



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE ASIGNACION DE FRECUENCIAS CON PROGRAMACION MATEMATICA

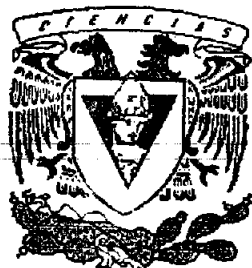
T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A :
BRISA JIMENEZ MATUS

DIRECTORA DE TESIS:

M. EN I. O. MARIA DE LUZ GASCA SOTO

MEXICO, D.F.

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

m351302



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Brisa Jiménez Matus

FECHA: 30 de noviembre de 2005

FIRMA: 

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

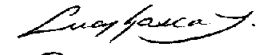

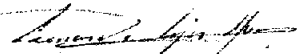
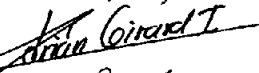

“El Problema de Asignación de Frecuencias con Programación Matemática”

realizado por Brisa Jiménez Matus

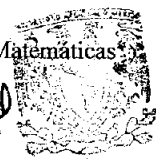
con número de cuenta 09561196-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

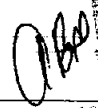
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en I. O. María de Luz Gasca Soto	
Propietario	M. en I. O. Nereo Elías Mata	
Propietario	Act. Leonardo López Monroy	
Suplente	Mat. Adrián Girard Islas	
Suplente	Lic. en C.C. Laura Irene Echeveste Escobar	

Consejo Departamental de Matemáticas





M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE
MATEMÁTICAS

A Dios gracias por la oportunidad de estar aquí y compartir con todas las personas que me aprecian momentos inolvidables.

A mis padres que si no fuera por ellos simplemente esta etapa de mi vida no existiría, gracias por todo el apoyo incondicional que me han brindado.

A mis hermanos con los que he compartido momentos muy divertidos de mi vida.

Un especial agradecimiento a Lucy que me ha apoyado en la realización de este trabajo, además de brindarme su amistad.

A mi gran familia que aunque lejos siempre ha estado al pendiente de mí.

Es difícil mencionar a todos mis amigos, y que gracias a Dios son muchos, pero siéntanse seguros que a cada uno los tengo presente.

A mis sinodales gracias por el tiempo y los consejos que me brindaron.

Brisa

Introducción	3
1. TELEFONÍA CELULAR.....	5
1.1. Antecedentes.....	5
1.1.1. Consecuencias de la movilidad	9
1.2. Elementos básicos de la telefonía celular	10
1.2.1. Frecuencia de reuso	10
1.2.2. División de celdas.....	11
1.2.3. Propiedades geométricas de las celdas	12
1.2.4. Interferencias y Capacidad del Sistema.....	14
1.2.5. Espectro del sistema	16
1.2.6. BTS, TRX y Celdas.....	17
1.2.7. BSC, MSC, y la Red Central	18
1.2.8. Asignación de Canal, Ceder.....	18
1.2.9. Frecuencias separadas y bloqueadas	19
1.2.10. Un primer modelo matemático: La gráfica de interferencia.....	20
2. MODELOS Y TÉCNICAS DE PROGRAMACION MATEMATICA PARA PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS.....	21
2.1. Modelos y Aplicaciones	21
2.1.1. Modelación del Problema de Asignación de Frecuencias.....	21
2.1.2. Formulación y Clasificación	29
2.2. Representación Gráfica Extendida	30
2.2.1. Problemas del Máximo Servicio y Mínima Asignación de Frecuencias Bloqueadas, Max - FAP.....	34
2.2.2. El FAP de Orden Mínimo, MO - FAP	41
2.2.3. La Amplitud Mínima del Problema de la Asignación de Frecuencias, MS - FAP.....	46
2.2.4. La Mínima Interferencia en el Problema de la Asignación de Frecuencias, MI - FAP	53
2.2.5. Variantes de la Formulación	58

3. UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA AL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS	
"FILADELFIA"	62
3.1. Introducción	62
3.2. El problema Filadelfia	63
3.3. La solución.....	65
Conclusiones.....	71
Anexo 1. Sistema GSM.....	73
Anexo 2. Teoría de Gráficas, Conceptos Básicos	90
Anexo 3. Asignación de Frecuencias y etiquetado en Gráficas	93
Anexo 4. Programación Entera	113
Bibliografía.....	125
Referencias.....	127

Introducción

Debido a la gran demanda de servicio de telefonía celular, las compañías se han visto en la necesidad de optimizar sus recursos. Uno de éstos recursos es el espectro radioeléctrico, el cual para obtener una concesión se da a un muy alto costo a pesar del limitado número de frecuencias que contiene. Esta situación dió pie a hacer uso de la Investigación de Operaciones que con sus técnicas de optimización y la utilización del término "reuso de frecuencias" da alternativas de solución al problema de Asignación de Frecuencias. A continuación se mencionará una breve descripción del contenido de este trabajo.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos de telefonía celular que serán utilizados durante los siguientes Capítulos.

En el Capítulo 2 se presenta el Problema de Asignación de Frecuencias mediante un modelo matemático. Dependiendo de las necesidades de la compañía telefónica se puede manipular un poco con la estructura del modelo, es decir, un modelo puede ser planteado para minimizar el número de frecuencias a utilizar y otro puede ser planteado para minimizar el costo de la asignación haciendo uso de algunas restricciones del primer planteamiento. Lo anterior puede ser un tanto "práctico" y es una de las ventajas de la programación lineal como método de solución del Problema de Asignación de Frecuencias. En este capítulo se presenta un ejemplo representado mediante distintos modelos.

Para terminar, el Capítulo 3 muestra uno de los casos más importantes en la Asignación de Frecuencias "El Problema Filadelfia" que sirve como método de evaluación de los algoritmos que dan solución a los Problemas de Asignación de Frecuencias.

El Anexo 1 menciona algunos conceptos y características adicionales del sistema GSM.

En el Anexo 2 se presentan algunos conceptos básicos de Teoría de Gráficas.

En el Anexo 3 se da un breve panorama sobre un modelo con Teoría de Gráficas para el Problema de asignación de Frecuencias.

El Anexo 4 proporciona una introducción sobre la Programación Entera.

Cabe mencionar que este trabajo recopiló información de diversas fuentes y tuvo como propósito mostrar aplicaciones actuales de la Investigación de Operaciones que apoyen los cursos que se imparten en la Facultad de Ciencias.

1. TELEFONÍA CELULAR

Una aplicación que ha revolucionado el negocio de la telefonía en años recientes y está haciendo que tenga un significativo impacto en los años que vienen es la telefonía celular. También en la aplicación especial del problema de la asignación de frecuencias el cual no tiene un modelo matemático universal. Nos enfocaremos en el estándar GSM¹ "Sistema General de la Comunicación Móvil", que ha estado en uso desde 1992. GSM es la base de la mayoría de las redes de telefonía celular. Este sistema es empleado en cientos de ciudades y sirve a millones de clientes.

1.1. Antecedentes

A continuación se da una cronología² de la comunicación inalámbrica:

- 1876 - El teléfono fue inventado por Alexander Graham Bell.
- Década de 1880 - Invención del radio por Nikolai Tesla.
- 1894 – Se presenta formalmente el radio por Guglielmo Marconi.
- 1973 – Martin Cooper introdujo en EEUU el primer radio teléfono, y es a él a quien se le considera "el padre de la telefonía celular".
- 1979 – En Tokio, Japón aparecen los primeros sistemas comerciales de celulares por la compañía NTT.
- 1981 – Los países Nórdicos introducen el sistema de telefonía celular.
- 1983 – Chicago es la primer ciudad en EEUU en la que se introduce el servicio de telefonía celular.

¹ El modelo GSM es revisado en el Apéndice A

² Los datos cronológicos pueden ser encontrados principalmente en eveliux.com y Noticiasdot.com

- 1987 – En EEUU ya operan 312 redes celulares en 205 ciudades.
- 1989 – En México se convoca a empresas de telecomunicaciones a que presenten solicitudes para ofrecer el servicio de telefonía celular en nueve regiones de México.
- 1990 – Se inicia en México el servicio comercial de telefonía celular, cabe mencionar que la implementación del servicio fue más fácil debido a que la tecnología celular ya había sido probada en varios países.
- 1992 – En México el número de suscriptores del servicio asciende a 314,000.
- 1998 – Los suscriptores, en México, se han incrementado un 34% en relación a los que existían en 1992.
- 2005 – A nivel mundial el número de suscriptores se ha incrementado a 931 millones de usuarios.
- 2007 – Se estima que el número de usuarios ascenderá a 1600 millones de usuarios en todo el mundo.

Era de esperarse que un día las tecnologías del teléfono y del radio iban a ser combinadas para crear un mismo aparato: el teléfono celular.

En la época predecesora a los teléfonos celulares, la gente que realmente necesitaba comunicación móvil tenía que confiar en el uso de radio-telefonos en sus autos. En el sistema radio-telefónico tradicional, existía sólo una antena central para cada ciudad, y probablemente 25 frecuencias disponibles en la torre de transmisión. En este tipo de servicio la estación realiza las funciones de transmitir y repetir la señal. Para las transmisiones se utilizan potencias extremadamente grandes creándose una gran zona de cobertura. Sin embargo, si durante una conversación el usuario se sale de la zona de cobertura, la conversación se interrumpe ya que este sistema no tiene la capacidad de conmutación. En este tipo de comunicación cada usuario tiene asignado un canal de radio con una frecuencia fija para acceder a la red, lo cual hace ineficiente el uso del espectro radioeléctrico,

ya que si uno de los usuarios con frecuencias asignadas en algún momento no las usa, las frecuencias estarían desocupadas creándose así un gasto innecesario.

A diferencia del servicio radio-telefónico, un sistema celular se forma al dividir el territorio al que se pretende brindar servicio, en áreas más pequeñas llamadas celdas, las cuales son atendidas por una estación base que restringe la cobertura a la celda, la Figura 1 muestra la división de un territorio en celdas. Este concepto de sistema celular fue diseñado por investigadores de los laboratorios de teléfonos Bell en 1947 cuando subdividieron un área relativamente grande en secciones pequeñas (celdas) y donde se utilizó el concepto de reuso de frecuencias para incrementar la capacidad de un canal.

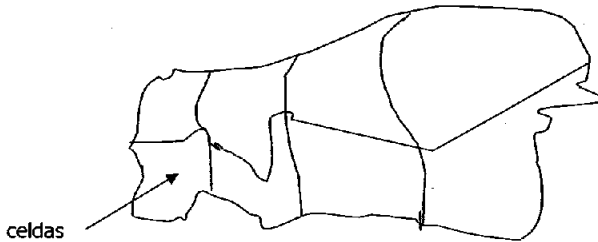


Figura 1: División de un territorio en celdas

Con lo anterior la telefonía celular empezó a tener auge en varios países como una alternativa a la telefonía convencional inalámbrica. Debido a que esta tecnología fue muy bien aceptada empezaron a darse los primeros problemas de saturación en el servicio.

La evolución en los sistemas de telefonía celular ha hecho que las compañías de teléfonos celulares tengan como objetivos:

- Aumentar la calidad de los servicios ofrecidos.
- Aumentar, compartiendo frecuencias, la utilización del espectro radioeléctrico.

- Minimizar la interferencia.
- Gran capacidad de suscriptores.
- Compatibilidad nacional³.
- Adaptación a la densidad del tráfico.
- Servicio telefónico regular y servicios especiales.
- Soportar gastos, es decir, que sea económico y accesible para los usuarios.

Para cumplir con estos objetivos se han desarrollado una gran variedad de estrategias las cuales se pueden clasificar en fijas o dinámicas. Dependiendo del tipo de estrategia que se utilice serán las características del sistema, particularmente, la forma en que se gestionan las llamadas cuando un usuario pasa de una celda a otra.

Se dice que un sistema es de asignación fija de frecuencias si cumple que:

- Se asigna un conjunto predeterminado de frecuencias a la celda.
- Las llamadas producidas dentro de la celda sólo pueden ser servidas por frecuencias que no están siendo utilizadas dentro de esa celda en particular.
- Si todas las frecuencias de la celda están ocupadas, la llamada se bloquea y el usuario no recibe el servicio. Puede darse el caso de que la celda vecina preste frecuencias, siempre y cuando no se interfiera en ninguna de las llamadas en progreso de la celda donadora, esto es regulado por el Centro de Conmutación Móvil, CCM.

Una asignación de frecuencias se dice que es dinámica si:

- Las frecuencias no se asignan en las celdas de manera permanente.
- Cada vez que se produce un requerimiento de llamada, la estación base servidora pide una frecuencia al CCM y éste la asigna en la celda que la pidió

³ Roaming Automático

siguiendo un algoritmo que tiene en cuenta diversos factores como son el préstamo de frecuencia, la distancia de reutilización y otras funciones de costo.

- Requiere que el CCM tenga una gran cantidad de cómputo en tiempo real.

"Dado que el número de usuarios es mucho menor que el número total de nuevos usuarios, las frecuencias bidireccionales sólo se asignan si se necesitan. Esta es la principal diferencia con la telefonía estándar, donde cada terminal está continuamente unido a un conmutador haya o no haya llamada en proceso."⁴

1.1.1. Consecuencias de la movilidad

A diferencia de sistema de asignación de frecuencias dinámico, el sistema fijo tiene problemas cuando el usuario se mueve de su región. Una red puede enviar una llamada a un usuario fijo simplemente conociendo su dirección de red (su número telefónico) dado que el conmutador local no cambia. Sin embargo, en un sistema celular la celda a donde se va a establecer el contacto cambia cuando el usuario se mueve. En este tipo de casos, primero se localiza al usuario móvil para así determinar la celda en la que éste está actualmente.

Generalmente las compañías de teléfonos celulares utilizan tres métodos de localización.

Método 1: La estación móvil indica los cambios de celdas en la red y al recibirse una llamada se envía un mensaje de búsqueda en la celda donde está el móvil.

Método 2: Se envía un mensaje a todas las celdas de la red cuando llega una llamada, evitándose así la necesidad de que el móvil esté continuamente avisando a la red de su posición.

⁴ Proyecto GSM, "Estudio y Simulación con Matlab de la interfaz de radio de GSM", pág. 3

Método 3: Cuando una estación móvil cambia de celda se pueden dar dos casos: la estación móvil no envía información a la red o la estación móvil informa a la red el cambio de ubicación. Este método soporta los dos métodos anteriores y utiliza convenientemente alguno de ellos.

1.2. Elementos básicos de la telefonía celular

Las palabras frecuencias de reuso y división de celdas resumen las características esenciales del concepto celular. En esta sección se definen estos términos.

El concepto de frecuencia de reuso no sólo se aplica para la telefonía celular, actualmente se utiliza en la mayoría de los servicios de comunicación inalámbrica.

1.2.1. Frecuencia de reuso

La idea de usar la frecuencia de reuso en el servicio de telefonía celular en un área geográfica nos da la idea de concepto celular. En lugar de cubrir un área con altas antenas para cubrir grandes regiones (áreas) se pueden cubrir pequeñas regiones con antenas de bajo poder. Estas regiones son las que llamaremos celdas. Por celda se designa al área en la cual un transmisor respectivo con determinado conjunto de frecuencias brinda servicio de telefonía a esa celda. En la Figura 2 se muestra un mapa celular de una región. En principio el área que cubre un transmisor no necesita ser regular (uniforme geoméricamente) por lo cual las celdas no necesariamente tienen una forma especial. Si le asignamos a cada región un nombre, al cual llamaremos etiqueta, regiones con distintas etiquetas pueden atender a un mismo conjunto de frecuencias, evitando problemas de escasez de frecuencias. Aquí cabe hacer notar que el objetivo es utilizar el mínimo número de etiquetas de tal manera que regiones lo suficientemente lejanas puedan utilizar la

misma etiqueta. Donde suficientemente lejano es un parámetro definido por el problema específico sobre el que se esté trabajando. En este ejemplo se considerará que A y H están lo suficientemente alejados por lo que podrían utilizar las mismas frecuencias, de hecho se podría renombrar A con H o viceversa.

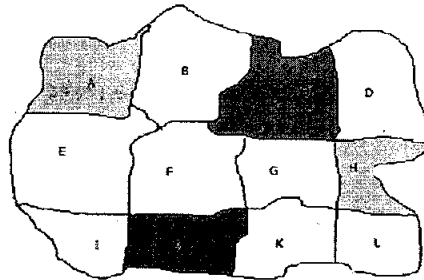


Figura 2: Mapa celular y Reuso de Frecuencias

1.2.2. División de celdas

Cuando en cierta región (celda) la demanda se incrementa, existe la necesidad de dividir dicha región en subregiones para que se pueda brindar un buen servicio; en estas subregiones se puede usar el concepto de frecuencia de reuso. La Figura 3 muestra el caso en que la región G se divide en otras subregiones y donde se pretende reutilizar algunas frecuencias.

Las técnicas de frecuencia de reuso y división de celdas permiten un sistema celular que conoce la importancia de servir a un gran número de clientes usando una pequeña banda de espectro radioeléctrico.

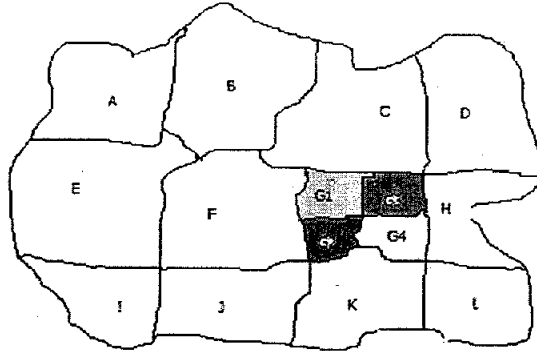


Figura 3: Subdivisión de una región

1.2.3. Propiedades geométricas de las celdas

El propósito principal de la telefonía celular es delimitar las áreas en las cuales las frecuencias específicas o celdas específicas sean usadas de manera exclusiva.

Si se tuviera un número infinito de sitios de transmisión para la asignación de frecuencias se podría trabajar con la división celular amorfa pero como influyen factores de demanda continua se fuerza a que se muevan los sitios y las frecuencias establecidos, es por esto que se trata abstraer a una forma geométrica mucho más manejable.

No está de más mencionar que la ausencia de orden y estructura podría provocar un uso ineficiente y costoso del espectro radioeléctrico.

Dado que la transmisión de ondas cubre zonas circulares, la primera forma en que se visualizaron las celdas fue en forma de círculos pero analizando bien esta

representación es impráctica ya que quedan espacios ambiguos como se puede ver en la Figura 4. Cabe mencionar que esto es un adoquinamiento del espacio.



Figura 4: Representación de las celdas con círculos

Los polígonos regulares se aproximan al círculo, así que buscaron representar las celdas con este tipo de polígonos de tal manera que el plano se adoquinara. Los candidatos fueron: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. La Figura 5 muestra las mallas formadas por la unión de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos.

Por razones económicas se decidió utilizar los hexágonos ya que al poner una antena en el centro de estos polígonos se cubre una mayor área con el menor número de antenas, además de que se vio que el número de celdas requeridas es menor que el de los otros tipos de celdas. Una ventaja adicional es que se puede hacer uso de otras herramientas para colocar las antenas, como es el caso de análisis vectorial⁵.

Se tiene, además, que el dual de una malla hexagonal es una malla triangular, por lo cual se podría trabajar con ellas indistintamente con teoría de gráficas al representar las antenas como vértices.

⁵ Mc Donald V.H., "The celular concept"

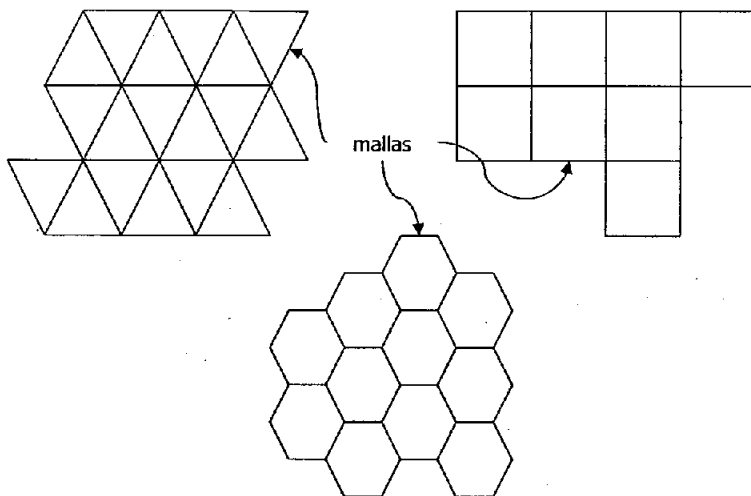


Figura 5: Mallas de polígonos regulares

1.2.4. Interferencias y Capacidad del Sistema

El principal factor que limita el desarrollo de los sistemas celulares es la interferencia.

Dos celdas se superponen en sus fronteras por lo que sí usan el mismo canal en esta zona, la interferencia ocurre. Los cálculos del nivel de interferencia es una tarea difícil. Calcular el nivel de interferencia depende no solamente de las frecuencias, sino también del clima. Existen métodos teóricos y fórmulas con los cuales la interferencia puede ser cuantificada. La mayoría de las compañías de teléfonos móviles basan sus análisis de interferencia en modelos matemáticos tomando en cuenta poderosos transmisores, la distancia entre estos, así como también factores que desvanecen y filtran la calidad de la voz. Los datos para estos modelos normalmente se obtienen de bases de datos que contienen

información de ubicación y forma de los terrenos y construcciones, así como también de vegetación de las regiones.

Características de la interferencia

- Provoca que los usuarios escuchen las conversaciones de otras llamadas.
- Induce a llamadas perdidas o bloqueadas.
- Es más fuerte en áreas urbanas a causa del ruido de radio frecuencia y al gran número de estaciones base y de estaciones móviles.
- Es responsable de formar cuellos de botella en el servicio y de las llamadas entrecortadas.

1.2.4.1. Tipos de interferencia

Dado que una antena puede atender varias llamadas y una antena se ubica en una celda es necesario definir interferencia a distancia cero, se define interferencia co-canal.

Interferencia co-canal

Las celdas en las cuales se utiliza la misma frecuencia se llaman celdas co-canal y la interferencia producida en éstas es llamada interferencia co-canal. La interferencia co-canal no se puede atacar incrementando la potencia de un transmisor ya que si se hiciera este incremento aumentaría la interferencia en las celdas co-canal vecinas. Para que la interferencia co-canal disminuya, las celdas co-canal deben de estar lo suficientemente separadas de tal manera que se dé un suficiente aislamiento.

Interferencia de frecuencias adyacentes

Este tipo de interferencia se produce debido a la imperfección de los filtros en los receptores que permiten que una frecuencia cercana invada a la banda pasante.

1.2.5. Espectro del sistema

La manera en que normalmente GSM planea la asignación de frecuencias se describe a continuación:

- Una compañía de teléfonos (el operador) ha adquirido el uso de un cierto espectro de frecuencias o espectro radioeléctrico $[f_{min}, f_{max}]$ en una región geográfica particular, por ejemplo, una ciudad.
- La banda de frecuencia es particionada dentro de un conjunto de frecuencias, todas estas con el mismo ancho de banda Δ , dependiendo de la tecnología utilizada.
- Las frecuencias disponibles se denotan por $1, 2, \dots, N$, con $N = (f_{max} - f_{min}) / \Delta$.

Por ejemplo, un operador de una red de teléfono móvil maneja aproximadamente 100 frecuencias. En cada canal disponible, uno puede comunicarse de un transmisor a un receptor. Para tráfico bidireccional se requiere de un segundo canal. En realidad, si un operador adquiere un espectro $[f_{min}, f_{max}]$ automáticamente obtiene un espectro en pares de igual tamaño para la comunicación bidireccional. Uno de estos espectros es usado de un móvil a la estación base (*up-link*), el otro de la estación base al móvil (*down-link*) en la comunicación.

1.2.6. BTS, TRX y Celdas

Un operador para brindar un buen servicio a sus clientes tiene que resolver un gran número de problemas nada triviales. En un paso inicial la distribución geográfica de la demanda de comunicación para el período de planeación es estimada, es decir, se requiere de una infraestructura de comunicación que al ser instalada sea capaz de servir anticipadamente la demanda.

El dispositivo que mantiene la comunicación de radio con los teléfonos móviles de los clientes es llamado Estación Base de Transmisores o BTS⁶. En esta estación se tiene un radio de transmisión y un equipo de recepción, incluyendo antenas y todas las señales necesarias para procesar. La estación base típica usada actualmente opera tres antenas, cada una con un ángulo abierto de 120 grados. Cada antena define una celda. Estas celdas son las unidades básicas de la planeación y que es por la cual los sistemas de teléfonos móviles son también llamados sistemas de telefonía celular.

La capacidad de una celda es definida por el número de unidades de transmisión/recepción, llamadas TRX, instaladas en su antena. La primera TRX maneja la señal y ofrece la capacidad hasta seis llamadas, por división de tiempo. Una TRX adicional puede típicamente manejar 7 u 8 llamadas, dependiendo de la señal adicional. No más de doce TRX pueden ser instaladas en una antena, es decir, la máxima capacidad de una celda está en el rango de 80 llamadas. Cuando hay mucho tráfico (por ejemplo, aeropuertos, centros de negocio de grandes ciudades) las celdas tienen que ser subdivididas dentro de varias celdas.

