posibles negaciones, primero se establece lo siguiente:

p1, *Las magnitudes son números*
p2, *Es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes*

El condicional original quedaría expresado de la siguiente manera:

$$-p1 \supset -p2$$

La afirmación del condicional queda así:

$$p1 \supset p2$$

La negación del primer condicional implica la afirmación del segundo condicional:

Formalización del caso 1

$$-[-p1 \supset -p2] \supset [p1 \supset p2]$$

Por tablas de verdad puede analizarse la validez de este esquema lógico:

—	[— p1	⊃	—p2]	⊃	[p1	⊃	p2]
F	F	V	F	<u>V</u>	V	V	V
F	F	V	V	<u>V</u>	V	F	F
V	V	F	F	<u>V</u>	F	V	V
F	V	V	V	<u>V</u>	F	V	F

Formalización del caso 2

$$[-p1 \supset -p2] \bullet p1 \supset p2$$

Por tablas de verdad este esquema es alogicamental (no es válido ni inválido):

[—p1	⊃	—p2]	•	p1	⊃	p2
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
V	V	V	F	F	V	F

Formalización del caso 3

$$[-p1 \supset -p2] \bullet p2 \supset p1$$

Por tablas de verdad podemos ver la validez de este esquema lógico:

[—p1	⊃	—p2]	•	p2	⊃	p1
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	V	F

La transformación del condicional original y de sus posibles negaciones o afirmaciones a esquemas lógicos y su verificación estructural por tablas de verdad permiten analizar lo siguiente:

La negación del primer condicional a su afirmación es válida, y esta sería una conclusión que se podría seguir del planteamiento original. De la afirmación del antecedente no se sigue necesariamente la afirmación del consecuente, en cambio de la afirmación del consecuente si se sigue necesariamente la afirmación del antecedente. Por lo dicho, es más factible que Aristóteles al decir *que esto es posible en algunos casos,* se refiera a la afirmación del condicional completo, o a la afirmación del consecuente, más que a la afirmación del antecedente.

Así los casos posibles son: *a)* si las magnitudes son números entonces es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes o *b)* si es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes entonces las magnitudes son números. Y es aquí donde se abren las posibilidades de relación cuando menos de coincidencia, ya sea entre número y magnitud o entre demostración aritmética y los accidentes de las magnitudes.

Si se pueden hacer coincidir las magnitudes con los números entonces puede adaptarse la demostración aritmética a los accidentes de las magnitudes. Si se encuentra una demostración aritmética que se adapte a los accidentes de las magnitudes, esto querrá decir, que número y magnitud se relacionan de alguna manera, cuando menos por coincidencia.

A partir de este razonamiento se abre la posibilidad para una relación entre número y magnitud, o entre aritmética y geometría.

Un poco más adelante Aristóteles menciona que esta relación es posible por la subordinación de una ciencia a otra (*Analíticos segundos,* I, 7, 75b 14-15. Aristóteles 1988: 333). En particular la subordinación de la geometría a la aritmética.

5. Ciencia anterior y más exacta. El *que* y el *porque*

Una ciencia es más exacta si es más simple, pues exactitud es simplicidad (*Metafísica,* XIII, 3, 1078a 10. Aristóteles 1994/1998: 513) por ejemplo una ciencia es más simple y más exacta si prescinde de la magnitud que si la toma en cuenta para su estudio: la aritmética es más simple que la geometría, y más exacta en grado sumo si prescinde del movimiento.

> Es más exacta que otra ciencia y anterior a ella una ciencia que sea ella misma del *que* y del *porque,* pero no por un lado del *que* y por otro del *porque,* y la que no <trata> acerca del sustrato <es anterior> a la que <trata> acerca del sustrato*, vgr., la aritmética respecto de la armónica; y la que parte de menos cosas <es también anterior> a la que parte de una adición <de varias cosas>, vgr., la aritmética respecto de la geometría**. Digo *a partir de una adición* <en el sentido de que> por ejemplo, la unidad es una entidad sin posición, mientras que el punto es una entidad con posición: ésta última es a partir de una adición (*Analíticos segundos,* I, 27, 87a 31 - 87a 37. Aristóteles 1988: 382-383).[24]

[24] * Nota 162 (Aristóteles 1988: 382): hypokeímenon, aplicado en otros contextos al sujeto de un enunciado: aunque no se trate en aboluto de acepciones homónimas o equívocas, sino análogas. ** Nota 163 (Aristóteles 1988: 383): se consideran, en definitiva, anteriores y más exactas las ciencias más generales y abstractas [más simples].

En este texto, Aristóteles establece tres criterios para relacionar dos ciencias entre sí. Estos criterios son:

Una ciencia respecto a otra ciencia es anterior y más exacta si trata de manera conjunta del *que* y del *porque*, y no de manera separada.

La ciencia que no trata directamente del sujeto-individuo es anterior a la ciencia que trata directamente del sujeto-individuo.

La ciencia que parte de menos cosas, es decir cuyo objeto de estudio es más simple en cuanto a las características que lo definen, es anterior, a la ciencia que parte de una adición de varias cosas; es decir, cuyo objeto de estudio sea más complejo con respecto a las características que lo definen.

Además hay varios sentidos de *anterior*, uno de ellos es el siguiente:

> [...] *lo que es anterior en cuanto al conocimiento se considera, además, anterior absolutamente,* en cuyo caso son diversas las cosas que son anteriores según la noción y las que lo son según la sensación. Y es que según la noción los universales son anteriores, mientras que los individuos lo son según la sensación (*Metafísica,* V, 11, 1018b 30-36. Aristóteles 1994/1998: 232).

Lo anterior según la noción se refiere a la mayor extensión. Una noción es anterior respecto de otra noción si tiene mayor extensión. Las ciencias son conocimientos según la noción, no hay ciencia del sujeto-individuo, por analogía, una ciencia es anterior a otra si ésta es más extensa.

En el primer caso, se comprende claramente desde el punto de vista de lo *anterior según la noción,* que una ciencia que trata del *que* y del *porque* de manera conjunta, es más extensa que una ciencia que trata solamente del *que* o que trata solamente del *porque*.

En el segundo caso, una ciencia que no trata directamente del sujeto-individuo trata de nociones genéricas, que son más extensas que las nociones específicas con las que trabaja otra ciencia que sí lo estudia directamente. Así se comprende que Aristóteles afirme que una ciencia que no estudia directamente al sujeto-individuo, sea anterior o más extensa que otra ciencia que lo estudia directamente.
En el tercer caso, una noción que tiene menos características que la

definan es más extensa que otra noción que tenga más características que la definan; las ciencias que estudian nociones más simples, serán más extensas que las ciencias que estudian nociones menos simples o complejas; es decir, más determinadas.

Siguiendo los criterios expuestos cuando traté sobre las *categorías* (véase supra: 95-99), no traduciría la palabra *hypokeímenon,* como sustrato, sino como sujeto, o como lo he hecho en los párrafos anteriores como sujeto-individuo, sujeto-especie o sujeto-género, para evitar cualquier confusión. Esta traducción tiene más sentido, pues como ya he dicho, *anterior* indica que la ciencia es más general o que trata con conceptos que tienen mayor extensión. Una ciencia que estudia directamente al sujeto o individuo concreto tiene menos extensión.

Desde esta persepectiva el ejemplo dado para el caso dos es claro: la aritmética es una ciencia anterior a la armónica, pues mientras la aritmética trata de las proporciones en general, la armónica trata de la aplicación de las proporciones al estudio de las relaciones de las cuerdas en movimiento; es decir, en cuanto producen sonido. Los conceptos con los que trabaja la aritmética son más extensos que las aplicaciones concretas y los conceptos con los que trabaja la armónica.

El ejemplo dado para el caso tres, que la aritmética es más extensa que la geometría, es claro a partir de lo establecido por Aristóteles: las ciencias son anteriores o más extensas, en la medida de que tratan de cosas que tengan menos características necesarias, que las determinen. Las ciencias entre más determinan las características de su objeto de estudio se vuelven más concretas, más definidas y por lo tanto menos extensas. La aritmética trata de la unidad, que es una cantidad sin posición, mientras que la geometría estudia la cantidad con posición, su objeto de estudio es más restrigido que el de la aritmética.

Por lo comentado hasta ahora, señalo que algunas ciencias se relacionan a partir de su extensión. A partir del texto, se sabe que unas ciencias son más extensas respecto de otras, y parece que esa relación implica la inclusión; aunque en este texto, Aristóteles no lo dice explícitamente, se puede sobrentender este tipo de relación entre las ciencias.

Así tenemos que aritmética y armonía, aritmética y geometría, se relacionan; además, es muy probable que el tipo de relación sea la inclusión, así, la aritmética incluye a la armonía, y la aritmética incluye a la geometría, posición diametralmente opuesta a la de los textos 1, 2 y 3, en los que se afirma que aritmética y geometría son de géneros distintos y no hay relación posible entre ellas. Aunque hasta el momento, la relación de inclusión de la armonía y la geometría en la aritmética, solamente se presenta en algunos casos excepcionales.

6. La matemática común

Al comienzo del siguiente texto se plantea un problema en términos de exclusividad: la filosofía primera o estudia el total o estudia un género determinado y una sola naturaleza en particular. Para aclarar esta dificultad Aristóteles pone el ejemplo de las ciencias matemáticas, no todas las disciplinas matemáticas se encuentran en la misma situación respecto al estudio del total, de un género determinado, o de una naturaleza particular; hay ciencias como la geometría y la astronomía que tratan sobre naturalezas determinadas, también existe una ciencia matemática del total, que es común a la geometría y a la astronomía.

> Cabe plantearse la aporía de si la filosofía primera es acaso universal, o bien se ocupa de un género determinado y de una sola naturaleza (en las matemáticas, efectivamente, no todas las disciplinas se hallan en la misma situación, sino que la geometría y la astronomía versan sobre una naturaleza determinada, mientras que la <matemática> general es común a todas ellas) (*Metafísica,* VI, 1, 1026a 22-27,1994/1998:269).

La palabra *kath'ólou,* que muchas veces se traduce por *universal* prefiero traducirla como *en total, en general, en absoluto* (García Hughes 1956: 327 y Pabón 1997: 318).

La extensión de las ciencias está relacionada con la perspectiva de estudio: si estudia el total, un género determinado o una naturaleza particular. Así que dentro de las ciencias matemáticas se pueden tener grados de extensión a partir de la perspectiva de estudio, existe una matemática general o del total que es común a las disciplinas menos extensas.

La geometría estudia la cantidad con posición; la astronomía estudia la cantidad con posición aplicada al movimiento de los astros. En este texto, parece dibujarse con mayor claridad la relación de inclusión entre estas ciencias. Es importante señalar que la astronomía está considerada como una disciplina matemática. Así la ciencia del total no se ocupa de un género determinado ni de una sola naturaleza; sino que es la ciencia con mayor extensión en un área del conocimiento, con menos características determinantes para su objeto de estudio.

7. Comentario al problema I

Pueden observarse varias posturas de Aristóteles respecto a la relación entre aritmética y geometría.

La aritmética y la geometría son completamente diferentes. Pertenecen a géneros distintos, y no hay relación posible entre ellas.

La geometría está subordinada a la aritmética por relación de inclusión, la geometría es menos extensa que la aritmética.

La armonía, astronomía y óptica están subordinadas a la geometría, y la geometría está subordinada a la aritmética.

Los dos criterios que utiliza Aristóteles al hablar de este problema son:

La diferencia de géneros, distinción radical entre geometría y aritmética, a partir del problema de la inconmensurabilidad.

La inclusión de unas ciencias en otras. Criterio que permite relacionar unas ciencias con otras, y que permite hacer una descripción más adecuada al panorama de ciencias que existían de hecho; además, permite dar una explicación de porqué existe tal variedad de niveles en las ciencias; explica también, los principios teóricos de cómo funcionan esas ciencias.

Se constata el manejo de dos criterios y dos posturas opuestas, aunque hay un intento de hacerlas compatibles, al advertir que hay casos concretos y excepcionales en los cuales se pueden relacionar ciencias que pertenezcan a géneros distintos. Hay un cambio de postura, de la distinción total entre las ciencias, a la inclusión de unas en otras.

II. El problema de las ciencias mixtas

1. El método matemático no es apto para la física

El problema de las ciencias mixtas se da en el contexto de la relación entre las matemáticas y el mundo físico.

> [...] no ha de exigirse el rigor matemático al tratar todas las cosas, sino al tratar de aquellas que no tienen materia. Por eso el método <matemático> no es propio de la física. Pues seguramente toda naturaleza tiene materia (*Metafísica*, II, 3, 995a 15-18. Aristóteles 1994/1998: 128).[25]

El rigor matemático o la exactitud matemática del lenguaje no ha de exigirse al tratar todas las cosas, sino solamente al tratar de aquellas que no tienen materia. Este rigor matemático o exactitud matemática del lenguaje no se puede dar en el conjunto total y general de las cosas, es algo exclusivo y solamente exigible para las cosas que no tienen materia.

El método matemático no es apto para estudiar la física, pues toda naturaleza tiene materia. Aristóteles hace una separación radical entre el estudio matemático y el estudio físico. De hecho, para realizar sus estudios físicos toma en cuenta esta separación y elabora su física de manera casi total sin aplicar el método matemático; a partir de este planteamiento Aristóteles tiene una dificultad sistemática para justificar la existencia de las ciencias mixtas y para explicar cómo se estructuran y cómo funcionan, pues las ciencias mixtas son la aplicación de conceptos y métodos matemáticos al estudio del mundo físico.

Por otra parte, las ciencias mixtas son un hecho muy importante e innegable de la ciencia de su tiempo. Aristóteles no podía ignorar o hacer a un lado su existencia; aunque algunas de sus justificaciones y explicaciones no son del todo convincentes. En un primer momento, las ciencias mixtas no terminan de encajar en la visión lógica ni metodológica de Aristóteles.

---

[25] La exactitud matemática del lenguaje no debe ser exigida en todo, sino tan sólo en las cosas que no tienen materia. Por eso el método matemático no es apto para la física; pues toda la naturaleza tiene probablemente materia (*Metafísica*, II, 3, 995a 15-18; Aristóteles 1970/1982: 96-97).

2. Una explicación para el hecho de las ciencias mixtas

En la siguiente cita Aristóteles dice explícitamente que algunas ciencias se relacionan entre sí por inclusión. Cuando Aristóteles dice que una ciencia está bajo otra ciencia, está aplicando un criterio de extensión, estar bajo otra ciencia significa estar incluida.

> Tales son todas aquellas cuestiones que se relacionan entre sí de tal modo que una está bajo la otra, vgr., las cuestiones ópticas respecto a la geometría, las mecánicas respecto a la estereometría, las armónicas respecto a la aritmética y los datos de la observación respecto a la astronomía. Y algunas de esas ciencias son casi sinónimas entre sí, vgr., la astronomía <con> la matemática y la náutica, y la armónica <con> la matemática y la correspondiente al oído (*Analíticos segundos*, I, 13, 78 b 35 - 19 a 15. 1988: 347-348).

Los ejemplos se refieren a la inclusión de unas ciencias en otras:

Las cuestiones ópticas están incluidas en la geometría. Percepción visual-luz-rayo visual-línea recta.

Las cuestiones mecánicas están incluidas en la estereometría. Movimiento de los cuerpos-figura-medida de los volúmenes.

Las cuestiones armónicas están incluidas en la aritmética. Percepción del sonido-sonido-ajuste de cuerdas-longitud-proporciones entre magnitudes-proporciones numéricas.

Los datos de la observación están incluidos en la astronomía. Datos de la observación-movimientos regulares de los astros-leyes de los movimientos de los astros-descripción geométrica.

Algunas ciencias son casi sinónimas entre sí. Aristóteles llama sinónimas a las cosas cuyo nombre es común y cuya definición es la misma.[26] Les llama ciencias casi sinónimas por analogía, pues son ciencias que tienen principios comunes y tratan de cosas que están estrechamente relacionadas entre sí. Los ejemplos que ofrece son:

---

26 Se llaman *sinónimas* las cosas cuyo nombre es común y cuyo correspondiente enunciado de la entidad es el mismo, vgr., *vivo* dicho del hombre y dicho del buey: en efecto, ambos reciben la denominación común de vivos y el enunciado de su entidad es el mismo; pues, si alguien quisiera dar el enunciado de en qué consiste para cada uno de ellos el ser vivos, daría idéntico enunciado (*Categorías*, 1, 1a 6-12. Aristóteles 1982: 30).

La astronomía, la matemática y la náutica. La náutica está incluída en la astronomía y ésta en la matemática. Los principios comunes de la geometría se aplican para comprender la regularidad o irregularidad de los movimientos de los astros, y esta descripción geométrico-observacional se aplica para saber la ubicación de la nave y dirigir su rumbo por medio de la posición de los astros.

La armónica, la matemática y la correspondiente al oído. La ciencia correspondiente al oído está incluida en la armónica y ésta en la matemática. Las relaciones proporcionales entre números se aplican a las relaciones proporcionales entre magnitudes, éstas describen las relaciones entre las cuerdas que producen sonidos de una escala determinada, esta descripción aritmético-geométrica-sonora se aplica al arte del oído para dirigir, educar y formar el oído en la correcta afinación natural-matemática.

3. La subordinación de las ciencias matemáticas

En este pasaje Aristóteles habla explícitamente de la subordinación o inclusión entre dos ciencias. No es posible demostrar lo propio de una cienca mediante otra, a no ser que una de estas ciencias esté subordinada o incluida en la otra.

> [...] ni <es posible demostrar> lo propio de una ciencia mediante otra, a no ser que todas las cosas en cuestión estén subordinadas las unas a las otras, vgr., las cuestiones ópticas respecto a la geometría y las armónicas respecto de la aritmética (*Analíticos segundos,* I, 7, 75b13-15. Aristóteles 1988: 333).

Los principios geométricos se pueden aplicar a la mecánica o a la óptica, porque provienen de una ciencia más extensa, que incluye a la mecánica y a la óptica. Los principios aritméticos se pueden aplicar a la armónica porque la aritmética incluye a la armónica.

> Ahora bien, la demostración no se puede aplicar a otro género, a no ser, como ya se ha dicho, los <principios> geométricos a las cuestiones mecánicas u ópticas, y los aritméticos a las armónicas (*Analíticos segundos,* I, 9, 76a 22-25. Aristóteles 1988: 335-336).

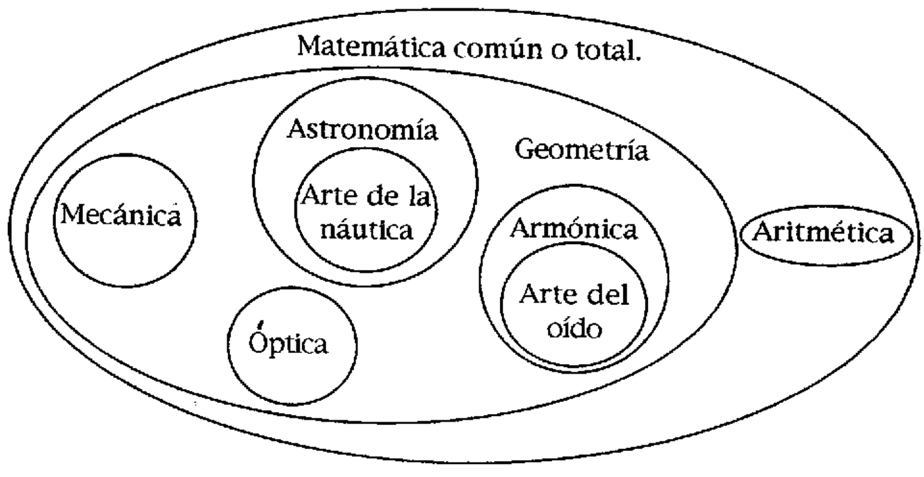
4. Comentario al problema II

Por una parte está la afirmación de que el método matemático no es apto para estudiar la física, pues el rigor matemático solamente se puede aplicar al tratar de las cosas que no tienen materia, y toda naturaleza tiene materia.

