

00384



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

COLORACIONES Y CONJUNTOS ACICLICOS EN
DIGRAFICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS
(MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

M I K A O L S E N

DIRECTOR DE TESIS: MAT. VICTOR NEUMANN LARA

MEXICO, D. F.

ENERO 2005

m. 340634



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Coloraciones y Conjuntos Acíclicos en Digráficas.

Mika Olsen

25 de enero de 2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Mika Olsen

FECHA: 28/01-2005

FIRMA: Mika Olsen

A Nikolaj

A Emil

A Víctor

Agradecimientos

Le agradezco a Víctor Neumann Lara por haberlo conocido, el tiempo que me dedicó durante los ocho años que fui su estudiante, todas sus pláticas y sus regaños. Lo extraño. Me sigo fijando si la ventana de su cubículo esta abierta, cuando paso por debajo en camino de la facultad al Instituto. Todavía espero verlo en el café, sentado en el sillón para estar en el chisme, ofrecer un buen café (si es que no se le perdió su caja de café) y mi hijo sigue preguntando por los dulces del señor del cubículo de allá (la sala del café). Víctor, espero que te guste como quedó este trabajo sobre las dicordancias y concordancias.

A Hortensia Galeana y Bernardo Llano por haber asumido la responsabilidad de terminar éste trabajo y al Roli por el apoyo y por haberme ayudado a escribir un artículo, aún que yo traía a un bebe quejandose a todo pulmón.

A mi novio.

A Nikolaj y a Emil por complicarme este trabajo y sacarme del mundo de las matemáticas, aún cuando no lo necesitaba.

A mi comadre, por ser mi paño de lagrimas, mi compañera de borracheras, mi amiga. Por haber estado ahí desde que soy mexicana de corazón.

Al CBSJ por ser un lugar para estar triste, contento, con ganas de platicar, de escuchar o simplemente estar. Por ser la familia mexicana que nunca tuve.

A Pilar por su amistad incondicional.

A Mukuy por ser tan buena platicadora.

A los tocanieros, a los cepaparianos, por crear un espacio donde tanto los niños como nosotros somos el centro.

A "los actuarios", no más pa' que vean que sí se puede.

A mi familia política, por hacerme sentir parte de su familia, por aceptarme como soy.

Til min familie Vibeke, Lars og Henrik:

Tak for den støtte i altid har givet mig, den tillid i har vist mig og frem for alt, fordi jeg stadig føler mig hjemme, selv efter 14 aar i México.

Índice General

Agradecimientos	i
Introducción	iii
0.1 Antecedentes Históricos	iii
0.2 La contribución de nuestra investigación	x
1 Preliminares	1
1.1 Conceptos preliminares	1
1.1.1 Gráficas	1
1.1.2 Digráficas	3
1.1.3 Particiones y Coloraciones	8
1.1.4 Construcciones en digráficas	9
1.1.5 Suma Lexicográfica (Suma de Zykov)	12
1.2 Resultados preliminares	13
2 Discordancia	17
2.1 Resultados Fundamentales	17
3 Moldes y Orígenes de torneos regulares.	33
3.1 Moldes	33
3.2 \mathfrak{D} -orígenes y \mathfrak{D} -destinos	38
3.2.1 Parejas admisibles y parejas adecuadas	43
3.3 Ejemplos pequeños	54
3.3.1 \mathfrak{D} -origen con $ U = 1$	54
3.3.2 \mathfrak{D} -origen con $ U = 3$	55
3.3.3 \mathfrak{D} -origen con $ U = 5$	57
3.3.4 \mathfrak{D} -origen con $ U = 7$	59
3.4 Caracterización de los \mathfrak{D} -orígenes	65

4	Moldes de orden pequeño	69
4.1	Automorfismos	69
4.2	Contando moldes	71
4.2.1	Moldes de orden 9	72
4.2.2	Moldes de orden 11	76
4.2.3	Moldes de orden 13	93
5	Moldes mansos	95
5.1	Clasificación de \mathcal{D} -flechas	95
5.2	Moldes mansos	98
5.2.1	Construcción del ciclo auxiliar \mathbf{C}	99
5.3	W_0 -subtorneos fieles de moldes mansos	104
6	Coloraciones	115
6.1	La familia de torneos mansos	119
6.2	La familia del molde $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$	121
6.3	La familia del molde $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle$	133
	Definiciones y Notaciones	135
	Índice de Figuras	137
	Bibliografía	139

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de la clase de torneos regulares a partir de la digráfica de discordancia. La lista de artículos de investigación dedicados específicamente al estudio de torneos regulares (no circulantes) no es muy extensa. Sin embargo recientemente han aparecido varios artículos acerca de dos conceptos, el de dominación [15, 14, 12, 11, 17, 13, 7, 6, 11, 17, 13] y el de parejas mixtas [5] que coinciden entre ellos y con el concepto de discordancia para la clase de torneos regulares. Por eso revisamos primero los resultados obtenidos en artículos recientes, acerca de la dominación y de parejas mixtas.

0.1 Antecedentes Históricos

Una cadena alimenticia se puede modelar con una digráfica D (la digráfica de la cadena alimenticia) como sigue: cada uno de sus vértices representa una especie y si la especie x caza a la especie y , entonces la flecha xy está en la digráfica D . Si tanto la especie x como la especie y cazan a la especie z decimos que x y y compiten por la especie z . Es natural considerar la *gráfica de competencia* $C(D)$ de D en la cual dos vértices son adyacentes cuando las especies que respresentan compiten por otra especie. En otras palabras $x, y \in V(C(D))$ son adyacentes en $C(D)$ si existe $z \in V(C(D))$ tal que $xz, yz \in F(D)$, es decir, si las exvecindades de x y y en $C(D)$ se intersectan. Claramente la definición de $C(D)$ se puede extender a toda digráfica D . La gráfica de competencia fue introducida por Cohen en [8, 9] y luego estudiado por Cohen en [9] y Lundgren en [20].

Dos vértices forman una *pareja dominante* en una digráfica D si para todo vértice $z \in V(D) \setminus \{x, y\}$ al menos una de las flechas xz y yz está en la digráfica D . La *gráfica de dominación* $dom(D)$ de una digráfica D es la

gráfica cuyos vértices son los vértices de D y xy es una arista de $\text{dom}(D)$ cuando x y y forman una pareja dominante de D , es decir, si la unión de sus exvecindades cubren $V(D) \setminus \{x, y\}$. La gráfica de dominación $\text{dom}(T)$ de un torneo T es el complemento de la gráfica de competencia del torneo T^{op} que se obtiene de T invirtiendo la orientación (esto no es cierto si la digráfica no es un torneo). Es fácil ver que la gráfica de dominación de un torneo tiene menos aristas que la gráfica de competencia (la gráfica de dominación de un torneo de orden n tiene a lo más n aristas Corolario 3.1 en [15]), por lo que resulta más sencillo trabajar con la gráfica de dominación. Además una vez caracterizadas las gráficas de dominación de los torneos quedan caracterizadas las gráficas de competencia de torneos.

Dos vértices forman una *pareja mixta* en un torneo T si para todo vértice $z \in V(T) \setminus \{x, y\}$ exactamente una de las flechas xz, yz están en $F(T)$. La *gráfica de parejas mixtas* $MP(T)$ de un torneo T (mixed pair en inglés) es la gráfica cuyos vértices son los vértices de T y $x, y \in V(T)$ son adyacentes en $MP(T)$ cuando x y y forman una pareja mixta en T .

Definición 0.1 Definimos el torneo circulante $\vec{C}_n \langle \emptyset \rangle$ como el torneo sobre el conjunto de vértices \mathbb{Z}_{2m+1} y $vw \in F(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle)$ si $w - v \in \mathbb{Z}_m$.

Fisher et.al. caracterizaron en [15] las posibles estructuras de una gráfica de dominación de un torneo. Una *oruga* es un árbol que al borrar sus vértices terminales resulta una trayectoria (tal vez trivial) la cual es la columna vertebral de la oruga, y un *ciclo ciliado* es una gráfica que al borrar sus vértices terminales resulta un ciclo. En éste artículo encontraron que

Lema 2.2 [15] Si T es un torneo de orden $n \geq 3$. Entonces C_n es subgráfica de $\text{dom}(T)$ si y sólo si $T \cong \vec{C}_n \langle \emptyset \rangle$.

Teorema 2.1 [15] Si T es un torneo de orden n , entonces o $\text{dom}(T)$ es una unión disjunta de orugas o su única componente no trivial es un ciclo impar ciliado.

Proposición 2.2 [15] Si una gráfica tiene una sólo componente no trivial conexa la cual es un ciclo impar ciliado, entonces es la gráfica de dominación de algún torneo.

Corolario 3.1 [15] Para $n \geq 2$, el máximo número posible de aristas en la gráfica de dominación de un torneo de orden n es n .

Corolario 3.7 [15] Si T es un torneo transitivo en vértices de orden n . Entonces $\text{dom}(T) = C_n$, n es impar y $T \cong \vec{C}_n \setminus \{\emptyset\}$ o $\text{dom}(T)$ no tiene aristas.

Fisher et.al. estudiaron en [14] las gráficas de dominación de torneos y extendieron algunos de sus resultados para torneos a gráficas orientadas. Encontraron que la mayoría de los torneos son libres de parejas dominantes y que

Teorema 4.1 [14] En $\text{dom}(T)$ con la orientación inducida por T , un vértice puede tener a lo más un invecino y a lo más uno de sus exvecinos pueden tener exvecinos.

Teorema 5.1 [14] Sea \vec{G} una gráfica orientada. Entonces $\text{dom}(\vec{G})$ es un bosque de orugas o su única componente no trivial es un ciclo impar ciliado.

Teorema 5.3 [14] Una trayectoria de por lo menos 4 vértices no es la gráfica de dominación de un torneo.

Fischer y Lundgren estudiaron en [12] las gráficas de dominación de torneos que son conexas. Encontraron que una gráfica de dominación de un torneo es conexa si y sólo si la gráfica es una estrella, un ciclo impar ciliado o una oruga con terminal triple. Una oruga tiene una *terminal triple* si la oruga es de longitud positiva y alguno de los vértices terminales de la columna vertebral tiene al menos tres vecinos que son vértices terminales de la oruga. La *longitud* de una oruga es la longitud de su columna vertebral.

En un artículo más reciente [11] Fisher et.al. caracterizaron las gráficas de dominación de un torneo. Un torneo T está bien - cubierto si

- (i) cualquier par de vértices $u, v \in V(T)$ los vértices u y v no forman una pareja mixta en T ,
- (ii) existe una uv -trayectoria dirigida de longitud dos.

En éste artículo encontraron que

Lema 2.3 [11] Si existe un torneo bien - cubierto de orden $n \geq 2$. Entonces la unión de n orugas no triviales es la gráfica de dominación de algún torneo.

Teorema 4.1 [11] Si G es la unión de n componentes no triviales, entonces G es la gráfica de dominación de un torneo si y sólo si:

1. $n = 1$ y G es un ciclo impar ciliado, una estrella o una oruga con una terminal triple.

Si $n \geq 2$, cada componente es una oruga y pasa uno de los siguientes casos:

2. $n = 2$ y cada oruga tiene una terminal triple o uno tiene un terminal triple y el otro es un $K_{1,3}$.