⁶ BTS de sus siglas en inglés: Base Transceiver Stations

1.2.7. BSC, MSC, y la Red Central

En la planeación de frecuencias, el operador tiene que localizar e instalar la llamada en la Estación de Controladores Base, BSCs⁷. Cada BTS tiene que ser conectado (en general vía cable) tal como un BSC, mientras un BSC opera varios BTS en paralelo.

Cada BSC es conectado al Centro de Servicio Móvil de Intercambio, MSC⁸. Los MSC son conectados unos con otros a través de la llamada Red Central. La planeación para la localización de BSC y MSC, la designación de la topología de la red, la optimización de las capacidades de enlace, ruteo, manejo fallido, etcétera, constituye la mayor tarea que un operador tiene que manejar. Con lo anterior notamos que la planeación de la red de telecomunicación es una tarea compleja.

1.2.8. Asignación de Canal, Ceder

Un teléfono móvil emite señales que permiten a la red ubicar donde está localizado éste en cualquier momento, el teléfono móvil es asignado a uno de los TRXs de la celda. Si el teléfono se mueve (por ejemplo, en un carro) la comunicación con su actual TRX puede llegar a ser pobre. El sistema monitorea la calidad de la recepción y puede decidir usar un TRX desde otra celda. Entonces se realiza un intercambio de celda y se cede un TRX.

El resultado es un modelo de predicción de interferencia el cual es llamado interferencia co-canal, el cual ocurre cuando dos TRXs transmiten en el mismo canal y esto es cuantificado. Puede también ser interferencia de frecuencias-

⁷ BSCs de sus siglas en inglés: Base Station controllers

⁸ MSC de sus siglas en inglés: Mobile Service Switching Center

adyacentes cuando dos TRXs operan sobre frecuencias que son adyacentes; es decir, un TRX opera sobre un canal i , el otro canal en $i+1$ ó $i-1$.

La realidad es todavía más complicada. Varios TRXs, no solamente dos, operan sobre las mismas frecuencias adyacentes y pueden interferir en cada uno al mismo tiempo.

1.2.9. Frecuencias separadas y bloqueadas

Si dos o más TRXs son instalados en la misma celda (sitio) hay restricciones de cómo se pueden aproximar sus frecuencias. Por ejemplo, si un TRX opera una frecuencia i , otro TRX al mismo tiempo no le es permitido operar sobre frecuencias $i-2, \dots, i+2$. Esta situación es llamada restricción *co-sitio de separación*. Las restricciones pueden ser muy estrictas si dos TRX no están solamente en un co-sitio, pero también sirven a la misma celda. Los requerimientos de separación pueden aplicarse también a TRXs que están muy próximas.

Además, regulaciones gubernamentales, acuerdos con operadores de regiones vecinas, requerimientos para fuerzas militares, etcétera, un operador no puede tener permiso para usar todo el espectro de frecuencias en cada locación. Esto significa que, para cada TRX, puede haber un conjunto llamado *frecuencias bloqueadas*.

1.2.10. Un primer modelo matemático: La gráfica de interferencia

Una asignación factible de frecuencias para TRX claramente satisface todas las restricciones de separación entonces ¿qué podría uno hacer en relación a la interferencia?

Un camino sobre una representación matemática de todas las restricciones técnicas, consiste en definir la gráfica de interferencia $G = (V, E)$ donde el conjunto V de vértices de la gráfica representa el conjunto de TRXs y el conjunto E de aristas representa la adyacencia entre estos TRX. Para cada arista $vw \in E$, dos valores de interferencia, denotados por $c^{co}(vw)$ y $c^{ad}(vw)$, están asociados; el número $c^{co}(vw)$ es la interferencia co-canal que ocurre cuando dos TRXs v y w operan en la misma frecuencia, mientras que $c^{ad}(vw)$ denota el valor de interferencia que aumenta cuando v y w operan sobre frecuencias adyacentes. En general se cumple que $c^{co}(vw) \geq c^{ad}(vw)$. Si una restricción de separación aplica a los vértices v y w entonces se permite asignar un número grande a las restricciones $c^{co}(vw)$ y $c^{ad}(vw)$.

2. MODELOS Y TÉCNICAS DE PROGRAMACION MATEMATICA PARA PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS

En esta sección se presentará el problema de Asignación de Frecuencias cuando éstas son Fijas, FCA⁹, es decir, modelos estáticos donde los conjuntos de antenas permanecen fijos en el tiempo.

2.1. Modelos y Aplicaciones

Los modelos encontrados en la literatura generalmente difieren en la selección de frecuencias para las antenas. El conjunto de frecuencias disponible difiere entre aplicaciones distintas, al igual que en las opciones para tratar la interferencia.

2.1.1. Modelación del Problema de Asignación de Frecuencias

La disponibilidad de las frecuencias del espectro radioeléctrico es regulada por los gobiernos nacionales y la Unión Internacional de Telecomunicaciones, ITU¹⁰. Las compañías de telefonía celular están autorizadas a usar una o más bandas de

⁹ FCA de sus siglas en inglés, Fixed Channel Assignment

¹⁰ ITU de sus siglas en inglés, International Telecommunication Union

frecuencia en regiones específicas del país. La banda de frecuencia $[f_{min}, f_{max}]$ dispone de alguna parte provista para la comunicación inalámbrica que es usualmente dividida en un conjunto de frecuencias, todo en la misma banda Δ de frecuencias. Por esta razón las frecuencias son etiquetadas del 1 a N , donde el valor N se define como: $(f_{max} - f_{min})/\Delta$. Las frecuencias disponibles son denotadas por $F = \{1, \dots, N\}$. Si más de una banda de frecuencia está disponible, cada banda tiene su propio conjunto de frecuencias numeradas. En el caso de dos bandas de frecuencias, éstas pueden ser numeradas de la siguiente forma: $F = \{1, \dots, N_1, N_2 + 1, \dots, N_3\}$, donde usualmente N_1 es menor que N_2 de tal forma que las dos bandas no tienen influencia entre ellas. Para una antena en particular no todas las frecuencias de F pueden estar disponibles. Por ejemplo, si una antena está muy cerca de la frontera de un país, o de las divisiones entre las ciudades ésta puede estar restringida en la disponibilidad de frecuencias. Por lo tanto, las frecuencias disponibles para una antena ν forman un subconjunto $F(\nu)$ de F .

La interferencia de frecuencias es medida en relación a la cantidad de ruido, o interferencia de radio, en la recepción final de la conexión. Generalmente el ruido se origina por otras señales de radiodifusión en la interferencia de frecuencias. En general, el nivel de la interferencia decrece considerablemente con la distancia entre frecuencias.

Las señales de ruido dependen no solamente de la selección de la frecuencia, sino también de la fuerza de la señal, la dirección en que es transmitida, el estado del ambiente y las condiciones del tiempo.

Por lo anterior es difícil obtener predicciones exactas de la señal de ruido que será recibida. Una primera simplificación es ignorar el ambiente y asumir una antena omni-direccional. Consideremos dos señales, una original y alguna otra señal transmitida en el mismo canal de frecuencia. Entonces la interferencia de la

segunda señal en el receptor de la primera señal son calculadas con la siguiente fórmula: P/d^{γ} , donde P es el poder de la interferencia transmitida, d es la distancia de disturbio del receptor, γ es un factor de desvanecimiento que depende de la frecuencia usada con valores entre 2 y 4. Por ejemplo, los 1800 MHz de banda de frecuencia se desvanecen más rápido que la banda de frecuencia de 900 MHz ambas usadas en redes GSM.

Puede haber más de un origen en el que se transmite la misma frecuencia y esto contribuye al total de ruido experimentado por el receptor. El hecho de que múltiples señales puedan perturbar la calidad de la comunicación es ignorado en la mayoría de los modelos donde sólo se mide la interferencia entre cada par de antenas. Por lo anterior tenemos una relación binaria: sólo dos conexiones o dos antenas están involucradas.

En la telefonía móvil y la radio/TV difusión, los receptores están separados dentro de cierta área. La aproximación normal de señales fuertes para todas las ubicaciones dentro del área es la siguiente:

- i) Una malla cuadriculada de tamaño determinada es diseñada para sobreponerse en el área. Los cuadrados de la malla son denominados píxeles.
- ii) Para cada píxel, los niveles de las señales recibidas generados por el transmisor, son determinados con modelos de propagación de microondas.
- iii) Para un transmisor A, y un transmisor interferente B, el ruido generado por B en cada píxel del área de servicio de A agrega un valor, el cual representa la interferencia de B sobre A.

Modelos de predicciones más simples fueron usados previamente. Se utilizó una malla de hexágonos como aproximación estándar, aquí los transmisores eran

ubicados en el centro de cada hexágono. El caso mejor conocido como Filadelfia¹¹ tiene esta estructura y el cual fue visto en el capítulo anterior. En el modelo básico de las mallas hexagonales la interferencia de las celdas está caracterizada por un co-canal de reuso a distancia d . La no interferencia ocurre si y sólo si los centros de dos celdas tienen una distancia mutua mayor o igual a d . En el caso en el que las distancias entre estas dos celdas sea menor que d , no se permite la asignación de la misma frecuencia para ambas celdas. Este caso básico de co-frecuencias es generalizado por el reemplazo de la distancia de reuso d por una serie de valores no crecientes d^0, \dots, d^k y sus correspondientes conjuntos prohibidos $T^0 \subseteq \dots \subseteq T^k$. Por lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$T_{uv} = T^{j-1} \text{ donde } d^j \leq d_{vw} < d^{j-1}, j \in \{1, \dots, k\}$$

Donde d_{vw} es la distancia entre los centros de las celdas v y w , T_{uv} denota el conjunto de diferencias prohibidas entre las frecuencias asignadas a las celdas v y w , es decir, $\{f_v - f_w\} \notin T_{uv}$. En el Capítulo anterior en lugar de d_{vw} se manejaba el valor c_i tal que i indicaba que todos los vértices a distancia i sus frecuencias tenían que estar separados en al menos el valor de c_i para que no existiera interferencia entre los ellos.

Un aspecto importante es el tráfico cuando se consideran dos-direcciones. Excepto por la radio y la TV todo el tráfico de radiodifusión es bidireccional, y uno necesita dos frecuencias, uno para cada dirección. Por lo general en la literatura el segundo canal es siempre ignorado, con la notable excepción en las aplicaciones militares. En la mayoría de las aplicaciones dos bandas de N frecuencias están disponibles: uno con las frecuencias $\{1, \dots, N\}$, y otro con las frecuencias $\{s + 1, \dots, s + N\}$ donde $s \gg N$. De esta manera, la conexión contraria usa un canal el cual es cambiado s frecuencias arriba. La selección de s previene cualquier interferencia en

¹¹ En el Capítulo 4 se presentará el problema de Filadelfia

las frecuencias anteriores con las frecuencias siguientes. Además, la simetría de la solución de las frecuencias anteriores, con las frecuencias siguientes (s frecuencias más), van al mismo patrón de interferencia que de las frecuencias anteriores. Si estas condiciones no se satisfacen, las dos-direcciones de tráfico poseen un problema, hace que la interferencia no necesite ser simétrica.

A continuación se muestra un ejemplo donde las condiciones mencionadas anteriormente no son suficientes para la interferencia simétrica. Considere la posición geográfica de los transmisores en la Figura 6. Suponga que la pareja transmisora (a, b) transmite frecuencias f de a a b y $(f + s)$ de b a a , y otra pareja transmisora (c, d) transmite frecuencias g de c a d y $(g + s)$ de d a c donde f y g interfieren, y $(f + s)$ y $(g + s)$ interfieren. Ahora la fuerza de la señal de g a a es mucho más alta que la fuerza de la señal de $(g + s)$ a b , entonces los receptores tienen diferentes distancias a c y d . Pero este aspecto no es tomado en cuenta.

En las redes de telefonía móvil, la interferencia retrograda no es empleada por otras razones suplementarias: la ubicación de los transmisores (los usuarios móviles) no es estática ya que varía a través del tiempo, lo cual hace casi imposible dar una predicción exacta de la interferencia a la recepción final (estación base).

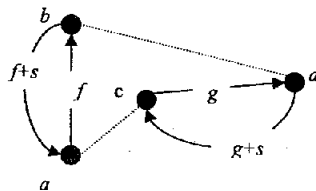


Figura 6: Interferencia Simétrica

En particular para las redes de GSM, la técnica de la frecuencia esperada ha sido introducida para reducir la influencia de la interferencia. La frecuencia esperada permite al transmisor cambiar la frecuencia de la señal de acuerdo a la secuencia de la asignación. Para el cambio rápido de la frecuencia de la transmisión, el nivel de interferencia total puede ser reducido [Bj 00, Gm 86, Tf 00].

2.1.1.1. Telefonía móvil, una aplicación

- En esta aplicación uno de los puntos finales de la conexión es una antena fija y el otro punto final es un teléfono móvil.
- Cada antena cubre una cierta área, donde esta puede tomar señales de teléfonos móviles.
- Cada antena cubre una región específica (celda) y puede servir a varias unidades móviles simultáneamente.
- En particular, en TDMA¹², cada frecuencia seleccionada puede ser usada para servir a *n* diferentes unidades móviles; además, varias frecuencias pueden ser asignadas a la misma antena para el uso de transmisores múltiples/unidades receptoras, TRXs, así que el número de diferentes unidades móviles que son servidas puede ser muy grande. Más antenas son entonces montadas en el mismo soporte físico (sitio) para cubrir un número de regiones adyacentes.
- Las frecuencias asignadas a cada antena podrían satisfacer requerimientos que dependen de:
 - Disponibilidad, especialmente en los bordes de las ciudades;
 - Nivel de interferencia;
 - Requerimientos tecnológicos; y
 - El tamaño del área con interferencia inaceptable.

¹² TDMA de sus siglas en inglés, *Time Division Multiple Access*, División de Tiempo de Acceso Múltiple

Restricción de separación co-celdas. Las frecuencias asignadas a una misma antena v podrían diferir en por lo menos $\delta(u, v)$ unidades, generalmente en este tipo de aplicaciones se toma $\delta(u, v) = 3$.

Restricción de separación co-sitio. Si u y v son antenas co-sitio, para este tipo de aplicación entonces se toma $\delta(u, v) = 2$.

Restricción de interferencia. Se refiere a la interferencia "suficiente", a la separación adicional que puede ser requerida entre dos pares de antenas que no estén en el mismo sitio. Generalmente, las parejas u y v podrían tener diferentes frecuencias, es decir, $\delta(u, v) = 1$, o frecuencias a distancia de al menos 2.

2.1.1.2. Filadelfia, el reto.

El ejemplo más utilizado es el Problema Filadelfia el cual está caracterizado por 21 hexágonos indicando las celdas de una red de teléfono celular de la ciudad de Filadelfia. A este problema se le han dado costos y restricciones teóricas para "provocar" situaciones extremas que dificultan la ejecución de algoritmos. Este problema es muy importante ya que todo algoritmo de asignación de frecuencias debe ser probado con Filadelfia y los resultados obtenidos comparados con las asignaciones óptimas de este. En el Capítulo 3 se verá con detalle este problema, a continuación la Figura 7 muestra a la ciudad de Filadelfia representada con hexágonos.

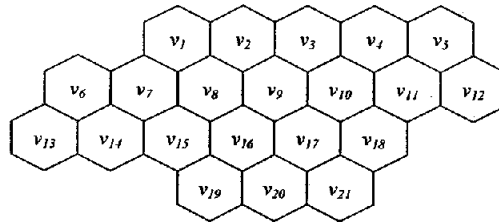


Figura 7: Ciudad de Filadelfia representada como una malla de hexágonos

2.1.1.3. Otras aplicaciones

El problema de asignación de frecuencias no solamente es de interés para las compañías de telefonía celular muestra de ello son las aplicaciones que se describen a continuación:

Movilidad Bell. La empresa telefónica Bell ha hecho uso del problema de asignación de frecuencias para dos áreas urbanas en Canadá y estos ejemplos son descritos en "Frequency assignment benchmarks Canadian urban areas".

Radio y Televisión. Estas aplicaciones esencialmente se parecen a los ejemplos de telefonía móvil. La mayor diferencia se encuentra en las distancias de frecuencia usadas. Resultados de estos ejemplos son presentados por Mannino y Sassano [Mn&Ss 01].

Aplicaciones militares. El uso de teléfonos militares en campo (o teléfonos por aire) se pueden ver como problemas dinámicos de asignación de frecuencias, en tiempo y lugar. Estos problemas tienen la propiedad de que cada conexión consiste de dos teléfonos móviles. Por lo tanto a cada conexión podríamos asignar dos frecuencias a una distancia fija para cada una, uno para cada dirección de

comunicación. Por esto, todas las frecuencias son dadas en pares con esta distancia fija entre ellos.

Comunicación satelital. Un problema de planeación de frecuencias en la comunicación satelital es discutido por Thuve [Tv 81]. En esta aplicación, tanto los transmisores como los receptores son terminales terrestres. Ellos se comunican con la ayuda de uno o más satélites. Cada señal es primero transmitida vía un enlace satelital y después transmitido por el satélite vía *downlink* a la terminal receptora. La frecuencia *uplink* y *downlink* son separadas a una distancia fija, mucho más grande que el ancho de la banda, lo cual implica que se tengan que asignar frecuencias al *uplink*. Un conjunto de frecuencias consecutivas tienen que ser asignadas a cada transmisor. Para evitar interferencia, cada frecuencia debe ser usada una sola vez.

2.1.2. Formulación y Clasificación

El problema básico de asignación de frecuencias consiste en restricciones de asignación, usualmente paquetes de restricciones, y una función objetivo. Este tipo de problemas tienen las siguientes características:

- Los modelos asignación de frecuencias mencionados generalmente tienen un conjunto de frecuencias predefinidos o frecuencias, denotados por F .
- Para cada antena o conexión v , un subconjunto $F(v) \subseteq F$ de frecuencias disponibles es especificado, para el cual un subconjunto $m(v)$ de frecuencias deberían ser asignadas a v .
- Generalmente la multiplicidad es igual a uno.

La multiplicidad en aplicaciones de telefonía móvil significa que una antena que representa a una celda puede contener múltiples TRXs. Cada TRX podría ser

asignado a una frecuencia. De esta manera, una antena es asignada a tantas frecuencias como TRXs existan. Desde una perspectiva de modelación esto es fácil para reducir las multiplicidades a uno, viendo a cada TRX en una antena como una unidad separada. De cualquier modo, el tamaño de un problema puede incrementarse sustancialmente y los métodos de solución pueden no ser capaces de usar una estructura especial, inducida por el TRXs. Hay que tomar en cuenta que un TRX es una antena que tiene altas restricciones de interferencia.

Algunas veces las frecuencias asignadas a una antena son producto de la unión de conjuntos pertenecientes a una familia de subconjuntos predefinidos en la banda seleccionada. Estos subconjuntos son llamados bloques y una asignación de frecuencias es obtenida al asignar a cada antena uno o más de estos bloques. De esta manera una solución es llamada asignación de bloque.

2.2. Representación Gráfica Extendida

Una representación conveniente de la interferencia está dada por una gráfica de interferencia o la gráfica con restricciones $G = (V, E)$, donde:

- Cada antena es representada por un vértice $v \in V$.
- Dos vértices v y w para los cuales la correspondiente señal puede interferir para al menos un par de frecuencias transmitidas, son conectados por una arista $\{v, w\} \in E$.
- Las múltiples frecuencias son asignadas a antenas individuales que pueden ser representadas por una división de los vértices de la antena dentro de un número de copias requeridas. Claramente, esto puede incrementar el tamaño de la interferencia en la gráfica, y por lo tanto en algunos métodos se prefieren trabajar con la multiplicidad sobre los vértices de la antena directamente.

A esta gráfica extendida se le conoce como la gráfica de interferencia particionada. Hay que mencionar que un lazo en este modelo significa que los requerimientos de distancia de TRXs deben estar sobre la misma antena.

Para cada par de frecuencias $f \in F(v)$ y $g \in F(w)$ se penaliza la elección con una medida que depende del nivel de interferencia. Esta penalización es denotada por $p_{vw}(f, g)$ o $p_{vw, fg}$. En la mayoría de los modelos esta penalización tiene varias estructuras específicas: esto depende sólo de v , w y la distancia entre las frecuencias f y g se describe como $|f - g|$. A los Problemas de Asignación de Frecuencias con esta estructura serán llamados de ahora en adelante como distancia FAPs. Para este tipo de estructuras dos variantes ocurren frecuentemente en la literatura. En la primera variante, una distancia d_{vw} es introducida tal que se incurre en la penalización p_{vw} si la selección de f y g es tal que $|f - g| < d_{vw}$. Notemos que la selección de penalizaciones altas p_{vw} hace que los requerimientos de la distancia puedan volverse restricciones duras o restricciones difíciles de satisfacer. En la segunda variante, sólo se incurre en penalizaciones co-canal p_0 (si $|f - g| = 0$) y un canal adyacente p_1 (si $|f - g| = 1$), donde $p_0 > p_1 \geq 0$.

En varios estudios las matrices de penalización no son usadas a detalle, pero se permite un valor umbral p_{max} de interferencia. El valor umbral corresponde a una señal de ruido aceptable. Esto reduce las restricciones de interferencia para prohibir ciertas combinaciones de frecuencias. Más aún el problema se reduce a un Problema de Satisfacción de Restricciones Binario, CSP¹³. En el caso de que $p_{vw}(f, g)$ sólo dependa de la distancia $|f - g|$ nos lleva a combinar un valor umbral y un conjunto de distancias prohibidas T_{vw} . Roberts [Ro 91] menciona que este problema es equivalente al problema de la T - coloración, donde los colores son números y ciertas diferencias entre los números son prohibidas para vértices adyacentes (como se vió anteriormente). Generalmente, pero no necesariamente,

¹³ CSP de sus siglas en inglés, *Constraint Satisfaction Problem*

las distancias prohibidas forman un conjunto de números enteros positivos consecutivos $\{0, 1, \dots, d_{vw} - 1\}$. Nos referiremos al problema como distancia FAP.

La formulación en programación matemática del Problema de Asignación de Frecuencias consiste en un conjunto de variables, restricciones, y una función objetivo. Una elección directa de las variables es usar variables binarias que representen la elección de la frecuencia para un cierto vértice. Para cada vértice v y una frecuencia disponible $f \in F(v)$, se define:

$$x_{vf} = \begin{cases} 1 & \text{si la frecuencia } f \in F(v) \text{ es} \\ & \text{asignada al vértice } v \in V; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este tipo de variables son usadas en problemas de Programación Lineal Entera. Este problema se puede resolver con métodos de Ramificación y Cortes. Una desventaja es el número de las variables. Formulaciones más simples se obtienen usando variables f_v para la elección de frecuencias para el vértice $v \in V$. Este tipo de formulación (simple) se dirige a la Programación No Lineal la cual raramente es usada. Más aún, se tiene la desventaja de que no solamente una frecuencia puede ser asignada a un vértice; por lo tanto, la gráfica particionada o dividida es esencial.

Los requerimientos de que $m(v)$ frecuencias sean asignadas al vértice v es modelado con las siguientes restricciones, a las que llamaremos restricciones de multiplicidad:

$$\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V \quad (1)$$

Las matrices de penalización p_{vf} son usadas en combinación con un valor umbral p_{max} . Para parejas de frecuencias con un excedente de penalización este umbral es prohibido. Esto es modelado por el siguiente paquete de restricciones:

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max} \quad (2)$$

Cuando no hay función objetivo a ser optimizada, se obtiene así el llamado Problema de Asignación de Frecuencias Factibles (F-FAP). Aquí, simplemente encontraremos una solución factible para el FAP, es decir, una solución que satisfaga las restricciones (1) y (2). Y como su nombre lo dice el problema con la restricción (1) garantiza que cada vértice tenga las frecuencias requeridas y la restricción (2) garantiza la no interferencia entre frecuencias.

Si no existe una solución factible para F-FAP, podemos tratar de asignar tantas frecuencias como sea posible o minimizar la probabilidad de que una llamada sea bloqueada. Otros objetivos tratan la optimización de costos operativos minimizando el número de frecuencias usadas o la minimización de la amplitud usada (la frecuencia más alta menos la más baja). Todos estos modelos usan, junto a las restricciones de multiplicidad, paquetes de restricciones. En el caso de las matrices de penalización estas son usadas directamente, se intenta entonces minimizar el total de la penalización incurrida. En este modelo el paquete de restricciones es reemplazado por una versión que incorpora la penalización para ciertas elecciones de combinaciones de frecuencias.

2.2.1. Problemas del Máximo Servicio y Mínima Asignación de Frecuencias Bloqueadas, Max - FAP

Si las soluciones factibles del F-FAP son difíciles de encontrar, podemos decidir encontrar una solución parcial que asigna frecuencias como sea posible a los vértices. Este problema es conocido como el Servicio Máximo FAP o Max-FAP. Básicamente, este problema es un F-FAP extendido con el objetivo de asignar tantas frecuencias como sea posible. Para modelar el problema introduciremos los números $n(v)$ ($v \in V$), los cuales denotan los números de frecuencias asignadas al vértice $v \in V$.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{v \in V} n(v) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{f \in F(v)} x_{vf} = n(v) \quad \forall v \in V \\
 & n(v) \leq m(v) \quad \forall v \in V \\
 & x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{\max} \\
 & x_{vf} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, f \in F(v) \\
 & n(v) \in Z_+ \quad \forall v \in V
 \end{aligned} \tag{3}$$

En contraste a la formulación de F-FAP, las restricciones de multiplicidad en la formulación (1) no necesitan satisfacer la igualdad. El objetivo de la formulación (3) asegura que tantas frecuencias como sean posibles son asignadas. Jaumard [Jau 98] observó que las soluciones óptimas del Max-FAP tienden a asignar algunas frecuencias a algunos vértices "difíciles", mientras más de otros vértices obtienen toda la frecuencia demandada. Tales soluciones no son deseables, por lo que se incurre extremadamente en el escaso servicio de algunas áreas. Para hacer frente a este problema, se introduce una cota mínima $l(v)$ para el número de frecuencias a ser asignadas a cada uno de los vértices v para así obtener la garantía de servicio mínimo: $l(v) \leq n(v)$, $\forall v \in V$. Un camino más realista para

hacer frente a este problema es calcular las probabilidades actuales del bloque como una función del número de frecuencias asignadas $n(v)$. Esta aproximación ha sido modelada independientemente por Mathar y Mattfeldt [Mth&Mtt 93], y Chang y Kim [Ch&Kim 97], quienes usan una combinación de probabilidades cargadas en la función objetivo. Este problema es conocido como el Problema de Asignación de la Frecuencia Mínima Bloqueada (MB-FAP).

