UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

SERIES DE TIEMPO COMO VARIACIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA:

GUERRERO POBLETE FERNANDO

ASESOR: MTRA. MARICARMEN GONZALEZ VIDEGARAY

ABRIL 2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Guerrero Robles Fernando

FECHA: 28/04/05

FIRMA:

Prologo

La música como una organización de sonidos plasmados en el tiempo responde a reglas de composición, misma que entre sus principios tiene la forma variación; Variar una idea musical consiste en cambiara partes de ella conservando al mismo tiempo otras sin alterar.

Con respecto a la antigua e intrincada relación de la música con las matemáticas, esta se da no solo como descripción del fenómeno físico que comprende el sonido, sino también como herramienta para la composición, tal que ideas y conceptos como son la probabilidad, estadística, juegos de azar y movimiento Browniano entre muchos otros, son fuente generadora de música -dejamos de lado el termino "creación musical" y sus connotaciones-.

Así, tal es el marco en el que se circunscribe el presente trabajo, acotado a la aplicación de series temporales y a la obtención de variaciones.

El primer capítulo es un breve resumen de lugares comunes en la relación histórica de la música con las matemáticas, junto con la exposición de la relación numérica en la partición de un intervalo de una octava, esta exposición es necesaria porque es la base para proponer una biyeccion entre los enteros y las notas de una pieza musical. El capitulo dos es un breve resumen -no demasiado profundo ni formal- de series temporales, básicamente lo que vamos a utilizar.

El tercer apartado presenta las bases de la propuesta con que vamos a trabajar, una biyeccion de los números enteros con las notas de una partitura, que además de permitirnos tratar a un fragmento musical como una serie temporal, nos es conveniente; Presentamos también un criterio de ajuste al que denominamos "ajuste armónico" así como la idea de sucesiones de series temporales, la que por otra parte esta basada en la concatenación de modelos de series temporales con diferentes valores para las constantes.

El objetivo del presente trabajo, es la obtención de variaciones musicales de un fragmento o motivo, a partir de un de serie temporal obtenida de transformar una partitura, propósito que es llevado a cabo en el ultimo apartado, en el que se presentan parte de los resultados obtenidos, -esto con el objetivo de mantear el trabajo dentro de limites razonables- aplicados como variación, contrapunto y desarrollo. Parece obvio que no toda serie de tiempo puede tomarse como una variación musical en términos de tonalidad, dada la improbabilidad de cumplimiento de los criterios de "ajuste armónico", por lo que en un momento habremos de apelara a la intuición y a la musicalidad para dar viabilidad a la utilización de series de tiempo como una forma de obtener variaciones que puedan ser utilizadas efectivamente en el proceso de la composición.

Resta por agradecer a la Mtra. Maricarmen González Videgaray directora de tesis, así como a los sinodales: Mtra. Sara Camacho, Ing. Francisco Patiño, Ing. R. García Moncada y al Lic. Christian Delgado por su amable revisión del borrador. Deseo también agradecer al Comité de Asignación de Becas Crédito CONACYT por el apoyo de que soy objeto y que me ha permitido entre otras cosas la conclusión del presente trabajo.

Índice

Capítulo 4

Series de tiempo como variaciones

Capítulo 1

Composición y variaciones

1.1 Introducción

Uno de los conceptos importantes dentro de la composición, surge de la repetición de un motivo o tema dentro de una pieza musical, y si esta es fiel o no; En este último caso se le llama una variación.

Todas las formas musicales anteriores al dodecafonismo se basan en la tonalidad, es decir en la organización jerárquica de las notas alrededor de una principal llamada tónica, en una muy cuidada armonía, la que en términos simples se refiere tanto a la combinación de dos o más sonidos simultáneos como a la sucesión de conjuntos de sonidos y la forma en que estos se relacionan.

La música y las matemáticas a simple vista parecen temas ajenos entre sí, mas aun, no se necesita saber matemáticas para disfrutar de la música, pero pocas cosas están realmente desligadas de la matemática, -la música no es excepción- en primera instancia el que sean siete las notas musicales –que componen la escala diatónica- no parece muy adecuado, siete es un número primo, pero si tomamos en cuenta a las notas intermedias tenemos un total de doce, que son la base de la música occidental.

En seguida, las matemáticas nos ofrecen una descripción del fenómeno en si, además de la relación de frecuencia entre notas, adicionalmente sirven como base para modelos utilizados en composición.

Uno de los primeros ejemplos para ello, lo encontramos a principios del segundo milenio, cuando Guido De Arezzo –a quien por otra parte se le debe la moderna notación de la música- desarrolló una técnica de composición que consistía en asociar sonidos a las vocales de un texto, de tal manera que la melodía se iba conformando de acuerdo al contenido de las vocales de un texto determinado, -de la manera en que a los números "aleatorios" generados por una ecuación determinista son llamado "números pseudoaleatorios" podríamos llamarla música psuedoaleaoria-si bien intuitivo, se da mucho antes de los primeros estudios matemáticos del azar, y así por la línea, en la historia se dan casos de tal relación, hasta llegar a modelos actuales y muy sofisticados.

Actual y adicionalmente se emplean herramientas tales como programas informáticos que ayudan o hacen composición, y desde luego sin entrar en discusión de que dada esta manera de generar música es aceptada o no como tal, una variación como forma musical que utiliza medios externos a la inspiración, tiene entonces la misma validez o cuestionamiento.

1.2 Composición y variaciones

Definiciones de la música podemos encontrar muchas, algunas expresadas en términos puramente físicos y algunas otras bastante poéticas; empecemos revisando algunas de las encontradas en los diccionarios y/o enciclopedias, De acuerdo con la Enciclopedia Universal Espasa "arte de combinar los sonidos de la voz humana o de los instrumentos, o unos y otros a la vez, de suerte que produzca recreo al escucharlos, conmoviendo la sensibilidad, ya sea alegre, ya tristemente", la Enciclopedia Británica dice por otra parte "arte relacionado con la combinación de sonidos vocales o instrumentales como una expresión de la belleza de la forma o de una emoción, usualmente de acuerdo con estándares culturales de ritmo, melodía, y, en la mayor parte de la música occidental, armonía".

Al respecto algunas definiciones dadas por músicos, por ejemplo la proveída por Hilarión Eslava (1807-1878), "el arte de bien combinar los sonidos y el tiempo". Luis Villalba, compositor y crítico musical español (1873-1921) dice "música es la sucesión de una o varias series simultáneas de sonidos concertados, modulados y ritmados según el número, en orden a la expresión o emoción, así sentimental como estética".

Más actual, tenemos el concepto dado por los serialistas que sitúan a la música como un arreglo ordenado de sonidos simples de distinta frecuencia en sucesión (melodía), sonidos en combinación (armonía) y sonidos (y silencios) en sucesión temporal (ritmo).

Más llano es el concepto puramente físico de la música, que sitúa a esta únicamente como una clase particular de sonido, el cual es el resultado de vibraciones transmitidas a través del aire, con frecuencias en el rango desde los 20 a los 5000 Hertzios.

Sin embargo es patente el que pocas de las definiciones encontradas, integren en ellas, componentes culturales tales como las corrientes o tradiciones, o que por otra parte resalte la histórica relación de la música con las matemáticas, tan estrecha esta, que al menos hasta el siglo XVII, y junto con la aritmética, geometría y la astronomía formaba parte del *Quadrivium*.

La música para el escucha es sin embargo un conjunto de atributos, tanto objetivos como subjetivos que le permiten analizar su organización, entre los primeros tenemos el *tono* o altura, que esta relacionado con la agudeza de un sonido; *Intensidad* o nivel sonoro, que se refiere al intensidad la señal; *timbre*, que es la cualidad que permite distinguir entre una señal y otra, y el tiempo, asociado con el *ritmo* y la dinámica; Los atributos físicos del sonido que pueden ser estimados numéricamente por medio de una representación matemática del mismo, son la frecuencia, la amplitud, el espectro –que es un mecanismo para describir a un conjunto de frecuencias asociadas con un señal- y el tiempo.

Las partes teóricas de la música son la composición y el análisis, la primera suele definirse como la parte de la teórica que enseña el conjunto de reglas que rigen la formación de la música y el acompañamiento.

Luego en el análisis de una obra musical, este puede realizarse desde diferentes niveles de detalle, un primer nivel consta de las secciones mayores de una pieza, las cuales pueden relacionarse entre sí, de las siguientes maneras:

- La repetición exacta de un motivo o conjunto de notas o hasta una sección completa.

- El contraste de una sección con otra, esto es secciones totalmente diferentes.

- El desarrollo –Esto es, en la separación de una sección en sus diferentes partes: ritmo o fragmentos melódicos más pequeños- para después rexpresarlo con una nueva y diferente combinación, por ejemplo: un mismo fragmento melódico con diferente ritmo.

- La variación, que a diferencia de la repetición, tiene alterado el ritmo o la armonía, pero que en los casos mas generales consiste de una reelaboración de la melodía.

La repetición de un motivo musical se evidencia para el oyente, en la forma de un recuerdo de lo ya escuchado, o como una anticipación de lo que ha de sonar, por lo que perceptivamente dota de intuición al escucha, a diferencia de la incertidumbre en el contraste.

La variación puede darse en distintos niveles, la más simple de ellas es cuando se mantienen la armonía y melodía, solo que esta y en cada repetición, se ornamenta de diferente forma, como por ejemplo en la música con una fuerte dosis de improvisación, -como el jazz- la variación bajo la forma de la improvisación, la armonía asociada a una melodía dada se repite continuamente para soportar las variaciones que los instrumentos solistas hacen de la melodía.

La conserva de la armonía con la alteración de la melodía, no es la única forma en que se presenta una variación, la más radical de ellas se da en la variación libre, en la que deben convivir una armonía y una melodía alteradas simultáneamente.

La variación de un tema da lugar a una forma musical del mismo nombre cuyos orígenes se remontan al siglo XVI, en que las canciones populares mantenían la misma melodía en cada repetición, solo que ornamentada de forma diferente; La variación ya estaba presente en formas musicales antiguas tales como el pasacalles, el cual consistía principalmente de una frase recurrente sobre un bajo ostinato.

Ya en el periodo barroco algunos de los compositores mas importantes cultivaron la forma variación, con nuevas concepciones sobre como modificar una idea musical, por ejemplo Johann Sebastián Bach en su obra *Variaciones Goldberg*, en la que aun se conserva la armonía, pero se va acentuando la diferenciación melódica; Algunos compositores sucesores a Bach, como Mozart y Haydn solían cambiar aun mas la melodía hasta el punto de conservar solo las líneas básicas –la duración de las notas, el comienzo, el final y algunos pasajes-.

La forma musical variación tuvo su pleno desarrollo en el siglo XIX, con la llegada de con Ludwig van Beethoven -con obras tales como las *Variaciones Diabelli* (1823)- y Johannes Brahms, que en sus variaciones empezaron a alterar las armonías, para mas tarde en la variación libre, algunos compositores además de cambiar la armonía empezaron a alterar incluso el esqueleto estructural obra, como en el poema sinfónico *Don Quijote* (1898) del compositor alemán Richard Strauss.

En el siglo XIX, La forma musical variación, estrechamente relacionada con el arte de la improvisación, fue durante mucho tiempo y por lo mismo asociada con los teclados, Los motivos musicales que mejor se prestan para las variaciones, son aquellos que permanecen reconocibles aún bajo alteraciones drásticas, por lo que deben de poseer líneas melódicas claras; Quizás el tema mas utilizado para esto, sea el *Capricho nº 2 en la menor para violín solo* de Niccolo Paganini, con un único motivo rítmico presente en casi todos los compases y una melodía que acentúa en la quinta, al comienzo de cada compás. Este tema ha servido como base para variaciones de compositores como: Robert Schumann, Johannes Brahms y Serguéi Rajmáninov.

1.3 Música y matemáticas

La relación que guardan las matemáticas y la música, la música y las matemáticas, es intrincada y muy antigua, parte de la llamada escuela "Pitagórica" hasta nuestros días, en que se hace uso de herramientas como la computadora para seguir acrecentando el vínculo.

Ejemplos de tal relación, los encontramos bastante a menudo, desde los ya mencionados "Pitagóricos" que dieron una relación numérica entre los sonidos, hasta nuestros días en que la utilización de ideas y conceptos tales como la probabilidad, estadística, juegos de azar, movimiento Browniano etcétera, son base de nuevas formas de composición y análisis de la música.

Así mismo el avance en la sofisticación de los instrumentos de medida, ha permitido a la física exponer de manera fehaciente el fenómeno físico del sonido.

En cuanto al estudio físico de la música, el elemento unitario de esta es el sonido, el cual puede caracterizarse por: tono, intensidad y timbre. Las primeras dos corresponden a las características físicas de la onda que lo produce: frecuencia y amplitud, mientras que el timbre es la diferencia entre notas con la misma frecuencia, esta tiene que ver con la cantidad de tonos secundarios que acompañan a la nota principal y que son múltiplos exactos en hercios de la misma, si bien subjetivamente existe un abanico de adjetivos que permiten caracterizarlo, tales como: frío, caliente, duro, brillante, apagado, soso. . .

Sin embargo es estrecha la relación de los atributos subjetivos con los objetivos ya que los primeros dependen en gran medida de los segundos, la tonalidad, está estrechamente relacionada con la frecuencia -el sonido producido por la mayor parte de los instrumentos musicales, salvo excepciones- se puede asociar con frecuencias concretas que se consignan como fundamentales, el nivel de sonoridad, está relacionado con la amplitud, y el timbre, tiene su modelo de referencia en el espectro, que agrupa las frecuencias fundamentales y los armónicos.

En cualquier caso, para que una señal sonora pueda ser percibida por el hombre, es necesario disponer de una cierta cantidad de energía sonora, limitada inferior y superiormente. El rango típico de audibilidad del oído humano se encuentra entre los 20 a 20000 Hz. Pero este rango está relacionado con la intensidad sonora a través de funciones de audibilidad, que describen el umbral absoluto audible en función de la frecuencia. Una buena aproximación del umbral citado está dada por la expresión

$$Thr(f) = 3.64(f/1000)^{-8} - 0.5e^{-0.6(f/1000-3.3)2} + 10\text{-}3(f/1000)^{4}$$

El sonido como fenómeno físico es captado por el oído humano, siempre que la perturbación del medio que produce el sonido se encuentre en el rango de los 16 y los 20000 Hz. Si se encuentra por debajo de tal rango se denomina infrasonido, análogamente si se encuentra por arriba se denomina ultrasonido.

Si bien el oído humano es capaz de percibir sonidos en intervalo que va de 16-20000Hz. En música este intervalo es significativamente menor –las notas más agudas se encuentran en el entorno de los 4500Hz.- ya que si bien los sonidos muy agudos son audibles, estos se perciben como ruidos.

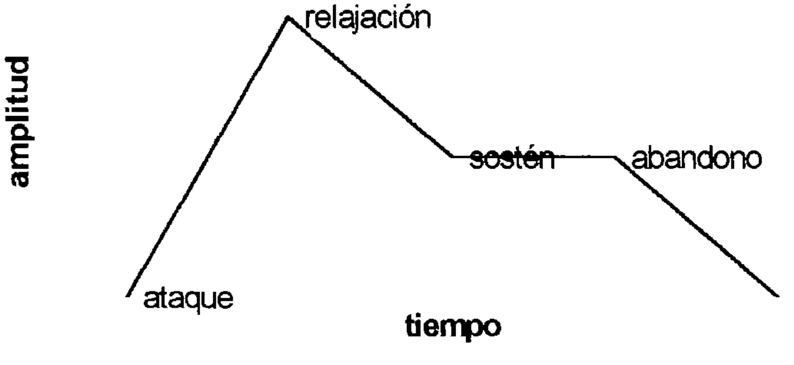
El oído humano es también capaz de diferenciar sonidos cuya frecuencia difiera en un solo Hz. Lo que en música nos daría un aproximado de 4500 notas, sin embargo en la practica, la música occidental solo cuenta con 88 notas –correspondientes a las teclas del piano-.

A diferencia del tono, intensidad y/o duración de un sonido, el timbre es un atributo multidimensional y consiste en un conjunto de datos informativos que permiten identificar la fuente de emisión de la señal sonora, en música el timbre permite diferenciar una misma nota cuando es producida por diferentes instrumentos, aun mas el timbre permite caracterizar a un interprete, cotidianamente permite identificar a una persona por su voz.

Físicamente, el timbre está determinado por el espectro de la señal y por su envolvente. La estructura del espectro incluye el número, magnitud y espaciado de las líneas espectrales, la fluctuación espectral, la presencia o ausencia de altas frecuencias, el ancho de banda de la señal y la energía aportada a la misma por los armónicos en relación con la energía total.

La estructura de la envolvente se percibe fácilmente considerando una clase particular que se utiliza en síntesis de sonido: la envolvente ADSR:

La envolvente define una ventana de nivel de sonoridad. El ataque es desencadenado por la acción del intérprete -por ejemplo cuando pulsa la cuerda de una guitarra-, después del ataque y tiempo después la intensidad del sonido disminuye hasta llegara a un nivel de sostenimiento, para finalmente cesar.



La Matemática han permitido describir y entender la relación numérica que existe entre las notas de una obra. Las teclas del piano forman grupos que se repiten cada 12 teclas (5 negras y 7 blancas), así una tecla blanca abre un grupo, la octava tecla blanca –contando desde la que abre el grupo- cierra al grupo y abre al mismo tiempo el siguiente, la distancia entre los sonidos producidos por estas teclas –la que abre y la que cierra- se llama octava. La relación de frecuencia producida por una nota una octava mas aguda que una primera, es del doble: 2:1 y una tercera a su vez de 2:1 y 4:1 en relación a la primera y así sucesivamente, un nota una octavas mas grave tiene una relación con la nota base de 1/2:1. entonces la relación se puede denotar como:

$2^n : 1 \qquad n = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots$

en donde *n* es el numero de octava.

Dentro de cada octava, las relaciones de frecuencias entre las notas intermedias son mucho mas importantes que las frecuencias absolutas, e igualmente guardan un relación bien definida, la correspondencia es como sigue entre las ocho notas sucesivas que componen a una octava:

Según la construcción "Pitagórica"

Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima	Octava
f	9f/8	5f/4	4f/3	3f/2	5f/3	15f/8	2 f

No es la única partición discreta de una escala que se ha hecho, La escala temperada divide a una octava en doce subintervalos iguales –toma las doce notas existentes en la música occidental-, en donde cada nota lleva asociada una frecuencia f definida por la relación:

$$f = 2^{i/12} f_0$$

En donde f_0 es la frecuencia inicial asociada, e $i = 0,1,2,\ldots,11$.

Esta relación de frecuencias induce a una partición mucho mas general –que por otra parte fue utilizada por Julián Carrillo en el llamado sonido trece- que nos llevaría a contar con tantas notas como queramos.

$f = 2^{i/n} f_0$

En donde n es el orden de la partición deseada e $i = 0, 1, \ldots n-1$.

Igualmente la matemática ha servido para describir el fenómeno físico de la música, para describir la relación interna entre las notas, así como para crear modelos que sirven para la composición etc.

Supongamos una melodía construida como sigue: Tomamos una nota de partida con frecuencia g_0, y la siguiente nota tendrá una frecuencia:

$g_1 = 2^{1/12} g_0$ ó $g_1 = 2^{-11/12} g_0$ de acuerdo a una función de probabilidad:

$f(x;\theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x} \qquad \theta = 1/2,\ x = \{0, 1\}$

Sucesivamente g_{n+1} tendrá frecuencia

$$g_{n+1} = \begin{cases} g_n * 2^{1/12} \rightarrow \text{si } f = 1 \\ g_n * 2^{-11/12} \rightarrow \text{si } f = 0 \end{cases}$$

Con lo que tenemos una sucesión de notas independientes g_n de g_{n-1} –en cuanto a la dirección del salto- empleando un modelo probabilístico básico para generar la melodía, como una sucesión de notas.

$\{g_n\} = \{g_0, g_1, \ldots g_n\}$

Si bien el salto es independiente -es Bernoulli- *no lo es en cuanto al valor* en frecuencia de la nota g_n con respecto a g_{n-1}. Además de que la secuencia es bastante monótona –el valor absoluto del salto es de $2^{1/12} - 1$. - Por lo que el modelo solo sirve como ejemplo.

Lo anterior no hace sino resaltar la importancia de la relación entre notas, estas relaciones de frecuencia se denominan intervalos o distancias; La importancia de esto queda de manifiesto cuando una melodía es ejecutada en diferentes octavas -digamos por ejemplo por dos instrumentos, uno de sonido grave y otro de sonido agudo- la melodía no deja de ser la misma, ya que la distancia entre las notas se preserva.

En armonía clásica, la distancia entre notas está definida por reglas de composición, por ejemplo cuando construimos una *tríada* -en su forma canónica es: primera, tercera y quinta- que soporte una melodía, la que si bien debe estar construida en torno a la tónica su sucesión es un proceso complejo.

Para que una sucesión de notas sea del agrado del oyente, ésta no debe ser ni muy predecible ni demasiado sorprendente, idea propuesta por el matemático americano David Birkhoff (1884-1944), solo que generalizada para cualquier obra considerada como artística. En su teoría Birkhoff propuso que para que una obra artística fuera interesante, esta no debía ser ni demasiado predecible como tampoco sorpresiva o impredecible en demasía.

En analogía con un proceso de composición de ruido blanco, cada valor de una nueva nota es independiente de las anteriores (es por completo sorpresiva). En contraste, en la música browniana, sólo los incrementos o decrementos del valor de una nueva nota son independientes del pasado, dando lugar a una composición si bien no del todo predecible, sí aburrida por la imposibilidad de pasar de un registro grave a un agudo o viceversa de manera natural.

1.4 Historia

En la antigüedad la escuela formada por Pitágoras, llamada así misma: "Los Pitagóricos" trataba de establecer reglas formuladas en términos de números, que relacionasen fenómenos espirituales con fenómenos físicos conocidos. Por ejemplo ellos creían que los cuerpos celestes al girar en torno a la tierra producían sonidos armónicos que denominaban "La música de las esferas".

La idea de "La música de las esferas" fue retomada siglos más tarde y con una visión más física de fenómeno, por Kepler que conociendo la teoría Heliocéntrica, sugirió que si se conocía la masa y velocidad del objeto que giraba, podría deducirse el sonido que producía.

Los primeros estudios con relación a la naturaleza de los sonidos de la música corresponden precisamente a Pitágoras con la música griega, que a diferencia de la música occidental contenía muchos mas que los doce sonidos fundamentales.

Pitágoras descubrió una relación numérica entre los sonidos musicales consonantes, la relación que Pitágoras descubrió por medio de razones de números enteros es como sigue.