3. $n = 3$ y las tres orugas tienen un terminal triple; o dos orugas tienen un terminal triple y el otro es un $K_{1,3}$; o dos orugas son $K_{1,3}$ y el otro tiene un terminal triple.

4. $n = 5$ al menos uno de los orugas tiene un terminal triple o es un $K_{1,3}$.

5. $n = 4$ o $n \geq 6$.

Jimenez y Lundgren estudiaron en [17] los torneos cuya gráfica de dominación es conexa. Sea $U_{2n+1} \cong \vec{C}_{2n+1} \langle \emptyset \rangle$ y $U_{2n} \cong \vec{C}_{2n} \langle \emptyset \rangle \setminus \{0\}$. Un torneo T es un *torneo de ciclo ciliado* si

- los vértices de T se pueden partir en los siguientes conjuntos:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}, V_1, V_2, \dots, V_k$$

con $T[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}] \cong U_k$ (k impar),

- las flechas dentro de cada V_i arbitrarias y $x_i v_i \in F(T)$ para todo $v_i \in V_i$.
- Si $x_i x_j \in F(T[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}])$, entonces $v_i v_j, v_j x_i, x_j v_i \in F(T)$ para todo $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$.

Un torneo es un *torneo de oruga* si

- los vértices de T se pueden partir en los siguientes conjuntos:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}, V_1, V_2, \dots, V_k$$

con $T[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}] \cong U_k$ (k par y $k \geq 2$);

- las flechas dentro de cada V_i arbitrarias para $1 \leq i \leq k - 1$, las flechas dentro de $V_k \dots T[V_k]$ sin fuente y $x_i v_i \in F(T)$ para todo $v_i \in V_i$.
- Si $x_i x_j \in F(T[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}])$, entonces $v_i v_j, v_j x_i, x_j v_i \in F(T)$ para todo $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$.

Además encontraron que

Teorema 2.1 [17] La gráfica de dominación de un torneo T es una estrella $K_{1, n-1}$ si y sólo si T tiene una fuente o T tiene dos vértices distinguidos x, y tales que *i*) $yx \in F(T)$, *ii*) para todo $z \in V(T) \setminus \{x, y\}$ las flechas $xz, zy \in F(T)$ y $T \setminus \{x, y\}$ induce un torneo sin fuente.

Teorema 2.3 [17] La gráfica de dominación de un torneo T es un ciclo impar ciliado si y sólo si T es un torneo de ciclo ciliado.

Teorema 2.4 [17] La gráfica de dominación de un torneo T es una oruga (no estrella) si y sólo si T es un torneo de oruga.

En [13] Fisher y Lundgren completaron la caracterización de las gráficas de dominación, al caracterizar las gráficas de dominación con vértices aislados. Sea G una gráfica, $i(G)$ es el mínimo número positivo n tal que G unión n vértices aislados es la gráfica de dominación de algún torneo; si no existe tal n , entonces $i(G)$ es infinito. En éste artículo encontraron que

Proposición 2 [13] Si G es gráfica de dominación de un torneo sin fuente, entonces $i(G) = 1$.

Corolario 3 [13] Si G es no conexa y G es gráfica de dominación de un torneo, entonces $i(G) = 1$.

Corolario 4 [13] Sea $i(G) = n < \infty$. Para todo $m \geq n$, G unión m vértices aislados es la gráfica de dominación de algún torneo.

Teorema 5 [13] Suponiendo que G es un bosque de orugas no triviales o $G = K_1$, entonces $i(G) = 1$ salvo en los siguientes casos:

$$i(P_4) = 3, i(K_1) = 6, i(K_2) = 6, i(K_{1,2}) = 4, i(K_{1,2} \cup K_{1,2}) = 2, \\ i(K_{1,3}) = 3, i(K_{1,2} \cup K_2) = 2, i(K_2 \cup K_2) = 4, i(K_{1,3} \cup K_2) = 2.$$

Como fue mencionado antes, automáticamente quedan caracterizados las gráficas de competencia de los torneos.

En [5] Browser et.al. caracterizaron las gráficas de parejas mixtas. Ellos probaron que

Lema 2 [5] Si T es un torneo de orden n y S es la orientación de $MP(T)$ inducida por T , entonces tanto la máxima invalencia como la máxima exvalencia es a lo más 1.

Corolario 1 [5] Para un torneo T , la máxima valencia de $MP(T)$ es 2.

Lema 3 [5] $MP(U_n) = \begin{cases} P_n & \text{si } n \text{ es par} \\ C_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Lema 4 [5] Si T es un torneo de orden n y $MP(T)$ tiene una subgráfica isomorfa a P_n , entonces $T \cong U_n$.

Lema 5 [5] Si S es un subtorneo de T , entonces $MP(T) |_{V(S)}$ es una subgráfica de $MP(S)$.

Teorema 1 [5] Si $n \geq 3$ y $MP(T)$ tiene una subgráfica isomorfa a C_n , entonces n es impar, T es de orden n y $MP(T) \cong C_n$.

Corolario 2 [5] Si $MP(T)$ no es conexa, entonces es un bosque de trayectorias.

Browser et.al. demuestran que las gráficas de parejas mixtas de un torneo son de los siguientes tipos: un ciclo de longitud impar o un bosque de trayectorias.

Más aún que cualquiera de este tipo de gráficas es gráfica de parejas mixtas salvo si la gráfica es: un ciclo de orden par, una sola trayectoria de orden impar, un bosque de dos trayectorias cuyos órdenes suman un número par o un bosque de tres trayectorias cuyos órdenes suman un número impar.

Con ésto quedan caracterizadas las gráficas de parejas mixtas y por lo tanto también las gráficas de nichos que es justo el complemento de la gráfica de parejas mixtos. Dos vértices x, y forman un nicho en una digráfica D si existe un vértice $z \in V(D) \setminus \{x, y\}$ tal que las flechas xz, yz están en $F(D)$ o las flechas zx, zy están en $F(D)$. La gráfica de nichos $N(D)$ de una digráfica D es la gráfica cuyos vértices son $V(D)$ y $x, y \in V(D)$ son adyacentes en $N(D)$ si y sólo si forman un nicho en T .

Nótese que el concepto de nichos generaliza el concepto de competencia y el concepto de dominación generaliza el concepto de parejas mixtas. En el caso de torneos regulares el concepto de dominación y parejas mixtas coinciden (Lemma 2.2 [7]).

Cho et.al. [7, 6] caracterizaron las gráficas de dominación de torneos regulares. Ellos denotan los bosques de $p (= m + n)$ trayectorias (m trayectorias de orden par y n trayectorias de orden impar) por $\wp(m, n)$ y $\wp^*(m, n)$ si ninguna trayectoria es trivial. En T cada trayectoria es dirigida. T_o es el subtorneo inducido por los vértices terminales de las trayectorias de orden impar de la gráfica de dominación, T_e es el subtorneo inducido por los vértices terminales de las trayectorias de orden par y T_b es el subtorneo inducido por los vértices terminales de todas las trayectorias de la gráfica de dominación. En [7] prueban que:

Lema 2.2 [7] Sea T un torneo regular de orden n . Entonces

$$MP(T) = \text{dom}(T).$$

Teorema 2.7 [7] Si T es un torneo regular y $\text{dom}(T)$ tiene una subgráfica isomorfa a C_n ($n \geq 3$), entonces n es impar, y $\text{dom}(T) \cong C_n$.

Teorema 2.8 [7] Si T es un torneo regular de orden $n \geq 3$, entonces $\text{dom}(T)$ es un ciclo C_n o un bosque de dos o más trayectorias.

Proposición 3.1 [7] Sea $G \in \wp(m, n)$ la gráfica de dominación de un torneo regular T . Si P_n es una trayectoria en G , entonces $T[P_n] \cong U_n$.

Lema 3.2 [7] Sea $G \in \wp(m, n)$ la gráfica de dominación de un torneo regular T . Entonces n es un número impar, y T_o es un torneo regular.

Sea G una gráfica que es la unión disjunta de m trayectorias de orden par y n trayectorias de orden impar. Decimos que T es un *torneo de trayectorias* sobre $V(G)$ si $\text{dom}(T) = G$. Hacen notar que un torneo de trayectorias para una gráfica $G \in \wp(m, n)$ queda completamente determinado una vez determinado el subtorneo T_b .

Lema 3.3 [7] Supongase que $G \in \wp(m, n)$ es la unión de $p (= m + n)$ trayectorias R_1, \dots, R_p , y T es torneo de trayectorias de G . Si T_o es un torneo regular y cada vértice de T_e tiene $(n + 1)/2$ exvecinos de T en T_o , entonces T es un torneo regular.

Teorema 3.4 [7] Si $G \in \wp^*(m, n)$, entonces

- (i) Si T es un torneo regular de trayectorias para G tal que T_b está bien - cubierto, entonces G es la gráfica de dominación de T .
- (ii) Si G es la gráfica de dominación de un torneo regular T , entonces T es un torneo regular de trayectorias para G tal que cualquier par de vértices de T_b no son discordantes en T_b .

Teorema 3.14 [7] Si $G \in \wp^*(m, n)$, entonces

- (i) Si $m = 0, 1, 2, 4$, entonces G es la gráfica de dominación de un torneo regular si y sólo si n es impar y $m + n \geq 7$.
- (ii) Si $m = 3$ o $m \geq 5$, entonces G es la gráfica de dominación de un torneo regular si y sólo si n es impar.

En [6] prueban que éste último teorema también es cierto para las gráficas en $\wp(m, n)$.

La orientación de las gráficas de dominación se estudió en [11, 14] donde determinaron que en el caso de las componentes que son trayectorias, la trayectoria es dirigida y en el caso de una oruga su columna vertebral está dirigida y los vértices terminales son todos vértices finales de las flechas, salvo tal vez un sólo vecino (que es vértice terminal) del vértice inicial de la columna vertebral.

0.2 La contribución de nuestra investigación

Nuestro interés está centrado en el estudio de la clase de torneos regulares (especialmente los que no son circulantes). Nos interesan sus estructuras y coloraciones. En ésta tesis estudiamos la estructura y la coloración mediante el concepto de la discordancia.

Sea D una digráfica, $u, v \in V(D)$ y $S \subset V(D)$. Decimos que u es *discordante* con v modulo S en D cuando $N^+(u, S \setminus \{u, v\}) = N^-(v, S \setminus \{u, v\})$ y $N^-(u, S \setminus \{u, v\}) = N^+(v, S \setminus \{u, v\})$ y lo denotamos $u \mid v \pmod{S}$. La *digráfica de discordancia*, $\mathfrak{D}^\rightarrow(D)$, se define como sigue: $V(\mathfrak{D}^\rightarrow(D)) = V(D)$ y $uv \in E(\mathfrak{D}^\rightarrow(D))$ si $u \mid v \pmod{D}$ y $uv \in E(D)$.

Para el caso de los torneos regulares el concepto de discordancia coincide con el concepto de parejas mixtas y el de dominación. Para el estudio de las

estructuras introducimos los conceptos de molde y \mathfrak{D} -origen. Decimos que un torneo regular es un *molde* si los componentes no triviales de su digráfica de discordancia son de orden dos.

Primero estudiamos las digráficas de discordancia, encontrando que las componentes débiles son trayectorias dirigidas (probablemente triviales). El hecho más importante aquí es que todos los torneos regulares (salvo la familia de torneos cíclicos, $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$) pueden ser reconstruidos a partir de la familia de los moldes. Este hecho hace indispensable el estudio de los moldes.