Ejemplo

Cierta compañía de teléfonos necesita establecer las frecuencias que utilizará en seis regiones, la gráfica de la Figura 8 representa tales regiones.

Las frecuencias para cada vértice se definen:

$$F(a) = \{0, 4, 8, 10, 12\};$$

$$F(b) = \{4, 8, 10, 12, 14\};$$

$$F(c) = \{0, 2, 6, 8, 12\};$$

$$F(d) = \{3, 7, 9, 10, 11\};$$

$$F(e) = \{3, 7, 9, 10, 11\};$$

$$F(f) = \{3, 7, 9, 10, 11\}.$$

$$F = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\}$$

Los conjuntos de distancias prohibidas para cada par de vértices son los siguientes:

$$T_{ab} = T_{bc} = T_{ac} = \{0, 1\}$$

$$T_{ad} = T_{be} = T_{cf} = \{0, 2\}$$

$$T_{de} = T_{df} = T_{ef} = \{1, 2\}$$

$$T_{bf} = T_{ae} = T_{cd} = \{0\}$$

$$T_{ww} = \{0, 1\} \forall w \in V$$

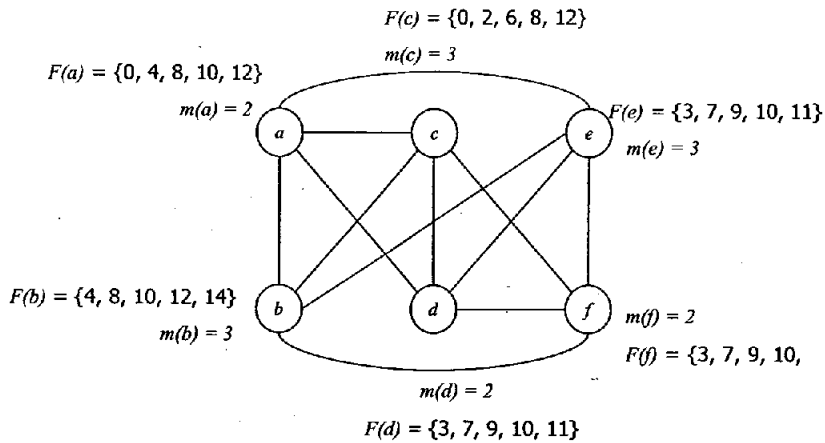


Figura 8: Ejemplo

Planteamiento

Definición de variables

$n(v)$ = Número de frecuencias asignadas a v , $v \in \{a, b, c, d, e, f\}$.

$x_{vf} = 1$ si la frecuencia f es asignada al vértice v , $v \in V, f \in F(v)$

$x_{vf} = 0$ en otro caso.

$n(v) \in \mathbb{Z}_+$, $v \in \{a, b, c, d, e, f\}$.

$x_{vf} \in \{0, 1\}$, $v \in \{a, b, c, d, e, f\}, f \in F(v)$.

$$\text{Max} = n(a) + n(b) + n(c) + n(d) + n(e) + n(f)$$

s.a:

Restricciones del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = n(v) \quad \forall v \in V :$

$$x_{a0}+x_{a4}+x_{a8}+x_{a10}+x_{a12}=n(a);$$

$$x_{b4}+x_{b8}+x_{b10}+x_{b12}+x_{b14}=n(b);$$

$$x_{c0}+x_{c2}+x_{c6}+x_{c8}+x_{c12}=n(c);$$

$$x_{d3}+x_{d7}+x_{d9}+x_{d10}+x_{d11}=n(d);$$

$$x_{e3}+x_{e7}+x_{e9}+x_{e10}+x_{e11}=n(e);$$

$$x_{f3}+x_{f7}+x_{f9}+x_{f10}+x_{f11}=n(f).$$

La primera restricción indica que para el vértice a se le van a asignar $n(a)$ frecuencias pero siempre y cuando estas estén en el conjunto de frecuencias definidas.

Restricciones del tipo $n(v) \leq m(v)$:

$$n(a) \leq 2;$$

$$n(c) \leq 3;$$

$$n(e) \leq 3;$$

$$n(b) \leq 3;$$

$$n(d) \leq 2;$$

$$n(f) \leq 2.$$

Este tipo de restricciones dice que del conjunto de frecuencias que se le puedan asignar a algún vértice no deben sobrepasar la demanda establecida.

Restricciones para los vértices a y b , $T_{ab} = \{0,1\}$:

$$x_{a4}+x_{b4} \leq 1;$$

$$x_{a10}+x_{b10} \leq 1;$$

$$x_{a8}+x_{b8} \leq 1;$$

$$x_{a12}+x_{b12} \leq 1.$$

Las restricciones anteriores se refieren a que a los vértices a y b no se le pueden asignar frecuencias iguales o consecutivas, esto es, para ellos dos a lo más a uno se le puede asignar la frecuencia que tienen en común o la que sea consecutiva pero no a los dos. Esto aplica igual para las restricciones que se muestran a continuación:

Restricciones para los vértices a y c , $T_{ac} = \{0,1\}$:

$$x_{a8}+x_{c8} \leq 1;$$

$$x_{a0}+x_{c0} \leq 1;$$

$$x_{a12}+x_{c12} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices a y d , $T_{ad} = \{0,2\}$:

$$x_{a8} + x_{d10} \leq 1;$$

$$x_{a10} + x_{d10} \leq 1;$$

$$x_{a12} + x_{d10} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices a y e , $T_{ae} = \{0\}$:

$$x_{a10} + x_{e10} \leq 1$$

Restricciones para los vértices b y c , $T_{bc} = \{0,1\}$:

$$x_{b8} + x_{c8} \leq 1;$$

$$x_{b12} + x_{c12} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices b y e , $T_{be} = \{0,2\}$:

$$x_{b8} + x_{e10} \leq 1;$$

$$x_{b10} + x_{e10} \leq 1;$$

$$x_{b12} + x_{e10} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices b y f , $T_{bf} = \{0\}$:

$$x_{b10} + x_{f10} \leq 1$$

Restricciones para los vértices c y f , $T_{cf} = \{0,2\}$:

$$x_{c8} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{c12} + x_{f10} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices d y e , $T_{de} = \{1,2\}$:

$$x_{d7} + x_{e9} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{e10} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{e7} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{e11} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{e9} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{e11} \leq 1;$$

$$x_{d11} + x_{e9} \leq 1;$$

$$x_{d11} + x_{e10} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices d y f , $T_{df} = \{1,2\}$:

$$x_{d7} + x_{f9} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{f9} \leq 1;$$

$$x_{d11} + x_{f9} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{f7} \leq 1;$$

$$x_{d9} + x_{f11} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{f11} \leq 1;$$

$$x_{d11} + x_{f10} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices e y f , $T_{ef} = \{1,2\}$:

$$x_{e7} + x_{f9} \leq 1;$$

$$x_{e9} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{e10} + x_{f9} \leq 1;$$

$$x_{e11} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{e9} + x_{f7} \leq 1;$$

$$x_{e9} + x_{f11} \leq 1;$$

$$x_{e10} + x_{f11} \leq 1;$$

$$x_{e11} + x_{f9} \leq 1.$$

Restricciones para los vértices $v \in V, T_{vv} = \{0,1\}$:

$$x_{d9} + x_{d10} \leq 1;$$

$$x_{e9} + x_{e10} \leq 1;$$

$$x_{f9} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{d11} \leq 1;$$

$$x_{e10} + x_{e11} \leq 1;$$

$$x_{f10} + x_{f11} \leq 1;$$

$$n(v) \in Z^+, v = a, b, c, d, e, f.$$

$$x_{vf} \in \{0, 1\}, v = a, b, c, d, e, f.$$

Solución

Este PPL resuelto en LINGO 6.0 proporciona los siguientes resultados:

$$x_{a0} = x_{a4} = x_{b10} = x_{b12} = x_{b14} = x_{c2} = x_{c6} = x_{c8} = x_{d3} = x_{d7} = 1$$

$$x_{e3} = x_{e7} = x_{e11} = x_{f3} = x_{f11} = 1$$

$$x_{a8} = x_{a10} = x_{a12} = x_{b4} = x_{b8} = x_{c0} = x_{c12} = x_{d9} = x_{d10} = x_{d11} = 0$$

$$x_{e9} = x_{e10} = x_{f7} = x_{f9} = x_{f10} = 0$$

$$n(a) = 1;$$

$$n(b) = 3;$$

$$n(c) = 3;$$

$$n(d) = 2;$$

$$n(e) = 3;$$

$$n(f) = 2.$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$a = \{0, 4\}$$

$$b = \{10, 12, 14\}$$

$$c = \{2, 6, 8\}$$

$$d = \{3, 7\}$$

$$e = \{3, 7, 11\}$$

$$f = \{3, 11\}.$$

En la Figura 9 podemos observar que a los vértices a y b se les asignaron las frecuencias 0, 4 y 10, 12, 14 respectivamente. Las frecuencias asignadas al vértice a tenían que tener al menos una separación de 1 cosa que se respetó en la

asignación, al igual que la asignación para b , y entre las frecuencias asignadas para a y b tenía que haber también una separación de 1 lo que se respeta en la asignación final.

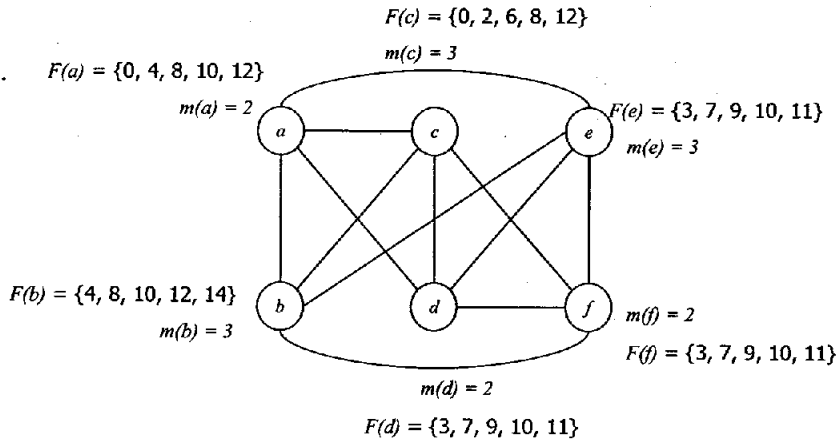


Figura 9: Asignación de Frecuencias de los vértices

La Figura 10 muestra la pantalla de salida de la generación de la solución en LINGO 6.0.

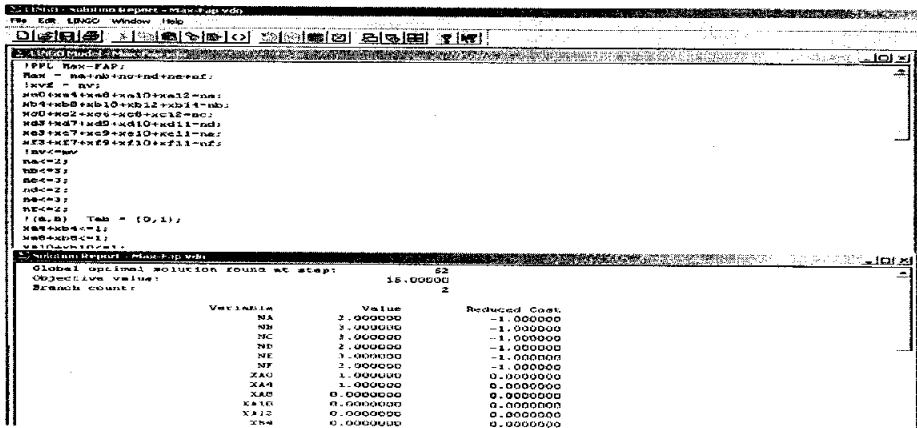


Figura 10: Solución en Lingo 6.0, Max FAP

2.2.2. El FAP de Orden Mínimo, MO - FAP

Si las soluciones factibles del F-FAP existen, entonces podemos utilizar la que cueste menos. Un primer intento para hacerlo, penaliza el uso de las frecuencias. Este objetivo regresa a la introducción de los teléfonos móviles a principios de los 70's, cuando las frecuencias eran vendidas por unidades y eran demasiado caras. El modelo es llamado FAP de Orden Mínimo o MO-FAP.

Para formular el objetivo, necesitamos variables adicionales que denotan si una frecuencia ha sido usada o no.

$$y_f = \begin{cases} 1 & \text{si la frecuencia } f \in F(v) \text{ es usada,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el MO-FAP es formulado como sigue:

$$\min \sum_{f \in F} y_f$$

s.a.

$$\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V$$

$$x_{vf} \leq y_f \quad \forall v \in V, f \in F(v)$$

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{\max}$$

$$x_{vf} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, f \in F(v)$$

$$y_f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in F$$

Al introducir $x_{vf} \leq y_f$ forzamos a que la variable y sea 1 en el caso de que la correspondiente frecuencia sea usada. La función objetivo determina el número de frecuencias usadas. Las restricciones del tipo $x_{vf} \leq y_f$ representan las restricciones sobre los vértices: usando el complemento de las variables y tenemos $x_{vf} + y_f \leq 1$.

La distancia MO-FAP se reduce al problema estándar de coloración de vértices si todas las distancias son iguales a 1 y todos los vértices del dominio están en el mismo conjunto de enteros consecutivos.

Ejemplo

Tomemos el ejemplo planteado anteriormente y que se muestra gráficamente en la Figura 8 de la página 36.

Planteamiento

Definición de variables

$m(v)$ = Número de frecuencias asignadas a v , $v = a, b, c, d, e, f$.

$x_{vf} = 1$ si la frecuencia f es asignada al vértice v , $v \in V, f \in F(v)$ ó 0 en otro caso.

$y_f = 1$ si la frecuencia f es usada, $f \in F(v)$ ó 0 en otro caso

$x_{vf} \in \{0, 1\}$, $v = a, b, c, d, e, f, f \in F(v)$.

$y_f \in \{0, 1\}$, $\forall f \in F(v)$.

$$\text{Min} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14}$$

s.a:

Restricciones del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v)$:

$$x_{a0} + x_{a4} + x_{a8} + x_{a10} + x_{a12} = 2;$$

$$x_{b4} + x_{b8} + x_{b10} + x_{b12} + x_{b14} = 3;$$

$$x_{c0} + x_{c2} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c12} = 3;$$

$$x_{d3} + x_{d7} + x_{d9} + x_{d10} + x_{d11} = 2;$$

$$x_{e3} + x_{e7} + x_{e9} + x_{e10} + x_{e11} = 3;$$

$$x_{f3} + x_{f7} + x_{f9} + x_{f10} + x_{f11} = 2.$$

Restricciones para los vértices a y b , $T_{ab} = \{0,1\}$:

$$x_{a4} + x_{b4} \leq 1;$$

$$x_{a10} + x_{b10} \leq 1;$$

$$x_{a8} + x_{b8} \leq 1;$$

$$x_{a12} + x_{b12} \leq 1.$$

Al igual que en la sección anterior se manejan restricciones del tipo:

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{\max} \text{ por lo que ya no}$$

las describiremos pero se tomaran en cuenta en la corrida de LINGO 6.0.

Restricciones del tipo $x_{vf} \leq y_{fi}$, entonces $x_{vf} - y_{fi} \leq 0$:

Vértice a

$$x_{a0} - y_0 \leq 0;$$

$$x_{a4} - y_4 \leq 0;$$

$$x_{a8} - y_8 \leq 0;$$

$$x_{a10} - y_{10} \leq 0;$$

$$x_{a12} - y_{12} \leq 0.$$

Vértice b

$$x_{b4} - y_4 \leq 0;$$

$$x_{b8} - y_8 \leq 0;$$

$$x_{b10} - y_{10} \leq 0;$$

$$x_{b12} - y_{12} \leq 0;$$

$$x_{b14} - y_{14} \leq 0.$$

Vértice c

$$x_{c0} - y_0 \leq 0;$$

$$x_{c2} - y_2 \leq 0;$$

$$x_{c6} - y_6 \leq 0;$$

$$x_{c8} - y_8 \leq 0;$$

$$x_{c12} - y_{12} \leq 0.$$

Vértice d

$$x_{d3} - y_3 \leq 0;$$

$$x_{d7} - y_7 \leq 0;$$

$$x_{d9} - y_9 \leq 0;$$

$$x_{d10} - y_{10} \leq 0;$$

$$x_{d11} - y_{11} \leq 0.$$

Vértice *e*

$$x_{e3} - y_3 \leq 0;$$

$$x_{e10} - y_{10} \leq 0;$$

$$x_{e7} - y_7 \leq 0;$$

$$x_{e11} - y_{11} \leq 0.$$

$$x_{e9} - y_9 \leq 0;$$

Vértice *f*

$$x_{f3} - y_3 \leq 0;$$

$$x_{f10} - y_{10} \leq 0;$$

$$x_{f7} - y_7 \leq 0;$$

$$x_{f11} - y_{11} \leq 0.$$

$$x_{f9} - y_9 \leq 0;$$

$$x_{vf} \in \{0, 1\}, v = a, b, c, d, e, f; f \in F(v).$$

$$y_f \in \{0, 1\}, \forall f \in F(v).$$

Solución

$$x_{a0} = x_{a12} = x_{b10} = x_{b14} = x_{b4} = x_{c2} = x_{c6} = x_{c8} = x_{d3} = x_{d7} = 1$$

$$x_{e11} = x_{e3} = x_{e7} = x_{f3} = x_{f7} = 1$$

$$x_{a10} = x_{a4} = x_{a8} = x_{b12} = x_{b8} = x_{c0} = x_{c12} = x_{d10} = x_{d11} = x_{d9} = 0$$

$$x_{e10} = x_{e9} = x_{f10} = x_{f11} = x_{f9} = 0$$

$$y_0 = y_{10} = y_{11} = y_{12} = y_{14} = y_2 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = y_8 = 1$$

$$y_1 = y_{13} = y_5 = y_9 = 0$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$a = \{0, 12\}$$

$$d = \{3, 7\}$$

$$b = \{4, 10, 14\}$$

$$e = \{3, 7, 11\}$$

$$c = \{2, 6, 8\}$$

$$f = \{3, 11\}$$

La Figura 11 muestra las frecuencias asignadas a cada vértice, resultado obtenido al aplicar LINGO 6.0.

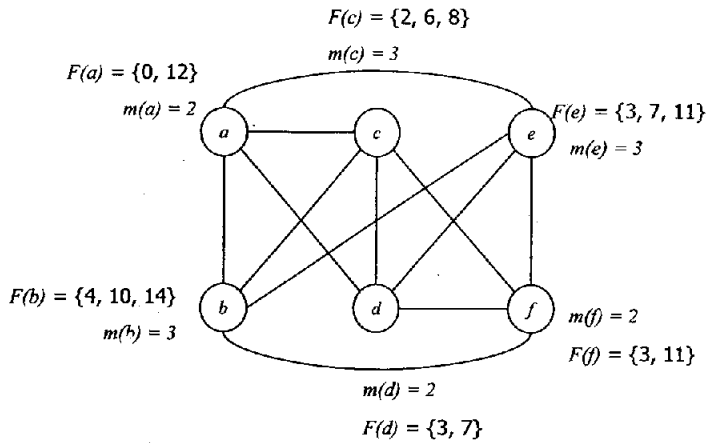


Figura 11: Asignación de Frecuencias de los vértices

La Figura 12 muestra una parte del resultado obtenido con LINGO 6.0 así como parte de la formulación del problema.

```

LINGO - Solution Report - Mo-Fap.vdi
File Edit LINGO Window Help
[Paste] [Copy] [Print] [Find] [Solve] [Quit] [Help] [Undo] [Redo] [Zoom] [Print] [Close] [Maximize] [Minimize] [Refresh] [Print] [Close] [Maximize] [Minimize] [Refresh]
LINGO Solution Report - Mo-Fap.vdi
*PPL Mo-FAP:
Min = y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9+y10+y11+y12+y13+y14;
!xvC = mC;
x00*x01+x08*x09+x10*x12=2;
x01*x02+x08*x09+x12*x14=3;
x00*x02+x08*x09+x12*x14=3;
x03*x07+x09*x10+x11=2;
x03*x07+x09*x10+x11=3;
x03*x07+x09*x10+x11=2;
!(a,b) Tab = (0,1);
x04*x04=1;
x06*x06=1;
x010*x010=1;
x012*x012=1;
!(a,c) Tab = (0,1);
x08*x08=1;
x00*x00=1;
x012*x012=1;
* * * * *
Solution Report - Mo-Fap.vdi
Global optimal solution found at step: 158
Objective value: 10.00000
Branch count: 16

Variable Value Reduced Cost
Y1 0.000000 1.000000
Y2 1.000000 1.000000
Y3 1.000000 1.000000
Y4 1.000000 1.000000
Y5 0.000000 1.000000
Y6 1.000000 1.000000
Y7 1.000000 1.000000
Y8 1.000000 1.000000
Y9 0.000000 1.000000
Y10 1.000000 1.000000
Y11 1.000000 1.000000
Y12 1.000000 1.000000
Y13 0.000000 1.000000

```

Figura 12: Solución en Lingo 6.0, Mo FAP

2.2.3. La Amplitud Mínima del Problema de la Asignación de Frecuencias, MS - FAP

En la Amplitud Mínima del Problema de la Asignación de Frecuencias (MS-FAP), se propone con el supuesto de pagar por el conjunto repleto de frecuencias entre el más alto y el más bajo usado. Esto es, la diferencia entre el máximo y el mínimo de la frecuencia usada, la amplitud, determina el costo y es lo que se quiere minimizar. Para modelar este problema se introducen dos nuevas variables enteras, comparadas a MO-FAP, el cual denota la frecuencia más alta usada z_{max} y la frecuencia más pequeña usada z_{min} . El MS-FAP entonces se plantea como:

$$\begin{aligned}
 & \min z_{max} - z_{min} \\
 & st \\
 & \sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V \\
 & x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max} \\
 & z_{max} \geq fy_f \quad \forall f \in F \\
 & z_{min} \leq fy_f + f_{max}(1 - y_f) \quad \forall f \in F \\
 & x_{vf} \leq y_f \quad \forall v \in V, f \in F(v) \\
 & x_{vf} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, f \in F(v) \\
 & y_f \in \{0,1\} \quad \forall f \in F \\
 & z_{min}, z_{max} \in Z_+
 \end{aligned}$$

donde $f_{max} = \max_{f \in D} f$ es la frecuencia máxima obtenida. Las restricciones $z_{max} \geq fy_f$ y $z_{min} \leq fy_f + f_{max}(1 - y_f)$ garantizan que estas variables están en el conjunto de valores correctos. Note que el segundo término en el lado derecho de la restricción $z_{min} \leq fy_f + f_{max}(1 - y_f)$ es para el desuso de las frecuencias en F que pertenecen a z_{min} .

Una formulación alternativa fue presentada por Giortzis y Turner [Gtz&Turn 97] quienes introducen variables binarias en lugar de z_{max} y z_{min} . Junto con las restricciones estándares (1) y (2) las nuevas variables introducen restricciones adicionales al conjunto de ellas con los valores de la derecha.

$$u_f = \begin{cases} 1 & \text{si la frecuencia } f \in F \text{ es usada y} \\ & \text{de las más altas} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$l_f = \begin{cases} 1 & \text{si la frecuencia } f \in F \text{ es usada y} \\ & \text{de las más bajas} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con estas variables, MS-FAPS se presenta como:

$$\min \sum_{f \in F} f u_f - \sum_{f \in F} f l_f$$

s.a.

$$\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V$$

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w): p_{vw}(f, g) > p_{max}$$

$$\sum_{f \in F} u_f = 1$$

$$\sum_{f \in F} l_f = 1$$

$$x_{vf} + u_g \leq 1 \quad \forall v \in V, f \in F(v), g \in F: f > g$$

$$x_{vf} + l_g \leq 1 \quad \forall v \in V, f \in F(v), g \in F: f < g$$

$$x_{vf} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, f \in F(v)$$

$$u_f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in F$$

$$l_f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in F$$

Las restricciones $\sum_{f \in F} u_f = 1, \sum_{f \in F} l_f = 1$ aseguran que existe una única y más grande frecuencia así como una única más pequeña frecuencia. La restricción $x_{y_f} + u_g \leq 1$ prohíbe la asignación de frecuencias más altas que el máximo, mientras que $x_{y_f} + l_g \leq 1$ prohíbe asignar frecuencias más pequeñas que el mínimo.

