UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CRECIMIENTO DE VOLUMEN EN VARIEDADES RIEMANNIANAS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

OTTO HECTOR ROMERO GERMAN

DIRECTOR DE TESIS: DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

Autorizo [illegible] de la UNAM [illegible] con[illegible] recepcional.

NOMBRE: Otto Héctor Romero Germán

FECHA: 25/mayo/2005

FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Crecimiento de volumen en variedades riemannianas"

realizado por Otto Héctor Romero Germán

con número de cuenta 09758569-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco	
Propietario	M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza	
Propietario	Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez	Ana Guzmán
Suplente	Dr. José Guadalupe Reyes Victoria	
Suplente	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Crecimiento de volumen en variedades Riemannianas

Otto Héctor Romero Germán

A mis padres, Rosa y Juan.

A Oscar por su apoyo.

...no estoy completamente seguro de nada y
hay muchas cosas de las que no sé nada...

R. F.

Índice general

Introducción

Una cuestión importante en matemáticas es la relación entre la topología de una variedad (grupo fundamental, homología, compacidad) y su geometría (curvatura, geodésicas, volumen).

El resultado más importante en este sentido es el Teorema de Gauss-Bonnet, el cual nos dice qué geometría dar a cada superficie, dependiendo de su característica de Euler (topología). Otro resultado fuerte en este sentido, es el Teorema de la esfera en dimensión 3: Si M^3 es compacta y simplemente conexa con curvatura seccional positiva, entonces M^3 es homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. También están los resultados de Myers y Cartan, que dan condiciones sobre el grupo fundamental de una variedad cuando tiene curvatura positiva o negativa.

El propósito de este trabajo es presentar dos resultados en este sentido, debidos a John Milnor (ver [11]), que involucran un aspecto "métrico" del grupo fundamental: su crecimiento.

El crecimiento de un grupo finitamente generado (f.g.) mide la "cantidad" de palabras que se pueden formar en él. Hay dos tipos principales de crecimiento: polinomial y exponencial. Por ejemplo, los grupos (f.g.) abelianos crecen polinomialmente, mientras los libres (f.g.) lo hacen exponencialmente.

El crecimiento de volumen está directamente relacionado con la métrica, por ejemplo, en la geometría euclidiana el volumen crece polinomialmente, en cambio, en la geometría hiperbólica crece exponencialmente.

Los Teoremas de Milnor relacionan ambos crecimientos. Para realizar esta conexión, la herramienta que utilizamos es la teoría de espacios cubrientes.

Más específicamente, consideramos M una variedad y la "desdoblamos" por medio de su cubierta universal $\widetilde{M}$. El grupo de transformaciones cubrientes Γ asociado a dicho cubriente "guarda" información topológica de M, es decir, Γ es isomorfo al grupo fundamental de M. La idea central en los Teoremas de Milnor es que el crecimiento de volumen en $\widetilde{M}$ influye en el crecimiento del grupo $\Gamma \cong \pi_1(M)$ y viceversa.

Así, por ejemplo, supongamos que M tiene una métrica de manera que el volumen en $\widetilde{M}$ crece polinomialmente (por ejemplo, esto ocurre cuando M tiene curvatura no negativa); entonces el grupo fundamental de M crece polinomialmente. Éste es el primer Teorema de Milnor.

Supongamos ahora que el volumen en $\widetilde{M}$ compacta crece exponencialmente (por ejemplo con curvatura negativa), entonces $\Gamma \cong \pi_1(M)$ crece exponencialmente. Éste es el segundo Teorema de Milnor.

Podemos resumir estos resultados como sigue: las variedades con curvatura positiva tienen un grupo fundamental que crece polinomialmente, mientras en las variedades compactas con curvatura negativa crece exponencialmente.

En el capítulo 1, veremos los cubrientes y sus propiedades básicas, por ejemplo, los cubrientes de una variedad M se corresponden con los subgrupos de $\pi_1(M)$.

En el capítulo 2 revisamos el concepto de acción de un grupo en una variedad y su relación con los cubrientes. El grupo de transformaciones cubrientes Γ permite relacionar a los espacios, por ejemplo, cuando el cubriente es universal Γ es isomorfo al grupo fundamental de la variedad, y podemos pasar de la cubierta a la variedad haciendo cociente con Γ. También veremos la manera de "geometrizar" a una variedad a partir de su cubierta universal.

En el capítulo 3 aparecen los Teoremas de Myers y Cartan-Hadamard; además se prueba que el cubriente universal de variedades con curvatura constante positiva es $\mathbb{S}^n$. Para el caso de las variedades con curvatura negativa, el cubriente es $\mathbb{R}^n$ (Cartan).

En el capítulo 4 se analiza el crecimiento de grupos y de volumen y su relación.

En el capítulo 5 se dan los Teoremas de Milnor y se finaliza con ejemplos de estos teoremas junto con los de Myers y Cartan.

Capítulo 1

Espacios Cubrientes

En este capítulo veremos el concepto de espacio cubriente, así como algunos ejemplos y propiedades básicas de ellos. Se hace un repaso del grupo fundamental de un espacio para el Lema de inyectividad: el grupo fundamental del espacio cubriente es un subgrupo del grupo fundamental del espacio base. También, como objetivo de este capítulo, se verá una manera de obtener cubrientes: a partir de isometrías locales.

1.1. Cubrientes Topológicos

DEFINICIÓN 1.1. Sean $\widetilde{M}$ y M espacios topológicos conexos. Un **cubriente topológico** $\psi : \widetilde{M} \to M$ es una función continua y suprayectiva, tal que para todo $p \in M$ existe una vecindad conexa U de p que cumple que $\psi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, donde los abiertos $U_i \subset \widetilde{M}$ son ajenos por parejas, y $\psi|_{U_i} : U_i \to U$ es un homeomorfismo. Para cada $q \in M$, $\psi^{-1}(q)$ es la *fibra* de q bajo ψ.

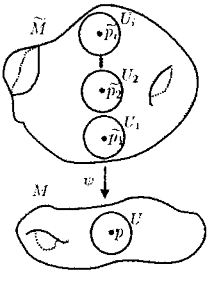

Figura 1.1: Un cubriente

De manera informal, podemos pensar a un cubriente como un pegado adecuado de copias (puede ser infinito) de un mismo "corte" o "desdoble" de M.

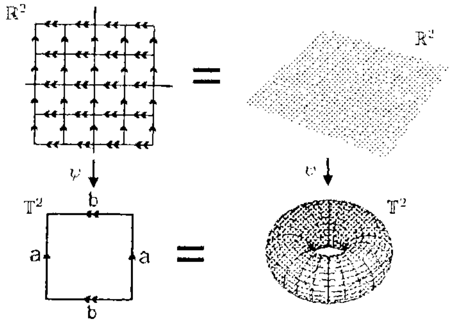

Figura 1.2: El plano cubre al toro

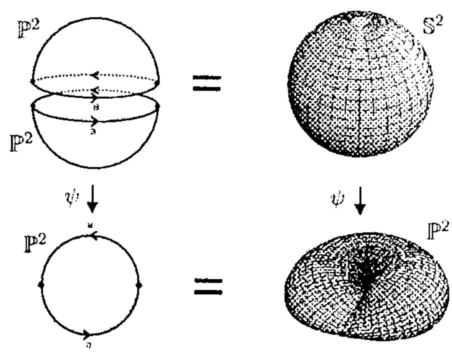

Figura 1.3: La esfera cubre al plano proyectivo

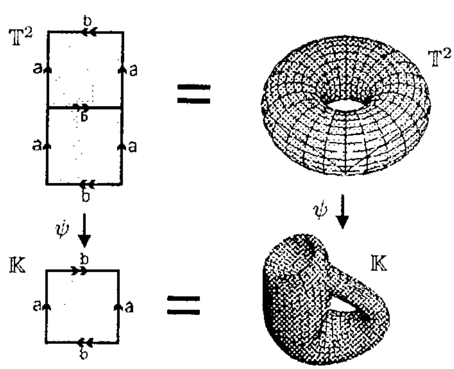

Figura 1.4: El toro cubre a la botella de Klein

Cuando digamos sólo cubriente suponemos que es cubriente topológico.

Sean $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente y $\alpha : [0,1] \to M$ continua. Decimos que α es un **camino** en M que empieza en $\alpha(0)$. Llamamos a la aplicación $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \widetilde{M}$ continua un **levantamiento** de α si $\psi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

Usaremos algunas propiedades de los cubrientes con respecto a los levantamientos. Una referencia para estas propiedades es [10], páginas 238-239.

Propiedad del levantamiento de caminos. Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente y $\alpha : [0,1] \to M$ un camino que empieza en $\alpha(0) = q$. Si $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$ es un punto sobre la fibra de q, entonces existe un único levantamiento $\widetilde{\alpha} : [0,b] \to \widetilde{M}$ de α tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{q}$.

Propiedad de levantamientos homotópicos. Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente, supongamos que $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ son caminos homotópicos y $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : [0,1] \to \widetilde{M}$ son los levantamientos de α y β con $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$. Entonces $\widetilde{\alpha}$ es homotópico a $\widetilde{\beta}$. Como consecuencia, se tiene que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ (**Teorema de monodromía**).

A continuación recordamos brevemente la definición del grupo fundamental de un espacio topológico, que es uno de los invariantes algebraicos más importantes.

Sean (M, τ) un espacio topológico conectable por trayectorias y $p \in M$. Se quiere definir un grupo $\pi_1(M,p)$ llamado el **grupo fundamental** de M, cuyos elementos serán clases de equivalencia bajo homotopía de las funciones continuas $\alpha : [0,1] \to (M,\tau)$ tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ (lazos). Para definir la multiplicación de dos clases α con β construimos la trayectoria $\alpha \cdot \beta$ que en la mitad de tiempo (de 0 a $\frac{1}{2}$) recorre todo el camino α, y en la otra mitad de tiempo (de $\frac{1}{2}$ a 1) recorre todo el camino β. En símbolos:

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

se puede verificar que esta multiplicación es compatible con la noción de equivalencia de trayectorias, y además que da estructura de grupo al conjunto de clases de equivalencia de trayectorias $[\alpha]$, denotado por $\pi_1(M,p)$. Podemos decir que $\pi_1(M,p)$ mide "agujeros" de cierto tipo de M. Se tiene que si $p, q \in M$ (arcoconexo), entonces $\pi_1(M,p) \cong \pi_1(M,q)$. Decimos que (M,τ) es *simplemente conexo* si $\pi_1(M,p) = \{e\}$ para cada $p \in M$. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo, ya que cualquier lazo se puede deformar continuamente a cualquier otro, intuitivamente no tiene "agujeros".

También se tiene que si M y N son espacios topológicos y $\psi : M \to N$ es una función continua entonces la aplicación $\psi_* : \pi_1(M,p) \to \pi_1(N, \psi(p))$ dada por $\psi_*[\alpha] = [\psi \circ \alpha]$ es un homomorfismo de grupos.

Mostraremos algunos ejemplos.

Sea $M = \mathbb{S}^n$, la n-esfera y

$$\Gamma = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{\mathbb{S}^n}, \ -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{\mathbb{S}^n}\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

La variedad riemanniana cociente M/Γ, denotada $\mathbb{P}^n$, es el *espacio proyectivo real* de dimensión n $(n \geq 2)$.

Uno puede verificar que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para todo $n \geq 2$, además $\pi_1(\mathbb{P}^n, p) \cong \mathbb{Z}_2$ con $p \in \mathbb{P}^n$.

Ahora consideremos $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{Z}$ y sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Fijemos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. A cada $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{Z}^n$, le asociamos una transformación de V dada por

$$\alpha : V \to V, \quad \alpha(v) = v + \sum_{j=1}^{n} \alpha^j e_j.$$

La variedad cociente $V/\mathbb{Z}^n$ es difeomorfa al toro de dimensión n,

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$

y por tanto $\pi_1(V/\mathbb{Z}^n, p) = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$ para cualquier $p \in V/\mathbb{Z}^n$. Si además V tiene un producto interior, éste induce una métrica riemanniana tal que M/Γ es plano; es decir, todas las curvaturas seccionales son cero. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$ con el producto punto usual, tenemos que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es el toro plano.

Un resultado importante de la Teoría de espacios cubrientes, nos dice que si $\psi : \widetilde{M} \to M$ es cubriente, entonces el grupo fundamental de $\widetilde{M}$ se puede pensar como un subgrupo del grupo fundamental de M.

Lema de inyectividad. Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente. Entonces para todo $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$, si $p = \psi(\widetilde{p})$, el homomorfismo inducido

$$\psi_* : \pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{p}) \to \pi_1(M, p)$$

es inyectivo.

Más aún, hay una correspondencia entre cubrientes de una variedad y los subgrupos de su grupo fundamental, así, si H es un subgrupo de $\pi_1(M)$ entonces existe N variedad y $\psi : N \to M$ cubriente tal que $\psi_*(\pi_1(N)) = H$.

1.2. Cubrientes Diferenciables y Riemannianos

DEFINICIÓN 1.2. Si $\widetilde{M}$ y M son variedades diferenciables conexas, decimos que $\psi : \widetilde{M} \to M$ es un **cubriente diferenciable** si ψ es un cubriente topológico y ψ es diferenciable de rango máximo, es decir, si el rango de $d\psi_{\widetilde{p}}$ es igual a la dimensión de M para cada $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$.

Para definir cubriente riemanniano recordamos lo que es una isometría.

Sean M y N variedades riemannianas. Un difeomorfismo $\psi : M \to N$ (función biyectiva diferenciable y con inversa diferenciable) es una **isometría** si y sólo si:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_p = \langle d\psi_p(\vec{u}), d\psi_p(\vec{v}) \rangle_{\psi(p)} \quad \forall\, p \in M,\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in T_pM \tag{1.1}$$

Una función diferenciable $\psi : M \to N$ es una **isometría local** si para todo $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ tal que $\psi : U \to \psi(U) \subset N$ es un difeomorfismo que cumple (1.1).

DEFINICIÓN 1.3. Si $\widetilde{M}$ y M son variedades riemannianas conexas, decimos que $\psi : \widetilde{M} \to M$ es un **cubriente riemanniano** si ψ es un cubriente diferenciable el cual además es una isometría local de $\widetilde{M}$ en M.

Mencionamos algunos resultados básicos de cubrientes, para lo cual necesitamos algunos lemas y recordar la siguiente definición.

Una curva diferenciable $\alpha : I \to M$ es **geodésica** en $t_0 \in I$ si $\left[\frac{D}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\right](t_0) = 0$; si α es geodésica para todo $t \in I$, decimos que la curva α es **geodésica**.

LEMA 1.4. *Una isometría aplica geodésicas en geodésicas.*

Demostración. La isometría local $\psi : \widetilde{M} \to M$ preserva los coeficientes de la métrica, por lo que los símbolos de Christoffel son idénticos en $\widetilde{M}$ y en M. Así, una curva en $\widetilde{M}$ es geodésica en $\widetilde{M}$ si y sólo si su imagen es geodésica en M. □

La transformación exponencial da una correspondencia natural ("proyección") entre la variedad y sus planos tangentes, y nos permite pasar localmente de funciones en la variedad a funciones entre espacios lineales. Para isometrías locales se tiene el siguiente lema.

LEMA 1.5. *Sean $\widetilde{M}$ una variedad completa y $\psi : \widetilde{M} \to M$ una isometría local. Si $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ y $p = \psi(\widetilde{p})$, entonces*

$$\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}} = \psi \circ \exp_{\widetilde{p}} \tag{1.2}$$

Demostración. Sea $\widetilde{v} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}\backslash\{0\}$.

Como $\widetilde{M}$ es completa, existe $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ geodésica definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{p}$, $\widetilde{\alpha}'(0) = \frac{\widetilde{v}}{\|\widetilde{v}\|}$ y por tanto $\|\widetilde{\alpha}'(0)\| = 1$. Así, $\exp_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = \widetilde{\alpha}(\|\widetilde{v}\|)$.

Sea $\alpha : \mathbb{R} \to M$ la curva en M definida por $\alpha(t) = \psi(\widetilde{\alpha}(t))$; como $\widetilde{\alpha}$ es geodésica y ψ es isometría local, por el Lema 1.4 tenemos que $\alpha(t) = \psi(\widetilde{\alpha}(t))$ es una geodésica que satisface $\alpha(0) = p$ y

$$\alpha'(0) = d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{\alpha}'(0)) = \frac{1}{\|\widetilde{v}\|} d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v});$$

por lo tanto $\|\alpha'(0)\| = 1$, de donde

$$\psi(\exp_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})) = \psi(\widetilde{\alpha}(\|\widetilde{v}\|)) = \alpha(\|\widetilde{v}\|) = \alpha(\|d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})\|) = \exp_p(d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})),$$

lo cual implica que $\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}} = \psi \circ \exp_{\widetilde{p}}$.

□

En un cubriente, si alguno de los espacios es completo el otro también lo es. La idea de la prueba es definir la transformación exponencial en todo un plano tangente a partir de que está definido en la otra variedad. Para realizar este puente, utilizamos el lema anterior.

TEOREMA 1.6. *Si $\psi : \widetilde{M} \to M$ es un cubriente riemanniano, entonces M es completa si y sólo si $\widetilde{M}$ es completa.*

Demostración. $\Rightarrow$)

Supongamos que M es completa. Sean $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$, $p = \psi(\widetilde{p})$, $\widetilde{v} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}\backslash\{0\}$. Veamos que $\exp_{\widetilde{p}}$ está definida en $\widetilde{v}$.

Como M es completa, existe una geodésica $\alpha : \mathbb{R} \to M$ definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = p$ y

$$\alpha'(0) = \frac{d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})}{\|d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})\|} = d\psi_{\widetilde{p}}\left(\frac{\widetilde{v}}{\|d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})\|}\right).$$

Por la propiedad de levantamiento de caminos, existe una única $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ tal que $\psi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{p}$ y

$$\widetilde{\alpha}'(0) = \frac{\widetilde{v}}{\|d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})\|}.$$

Como $d\psi_{\widetilde{p}}$ es isometría entonces $\|\widetilde{\alpha}'(0)\| = \|\alpha'(0)\| = 1$. Además, el Lema 1.4 implica que $\widetilde{\alpha}$ es geodésica y por tanto $\exp_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = \widetilde{\alpha}(\|\widetilde{v}\|)$ está definido. Esto implica que $\exp_{\widetilde{p}}$ está definida en todo $T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$. Por el Teorema de Hopf-Rinow (ver [5], página 146) tenemos que $\widetilde{M}$ es completa.

$\Leftarrow$)

Ahora supongamos que $\widetilde{M}$ es completa. Sea $p = \psi(\widetilde{p}) \in M$ y $v \in T_pM\backslash\{0\}$. Como $d\psi_{\widetilde{p}}$ es biyectiva, existe un único $\widetilde{v} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$ tal que $d\psi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = v$. Ya que $\widetilde{M}$ es completa, existe $\widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ geodésica definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{p}$ y

$$\widetilde{\alpha}'(0) = \frac{\widetilde{v}}{\|\widetilde{v}\|}.$$

En este caso, $\exp_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = \widetilde{\alpha}(\|\widetilde{v}\|)$. Sea $\alpha = \psi \circ \widetilde{\alpha} : \mathbb{R} \to M$. El Lema 1.4 implica que α es una geodésica definida en todo $\mathbb{R}$. Además, $\alpha(0) = p$ y

$$\alpha'(0) = \frac{v}{\|\widetilde{v}\|}.$$

Entonces $\|\alpha'(0)\| = 1$, y por el Lema 1.5 se tiene que

$$\psi \circ \exp_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = \psi \circ \widetilde{\alpha}(\|\widetilde{v}\|) = \alpha(\|\widetilde{v}\|) = \alpha(\|v\|);$$

esto es, $\alpha(\|v\|)$ está definido y $\exp_p(v) = \alpha(\|v\|)$. Por tanto $\exp_p$ está definida en todo T_pM y M es completa.

□

Un cubriente es siempre un homeomorfismo local, pero no son conceptos equivalentes, ya que la transformación $f : (0,2) \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$, es un homeomorfismo local sobreyectivo que no es cubriente.

Notamos que $(0,2)$ no es completo, pero es homeomorfo a $\mathbb{R}$, por lo que la completez tampoco es una condición suficiente.

Para finalizar el capítulo, en el siguiente teorema probaremos que si $\widetilde{M}$ y M son riemannianas, y ψ es isometría local suprayectiva, entonces ψ es cubriente riemanniano.

TEOREMA 1.7. *Dados $\widetilde{M}$ una variedad conexa y completa y $\psi : \widetilde{M} \to M$ una isometría local suprayectiva, se tiene que ψ es cubriente riemanniano.*

Demostración. Sean $p \in M$ y $\psi^{-1}(p) = \{ \widetilde{p_i} \mid i \in I \}$. Sabemos que existe $r_1 > 0$ tal que $\exp_p : B_{r_1}(0) \subset T_pM \to B_{r_1}(p) \subset M$ es un difeomorfismo. Afirmamos que $\psi^{-1}(p)$ es un conjunto de puntos aislados. Si $\psi^{-1}(p)$ es un conjunto finito entonces no hay nada que demostrar. Así, supongamos que es infinito y que existen $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ y una subsucesión $\{ \widetilde{p_{i_k}} \}$ de $\psi^{-1}(p)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \widetilde{p_{i_k}} = \widetilde{p}$. Por la continuidad de ψ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \psi(\widetilde{p_{i_k}}) = \psi(\widetilde{p}).$$

Pero $\psi(\widetilde{p_{i_k}}) = p$, lo que implica que $\psi(\widetilde{p}) = p$. Como ψ es isometría local, es inyectiva en una vecindad de $\widetilde{p}$, lo cual contradice que los $\widetilde{p_{i_k}}$ se acumulan en $\widetilde{p}$. Así, $\psi^{-1}(p)$ es un conjunto de puntos aislados.