Estudiamos el procedimiento para reconstruir - usando sumas lexigráficas y revirtiendo ciertos conjuntos de flechas - cualquier torneo regular (salvo la familia de torneos cíclicos) a partir de su molde y su función de pesos. Dado que el procedimiento de reconstrucción se basa en los moldes, buscamos caracterizarlos. Para ello introducimos un nuevo concepto - el de los \mathfrak{D} -orígenes. Un \mathfrak{D} -origen es una pareja (T, u) , donde $U \subset V(T)$. Cabe mencionar que el \mathfrak{D} -origen de un molde contiene toda la información del molde. Al caracterizar los \mathfrak{D} -orígenes quedan caracterizados los moldes y con ellos las digráficas de discordancia de los torneos regulares. Más aún, a partir del molde tenemos toda una familia infinita con la misma estructura de discordancia.

Para torneos de orden pequeño, damos el número de moldes no isomorfos cuya digráfica de discordancia es la misma, además estudiamos los grupos de automorfismo de algunos de ellos. Para ello se clasificaron las flechas de discordancia de los moldes de la siguiente manera: una flecha uv de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ es una flecha \mathfrak{C} -residual si $T \setminus \{u, v\}$ es un torneo cíclico, \mathfrak{M} -residual si $T \setminus \{u, v\}$ es molde, y \mathfrak{R} -residual si la flecha uv no es ni \mathfrak{C} -residual ni \mathfrak{M} -residual. Ésta clasificación, los moldes y la dominación parten de manera muy natural a los torneos regulares en tres clases: Los cíclicos, los mansos y los salvajes (por definirse en el capítulo 5). Víctor Neumann Lara y Jorge Urrutia clasificaron en 1984 los torneos cíclicos. En ésta tesis estudiamos a los torneos mansos. Encontramos que los moldes (salvo W_0 , página 13) tienen a lo más una flecha \mathfrak{C} -residual y estos torneos son rígidos y esto nos llevó a enumerarlos. Decimos que un torneo H es fiel en otro torneo T si H es subtorneo de T y la discordancia de H es inducida por la discordancia del torneo T . Estudiamos los subtorneos fieles de torneos con una flecha \mathfrak{C} -residual. Dado que el molde W_0 es un caso especial dentro de los moldes mansos (pues es el único molde con más de una flecha \mathfrak{C} -residual) estudiamos los subtorneos isomorfos a W_0 y para cierto tipo de torneo se estima el número de subtorneos fieles isomorfos a W_0 .

Para el estudio de las coloraciones introducimos el concepto de torneo amplio y parejas preacíclicas. Estudiamos la relación entre el número dicromático de un torneo y el número dicromático de su molde; encontramos una cota inferior y superior para el número dicromático de la familia de torneos con un molde fijo en función del número dicromático del molde. Encontramos otra cota superior para el número dicromático de la familia de torneos con un molde fijo en función del número dicromático de un torneo amplio de la familia. Para algunos moldes damos el número dicromático exacto para toda su familia de torneos. Vale la pena mencionar que encontramos que tanto los moldes como los torneos mansos tienen el número dicromático igual a 3. Éste hecho hace acertado el concepto de torneos mansos dado que Víctor Neumann Lara y Jorge Urrutia probaron que los torneos cíclicos son los únicos torneos regulares 2-dicromáticos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceptos preliminares

1.1.1 Gráficas

Una *gráfica* G es una pareja $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito de vértices y $A(G)$ es el conjunto de aristas; cada arista es una pareja no ordenada $\{u, v\}$ (o simplemente uv) de sus *vértices terminales* $u, v \in V(G)$. Dos vértices $u, v \in V(G)$ son *adyacentes* si la arista $uv \in A(G)$, en este caso se dice que u y v *inducen* la arista uv . Una arista *incide* en un vértice si el vértice es uno de los vértices terminales de la arista y dos aristas son *adyacentes* si inciden en (comparten) un vértice. Cabe mencionar, que con ésta definición de aristas no es posible tener dos aristas que compartan los dos vértices terminales (*aristas múltiples*), ni aristas cuyo vértice inicial coincide con su vértice final (*lazo*).

La *vecindad*, $N(v)$, de un vértice $v \in V(G)$ es el conjunto de todos los vértices que son adyacentes a él, $N(v) = \{w : vw \in A(G)\}$, y la *valencia*, $d(v)$, de un vértice $v \in V(G)$ es el número de aristas que inciden en él, $d(v) = |\{w : vw \in A(G)\}| = |N(v)|$. $\Delta(G)$ es la *máxima valencia* de los vértices de G , es decir, $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$ y $\delta(G)$ es la *mínima valencia* de los vértices de G , es decir, $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$.

Una gráfica G' es una *subgráfica* de la gráfica G si $V(G') \subseteq V(G)$ y también $A(G') \subseteq A(G)$. Una subgráfica es *generadora* si $V(G') = V(G)$ y la *subgráfica inducida* por $V' \subseteq V(G)$ es la gráfica G' tal que $V(G') = V'$ y

$a \in A(G')$, $a = vw$, si y sólo si $v, w \in V(G')$ y $a \in A(G)$. La subgráfica de G inducida por $V' \subset V(G)$ se denota $G[V']$.

Un *camino* en G es una sucesión alternante de vértices y aristas que empieza y termina en vértices y lo denotamos $(v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_n)$ donde $a_i = v_i v_{i+1} \in A(G)$, e $i = 0, 1, \dots, n-1$, a menudo lo denotaremos únicamente por la sucesión de sus vértices (v_0, v_1, \dots, v_n) con $a_i = v_i v_{i+1} \in A(G)$, e $i = 0, 1, \dots, n-1$; un *paseo* en G es un camino en el que no se repiten aristas y una *trayectoria* en G es un camino en el que no se repiten vértices, a la trayectoria de n vértices la denotamos P_n ; la longitud $l(\lambda)$ de un camino/paseo/trayectoria λ es el número de sus aristas (o bien, el número de sus vértices menos 1). Un *ciclo* en G es una trayectoria de longitud al menos tres y "cerrada", es decir, que únicamente el vértice inicial y final coinciden, al ciclo de n vértices lo denotamos C_n o bien, $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$, $l(C_n) = n$; una gráfica es *acíclica* si no contiene ciclos.

Una gráfica es *conexa* si entre cualesquiera dos vértices $u, w \in V(G)$ hay una trayectoria; en una gráfica no conexa, las subgráficas maximales conexas se llaman *componentes*. Una gráfica conexa y acíclica se llama un *árbol*, y una subgráfica G' de G , G' árbol, es un *árbol generador* si $V(G') = V(G)$. Un *bosque* es una gráfica acíclica y no necesariamente conexa; una subgráfica G' de G es un bosque generador si $V(G') = V(G)$.

Una gráfica es *completa* si todos los vértices de G son adyacentes dos a dos, a la gráfica completa de n vértices la denotamos K_n . El *complemento* \overline{G} de una gráfica G es la gráfica cuyos vértices son $V(G)$ y dos vértices son adyacentes en \overline{G} si y sólo si no lo son en G . Nótese que $\overline{K_n}$ es la gráfica de orden n , sin aristas. Si $S \subset V(G)$, entonces la gráfica $G \setminus S$ tiene $V(G) \setminus S$ como vértices y $u, v \in V(G \setminus S)$ son adyacentes si lo son en G . Si $E \subset A(G)$, entonces la gráfica $G \setminus E$ tiene $V(G)$ como vértices y sus aristas son $A(G) \setminus E$. Si $H \subset G$, entonces la gráfica $G \setminus H$ tiene es la gráfica G inducida por $V(G) \setminus V(H)$. El *residuo* de una subgráfica H de G es $G \setminus H$. Un conjunto *independiente* de vértices es un conjunto tal que no hay aristas entre los vértices del conjunto. Una gráfica es *bipartita* si hay una partición de sus vértices en dos conjuntos independientes, y tal partición se llama una bipartición.

Sea G una gráfica, \vec{G} es una *orientación* de G si a cada arista $uv \in A(G)$

se le asocia exactamente una dirección: si $uv \in A(\vec{G})$, entonces $vu \notin A(\vec{G})$. \vec{G} es una *preorientación* de G si a cada arista $w \in A(G)$ se le asocia al menos una dirección: $uw \in A(\vec{G})$ y/o $vw \in A(\vec{G})$.

1.1.2 Digráficas

Una *digráfica* D es una pareja $(V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito de vértices y $F(D)$ es el conjunto de flechas, cada flecha (v, w) es una pareja ordenada, con su vértice inicial v y vértice terminal w , la flecha (v, w) también se denotará \vec{vw} o simplemente $vw \in F(D)$. Si U y W son dos conjuntos de vértices de una digráfica D , entonces llamaremos *UW-flechas* al conjunto de flechas $uw \in F(D)$ tales que $u \in U$ y $w \in W$. Dos vértices son *adyacentes* si hay una flecha entre ellos. La *gráfica subyacente* de una digráfica D es la gráfica que se obtiene al sustituir cada flecha por una arista. Una flecha cuyo vértice inicial coincide con su vértice final se llama un *lazo*. En este trabajo se considerarán únicamente gráficas sin lazos.

La *invecindad* de un vértice $v \in V(D)$ es el conjunto de los vértices $w \in V(D)$ tales que la flecha $wv \in F(D)$, a la invecindad de v la denotamos por $N^-(v)$, $N^-(v) = \{w : wv \in F(D)\}$, la *exvecindad*, $N^+(v)$, de un vértice $v \in V(D)$ es el conjunto de vértices $w \in V(D)$ tales que la flecha $vw \in F(D)$, $N^+(v) = \{w : vw \in F(D)\}$, una *semivvecindad* de una vértice v de D , es la invecindad o exvecindad de v en D . Sea $v \in V(D)$ la *invecindad cerrada* de v es $N^-[v] = N^-(v) \cup \{v\}$, la *exvecindad cerrada* de un vértice $v \in V(D)$ es $N^+[v] = N^+(v) \cup \{v\}$. La *invalencia*, $d^-(v)$, de un vértice $v \in V(D)$ es $d^-(v) = |\{w : wv \in F(D)\}| = |N^-(v)|$ y la *exvalencia*, $d^+(v)$, de un vértice $v \in V(D)$ es $d^+(v) = |\{w : vw \in F(D)\}| = |N^+(v)|$. Si $d^+(v) = d^-(v) = r$ para todo $v \in V(D)$, se dice que D es *regular*. Si $u, v \in V(D)$, entonces $N^{\epsilon\epsilon}(u, v) = N^\epsilon(u) \cap N^\epsilon(v)$, $\epsilon, \epsilon \in \{-, +\}$.

La resta y el residuo para digráficas se define de manera análoga a la definición para gráficas. Si $S \subset V(D)$, entonces la digráfica $D \setminus S$ tiene $V(D) \setminus S$ como vértices y uv es flecha de $D \setminus S$ si $u, v \in V(D) \setminus S$ y uv es flecha de D . Si $E \subset F(D)$, entonces la digráfica $D \setminus E$ tiene $V(D)$ como vértices y las flechas son $F(D) \setminus E$. Si H es subdigráfica de D , entonces la digráfica $D \setminus H$ es la digráfica inducida por $V(D) \setminus V(H)$. El *residuo* de una

subdigráfica H de D es $D \setminus H$.