En el FAPs de Amplitud Mínima algunas veces el conjunto de frecuencias $\{1, \dots, f_{max}\}$ es asignado para todos los vértices, es decir, $F(v) = \{1, \dots, f_{max}\} \forall v \in V$. Lo que nos da un conjunto de cotas inferiores a 1, es decir, $z_{min} = 1$ o $l_{min} = 1$. Por lo que, minimizar la amplitud es equivalente a minimizar el máximo de la frecuencia asignada. En otras palabras, f_{max} queda determinada como la mínima frecuencia para la cual el MS-FAP tiene soluciones factibles. Haciendo esto con la búsqueda binaria o técnicas relacionadas los F-FAPS o Max-FAPS ocurren como subproblemas.

Para el caso $F(v) = \{1, \dots, f_{max}\}$ es posible otra formulación. Esta formulación se basa en la formulación del MO-FAP y se agrega la siguiente restricción:

$$y_{f+l} \leq y_f \quad \forall f \text{ tal que } f+l \in F$$

Entonces la minimización de la amplitud es equivalente a:

$$\text{Min } \sum y_f$$

Esta formulación fue propuesta por Baybars [Bayb 82] y fue probablemente la primera formulación de programación lineal entera para el MS-FAP. Esto está basado en la formulación para gráficas coloreadas introducidas por Christofides [Chr 75].

En el caso de la distancia MS-FAP (MS-FAP solamente con restricciones duras de distancias), un orden lineal de los vértices pueden ser asociados con cada asignación de frecuencias. En particular, sea σ un orden lineal de los vértices de G . Entonces la asignación canónica de $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una asignación de frecuencias con la propiedad de que la frecuencia asignada a v_j es la frecuencia más pequeña factible después de que v_1, \dots, v_{j-1} han sido asignados. En particular, denotando por $d(v, w)$ la mínima distancia requerida entre la frecuencia asignada a v y una frecuencia asignada a w , entonces la asignación canónica f_1, \dots, f_n corresponde al orden lineal $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\}$ pueden obtenerse de las siguientes ecuaciones recursivas:

$$f_1 = 1$$

$$f_k = \min \{f \geq 1: |f - f_r| \geq \delta(v_r, v_k), r = 1, \dots, k-1\}, k = 2, \dots, n$$

Nótese que a lo largo de todos los ordenes lineales, existe uno para cada asignación canónica que provee la solución óptima para MS-FAP, desde cada asignación da un incremento en el orden de los vértices análogo al orden de las frecuencias asignadas.

Ejemplo

Apliquemos el algoritmo a la Figura 8, página 36.

Planteamiento

Definición de variables

$m(v)$ = Número de frecuencias asignadas a v , $v = a, b, c, d, e, f$.

$x_{vf} = 1$ si la frecuencia f es asignada al vértice v , $v \in V, f \in F(v)$ ó 0 en otro caso.

$y_f = 1$ si la frecuencia f es usada, $f \in F(v)$ ó 0 en otro caso.

$x_{vf} \in \{0, 1\}$, $v = a, b, c, d, e, f$, $f \in F(v)$.

$$y_f \in \{0, 1\}, \forall f \in F(v).$$

z_{max} = denota la frecuencia más alta usada.

z_{min} = denota la frecuencia más baja usada.

$$z_{max}, z_{min} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{Min} = z_{max} - z_{min}$$

s.a:

Restricciones del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v)$ se mostraran aquí ya que son iguales a las descritas en el ejemplo de la sección anterior.

Al igual que en la sección anterior se manejan restricciones del tipo:

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max} \text{ por lo que ya no}$$

las describiremos pero se tomaran en cuenta en la corrida de LINGO 6.0.

Restricciones del tipo $z_{max} \geq f y_f$:

$$z_{max} \geq 4 y_4;$$

$$z_{max} \geq 8 y_8;$$

$$z_{max} \geq 10 y_{10};$$

$$z_{max} \geq 14 y_{14};$$

$$z_{max} \geq 12 y_{12};$$

$$z_{max} \geq 6 y_6;$$

$$z_{max} \geq 2 y_2;$$

$$z_{max} \geq 7 y_7;$$

$$z_{max} \geq 3 y_3;$$

$$z_{max} \geq 9 y_9;$$

$$z_{max} \geq 11 y_{11}.$$

Restricciones del tipo $z_{min} \leq f y_f + f_{max} (1 - y_f), f_{max} = 14$:

$$z_{min} \leq 0 y_0 + (14 - 14) y_0$$

$$z_{min} \leq 4 y_4 + (14 - 14) y_4$$

$$z_{min} \leq 8 y_8 + (14 - 14) y_8$$

$$z_{min} \leq 10 y_{10} + (14 - 14) y_{10}$$

$$z_{min} \leq 12 y_{12} + (14 - 14) y_{12}$$

$$z_{min} \leq 14 y_{14} + (14 - 14) y_{14}$$

$$z_{min} \leq 2 y_2 + (14 - 14) y_2$$

$$z_{min} \leq 6 y_6 + (14 - 14) y_6$$

$$z_{min} \leq 3 y_3 + (14-14) y_3$$

$$z_{min} \leq 7 y_7 + (14-14) y_7$$

$$z_{min} \leq 9 y_9 + (14-14) y_9$$

$$z_{min} \leq 11 y_{11} + (14-14) y_{11}$$

Las restricciones del tipo $x_{yf} \leq y_f$ que equivalen a $x_{yf} - y_f \leq 0$ no se describirán aquí ya que pueden verse en la sección anterior.

Solución

$$x_{a12} = x_{a8} = x_{b10} = x_{b14} = x_{b4} = x_{c0} = x_{c2} = x_{c6} = x_{d3} = x_{d7} = 1$$

$$x_{e11} = x_{e3} = x_{e7} = x_{f11} = x_{f3} = 1$$

$$x_{a0} = x_{a10} = x_{a4} = x_{b12} = x_{b8} = x_{c12} = x_{c8} = x_{d10} = x_{d11} = x_{d9} = 0$$

$$x_{e10} = x_{e9} = x_{f10} = x_{f7} = x_{f9} = 0$$

$$y_0 = y_{10} = y_{11} = y_{12} = y_{14} = y_2 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = y_8 = 1$$

$$y_1 = y_{13} = y_5 = y_9 = 0$$

$$z_{max} = 14$$

$$z_{min} = 0$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$a = \{8, 12\}$$

$$b = \{4, 10, 14\}$$

$$c = \{0, 2, 6\}$$

$$d = \{3, 7\}$$

$$e = \{3, 7, 11\}$$

$$f = \{3, 11\}$$

La gráfica de la Figura 13 muestra la asignación de frecuencias obtenida para este problema.

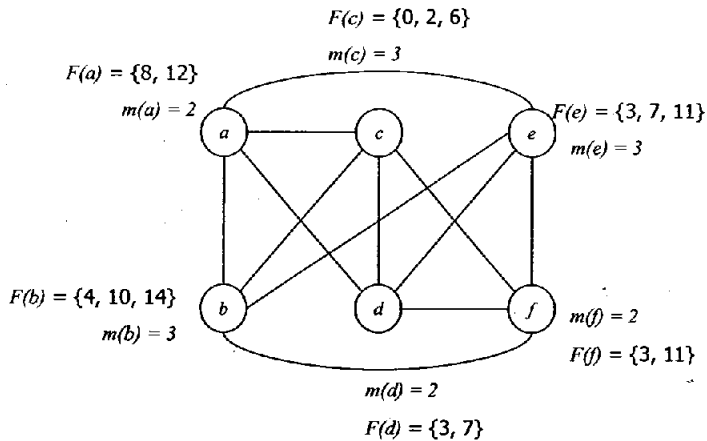


Figura 13: Asignación de Frecuencias de los vértices

La Figura 14 muestra parte de la solución obtenida para este problema con LINGO 6.0.

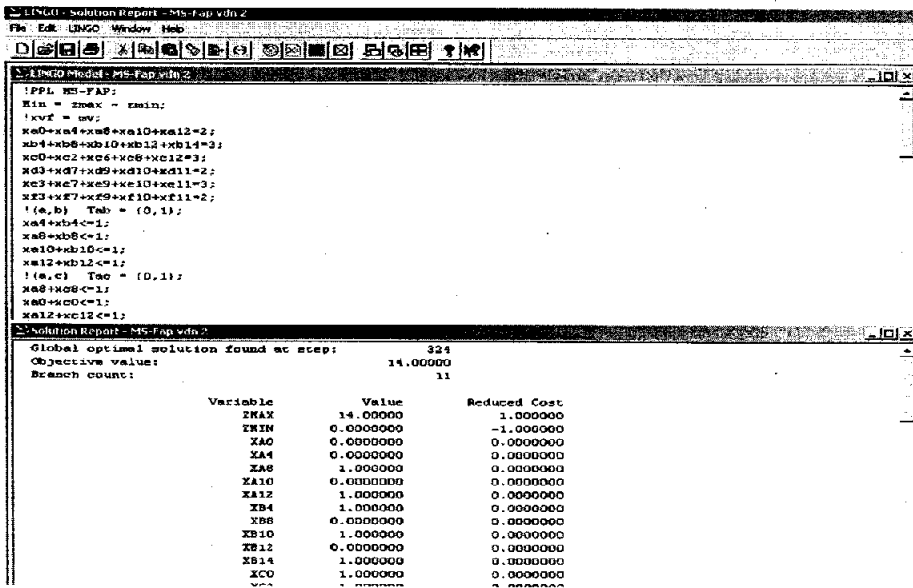


Figura 14: Solución en Lingo 6.0, MS FAP

2.2.4. La Mínima Interferencia en el Problema de la Asignación de Frecuencias, MI - FAP

Todos los modelos han simplificado los datos de la interferencia en las matrices de penalización, usando para ello la prohibición entre ciertas parejas de frecuencias elegidas. Un camino para usar los datos de penalización completamente es introducir una función objetivo que minimice la suma de las penalizaciones incurridas de las frecuencias elegidas. Esto es hecho en el llamado Problema de la Mínima Interferencia de la Asignación de Frecuencias, (MI-FAP).

$$\text{Min} \sum_{\{v,w\} \in E} \sum_{f \in F(v), g \in F(w)} P_{vwfg} x_{vf} x_{wg}$$

En algunos ejemplos del proyecto CALMA, esta función objetivo es extendida a las penalizaciones de la elección de ciertas frecuencias f para v , denotadas por q_{vf} . Esto crea un término extra en la función objetivo $\text{Min} \sum_{v \in V, f \in F(v)} q_{vf} x_{vf} x_{wg}$.

Observemos que la función objetivo tiene términos cuadráticos $x_{vf} x_{wg}$, resultando en una formulación cuadrática estándar. Para transformar esto en términos lineales se definen las variables $z_{vwfg} = x_{vf} x_{wg}$ obteniendo:

$$z_{vwfg} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{vf} = x_{wg} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para asegurar que z_{vwfg} obtenga el valor correcto se agregan las restricciones de la siguiente formulación.

$$x_{vf} + x_{wg} \leq 1 + z_{vwfg} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w)$$

y si es necesario que

$$z_{vwfg} \leq x_{vf} x_{wg} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w)$$

El problema con esta transformación lineal es de una relajación débil. Para las variables x fraccionales, la correspondiente variable z puede ser pequeña. Afortunadamente, usando las restricciones de multiplicidad podemos reemplazar estas desigualdades con:

$$\sum_{g \in F(w)} z_{vwfg} = m(w)x_{vf} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v)$$

Estas restricciones son válidas por la definición de z_{vwfg} y la multiplicidad de las restricciones:

$$\sum_{g \in F(w)} z_{vwfg} = \sum_{g \in F(w)} x_{wg} x_{vf} = \left(\sum_{g \in F(w)} x_{wg} \right) x_{vf} = m(w)x_{vf}$$

En otras palabras esto implica la definición de las variables z , como $z_{vwfg} = x_{wg} x_{vf}$. Si $x_{wg} = 0$ ó $x_{vf} = 0$, entonces la correspondiente variable z_{vwfg} también es igual a cero. Supongamos que $x_{vf} = 1$. Para w , existen $m(w)$ frecuencias de tipo g con $x_{wg} = 1$. Por lo anterior se satisface que z_{vwfg} debería ser uno.

Ejemplo

Apliquemos el algoritmo a la gráfica de la Figura 8.

Planteamiento

$$\text{Min} = 0.8 z_{ab} + z_{ac} + z_{ad} + z_{ae} + z_{bc} + z_{be} + z_{bf} + z_{cd} + z_{cf} + z_{de} + 0.8 z_{df} + z_{ef}$$

s.a:

Restricciones del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = 1$:

$$x_{a0} + x_{a4} + x_{a8} + x_{a10} + x_{a12} = 1$$

$$x_{b4} + x_{b8} + x_{b10} + x_{b12} + x_{b14} = 1$$

$$x_{c0} + x_{c2} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c12} = 1$$

$$x_{d3} + x_{d7} + x_{d9} + x_{d10} + x_{d11} = 1$$

$$x_{e3} + x_{e7} + x_{e9} + x_{e10} + x_{e11} = 1$$

$$x_{f3} + x_{f7} + x_{f9} + x_{f10} + x_{f11} = 1$$

Restricciones del tipo $x_{vf} + x_{wg} \leq 1 + z_{vfg}$:

Vértices a y b

$$x_{a4} + x_{b4} \leq 1 + z_{ab}$$

$$x_{a8} + x_{b8} \leq 1 + z_{ab}$$

$$x_{a10} + x_{b10} \leq 1 + z_{ab}$$

$$x_{a12} + x_{b12} \leq 1 + z_{ab}$$

Vértices a y c

$$x_{a8} + x_{c8} \leq 1 + z_{ac}$$

$$x_{a0} + x_{c0} \leq 1 + z_{ac}$$

$$x_{a12} + x_{c12} \leq 1 + z_{ac}$$

Vértices a y d

$$x_{a8} + x_{d10} \leq 1 + z_{ad}$$

$$x_{a10} + x_{d10} \leq 1 + z_{ad}$$

$$x_{a12} + x_{d10} \leq 1 + z_{ad}$$

Vértices a y e

$$x_{a10} + x_{e10} \leq 1 + z_{ae}$$

Vértices b y c

$$x_{b8} + x_{c8} \leq 1 + z_{bc}$$

$$x_{b12} + x_{c12} \leq 1 + z_{bc}$$

Vértices b y e

$$x_{b8} + x_{e10} \leq 1 + z_{be};$$

$$x_{b10} + x_{e10} \leq 1 + z_{be};$$

$$x_{b12} + x_{e10} \leq 1 + z_{be};$$

Vértices *b* y *f*

$$x_{b10} + x_{f10} \leq 1 + z_{bf};$$

Vértices *c* y *f*

$$x_{c8} + x_{f10} \leq 1 + z_{cf};$$

$$x_{c12} + x_{f10} \leq 1 + z_{cf};$$

Vértices *d* y *e*

$$x_{d7} + x_{e9} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d9} + x_{e7} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d9} + x_{e10} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d9} + x_{e11} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d10} + x_{e9} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d10} + x_{e11} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d11} + x_{e9} \leq 1 + z_{de};$$

$$x_{d11} + x_{e10} \leq 1 + z_{de};$$

Vértices *d* y *f*

$$x_{d7} + x_{f9} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d9} + x_{f7} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d9} + x_{f10} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d9} + x_{f11} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d10} + x_{f9} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d10} + x_{f11} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d11} + x_{f9} \leq 1 + z_{df};$$

$$x_{d11} + x_{f10} \leq 1 + z_{df};$$

Vértices *e* y *f*

$$x_{e7} + x_{f9} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e9} + x_{f7} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e9} + x_{f10} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e9} + x_{f11} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e10} + x_{f9} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e10} + x_{f11} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e11} + x_{f10} \leq 1 + z_{ef};$$

$$x_{e11} + x_{f9} \leq 1 + z_{ef};$$

Restricciones para los vértices $v \in V$, $T_v = \{0,1\}$:

$$x_{d9} + x_{d10} \leq 1;$$

$$x_{d10} + x_{d11} \leq 1;$$

$$x_{e9} + x_{e10} \leq 1;$$

$$x_{e10} + x_{e11} \leq 1;$$

$$x_{f9} + x_{f10} \leq 1;$$

$$x_{f10} + x_{f11} \leq 1.$$

Solución

$$x_{a0} = x_{b4} = x_{c2} = x_{d10} = x_{e10} = x_{f10} = 1$$

$$x_{a4} = x_{a8} = x_{a10} = x_{a12} = x_{b8} = x_{b10} = x_{b12} = x_{b14} = x_{c0} = x_{c6} = x_{c8} = x_{c12} = 0$$

$$x_{d3} = x_{d7} = x_{d9} = x_{d11} = x_{e3} = x_{e7} = x_{e9} = x_{e11} = x_{f3} = x_{f7} = x_{f9} = x_{f11} = 0$$

$$z_{ab} = z_{ac} = z_{ad} = z_{ae} = z_{bc} = z_{be} = z_{bf} = z_{cd} = z_{cf} = z_{de} = z_{df} = z_{ef} = 0$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región se muestran a continuación y son representadas en la gráfica de la Figura 15:

$$a = \{0\}$$

$$b = \{4\}$$

$$c = \{2\}$$

$$d = \{10\}$$

$$e = \{10\}$$

$$f = \{10\}$$

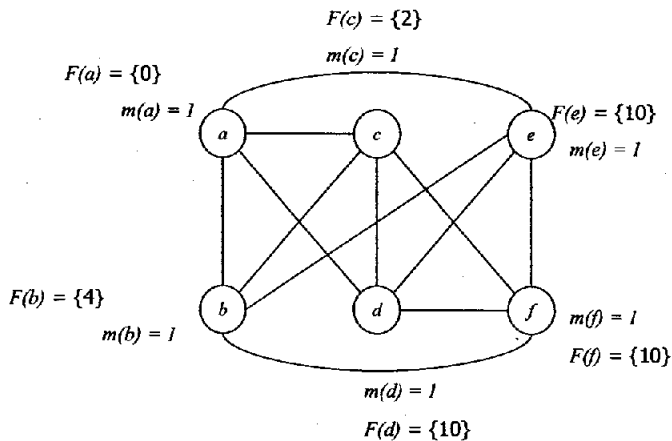


Figura 15. Asignación de Frecuencias de los vértices

A continuación la Figura 16 muestra parte del planteamiento del problema y su solución.

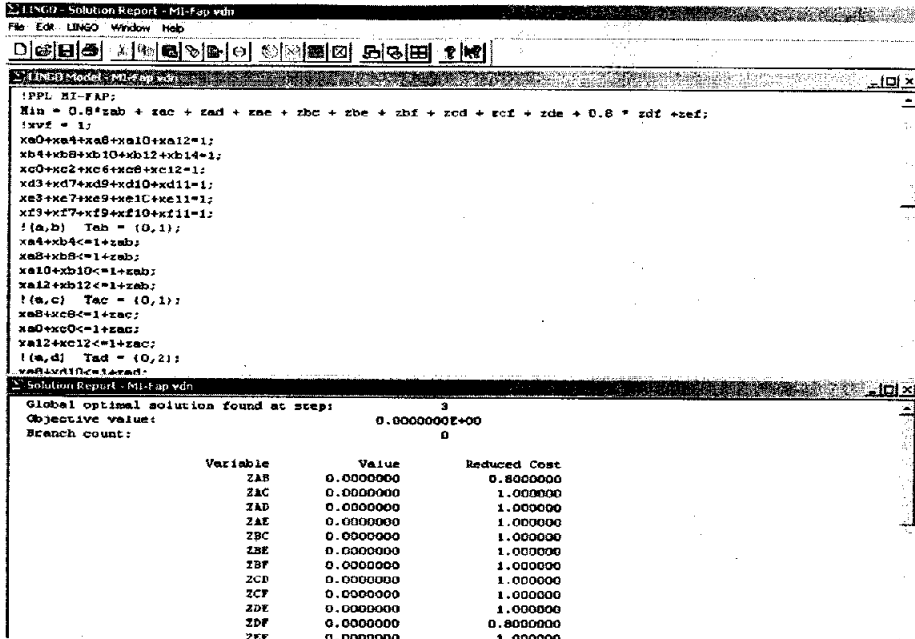


Figura 16: Solución en Lingo 6.0, MI FAP

2.2.5. Variantes de la Formulación

Formulaciones alternativas de la programación matemática han sido propuestas en la literatura. Normalmente, los heurísticos se inspiran en la formulación y son explorados para resolver este tipo de problemas.

2.2.5.1. Generación de la columna

Jaumard [Jau 01] desarrolló dos formulaciones de generación de columnas para el Max-FAP. En esta formulación se considera la restricción de la distancia co-celda, y

las restricciones de de co-canal y de canal adyacente. Todos los vértices tienen el mismo dominio de frecuencia.

La primera formulación está basada en una formulación de la generación de la columna para colores, tal como lo muestra Mehrotra y Trick [Meh&Trick 96]. Las variables corresponden a conjuntos independientes en la gráfica de interferencia, es decir, los vértices pueden obtener la misma frecuencia simultáneamente. Para cada frecuencia f estos conjuntos independientes son denotados por T_f . Como estos conjuntos pueden diferir por la frecuencia, entonces el dominio de la frecuencia para los vértices puede diferir. Sea z_i una variable binaria denotando si i está o no está en T_f . Para modelar las restricciones y la función objetivo de Max-FAP con estas variables, se usa la relación $x_{i,f} = \sum_{i \in T_f, i \in \mathcal{V}} z_i$. Para asegurar que la frecuencia f es elegida a lo más una vez se agrega $\sum_{i \in T_f} z_i \leq 1$. Esta formulación puede también ser usada para el MO y MS-FAP.

- Para MO-FAP la restricción sería $\sum_{i \in T_f} z_i = y_f$.

Jaumard [Jau 01] resuelve el LP-relajado de esta formulación con las técnicas de la generación de la columna, los precios de los problemas son el conjunto de pesos independientes los cuales describen estrategias de ramificación tan buenas como la generación de cortes.

La segunda formulación está basada en conjunto de frecuencias permisibles para celdas separadas. Las variables corresponden a conjuntos de frecuencias que pueden ser asignadas a ciertas celdas. Para cada celda v , subconjuntos de F denotados por T_v que satisfacen las restricciones co-celdas y las cotas inferiores y superiores en la multiplicidad son dadas. Otra variable binaria z_i especifica si T_v es elegido o no. Los autores muestran la LP-relajación de la formulación basada en estas variables, como la mejor, igual al valor de la LP-relajación de la formulación

basada en estas variables es, la mejor, igual al valor de la LP-relajación de la formulación del programa lineal previo. Por otro lado, los precios de los problemas son resueltos en una aproximación de la generación de la columna que está restringido por problemas de rutas más cortas.

2.2.5.2. Orientación de la formulación

Borndöfer [Born 98] considera MI-FAPS con co-canal e interferencia de frecuencias adyacentes. Aquí se modela la interferencia con penalizaciones de combinaciones de frecuencias. Más aún, prohíbe la combinación de frecuencias con penalizaciones por arriba de un cierto valor umbral. A lo largo de las asignaciones factibles ellos buscan una penalización mínima. Para cada vértice en la gráfica de interferencias donde ellos introducen una variable y_v que corresponde al número de frecuencia asignada a v . Para cada par (v, w) se denota la penalización de co-canal por p_{vw} y la penalización de canal adyacente por q_{vw} . Ahora, tres variables binarias más son declaradas:

$$z_{vw} = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_v - y_w| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\tilde{z}_{vw} = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_v - y_w| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Delta_{vw} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_v \geq y_w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las variables Δ_{vw} determinan un orden parcial de las frecuencias asignadas a los vértices. Con estas variables uno puede modelar todas las restricciones y la función objetivo en términos lineales. El modelo así definido contiene muy pocas variables en comparación a las formulaciones dadas anteriormente. El precio para estos es una formulación débil. Si los Δ_{vw} son dados, los autores muestran que el problema es resuelto en tiempo polinomial, hasta que la matriz de restricciones es totalmente unimodular. Este resultado es usado en dos etapas heurísticas, donde las variables Δ_{vw} se ajustan iterativamente y entonces se determina una solución con los nuevos valores.

3. UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA AL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FRECUENCIAS "FILADELFIA"

3.1. Introducción

El rápido avance de la tecnología inalámbrica y la escasez del espectro radioeléctrico ha estimulado a la investigación en el uso eficiente del espectro radioeléctrico desde los años 70's. Una parte considerable de esta investigación, y en una gran mayoría, la tecnología operacional de los transmisores se basan hoy en la División de Frecuencias de Acceso Múltiple, FDMA¹⁴, donde el ancho de banda disponible se divide en frecuencias. Estas frecuencias podrían ser asignados al transmisor mientras se minimiza el ancho de banda y se mantiene la interferencia con niveles aceptables.

El problema "Filadelfia" es un problema de asignación de frecuencias basado en una hipotética, pero real red de telefonía celular que cubre la región alrededor de esta ciudad. El problema ha sido usado varias veces como prueba de métodos heurísticos para encontrar una buena asignación de frecuencias, y evaluar teóricamente las cotas inferiores obtenidas para eficientizar al espectro radioeléctrico. En esta sección se resuelve el problema Filadelfia presentando una nueva cota inferior para un número consecutivo de frecuencias que cualquier asignación de frecuencias válida debería usar y así exhibir una asignación que se

¹⁴ FDMA de sus siglas en inglés, Frequency Division Multiple Acces

asemeje a esta cota. La solución hará que el problema Filadelfia se valore como patrón para la investigación en la asignación de frecuencias.