Para cada $\alpha \in I$, sea

$$r_\alpha := \inf\{ d(\widetilde{p_\alpha}, \widetilde{p_\beta}) \mid \beta \in I,\ \alpha \neq \beta\}.$$

y definimos

$$r_2 := \inf\{r_\alpha \mid \alpha \in I\}.$$

Por la que ya probamos, se tiene que $r_2 > 0$. Sean

$$r = \min\left\{r_1, \frac{r_2}{3}\right\}, \quad U := B_r(p) \quad \text{y} \quad U_i := B_r(\widetilde{p}_i),$$

con $i \in I$. Se tiene que los conjuntos $U_\alpha, \alpha \in I$ son ajenos por parejas. Afirmamos que $\psi : U_i \to U$ es un homeomorfismo. Como ψ es isometría local, basta verificar que $\psi : U_i \to U$ es biyectiva.

1. Sean $\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2} \in \widetilde{U_i} = B_r(\widetilde{p_i})$ y supongamos que $\psi(\widetilde{q_1}) = \psi(\widetilde{q_2})$. Entonces existen $\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2} \in B_r(\widetilde{0}) \subset T_{\widetilde{p_i}}\widetilde{M}$ tales que $\exp_{\widetilde{p_i}}(\widetilde{v_j}) = \widetilde{q_j}$, para $j = 1, 2$.

   Como ψ es isometría local, $d\psi_{\widetilde{p_i}}(B_r(\widetilde{0})) = B_r(0)$ de manera biyectiva. Y como $r < r_1$, tenemos que $\exp_p : B_r(0) \subset T_pM \to B_r(p) \subset M$ es biyectiva.

   Por el Lema 1.5, tenemos que

   $$\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p_i}}(\widetilde{v_j}) = \psi \circ \exp_{\widetilde{p_i}}(\widetilde{v_j}) = \psi(\widetilde{q_j});$$

   para $j = 1, 2$. Por lo tanto,

   $$\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p_i}}(\widetilde{v_1}) = \exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p_i}}(\widetilde{v_2});$$

   y por inyectividad, $\widetilde{v_1} = \widetilde{v_2}$. Esto implica a su vez que $\widetilde{q_1} = \widetilde{q_2}$ y muestra que $\psi|_{U_i}$ es inyectiva.

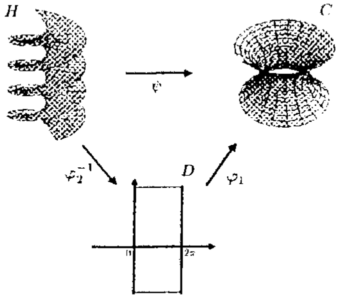

Figura 1.5: El helicoide cubre al catenoide

2. Sea $q \in U$. Entonces existe $v \in B_r(0) \subset T_pM$ tal que $\exp_p(v) = q$. Esto implica que existe $\widetilde{v} \in B_r(\widetilde{0}) \subset T_{\widetilde{p}_i}\widetilde{M}$ tal que $d\psi_{\widetilde{p}_i}(\widetilde{v}) = v$.

   Por otro lado,
   $$r > \|\widetilde{v}\| \geq d(\exp_{\widetilde{p}_i}(\widetilde{v}), \widetilde{p}_i),$$
   lo cual implica que $\exp_{\widetilde{p}_i}(\widetilde{v}) \in B_r(\widetilde{p}_i) = U_i$. Además, por el Lema 1.5, $\psi(\exp_{\widetilde{p}_i}(\widetilde{v})) = \exp_p(d\psi_{\widetilde{p}_i}(\widetilde{v})) = \exp_p(v) = q$, es decir, $\psi|_{U_i}$ es suprayectiva en U.

En resumen; sea $p \in M$, entonces existe U vecindad de p tal que $\psi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, las U_i ajenas y $\psi : U_i \to U$ es un homeomorfismo para cada $i \in I$; esto es, ψ es un cubriente. Además es cubriente riemanniano. □

EJEMPLO 1.8. 1. Consideremos al catenoide C parametrizado por $\varphi_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi_1(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{sen} u, av)$. Por otro lado, un helicoide H está parametrizado por $\varphi_2 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to H$ dada por $\varphi_2(u, v) = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, au)$. Ambas cartas tienen los mismos coeficientes de la primera forma fundamental, $E = a^2 \cosh^2 v, F = 0$ y $G = a^2 \cosh^2 v$.

   De esta manera, $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : H \to C$ es una isometría local y por el teorema anterior es un cubriente. Se puede ver geométricamente como que una "vuelta" del helicoide puede "girar" al catenoide sin un meridiano.

2. Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ dada por $\psi(r) = e^{2\pi i r}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ la métrica de $\mathbb{S}^1$, de modo que ψ sea una isometría local y por tanto un cubriente.

3. Consideremos $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\psi(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Con un procedimiento similar al del ejemplo anterior podemos mostrar que ψ es un cubriente.

4. Análogamente, dado el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $\psi(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d)$, con $|z| = |w| = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $m = ad - bc \neq 0$. ψ es cubriente, que geométricamente enrolla el toro m veces en sí mismo.

Capítulo 2

Transformaciones Cubrientes

En este capítulo se dan las herramientas más importantes de espacios cubrientes, además del concepto de acción de un grupo en una variedad y su relación con los cubrientes. Esto creará un puente más entre traducir un problema geométrico a uno algebraico y recíprocamente. Todas estas herramientas se utilizarán para el último capítulo de la tesis. A continuación, daremos un resumen del capítulo.

Sea X un conjunto, entonces el conjunto

$$S(X) = \{ \varphi : X \to X \mid \varphi \text{ es biyectiva } \}$$

es un grupo provisto de la operación composición, llamado el *grupo de permutaciones* de X, ó el *grupo de simetrías* de X.

Sea G un grupo cualquiera, entonces existe un conjunto X y un homomorfismo inyectivo de grupos $\Phi : G \to S(X)$ (Teorema de Cayley). De esta manera, se puede pensar a los grupos como grupos de simetrías de algún conjunto.

Consideremos ahora M una variedad topológica y el conjunto

$$\mathrm{Hom(M)} = \{ \varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \mid \varphi \text{ es homeomorfismo } \}.$$

Sea Γ un grupo tal que $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Hom(M)}$ es homomorfismo inyectivo. Diremos que Γ actúa en M. Entonces podemos decir que la **acción** de Γ en M es un grupo de "simetrías" de M.

OBSERVACIÓN 2.1. Se puede hacer lo mismo para el grupo de los difeomorfismos Dif(M) ó isometrías Iso(M) en M.

Consideraremos sólo cierto tipo de acciones llamadas propias y discontinuas.

Dado un cubriente $\psi : \widetilde{M} \to M$, tenemos una acción. Se considera a Γ como el **grupo de transformaciones cubrientes de** ψ, entonces Γ actúa en $\widetilde{M}$ y la acción es propia y discontinua (Teorema 2.8).

Recíprocamente, supongamos que Γ es una acción propia y discontinua en M, entonces M/Γ es una variedad topológica y la aplicación

$$\Pi : M \to M/\Gamma$$

es un cubriente (Teorema 2.9) con grupo de transformaciones cubrientes Γ (Teorema 2.10).

En este sentido, las acciones propias y discontinuas en una variedad generan cubrientes y viceversa.

Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ un cubriente. Es importante considerar cuándo $\widetilde{M}$ es simplemente conexa (cubierta universal de M). Este concepto también fue introducido por H. A. Schwarz en su intento por probar el Teorema de uniformización. Sea Γ el grupo de transformaciones cubrientes de M. Hay una relación entre los espacios (Lema 2.15):

$$\widetilde{M}/\Gamma \text{ es homeomorfo a } M.$$

Además, se puede obtener el grupo fundamental de M como un grupo de transformaciones (Lema 2.16), es decir:

$$\pi_1(M, p) \cong \Gamma.$$

También se introduce el concepto de **dominio fundamental** de un cubriente $\psi : \widetilde{M} \to M$, que informalmente, es el menor conjunto en $\widetilde{M}$ que basta para cubrir a M y con el podemos "teselar" la cubierta universal de M. Se prueba la existencia de dominios fundamentales en el caso riemanniano (Teorema 2.24), para lo cual se usa el concepto de lugar geométrico de corte, que fue introducido por H. Poincaré para superficies en 1905 y para variedades riemannianas por Whitehead en 1935.

2.1. Transformaciones Cubrientes Topológicas

En esta sección consideramos variedades topológicas.

DEFINICIÓN 2.2. Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente. Un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ es una **transformación cubriente** de ψ si y sólo si $\psi \circ \varphi = \psi$.

Sea Γ el conjunto de las transformaciones cubrientes de ψ, es decir,

$$\Gamma = \{\ \varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M} \text{ homeomorfismo} \mid \psi \circ \varphi = \psi\ \};$$

entonces Γ es un grupo bajo la operación de composición, llamado el **grupo de transformaciones cubrientes** de ψ, el cual denotamos por $\mathbb{D}(\psi)$.

Podemos decir que en cierto sentido, la información del "pegado" de las "piezas" del cubriente está en el grupo de transformaciones cubrientes.

EJEMPLO 2.3. 1. $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Sean $T_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T_{n,m}(x, y) = (x + n, y + m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{D}(\psi) = \{T_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$. Sea $A : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $A(x) = -x$. Se tiene que $\mathbb{D}(\psi) = \langle Id, A \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.
3. $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\psi(z) = z^4$. Sean $R_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dadas por $R_k(z) = e^{\frac{k\pi}{2}i}z$ con $k = 1, 2, 3, 4$, entonces $\mathbb{D}(\psi) = \langle R_k \,;\, k = 1, 2, 3, 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

El siguiente resultado dice que las transformaciones cubrientes están determinadas por su valor en un punto.

LEMA 2.4. *Sean $\widetilde{M}, M$ variedades topológicas conexas, $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de ψ. Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ y existe $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ tal que $\gamma_1(\widetilde{p}) = \gamma_2(\widetilde{p})$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Demostración. Sean $q \in \widetilde{M}$ y $\alpha : [a, b] \to \widetilde{M}$ una curva continua tal que $\alpha(a) = \widetilde{p}$ y $\alpha(b) = q$. Como

$$\psi \circ \gamma_1(\alpha(t)) = \psi(\alpha(t)) = \psi \circ \gamma_2(\alpha(t)),$$

tenemos que $\gamma_1 \circ \alpha$ y $\gamma_2 \circ \alpha$ son levantamientos de la curva $\psi \circ \alpha$ y además

$$\gamma_1 \circ \alpha(a) = \gamma_1(p) = \gamma_2(p) = \gamma_2 \circ \alpha(a).$$

Esto es, tenemos dos levantamientos de la curva $\psi \circ \alpha$ que empiezan en un mismo punto. Por unicidad, son iguales: $\gamma_1 \circ \alpha = \gamma_2 \circ \alpha$ y evaluando en b se tiene $\gamma_1(q) = \gamma_2(q)$ para cada $q \in \widetilde{M}$. Entonces $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Una acción (topológica) de un grupo G en una variedad M, es un conjunto de homeomorfismos de M en M que forman (con la composición) un grupo G. Veamos otra definición formal que utilizaremos en adelante.

DEFINICIÓN 2.5. Una **acción (topológica)** (por la izquierda) de un grupo G en una variedad M es una función $\mu : G \times M \to M$ que cumple

1. Si $e \in G$ denota el neutro de G, entonces $\mu(e, p) = p$ para toda $p \in M$.
2. $\mu(g, \mu(h, p)) = \mu(gh, p)$ para cualesquiera $p \in M$, $g, h \in G$.
3. La transformación $\mu_g : M \to M$, dada por $\mu_g(p) = \mu(g, p)$, $p \in M$, es un homeomorfismo.

Decimos además que G actúa **propia y discontinuamente** en M, si para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p tal que la colección de conjuntos abiertos $\{\mu_g(U) \mid g \in G\}$ es ajena.

OBSERVACIÓN 2.6. Siempre que no haya confusión denotamos a las funciones $\mu_g : M \to M$ como $g : M \to M$.

EJEMPLO 2.7. 1. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por traslaciones del tipo

$$\mu((n, m), (x, y)) = (x + n, y + m), \quad \text{con } n, m \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que $\mu_{(n,m)} = T_{n,m}$.

2. $\mathbb{Z}_2$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por reflexión, donde $\mu(\overline{0},x)=x$ y $\mu(\overline{1},x)=-x$. Por tanto, $\mu_{\overline{0}}=Id$ y $\mu_{\overline{1}}=A$.

3. $\mathbb{Z}_2$ actúa en $\mathbb{S}^2$ por "reflexión", donde $\mu(\overline{0},x)=x$ y $\mu(\overline{1},x)=-x$.

4. $\mathbb{Z}_4$ actúa en $\mathbb{S}^1$ por rotaciones; $\mathbb{Z}_4\cong\langle R_k\ ;\ k=1,2,3,4\rangle$ y entonces la acción es $\mu(e^{\frac{k\pi}{2}i},z)=e^{\frac{k\pi}{2}i}z$, y por tanto $\mu_{e^{\frac{k\pi}{2}i}}=R_k$.

5. $GL(n,\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{R}^n$, donde la acción está dada por $\mu(A,\vec{v})=A\vec{v}$, con $A\in GL(n,\mathbb{R})$ y $\vec{v}\in M_{n\times 1}\cong\mathbb{R}^n$. En este caso, el grupo actúa en un espacio vectorial como grupo de transformaciones lineales.

6. $\mathbb{R}^n\times GL(n,\mathbb{R})$ actúa en $\mathbb{R}^n$, donde la acción es $\mu((\vec{a},A),\vec{v})=\vec{a}+A\vec{v}$, donde $A\in GL(n,\mathbb{R})$, $\vec{a},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$. A ésta acción se le llama el producto semidirecto de $\mathbb{R}^n$ y $GL(n,\mathbb{R})$.

7. Consideremos los homeomorfismos $T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dados por $T_1(x,y)=(x+1,y)$ y $T_2(x,y)=(-x,y+1)$, entonces $\Gamma:=\langle T_1,T_2\rangle$ actúa en $\mathbb{R}^2$.

8. Sea $\mathbb{S}^{2n-1}=\{(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$ y $\mathbb{Z}_k$ el grupo multiplicativo de las k raíces de la unidad, entonces $\mathbb{Z}_k$ actúa en $\mathbb{S}^{2n-1}$, por $\mu(w,z)=(wz_1,...,wz_n)$, con $w\in\mathbb{Z}_k$.

   Nota: Las anteriores acciones son propias y discontinuas, excepto en 5 y 2.

Veremos que dado un cubriente obtenemos una acción propia y discontinua y viceversa, es decir, toda acción propia y discontinua en una variedad M corresponde a un cubriente de M.

TEOREMA 2.8. *Dado un cubriente $\psi:\widetilde{M}\to M$ el grupo de transformaciones cubrientes Γ actúa en $\widetilde{M}$, donde la acción está dada por $\mu(\varphi,p)=\varphi(p)$, con $\varphi\in\Gamma$. Más aún, la acción es propia y discontinua.*

Demostración. Para ver esto, sea $\widetilde{p}\in\widetilde{M}$. Mostraremos que existe una vecindad U de $\widetilde{p}$ tal que los conjuntos $\varphi(U)$ con $\varphi\in\Gamma$ son ajenos por parejas. Como ψ es cubriente, existe una vecindad U de $\widetilde{p}$ y una vecindad V de $\psi(\widetilde{p})$ tal que $\psi|_U:U\to V$ es un homeomorfismo.

Supongamos que existen $\varphi_1,\varphi_2\in\Gamma$ tales que $\varphi_1(U)\cap\varphi_2(U)\neq\varnothing$ con $\varphi_1\neq\varphi_2$. Sea $z\in\varphi_1(U)\cap\varphi_2(U)$, entonces existen $p_1,p_2\in U$ tales que $\varphi_1(p_1)=z=\varphi_2(p_2)$, lo cual implica que

$$\psi(p_1)=\psi\circ\varphi_1(p_1)=\psi(z)=\psi\circ\varphi_2(p_2)=\psi(p_2).$$

Pero $\psi|_U$ es inyectiva, de modo que $p_1=p_2$ y $\varphi_1(p_1)=\varphi_2(p_1)$. Ya que dos transformaciones cubrientes que coinciden en un punto son iguales (Lema 2.4), entonces $\varphi_1=\varphi_2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, los conjuntos $\varphi(U)$ con $\varphi\in\Gamma$ son ajenos por parejas y Γ actúa propia y discontinuamente en M. □

Ya hemos mencionado que existe una especie de recíproco; es decir, si un grupo Γ actúa propia y discontinuamente en una variedad topológica M, queremos construir un cubriente tal que el grupo de transformaciones cubrientes sea isomorfo a Γ. Para esto consideremos el espacio de órbitas M/Γ,

$$M/\Gamma = \{ \; [p] \mid p \in M \; \}$$

donde $[p] = \{ \; \varphi(p) : \varphi \in \Gamma \; \}$; entonces $\Pi : M \to M/\Gamma$ la proyección dada por $\Pi(p) = [p]$ es el cubriente que buscamos. Usaremos los lemas siguientes para probar que el grupo de transformaciones cubrientes $\mathbb{D}(\Pi)$ es isomorfo a Γ.

LEMA 2.9. *Sea M una variedad topológica conexa y completa, Γ grupo que actúa propia y discontinuamente en M, entonces M/Γ es variedad topológica y*

$$\Pi : M \to M/\Gamma$$

es un cubriente topológico.

Demostración. Damos a M/Γ la topología cociente inducida por Π, es decir, definimos $U \subseteq M/\Gamma$ abierto si $\Pi^{-1}(U) \subseteq M$ es abierto. Con esta topología, Π es continua y abierta.

Como Γ actúa propia y discontinuamente en M, si $p \in M$ existe U una vecindad de p tal que $\{\varphi(U) : \varphi \in \Gamma\}$ son abiertos ajenos dos a dos. Se tiene

$$\Pi(\varphi(p)) = [\varphi(p)] = \{\gamma(\varphi(p)) : \gamma \in \Gamma\} = \{\gamma(p) : \gamma \in \Gamma\} = [p], \; \forall \; \varphi \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Probaremos que

$$\Pi : \varphi(U) \to [U] \tag{2.2}$$

es un homeomorfismo para cada $\varphi \in \Gamma$ y

$$\Pi^{-1}[U] = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(U). \tag{2.3}$$

Para probar (2.3), es suficiente con probar que en esas vecindades Π es biyectiva. La igualdad (2.1) nos da que es sobreyectiva, así que supongamos que $\Pi(\varphi(q_1)) = \Pi(\varphi(q_2))$, con $q_1, q_2 \in U$, luego $[\varphi(q_1)] = [\varphi(q_2)]$. Entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\varphi(q_1) = \gamma(\varphi(q_2))$. Si $\gamma = Id$ entonces $q_1 = q_2$, esto es Π es inyectiva, y si $\gamma \neq Id$ entonces $\varphi(U) \bigcap \gamma \circ \varphi(U) \neq \varnothing$ lo cual es una contradicción. Ahora, como

$$\Pi\left(\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(U)\right) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \Pi(\varphi(U)) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} [U] = [U]$$

se cumple la igualdad (2.3).

Veamos ahora que M/Γ es una variedad. Por (2.2) se tiene que M/Γ es localmente homeomorfo a M que es variedad, entonces es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Ahora, como M es de Hausdorff y por (2.3) se tiene que M/Γ es de Hausdorff, esto es, M/Γ es variedad. Además, por (2.3) concluimos que Π es un cubriente. $\square$

Ahora podemos mostrar una " especie" de recíproco del Teorema 2.8. Recordamos que una acción es un conjunto de homeomorfismos de M en sí mismo que tiene estructura de grupo Γ, estos mismos homeomorfismos son las transformaciones cubrientes de Π. Por lo que el grupo de transformaciones cubrientes de Π es Γ.

TEOREMA 2.10. *Sea M una variedad completa y conexa, Γ grupo que actúa propia y discontinuamente en M, y $\Pi : M \to M/\Gamma$. Entonces $\mathbb{D}(\Pi) \cong \Gamma$.*

Demostración. Sea $\mu : \Gamma \times M \to M$ la acción dada por $\mu(\varphi, p) = \mu_\varphi(p)$. Definimos $K : \Gamma \to \mathbb{D}(\Pi)$ por $K(\varphi) = \mu_\varphi$, donde $\varphi \in \Gamma$. Probaremos que efectivamente K es un isomorfismo de grupos.

1. K está bien definida. En efecto, sabemos que $\mu_\varphi : M \to M$ es homeomorfismo, y cumple que $\Pi \circ \mu_\varphi(p) = \Pi(\varphi(p)) = [\varphi(p)] = [p] = \Pi(p)$, esto es, $\mu_\varphi \in \mathbb{D}(\Pi)$.