Así como se definió subgráfica, subgráfica generadora, subgráfica inducida, camino, paseo y trayectoria para gráficas también se pueden definir para digráficas, con la restricción que se respete la dirección de las flechas: Una digráfica D' es una *subdigráfica* de la digráfica D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$, y se denota $D' \subseteq D$, una subdigráfica es generadora si $V(D') = V(D)$, y una subdigráfica inducida por $V' \subseteq V(D)$ es la digráfica D' tal que $V(D') = V'$ y $\vec{vw} \in F(D')$ si y sólo si $v, w \in V(D')$ y $\vec{vw} \in F(D)$. Si $D \subseteq T$, T digráfica, y $v \in V(D)$, entonces $N^+(v, D)$ denota la vecindad exterior del vértice v restringida a la subdigráfica D , y $T[D]$ denota la subdigráfica inducida por D en la digráfica T . Un *camino dirigido* en D es una sucesión alternante de vértices y flechas $(v_0, a_0, v_1, a_1, \dots, v_n)$, tal que $a_i \in F(D)$, con $i = 0, 1, \dots, n-1$ y $a_i = v_i v_{i+1} \in F(D)$; a menudo denotaremos los caminos únicamente por su sucesión de vértices (v_0, v_1, \dots, v_n) , un *paseo dirigido* en D es un camino dirigido en el que no se repiten flechas y una *trayectoria dirigida* en D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices. Sea $P = (u_0, u_1, \dots, u_k)$, entonces $\text{int}(P) = (u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, es decir la trayectoria P menos el primer y el último vértice. Un *ciclo dirigido* en D es una trayectoria dirigida cerrada, es decir, que su vértice inicial y final coinciden (siendo éste el único vértice que se repita), al ciclo dirigido de n vértices lo denotamos por \vec{C}_n . La *longitud* de un camino/paseo/trayectoria/ciclo dirigido es el número de sus aristas. Nótese que $l(\vec{C}_n) = n$.

Una digráfica D es *acíclica* si no contiene ciclos dirigidos, y un conjunto de vértices $V' \subseteq V(D)$ es acíclico si la subdigráfica inducida por V' no induce ciclos dirigidos, análogamente un conjunto de aristas $A' \subseteq A(D)$ es acíclico si la subdigráfica inducida por A' no induce ciclos dirigidos. Un conjunto de vértices $V' \subseteq V(D)$ es cíclico si la subdigráfica inducida por V' induce un ciclo dirigido. Sea D es una digráfica, si $v \in V(D)$ tal que $V' \subset N^+(v)$ y $D' = D[V' \cup \{v\}]$, entonces decimos que v es *fuentes* de D' , y $v \in V(D)$ es *pozo* de $D' \subseteq D$ si para $v \in V(D)$ se tiene que $V' \subset N^-(v)$ y $D' = D[V' \cup \{v\}]$. Decimos que $u \in V(D)$ es vértice extremo si u es fuente o pozo de $D \setminus \{u\}$. Cuando hablamos de conjuntos acíclicos se va a entender conjuntos que no inducen ciclos, en el caso de gráficas, y conjuntos que no inducen ciclos dirigidos en el caso de digráficas.

Un *torneo* es una gráfica completa orientada y un *supratorneo* es una gráfica completa con una preorientación, los torneos de orden n se denotan T_n . Un torneo tiene a lo más una fuente y a lo más un pozo. Decimos que, un torneo es un *torneo transitivo* si es acíclico y se denota TT_n ; la *sucesión de fuentes* de un torneo transitivo es la sucesión $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ de los vértices de TT_n , tal que:

- x_1 es fuente de TT_n ,
- x_j es fuente de $TT_n \setminus \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ con $2 \leq j \leq n$, y
- $\{x_1, \dots, x_n\} = V(TT_n)$.

Nótese que un torneo regular siempre es de orden impar, si T es de orden $2n + 1$, entonces $d^-(v) = d^+(v) = n$ para todo $v \in T$.

Un *homomorfismo (homomorfismo irreflexivo)* f entre dos gráficas G, G' es una función $f : V(G) \rightarrow V(G')$ que respeta adyacencias entre vértices, es decir, para dos vértices $u, v \in V(G)$ con $uv \in A(G)$ se tiene que $f(u)f(v) \in A(G')$ o $f(u) = f(v) \in V(G')$ (para $u, v \in V(G)$ con $uv \in A(G)$ se tiene que $f(u)f(v) \in A(G')$). Un homomorfismo es un *epimorfismo* si es suprayectivo y es un *isomorfismo* si es biyectivo tanto en vértices como en aristas. Dos gráficas son isomorfas si hay un isomorfismo entre ellas, denotamos por $G \cong G'$ cuando G y G' son isomorfas. De manera análoga se define homomorfismo para digráficas: Un *homomorfismo (homomorfismo irreflexivo)* f entre dos digráficas D, D' es una función $f : V(D) \rightarrow V(D')$ que respeta adyacencias entre vértices, es decir, para $u, v \in V(D)$ con $uv \in F(D)$ se tiene que $f(u)f(v) \in F(D')$ o $f(u) = f(v) \in V(D')$ (para $u, v \in V(D)$ con $uv \in F(D)$ se tiene que $f(u)f(v) \in F(D')$). Un homomorfismo es un *epimorfismo* si es suprayectivo y es un *isomorfismo* si es biyectivo tanto en vértices como en flechas. Dos digráficas son isomorfas si hay un isomorfismo entre ellas, denotamos por $D \cong D'$ cuando D y D' son isomorfas. La digráfica *dual* D^{op} de una digráfica D se obtiene al invertir todas las flechas de D ; dos digráficas D, D' son *duales*, si al invertir las flechas de D , ésta resulta isomorfa a D' . Un *automorfismo* es un isomorfismo en el que la gráfica del dominio coincide con la gráfica de la imagen. Una gráfica G es *transitiva en aristas* si para cualquier par de aristas a_1, a_2 en $A(G)$ hay un automorfismo que manda a_1 en a_2 , y una gráfica G es *transitiva en*

vértices si para cualquier par de vértices u, v en $V(G)$ hay un automorfismo que manda u en v . Un *antimorfismo* f entre dos gráficas G, G' es una función $f : V(G) \rightarrow V(G')$ tal que se invierten las adyacencias, es decir, si $uv \in F(G)$, entonces $f(v)f(u) \in F(G')$. Denotamos por $Aut(G)$ el grupo de automorfismos de G . Decimos que un vértice v /arista uv (un vértice v /flecha uv) en una gráfica G (digráfica D) es *fijo* si para todo automorfismo $\varphi \in Aut(G)$ ($\varphi \in Aut(D)$) se tiene que $\varphi(v) = v$ / $\varphi(uv) = uv$ ($\varphi(v) = v$ / $\varphi(uv) = uv$). Decimos que una subgráfica (subdigráfica) H de G (D) es invariante si $\varphi(H) = H$ para todo $\varphi \in Aut(G)$ (para todo $\varphi \in Aut(D)$). Sea $\varphi : G \rightarrow G'$ ($\varphi : D \rightarrow D'$) un homomorfismo, entonces la *fibra* de un vértice $v \in G'$ ($v \in D'$) es el conjunto de vértices $w \in G$ ($w \in D$) tales que $\varphi(w) = v$.

Sea G un grupo y S un conjunto, decimos que el grupo G actúa sobre el conjunto S , si la transformación $G \times S \rightarrow S$, (para $g \in G$ y $s \in S$ se tiene que $gs \in S$), cumple lo siguiente:

- $es = s$ para todo $s \in S$ (e es la identidad en G)
- $(gg')s = g(g's)$, para todo $g, g' \in G$ y $s \in S$ (La ley de asociatividad).

La órbita O_s de un elemento $s \in S$ es el siguiente subconjunto de S

$$O_s = \{s' \in S : s' = gs \text{ para algún } g \in G\}.$$

Decimos que un grupo actúa sobre una gráfica (digráfica) si el grupo actúa sobre el conjunto de vértices de la gráfica (digráfica) respetando las adyacencias.

Una gráfica/digráfica/torneo Λ es *circulante* si tiene un automorfismo φ que es una permutación cíclica de todos sus vértices. Nótese que podemos asumir que $V(\Lambda) = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y $\varphi(i) = i+1 \pmod{n}$. El *arco* $[i, i+k]$ en un circulante Λ es $(i, i+1, i+2, \dots, i+k)$. Los *saltos* de un circulante son las longitudes de los arcos determinados por las flechas. Vamos a usar dos maneras distintas de denotar los torneos circulantes: $\vec{C}_{2m+1}(J)$ y $\vec{C}_{2m+1}(K)$.

Sea $\vec{C}_{2m+1}(J)$ el torneo circulante donde

$$\begin{aligned} V(\vec{C}_{2m+1}(J)) &= \mathbb{Z}_{2m+1} \text{ y} \\ F(\vec{C}_{2m+1}(J)) &= \{vw : w - v \in J\} \end{aligned}$$

donde $J \subseteq \mathbb{Z}_{2m+1}$ con $|J| = m$. Como $\vec{C}_{2m+1}(J)$ es un torneo, J cumple que $\forall j \in J |\{j, -j\} \cap J| = 1$. El conjunto J determina la longitud de los saltos de $\vec{C}_{2m+1}(J)$.

Sea $K \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. Definimos el torneo circulante $\vec{C}_{2m+1}(K)$ como sigue

$$\begin{aligned} V(\vec{C}_{2m+1}(K)) &= \mathbb{Z}_{2m+1} \text{ y} \\ F(\vec{C}_{2m+1}(K)) &= \{vw : w - v \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus K\} \end{aligned}$$

Nótese que K determina los saltos de longitud 1 a m que volteamos.

La clase de torneos regulares la denotaremos \mathbf{TR} y \mathbf{TR}_n la clase de torneos regulares de orden n (impar). Le llamaremos torneos cíclicos a la familia de torneos circulantes de la forma $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$ y \mathbf{TR}° es la familia de torneos regulares que no son cíclicos. Denotaremos por \mathbf{T}_n a la clase de torneos de orden n .

Definición 1.1 Sea S un subconjunto de los vértices de una digráfica D , decimos que dos vértices $u, v \in V(D)$ son concordantes con respecto al conjunto S si

$$\begin{aligned} N^-(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^-(v, S \setminus \{u, v\}) \text{ y} \\ N^+(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^+(v, S \setminus \{u, v\}). \end{aligned}$$

y decimos que son discordantes con respecto al conjunto S si

$$\begin{aligned} N^+(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^-(v, S \setminus \{u, v\}) \text{ y} \\ N^-(u, S \setminus \{u, v\}) &= N^+(v, S \setminus \{u, v\}). \end{aligned}$$

Denotamos $u \equiv v \pmod{S}$ cuando $u, v \in V(D)$ son concordantes con respecto al conjunto S y $u \not\equiv v \pmod{S}$ cuando son discordantes con respecto al conjunto S . Nótese que si u, v son discordantes con respecto al conjunto S y $w \in S$, entonces u y v también son discordantes con respecto al vértice w .