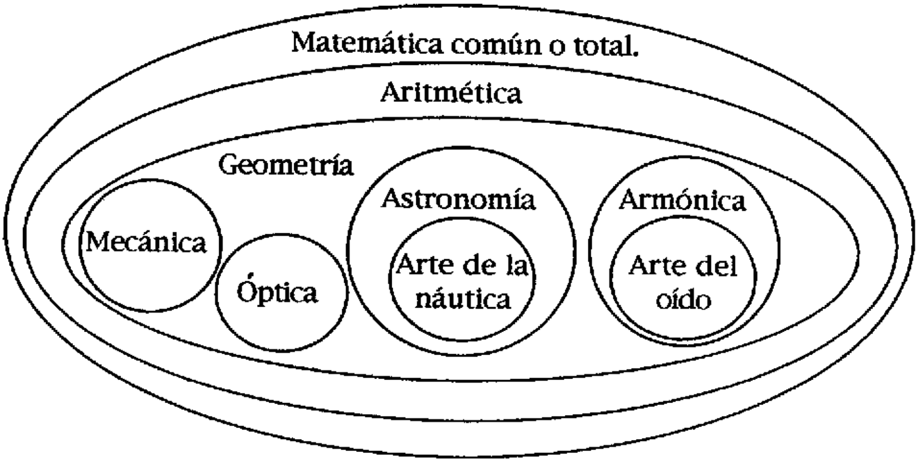
Por otra parte, Aristóteles considera a la armónica, óptica y astronomía como *las partes de las matemáticas más próximas a la física* (*Física*, II, 194a 8. Aristóteles 1995/1998: 137). Las considera próximas a la física, pero no partes de la física sino de las matemáticas.

Por último, Aristóteles establece relaciones entre las ciencias mixtas y las matemáticas por inclusión. A partir de los textos estudiados se establecen dos esquemas de inclusión:

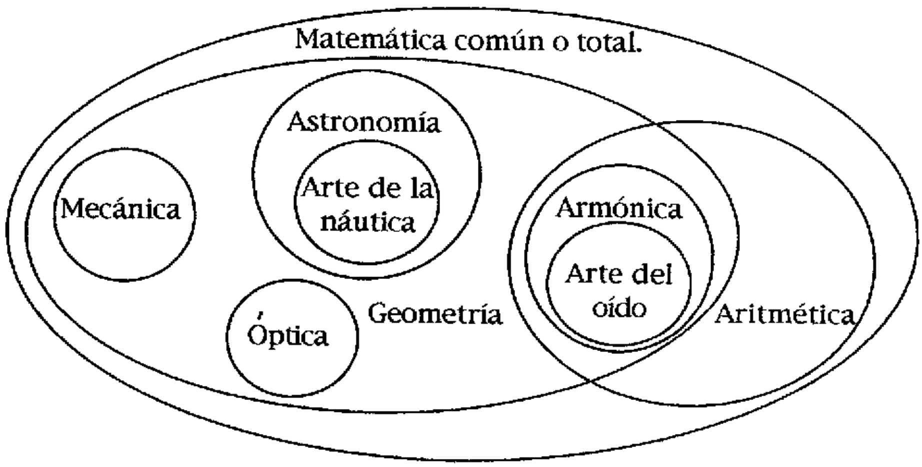
En este primer esquema la geometría está incluida en la matemática común o total (*Metafísica*, XI, 7, 1064b 8-10. Aristóteles 1994/1998: 447) pero separada de la aritmética como se dice en *Analíticos segundos* (I, 7, 75a 37-39. Aristóteles 1988: 332).



En el segundo esquema la geometría está incluida en la aritmética como se dice en *Analíticos segundos*, I, 27, 87a 31-87a 37; Aristóteles 1988: 382-383.



Este esquema se puede interpretar también de una manera intermedia, ni la separación total, ni la completa inclusión, sino como una intersección entre aritmética, geometría, armónica y arte del oído:



Aunque el método matemático no se aplica al estudio de la física, algunas de las ciencias matemáticas se aproximan mucho a los estudios físicos. Incuso se articulan con el arte y la experiencia, en el caso de la náutica y con la formación del oído musical (*Analíticos segundos,* I, 13, 78 b 35 - 19 a 15. 1988: 347-348. *Etica Nicomáquea,* VI, 6, 1140b 31-1141a 1; Aristóteles 1985/1988: 274-275).

III. El problema de la cantidad y la cualidad

1. La cantidad y la cualidad son géneros distintos

Dado que el asunto que trato es el problema de la cantidad y la cualidad, no transcribí el primer sentido de *distintas por el género* y su correspondiente ejemplo, quedando la cita de la siguiente manera:

> «Heterogéneas» [distintas por el género] [...] lo son los predicados que corresponden a diversas figuras de la predicación de «lo que es» (unos, en efecto, significan qué es; otros, que es de cierta cualidad y otros según las distinciones expuestas con anterioridad). Y es que estos predicados no se resuelven, ni los unos en los otros, ni <todos ellos> en algo que sea uno (*Metafísica,* V, 28, 1024b 10-15; Aristóteles 1994/1998: 259-260).

Los predicados que corresponden a diferentes *clases de predicados* son distintos por el género; estos predicados pertenecen a distintos *Géneros de predicados* o *Categorías.* Por lo dicho se desprende que cada una de las *Categorías* o *Géneros de predicados* [27] constituyen géneros diferentes; además, Aristóteles reafirma la diferencia: estos géneros no se incluyen propiamente unos en otros, tampoco sucede que como géneros diferentes se incluyan en un género común, así queda establecido que las *Categorías* son un ejemplo de *Géneros diferentes* que no tienen ninguna relación posible.

2. Cantidad y cualidad: ¿géneros distintos o géneros relacionables?

Los siguientes textos parecen estar en contradicción uno respecto del otro, pero no es así.

> *Distintas por el género* se llaman las cosas cuyo primer sujeto es distinto y no se resuelven el uno en el otro ni ambos en el mismo (*Metafísica,* V, 28, 1024b 10-11. Aristóteles 1970/1982: 295).

En este primer texto se dice que el criterio para establecer que los géneros sean diferentes es que su primer sujeto sea distinto; es decir, que las cosas existentes concretas a las que se refieren sean distintas,

[27] Los *géneros de predicados* son conjuntos o clases de palabras o explicaciones que responden a preguntas tipo. Estas palabras o explicaciones se predican de un sujeto o de un nombre sujeto.

ya sean individuos concretos considerados en su totalidad, ya sean atributos concretos que se distinguen del individuo, pero que no son partes separables, ni pueden existir fuera de la cosa en la que están (*Categorías*, 2, 1a 23-25. Aristóteles 1982: 32). En resumen, los géneros son distintos si se refieren a existentes concretos diferentes, ya sean individuos o atributos concretos.

> Además si acontece que la misma cosa es *cual* y *respecto a algo*, no tiene nada de absurdo que se la cuente en ambos géneros... (*Categorías*, 11a 38-40. Aristóteles 1982: 63).

Por otra parte, en esta segunda cita se dice que una misma cosa puede pertenecer a dos *Categorías* o *Géneros de predicados*, y que no tiene nada de aburdo que se la cuente en ambos géneros. Inmediatamente, luego de esta afirmación lo que se esperaría según la costumbre de Aristóteles sería un ejemplo de confirmación, pero no lo presenta. Minio-Paluello consideraba que después de este fragmento seguía una laguna en el texto.

No es difícil encontrar ejemplos que nos permitan confirmar la afirmación contenida en la cita de *Categorías*, 11a 38-40. El hombre vestido de blanco, puede estar dentro de la *categoría cual*. Ese mismo hombre es el más alto *respecto de* el grupo de hombres en el que se encuentra. Una cosa que mide 2 codos puede considerarse dentro de la *categoría cual*, esa misma cosa que mide 2 codos es más grande *respecto de* otra que mide 1 codo.

Hay un tipo de convertibilidad: los géneros se distinguen a partir de cosas diferentes, pero una misma cosa puede pertenecer a varios géneros diferentes. Parece que estas proposiciones dependen del proceso que se quiera realizar: distinguir o identificar. Si distingo las cosas, se puede dar el caso, de géneros diferentes e incomunicables; si identifico, y sobre todo si tomo a los individuos concretos considerados en su totalidad es claro que puedo relacionarlo con cualquiera de los *géneros de predicados*, pues es en el individuo concreto considerado en su totalidad en el que se dan las cosas concretas que estan en un sujeto pero no se dicen de sujeto alguno.

Las figuras de la predicación siendo distintas, respecto de una misma cosa pueden ser diferentes pero no exclusivas ni excluyentes. Y una misma cosa puede contarse en dos o más géneros.

3. *Cuanto* en sí mismo y *cuanto* accidentalmente

En la siguiente cita, Aristóteles distingue dos sentidos de llamar *cuantas:* llamarlas en propiedad, es decir en sí mismas, o llamarlas por coincidencia, esto es, en relación con otra:

> En propiedad sólo se llama *cuantas* a las cosas que se han mencionado; todas las demás, en cambio, lo son accidentalmente: pues al considerar aquéllas llamamos también *cuantas* a las otras, vgr., lo blanco se llama *mucho* por ser mucha su superficie, y la acción se llama *larga* por ser mucha su duración y mucho también su movimiento: en efecto, cada una de estas cosas no se llama *cuanta* en sí misma; vgr., si alguien explica cuán larga es una acción, la definirá como anual por el tiempo, o dará una explicación de este tipo, y al explicar lo blanco como un *cuanto* lo definirá por la superficie: en efecto, cuanta sea la superficie, tanto dirá que es lo blanco; de modo que sólo se llama *cuantas* con propiedad y en sí mismas a las cosas mencionadas; de las demás, ninguna lo es en sí misma, sino en todo caso, accidentalmente (*Categorías,* 6, 5a 39 - 5b 10. Aristóteles 1982: 44-45).

En toda relación por coincidencia, la estructura lógica para establecerla es la conjunción, y así lo deja entrever Aristóteles cuando dice: *al considerar aquéllas llamamos también cuantas a las otras.* En este contexto y en esta frase el término *también* tiene un sentido de conjunción. A continuación Aristóteles proporciona dos ejemplos que ayudan a comprender mejor el sentido de la afirmación anterior.

En el primer ejemplo, lo que se llama propiamente cuanto, o se dice en sí mismo cuanto, es la superficie. Lo blanco es de las cosas que llamamos cuanto por coincidencia, o en relación con otra cosa. Se puede intentar relacionar estos dos conceptos: superficie y blanco, utilizando los criterios de relación entre sujeto y predicado.

En primer lugar, no son términos incluidos en la definición de uno o de otro términos. La superficie no se define por lo blanco ni lo blanco se define por la superficie, no son propiedades el uno del otro, sucede que siempre o casi siempre lo blanco es superficie pero no sucede siempre o casi siempre que la superficie sea blanca, sino sólo algunas veces. Tampoco se da el caso de que uno sea el género del otro. Lo blanco no es género de la superficie ni la superficie es género de lo blanco. Así pues, si existe algún tipo de relación entre lo blanco y la superficie, es la coincidencia, que parte del hecho de que algunas superficies son blancas, o que algunos blancos sean superficies. Esta predicación de relación por coincidencia está referida al individuo concreto, por medio de la sensación. Lo blanco se llama mucho o cuanto por ser mucha su superficie, y en este caso lo blanco y la superficie coinciden.

En el segundo ejemplo, Aristóteles se refiere a otra relación por coincidencia. La acción se llama larga, por ser mucha su duración o ser mucho su movimiento; lo propiamente cuanto es la duración, el movimiento o el tiempo, la acción se llama larga en relación con estos otros términos, por coincidencia; tanto la acción como lo blanco no se llaman cuantas en sí mismas. Si se explica lo blanco o la acción como un cuanto, no se hará a partir de estos términos en sí mismos, sino en relación con otra cosa, ya sea el tiempo para la acción o la superficie para lo blanco; si se dicen cuantas no lo es con propiedad y en sí mismas, sino por coincidencia y en relación con otro. Esta coincidencia aparece en primer lugar en los individuos concretos y se capta por los sentidos. Así pues, uno de los criterios para establecer una relación entre cantidad y cualidad, y entre cualquiera de las categorías, es la relación de coincidencia, basada en las relaciones de coincidencia en individuos concretos y captada por medio de la sensación.

4. Figura y cantidad continua

Otra forma de relacionar la cantidad y la cualidad es a partir del cuarto género de cualidades: la figura y la forma externa, y el segundo género de la cantidad: continua. Aunque en los siguientes textos Aristóteles no establece una relación explícita, deja abierta esta posibilidad, dada la cercanía de los términos que expone.

> Un cuarto género de cualidades es la figura y la forma que envuelve a cada cosa, y además la derechura y la curvatura y cualquier posible cosa del mismo tipo: pues en cada una de estas cosas se habla de un cierto *cual;* en efecto, por ser triangular o cuadrangular se dice de algo que es tal o cual, así como por ser recto o curvo. Y cada cosa se llama *tal* o *cual* según la forma (*Categorías*, 8, 10a 11-14. Aristóteles 1982:59).

La figura y la forma que envuelve a cada cosa, que son cualidades, se expresan por medio de líneas, superficies, cuerpos o volúmenes, que son cantidades continuas.

> De lo *cuanto,* por su parte, lo hay discreto y lo hay continuo [...] Es discreto, por ejemplo, el número y el enunciado, continua la línea, la superficie, el cuerpo y aun, aparte de esto, el tiempo y el lugar (*Categorías,* 6, 4b 24-25. Aristóteles 1982: 42).

La cantidad continua puede distinguirse por cualidades: por ejemplo, una línea puede distinguirse de otra, a partir del *¿cuál?,* si es recta y la otra curva. Dentro de uno de los géneros del cuanto, pueden darse diferencias dentro del cual. Esto me lleva a pensar que las categorías son criterios de distinción, que no siempre son distinciones en sí, sino que algunas veces son también distinciones funcionales respecto a otra cosa. Así, también la cantidad y la cualidad pueden relacionarse a partir de la cantidad continua y las cualidades de la figura y la forma externa. Otra relación posible es que la cantidad continua puede distinguirse a partir de cualidades que afectan directamente la cantidad. Estas relaciones entre cantidad y cualidad, posibilitan la relación entre geometría y mundo físico

5. Las cualidades de los números

La cualidad puede aplicarse a las realidades matemáticas, el ejemplo que pone Aristóteles a continuación es de origen claramente pitagórico.

> Otro es el sentido de la palabra [cualidad] cuando se aplica a *las cosas inmóviles, es decir, a las realidades matemáticas:* así, los números poseen ciertas cualidades, por ejemplo, los compuestos, que no se dan en una dimensión, sino que su representación es la superficie y el sólido (se trata de aquellos que son tantas veces tanto, o tantas veces tantas veces tanto), y en general, lo que comprende su entidad al margen de la cantidad: en efecto, la entidad de cada número es lo que éste es de una sola vez, por ejemplo, la del seis no es lo que se repite dos o tres veces, sino lo que es de una vez, seis es, efectivamente, una vez seis (*Metafísica,* V, 14, 1020b 2-9. Aristóteles 1994/1998: 239).

Los números compuestos poseen ciertas cualidades; al hablar de números compuestos se refiere a los números cuadrados (los números tantas veces tanto), y a los números cúbicos (los números tantas veces tantas veces tanto). Las cualidades de estos números compuestos a las que se refiere, son que su representación es la superficie o el sólido (volumen), que corresponden al cuarto género de la cualidad: la figura y la forma externas. Pero esta relación la establece, no entre cantidad y cualidad, sino entre cualidad y el *existiendo* del número.

No es muy claro, el por qué Aristóteles evita en este texto, la relación directa entre cantidad y cualidad; sin embargo establece la relación entre otros dos géneros de la predicación: la cualidad y el *existiendo*. Haciendo la siguiente aclaración: el *existiendo* de cada número, no es que se repita, sino ser una vez; el *existiendo* del número seis es ser una vez seis.

De cualquier manera, Aristóteles establece una relación explícita entre los números compuestos y su cualidad, a saber la figura y la forma externa, es decir, que puedan ser representados por superficies y volúmenes, según lo he estudiado por el método de los números figurados establecido por los pitagóricos a partir de puntos (véase supra: 43-48). A partir del establecimiento de esta relación, Aristóteles posibilita la relación entre aritmética y geometría.

6. Comentario al problema III

Aristóteles tiene dos posturas muy definidas respecto a la relación entre cantidad y cualidad: la primera que las *categorías* o *géneros de predicados* constituyen géneros diferentes, sin posibilidad de relación entre los distintos *géneros de predicados,* pues ni se incluyen propiamente unos en otros, ni siendo géneros diferentes se incluyen en un género común. De este modo establece la más absoluta diferencia entre las *categorías*. En la segunda postura establece los mecanismos, métodos, conceptos y subgéneros dentro de los *géneros de predicados* que permiten una relación entre las diferentes *categorías* entre sí.

El que Aristóteles haya sostenido alguna de estas dos posturas en distintos lugares de su obra tiene varias explicaciones: en primer lugar un planteamiento lógico metodológico en contraste con los hechos y conclusiones de la ciencia de su época. En segundo lugar, la perspectiva desde la cual se estudia los problemas desde la identificación o desde la distinción.

Aristóteles ha realizado un análisis lingüístico, que permite comprender y manejar ciertas herramientas que facilitan el entendimiento de las ciencias y su funcionamiento, y que posibilitan además la comprensión de la realidad y su funcionamiento. Por tanto, Aristóteles se enfrenta a dos conclusiones de la ciencia de su época: por una parte, hay una separación radical entre geometría y aritmética, que se ha producido a partir del problema de la inconmensurabilidad; por la otra, las relaciones que existen entre ciencias matemáticas y el mundo físico en las ciencias mixtas. Y algunos restos o partes de relaciones entre aritmética y geometría establecidas por los pitagóricos, que todavía funcionan en la ciencia contemporánea a Aristóteles, y que son tomadas como evidentes y ciertas. Uno de los problemas a que se enfrenta Aristóteles es que estas conclusiones que ofrece la ciencia de su tiempo son contradictorias, pero son hechos evidentes e innegables. Asimismo, Aristóteles además intenta explicar estas conclusiones y hechos que muestra la ciencia de su tiempo, desde un punto de vista lógico y metodológico.

En los diferentes planetamientos que hace Aristóteles, respecto de estos problemas en algunas ocasiones es más radical que en otras, pero en ningún momento sacrifica los hechos por la coherencia de una teoría. Hay una postura radical para describir los procesos cognitivos del ser humano: la identidad absoluta o la contradicción radical:

$$(A \equiv B) \; -\!\equiv \; (A \; -\!\equiv B)$$

($-\!\equiv$, significa exclusión)

Aristóteles además de aceptar esta primera manera de comprender nuestros procesos cognitivos, propone una graduación de identidades y una graduación de distinciones, que permitan comprender mejor nuestros complejos procesos cognitivos, y que ayuda a entender con mayor precisión los complejos procesos de la realidad. En los análisis que propone Aristóteles es necesario tener conciencia si está distinguiendo o está identificando; para después establecer el grado o nivel de identificación o distinción que está aplicando. En cuanto a la identidad se puede establecer a partir de la identidad del individuo consigo mismo, la identidad de un término con su definición, la identidad de la especie, la identidad del género, las relaciones de coincidencia, la igualdad, la semejanza. En cuanto a la distinción se puede establecer la diferencia numérica; es decir, la de los individuos concretos, la diferencia por la especie, por el género, la desigualdad, la desemejanza; estos distintos niveles de identidad y diferencia, posibilitan una descripción más precisa de los complejos procesos cognitivos junto con una realidad compleja.

Además de una diferencia radical entre los géneros, apoyada en las conclusiones científicas a partir de la inconmensurabilidad, Aristóteles estudia la serie de relaciones entre aritmética y geometría, y entre ciencias matemáticas y mundo físico, apoyándose en el análisis de las ciencias mixtas.