2. K es sobreyectiva. Sean $\gamma \in \mathbb{D}(\Pi)$ y $p \in M$ fijo. Entonces $[p] = \Pi(p) = \Pi \circ \gamma(p) = [\gamma(p)]$, de lo que $\gamma(p) \in [\gamma(p)] = [p] = \{\mu(\varphi, p) : \varphi \in \Gamma\}$. Esto implica que existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $\gamma(p) = \mu(\varphi, p) = \mu_\varphi(p)$. Pero entonces γ y μ_φ son dos transformaciones cubrientes que coinciden en un punto p. Por el Lema 2.4 tenemos que $\gamma = \mu_\varphi$ y entonces $K(\varphi) = \gamma$.

3. K es inyectiva. Supongamos que $K(\varphi_1) = K(\varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$, luego $\mu_{\varphi_1} = \mu_{\varphi_2}$. De aquí que $\varphi_1 = \varphi_2$.

4. K es homomorfismo. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma$, como μ es una acción sabemos que $\mu_{\varphi_1 * \varphi_2} = \mu_{\varphi_1} \circ \mu_{\varphi_2}$, es decir, la multiplicación en Γ se corresponde con la composición en $\mathbb{D}(\Pi)$. Entonces $K(\varphi_1 * \varphi_2) = K(\varphi_1) \circ K(\varphi_2)$.

   Por tanto K es un isomorfismo y $\mathbb{D}(\Pi) \cong \Gamma$.

□

EJEMPLO 2.11.

1. $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es cubriente del plano en el toro y $\mathbb{D}(\Pi) = \{T_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2. La acción de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{R}^2$ definida antes no es propia y discontinua; de hecho, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2 = [0, \infty)$ que no es variedad.

3. $\Pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{P}_2$ es cubriente y $\mathbb{D}(\Pi) \cong \mathbb{Z}_2$.

4. $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma \cong \mathbb{K}$ es cubriente, con $\Gamma = \langle T_1, T_2 \rangle$ antes definido, esto es, el plano cubre a la botella de Klein y $\mathbb{D}(\Pi) \cong \Gamma$.

5. $\Pi : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_k$ es cubriente, y si k es primo, a $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{Z}_k$ se le llama **espacio lente de tipo (n,k)**, denotado por L_k^{2n-1}.

Sea $\psi : M \to N$ un cubriente y Γ el grupo de transformaciones cubrientes. Queremos relacionar los grupos $\pi_1(N, \psi(p))$, Γ y $\mathbb{D}(\Gamma)$, así como relacionar los espacios M y N. Para esto requerimos el concepto de cubriente universal que describimos a continuación.

Sea M una variedad y $p \in M$. Definimos Ω_p como el conjunto de todos los caminos en M que empiezan en p, es decir

$$\Omega_p = \{ \alpha : [0,1] \to M \text{ continua} \mid \alpha(0) = p \}.$$

Introducimos una relación de equivalencia similar a la del grupo fundamental: $\alpha \sim \beta$ si y sólo si α es homotópica a β y

$$[\alpha] = \{ \beta \in \Omega_p \mid \alpha \sim \beta \}.$$

Sea $\widetilde{M} := \Omega_p / \sim = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega_p \}$ y definamos la transformación $\Psi : \widetilde{M} \to M$ mediante $\Psi[\alpha] = \alpha(1)$.

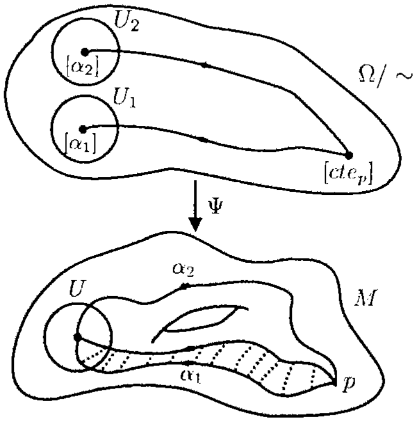

Figura 2.1: $\widetilde{M}$ "deshace los hoyos"

Podemos dar a $\widetilde{M}$ una topología con la cual es una variedad simplemente conexa y Ψ es un cubriente (ver la demostración de este hecho en [12], Teorema 82.1, p. 559). Además, dado cualquier cubriente $\psi : \widetilde{N} \to M$ existe un cubriente $\psi_0 : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ tal que $\Psi = \psi \circ \psi_0$. Si además, $\widetilde{N}$ es simplemente conexo, entonces ψ_0 es un homeomorfismo. Ésta es llamada la propiedad "universal" de Ψ. Se puede utilizar esta propiedad para demostrar que $\widetilde{M}$ es único salvo homeomorfismos, por lo que llamaremos a $\widetilde{M}$ la **cubierta universal** de M y a Ψ le llamaremos el **cubriente universal** de M.

EJEMPLO 2.12. 1. La cubierta universal del doble toro $\mathbb{T}^2 \sharp \mathbb{T}^2$ es $\triangle^2$. Una manera de verlo es "teselando" el disco con octágonos (hiperbólicos).

El siguiente resultado relativo a la fibra y las transformaciones cubrientes será de utilidad más adelante. Por ejemplo, para ver que en un cubriente universal la fibra de un punto tiene información del grupo fundamental de la variedad.

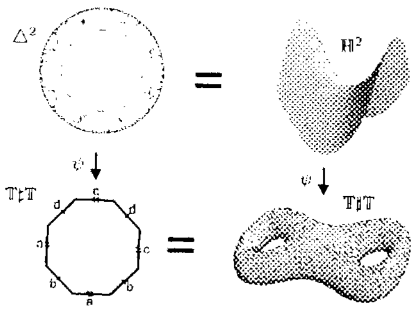

Figura 2.2: El disco de Poincaré cubre al doble toro

LEMA 2.13. *Sean $\widetilde{M}, M$ variedades topológicas conexas y $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente universal. Si $p, q \in \widetilde{M}$ son tales que $\psi(p) = \psi(q)$, entonces existe φ transformación cubriente de ψ tal que $\varphi(p) = q$.*

Demostración. Fijamos $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \widetilde{M}$ continua tal que $\widetilde{\alpha}(0) = p$ y $\widetilde{\alpha}(1) = q$. Sea $\alpha := \psi \circ \widetilde{\alpha}$.

Vamos a definir $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$. Sean $x \in \widetilde{M}$ y $\widetilde{\beta_x} : [0,1] \to \widetilde{M}$ continua tal que $\widetilde{\beta_x}(0) = p$, $\widetilde{\beta_x}(1) = x$ y se define un camino $\beta_x := \psi \circ \widetilde{\beta_x}$. Entonces

$$\varphi(x) := \widetilde{\beta_x \cdot \alpha}(1),$$

donde $\widetilde{\beta_x \cdot \alpha}$ es el levantamiento del camino $\beta_x \cdot \alpha$ que empieza en p. Probaremos que φ cumple las condiciones del lema.

1. Se afirma que φ está bien definida. Esto se debe a la propiedad de levantamientos homotópicos ya que $\pi_1(\widetilde{M}, p) \cong \{e\}$.

2. φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(x) = \varphi(z)$ con $x, z \in \widetilde{M}$, lo que implica

$$\widetilde{\beta_x \cdot \alpha}(1) = \widetilde{\beta_z \cdot \alpha}(1);$$

pero además sabemos que estos caminos empiezan en p. Entonces tenemos dos caminos en $\widetilde{M}$ que unen los mismos puntos. Como $\pi_1(\widetilde{M}, p) \cong \{e\}$, $\widetilde{\beta_x \cdot \alpha}$ es homotópico a $\widetilde{\beta_z \cdot \alpha}$, por lo que β_x es homotópico a β_z y entonces $\beta_x(1) = \beta_z(1)$. Luego $x = z$.

3. $\psi \circ \varphi = \psi$. Sea $x \in \widetilde{M}$, entonces $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\widetilde{\beta_x \cdot \alpha}(1)) = (\beta_x \cdot \alpha)(1) = \beta_x(1) = \psi(x)$.

4. φ y φ^{-1} son continuas. Sabemos por lo anterior que $\psi \circ \varphi = \psi$, φ inyectiva, pero además que ψ es homeomorfismo local. Por tanto φ es continua.

   De la igualdad $\psi = \psi \circ \varphi^{-1}$, análogamente se concluye que φ^{-1} es continua.

5. φ es sobreyectiva. $\varphi(M)$ es un conjunto abierto y cerrado de M que es conexo, por tanto $\varphi(M) = M$.

Resumiendo, $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ es un homeomorfismo y cumple que $\psi \circ \varphi = \psi$. Consecuentemente φ es una transformación cubriente de ψ y $\varphi(p) = q$.

□

EJEMPLO 2.14. 1. Sea $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\sim$ un cubriente y $p, q \in \mathbb{S}^2$ tales que $\psi(p) = \psi(q)$. Entonces $p = q$ ó $p = -q$, por lo que $Id(p) = q$ ó $A(p) = q$.

Cuando tenemos una cubierta M de N, la manera en que "desdoblamos" un punto $p \in N$ en $\psi^{-1}(p) \in M$, está generada en el grupo de transformaciones cubrientes. Cuando la cubierta es universal el proceso de construir el espacio M/Γ, es como volver a pegar toda la fibra $\psi^{-1}(p)$ en un punto $[p]$. En otras palabras, es como "desdoblar" y luego volver a "pegar", por lo que de nuevo obtenemos N.

LEMA 2.15. *Sean M, N variedades topológicas conexas, $\psi : M \to N$ un cubriente universal y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de ψ. Entonces M/Γ es homeomorfo a N.*

Demostración. Recordemos que M/Γ es el espacio de órbitas de Γ, es decir, si $p \in M$, entonces

$$[p] = \{\ \varphi(p) : \gamma \in \Gamma\ \}\ \in M/\Gamma.$$

Sea $H : M/\Gamma \to N$, dada por $H[p] = \psi(p)$.

1. Afirmamos que H está bien definida. Si $[p] = [q]$, con $p, q \in M$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $q = \gamma(p)$, de modo que $H[p] = H[q]$.

2. Afirmamos que H es biyectiva. Como ψ es sobreyectiva, H también lo es. Supongamos que $H[p] = H[q]$; entonces $\psi(p) = \psi(q)$, y por el Lema 2.13 existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $\varphi(p) = q$; pero esto significa que $[p] = [q]$. Por tanto, H es inyectiva.

Recordamos (por el Lema 2.9) que $\Pi : M \to M/\Gamma$ es un cubriente. Entonces

$$H \circ \Pi(p) = H[p] = \psi(p).$$

Por lo que $H \circ \Pi = \psi$; pero Π y ψ son homeomorfismos locales (por ser cubrientes) y H es biyectiva, por tanto H es un homeomorfismo. □

Recordamos que podemos considerar un cubriente como un "desdoble" y podemos preguntarnos, ¿cómo se "desdobla la topología"?. Para responder esto, consideremos el cubriente $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, y sea γ cualquier lazo basado en 1 en el círculo, éste se puede deformar y verse como un lazo γ_n que da n vueltas a velocidad 1 a $\mathbb{S}^1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Así, podemos asociar a $[\gamma_n]$ un entero n, es decir, existe una función $H : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{D}(\psi) \cong \mathbb{Z}$ dada por $H[\gamma_n] = n$. La aplicación

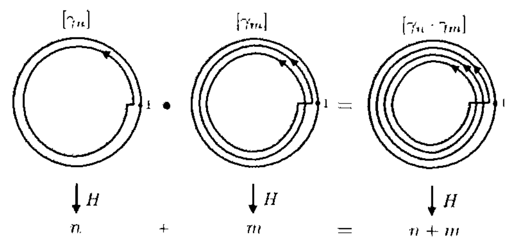

Figura 2.3: H es isomorfismo

H es biyectiva, pero además, si consideramos $[\gamma_n]$ y $[\gamma_m]$, que dan n y m vueltas a $\mathbb{S}^1$ respectivamente, el lazo $[\gamma_n \cdot \gamma_m]$ que corresponde a la multiplicación en $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ se asocia a el entero $n + m$, que corresponde a la suma de $\mathbb{Z}$, es decir H es un isomorfismo.

Esto muestra también que los cubrientes son una herramienta poderosa para calcular grupos fundamentales, así en el ejemplo anterior, se verifica directamente que $\mathbb{D}(\psi) \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

El resultado también se puede ver de la siguiente manera. Toda variedad conexa M es cociente de su cubierta universal $\widetilde{M}$ por la acción de $\pi_1(M,p)$. Es decir, $M \cong \widetilde{M}/\pi_1(M,p)$.

LEMA 2.16. *Sean $\widetilde{M}, M$ variedades conexas, $\Psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente universal de M, $p \in M$ y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de Ψ, entonces*

$$\pi_1(M,p) \cong \Gamma.$$

Demostración. Si $\alpha : [0,1] \to M$ continua, con $\alpha(0) = \alpha(1) = p$, entonces $[\alpha] \in \pi_1(M,p)$, fijamos $\widetilde{p} \in \Psi^{-1}(p)$ y por el Lema 2.13 tenemos que $\Psi^{-1}(p) = \{\ \gamma(\widetilde{p}) : \varphi \in \Gamma\ \}$.

Sea $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de α tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{p}$, como $\Psi(\widetilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = p$, se tiene que $\widetilde{\alpha}(1) \in \Psi^{-1}(p)$. Por el Lema 2.4, existe un único $\gamma_{[\alpha]} \in \Gamma$ tal que $\widetilde{\alpha}(1) = \gamma_{[\alpha]}(\widetilde{p})$.

Definimos $H : \pi_1(M,p) \to \Gamma$ mediante

$$H[\alpha] = \gamma_{[\alpha]}.$$

1. Se afirma que H está bien definida. Si α es homotópica a β y $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son los levantamientos como antes, entonces por la propiedad de levantamientos homotópicos, $\widetilde{\alpha}$ es homotópica a $\widetilde{\beta}$, por lo cual $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$, de donde $H[\alpha] = H[\beta]$.

2. Afirmamos que H es biyectiva. Es fácil ver que H es sobreyectiva. Si $\gamma \in \Gamma$, tomando $\widetilde{\alpha}$ un camino que une $\widetilde{p}$ con $\gamma(\widetilde{p})$ se tiene $H[\alpha] = \gamma$. Veamos que H es inyectiva, para lo cual supongamos que existen $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, p)$ tales que $H[\alpha] = H[\beta]$. Esto implica que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$, donde $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son los levantamientos usados anteriormente. Como además $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) = \widetilde{p}$, tenemos dos caminos que inician y terminan igual, pero $\pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{p}) \cong \{e\}$. Esto implica que $\widetilde{\alpha}$ es homotópico a $\widetilde{\beta}$, entonces α es homotópico a β. Esto implica que $[\alpha] = [\beta]$, es decir, H es inyectiva.

3. Afirmamos que H es homomorfismo. Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, p)$, $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ los levantamientos usados. Existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ únicos tales que $\widetilde{\alpha}(1) = \gamma_1(\widetilde{p})$ y $\widetilde{\beta}(1) = \gamma_2(\widetilde{p})$.

   Sea $\gamma_1 \circ \widetilde{\beta}$ el levantamiento de β que empieza en $\gamma_1(\widetilde{p})$. Ahora, consideremos los caminos $(\gamma_1 \circ \widetilde{\beta}) \cdot \widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta \cdot \alpha}$, ambos empiezan en $\widetilde{p}$ y cumplen que
$$\Psi\left((\gamma_1 \circ \widetilde{\beta}) \cdot \widetilde{\alpha}\right) = \Psi\left(\widetilde{\beta \cdot \alpha}\right).$$
   Por la unicidad de los levantamientos, se tiene que
$$(\gamma_1 \circ \widetilde{\beta}) \cdot \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta \cdot \alpha}.$$
   Evaluando en $t = 1$, $\widetilde{\beta \cdot \alpha}(1) = \gamma_1 \circ \widetilde{\beta}(1) = \gamma_1 \circ \gamma_2(\widetilde{p})$. Por lo tanto,
$$H([\alpha] * [\beta]) := H[\beta \cdot \alpha] = H[\alpha] \circ H[\beta].$$

Lo que indica que H es isomorfismo y $\pi_1(M, p) \cong \Gamma$. □

EJEMPLO 2.17. 1. Consideremos el cubriente $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Se tiene que $\pi_1(\mathbb{T}^2, p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2. Para la aplicación cubriente $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ se tiene que $\pi_1(\mathbb{P}^2, p) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$.

3. Consideremos el cubriente del plano en la botella de Klein $\mathbb{K}$, se tiene que $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ y que $\pi_1(\mathbb{K}, p) \cong \Gamma \cong \{a, b \mid a^2 = b^2\}$.

4. Para los espacios lente, se tiene que $\pi_1(L_k^{2n-1}, p) \cong \mathbb{Z}_p$ con p primo.

2.2. Los Casos Diferenciable y Riemanniano

Sean $\widetilde{M}$ y M variedades diferenciables (respectivamente riemannianas).

DEFINICIÓN 2.18. Una *acción diferenciable (resp. riemanniana)* de un grupo G en una variedad M es una acción topológica $\mu : G \times M \to M$ tal que las transformaciones $\mu_g : M \to M$, dadas por $\mu_g(p) = \mu(g, p)$, $p \in M$, son difeomorfismos (respectivamente isometrías).

Decimos que una acción de Γ en M es *transitiva* si para cualesquiera $p_1, p_2 \in M$ existe $\varphi \in \Gamma$ tal que $\varphi(p_1) = p_2$.

Sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ un cubriente diferenciable (respectivamente riemanniano). Un difeomorfismo (respectivamente isometría) $\varphi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ es una *transformación cubriente diferenciable* (respectivamente riemanniana) de ψ si y sólo si $\psi \circ \varphi = \psi$.

De nuevo, Γ es un grupo, el grupo de transformaciones cubrientes diferenciables (respectivamente riemannianas) de ψ.

Los resultados relativos a acciones topológicas, como el Lema 2.9 y la existencia de la cubierta universal, se extienden de manera natural a los casos diferenciable y riemanniano.

Un resultado importante relativo a acciones diferenciables y grupos de Lie es el siguiente (ver [2], página 59):

TEOREMA 2.19. *Sea M variedad diferenciable y Γ grupo de Lie conexo, supongamos que Γ genera una acción diferenciable y transitiva en M. Sean $p \in M$ y el subgrupo de isotropía en p, $H_p = \{\varphi \in \Gamma \mid \varphi(p) = p\}$, entonces $M \simeq \Gamma/H$ (difeomorfos) y no depende del punto p.*

EJEMPLO 2.20.

1. Considerando la acción de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ $n \geq 2$, en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, se obtiene que $\mathbb{S}^n \simeq SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$.
2. Considerando la acción de U_2 en $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ se tiene que $\mathbb{S}^3 \simeq U_2/U_1$.
3. $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\}$ actúa transitivamente en el semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Imz} > 0\}$, donde la acción μ está dada por
$$\mu\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \frac{az+b}{cz+d}.$$
Se tiene que
$$H_i = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1\right\} \cong SO_2(\mathbb{R}),$$
por lo que $H \simeq SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

Es posible "geometrizar" a una variedad diferenciable M suponiendo que su cubierta universal $\widetilde{M}$ tiene una geometría, si se cumple una condición adicional: Sean $p \in M$ y $\widetilde{p} \in \psi^{-1}(p)$; entonces existen vecindades U y $\widetilde{U}$ de p y $\widetilde{p}$ respectivamente, tales que $\psi^{-1}|_U : U \to \widetilde{U}$ es difeomorfismo. Si $\vec{u}, \vec{v} \in T_pM$, entonces
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_p := \langle d\psi^{-1}|_U(\vec{u}), d\psi^{-1}|_U(\vec{v}) \rangle_{\widetilde{p}}.$$
Para que esta definición no dependa del punto de la fibra de p necesitamos que el grupo de transformaciones cubrientes sea un grupo de isometrías de $\widetilde{M}$ (ver Lema 2.13). En este caso la métrica definida en M es riemanniana.

EJEMPLO 2.21.

1. Si M es una superficie de Riemann, el Teorema de uniformización implica que la superficie de Riemann $\widetilde{M}$, que cubre universalmente a M es analíticamente equivalente a $\mathbb{S}^2, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{D}^2$. Si M es una

superficie orientable cuya cubierta universal no es $\mathbb{S}^2$ ni el toro $\mathbb{T}^2$, se puede construir de M una superficie de Riemann, que tiene como cubierta universal a $\mathbb{D}^2$. Además, M tiene una métrica completa con curvatura seccional constante -1, es decir, provista de una geometría hiperbólica.

2. Se pueden clasificar todas las variedades de dimensión n con curvatura seccional constante considerando acciones de isometrías propias y discontinuas en $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ y haciendo los cocientes.

OBSERVACIÓN 2.22. De ahora en adelante todas las acciones y cubrientes serán riemannianos a menos que se especifique lo contrario.

Sean $\widetilde{M}, M$ variedades topológicas conexas, completas y $\psi : \widetilde{M} \to M$ un cubriente con grupo de transformaciones cubrientes Γ. Entonces $\Omega \subseteq \widetilde{M}$ es llamado un **dominio fundamental** del cubriente ψ si cumple las dos condiciones siguientes:

a) $\gamma(\Omega) \cap \Omega = \varnothing$ para toda $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq Id$.

b) $\psi(\overline{\Omega}) = M$.

Si además Γ actúa transitivamente sobre las fibras $\psi^{-1}(p)$ para cada $p \in M$, entonces $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) = \widetilde{M}$.

Podemos decir que un dominio fundamental es la “pieza” para construir el cubriente y es el menor conjunto de $\widetilde{M}$ con cuya cerradura se cubre a M. Así, por ejemplo, cuando la esfera cubre al plano proyectivo, podríamos tomar como un dominio al casquete superior de la esfera, o cuando la recta cubre al círculo podemos tomar como dominio al intervalo $(0,1)$.