1.1.3 Particiones y Coloraciones

Si \mathcal{P} es una partición de los vértices de una gráfica G (digráfica D) y $\{\alpha\}_{\alpha \in I}$ son las clases, entonces el cociente G/\mathcal{P} (D/\mathcal{P}) es la gráfica (digráfica) siguiente:

$$V(G/\mathcal{P}) = \{\alpha\}_{\alpha \in I}, \alpha\beta \in A(G/\mathcal{P}) \text{ si existen } a \in \alpha \text{ y } b \in \beta \text{ con } ab \in A(G)$$

$$(V(D/\mathcal{P}) = \{\alpha\}_{\alpha \in I}, \alpha\beta \in F(D/\mathcal{P}) \text{ si existen } a \in \alpha \text{ y } b \in \beta \text{ con } ab \in F(D)).$$

Nótese que si G es la gráfica suyacente de D , entonces D/\mathcal{P} es una preorientación de G/\mathcal{P} . La proyección natural $\rho : V(G) \rightarrow \mathcal{P}$ ($\rho : V(D) \rightarrow \mathcal{P}$) se define como: $\rho(u) = \alpha$, $\alpha \in \mathcal{P}$ si y sólo si $u \in \alpha$. ρ es un homomorfismo y sus fibras son las digráficas inducidas por cada clase de la partición \mathcal{P} .

Una coloración ϕ de los vértices de una gráfica G , es una partición de los vértices de G , definida por una función suprayectiva $\phi : V(G) \rightarrow C$, donde C es el conjunto de colores que usa la coloración ϕ . Asociada a una coloración hay una partición de los vértices de G cuyas clases se llaman *clases cromáticas* y son los conjuntos de vértices a los que ϕ les asignó el mismo color, denotamos por C_i a la clase cromática del color i , $C_i = \{w \in V(G) : \phi(w) = i\}$. En una gráfica G se pueden definir diferentes tipos de coloraciones, en las cuales las clases cromáticas son "sencillas" en algún sentido. El *número cromático* $\chi(G)$ es el mínimo número de colores con los que se pueden colorear los vértices de G , tal que no se formen aristas monocromáticas. La partición de los vértices asociada a la coloración que induce el número cromático es tal que sus clases cromáticas son independientes.

El número dicromático fue introducido simultánea e independientemente por Víctor Neumann-Lara [22] y H. Meyniel [16], es una generalización del número cromático, y se define de la siguiente manera: el *número dicromático* $dc(D)$ de una digráfica D es el mínimo número de colores, tales que los vértices de D se pueden colorear, sin que se formen ciclos dirigidos monocromáticos. Nótese que si \overleftrightarrow{G} es la digráfica que se obtiene de la gráfica G asociamos una flecha simétrica a cada arista de G , entonces $\chi(G) = dc(\overleftrightarrow{G})$. La partición de los vértices asociada a la coloración que induce el número dicromático, es tal, que sus clases cromáticas son acíclicas en términos de digráficas, o dicho de otra manera, el número dicromático es la mínima cardinalidad de una partición internamente acíclica. El número

dicromático de una gráfica G (no dirigida) se define como el máximo de los números dicromáticos de las digráficas de todas las posibles orientaciones de G . Si $dc(D) = r$, entonces se dice que D es r -dicromática. Decimos que una coloración de una digráfica es *óptima* si el número de colores que usa es exactamente el número dicromático de la digráfica. La digráfica D es *crítica en vértices* si $dc(D) = r$ y $dc(D - u) = r - 1 \forall u \in V(D)$.

1.1.4 Construcciones en digráficas

Definiremos algunas construcciones de digráficas que nos serán útiles en diferentes partes de la tesis. En éste capítulo, si D es una digráfica y $S \subset V(D)$, $S^* = \{u^* : u \in S\}$ denotará a una copia de S disjunta con $V(D)$ y $D[S]^* = (S^*, F^*)$ será la digráfica isomorfa a $D[S]$ definida de modo que la correspondencia $u \mapsto u^*$ sea un isomorfismo.

$$D \langle S; \bullet \rangle = D \cup D[S]^* + \{v^*u : uv \in F(D) \text{ y } v \in S\} + \{vu^* : uv \in F(D) \text{ y } u \in S\}$$

Nótese que u, u^* son discordantes para todo $u \in S$.

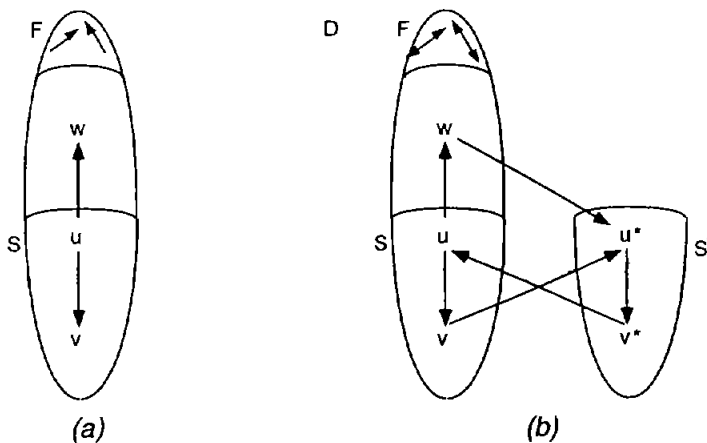


Figura 1.1: (a) la digráfica D y (b) $D \langle S, F; \bullet \rangle$.

Sea F un conjunto de flechas de D tal que $V(F) \cap S = \emptyset$.

$$D \langle S, F; \bullet \rangle = D \langle S; \bullet \rangle + \{vu : uv \in F\}$$

Nótese que en la gráfica $D \langle S, F; \bullet \rangle$ las flechas de F son simétricas.

$D \langle S, \leftrightarrow \rangle$

$$D \langle S, \leftrightarrow \rangle = D \langle S; \bullet \rangle + \{uu^* : u \in S\} + \{u^*u : u \in S\}$$

$D \langle S, \rightarrow \rangle$

$$D \langle S, \rightarrow \rangle = D \langle S; \bullet \rangle + \{uu^* : u \in S\}.$$

$D \langle S, \leftarrow \rangle$

$$D \langle S, \leftarrow \rangle = D \langle S; \bullet \rangle + \{u^*u : u \in S\}.$$

Lema 1.2 $dc(D \langle S, \leftrightarrow \rangle) \leq 2dc(D)$

Demostración Sea $\varphi : D \rightarrow C$ una coloración óptima donde C es el conjunto de colores usados por φ . Sea $C' = \{c' \mid c \in C\}$ un conjunto de colores ajeno a C , nótese que $|C'| = |C|$. Definimos la siguiente coloración $\gamma : D \langle S, \leftrightarrow \rangle \rightarrow C \cup C'$ tal que:

- (i) Si $u \in D$, entonces $\gamma(u) = \varphi(u)$.
- (ii) Si $u \in S^*$ y $\varphi(u) = c_i$, entonces $\gamma(u) = c'_i$.

Claramente γ es una coloración de $D \langle S, \leftrightarrow \rangle$ sin ciclos dirigidos monocromáticos. γ usa a lo más $2|C|$ colores (el doble de colores que usa φ).

□

Observación 1.3 Sea T es un torneo, $U \subset V(T)$ y $\bar{U} = V(T) \setminus U$.

- (i) Si T tiene una flecha uv discordante (concordante), con $u \in U$, entonces u, v es una pareja discordante (concordante) de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$.
- (ii) Para todo $u \in \bar{U}$ y $u^* \in T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus T$ se tiene que u, u^* es una pareja discordante de la digráfica $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$.
- (iii) Si T tiene una flecha uv concordante, con $u \in U$ y $v \in \bar{U}$, entonces v^*u es una flecha de la digráfica de discordancia de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$.

(iv) Sea $u \in \bar{U}$. $d^+(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = d^-(u^*; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}|$ y
 $d^-(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = d^+(u^*; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}| - 1$.

(v) $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es un torneo regular si y sólo si para todo $u \in \bar{U}$.

$$d^+(u; U) = d^-(u^*; U) = \lfloor |U|/2 \rfloor, \quad d^-(u; U) = d^+(u^*; U) = \lceil |U|/2 \rceil.$$

Demostración Sea T es un torneo, $U \subset V(T)$ y $\bar{U} = V(T) \setminus U$

(i) Sea $u \in U$. La afirmación se cumple por construcción, véase la figura 1.2.

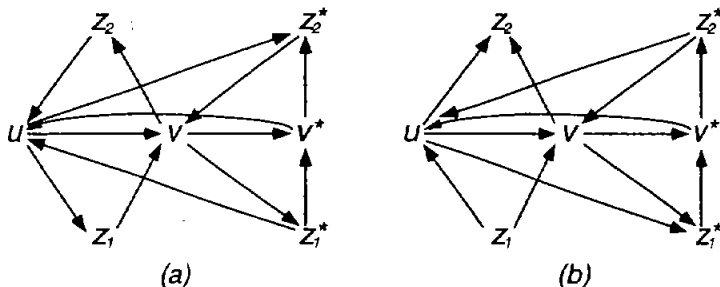


Figura 1.2: La pareja u, v es (a) discordante con respecto a \bar{U}^* y (b) concordante con respecto a \bar{U}^*

(ii) Por construcción.

(iii) Sea uv una flecha concordante, con $u \in U$ y $v \in \bar{U}$, La afirmación se sigue de los incisos (i) y (ii), véase la figura 1.3.

(iv) Sea $u \in \bar{U}$. Todo $v \in \bar{U} \setminus \{u\}$ cumple que $|N^+(u) \cap \{v, v^*\}| = 1$, como además $u^* \in N^+(u)$, entonces $d^+(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}|$. Análogamente se tiene que $d^-(u^*; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}|$. Para todo $v \in \bar{U} \setminus \{u\}$ se tiene que $|N^-(u) \cap \{v, v^*\}| = 1$. Como $u^* \notin N^-(u)$, entonces

$$d^-(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}| - 1.$$

Análogamente se tiene que $d^+(u^*; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}| - 1$.

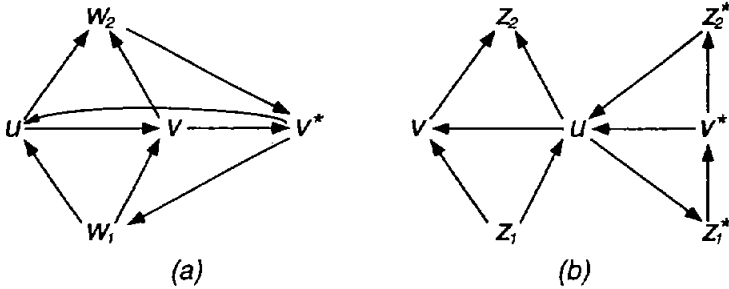


Figura 1.3: La pareja u, v^* es (a) discordante con respecto a T y (b) discordante con respecto a \bar{U}^*

(v) Sea $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ regular y $u \in \bar{U}$. El resultado sigue del inciso (iv). Si para todo vértice $u \in \bar{U}$ se tiene que $d^+(u; U) = d^-(u^*; U) = \lfloor |U|/2 \rfloor$, $d^-(u; U) = d^+(u^*; U) = \lceil |U|/2 \rceil$ entonces $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es regular. □

Las digráficas

$$\tilde{D}\langle S; \bullet \rangle, \tilde{D}\langle S, \leftrightarrow \rangle, \tilde{D}\langle S, \rightarrow \rangle, \tilde{D}\langle S, \leftarrow \rangle$$

se definen invirtiendo las flechas en $D[S]^*$ en

$$D\langle S; \bullet \rangle, D\langle S, \leftrightarrow \rangle, D\langle S, \rightarrow \rangle, D\langle S, \leftarrow \rangle.$$

1.1.5 Suma Lexicográfica (Suma de Zykov)

Sean D una digráfica y $\alpha = \{\alpha_u\}$ con $u \in V(D)$ una familia de digráficas no vacías y disjuntas dos a dos, entonces la suma lexicográfica de $\{\alpha_u\}$ sobre D , $\sigma(\alpha, D)$, se define como sigue,

$$V(\sigma(\alpha, D)) = \bigcup_{i \in V(D)} V(\alpha_i), \text{ y}$$

$$F(\sigma(\alpha, D)) = \bigcup_{i \in V(D)} F(\alpha_i) \cup \{uw : u \in V(\alpha_i), w \in V(\alpha_j), ij \in F(D)\}.$$

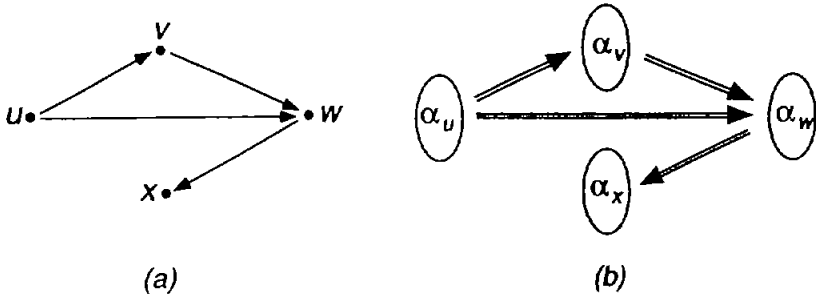


Figura 1.4: (a) La digráfica D y (b) la suma de Zykov de $\{\alpha_u\}$ sobre la digráfica D .