Hasta el momento, en los textos analizados, de manera consistente Aristóteles apoya sus proposiciones más generales en ejemplos que los validen; los ejemplos que escoge, son una expresión del estado que guardan las ciencias de su tiempo, son fundamentos fácticos, conclusiones de hecho aceptadas como evidentes para alguien entendido en la ciencia elaborada hasta esa época.

Además de las distinciones de los *géneros de predicados,* que afirman una diferencia radical entre cantidad y cualidad, Aristóteles explica cuando menos tres caminos que permiten relacionar, o dejan entrever, relaciones entre la cantidad y la cualidad:

A) Aunque las categorías son diferentes, pues en principio son criterios de distinción, y por lo tanto se constituyen como diferentes *Géneros de predicados* del *existiendo,* esto no quiere decir que siempre los individuos o sus atributos se prediquen exclusivamente en un *Género de predicados.* Hay cosas que pueden estar incluidas en dos o más figuras de la predicación del *existiendo.*

B) La cantidad y la cualidad se pueden relacionar por coincidencia o por relación con otro.

C) La cantidad y la cualidad se pueden relacionar a partir del segundo género de la cantidad: la cantidad continua, y el cuarto género de la cualidad la figura y la forma externas. Esta relación posibilita la relación de la geometría con el mundo físico, explicando la existencia de algunas ciencias, conocidas como ciencias mixtas.

D) La cantidad y la cualidad se pueden relacionar por el número y la figura y forma externas, en el caso de los números compuestos. Si bien Aristóteles no establece una relación directa entre cantidad y cualidad, sino a través de la cualidad y el *existiendo,* está relación posibilita la relación entre aritmética y geometría, tal vez éste es uno de los pocos casos, en los que Aristóteles reconoce, hace explícita y explica las relaciones entre aritmética y geometría.

E) Las relaciones establecidas en C) y D), posibilitan la relación aritmética—geometría y geometría—mundo físico, a partir de las conclusiones y métodos pitagóricos vigentes y tomados como evidentes en ese momento. Aunque Aristóteles habla explícitamente de algunas de estas relaciones y posibilita algunas otras, parece no haber tenido el trabajo sistemático suficiente como para establecer estas relaciones con todo rigor.

IV. El problema de los objetos matemáticos y los objetos físicos

1. Diferencias entre el punto de vista matemático y el punto de vista físico

A continuación haré un análisis de *Física,* II, 2, 193b 22 -194a 14. (Aristóteles 1995/1998: 135-137). En este texto, Aristóteles presenta otra manera de plantear el estudio de las relaciones entre matemáticas y física. En este pasaje analiza el interés y la actividad del físico y del matemático, es decir, fija su objeto de estudio en *quienes estudian* determinada ciencia.

No se parte de la diferencia entre ciencias matemáticas y mundo físico, sino al contrario de como ha sido planteado sistemáticamente hasta ahora, parte de que matemáticas y física tienen puntos en común, y que es necesario distinguirlas. El ejemplo para estos puntos en común es que, los cuerpos físicos tienen también superficies, volúmenes, longitudes y puntos, cosas de las cuales también se ocupa el matemático. Esto constituye un planteamiento del todo novedoso respecto a los anteriores.

> Después de haber determinado los diversos sentidos en que se dice la naturaleza, tenemos que examinar ahora en qué se diferencia el matemático del físico, pues los cuerpos físicos tienen también superficies, volúmenes, longitudes y puntos, de los cuales se ocupa el matemático (*Física,* II, 2, 193b 22-25 Aristóteles 1995/1998: 135).

A continuación Aristóteles formula una pregunta y desarrolla su respuesta

> Además ¿es la astronomía distinta de la física o es una parte suya? Porque parece absurdo que se suponga que es tarea propia del físico conocer la esencia del sol y de la luna, pero no sus atributos esenciales, en especial porque quienes se ocupan de la naturaleza manifiestan también interés por la figura de la luna y el sol, e investigan si la tierra y el mundo son esféricos o no (*Física*, II, 2, 193b 25-30. Aristóteles 1995/1998: 135-136).

La astronomía como otras ciencias mixtas han sido consideradas como *las partes de las matemáticas más próximas a la física* (*Física*, II, 194a 8. Aristóteles 1995/1998: 137). Llama la atención la pregunta si la astronomía es parte de la física, y sobre todo la respuesta, parece que la astronomía sí es parte de la física, pues resulta absurdo que el físico estudie qué es el Sol y la Luna y no estudie los atributos o propiedades principales de su objeto de estudio. Los que se ocupan de la naturaleza manifiestan también interés por la figura de los cuerpos celestes. Así, la figura es un atributo principal de los cuerpos celestes en particular, y de los cuerpos físicos en general. Respecto a si la astronomía es parte de las matemáticas o parte de la física, puede considerarse un acercamiento de Aristóteles a la idea de que las matemáticas pueden estudiar sin mayor problema el mundo físico. Aunque manifiesta una mayor relación entre matemáticas y física, Aristóteles no asimila una en la otra, sino que prefiere mantener la diferencia entre estas dos ciencias, por muy estrechas que sean sus relaciones.

> Ahora bien, aunque el matemático se ocupa también de estas cosas, no las considera en tanto que límites de un cuerpo físico, ni tampoco estudia los atributos mencionados en tanto que atributos de tales cuerpos. Por eso también los separan del movimiento, pues por el pensamiento se los puede separar del movimiento, lo cual no introduce ninguna diferencia ni conduce a error alguno (*Física*, II, 2, 193b 31-35. Aristóteles 1995/1998: 136).

El matemático estudia también las líneas, superficies, volúmenes, pero no en tanto que límites de cuerpos físicos, sino como atributos separados. Una misma cosa puede ser considerada desde un punto de vista matemático o desde un punto de vista físico, y eso depende de la persona que hace la consideración, es decir de quien estudia. La consideración del matemático separa los atributos, no los considera como límites de los cuerpos físicos, ni estudia estos atributos en tanto que atributos de tales cuerpos, separa los atributos del movimiento por medio del pensamiento, lo cual no introduce diferencia ni error. A continuación Aristóteles dice que los que hablan de ideas separadas hacen lo mismo, sin darse cuenta y con menos rigor y justificación que la consideración matemática, y pone ejemplos respecto a la consideración matemática *lo curvo,* y la consideración física *la nariz chata.*

> Los que hablan de las Ideas proceden de la misma manera sin darse cuenta, pues separan las entidades naturales, las cuales son sin embargo mucho menos separables que las matemáticas. Se podría aclarar esto si se intentase establecer en cada uno de estos casos las definiciones de las cosas y de sus atributos. Porque lo impar y lo par, lo recto y lo curvo, y también el número, la línea y la figura, pueden definirse sin referencia al movimiento; pero no ocurre así con la carne, el hueso y el hombre: estos casos son similares a cuando se habla de «nariz chata», pero no de «lo curvo» (*Física,* II, 2, 193b 36 - 194a 7. Aristóteles 1995/1998:136-137).

En el siguiente pasaje Aristóteles considera a la astronomía como una de las partes de las matemáticas más próximas a la física. Parece que es una cuestión difícil y Aristóteles no termina de ubicar a la astronomía como parte de la física o como parte de las matemáticas.

> Esto es también claro en las partes de las matemáticas más próximas a la física, como la óptica, la armónica y la astronomía, ya que se encuentran en relación inversa con la geometría, pues mientras la geometría estudia la línea física, pero en tanto que no es física, la óptica estudia la línea matemática, no en tanto que matemática, sino en tanto que física (*Física,* II, 2, 194a 8-11. Aristóteles 1995/1998:137).

Geometría y física estudian las mismas cosas, pero se distinguen en el modo de considerarlas. Aunque Aristóteles establece relaciones entre estas ciencias, se resiste a considerarlas como una sola ciencia y prefiere mantener las diferencias, y es por esto que dice que la geometría estudia la línea física en tanto que matemática, y que la óptica estudia la línea matemática en tanto que física empero, un objeto de estudio y una aplicación de la consideración en cuanto al cómo estudiarla, esto permite una estrecha relación entre las ciencias, y una aplicación de un tipo de consideración como punto de vista por medio del cual se estudia, en otro tipo de consideración como objeto de estudio. Esto permite además de establecer una estrecha relación, conservar la distinción entre geometría y física, o entre el objeto de estudio de la óptica como ciencia matemática y su consideración y aplicación al mundo físico. En cuanto al modo de considerar, la geometría y la física se encuentran en relación inversa.

Puesto que la naturaleza se entiende en dos sentidos, como forma y como materia, tenemos que estudiarla de la misma manera que si investigásemos qué es lo chato* en una nariz; porque el objeto de nuestro estudio no son cosas carentes de materia ni tampoco cosas exclusivamente materiales (*Física*, II, 2, 194a 12-14. Aristóteles 1995/1998: 137). [28]

En el pasaje anterior Aristóteles llega a una conclusión contraria a la expuesta en *Metafísica*, II, 3, 995a 15-18 (Aristóteles 1994/1998: 128), en la que afirma que el método matemático no es propio para la física. Como ya mencioné esta proposición tiene un fuerte sentido platónico, en cambio la conclusión de que la naturaleza se entiende en dos sentidos, como forma y como materia, y que la física estudia cosas no carentes de materia pero tampoco cosas exclusivamente materiales es una postura aristotélica, que se verá confirmada en reiteradas ocasiones en las que Aristóteles dice que no es necesario postular formas separadas para explicar la naturaleza. (*Metafísica*, XIII, 3, 1077b 22-30. Aristóteles 1994/1998: 511-512)

Una ciencia puede distinguirse de otra según la consideración cognitiva de quien estudia. Se puede tener como objeto de estudio al sujeto-individuo o a una de sus características, esto sucede de dos maneras: *a)* sin hacer referencia al sujeto-individuo, es decir separando esa característica; *b)* que el sujeto-especie o alguna característica, estén en relación con algún sujeto-individuo.

Es claro que Aristóteles no propone una clasificación tajante de las ciencias mixtas, por ejemplo a la astronomía se le considera una de las partes de las mátemáticas más próximas a la física, pero también como parte de la física. A la óptica, se le considera como una parte de las matemáticas próxima a la física, pero igualmente se dice que la óptica pueden estudiarse con o sin relación a las matemáticas (*Analíticos Posteriores* I, 13, 79a 11-13. Aristóteles 1988: 348).

---

[28] *Nota 22: *Simós,* de nariz chata o roma, ejemplo frecuente en Aristóteles (está ya en Platón, *Teét.* 209c, y quizás fuera usual en la Academia). En *Met.* 1025b30-35 se dice: «de las cosas que se definen y de las quididades, unas como la nariz chata (*tò simón*) y otras como lo cóncavo (*to koilón*), diferenciándose en que lo chato se toma junto con la materia (pues lo chato es una nariz cóncava), mientras que la concavidad se toma sin la materia sensible. Y si todas las cosas naturales se enuncian como lo chato...» (*cfr. Met.* 1030 b 18, 1036 b 23, 1037 b 3; *Acerca del alma* 429 b 14, véase también BONITZ, *Index* 680 a 40). En griego, *simós* sólo se aplica a la nariz que es cóncava, es decir, designa un ser físico real e inseparable, mientras que «cóncavo» se aplica a toda cosa que tenga una concavidad cualquiera, es decir, es una determinación geométrica separable conceptualmente.

En los textos anteriores es claro que el punto de relación entre matemáticas y física es la figura, el siguiente fragmento aclara la relación entre matemáticas y física en las ciencias mixtas.

> El mismo razonamiento vale también para la armónica y para la óptica, pues lo que estudian, no lo estudia ninguna de ellas en tanto que visión o en tanto que sonido, sino en tanto que líneas y números (éstos constituyen, en efecto, afecciones particulares de aquellos), y lo mismo la mecánica; por consiguiente, si se toman ciertas características como separadas de cuanto les acompaña accidentalmente y se hace un estudio de ellas en tanto que tales, no se comente por ello error alguno, al igual que tampoco se yerra si se traza una línea en la tierra y se dice que tiene un pie, aunque no lo tenga (*Metafísica,* XIII, 3, 1078a 14-20. Aristóteles 1994/1998: 513).

La armónica y la óptica no estudian directamente el sonido o la visión, sino que estudian las afecciones particulares del sonido o de la visión, en tanto que líneas y números; estas características se toman como separadas de cuanto les acompaña accidentalmente, es decir que se les separa de aquello que no es necesario considerar para estudiarlas como esas características en cuanto tales. Este planteamiento es novedoso, las líneas y los números (cantidad) son afecciones particulares de otras afecciones de las entidades sometidas a movimiento (cualidades) (véase supra: 105). Así, la cantidad se puede considerar una afección de afecciones, un atributo de otros atributos; puede considerarse en algunos casos como atributo propio, por ejemplo, la figura en el estudio astronómico de el Sol y la luna.

2. La consideración y la separación

A continuación haré un estudio de *Metafísica,* XIII, 3, 1077b 17-30 (Aristóteles 1994/1998: 511-512). Para su análisis he dividido este texto en dos partes, en cada uno de estos dos fragmentos se presenta un razonamiento por analogía.

> Así como las proposiciones universales en las matemáticas no versan sobre cosas separadas aparte de las magnitudes y de los números, sino que versan sobre éstos, pero no en tanto que tales, es decir, en tanto que tienen magnitud y son divisibles, es evidente que también puede haber razonamientos y demostraciones sobre las magnitudes sensibles, no ya en tanto que son sensibles, sino en tanto que poseen determinadas características (*Metafísica* XIII, 3, 1077b 17-22. Aristóteles 1994/1998: 511).

La primera analogía es la siguiente: en matemáticas las proposiciones universales tratan de las magnitudes y de los números como cosas separadas del sujeto-individuo y de sus determinaciones concretas, es decir que no se consideran como magnitudes o números referidos a lo individual, sino que se consideran como características separadas, como magnitudes y divisibles en sí mismos, sin referencia concreta. Si esto sucede así y se acepta, resultará también evidente que puede haber razonamientos y demostraciones sobre magnitudes sensibles, pero no considerándolas como sensibles, sino como separadas en tanto poseen determinadas características.

> Pues así como hay muchos razonamientos acerca de las cosas sensibles, pero exclusivamente en tanto que están sometidas a movimiento, dejando a un lado qué es cada una de ellas y sus accidentes, y no por eso tiene que haber necesariamente algún móvil separado de las cosas sensibles, ni alguna naturaleza distinta dentro de ellas, así también habrá razonamientos y ciencias que versen sobre las cosas dotadas de movimiento, pero no en tanto que están dotadas de movimiento, sino exclusivamente en tanto que son cuerpos y, a su vez, exclusivamente en tanto que son superficies, y exclusivamente en tanto que son longitudes, y en tanto que son divisibles, y en tanto que son indivisibles y tienen posición, y exclusivamente en tanto que son indivisibles (*Metafísica* XIII, 3, 1077b 22-30. Aristóteles 1994/1998: 511-512).

La segunda analogía consiste en lo siguiente: hay muchos razonamientos sobre las cosas sensibles, pero hay razonamientos que consideran solamente una característica de las cosas sensibles, por ejemplo el movimiento, se estudian en cuanto que son cosas móviles independientemente de lo que sea cada una de ellas (definición) y sus determinaciones propias. El hecho que se puedan considerar así por el pensamiento, no significa que haya cosas móviles separadas de cualquier existente entendido como sujeto-individuo. Esto es una crítica a las formas separadas propuestas por Platón. La analogía continúa de la siguiente manera: si existen estos tipos de razonamiento y se acepta su existencia, entonces se podrá aceptar que hay razonamientos y ciencias que tratan de cosas con movimiento, pero no en tanto que tienen movimiento, sino que se puede tomar otra característica separada, que se le puede considerar exclusivamente como cuerpo, superficie, longitud, divisible, como indivisible con posición o como indivisible sin más.

Así, se puede estudiar algo a partir de la consideración separada de cierta característica, *dejando a un lado qué es cada una de ellas y sus accidentes*, es decir, que se puedan estudiar varias cosas a partir de una característica común, por ejemplo: que sean cuerpos, sin considerar que uno sea animal, el otro planta y el otro hombre, se estudian porque los tres son sólidos, y esa característica es la que se separa y se estudia. Esto no significa que esa característica exista por sí misma y de manera separada a lo sensible *[...] así también habrá razonamientos y ciencias que versen sobre las cosas dotadas de movimiento, pero no en tanto que están dotadas de movimiento, sino exclusivamente en tanto que son cuerpos [...].*

Las ciencias se ocupan de un objeto propio, *de la cosa misma que estudia cada una [de las ciencias] —de lo sano, si lo estudia en tanto que sano, y del hombre, si lo estudia en tanto que hombre— [...]* la geometría estudia las cosas sensibles, pero no por ser sensibles, sino por ser extensas, su objetivo principal no es el estudio de lo sensible en cuanto tal, sino de la extensión, las magnitudes o los números: *[...] así también puede decirse lo mismo de la geometría: no porque las cosas que ésta estudia sean accidentalmente sensibles, pues no las estudia en tanto que sensibles, no por eso las ciencias matemáticas se van a ocupar de cosas sensibles ni desde luego, tampoco de otras cosas separadas de ellas* (*Metafísica* XIII, 3, 1078a 1-4; Aristóteles 1994/1998: 512).

A continuación Aristóteles toma un criterio muy importante y funcional, el estudio de las cosas *en tanto que,* se pueden estudiar las cosas sensibles pero no *en tanto que* son sensibles sino consideradas en sí mismas; estudiar al hombre *en tanto que* hombre, y estudiar lo sano *en tanto que* sano. *Las cosas poseen muchas propiedades que les pertenecen por sí mismas, en tanto que tales propiedades se dan en ellas;* Aristóteles afirma que la mejor manera de estudiar es que uno tome separándolo, lo no separado, cosa que hacen el aritmético y el geómetra.

> [...] Por lo demás, la mejor manera de estudiar cada cosa consiste en que uno tome, separándolo, lo no separado, lo cual hacen el aritmético y el geómetra. Desde luego, el hombre, en tanto que hombre, es uno e indivisible; pues bien, aquél lo toma como uno indivisible y estudia, a continuación, si al hombre, en tanto que indivisible, le corresponde alguna propiedad; el geómetra, por su parte, no estudia propiedades suyas ni en tanto que hombre ni en tanto que indivisible, sino en tanto que sólido, pues las

propiedades que le correspoderían si no fuera indivisible pueden, evidentemente, corresponderle también prescindiendo de aquellas otras. Conque, por tanto, los geómetras discurren acertadamente y razonan acerca de cosas que son, y se trata de algo que es realmente. Pues «lo que es» se dice tal en dos sentidos, lo uno es plenamente actualizado y lo otro es en modo de materia (*Metafísica* XIII, 3, 1077b 17-1078b 5. Aristóteles 1994/1998: 511-514. *Cfr. Metafísica* XIII, 3, 1077 b 17-1078 b 5. Aristóteles 1970/1982: 660-666), (véase *Metafísica* III, 2, 996a 28 - 996b 1. Aristóteles1970/1982: 105-106).

El geómetra estudia cierto tipo de especies no referidas al sujeto-individuo (como sensible), y estudia cualquier individuo-sujeto a partir de la separación de una de las características que tiene esta especie no referida. *El geómetra, por su parte, no estudia propiedades suyas ni en tanto que hombre ni en tanto que indivisible, sino en tanto que sólido.*

Así pues existen dos tipos de razonamientos y demostraciones respecto a la actividad e interés de quien estudia: el que considera el sujeto-individuo ya sea en sí mismo o a partir de alguna de sus características o afecciones. El que considera las cosas en sí mismas, es decir, como separadas del sujeto-individuo, esto no quiere decir que por considerarlas separadas, estas cosas existan realmente separadas de la materia, simplemente es un acto de separación, un tipo de consideración, por parte de quien estudia.

3. Comentario al problema IV

En estos textos existe una interacción entre dos puntos de vista: el primero una clasificación rígida y estática de las ciencias, las ciencias mixtas son parte de las matemáticas o son parte de la física. Por otra, una postura más flexible que toma en cuenta el modo de considerar el objeto de estudio por parte de quien estudia.