Vamos a probar la existencia de dominios fundamentales en el caso riemanniano usando el lugar geométrico de corte (cut locus), para lo cual necesitamos algunas definiciones.

Sea M variedad riemanniana y sea $p \in M$. Entonces

1. $S_pM := \{ \xi \in T_pM : |\xi| = 1 \}$; es decir, S_pM es la esfera unitaria en T_pM.
2. $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to M$ es la geodésica dada por $\gamma_\xi(t) = \exp_p(t\xi)$.
3. $c(\xi) = \sup\{ t > 0 : d(p, \gamma_\xi(t)) = t \}$.
4. El **lugar geométrico de corte** de p en T_pM, denotado $\mathbb{C}_p$ está dado por
$$\mathbb{C}_p = \{ c(\xi)\xi \ : \ c(\xi) < +\infty \ , \ \xi \in S_pM \}.$$
5. $\mathbb{D}_p = \{ t\xi \ : \ 0 \leq t < c(\xi), \ \xi \in S_pM \}$.

$\mathbb{D}_p$ es la región en T_pM más grande donde la transformación $\exp_p$ sigue siendo un difeomorfismo.

EJEMPLO 2.23. Si $M = \mathbb{S}^2(r)$ es la esfera de radio r en $\mathbb{R}^3$, entonces para todo $\xi \in S_pM$ se tiene que $c(\xi) = \pi r$ y $\mathbb{D}_p = B(0_p; \pi r)$.

En cambio, para el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ existen $\xi_1, \xi_2 \in S_pM$ tales que $c(\xi_1) = \pi r$ y que $c(\xi_2) = \infty$.

Utilizaremos que $\exp_p|_{\mathbb{D}_p}$ es difeomorfismo (ver [3], página 108) y $\exp_p(\overline{\mathbb{D}_p}) = M$.

Ahora probemos la existencia de dominios fundamentales.

TEOREMA 2.24. *Si $\widetilde{M}, M$ son variedades riemannianas conexas y completas tales $\psi : \widetilde{M} \to M$ es un cubriente riemanniano, entonces existe un dominio fundamental Ω del cubriente ψ. Si ψ es cubriente universal, entonces*

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) = \widetilde{M}.$$

Demostración. Sean $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ fijo, $p = \psi(\widetilde{p})$ y $\mathbb{D}_p \subset T_pM$. Sea

$$\Omega := \exp_{\widetilde{p}} \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p) \subset \widetilde{M}.$$

Sea afirma que Ω es un dominio fundamental para ψ.

1. $\gamma(\Omega) \cap \Omega = \varnothing$ para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq Id$. Supongamos que existe $\gamma \in \Gamma$ distinta de la identidad tal que $z_1 \in \gamma(\Omega) \cap \Omega$. Esto implica que existe $z_2 \in \Omega$ tal que $z_1 = \gamma(z_2)$, con $z_1, z_2 \in \Omega$. Así,
$$\psi(z_1) = \psi \circ \gamma(z_2) = \psi(z_2). \tag{2.4}$$
Ahora, existen $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p)$ tal que $\exp_{\widetilde{p}}(\overline{z_i}) = z_i$ con $i = 1, 2$.
Por el Lema 1.5,
$$\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}(\overline{z_i}) = \psi \circ \exp_{\widetilde{p}}(\overline{z_i}) = \psi(z_i), \;\; i = 1, 2,$$
por (2.4) y las igualdades anteriores, $\exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}(\overline{z_1}) = \exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}(\overline{z_2})$.
Pero $\exp_p|_{\mathbb{D}_p}$ es inyectiva (ya que es difeomorfismo) al igual que $d\psi_{\widetilde{p}}$, por lo cual $\overline{z_1} = \overline{z_2}$, de lo que $z_1 = z_2$ y $z_1 = \gamma(z_1)$. Por el Lema 2.4 se sigue que $\gamma = Id$, lo cual es una contradicción. Por tanto tenemos la propiedad (1) para Ω.

2. Queremos mostrar que $\psi(\overline{\Omega}) = M$. Recordemos, que si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para toda $A \subseteq X$ y si además f es homeomorfismo se da la igualdad. Por tanto, $\exp_{\widetilde{p}}(\overline{A}) \subseteq \overline{\exp_{\widetilde{p}}(A)}$ para toda $A \subseteq T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$, pues $\exp_{\widetilde{p}}$ es continua y $d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\overline{\mathbb{D}_p}) = \overline{d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p)}$ pues $d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}$ es homeomorfismo. Luego,
$$\begin{aligned}\psi(\overline{\Omega}) &= \psi\left(\overline{\exp_{\widetilde{p}} \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p)}\right) \supseteq \psi\left(\exp_{\widetilde{p}}\, \overline{d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p)}\right)\\ &= \exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}\left(\overline{d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\mathbb{D}_p)}\right) = \exp_p \circ\, d\psi_{\widetilde{p}}\left(d\psi_{\widetilde{p}}^{-1}(\overline{\mathbb{D}_p})\right)\\ &= \exp_p(\overline{\mathbb{D}_p}) = M.\end{aligned}$$

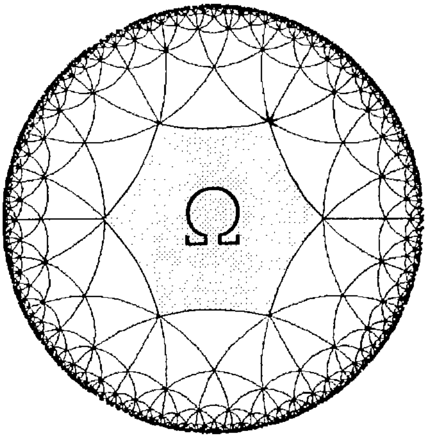

Figura 2.4: Un dominio fundamental

Entonces $\psi(\overline{\Omega}) \supseteq M$, de donde $\psi(\overline{\Omega}) = M$, por lo que Ω es un dominio fundamental para ψ.

c) Si ψ es cubriente universal queremos mostrar que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) = \widetilde{M}$.

Sea $z \in \widetilde{M}$. Como $\psi(\overline{\Omega}) = M$, existe $w \in \overline{\Omega}$ tal que $\psi(w) = \psi(z)$. Por el Lema 2.13, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(w) = z$. Esto implica que $z \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega})$, de donde $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) \supseteq \widetilde{M}$, y por tanto se tiene la igualdad.

□

EJEMPLO 2.25. Llenando con hexágonos regulares hiperbólicos a Δ^2, es posible cubrir a la superficie no orientable $\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2$ con el disco de Poincaré (análogamente para la suma de n proyectivos $n > 3$). En este caso, el dominio fundamental es Ω, como se indica en la figura 2.4.

Capítulo 3

Cubrientes de variedades de curvatura positiva

En este capítulo se estudian las variedades con curvatura seccional constante k. En particular, analizaremos los cubrientes universales de esas variedades.

Recordemos que para $k < 0$ se tiene el siguiente.

TEOREMA 3.1 (Cartan-Hadamard). *Sea M una variedad riemanniana completa, conexa y con curvatura seccional $K_M < 0$. Entonces, para todo $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ es un cubriente. Además, $\pi_1(M,p)$ es infinito y no conmutativo.*

Mientras que para el caso $k > 0$, se cumple

TEOREMA 3.2 (Bonnet-Myers). *Sea M una variedad riemanniana completa, conexa, con curvatura seccional $K_M \geq \delta > 0$ y $\dim M \geq 2$. Entonces M es compacta. Si $\widetilde{M}$ es cualquier cubriente, entonces también $\widetilde{M}$ es compacta. Además, el grupo fundamental de M es finito.*

En este segundo caso, tenemos para el cubriente universal lo siguiente.

TEOREMA 3.3. *Dada M una variedad riemanniana conexa completa de curvatura seccional constante $K_M = k > 0$ con $\dim M = n \geq 2$, existe un cubriente riemanniano $\psi : \mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to M$.*

Resumiendo, las variedades con curvatura seccional $K_M < 0$ tienen como cubierta universal a $\mathbb{R}^n$ y grupo fundamental infinito y no conmutativo. Las variedades con curvatura seccional $K_M > 0$ son necesariamente compactas, con grupo fundamental finito y su cubierta universal es $\mathbb{S}^n$.

La idea presente en estos resultados, es la siguiente: una variedad con curvatura seccional positiva tiene a "cerrarse", mientras una con curvatura negativa tiene a "abrirse"(para dimensión ≥ 2) .

El propósito de este capítulo es el de demostrar el Teorema 3.3, que incluimos por completez, aunque la lectura de la demostración es técnica y puede omitirse.

Para probar el teorema, seguiremos el siguiente plan por secciones.

1. Sección 3.1. Se dan las definiciones y los resultados relativos a segmentos, geodésicas e isometrías. Se demuestra que una función que preserva la distancia es una isometría (Teorema 3.9).

2. Sección 3.2. Se dan algunas definiciones y repaso de relaciones entre la curvatura, los campos de Jacobi y los puntos críticos de la transformación exponencial.

3. Sección 3.3. Se prueba en base a los resultados de la sección anterior, que una variedad M con curvatura seccional constante $k > 0$ cumple para todo $p \in M$ que
$$\exp_p |_{B(0_p;\frac{\pi}{\sqrt{k}})}$$
tiene rango máximo y
$$d(\exp_p)_v \left(T_v(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p))\right) = 0$$
para todo $v \in \mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p)$.

4. Sección 3.4. Sea M variedad con curvatura seccional constante $k > 0$, entonces la transformación "antípoda" $Q : M \to M$ definida por $Q(p) = \exp_p(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0))$ está bien definida, es una isometría y finalmente, existe un cubriente riemanniano
$$\psi : \mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to M.$$

   Resumen de la demostración. Q está bien definida por la condición de la $d(\exp_p)_v$, además Q preserva la distancia, entonces por el Teorema 3.9 es una isometría. Es claro que las condiciones anteriores las cumple una esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$, hacemos $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ y en este caso $\widetilde{Q}$ es la transformación antípoda. Damos, utilizando Q, $\widetilde{Q}$, la exponencial y una isometría entre dos tangentes, una transformación ψ entre la n-esfera $\widetilde{M}$ y M, como $\widetilde{M}$ y M tienen curvatura seccional constante, ψ será una isometría local (Teorema 2.18 de [3]), y por tanto un cubriente (Teorema 1.7).

3.1. Segmentos, geodésicas e isometrías

DEFINICIÓN 3.4. Sea $\chi : [a, b] \to M$ una curva continua. Decimos que χ es un **segmento** si
$$d(\chi(t_1), \chi(t_3)) = d(\chi(t_1), \chi(t_2)) + d(\chi(t_2), \chi(t_3))$$
para cualesquiera $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq b$.

Recordaremos que localmente las geodésicas minimizan la distancia. Más precisamente,

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea M una variedad riemanniana completa. Entonces para todo $p \in M$ existe $r > 0$ tal que para cualesquiera $q_1, q_2 \in B(p\,; r)$ existe una única geodésica minimal $\gamma : I \to B(p\,; r)$ que une q_1 con q_2, es decir,*

$$d(q_1, q_2) = (long\ \gamma)_{q_1}^{q_2}.$$

La proposición anterior dice que toda geodésica es localmente un segmento. Un recíproco parcial es el siguiente:

LEMA 3.6. *Sea M variedad riemanniana completa. Entonces todo segmento en M es una geodésica como conjunto de puntos.*

Demostración. Sea $\chi : [a, b] \to M$ un segmento. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\chi([a, b]) \in B(\chi(a); r)$. Si $r > 0$ es tal que en $B(\chi(a); r)$ se cumplen las conclusiones de la proposición 3.5, sabemos que existe $\alpha : [a, b] \to B(\chi(a); r)$ geodésica minimal tal que $\alpha(a) = \chi(a)$ y $\alpha(b) = \chi(b)$.

Afirmamos que el segmento χ coincide con la geodésica α en $[a, b]$.

Supongamos que existe $c \in [a, b]$ tal que $\chi(c) \notin \alpha([a, b])$. Esto implica que

$$(long\ \alpha)_{\chi(a)}^{\chi(b)} < (long\ \gamma)_{\chi(a)}^{\chi(b)}$$

donde γ es cualquier geodésica por pedazos en $B(\chi(a); r)$ que une $\chi(a)$ con $\chi(b)$ y pasa por $\chi(c)$.

En particular, si $\beta = \gamma_1 \cup \gamma_2$, donde γ_1 y γ_2 son geodésicas minimales que unen $\chi(a)$ con $\chi(c)$ y $\chi(c)$ con $\chi(b)$ respectivamente (cuya existencia queda garantizada de nuevo por la proposición 3.5). Tenemos que

$$(long\ \alpha)_{\chi(a)}^{\chi(b)} < (long\ \gamma_1)_{\chi(a)}^{\chi(c)} + (long\ \gamma_2)_{\chi(c)}^{\chi(b)},$$

de donde

$$d(\chi(a), \chi(b)) < d(\chi(a), \chi(c)) + d(\chi(c), \chi(b)),$$

lo cual es una contradicción, pues por ser χ un segmento y $a < c < b$ debemos tener la igualdad. Tenemos entonces que $\chi([a, b]) \in \alpha([a, b])$ y por continuidad de χ concluimos que $\chi([a, b]) = \alpha([a, b])$ y por tanto χ es una geodésica como conjunto de puntos. $\square$

Veremos ahora que una transformación que preserva distancia aplica geodésicas en geodésicas.

LEMA 3.7. *Sean M una variedad riemanniana completa y $\varphi : M \to M$ una transformación tal que $d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$ para cualesquiera $p, q \in M$. Además, sea $\alpha : \mathbb{R} \to M$ una geodésica. Entonces $\varphi \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$ es geodésica.*

Demostración. Supongamos que $\alpha : [0, \infty) \to M$ es una geodésica. Probaremos que existe $b > 0$ tal que $\varphi \circ \alpha : [0, b] \to M$ es geodésica. Con esto podemos extender localmente cuando sea necesario para definir $\varphi \circ \alpha$ a todo $[0, \infty)$.

Podemos suponer que α está parametrizada por longitud de arco. Existe $r > 0$ tal que $B(\alpha(0); r)$ cumple las conclusiones de la proposición 3.5.

Sea $a' \in \mathbb{R}$, $0 < a' < a$, tal que $\alpha([0, a']) \in B(\alpha(0); r)$. Entonces existe $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < a'$, tal que $\alpha([0, b])$ es la geodésica minimal que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, ya que localmente una geodésica es minimal.

Demostraremos ahora que $\alpha([0, b])$ es un segmento. Para esto, sean $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tales que $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le b$. Como α es geodésica minimal en $[0, b]$, se tiene

$$(long\ \alpha)_{\alpha(t_1)}^{\alpha(t_2)} + (long\ \alpha)_{\alpha(t_2)}^{\alpha(t_3)} = (long\ \alpha)_{\alpha(t_1)}^{\alpha(t_3)}. \tag{3.1}$$

La proposición 3.5 implica que

$$(long\ \alpha)_{\alpha(t_i)}^{\alpha(t_j)} = d(\alpha(t_i), \alpha(t_j))$$

para $i, j = 1, 2, 3$. Sustituyendo en (3.1) tenemos

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) + d(\alpha(t_2), \alpha(t_3)) = d(\alpha(t_1), \alpha(t_3)),$$

para $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le b$. Por tanto, $\alpha([0, b])$ es un segmento. Y como

$$d(\varphi \circ \alpha(t_i), \varphi \circ \alpha(t_j)) = d(\alpha(t_i), \alpha(t_j))$$

para $i, j = 1, 2, 3$, sustituyendo en la igualdad anterior se tiene

$$d(\varphi \circ \alpha(t_1), \varphi \circ \alpha(t_2)) + d(\varphi \circ \alpha(t_2), \varphi \circ \alpha(t_3)) = d(\varphi \circ \alpha(t_1), \varphi \circ \alpha(t_3)).$$

Por lo tanto, $\varphi \circ \alpha([0, b])$ es un segmento. El Lema 3.6 implica que $\varphi \circ \alpha([0, b])$ es una geodésica como conjunto de puntos.

Sean $t_1, t_2 \in [0, b]$. Como α está parametrizada por longitud de arco, tenemos que $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |\ t_1 - t_2\ |$. Por tanto,

$$d(\varphi \circ \alpha(t_1), \varphi \circ \alpha(t_2)) = |\ t_1 - t_2\ |$$

para cualesquiera $t_1, t_2 \in [0, b]$. En resumen, $\varphi \circ \alpha$ es geodésica como conjunto de puntos y además está parametrizada por longitud de arco. Esto implica que $\varphi \circ \alpha$ es geodésica en $[0, b]$. □

Sabemos que en una variedad riemanniana M la métrica determina a la geometría. Por ejemplo, determina la manera de medir en M. Podemos entonces obtener la longitud de un vector o el ángulo entre dos vectores en términos de la distancia. Es lo que dice el siguiente resultado.

LEMA 3.8. *Sean M una variedad riemanniana completa, $p \in M$, $v, w \in T_pM$ tales que $\|v\| = \|w\| = 1$ y $\gamma_v, \gamma_w : I \to M$ geodésicas con las condiciones $\gamma_v(0) = \gamma_w(0) = p$; $\gamma_v'(0) = v$ y $\gamma_w'(0) = w$. Entonces*

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \lim_{s \to 0} \frac{1}{2s}\ d(\gamma_v(s), \gamma_w(s)),$$

donde θ es el ángulo entre v y w.

Para una demostración, consultar [7], página 170.

Si M es una variedad riemanniana y $\varphi : M \to M$ es una isometría, es fácil verificar que φ preserva la distancia, es decir $d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$ para cualesquiera pareja de puntos $p, q \in M$. Ahora consideremos el problema inverso; es decir, nos preguntamos si una transformación $\varphi : M \to M$ que preserva la distancia es o no una isometría. Esto se responde en el siguiente resultado.

LEMA 3.9. *Sean M una variedad riemanniana conexa completa y $\varphi : M \to M$ una transformación tal que $d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$ para cualesquiera $p, q \in M$. Entonces φ es una isometría.*

Demostración. Primero demostraremos que φ es un homeomorfismo.

Es fácil ver que φ es continua. Además, como

$$d(\varphi^{-1}(p), \varphi^{-1}(q)) = d(\varphi(\varphi^{-1}(p)), \varphi(\varphi^{-1}(q)) = d(p, q),$$

se tiene también que $\varphi^{-1} : \varphi(M) \to M$ es continua.

Claramente φ es inyectiva, y solo demostraremos que es suprayectiva. M es un conjunto abierto y cerrado, de modo que $(\varphi^{-1})^{-1}(M)$ también lo es; es decir, $\varphi(M)$ es abierto y cerrado en M y M es conexo, de modo que $\varphi(M) = M$.

Por tanto $\varphi : M \to M$ es un homeomorfismo.

Queremos ahora demostrar que φ es un difeomorfismo. Sea $p \in M$, entonces existe $r > 0$ tal que si $U = B(0_p\,; r)$ y $U' = B(0_{p'}\,; r)$, con $p' = \varphi(p)$, entonces

$$\exp_p : U \subset T_pM \to B(p\,; r) \subseteq M \quad \text{y} \quad \exp_{p'} : U' \subset T_{p'}M \to B(p'\,; r)) \subseteq M$$

son difeomorfismos.

La idea es construir un isomorfismo $R : T_pM \to T_{p'}M$ tal que $\varphi \circ \exp_p |_U = \exp_{p'} \circ R |_U$. Podemos entonces despejar a φ para ver que es un difeomorfismo local. Ya que φ es biyectiva, tendremos que es un difeomorfismo en M. A primera vista, propondriamos que R debería ser algo como "$d\varphi_p$" pero hasta ahora sólo sabemos que φ es homeomorfismo.

Definiremos entonces $R : T_pM \to T_{p'}M$. Sean $u \in T_pM$ y $\alpha : \mathbb{R} \to M$ una geodésica en M (M es completa) tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = u$. Entonces

$$\varphi \circ \exp_p(u) = \varphi(\alpha(1)). \tag{3.2}$$

Por el Lema 3.7, $\varphi \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$ es una geodésica. Como $(\varphi \circ \alpha)(0) = p'$, definimos

$$R(u) := (\varphi \circ \alpha)'(0) \in T_{p'}M$$

y en este caso

$$\exp_{p'} \circ R(u) = (\varphi \circ \alpha)(1). \tag{3.3}$$

Por (3.2) y (3.3) tenemos que

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{p'} \circ R. \tag{3.4}$$

Demostraremos que R es una isometría lineal.

1. Se afirma que R preserva la métrica:

   Sean $v, w \in T_pM$ y γ_v, γ_w las geodésicas dadas por el Lema 3.8. Por el Lema 3.7 tenemos que $\varphi \circ \gamma_v, \varphi \circ \gamma_w$ son también geodésicas. Por tanto,

   $$\|R(v)\| = \frac{1}{s}\, d(\varphi \circ \gamma_v(s), \varphi \circ \gamma_v(0)) = \frac{1}{s}\, d(\gamma_v(s), \gamma_v(0)) = \|v\|.$$

   Análogamente, $\|R(w)\| = \|w\|$. Sí además $\|v\| = \|w\| = 1$, y denotamos por θ al ángulo entre v y w y θ' el ángulo entre $R(v)$ y $R(w)$. Entonces

   $$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta' = \lim_{s \to 0} \frac{1}{2s}\, d(\varphi \circ \gamma_v(s), \varphi \circ \gamma_w(s)) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{2s}\, d(\gamma_v(s), \gamma_w(s)) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$$

   Por tanto R preserva los ángulos. Y entonces,

   $$g_p(v, w) = \|v\|\|w\| \cos\theta = \|R(v)\|\|R(w)\| \cos\theta' = g'_p(R(v), R(w))$$

   para cualesquiera $v, w \in T_pM$, de modo que R preserva la métrica.