El método usado para establecer la cota inferior es parte de una teoría más general desarrollada por Janssen y Kilakos [J&K 96].

3.2. El problema Filadelfia

La red celular del problema Filadelfia se basa en una malla regular hexagonal que se muestra en la Figura 17. Cada hexágono representa la región o celda que es servida por un transmisor. El conjunto de celdas será denotado como a continuación: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{21}\}$, donde la numeración también es indicada en la Figura 17. El vector demanda $m \in Z^V$ es un vector de enteros no negativos que indica la demanda de frecuencias en cada celda: el componente m_i de m indica la demanda en la celda v_i . Para el problema Filadelfia

$$m = (8, 25, 8, 8, 8, 15, 18, 52, 77, 28, 13, 15, 31, 15, 36, 57, 28, 8, 10, 13, 8)$$

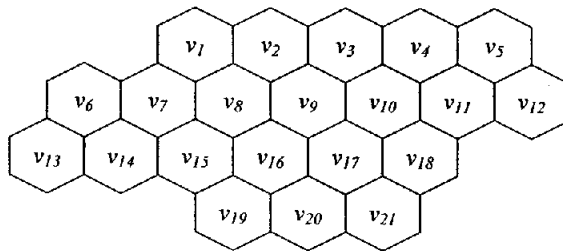


Figura 17: Malla que representa a la Ciudad de Filadelfia

En este problema, las restricciones de interferencia entre cualquier par de celdas pueden ser representadas por un entero, el cual determina el mínimo espacio que tiene que existir entre las frecuencias asignados a dos celdas de tal manera que se evite la interferencia. El entero c_{ij} representará a la restricción de interferencia entre las celdas v_i y v_j .

Las restricciones c_{ij} para el problema Filadelfia pueden ser obtenidas como a continuación se describe. Sea $d(v_i, v_j)$ quien represente la distancia entre los centros de las celdas v_i y v_j , donde la unidad es la distancia entre los centros de las celdas adyacentes. Entonces se define

$$c_{ij} = \begin{cases} 5, & \text{si } i = j \\ 2, & \text{si } 0 < d(v_i, v_j) \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 < d(v_i, v_j) < 2\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{la restricción co-sitio})$$

Hay que notar que existen parejas de celdas que no tienen restricciones entre ellas, la correspondiente c_{ij} no está definida. Una agrupación de celdas tal que entre cualquier par de éstas existe una restricción es llamada agrupación completa.

Una asignación válida es una asignación de conjuntos de frecuencias (representado por enteros no negativos) a los vértices de G tal que se satisface la condición que sigue. Esta asignación puede ser representada por $f: V \rightarrow P(\mathbb{Z})$ del conjunto de vértices V a $P(\mathbb{Z})$, el conjunto de todos los conjuntos enteros no negativos. Las condiciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} |f(v_i)| &= m_i && (v_i \in V) \\ k \in f(v_i) \text{ y } l \in f(v_j) &\Rightarrow |k - l| \geq c_{ij} && (c_{ij} \text{ definida, } i \neq j) \\ k, l \in f(v_i) \text{ y } k \neq l &\Rightarrow |k - l| \geq c_{ij} && (v_i \in V) \end{aligned}$$

Recordemos que la amplitud es el número de frecuencias usadas las cuales determinan el ancho de banda de la asignación de frecuencias, y en esta sección se establecerá la amplitud del problema de Filadelfia.

3.3. La solución

La cota inferior de la amplitud se basa en una configuración local de siete celdas de la gráfica mostrada en la Figura 17, la cual constituye un bloque¹⁵ completo y es derivada del mínimo costo de un tour cerrado.

Un *tour* en un bloque completo con un vector de demanda m el cual es una sucesión de celdas tal que cada celda v_i es visitada m_i veces. Un tour es cerrado si éste se inicia y termina en la misma celda. El costo de un tour es la suma de las restricciones sobre las aristas entre dos vértices consecutivos.

Cualquier asignación válida de un bloque completo corresponde a un tour en dicho bloque – la sucesión de celdas está dada por el orden creciente de las frecuencias asignadas. La amplitud de una asignación es al menos tan grande como el costo del tour correspondiente, la banda entre las frecuencias de dos celdas sucesivas debería ser al menos tan grande como la restricción entre estas celdas. El costo mínimo de cualquier tour da por lo tanto una cota inferior para la amplitud. La siguiente proposición muestra como el costo mínimo de un tour cerrado puede también ser usado como cota de la amplitud.

Lema 1. Sea G un bloque completo y V el conjunto de celdas de G , y sea m el vector demanda de G . Sea $\gamma(m)$ quien denote el costo mínimo de un *tour* cerrado

¹⁵ Se usará bloque como traducción literal de cluster

de G con un vector demanda m . Entonces la amplitud del bloque es al menos el mínimo de L_1 y L_2 , donde:

$$L_1 = \gamma(m) - \max \{c_{ij} \mid i \neq j, v_i, v_j \in V\}$$

$$L_2 = \min \{\gamma(m)^{(i)} \mid \forall i \text{ tal que } v_i \in V \text{ y } m_i > 1, m_i^{(i)} = m_i - 1, m_j^{(i)} = m_j \text{ (} j \leq i)\}$$

Demostración

Tómese cualquier asignación óptima, es decir, una asignación de amplitud mínima de G con vector de demanda m , y sea T el tour correspondiente a esta asignación. La amplitud de esta asignación, y por lo tanto la amplitud del bloque, es acotado inferiormente por el costo de T .

Si las frecuencias con los más bajos y altos niveles son asignadas a diferentes celdas (v_i y v_j), entonces el costo de T es igual al costo del *tour* cerrado obtenido en T que conecta a v_i y v_j menos el costo de esta nueva conexión, llamada, c_{ij} . Por lo que en este caso, el costo de T es acotado inferiormente por L_1 .

Si las más altas y más bajas frecuencias son asignadas a la misma celda (sea v_i), entonces T es en realidad un *tour* cerrado, pero un *tour* cerrado en el cual se pasa solamente $m_i - 1$ veces a través de v_i . El costo de T es por lo tanto igual al costo mínimo de un *tour* cerrado a través de G con un vector demanda m' , el cual es acotado inferiormente por L_2 . ♦

La siguiente proposición muestra como encontrar una cota inferior para el costo mínimo de un tour cerrado.

Proposición. Sea $x \in Q^V$ un vector de números racionales no negativos indexados por las celdas de un bloque completo que satisface las condiciones:

$$x_i + x_j \leq c_{ij} \quad \text{para toda } v_i, v_j \in V$$

Entonces cualquier tour cerrado tiene costo de al menos $m \cdot x$.

Demostración

Sea x un vector que satisface las condiciones de la proposición. Se toma cualquier tour cerrado y sea E la colección de pares de celdas consecutivas que forman el tour. De acuerdo con la definición, el costo del tour cerrado es la suma de las restricciones entre los pares de celdas de E . Pero como el tour cerrado visita cada celda m_i veces, por lo tanto cada celda está contenida en $2m_i$ parejas de E , se tiene que:

$$\sum_{(v_i, v_j) \in E} c_{ij} \geq \sum_{(v_i, v_j) \in E} (x_i + x_j) = \sum_{v_i \in V} 2m_i x_i = 2m \cdot x$$

Lo que completa la prueba. ♦

La desigualdad del sistema $x_i + x_j \leq c_{ij}$ para toda $v_i, v_j \in V$ y $x_i \geq 0$ para toda $v_i \in V$ describe un poliedro en \mathcal{Q}^V . Por lo tanto, cualquier vector que satisface estas desigualdades puede ser escrito en términos de los puntos extremos del poliedro. Además, el valor máximo de $m \cdot x$, y por lo tanto la mejor cota inferior será siempre obtenido por un vector x que representa un punto extremo.

En el documento "Análisis poliédrico de los problemas de asignación de frecuencias: (I) Tours" [J&K 96] una descripción completa de los puntos extremos del poliedro, definido por las desigualdades de la proposición anterior, es dada por un número de diferentes tipos de restricciones en los vectores c , incluso la restricción del vector del problema Filadelfia. Se asume que c_{ij} toma a lo más tres valores. Por lo tanto, la familia de puntos extremos obtenida para este caso

generaliza la mayoría de las restricciones difíciles. Se sospecha que para la mayoría de los vectores en las restricciones difíciles o de muchos valores, será difícil obtener una descripción completa, por lo que muchas cotas inferiores importantes pueden no obtenerse.

Regresando al problema de Filadelfia. Sea $V' = \{v_2, v_3, v_8, v_9, v_{10}, v_{16}, v_{17}\}$ el conjunto de celdas que completan un bloque que será usado para determinar la cota inferior. El bloque consiste de solamente siete celdas, es fácil obtener una descripción completa de los puntos extremos del poliedro definido por la igualdad de la última proposición. Sea $x^{(j)}, j=1, \dots, 8$ los vectores en V' definidos por:

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} 3/2, & \text{si } i = 9; \\ 1/2, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$x_i^{(2)} = \begin{cases} 2, & \text{si } i = 9; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y para $j = 3, \dots, 8$

$$x_i^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \in V_j; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde $V_3 = \{v_9, v_2, v_3\}$, $V_4 = \{v_9, v_3, v_{10}\}$, $V_5 = \{v_9, v_{10}, v_{17}\}$, $V_6 = \{v_9, v_{17}, v_{16}\}$,

$$V_7 = \{v_9, v_{16}, v_8\}, \text{ y } V_8 = \{v_9, v_8, v_2\}.$$

Los puntos extremos del poliedro descrito por las desigualdades de la Proposición corresponden exactamente a los vectores $x^{(j)}$ ya que algunos coeficientes son cero.

Sea $m' = (25, 8, 52, 77, 28, 57, 28)$ el vector demanda del problema Filadelfia restringido a V' . Usando la descripción dada de los puntos extremos, es fácil ver que el máximo de $m' \cdot x$, donde x es un vector que satisface las desigualdades de la Proposición y son obtenidos por $x^{(j)}$. Por lo que la mejor cota inferior para el problema Filadelfia puede ser obtenida por este método. Por lo tanto, el costo del tour cerrado del bloque completo definido por V' es al menos $m' \cdot x^{(j)} = 429$. Cuando se aplica el lema, se ve que $L_1 = 429 - 2 = 427$ y $L_2 = \gamma(m^9) = 426$. Por lo tanto, la amplitud del bloque cerrado, y por lo tanto la amplitud del problema Filadelfia, es al menos 426.

La mejor cota conocida fue 414, publicada por Gamst en 1986 [Gamst 86], con el desarrollo anterior Jansen y Kilakos encuentran el error y muestran que 426 es la mejor posible [J&K 96].

La cota dada es en realidad la mejor posible: La Tabla 1 describe una asignación válida con amplitud 426. Hurley y Smith (comunicación privada) obtuvieron una asignación con la misma amplitud haciendo uso de cálculos heurísticos. Estas asignaciones mejoran por uno a las anteriores asignaciones obtenidas por Leese [Leese 96].

U	x_u	Colores
1	8	$220 + 6k (k = 0, \dots, 7)$
2	25	$118 + 5k (k = 0, \dots, 19), 339 + 7k (k = 0, \dots, 4)$
3	8	$374 + 7k (k = 0, \dots, 7)$
4	8	$341 + 7k (k = 0, \dots, 7)$
5	8	$216 + 6k (k = 0, \dots, 7)$
6	15	$218 + 6k (k = 0, \dots, 14)$
7	18	$268 + 6k (k = 0, \dots, 11), 341 + 7k (k = 0, \dots, 5)$
8	52	$2 + 5k (k = 0, \dots, 18), 217 + 6k (k = 0, \dots, 19), 337 + 7k (k = 0, \dots, 12)$
9	77	$5k (k = 0, \dots, 43), 215 + 6k (k = 0, \dots, 20), 335 + 7k (k = 0, \dots, 13)$
10	28	$3 + 5k (k = 0, \dots, 3), 98 + 5k (k = 0, \dots, 3), 218 + 6k (k = 0, \dots, 19)$
11	13	$336 + 7k (k = 0, \dots, 12)$
12	15	$219 + 6k (k = 0, \dots, 14)$
13	31	$5k (k = 0, \dots, 30)$
14	15	$184 + 5k (k = 0, \dots, 6), 357 + 7k (k = 0, \dots, 7)$
15	36	$4 + 5k (k = 0, \dots, 35)$
16	57	$97 + 5k (k = 0, \dots, 23), 219 + 6k (k = 0, \dots, 19), 340 + 7k (k = 0, \dots, 12)$
17	28	$23 + 5k (k = 0, \dots, 14), 338 + 7k (k = 0, \dots, 12)$
18	8	$220 + 6k (k = 0, \dots, 7)$
19	10	$294 + 6k (k = 0, \dots, 6), 336 + 7k (k = 0, \dots, 2)$
20	13	$216 + 6k (k = 0, \dots, 12)$
21	8	$268 + 6k (k = 0, \dots, 7)$

Tabla 1: Asignación de frecuencias del Problema de Filadelfia con amplitud 426

Conclusiones

En la realidad existen algunos problemas que pueden modelarse matemáticamente y resolverse de manera óptima y en tiempo polinomial con herramientas de Investigación de Operaciones, esto es Programación Matemática o bien Teoría de Gráficas pero en la mayoría de los casos esto no sucede y es por ello que se deben utilizar herramientas que si bien no nos proporcionan la mejor solución esta se obtiene en un tiempo razonable y hace que en general el resultado sea aceptable.

Este trabajo intentó mostrar el Problema de Asignación de Frecuencias y su solución utilizando Programación Matemática, específicamente Programación Lineal Entera Binaria, la cual es una herramienta que puede en el mejor de los casos otorgar una solución óptima aunque esta depende mucho del tipo de restricciones de distancia y del número de frecuencias que se quieran asignar a la región de análisis, razón por la cual aunque puede ser un método exacto también puede ser un método algo engorroso. En el Anexo 3 se trata el Problema de Asignación de Frecuencias con Teoría de Gráficas por lo que con este método puede resultar más práctico, para casos pequeños, obtener una solución al problema. En la práctica, la mayoría de las restricciones de separación de frecuencias son restricciones co-sitio, y las restricciones inter-sitio de valor 1 ó 2. Esta situación corresponde a una gráfica restringida con parámetros c_0, c_1, \dots, c_k donde estos cumplen $c_1 = \dots = c_j = 2$ y $c_{j+1} = \dots = c_k = 1$. Muchos de los trabajos sobre etiquetamiento de gráficas se enfocan en restricciones 1 y 2, más específicamente, restricciones $c_1 = 2$ $c_2 = 1$ y $c_3 = 1$.

Para el caso gráfico, el cual se detalla en el Anexo 3, la parte difícil es encontrar una muy buena coloración de la gráfica. En este caso en especial se pueden

obtener varias soluciones para un mismo problema dependiendo de la coloración base elegida.

Como vimos en este trabajo el Problema de Asignación de Frecuencias fue tratado en un plano dimensional pero en la actualidad se están haciendo estudios y obteniendo resultados para un caso más real: la tercera dimensión, en la que no sólo se consideran obstáculos de interferencia o distancias si no que ya existen otros factores a considerar.

Anexo 1. Sistema GSM

Este material está basado principalmente en el documento

Un poco de Historia de GSM

La historia la podemos situar cuando en 1982 en un Congreso de administraciones de Correos y Telecomunicaciones (CEPT) se tomaron dos decisiones.

La primera fue establecer un equipo con el nombre de Groupe Special Mobile (de aquí viene la abreviatura GSM), que desarrollara un conjunto de estándares para una futura red celular de comunicaciones móviles de ámbito paneuropeo.

La segunda fue recomendar la reserva de dos subbandas de frecuencias próximas a 900 Mhz para este sistema. Estas decisiones fueron tomadas para tratar de solventar los problemas que habían creado el desarrollo descoordinado de sistemas móviles celulares individualmente en los diferentes países participantes del CEPT y que eran incompatibles.

Dos de estos problemas eran:

- No poder disponer de una misma terminal al pasar de un país al otro;
- No disponer de un mercado propio suficientemente extenso que dificulte una industria europea de sistemas móviles competitiva a nivel mundial.

En 1984 empieza a surgir otro factor adicional, los sistemas celulares de la primera generación, en particular en los países del norte de Europa experimentan una aceptación y penetración en el mercado extraordinariamente superior a la prevista.

En 1986 las cifras indicaban la saturación de la capacidad de estos sistemas para principio de la década de los 90's. Ante esto surgió la intención de utilizar parte de las subbandas de frecuencias destinadas al GSM como ampliación de las usadas por los sistemas móviles celulares de primera generación (Sistema 900).

En consecuencia la Comisión de la Comunidad Europea emitió una Directiva en la que reservaban dos subbandas de frecuencias en la banda de 900 Mhz, para el sistema europeo, que empezaría a funcionar en 1991, pero más pequeñas que las recomendadas por la CEPT. Asimismo contemplaba que las frecuencias en estas subbandas que estuvieran siendo utilizadas por sistemas móviles celulares de la primera generación (analógicos), deberían abandonarlas en los siguientes diez años (es decir, hasta el 2001) que es la vida que les quedaba a los TMA (analógicos).

Mientras tanto los miembros del GSM realizaban excelentes progresos en el desarrollo y acuerdo de estándares.

Se adoptó la decisión de que el sistema sería digital, en lugar de analógico lo que redundaría en mejorar la eficiencia del radio espectro, mejor calidad de transmisión, posibilidades de nuevos servicios y otras mejoras como la seguridad.

También permitiría la utilización de tecnología VLSI, pudiendo fabricar terminales móviles más pequeños y baratos; en definitiva el uso de un sistema digital que complementaría el desarrollo de la Red Digital de Servicios Integrados (RDSI) con la que GSM debería tener un interface.

Se siguieron haciendo progresos y en septiembre de 1987 trece operadores de red europeos formaron un MoU¹⁶ para continuar con el proyecto y lanzarlo en julio de 1991. Esto fue seguido con la invitación simultánea hecha en febrero de 1988 a todos los operadores de red involucrados en el sistema.

Pronto se dieron cuenta de que habían más problemas de los previstos. Por lo que se acordó que se efectuaría el desarrollo de la especificación en dos fases. Además la implantación en términos geográficos vislumbraba que debía realizarse en fases, empezando por ciudades importantes y aeropuertos; se seguiría con autopistas, calculando que se tardarían años en lograr un servicio completo a todo Europa.

En 1988 se inicio una intensa actividad en pruebas de validación particularmente en relación con el interface Radioléctrico. Como resultado se ajustaron ligeramente las especificaciones GSM y se pudo comprobar que el sistema funcionaba.

No se alcanzó la fecha acordada para julio de 1991 para el lanzamiento comercial del sistema GSM. A ello contribuyeron el retraso del desarrollo y acuerdo de pruebas de certificación, la necesidad de modificar algunas especificaciones GSM ya que la complejidad técnica del desarrollo de terminales portátiles se tardó en resolver más de lo previsto. Fue en junio de 1992 cuando aparecieron los portátiles.

El servicio comercial del sistema GSM llegó en 1992, si bien el tamaño de las áreas de cobertura y el número de usuarios era bastante dispar. Las redes que estaban funcionando se basaban en las especificaciones de la fase 1 y no todos los servicios contemplados en la fase 1 estaban disponibles.

A finales de 1993, el número de operadores que habían firmado el MoU había aumentado de trece a cuarenta y cinco, entre los que estaban la mayor parte del

¹⁶ MoU por sus siglas en inglés, Memorandum of Understanding

mundo excepto América del Norte y Japón. Treinta redes GSM estaban en servicio con cerca de un millón de abonados en todo el mundo.

A finales del 1994 el número de miembros del MoU había crecido a 102 operadores de red y Administraciones reguladores de Telecomunicaciones de 60 países.

El mercado de redes y equipamientos GSM se ha extendido más allá de las fronteras de Europa occidental. Europa del Este, la Commonwealth, Oriente, Asia, África y Oceanía son regiones donde existen sistemas GSM operativos. Actualmente la mayor parte de los firmantes del MoU no pertenecen a países europeos. Esta amplitud del mercado es la razón por la que las siglas GSM han tomado otra acepción como Global System for Mobile communications que es diferente de la original de 1982.

Novedades introducidas

El sistema GSM permite la conexión con la red conmutada (Telefónica) y con la RDSI (Red de servicios integrados) y permite ofrecer al usuario telefonía, transmisión de datos (hasta 9.600 bit/s), faxsímil del grupo III, conexión a sistemas de correo electrónico (X-400) y envío de mensajes cortos (alfanuméricos) que permite tanto su envío como su recepción desde una terminal móvil, leyéndolos en este último caso en el visor correspondiente.

Además el sistema GSM soporta otras prestaciones adicionales, como: desvío de llamada, restricciones de llamadas entrantes o salientes, conferencias a tres, llamada en espera y otras más.

La terminal a su vez, ofrece prestaciones adicionales como marcación abreviada, repetición del último número marcado, bloqueo del terminal, entre otros.

El tema de la seguridad ofrece en este servicio novedades importantes respecto a los actuales (TMA), el uso de tarjeta de usuario para la autenticación de la validez de la llamada; encriptado, que facilita una confidencialidad total (voz, datos e identidad del abonado) e imposibilidad de utilización de equipos robados mediante la asignación previa de un número de serie a cada estación móvil.

En su componente radio se utiliza la banda de frecuencias de 900 Mhz con el método TDMA (Acceso por multiplexación en el tiempo), que proporciona ocho frecuencias telefónicas en una misma portadora y una codificación de voz a 13 Kbps, destinándose un octavo de tiempo a cada canal. Esta prevista para un futuro una codificación de voz a velocidad mitad, lo que permitiría la utilización de 16 frecuencias por portador.

Estructura GSM

En lo que se refiere a la estructura básica del GSM el sistema se organiza como una red de celdas radioeléctricas continuas que proporcionan cobertura completa al área de servicio. Cada celda pertenece a una estación base (BTS) que opera en un conjunto de frecuencias de radio diferentes a los usados en las celdas adyacentes y que se encuentran distribuidas según un plan celular.

Un grupo de BTS's se encuentran conectado a un controlador de estaciones base (BSC), encargado de aspectos como el *handover* (traspaso del móvil de una celda a otra) o el control de potencia de las BTS's y de los móviles.

En consecuencia el BSC se encarga del manejo de toda la red de radio y supone una autentica novedad respecto a los anteriores sistemas celulares.

Uno o varios controladores BSC's se conectan a una central de conmutación de móviles (MSC). Este es el corazón del GSM como responsable de la inicialización,

enrutamiento, control y finalización de las llamadas, así como de la información sobre tarifas. Es también la interface entre diversas redes GSM o entre una de ellas y las redes públicas de telefonía o datos.

La información referente a los abonados se encuentra almacenada en dos bases de datos que se conocen como registro de posiciones base (HLR) y registro de posiciones de visitantes (VLR).

El primero analiza los niveles de suscripción, servicios suplementarios y localización actual, o mas reciente de los móviles que pertenecen a la red local. Asociado al HLR trabaja el centro de autenticación (AUC), que contiene la información por la que se comprueba la autenticidad de las llamadas con el fin de evitar los posibles fraudes, la utilización de tarjetas de abonado (SIM's) robadas o el disfrute del servicio por parte de impagados.

El VLR contiene la información sobre los niveles de suscripción, servicios suplementarios y red de localización para un abonado que se encuentra o al menos se encontraba recientemente en otra zona visitada. Esta base de datos dispone también de información relativa a si el abonado se encuentra activo o no, lo que evita el uso improductivo de la red, envío de señales a una localización que se encuentra desconectada.

El registro de identidad de los equipos (EIR) almacena información sobre el tipo de estación móvil en uso y puede eludir que se realice una llamada cuando se detecte que ha sido robada, pertenece a algún modelo no homologado o sufre de algún fallo susceptible de afectar negativamente a la red.

En cuanto a las comunicaciones en la red, se ha desarrollado un nuevo esquema de señalización digital. Para la comunicación entre MSC's y registros de posición se utiliza la parte de aplicación para móviles del Sistema de Señalización número 7 del

CCITT, fórmula casi imprescindible para la operación de redes GSM a nivel internacional.

Entre las diversas entidades de la red se encuentran definidos interfaces estándar que aseguren un método común de acceso para todos los móviles, tanto los de diferentes países como los de diferentes suministradores.

La arquitectura funcional del sistema GSM

La norma GSM únicamente especifica entidades funcionales e interfaces normalizadas. Con ello se consigue la utilización de cualquier sistema por cualquier estación móvil, aunque no pertenezcan al mismo suministrador y la interconexión de equipos de distintos suministradores a través de los interfaces normalizadas, evitando influir de forma excesiva sobre los desarrollos particulares de cada uno de los fabricantes de equipos.

Elementos del sistema GSM

Estación Móvil (MS) Una estación móvil se compone funcionalmente de dos partes:

- El equipo terminal (ET). El equipo terminal realiza funciones semejantes a las de una terminal RDSI y realiza las siguientes funciones:
 - Transmisión radio
 - Gestión de frecuencias de transmisión radio.
 - Capacidad de la terminal, incluyendo la interfaz hombre-máquina.
 - Codificación de voz.
 - Protección de errores.
 - Control del flujo de datos de usuario.
 - Adaptación de velocidad de datos de usuario y velocidad del canal.
 - Soporte de terminales múltiples.