Supóngase un instrumento de cuerda, como por ejemplo un violín, sabemos que la altura de la nota producida por una cuerda depende principalmente de la longitud, grosor y tensión de la misma, manteniendo estos factores constantes, Pitágoras se dio cuenta de que dividiendo la cuerda en ciertas proporciones, esta producía sonidos "armónicos", lo que era congruente con la escuela pitagórica al encontrar una relación numérica entre un fenómeno físico –la vibración de una cuerda- y el mundo espiritual en la percepción de la música.

Lo que Pitágoras encontró fue que al dividir una cuerda exactamente a la mitad, esta producía con relación al sonido original de la cuerda, un sonido una octava más agudo, -por ejemplo la primera cuerda de un violín produce al ser frotada al aire un "mi" de la sexta escala, y su pulsamos dicha cuerda exactamente a la mitad, esta producirá al ser frotada un "mi" de la séptima escala-.

Cuando la razón era de 2/3 el sonido que se propicia era una quinta –un "si" en el mismo caso-, así que ciertas razones producían sonidos consonantes.

La razón física por la cual se encuentran más agradables ciertos intervalos –al margen de las apreciaciones- es que cuando por ejemplo vibra una cuerda a con "x" tensión "y" grosor y longitud de un metro, produce una onda de un metro además de dos de cincuenta centímetros, tres de un tercio de metro, cuatro de veinticinco centímetros y así sucesivamente, es decir la cuerda vibra además de en su longitud original en mitades, tercios, cuartos, etcétera.

Cada una de estas subsecuentes vibraciones produce sonidos "armónicos", cada uno más agudo que el anterior, mas allá del rango auditivo.

Entonces la razón por la que dos sonidos simultáneos son consonantes o "armónicos" -por ejemplo un "do" simultaneo con su quinta "sol"- se debe a que ambos sonidos comparten muchos de sus armónicos produciendo sonidos agradables o que no chocan entre si –perceptivamente eufónicos-.

Pitágoras sabía que la longitud de la cuerda en proporciones de 3/4 y 2/3 producía combinaciones de sonidos agradables, así que construyo una escala a partir de tales proporciones.

En sus experimentos, Pitágoras descubrió tres intervalos que él considero eran consonantes, y los llamo diapasón, diapente y diatesaron. Los cuales corresponden a la octava, la quinta y la cuarta de la escala diatónica.

Los experimentos de Pitágoras con el monocordio –instrumento antiguo de una sola cuerda- llevaron a un método de afinación usado durante años que consistía de la expresión de cualquier intervalo como una razón de enteros.

La construcción es como sigue:

Si consideramos dos sonidos puros producidos al unísono, estos pueden sonar en forma disonante o consonante, dependiendo de las relaciones entre sus frecuencias, en primera instancia la consonancia será perfecta si las frecuencias son iguales o una de ellas es un múltiplo entero de la otra –si una de ella es del doble de la otra se perciben como la misma nota solo que mas aguda, recibe el nombre de octava- menos trivial es la consonancia en el caso de frecuencias que no son las mismas ni múltiplo entero una de la otra.

Partiendo de una nota y su octava cuyas frecuencias son f y 2f respectivamente, deseamos particionar tal intervalo, y de modo natural tomamos una frecuencia justo en el medio: 3f/2, seguimos particionando el intervalo procediendo de la misma manera, de tal que tenemos 9f/4, ya que esta frecuencia es mayor a 2f y fuera de nuestro intervalo de partición, pero ya que una frecuencia igual a 2f representa a la misma nota, trasladamos a esta nueva nota una escala mas grave multiplicando por el inverso, así (9f/4)(1/2) = 9f/8.

Continuamos de la misma manera (3/2)(9f/8) = 27f/16; nuevamente (3/2)(27f/16) = 81f/32, como una vez mas 81f/32 es mayor que 2f volvemos a dividir entre 2, (81f/32)(1/2) = 81f/64. (3/2)(81f/64) = 243f/128.

Ordenándolos de menor a mayor

- 1f
- 9f/8
- 81f/64
- 3f/2
- 27f/16
- 243f/128

Ahora, si calculamos el cociente de cada frecuencia con la anterior

Cociente	Razón	Decimal
(9/8)/(1)	9/8	1.125
(81/64)/(9/8)	9/8	1.125
(3/2)/(81/64)	32/27	1.185
(27/16)/(3/2)	9/8	1.125
(243/128)/(27/16)	9/8	1.125
(2)/(243/128)	256/243	1.053

Vemos que la razón del incremento es muy semejante, a excepción del tercer cociente, pero si intercalamos el valor 4/3 en la serie, obtenemos:

- 1f
- 9f/8
- 81f/64
- 4f/3
- 3f/2
- 27f/16
- 243f/128
- 2f

Volviendo a hacer la tabla

Frecuencia	Cociente	Razón	Decimal	Nombre de la nota
1f				Tónica
9f/8	(9/8)/(1)	9/8	1.125	Supertonica
81f/64	(81/64)/(9/8)	9/8	1.125	Mediante
4f/3	(4/3)/(81/64)	256/243	1.053	Subdominante
3f/2	(3/2)/(4/3)	9/8	1.125	Dominante
27f/16	(27/16)/(3/2)	9/8	1.125	Superdominante
243f/128	(243/128)/(27/16)	9/8	1.125	Sensible
2f	(2)/(243/128)	256/243	1.053	Octava

Hemos obtenido la partición de una escala partiendo de una nota con una frecuencia dada hasta una nota del doble de frecuencia, atendiendo a criterios de máxima consonancia; Si llamamos a la distancia entre dos notas consecutivas cuyo cociente de incremento sea de 1.125 tono, y así mismo a la distancia entre dos notas consecutivas cuyo cociente de relación sea de 1.053, semitono –nótese que .125 es muy próximo a el doble de .053- y ahora si tomamos a Do como la nota de partida y hasta llegara a un Do una octava mas agudo, vemos que la distancia entre dos notas consecutivas es siempre de un tono, a excepción de las distancias de Mi a Fa y de Si a Do. En donde existe un distancia de un semitono, a esta relación: tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono. Se le conoce como escala natural en modo mayor.

Si bien como ya hemos expuesto, la anterior relación se obtuvo en base a criterios de máxima consonancia, en la actualidad el método de afinación utilizado es el llamado de la escala temperada. Esta se desarrolló para resolver los problemas de afinación además de permitir una modulación en la tonalidad, esto permitía el poder cambiar de tonalidad una pieza sin la necesidad de cambiara la afinación de un instrumento.

Esta nueva forma de afinación seguía utilizando relaciones numéricas para expresar los intervalos. El temperamento fue formalmente formulado por Mersenne en el año de 1630.

El temperamento es de alguna manera estandarizado cuando Bach publica su obra "El clavecín bien temperado" que permitía una afinación sin diferencias entre por ejemplo, un la bemol y sol sostenido. La obra de Bach "el clavecín bien temperado" consta de veinticuatro piezas en las doce tonalidades y sus modos mayor y menor. mostrando con esta obra las ventajas y posibilidades de una afinación estandarizada.

La relación numérica que sirve de base para la escala temperada, consiste en formar la escala cromática a base de multiplicar la nota base por la raíz doceava de dos, elevada a la posición que guarda con respecto a la nota base, es decir:

$$f = 2^{i/12} f_0$$

Donde f_0 es la frecuencia base, e i es la posición que guarda una nota en relación con la frecuencia base. La escala cromática seria:

I	potencia(2,i/12)	fi/fi-1
1	1.059463094	1.05946309
2	1.122462048	1.05946309
3	1.189207115	1.05946309
4	1.25992105	1.05946309
5	1.334839854	1.05946309
6	1.414213562	1.05946309
7	1.498307077	1.05946309
8	1.587401052	1.05946309
9	1.681792831	1.05946309
10	1.781797436	1.05946309
11	1.887748625	1.05946309
12	2	1.05946309

De aquí vemos que en esta forma de escala -la llamada temperada- el cociente de relación de dos notas cromáticamente consecutivas o semitonos es de

1.059 si bien difiere de la anterior y por lo mismo su armonía no es tan perfecta, si simplifica enormemente la tarea de afinación de algunos instrumentos, que es lo que a fin de cuentas determina su vigencia.

En cuanto al empleo de ideas matemáticas -esencialmente relacionadas con el azar- como ayuda para la composición, encontramos ejemplos a lo largo de la historia, el primero de ellos aunque intuitivo se da a principios del segundo milenio con Guido De Arezzo, quien desarrollo una técnica de composición que consistía en asociar sonidos a las vocales de un texto, de tal manera que la melodía se iba conformando de acuerdo al contenido de las vocales de un texto determinado.

Ya dentro del periodo clásico una de los aplicaciones mas ingeniosas del azar en la composición se le debe a Mozart, quien en 1777 describió una técnica basada en el juego de dados con la cual compuso el pequeño vals llamado "Musikalisches Würfespiel". A groso modo consistía en que, luego de componer 176 compases -algunos iguales- y agruparlos en dos tablas correspondientes a cada una de las partes del vals, y donde cada una de ellas estaba compuesta por ocho columnas -compases- y once renglones, que estaban asociados con el numero obtenido al lanzar dos dados, por ejemplo para el segundo compás, si el lanzamiento de los dados arrojaba un cuatro se tomaba el compás cuya posición en la tabla era segunda columna, cuarto renglón, obteniéndose con ello una cantidad ingente de posibles combinaciones o realizaciones de la obra. Si bien esta no es una obra aleatoria en su concepción si lo es en su ejecución, y uno de los primeros ejemplos de la utilización explicita de la probabilidad en el proceso de la música.

1.5 Actualidad

La música aleatoria es aquella en la que se introduce la indeterminación en el proceso composición y/o ejecución de la música, si bien en líneas generales el termino sería aplicable a la improvisación, se utiliza para referirse al periodo de mediados del siglo pasado en que se utilizaron técnicas aleatorias en el proceso creativo.

Los compositores estadounidenses Charles Ives y Henry Cowell fueron los primeros en retomar técnicas aleatorias en la composición, por ejemplo el segundo de ellos en su obra *Cuarteto Mosaic* (1935), utilizo fragmentos tales que el ejecutante podía agruparlos de manera "aleatoria". Mas tarde John Cage llevo esta idea de lo aleatorio aun mas lejos, por ejemplo en su obra para piano *Music of Changes* (1951) la altura y duración de las notas estaba determinado por el lanzamiento de monedas, o en su obra *Concierto para piano y orquesta* (1958), las secciones de la obra podían interpretarse o no, de acuerdo con una decisión "aleatoria" del interprete, y mas aun era posible ejecutar simultáneamente otras obras del mismo Cage, su obra mas extrema data de 1952 llamada *4' 33"*, título que hace referencia a la duración de la obra, que a fin de cuentas es lo único fijo, ya que en ella se combinaban sonidos ambientales tomados al azar.

El ejemplo de empleo de ideas matemáticas como ayuda para la composición, más reciente y acabado lo tenemos con el músico griego Xenakis, el cual empleaba principalmente ideas probabilísticas como la distribución aleatoria de puntos en el plano, o el uso de cadenas de Markov, mas aun el uso de programas informáticos estocásticos para generar material musical como en su obra *ST/4* (1962).

Xenakis nos lleva al pináculo de la música estocástica, la que por otra parte se caracteriza por la indefinición del comportamiento de las entidades, pero no el del todo. Es decir, si bien una obra es indeterminada en sus detalles, no lo es en su finalidad.

Aunque la música aleatoria no esta hoy en primera línea, sus técnicas son aun muy utilizadas por los compositores.

Una onda sonora puede representarse de la forma:

$t \rightarrow s(t)$, con t como el parámetro tiempo.

En el caso particular de una onda pura –que no es el caso de la música- esta puede representarse por:

$$s(t) = \alpha \operatorname{sen} (2\pi \mu t)$$

con α y μ parámetros físicos que determinan la amplitud y frecuencia de la onda; En la década de los años setenta el músico John Chowing, sintetizó señales musicales experimentando con funciones de la forma

$$s(t) = \alpha(t) \operatorname{sen} (2\pi \mu_1 t + \beta(t) \operatorname{sen} (2\pi \mu_2 t))$$

El matemático y músico francés Jean Claude Risset, músico francés experto en síntesis de sonidos, es el autor de un efecto sonoro llamado el glissando interminable, construido como una función periódica que reproduce un acorde de ocho notas con frecuencia local estrictamente creciente.

$$s(t)= e^{(-\beta t)2} \operatorname{sen} (2\pi f e^{\alpha t} /\alpha)$$

con $\alpha=(\log(1.5)/8)$, $\beta=1/256$, $f=784$ Hz. para $-32\leq t \leq 32$ s(t) genera un sonido con una frecuencia que crece desde 155 Hz. casi inaudible por baja frecuencia hasta 3964 Hz. con la misma propiedad, pero por alta. A partir de s, se construye g por periodización:

$$g(t) = {}_{k=-\infty}\Sigma^{\infty}\, s(t + 8k)$$

Puesto que las traslaciones de s no son audibles durante más de 64 s, resulta un acorde con ocho notas, que produce la sensación de escuchar frecuencias indefinidamente crecientes.

Ejemplos como los anteriores aun se pueden encontrar a menudo, por ejemplo existe una aplicación en "c" llamada Drunk melody (Random walk). La cual crea una serie de notas con saltos aleatorios, restringidos a la escala de Do en modo menor. Aunque los autores están convencidos de que el resultado no es musicalmente interesante, lo hacen para ilustrar la técnica de caminata aleatoria en la generación de series estocásticas que peden asociarse a una melodía. Técnica que por otro lado y de acuerdo también con los autores es muy utilizada en música computacional.

Parte del código es aquí reproducido:

```
// create a phrase of 32 quavers following
// a random walk within C minor.
  for(short i=0;i<32;) {
// next note within plus or minus a 5th.
    offset = 0;
    while(offset == 0) {
    offset = (int)((Math.random()*14) - 7);
        }
// add the offset to the pitch to find the next pitch:
    pitch += offset;

// check that it is a note in the mode using the isScale method.
// several other scale constants are available in the JMC
    Note note = new Note(pitch, Q);
    if(note.isScale(MINOR_SCALE)) {
```

```
phr.addNote(note);
        i++;
    }
}
```

Del código se puede observar que el salto esta limitado a mas menos una quinta de distancia, esto cuando se obtienen el valor de una variable aleatoria -entre cero y uno, por tanto uniformemente distribuida- multiplicada por 14, menos 7. así que su valor máximo es 7 semitonos y por tanto acotada por un intervalo de quinta.

Otro ejemplo, es la aplicación llamada midimath que a groso modo consiste en: dada un grupo de funciones periódicas, se le asocia a un conjunto de puntos $\{x_1, x_2 \; . \; . \; . \; \}$ -que son escogidos de acuerdo a criterios prestablecidos de aleatoriedad- el valor de la función en el punto X_i y este a su vez es asociado con la altura de una nota; en el cuadriculado en que se presenta la función, cada cuadro equivale a un semitono, además presenta algunas opciones como la llamada de "espaciado máximo" que indica el numero máximo de cuadros entre dos puntos elegidos por el programa, otras opciones son la velocidad de ejecución y el intervalo de la grafica. Para el caso que nos ocupa $f(x) = x - \text{sen}\,(x)$ de tal que la frecuencia siempre esta acotada y de acuerdo a los valores de la sucesión x_i se puede conformar así, una infinita cantidad de melodías.

Además de los anteriores existen modelos muy elaborados que hacen uso de ideas y aplicaciones como fractales, sistemas dinámicos no lineales y demás.

La relación -música-matemáticas- podemos decir: es extensa y por fortuna aun perdurable.

Capítulo 2

Series de tiempo

2.1 Introducción

En algún momento alguien definió los pronósticos de una serie de tiempo, como la proyección de la serie en el tiempo mismo, si bien la precisión de tal proyección es de suma importancia en la mayoría de las aplicaciones, no siempre se tienen las condiciones, dado el entorno de la serie, para aplicar una metodología precisa aunque elaborada -como lo es Box-Jenkins- en la obtención de pronósticos.

Las organizaciones se enfrentan eventualmente al hecho de tomar decisiones, esto a pesar de la incertidumbre en las condiciones futuras del entorno de decisión, por esta necesidad –la de pronosticar- es que se han refinado técnicas de manipulación de datos, las que, junto con la capacidad actual de las computadoras, se han hecho indispensables para las organizaciones que operan en el mundo actual.

Es debido a que toda organización debe planear cómo enfrentar las condiciones futuras, es que se requiere hacer pronósticos –ya sea explícita o implícitamente- sobre el entorno en que dicha organización opera, ya sea finanzas, comercialización, producción. . .

En los últimos años se ha incrementado la confianza en los métodos para obtener pronósticos, en gran parte se debe esto al gran impulso teórico que han tenido el estudio de las series de tiempo, debido primordialmente a la rapidez de cálculos que ofrece la computadora hoy día.

Planteada la necesidad de hacer pronósticos, la primera interrogante que ha de contestar quien busque hacer un pronóstico, es si este es de corto o largo plazo, no es de extrañar entonces, que una primera clasificación de los pronósticos sea precisamente respecto al tiempo en el cual estos deben tener su efecto.

Pronósticos a coro plazo:

En este tipo de pronósticos el horizonte es de hasta un año, y es el de mayor precisión debido a que las variables que componen a los fenómenos naturales y económicos –que es donde regularmente se realizan los pronósticos- tendrán poco tiempo para transformarse de pequeñas a grandes diferencias, sin embargo para poder determinar con mayor precisión el corto plazo -para determinado fenómeno-, es necesario considerar que tan sensible es el sistema a pequeños cambios en las variables.

Pronósticos a mediano plazo:

El horizonte usualmente considerado en este tipo de pronósticos es de dos a cuatro años; En economía este tipo de pronósticos es de utilidad en la planeación y utilización de recursos.

Pronósticos a largo plazo:

El pronóstico a largo plazo comprende un horizonte mayor a cinco años; En este tipo de pronósticos lógica y contrariamente a los de corto plazo, la confiabilidad disminuye debido a los múltiples cambios en las variables del sistema.

Los pronósticos también pueden realizarse de acuerdo a técnicas cualitativas como cuantitativas, este ultimo enfoque es el menos socorrido debido a su subjetividad de los resultados que arroja, mas sin embargo si son de utilidad cuando los datos no se prestan para el uso de una técnica analítica, pero que si puedan beneficiarse de juicios subjetivos basados en la colectividad.

Enseguida serán enunciados algunos métodos cualitativos, sin embargo dada su subjetividad y el fin que el presente trabajo persigue, estos no volverán a ser enunciados en lo subsiguiente.

Algunos de los principales métodos cualitativos son:

Método Delphi. Este usa para pronósticos a largo plazo, con un uso bastante común en la investigación de mercados, como pronósticos de ventas de productos nuevos, o bien modificaciones en los ya existentes.

Investigación de mercados. Se usa en la valoración y prueba de hipótesis sobre mercados reales.

Consenso de panel. Tiene las mismas aplicaciones, además de parecidos atributos que el método Delphi.

Analogía histórica. Tiene su principal aplicación en la investigación de mercado para un producto nuevo, este método se basa en la analogía histórica con productos similares.

Métodos cuantitativos.

Los modelos cuantitativos son de mayor uso; Estos a su vez pueden clasificarse en:

Modelos econométricos. Estos modelos constan básicamente de un conjunto de ecuaciones de regresión interdependientes, que describen algún sector de la actividad económica.

Modelo de insumo producto. Este método de análisis trata de determinar el flujo de bienes y servicios interindustriales, o interdepartamentales con el fin de determinar el flujo de bienes y servicios que deben de ocurrir a fin de obtener ciertos productos.

Análisis de series de tiempo. Este tipo de análisis trata de encontrar el patrón o comportamiento de cierto numero de observaciones, para así proyectarlo al futuro.

El modelo cuantitativo de series temporales es el que ocupa el presente trabajo, por lo que este capítulo representa un breve repaso a las principales técnicas de análisis de series de tiempo.

2.2 Series de tiempo

Se le llama serie de tiempo a un conjunto de observaciones -mediciones-, de algún fenómeno o experimento, ordenadas cronológicamente, las series de tiempo son la técnica más importante usada actualmente para hacer inferencias del futuro sobre la base de los sucesos pasados.

Así pues, básicamente las series de tiempo son una herramienta para la predicción; Podemos decir que dada una serie $\{Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots Y_{tn}\}$ nuestro objetivo será el determinar en la medida de lo posible el mecanismo generador de la serie, así como el buscar patrones que permitan disminuir la incertidumbre.

Llamaremos a una serie de tiempo discreta y equiesepaciada al conjunto de observaciones de cierto fenómeno u experimento, registrados secuencialmente en el tiempo, y cuyo espacio parametrico es discreto.

Denotaremos lo anterior de la siguiente manera:

$$Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tn} = \{Y(t) : t \in T \subseteq Z\}$$

Donde $Y(t_i)$ es el valor de la variable Y en el tiempo t_i. Además por ser equiespaciada cumple con:

$$t_{i-1} - t_i = k;\ \text{donde k es una constante y para todo } i = 1,2, \ldots n$$

En adelante nos referiremos a las series de tiempo discretas y equiespaciadas, únicamente como series de tiempo, asumiremos también y sin perdida de generalidad que:

$$\{Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots Y_{tn}\} = \{Y(t_1), Y(t_2), \ldots Y(t_n)\} = \{Y(1), Y(2), \ldots Y(n)\}.$$

En adelante veremos como construir modelos que expliquen la estructura de una variable que observamos a lo largo del tiempo para así poder prever su evolución. Las variables de interés pueden ser del tipo macroeconómico -índice de precios al consumo, demanda de energéticos, exportaciones. . .-, microeconomía -ventas de una empresa, existencias en un almacén, gastos de producción. . .-, física -velocidad del viento en una central eólica, temperatura en un proceso, concentración de un agente contaminante en la atmósfera-, social -número de nacimientos, matrimonios, defunciones, desempleo, pobreza. . .-.

En el proceso de obtención de un pronóstico a partir de una serie de tiempo, encontramos los siguientes pasos.