2. Veamos ahora que R es un isomorfismo de espacios vectoriales. Supongamos que $R(v) = R(w)$. Entonces $0 = g_{p'}(R(v), R(w)) = g_p(v, w)$. Esto implica que $v = w$, esto es, R es inyectiva.

   Sea $n = \dim M$ y $\{e_i\}$ $i = 1, ..., n$ una base ortonormal de T_pM. Como R es inyectiva y preserva la métrica, se tiene que $\{R(e_i)\}$ es una base ortonormal de $T_{p'}M$.

   Aprovecharemos este hecho para probar que R es lineal. Sean $v, w \in T_pM$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

   $$\begin{aligned} g_{p'}(R(v + \lambda w), R(e_j)) &= g_p(v + \lambda w, e_j) = g_p(v, e_j) + \lambda g_p(w, e_j) \\ &= g_{p'}(R(v), R(e_j)) + \lambda g_{p'}(R(w), R(e_j)) = g_{p'}(R(v) + \lambda R(w), R(e_j)) \end{aligned}$$

   para $j = 1, \ldots, n$. Esto implica que

   $$R(v + \lambda w) = R(v) + \lambda R(w).$$

En resumen, $R : T_pM \to T_{p'}M$ es lineal e inyectiva y como $\dim T_pM = \dim T_{p'}M$, R es sobreyectiva. Además R preserva la métrica; esto es, R es una isometría de espacios vectoriales. Por tanto, un difeomorfismo.

Ahora ya podemos probar que φ es un difeomorfismo. En (3.4) vimos que $\varphi \circ \exp_p = \exp_{p'} \circ R$. Entonces

$$\varphi|_{B(p;r)} = \exp_{p'} \circ R \circ (\exp_p)^{-1}|_{B(p;r)},$$

pero como $(\exp_p)^{-1} : B(p; r) \to U$, $R : U \to U'$ y $\exp_{p'} : U' \to B(p'; r)$ son difeomorfismos, tenemos que $\varphi\, |_{B(p;r)}$ es un difeomorfismo, esto es, φ es un difeomorfismo local. Pero φ es biyectiva, lo que implica que φ es un difeomorfismo.

Como φ es diferenciable, existe dR_p y es claro que por la definición de R se tiene que $R = dR_p$. Pero R es una isometría; por tanto dR_p preserva la métrica y φ es una isometría. $\square$

3.2. Curvatura y Campos de Jacobi

Sólo citaremos resultados necesarios, dos referencias útiles son [5] y [4].

LEMA 3.10. *Sean M una variedad riemanniana completa de curvatura seccional constante $K > 0$, $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica de rapidez unitaria en M y un campo J definido a lo largo de γ, normal a γ' (es decir $J(t) \perp \gamma'(t)$). Entonces*

$$R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = KJ(t)$$

para todo $t \in [0,a]$.

DEFINICIÓN 3.11. Sea M una variedad riemanniana completa y $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica en M. Un campo vectorial J a lo largo de α es un **campo de Jacobi** si satisface la ecuación de Jacobi

$$\frac{D^2 J}{\partial t^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

para todo $t \in [0,a]$.

Sea $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica en M y $t_0 \in (0,a]$. El punto $\gamma(t_0)$ es llamado el **conjugado** a $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo de Jacobi J a lo largo de γ, no idénticamente cero, tal que $J(0) = 0 = J(t_0)$.

LEMA 3.12. *Sean M una variedad riemanniana completa y $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica de rapidez unitaria en M, con $\gamma(0) = p$. El punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [0,a]$ es conjugado a p a lo largo de γ si y sólo si $v_0 = t_0\gamma'(0)$ es un punto crítico de $\exp_p$.*

LEMA 3.13. *Sean M una variedad riemanniana completa y $\gamma : [0,a] \to M$ una geodésica de rapidez unitaria en M. Entonces un campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ está dado por*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)),$$

donde $t \in [0,a]$.

3.3. Relación con la transformación exponencial

En esta sección se probará el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.14. *Sea M una variedad con curvatura seccional constante $k > 0$, entonces para todo $p \in M$ y para todo $v \in \mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p)$*

$$d(\exp_p)_v \left(T_v(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p))\right) = 0.$$

Demostración. Sean $p \in M$ y $v \in \mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p) \in T_pM$; entonces $v = \frac{\pi}{\sqrt{k}}u$ con $u \in T_pM$ y $\|u\| = 1$.

Sea $w \in T_v(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0_p))$, entonces $w \perp u$ y podemos suponer que $\|w\| = 1$. Se probará que $(d\exp_p)_v(w) = 0$.

Consideremos $\gamma_u(t) = \exp_p(tu) : \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right] \to M$ una geodésica y w un campo paralelo a lo largo de γ_u tal que $w(0) = w$.

La transformación $J(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})w(t)$ define un campo a lo largo de γ_u; por un cálculo directo se tiene que

$$\frac{D^2 J}{\partial t}(t) = -\sqrt{k}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})w(t).$$

Observemos que

$$\langle J(t), \gamma_u'(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})\langle w(0), \gamma_u'(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})\langle w, u\rangle = 0.$$

Por tanto, J es normal a γ_u' y como γ_u es una geodésica de rapidez unitaria, podemos aplicar el Lema 3.10 para obtener que

$$R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = kJ(t)$$

para todo $t \in [0, a]$. Esto implica que

$$\frac{D^2 J}{\partial t}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = -\sqrt{k}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})w(t) + k\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(t\sqrt{k})w(t) = 0,$$

de lo que se sigue que J es un campo de Jacobi a lo largo de γ_u. Ahora, por el Lema 3.13,

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma_u'(0)}(tJ'(0)) \tag{3.5}$$

para toda $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}]$, pero $J'(t) = \cos(t\sqrt{k})\ w(t)$, de modo que $J'(0) = w$ y $J(\frac{\pi}{\sqrt{k}}) = 0$. Al evaluar (3.5) en $t = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ tenemos

$$J\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) = d(\exp_p)_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}u}\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}w\right) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}\, d(\exp_p)_v(w) = 0,$$

lo cual implica que $d(\exp_p)_v(w) = 0$, lo que demuestra el segundo inciso. □

3.4. Demostración del teorema 3.3

Recordemos el teorema que queremos probar: el cubriente universal riemanniano de una variedad de curvatura seccional constante $k > 0$ es la n-esfera de radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

LEMA 3.15. *Sea M una variedad riemanniana completa de curvatura seccional constante $k > 0$ con $\dim M = n \geq 2$, entonces*

1. *Para todo $p \in M$, la imagen de $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$ bajo $\exp_p$ es un punto. Entonces la transformación $Q : M \longrightarrow M$ definida por $Q(p) = \exp_p(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0))$ está bien definida.*
2. *$Q^2 = Id_M$.*
3. *Q es una isometría de M.*
4. *$\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ es la cubierta universal riemanniana de M.*

Demostración. 1. La hipótesis sobre $d(\exp_p)_v$ hace que $\exp_p(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0))$ sea un punto. Para probarlo, consideremos $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$ curva diferenciable. Entonces $\exp_p \circ \alpha : [a,b] \longrightarrow M$ es también diferenciable; y si $\tau \in [a,b]$,

$$\frac{d}{dt}(\exp_p \circ \alpha)(\tau) = d(\exp_p)_{\alpha(\tau)}\ (\alpha'(\tau)) = 0;$$

ya que $\alpha'(\tau) \in T_{\alpha(\tau)}(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0))$, y aplicando la hipótesis. Por tanto, $\exp_p \circ \alpha$ es una curva constante en $[a,b]$, y como $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$ es conexo, se tiene que $\exp_p(\mathbb{S}_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0))$ es un punto y Q está bien definida.

2. $Q^2 = Id_M$. Haremos primero una observación que será útil en lo que resta de la demostración del lema:

   Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ cualquier geodésica en M de rapidez unitaria con $\gamma(0) = p$; entonces

$$Q(p) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right), \tag{3.6}$$

   ya que $Q(p) = \exp_p\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\gamma'(0)\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$.

   De esta forma, $Q(Q(p)) = Q(\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{k}}))$. Considerando la geodésica $\gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - t\right)$ y aplicando (3.6), se tiene que

$$Q^2(p) = Q\left(\gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}} - \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) = \gamma(0) = p.$$

3. Afirmamos que Q es una isometría. Haremos una nueva observación.

   Sea $\xi \in T_pM$, con $\|\xi\| = 1$ y la geodésica $\gamma_\xi(t) = \exp_p(t\xi)$, entonces

$$Q(\gamma_\xi(t)) = \gamma_\xi(t + \frac{\pi}{\sqrt{k}})\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

   En efecto, al considerar la geodésica $\gamma_\xi(t+\tau) : \mathbb{R} \longrightarrow M$, t fijo aplicamos (3.6).

   Sean $p, q \in M$, existe $\xi \in T_pM$, $\|\xi\| = 1$ tal que $q = \gamma_\xi(d(p,q))$. Por (3.7),

$$Q(q) = Q(\gamma_\xi(d(p,q))) = \gamma_\xi\left(d(p,q) + \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right),$$

por lo que

$$d(Q(p), Q(q)) = d\left(\gamma_\xi\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right), \gamma_\xi\left(d(p,q) + \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right) \leq d(p,q)$$

para todo $p, q \in M$. Pero también se cumple

$$d(p,q) = d(Q(Q(p)), Q(Q(q))) \leq d(Q(p), Q(q)).$$

Entonces Q preserva la distancia, y por el Lema 3.9, Q es una isometría.

4. Ahora ya podemos probar que $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ cubre a M.

Sabemos que $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ satisface las hipótesis del lema que estamos probando; por tanto, si $\widetilde{Q}$ es la transformación del primer inciso, $\widetilde{Q}$ es la transformación antípoda en la n-esfera. Para construir ψ damos coordenadas normales a $\widetilde{M}$ y M y una isometría lineal cualquiera entre dos tangentes.

Veámoslo formalmente. Sean $p \in M$, $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ y una isometría lineal $\varphi : T_{\widetilde{p}}\widetilde{M} \to T_pM$. Definimos $\psi : \widetilde{M} \to M$ como sigue:

$$\psi\mid_{B(\widetilde{p};\frac{\pi}{\sqrt{k}})} = \exp_p \circ \varphi \circ (\exp_{\widetilde{p}}\mid_{B(\widetilde{p};\frac{\pi}{\sqrt{k}})})^{-1},$$

y $\psi(\widetilde{Q}(\widetilde{p})) = Q(p)$.

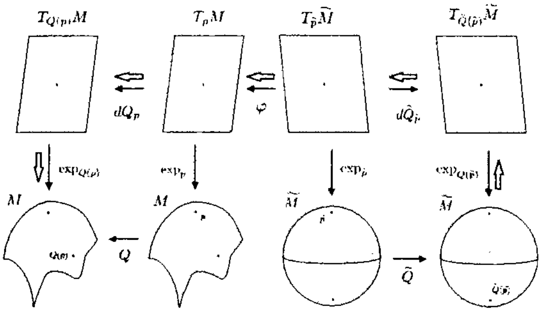

Figura 3.1: ψ en una vecindad de $\widetilde{Q}(\widetilde{p})$

Como $\widetilde{M}$ y M tienen curvatura seccional constante $k > 0$, ψ es una isometría local en $B(\widetilde{p}\,;\frac{\pi}{\sqrt{k}})$ (Teorema 2.18 de [3]).

Además, se prueba que (flechas blancas en la figura 3.1)

$$\psi\mid_{B(\widetilde{Q}(\widetilde{p});\frac{\pi}{\sqrt{k}})} = \exp_{Q(p)} \circ d_pQ \circ \varphi \circ (d_{\widetilde{p}}\widetilde{Q})^{-1} \circ (\exp_{\widetilde{Q}(\widetilde{p})}\mid_{B(\widetilde{Q}(\widetilde{p});\frac{\pi}{\sqrt{k}})})^{-1}$$

De nuevo, por ser Q, φ y $\widetilde{Q}$ isometrías, se concluye que ψ es isometría local en $B(\widetilde{Q}(\widetilde{p})\ ;\frac{\pi}{\sqrt{k}})$. Y como

$$B(\widetilde{p}\ ;\tfrac{\pi}{\sqrt{k}}) \cup B(\widetilde{Q}(\widetilde{p})\ ;\tfrac{\pi}{\sqrt{k}}) = \mathbb{S}^n(\tfrac{1}{\sqrt{k}}),$$

entonces ψ es una isometría local sobreyectiva y por tanto un cubriente (Teorema 1.7). Luego $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ es la cubierta universal riemanniana de M.

$\square$

Capítulo 4

Crecimiento de grupos y de volumen

En estos dos últimos capítulos desarrollaremos el tema central de nuestro trabajo: el crecimiento de grupos, el crecimiento de volumen y una relación entre ellos dada por dos Teoremas de Milnor.

En este capítulo, hablaremos de crecimiento de grupos finitamente generados (lo cual abreviaremos por f.g.). Para esto, daremos una "longitud" $|\cdot|$ en un grupo Γ. De esto, podemos obtener una manera de medir distancias en Γ, haciendo del grupo un espacio "geométrico". En analogía con las funciones de conteo en teoría de números, se considera la **función de conteo**:

$$n(\lambda) = \mathrm{card}\{ \ \gamma \in \Gamma : |\gamma| \leq \lambda \ \}.$$

Estudiamos el crecimiento de esta función, que está relacionado con el límite

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda}.$$

Veremos que los grupos libres (f.g.) crecen exponencialmente y que los grupos abelianos (f.g.) crecen polinomialmente. Una forma de "visualizar" esto consiste en utilizar la gráfica de Cayley.

Para el crecimiento de volumen en una variedad riemanniana M, si $p \in M$, se considera el límite

$$\lim_{s \to +\infty} \sup \frac{\ln V(p\,;s)}{s}.$$

Este crecimiento depende de la métrica en M. Estudiaremos el comportamiento de este límite cuando M es simplemente conexa.

Al final del capítulo, se da la relación entre el crecimiento de un grupo Γ y el crecimiento de volumen en una variedad M, cuando Γ actúa en M.

4.1. Crecimiento de grupos

Consideraremos Γ un grupo finitamente generado por un conjunto de generadores $S = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k\}$.

La idea es ver a los grupos finitamente generados como espacios métricos, es decir como objetos geométricos, y así poder relacionar propiedades "geométricas" del grupo con la geometría o topología de alguna variedad; por ejemplo si el grupo actúa en la variedad o es su grupo fundamental.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $\tau \in \Gamma$, $\tau \neq e$. Definimos la **longitud de** τ, denotada $|\tau|$, como el menor natural n tal que $\tau = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}$ con $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_n} \in S \cup S^{-1}$. Si $\tau = e$ definimos $|\tau| = 0$.

Observemos que si $\tau = \gamma_{i_1}^{n_1} \cdots \gamma_{i_s}^{n_s}$ es cualquier representación de τ en términos de los generadores, entonces

$$|n_1| + \cdots + |n_s| \geq |\tau|.$$

Por ejemplo, si $\tau = \gamma_1^{n_1} \cdot \gamma_2^{n_2} \cdot \gamma_3^{n_3}$ y no hay relaciones entre γ_1, γ_2 y γ_3 entonces $|\tau| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$.

La función $|\ \ | : \Gamma \to \mathbb{N}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $|\tau| = 0 \Leftrightarrow \tau = e$

2. $|\tau| = |\tau^{-1}|$

   Supongamos que $|\tau| = n$ y $|\tau^{-1}| = m$, con $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces existen $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_n} \in S \cup S^{-1}$ tal que $\tau = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}$ de lo que $\tau^{-1} = \gamma_{i_n}^{-1} \cdots \gamma_{i_1}^{-1}$, por tanto $m \leq n$.

   Ahora, como $|\tau^{-1}| = m$, existen $\gamma_{j_1}, ..., \gamma_{j_n} \in S \cup S^{-1}$ tal que $\tau^{-1} = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}$, de lo que $\tau = \gamma_{j_m}^{-1} \cdots \gamma_{j_1}^{-1}$, por tanto $n \leq m$, entonces $n = m$ y $|\tau| = |\tau^{-1}|$.

3. $|\tau_1 \cdot \tau_2| \leq |\tau_1| + |\tau_2|, \quad \forall\, \tau_1, \tau_2 \in \Gamma$

   Supongamos que $|\tau_1| = n$ y $|\tau_2| = m$; entonces $\tau_1 = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}$ y $\tau_2 = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}$ con $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_n}, \gamma_{j_1}, ..., \gamma_{j_m} \in S \cup S^{-1}$.

   De esto se sigue que $\tau_1 \cdot \tau_2 = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n} \cdot \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}$ y por tanto $|\tau_1 \cdot \tau_2| \leq n + m = |\tau_1| + |\tau_2|$.

Podemos entonces definir una **métrica** en Γ, $d_S : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_S(\tau_1, \tau_2) := |\tau_1^{-1} \cdot \tau_2|$$

Vemos que

1. $d_S(\tau_1, \tau_2) \geq 0$ para cualesquiera $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma$ y $d_S(\tau_1, \tau_2) = 0 \Leftrightarrow |\tau_1^{-1} \cdot \tau_2| = 0 \Leftrightarrow \tau_1^{-1} \cdot \tau_2 = e \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2$.

2. $d_S(\tau_1,\tau_2) = |\tau_1^{-1}\cdot\tau_2| = |(\tau_1^{-1}\cdot\tau_2)^{-1}| = |\tau_2^{-1}\cdot\tau_1| = d_S(\tau_2,\tau_1)$.

3. $d_S(\tau_1,\tau_3) = |\tau_1^{-1}\cdot\tau_3| = |\tau_1^{-1}\cdot\tau_2\cdot\tau_2^{-1}\cdot\tau_3| \leq |\tau_1^{-1}\cdot\tau_2| + |\tau_2^{-1}\cdot\tau_3| = d_S(\tau_1,\tau_2) + d_S(\tau_2,\gamma_3) \quad \forall\ \tau_1,\tau_2,\tau_3 \in \Gamma$.

Así (Γ, d_S) es un espacio métrico discreto, ya que d_S toma valores en $\mathbb{N}$.

Una manera de "visualizar" Γ es utilizar la llamada **gráfica de Cayley** (Γ, S), que tiene como vértices el conjunto Γ y dos vértices τ_1 y τ_2 son los puntos inicial y final de un lado si y sólo si $d_S(\tau_1,\tau_2) = 1$.

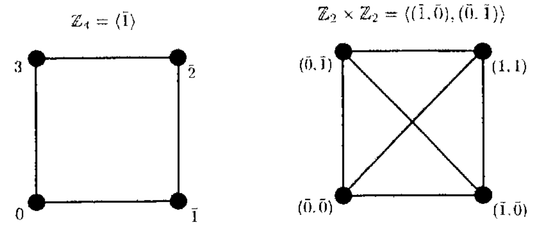

Figura 4.1: Graficas de Cayley de dos grupos finitos

Para el concepto de crecimiento de un grupo, necesitamos la siguiente:

DEFINICIÓN 4.2. La función de conteo $n(\lambda)$ está definida por

$$n(\lambda) = \mathrm{card}\{\ \gamma \in \Gamma : |\gamma| \leq \lambda\ \}.$$

Algunas propiedades básicas de la función de conteo $n(\lambda)$ son:

1. $n(\lambda_1+\lambda_2) \leq n(\lambda_1)n(\lambda_2)$.

   Esto se sigue ya que si $\gamma \in \Gamma$ tal que $|\gamma| \leq \lambda_1+\lambda_2$, entonces podemos escoger $\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma$ tales que $\gamma = \gamma_1\cdot\gamma_2$ con $n(\gamma_1) \leq \lambda_1$ y $n(\gamma_2) \leq \lambda_2$ y por tanto se cumple la desigualdad.

2. $n(a\lambda) \leq n(\lambda)^a$ con $a \in \mathbb{N}$.

   Se sigue del caso anterior por inducción.

De manera informal, podemos decir que el crecimiento de un grupo es exponencial si $n(\lambda) \geq a^\lambda$ para alguna constante $a > 1$, y el crecimiento es polinomial si $n(\lambda) \leq c\lambda^d$ para algunas constantes c y d.

Para formalizar lo anterior, observemos que si $n(\lambda) \geq a^\lambda$ entonces

$$\ln n(\lambda) \geq \ln a^\lambda = \lambda \ln a$$

y consecuentemente

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} \geq \ln a > 0$$

Por otro lado, si $n(\lambda) \leq c\lambda^d$ entonces

$$\ln n(\lambda) \leq \ln c + \ln \lambda^d = \ln c + d \ln \lambda$$

de donde

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{d \ln \lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{d}{\lambda} = 0$$

Más adelante (Proposición 4.6) mostraremos que para cualquier grupo finitamente generado el $\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda}$ existe, por lo que tendrá sentido la siguiente:

DEFINICIÓN 4.3. Decimos que Γ un grupo finitamente generado tiene **crecimiento exponencial** si

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \sup \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} > 0.$$

y decimos que Γ tiene **crecimiento polinomial** si

$$n(\lambda) \leq c\lambda^d$$

para algunas constantes c y d.