- Gestión de movilidad.
- La terminación móvil (TM). Hay tres tipos de TM:
 - TMO Realiza las funciones anteriormente mencionadas, sin incluir ninguna interface.
 - TM1 Incluye además una interfaz RDSI.
 - TM2 Incluye además interfaces CCITT series X y V.

Utilizando estos tres tipos de TM se pueden establecer las configuraciones necesarias para acceder al sistema GSM.

Una estación móvil puede además clasificarse en distintos tipos según varias características:

a) Por su utilización: Equipo móvil, Equipo portátil y Equipo transportable.

b) Por la potencia de salida:

- Clase 1 20 W - Móvil y transportable.
- Clase 2 8 W - Vehículo y transportable.
- Clase 3 5 W – Portátil.
- Clase 4 2 W – Portátil.
- Clase 5 0.8 W – Portátil.

Las características de las estaciones móviles se clasifican en tres tipos:

* Características Básicas obligatorias de la estación móvil:

- Visualización del número llamado;
- Indicación de señales de progreso de la llamada;
- Indicación de país/sistema;
- Gestión de la identidad de suscripción (SIM);

- Indicador de PIN (clave de acceso) no valido;
- Identidad internacional de equipo de estación móvil (IMEI);
- Indicador de servicio.

* Características básicas opcionales:

- Indicación y reconocimiento de mensajes cortos;
- Indicación de saturación de memoria para mensajes cortos;
- Interfaz para equipo terminal de datos;
- Interfaz para terminal RDSI;
- Función de acceso internacional (tecla +);
- Conmutador encendido/apagado;
- Interfaz analógica;
- Auto prueba.

* Características suplementarias:

- Aviso de tarifas;
- Control de servicios suplementarios.

* Características adicionales:

- Marcación abreviada;
- Limitación de llamada a números fijos;
- Repetición del último numero marcado;
- Operación manos libres;
- Restricción de todas las llamadas salientes;
- Bloqueo electrónico de la terminal;
- Indicador de calidad de recepción;
- Indicador de unidades de tarifas;
- Estación móvil multi-usuario.

Módulo de identificación del usuario (SIM):

Para que una estación móvil GSM pueda funcionar necesita tener introducido el módulo de identificación del usuario.

Existen dos tipos distintos de modulo de identificación del usuario:

- Una tarjeta inteligente que puede ser retirada de la estación móvil cuando el usuario termina de utilizarla.
- Un módulo que es incorporado dentro de la estación móvil, con el fin de estar instalado permanentemente, aunque siempre sería posible retirarlo abriendo la carcasa de la estación móvil.

Este módulo es el que contiene toda la información necesaria para realizar la función de autenticación del usuario, además de otras informaciones necesarias para el sistema.

El SIM debe contener la siguiente información:

- Número de serie;
- Estado del SIM (bloqueado o desbloqueado);
- Clave del algoritmo de autenticación;
- Algoritmo de Autenticación (A3);
- Identificación internacional del usuario móvil (MSI);
- Identificación temporal del usuario móvil (TMSI);
- Algoritmo de generación de claves de cifrado (A8);
- Clave del algoritmo de cifrado de señalización y datos (A5);
- Número de secuencia de la clave del algoritmo de cifrado;
- Clase de control de acceso del usuario.

Sistema de Estación Base (BSS)

Es la entidad responsable del establecimiento de las comunicaciones con las estaciones móviles que se encuentran dentro de su área de influencia.

Esta área de influencia puede ser constituida por una o más celdas radio cada una de ellas con una estación base.

Hay ocho clases de estaciones base en función de la potencia que van desde los 320 W a 2.5 W.

Un sistema de estación base está constituido por un controlador de estación base BSC del que dependen una o más estaciones base BTS.

Una estación base está constituida por un conjunto de transceptores (TRX) que cubren la misma área. La estación base incluye además de los transceptores un módulo que realiza la función de control común de estos transceptores(FCC). Tomando como base esta estructura existen dos tipos de sistemas de estación base:

- El sistema de estación integrado donde el BSC y una BTS están integrados en un mismo equipo.
- El sistema de estación base separado donde el BSC es una entidad distinta de las estaciones base, a las que se conecta mediante una interfaz normalizada, denominado interfaz A-bis. Esta última estructura, es la más general.

El transcodificador es un elemento que pertenece funcionalmente al BSS pero que puede estar situado físicamente en la BTS, en el BSC o externo al BSS (junto a la

central de conmutación móvil). La función de transcodificador es convertir la velocidad neta utilizada en las frecuencias radio (inferior a 16 kb/s) a la velocidad normalmente utilizada en la red fija (que es de 64 kbit/s).

El que esta conversión no se realice hasta el final posibilita que se puedan multiplexar 4 frecuencias de 16 kbit/s en uno de 64 kbit/s ahorrando capacidad de transmisión, en el interfaz entre la BTS y el BSC y en el interface entre el BSC y la central de conmutación (interface A).

A partir de los tipos básicos anteriormente definidos pueden distinguirse 7 estructuras finales distintas, teniendo en cuenta además la situación del transcodificador, y la utilización de submultiplexación en el interface A-bis. (BSS del 1 al 7).

Además de esta clasificación existen otras características funcionales, opcionales dentro de la especificación GSM, que determinan dentro de cada uno de estos tipos diferentes sistemas de estación base. Hay unas características funcionales que son fundamentales, función de salto de frecuencia (SLF), función de control de potencia (CP) y la función de transmisión discontinua (TXD).

La interconexión del BSS con las demás entidades del sistema GSM se define utilizando un modelo basado en el modelo de interconexión de Sistemas Abiertos (OSI) recogido en las recomendaciones CCITT X200 y X210.

Dentro de cada capa están las entidades. Las entidades de distintos sistemas que pertenecen a la misma capa, pueden intercambiar información entre sí.

Las entidades de un mismo sistema situadas en capas adyacentes interactúan entre ellas a través de su frontera común. De esta forma las capas inferiores prestan sus servicios a las capas superiores.

Todos los sistemas del BSS: El interface radio, la interfaz A y el interface A-bis se han definido utilizando un modelo de tres capas:

La Capa 1 coincide con la capa inferior del modelo OSI, y soporta todas las funciones necesarias para la transmisión de una secuencia de bits sobre un canal establecido en un medio físico de transmisión.

La Capa 2 es la capa de enlace de datos, y tiene como misión permitir el intercambio de tramas de información entre dos entidades conectadas a través de un medio físico.

La Capa 3 en realidad comprende las capas 3 a 7 del modelo OSI, llegando por lo tanto hasta definir la naturaleza de la comunicación requerida para satisfacer las necesidades de los usuarios de la comunicación.

Para definir totalmente la interconexión del sistema, además de esa estructura de capas es necesario también utilizar funciones de gestión del sistema. Estas funciones pueden incluir funciones que son comunes a varias capas.

Funciones del BSC

- Gestión de frecuencias en el enlace BSC-MSC;
- Gestión de frecuencias radio;
- Configuración de las frecuencias radio (recibe del OMC);
- Gestión de secuencias de salto de frecuencia(BSC,OMC), estas secuencias son enviadas por el BSC hacia el BTS;
- Selección de canal, supervisión del enlace y liberación de canal;
- Control de potencia en el móvil;
- Determinación del nivel de potencia necesario en el móvil;
- Control de potencia en la BSS;

- Determinación de la necesidad de realizar cambio de canal.

Funciones de la BTS

- Gestión de frecuencias radio;
- Supervisión de frecuencias libres, y envío de información de estos hacia la BSC;
- Temporización de bloques BCCH/CCCH. Edición de mensajes de aviso;
- Detección de accesos al sistema por parte de móviles;
- Codificación y entrelazado para protección de errores;
- Determinación del avance de temporización que hay que utilizar para una comunicación con el móvil;
- Medidas de intensidad de campo y calidad de las señales recibidas de los móviles. Recepción de medidas enviadas por los móviles sobre condiciones de intensidad y calidad;
- Opcionalmente la BTS puede realizar un pre-procesamiento;
- Construcción de los mensajes de aviso a partir de la información recibida desde la BSC;
- Detección de acceso por traspaso de un móvil, y comprobación de la identificación de referencia de este traspaso de acuerdo con la información recibida desde BSC;
- Encriptación de la información de señalización y tráfico.

Central de Conmutación Móvil (MSC)

Es una central de conmutación encargada de todas las funciones de conmutación para las estaciones móviles situadas en su área de influencia, área MSC.

Las principales diferencias de esta central respecto a una central de la red fija, consisten en que esta central debe tener también en cuenta el impacto de las funciones de asignación de los recursos radio y la naturaleza móvil de los usuarios.

Por lo tanto, este tipo de central implementa ciertos procedimientos adicionales a los de una central de red fija, como pueden ser por ejemplo la actualización de la posición de las estaciones móviles, y lo que tienen que ver con las funciones de traspaso de llamadas en curso, cuando los móviles se van desplazando entre las celdas de la red móvil.

Central de Conmutación Móvil de Cabecera "GATEWAY" (MSCC)

Es una central de conmutación móvil que además es utilizada para dirigir hacia ella las llamadas originadas en la red fija.

Esta central se encarga de interrogar al HLR, adecuado para conocer la posición del móvil al que va dirigida la llamada, y posteriormente de encaminar la llamada hacia la central de conmutación móvil correspondiente.

La elección de las centrales de conmutación móvil que van a ser además centrales de cabecera depende de la organización de la red móvil.

El sistema GSM introduce respecto a los sistemas analógicos de segunda generación una mayor descentralización de las funciones de la central de conmutación móvil, pasando parte de ellas a ser realizadas dentro de los propios sistemas de estación base. De esta forma se consigue descargar de trabajo a la central de conmutación y agilizar en muchos casos algunos procedimientos característicos de una red móvil, como puede ser por ejemplo el traspaso de las llamadas en curso, al pasar el móvil de una a otra celda.

Unidad de Interfuncionamiento (UI)

Es una entidad funcional asociada con la central de conmutación móvil. Esta unidad es la encargada de proporcionar la funcionalidad necesaria para permitir el

interfuncionamiento del sistema GSM con las redes fijas (RDSI, RTC, y RTPCP). Las funciones incluidas en esta unidad dependen por lo tanto de los servicios que se implementen y de las redes fijas a las que se conecten.

Su principal cometido es convertir los protocolos utilizados en el sistema GSM a los utilizados en las redes fijas.

Registro de Posición Base (HLR)

Es una base de datos cuya misión es la gestión de los usuarios móviles.

Una red GSM puede tener uno o varios HLR, dependiendo del número de usuarios móviles, de la capacidad del equipo y de la organización de la red.

El HLR almacena dos tipos de información:

- La información de suscripción de los usuarios;
- La información de localización de los abonados, permitiendo de esta forma la función de seguimiento es decir la actualización automática de la posición del móvil para que se le pueda encaminar las llamadas que reciba.

Todas las funciones de administración de los abonados se realizan sobre esta base de datos.

La información de suscripción de un abonado consta de los siguientes pasos:

- Dos números de identificación;
- El identificador internacional de la estación móvil IMSI;
- El numero RDSI internacional de la estación MSISDN;
- Servicios portadores y teleservicios que el usuario puede usar;

- Restricciones de servicios por ejemplo limitación de seguimiento;
- Servicios suplementarios que el usuario puede usar y las tablas de parámetros necesarios para dichos servicios;
- Características del equipo móvil utilizado por el usuario.

Centro de Autenticación (AUC)

Es una base de datos, con la misión de controlar a los móviles que se encuentran en su región o área de influencia. Este área de influencia puede comprender una o varias MSC.

Cuando una estación móvil aparece en un área de localización lo primero que hace es iniciar un proceso de registro comunicando a la MSC local su identidad. La MSC comunica este registro hacia su Registro de Posición Visitado. Si el móvil no estaba ya registrado en otra área de localización dependiente también del mismo VLR es necesario enviar también esta información hacia el HLR del móvil, para indicarle que actualice su posición y encamine las llamadas recibidas hacia el área donde se encuentra actualmente el móvil.

El VLR contiene también la información necesaria para gestionar las llamadas originadas o recibidas por los móviles registrados en su base de datos. Esta información incluye los siguientes elementos:

- El identificador internacional de la estación móvil (IMSI);
- El número RDSI internacional de la estación móvil (MSISDN);
- El identificador temporal.

Anexo 2. Teoría de Gráficas, Conceptos Básicos

Una *gráfica* $G = (V, E)$ consiste en un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados *Vértices* o *Puntos* y un conjunto de pares ordenados llamadas *Aristas*. Los vértices de G se denotan como $V(G)$ y las aristas como $E(G)$.

Una *gráfica* se dice *trivial* si consta de un solo vértice.

Si los elementos de E tienen una dirección, representada con una flecha, se llaman *arcos* y se dice que la gráfica G es *dirigida*. Si no tienen dirección se llaman *aristas* y G es *no dirigida*.

Un arco puede representarse como la pareja (i, j) donde $i, j \in V$ son los vértices que une dicha arista. Si $a = (i, j) \in E$, i es el *extremo inicial* de a y j es el *extremo final* de a . Si varias aristas tienen el mismo extremo, inicial y final, se dice que son *aristas múltiples*. Cuando los dos extremos de una arista son iguales entonces se tiene un *lazo*.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica dirigida y sea $i \in V$. Se llama *sucesor* de i a todo vértice $j \in V$ tal que existe $(i, j) \in E$. Se llama *predecesor* de i a todo $j \in V$ tal que existe $(j, i) \in E$.

Un vértice j es *vecino* de un vértice i si existe la arista $(i, j) \in E$. Si la gráfica es dirigida $j \in V$ es vecino de $i \in V$ si j es predecesor o sucesor de i . Algunas veces se dice que i y j son *adyacentes*.

Un *camino* es una secuencia de aristas o arcos en la cual el vértice final de uno es el vértice inicial del que le sigue en secuencia.

Un *camino* es *simple* cuando en éste no se repiten aristas o arcos. Un *camino* se dice *elemental* si en la secuencia no se repiten vértices.

Un *ciclo* es un camino cerrado.

El grado exterior de i es el número de arcos que tienen a i como vértice inicial, se denota como $g^+(i)$. El grado interior de i es el número de arcos que tiene a i como vértice final, se denota como $g^-(i)$.

Una *coloración* de G es una asignación de elementos de un conjunto (a los que llamaremos colores) a los vértices de G , de manera que a cada $i \in V$ le corresponda un color y sólo uno. Una coloración en la que se emplean k colores es una *k-coloración*.

Una *coloración propia* o *buena coloración* de G es una asignación de colores a los vértices de G de manera que para cualesquiera $i, j \in V$ con $(i, j) \in E$ el color de i es distinto al de j . La coloración propia induce una partición del conjunto de vértices V ; a cada partición se le llama *clase de color*.

El mínimo número de colores que son asignados a los vértices de una gráfica de tal manera que es una buena coloración se le llama *número cromático* y se denota como $\chi(G)$.

En relación al número cromático se pueden mencionar los siguientes resultados:

- Para una gráfica completa de n vértices su número cromático es $\chi(G) = n$.
- Para una gráfica bipartita $\chi(G) = 2$.

- Para un ciclo par $\chi(C_n) = 2$.
- Para un ciclo impar $\chi(C_n) = 3$.

En una gráfica $G = (V, E)$ su número cromático es menor o igual al número de vértices.

Anexo 3. Asignación de Frecuencias y etiquetado en Gráficas

La asignación de frecuencias en redes celulares está sujeta a restricciones de interferencia. La interferencia en las frecuencias depende de la proximidad en el espectro radioeléctrico. Por lo tanto, el problema de asignación de frecuencias es uno de los que optimizan el espectro radioeléctrico bajo condiciones de proximidad entre las restricciones.

Introducción

Debido al rápido incremento en el uso de los servicios de comunicación inalámbrica, así como la escasez y el alto costo de la banda del espectro radioeléctrico, se ha incrementado la importancia de utilizar eficientemente el espectro radioeléctrico. La eficiencia puede ser lograda con un óptimo reuso de frecuencia, es decir, el uso simultáneo de la misma parte del espectro radioeléctrico con enlaces de comunicación en diferentes zonas o regiones de la red. Una frecuencia de reuso óptima es restringida a niveles de ruido.

El problema de asignación de frecuencias que minimiza el uso del espectro radioeléctrico satisface las restricciones de interferencia en la forma más simple. En esta forma, cada pareja de celdas en la red, puede usar o no el mismo canal simultáneamente. Esto implica que la distancia entre las celdas que usan frecuencias muy cercanas debería estar a mayor distancia que aquellas celdas que usan frecuencias lejanas. Las restricciones de la asignación de frecuencias resultante de esta consideración son referidas como *restricciones de separación de frecuencias*.

Un modelo en teoría de gráficas puede ser usado para el problema de asignación de frecuencias. Los vértices de la gráfica corresponden a las celdas o estaciones base y las aristas representan la adyacencia entre celdas contiguas. Asumimos que una demanda fija es dada para cada celda, es decir, estamos considerando situaciones estáticas. Desde otro punto de vista, la demanda estática podría representar el promedio o la demanda máxima posible de frecuencias en esa celda. En este modelo, la demanda está representada por un valor entero positivo $w(v)$, asociado a cada vértice v de la gráfica.

Una asignación de valores enteros a los vértices de la gráfica, tal que ciertas condiciones son satisfechas, es referida como un etiquetamiento de la gráfica. Una gráfica etiquetada puede por lo tanto ser vista como un caso especial de una coloración de una gráfica, satisfaciéndose la condición de que las etiquetas de vértices adyacentes deberían ser distintas. La estructura de la gráfica etiquetada nos da la posibilidad de incorporar restricciones de separación de frecuencias. Representamos estas restricciones con una secuencia no decreciente de parámetros enteros positivos c_0, c_1, \dots, c_r de tal forma que $c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_r$, donde r es a lo más el diámetro de la gráfica. Suponiendo que la distancia¹⁷ en la gráfica relaciona la distancia física entre las celdas, requerimos que las frecuencias asignadas a los vértices (celdas) a distancia i deberían tener una separación de al menos c_i .

La restricción c_0 representa la separación entre frecuencias asignadas a la misma celda y es referida como la restricción *co-sitio*. Las restricciones entre diferentes celdas son referidas como restricciones *inter-sitio*. Mientras la restricción *co-sitio* es algunas veces alta comparada con las otras restricciones, en las restricciones *inter-sitio* la mayoría de las veces toman valores pequeños, especialmente uno y dos.

¹⁷ Distancia en una gráfica es la longitud del camino entre dos vértices.

Modelos con Teoría de Gráficas

Una *gráfica restringida* $G = (V, E, c_0, c_1, \dots, c_r)$ es una gráfica $G = (V, E)$ y parámetros enteros positivos c_0, c_1, \dots, c_r , $c_0 \geq c_1 \geq \dots \geq c_r$, llamadas *restricciones*. Las restricciones representan el espacio prescrito de frecuencias para las parejas de frecuencias asignadas al mismo vértice o a diferentes vértices. La *distancia de reuso* de G igual a $r + 1$ es la mínima distancia entre vértices de la gráfica que pueden usar la misma frecuencia. La restricción entre vértices para quienes la distancia es al menos la distancia de reuso es definida como cero.

Una *gráfica restringida con pesos* es una pareja (G, w) , donde G es una gráfica restringida y w es un conjunto de pesos enteros positivos asignados a los vértices de G . Los componentes de w que corresponden al vértice u se denotan como $w(u)$ y se le llama *peso del vértice* u . El peso del vértice u representa el número de llamadas que pueden ser servidas en el vértice u . Usaremos w_{\max} para denotar $\max\{w(v) \mid v \in V\}$ y w_{\min} denota el peso mínimo correspondiente de cualquier vértice en la gráfica. Para cualquier conjunto $T \subseteq V$, usamos $w(T)$ para denotar la suma de los pesos de todos los vértices en T .

En el contexto de este modelo, una *asignación de frecuencias* para una gráfica restringida y con pesos (G, w) donde $G = (V, E, c_0, c_1, \dots, c_r)$ es una correspondencia f de conjuntos de enteros no negativos, que representan a las frecuencias, a los vértices de G que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} |f(u)| &= w(u), & \forall u \in V; \\ i \in f(u) \text{ y } j \in f(v) &\Rightarrow |i - j| \geq c_l, & \forall u, v \in V \text{ tal que } d_G(u, v) = l. \end{aligned}$$

El ancho de banda usado por una asignación de frecuencias es representado por la amplitud¹⁸. La amplitud $S(f)$ de una asignación de frecuencias f de una gráfica restringida y con pesos se define como la diferencia entre la mayor y la menor frecuencia asignadas por f . La amplitud de una gráfica restringida con pesos (G, w) denotada por $S(G, w)$, es la mínima amplitud de cualquier asignación de frecuencias para tal gráfica.

El tipo de gráfica usada comúnmente para modelar las redes celulares es el hexágono. Las gráficas hexagonales modelan las adyacencias entre celdas en un diseño regular parecido a un panal. En redes que representan zonas urbanas, las redes hexagonales no se pueden siempre obtener por las limitaciones del terreno. Por otro lado, las redes basadas en sistemas satelitales operan casi perfectamente en las redes de forma hexagonal.

Los algoritmos para la asignación de frecuencias son regularmente construidos sobre un etiquetación inicial que considera una frecuencia por vértice, esto es conocido como *Etiquetación de Gráficas*. La etiquetación satisface las restricciones c_0, c_1, \dots, c_r si para todo par de vértices u y v la distancia $d(u, v)$ ¹⁹ se define como: $d(u, v) = d_G(u, v) \leq k, |f(u) - f(v)| \geq c_d$. La amplitud $S(f)$ de la etiquetación f es definida como $S(f) = \max f(V) - \min f(V)$, es decir, la diferencia entre el valor de la etiqueta más alta y la más pequeña asignadas por f .

La *amplitud cíclica* de una etiquetación f es el número más pequeño M tal que, para todo par de vértices u, v a distancia d ($d \leq k$) se cumple: $|f(u) - f(v)| \geq M - c_d$.

El caso específico de una gráfica etiquetada con $c_1 = 2, c_2 = 1$ es llamado *coloración de radio*, o λ -*coloración*. Las gráficas etiquetadas y con restricciones de la forma $c_1 = r, c_2 = r - 1, \dots, c_r = 1$ donde r es el diámetro de la gráfica, son

¹⁸ Usaremos amplitud como traducción literal de *span*

¹⁹ En futuro utilizaremos d

llamadas gráficas de etiquetación de radio, la cuales son estudiadas por Chartrand [Chart 00].

Un modelo relacionado con esto se basa en la representación de las restricciones a una distancia mínima que debe existir entre parejas de celdas a las que le son asignadas frecuencias a una distancia fija del espectro radioeléctrico. En otras palabras, dado un conjunto de parámetros no decrecientes d_0, d_1, \dots, d_r y una asignación de frecuencias f se debe satisfacer la condición de que, para cualquier par de vértices (celdas) u y v :

$$i \in f(u) \text{ y } j \in f(v) \text{ y } |i - j| = l \Rightarrow d(u, v) > d_l$$

La distancia $d(u, v)$ es usada para medir la distancia física entre estaciones base, o la distancia entre los vértices de la gráfica.

Otro manera de modelar las restricciones asume que, para cada par de vértices adyacentes u, v una restricción de separación $c_{u,v}$ es dada. Una asignación de frecuencias f debe satisfacer la condición de que, para cada par de vértices u, v :

$$i \in f(u) \text{ y } j \in f(v) \Rightarrow |i - j| \geq c_{u,v}$$

Lo anterior es muy útil si la distancia geográfica no es la única causa de interferencia, un caso visto con frecuencia en ambientes urbanos, donde los factores adicionales son por ejemplo las estructuras que obstruyen el espacio físico y a antenas que afectan el nivel de interferencia. En tales casos, la información de interferencia es regularmente obtenida de medidas y es reportada en la forma de una matriz de interferencia con entradas para cada par de vértices u y v .

Métodos algorítmicos

La versión del problema de asignación de frecuencias considerado por Janssen [Jans 02] es una generalización del problema de coloración de vértices. Una versión con paseos Hamiltonianos muestra que la asignación de frecuencias es NP completo para gráficas de diámetro dos con restricciones $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Esto fue probado por Griggs y Yeh [G & Y 92].

McDiarmid y Reed [McDiarm & Reed 97] han probado que la multicoloración es un problema NP duro para gráficas hexagonales, lo cual implica que la asignación de frecuencias para gráficas hexagonales con restricciones generales es también NP duro. La prueba reduce el problema de multicoloración a un problema de coloración en una gráfica plana.

Todos los algoritmos aquí descritos son estáticos. Esto significa que tales algoritmos intentan encontrar la mejor asignación de frecuencias para una gráfica restringida en particular y un vector particular. En redes que representan casos reales esto no sucede ya que la demanda de llamadas cambia continuamente. En este trabajo se considera una red celular como un sistema dinámico, donde las decisiones de asignación de frecuencias se hacen de manera local y además estas se deben actualizar continuamente para ajustar los parámetros. Una red celular se trata de tal manera que cada base es un servidor y los algoritmos de asignación son tratados como si se ejecutaran de manera simultánea en cada base. Dado que la demanda puede cambiar los servidores deben adaptarse a estos cambios haciendo modificaciones mínimas a la asignación existente.

Algoritmos

Un punto de vista general es dado con algoritmos de asignación de frecuencias con restricciones generales. Algunos de estos algoritmos son adaptaciones de

algoritmos de multicoloración de gráficas, mientras que otros están basados en el etiquetamiento de gráficas.