Si se considera a las ciencias mixtas como parte de las matemáticas, entonces se estudian especies separadas y características generales en sí mismas, y sin relación directa con el sujeto-individuo. Asimismo, las ciencias mixtas son consideradas como las partes de las mátemáticas más próximas a la física, incluso existen algunos ejemplos en los que se habla de algunas ciencias mixtas, con cierta independencia de las matemáticas: como es el caso de la óptica que puede estudiar y explicar su objeto de estudio con o sin arreglo a las matemáticas o la pregunta de si la astronomía es parte o no de la física.

Esta posibilidad de colocar las ciencias mixtas como ciencias matemáticas o como ciencias físicas, crea algunas dificultades pero como ya se vio, es una manera encontrada por Aristóteles para relacionar a la matemática con la física, haciendo permanecer a cada una de estas ciencias como independiente y distinta de la otra.

Otra perspectiva, que permite clasificar fácilmente a las ciencias en matemáticas o en físicas es la consideración de quien estudia, ya sea el físico o el matemático:

Considera al sujeto-individuo: físico.

Considera la especie en sí misma, sin relación al sujeto-individuo: matemático.

Las ciencias mixtas consideran matemáticamente las afecciones de los entes con movimiento, es decir, las cualidades sensibles.

Así, un mismo objeto puede ser considerado desde el punto de vista físico o desde el punto de vista matemático, dependiendo de lo que quiera estudiar quien lo hace. Un planteamiento rígido, estático y de clasificación inclusiva estricta de las ciencias, no permite explicar y dar solución completa a los problemas hasta ahora presentados, en cambio, un planteamiento funcional de los procesos cognitivos, dinámico, flexible e intercambiable, permite explicar y dar solución a estos mismos problemas porque permite establecer un un mayor número de relaciones, más flexibles, y sobre todo, plantear nuevas relaciones, que no podrían siquiera plantearse a partir y en un sistema rígido y estático.[29]

[29] Es una la ciencia de un solo género, a saber <de> todas las cosas que constan de los primeros <principios de ese género> y que en sí son partes o afecciones de ellos. En cambio, es distinta una ciencia de otra <cuando> todos sus principios, ni parten de las mismas cosas, ni parten los unos de los otros. Un signo de esto <se da> cuando se llega a las cuestiones indemostrables: pues es preciso que las propias cuestiones <demostradas por esas ciencias> estén en el mismo género que las indemostrables. Y <se da> también un signo de esto cuando las cosas demostradas a través de ellas están dentro del mismo género y son homogéneas (*Analíticos segundos,* I, 28, 87a 38 - 87b 4. Aristóteles 1988: 383; *Analíticos segundos,* I, 9, 75b 37 - 76a 4. Aristóteles 1988: 334).

V. LA TEORÍA DE LOS GÉNEROS Y LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS

Hasta ahora he estudiado con detenimiento las diferencias y las relaciones entre los géneros; que la cantidad y la cualidad constituyen diferentes *Géneros de predicados,* también que su relación es posible a partir de la inclusión propia de un género en otro, o de la inclusión de dos géneros distintos en un género común, otra posibilidad de relación entre dos géneros se da a partir de la coincidencia, que lógicamente se interpreta como una conjunción, y que a partir de los diagramas de Venn-Euler, se representa por medio de una intersección, todas estas relaciones entre géneros posibilitan las relaciones entre aritmética y geometría, y entre geometría y mundo físico, cuando menos, para ciertos casos concretos.

A continuación analizaré las relaciones entre género y especie, y entre género e individuo, para continuar con la relación especie individuo, siempre dentro del contexto que explique las relaciones entre las matemáticas y entre las ciencias matemáticas y el mundo físico.

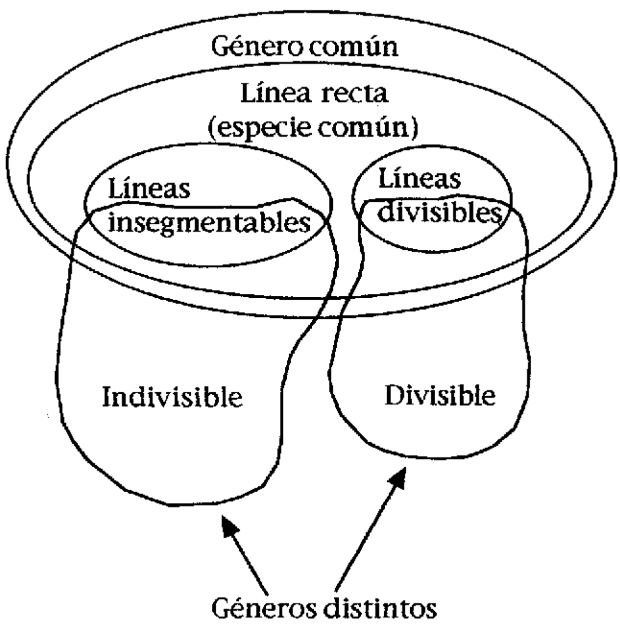
1. El género de las cosas específicamente indiferenciadas es el mismo para todas ellas

En el siguiente texto Aristóteles se refiere a las cosas específicamente indiferenciadas; es decir, a los existentes concretos que por sus características comunes pertenecen a una misma especie. Los existentes o individuos concretos que conforman una especie, son indiferenciados, pues son idénticos respecto a las características que son necesarias para definirlos.

> En efecto, el género de todas las cosas <específicamente> indiferenciadas es el mismo: así, pues, si se mostrara que lo es de una sola, será evidente que lo es de todas, y, si no lo es de una, será evidente que de ninguna, vgr., si alguien, al poner el caso de las líneas insegmentables, dijera que su género es lo indivisible: en efecto, el género de las líneas susceptibles de división no es el mencionado, y, sin embargo, son indiferenciadas según la especie: pues todas las líneas rectas son indiferenciadas entre sí según la especie (*Tópicos,* IV, 1, 121b 17-22; Aristóteles 1982: 164-165).

El género de las cosas o individuos específicamente indiferenciados es el mismo, de tal forma que si se muestra que algo le corresponde a una, en cuanto a que pertenece a una especie, entonces le corresponde a todas, y si no le corresponde a una, entonces no le corresponde a ninguna. En el ejemplo, las subespecies son, líneas insegmentables y líneas divisibles, estas subespecies son indiferenciadas según la especie, por ser líneas pertenecen a la especie de las líneas rectas y a las líneas rectas les corresponde un mismo género común. En cambio, al determinar las líneas en insegmentables y divisibles, es claro que se les está distinguiendo unas de otras, respecto de insegmentable y divisible, no pueden tener el mismo género común, pues es claro que pertenecen a géneros distintos, y por lo tanto no pueden ser específicamente indiferenciados. Así que líneas insegmentables y líneas divisibles, son específicamente indiferenciadas respecto a ser líneas, pero específica y genéricamente distintas, respecto a insegmentable y divisible.

En síntesis, el género de los individuos o de subespecies que pertenecen a una misma especie es el mismo para cada uno. Relación género-especie-subespecie-individuo. Lo expuesto puede diagramarse de la siguiente manera:



2. Matemáticas y mundo físico. Considerar el *que* y el *porque*

El razonamiento del *que*, establece como conclusión una proposición mediata que afirma la verdad de un hecho no evidente. El razonamiento del *porque* establece como conclusión una proposición en la que se expresa la causa o la explicación, el cual menciona las razones que se tienen para afirmar que una proposición mediata ya establecida es verdadera respecto a un hecho no evidente.

A continuación, haré un resúmen del pasaje *Analíticos segundos*, I, 13, 78a 21 - 78b 30; Aristóteles 1988: 345-347.

En una misma ciencia el saber *que* y el saber *porque* son diferentes en dos modos:

1) Si el razonamiento no se produce a través de proposiciones inmediatas, pues no se toma la causa primera y la ciencia del *porque* es con arreglo a la causa primera.

2) Si el razonamiento se produce a través de proposiciones inmediatas, pero no a través de la cuasa, sino del más conocido de los términos invertidos. Nada impide que el más conocido de los predicados recíprocos sea a veces lo que no es la causa.

A continuación Aristóteles ofrece dos ejemplos de los razonamientos del *que* y del *porque*.

Establece letras para los términos: A para el término mayor, B para el término medio y C para el término menor, razonamiento del *que:* se establece la proposición *que los planetas están cerca.*

C, Planetas
B, No titilar
A, Estar cerca

		Se establece por:
Los planetas no titilan	$C \supset B$	observación o corroboración
Lo que no titila está cerca	$B \supset A$	percepción o experiencia

Por lo tanto es necesario que:

Los planetas están cerca	$C \supset A$	razonamiento

Este razonamiento es del *que,* pues se hace a partir del más conocido de los términos invertidos: en este caso, no titilar, pero el no titilar no es la causa de que los planetas estén cerca, sino más bien, los planetas no titilan por estar cerca, pero cabe invertir el término medio con el término mayor, y así se tendrá el razonamiento del *porque.*

Se establece la proposición *porque* : *los planetas no titilan*

C, Planetas
B, Estar cerca
A, No titilar

		Se establece por:
Los planetas están cerca	$C \supset B$	razonamiento
Lo que está cerca no titila	$B \supset A$	percepción o experiencia

Por lo tanto es necesario que:

Los planetas no titilan	$C \supset A$	observación o corroboración

Se ha tomado la causa primera, digo que *los planetas están cerca porque* no titilan, y sé por experiencia y por generalización que *lo que está cerca no titila*

El otro ejemplo es similar al anterior, razonamiento del *que:* se establece la proposición *que* : *La Luna es esférica*

C, Luna
B, aumenta así
A, esférico

		Se establece por:
Si aumenta así es esférico	$B \supset A$	percepción o experiencia
La Luna aumenta así	$C \supset B$	observación o corroboración

Por lo tanto es necesario que:

La Luna es esférica	$C \supset A$	razonamiento

Intercambiando el término medio con el término mayor se forma el razonamiento del *porque.* No es esférica por los aumentos, sino que por ser esférica toma esa clase de aumentos; es importante notar que las proposiciones que funcionan como premisas en el razonamiento de saber *que,* son inmediatas, es decir, se establecen por observación, corroboración, percepción o experiencia, una de ellas es particular y la otra afirma una relación para una totalidad.

Razonamiento del *porque,* se establece la proposición *porque* : *la Luna aumenta así*

C, Luna
B, esférico
A, aumenta así

		Se establece por:
La Luna es esférica	$C \supset B$	razonamiento
Lo esférico aumenta así	$B \supset A$	percepción o experiencia

Por lo tanto es necesario que:

La Luna aumenta así	$C \supset A$	observación o corroboración

En una misma ciencia, en aquellos casos en que los medios no se invierten y lo no causal es más conocido, se demuestra el *que,* pero no el *porque.*

Por otra parte, la demostración del *que* y no del *porque,* también se da cuando el que el término medio se pone fuera de los extremos (como parte de la conclusión), pues no se dice la causa. Ejemplo: ¿por qué no respira el muro? porque el muro no es un animal.

Es claro que la causa de que el muro no respire no es que no sea un animal, pues, si la negación es la causa de no darse, la afirmación lo es de darse, y, si la afirmación es la causa de darse, la negación lo es del no darse. Así, si la causa de no respirar es que no es animal, entonces, el ser animal es la causa de respirar, pero, no todo animal respira (en el sentido de que no tiene pulmones). Así, que para este ejemplo, solamente se puede hacer un razonamiento del *que,* para establecer la siguiente proposición: ningún muro respira.

Se establece la proposición *que* : *ningún muro respira*

C, Luna
B, aumenta así
A, esférico

		Se establece por:
Lo que respira es animal	$B \supset A$	percepción o experiencia
Ningún muro es animal	$C \supset -A$	observación o corroboración

Por lo tanto es necesario que:

Ningún muro respira	$C \supset -B$	razonamiento

Se ha establecido el *que*.

Este tipo de causas se asemeja a los dichos exagerados, enunciar el término medio yendo demasiado lejos.

En una misma ciencia y en el establecimiento de los términos medios estas son las diferencias entre el razonamiento del *que* y el del *porque*.

En seguida analizo la diferencia entre el razonamiento del saber *que* y del saber *porque*, cuando cada uno se considera a través de una ciencia distinta. Una ciencia considera el *que* y otra ciencia considera el *porque;* Aristóteles pone como ejemplos ciencias que están subordinadas o incluídas unas en otras:

las cuestiones ópticas estan incluídas en la geometría; las cuestiones mecánicas estan incluídas en la estereometría; las cuestiones armónicas estan incluídas en la aritmética; los datos de la observación estan incluídos en la astronomía; las cuestiones ópticas, mecánicas, armónicas y los datos de la observación consideran saber el *que*, mientras que la geometría, la estereometría, la aritmética y la astronomía consideran saber el *porque*.

> En una misma ciencia y en el establecimiento de los medios son ésas las diferencias entre el razonamiento del *que* y el del *porque;* de otro modo también difiere el *porque* del *que* en que cada uno se considera a través de una ciencia distinta. Tales son todas aquellas cuestiones que se relacionan entre sí de tal modo que una está bajo la otra,* vgr., las cuestiones ópticas respecto a la geometría, las mecánicas respecto a la estereometría, las armónicas respecto a la aritmética y los datos de la observación** respecto a la astronomía (*Analíticos segundos,* I, 13, 78b 31 - 40. Aristóteles 1988: 347-348).[30]

[30] *nota 79: subordinadas. **nota 80: *phainómena,* lit.: «lo que se manifiesta», «lo que aparece», de donde «fenómenos». La aplicación del término en el texto a un caso restringido se debe a que los fenómenos celestes son los fenómenos por antonomasia.

En este texto, Aristóteles lo hace explícito, el conocimiento del *que* es el conocimiento del hecho captado por los sentidos. Conocer el *que* es propio de los que sienten; en tanto, el conocimiento del *porque*, es el conocimiento de las causas, es propio de los matemáticos, y se obtiene por razonamientos a partir de definiciones.[31]

Es muy importante subrayar las proposiciones con las que continúa Aristóteles: los matemáticos [...] *muchas veces no conocen el* que, *al igual que los que consideran lo universal muchas veces no conocen algunas de las cosas singulares por falta de observación.* En este contexto, conocer el *que*, está relacionado con el conocimiento de las cosas singulares y con la observación. Los que conocen las causas al igual que los que consideran lo universal o el todo, se asemejan, pues ambos conocen conceptos o relaciones de una mayor extensión y muchas veces no conocen lo singular.

De la misma manera sucede con las ciencias que se ocupan de las especies. Las matemáticas son ciencias que tratan sobre especies, no tratan sobre un sujeto-individuo. Las matemáticas se ocupan de la especie-sujeto; las demostraciones de las causas y los conocimientos universales son saberes que siendo diferentes por su entidad se ocupan de las especies.

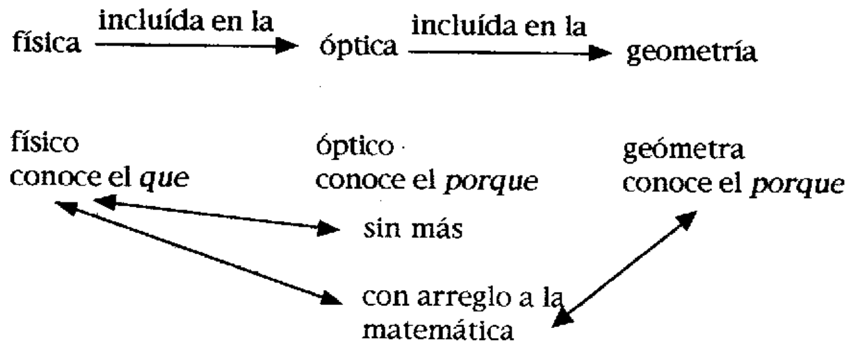
> Y algunas de esas ciencias son casi sinónimas entre sí, vgr., la astronomía <con> la matemática y la náutica, y la armónica <con> la matemática y la correspondiente al oído. En efecto, aquí el conocer el *que* es <propio> de los que sienten; en cambio, el conocer el *porque* es <propio> de los matemáticos: pues estos tienen las demostraciones de las causas, y muchas veces no conocen el *que*, al igual que los que consideran lo universal muchas veces no conocen algunas de las cosas singulares por falta de observación. Tales son todos los <saberes> que, siendo diferentes por su entidad, se ocupan de las especies.[32] En efecto, las matemáticas versan sobre especies: pues no son acerca de un sujeto; en efecto, aunque las cuestiones geométricas son acerca de un sujeto, no son, sin embargo, acerca de un sujeto en cuanto tal (*Analíticos posteriores,* I, 13, 78b 40-79a 10; Aristóteles 1988: 348).

---

[31] Se puede invertir sobre todo en las matemáticas, porque no toman nada accidental (precisamente en eso se diferencian de los <razonamientos> de las discusiones), sino <sólo> definiciones (*Analíticos posteriores* I, 12, 78a 10-13; Aristóteles 1988: 345).

[32] nota 81: es decir, de las definiciones y realidades genéricas.

La óptica que conoce el *que,* y las cosas singulares por observación se relaciona por subordinación o inclusión con la geometría que conoce el *porque* y las especies. De esta misma forma, el saber sobre el arco iris se relaciona con la óptica, por subordinación o inclusión; el conocer el *que* es propio del físico, el conocer el *porque* es propio del óptico, ya sea que lo relacione o no con la matemática.



Este conocimiento del *que* y del *porque,* puede relacionar muchas ciencias que no se encuentren subordinadas o incluídas entre sí, como es el caso de la medicina con la geometría. Saber *que* las heridas circulares se curan más lentamente es propio del médico, pues así sucede y lo sabe por observación y por experiencia, mientras que el saber el *porque* es propio del geómetra, una herida circular tarda más en sanar, porque una herida circular cuyo diámetro sea igual al de una herida longitudinal abarca mayor superficie.

El matemático conoce las causas porque establece relaciones, definiciones, propiedades principales y propiedades derivadas a una totalidad, como es el caso de la especie. Elaborando proposiciones inmediatas o mediatas que son universales, y que sirven para explicar las razones que se tienen para afirmar que una proposición mediata ya establecida es verdadera respecto a un hecho no evidente (véase supra: 163). Esta es una de las condiciones para que se dé el razonamiento del saber *porque* (véanse ejemplos anteriores supra: 164-166). También hay muchas ciencias que no siendo subordinadas entre sí se relacionan de esta manera, como es el caso de la medicina y la geometría; el médico sabe que las heridas circulares se curan más lentamente, el saber *porque* es propio del geómetra.

> Tal como la óptica se relaciona con la geometría, así otra se relaciona con ella, vgr., el <saber> sobre el arco iris: en efecto, conocer el *que* <es propio> del físico, y conocer el *porque* <es propio> del óptico, bien sin más, bien con arreglo a la matemática. Pero también muchas de las ciencias no subordinadas entre sí se relacionan de esa manera, vgr., la medicina con la geometría: pues saber que las heridas circulares se curan más lentamente <es propio> del médico, <saber> el *porque* <es propio> del geómetra (*Analíticos posteriores* I, 13, 78b 31 - 79a 16; Aristóteles 1988: 347-348). (*Cfr. Tópicos* IV, 1, 121 b 15-23); Aristóteles 1982: 165).

A partir de estos textos, Aristóteles indica dos nuevos caminos para relacionar la cantidad con la cualidad, y las ciencias matemáticas con el mundo físico; la relación especie-individuo y la relación del saber *que* y del saber *porque.*

La relación especie-individuo tiene dos vertientes: la inclusión de los individuos en una especie, o la inclusión de una característica del individuo en una característica-especie; es decir, el estudio de una característica no relacionada inmediatamente con el individuo, sino separada de él y considerada como especie en sí misma.

Las ciencias matemáticas estudian especies separadas, la óptica, mecánica, astronomía, armónica, etcétera, estudian especies referidas a los sujetos concretos. Existe una subordinación de los sujetos concretos a la especie, lo que denota que los sujetos concretos están incluídos en la especie, aunque el principio de subordinación es el mismo, la variante es que ya no es una inclusión entre géneros, sino una inclusión de individuos concretos en la especie, o también de características concretas de individuos, en especies de características.