1.2 Resultados preliminares

Sea (v_0, v_1, v_2, v_3) la sucesión de fuentes de TT_4 . Definimos el torneo T_4 como sigue:

$$V(T_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, \quad T_4 = TT_4 \setminus \{v_0v_3\} + \{v_3v_0\}.$$

Nótese que T_4 es el único torneo de orden 4 que es fuertemente conexo.

Observación 1.4 Hay 4 torneos de orden 4 no isomorfos:

$$TT_4, K_1 + \vec{C}_3, \vec{C}_3 + K_1, T_4$$

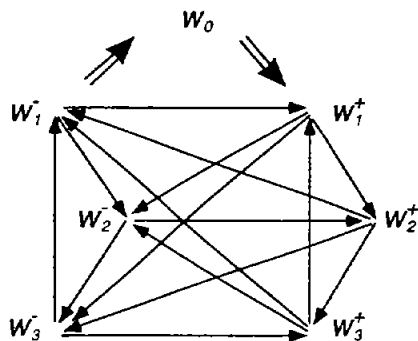
Definición 1.5 Al igual que en [23] definimos el torneo W_0 como sigue:

$$V(W_0) = \{w_0, w_1^-, w_2^-, w_3^-, w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$$

$$F(W_0) = \{w_j^- w_0 : j = 1, 2, 3\} \cup \{w_0 w_i^+ : i = 1, 2, 3\} \cup \\ \{w_i^+ w_{i+1}^+ : i = 1, 2, 3\} \cup \{w_j^- w_{j+1}^- : j = 1, 2, 3\} \cup \\ \{w_i^- w_i^+ : i = 1, 2, 3\} \cup \{w_i^+ w_j^- : 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\},$$

donde $i - 1, i, i + 1 \in \mathbb{Z}_3$.

Observación 1.6 $\{(w_i^+, w_{i-1}^-)\}, \{(w_i^-, w_0)\}, \{(w_0, w_i^+)\}$ con $i - 1, i \in \mathbb{Z}_3$ son órbitas de $F(W_0)$. Nótese que todo automorfismo deja el vértice w_0 fijo y por lo tanto las semivecindades (que son cíclicas) son invariantes bajo automorfismo. Véase la figura 1.5, página 14.

Figura 1.5: El torneo W_0

Los torneos cíclicos tienen las siguientes dos propiedades

1. Sea $U \subseteq V(\vec{C}_{2m+1}(\emptyset))$. Si U tiene un vértice extremo (fuente o pozo) u , entonces $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)[U]$ es transitivo.
2. si $ij, j(i+k) \in F(\vec{C}_{2m+1}(\emptyset))$, $k > 1$, entonces $j \in [i, i+k]$

Demostración

1. Sea $U \subset V(\vec{C}_{2m+1}(\emptyset))$ y $u \in U$ tal que u es fuente (pozo) de $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)[U]$, entonces $U \subset N^+[v]$ ($U \subset N^-[v]$) la cual es transitiva por construcción.
2. Obvio. □

Lema 1.7 Si $K \subset V(\vec{C}_7(\{3\}))$ induce un \vec{C}_3 , entonces existe un único vértice $v \in V(\vec{C}_7(\{3\}))$ tal que K es una semivecindad de v en $\vec{C}_7(\{3\})$.

Demostración El torneo $\vec{C}_7(\{3\})$ es transitivo en flechas, asumimos que $0, 1 \in K$. Como K es cíclico, entonces $\vec{C}_7(\{3\})\{0, 1, j\}$ es cíclico, donde

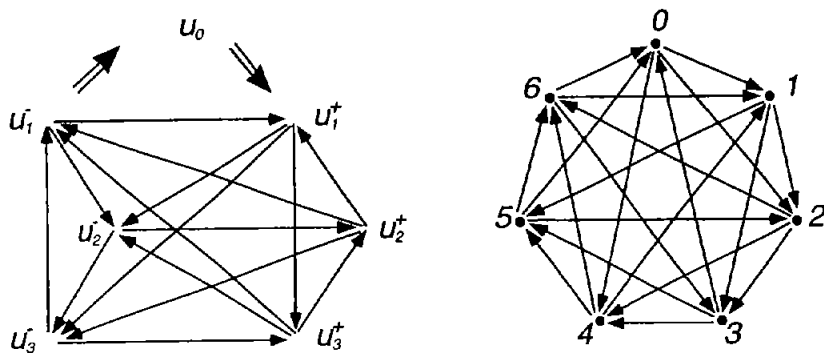


Figura 1.6: Dos representaciones del torneo ST_7 .

$j \in N^{++}(0, 1) = \{3, 5\}$. Sea $K = \{0, 1, 3\}$, entonces 6 es fuente de K , si $K = \{0, 1, 5\}$, entonces 2 es pozo de K . \square

Decimos que un torneo circulante $\vec{C}_n(J)$ es el Torneo de Paley de orden n si n es un primo, $n \equiv 3 \pmod{4}$ y J es el conjunto de residuos cuadráticos módulo n . Nótese que el torneo $\vec{C}_7(\{3\})$ es el Torneo de Paley de orden 7. Los torneos de Paley son transitivos en vértices y transitivos en flechas. Por las características de éste trabajo, no vamos a estudiar los torneos de Paley.

Capítulo 2

Discordancia

En éste capítulo vamos a definir la relación de discordancia. La discordancia es una relación entre vértices en una digráfica y será la base de nuestro estudio en los próximos capítulos. Estudiaremos la estructura en términos de la discordancia, las propiedades y resultados básicos en torneos regulares. El Lema 2.18 será básico para definición de moldes en el siguiente capítulo.

2.1 Resultados Fundamentales

Nuestro estudio se centra en los torneos regulares. Recordamos que las relaciones de discordancia y concordancia se definieron en los preliminares. Nótese que si T es un torneo regular ningún par de vértices puede ser concordante en T , y u, v son discordantes en T si

$$N^-(u, T \setminus \{u, v\}) = N^+(v, T \setminus \{u, v\}).$$

Definimos la *digráfica de concordancia* denotada por $\mathfrak{C}^\rightarrow(D)$ de una digráfica D como sigue:

$$V(\mathfrak{C}^\rightarrow(D)) = V(D)$$

$$uv \in F(\mathfrak{C}^\rightarrow(D)) \text{ si } u \equiv v \pmod{D} \text{ y } uv \in F(D).$$

La *gráfica de concordancia* denotada por $\mathfrak{C}(D)$ es la gráfica subyacente de la digráfica de concordancia de la digráfica D .

Observación 2.1 *Las componentes conexas no triviales de $\mathfrak{C}(D)$ son trayectorias dirigidas en $\mathfrak{C}^\rightarrow(D)$ y transitivas en D .*

Demostración Sea $uv, vw \in \mathcal{C}(D)$. Supongamos que $uv \in F(D)$. Como $v \equiv w \pmod{u}$, entonces $uw \in F(D)$, como $u \equiv v \pmod{w}$, entonces $vw \in F(D)$ y $u \mid w \pmod{v}$, además $D[\{u, v, w\}]$ es transitivo. Sea (u_1, u_2, \dots, u_k) una trayectoria de $\mathcal{C}^\rightarrow(D)$. Como $u_1 u_3 \in F(\mathcal{C}^\rightarrow(D))$ y $u_3 \equiv u_4 \pmod{D}$, entonces $u_1 u_4 \in F(D)$. Aplicando el mismo razonamiento se sigue el resultado. \square

Nótese las siguientes dos propiedades

P.1 Para $k = 3, k \geq 5$ existe $T \in \mathbb{T}_k$ tal que T es libre de vértices extremos y parejas concordantes.

P.2 Para $k \geq 3$ existe $T \in \mathbb{T}_k$ tal que T es libre de parejas concordantes.

Demostración Sea $k = 2m + 1, m \geq 1$, entonces $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ es un torneo libre de vértices extremos y libre de parejas concordantes. Sea $k = 2m, m \geq 3$. Definimos el torneo T como sigue:

$$\begin{aligned} V(T) &= \mathbb{Z}_{2m-1} \cup \{v\} \\ T[\mathbb{Z}_{2m-1}] &= \vec{C}_{2m-1} \langle \emptyset \rangle \end{aligned}$$

y las adyacencias entre el vértice z y los vértices de \mathbb{Z}_{2m-1} están dadas por:

$$\begin{aligned} N^+(v, \mathbb{Z}_{2m-1}) &= \{0, 2, 3, \dots, m-1\} \\ N^-(v, \mathbb{Z}_{2m-1}) &= \{1, m, m+1, \dots, 2m-2\}. \end{aligned}$$

Por construcción T no tiene vértices extremos ni parejas concordantes. Para $k = 1, 2, 4$ los torneos $K_1, K_2, K_1 + \vec{C}_3$ son libres de parejas concordantes. \square

Definición 2.2 Definimos la digráfica de discordancia, $\mathcal{D}^\rightarrow(D)$, de una digráfica D como sigue:

$$V(\mathcal{D}^\rightarrow(D)) = V(D)$$

$$uv \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(D)) \text{ si } u \mid v \pmod{D} \text{ y } uv \in F(D).$$

A las flechas de la digráfica de discordancia las llamaremos \mathcal{D} -flechas.

La gráfica de discordancia $\mathcal{D}(D)$ de la digráfica D es la gráfica subyacente de la digráfica de discordancia $\mathcal{D}^\rightarrow(D)$ de D .

Para fijar ideas vamos a revisar la discordancia de los torneos regulares de orden 3, 5 y 7 y luego encontramos su digráfica de discordancia.

Ejemplo 2.3 *Digráficas de discordancia de los torneos regulares de orden 3, 5 y 7.*

\vec{C}_3 y $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ son los únicos torneos regulares de orden 3 y 5 respectivamente.