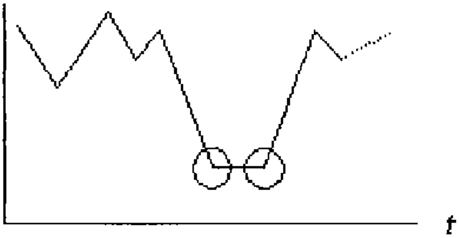
- Recopilación de datos
- Análisis de la serie de tiempo
- Construcción del modelo
- Extrapolación del modelo o pronóstico

2.2.1 Análisis de una serie de tiempo

Como paso subsiguiente a la recopilación de datos y como primero en el análisis de una serie temporal, graficamos la serie obtenida de las observaciones, para poder reconocer a priori los elementos característicos de una serie y si estos están presentes en la serie de estudio o no. a groso modo los componentes esenciales de una serie temporal son los siguientes:

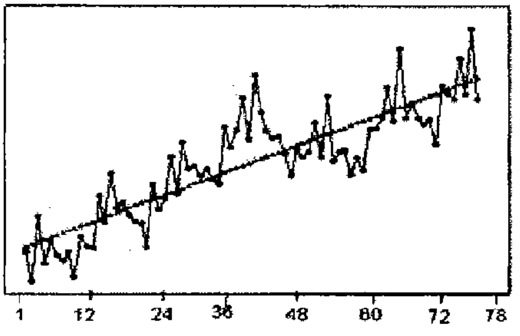
Atípico -Outlier-: Esto se refiere a los puntos de la serie que se escapan del patrón que a priori se puede observar en la serie. Un outlier es una observación que corresponde a un comportamiento anormal del fenómeno -sin que esto signifique un cambio en las incidencias u observaciones futuras o bien un error de medición-. Se debe determinar desde fuera y como primer paso, si un punto dado es outlier o no, si se considera que lo es, se debe omitir o reemplazar por otro valor antes de analizar la serie.

Un ejemplo de esto es la situación siguiente: Las observaciones de la producción diaria presentan lo siguiente.



Los dos puntos circulados parecen corresponder a un comportamiento anormal de la serie, sin embargo también es evidente que estos no tienen incidencia en el consecuente comportamiento. En el ejemplo anterior, el comportamiento anormal de las observaciones se debe a que las mismas corresponden a días de paro, lo que afecto la producción en los mismos. Las soluciones para estos casos pueden ser dos: simplemente eliminar la o las observaciones o remplazándolas por valores obtenidos a base de interpolar.

Tendencia: Esto se refiere al comportamiento predominante en la serie, intuitivamente puede ser vista como el cambio de la pendiente en la función de media de la serie.



En la gráfica anterior puede verse la recta de la función de media "cortando" a los datos.

Variación estacional: La variación estacional representa una secuencia periódica en la serie, y cuya duración de la unidad del periodo es menor a un año. Diremos entonces que una serie presenta variación estacional si existe un numero entero positivo s tal que Y(t) = Y(t+s).

Ciclo: El ciclo representa al igual que la variación estacional una repetición periódica, solo que a diferencia del primero el periodo es mayor a un año.

Fluctuaciones aleatorias o componente aleatorio: Son las pequeñas irregularidades de una serie de tiempo que no son tendencia, variación estacional o fluctuaciones cíclicas, sino que están formados por todos aquellos factores inherentes al proceso y que lo hacen impredecible.

2.2.2 Medición del error en el pronóstico

Para distinguir el valor real de la observación en una serie de tiempo y el valor del pronóstico, se empleará el símbolo ^ (acento circunflejo) sobre el valor, para indicar que se trata de un pronóstico.

Y_t = valor real de una serie de tiempo en t.

$\hat{Y}_t$ = valor del pronóstico en t.

Para calcular el error o residual de cada periodo del pronóstico, emplearemos:

$e_t = Y - \hat{Y}$ = residual o error de pronóstico en el tiempo t

Los métodos mas utilizados para evaluar la precisión de un pronóstico son: Desviación absoluta media, Error cuadrático medio y Porcentaje de error absoluto medio. Una breve descripción de ellos es:

Desviación Absoluta de la Media

DAM [MAD = Mean Absolute Deviation]. Esta mide la precisión de un pronóstico mediante el promedio de la magnitud de los errores del pronóstico.

$$\text{DAM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|Y_i - \hat{Y}_i\right|}{n}$$

Error Medio Cuadrático

EMC [MSD = Mean Squared Deviation]. Este otro método para evaluar la precisión de un pronóstico es una variación del primero en el que cada error o residual es elevado al cuadrado, esto con la intención de ponderar los residuales grandes y minimizar los pequeños para después y análogamente al primer método, obtener la media de los residuales.

$$\text{EMC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n}$$

Porcentaje de Error Absoluto Medio

Este ultimo método ofrece la una valoración en términos de porcentaje. El Porcentaje de Error Medio Absoluto, PEMA [MAPE = Mean Absolute Percentage Error]. Se calcula encontrando el error absoluto en cada periodo, dividiendo enseguida este mismo entre el valor real de la observación, para por ultimo encontrar la media estos errores porcentuales. El PEMA proporciona una indicativo claro de qué tan grandes son los errores de pronóstico comparados con los valores reales de la serie.

$$\text{PEMA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left|Y_i - \hat{Y}_i\right|}{Y_i}}{n} \times 100$$

2.3 Métodos de pronósticos. Suavizamiento

Existen diferentes maneras de desarrollar pronósticos con series de tiempo, que van desde los mas sencillos pasando por los que son combinaciones de diferentes métodos, hasta la completa metodología de Box-Jenkins; entre los primeros tenemos un conjunto de métodos llamados de suavizamiento, los que son de extenso uso debido primordialmente a su sencillez.

Uno de los problemas al que las organizaciones se enfrentan en relación a la preparación de pronósticos de corto plazo, es que para la gran mayoría de las situaciones no es práctico desarrollar y aplicar un método refinado de predicción para cada situación –por ejemplo cuando una tienda desea hacer predicciones de ventas para cada uno de sus artículos en existencia-. Lo que se necesita es una técnica que se pueda implementar fácilmente y que además proporcione pronósticos razonablemente buenos en el horizonte de corto plazo.

Para este tipo de casos se emplea una clase de métodos de pronósticos que se conocen bajo el nombre de *Métodos de Suavizamiento*. Con esta clase de los métodos, los datos históricos se usan para obtener unos valores "suavizados" de la serie. El valor suavizado se extrapola después para convertirse en el pronóstico del valor futuro de esta misma serie.

De los métodos de suavizaminto los más comunes o utilizados son: El método de promedios y El método de Suavizamiento Exponencial, este ultimo cuenta con algunas variantes.

2.3.1 Promedios móviles simples

Esta es la técnica de predicción más simple entre los métodos de suavizamiento, matemáticamente la técnica de promedios móviles se puede representar como sigue:

$$\hat{Y}_{t+1} = S_t = (Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-N+1}) / N$$

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-N+1}^{t} Y_i}{N}$$

En donde:

$\hat{Y}_{t+1}$ = pronóstico para Y_{t+1}

S_t = valor suavizado e igual al valor del pronóstico en t+1

Y_i = valor real en el tiempo t = i

N = número de valores incluidos en el promedio

De la ecuación anterior, es posible notar que en el método de promedios móviles no hay ponderación alguna a los valores considerados para el pronóstico; La ecuación siguiente es equivalente a la anterior.

$$\hat{Y}_t = (Y_{t-1} + Y_{t-2} + \ldots + Y_{t-N}) / N$$

De tal manera que una vez obtenido el pronóstico para el tiempo t, se puede obtener el pronóstico para el tiempo t+1; Entonces si sumamos Y_t/N y restamos Y_{t-N}/N a la ecuación anterior, Obtenemos nuevamente la ecuación primera.

$$\hat{Y}_{t+1} = S_t = (Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-N+1}) / N$$

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{\sum_{i=t-N+1}^{t} Y_i}{N}$$

Alternativamente

$$\hat{Y}_{t+1} = (Y_t/N) - (Y_{t-N}/N) + \hat{Y}_t$$

De donde se observa que el efecto de suavizamiento es proporcional a N.

2.3.2 Suavizamiento exponencial simple

Dado el ultimo cuestionamiento acerca de que el método de promedios móviles asigna una ponderación únicamente a las observaciones ultimas, y ninguna a las anteriores, si bien las observaciones ultimas contienen la información mas actualizada del comportamiento de la serie, esto no significa que las primeras observaciones deban de carecer de ponderación alguna.

El método de suavizamiento exponencial simple, funciona bajo la idea de una ponderación decreciente; Basándonos en el método de promedios móviles, hemos visto que el valor de $\hat{Y}_{t+1}$ puede encontrarse alternativamente por medio de la ecuación:

$$\hat{Y}_{t+1} = (Y_t/N) - (Y_{t-N}/N) + \hat{Y}_t$$

Ahora suponiendo que para obtener el valor de $\hat{Y}_{t+1}$ solo tenemos el valor de la observación anterior además del pronóstico para el mismo periodo, entonces ante la falta del valor Y_{t-N} podemos utilizar otro valor como aproximación, sea $\hat{Y}_t$ la aproximación al mismo, entonces tenemos:

$\hat{Y}_{t+1} = (Y_t/N) - (\hat{Y}_t/N) + \hat{Y}_t$

Factorizando, tenemos:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{1}{N} Y_t + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\hat{Y}_t$$

Ahora se observa en esta misma ecuación, que existe una ponderación de (1-1/N) para el pronóstico más reciente, si sustituimos 1/N por la letra griega, se tiene:

$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_t$

Donde α es un valor real entre 0 y 1

La anterior es la forma general para el calculo de pronósticos por medio del método de suvizamiento exponencial simple; Expandiendo la ecuación anterior tenemos que ya que $\hat{Y}_t = \alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}$ se tiene:

$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)[\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}] = \alpha Y_t + \alpha(1 - \alpha)Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2\hat{Y}_{t-1}$

Y puesto que

$\hat{Y}_{t-1} = \alpha Y_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-2}$

Tenemos que

$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1 - \alpha)Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 [\alpha Y_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-2}]$

$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1 - \alpha)Y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2Y_{t-2} + (1 - \alpha)^3\hat{Y}_{t-2}$

Si continuamos indefinidamente llagamos a:

$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1 - \alpha)Y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2Y_{t-2} + \ldots (1 - \alpha)^n\hat{Y}_{t-n}$

En esta ultima ecuación se puede observar que el método de suavizamiento exponencial asigna ponderaciones decrecientes a los valores u observaciones mas alejadas, puesto que el valor de α se encuentra entre 0 y 1, entonces las ponderaciones α, $\alpha(1 - \alpha)$, $\alpha(1 - \alpha)^2$, . . . $(1 - \alpha)^n$ tienen valores decrecientes; De aquí el nombre de Suavizamiento exponencial.

Alternativamente la ecuación $\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_t$ puede escribirse como:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \hat{Y}_t - \alpha\hat{Y}_t = \hat{Y}_t + \alpha(Y_t - \hat{Y}_t)$$

Y puesto que $Y_t - \hat{Y}_t = e_t$ tenemos:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha e_t$$

De tal modo que el nuevo pronóstico mediante el método de suavizamiento exponencial, es igual al pronóstico anterior más α veces el error del mismo pronóstico. Entonces si α toma un valor próximo a 1, el nuevo pronóstico incluirá un ajuste sustancial para el error ocurrido en el pronóstico anterior, contrariamente, si α está cerca de 0, el nuevo pronóstico no mostrará en la misma medida el ajuste. Es por tanto análogo el efecto de una α cercana a uno o a cero al de incluir –respectivamente-un numero pequeño o grande de observaciones en el calculo de pronósticos por el método de promedios móviles.

2.3.3 Suavizamiento exponencial ajustado a la tendencia

Método de Holt

Como se vio con anterioridad, uno de los elementos que componen a una serie de tiempo es el de la tendencia, pero hasta aquí el método de suavizamiento exponencial simple es teóricamente adecuado cuando la serie de datos contiene un patrón horizontal o sin tendencia. Si el suavizamiento exponencial simple es usado con una serie de datos que contenga una tendencia, los pronósticos irán a la zaga (se retrasarán) de la tendencia. El método de suavizamiento exponencial con tendencia (Método de Holt) evita tal problema al reconocer explícitamente la presencia de tendencia en la serie a analizar.

El método de Holt pone de manifiesto la presencia de tendencia en la serie por medio de la ecuación:

$$T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

En donde

A_t = valor suavizado

T_t = tendencia suavizada

β = coeficiente de suavizamiento de la tendencia –análogo al coeficiente α-

En la ecuación $(A_t - A_{t-1})$ representa la tendencia en los datos. El principio básico de la ecuación es el mismo que el del suavizamiento exponencial simple, la tendencia reciente $(A_t - A_{t-1})$, está ponderada por β mientras que la ultima tendencia –ya suavizada- lo esta por $(1 -\beta)$. La suma de estos valores ponderados es el nuevo valor de la tendencia suavizada.

Ya con el valor de la tendencia en mano, este es utilizado para obtener el valor suavizado de la serie.

$$A_t = \alpha Y_t + (1 -\alpha)(A_{t-1} + T_{t-1})$$

La única diferencia entre ésta y la ecuación $\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_t$ es el término adicional T_{t-1} que se suma a A_{t-1} para ajustar los valores suavizados al patrón tendencial en la serie de datos.

Finalmente para la obtención de pronósticos, se emplean los valores obtenidos de las ecuaciones

$A_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(A_{t-1} + T_{t-1})$

$T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$

Para utilizarlos en:

$\hat{Y}_{t+p} = A_t + pT_t$

En donde p es el tiempo para el cual se realiza el pronóstico.

Si bien en este método ya se reconoce explícitamente la presencia de tendencia en una serie, aun hay otro elemento que el método anterior aun no es capaz de solventar, tal componente es la variación estacional.

2.3.4 Suavizamiento exponencial ajustado a la tendencia y a la variación estacional

Método de Winters

Una nueva forma de suavizamiento en el cual además de reconocerse la presencia de tendencia en una serie, se hace el reconocimiento de la presencia de variación estacional, es la conocida bajo el nombre de su creador: Método de Winters. Tal método fue desarrollado a principios de los años sesenta; Dicho método se basa en tres ecuaciones, cada una de las cuales suaviza respectivamente a uno de los siguientes factores o componentes de una serie de tiempo: aleatoriedad, tendencia y estacionalidad. En este sentido el método de Winters es semejante al suavizamiento exponencial con tendencia; Hasta el puno de la tendencia, el componente adicional que incluye este método –la variación estacional-, esta dado por un índice estacional calculado por la ecuación adicional, en la que el índice estacional (Y_t/A_t) se multiplica por γ, se suma después a la estimación estacional anterior (S_{t-L}) multiplicada por ($1 - \gamma$). La razón Y_t se divide entre A_t para expresar el valor en forma de índice en vez de hacerlo en términos absolutos.

Las ecuaciones que emplea el método de Winters son:

Valores suavizados

$A_t = \alpha(Y_t/S_{t-L}) + (1 - \alpha)(A_{t-1} + T_{t-1})$

La estimación de la tendencia

$T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$

La estimación de la estacionalidad

$S_t = \gamma(Y_t/A_t) + (1 - \gamma)S_{t-L}$

El pronóstico p observaciones en el futuro

$\hat{Y}_{t+p} = (A_t + pT_t)S_{t-L+p}$

En donde:

A_t = valor suavizado

α = constante de suavizamiento en los datos

T_t = estimación de la tendencia

β = constante de suavizamiento en la tendencia

S_t = estimación de la estacionalidad

γ = constante de suavizamiento en la estacinalidad

p = tiempo del pronóstico –pronóstico en el tiempo p, posterior a t-

L = duración de la estacionalidad

Y = valor real de la serie en el tiempo t

$\hat{Y}_{t+p}$ = pronóstico p periodos en el futuro

La ecuación $T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$ suaviza la tendencia ponderando la tendencia "incremental" $(A_t - A_{t-1})$ con la constante β y sumando el producto de $(1 - \beta)$ con el valor tendencial previo: T_{t-1}. Esto se hace exactamente de la misma forma que en el suavizamiento con tendencia. En la ecuación del valor suavizado de A_t el valor de Y_t se divide entre el factor estacional S_{t-L} esto se hace para eliminar las fluctuaciones estacionales que pudieran existir en el dato original Y_t.

El índice obtenido de la ecuación de S_t es de alguna manera comparable al índice obtenido de la ecuación de la tendencia, tal índice se calcula como la razón del valor actual de la serie Y_t dividido entre el valor suavizado actual de la serie A_t. Para valorar correctamente el valor de este índice, notemos que A_t es el valor de la serie ya suavizada.

El pronóstico es obtenido igualmente y de manera análoga, mediante la ecuación: $\hat{Y}_{t+p} = A_t + pT_t$. La diferencia estriba en que esta estimación para el tiempo t+p; $(A_t + pT_t)$ se multiplica por S_{t-L+p}. Este índice estacional se utiliza para ajustar el pronóstico a la misma.

De tal manera que finalmente el pronóstico, utilizando el método de Winters, se hace utilizando la ecuación.

$$\hat{Y}_{t+p} = (A_t + pT_t)S_{t-L+p}$$

Uno de los problemas que acompañan el empleo del método de Winters consiste en determinar los valores de, β y, que minimizarán la medida del error. Dado que no existe manera de estimar inicialmente sus valores, por lo que tal estimación debe de realizarse por medio del ensayo y error.

2.4 Métodos de pronóstico. Descomposición

Los métodos anteriores se basan en la idea de la existencia de un patrón implícito en una serie de datos y que a su vez este patrón puede aislarse de lo aleatorio mediante un promedio o suavizamiento, una vez aislado, este patrón puede utilizarse para pronosticar mediante su proyección al futuro. No obstante la utilidad de los métodos, estos no permiten identificar aisladamente a los componentes de una serie de tiempo. Los métodos que permiten esto ultimo se conocen bajo el nombre de métodos de descomposición.

Los métodos de descomposición pueden identificar y aislar tres componentes del patrón que subyace en una serie de tiempo: tendencia, estacionalidad y ciclicidad.

Los métodos de descomposición suponen que los datos están conformados por:

Datos = Patrón + Error

Y que a su vez el patrón esta compuesto por:

Patrón = Tendencia + Estacionalidad + Ciclo

El elemento de estocasticidad si bien no puede ser predicho, si puede identificarse como la diferencia entre los datos reales y la suma o producto de los tres componentes del patrón. Existen diversos enfoques para descomponer una serie de tiempo, no obstante que todos tienen la finalidad de aislar a cada componente de la serie temporal tan fielmente como sea posible. El concepto básico de la separación de componentes es empírico y remueve en primer lugar a la estacionalidad, seguida de la tendencia y en ultimo lugar el ciclo.

La descomposición representa matemáticamente a una serie como:

$Y_t = f(T_t, S_t, C_t, R_t)$

Es decir, los dato de la serie de tiempo están en función de:

T_t = componente tendencial

S_t = componente estacional

C_t = componente de ciclicidad

R_t = componente de aleatoriedad

Específicamente la forma de representativa de la serie de datos el en modo producto, de la siguiente manera:

$Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times R_t$

Ya que t es al mismo, podemos simplificar como:

$Y = T \times C \times S \times R$

2.4.1 Separación de la estacionalidad y el error

El propósito es aislar T, S y C; -R es la diferencia-. Retomando el método de promedios móviles: MA (moving averages, por sus siglas en ingles) sabemos que si tomamos para el promedio, tantos valores como existen en un periodo estacional, por ende, el valor obtenido no contiene estacionalidad si acaso algo de aleatoriedad, ya que al promediarse se cancelan en gran medida los valores en defecto y en exceso, por lo que teóricamente solo contiene tendencia y ciclicidad. Así de define:

$MA = T \times C$

Con esta ecuación resulta fácil aislar los demás componentes de la serie, haciendo:

$Y / MA = (T \times C \times S \times R) / (T \times C) = S \times R$

De este cociente se obtienen valores que solo contiene estacionalidad y error, sin embargo para efectos de eliminar a la estocasticidad se considera que ya que los valores aleatorios fluctúan alrededor de cero y tienen media cero, al sumar varios de estos su adición nos dará cero o al menos un valor muy cercano a este. De tal que:

$$\overline{SXR} = S$$

2.4.2 Separación del ciclo y la tendencia

Para separar la tendencia del ciclo, y en virtud de la simplicidad se considera que la tendencia es lineal, de tal que los parámetros que describen a una recta –a y b- se pueden estimar utilizando por ejemplo la regresión lineal simple.

$T = a + bt$

Para aislara el ciclo de la tendencia utilizamos la ecuación:

$MA / T = T \times C / T = C$

En síntesis, los métodos de descomposición proporcionan un medio para aislar los componentes de una serie de tiempo, si bien este tipo de métodos puede considerarse sumamente intuitivos.

$MA = T \times C$ supone la tendencia y el ciclo

Y / MA *aísla* la estacionalidad y la estocasticidad del patrón total

$T_t = a + bt$ supone la tendencia

$MA / T = C$ aísla el ciclo de la tendencia

2.5 Metodología de Box-Jenkins

Dada la dificultad de elegir un modelo adecuado que describa a una serie de datos, Box y Jenkins proponen en el año de 1976 una metodología para identificar un modelo adecuado a un conjunto de datos reales, Que a grosso modo es una metodología cuyo fin es el de identificar un modelo adecuado al conjunto de datos observados.

Los pasos de la metodología son los siguientes:

Paso 1.- Análisis descriptivo. Si la serie de estudio contara entre sus componentes con varianza no constante o no fuera estacionaria -una ves graficados los datos originales-, se forza a que la serie tenga los rasgos deseados por medio de diferencias o transformaciones del tipo logarítmico.

Paso 2.- ACF y PACF de la serie. Se grafican la Autocorreacion simple y parcial de la serie -ya que esto nos permite identificar mas fácilmente la autocorrelación en los datos y que se traduce en periodicidad de la serie-.

Paso 3.- Identificación del modelo. Ya conociendo y dependiendo de la estructura que presenten las gráficas anteriores, se presupone un modelo o modelos que puedan adecuarse a los datos.

Paso 3.- Estimación de los parámetros. Se estimarán los parámetros que definen el modelo postulado.

Paso 4.- Diagnosis de los residuos. Para ello se dispone de diversas herramientas gráficas (como la ACF y la PACF de los residuos, histograma de los residuos para ver normalidad, gráfico temporal de los residuos para ver que la varianza es constante) y de herramientas analíticas (como el contraste de Box-Pierce). Si el modelo es adecuado se realizan predicciones con él, si el modelo no lo es se vuelve al paso 1 teniendo en cuenta los gráficos de la ACF y PACF de los residuos obtenidos.

Paso 5.- Predicción. Se realizan predicciones para los modelos que se hayan estimado y se comparan mediante diversas medidas de error como el DAM, EMC, PEMA, . . .

Para que la aplicación de la metodología de Box-Jenkins arroje óptimos resultados, diversos autores sugieren contar con al menos 80 dato además de:

- Seguir el principio de mejoramiento iterativo
- Seguir con el principio de parsimonia

La función de autocorrelación –ACF- es uno de los elementos primordiales en la identificación de un modelo adecuado y nos es sino la grafica de la matriz de autocorrelacion, y puesto que es simétrica solo se grafica una parte. La otra grafica medular en la identificación de un modelo es el Periodograma integral -en esta los valores del periodograma se dividen entre el total de modo que su suma es igual a uno, si se supone las frecuencias tienen idéntica influencia, al comparar la suma parcial de los cocientes contra la suma parcial de las supuestas influencias idénticas, tenemos pues una herramienta grafica para corroborar la presencia de periodicidad-

.