Veamos algunos ejemplos de crecimiento de grupos y sus gráficas de Cayley.

EJEMPLO 4.4. Sea Γ un grupo libre generado por k elementos, es decir, si $k > 1$ entonce $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k \rangle$. Dado $\lambda \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n(\lambda) = 1 + \frac{k}{k-1}\left[(2k-1)^\lambda - 1\right]$$

Demostración: Por inducción sobre λ. Si $\lambda = 1$ entonces

$$n(\lambda) = 1 + \frac{k}{k-1}[2k-1-1] = 1 + \frac{k}{k-1} 2(k-1) = 2k+1,$$

lo cual es correcto, ya que podemos formar $2k+1$ palabras de longitud menor o igual a 1, que son la identidad y los generadores o sus inversos.

Supongamos válida la igualdad para $\lambda - 1$. Entonces

$$n(\lambda) = 1 + \frac{k}{k-1}\left[(2k-1)^{\lambda-1} - 1\right] + \mathrm{card}\{\ \gamma \in \Gamma :\ |\gamma| = \lambda\ \}.$$

Para las palabras de longitud λ, tenemos λ maneras de escoger los γ_i, en la primera puede ser cualquiera, es decir tenemos $2k$ posiblidades, para la segunda se pueden repetir, sólo debemos cuidar de no poner el inverso del generador que escogimos antes, por tanto tenemos $2k-1$ posibilidades, para la tercera elección sólo cuidamos de no usar el inverso de la segunda elección, pero sí podemos usar la primera, por tanto de nuevo hay $2k-1$ posibilidades, y así sucesivamente.

Por tanto,

$$\mathrm{card}\{\ \gamma \in \Gamma :\ |\gamma| = \lambda\ \} = 2\mathrm{k}(2\mathrm{k}-1)^{\lambda-1}.$$

Y por un cálculo directo se tiene,

$$
\begin{aligned}
n(\lambda) &= 1 + \frac{k}{k-1}\left[(2k-1)^{\lambda-1} - 1\right] + 2k(2k-1)^{\lambda-1} \\
&= 1 + \frac{k}{k-1}\left[(2k-1)^{\lambda} - 1\right].
\end{aligned}
$$

Veamos cuál es el crecimiento de estos grupos. Si $a = 2k-1$ y $b = \frac{k}{k-1}$, tenemos que $n(\lambda) > b(a^\lambda - 1)$ y

$$
\lim_{\lambda\to+\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln(a^\lambda - 1)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{a^\lambda \ln a}{a^\lambda - 1},
$$

donde hemos usado la regla de L'Hôpital y que $\frac{d}{d\lambda}(a^\lambda - 1) = a^\lambda \ln a$. Como $k > 1$, esto implica que $a > 1$, de donde

$$
\lim_{\lambda\to+\infty} \sup \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} \geq \ln a \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{1 - a^{-\lambda}} = \ln a > 0.
$$

Por tanto, los grupos libres finitamente generados (con más de un generador) tienen crecimiento exponencial. La gráfica de Cayley de Γ cuando $k = 2$ aparece en la figura 4.2.

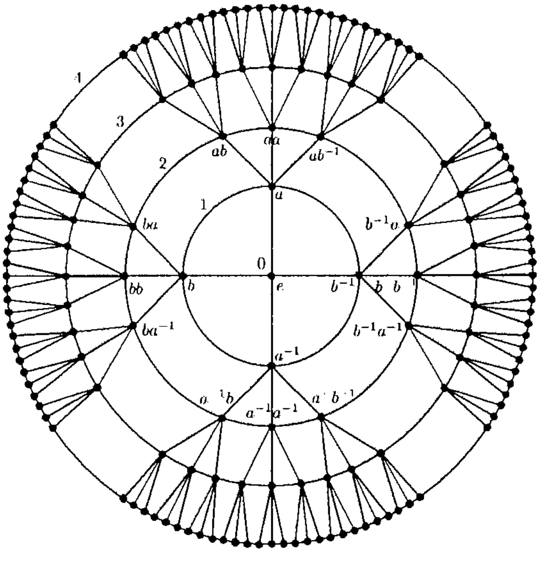

Figura 4.2: Crecimiento de un grupo libre f.g.

EJEMPLO 4.5. Sea Γ un grupo libre abeliano generado por k elementos, $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k \rangle$. Si $\lambda \in \mathbb{N}$, entonces

$$n(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} 2^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix}.$$

Demostración. Recordemos que la cantidad de colecciones de números enteros $\{a_1, a_2, ..., a_j\}$ con $1 \leq a_i \leq \lambda$ y tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_j \leq \lambda$ es $\begin{pmatrix} \lambda \\ j \end{pmatrix}$.

Como Γ es abeliano, se consideran sólo palabras hasta con k generadores.

Para $1 \leq j \leq k$, hay $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ palabras con j generadores $(\gamma_1^1, \gamma_2^1, ..., \gamma_k^1)$ y por cada una de éstas, variando los exponentes, por el resultado anterior se obtienen otras $\begin{pmatrix} \lambda \\ j \end{pmatrix}$ palabras de longitud $\leq \lambda$.

Resumiendo, hay $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ j \end{pmatrix}$ palabras de longitud $\leq \lambda$ con j generadores positivos. Y por tanto hay

$$2^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ j \end{pmatrix}$$

palabras de longitud $\leq \lambda$ con j generadores $(\gamma_1^{\pm 1}, \gamma_2^{\pm 1}, ..., \gamma_k^{\pm 1})$.

Se tiene que para cada j, las palabras anteriores son distintas. No estamos contando más de una vez y cualquier palabra de longitud $\leq \lambda$ es una obtenida de esta manera. Por tanto y recordando que sólo falta contar la palabra cero

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} 2^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix} + 1 = \sum_{i=0}^{k} 2^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix}.$$

Analizamos el crecimiento de estos grupos.

De las relaciones

$$n(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} 2^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix} \leq \sum_{i=0}^{k} 2^k k! \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix} = 2^k k! \sum_{i=0}^{k} p_i(\lambda),$$

donde $p_i(\lambda)$ es un polinomio de orden i en λ, se tiene que

$$n(\lambda) = 2^k k!\ P_k(\lambda),$$

con $P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j$ y $a_j \in \mathbb{R}$.

Entonces, si $a = \max\{|a_k|, \cdots, |a_0|\}$ y $b = 2^k k!\ a(k+1)$, se tiene

$$n(\lambda) = 2^k k! \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j \leq 2^k k! \sum_{j=0}^{k} |a_j| \lambda^k \leq 2^k k!\ a(k+1)\lambda^k = b\lambda^k.$$

Por tanto, todos los grupos libres abelianos finitamente generados crecen polinomialmente.

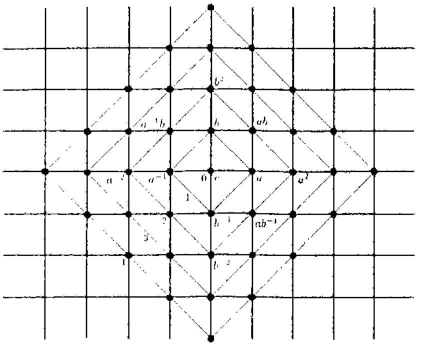

Figura 4.3: Crecimiento de un grupo libre abeliano f.g.

Para $k = 2$, la gráfica de Cayley aparece en la figura 4.3.

Para terminar esta sección, demostraremos el resultado del límite que mencionamos anteriormente.

PROPOSICIÓN 4.6. *Sea Γ un grupo finitamente generado, siendo $\{\gamma_1, \gamma_2 \dots, \gamma_k\}$ un conjunto de generadores para el cual*

$$n(\lambda) = \operatorname{card}\{\ \gamma \in \Gamma :\ |\gamma| \leq \lambda\ \}.$$

Entonces existe el $\lim_{\lambda \to \infty}\ n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Demostración. Dado $\lambda \geq 0$ y $t > 1$, si $a := \left[\frac{\lambda}{t}\right] + 1 \geq \frac{\lambda}{t}$ tenemos por las propiedades de $n(\lambda)$ que $n(at) \leq n(t)^a$. Como $\left[\frac{\lambda}{t}\right] \leq \frac{\lambda}{t}$, entonces

$$a = \left[\frac{\lambda}{t}\right] + 1 \leq \frac{\lambda}{t} + 1,$$

lo cual implica que $n(t)^a \leq n(t)^{\frac{\lambda}{t}+1}$. Por otro lado, de $a \geq \frac{\lambda}{t}$, tenemos que $n(\lambda) \leq n(at)$. Recopilando estas tres desigualdades tenemos

$$n(\lambda) \leq n(at) \leq n(t)^a \leq n(t)^{\frac{\lambda}{t}+1}$$

y elevando a la $\frac{1}{\lambda}$, obtenemos

$$n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq n(t)^{\frac{1}{\lambda}(\frac{\lambda}{t}+1)} = n(t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{\lambda}}.$$

Afirmamos que los límites superior e inferior coinciden.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Entonces

$$\lim_{n \to +\infty} n(t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{x_n}} = n(t)^{\frac{1}{t}}.$$

Como el límite superior $\lim_{\lambda\to+\infty} \sup n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ es por definición el supremo de los puntos límite de las sucesiones $n(x_n)^{\frac{1}{x_n}}$, tenemos que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup\, n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq n(t)^{\frac{1}{t}}.$$

Por otro lado, como el límite inferior es por definición el ínfimo de los puntos límite, tenemos en este caso,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup\, n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \inf n(t)^{\frac{1}{t}}.$$

En virtud de que desigualdad opuesta siempre se cumple, se concluye que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup\, n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda\to+\infty} \inf n(t)^{\frac{1}{t}}.$$

Por tanto existe

$$\lim_{\lambda\to+\infty} n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

□

Veamos qué sucede si usamos para Γ un conjunto diferente de generadores $\{\gamma_1^*, \gamma_2^* \ldots, \gamma_r^*\}$, con $r \in \mathbb{Z}^+$. Si

$$N = \max\{|\, \gamma_i^* \,|_{\{\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_k\}} \mid i = 1, 2, \ldots, r\},$$

tenemos que

$$n^*(\lambda) \leq n(N\lambda) \tag{4.1}$$

Es decir, si $\gamma \in \Gamma$ y γ tiene longitud menor o igual a λ en $\{\gamma_1^*, \gamma_2^* \ldots, \gamma_r^*\}$, entonces γ tiene longitud menor o igual a $N\lambda$ en $\{\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_k\}$.

De (4.1) tenemos que

$$\frac{\ln n^*(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{\ln n(N\lambda)}{\lambda} = N\frac{\ln n(N\lambda)}{N\lambda},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} \ln n^*(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} &= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln n^*(\lambda)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda\to+\infty} N\frac{\ln n(N\lambda)}{N\lambda} \\
&= N \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln n(\lambda)}{\lambda} = N \lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Análogamente, se muestra que si existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(\lambda) \leq n^*(M\lambda)$, entonces

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \ln n^*(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \geq \frac{1}{M} \lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{M} \lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \ln n^*(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}} \leq N \lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{4.2}$$

Esta ecuación implica a su vez que si $\lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ se anula, es mayor que cero o infinito, entonces

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \ln n^*(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$$

también se anula, es mayor que cero o infinito, respectivamente. Por lo tanto, el hecho de que $\lim_{\lambda\to+\infty} \ln n(\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ se anule o no es independiente de los generadores.

Demostración de la ecuación (4.1). Sea $\gamma \in \Gamma$, tal que $\mid \gamma \mid\leq \lambda$. Si γ se escribe de manera reducida como

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r} n_i\gamma_i^*,$$

entonces

$$\mid \gamma \mid = \sum_{i=1}^{r} \mid n_i \mid \leq \lambda.$$

Sean los coeficientes $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\gamma_i^* = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}\gamma_j \ , \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Si $N = \max\{ \sum_{j=1}^{k} \mid m_{ij} \mid \ ; \ i = 1, 2, \ldots, r \}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mid \gamma \mid &= \left|\sum_{i=1}^{r} n_i\gamma_i^*\right| = \left|\sum_{i=1}^{r} n_i \left(\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\gamma_j\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} n_i m_{ij}\gamma_j\right| \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} |n_i m_{ij}| \\ &= \sum_{i=1}^{r} |n_i| \sum_{j=1}^{k} |m_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{r} |n_i| N = N\sum_{i=1}^{r} |n_i| \leq N\lambda. \end{aligned}$$

Esto es, $\mid \gamma \mid \leq N\lambda$ lo que demuestra la ecuación (4.1).

4.2. Crecimiento de volumen

Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica dada por el producto punto usual. Sea $p \in \mathbb{R}^2$, y denotamos por $V(p\,;r)$ al volumen (en este caso área) de la bola euclidiana centrada en p y radio r $B(p\,;r)$, el cual es

$$V(p\,;r) = \pi r^2.$$

Esto nos sugiere que el volumen en $\mathbb{R}^2$ tiene un crecimiento polinomial de orden 2 (en general el volumen en $\mathbb{R}^n$ crecería polinomialmente de orden n) y se verifica

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(p\,;r)}{r} = 0.$$

Consideremos el semiplano de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Si $p \in \mathbb{H}^2$, se puede probar que

$$V(p\,;r) = 2\pi(\cosh r - 1),$$

(ver [14], página 83). Por lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(p\,;r)}{r} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\ln(2\pi(\cosh r - 1))}{r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\ln 2\pi}{r} + \lim_{r\to\infty} \frac{\ln(\cosh r - 1)}{r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{d}{\partial r}(\cosh r - 1)}{\cosh r - 1} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r} - 2} = 1 > 0.
\end{aligned}$$

Se tiene que en $\mathbb{H}^2$ un disco de cualquier radio tiene más area que uno del mismo radio en $\mathbb{R}^2$, por tanto, intuitivamente podemos pensar que cualquier vecindad del plano hiperbólico se "arruga", el volumen de la variedad "crece" muy rápido y necesita más espacio para que no haya autointersecciones. No debe sorprendernos entonces que Hilbert demostrara que el plano hiperbólico no es isométrico a alguna superficie diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

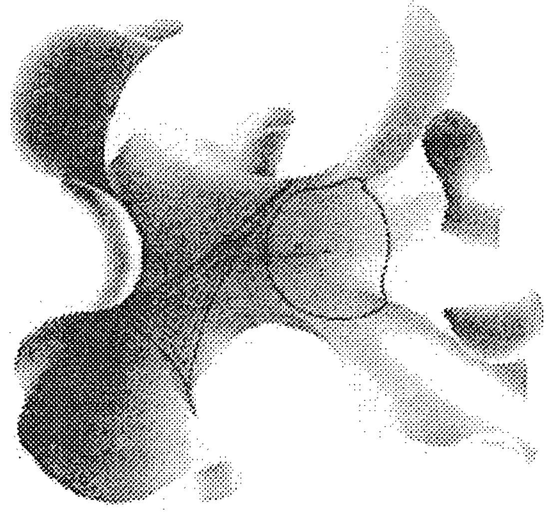

Figura 4.4: El plano hiperbólico se "arruga".

Motivados por esto, establecemos la siguiente resultado.

DEFINICIÓN 4.7. Dada una variedad riemanniana M conexa, decimos que M tiene *crecimiento de volumen exponencial* si

$$\lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\ln V(p\,;r)}{r} > 0,$$

para algún punto $p \in M$. Por otro lado, decimos que M tiene *crecimiento de volumen polinomial* si

$$V(p\,;r) \leq ar^n$$

para todo real $r > 0$, con $a > 0$.

Así, en la geometría hiperbólica de $\mathbb{H}^2$ el crecimiento de volumen sería exponencial y en la geometría euclidiana de $\mathbb{R}^2$ es polinomial.

Se puede verificar (utilizando la desigualdad del triángulo) que el tipo de crecimiento de volumen en M no depende del punto base.

Podemos preguntarnos cuándo existe $\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln V(p;r)}{r}$ como lo hicimos para el crecimiento de grupos. Un resultado dice que si M, M_0 son variedades riemannianas conexas, tales que $\psi : M \to M_0$ es un cubriente universal riemanniano y M_0 es compacto, entonces el límite

$$\mu := \lim_{s \to +\infty} \frac{\ln V(p\,;s)}{s}$$

existe para cada $p \in M$, y además el valor es independiente de p.

Para probar este resultado, necesitamos un resultado técnico previo.

LEMA 4.8. *Sean M, M_0 variedades riemannianas conexas y completas, M_0 compacta y $\psi : M \to M_0$ un cubriente riemanniano. Para cada $r \in \mathbb{R}$ fija,*

$$c_r := \inf \left\{ V\left(z; \frac{r}{2}\right) : z \in M \right\} > 0.$$

Demostración. Supongamos que $c_r = 0$. Entonces para $\epsilon = \frac{1}{n}$ existe $z_n \in M$ tal que $V\left(z_n; \frac{r}{2}\right) < \frac{1}{n}$. Por tanto, obtenemos un conjunto $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que cumple

$$\lim_{n \to \infty} V\left(z_n; \frac{r}{2}\right) = 0 \tag{4.3}$$

La condición anterior sobre el límite implica que el conjunto $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser finito. Dividiremos la demostración en dos casos, analizando lo que ocurre con la cardinalidad del conjunto $\{\psi(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $\{\psi(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito.

   Como $\{\psi(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_0$ y M_0 es compacto, existe una subsucesión $\{\psi(z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $z_0 \in M$ tales que

$$\lim_{k \to \infty} \psi(z_{n_k}) = z_0.$$

   Pero entonces la ecuación (4.3) implica las relaciones

$$0 \geq \lim_{k \to \infty} \inf V\left(z_{n_k}; \frac{r}{2}\right) \geq \lim_{k \to \infty} \inf V\left(\psi(z_{n_k}); \frac{r}{2}\right) \geq 0,$$

de donde,

$$\lim_{k\to\infty} V\left(\psi(z_{n_k}); \frac{r}{2}\right) = 0.$$

Como $V : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, esto implica que $V\left(z_0; \frac{r}{2}\right) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto debemos tener el caso

2. $\{\psi(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finito. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\psi(z_n) = w$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como ψ es cubriente riemanniano, existe $\frac{r}{2} > \delta > 0$ tal que

$$\psi^{-1}(B(w;\delta)) = \bigcup_{\widetilde{p}\in\psi^{-1}(w)} B(\widetilde{p};\delta),$$

donde $\psi|_{B(\widetilde{p};\delta)} \to B(w;\delta)$ es isometría para cada $\widetilde{p} \in \psi^{-1}(w)$.

Como $z_n \in \psi^{-1}(w)$, se cumple que $V(z_n;\delta) = V(w;\delta)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$V\left(z_n; \frac{r}{2}\right) \geq V(z_n;\delta) = V(w;\delta) \geq 0,$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$ tenemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} V\left(z_n; \frac{r}{2}\right) \geq \lim_{n\to\infty} V(w;\delta) \geq 0.$$

De donde $V(w;\delta) = 0$, lo cual de nuevo es una contradicción.

Por tanto $c_r > 0$, lo que concluye la prueba.

□

Ahora probamos el resultado que quedaba pendiente.

TEOREMA 4.9 (A. Manning). *Sean M, M_0 variedades riemannianas conexas, tales que $\psi : M \to M_0$ es un cubriente universal riemanniano y M_0 es compacto. Si $x \in M$, entonces el límite*

$$\mu := \lim_{s\to+\infty} \frac{\ln V(x;s)}{s}$$

existe, y el valor es independiente de x.

Demostración. Sea $x \in M$ fijo. Probaremos que el límite

$$\mu_x := \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln V(x;r)}{r}$$

existe, demostrando que el límite superior e inferior de la expresión coinciden. Sea Ω el dominio fundamental de ψ y d el diámetro de Ω. Entonces para todo $x, y \in \Omega$ y $r > d$, se tiene que

$$B(x; r - d) \subseteq B(y; r) \subseteq B(x; r + d)$$

y por lo tanto

$$V(x; r - d) \leq V(y; r) \leq V(x; r + d). \tag{4.4}$$

Sean $x, y \in M$. El hecho de que podemos encontrar $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{D}(\psi)$ isometrías tales que $\gamma_1(x), \gamma_2(y) \in \Omega$, hace que se cumpla la ecuación (4.4) para todo $x, y \in M$.