(i) $F(\mathcal{D}^\rightarrow(\vec{C}_3)) = F(\vec{C}_3)$ y $\mathcal{D}^\rightarrow(\vec{C}_3) = \vec{C}_3$;

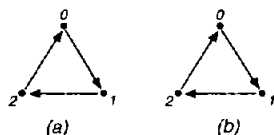


Figura 2.1: (a) \vec{C}_3 y (b) su digráfica de discordancia.

(ii) $\mathcal{D}^\rightarrow(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle) = (0, 2, 4, 1, 3, 0)$ y $\mathcal{D}^\rightarrow(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle) \cong \vec{C}_5$.

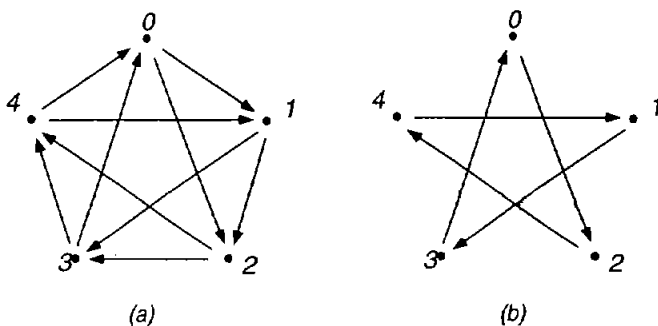


Figura 2.2: (a) $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.

$\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$, $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ y W_0 (página 13) son los únicos torneos regulares de orden 7.

(iii) $\mathfrak{D} \rightarrow (\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle) = (0, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 0)$ y $\mathfrak{D} \rightarrow (\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle) \cong \vec{C}_7$;

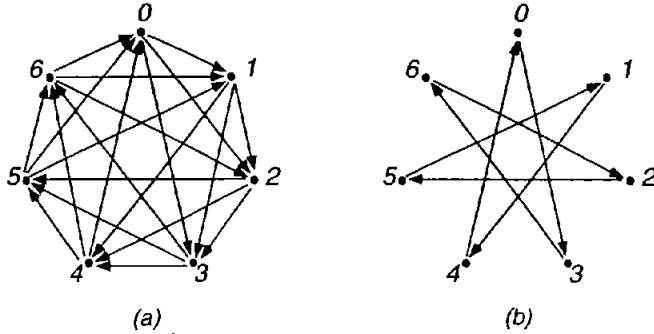


Figura 2.3: (a) $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.

(iv) $F(\mathfrak{D} \rightarrow (\vec{C}_7 \langle 3 \rangle)) = \emptyset$ y $\mathfrak{D} \rightarrow (\vec{C}_7 \langle 3 \rangle) \cong \overline{K}_7$;

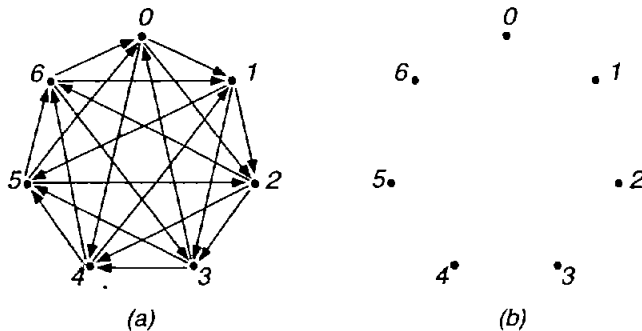


Figura 2.4: (a) $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.

(v) $\mathfrak{D} \rightarrow (W_0) = \{(w_2^+, w_1^-), (w_3^+, w_2^-), (w_1^+, w_3^-), \{w_0\}\}$;

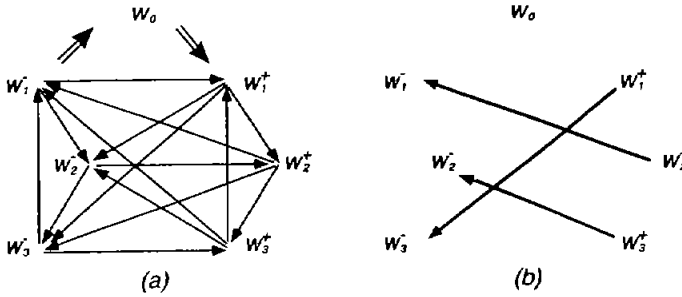


Figura 2.5: (a) W_0 y (b) su digráfica de discordancia.

$$(vi) \mathcal{D}^{\rightarrow}(\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)) = (0, m, 2m, m-1, \dots, 1, m+1, 0) \text{ y}$$

$$\mathcal{D}^{\rightarrow}(\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)) \cong \vec{C}_{2m+1}.$$

Nótese que $(\mathcal{D}^{\rightarrow}(T))^{\text{op}} = \mathcal{D}^{\rightarrow}(T^{\text{op}})$.

El grupo de automorfismos de un torneo regular T actúa sobre la digráfica de discordancia $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ de T , es decir un automorfismo de T induce un automorfismo en su digráfica de discordancia $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$, por lo que el conjunto de \mathcal{D} -flechas es invariante bajo automorfismo; es decir si $\varphi \in \text{Aut}(T)$ y $uv \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$, entonces $\varphi(u)\varphi(v) \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$.

Lema 2.4 [15] Si T' es un subtorneo de T , entonces $\mathcal{D}_{T'}^{\rightarrow}(T)$ es subdigráfica de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$.

Demostración Sean $u, v \in V(T')$ con $uv \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$. Usando la definición de vértices discordantes y como T' es inducido en T , entonces

$$N^-(u, T' \setminus \{u, v\}) = N^+(v, T' \setminus \{u, v\}),$$

$$N^+(u, T' \setminus \{u, v\}) = N^-(v, T' \setminus \{u, v\})$$

y $uv \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T')$. □

Observación 2.5 Si H es un subtorneo regular de T , $uv \in F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(T))$ y $u, v \in V(H)$, entonces $uv \in F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(H))$.

El siguiente lema es equivalente al Lema 2 y Lema 3 en [5] y la Proposición 2.1 en [11].

Lema 2.6 [5] *Sea $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ la digráfica de discordancia de un torneo regular. Entonces*

- (i) $d_{\mathcal{D}^\rightarrow(T)}^-(u), d_{\mathcal{D}^\rightarrow(T)}^+(u) \leq 1$.
- (ii) Si $uv, vw \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$, entonces $T[\{u, v, w\}] \cong \vec{C}_3$.
- (iii) Toda trayectoria $P \subset \mathcal{D}(T)$ es dirigida en T .

Demostración

- (i) Supongamos que $d_{\mathcal{D}^\rightarrow(T)}^+(u) \geq 2$, entonces existen $v, w \in V(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$ tales que $uv, uw \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$. Como $u \mid v \pmod{w}$, entonces se tiene que $wv \in F(T)$. Pero $u \mid w \pmod{v}$ por lo que $vw \in F(T)$, lo cual contradice que T es un torneo. Para $d_{\mathcal{D}^\rightarrow(T)}^-(u)$ se hace análogamente.
- (ii) Sean $uv, vw \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$. Como $u \mid v \pmod{w}$, se tiene que $wu \in F(T)$, lo cual coincide con la condición $v \mid w \pmod{u}$, por lo que $T[\{u, v, w\}] \cong \vec{C}_3$.
- (iii) Sea $P = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. Supongamos que $u_0u_1 \in F(T)$. Por el inciso (i), se sigue que $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{k-1}u_k \in F(T)$.

□

Nótese que si $P \subset \mathcal{D}(T)$ es dirigida en T , entonces P es dirigida en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$.

Usando este lema podemos probar que las adyacencias sobre una trayectoria en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ de un torneo regular T quedan completamente determinadas. Más aún, si conocemos el comportamiento de un vértice de una trayectoria P de la digráfica de discordancia con respecto a otro vértice v fuera de la trayectoria P , podemos determinar el comportamiento de todos los demás vértices de la trayectoria P con respecto al vértice v .

Lema 2.7 *Sea $P = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ una trayectoria dirigida en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ y $P_{i,j} = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$ una subtrayectoria de P con $0 \leq i < j \leq k$. Entonces*

1. $u_i \equiv u_j \pmod{T \setminus P_{i,j}}$ si $j - i$ es par y $u_i \mid u_j \pmod{T \setminus P_{i,j}}$ si $j - i$ es impar.
2. $u_j u_i \in F(T)$ si $j - i$ es par y $u_i u_j \in F(T)$ si $j - i$ es impar.
3. $u_i \mid u_j \pmod{P_{i,j}}$ si $j - i$ es par y $u_i \equiv u_j \pmod{P_{i,j}}$ si $j - i$ es impar.

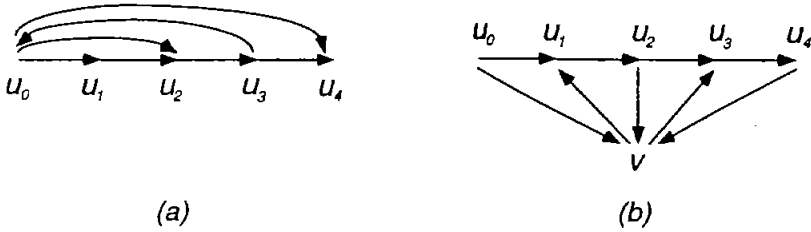


Figura 2.6: Las adyacencias internas (a) y externas (b) en el torneo T , de la trayectoria de discordancia (u_0, u_1, \dots, u_4) .

Para la definición de $int(P_{i,j})$ ver página 4.

Demostración

1. Sea $j - i = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como $u_i \mid u_{i+1} \pmod{T}$ y $u_{i+1} \mid u_{i+2} \pmod{T}$, entonces

$$u_i \equiv u_{i+2} \pmod{T \setminus \{u_{i+1}\}};$$

$u_{i+2} \mid u_{i+3} \pmod{T}$ y $u_{i+3} \mid u_{i+4} \pmod{T}$ por lo que

$$u_{i+2} \equiv u_{i+4} \pmod{T \setminus \{u_{i+3}\}} \text{ y } \\ u_i \equiv u_{i+4} \pmod{T \setminus \{u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}}; \dots;$$

como $u_{i+2n-2} \mid u_{i+2n-1} \pmod{T}$ y $u_{i+2n-1} \mid u_{i+2n} \pmod{T}$, entonces

$$u_{i+2n-2} \equiv u_{i+2n} \pmod{T \setminus \{u_{i+2n-1}\}} \text{ y } \\ u_i \equiv u_{i+2n} \pmod{T \setminus \{u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+2n-1}\}};$$

como $u_{i+2n} = u_j$ y $\{u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+2n-1}\} = \pmod{int(P_{i,j})}$, entonces se tiene que $u_i \equiv u_j \pmod{T \setminus P_{i,j}}$.

Sea $j - i = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $(j - 1) - i = 2n$, entonces $u_i \equiv u_{j-1} \pmod{T \setminus P_{i,j-1}}$ (afirmación probada arriba), además

$$u_{j-1} \mid u_j \pmod{T}$$

por lo que $u_i \mid u_j \pmod{T \setminus P_{i,j}}$.