Capítulo 3

Modelado de una partitura como serie de tiempo

3.1 Acotaciones

Para relacionar una serie de tiempo como modelo de una partitura, definiremos en primera instancia a un tema musical como una sucesión de sonidos ordenados cronológicamente; La caracterización de un sonido básicamente por su frecuencia y duración, es claramente una transición natural en el caso de la frecuencia -la observación t-esima toma el valor en frecuencia de la nota t-esima-.

Pero la caracterización no es completa, ya que la duración de una nota no es modelable por un serie temporal, ya que contraviene el principio de equi-espaciada.

Ironías del destino, el que sea el tiempo lo que no pueda ser representado por una serie temporal, a menos, claro, que el intervalo de duración entre los sucesos sea idéntico, lo que en general en la música no es así, salvo en contados casos como el "molto perpetuo" de Paganini.

Sin embargo existen piezas en las que la duración de las notas sigue un cierto patrón por secciones, por ejemplo el canon de Pachbell, de tal que si se fragmenta una pieza en subseries, entonces la serie total será la concatenación de las subseries.

Para los casos en que la sucesión de las notas no se da bajo un patrón fijo de duración, y de la misma manera, la mejor forma de obtener una variación, es que esta sea únicamente de la frecuencia de las notas y por tanto obviando la duración de las mismas, a la manera en que los austriacos Mozart y Haydn escribían sus variaciones, alterando la melodía y manteniendo la duración de las notas mediante patrones-compases.

En cuanto a la tonalidad, nada nos dice que si tomamos una sucesión de notas que tengan una organización tonal, una variación de estas tendría la misma disposición, así una de las cuestiones principales en la obtención de variaciones de una pieza tonal, es la de encontraren un mecanismo que genere "series armónicas", que si bien es de esperar que la función de media de una serie temporal sea la tónica, no podemos decir frívolamente que la armonía se dará en forma natural.

Bien un pronostico tiende a la media conforme este es demasiado a futuro, esto nos sugiere que proyectar demasiado nos daría una especie de coda en la forma de una oscilación de la nota tonal con la antecesora o bien con la predecesora.

Dado lo anterior el pronóstico de la serie de tiempo parece poco apropiado para considerar como un variación musical, ya que necesitaríamos muchas notas – casi, o tantas como utilizáramos- y por ende demasiados pronósticos, mas razonable en cambio parece utilizar el modelo matemático de la serie de tiempo como la variación misma, lo que no soslaya los criterios de ajuste de un modelo a los datos.

3.2 Modelado de una partitura como una serie temporal

Primeras aproximaciones

Sobre que valor asignar a una nota a modo de construir una serie de valores que puedan ser manejados como una serie temporal, naturalmente esto debe estar relacionado con la frecuencia de la misma, tal que una primera aproximación seria la de asignar a cada nota su valor en Hz.

Tomemos como referencia la siguiente tabla

Escala de "La" en modo mayor

Nota	Escala	Hz.	Nota	Escala	Hz.
La	Quinta	440Hz.	Mi	Quinta	659.25Hz.
Si	Quinta	493.88Hz.	Fa#	Quinta	739.98Hz.
Do#	Quinta	523.25Hz.	Sol#	Quinta	830.60Hz.
Re	Quinta	587.32Hz.	La	Sexta	880Hz.

Dado que lo anterior es poco manejable, una segunda aproximación seria la de hacer una biyección entre los naturales y las teclas de por ejemplo el piano o los trastes de una guitarra, de tal que en el segundo caso - con los trastes de la guitarra- tendríamos lo siguiente:

#	Nota	#	Nota	#	Nota
1	Mi	6	La	11	Re
2	Fa	7	La#	12	Re#
3	Fa#	8	Si	13	Mi
4	Sol	9	Do	14	Fa
5	Sol#	10	Do#	15	Fa#

Y así sucesivamente, pero con lo anterior tenemos el inconveniente de perder generalidad, además de disociar esta correspondencia con la frecuencia de una nota dada. Esto es, deseamos que una sucesión cualquiera de notas "tonales" tenga una misma media, independientemente de cual sea la tonalidad escogida, para solventar lo anterior retomamos la idea dada en la construcción de la "escala de Pitágoras"

#	Frecuencia	#	Frecuencia	#	Frecuencia
1	fo	6	$fo*2^{5/12}$	11	$fo*2^{10/12}$
2	$fo*2^{1/12}$	7	$fo*2^{6/12}$	12	$fo*2^{11/12}$
3	$fo*2^{2/12}$	8	$fo*2^{7/12}$	13	$fo*2^{12/12}$
4	$fo*2^{3/12}$	9	$fo*2^{8/12}$	14	$fo*2^{13/12}$
5	$fo*2^{4/12}$	10	$fo*2^{9/12}$	15	$fo*2^{14/12}$

Como se ve esto es mucho mas general y fácil de manejar, adoptaremos también la convención de iniciar con el cero, con el objeto de hacer corresponder el numero asignado con el numerador de la potencia, además de con la idea, que a la tónica siempre le corresponda el cero; Convenios además que la biyección se hará con los enteros para hacer la correspondencia completa, así, a una nota situada una octava por debajo de la tónica, le corresponderá el numero −12 es decir una frecuencia fo*$2^{-12/12}$ = fo/2 que es en realidad la frecuencia proporcional a la tónica.

En un caso concreto, por ejemplo fo = Do tendríamos lo siguiente:

Nota	Frecuencia	#	Nota	Frecuencia	#	Nota	Frecuencia	#
...	...	...	Do	fo	0	Sol	fo*$2^{7/12}$	7
Fa#	fo*$2^{-6/12}$	-6	Do#	fo*$2^{1/12}$	1	Sol#	fo*$2^{8/12}$	8
Sol	fo*$2^{-5/12}$	-5	Re	fo*$2^{2/12}$	2	La	fo*$2^{9/12}$	9
Sol#	fo*$2^{-4/12}$	-4	Re#	fo*$2^{3/12}$	3	La#	fo*$2^{10/12}$	10
La	fo*$2^{-3/12}$	-3	Mi	fo*$2^{4/12}$	4	Si	fo*$2^{11/12}$	11
La#	fo*$2^{-2/12}$	-2	Fa	fo*$2^{5/12}$	5	Do	fo*2	12
Si	fo*$2^{-1/12}$	-1	Fa#	fo*$2^{6/12}$	6	...	...	...

Tomaremos la anterior como la propuesta final, puesto que nos permite una relación tonal mucho mas natural, así como un cambio de tonalidad que puede verse como una "traslación rígida" de las relaciones de frecuencia.

Para ilustrar tal biyección, tomemos como ejemplo la primera sección del primer movimiento del tercer concierto de Brandemburgo de J. Bach. el cual es una pieza tonal, en Sol mayor propiamente.

Extrayendo las notas en orden "cronológico", y de acuerdo a la biyeción propuesta tenemos la siguiente sucesión:

{0, –1, 0, -5, -7, -5, 0, -1, 0, -8, -10, -8, 0, -1, 0, -12, –10, –8, –6, –5, –6, –5, –3, –5, –1, –5, 0,–5, –6, –5, –3, –5, 2, –5, 4, –5, –6, –5, –3, –5, 5, –5, 7, 4, 2, 0, 2, 0, –1, 0, –1, –3, –5, 0, –5, 0, –3, –5, –7, –8, 0, –8, 0, –7, –8, –10, –12, 0, –10, 0, –8, 0, –6, 0, –5, –1, –5, 0, –5, 2, –5, 4, –5, 5, –5, 7, 4, 2, 0, –5, –1, 0, –1, –3, –5, –7, –8, –10, –8, –10, –12, -5,- 5, -12.}

Que bien puede ser tratada ya como una serie de tiempo.

3.3 Criterios de "ajuste armónico"

Convendremos también y para efectos de operatividad, el redondear los valores que nos arroje el modelos matemático de la serie temporal. Ya con nuestra serie "entera" aplicaremos los criterios ya señalados de ajuste, que para propósitos del presente trabajo no son suficientes, por la siguiente razón:

Supongamos que tenemos la siguiente serie

{0, -1, 0, -5, -7, -5, 0, -1, 0, -8, -10, -8, 0, -1, 0, -12, -10, -8, -6, -5, -6, -5, -3, -5, -1, -5, 0, -5, -6, -5, -3, -5, 2, -5, 4, -5, -6, -5, -3, -5, 5, -5, 7, 4, 2, 0, 2, 0, -1, 0, -1, -3, -5, 0, -5, 0, -3, -5, -7, -8, 0, -8, 0, -7, -8, -10, -12, 0,-10, 0, -8, 0, -6, 0, -5, -1, -5, 0, -5, 2, -5, 4, -5, 5, -5, 7, 4, 2, 0, -5, -1, 0, -1, -3, -5, -7, -8, -10, -8, -10, -12, -5, -5, -12.}

Y que al aplicar modelos de series de tiempo, obtenemos las siguientes series:

A={0, -1, 0, -7, -7, -1, 0,-1, 0, -8, -10, -12, 0, -1, 0, -10, -10, -8, -5, -5, -7, -5, -3, -5, -1, -5, 0, -5, -7, -5, -1, -5, 2, -1, 4, -10, -8, -5, -1, -5, 5, -5, -7, 4, 4, 0, 4, 0, -1, 0, -1, -5, -5, 0, -7, 0, -7, -8, -7, -8, 0, -8, 0, -7, -8, -12, -12, 0, -10, 0, -5, 0, -8, 0, -5, -1, -7, 0, -8, 2, -8, 4, -5, -5, -5, -7, 4, 4, 0, 4, -1, 0, -7, -5, -5, -7, -8, -12, -8, -10, -10, -5, 5, -12.}

B={0, -1, 0, -4, -7, -4, 0, -2, 0, -9, -11, -8, 0, -1, 0, -11, -10, -8, -6, -5, -6, -5, -3, -5, -1, -5, 0, -5, -6, -5, -2, -5, 3, -5, 3, -5, -6, -5, -3, -5, 6, -5, 8, 4, 2, 0, 3, 0, -1, 0, -1, -3, -5, 0, -5, 0, -3, -5, -7, -8, 0, -8, 0, -7, -8, -11, -11, 0, -10, 0, -8, 0, -6, 0, -5, -1, -5, 0, -5, 2, -5, 4, -5, 5, -5, 7, 4, 2, 0, -5, -1, 0, -1, -3, -5, -7, -8, -10, -8, -9, -12, -5, -4, -11.}

Evaluando el ajuste de las series

Modelo	DAM	EMC	PEMA
A	1.2596154	8.6634615	----
B	0.1634615	0.1634615	----

Vemos claramente que con los criterios de ajuste EMC y DAM –el criterio PAMA no es aplicable ya que nos pide dividir por cero- el modelo B se apega mejor a la serie original, realizando ahora la "transformación inversa" de seria a partitura tenemos:

Variacion B

[Composer]

Aquí podemos ver una serie totalmente tonal –serie A- en comparación con otra que arroja una gran cantidad de *alteraciones accidentales.*

Esto desde luego es idílico, pero dado que deseamos obtener una serie que al transformase nuevamente en partitura sea una pieza tonal, si este fuera el caso debemos desechar a la que tiene un mayor numero de *alteraciones accidentales* aun cuando sea esta la que mejor ajuste a los datos originales de acuerdo a los criterios DAM, PEMA y EMC.

Para establecer un criterio de "ajuste armónico" que podamos ver en el modelo pretendido como variación, recordemos que en una escala en modo mayor, el intervalo entre notas sucesivas partiendo desde la tónica tiene la siguiente relación: tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono. que con nuestra biyección serian saltos de uno y dos enteros respectivamente para semitono y tono, como ejemplo, en una pieza totalmente tonal –sin alteraciones accidentales- y en un registro de dos octavas deberán aparecer únicamente los números:

Escala	Nota	Intervalo	#	Escala	Nota	Intervalo	#
n-1	Tónica		-12	n	Superton.	tono	2
n-1	Superton.	tono	-10	n	Mediante	tono	4
n-1	Mediante	tono	-8	n	Subdom.	semitono	5
n-1	Subdom.	semitono	-7	n	Dominante	tono	7
n-1	Dominante	tono	-5	n	Superdom.	tono	9
n-1	Superdom.	tono	-3	n	Sensible	tono	11
n-1	Sensible	tono	-1	n+1	Tónica	semitono	12
n	Tónica	semitono	0	n+1	Supoerton.	tono	14

Es decir una sucesión en el conjunto de elementos A = {. . . -12, -10, -8, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14 . . . }

Aplicando este criterio a las anteriores series, se ve en cambio la cantidad de notas "fuera de la tonalidad" que tiene una y otra serie –cero contra veintidós- , y que nos hacen inclinarnos por la seria A como una mejor variación.

3.4 Sucesiones de series temporales

Para la aplicación del los métodos de suavizamiento necesitamos constantes de suavizado con valor entre cero y uno, la forma de obtener tales constantes no esta definida pero si debemos de escoger aquellas que nos minimicen los valores de EMC, DAM y PEMA. mas dado que estos no serán nuestros principales criterios de ajuste la elección de tales números es mucho mas libre.

Supóngase que deseamos obtener mas de una variación de un fragmento melódico aplicando un mismo método para tal efecto, una forma fácil de obtener esto es cambiando el o los valores de las constantes de suavizado, de tal que la variación de un tema sea la concatenación de las series obtenidas con diferentes valores de las constantes.

$$V_T = \prod_{i=1}^{n} {}^{*} V_i$$

Con $I = 1, 2 \ldots n$

Donde V_T es la variación total y $\prod_{i=1}^{n}{}^{*}$ se define análogamente a la concatenación de palabras en las gramáticas de los lenguajes formales, denotada por $(\cdot)$ y que omitimos.

Por ejemplo sí

$$V1 = \hat{Y}(1)_{t1}\hat{Y}(1)_{t2} \ldots \hat{Y}(1)_{tn}$$

$$V2 = \hat{Y}(2)_{t1}\hat{Y}(2)_{t2} \ldots \hat{Y}(2)_{tn}$$

$$\prod_{i=1}^{2} {}^{*}V_i - \hat{Y}(1)_{t1}\hat{Y}(1)_{t2} \ldots \hat{Y}(1)_{tn}\ \hat{Y}(2)_{t1}\hat{Y}(2)_{t2} \ldots \hat{Y}(2)_{tn}$$

En donde $\hat{Y}(i)_{tn}$ es el valor n-esimo del modelo de serie temporal correspondiente a la observación n-esima y que a su vez corresponde al valor de la constante de sauavizamiento i-esima.

3.4.1 Valores para las constantes de suavizamiento.

Para obtener valores entre cero y uno que nos sirvan como, α´s, β´s y γ´s consideraremos dos métodos: El primero mediante un generador de números aleatorios –"pseudoaleatorios"- que fácilmente podemos construir por ejemplo mediante el siguiente sencillo programa en "C".

```
**********
//Generador de números "aleatorios" por el método congruencial
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
main()
{
   int i,n,modulo=32768,constante,semilla;
   long int c;
            float u;
printf("constante? -entero-\n");
```

```
scanf("%d",&constante);
printf("Semilla? -entero que no sea multiplo de la constante-\n");
scanf("%d",&semilla);
printf("Iteraciones?\n");
scanf("%d",&n);
  for(i=1;i<=n;i++)
   {
    c=semilla*constante;
    float r=c%modulo;
    u=float(r/modulo);
    printf("%f\t",u);
    semilla=r;
     }
   getch();
   }
```

****

Corriendo el programa con los valores de una semilla y una constante iguales a 11 y 19 respectivamente, y con veinte iteraciones, obtenemos los siguientes "números aleatorios".

****

```
constante? -entero-
11
Semilla? -entero que no sea múltiplo de la constante-
19
Iteraciones?
```

20

0.006378	0.070160	0.771759	0.489349	0.382843
0.211273	0.324005	0.564056	0.204620	0.250824
0.759064	0.349701	0.846710	0.313812	0.451935
0.971283	0.684113	0.525238	0.777618	0.553802

****

Para corroborar que cumplen con los criterios de aleatoriedad –es decir que se distribuyen uniformemente en el intervalo (0, 1) le aplicamos la prueba estadística de Kolmogorov-Smirnov.

Prueba de uniformidad de Kolmogorov-Smirnov

En esta prueba se compara la frecuencia esperada contra la esperada en cada intervalo, -por lo que debemos de construir estos antes de aplicar la prueba- luego se construye el estadístico:

$$X' = {}_{i=1}\Sigma^{n} (Fo_i - Fe_i)^2/Fe_i$$

El cual se compara con el valor en tablas de la distribución ji-cuadrada, con n-1 grado de libertad y un nivel de confianza 1-α

Ho: La muestra tiene una distribución uniforme U(u|0,1)

Entonces se acepta la Ho si

$$X^2_{1-\alpha,n-1gl} > X'$$

Para aplicar esta prueba a los números anteriormente generados dividimos a la muestra observada en 5 subintervalos.

Clase	Frec. Obs.	Frec. Esp.	(Foi-Foi)^2	(Foi-Foi)^2/Fei
(0, 0.2)	2	4	4	1
(0.2, 0.4]	7	4	9	2.25
(0.4, 0.6]	5	4	1	0.25
(0.6, 0.8]	4	4	0	0.0
(0.8, 1.0]	2	4	4	1
			$_{i=1}\Sigma^5$(Foi-Foi)^2/Fei	4.5

El valor en tablas del estadístico es:

$X^2_{\ 0.95;5gl} = 9.488$

Como $X' = 4.5$

Se acepta Ho: La muestra tiene una distribución uniforme U(u|0,1)

Mas bien con este método de obtención de números entre cero y uno, podemos estar oscilando entre valores próximos y no, a uno como queríamos, por lo que un segundo método para obtener valores entre cero y uno es por medio de la serie "armónica alternante" –cuyas propiedades se ven en el apéndice- La ventaja de este segundo método es que nos vamos acercando gradualmente a cierto valor, además de hacerlo por arriba y por abajo alternadamente; Veamos con la ayuda del software "mathemática" unos cuantos términos de la serie:

Table[NSum[$(-1)^{1+n}$/n ,{n, 1, i}], {i, 1, 20}]

{1., 0.5, 0.833333, 0.583333, 0.783333, 0.616667, 0.759524, 0.634524, 0.745635, 0.645635, 0.736544, 0.653211, 0.730134, 0.658705, 0.725372, 0.662872, 0.721695, 0.66614, 0.718771, 0.668771}

La serie armónica alternante general permite gran flexibilidad, como saltos desde los extremos alrededor de su limite, dependiendo de los valores para las constantes a y b que escojamos, por ejemplo para los valores de a = 0.9 y 0.1 b = 0.1 y 0.9 respectivamente, y nuevamente con la ayuda del software "mathematica" desarrollamos la suma veinte términos:

Table[NSum[$(-1)^{1+n}$/(0.1n+0.9) ,{n, 1, i}], {i, 1, 20}]

{1., 0.0909091, 0.924242, 0.155012, 0.869297, 0.202631, 0.827631, 0.239395, 0.794951, 0.268635, 0.768635, 0.292445, 0.74699, 0.312208, 0.728874, 0.328874, 0.71349, 0.343119, 0.700262, 0.355434}

Table[NSum[$(-1)^{1+n}$/(0.9n+0.1) ,{n, 1, i}], {i, 1, 20}]

{1., 0.473684, 0.830827, 0.560557, 0.777948, 0.59613, 0.75238, 0.615394, 0.737345, 0.627455, 0.727455, 0.635712, 0.720457, 0.641717, 0.715247, 0.646281, 0.711216, 0.649866, 0.708006, 0.652757}

Que para el segundo caso es suficiente dado que sabemos que la serie es convergente.

Capítulo 4

Series de tiempo como variaciones

4.1 Variaciones

La proyección de un tema musical debe ser lo suficientemente fiel para considerarse una variación, pero por antonomasia no debe ser el mismo, así el modelo que arroje el mejor pronostico no será necesariamente el que de una buena variación, bien esta será el resultado de la búsqueda del modelo mas "armónico", además de inspirador.

En la forma musical variación, en cada estrofa la música varia por lo que esta no necesita basarse en una melodía completa, el elemento central de una variación puede ser desde una sección hasta un simple motivo o bien un conjunto de acordes.

En nuestra búsqueda de resultados primero consideraremos los modelos mas simples y partiendo de la serie obtenida de la primera sección del primer movimiento del tercer concierto de Brandemburgo de J. Bach.