Fijemos $r > 0$ y sea

$$c_r := \text{ínf}\left\{V\left(z; \frac{r}{2}\right) : z \in M\right\}.$$

Por el Lema 4.8, se tiene que $c_r > 0$. Por otro lado, para cualesquiera $r, s > 0$ se tiene

$$B(x; r + s) = \bigcup_{y \in B(x;r)} B(y; s). \tag{4.5}$$

Sea $b > 0$ y sea Y cualquier subconjunto de $B(x; r)$ cuyos puntos estén por pares a una distancia mayor o igual a b entre sí. Observemos que necesariamente el conjunto Y es finito. Se obtiene que

$$\bigcup_{y \in Y} B\left(y; \frac{b}{2}\right) \subseteq B\left(x; r + \frac{b}{2}\right) \tag{4.6}$$

donde $\bigcup_{y \in Y} B(y; \frac{b}{2})$ es una unión disjunta. Por esta ecuación y el hecho de que la unión es disjunta se tiene que

$$V\left(x\ ; r + \frac{b}{2}\right) \geq \sum_{y \in Y} V\left(y\ ; \frac{b}{2}\right),$$

pero $V\left(y; \frac{b}{2}\right) \geq c_b$, de lo que se concluye la relación

$$\sum_{y \in Y} V\left(y; \frac{b}{2}\right) \geq c_b \operatorname{card} Y.$$

Entonces de las dos últimas desigualdades se tiene que

$$\operatorname{card} Y \leq c_b^{-1} V\left(x; r + \frac{b}{2}\right). \tag{4.7}$$

Ahora escogemos $Y \subseteq B(x; r)$ maximal con respecto a la propiedad de que todos sus puntos estén por parejas a una distancia mayor o igual a b entre sí. Por ser Y maximal, la distancia de Y a un punto arbitrario de $B(x; r)$ es menor que b. De lo contrario si existe $z \in B(x; r)$ tal que $d(z; y) \geq b$ para toda $y \in Y$, entonces podríamos agregar z a Y, contradiciendo la maximalidad de Y. Tenemos entonces que

$$B(x; r) \subseteq \bigcup_{y \in Y} B(y; b),$$

ya que si $z \in B(x;r)$, por la maximalidad de Y existe $y_1 \in Y$ tal que $z \in B(y_1;b)$. Esto implica que $z \in \cup_{y\in Y} B(y;b)$. Entonces para toda $s > 0$,

$$B(x;r+s) \subseteq \bigcup_{y\in Y} B(y;s+b),$$

de donde

$$V(x;r+s) \leq (\operatorname{card} Y) \max_{y\in Y} V(y;s+b) \tag{4.8}$$

pero por (4.4) se tiene que

$$\max_{y\in Y} V(y;s+b) \leq V(x;s+b+d). \tag{4.9}$$

Sustituyendo (4.7) y (4.9) en (4.8) tenemos

$$V(x;r+s) \leq (\operatorname{card} Y) \max_{y\in Y} V(y;s+b) \leq c_b^{-1} V(x;r+\frac{b}{2}) V(x;s+b+d),$$

de donde

$$V(x;r+s) \leq c_b^{-1} V(x;r+\frac{b}{2}) V(x;s+b+d)$$

para cualesquiera $r,s,b > 0$. De esta manera,

$$V(x;r+\frac{b}{2}+s-\frac{b}{2}) \leq c_b^{-1} V(x;r+\frac{b}{2}) V(x;s-\frac{b}{2}+\frac{3b}{2}+d)$$

para $r,s,b > 0$. Haciendo los cambios de variable $r+\frac{b}{2}$ por r y $s-\frac{b}{2}$ por s tenemos

$$V(x;r+s) \leq c_b^{-1} V(x;r) V(x;s+\frac{3b}{2}+d)$$

para $r > \frac{b}{2}$, $s > -\frac{b}{2}$ y $b > 0$. Si denotamos $\alpha := c_b^{-1}$ y $A := \frac{3b}{2}+d$, entonces

$$V(x;r+s) \leq \alpha\ V(x;r) V(x;s+A) \tag{4.10}$$

para $r > \frac{b}{2}$, $s > -\frac{b}{2}$ y $b > 0$.

Por otro lado, se cumple que

$$V(x;(k+1)r) \leq \alpha^k\ V(x;r+A)^{k+1} \tag{4.11}$$

para toda $r > \frac{b}{2}$, $k = 1,2,\ldots$. Esto se prueba sin dificultad por inducción sobre k y usando (4.10). Además, dados $r > \frac{b}{2}$, $\delta \in (0,r)$ y $k = 1,2,\ldots$ se tiene que

$$V(x;kr+\delta) \leq V(x;kr+r) = V(x;(k+1)r) \leq \alpha^k\ V(x;r+A)^{k+1},$$

esto implica que

$$\begin{aligned}
\ln V(x;kr+\delta) &\leq \ln\left[\alpha^k\ V(x;r+A)^{k+1}\right] \\
&= \ln \alpha^k + \ln V(x;r+A)^{k+1} \\
&= k \ln \alpha + (k+1) \ln V(x;r+A).
\end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$\frac{\ln V(x;kr+\delta)}{kr+\delta} \leq \frac{k\ln\alpha}{kr+\delta} + \frac{(k+1)\ln V(x;r+A)}{kr+\delta}.$$

Ésta es la expresión que nos da la desigualdad que buscamos, en la cual se tienen dos parametros libres. Fijando r y tomando el límite superior con respecto a k, se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty}\sup \frac{\ln V(x;kr+\delta)}{kr+\delta} \leq \lim_{k\to+\infty}\sup \left[\frac{k\ln\alpha}{kr+\delta} + \frac{(k+1)\ln V(x;r+A)}{kr+\delta}\right]; \tag{4.12}$$

y haciendo el cambio de variable $s = kr+\delta$ en el primer límite, obtenemos

$$\lim_{s\to+\infty}\sup \frac{\ln V(x;s)}{s} \leq \frac{\ln\alpha}{r} + \frac{\ln V(x;r+A)}{r}.$$

Esto se cumple para toda $r > \frac{b}{2}$, es decir tenemos un parámetro libre para tomar el límite inferior que falta. Por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty}\sup \frac{\ln V(x;s)}{s} &\leq \lim_{r\to+\infty}\inf \frac{\ln\alpha}{r} + \lim_{r\to+\infty}\inf \frac{\ln V(x;r+A)}{r}\\ &= \lim_{r\to+\infty}\inf \frac{\ln V(x;r+A)}{r} = \lim_{s\to+\infty}\inf \frac{\ln V(x;s)}{s};\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\lim_{s\to+\infty}\sup \frac{\ln V(x;s)}{s} \leq \lim_{s\to+\infty}\inf \frac{\ln V(x;s)}{s}.$$

Como la desigualdad inversa siempre se cumple, entonces

$$\lim_{s\to+\infty}\sup \frac{\ln V(x;s)}{s} = \lim_{s\to+\infty}\inf \frac{\ln V(x;s)}{s}.$$

Esto nos dice que $\lim_{s\to+\infty} \frac{\ln V(x;s)}{s} = \mu_x$ existe. De la ecuación (4.4), tomando logaritmo y límite se tiene rapidamente que el límite es independiente de la elección de $x \in M$. En otras palabras, $\mu_x = \mu_y$ para todo $y \in M$. □

4.3. Relación entre crecimiento de volumen y de grupo

Sea M una variedad riemanniana completa y Γ un grupo (f.g.) de isometrías que actúan propia y discontinuamente en M. ¿Existe alguna relación entre el crecimiento del grupo Γ y el crecimiento de volumen en M?.

Para motivar la respuesta, establecemos una relación entre la distancia en M y la norma en Γ (los detalles se darán más adelante).

Sea $p \in M$ y $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k \rangle$. Si

$$\mu = \max_{j=1,\ldots,k} d(p, \gamma_k(p)),$$

y $\gamma \in \Gamma$ entonces

$$d(p, \gamma(p)) \leq |\gamma| \mu. \tag{4.13}$$

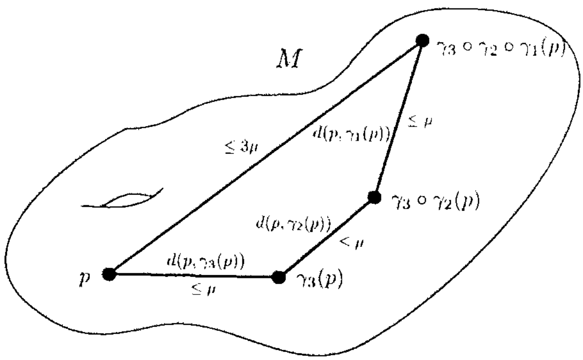

Figura 4.5: Prueba geométrica de la desigualdad (4.13) para $\gamma = \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$.

Sea $\lambda > 0$, por la desigualdad anterior se tiene que

$$\bigcup_{|\gamma| \leq \lambda} \gamma(p) \subset B(p\,; \lambda\mu),$$

y por ser la acción propia y discontinua, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bigcup_{|\gamma| \leq \lambda} \gamma(B(p\,; \varepsilon)) \subset B(p\,; \lambda\mu + \varepsilon).$$

Por tanto,

$$n(\lambda) \leq \frac{V(p\,; \lambda\mu + \varepsilon)}{V(p\,; \varepsilon)}, \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{4.14}$$

Por lo que si la variedad M tiene crecimiento de volumen polinomial entonces Γ también crece polinomialmente.

EJEMPLO 4.10. Consideremos $M = \mathbb{R}^2$, $p = 0$, $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ con $\gamma_1(x, y) = (x+1, y)$ y $\gamma_2(x, y) = (x, y+1)$. Se tiene $\nu = 1$ y escogemos $\lambda = 2$. Entonces los puntos de la unión $\bigcup_{|\gamma| \leq 2} \gamma(0)$ (remarcados en la figura 4.6) están contenidos en $B(0; 2)$ y podemos escoger $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Esto indica que $n(2)$ bolas de volumen $V(0; \frac{1}{2})$ están contenidas en la bola de volumen $V(0; 2 + \frac{1}{2})$ y $n(2) = 13 < 25$.

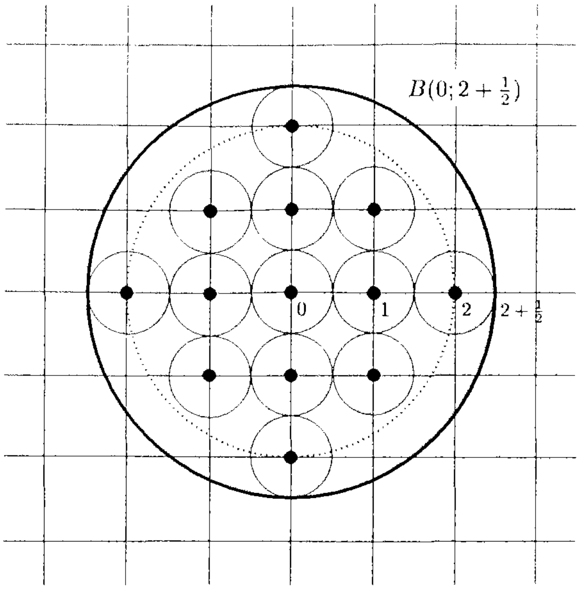

Figura 4.6: Relación entre crecimientos

Si ahora suponemos que M/Γ es compacto, se tiene que $\Pi : M \to M/\Gamma$ es un cubriente. Si además Ω es un dominio fundamental, se cumple que

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) = M.$$

Sea d el diámetro de Ω. Entonces existe $\nu > 0$ tal que

$$B(p\,; \nu\lambda + d) \subseteq \bigcup_{|\gamma|\leq\lambda} \gamma(\overline{\Omega}),$$

y por tanto

$$\frac{V(p\,; \nu\lambda + d)}{V(p\,; d)} \leq n(\lambda), \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{4.15}$$

Resumiendo, (4.14) y (4.15) nos dan la relación entre los crecimientos de Γ y de M, de hecho, estas ecuaciones junto con el Teorema de Bishop (Teorema 3.9 de [3]) y el Teorema de Günther (Teorema 3.7 de [3]) son la base para probar los Teoremas de Milnor.

Probaremos ahora la primera desigualdad.

LEMA 4.11. *Sean M variedad riemanniana completa conexa y Γ grupo finitamente generado de isometrías que actúan propia y discontinuamente en M.*

Entonces para todo $p \in M$ y cualquier conjunto de generadores de Γ existen números positivos μ y ϵ, que dependen sólo de p y de la base de generadores, tales que

$$n(\lambda) \leq \frac{V(p\,;\lambda\mu+\epsilon)}{V(p\,;\epsilon)} \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Demostración. Sea $p \in M$ y $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \rangle$. Definimos

$$\mu = \max_{j=1,\ldots,k} d(p, \gamma_k(p)).$$

Sea $\gamma \in \Gamma$, entonces

$$d(p, \gamma(p)) \leq |\gamma| \max_{j=1,\ldots,k} d(p, \gamma_k(p)) = |\gamma|\mu \tag{4.16}$$

lo cual probaremos por inducción sobre la longitud de γ.

Si $|\gamma| = 1$, entonces $\gamma = \gamma_i^{\pm 1}$ y $d(p, \gamma_i^{\pm 1}(p)) \leq 1 \cdot \mu$. Supongamos válido (4.16) para palabras de longitud menor o igual a n. Sea $\gamma \in \Gamma$ de longitud $n+1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\gamma = \varphi \circ \gamma_1$, donde $|\varphi| \leq n$. Esto implica que

$$\begin{aligned} d(p, \gamma(p)) &= d(p, \varphi \circ \gamma_1(p)) \\ &\leq d(p, \varphi(p)) + d(\varphi(p), \varphi \circ \gamma_1(p)) \\ &\leq |\varphi|\mu + d(p, \gamma_1(p)) \leq |\varphi|\mu + 1\gamma_1 \\ &\leq n\mu + \mu = (n+1)\mu \leq |\gamma|\mu \end{aligned}$$

Entonces, por (4.16) si $\lambda > 1$, $B(p\,;\lambda\mu)$ contiene al menos $n(\lambda)$ distintas imágenes de p bajo la acción de Γ.

Ahora, ya que Γ actúa propia y discontinuamente en M, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p\,;\varepsilon) \cap \gamma(B(p\,;\varepsilon)) = \varnothing$ para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq Id$. Notamos que también $\gamma_1(B(p\,;\varepsilon)) \cap \gamma_2(B(p\,;\varepsilon)) = \varnothing$ si $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Si $\gamma \in \Gamma$ y $|\gamma| \leq \lambda$, entonces, se verifica directamente que

$$B(\gamma(p)\,;\varepsilon) \subset B(p\,;\lambda\mu+\varepsilon). \tag{4.17}$$

Tenemos entonces, por (4.17) que $n(\lambda)$ imágenes ajenas de la bola $B(p\,;\varepsilon)$ están contenidas en la bola $B(p\,;\lambda\mu+\varepsilon)$, es decir

$$\bigcup_{|\gamma|\leq\lambda} \gamma(B(p\,;\varepsilon)) \subset B(p\,;\lambda\mu+\varepsilon).$$

Esto implica que

$$n(\lambda)V(p\,;\varepsilon) \leq V(p\,;\lambda\mu+\varepsilon) \quad \forall\, \lambda \geq 1,$$

(lo cual se cumple también si $0 < \lambda < 1$). Por tanto

$$n(\lambda) \leq \frac{V(p\,;\lambda\mu+\varepsilon)}{V(p\,;\varepsilon)}, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

□

Capítulo 5

Teoremas de Milnor

En este capítulo se relacionan los crecimientos de volumen y de grupo que dan origen a los teoremas principales de este trabajo. Podemos resumir como sigue: Utilizaremos la curvatura de Ricci no negativa para estudiar las variedades con grupo fundamental que crece polinomialmente y usaremos la curvatura seccional negativa para variedades compactas cuyo grupo fundamental crece exponencialmente.

5.1. Primer Teorema de Milnor

Consideremos una variedad riemanniana completa y conexa M, y sea Γ un grupo finitamente generado de isometrías que actúa propia y discontinuamente en M. Del Lema 4.11 tenemos la relación

$$n(\lambda) \leq \frac{V(p\,;\lambda\mu+\varepsilon)}{V(p\,;\varepsilon)}, \quad \forall\, \lambda > 0;$$

con $p \in M$, $\mu, \varepsilon > 0$.

Supongamos ahora, que M tiene una métrica con curvatura de Ricci no negativa, entonces, por el Teorema de Bishop,

$$V(p\,;r) \leq a_1 r^n \quad \forall\, r > 0,\ a_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Entonces $n(\lambda)$ también crecerá polinomialmente. Este es el primer Teorema de Milnor.

Este resultado se puede interpretar como sigue:

Las variedades con curvatura de Ricci no negativa, tienen grupos fundamentales con crecimiento polinomial.

Para ver lo anterior, consideremos el cubriente universal de M, $\psi : \widetilde{M} \to M$. Entonces es posible dar una métrica a $\widetilde{M}$ (a partir de la de M) con curvatura de Ricci no negativa, lo que implica que el grupo fundamental $\Gamma \cong \pi_1(M,p)$

(Lema 2.16) actúa propia y discontinuamente en $\widetilde{M}$ (Teorema 2.8) y por tanto crece polinomialmente.

Así, por ejemplo, es imposible dar al doble toro una métrica con curvatura no negativa, ya que su grupo fundamental crece exponencialmente. En este sentido, se está relacionando un hecho geométrico (curvatura no negativa) con un aspecto "métrico" de la topología (crecimiento del grupo fundamental). Enunciamos formalmente su teorema.

TEOREMA 5.1 (J. Milnor). *Sea M variedad riemanniana completa y conexa de dimensión n, con curvatura de Ricci no negativa. Entonces M crece polinomialmente, es decir*

$$V(p\,;r) \leq a_1 r^n \qquad \forall\, p \in M,\ r > 0 \text{ y } \mathrm{a}_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Además, si Γ es un subgrupo finitamente generado de isometrías que actúan propia y discontinuamente en M, entonces Γ crece polinomialmente; es decir

$$n(\lambda) \leq a_2 \lambda^n \qquad \forall\, \lambda > 0,\ a_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $p \in M$. Por tener M curvatura seccional de Ricci no negativa, podemos aplicar el Teorema de Bishop (Teorema 3.9 de [3]) y por tanto

$$V(p\,;r) \leq a_1 r^n \qquad \forall\, r > 0,\ a_1 \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular, esto demuestra que M crece polinomialmente.

Para la segunda parte, sea $\{\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_k\}$ un conjunto de generadores de Γ. Por el Lema 4.11, existen μ y ε constantes tales que

$$n(\lambda) \leq \frac{V(p\,;\lambda\mu + \varepsilon)}{V(p\,;\varepsilon)} \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Utilizando las dos desigualdades anteriores se tiene,

$$\begin{aligned}
n(\lambda) &\leq \frac{1}{V(p\,;\varepsilon)}\, V(p\,;\lambda\mu + \varepsilon) \\
&\leq \frac{1}{V(p\,;\varepsilon)}\, a_1(\lambda\mu + \varepsilon)^n \\
&= \frac{1}{V(p\,;\varepsilon)}\, a_1 \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\lambda\mu)^{n-i}\varepsilon^i \\
&\leq \frac{1}{V(p\,;\varepsilon)}\, a_1 \sum_{i=0}^{n} n!(\lambda\mu)^n \varepsilon^n \\
&= \frac{1}{V(p\,;\varepsilon)}\, a_1(n+1)!\mu^n\varepsilon^n \cdot \lambda^n
\end{aligned}$$

Por tanto, si $a_2 := \frac{1}{V(p;\varepsilon)}\, a_1(n+1)!\mu^n\varepsilon^n > 0$ entonces

$$n(\lambda) \leq a_2 \lambda^n \qquad \forall\, \lambda > 0,$$

por lo que Γ crece polinomialmente. □

5.2. Segundo Teorema de Milnor

Hemos visto que en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ el volumen crece exponencialmente; más en general, si M es una variedad riemanniana completa no compacta que admite una métrica con curvaturas seccionales negativas, entonces por el Teorema de Günther (Teorema 3.7 de [3]), el volumen de una bola en M es mayor o igual que el volumen de la correspondiente bola en un espacio de curvatura negativa constante, por tanto el crecimiento en M es exponencial (Lema 5.2).

Consideremos ahora una variedad M compacta, que admite una métrica como la anterior y sea $\Pi : M \to M/\Gamma$ un cubriente. Sea d el diámetro de Ω, un dominio fundamental de Π entonces existe $\nu > 0$ tal que

$$\frac{V(p\,;\nu\lambda + d)}{V(p\,;d)} \leq n(\lambda) \quad \forall\, \lambda > 0,$$

y por el Lema 5.2,

$$b\; e^{cr} \leq V(p\,;r) \quad \forall\, r > 0.$$

Lo que implica que $\Gamma \cong \pi_1(M,p)$ crece exponencialmente. Resumiendo:

Las variedades compactas con curvatura negativa, tienen grupos fundamentales con crecimiento exponencial.

Antes de probar el teorema, necesitamos dos resultados previos.

LEMA 5.2. *Sea M una variedad riemanniana compacta conexa con curvatura seccional negativa. Entonces*

$$V(p\,;r) \geq b\; e^{cr} \quad \forall\, r > N$$

donde $p \in M$, b, c y N son constantes positivas.

Podemos suponer que -1 es la cota superior de la curvatura seccional en M. Por el Teorema de Günther (Teorema 3.7 de [3])

$$V_M(p\,;r) \geq V_{\Delta^n}(0\,;r), \tag{5.1}$$

donde Δ^n es el disco de Poincaré de dimensión n.

Sabemos que (ver [6], p. 167)

$$V_{\Delta^n}(0\,;r) = C_n \int_0^r \left[\operatorname{senh} x\right]^{n-1} \mathrm{d}x,$$

con C_n una constante. Ahora, $C_n \int_0^r \left[\operatorname{senh} x\right]^{n-1} \mathrm{d}x$ y $b\; e^{(n-1)r}$ son funciones crecientes en r. Por la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{C_n \int_0^r \left[\operatorname{senh} x\right]^{n-1} \mathrm{d}x}{b\; e^{cr}} = 1,$$

donde $b = \frac{C_n}{(n-1)2^{n-1}}$ y $c = n-1$. Por tanto

$$V_{\Delta^n}(0\,;r) > C_n \int_0^r \left[\operatorname{senh} x\right]^{n-1} \mathrm{d}x > b\, e^{cr}$$

para r suficientemente grande, $r > N$ con $N \in \mathbb{R}^+$.