En estos texto, el saber *que* y el saber *porque* se relacionan con la extensión: mientras el saber *que* se relaciona con el conocimiento sensible del individuo, el saber *porque* se relaciona con el conocimiento por razonamiento a partir de definiciones, el saber *porque,* es más extenso que el saber *que.* En cuanto al ejemplo sobre las ciencias que son casi sinónimas entre sí, ya ha sido analizado en el inciso 2 del apartado II de este capítulo cuarto (véase supra: 140-141).

3. Propiedades principales y propiedades derivadas. La relación entre el género y el individuo

En el siguiente texto Aristóteles trata sobre la relación entre género-individuo.

> Para hacerse con los problemas hay que escoger las particiones y las divisiones, y escoger de esta manera: dando por supuesto que el género es lo común a todos, vgr., si fueran animales las <cosas> consideradas, <estudiar> qué propiedades se dan en todo animal, y una vez tomadas éstas, <estudiar>, a su vez, cuáles de las restantes siguen en todo caso a lo primero; vgr., si se trata de un ave, cuáles siguen a toda ave, y así siempre <pasando cada vez> a lo más próximo: pues está claro que entonces ya estaremos en condiciones de decir por qué se dan las cosas que siguen a las incluidas en el <género> común, vgr., por qué se dan en el hombre o en el caballo. Sea A en lugar de *animal,* sean B las <propiedades> que *acompañan a todo animal,* y, en lugar de los animales individuales, C, D, E. Entonces está claro por qué B se da en D: en efecto, se da a través de A. De manera semejante en los otros casos; y en el caso de las cosas subordinadas, siempre el mismo argumento (*Analíticos segundos,* II, 14, 98a 1-13; Aristóteles 1988: 428).

Existen dos tipos de propiedades: las propiedades principales a partir de las cuales se construye la definición, y las propiedades derivadas, que sin ser parte de la definición son coextensivas y exclusivas al sujeto-especie definido. Las propiedades principales también son coextensivas y exclusivas, la diferencia entre las propiedades principales y las derivadas, es que las propiedades principales definen en sí mismas al sujeto-especie, mientras que las propiedades derivadas son una consecuencia de las propiedades principales, no se utilizan para definir al sujeto-especie, aunque pueden usarse para identificarlo o distinguirlo de otros sujetos-especie, pues las propiedades derivadas son coextensivas y exclusivas al/del sujeto-especie. Uno de los ejemplos que expone Aristóteles respecto de este tópico es el saber leer y escribir; es claro, que cuando nos referimos al hombre como un animal que sabe leer y escribir, se le puede identificar o diferenciar de otros animales y saber que se está hablando de un hombre, pero no se define al hombre por saber leer y escribir, sino por ser un animal racional, lo racional es una característica propia, leer y escribir es una propiedad derivada de la racionalidad; pero en cuanto a la coextensividad y la exclusividad tanto las propiedades principales como las propiedades derivadas son idénticas, pues son exclusivas y coextensivas; es decir, se identifican con el sujeto-especie y los distinguen plenamente de otros sujetos-especie, además, todo lo que se predica del sujeto-especie se predica, por transitividad de la predicación, del sujeto-individuo (véase supra: 93-95).

Así pues, tanto las propiedades principales como las propiedades derivadas pueden formalizarse de la siguiente manera, desde el punto de vista de la extensión y la exclusividad:

A, especie (o género)
B, propiedades principales o derivadas
C, D, E, sujetos-individuos

$$[(A \equiv B) \bullet (D \supset B)] \supset (D \supset A)$$

Esta formalización se refiere al razonamiento del saber *porque*.

4. Comentario final a la teoría de los géneros y las ciencias matemáticas

La aritmética y la geometría, la cantidad y la cualidad, y las ciencias matemáticas y el mundo físico, pueden relacionarse a partir de los géneros; estos géneros pueden incluirse propiamente unos en otros, o dos géneros diferentes pueden estar incluídos en un género común, otra manera de relacionarse, es que los géneros tengan alguna coincidencia entre sí.

Junto con las relaciones genéricas, existen otras maneras que posibilitan la relación entre aritmética y geometría, cantidad y cualidad, y entre ciencias matemáticas y mundo físico; éstas pueden relacionarse por medio de la predicación, pues las características de géneros o de especies, también pueden predicarse de los sujetos-individuos.

Las matemáticas estudian especies en sí mismas y las características que se derivan de considerarlas en sí mismas, estas características que se predican del género o de la especie pueden ser predicadas del sujeto-individuo, porque son más extensas y el sujeto-individuo está incluido en una determinada especie y en un determinado género, cuyas características generales se le predican. Las matemáticas no estudian el sujeto-individuo como tal, aunque tratan de él, sino que más bien estudian el sujeto-especie o el sujeto-género, estudian propiedades o definiciones que se refieren a una totalidad de individuos, lo que se llama general o universal.

Otra relación posible entre estas cosas, es por medio del saber *que* y el saber *porque*. El saber *que*, está vinculado con el conocimiento del sujeto-individuo, por medio de la sensación. El saber *porque*, está relacionado con el conocimiento del razonamiento por especies consideradas en sí mismas y de las características que se derivan de esta consideración. El que las especies se consideren en sí mismas, quiere decir que no se consideran directamente en relación con un sujeto-individuo , sino de manera separada de él. La consideración del saber *porque*, es más extensa que el saber *que*, ya que el primero trata sobre especies en sí mismas, y el segundo trata de especies referidas al sujeto-individuo.

Así, desde un punto de vista el saber *porque* es más extenso que el saber *que*, pues lo que corresponde a la especie, corresponderá también al sujeto-individuo. Por otra parte, el sujeto-individuo es más complejo que la consideración de una especie, pues el sujeto-individuo es el fundamento de toda predicación, y de un mismo sujeto-individuo se pueden predicar muchas especies y no solamente una, así pues, un mismo sujeto-individuo puede considerarse en relación con varias especies o con varios *Géneros de predicados*, sin que haya contradicción alguna. Esta es la razón por la que alguien que considera una determinada especie en sí misma no conoce particularidades establecidas solamente por medio del conocimiento de la cosa singular.

Otro camino de relación es la coextensividad y exclusividad, tanto de las propiedades principales, como de las propiedades derivadas. A partir de lo dicho, se pueden vislumbrar dos tipos de razonamiento: el primer tipo de razonamiento se encuentra en estrecha relación con las cosas sensibles; el segundo estudia las especies en sí mismas y sus características generales o universales.

CONCLUSIONES

Ha llegado el momento de resolver y explicar sintéticamente lo que me propuse al principio de este trabajo, en el apartado llamado *Planteamiento general de los problemas.* Si bien los problemas que se han planteado y estudiado tienen una cierta relación entre sí, hay soluciones particulares y una evolución y desarrollo independiente tanto en sus planteamientos, modos de abordarlos y la solución que se ofrece a cada problema. Así es que primero estudiaré cada uno de los problemas planteados en los primeros cuatro apartados que vienen a continuación, aunque también es cierto, que existen planteamientos y soluciones comunes, los cuales revisaré en la visión de conjunto.

A pesar de que seguiré puntualmente la estructura dada en el *Planteamiento general de los problemas,* no seguiré el orden estricto, y esto, simplemente para facilitar una organización más clara de las ideas y lograr así una explicación final de este trabajo que me permita una visión de conjunto lo más transparente posible.

Aritmética y geometría

A lo largo de los dos primeros capítulos estudié parte del desarrollo histórico que siguió un sector de las ciencias y filosofías griegas desde Tales de Mileto hasta el tiempo de Aristóteles. Esto permitió observar que en sus inicios hubo una tendencia a aplicar el método matemático en la descripción del mundo físico, a partir de los números enteros y de los números fraccionarios (véase supra: 35). También se observó que se desarrollaron una serie de técnicas y métodos para establecer relaciones entre aritmética, geometría y mundo físico, como lo serían el desarrollo de la aplicación geométrica a la descripción del mundo físico en cuanto a las distancias en el caso de Tales de Mileto (véase supra: 20-35). O en el caso de la escuela pitagórica en el desarrollo de la teoría de los números figurados y el establecimiento de la aritmogeometría (véase supra: 43-48), o en el desarrollo de la armonía (véase supra: 52-76). Al descubrirse el problema de la inconmensurabilidad entre un lado y la diagonal de un pentágono (véase supra: 76-80), o al intentar determinar la longitud de la cuerda que divide la octava en dos intervalos iguales (véase supra: 81) presenté uno de los grandes problemas a los que se enfrentó la ciencia griega hasta ese momento, el indicio de que los métodos, técnicas, definiciones, sistemas numéricos y paradigmas con los que se habían podido expresar muchos fenómenos, antes inexpresables; muchos de los problemas que se habían podido solucionar, irresolubles hasta entonces, no podían seguir siendo utilizados para explicar y resolver el universo entero. La serie de exitosas y complejas explicaciones, métodos y soluciones, resultaban inoperantes para seguir comprendiendo el mundo de esta manera, pues había muchas cosas en el mundo, quizás demasiadas, que no podían explicarse desde este punto de vista.

La posterior confirmación y demostración de la inconmensurabilidad dio como consecuencias prácticas la separación de la aritmética y la geometría, y la búsqueda de nuevas soluciones como la introducción de los números irracionales (véase supra: 84). A pesar de que a partir de ese momento la aritmética y la geometría siguieron caminos y desarrollos independientes, las ciencias mixtas que se habían desarrollado hasta ese momento continuaron evolucionando con sus propios métodos y de manera independiente y de forma paralela al desarrollo independiente de la aritmética y la geometría; más aún, el hecho de las ciencias mixtas, y su ejemplo metodológico permitió desarrollar, posteriormente el problema de la inconmensurabilidad, nuevas ciencias mixtas, como la aplicación de la estereometría a la mecánica (véase supra: 84-90).

A partir de esta visión histórica señalo algunas cuestiones que planté al principio de mi investigación:

Encontrar las razones que ofrece Aristóteles para afirmar que aritmética y geometría son ciencias que pertenecen a géneros distintos, exclusivos y excluyentes

A partir de las consecuencias y soluciones que sigueron al problema de la inconmensurabilidad, se puede entender que la separación genérica entre aritmética y geometría era un hecho conocido y demostrado en tiempos de Aristóteles, quien no hace otra cosa que asumir la verdad de las conclusiones a las que ha llegado la ciencia de su tiempo.

Encontrar las explicaciones que expone Aristóteles para afirmar que aritmética y geometría se relacionan, indicar en qué casos y cómo se relacionan

Hay una serie de proposiciones y demostraciones que relacionan la aritmética con la geometría; estas relaciones son arcaicas, es decir que corresponden a los primeros tiempos de desarrollo científico y filosófico de la cultura griega. En el caso de las ciencias mixtas, estas proposiciones y demostraciones se conservan en un contexto de ciencia integral.

En el caso de la aritmética y geometría, este contexto se ha ido perdiendo paulatinamente a partir del problema de la inconmensurabilidad, y para el tiempo de Aristóteles quedan algunas proposiciones y demostraciones aisladas, o conservadas por la importancia y uso que en algunas ciencias hoy en día les otorgan; por ejemplo, la relación que existe entre la aritmética y la geomería, a partir de los conceptos de anterior (más extensa, en este caso), simplicidad y adición, la ciencia que parte de menos cosas (simple) es anterior (más extensa) que la ciencia que parte de la adición (agrega alguna característica a la cosa simple). Y pone un ejemplo: *[...] la unidad es una entidad sin posición, mientras que el punto es una entidad con posición [...]* (*Analíticos segundos*, I, 27, 87a 34-35; véase supra: 134). Esta relación y este ejemplo nos remiten, sin duda alguna, a la teoría pitagórica sobre los números figurados (véase supra: 43-48). Se trata de una proposición aislada que sirve de ejemplo, y se explica a partir de la relación de los términos simple, anterior y adición. Este tipo de proposiciones arcaicas, son aisladas y ponen en aprietos a Aristóteles, pues lo más establecido y aceptado en su tiempo es el aislamiento, independencia, exclusividad y exclusión, entre la ciencia aritmética y la ciencia geométrica, y estas proposiciones arcaicas se aceptan como curiosas excepciones.

Resolver o explicar la contradicción que se da entre estas dos afirmaciones

Respecto a la contradicción que presenta el afirmar que *aritmética y geometría son ciencias diferentes, exclusivas y excluyentes*, y la proposición que afirma que *aritmética y geometría se relacionan excepcionalmente*, no existe en el *Corpus aristotelicum* una contradicción expresada como tal, ya sea con inconciencia o porque no se hace patente. La razón la veo en primer lugar, porque Aristóteles habla de estos asuntos en partes aisladas y dispersas a lo largo de todo el *Corpus*, es decir, que al no haber hecho un estudio monográfico sobre estos asuntos, o no tener nosotros acceso a él, la contradicción se diluye, y solamente aparece con toda su evidencia, cuando se comparan los distintos fragmentos donde se trata del mismo asunto, dando diversas respuestas, algunas de ellas contradictorias, en otras, matizadas por algún comentario que más parece intento de justificacción que de explicación. Por otra parte, creo que precisamente por no contar con un estudio monográfico sobre estos temas, le hace falta a Aristóteles un estudio crítico-histórico integral o más completo sobre estos asuntos. Aristóteles es muy afecto a hacer este tipo de críticas-históricas, sobre todo antes de estudiar el estado del problema de su tiempo y de dar él mismo su propia solución. Así lo vemos en gran cantidad de temas, por ejemplo, en el desarrollo del concepto de número pitagórico al concepto de número abstracto que se manejaba en su tiempo (véase supra: 41-43).

Pueden encontrarse varias explicaciones de tipo lógico o metodológico, como el caso de que la aritmética es más extensa y más exacta que la geometría, por ser más simple, anterior y por tratar ella misma del *que* y del *porque*. La que no trata del individuo es anterior. La más simple es anterior a la que trata algo a partir de la adición (véase supra: 134-138). En este sentido, puede vislumbrarse otra solución recurrente para este tipo de problemas, una ciencia se relaciona con otra, por inclusión. Cosa que se tratará con mayor detenimiento cuando hable sobre las relaciones del género.

Ciencias mixtas

La relación entre matemáticas y mundo físico ha sido estudiada en los dos primeros capítulos de este trabajo. El desarrollo histórico de las ciencias mixtas también ha sido expuesto. (véase supra: 84-90). Tampoco nos es algo ajeno que Aristóteles conocía la existencia de las ciencias mixtas, e incluso es claro que las había estudiado hasta cierto nivel, y que conocía algunas de sus proposiciones y demostraciones principales, además de promover su adelanto aunque él mismo no se ocupara directamente de desarrollarlas (véase supra: 139-143).

La relación entre aritmética y geometría se reconoce a partir de unas pocas proposiciones y demostraciones, que llamaré enunciados arcaicos, son más bien excepciones ante la contundencia de la separación de la aritmética y la geometría después de la crisis de estas ciencias debida al problema de la inconmensurabilidad.

No sucede lo mismo con el hecho de la existencia de las ciencias mixtas, éstas son ciencias bien constituídas, desarrolladas y en procesos progresivos, cuentan con amplios marcos teóricos, resultados exitosos y aplicaciones prácticas de importancia. No pueden considerarse como una excepción aislada, como sucede con los enunciados arcaicos.

Desde este punto de vista es claro que Aristóteles vea en los enunciados arcaicos, y por lo tanto en las relaciones entre aritmética y geometría, excepciones aisladas, pero no puede enfrentar el problema de las ciencias mixtas bajo la misma perspectiva, pues se trata de ciencias bien constituídas. Si bien, el hecho de la existencia de las ciencias mixtas es más claro, contundente y reconocible, que el de enunciados arcaicos, aislados y considerados excepciones, las ciencias mixtas representan una problemática mucho más compleja desde el punto de vista lógico, éstas merecen una atención especial y recurrente a lo largo de la obra aristotélica.

Uno de los problemas por plantearse es que al ser las ciencias mixtas más contundentes que las relaciones entre aritmética y geometría establecidas a partir enunciados arcaicos, los planteamientos teóricos y principalmente lógicos son más complejos en las ciencias mixtas que en los enunciados arcaicos.

Lo anterior implica una paradoja: la aritmética y la geometría estudian dos subgéneros de la misma categoría *cantidad*, y establecen menos nexos y relaciones menos estrechas que las ciencias mixtas, que estudian las relaciones establecidas entre dos géneros distintos, las categorías *cantidad* y *cualidad*. Número (aritmética) y magnitud (geometría) tienen como género común a la *cantidad*, en cambio *cantidad* y *cualidad*, son dos *categorías* diferentes. Así, planteamientos teóricos más distantes (cantidad, cualidad), tienen como consecuencia ciencias con relaciones más estrechas, contundentes y abundantes (ciencias mixtas). Planteamientos teóricos más cercanos (número, magnitud), tienen relaciones más débiles y escasas (relaciones aritmética, geometría). Desde el punto de vista crítico-histórico que he planteado y estudiado en este trabajo, esta paradoja puede resolverse con relativa facilidad, basta con recordar el dearrollo de aritmética y geometría, y compararlo con el desarrollo de las ciencias mixtas, aunque al dar las conclusiones sobre cantidad y cualidad, se ve que a pesar de ser un problema complejo, se tenía una solución a estos problemas desde la perspectiva misma de la teoría de las *categorías.*

Otro problema lo constituye una paradoja indirecta e implícita en la obra de Aristóteles. Por una parte se afirma que *el método matemático no es apto para la física* (*Metafísica,* II, 3, 995a 17; véase supra: 139), y por otra, se afirma la existencia de las ciencias mixtas, que precisamente aplican el método matemático al estudio del mundo físico, y se explica su existencia a partir de varios caminos (véase supra: 140-143). Este problema se resuelve en varios momentos, que pueden tomarse como partes de un proceso más general.

Un primer paso para resolver el problema de las ciencias mixtas es la aplicación de las relaciones entre los géneros estudiadas en *Tópicos.* La inclusión propia (total) o subordinación de un género en otro. La subordinación propia (total) de dos géneros distintos entre sí, en un género común. La inclusión impropia (parcial), intersección o coincidencia de dos o más géneros. La inclusión impropia (parcial), intersección o coincidencia de dos géneros y su inclusión total en un género común (véase supra: 111).

Un segundo momento lo constituye el estudio de las relaciones entre las ciencias matemáticas a partir de los términos y los elementos que conforman la demostración. Uno de los elementos que conforman la demostración es la existencia del género-sujeto, que es el género del cual se predica algo, objeto de la ciencia que lo estudia y cuya existencia afirma esa ciencia (véase supra: 95-97, 116-119). Este género-sujeto tiene una estrecha relación con el individuo-sujeto y su afirmación existencial es uno de los elementos importantes tanto en la demostración como en cualquier ciencia (véase supra: 91-95, 113-114, 124-125).

En un tercer momento se establece una jerarquización de la matemática común y las relaciones que hay entre las ciencias matemáticas subgenéricas, para este entonces Aristóteles considera a las ciencias mixtas como las ciencias matemáticas más cercanas a la física (véase supra: 140-143).

En un cuarto momento se hace una aplicación de las relaciones género-sujeto e individuo-sujeto a las relaciones de las matemáticas con el mundo físico; se llega así a la teoría de la consideración y de la separación (véase supra: 156-159), que permite afirmar que el mundo físico no es solamente materia, sino también forma (*Física,* II, 2 194a 12-14; Aristóteles 2001: 28).

Además, a partir de la teoría de los principios que conforman la demostración, Aristóteles afirma que: *todas las ciencias se comunican en virtud de cuestiones comunes* (*Analíticos segundos,* I, 11, 77a, 26-28. Aristóteles 1988: 341; véase supra: 119-124).