La mayoría de los trabajos se han desarrollado para el caso con solamente una restricción co-sitio y una restricción c_1 sobre la arista. Como en la multicoloración, una coloración base de una gráfica G con un color por vértice puede ser usado para generar una coloración para el problema de la asignación de frecuencias pesado teniendo a G como su gráfica principal.

A continuación presentamos y ejemplificamos algunos de estos algoritmos para los cuales los datos de entrada tienen propiedades o estructuras específicas como el número cromático, gráficas bipartitas o ciclos impares, entre otras.

Gráficas con número cromático k

En esta sección se describe el Algoritmo A, para gráficas k - coloreables y que requiere una coloración base inicial.

Algoritmo A, para gráficas con número cromático k

Sea $G = (V, E, c_0, c_1)$ una gráfica restringida, y w un vector arbitrario de pesos. Sea una coloración base inicial $f_1: V \rightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}$ de los vértices de G es dada y además satisface c_0, c_1 .

Asignación:

Sea $s = \max\{c_0, k c_1\}$.

Cada vértice v recibe las frecuencias $f(v) + is, i = 0, 1, \dots, w(v) - 1$.

El algoritmo A encuentra el óptimo si $c_0 \geq k c_1$ y también es un algoritmo completamente distribuido (cuando se conocen los datos de la red), entonces cada

vértice puede asignarse sus propias frecuencias independientemente del resto de la red. La única información necesaria de cada vértice para ser capaz de calcular su asignación es la coloración base inicial.

Aquí el problema se encuentra en como encontrar la coloración base inicial. En realidad el desempeño óptimo de este algoritmo depende de que tan buena sea la coloración base.

A continuación ejemplificaremos este algoritmo.

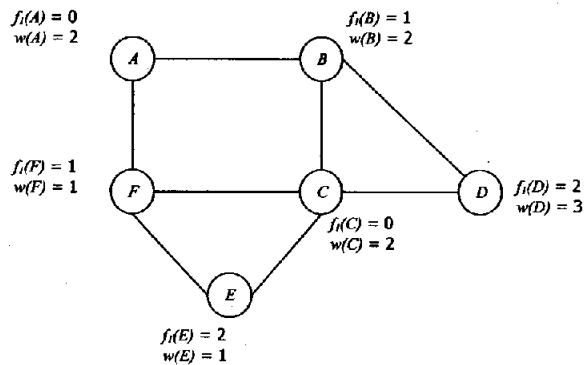


Figura 18: Ejemplo de una gráfica 3 – coloreable

Considere la gráfica G de la Figura 18, donde G es 3 coloreable y además supongamos que se tienen las restricciones: $c_0 = 2$ y $c_1 = 1$.

Los resultados obtenidos al aplicar el Algoritmo A sobre G son dadas en la Tabla 2.

Aplicando el Algoritmo se tiene:

v	A	B	C	D	E	F
k	3	3	3	3	3	3
i	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1, 2	0	0
s	3	3	3	3	3	3
$w(v)$	2	2	2	3	1	1
$f_i(v)$	0	1	0	2	2	1
$f(v)$	0	1	0	2	2	1
$f(v)$	3	4	3	5		
$f(v)$				8		

Tabla 2: Asignación de Frecuencias para la Figura 18

La coloración base usada en el Algoritmo A puede ser vista como una gráfica etiquetada que satisface la restricción $c_i = 1$. Una versión modificada del Algoritmo A, basado en la gráfica etiquetada, puede ser formulado como sigue:

Algoritmo A', para gráficas etiquetadas

Sea $G = (V, E, c_0, c_1, \dots, c_r)$ una gráfica restringida, y w un vector de pesos arbitrario. Sea $f_i : V \rightarrow N$ una etiquetación dada y que satisface las restricciones c_0, c_1, \dots, c_r y tiene una amplitud cíclica M .

Asignación:

Sea $s = \max \{ c_0, M \}$.

Cada vértice v recibe las frecuencias $f(v) + is, i = 0, 1, \dots, w(v) - 1$.

El Algoritmo A' encuentra el óptimo si $c_0 \geq M$. Al igual que el algoritmo A, éste es completamente distribuido, donde solamente la información local de cada vértice determina el valor de su etiqueta.

La gráfica de la Figura 19 tiene amplitud cíclica 2, sus restricciones de distancia son: $c_0 = 5, c_1 = 3$ y $c_2 = 2$.

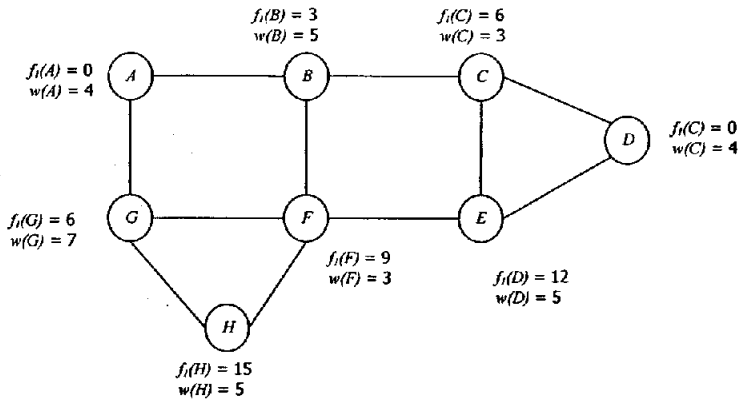


Figura 19: Ejemplo de gráfica etiquetada con amplitud cíclica 2

La Tabla 3 muestra la asignación de frecuencias para cada vértice, después de aplicar el Algoritmo A'.

v	A	B	C	D	E	F	G	H
M	5	5	5	5	5	5	5	5
$w(v)$	4	5	3	4	5	3	7	5
i	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4
s	4	4	4	4	4	4	4	4
$f_i(v)$	0	3	6	0	12	9	6	15
$f(v)$	0	3	6	0	12	9	6	15
$f(v)$	4	7	10	4	16	13	10	19
$f(v)$	8	11	14	8	20	17	14	23
$f(v)$	12	15		12	24		18	27
$f(v)$		19			28		22	31
$f(v)$							26	
$f(v)$							30	

Tabla 3: Asignación de Frecuencias para la Figura 19

Gráficas Bipartitas

Para gráficas bipartitas con restricciones c_0 y c_1 , el Algoritmo A da una asignación de frecuencias óptima si $c_0 \geq 2 c_1$. Si $c_0 < 2 c_1$, las gráficas bipartitas pueden ser

coloreadas óptimamente, usando el algoritmo B, dado por Gerke [Gerke 99]. Parecido al algoritmo A, este algoritmo usa una coloración base de los vértices, pero si un vértice tiene demanda mayor que cualquiera de sus vecinos entonces inicialmente se obtienen ciertas frecuencias que están $2c_1$ separadas mientras que las últimas frecuencias están separadas a c_0 .

Algoritmo B, para gráficas bipartitas cuando $c_1 \leq c_0 \leq 2c_1$

Sea $G = (V, E, c_0, c_1)$ una gráfica bipartita restringida de n vértices, donde se cumple que $c_1 \leq c_0 \leq 2c_1$ y w es un vector arbitrario de pesos. Se asume una coloración base $f: V \rightarrow \{0, 1\}$.

Para cada vértice v , se define $p(v) = \max \{w(u) \mid uv \in E \text{ ó } u = v\}$.

Asignación:

Inicialmente, cada vértice v recibe las frecuencias:

$$f(v)c_1 + 2ic_1 \quad i = 0, 1, \dots, p(v) - 1.$$

Si $w(v) > p(v)$, entonces v recibe las frecuencias adicionales:

$$f(v)c_1 + 2p(v)c_1 + ic_0 \quad i = 0, \dots, w(v) - p(v) - 1.$$

La amplitud de la asignación anterior es $\max_{(u,v) \in E} \{c_0w(u) + (2c_1 - c_0w(v))\}$, y este valor es el máximo que la amplitud puede tomar.

Ciclos impares

La asignación de frecuencias para ciclos impares fue estudiada por primera vez por Griggs y Yeh [Griggs&Yeh 92]. Ellos dan una etiquetación para cuando las restricciones $c_1, c_2 = 2$ y se tiene una amplitud de 4 y una amplitud cíclica de 6. La etiquetación repite las frecuencias 0, 2, 4 a lo largo del ciclo, con una pequeña

adaptación cerca del final si la longitud del ciclo es no divisible por 3. Esta etiquetación puede ser usada para restricciones generales c_1, c_2 si todos los valores asignados en el etiquetado son múltiplos de $\max\{c_2, c_1/2\}$.

Algoritmo C. para ciclos impares

Sea C_n un ciclo con n vértices y restricciones c_0 y c_1 , donde $n > 3$ e impar, y w es un vector de pesos arbitrario. La gráfica tiene una amplitud cíclica de $c_R = \frac{2n c_1}{n-1}$.

Fijemos $s = \max\{c_0, c_1\}$. Sean los vértices del ciclo $\{1, \dots, n\}$ numerados, en orden cíclico, donde el vértice 1 es el vértice de peso máximo del ciclo. Sea m con $m > 1$ el entero impar más pequeño tal que $s \geq \frac{2m}{m-1} c_1$.

Asignación:

Para cada vértice i , el algoritmo le asigna las frecuencias:

$$b(i) + js, j = 0, \dots, w(i) - 1,$$

y el etiquetado de la gráfica $b: V \rightarrow [0, s - 1]$ se define como:

$$b(i) = \begin{cases} (i-1)c_1 \bmod s & \text{donde } 1 \leq i \leq m; \\ 0 & \text{donde } i > m \text{ y es par;} \\ (m-1)c_1 \bmod s & \text{donde } i > m \text{ y es impar.} \end{cases}$$

Note que este algoritmo puede ser implementado solamente de una manera distribuida, para cada vértice se deben conocer todos los pesos para calcular m , y así determinar el valor de la asignación inicial.

Gráficas hexagonales

La primera etiquetación para gráficas hexagonales fue dada por Van den Heuvel, Leese y Sheperd [VdH, Lees & Shep 98] con progresiones aritméticas. Las etiquetas, como se definieron por sus parámetros a_1 , a_2 y n son dadas a continuación:

Parámetros	N	a_1	a_2
$c_1 \geq 2c_2$	$3c_1 + 3c_2$	$2c_1 + c_2$	c_1
$(3/2)c_2 \leq c_1 \leq 2c_1$	$9c_2$	$5c_2$	$2c_2$
$c_1 \leq (3/2)c_2$	$4c_1 + 3c_2$	$2c_1 + c_2$	c_1

Esto puede verse ya que las gráficas hexagonales admiten una coloración regular con tres colores. Como consecuencia el Algoritmo A será óptimo para las restricciones c_0, c_1 tal que $c_0 \geq 3c_1$. Un algoritmo de asignación de frecuencias para gráficas hexagonales con restricciones $c_0 = 2$ y $c_1 = 1$, el cual fue dado por Ubéda [Ubéda 97].

Janssen [Janssen 99] proporciona más algoritmos para gráficas hexagonales con todos los valores para las restricciones c_0, c_1 . Los resultados se obtienen combinando un número de algoritmos básicos para gráficas hexagonales y gráficas bipartitas. Un algoritmo parecido así descrito se puede ver en [Ubéda 97].

Algoritmo D, para gráficas 3 coloreables

Sea $G = (V, E, c_0, c_1)$ una gráfica con restricciones, y w un vector de pesos arbitrario. Sea $s = \max\{c_1, c_0/2\}$ un valor fijo y $T \geq 3w_{\max}$, T es un múltiplo de 6. Sea $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ una base de coloración de G . Denote una base de colores 0, 1, 2 como rojo, azul y verde, respectivamente.

Un conjunto de frecuencias rojas es dado, el cual consiste de un primer conjunto R_1 y un segundo conjunto R_2 , donde:

$$R_1 = [0, 2s, \dots, (T/3 - 2)s] \text{ y,}$$

$$R_2 = [(T/3 + 1)s + c_0, (T/3 + 3)s + c_0, \dots, (2T/3 - 1)s + c_0]$$

Las frecuencias azules consisten de un primer conjunto A_1 y un segundo conjunto A_2 donde:

$$A_1 = [(T/3)s + c_0, (T/3 + 2)s + c_0, \dots, (2T/3 - 2)s + c_0] \text{ y,}$$

$$A_2 = [(2T/3 + 1)s + 2c_0, (2T/3 + 3)s + 2c_0, \dots, (T - 1)s + 2c_0]$$

Y por último las frecuencias verdes consisten en un primer conjunto V_1 y un segundo conjunto V_2 , donde:

$$V_1 = [(2T/3)s + 2c_0, (2T/3 + 2)s + 2c_0, \dots, (T - 2)s + 2c_0] \text{ y,}$$

$$V_2 = [s, 3s, \dots, (T/3 - 1)s]$$

Asignación:

A cada vértice v se le asigna $w(v)$ frecuencias por cada clase cromática, donde el primer conjunto es agotado antes de iniciar con el segundo conjunto y las frecuencias de menor valor son siempre usadas primero en cada conjunto.

Se puede observar que el espectro radioeléctrico es dividido en tres partes, cada uno contiene $T/3$ frecuencias, con una separación de s entre frecuencias consecutivos. La primera parte del espectro radioeléctrico consiste en la alternación de frecuencias de R_1 y V_2 , la segunda parte alterna frecuencias de A_1 y R_2 , y la tercera parte alterna frecuencias de V_1 y A_2 .

La amplitud usada por el algoritmo D es igual a $sT + 2c_0 = \max\{c_1, c_0/2\}T + 2c_0$, donde T es al menos $3w_{max}$.

Para obtener algoritmos óptimos en gráficas hexagonales y valores diferentes de los parámetros c_0, c_1 , el algoritmo D se modifica haciendo una combinación de los algoritmos A y B pero esto no será visto en este trabajo.

Ejemplo

Considere la gráfica G presentada en la Figura 20. G es una gráfica 3 coloreable y con restricciones: $c_0 = 3$ y $c_1 = 2$.

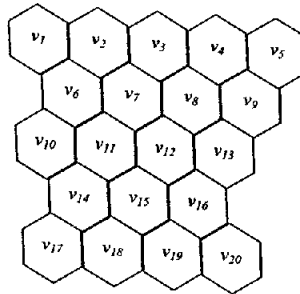


Figura 20: Ejemplo de malla hexagonal

Los conjuntos quedaron:

$$R_l = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$R_r = \{29, 33, 37, 41, 45, 49\}$$

$$A_l = \{27, 31, 35, 39, 43, 47\}$$

$$A_r = \{56, 60, 64, 68, 72, 76\}$$

$$V_l = \{54, 58, 62, 66, 70, 74\}$$

$$V_r = \{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$$

Las Tabla 4 y Tabla 5 muestran la asignación que resulta de aplicar el algoritmo D para gráficas hexagonales a la Figura 20.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w(v)$	4	5	3	4	5	3	7	6	9	5
$f_i(v)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
e_a	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
c_i	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
j	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
w_{max}	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Jw_{max}	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
T	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
Color	R	A	V	R	A	V	R	A	V	R
	R1	A1	V1	R1	A1	V1	R1	A1	V1	R1
	R2	A2	V2	R2	A2	V2	R2	A2	V2	R2
Fase I										
T/A	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	10	22	34	10	22	34	10	22	34	10
	23	35	11	23	35	11	23	35	11	23

v	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$w(v)$	6	8	10	11	6	5	3	6	8	7
$f_i(v)$	1	2	0	2	0	1	0	1	2	0
e_a	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
c_i	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
j	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
w_{max}	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Jw_{max}	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
T	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
Color	A	V	R	V	R	A	R	A	V	R
	A1	V1	R1	V1	R1	A1	R1	A1	V1	R1
	A2	V2	R2	V2	R2	A2	R2	A2	V2	R2
Fase I										
T/A	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	27	34	10	10	22	10	22	34	10	10
	35	11	23	11	23	35	23	35	11	23

Tabla 4: Asignación de Frecuencias para la Figura 20

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w(v)$	4	5	3	4	5	3	7	6	9	5
Asignación	0, 4, 8, 12	27, 31, 35, 39, 43	54, 58, 62	0, 4, 8, 12	27, 31, 35, 39, 43	54, 58, 62	0, 4, 8, 12, 16, 20, 29, 33	27, 31, 35, 39, 43, 47	2, 6, 10, 14, 18, 22, 54, 58, 62	0, 4, 8, 12, 16, 20
v	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$w(v)$	6	8	10	11	6	5	3	6	8	7
Asignación	27, 31, 35, 39, 43, 47	2, 6, 10, 14, 18, 22, 54, 58	0, 4, 8, 12, 16, 20, 29, 33, 37, 41	2, 6, 10, 14, 18, 22, 54, 58, 62, 66	0, 4, 8, 12, 16, 20	27, 31, 35, 39, 43	0, 4, 8	27, 31, 35, 39, 43, 47	2, 6, 54, 58, 62, 66, 70, 74	0, 4, 8, 12, 16, 20, 29

Tabla 5: Asignación de Frecuencias para la Figura 20

Un ejemplo especial

Aplicaremos el Algoritmo A' a la gráfica mostrada en la Figura 21, la cual representa un mapa de la ciudad de Filadelfia; problema que se revisa con detalle en el Capítulo 3.

$m = (8, 25, 8, 8, 8, 15, 18, 52, 77, 28, 13, 15, 31, 15, 36, 57, 28, 8, 10, 13, 8)$,
donde m es el vector que muestra la demanda de cada celda:

Tomando en cuenta que las restricciones de distancia entre las regiones se definen como $c_0 = 5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ se calculará primero la amplitud cíclica de la red y así podremos saber si el algoritmo A' se puede aplicar.

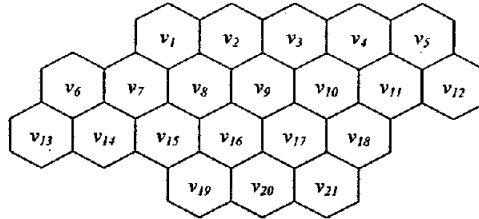


Figura 21: Mapa Filadelfia

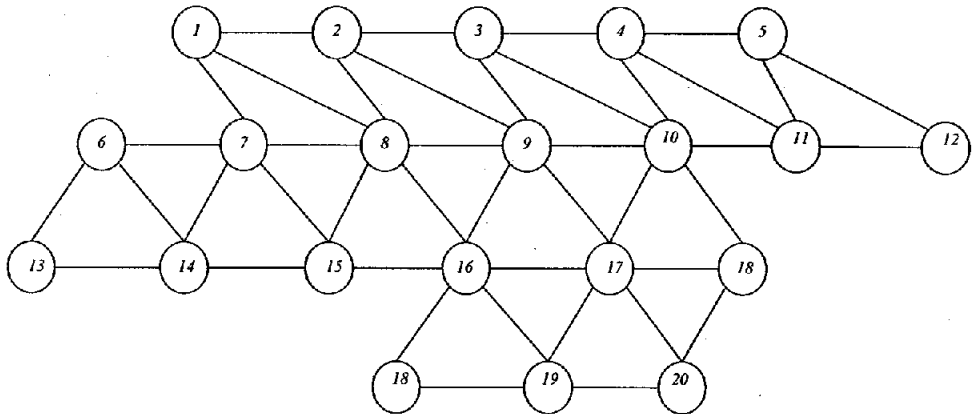


Figura 22: Gráfica asociada al mapa

A continuación se muestra la coloración base para cada vértice respetando las restricciones $c_0 = 5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

$f_i(1) = 0$	$f_i(2) = 2$	$f_i(3) = 4$	$f_i(4) = 0$
$f_i(5) = 2$	$f_i(6) = 2$	$f_i(7) = 4$	$f_i(8) = 6$
$f_i(9) = 10$	$f_i(10) = 8$	$f_i(11) = 6$	$f_i(12) = 4$
$f_i(13) = 0$	$f_i(14) = 10$	$f_i(15) = 8$	$f_i(16) = 12$
$f_i(17) = 14$	$f_i(18) = 16$	$f_i(19) = 0$	$f_i(20) = 2$
$f_i(21) = 4$			

Y haciendo los cálculos para encontrar la amplitud cíclica de la gráfica con la coloración antes mencionada y así saber si puede ser aplicado el Algoritmo A' se tiene que la amplitud cíclica es 3 y como $c_0 = 5$ y este valor es mayor que 3 entonces se aplica el Algoritmo A' y en las Tablas 6 y 7 se muestra la asignación de frecuencias para cada vértice.

La Figura 21 es una malla hexagonal pero el algoritmo D visto en este Anexo no considera 3 restricciones, es decir, en este caso especial tenemos $c_2 = 2$ y el algoritmo de la sección anterior sólo resuelve un problema con dos restricciones.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$w(v)$	8	25	8	8	8	15	18	52	77	28
i	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 24	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 14	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 17	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 51	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 76	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 27
co	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
s	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$f_1(v)$	0	2	4	0	2	2	4	6	10	8
$f(v)$	0	2	4	0	2	2	4	6	10	8
$f(v)$	5	7	9	5	7	7	9	11	15	13
$f(v)$	10	12	14	10	12	12	14	16	20	18
$f(v)$	15	17	19	15	17	17	19	21	25	23
$f(v)$	20	22	24	20	22	22	24	26	30	28
$f(v)$	25	27	29	25	27	27	29	31	35	33
$f(v)$	30	32	34	30	32	32	34	36	40	38
$f(v)$	35	37	39	35	37	37	39	41	45	43
$f(v)$		42				42	44	46	50	48
$f(v)$		47				47	49	51	55	53
$f(v)$		52				52	54	56	60	58
$f(v)$		57				57	59	61	65	63
$f(v)$		62				62	64	66	70	68
$f(v)$		67				67	69	71	75	73
$f(v)$		72				72	74	76	80	78
$f(v)$		77					79	81	85	83
$f(v)$		82					84	86	90	88
$f(v)$		87					89	91	95	93
$f(v)$		92						96	100	98
$f(v)$		97						101	105	103
$f(v)$		102						106	110	108
$f(v)$		107						111	115	113
$f(v)$		112						116	120	118
$f(v)$		117						121	125	123
$f(v)$		122						128	130	128
$f(v)$								131	135	133
$f(v)$								136	140	138
$f(v)$								141	145	143
$f(v)$								146	150	
$f(v)$								151	155	
$f(v)$								156	160	
$f(v)$								161	165	
$f(v)$								168	170	
$f(v)$								171	175	
$f(v)$								176	180	
$f(v)$								181	185	
$f(v)$								186	190	
$f(v)$								191	195	
$f(v)$								196	200	
$f(v)$								201	205	
$f(v)$								206	210	
$f(v)$								211	215	
$f(v)$								216	220	
$f(v)$								221	225	
$f(v)$								226	230	
$f(v)$								231	235	
$f(v)$								236	240	
$f(v)$								241	245	
$f(v)$								246	250	
$f(v)$								251	255	
$f(v)$								256	260	
$f(v)$								261	265	
$f(v)$									270	
$f(v)$									275	
$f(v)$									280	
$f(v)$									285	
$f(v)$									290	
$f(v)$									295	
$f(v)$									300	
$f(v)$									305	
$f(v)$									310	

Tabla 6: Asignación de Frecuencias para la Figura 22

v	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
M	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$n(v)$	13	15	31	15	36	57	28	8	10	13	13
i	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 12	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 14	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 30	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 14	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 36	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 56	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 27	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 12	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 12
cv	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
s	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$f_1(v)$	6	4	0	10	8	12	14	16	0	2	4
$f(v)$	6	4	0	10	8	12	14	16	0	2	4
$f(v)$	11	9	5	15	13	17	19	21	5	7	9
$f(v)$	16	14	10	20	18	22	24	26	10	12	14
$f(v)$	21	19	15	25	23	27	29	31	15	17	19
$f(v)$	26	24	20	30	28	32	34	36	20	22	24
$f(v)$	31	29	25	35	33	37	39	41	25	27	29
$f(v)$	36	34	30	40	38	42	44	46	30	32	34
$f(v)$	41	39	35	45	43	47	49	51	35	37	39
$f(v)$	46	44	40	50	48	52	54		40	42	44
$f(v)$	51	49	45	55	53	57	59		45	47	49
$f(v)$	56	54	50	60	58	62	64			50	52
$f(v)$	61	59	55	65	63	67	69			55	57
$f(v)$	66	64	60	70	68	72	74			60	62
$f(v)$		69	65	75	73	77	79				65
$f(v)$		74	70	80	78	82	84				70
$f(v)$			75		83	87	89				
$f(v)$			80		88	92	94				
$f(v)$			85		93	97	99				
$f(v)$			90		98	102	104				
$f(v)$			95		103	107	109				
$f(v)$			100		108	112	114				
$f(v)$			105		113	117	119				
$f(v)$			110		118	122	124				
$f(v)$			115		123	127	129				
$f(v)$			120		128	132	134				
$f(v)$			125		133	137	139				
$f(v)$			130		138	142	144				
$f(v)$			135		143	147	149				
$f(v)$			140		148	152					
$f(v)$			145		153	157					
$f(v)$			150		158	162					
$f(v)$					163	167					
$f(v)$					168	172					
$f(v)$					173	177					
$f(v)$					178	182					
$f(v)$					183	187					
$f(v)$						192					
$f(v)$						197					
$f(v)$						202					
$f(v)$						207					
$f(v)$						212					
$f(v)$						217					
$f(v)$						222					
$f(v)$						227					
$f(v)$						232					
$f(v)$						237					
$f(v)$						242					
$f(v)$						247					
$f(v)$						252					
$f(v)$						257					
$f(v)$						262					
$f(v)$						267					
$f(v)$						272					
$f(v)$						277					
$f(v)$						282					
$f(v)$						287					
$f(v)$						292					
$f(v)$											
$f(v)$											
$f(v)$											
$f(v)$											

Tabla 7: Asignación de Frecuencias para la Figura 22

Anexo 4. Programación Entera

Investigación de Operaciones (IDO)

La Investigación de Operaciones (IDO) se remonta al siglo pasado, a principios de la "Segunda Guerra Mundial", cuando se empezó a utilizar para asignar "recursos escasos" a las operaciones militares y a las actividades de cada operación de este tipo de tal forma que esta asignación fuera lo más efectiva posible. Por lo anterior las administraciones militares americanas e inglesas recurrieron a los científicos para que estos resolvieran este tipo de problemas así como problemas de tipo estratégico y táctico.