Finalmente, de (5.1)

$$V_M(p\,;r) > b\, e^{cr} \quad \forall\, r > N.$$

LEMA 5.3. *Sea M una variedad riemanniana completa, conexa y Γ un grupo finitamente generado de isometrías que actúan propia y discontinuamente en M, tal que M/Γ es compacto. Sea E una vecindad compacta de M que cumple*

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(E) = M.$$

Entonces $\Gamma_E := \{\ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(E) \cap E \neq \varnothing\ \}$ es un conjunto finito, y además $\nu := \inf_{\gamma\notin\Gamma_E} d(\gamma(E), E) > 0$.

Demostración. El conjunto $\{\gamma(E) \mid \gamma \in \Gamma\}$ es una cubierta de M con vecindades compactas, probaremos que esta cubierta es localmente finita, por lo que Γ_E es finito.

Supongamos que la cubierta no es localmente finita, entonces existe $p \in M$ y $r > 0$ tal que $\overline{B(p\,;r)}$ contiene infinitos puntos distintos de $\Gamma(E)$; es decir,

$$\gamma_n(t_n) \in \overline{B(p\,;r)} \qquad \gamma_n \in \Gamma,\ t_n \in E.$$

Como $\overline{B(p\,;r)}$ es compacto, existe una subsucesión convergente de $\{\gamma_n(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $w \in M$. Esto es, sin pérdida de generalidad,

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t_n) = w.$$

Similarmente, existe $t \in E$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Pero

$$\begin{aligned} d(\gamma_n(t), w) &\leq d(\gamma_n(t), \gamma_n(t_n)) + d(\gamma_n(t_n), w) \\ &\leq d(t, t_n) + d(\gamma_n(t_n), w), \end{aligned}$$

y tomando el límite, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = w.$$

Entonces

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\gamma_n(t), \gamma_m(t)) = 0,$$

y como Γ es grupo de isometrías, se tiene que

$$\lim_{n,m\to\infty} d(t, \gamma_n^{-1} \circ \gamma_m(t)) = 0.$$

Pero esto contradice que la acción es propia y discontinua, por lo que Γ_E debe ser finito.

Supongamos ahora que $\nu = 0$. Entonces existen $w_n \in E$, $t_n \in E$ y $z_n = \gamma_n(t_n)$ con $\gamma_n \in \Gamma$ tales que

$$d(w_n, z_n) < \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sea $p \in E$, si d es el diámetro de E

$$d(p, z_n) \leq d(p, w_n) + d(w_n, z_n) \leq d + \frac{1}{n} \leq d + 1,$$

y por tanto $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{B(p\,; d+1)}$ que es compacto. Esto implica que existe $w \in M$ y pasando a una subsucesión si es necesario podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t_n) = w.$$

Procediendo como antes, se llega a otra contradicción. Por tanto, $\nu > 0$. □

Ahora ya podemos formalizar el segundo Teorema de Milnor.

TEOREMA 5.4 (J. Milnor). *Sea M una variedad riemanniana compacta conexa de curvaturas seccionales negativas. Entonces el grupo fundamental $\pi_1(M,p)$ con $p \in M$, tiene crecimiento exponencial.*

Demostración. Fijamos $p \in M$, sea $\psi : \widetilde{M} \to M$ cubriente riemanniano universal y Γ el grupo de transformaciones cubrientes de ψ.

Sea $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$ tal que $\psi(\widetilde{p}) = p$. Por el Teorema 2.24, existe $\Omega \in \widetilde{M}$ un dominio fundamental de ψ y podemos suponer que $\widetilde{p} \in \Omega$. Como además ψ es universal tenemos que

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{\Omega}) = \widetilde{M}.$$

Sea δ el diámetro de Ω. Entonces $\overline{\Omega} \subset \overline{B(\widetilde{p}\,;\delta)}$. Por tanto si $E := \overline{B(\widetilde{p}\,;\delta)}$,

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(E) = \widetilde{M}. \tag{5.2}$$

Tenemos que E es una vecindad compacta, por el Lema 2.15, la variedad $\widetilde{M}/\Gamma$ es homeomorfa a M, que es compacta, por lo que $\widetilde{M}/\Gamma$ igualmente lo es. Así, tenemos todas las hipótesis para aplicar el Lema 5.3 a E y por tanto $\Gamma_E = \{\ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(E) \cap E \neq \varnothing\ \}$ es un conjunto finito y $\nu = \inf_{\gamma\notin\Gamma_E} d(\gamma(E), E) > 0$.

LEMA 5.5. *Si $d(\widetilde{p}, \gamma(E)) < \nu\lambda + \delta$ para alguna $\gamma \in \Gamma$ y alguna $\lambda \in \mathbb{Z}^+$, entonces γ se puede expresar como $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_\lambda$, donde $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\lambda \in \Gamma_E$ y por tanto Γ_E genera Γ.*

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma$ tal que $d(\widetilde{p}, \gamma(E)) < \nu\lambda + \delta$ para alguna $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. Escogemos $z \in \gamma(E)$ tal que $d(\widetilde{p}\ ; z) < \nu\lambda + \delta$. Sea $\alpha : [0, d(\widetilde{p}, z)] \to \widetilde{M}$ la geodésica minimal de rapidez unitaria que une $\widetilde{p}$ con z. Definimos

$$z_0 := \alpha(\delta), \quad z_j := \alpha\left(\delta + j\frac{(d(\widetilde{p}, z) - \delta)}{\lambda}\right), \quad j = 1, 2, ..., \lambda;$$

en particular, $z_\lambda = \alpha(d(\widetilde{p}, z)) = z$ y tenemos que

$$d(\widetilde{p}, z_0) = d(\alpha(0), \alpha(\delta)) = |0 - \delta| = \delta.$$

Además,

$$\begin{aligned} d(z_j, z_{j+1}) &= d\left(\alpha\left(\delta + j\frac{(d(\widetilde{p}, z) - \delta)}{\lambda}\right), \alpha\left(\delta + (j+1)\frac{(d(\widetilde{p}, z) - \delta)}{\lambda}\right)\right) \\ &= \left|j\frac{(d(\widetilde{p}, z) - \delta)}{\lambda} - (j+1)\frac{(d(\widetilde{p}, z) - \delta)}{\lambda}\right| \\ &= \frac{d(\widetilde{p}, z) - \delta}{\lambda} < \frac{(\nu\lambda + \delta) - \delta}{\lambda} = \nu, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, ..., \lambda - 1$.

Ahora, como

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(E) = \widetilde{M}$$

escogemos $\varphi_j \in \Gamma$ tal que $z_j \in \varphi_j(E)$ para $j = 1, 2, ..., \lambda - 1$.

Hacemos $\varphi_0 := Id$, de modo que $z_o \in E = \varphi_0(E)$ (ya que $d(\widetilde{p}, z_0) = \delta$) y hacemos $\varphi_\lambda := \gamma$ de modo que $z_\lambda = z \in \gamma(E) = \varphi_\lambda(E)$.

Resumiendo, tenemos que los φ_j cumplen que $z_j \in \varphi(E)$ para $j = 0, 1, ..., \lambda$. Entonces,

$$\varphi_\lambda = (\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1) \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2) \circ \cdots \circ (\varphi_{\lambda-1}^{-1} \circ \varphi_\lambda) = \gamma$$

pero

$$\begin{aligned} d(E, \varphi_{j-1}^{-1} \circ \varphi_j(E)) &= d(\varphi_{j-1}(E), \varphi_{j-1} \circ \varphi_{j-1}^{-1} \circ \varphi_j(E)) \\ &= d(\varphi_{j-1}(E), \varphi_j(E)) \ \leq \ d(z_{j-1}, z_j) < \nu \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, ..., \lambda$.

Recordemos que $\nu = \inf_{\gamma \notin \Gamma_E} d(\gamma(E), E) > 0$, lo cual implica que

$$\varphi_{j-1}^{-1} \circ \varphi_j \in \Gamma_E.$$

Por tanto, si $\gamma_j := \varphi_{j-1}^{-1} \circ \varphi_j$, entonces $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_\lambda$, con $\gamma_j \in \Gamma_E$, $j = 1, 2, ..., \lambda$, lo que prueba la primera parte del lema.

Sea $\gamma \in \Gamma$, entonces existe $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(\widetilde{p}, \gamma(E)) < \nu \cdot s + \delta$. Pero entonces $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_s$, con $\gamma_j \in \Gamma_E$, $j = 1, 2, ..., s$. Esto significa que Γ_E genera Γ. □

Debido a que Γ_E es finito, Γ es un grupo finitamente generado. Sea $n(\lambda)$ la función de crecimiento de Γ con respecto a la base Γ_E. Para $\lambda \in \mathbb{Z}^+$, mostraremos que

$$B(\widetilde{p}\,;\nu\lambda+\delta) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma;|\gamma|\leq\lambda} \gamma(\overline{\Omega}). \tag{5.3}$$

Para esto, sea $z \in B(\tilde{p}\,;\nu\lambda+\delta)$; entonces $d(z,\widetilde{p}) < \nu\lambda+\delta$. Por (5.2), existen $\gamma \in \Gamma$ y $w \in E$ tales que $z = \gamma(w)$. Entonces,

$$d(\widetilde{p},\gamma(E)) \leq d(\widetilde{p},\gamma(w)) = d(\widetilde{p},z) < \nu\lambda+\delta.$$

Por el lema anterior $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_\lambda$ con $\gamma_i \in \Gamma_E$, $i = 1, 2, ..., \lambda$. Esto es, $|\gamma| \leq \lambda$ y por tanto

$$z \in \gamma(E) \subseteq \bigcup_{|\gamma|\leq\lambda} \gamma(\overline{\Omega}).$$

Por (5.3) y pasando a volúmenes tenemos

$$V(\widetilde{p}\,;\nu\lambda+\delta) \leq n(\lambda)V(\widetilde{p}\,;\delta). \tag{5.4}$$

Tambien se cumple la relación

$$V(\widetilde{p}\,;\nu\lambda+\delta) \geq V(p\,;\nu\lambda+\delta), \tag{5.5}$$

y por el Lema 5.2, tenemos que

$$V(p\,;r) \geq b\,e^{cr} \quad \forall\, r > N;$$

y por ello

$$V(p\,;\nu\lambda+\delta) \geq b\,e^{c(\nu\lambda+\delta)}, \quad \forall\, \lambda > \frac{N-\delta}{\nu} := N_1 \tag{5.6}$$

Combinando (5.4), (5.5) y (5.6) se tiene que

$$\begin{aligned} n(\lambda) &\geq \frac{1}{V(\widetilde{p}\,;\delta)}\,V(\widetilde{p}\,;\nu\lambda+\delta) \\ &\geq \frac{1}{V(\widetilde{p}\,;\delta)}\,V(p\,;\nu\lambda+\delta) \\ &\geq \frac{1}{V(\widetilde{p}\,;\delta)}\,b\,e^{c(\nu\lambda+\delta)} \quad \forall\, \lambda > N_1 \\ &= \frac{1}{V(\widetilde{p}\,;\delta)}\,b\,e^{c\delta}e^{(c\nu)\lambda} \end{aligned}$$

Sean $c_1 := \frac{1}{V(\widetilde{p}\,;\delta)}b\,e^{c\delta} > 0$ y $a := c\nu > 0$. Entonces,

$$n(\lambda) \;\geq\; c_1e^{a\lambda} \quad \forall\, \lambda > N_1,$$

por lo que se puede encontrar una constante $s > 0$ tal que

$$n(\lambda) \;\geq\; s^\lambda \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Esto significa que Γ crece exponencialmente; y por el Lema 2.16, $\Gamma \cong \pi_1(M,p)$, luego $\pi_1(M,p)$ también crece exponencialmente. $\square$

5.3. Ejemplos

Mostraremos algunos ejemplos donde se cumplen los Teoremas de Milnor, así como los Teoremas 3.2 de Myers y 3.1 de Cartan. Consideremos primero el caso para dimensión 2.

Se sabe que la esfera, el plano proyectivo, el toro y la botella de Klein admiten una métrica con curvatura no negativa, por lo que podemos aplicar el primer Teorema de Milnor. Efectivamente, si escogemos los generadores usuales para los grupos fundamentales de estas superficies, la función de crecimiento $n(\lambda)$ en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= 1 && \text{para la esfera } \mathbb{S}^2, \text{ pues } \pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{e\}. \\ n(\lambda) &= 2 && \text{para el plano proyectivo } \mathbb{P}^2, \text{ pues } \pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2. \\ n(\lambda) &= 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 && \text{para el toro } \mathbb{T}^2, \text{ pues } \pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De esta manera, para el toro $\mathbb{T}^2$, $n(\lambda) \leq 2\lambda^2 + 2\lambda^2 + \lambda^2 = 5\lambda^2$.

Análogamente para un n-toro la función de crecimiento de su grupo fundamental es polinomial de grado n.

Ahora consideremos las superficies no orientables dadas por la suma conexa de k planos proyectivos, $\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^k$ con $k \geq 3$. Se sabe que estas superficies admiten una métrica con curvatura negativa constante. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{P}^k) \cong \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k \mid \gamma_1^2\gamma_2^2 \cdots \gamma_k^2 = 1 \rangle.$$

Para estimar el crecimiento de estos grupos, recordemos que para un grupo libre generado por k elementos se tiene la relación

$$n(\lambda) = 1 + \frac{k}{k-1}\left[(2k-1)^\lambda - 1\right] = \frac{1}{k-1}\left[k(2k-1)^\lambda - 1\right].$$

Se verifica fácilmente que $n(\lambda) \geq (2k-1)^\lambda$. Como $\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1} \rangle$ es un subgrupo libre de $\pi_1(\mathbb{P}^k)$, se tiene que la función de crecimiento de $\pi_1(\mathbb{P}^k)$ cumple que

$$n(\lambda) \geq (2k+3)^\lambda.$$

Consecuentemente, estos grupos tienen crecimiento exponencial como afirma el segundo Teorema de Milnor.

A manera de resumen, podemos clasificar a las superficies (cerradas y compactas) de acuerdo con la geometría que pueden tener. La esfera y el plano proyectivo admiten una geometría esférica; el toro y la botella de Klein una geometría euclidiana y todas las demás una geometría hiperbólica.

Sea $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ el n-toro. Como $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ es infinito, $\mathbb{T}^n$ no admite una geometría hiperbólica (Cartan). Por otro lado, $\mathbb{T}^n$ tiene como cubierta universal a $\mathbb{R}^n$, además el grupo de transformaciones cubrientes es un grupo de isometrías cuando $\mathbb{R}^n$ tiene la métrica usual y por tanto el n-toro tiene geometría euclidiana.

Ahora veamos ejemplos para dimensión 3.

Consideremos $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Se tiene que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ es infinito, por lo que no tiene geometría esférica o euclidiana (Myers). Además, $\pi_1(M)$ es conmutativo, por lo que tampoco admite geometría hiperbólica (Cartan). De hecho, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ tiene una nueva "geometría" homogénea (geometrías de Thurston).

Sea $M = \mathbb{K}^2 \times \mathbb{S}^1$. Se tiene que $\pi_1(M) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle \oplus \mathbb{Z}$ es infinito y no conmutativo, por lo que M no tiene geometría esférica o euclidiana. Además, $\mathbb{R}^3$ es el cubriente universal de M, por lo que el Teorema de Cartan no nos permite decir si hay o no geometría hiperbólica.

En el ejemplo anterior y en el siguiente necesitamos "algo más" para decidir si hay o no tal geometría, la información está en el crecimiento del grupo fundamental y entonces el segundo Teorema de Milnor nos dará la respuesta.

Sea $\mathbf{G}$ el grupo de Lie nilpotente dado por

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Consideremos $\mathbf{H}$ el subgrupo de $\mathbf{G}$ dado por las matrices de $\mathbf{G}$ con entradas enteras (grupo de Heinsenberg).

Entonces el espacio cociente $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es una variedad compacta de dimensión 3 con grupo fundamental $\mathbf{H}$. Queremos ver que geometría admite $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, para lo cual veamos el crecimiento de $\mathbf{H} \cong \pi_1(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

LEMA 5.6. *La función de crecimiento de* $\mathbf{H}$ *es cuártica, es decir*

$$a_1\lambda^4 \leq n(\lambda) \leq a_2\lambda^4, \quad a_1, a_2 > 0, \; \forall \; \lambda \in \mathbb{Z}^+$$

Demostración. Consideremos los generadores

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hagamos

$$c = g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se observa que g_1 y g_2 generan a $\mathbf{H}$, y que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} g_1 c &= c g_1, \\ g_2 c &= c g_2, \\ g_1 g_2 c &= g_2 g_1. \end{aligned}$$

Afirmamos que $n(4\lambda) \geq \lambda^4$, lo que inmediatamente implicaría que

$$n(\lambda) \geq \frac{1}{4^4}\lambda^4.$$

Paso esto, cualquier palabra $g_1^t g_2^t c^k$ con $t \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq k \leq t^2$ puede ser expresada como una palabra de longitud $2t$ (en términos de g_1 y g_2). Es decir,

$$\begin{aligned}
g_1^t g_2^t c^0 &= g_1^t g_2^t \\
g_1^t g_2^t c^1 &= g_1 \cdots g_1 g_2 \cdots g_2 c = g_1 \cdots g_1 (g_1 g_2 c) g_2 \cdots g_2 = g_1^{t-1}(g_2 g_1) g_2^{t-1} \\
g_1^t g_2^t c^2 &= (g_1^t g_2^t c^1)c = (g_1^{t-1} g_2 g_1 g_2^{t-1})c \\
&= g_1^{t-1} g_2 (g_1 g_2 c) g_2^{t-2} = g_1^{t-1} g_2 (g_2 g_1) g_2^{t-2} \\
&\vdots \\
g_1^t g_2^t c^{t^2} &= g_2^t g_1^t.
\end{aligned}$$

Para probar que $n(4\lambda) \geq \lambda^4$, veremos que hay por lo menos λ^4 palabras de longitud menor o igual a 4λ. Efectivamente, consideremos las palabras de la forma $g_1^i g_2^j c^k$ con $1 \leq i, j \leq t$ y $1 \leq k \leq t^2$. Es claro que son λ^4 palabras de $\mathbf{H}$ y además cumplen que $|g_1^i g_2^j c^k| \leq 4\lambda$.

Hacemos la prueba de esta última afirmación en dos casos.

Caso $i = j$

$$|g_1^i g_2^i c^k| = 2i \leq 2t \leq 4t.$$

Caso $i \neq j$

$$\begin{aligned}
|g_1^i g_2^j c^k| &= |g_1^{i-j} g_1^j g_2^j c^k| \leq |g_1^{i-j}| + |g_1^j g_2^j c^k| \\
&\leq |i-j| + 2j \leq |i| + |j| + 2j \leq t + t + 2t = 4t.
\end{aligned}$$

Por lo que $n(\lambda) \geq \frac{1}{4^4}\lambda^4$.

Ahora tomamos cualquier $g \in \mathbf{H}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & j & k \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $g = g_1^i g_2^j c^k$. Si además suponemos que $|g| \leq \lambda$, se puede verificar que $|i| \leq \lambda$, $|j| \leq \lambda$ y que $|k| \leq (\frac{\lambda}{2})^2$. Por lo que a lo más hay $(2\lambda)(2\lambda)2(\frac{\lambda}{2})^2 = 2\lambda^4$ palabras de longitud menor o igual a λ. Esto es,

$$n(\lambda) \leq 2\lambda^4.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{4^4}\lambda^4 \leq n(\lambda) \leq 2\lambda^4.$$

□

Entonces $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ es una variedad de dimensión 3 que no admite una métrica con curvatura no negativa, ya que si existiera ésta, $\mathbf{H}$ crecería polinomialmente de orden 3, lo que contradice el lema.

Afirmamos que tampoco admite una métrica con curvatura negativa. Por un lado, $\mathbf{H}$ es infinito y no conmutativo y por lo que por el Teorema de Cartan no podemos decir algo. Pero como $\mathbf{H}$ no crece exponencialmente (por el lema), el segundo Teorema de Milnor implica que no existe tal métrica.

Bibliografía

[1] Armstrong, Mark, *Topología Básica*, Editorial Reverté (1987).

[2] Calvo, Omegar y Iturriaga, Renato, *IV Escuela de verano de Geometría y Sistemas Dinámicos*, Sociedad Matemática Mexicana (1998).

[3] Chavel, Isaac, *Riemannian Geometry: A modern introduction*, Cambridge University Press (1993).

[4] Cheeger, Jeff y Ebin, David, *Comparison Theorems in Riemanniann Geometry*, Elsevier (1975).

[5] do Carmo, Manfredo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser (1993).

[6] Gallot, Sylvestre, Hulin, Dominique y Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer (2004).

[7] Kobayashi, Shoshichi y Nomizu, Katsumi, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, Interscience (1963).

[8] Kuga, Michio, *Galois' Dream: Group Theory and Differential Equations*, Birkhäuser (1993).

[9] La Harpe, Pierre de, *Topics in Geometric Group Theory*, The University of Chicago Press (2000).

[10] Lee, John, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer (2000).

[11] Milnor, John, *A note on curvature and fundamental group*, J. Differential Geometry **2** (1968), 1-7.

[12] Munkres, James, *Topología*, Prentice Hall, (2002).

[13] O'Neill, Barrett, *Elementos de Geometría Diferencial*, Editorial Limusa-Wiley (1972).

[14] Ratcliffe, John, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag (1994).

[15] Wraith, David, *The fundamental group of non-negatively curved manifolds*, Irish Math. Soc. Bull. **40** (1998), 35-45.