Existe pues, respecto de este asunto, un desarrollo y cambio gradual, desde el primer planteamiento de no aplicación del método matemático a la física hasta la teoría de la consideración y la separación, se llega a la afirmación de que el método matemático puede aplicarse al mundo físico, éste compuesto de materia y forma.

Este nuevo planteamiento tiene como consecuencia una nueva y más general relación entre las ciencias: las ciencias mixtas como el resultado de una relación entre dos géneros distintos de ciencia incluídos en un género común: las ciencias demostrativas. Las ciencias matemáticas y físicas tienen un género común como ciencias, las dos están incluídas en el género más extenso: las ciencias teoréticas o demostrativas (*Metafísica,* VI, 1, 1026a 19; Aristóteles 1970/1982: 307). Sobre este tema propuse lo siguiente:

las razones que presenta Aristóteles para afirmar que el método matemático no se puede aplicar a la física

La razón es que el mundo físico es exclusivamente material y que las matemáticas se ocupan de las formas separadas; las formas separadas no pueden aplicarse al estudio de la materia; planteamiento que parece de fuerte influencia platónica.

Qué razones da Aristóteles para explicar la existencia de las ciencias mixtas. De qué maneras se relacionan las ciencias matemáticas con el mundo físico.

Es un proceso, que hemos analizado extensamente en la primera parte del punto II (véase supra: 176-178).

Resolver o explicar la contradicción que se da entre estas dos afirmaciones.

Más que una contradicción, se trata del principio y del final de un proceso para explicar y articular las relaciones entre las ciencias mixtas con el mundo físico. Desde luego si vemos el principio como premisa y el final como conclusión de un mismo argumentos, estas dos proposiciones son contradictorias entre sí, pero si se entienden estas proposiciones como partes de un proceso de búsqueda, que se hace estable al afirmar la última proposición, es claro que no se afirman las dos cosas simultáneamente, es decir, inicio y final, sino solamente la conclusión.

Encontrar presupuestos históricos o lógico-metodológicos que permitan explicar más ampliamente estos fragmentos

Se han explicado y señalado en los puntos anteriores.

Cantidad y cualidad

La *cantidad* y la *cualidad* son dos de las diez *categorías* o *géneros de términos referentes* que señala Aristóteles. En un primer momento pensé que estos *géneros son distintos* (véase supra: 98-99). Conforme fui avanzando en la investigación llegué a pensar que además estos géneros eran *exclusivos y excluyentes* a partir de varias referencias extraídas del *Corpus aristotelicum* de las cuales pongo como ejemplo el siguiente:

> «Heterogéneas» [distintas por el género] [...] lo son los predicados que corresponden a diversas figuras de la predicación de «lo que es» (unos, en efecto, significan qué es; otros, que es de cierta cualidad y otros según las distinciones expuestas con anterioridad). Y es que estos predicados no se resuelven, ni los unos en los otros, ni <todos ellos> en algo que sea uno (*Metafísica,* V, 28, 1024b 10-15; Aristóteles 1994/1998: 259-260).

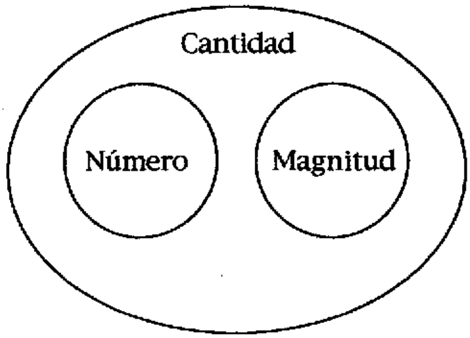
A partir de lo expuesto en este párrafo llegué a pensar que las *categorías* o *géneros de términos referentes*, eran estructuras rígidas de clasificación, pero al momento de estar elaborando estas conclusiones y de tener que hacer comparaciones y relaciones más generales aproveché el material investigado y las conclusiones parciales a las que he llegado en el transcurso del trabajo, y me percaté que lo que pensaba hasta ese momento, no reflejaba ni puntual, ni correctamente el pensamiento aristotélico. Si las *categorías* son *figuras de la predicación de «lo que es»*, y son distintas, exclusivas y excluyentes, entonces en principio no toman en cuenta la relación que se da entre *cantidad* y *cualidad* en las ciencias mixtas, por tanto, Aristóteles tuvo que haber encontrado otros métodos para poder explicar las relaciones entre *cantidad* y *cualidad* que se dan en las ciencias mixtas.

Al revisar de nuevo los conceptos de *cantidad* y *cualidad* que se presentan en el libro de *Categorías* y en el libro V de *Metafísica*, volví a observar, pero ahora de manera más consciente que al exponer los subgéneros de estas dos *categorías*, Aristóteles sí toma en cuenta las relaciones entre *cantidad* y *cualidad* que se dan en las ciencias mixtas.

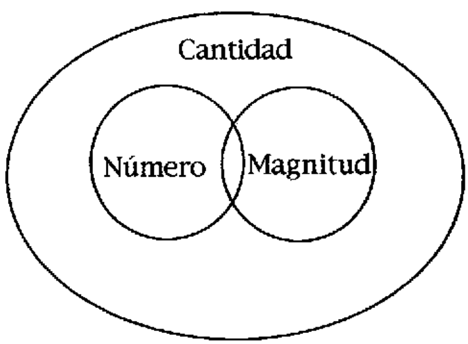
Una vez aceptado este hecho, era necesario replantear el concepto que yo tenía sobre las categorías. Y para mi sorpresa, en lo que escribí con anterioridad sobre las categorías, no encontré elementos contundentes para pensar que las categorías fuesen géneros distintos, exclusivos y excluyentes. Pero sí pude replantear mi perspectiva sobre estos asuntos de la siguiente manera: siguiendo al pié de la letra el texto (*Metafísica*, V, 28, 1024b 10-15. Aristóteles 1994/1998: 259-260), resulta que lo que es distinto en género, no son las *figuras de la predicación* o *categorías*, sino los *predicados* que corresponden a esas *categorías*. Además, estos *predicados*, no se resuelven, ni los unos en los otros, ni todos ellos en algo que sea uno, pude ver por fin, que al hablar de distintos en género Aristóteles hace referencia a los *predicados* y no a las *categorías*.

Por otra parte, es claro que las relaciones entre aritmética y geometría influyen en la elaboración de la teoría más general de las *categorías*, pero esta influencia es parcial y se limita a la estructuración de la categoría cantidad.

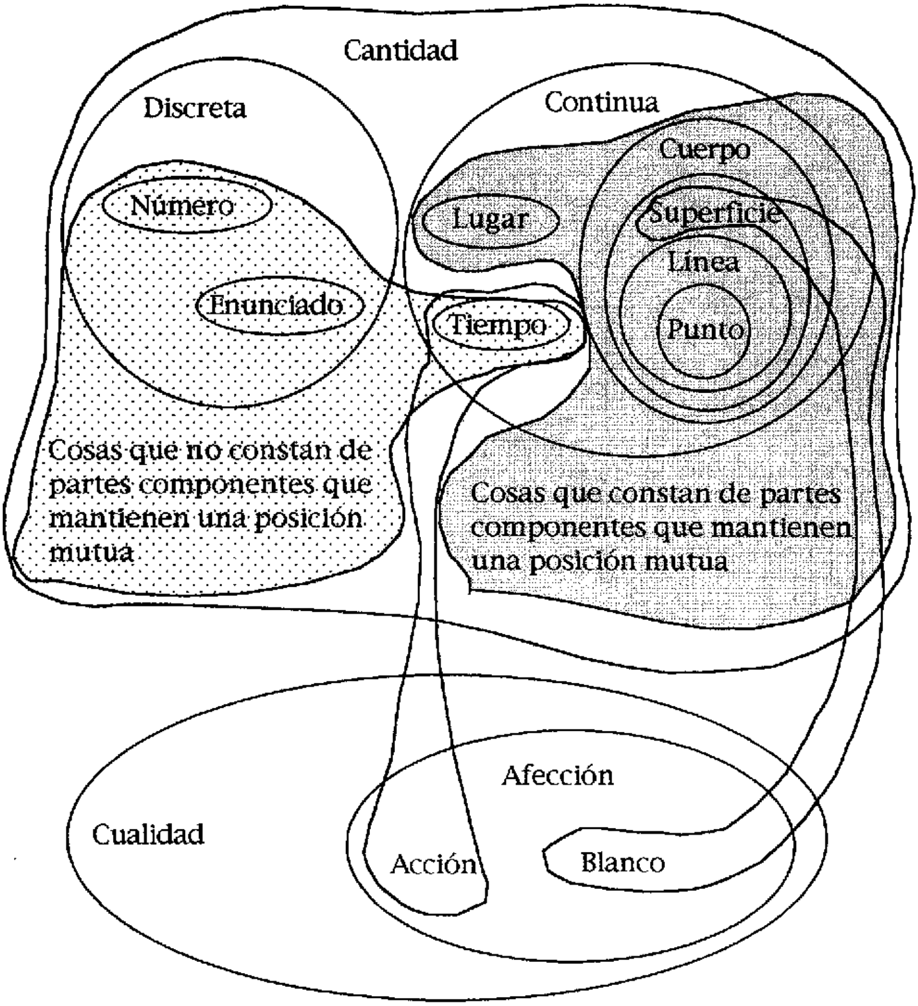
Así en un primer acercamiento, representé la distinción radical entre magnitud y número, exclusiva y excluyente de la siguiente manera:



Pero Aristóteles toma en cuenta las relaciones entre magnitud y número a partir de la consideración de algunos enunciados arcaicos o de las relaciones entre cantidad y cualidad que se dan en las ciencias mixtas, entonces representé las relaciones número magnitud, de esta forma:



Este esquema tiene el problema de que Aristóteles habla que los *predicados no se resuelven, ni los unos en los otros, ni todos ellos en algo que sea uno.* Y en este caso, la relación entre predicados es de coincidencia y no de distinción. Así que decidí, revisar con mayor detenimiento los textos de *Categorías* y libro V de *Metafísica* que hablan de *cantidad* y *cualidad.* A partir de esta nueva perspectiva encontré, siguiendo detalladamente los textos, que las representaciones gráficas que estaba utilizando no correspondían a lo expuesto por Aristóteles, por lo que reconstruí las representaciones gráficas de la siguiente manera:



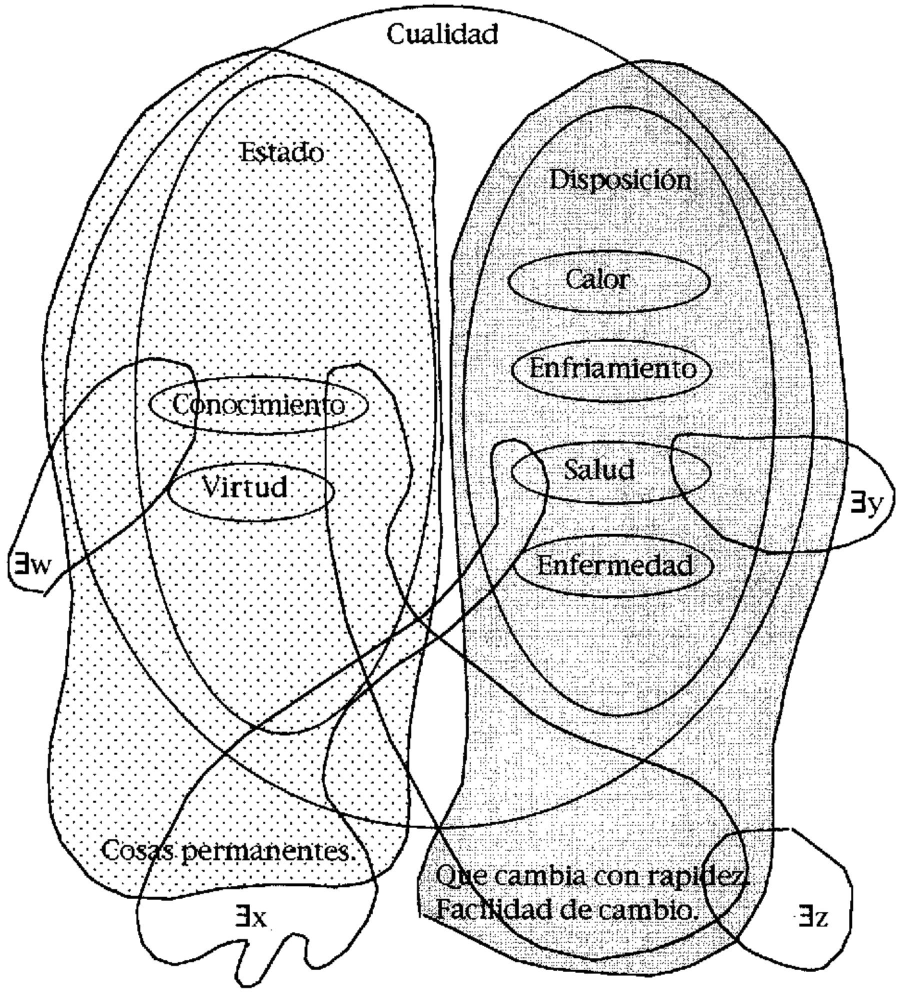
[33]

En esta representación gráfica puede verse que las relaciones establecidas entre las categorías no es por inclusión ni por coincidencia, sino por relación de algunos de sus subgéneros o de algunos predicados, pero esta manera de ver las relaciones entre predicados permite mayor flexibilidad, respetar el criterio de relación

[33] Este diagrama es un esquema de *Categorías,* 6, 4b 20 - 5b 10; Aristóteles 1982: 42-45.

que es la referencia al existente y establecer las relaciones necesarias que permiten explicar a las ciencias mixtas, también permite explicar lo dicho por Aristóteles hay *predicados que no se resuelven, ni los unos en los otros, ni todos ellos en algo que sea uno;* Por ejemplo, lugar y acción. Por otra parte puede decirse que blanco es una cantidad por coincidencia, pues se da en una superficie. Un ejemplo respecto a la cualidad, en su primer sentido, estado disposición, es el siguiente:

Interpretación 1:



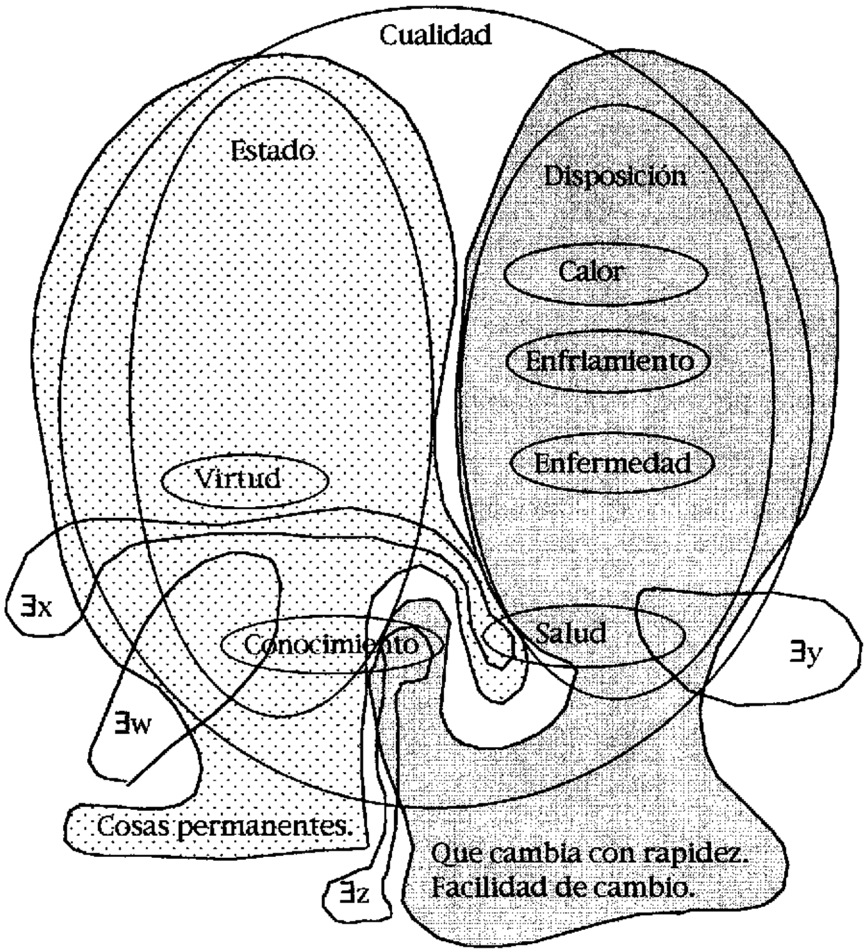
[34]

Nos dice Aristóteles que el conocimiento es un estado, pero hay casos

[34] *Categorías,* 6, 8b 25 - 9a 14. Aristóteles 1982: 55-56. ∃x, existe un individuo x.

en los que puede cambiar con rapidez, al ser distinto ser permanente y cambiar con rapidez, desplazo el concepto de conocimiento, como se indica en este segundo esquema:

Interpretación 2:



[35]

$(\exists x)(Sx \bullet Ex)$, existe un individuo x cuya salud es un estado.
$(\exists w)(Cw \bullet Ew)$, existe un individuo w cuyo conocimiento es un estado.
$(\exists y)(Sy \bullet Ey)$, existe un individuo y cuya salud es una disposición.
$(\exists z)(Sz \bullet Ez)$, existe un individuo z cuyo conocimiento es una disposición.

[35] *Categorías,* 6, 8b 25 - 9a 14. Aristóteles 1982: 55-56.

Así, los esquemas además de ser flexibles son dinámicos, y están en función del existente que es la referencia del predicado. Hay existentes para los que la salud es un estado, para otros cambian con rapidez, lo mismo para el conocimiento, para algunos existentes el conocimiento es más bien un estado, para otros existentes el conocimiento cambia con rapidez.

A partir de estas representaciones de lo dicho por Aristóteles en estos textos, llegué a las siguientes conclusiones respecto de la *teoría de las categorías:*

Las categorías no son estructuras lógicas independientes del referente, ya sea individuo o determinaciones del individuo.

Las categorías no son estructuras rígidas, innamovibles e inmóviles.

Las categorías son géneros de predicados referentes o figuras de la predicación de «lo que es». Es decir que tanto las distinciones como las relaciones de predicados y de categorías se hacen a partir del individuo o de las determinaciones del individuo.

Las relaciones que se establecen entre los diversos subgéneros de las categorías son flexibles, y se establecen a partir de los referentes.

Un predicado puede cambiar de estar considerado en un subgénero a estar considerado en otro subgénero, porque se tiene en cuenta que el predicado se refiere a un existente o individuo que se comporta o es de determinada manera.

Las interrelaciones entre los predicados es flexible.

Aristóteles en su teoría de las categorías describe un pensamiento flexible y dinámico.

Independientemente de las relaciones que se establezcan entre categorías o entre subgéneros de categorías o entre otros predicados, existen predicados que son de género distinto, pues son predicados que no se resuelven ni los unos en los otros, ni todos ellos en algo que sea uno.

Con estas consideraciones es claro que Aristóteles hace un planteamiento lo suficientemente flexible y dinámico, para tratar las relaciones entre cantidad y cualidad que se dan en las ciencias mixtas, así como los enunciados arcaicos que relacionan excepcionalmente la aritmética y la geometría.

La soluciones lógicas y metodológicas principales para explicar las relaciones entre matemáticas y el mundo físico en las ciencias mixtas son: la relación entre los géneros (identidad, semejanza, subordinación, coincidencia y relación) (véase supra: 109-112), el estudio de las relaciones entre especies e individuos (véase supra:112-114), la teoría de la predicación (véase supra: 91-95) la observación del hecho de que una cosa puede estar incluída en más de un género (*Analíticos segundos,* I, 11, 77a, 26-28. Aristóteles 1988: 341), y muy en particular la relación especial que se da entre la cualidad-figura y la cantidad-magnitud (véase supra: 100-105).