El éxito que tuvo la IDO en el campo militar hizo que la industria, los negocios y el gobierno se interesaran en este campo y fue para 1951 cuando se introdujo por completo en Gran Bretaña mientras Estados Unidos se encontraba en el proceso de introducirla a estas áreas.

Científicos que habían participado en la Guerra en el área de IDO se dedicaron a buscar resultados sustanciales en este campo, de lo que se obtuvieron grandes avances. Uno de los más importantes ejemplos es el método simplex para resolver problemas de programación lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig. Aunado al desarrollo teórico, la aparición de las computadoras facilitó el crecimiento de esta disciplina, debido a que las computadoras podían hacer los cálculos mucho más rápido que los humanos.

La IDO se ocupa de la toma de decisiones óptima y del modelado de sistemas determinísticos y probabilísticos que se originan en la vida real²⁰.

²⁰ Frederick S. Hillier, Introducción a la Investigación de Operaciones, 5 Edición, pág. 5.

Generalmente la investigación de operaciones considera las siguientes etapas para la solución de un problema:

1. Formulación del problema.
2. Construcción de un modelo matemático que represente el sistema.
3. Obtención de una solución a partir del modelo.
4. Prueba del modelo y la solución obtenida.
5. Establecimiento de controles sobre la solución.
6. Implantación de la solución.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema en forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayuda a revelar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera, indica con más claridad que datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita simultáneamente el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interrelaciones. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas poderosas, además de las computadoras, en el análisis del problema. Sin duda, muchos de los componentes de un modelo pueden quedar vinculados al uso de paquetes de computación.

Por otro lado, existen obstáculos que deben evitarse al usar modelos matemáticos. Un modelo es necesariamente, una idealización abstracta del problema, por lo que casi siempre se requieren aproximaciones y suposiciones de simplificación si se quiere que el modelo sea manejable (capaz de ser resuelto). Por lo tanto, debe tenerse cuidado de que el modelo sea siempre una representación válida del problema. El criterio apropiado para juzgar la validez es verificar si este predice o no con suficiente exactitud los efectos relativos de los diferentes cursos de acción,

para poder tomar una decisión que tenga sentido. En consecuencia, no es necesario incluir detalles sin importancia o factores que tiene aproximadamente el mismo efecto sobre todas las opciones. Por lo que, lo que se requiere es que exista una alta correlación entre la predicción del modelo y lo que ocurre en la vida real.

Métodos Cuantitativos que estudia la IDO

Los problemas que se presentan en la vida real, y que frecuentemente se recurring, llegan a tener ciertas similitudes y es por ello que pueden pertenecer a alguno de los problemas prototipos que a continuación se mencionan:

- Teoría de Probabilidades.
- Técnicas matemáticas.
- Modelos de secuenciación.
- Modelos de reemplazo.
- Modelos de inventario.
- Modelos de asignación.
- Modelos de programación dinámica.
- Modelos competitivos.
- Modelos de líneas de espera.
- Técnicas de simulación.
- Modelos de ruta.
- Métodos de búsqueda y heurísticos.
- Métodos combinados de investigación de operaciones.

Programación Lineal

La segunda etapa de la IDO para resolver un problema es la "Construcción de un modelo matemático que represente el sistema". Los modelos matemáticos son una

representación idealizada de la realidad pero expresados en términos de símbolos y expresiones matemáticas, por ejemplo, el modelo matemático de un problema industrial es el sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas que describen la esencia del problema. Así, se pueden tomar n decisiones cuantificables relacionadas unas con otras, se representan como variables de decisión (x_1, x_2, \dots, x_n) para las que se deben determinar los valores respectivos. La medida de efectividad (ganancia para el problema industrial) se expresa entonces como una función matemática de estas variables de decisión $(G = 3x_1 + 2x_2 + \dots + 5x_n)$. Esta función se llama función objetivo. También se expresan matemáticamente todas las limitaciones que se puedan imponer sobre los valores de las variables de decisión, casi siempre en forma de ecuaciones o desigualdades $(x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2 \leq 10)$. Tales expresiones matemáticas de las limitaciones, con frecuencia reciben el nombre de restricciones. Las constantes (los coeficientes o el lado derecho de las ecuaciones) en las restricciones y en la función objetivo se llaman parámetros del modelo. El modelo matemático puede expresarse entonces como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se maximice la función dada, sujeta a las restricciones dadas. Una clase importante importantes de este tipo de problemas los son los modelos de programación lineal, en los cuales las funciones matemáticas de la función objetivo y las restricciones son lineales.

Modelo general (Forma estándar)

Maximizar (Minimizar) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

donde:

i = recurso, $i = 1, 2, \dots, n$.

j = actividades, $j = 1, 2, \dots, m$.

z = medida global de efectividad.

c_j = coeficiente de utilidad (maximización) o coeficiente de costo (minimización).

X_j = nivel de actividad j , representa la variable de decisión.

B_i = cantidad disponible para asignar a las actividades (requerimiento mínimo que debe satisfacerse), se le llama lado derecho.

A_{ij} = cantidad del recurso i que consume cada unidad de la actividad j .

Algunas veces el modelo anterior no se ajusta a nuestra realidad por lo que otras formas legítimas son:

- Algunas restricciones de las siguientes formas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

ó

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

- Cuando las variables de decisión no tienen la restricción de no negatividad:

X_i no restringida en signo, para algunos valores de i .

Cualquier problema que incluya una o varias de las formas mencionadas con anterioridad es considerado como un problema de programación lineal.

Terminología para las soluciones del modelo

Algunas veces podemos estar acostumbrados que la palabra solución significa la respuesta final a un problema, pero en programación lineal esto es muy distinto. Es por esto que cualquier conjunto de valores específicos para las variables de decisión se llama solución, sin que esto sea una posibilidad deseable o siquiera permitida. Es por ello que hay que identificar los tipos de soluciones usando un adjetivo apropiado.

Una *solución factible* es aquella en la que todas las restricciones se satisfacen.

La *región de soluciones factibles* es la colección de todas las soluciones factibles. Es posible que en un problema no se tenga región de soluciones factibles. Dado que existen soluciones factibles, la programación lineal tiene como objetivo encontrar a la mejor de tal forma que esta sea la que en realidad maximice o minimice la función objetivo.

Una *solución óptima* es aquella solución que es factible y además lleva al valor más favorable de la función objetivo. El valor más favorable es el valor más grande o más pequeño dependiendo si la función objetivo es de maximizar o minimizar, respectivamente, sobre toda la región de soluciones factibles.

Las soluciones de un problema de programación lineal pueden ser:

- Una única solución óptima.
- Varias soluciones óptimas (soluciones múltiples).
- No tener soluciones óptimas.

Métodos de solución de Problemas de Programación Lineal

El método utilizado para la solución de problemas de programación lineal es el que desarrolló George Dantzig en 1947, el método simplex, el cual hoy en día ha probado ser extraordinariamente eficiente que se usa como rutina en las computadoras para resolver problemas muy grandes.

Cabe mencionar que otros de los métodos muy utilizados siempre y cuando el problema de programación lineal sea de dos variables es el método gráfico.

Existen varios software que utilizan como rutina a este método, y que frecuentemente son utilizados para resolver problemas de programación lineal, de los cuales se mencionan: QSB[®], LINDO[®], LINGO[®], CPLEX[®], TORA[®].

Programación Entera

"Si puedes evitarte la programación entera mucho mejor"²¹

Muchos problemas de la vida real las variables de decisión sólo tienen sentido si su valor es entero. Por ejemplo, problemas de asignación de personas a actividades. Por lo que el sólo hecho de exigir en un problema el que las variables tomen valores enteros hace que un problema de programación lineal se transforme en un problema de programación entera.

El modelo matemático de programación entera es igual que el problema de programación lineal sólo que con la restricción adicional de que todas las variables deben de tomar valores enteros. Para el caso cuando sólo algunas variables deben ser enteras y las otras son lineales se dice que es un problema de programación

²¹ Hamdy A. Taha, Conferencia en DEPEFI Ciudad Universitaria, UNAM, 2003, México D.F.

entera mixta. Cuando en un problema de programación entera sólo existen dos posibilidades para las variables (0 – 1) estas son llamadas variables binarias y al problema comúnmente se le nombra como problema de programación entera binaria.

Maximizar (Minimizar) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ y además enteras.

A los problemas de programación entera se les considera dentro de los problemas de optimización combinatoria. Un problema combinatorio es aquel que asigna valores numéricos discretos a algún conjunto finito de variables X , de tal forma que satisfaga un conjunto de restricciones y minimice o maximice una función objetivo.

La programación entera trata de resolver problemas de: Distribución de bienes, Planeación de la producción y secuenciación de máquinas, Problemas de inversión de capital, Localización de servicios, Selección de cartera, Diseño de redes de telecomunicaciones y transporte.

Algunos problemas representativos de la programación entera.

- El problema del agente viajero.
- El problema del cartero chino.
- El problema de la mochila.
- Planeación de máquinas en paralelo.
- Coloración de vértices.
- Apareamiento o Acoplamientos.
- Cubierta de conjuntos.
- Problema de Cargo Fijo.

Métodos de solución

Métodos exactos

- Método de planos de corte.
- Método de ramificación y acotamiento
- Método de la teoría de grupos
- Métodos de la programación dinámica.

Métodos heurísticos

- Métodos constructivos
- Métodos de descomposición
- Métodos de reducción
- Manipulación del modelo
- Métodos de búsqueda por entorno

Se han desarrollado numerosas aplicaciones de programación entera en las cuales se utiliza como herramienta principal a la programación lineal, es decir, nos olvidamos de la condición de integridad y se resuelve el problema como un

problema de programación lineal continua, esto se conoce como "relajación", es decir se relaja el problema.

Ejemplo

Debido a una escasez de gasolina, la demanda de boletos de Aeroméxico ha aumentado mucho en los últimos meses. La demanda ha crecido tanto que ahora la aerolínea está analizando la posibilidad de adquirir varios aviones nuevos. Existen tres tipos de aviones de entre los cuales se pueden elegir el DC-33, el Boeing 797 y el Lockheed Bi-Star. En la siguiente tabla se muestra el costo, capacidad y tiempo de mantenimiento requerido para cada tipo de avión. Aeroméxico desea adquirir los nuevos aviones al mínimo costo posible, sujeta a los requerimientos de capacidad y mantenimiento.

Los nuevos aviones deben transportar un total combinado de cuando menos 3,400 pasajeros y deben tener un tiempo combinado total de mantenimiento que no exceda las 250 horas mensuales. Se complica aún más la decisión de que aviones adquirir porque sólo existen disponibles para su compra cinco aviones Bi-Star.

Avión	Costo (millones)	Capacidad	Tiempo de mantenimiento (hrs)
DC-33	10	350	25
Boeing 797	15	450	15
Lockheed Bi-Star	12	400	15

Planteamiento

Variables:

x_1 = número de DC-33 que se compran

x_2 = número de B-797 que se compran

x_3 = número de Bi-Star que se compran

$$\text{Min } z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

Sujeto a:

$$350x_1 + 450x_2 + 400x_3 \geq 3,400$$

$$25x_1 + 15x_2 + 15x_3 \leq 250$$

$$x_3 \leq 5$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y enteros.

Solución

$$x_1 = 4 \text{ y } x_3 = 5$$

Por lo que la decisión que debe tomar Aeroméxico es comprar tres aviones del tipo DC-33 y cinco aviones tipo Lockheed Bi-Star.

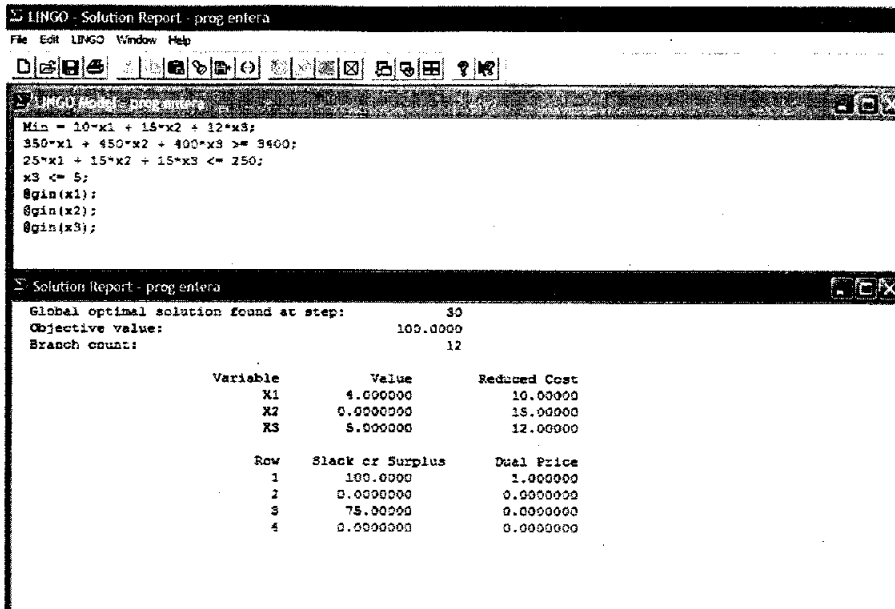


Figura 23: Pantalla de solución del problema con LINGO 6.0

Pueden parecer que los problemas de programación entera son fáciles de resolver. Está garantizado que los problemas de programación entera tiene un número finito de soluciones factibles. Pero existen dos falacias en este tipo de razonamiento:

- 1) El tener un número finito de soluciones asegura que el problema se puede resolver y,
- 2) Eliminar algunas soluciones factibles (las no enteras) de un problema de programación lineal será más fácil de resolverlo.

Bibliografía

http://www.cft.gob.mx/html/3_con/consu/consum03.html

[http://www.coit.es/museo/cronolog/1940/movil.htm#La Radio Móvil.El concepto celular](http://www.coit.es/museo/cronolog/1940/movil.htm#La%20Radio%20M%C3%B3vil.El%20concepto%20celular)

http://www.cofetel.gob.mx/html/la_era/info_tel/it0.shtml

<http://enterate.unam.mx/Articulos/agosto/telefcel.htm>

<http://www.eveliux.com/articulos/telefoniamovil.html>

<http://matsun1.matesco.unican.es/maurica/2000/konigsberg.html>

<http://www.noticiasdot.com/publicaciones/2003/0803/1208>

<http://personal.iddeo.es/isolte/fcelu/movint.htm>

<http://www.yucatan.com.mx/especiales/celular/historia>

<http://www.yucatan.com.mx/especiales/celular/3g.asp>

Aardal, P.M. van Hoesel, Koster, Mannino, Sassano, "Models and Solution Techniques for Frequency Assignment Problems", ZIB-Report 01-40, December 28, 2001.

Ackoff Russell L. & Sasieni Maurice W., "Fundamentos de Investigación de Operaciones", Editorial Limusa, 1977.

Eisenblätter Andreas, M. Grötschel, A. M. C. A. Koster, "Frequency Planning and Ramificaciones of Coloring", ZIB-report 00-47, Konrad-Zuse-Zentrum fuer Informationstechnik Berlin (ZIB), December 2000. Published in *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 22 (1), 2002, pp. 51-88

Janssen C.M., "Channel assignment and graph labeling", Dept. of Math & Stats., Dalhousie University, Halifax, N.S., Canada.

Echebeste Escobar Laura Irene, "Un enfoque al Problema de Asignación de Frecuencias, usando Teoría de Gráficas", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, 2004.

Flores de la Mota Idalia, "Apuntes de Programación Entera", Facultad de Ingeniería, 2002.

Hernández Ayuso Ma. Del Carmen, "Introducción a la Teoría de Redes", Sociedad Matemática mexicana, Segunda Edición 1997.

Hillier Frederick S. & Lieberman Gerald J., "Introducción a la Investigación de Operaciones", Mc Graw Hill, Quinta Edición, 1994.

Janssen Jeannette, K. Kilakos, "An Optimal Solution to the Philadelphia Channel Assignment", Vehicular Technology, IEEE Transactions on May 1999, pp. 1012-1014

Mc Donald V.H., "The celular concept", American Telephone and Telegraph Company, The Bell System Technical Journal, Vol. 58, No. 1, January 1979, USA.

Salazar Solano Ma. Isabel, "Planteamiento, Solución e Interpretación de Problemas de Programación Lineal", 2002, Facultad de Ciencias.

Referencias

[Bayb 82] Baybars I., "Optimal assignment of broadcasting frequencies", *European Journal of Operations Research* 9 (1982), pp. 257-263.

[Bert 00] Bertossi Alan A., Cristina M. Pinotti, Richard B. Tan, "Efficient use of radio spectrum in wireless networks with channel separation between close stations", *Proceedings of the 4th international workshop on Discrete algorithms and methods for mobile computing and communications*, pp.18-27, August 11-11, 2000, Boston, Massachusetts, United States.

[Bj 00, Gm 86, Tf 00] Björklund P., Värbrand P., and Yuan D., "Optimal gsm network planning with frequency hop-ping", Presented at the 5th INFORMS Telecommunication Conference, Boca Raton, USA, March 5-8 2000.

Gamst A., "Application of graph theoretical methods to GSM radio network planning", *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, 1991, pp. 942-945.

Toftegaard Nielsen and Wigard J., "Performance enhancements in a frequency hopping GSM network", *Kluwers Academic Publishers*, 2000, ISBN: 0 7923 7819 9.

[Born 98] Borndörfer R., Eisenblätter A., Grötschel M., and Martin A., "The orientation model for frequency assignment problems", *Tech. Report TR 98-01*, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1998.

[Chart 00] Chartrand G., Erwin D., Harary F., and Zang P., "Radio labelings of graphs", *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 2000.

[Ch&Kim 97] K.-N. Chang and S. Kim, "Channel allocation in cellular radio networks", *Computers and Operations Research* 24 (1997), pp. 849-860.

[Chr 75] Christodes N., "Graph theory: An algorithmic approach", Academic Press, London, 1975.

[CNET 2000] Caminada A., CNET France Telecom frequency assignment benchmark.

http://www.cs.cf.ac.uk/User/Steve.Hurley/f_bench.htm

http://www.crt.umontreal.ca/~brigitt/telecom/TEST_PROBS/prob2.html,2000

[Eis 00] Eisenblätter A., Grötschel M., and A. M. C. A. Koster, "Frequency assignment and ramifications of coloring", ZIB-report 00-47, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Berlin, Germany, 2000, To be published in *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.

[Fitzpatrick 00] Fitzpatrick S., Janssen J., and Nowakowski R., "Distributive online channel assignment for hexagonal cellular networks with constraints", Technical Report 0-2000-14, GERAD, NEC, Montreal, March 2000.

[Fsc 00] Fischetti M., Lepschy C., Minerva G., Romanin-Jacur G., and Toto E., "Frequency assignment in mobile radio systems using branch-and-cut techniques", *European Journal of Operational Research* 123 (2000), pp. 241-255.

[G&R]

A. Gamst and W. Rave, "On frequency assignment in mobile automatic telephone systems", *Proceedings of GLOBECOM'82, IEEE*, 1982.

[G&Y 92]

Jerrold R. Griggs, Roger K. Yeh, "Labelling graphs with a condition at distance 2", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v.5 n.4, pp. 586-595, Nov. 1992.

[Gamst 86] Gamst A., "Some lower bounds for a class of frequency assignment problems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 35, no. 1, pp. 8-14, 1986.

[Geor&Maur 95] Georges P. and Mauro D. W., "Generalized vertex labelings with a condition at distance two", *Congressus Numerantium*, 109: pp. 47-57, 1995.

[Gerke 99] S. N. T. Gerke, "Colouring weighted bipartite graphs with a co-site constraint", unpublished, 1999.

[Griggs&Yeh 92] Griggs Jerrold R., Yeh Roger K., "Labelling graphs with a condition at distance 2", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v.5 n.4, pp.586-595, Nov. 1992.

[Gtz&Turn 97] Giortzis and Turner, "Application of mathematical programming to the fixed channel assignment problem in mobile radio networks", *IEE Proceedings - Communications* 144 (1997), pp. 257-264.

[Ha 80] Hale W. K., "Frequency assignment: Theory and applications", *Proceedings of the IEEE* 68 (1980), pp. 1497-1514.

[Hao 95] Dorne and Hao, "An evolutionary approach for frequency assignment in cellular radio networks", *IEEE Int. Conference on Evolutionary Computing* (Perth, Australia), 1995.

R. Dorne and J.-K. Hao, "Constraint handling in evolutionary search: A case study of the frequency assignment", *Lecture Notes in Computer Science* 1141 (1996), pp. 801-810.

R. Dorne and J.-K. Hao, "A new genetic local search algorithm for graph coloring", *Lecture Notes in Computer Science* 1498 (1998), pp. 745-754.

[J&K 96] Janssen J. and Kilakos K., "Polyhedral analysis of channel assignment problems: (I) Tours," in Proc. 1996 IEEE Int. Conf. Communications, Montréal, Canada.

[Jans 02] Janssen J., "Channel assignment and graph labelling", 2002.

[J&K 99] Janssen J. and Kilakos K., "An optimal solution to the Philadelphia Channel Assignment Problem", IEEE Transactions on vehicular technology, Vol. 48, No. 3, May 1999.

[Janssen 99] Janssen J. and Narayanan L., "Channel assignment algorithms for cellular networks with constraints", Theoretical Comp. Sc. 4, 1999. to appear, extended abstract published in the proceedings of ISAAC'99.

[Jau 98] Jaumard B., Marcotte O., and Meyer C., "Estimation of the quality of cellular networks using column generation techniques", Tech. Report G-98-02, Ecole Polytechnique de Montréal, January 1998.

B. Jaumard, O. Marcotte, C. Meyer, and T. Vovor, "Comparison of column generation models for channel assignment in cellular networks", Discrete Applied Mathematics 112 (2001), pp. 217-240.

[Jau 99] Jaumard B., "Mathematical models and exact methods for channel assignment in cellular networks", Telecommunications Network Planning (B. Sansão and P. Soriano, eds.), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999, pp. 239-255.

[Jau 01] Jaumard B., Marcotte O., Meyer C., and Vovor T., "Comparison of column generation models for channel assignment in cellular networks", Discrete Applied Mathematics 112 (2001), pp. 217-240.

[Leese 96] Leese R. A., "Toward an understanding of optimal channel assignment in radio systems," presented at the Radiocommunications Agency Technical Forum, Nov. 1996.

[McDiarm&Reed 97] McDiarmid Cohn and Reed Bruce, "Channel assignment and weighted colouring", *Networks*. 1997.

[Meh&Trick 96] Mehrotra A. and Trick M. A., "A column generation approach for graph coloring", *INFORMS Journal on Computing* 8 (1996), pp. 344-354.

[Mn&Ss 01] Mannino C. and Sassano A., "An enumerative algorithm for the frequency assignment problem", *Discrete Applied Mathematics* (2001), to appear, previously published as technical report 1096, Università di Roma La Sapienza.

[Mrp 99] Murphey R. A., Pardalos P. M., and Resende M. G. C., "Frequency assignment problems", *Handbook of combinatorial optimization* (D.-Z. Du and P. M. Pardalos, eds.), vol. Supplement Volume A, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Mth&Mtt 93] Mathar R. and Mattfeldt J., "Channel assignment in cellular radio networks", *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 42 (1993), pp. 647-656.

[Mtz 70] Metzger B. H., "Spectrum management technique", Otoño 1970, 38ª Presentación Nacional ORSA (Detroit, MI).

[Reinhard 00] Diestel R., "Graph Theory", 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

[Ro 91] Roberts F. S., "T-Colorings of graphs: Recent results and open problems", *Discrete Mathematics* 93 (1991), pp. 229-245.

[Sakai 94] Sakai Denise, "Labeling Chordal Graphs: Distance Two Condition", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v.7 n.1, pp.133-140, Feb. 1994.

[Tv 81] Thuve H., "Frequency planning as a set partitioning problem", *European Journal of Operational Research* 6 (1981), pp. 29-37.

[Ubéda 97] Ubda S. and Zerovnik J., "Upper bounds for the span in triangular lattice graphs: application to frequency planning for cellular network". Technical Report 97-28, Laboratoire de l'Informatique du Parallelisme, ENS, Lyon, France. September 1997.

[VB 95] Van Bentem H. P., "GRAPH generating radio link frequency assignment problems heuristically", Master's thesis, Delft University of Technology, 1995.

[VdH, Lee&Shep 98] Van den Heuvel J., Leese Robert, and Shepherd Mark, "Graph labelling and radio channel assignment", *Journal of Graph Theory*, 29(4), 1998.

[Yeh 90] Yeh R. K., "Labeling graphs with a condition at distance 2", PhD thesis, Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, SC, 1990.