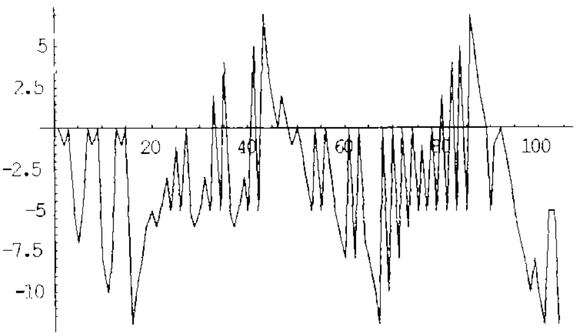
{0, -1, 0, -5, -7, -5, 0, -1, 0, -8, -10, -8, 0, -1, 0, -12, -10, -8, -6, -5, -6, -5, -3, -5, -1, -5, 0, -5, -6, -5, -3, -5, 2, -5, 4, -5, -6, -5, -3, -5, 5, -5, 7, 4, 2, 0, 2, 0, -1, 0, -1, -3, -5, 0, -5, 0, -3, -5, -7, -8, 0, -8, 0, -7, -8, -10, -12, 0,-10, 0, -8, 0, -6, 0, -5, -1, -5, 0, -5, 2, -5, 4, -5, 5, -5, 7, 4, 2, 0, -5, -1, 0, -1, -3, -5, -7, -8, -10, -8, -10, -12, -5, -5, -12.}

Vamos a someter en primera instancia a la serie anterior a un suavizamiento, -promedios móviles simples de orden n- auxiliándonos para tal propósito del software "mathemática" algunos suavizamientos de orden n = 3, 5, 7 y 11 nos dan los siguientes resultados.

```
<<Statistics`DataSmoothing`

serieb={0,-1,0,-5,-7,-5,0,-1,0,-8,-10,-8,0,-1,0,-12,-10,-8,-6,-5,-6,-5,-3,-5,-1,-5,0,-5,-6,-5,-3,-5,2,-5,4,-5,-6,-5,-3,-5,5,-5,7,4,2,0,2,0,-1,0,-1,-3,-5,0,-5,0,-3,-5,-7,-8,0,-8,0,-7,-8,-10,-12,0,-10,0,-8,0,-6,0,-5,-1,-5,0,-5,2,-5,4,-5,5,-5,7,4,2,0,-5,-1,0,-1,-3,-5,-7,-8,-10,-8,-10,-12,-5,-5,-12.};

ListPlot[serieb,PlotJoined→True]
```

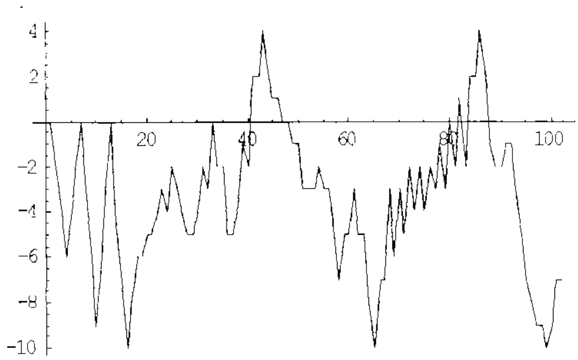



```
-Graphics-

a=Round[MovingAverage[serieb,3]]

ListPlot[a,PlotJoined→True]

{0,-2,-4,-6,-4,-2,0,-3,-6,-9,-6,-3,0,-4,-7,-10,-8,-6,-6,-5,-5,-4,-3,-4,-2,-3,-4,-5,-5,-4,-2,-3,0,-2,-2,-5,-5,-4,-1,-2,2,2,4,2,1,1,0,0,-1,-1,-3,-3,-3,-2,-3,-3,-5,-7,-5,-5,-3,-5,-5,-8,-10,-7,-7,-3,-6,-3,-5,-2,-4,-2,-4,-2,-3,-1,-3,0,-2,1,-2,2,2,4,2,-1,-2,-2,-1,-1,-3,-5,-7,-8,-9,-9,-10,-9,-7,-7}
```

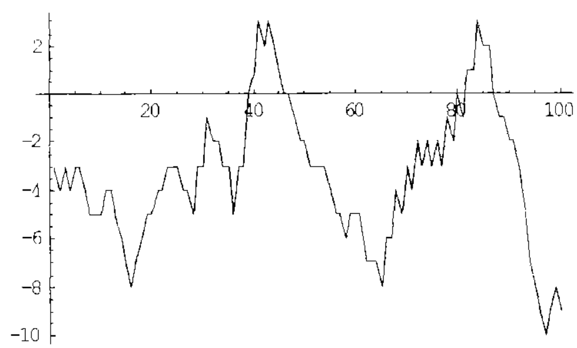


-Graphics-

```
b=Round[MovingAverage[serieb,5]]

ListPlot[b,PlotJoined→True]
```

{-3,-4,-3,-4,-3,-3,-4,-5,-5,-5,-4,-4,-5,-6,-7,-8,-7,-6,-5,-5,-4,-4,-3,-3,-3,-4,-4,-5,-3,-3,-1,-2,-2,-3,-3,-5,-3,-3,0,1,3,2,3,2,1,0,0,-1,-2,-2,-3,-3,-3,-3,-4,-5,-5,-6,-5,-5,-5,-7,-7,-7,-8,-6,-6,-4,-5,-3,-4,-2,-3,-2,-3,-2,-3,-1,-2,0,-1,1,1,3,2,2,0,-1,-1,-2,-2,-3,-5,-7,-8,-9,-10,-9,-8,-9}

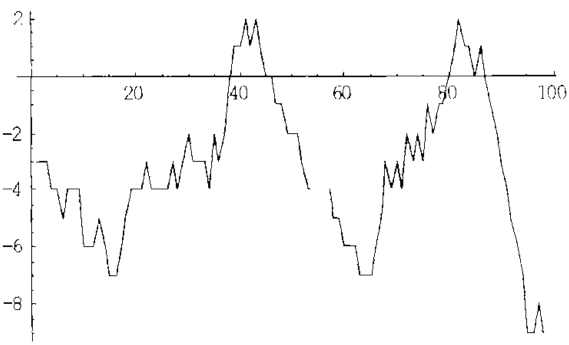


-Graphics-

```
c=Round[MovingAverage[serieb,7]]

ListPlot[c,PlotJoined→True]
```

```
{-3,-3,-3,-4,-4,-5,-4,-4,-4,-6,-6,-6,-5,-6,-7,-7,-6,-5,-4,-4,-
4,-3,-4,-4,-4,-4,-3,-4,-3,-2,-3,-3,-3,-4,-2,-3,-2,0,1,1,2,1,2,1,0,0,-
1,-1,-2,-2,-2,-3,-4,-4,-4,-4,-4,-5,-5,-6,-6,-6,-7,-7,-7,-6,-5, 3,-4,-
3,-4,-2,-3,-2,-3,-1,-2,-1,-1,0,1,2,1,1,0,1,0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-9,-
9,-8,-9}
```

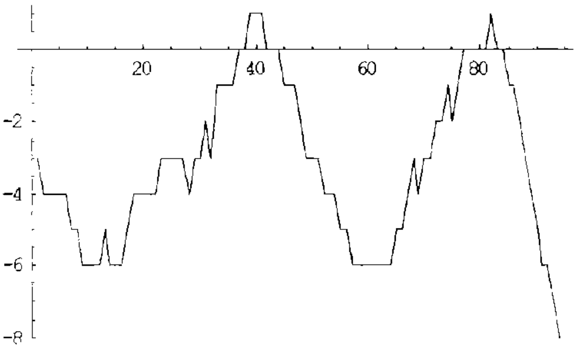


-Graphics-

```
d=Round[MovingAverage[serieb,11]]

ListPlot[d,PlotJoined→True]
```

```
{-3,-4,-4,-4,-4,-4,-5,-5,-6,-6,-6,-6,-5,-6,-6,-6,-5,-4,-4,-4,-
4,-4,-3,-3,-3,-3,-3,-4,-3,-3,-2,-3,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,0,0,0,-1,-1,-
1,-2,-3,-3,-3,-4,-4,-4,-5,-5,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-5,-5,-4,-3,-4,-
3,-3,-2,-2,-1,-2,-1,0,0,0,0,0,1,0,0,-1,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-6,-7,-8}
```



-Graphics-

De las anteriores graficas se puede inferir el comportamiento de las series suavizadas –los datos se vuelven mas y mas monótonos además de perder amplitud en el registro- cuando el orden del suavizamiento crece. De la función de media podemos a priori decir, que si bien no es la media "tonal" si es constante, además de una franja de varianza que si tal es grande, no es creciente.

Hagamos ahora un suavizamiento exponencial de la serie con el empleo de valores de alfa extremos, además del uso de un valor particular –el limite de la sucesión áurea- y del que damos una aproximación, -nuevamente con el empleo de "mathemática"- con n = 30, que por otra parte, es prácticamente el mismo cuando $n \to \infty$.

a = Table[Fibonacci[n-1]/Fibonacci[n], {n, 30}]

N[%]

{0., 1., 0.5, 0.666667, 0.6, 0.625, 0.615385, 0.619048, 0.617647, 0.618182, 0.617978, 0.618056, 0.618026, 0.618037, 0.618033, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034, 0.618034}

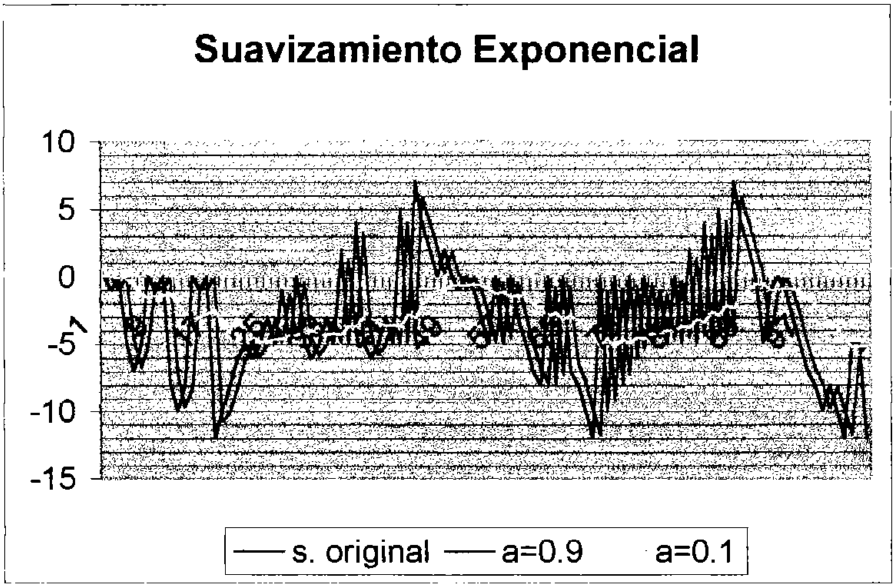
Suavizamiento exponencial con alfa = 0.1, 0.9 y 0.618 con el empleo de la hoja de calculo Excel.

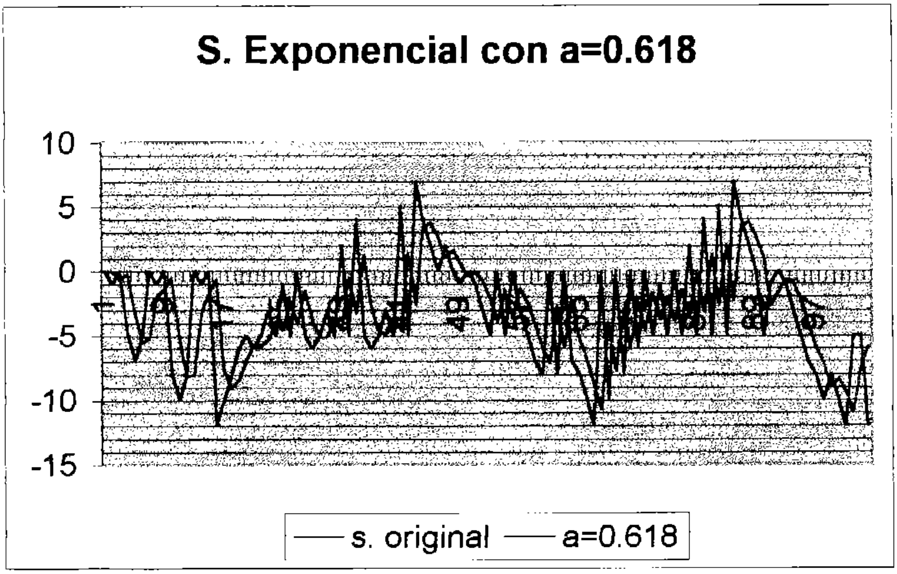
#	s.original	a=0.9	a=0.1	a=0.618
1	0	0	0	0
2	-1	0	0	0
3	0	-1	0	-1
4	-5	0	0	0
5	-7	-5	-1	-3
6	-5	-7	-1	-6
7	0	-5	-2	-5
8	-1	-1	-1	-2
9	0	-1	-1	-1
10	-8	0	-1	-1
11	-10	-7	-2	-5
12	-8	-10	-3	-8
13	0	-8	-3	-8
14	-1	-1	-3	-3
15	0	-1	-3	-2
16	-12	0	-2	-1
17	-10	-11	-3	-8
18	-8	-10	-4	-9
19	-6	-8	-4	-8
20	-5	-6	-5	-7
21	-6	-5	-5	-6
22	-5	-6	-5	-6
23	-3	-5	-5	-5
24	-5	-3	-5	-4
25	-1	-5	-5	-5
26	-5	-1	-4	-2
27	0	-5	-4	-4
28	-5	0	-4	-2
29	-6	-5	-4	-4
30	-5	-6	-4	-5
31	-3	-5	-4	-5
32	-5	-3	-4	-4
33	2	-5	-4	-5
34	-5	1	-4	0
35	4	-4	-4	-3
36	-5	3	-3	1
37	-6	-4	-3	-3
38	-5	-6	-3	-5
39	-3	-5	-4	-5
40	-5	-3	-4	-4
41	5	-5	-4	-5
42	-5	4	-3	1
43	7	-4	-3	-3
44	4	6	-2	3
45	2	4	-1	4
46	0	2	-1	3
47	2	0	-1	1
48	0	2	-1	2
49	-1	0	-1	1
50	0	-1	-1	0

51	-1	0	-1	0
52	-3	-1	-1	-1
53	-5	-3	-1	-2
54	0	-5	-1	-4
55	-5	0	-1	-1
56	0	-5	-2	-4
57	-3	0	-1	-1
58	-5	-3	-2	-2
59	-7	-5	-2	-4
60	-8	-7	-2	-6
61	0	-8	-3	-7
62	-8	-1	-3	-3
63	0	-7	-3	-6
64	-7	-1	-3	-2
65	-8	-6	-3	-5
66	-10	-8	-4	-7
67	-12	-10	-4	-9
68	0	-12	-5	-11
69	-10	-1	-5	-4
70	0	-9	-5	-8
71	-8	-1	-5	-3
72	0	-7	-5	-6
73	-6	-1	-4	-2
74	0	-5	-5	-5
75	-5	-1	-4	-2
76	-1	-5	-4	-4
77	-5	-1	-4	-2
78	0	-5	-4	-4
79	-5	0	-4	-1
80	2	-5	-4	-4
81	-5	1	-3	0
82	4	-4	-3	-3
83	-5	3	-3	1
84	5	-4	-3	-3
85	-5	4	-2	2
86	7	-4	-2	-2
87	4	6	-1	3
88	2	4	-1	4
89	0	2	-1	3
90	-5	0	-1	1
91	-1	-4	-1	-3
92	0	-1	-1	-2
93	-1	0	-1	-1
94	-3	-1	-1	-1
95	-5	-3	-1	-2
96	-7	-5	-2	-4
97	-8	-7	-2	-6
98	-10	-8	-3	-7
99	-8	-10	-3	-9

100	-10	-8	-4	-8
101	-12	-10	-4	-9
102	-5	-12	-5	-11
103	-5	-6	-5	-7
104	-12	-5	-5	-6

Un poco mas esclarecedor será la grafica de los datos obtenidos, comparando los datos en las siguientes graficas, vemos:





Una simple inspección visual nos dice que la serie resultante con el empleo de un alfa igual a 0.1, es pobre, musicalmente hablando pierde bastante amplitud en el registro, Un poco mejor es la serie con α=0.618 que si bien es mejor no alcanza la frecuencia de los extremos inferior y superior, lo que casi ocurre con la serie α=0.9 pegándose notoriamente mejor a la serie de los datos originales, impresión queda sin embargo, negada por los siguientes indicadores:

Alfa	DAM	EMC
0.1	3.38461538	18.1538462
0.9	3.91346154	24.4711538
0.618	3.56730769	19.259615

Gráficamente la serie que se ajusta mayor es la que utiliza un valor de alfa igual a 0.9 sin embargo según los indicadores anteriores es la que tiene un peor ajuste, esto porque observando mas detenidamente los datos podemos darnos cuenta que el modelo va a la zaga con respecto a los datos originales.

Hagamos la "transformación inversa"

Brandemburgo s. exponecial a=0.1

Bach -variacion-

Brandemburgo s. exponencial a=0.9

Bach -variacion-

Luego, con nuestro criterio de "ajuste armónico" y tomando en cuenta que el fragmento original tiene una *alteración accidental* -do# de la cuarta escala- y considerando a tal alteración entre los posibles valores que puede tomar la variación, es decir valores en:

A* = {-12, -10, -8, -7, -6, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14 . . . }

El numero de valores diferentes al conjunto A* que presentan los modelos de suavizado con α = 0.1, 0.618 y 0.9 respectivamente son:17, 35 y 15.

Lo que nos dice que ninguno de los anteriores modelos es bueno como variación; Enseguida hacemos la comparación con el modelo de suavizado mas simple –promedios móviles- del que tomamos el de orden n = 4 a efectos de no perder demasiadas observaciones, además de que como ya vimos, la serie crece en monotonía conforme el orden de suavizamiento se incrementa.

Promedios móviles simples de orden cuatro

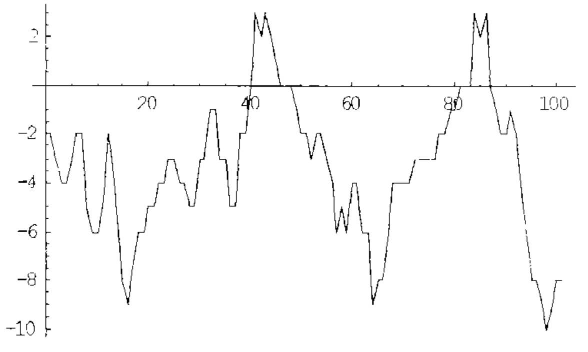
$$\hat{Y}_{t+1} = S_t = (Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3}) / 4$$

Obtenemos:

```
z=Round[MovingAverage[serieb,4]]

ListPlot[z,PlotJoined→True]

{-2,-3,-4,-4,-3,-2,-2,-5,-6,-6,-5,-2,-3,-6,-8,-9,-7,-6,-6,-5,-
5,-4,-4,-3,-3,-4,-4,-5,-5,-3,-3,-1,-1,-3,-3,-5,-5,-2,-
2,0,3,2,3,2,1,0,0,0,-1,-2,-2,-3,-2,-2,-3,-4,-6,-5,-6,-4,-4,-6,-6,-9,-
8,-8,-6,-4,-4,-4,-4,-3,-3,-3,-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,0,0,3,2,3,0,-1,-2,-2,-
1,-2,-4,-6,-8,-8,-9,-10,-9,-8,-8}
```



-Graphics-

Ya que con este modelo tenemos la perdida de n-1 datos –tres en este caso- agregamos las tres primeras observaciones de la serie original.

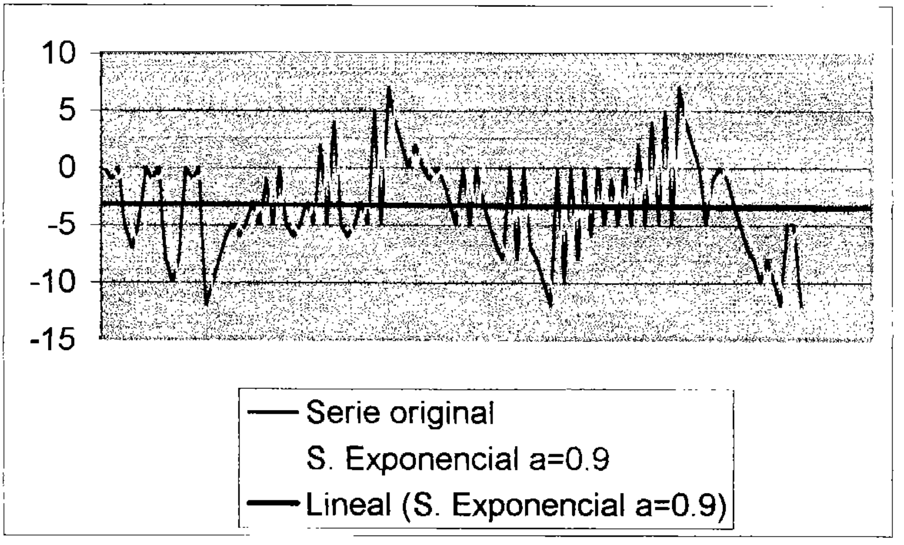
En la partitura:

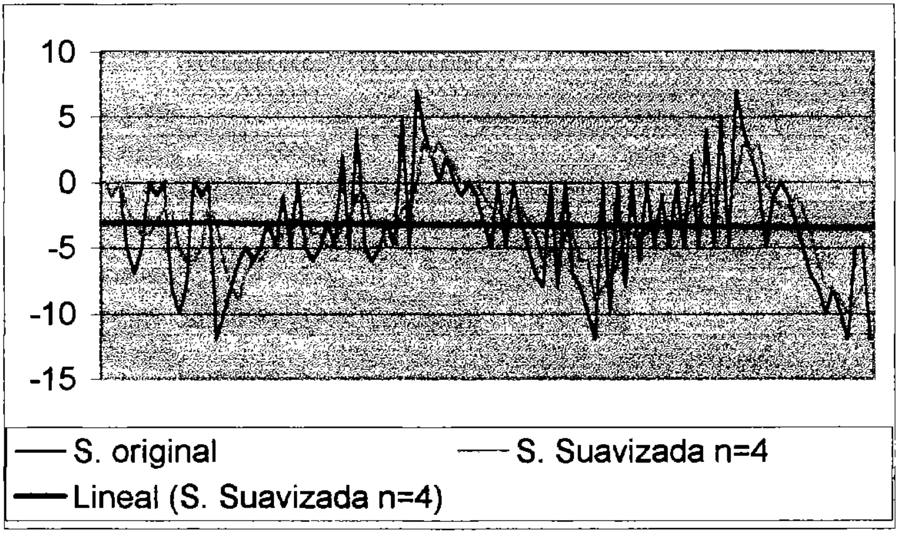
Brandemburgo suavizado n=4

Bach -variacion-

Contrastando este modelo con el de suavizamiento exponencial con α = 0.9 ya que según nuestro criterio de "ajuste armónico" es el que observa menos *alteraciones accidentales*.

Comparemos gráficamente ambas series con el agregado de la línea de tendencia de los valores de los modelos.





Cuyos criterios de ajuste nos arrojan los siguientes valores

	DAM	EMC
Prom. n=4	2.66346153	10.7019230
S. exp. a=0.9	3.9134614	24.4711538

En donde se ve claramente que el modelo de suavizado arroja mejores valores de los indicadores DAM y EMC. No obstante la gran cantidad de *alteraciones accidentales* del modelo promediado. Adicionalmente el modelo de promedios móviles suaviza en exceso a la serie, -dándonos como resultado poca variabilidad entre notas consecutivas y múltiples pasajes en donde se repite en demasía la misma nota- tal como se puede ver en la ultima parte de las graficas comparativas con los datos originales.

De tal que el suavizamiento exponencial con un valor próximo a uno, es el gráficamente conserva mejor las características de amplitud de registro y forma de la grafica de los datos originales.

La grafica con línea de tendencia corrobra al menos de forma visual que una "serie tonal" carece de tendencia significativa además de varianza acotada, por lo que podemos decir que una "serie tonal" es estacionaria, por lo que en una serie de tal naturaleza no es necesario realizar transformaciones ni diferencias para poder aplicarles modelos de series de tiempo.