Señalé los siguientes problemas:

De qué manera influyen las reflexiones aristotélicas sobre aritmética, geometría y ciencias mixtas en la construcción de su teoría de las *categorías*

Como expuse la separación de la aritmética y la geometría influye en la diferencia que se hace en dos subgéneros de la categoría cantidad: del número y la magnitud, las relaciones entre ambos subgéneros es para explicar enunciados arcaicos. En cuanto a las relaciones entre cantidad y cualidad en las ciencias mixtas, también son tomadas en cuenta en la teoría de las categorías. Sobre todo las relaciones de los predicados a partir de la referencia de los existentes; la teoría de las categorías es una generalización referencial, que tiene en cuenta casos más concretos como los de la aritmética, geometría o las ciencias mixtas, siempre relacionados en última instancia con los referentes principales que son los individuos concretos y sus determinaciones.

Explicar por qué Aristóteles afirma que cantidad y cualidad constituyen géneros distintos, exclusivos y excluyentes

Como indiqué, no hay elementos para afirmar que cantidad y cualidad sean considerados como géneros distintos, exclusivos y excluyentes, pueden ser considerados distintos de alguna manera y relacionados en otra. Las categorías más bien son géneros de predicados que se relacionan o se distinguen a partir de los predicados, y éstos se relacionan o se distinguen a partir de la observación de los referentes principales: el individuo concreto y sus determinaciones.

Las categorías son géneros que admiten relaciones y distinciones flexibles y dinámicas, que dependen de las relaciones entre los predicados, estos a su vez dependen de las relaciones que se establecen entre individuos y sus determinaciones, sí existen cosas que pertenecen a géneros diferentes, un ejemplo claro son los predicados *que no se resuelven, ni los unos en los otros, ni todos ellos en algo que sea uno,* éste que es uno de los casos particulares de relación entre los predicados, sin que por ello pueda decirse que las categorías no puedan comunicarse entre sí, ni que los predicados puedan relacionarse de otra manera entre sí.

Explicar por qué Aristóteles afirma que una misma cosa puede pertenecer a dos *categorías* distintas. En cuyo caso se establece algún tipo de relación entre ambas, cuando menos de coincidencia de pertenencia de una misma cosa a dos géneros distintos. De qué manera puede darse este caso y cómo lo justifica Aristóteles

Una misma cosa puede pertenecer a dos o más géneros por relaciones de identidad, subordinación propia, subordinación de dos géneros distintos a un género común, la coincidencia entre dos o más géneros, la semejanza entre géneros y la relación entre géneros (véase supra: 109-111, 140-143).

Resolver o explicar la contradicción que se da entre estas dos afirmaciones

Las ciencias no solamente se distinguen o solamente se relacionan, suceden las dos, y Aristóteles explica ambas; Aristóteles toma en cuenta tanto las distinciones como las relaciones concretas que se dan en las diferentes ciencias para construir su teoría más general de las *categorías.*

Objetos matemáticos y objetos físicos

El problema y solución de las distinciones y relaciones entre cantidad y cualidad es, en cierto sentido, una generalización de las distinciones y relaciones entre aritmética, geometría y ciencias mixtas, también es producto de las relaciones referenciales que establece quien conoce a partir de la experiencia que tiene de los individuos y sus determinaciones.

Por su parte, el problema de la distinción entre objetos matemáticos y objetos físicos es la conclusión de un proceso que parte de la proposición *el método matemático no es apto para la física* y que termina en lo que se podría resumir como *el matemático y el físico estudian algunas cosas que son las mismas, pero considerándolas de modo distinto* (*Física,* II, 2, 193b 22-35. Aristóteles 1995/1998: 135-136; véase supra: 152-156). Dentro de este proceso, después de explicar las relaciones entre matemáticas y mundo físico en las ciencias mixtas, concluye con la teoría de la consideración y la separación; es decir que este proceso es el desarrollo a partir de la explicación de las relaciones entre matemáticas y mundo físico desde la consideración *la materia es distinta y excluye a la forma,* hasta llegar a la consideración de que *el mundo físico tiene materia y forma.*

Así, de los cuatro problemas que he analizado la parte del problema de cantidad y cualidad es una generalización de las relaciones entre aritmética, geometría y ciencias mixtas; mientras que el problema de objetos matemáticos y objetos físicos, es la parte final de un proceso a partir del estudio de las relaciones entre matemáticas y mundo físico en las ciencias mixtas.

Una de las soluciones para explicar las relaciones entre objetos matemáticos y objetos físicos es la consideración y la separación. Las matemáticas estudian las especies o géneros considerándolos como separados del individuo sensible, mientras que la física estudia las figuras matemáticas considerándolas como sensibles.

Así el mundo físico al tener materia y forma, puede ser considerado como si la forma estuviera separada de la materia o como si la forma estuviera unida a la materia, al movimiento o a lo sensible.

Además, una generalización de una determinación concreta del individuo, puede ser considerada con relación o sin relación directa con la materia, el movimiento o lo sensible. Inicio de una teoría de la abstracción o una teoría de la generalización, pues a partir de las determinaciones del individuo se pueden considerar exclusivamente las relaciones entre generalizaciones de características.

Lo común entre los objetos matemáticos y los objetos físicos son la línea, la superficie, el cuerpo; existen líneas, superficies y cuerpos matemáticos y líneas, superficies y cuerpos físicos. La figura de los astros es uno de sus atributos esenciales; la figura en general, es uno de los atributos principales de los cuerpos físicos.

El matemático al estudiar estas cosas no las considera como límites de un cuerpo físico, ni tampoco los estudia como atributos esenciales en tanto que atributos de tales cuerpos, por eso también los separan del movimiento, pues por el pensamiento se les puede separar del movimiento.

Esto no introduce ninguna diferencia ni conduce a error alguno, los conceptos matemáticos pueden definirse sin referencia al movimiento, en cambio los conceptos físicos no. Las ciencias mixtas y la geometría se encuentran en relación inversa, porque mientras la geometría estudia la línea física pero en tanto que no es física, la óptica estudia la línea matemática, no en tanto que matemática, sino en tanto que física.

La naturaleza se entiende en dos sentidos, como forma y como materia, las cosas que se estudian en la física no son carentes de materia, ni tampoco son exclusivamente materiales. Este es el punto en donde Aristóteles resuelve que el método matemático no es apto para el estudio de la física, pues todas las cosas son materiales, ya que si bien aquí afirma que las cosas que estudia la física no carecen de materia, no son exclusivamente materiales, hay algo más que materia en las cosas que estudia la física, y ésta es la razón por la que se puede aplicar el método matemático a la física. Trasciende su primer postulado. Si las cosas que estudia la física fueran todas materiales y exclusivamente materiales, el método matemático no se aplicaría, pero como las cosas que estudia la física son todas materiales pero no exclusivamente materiales, se puede aplicar el método matemático por no ser exclusivamente materiales.

Determinaciones geométricas separables conceptualmente. Algunas ideas físicas designan un ser físico real e inseparable, algunos conceptos y demostraciones, como los matemáticos que versan sobre magnitudes sensibles, pero no ya en tanto que sensibles, sino en tanto que poseen determinadas características, es aceptable decir que existen las cosas separadas, y también las no-separadas.

La geometría estudia las cosas no en tanto que sensibles, por lo que no las estudia ni siquiera como accidentalmente sensibles, aunque las cosas en sí mismas sean sensibles, no por eso las matemáticas se van a ocupar de las cosas sensibles y mucho menos de otras cosas separadas de ellas.

Hay cosas que tendrán propiedades exclusivamente en tanto que son longitudes y en tanto que son superficies, no existen separadas de esas cosas, aunque se consideren separadas por el pensamiento.

Una ciencia es más exacta si es más simple, pues exactitud es simplicidad. Una ciencia es más simple y más exacta si prescinde de la magnitud, que con ella: la aritmética es más simple que la geometría, y más exacta en grado sumo si prescinde del movimiento.

Lo que estudia la óptica y la armonía no lo estudian en tanto que visión o en tanto que sonido sino en tanto que líneas y números.

Aunque esta apreciación no es del todo correcta, pues el criterio para establecer principios matemáticos al sonido o a la visión son fenómenos sonoros y fenómenos visuales, no se aplican conceptos matemáticos independientemente de ellos, sino para explicarlos. Las líneas y los números son afecciones particulares de sonidos y de la visión.

La mejor manera de estudiar cada cosa consiste en que uno tome, separándolo, lo no separado, lo cual hacen el matemático y el geómetra. Aunque las cosas reales e individuales son unas e indivisibles, el geómetra estudia al hombre en tanto que sólido.

Los problemas que nos propusimos resolver al incio son:

Explicar que razones da Aristóteles para afirmar lo que hay de común entre los objetos matemáticos y los objetos físicos

La teoría de que el mundo físico no es exclusivamente materia y excluye a la forma, sino que es un compuesto de materia y forma. Los objetos matemáticos estudian formas separadas lo cual no impide relacionarlas con el mundo físico a partir de la relación forma-materia.

Explicar que razones expone Aristóteles para distinguir los objetos físicos de los objetos matemáticos

Los objetos físicos y los objetos matemáticos se distinguen a partir de la consideración y de la separación de la forma. Los objetos matemáticos se estudian a partir de la consideración de las formas separadas, en cambio los objetos físicos se estudian a partir de la consideración de las formas relacionadas con la materia.

Explicar cómo se dan estas relaciones complementarias.

A partir de criterios de distinción y semejanza, también a partir de la consideración y de la separación.

Visión de conjunto

Hay relaciones de hecho entre aritmética y geometría; cantidad y cualidad; geometría y mundo físico; aritmética, geometría y mundo físico. Estas relaciones dan la pauta a Aristóteles para abandonar la tesis platónica de que forma y materia están separadas en la naturaleza, pues a partir de esta tesis no es posible explicar estas relaciones. Entonces, dados los hechos, es necesario abandonar esta tesis y encontrar otra: en la naturaleza la forma y la materia se dan unidas. La naturaleza se puede matematizar, pues la naturaleza siendo material no es exclusivamente material sino que también tiene forma y es a través de la forma como se puede matematizar la naturaleza, la coincidencia entre forma y materia en la naturaleza permite su matematización. Al exponer su teoría de las categorías, Aristóteles tiene en cuenta las relaciones entre aritmética y geometría, entre matemática y cualidades sensibles en las ciencias mixtas.

Las categorías no son géneros diferentes, exclusivos y excluyentes. Sí son diferentes, pero relacionales a partir de los subgéneros y las especies de predicados. Hay predicados que pertenecen a subgéneros o especies diferentes, exclusivos y excluyentes, pero esto no quiere decir que las categorías no se relacionen por medio de otros subgéneros o especies de predicados que guardan relación entre ellos.

El hecho de que las categorías tengan en cuenta las relaciones entre aritmética y geometría, y entre matemáticas y mundo físico en las ciencias mixtas, es un indicativo, de que estas categorías no están construídas *a priori,* y después se imponen a los individuos y sus características para explicarlos, por el contrario, están construídas *a posteriori,* y respetan en su construcción la complejidad de individuos, características y relaciones.

Aritmética y geometría se relacionaron estrechamente antes del descubrimiento de la inconmensurabilidad y se separaron después de su descubrimiento.

En tiempos de Aristóteles coexisten proposiciones que se consideran verdaderas y que continúan en uso, explican fenómenos de la naturaleza. Aristóteles las explica, aunque parece no ser consciente de este proceso histórico. No distingue las proposiciones arcaicas de las proposiciones post-inconmensurabilidad.

En el tratamiento de algunos problemas existe una sedimentación cultural en la matemática griega en tiempos de Aristóteles; en algunas áreas coexisten proposiciones que provienen de distintos procesos sin que se los distinga, provocando planteamientos aparentemente contradictorios, pues no se cuenta con un aparato crítico, como en otras áreas de las mismas ciencias matemáticas, por ejemplo la conciencia que tiene Aristóteles del desarrollo del concepto de número, desde el pitagórico hasta el abstracto manejado en su tiempo.

En cuanto a la relación entre objetos matemáticos y objetos físicos la relación se establece a partir de que la línea, la superficie y el volúmen son cosas comunes entre matemáticas y física. La diferencia entre estas ciencias se establece a paritir de quien conoce, es decir a partir del matemático o el físico. Los dos pueden estudiar las mismas cosas, pero considerarlas de manera diferente.

El matemático separa las formas de lo sensible y del movimiento. El físico las considera en relación con lo sensible, con el movimiento y con el individuo. Esta postura, es la conclusión de un proceso que parte de un presupuesto platónico, a saber, que la naturaleza es material y no puede ser estudiada a partir de la matemática, pues ésta estudia solamente formas. El método matemático no es apto para el estudio de la física. A partir del desarrollo de la ciencia de su tiempo, es evidente para Aristóteles la existencia de relaciones entre aritmética y geometría, además de las relaciones entre aritmética, geometría y mundo físico en las ciencias mixtas; la explicación variada y gradual de estos hechos de la ciencia, lo lleva a la conclusión de que la naturaleza está constituída de forma y materia.

Las teorías que están implicadas en la explicación de la clasificación y relación de las ciencias y que la sustentan (presupuestos teóricos), son los siguientes:

Teoría de la predicación, transitividad de la predicación. Fundamento de toda predicación en el individuo.

Teoría de las categorías como términos aislados referentes. Estas categorías no son fijas, sino que son funcionales, flexibles y dinámicas.

Teoría de los predicables. Teoría de los géneros. Relaciones entre género, especie e individuo. La funcionalidad de estos términos en la proposición y el razonamiento.

Teoría de los géneros. Relaciones de inclusión propia entre géneros, inclusión propia de dos géneros distintos o coincidentes en un género común, la inclusión impropia o coincidencia.

La funcionalidad de los términos en la demostración, y su interrelación como categorías y predicables.

Las relaciones de los términos en las demostraciones científicas como criterio para el establecimiento de las relaciones entre las ciencias.

Una clasificación de las ciencias, su jerarquía y relaciones, es flexible, funcional y dinámica. Se encuentra en estrecha relación con todas las teorías anteriores, y se fundamenta en ellas. Todas estas teorías están articuladas entre sí, la teoría de la ciencia está fundamentada en esta interrelación de teorías, y todas ellas descansan en el individuo y sus determinaciones.

La generalidad de atribución de propiedades a las especies.

La demostración del *que* y del *porque*.

Las matemáticas como un estudio de especies y de la atribución general de propiedades a la especie, para establecer proposiciones generales, que pueden servir como principio de demostración del *porque*.

Así, el problema de la cantidad y la cualidad es una generalización del problema de las relaciones entre la aritmética, la geometría y las ciencias mixtas. El problema de los objetos matemáticos y físicos es la conclusión de un proceso que va desde la no aplicación del método matemático al mundo físico por considerarlo exclusivamente materia (planteamiento platónico), hasta la explicación de porque es posible aplicar el método matemático al mundo físico (planteamiento aristotélico), pues se le considera constituído de materia y forma. Este proceso tiene una estrecha relación con la explicación de las relaciones que se dan en las ciencias mixtas. Esta aplicación del método matemático al mundo físico es posible por la *consideración* y la *separación.*

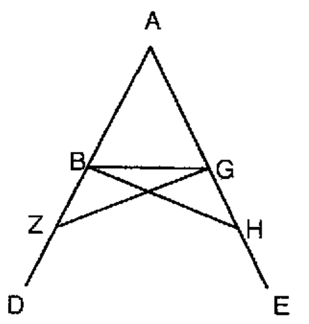
Anexo 1
Teorema 1.5

"En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y, si se prolongan las dos rectas iguales, los ángulos de debajo de la base serán también iguales entre sí".

5.1 Sea ABG el triángulo isósceles que tiene el lado AB igual al AG y prolónguense sobre las rectas AB, AG las BD, GE. (Hip.)

5.2 Digo que el ángulo comprendido por ABG es igual al comprendido por AGB y que el ángulo GBD es igual al BGE. (Tes.)

DEMOSTRACION.



5.31 Tómese sobre la recta BD un punto cualquiera, el Z (P.I)

5.32 Y de la recta mayor AE réstese la AH igual a la AZ (T.I.3)

5.33 y trácense las rectas ZG, HB. (P.I)

5.40 Ahora bien: puesto que la AZ es igual a la AH (5.32)

5.41 y la AB es igual a la AG (Hip.)

5.42 las rectas ZA, AG serán respectivamente iguales a las HA, AB (L.A.*5.32 & Hip.)

5.43 y comprenden un ángulo común, ZAH (D.I.8;5.33)

5.44 Así que la base ZG será igual a la base HB y el triángulo AZG será igual al triángulo AHB y los demás ángulos de uno serán respectivamente iguales a aquellos del otro que subtienden lados iguales, a saber: el ángulo comprendido por AGZ será igual al comprendido por ABH, y el comprendido por AZG será igual con el AHB. (T.I.4)

5.45 Y puesto que la recta entera AZ es igual a la recta entera AH (5.32)
y las AB, AG, partes de ellas, son iguales una a la otra (Hip.)

5.46 la recta restante BZ será igual a la restante GH (N. III)

5.51 Mas ya se demostró que la ZG es igual a la HB (5.44)

5.52 por tanto las BZ, ZG serán respectivamente iguales a las GH, HB
(L.A.*5.44 & 5.46)
y el ángulo comprendido por BZG será igual al comprendido por GHB, siendo la BG su base común; y el triángulo BZG será igual al GHB y los demás ángulos de uno serán iguales a sus correspondientes del otro, a aquellos precisamente que subtienden lados iguales; así que el comprendido por ZBG será igual al HGB y el BGZ con GBH. (T.I.4)

5.61 Pero puesto que se demostró que el ángulo entero ABH es igual al ángulo entero AGZ (5.44)

5.62 y que sus ángulos parciales GBH y BGZ son iguales. (5.52)

5.63 el ángulo restante ABG será igual al restante AGB, (N.III,SyII.R.*)
que son los ángulos junto a la base del triángulo ABG (D.I*)

5.64 Y se demostró además que el ángulo ZBG es igual al HGB, (5.52)
que son los ángulos subtendidos bajo la base. (D.I.*)

5.12 Luego en los triángulos isósceles los ángulos junto a la base son iguales entre sí y, si se prolongan las rectas iguales, los ángulos de debajo de la base serán iguales también entre sí.
Que es lo que se había de demostrar.

Anexo 2
Igualdad de los ángulos de la base en un triángulo isósceles. Demostración de Aristóteles

Las traducciones a las que he tenido acceso no son claras en este sentido y dejan lagunas de significado o son ambigüas en ciertos pasajes y abren la posibilidad de interpretar estos pasajes con diferentes sentidos.

Cito dos traducciones de este pasaje:
Texto A:
"Pero se hace más evidente en los diámetros, <al probar>, por ejemplo, que los <ángulos> del isósceles adyacentes a la base son iguales. Llévense <los lados adyacentes a> A y B al centro <de una circunferencia>. Así, pues, si se acepta que el ángulo AC es igual al ángulo BD, sin estimar que, en general, los ángulos de los semicírculos sean iguales, y aún que C es igual a D sin aceptar también que lo sean todos los del mismo segmento <de circunferencia> y además se acepta que, al sustraer ángulos iguales de los ángulos completos también iguales, los que quedan, E y Z, son iguales, se postulará lo del principio, a no ser que se acepte que, al sustraer cosas iguales de cosas iguales, quedarán cosas iguales." (*Analíticos primeros,* I, 24, 41b 13-22. 1988: 175-176).

Texto B:
"Esto es más evidente todavía en las figuras geométricas. Por ejemplo, supongamos que se intenta demostrar que los lados del isósceles apoyados en la base son iguales; sean las líneas A B, que pasan por el centro; si se forma el ángulo AC igual al BD, sin haber sentado que los ángulos de las semicircunferencias son iguales; si además se toma el ángulo C como igual al D, sin haber añadido que todos los ángulos de una misma sección son iguales; y si por último, se admite que E F son ángulos iguales, porque ambos son restos de ángulos iguales disminuidos en cantidades iguales, se incurrirá en una petición de principio, a menos que no se siente desde luego que los restos son iguales cuando se quita una cantidad igual a cantidades iguales. Es por tanto evidente que en todo silogismo debe aparecer lo universal." (*Analíticos primeros,* I, 24, 41b 13-22. 1979: 98).