Veamos otras metodologías de series de tiempo aplicadas a otra pieza musical: El canon de Pachelbel

Kanon

Pachelbel

[Copyright]

Cuya serie de la primera sección es:

{4, 2, 0, -1, -3, -5, -3, -1, 0, -1, -3, -5, -7, -8, -7, -10, ..-12, -8, -5, -7, -8, -12, -8, -10, /-12, -15, -12, -5, -7, -3, -5, -7, /-8, -12, -10, -1, 0, 4, 7, -5,/ -3, -7, -5, -8, -12, 0, 0, -1,/ 0, -1, 0, -12, -13, -5, -10, -8, -12, 0,-1, -3, -1, 4, 7, 9, 5, 4, 2, 5, 4, 2, 0, -1, -3, -5, -7, -8, -10, -7, -8, -10, -12, -10, -8, -7, -5, -10, -5, -7, -8, -3, -5, -7, -5, -7, -8, -10, -12, -15, -3, -1, 0, -1, -3, -5,

-7, -8, -10, -3, -5, -3, -5, -7, -8, 4, 2, 0, 4, 9, 7, 9, 11, 12, 0 -1, -3, 0, 0, 0, 0, 5, 2, 7}

Para aplicar el método de suavizamiento exponencial ajustado a la tendencia y a la variación estacional –el método de descomposición solo nos sirve para realizar pronósticos por lo que no consideramos su aplicabilidad- primero obtenemos los coeficientes de la recta de regresión lineal, con ayuda del software SPSS.

Regresión

Variables Entered/Removed

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	OBSERV	.	Enter

a All requested variables entered.
b Dependent Variable: VALOR

Coefficients

		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
Model		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-6.231	.981		-6.351	.000
	OBSERV	3.981E-02	.013	.263	3.110	.002

a Dependent Variable: VALOR

Los coeficientes de β_1 y β_2 son –6.231 y 0.03981 respectivamente; Dado que el valor de β_2 es muy pequeño –empíricamente así es en general para toda serie obtenida de una pieza tonal- utilizaremos para β el valor cero, con lo que simplificamos en buena medida la obtención de los valores suavizados.

Recordemos las ecuaciones de suavizamiento ajustado a la tendencia y la variación estacional.

$A_t = \alpha(Y_t/S_{t-L}) + (1 - \alpha)(A_{t-1} + T_{t-1})$

La estimación de la tendencia

$T_t = \beta(A_t - A_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$

La estimación de la estacionalidad

$S_t = \gamma(Y_t/A_t) + (1 - \gamma)S_{t-L}$

El pronóstico p observaciones en el futuro

$\hat{Y}_{t+p} = (A_t + pT_t)S_{t-L+p}$

Con la ayuda de la hoja de calculo Excel tenemos:

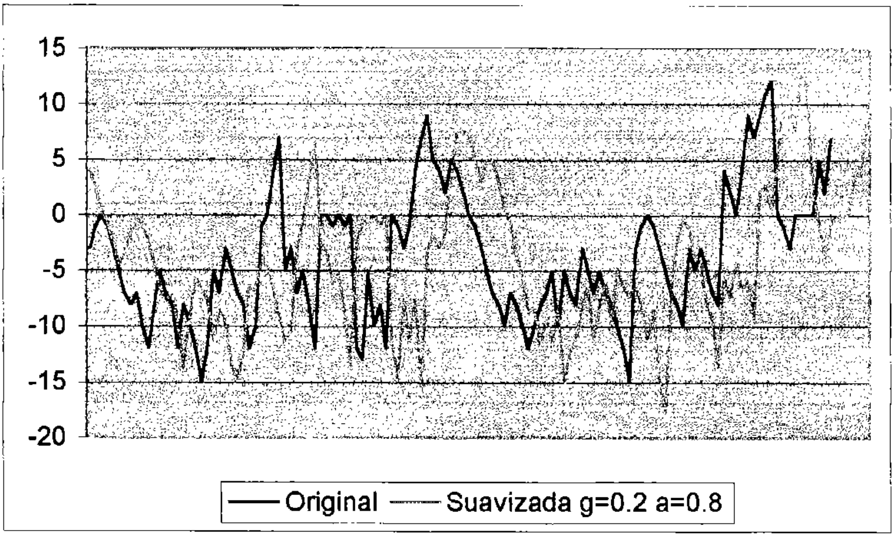
		Estacionalidad		V. Suavizados	
Obs.	Frec.	g=0.2	g=0.8	a=0.8	
1	4	1	1	4	4
2	2	1	1	2	2
3	0	1	1	0	0
4	-1	1	1	-1	-1
5	-3	1	1	-3	-3
6	-5	1	1	-5	-5
7	-3	1	1	-3	-3
8	-1	1	1	-1	-1
9	0	1	0	0	0
10	-1	1	1	-1	-1
11	-3	1	1	-3	-3
12	-5	1	1	-5	-5
13	-7	1	1	-7	-7
14	-8	1	1	-8	-8
15	-7	1	1	-7	-7
16	-10	1	1	-9	-9
17	-12	1	0	-14	-50
18	-8	1	1	-9	-16
19	-5	1	1	-6	-7
20	-7	1	1	-7	-6
21	-8	1	1	-8	-7
22	-12	1	1	-11	-11
23	-8	1	1	-9	-9
24	-10	1	1	-10	-9
25	-12	1	0	-14	-43
26	-15	1	1	-15	-28
27	-12	1	1	-13	-17
28	-5	1	1	-6	-7
29	-7	1	1	-7	-7
30	-3	1	1	-4	-4
31	-5	1	1	-5	-5
32	-7	1	1	-6	-6
33	-8	1	0	-9	-25
34	-12	1	1	-11	-22
35	-10	1	1	-10	-15
36	-1	1	0	-3	-4
37	0	1	0	-1	-1
38	4	1	1	3	3
39	7	1	1	6	6
40	-5	1	2	-3	-2
41	-3	1	0	-3	-8
42	-7	1	1	-6	-12
43	-5	1	1	-5	-8
44	-8	1	0	-9	-20
45	-12	1	0	-13	-49

46	0	1	0	-3	-10
47	0	1	0	-1	-2
48	-1	1	1	-1	-1
49	0	1	0	0	0
50	-1	1	1	-1	-1
51	0	1	0	0	0
52	-12	1	0	-11	-25
53	-13	1	0	-15	-48
54	-5	1	0	-8	-27
55	-10	1	0	-11	-42
56	-8	1	1	-8	-13
57	-12	1	0	-16	-138
58	0	1	0	-3	-28
59	-1	1	0	-2	-12
60	-3	1	0	-3	-8
61	-1	1	0	-2	-5
62	4	1	0	4	16
63	7	1	0	8	27
64	9	1	1	8	15
65	5	1	0	7	51
66	4	1	0	5	34
67	2	1	0	3	24
68	5	1	0	5	15
69	4	1	0	5	17
70	2	1	0	3	10
71	0	1	0	1	2
72	-1	1	1	-1	-1
73	-3	1	0	-4	-25
74	-5	1	0	-5	-38
75	-7	1	0	-9	-74
76	-8	1	0	-9	-33
77	-10	1	0	-12	-41
78	-7	1	0	-9	-35
79	-8	1	0	-11	-134
80	-10	1	0	-8	-34
81	-12	1	0	-15	-91
82	-10	1	0	-12	-79
83	-8	1	0	-11	-85
84	-7	1	0	-8	-38
85	-5	1	0	-7	-24
86	-10	1	0	-11	-45
87	-5	1	0	-8	-78
88	-7	1	0	-6	-28
89	-8	1	0	-10	-56
90	-3	1	0	-5	-30

91	-5	1	0	-6	-49
92	-7	1	0	-7	-38
93	-5	1	0	-6	-26
94	-7	1	0	-8	-31
95	-8	1	0	-11	-108
96	-10	1	0	-9	-49
97	-12	1	0	-14	-78
98	-15	1	0	-18	-130
99	-3	1	0	-7	-50
100	-1	1	0	-2	-14
101	0	1	0	0	-3
102	-1	1	0	-1	-4
103	-3	1	0	-4	-34
104	-5	1	0	-4	-25
105	-7	1	0	-8	-42
106	-8	1	0	-9	-65
107	-10	1	0	-14	-130
108	-3	1	0	-6	-52
109	-5	1	0	-7	-112
110	-3	1	0	-4	-33
111	-5	1	0	-7	-54
112	-7	1	0	-6	-38
113	-8	1	0	-9	-47
114	4	1	0	2	17
115	2	1	0	3	25
116	0	1	0	1	5
117	4	1	0	5	75
118	9	1	0	10	74
119	7	1	0	10	76
120	9	1	0	8	54
121	11	1	0	13	63
122	12	1	0	12	58
123	0	1	0	2	12
124	-1	1	0	-1	-59
125	-3	1	0	-4	-58
126	0	1	0	-1	-12
127	0	1	0	0	-2
128	0	1	0	0	0
129	0	1	0	0	0
130	5	1	0	4	19
131	2	1	0	4	104
132	7	1	0	8	367

Dado que es resultado de un modelo que contiene un cociente, existen valores de γ que dan valores de estacionalidad próximos a cero con la consiguiente "explosión" de los valores suavizados. de aquí que obviamente escogemos aquel que nos produce valores suavizados más contenidos y por lo mismo mejor según los criterios de ajuste DAM y EMC.

Graficamos



Vemos que el suavizamiento con ajuste a la variacion estacional nos produce una grafica que además de estar desplazada a la derecha, gana en amplitud de registro.

Para solventar el problema recurrente de tener series que no se ajustan armónicamente, hagamos una primera corrección como sigue

Denotemos al conjunto de los valores enteros permitidos en una "serie armónica" por

$$A^* = \{\ldots -12, -10, -8, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14 \ldots\}$$

Sí $S_t = \hat{Y}_{t+1} \notin A^*$ entonces

$\hat{Y}_{t+1} = S_t + 1$

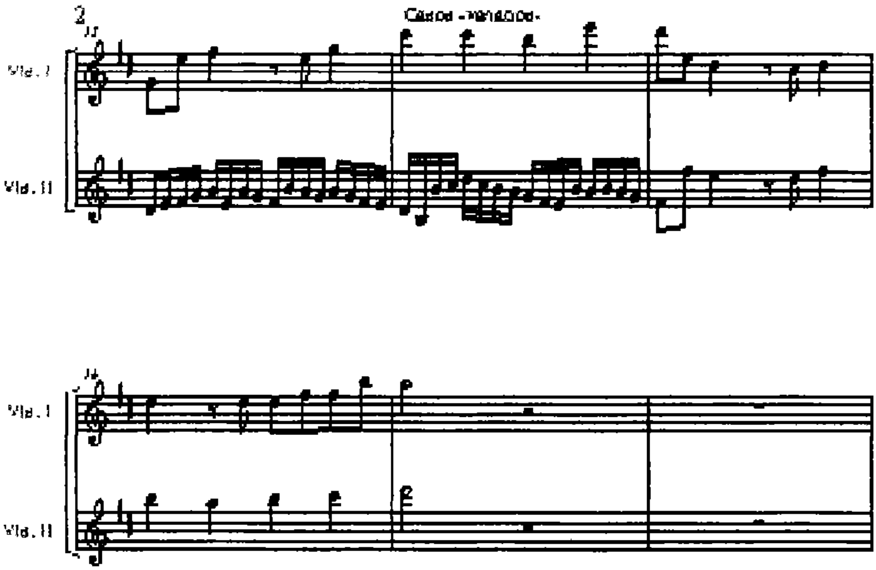
De esta manera todo valor en el modelo corregido se encontrara necesariamente en A*

Veamos con esta corrección el resultado en la partitura

Canon -variacion-

Pachelbel

(Copyright)



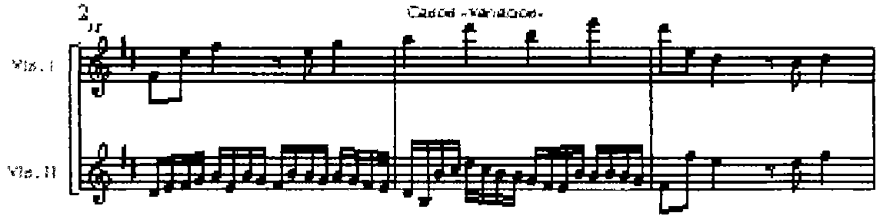
En este caso hemos obtenido un resultado bastante aceptable, salvo algunas disonancias que se aprecian más en la acentuación fuerte.

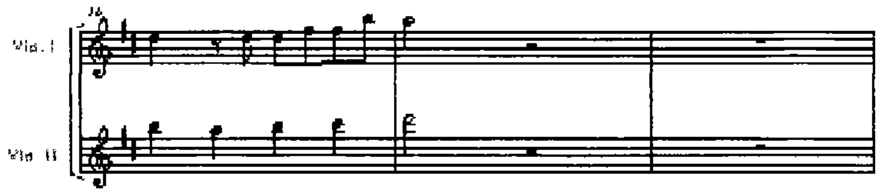
Si, fuera del modelo que genera a la serie aceptamos hacer algunas correcciones mínimas, el resultado es mucho más consonante además de que el numero de correcciones es contenido –en este caso, seis en total- ya que las hacemos solo en algunas notas de acentuación fuerte o de inicio de compás.

Veamos lo que de alguna manera es el resultado final en cuanto a la manera en que habremos de proceder de aquí al final de este trabajo.

Canon -variacion-

Pachelbel

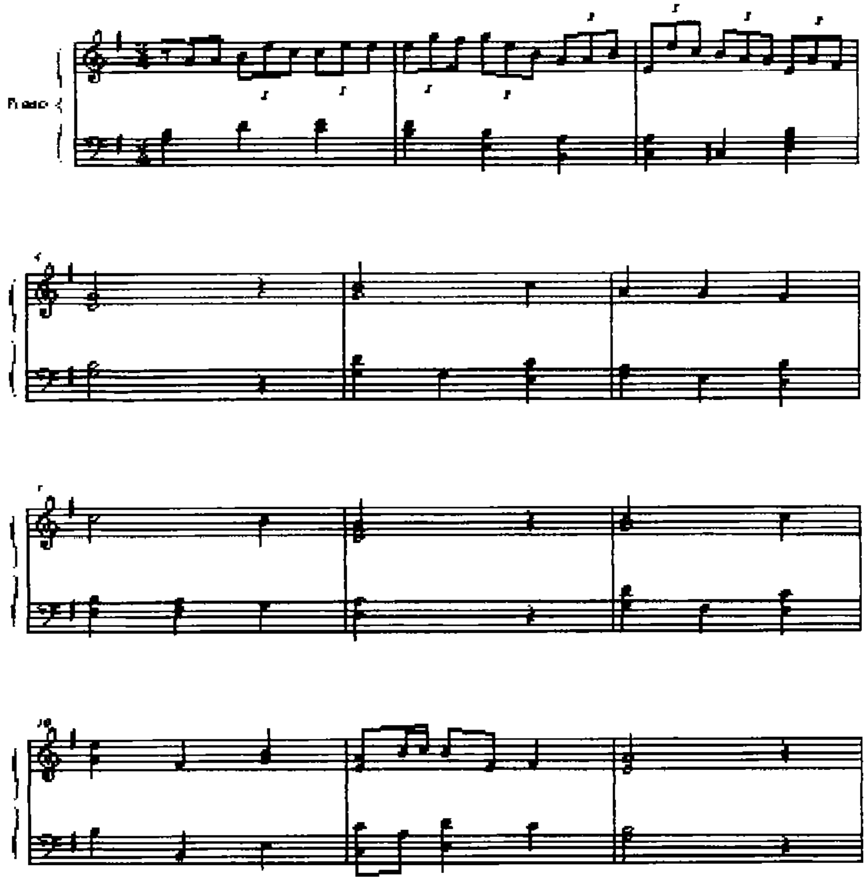




Para finalizar esa sección, luego aplicamos de alguna manera los métodos conocidos de series de tiempo mediante el empleo de la metodología de Box-Jenkins a la siguiente pieza tonal: Jesús Alegría de los Hombres de J. Bach.

Jesus Alegria de los Hombres

J. Bach

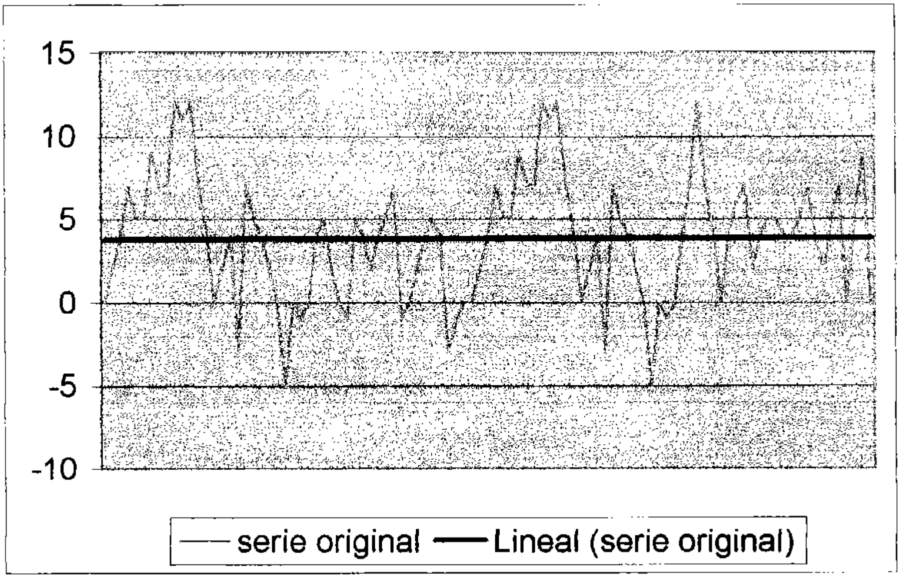


[Copyright]

Y cuya serie de la primera sección es:

{0, 2, 4, 7, 5, 5, 9, 7, 7, 12, 11, 12, 7, 4, 0, 2, 4, −3, 7, 5, 4, 2, 0, -5, 0, −1, 0, /4, 5, 2, 0, −1, 5, 4, 2, 4, 5, 7, −1, 0, 2, 4, 5, 4, -3, -1, 0, 0, 2, 4, 7, 5, 5, 9, 7, 7, 12, 11, 12, 7, 4, 0, 2, 4, -3, 7, 5, 4, 2, 0, -5, 0, -1, 0, 4, 7, 12, 7, 4, 0, 4, 6, 7, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 7, 4, 2, 5, 7, 0, 5, 9, 0}

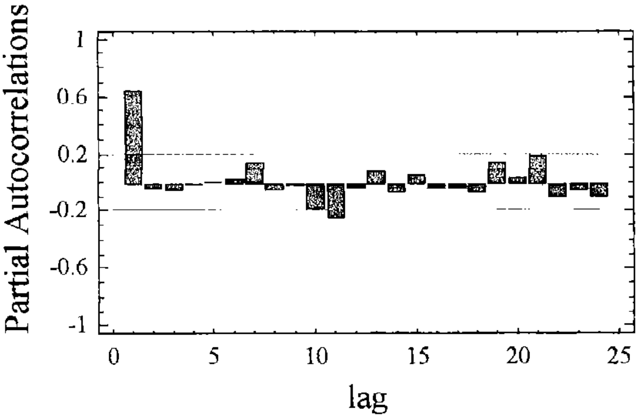
Con grafica:



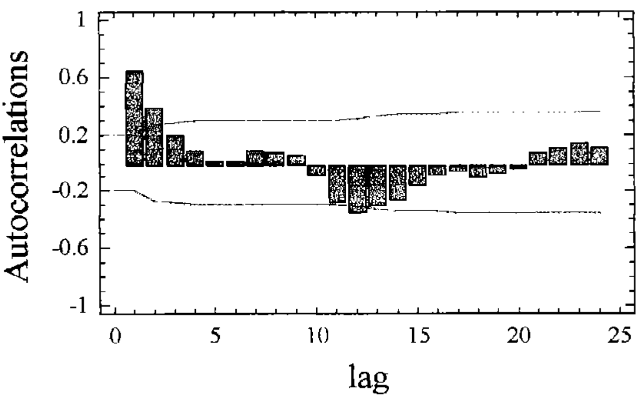
Una simple inspección visual a la grafica anterior nos dice que la serie es estacionaria -como ya lo habíamos dicho de las "series tonales"- y por tanto no es necesario aplicar ninguna transformación o diferencia a nuestros datos para poder aplicarle algún modelo de serie temporal.

Luego con la ayuda del software Statgraphics obtenemos los gráficos de Autocorrelación y Periodograma integral

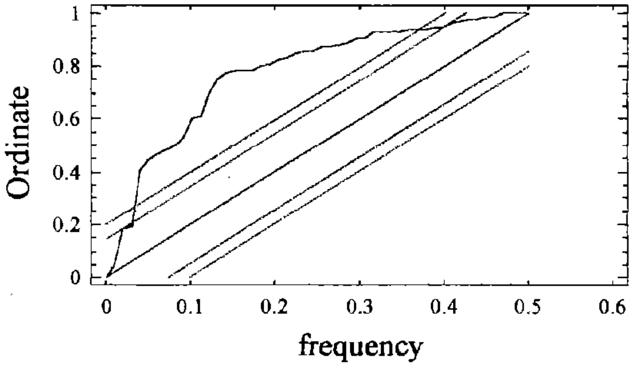
Estimated Partial Autocorrelations for serie original



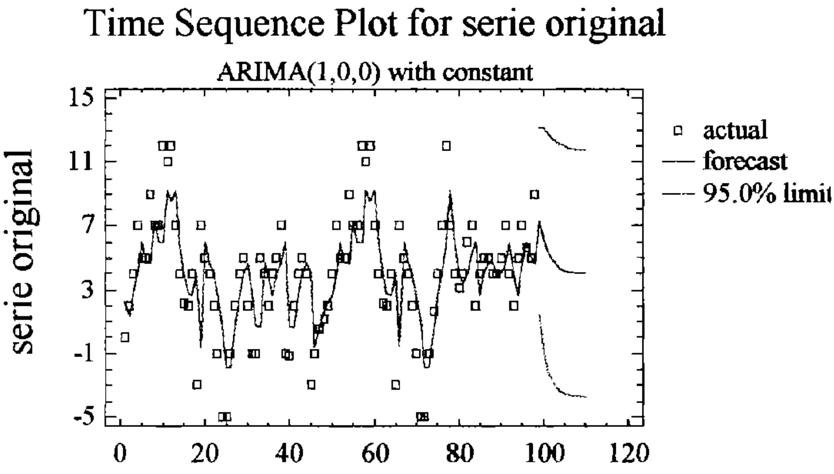
Estimated Autocorrelations for serie original



Periodogram for serie original



Del periodograma integral se observa la presencia de una marcada presencia de variación estacional o periodicidad, que igual queda reflejado en las graficas de Autocorrelacion y Autocorrelacion Parcial –ACF y PACF por sus siglas en ingles- por tanto y dado que no necesitamos hacer diferencias, el modelo a utilizar es uno multiplicativo o SARIMA, no obstante y siguiendo el principio de parsimonia, el modelo mas simple y que nos arroja un buen ajuste es un ARIMA (1, 0, 0) de acuerdo a los resultados obtenidos por medio del software Statgraphics



Time Sequence Plot for serie original
ARIMA(1,0,0) with constant
serie original
15
11
7
3
-1
-5
0
20
40
60
80
100
120
actual
forecast
95.0% limit

Analysis Summary

Data variable: serie original

Selection variable: serie original

Number of observations = 98
15 missing values were replaced with estimates
Start index = 1.0
Sampling interval = 1.0

Forecast Summary

Forecast model selected: ARIMA(1,0,0) with constant
Number of forecasts generated: 12
Number of periods withheld for validation: 0

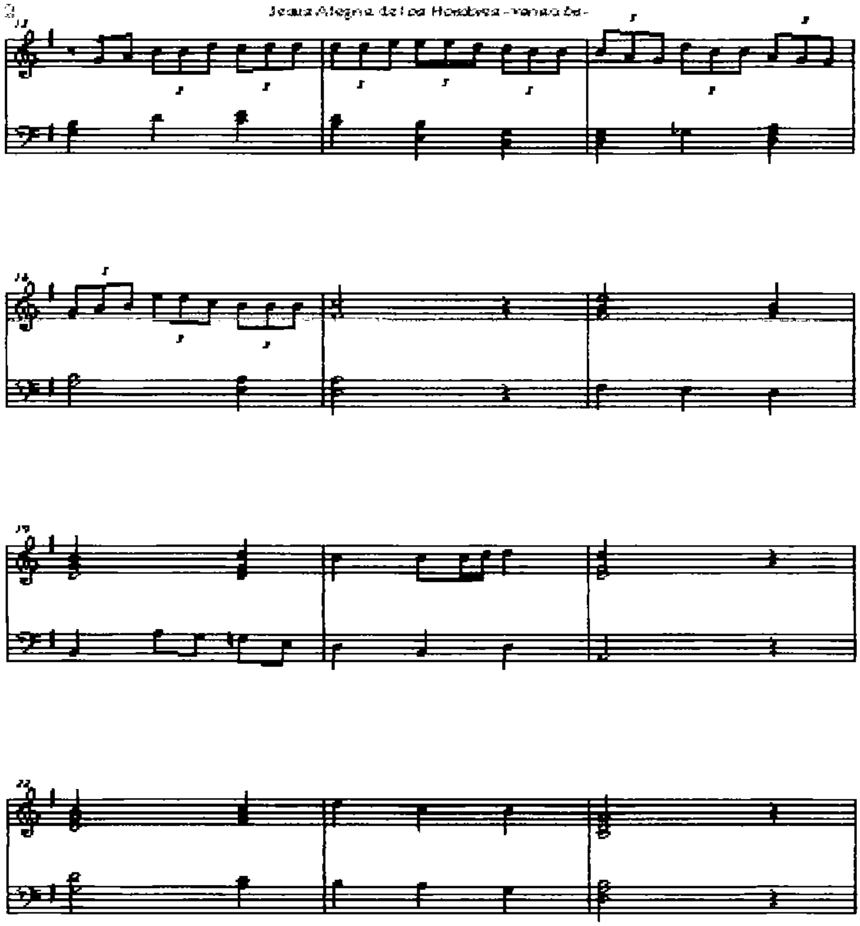
Statistic	Estimation Period	Validation Period
MSE	8.67012	
MAE	2.21377	
MAPE		
ME	0.0381706	
MPE		

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Stnd. Error	t	P-v
AR(1)	0.656005	0.0773766	8.47809	0.0
Mean	3.95944	0.821473	4.81993	0.0
Constant	1.36203			

Backforecasting: yes
Estimated white noise variance = 8.69292 with 96 degrees of freedom
Estimated white noise standard deviation = 2.94838
Number of iterations: 1

Aplicando el modelo y realizando nuestro "ajuste armónico" tenemos el siguiente resultado



La variación anterior fue conseguida bajo criterios de máximo ajuste, por lo que se tiene una perdida en cuanto a la amplitud de registro; Un modelo de máximo ajuste pierde necesariamente los valores atípicos, que en una serie de este tipo puede significar notas distintivas de un fragmento; Criterios de ajuste como los son el DAM o EMC nada nos dicen sobre el valor de un modelo como variación.

4.2 Contrapunto

En el contrapunto dos o mas voces o instrumentos producen melodías distintas entre si aunque relacionadas, por lo que de alguna manera podemos considerarlo como variaciones melódicas una de otra.

Retomemos el primer fragmento del tercer concierto de Brandemburgo de J. Bach. Recordemos que el modelo de suavizado exponencial con un $\alpha=0.9$ presentaba un aparente ajuste a la serie original, ya que el modelo:

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}$$

Al tomar en cuenta mayormente la observación inmediata anterior y ser redondeado al entero mas próximo, deja la mayor de las veces inalterada a la observación anterior tomándola como el suavizamiento en t+1. Propongamos el mismo modelo con un valor de $\alpha = 0.8$

$$\hat{Y}_t = 0.8*Y_{t-1} + 0.2*\hat{Y}_{t-1}$$

En la hoja de calculo excel

#	Original	a=0.8	Nota	#	Original	a=0.8	Nota
1	0	0	sol	53	-5	-3	mi
2	-1	0	sol	54	0	-5	re
3	0	-1	fa#	55	-5	-1	fa#
4	-5	0	sol	56	0	-4	mib
5	-7	-4	mib	57	-3	-1	fa#
6	-5	-6	do#	58	-5	-3	mi
7	0	-5	re	59	-7	-5	re
8	-1	-1	fa#	60	-8	-7	do
9	0	-1	fa#	61	0	-8	si
10	-8	0	sol	62	-8	-2	fa
11	-10	-6	do#	63	0	-7	do
12	-8	-9	sib	64	-7	-1	fa#
13	0	-8	si	65	-8	-6	do#
14	-1	-2	fa	66	-10	-8	si
15	0	-1	fa#	67	-12	-10	la
16	-12	0	sol	68	0	-12	sol4
17	-10	-10	la	69	-10	-2	fa
18	-8	-10	la	70	0	-8	si
19	-6	-8	si	71	-8	-2	fa
20	-5	-6	do#	72	0	-7	do
21	-6	-5	re	73	-6	-1	fa#
22	-5	-6	do#	74	0	-5	re
23	-3	-5	re	75	-5	-1	fa#
24	-5	-3	mi	76	-1	-4	mib
25	-1	-5	re	77	-5	-2	fa
26	-5	-2	fa	78	0	-4	mib
27	0	-4	mib	79	-5	-1	fa#
28	-5	-1	fa#	80	2	-4	mib
29	-6	-4	mib	81	-5	1	lab5

30	-5	-6 do#	82	4	-4 mib
31	-3	-5 re	83	-5	2 la5
32	-5	-3 mi	84	5	-4 mib
33	2	-5 re	85	-5	3 sib5
34	-5	1 lab5	86	7	-3 mi
35	4	-4 mib	87	4	5 do5
36	-5	2 la5	88	2	4 si5
37	-6	-4 mib	89	0	2 la5
38	-5	-6 do#	90	-5	0 sol
39	-3	-5 re	91	-1	-4 mib
40	-5	-3 mi	92	0	-2 fa
41	5	-5 re	93	-1	0 sol
42	-5	3 sib5	94	-3	-1 fa#
43	7	-3 mi	95	-5	-3 mi
44	4	5 do5	96	-7	-5 re
45	2	4 si5	97	-8	-7 do
46	0	2 la5	98	-10	-8 si
47	2	0 sol	99	-8	-10 la
48	0	2 la5	100	-10	-8 si
49	-1	0 sol	101	-12	-10 la
50	0	-1 fa#	102	-5	-12 sol4
51	-1	0 sol	103	-5	-6 do#
52	-3	-1 fa#	104	-12	-5 re

Existen en el modelo una gran cantidad de valores fuera del conjunto denotado por $A^* = \{-12, -10, -8, -7, -6, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14 \ldots\}$

Ahora procedamos como acordamos y hagamos la "corrección armónica" propuesta con antelación

Sí $S_t = \hat{Y}_{t+1} \notin A^*$ entonces

$\hat{Y}_{t+1} = S_t + 1$

Nuevamente en Excel

#	Original	a=0.8	Corregido	Nota
1	0	0	0	sol
2	-1	0	0	sol
3	0	-1	-1	fa#
4	-5	0	0	sol
5	-7	-4	-3	mi
6	-5	-6	-6	do#
7	0	-5	-5	re
8	-1	-1	-1	fa#
9	0	-1	-1	fa#
10	-8	0	0	sol
11	-10	-6	-6	do#
12	-8	-9	-8	si
13	0	-8	-8	si
14	-1	-2	-1	fa#
15	0	-1	-1	fa#
16	-12	0	0	sol
17	-10	-10	-10	la
18	-8	-10	-10	la
19	-6	-8	-8	si
20	-5	-6	-6	do#
21	-6	-5	-5	re
22	-5	-6	-6	do#
23	-3	-5	-5	re
24	-5	-3	-3	mi
25	-1	-5	-5	re
26	-5	-2	-1	fa#
27	0	-4	-3	mi
28	-5	-1	-1	fa#
29	-6	-4	-3	mi
30	-5	-6	-6	do#
31	-3	-5	-5	re
32	-5	-3	-3	mi
33	2	-5	-5	re
34	-5	1	2	la5
35	4	-4	-3	mi
36	-5	2	2	la5
37	-6	-4	-3	mi
38	-5	-6	-6	do#
39	-3	-5	-5	re
40	-5	-3	-3	mi
41	5	-5	-5	re
42	-5	3	4	si5
43	7	-3	-3	mi
44	4	5	5	do5
45	2	4	4	si5
46	0	2	2	la5
47	2	0	0	sol
48	0	2	2	la5
49	-1	0	0	sol
50	0	-1	-1	fa#

51	-1	0	0	sol
52	-3	-1	-1	fa#
53	-5	-3	-3	mi
54	0	-5	-5	re
55	-5	-1	-1	fa#
56	0	-4	-3	mi
57	-3	-1	-1	fa#
58	-5	-3	-3	mi
59	-7	-5	-5	re
60	-8	-7	-7	do
61	0	-8	-8	si
62	-8	-2	-1	fa#
63	0	-7	-7	do
64	-7	-1	-1	fa#
65	-8	-6	-6	do#
66	-10	-8	-8	si
67	-12	-10	-10	la
68	0	-12	-12	sol4
69	-10	-2	-1	fa#
70	0	-8	-8	si
71	-8	-2	-1	fa#
72	0	-7	-7	do
73	-6	-1	-1	fa#
74	0	-5	-5	re
75	-5	-1	-1	fa#
76	-1	-4	-3	mi
77	-5	-2	-1	fa#
78	0	-4	-3	mi
79	-5	-1	-1	fa#
80	2	-4	-3	mi
81	-5	1	2	la5
82	4	-4	-3	mi
83	-5	2	2	la5
84	5	-4	-3	mi
85	-5	3	4	si5
86	7	-3	-3	mi
87	4	5	5	do5
88	2	4	4	si5
89	0	2	2	la5
90	-5	0	0	sol
91	-1	-4	-3	mi
92	0	-2	-1	fa#
93	-1	0	0	sol
94	-3	-1	-1	fa#
95	-5	-3	-3	mi
96	-7	-5	-5	re
97	-8	-7	-7	do
98	-10	-8	-8	si
99	-8	-10	-10	la

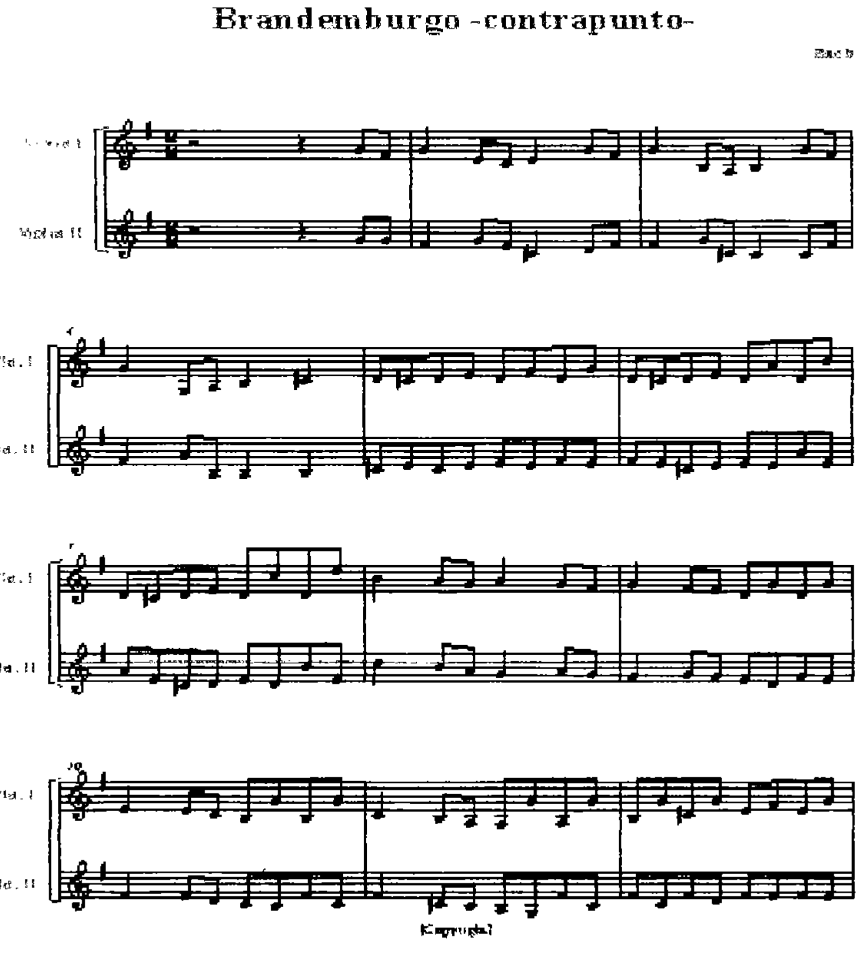
100	-10	-8	-8 si
101	-12	-10	-10 la
102	-5	-12	-12 sol4
103	-5	-6	-6 do#
104	-12	-5	-5 re

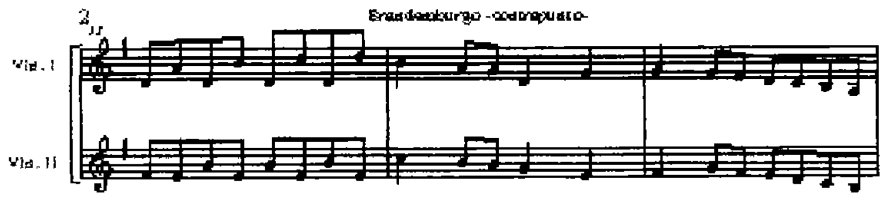
En la partitura

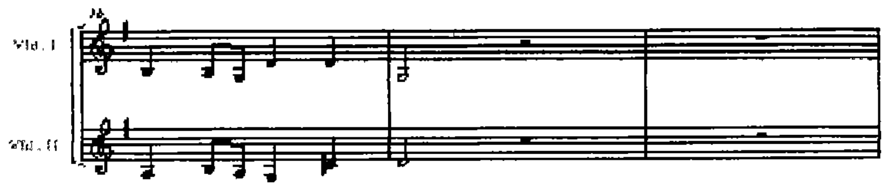
Brandemburgo a=0.8 corregido

Bach-variacion-

El anterior es un fragmento que aun no es del todo tonal, ya que el acentuación no cae dentro de las nota que componen la *triada,* comparemos directamente en la partitura la serie corregida con la original, a modo de contrapunto.





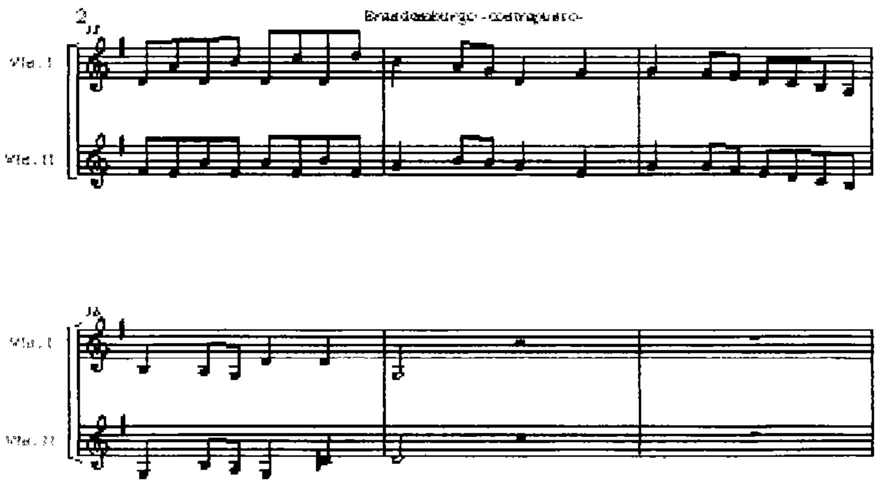


Para poder utilizar lo anterior como un contrapunto debemos eliminar las cacofonías mas notorias, es decir las que se presentan en los momentos de acentuación, para ello y al no contar con un modelo que a priori nos de un modelo que carezca de ellas, apelamos a la intuición y la musicalidad para corregir algunas notas –modificaremos solo algunas de las que se encuentran al inicio de compás- con el resultado siguiente:

Brandemburgo -contrapunto-

Bach

[Copyright]



El fragmento anterior cumple con los requerimientos mínimos de la música tonal y puede tomarse bien como una variación en uso a modo de contrapunto, y donde el que sea bueno o no atiende ya mas a criterios subjetivos de apreciación musical.

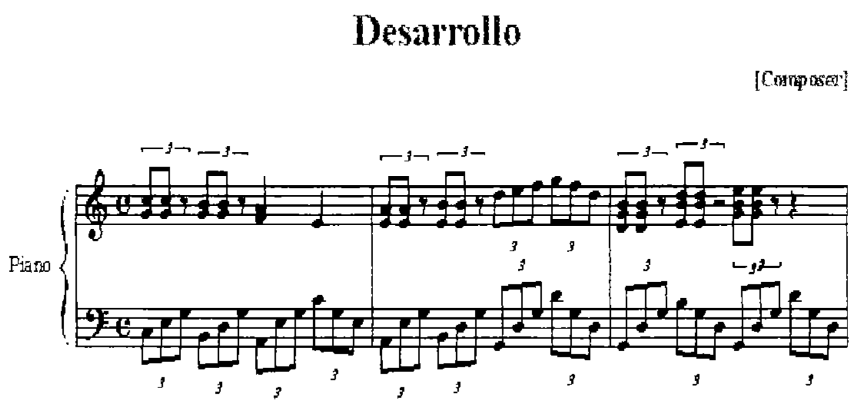
El anterior resultado ilustra el papel de los modelos de series temporales, dejando en claro la preponderancia del proceso creativo o la simple intuición sobre cualquier medio a que se pretenda delegar tal proceso.

4.3 Desarrollo

Para esta sección utilizaremos la idea esbozada en el capitulo anterior referente a sucesión es de series temporales, además de un motivo original.

La idea de un desarrollo nos abre un poco mas la puertas en cuanto a la armonía, ya que nos permite ajustar la melodía a la armonía generada por las notas resultantes de aplicar reiteradamente modelos de series temporales.

Bien, el motivo original que nos permitirá desarrollar la idea de "sucesión de series temporales" es el siguiente:



La melodía sigue el mismo patrón y supeditada como ya dijimos a la armonía formada por el acompañamiento, el que de acuerdo a nuestra transformación tiene la siguiente serie:

{0, 4, 7, -1, 2, 7, -3, 4, 7, 12, 7, 4, -3, 4, 7, -1, 2, 7, -5, 2, 7, 14, 7, 2, -5, 2, 7, 11, 7, 2, -5, 2, 7, 14, 7, 2}

De aquí obtendremos un conjunto de variaciones o variacion total a modo de desarrollo y que denotaremos por:

$$V_T = \prod_{i=1}^{n} {}^{*}V_i$$

Con $i = 1, 2 \ldots n$

Donde el índice i de la variación corresponde al i-esimo elemento de una serie de números entre cero y uno, que como se propuso se obtiene de dos maneras. *Empecemos con la serie aleatoria:*

{0.006378	0.070160	0.771759	0.489349	0.382843
0.211273	0.324005	0.564056	0.204620	0.250824
0.759064	0.349701	0.846710	0.313812	0.451935
0.971283	0.684113	0.525238	0.777618	0.553802}

Tomando los primeros diez términos, la serie total será:

$$\prod_{i=1}^{10} {}^{*}V_i = \hat{Y}(1)_{t1}\hat{Y}(1)_{t2} \ldots \hat{Y}(1)_{tn}\, \hat{Y}(2)_{t1}\hat{Y}(2)_{t2} \ldots \hat{Y}(2)_{tn} \ldots$$

Una vez mas en Excel

#	S. Orig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7	0	0	3	2	2	1	1	2	1	1
4	-1	0	1	5	3	3	1	2	4	1	2
5	2	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0
6	7	0	0	2	1	1	0	1	1	0	1
7	-3	0	1	5	3	3	2	2	4	1	2
8	4	0	0	-2	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1
9	7	0	0	3	2	2	1	1	2	1	1
10	12	0	1	5	3	3	2	2	4	2	2
11	7	0	1	9	6	5	3	4	7	3	3
12	4	0	1	5	4	3	2	2	4	2	2
13	-3	0	1	3	2	2	1	1	2	1	1
14	4	0	0	-2	-1	-1	0	-1	-2	0	-1
15	7	0	1	3	2	2	1	1	2	1	1
16	-1	0	1	5	4	3	2	2	4	2	2
17	2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
18	7	0	0	2	1	1	1	1	1	1	1
19	-5	0	1	5	4	3	2	3	4	2	2
20	2	0	0	-4	-2	-2	-1	-1	-3	-1	-1
21	7	0	0	2	1	1	1	1	1	1	1
22	14	0	1	5	4	3	2	3	4	2	2
23	7	1	1	11	7	6	3	5	8	3	4
24	2	1	1	6	4	3	2	3	4	2	2
25	-5	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
26	2	1	0	-4	-2	-2	-1	-1	-3	-1	-1
27	7	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
28	11	1	1	6	4	3	2	3	4	2	2
29	7	1	1	9	6	5	3	4	6	3	3
30	2	1	1	6	4	3	2	3	4	2	2
31	-5	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
32	2	1	0	-4	-2	-1	-1	-1	-3	0	-1
33	7	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1
34	14	1	1	6	4	3	2	3	4	2	2
35	7	1	2	11	7	6	4	5	8	3	4
36	2	1	1	6	4	3	2	3	4	2	2

Hacemos luego nuestra "corrección armónica" y nuevamente calculamos nuestra series

#	S. Orig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7	0	0	4	2	2	2	2	2	2	2
4	-1	0	2	5	4	4	2	2	4	2	2
5	2	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0
6	7	0	0	2	2	2	0	2	2	0	2
7	-3	0	2	5	4	4	2	2	4	2	2
8	4	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	7	0	0	4	2	2	2	2	2	2	2
10	12	0	2	5	4	4	2	2	4	2	2
11	7	0	2	9	7	5	4	4	7	4	4
12	4	0	2	5	4	4	2	2	4	2	2
13	-3	0	2	4	2	2	2	2	2	2	2
14	4	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	0	-1
15	7	0	2	4	2	2	2	2	2	2	2
16	-1	0	2	5	4	4	2	2	4	2	2
17	2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
18	7	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
19	-5	0	2	5	4	4	2	4	4	2	2
20	2	0	0	-3	-1	-1	-1	-1	-3	-1	-1
21	7	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
22	14	0	2	5	4	4	2	4	4	2	2
23	7	2	2	11	7	7	4	5	9	4	4
24	2	2	2	7	4	4	2	4	4	2	2
25	-5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
26	2	2	0	-3	-1	-1	-1	-1	-3	-1	-1
27	7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
28	11	2	2	7	4	4	2	4	4	2	2
29	7	2	2	9	7	5	4	4	7	4	4
30	2	2	2	7	4	4	2	4	4	2	2
31	-5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
32	2	2	0	-3	-1	-1	-1	-1	-3	0	-1
33	7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
34	14	2	2	7	4	4	2	4	4	2	2
35	7	2	2	11	7	7	4	5	9	4	4
36	2	2	2	7	4	4	2	4	4	2	2

El inconveniente de utilizar una sucesión aleatoria es que en una "serie armónica" se empieza frecuentemente con el valor cero, y si tenemos un valor de la sucesión cercano a cero, tendremos una repetición constante del mismo valor, además de que si dos valores consecutivos de la serie aleatoria son muy próximos entre si, tendremos una casi repetición de los valores del modelo de serie temporal tal y como se puede apreciar entre la serie cuatro y cinco.