El texto A es más preciso y exacto que el texto B en términos generales, pero la interpretación que de él hace Miguel Candel Sanmartín, no se apega al texto por él traducido y por lo tanto no es correcta (Aristóteles 1988: 176, nota 229), lo que causó una duda respecto al sentido de lo que quiso significar Aristóteles y provocó la necesidade de consultar otra traducción y de reinterpretar este pasaje, para poder reconstruir con mayor certeza la demostración de esta proposición a la que se refiere Aristóteles.

El texto B, aunque es más preciso en algunos aspectos, tiene un error importante al decir que "se intenta demostrar que los lados del isósceles apoyados en la base son iguales..." en vez de decir los **ángulos**. Pero a partir de la comparación e interpretación de los dos textos se pudo hacer una nueva interpretación de lo dicho por Aristóteles, que hace posible una reconstrucción más fiel de la demostración referida por él.

La reconstrucción de la demostración tendría los siguientes elementos:

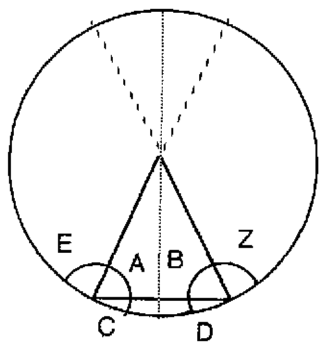


figura a

1) Demostrar que los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales.
2) Partimos de la base del triángulo, que se inscribe en el círculo como cuerda de la circunferencia. Hay que recordar que para un triángulo isósceles inscrito en un círculo, la base es mayor o menor que el radio.
3) Tazamos una línea desde el punto de intersección de la cuerda y la circunferencia hasta el centro del círculo.

4) Trazamos una línea desde el otro punto de intersección de la cuerda y la circunferencia hasta el centro del círculo.
5) Así tenemos un triángulos isósceles inscrito en una circunferencia, cuyos lados son iguales por ser radios de la misma circunferencia. La base es una cuerda de la circunferencia.
6) Aristóteles afirma una proposición necesaria para la demostración: "los ángulos de las semicircunferencias son iguales". Aristóteles se refiere a la igualdad que existe entre los ángulos curvilíneos formados entre el diámetro y la circunferencia: $\angle W = \angle X = \angle Y = \angle Z$

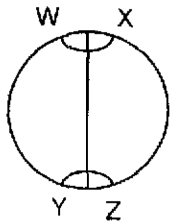


figura b

7) El ángulo AC es igual al ángulo BD, por ser ángulos curvilíneos formados por un diámetro y la circunferencia (véase figura a).
8) Aristóteles afirma otra proposición necesaria para la demostración: Todos los ángulos de un mismo segmento de circunferencia son iguales.
Por lo que el ángulo C es igual al ángulo D, pues se forman entre un segmento de circunferencia y la misma cuerda (base del triángulo).[36]
9) Aristóteles afirma otra proposición necesaria para la demostración: al sustraer cosas iguales de cosas iguales, quedarán cosas iguales.
Por lo dicho hasta ahora el ángulo A es igual al B y el ángulo C es igual al D. Así si sustraigo del ángulo completo CAE los ángulos A y C, y si sustraigo del ángulo completo DBZ los ángulos B y D resulta que los ángulos E y Z son iguales. Esto parece reiterativo, porque ya se ha demostrado que A y B son ángulos iguales, pero recordemos que Aristóteles no está demostrando, sino que está haciendo uso de una demostración conocida por el lector, para ejemplificar la petición de principio. En resumen la demostración quedaría de la siguiente forma:

---

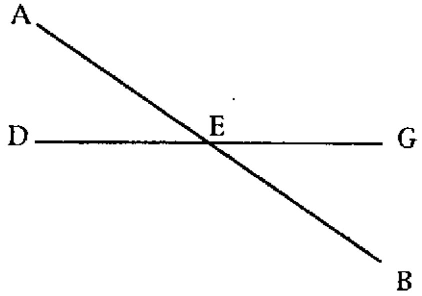
36 "[...] dónde se hace uso del ángulo curvilíneo formado por un arco de círculo y una cuerda". (Euclides 1944: 171, nota 14).

A) Se parte de triángulo isósceles inscrito en una circunferencia y cuyos lados iguales y adyacentes a la base son los radios de la misma.
B) Hay dos ángulos curvilíneos completos: CAE y DBZ.
C) Los ángulos E, Z, AC y BD son iguales, porque son ángulos formados entre el diámetro y la circunferencia, es decir, son ángulos de semicircunferencia, y los ángulos de las semicircunferencias son iguales.
D) Si a los ángulos completos CAE y DBZ les quito ángulos iguales, en este caso E y Z, entonces quedan cantidades iguales: los ángulos AC y BD son iguales.
E) Los ángulos C y D son iguales porque se forman de un mismo segmento de circunferencia y una cuerda común, y todos los ángulos de un mismo segmento de circunferencia son iguales.
F) Si restamos a los ángulos AC y BD los ángulos iguales C y D, resulta que los ángulos A y B son iguales, que es lo que se quería demostrar.

Esta demostración es más compleja de lo estrictamente necesario para demostrar que los ángulos A y B son iguales, pero se utilizan todos los elementos aportados por Aristóteles. Y lo que buscamos son los elementos cognoscitivos empleados.

Anexo 3
Teorema 1.15

"Si dos rectas se cortan, hacen ángulos opuestos por el vértice iguales" (Euclides 1944: 43).



1) $\angle$ GEA + $\angle$ AED = 2R

2) $\angle$ AED + $\angle$ DEB = 2R

3) $\angle$ GEA + $\angle$ AED = $\angle$ AED + $\angle$ DEB

4) $\angle$ GEA = $\angle$ DEB (Conclusión 1)

5) $\angle$ AED + $\angle$ DEB = 2R

6) $\angle$ DEB + $\angle$ GEB = 2R

7) $\angle$ AED + $\angle$ DEB = $\angle$ DEB + $\angle$ GEB

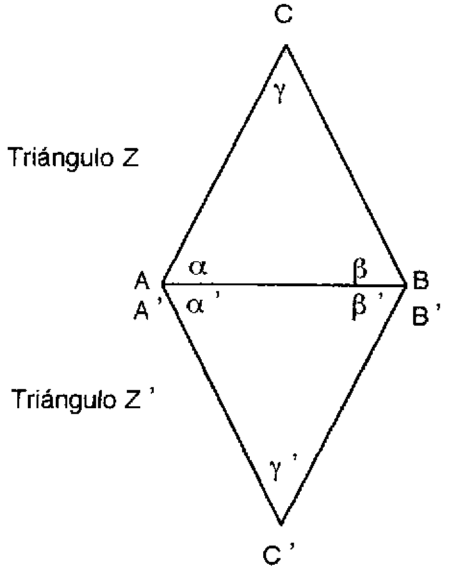
8) $\angle$ AED = $\angle$ GEB (Conclusión 2)

(Euclides 1944: 43).

Anexo 4
La conclusión de una demostración

No me detendré a reconstruir una posible demostración de esta proposición, pues considero que hay elementos suficientes en los expuesto hasta ahora, para sustentar la hipótesis de una corroboración o constatación a partir de ejes de simetría, de la inclusión de la figura en la circunferencia o ambas. Simplemente me limitaré a formalizar la proposición, en que señalé las relaciones de igualdad entre los elementos de los triángulos. En este caso lo más importante no es el establecimiento de la igualdad entre ciertos elementos, ni el método de corroboración, sino el etablecimiento de la proposición: basta con conocer dos ángulos y un lado del triángulo para determinar los demás elementos del triángulo.

La proposición que establece la relación de los elementos iguales para el triángulo Z, queda como sigue:



$$[(\overline{AB} = \overline{AB'}) \bullet (\alpha = \alpha') \bullet (\beta = \beta')] \supset [(\gamma = \gamma') \bullet (AC = AC') \bullet (BC = BC')]$$

Esta proposición corresponde al Teorema 1.26 de los *Elementos de Geometría* de Euclides, aunque el enunciado de Euclides es más complejo y contempla más casos que los de la proposición atribuida a Tales:

Teorema 1.26

"Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos de otro y un lado de uno igual a un lado de otro, -sea tal lado el colocado entre los ángulos iguales o el subtendido bajo uno de los ángulos iguales-, tendrán los demás lados del uno respectivamente iguales a los demás del otro y el ángulo restante de uno será igual al restante del otro". (Euclides 1944: 65-69).

BIBLIOGRAFÍA

Abetti, Giorgio.
1983 Historia de la Astronomía
México: Fondo de Cultura Económica.
Breviarios, 118.

Alvarez Salas, Omar Daniel.
1996 Pitágoras: fundador de la matemática griega
Faluctad de Filosofía, UNAM; México.
Tesis de licenciatura. Letras Clásicas.

Amezcua Cardiel, Juan Manuel.
1992 Pitagorismo e inconmensurabilidad en los siglos V y IV a. c.
Faluctad de Ciencias, UNAM; México.
Tesis de licenciatura. Matemático.

Arístides Quintiliano.
1996 Sobre la Música
Introducción, traducción y notas de Luis Colomer y Begoña Gil.
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 216.

Aristóteles.
1982 Tratados de lógica (órganon) I
Categorías • Tópicos • Sobre las refutaciones sofísticas
Introducción, traducción y notas de Miguel Candel Sanmartín.
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 51.

Aristóteles.
1988 Tratados de lógica (órganon) II
Sobre la interpretación•Analíticos primeros • Analíticos segundos
Introducción, traducción y notas de Miguel Candel Sanmartín.
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 115.

Aristóteles.
1979 Tratados de lógica (El órganon)
Introducción, preámbulos y notas de Francisco Larroyo.
México: Editorial Porrúa. "Sepan cuantos..." 124.

Aristóteles.
1995/ 1998 Física
Introducción, traducción y notas de Guillermo R. de Echandía
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 203.

Aristóteles.
2001 Física
Traducción y notas de Ute Schmidt Osmanczik.
Introducción: Antonio Marino López.
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.

Aristóteles.
1985/ 1988 Etica Nicomáquea • Etica Eudemia
Introducción por Emilio Lledó Iñigo.
Traducción y notas por Julio Pallí Bonet.
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 89.

Aristóteles.
1988/ 1999 Política
Introducción, traducción y notas de Manuela García Valdés
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 116.

Aristóteles.
1994/ 1998 Metafísica
Introducción, traducción y notas de Tomás Calvo Martínez.
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 200.

Aristóteles.
1970/ 1982 Metafísica de Aristóteles
Edición trilingüe por Valentín García Yebra.
Madrid: Editorial Gredos.

Aristóxeno.
2000 La ciencia Armónica
Traducción de Carmen Chuaqui.
México: UNAM.

Aristóxeno.
2000 Elementos de la rítmica
Traducción de Carmen Chuaqui.
México: UNAM.

Babini, José.
1952 Historia sucinta de la matemática
Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina.
Colección Austral, 1142.

Baldor, J. A.
1974 Geometría plana y del espacio y Trigonometría
Bilbao: Cultural Centroamericana.

Baldor, J. A.
1971 Aritmética teórico práctica
Barcelona: Cultural Centroamericana.

Baur, John.
1985 Music theory through literature. Volume I
Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Becker, Oskar.
1966 Magnitudes y límites del pensamiento matemático
Madrid: Ediciones Rialp, S. A.
Naturaleza e Historia, 17.

Bergamini, David.
1981 Matemáticas
México: TIME-LIFE.
Colección científica.

Beuchot, Mauricio.
1985 Ensayos marginales sobre Aristóteles
México: UNAM. Centro de Estudios Clásicos.

Bowen, James y Hobson, Peter.
1991 Teorías de la educación
Innovaciones importantes
en el pensamiento educativo occidental
México: Noriega Editores/Editorial Limusa.

Cherniss, Harold.
1991 La Crítica Aristotélica a la Filosofía Presocrática
México: UNAM.

Chuaqui, Carmen.
2000 Musicología griega
Contiene la traducción de *La ciencia Armónica* y
Elementos de la rítmica de Aristóxeno.
México: UNAM.

Collette, Jean-Paul.
2000 Historia de las matemáticas I
México: siglo veintiuno editores, S. A de C. V.

Comotti, Giovanni.
1999 Historia de la música 1
La música en la cultura griega y romana.
Madrid: Turner Libros / CONACULTA.

Corripio, Fernando.
1996 Diccionario Etimológico de la lengua española
México: Ediciones B.

De Olazabal, Tirso.
1984 Acústica musical y organología
Buenos Aires: Ricordi Americana S. A. E. C.
Manuales Musicales Ricordi.

De Vogel, C. J.
1966 Pythagoras and early pythagoreanism
Holanda: Assen.

Escohotado, Antonio.
1975 De physis a polis
Barcelona: Editorial Anagrama.

Euclides.
1944 Elementos de Geometría. Libros I y II
Introducción, versión y notas de Juan David García Bacca.
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.

Euclides.
1956 Elementos de Geometría. Libros III-V
Versión, prólogo y notas de José Alvarez Laso.
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.

Euclides.
2000 Elementos de Geometría. Libros I-IV
(Intr. de Luis Vega.
Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaños).
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 155.

Euclides.
1994 Elementos de Geometría. Libros V-IX
(Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaños).
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 191.

Euclides.
1996 Elementos de Geometría. Libros X-XIII
(Trad. y notas de María Luisa Puertas Castaños).
Madrid: Editorial Gredos.
Biblioteca Clásica Gredos, 228.

Farrington, Benjamín.
1979 Ciencia Griega
Barcelona: Icaria Editorial, S. A.

Ferraz Fayos, Antonio.
1974 Teorías sobre la naturaleza de la luz:
de Pitágoras a Newton
Madrid: Dossat.

Fraile, Guillermo.
1976 Historia de la Filosofía I. Grecia y Roma
Madrid: Biblioteca de Autores Cristianos,
de La Editorial Católica.

Fubini, Enrico.
1988 La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX
Madrid: Alianza Editorial.
Alianza Música, 31.

García Hughes, Daniel.
1956 Diccionario Manual Griego-Español
Burgos: Ediciones Aldecoa.

Geymonat, Ludovico.
1987 El pensamiento científico
Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
Cuadernos de EUDEBA, 37.

González Ochoa, César.
1994 La música del Universo, apuntes sobre la noción de armonía en Platón
México: UNAM.
Cuadernos del Centro de Estudios Clásicos, 33.

González Urbaneja, Pedro Miguel.
2001 Pitágoras. El filósofo del número
Madrid: NIVOLA.
La matemática en sus personajes, 9.

Graves, Robert.
1988 Los mitos griegos. Tomos 1 y 2
México: Alianza Editorial Mexicana.

Guerrero, Luis Ignacio
1992 Lógica. El razonamiento deductivo formal
México: Universidad Panamericana.

Heath, T. L. Sir.
s/f Manual of Greek Mathematics
citado por Jeans 1953: 30.

Halaris, Christodoulos
s/f Música de la Antigua Grecia
CD Atenas: ORATA Ltd. ORANGM 2013.

Hilbert, David
1944 Los Fundamentos de la Geometría
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana.

Jámblico.
1991 Vida Pitagórica
(Traducción, introducción y notas de Enrique A. Ramos Jurado).
Madrid: Etnos.

Jay Grout, Donald.
1984 Historia de la música occidental, 1
Madrid: Alianza Editorial.
Alianza Música, 15.

Jeans, James Sir
1953 Historia de la Física
México: Fondo de Cultura Económica.
Breviarios, 84.

Jenofonte.
1993 Recuerdos de Sócrates. Banquete/Apología
Introducción, versión y notas de Juan David García Bacca.
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum
Mexicana.

Kirk, G.S. y Raven, J. E.
1979 Los Filósofos Presocráticos
Madrid: Gredos

Levi, Peter.
1993 Grecia. Cuna de Occidente Volúmenes I y II
Madrid: Ediciones Folio.

Liddell, Henry George and Scott, Robert (compiled by).
1996 A Greek-English Lexicon
Oxford: Clarendon Press.

Lombardo Radice, Lucio.
2000 Historia de las matemáticas I
México: Editorial Laia / Distribuciones Fontamara.

Marks, Robert W.
1968 Diccionario y Manual de las Nuevas Matemáticas
Nueva York: Editors Press Service, Inc.

Michels Ulrich.
1983 Atlas de música, 1
Madrid: Alianza Editorial.
Alianza Atlas.

Mir, José María (Director).
1979 Diccionario ilustrado Latino-Español Español-Latino
Barcelona: Biblograf.
Spes.

Molina Ayala, José.
1998 Tradición y novedad en el protreptico a la filosofía de Jamblico
Faluctad de Filosofía, UNAM; México.
Tesis de maestría. Letras Clásicas.

Mosterín, Jesús.
1984 Historia de la filosofía. 3. La filosofía griega prearistotélica
Madrid: Alianza Editorial.
El libro de Bolsillo, 1004.

Mosterín, Jesús.
1984 Historia de la filosofía. 4. Aristoteles
Madrid: Alianza Editorial.
El libro de Bolsillo, 1004.

Pabón S. de Urbina, José M.
1997 Diccionario Manual Griego-Español
Barcelona: Biblograf. Vox.

Paniagua, Gregorio. Atrium Musicae de Madrid.
1979 Musique de la Gréce Antique
CD Alemania: Harmonia Mundi, HMA1901015.

Perero, Mariano.
1994 Historia e historias de matemáticas
México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Platón.
2000 La República
Introducción, versión y notas de Antonio Gómez Robledo.
México: UNAM.
Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum
Mexicana.

Prieto Rodríguez, Sotero
1991 Historia de las Matemáticas
Toluca: Instituto Mexiquense de Cultura. Ciencia y Cultura, 1.

Pöhlmann, Egert.
1970 Denkmäler Altgriechischer Musik
Sammlung, übertragung und erläuterung
aller Fragmente und Fälschungen.
Nürnberg: Verlag Haus Carl Nürnberg.

Salazar, Adolfo.
1967 La música. Como proceso histórico de su invención
México: Fondo de Cultura Económica.
Breviarios, 26.

Salazar, Adolfo.
1954 Teoría y práctica de la música a través de la historia I
La música en la cultura griega.
México: El Colegio de México.

Scholes, Percy A.
1984 Diccionario Oxford de la Música. Tomos 1 y 2
Barcelona: EDHASA/HERMES/SUDAMERICANA.

Sin autor (s/a).
s/f Resumen de gramática latina. Apéndice al Diccionario ilustrado Latino-Español Español-Latino
Barcelona: Biblograf.
Spes.

Sobrino, José.
2000 Diccionario enciclopédico de terminología musical
México: Secretaría de Cultura Gobierno de Jalisco/CONACULTA.

Stevens, S.S. y Warshofsky, Fred.
1988 Sonido y audición
México: TIME-LIFE.
Colección científica.

Strathern, Paul.
1999 Pitágoras y su teorema
México: siglo veintiuno de españa editores.

Tabouris, Petros.
s/f Secular Music of Greek Antiquity - Vol. 1
CD Estados Unidos: FM Records.

Taton, René (director).
1971 Historia General de las Ciencias, Tomo I: La Ciencia Antigua y Medieval.
Barcelona: Destino

Taylor, Thomas.
2002 Historia de las matemáticas I
Barcelona: Editorial Humanitas, S. L.

Tsatsos, Constantino D.
1982 La Filosofía Social de los Antiguos Griegos
México: UNAM.

Wussing, H.
1998 Lecciones de Historia de las Matemáticas
Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A.

Zagal, Arreguin, Héctor.
2000 L'attualità del metodo aristotelico
en Brock, Stephen L. (a cura di) Libro: 127-159.
L'attualità di Aristotele
Roma: Armando editore.
Studi di filosofia - 21. a cura della Facoltà di Filosofia della Pontificia Università della Santa Croce.

Zielinski, Thadee.
1987 Historia de la civilización Antigua
Madrid: Aguilar, S. A. de Ediciones
El libro Aguilar, 9.