La mejor forma de paliar lo antes descrito es utilizando valores de series alternantes generales, como a continuación utilizaremos

Términos de la serie alternante con valores de a y b igual a 0.1 y 0.9 respectivamente

{1., 0.0909091, 0.924242, 0.155012, 0.869297, 0.202631, 0.827631, 0.239395, 0.794951, 0.268635, 0.768635, 0.292445, 0.74699, 0.312208, 0.728874, 0.328874, 0.71349, 0.343119, 0.700262, 0.355434}

De la anterior serie utilizaremos los primeros diez términos para calcular nuestras series, y ya con nuestras correcciones obtenemos:

#	s. Orig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7	4	0	4	2	4	2	4	2	4	2
4	-1	7	4	7	4	7	5	7	5	7	5
5	2	-1	7	0	7	0	5	0	5	2	5
6	7	2	-1	2	-1	2	0	2	0	2	0
7	-3	7	2	7	4	7	4	7	4	7	4
8	4	-3	7	-1	5	-1	5	-1	5	-1	4
9	7	4	-1	4	-1	4	-1	4	-1	4	-1
10	12	7	4	7	4	7	5	7	5	7	5
11	7	12	7	12	9	11	9	11	9	11	9
12	4	7	12	7	11	9	11	9	11	9	11
13	-3	4	7	4	7	4	7	5	7	5	7
14	4	-3	4	-1	4	-1	4	-1	2	-1	2
15	7	4	-1	4	-1	4	-1	4	-1	4	-1
16	-1	7	4	7	4	7	5	7	5	7	5
17	2	-1	7	0	7	0	5	0	5	2	5
18	7	2	-1	2	-1	2	0	2	0	2	0
19	-5	7	2	7	4	7	4	7	4	7	4
20	2	-5	7	-3	5	-3	5	-3	4	-3	4
21	7	2	-3	1	-3	2	-3	2	-3	2	-3
22	14	7	2	7	4	7	4	7	4	7	4
23	7	14	9	14	9	14	9	14	9	14	9
24	2	7	14	9	14	9	14	9	12	9	12
25	-5	2	7	2	7	4	7	4	7	4	7
26	2	-5	2	-3	2	-3	2	-3	0	-3	0
27	7	2	-3	2	-3	2	-3	2	-3	2	-3
28	11	7	2	7	4	7	4	7	4	7	4
29	7	11	7	11	9	11	9	11	9	11	9
30	2	7	11	7	11	9	11	9	11	9	11
31	-5	2	7	2	7	4	7	4	7	4	7
32	2	-5	2	-3	2	-3	2	-3	0	-3	0
33	7	2	-3	2	-3	2	-3	2	-3	2	-3
34	14	7	2	7	4	7	4	7	4	7	4
35	7	14	9	14	9	14	9	14	9	14	9
36	2	7	14	9	14	9	14	9	12	9	12

En la partitura:

Desarrollo -aleatorio-

[Composer]

[Copyright]


Desarrollo -aleatorio-

Desarrollo -serie-

[Composer]

Las piezas finales tienen un resultado parecido a una pieza enarmónica, esto porque la armonía del acompañamiento y resultado de nuestra aplicación de modelos de series temporales, no sigue cadencia alguna además de que los acordes obtenidos no son tan cuadrados como en el fragmento original.

Bien puede considerarse cualquiera de ellos como un resultado utilizable en el proceso de composición, toda vez que es susceptible de mejorarse por otros procedimientos.

4.4 Comentarios finales

El empleo de modelos de series de tiempo como vehículo para obtener variaciones musicales de un tema, no deja de ser solamente una herramienta para tal objeto, dado que algunos elementos no dejan de ser subjetivos, como por ejemplo lo es el numero de *alteraciones accidentales* presentes en un modelo de serie temporal, nada nos dice si un numero determinado de las mismas es grande o pequeño.

La dificultad de encontrar modelos de series temporales que nos arrojen "series tonales" nos obliga a adoptar mecanismos no predeterminados para forzar la tonalidad, mismos que tienen que ver más con la intuición y la musicalidad que con modelos matemáticos, lo que claramente es ostensible cuando utilizamos el modelo de serie temporal como contrapunto, tal que se impone en cierta medida la armonía por medios no presentes en el modelo originalmente propuesto.

De ello que la utilización de series temporales como medio para obtener variaciones musicales, no pueda verse ni considerarse –al menos hasta el desarrollo conseguido- como una maquina generadora de música, del entendimiento de ello y del conocimiento de las reglas de composición es como puede sacarse mayor provecho de ello.

Si bien es necesario recalcar que los resultados mas acabado de consiguen después de la aplicación del modelo matemático, lo que evidencia pues la incompletes en la formulación de la propuesta, lo que no obsta para haber conseguido resultados interesantes como el Desarrollo de un fragmento bastante simple aunque original, que bien puede dar la impresión de divagar al no estar anclado a una cadencia definida, si da pues una riqueza armónica que bien puede ser aprovechada por quien tenga los conocimientos y capacidad para retomarla y presentar un desarrollo con cadencia además de rico en pasajes y matices.

El trabajo expuesto puede resumirse como: <<la tesis como un pequeño divertimento>> dado el empleo de herramientas matemáticas que en principio nada tiene que ver con la idea de generar música, y que si bien el resultado final no nos lleva por caminos delineados por la armonía, -mas bien por un dodecafonismo de estructura indefinible- si creo –percepción personal- que a la obtención de algo mas interesante que la simple producción de notas en forma aleatoria.

<<Ars Longa Vita Brevis>> Para quien sabe de la brevedad de nuestro existencia física, y que justifica todo esfuerzo y todo trabajo hecho por amor al arte.

Apéndice

Algunas definiciones y teoremas sobre sucesiones y series

Habiéndose utilizado sin anterior introducción la serie armónica, así como algunas de sus propiedades, creemos conveniente presentar aquí una descripción de la misma, así como un breve resumen de algunas de sus propiedades –por ejemplo, de los criterios de convergencia solo presentamos los estrictamente necesarios-. Necesitamos además, algunas definiciones y teoremas.

Sucesiones

Definición:

Sea $\{a_n\}$ una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Los valores de la función $a_1, a_2, a_3 \ldots$ se llaman términos de la sucesión.

Con respecto al imite de la sucesión cuando $n \to \infty$

$\text{Lím}_{n \to \infty} a_n = L$

Donde para cada $\varepsilon>0$ existe $M>0$ tal que $| a_n - L | < \varepsilon$ siempre que $n > M$; si L es finito la sucesión es convergente, de lo contrario es divergente.

Puesto que una sucesión se ha definido como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, y la definición del Límite de una secuencia es análoga a la de una función de variable real, entonces:

Teorema del límite de una secuencia

Existe la función f de variable real tal que

$\text{Lím}_{x \to \infty} f(x) = L$

Si s es una secuencia tal que s(n) = f(n) para cada entero positivo n, entonces

$\text{Lím}_{n \to \infty} s(n) = L$

Series

Definición:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita entonces

$_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

se llama serie infinita; y los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se llaman términos de la serie.

Para identificar a una serie con una sucesión de sumas parciales, hacemos lo siguiente: Para una serie infinita $_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n$, llamaremos a

$S(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

La enésima suma parcial; Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S -ya que es una secuencia-, diremos que la serie es convergente, de lo contrario la llamaremos divergente. Además para cualquier entero positivo N, las series

$_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

y

$_{n=N+1}\Sigma^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$

Son ambas convergentes o divergentes.

Algunos criterios de convergencia para series

Criterio del término n

Si la sucesión $\{a_n\}$ cuando $n \to \infty$, no converge a 0,

entonces la serie $_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n$, Diverge.

Prueba:

Ya que convenientemente es mas fácil probar lo anterior en orden invertido, tenemos que si $_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n$, converge, entonces $\{a_n\}$ converge a 0.

supongamos que dada una serie esta converge, y que

$_{n=1}\Sigma^{\infty} a_n = \text{Lím } S_n = L$

y puesto que

$\text{Lím}_{n\to\infty} S_n = \text{Lím}_{n\to\infty} S_{n-1}$

Además como el límite existe

$\text{Lím}_{n\to\infty} S_n = \text{Lím}_{n\to\infty} S_{n-1} = L$

Luego

$S_n = S_{n-1} + a_n$

Entonces

$L = \text{Lím}_{n\to\infty} S_n = \text{Lím}_{n\to\infty} S_{n-1} + a_n$

$= \text{Lím}_{n\to\infty} S_{n-1} + \text{Lím}_{n\to\infty} a_n = L + \text{Lím}_{\to\infty} a_n$

Lo cual exige que $\text{Lím}_{\to\infty} a_n = 0$, es decir que $\{a_n\}$ converja a cero.

Criterio integral

Dado que una integral es una suma, puede usarse como prueba de convergencia de una serie; Veamos.

Sea f una función de variable real, continua y decreciente en $x \geq 1$, además $\{a_n\}$ una sucesión donde $a_n = f(n)$, para todo n entero y positivo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

son ambas convergentes o divergentes, además si la serie converge a S, el resto $R_N = S - S_N$ esta acotado entre

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Prueba:

Comenzamos haciendo una partición del intervalo [1, n] en n−1 partes, con lo que tenemos $\Delta x = (n-1)/(n-1) = 1$; con $\Delta x = 1$ el área total de los rectángulos inscritos es:

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n)$$

y el área total de los rectángulos circunscritos es:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1)$$

sabemos que el área exacta bajo la grafica de f y acotada por las rectas $x = 1$ y $x = n$, es $\int_1^{n} f(x)\,dx$, entonces

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

usando la suma parcial $S_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ denotamos lo anterior como:

$$S_n - f(1) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \leq S_{n-1}$$

Ahora para $n \to \infty$, supongamos que ${}_1\int^{\infty} f(x)\,dx$ converge a L, lo anterior implica que $S_n - f(1) \leq L$ entonces $S_n \leq L + f(1)$, lo cual implica que S_n es acotada, como además supusimos que S_n es decreciente, podemos concluir que ${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\, a_n$ es convergente –no estamos diciendo que e Límite de $\{S_n\}$ para $n \to \infty$ sea igual a ${}_1\int^{\infty}$ $f(x)\,dx$, únicamente que $\{S_n\}$ converge-. Para la parte complementaria del teorema, si la integral

$\text{Lím}_{n \to \infty}\, {}_1\int^{n} f(x)\,dx$, diverge; entonces la desigualdad

${}_1\int^{n} f(x)\,dx \leq S_{n-1}$

implica que $\{S_n\}$ diverge, luego ${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\, a_n$ diverge

Para la parte final, referente al resto $R_N = S - S_N$; Tomamos un n y un N enteros y positivos, donde $n>N$

$S_n - f(1) \leq {}_1\int^{n} f(x)\,dx$

y

$S_N - f(1) \leq {}_1\int^{N} f(x)\,dx$

restando ambas desigualdades

$S_n - S_N \leq {}_N\int^{n} f(x)\,dx$

tomando el Límite cuando $n \to \infty$

$R_N \leq {}_N\int^{\infty} f(x)\,dx$

Convergencia de una p-serie

Utilizando el criterio integral para determinar la convergencia o no convergencia de una *p-serie* tenemos que:

${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\, 1/n^p$ converge, sí

${}_1\int^{\infty} 1/x^p\,dx$; también converge, entonces

$${}_1\int^{\infty} 1/x^p \, dx = \text{Lím}_{b\to\infty} \; {}_1\int^{b} 1/x^p \, dx$$

$$= \text{Lím}_{b\to\infty} \; {}_1\int^{b} x^{-p} \, dx = \text{Lím}_{b\to\infty} \; x^{-p+1}/-p+1 \;|_1^{\,b}$$

$$= \text{Lím}_{b\to\infty} \; (b^{-p+1}/-p+1) - (1^{-p+1}/-p+1)$$

$$= 1/(-p+1) \; [\text{Lím}_{b\to\infty} \; b^{-p+1} + \text{Lím}_{b\to\infty} \; -1]$$

$$= 1/(-p+1) \; [\text{Lím}_{b\to\infty} \; 1/b^{p-1} + \text{Lím}_{b\to\infty} \; -1]$$

El cual converge sí y solo sí $p-1>0$, lo cual implica que una *p-serie* converge solo para valores de p mayores que uno.

Convergencia de una serie alternante

Una serie alternante es aquella de la forma:

$${}_{n=1}\Sigma^{\infty} \; (-1)^n \, a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$$

ó

$${}_{n=1}\Sigma^{\infty} \; (-1)^{n-1} \, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

El primer caso corresponde al caso en que los términos negativos de la serie son los términos impares, y el segundo los términos pares.

Una serie alternante converge puesto que se verifique:

$\{S_n\}$ es una sucesión decreciente de *términos positivos* y

$\text{Lím}_{n\to\infty} a_n = 0$

Entonces ${}_{n=1}\Sigma^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge

Prueba:

Tomemos las siguientes sumas parciales

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$

Entonces $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente y $\{S_{2n-1}\}$ es a su vez no creciente, además

$S_2 \leq S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} < S_{2n-1} \leq S_1$

Por lo tanto $\{S_{2n}\}$ tiene como cota superior a S_1 y $\{S_{2n-1}\}$ tiene como cota inferior a S_2. por tanto $\{S_{2n}\}$ como $\{S_{2n-1}\}$ son convergentes, y

$\text{Lím}_{n\to\infty} S_{2n-1} - \text{Lím}_{n\to\infty} S_{2n}$

$= \text{Lím}_{n\to\infty} S_{2n-1} - S_{2n}$

$= \text{Lím}_{n\to\infty} a_{2n} = 0$

Lo anterior implica que S_{2n-1} y S_{2n} convergen al mismo punto, al cual llamaremos c, luego

$\text{Lím}_{n\to\infty} S_n = c.$

Serie armónica.

Una serie de la forma:

${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\ 1/n^p = 1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + \ldots$

definida para p>0; Se conoce con el nombre de *p-serie*, para el caso particular en que p =1, la *p-serie* recibe el nombre de serie armónica.

${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\ 1/n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$

Una serie armónica general es aquella definida por:

${}_{n=1}\Sigma^{\infty}\ 1/(an + b)$

En música, los llamados pitagóricos conocían intuitivamente a tal serie, ya que estudiando las propiedades del sonido sabían que el tono producido por una cuerda era función de la longitud de la misma, así mismo sabia que ciertas relaciones producían sonidos eufónicos, es decir cuerdas de idéntico material, grosor, tensión, y relaciones de longitud: 1, 1/2, 1/3 . . . –una serie armónica formada por las longitudes de las cuerdas- producen tonos armónicos.

Sabemos ya que la *p-serie*:

$_{n=1}\Sigma^{\infty}\ 1/n^p = 1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + \ldots$

Para p =1

$_{n=1}\Sigma^{\infty}\ 1/n = 1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$

Llamada serie armónica, es divergente puesto que p no es mayor que uno, sin embargo una serie definida por:

$_{n=1}\Sigma^{\infty}\ (-1)^{n+1}/n = 1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$

Y que recibe el nombre de *serie armónica alternante;* Cumple con el criterio:

$a_{n+1} = 1/n+1 \leq 1/n = a_n$

ya que n+1 > n, para todo entero n, y además

$\text{Lím}_{n\to\infty} 1/n = 0.$

Por tanto la serie armónica alternante es convergente. Habiéndose corroborado lo anterior, queda como interrogante el "Si es convergente ¿a dónde converge?". Para tratar de aproximara una respuesta, veamos lo que dice el teorema sobre el *resto de las series alternantes*.

Si una serie alternante es convergente, entonces el resto R_N implicado al aproximar una serie por la suma parcial S_N, es menor en valor absoluto al primer termino no tomado en cuenta en la aproximación de la suma.

Prueba:

Sea una serie $_{n=1}\Sigma^{\infty}$ $(-1)^{n-1}$ a_n que satisface el criterio de convergencia, entonces en resto R_N tiene como suma:

$$R_N = S - S_N = {}_{n=1}\Sigma^{\infty} (-1)^{n-1} a_n - {}_{n=1}\Sigma^{N} (-1)^{n-1} a_n$$

$$R_N = (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} + \ldots$$

$$R_N = (-1)^N (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + \ldots)$$

$$|R_N| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + a_{N+5} \ldots$$

$$|R_N| = a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \ldots$$

$$|R_N| \leq a_{N+1}$$

En consecuencia la serie armónica alternante

$$_{n=1}\Sigma^{\infty} (-1)^{n+1}/n = 1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$$

Es convergente con suma igual a S, y puede aproximarse por la suma de N términos:

$$S = S_N + R_N$$

En donde

$$|R_N| \leq a_{N+1}$$

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$$

Glosario

Acorde. En música se le denomina al conjunto de sonidos ejecutados en forma simultanea; Un acorde recibe el nombre de la nota a partir de la cual se construye y se clasifican por el intervalos que se genera entre sus notas, el tipo de acorde mas habitual es la tríada, que esta compuesta por una tercera y una quinta (dos terceras consecutivas), como ejemplo supongamos que en una tríada el primer intervalo es una tercera mayor y el segundo es una tercera mayor, en este caso se trata de una tríada o acorde mayor, y viceversa si el primero es menor e y el segundo es mayor se trata de un acorde menor (por ejemplo: re, #fa y la forman un acorde mayor y re, fa y la forman uno menor).

Alteraciones accidentales. nota que no pertenece al la tonalidad de una pieza y que aparece únicamente durante el desarrollo de la misma.

Escala. En la música tonal es la sucesión de ocho sonidos por grados conjuntos, tales grados tienen la siguiente denominación: Tónica, Supertónica, Mediante, Subdominante, Dominante, Superdominante, Sensible y Octava (la cual vuelve a ser la tónica) El nombre que recibe una escala depende de la nota en la cual esta empiece, y se clasifica de a cuerdo al numero de tonos y medios tonos que contenga así como su ubicación dentro de esta.

Intervalo. Es la diferencia de acuidad o gravedad que existe entre dos sonidos, y es según el numero de grados que haya en el intervalos es el nombre que recibe, así puede ser: segunda, tercera, cuarta, quinta, sexta y séptima.

Melodía. sucesión de notas de tono y duración definidos, que crean una expresión musical coherente; En la música tonal el carácter de una melodía esta especificada por el uso de los modos.

Quadrivium o Cuadrivio. En la antigua Grecia y hasta el medioevo, conjunto de las cuatro artes comprendidas por: aritmética, geometría, astronomía y música.

Ritmo. La música como un artificio en el tiempo, esta construida sobre una estructura métrica (pulsos regulares), que puede ser implícita (como en la música clásica), o explicita (como una batería en la música pop).

Timbre. Cualidad de los sonidos que nos permite distinguir entre dos o mas de idéntica altura, duración e intensidad, esta cualidad depende de los componentes armónicos del sonido y se percibe mejor en el ataque de la nota.

Tonalidad. en un sentido, es la organización de los sonidos o notas que componen la música, en torno a una nota determinada llamada tónica, esta sirve como punto focal. En otro sentido, la tonalidad se refiere al sistema armónico que dominó la música occidental hasta principios del siglo XX, con la llegada de la corriente denominada dodecafonismo.

Tono. en música, se refiere a la altura de un sonido, el cual es determinado por la rapidez de las vibraciones que lo producen. El valor exacto de los tonos ha variado con el paso del tiempo, aunque la norma actual establece el valor del La central en 440Hz.

Variación. Uno de los principios fundamentales de la composición musical, y forma musical basada en dichos principios. Variar una idea musical significa cambiar partes de ella a la vez que se conservan otras sin alterar, como en una canción folclórica en la que la segunda frase tiene una nueva melodía pero el mismo ritmo que la primera; o en la manipulación continuada de una serie dodecafónica, como en las obras del compositor austriaco Arnold Schönberg.

Bibliografía

- Pronósticos en los negocios. John E. Hanke; Arthur G. Reitsh. Ed. Prentice Hall.
- Elementos de los pronósticos. Francis Diebold. Thomson Editores.
- Econometría, modelos y pronósticos. Robert S. Pinndyc; Daniel L. Rubinfeld. Ed. Mc Graw Hill.
- Métodos de pronósticos. Spyros Makridakis; Steven C. Wheelwrigth. Ed. Limusa.
- Maestros de la música. Enciclopedia Temática. Ed. Planeta Agostini.
- Musicalia. Enciclopedia y guía de la música clásica. Ed. Salvat.
- Juego de dados musical de Mozart. Folleto publicado por el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas.
- Música y matemáticas. Susana Tiburcio. Articulo publicado por la revista "Elementos" en su edición no. 44 Vol. 18 Diciembre-Febrero del 2002.
- Apuntes de Clase. Hernández Norma.
- Análisis Matemático. Norman B. Hasser; Joseph P. La Salle; Joseph A. Sullivan. Ed. Trillas.
- Calculo y Geometría Analítica. Roland E. Larson; Robert P. Hostetler. Ed. McGraw Hill.
- Estadística Matemática con Aplicaciones. J. Freund; R. Walpolle. Ed. McGraw Hill
- Introducción a la teoría de la estadística. Mood. Edición digital: Educación para todos. Talleres estudiantiles Ciencias UNAM