2. Sea $j - i = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $u_j u_{j-2} \in F(T)$ ya que $T[\{u_{j-2}, u_{j-1}, u_j\}] \cong \vec{C}_3$, $u_i \equiv u_{j-2} \pmod{T \setminus \{u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-3}\}}$ por el inciso (i), y por el inciso (iii) del Lema 2.6 se tiene que

$$u_j u_i \in F(T).$$

Sea $j - i = 2n + 1$, como $(j - 1) - i = 2n$, entonces $u_{j-1} u_i \in F(T)$ (afirmación probada arriba), además $u_{j-1} \mid u_j \pmod{T}$ por lo que $u_i u_j \in F(T)$.

3. Sea $u_l \in \text{int}(P_{ij})$ y $j - i = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Si $j - l = 2m < 2n$, entonces $l - i = 2(n - m)$ y $u_j u_l, u_l u_i \in F(T)$,

si $j - l = 2m + 1 < 2n$, entonces $l - i = 2(n - m) - 1$. Por el inciso (i) de éste lema se tiene que $u_i u_l, u_l u_j \in F(T)$ y por el inciso (ii) del Lema 2.6 se sigue que

$$u_i \mid u_j \pmod{P_{i,j}}.$$

Sea $j - i = 2n + 1$, como $(j - 1) - i = 2n$, entonces $u_i \mid u_{j-1} \pmod{P_{i,j-1}}$ (afirmación probada arriba), además $u_{j-1} \mid u_j \pmod{T}$ por lo que $u_i \equiv u_j \pmod{P_{i,j}}$. \square

Observación 2.8 Sea $P = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ una trayectoria en la digráfica de discordancia de T , $F_0 = (u_0, u_2, \dots, u_{2l})$ y $F_1 = (u_1, u_3, \dots, u_{2l+1})$, donde $2l, 2l + 1 \leq k$, entonces $T[F_i]$ es transitivo. La demostración se sigue del Lema 2.7.

Hemos visto como son las adyacencias internas sobre las trayectorias en la discordancia de un torneo regular, ahora vamos a ver que la discordancia de un torneo regular es acíclica salvo cuando el torneo es cíclico, en tal caso la discordancia es un ciclo dirigido generador. El siguiente lema es análogo a los Lemas 2.1 y 2.2 de Fisher et al. en [15].

Lema 2.9 *Sea $T \in \text{TR}_{2m+1}$. Entonces P_{2m+1} no es subdigráfica inducida de $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$.*

Lema 2.10 [15] *Sea $T \in \text{TR}_{2m+1}$. Si $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ tiene un ciclo γ , entonces γ es un ciclo dirigido generador (de longitud impar).*

Demostración Sea γ un ciclo en la digráfica de discordancia de T con $l(\gamma) = 2n$, $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_{2n-1}, u_0)$. Por el inciso (iii) del Lema 2.6 sabemos que la trayectoria $(u_0, u_1, \dots, u_{2n-1})$ es dirigida y luego también el ciclo. Sean $P_0 = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ y $P_n = (u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}, u_0)$, por el inciso (ii) del Lema 2.7, $u_0 u_n, u_n u_0 \in F(T)$ lo cual contradice la definición de torneo por lo que $l(\gamma) = 2n + 1$, $n \leq m$.

Probaremos que γ es generador. Sea $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$ un ciclo en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$, supongamos que $n < m$, entonces $V(T \setminus \gamma) \neq \emptyset$. Sea $u \in V(T \setminus \gamma)$ y asumamos que $u_0 u \in F(T)$, por el inciso (i) del Lema 2.7, $u u_{2i+1} \in F(T)$ y $u_{2i} u \in F(T)$. Luego $u_{2n} u \in F(T)$ y como $u_{2n} u_0$ es \mathcal{D} -flecha de T se tiene que $u_{2n} \mid u_0 \pmod{u}$ y, entonces $u u_0 \in F(T)$ lo cual contradice la definición de torneo, por lo que $n = m$ y γ es un ciclo generador. \square

Corolario 2.11 [15] *Si $\mathcal{D}(T)$ tiene un ciclo, entonces T es cíclico.*

Demostración No es difícil ver que $\varphi : T \rightarrow \vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$ definido por $\varphi(i) = im \pmod{2m+1}$ es un isomorfismo. \square

El siguiente lema es análogo al Corolario 3.7 de Fisher et.al. en [15].

Lema 2.12 [15] *Sea $T \in \text{TR}_{2m+1}$ un torneo transitivo en vértices, entonces $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ es trivial salvo si T es cíclico.*

H Cho, F Doherty S-R Kim, R Lundgren [7, 6], caracterizaron las gráficas de discordancia de torneos regulares. En el capítulo 4, se da una demostración muy sencilla de este hecho, usando el concepto de moldes que se introduce en el mismo.

Durante este trabajo usaremos amenudo la siguiente construcción:

Observación 2.13 *Sea uv una \mathcal{D} -flecha de un torneo regular T . Entonces el residuo T' de uv se parte de manera natural en los siguientes conjuntos $V^- = N^+(u; T')$ y $V^+ = N^+(v; T')$.*

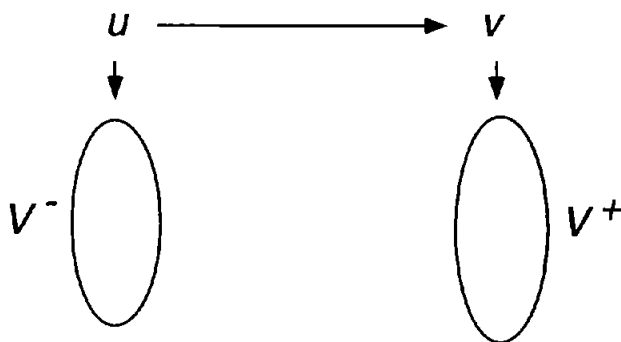


Figura 2.7: El residuo de la \mathcal{D} -flecha uv .

Proposición 2.14 Si T es un torneo regular y $u, v \in V(T)$, entonces el torneo $T \setminus \{u, v\}$ es regular si y sólo si $u \mid v \pmod{T}$.

Demostración Por regularidad de T y $T \setminus \{u, v\}$, y la Observación 2.13. \square

Corolario 2.15 Si T es un torneo regular y $P \subset \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ es una trayectoria de orden par, entonces $T \setminus P$ es regular.

A continuación daremos condiciones suficientes y necesarias para que una trayectoria en la discordancia de un torneo regular sea maximal (es decir, que sea una componente en la digráfica de discordancia).

Sea $P_{0,k} = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ una trayectoria dirigida en la discordancia de un torneo regular. Nótese que si $|T| \neq k$, entonces por los incisos (i) y (iii) del Lema 2.7 u_1 es el único vértice de la trayectoria $P_{0,k}$ discordante con u_0 con respecto a T . Análogamente u_{k-1} es el único vértice de la trayectoria $P_{0,k}$ discordante con u_k con respecto a T .

Recordamos que $N^{\epsilon\epsilon}(u, v) = N^{\epsilon}(u) \cap N^{\epsilon}(v)$, con $\epsilon, \epsilon \in \{-, +\}$.

Lema 2.16 $P_{0,2k+1} \subset \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ es maximal en $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ si y sólo si el subtorneo inducido por $N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$ no tiene un vértice extremo.

Demostración Sea $P_{0,2k+1} \subset \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$. Como T es de orden impar, entonces $T \setminus V(P_{0,2k+1}) \neq \emptyset$. Además, como $|V(P_{0,2k+1})|$ es par, entonces

por el Corolario 2.15 se tiene que $T \setminus V(P_{0,2k+1})$ es un torneo regular. Nótese que $u_0 \mid u_{2k+1} \pmod{T \setminus V(P_{0,2k+1})}$ por el inciso (i) del Lema 2.7.

Por contrapositiva supongamos que existe $w \in N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$ una fuente (o pozo) de $N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$. Como $T \setminus V(P_{0,2k+1})$ es regular, entonces $u_0 \equiv u_2 \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, u_2\}}$

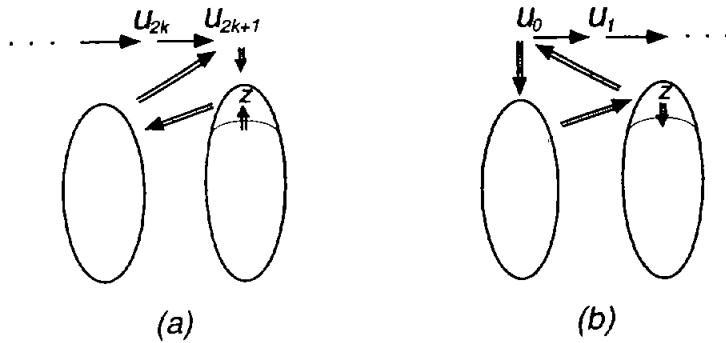


Figura 2.8: (a) $u_{2k+1} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, \dots, u_{2k}\}}$ y (b) $u_0 \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, \dots, u_{2k}\}}$

$$zw \in F(T) \text{ para todo } z \in N_{T \setminus P_{0,2k+1}}^{+-}(u_0, u_{2k+1}) \text{ y } wu_0 \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$$

$$(wz \in F(T) \text{ para todo } z \in N_{T \setminus P_{0,2k+1}}^{+-}(u_0, u_{2k+1}) \text{ y } u_{2k+1}w \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))).$$

Por lo tanto $P_{0,2k+1}$ no es maximal en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$.

Recíprocamente, supongamos por contrapositiva que $P_{0,2k+1} \subset \mathcal{D}^\rightarrow(T)$ no es maximal en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$, entonces para algún $w \in N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$ se tiene que $u_{2k+1}w \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$ o $wu_0 \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$.

Si $u_{2k+1}w \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$, entonces se tiene que $zw \in F(T)$ para todo vértice $z \in N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1}) \setminus \{w\}$, por lo que w es pozo del torneo inducido por los vértices $N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$. Análogamente se tiene que w es fuente de $N^+(u_{2k+1}, T \setminus P_{0,2k+1})$, si $wu_0 \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$. \square

Lema 2.17 $P_{0,2k} \subset \mathcal{D}^\rightarrow(T)$ es maximal en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ si y sólo $N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$ no tiene fuente y $N^+(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$ no tiene pozo.

Demostración Sea $P_{0,2k} \subset \mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Si $|T| = 2k + 1$, entonces se tiene que $V(T) = V(P_{0,2k})$, lo que contradice que $P_{0,2k}$ es maximal en $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Por el inciso (iii) del Lema 2.7 tenemos que $u_{2k} \mid u_0 \pmod{P_{0,2k}}$ y por el inciso (ii) del Lema 2.7 $u_{2k}u_0 \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ por lo que $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T) \cong \vec{C}_{2k+1}$, luego por el Corolario 2.11 $T \cong \vec{C}_{2k+1} \langle \emptyset \rangle$. Ahora podemos asumir que $T \setminus V(P_{0,2k}) \neq \emptyset$. Nótese que $u_0 \equiv u_{2k} \pmod{T \setminus P_{0,2k}}$ por el inciso (i) del Lema 2.7.

Por contradicción supongamos que el vértice $z \in N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$ es fuente del torneo inducido por $N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$. Como T es un torneo regular y $T \setminus V(P_{0,2k} \setminus \{u_0\})$ es regular por el Corolario 2.15, entonces por la Observación 2.13, se tiene que

$$N^+(z, T \setminus P_{0,2k}) = (N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k}) \setminus \{z\}).$$

Entonces $xz \in F(T)$ para todo $x \in N^+(u_0, T \setminus P_{0,2k})$, por lo tanto $zu_0 \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T))$, véase el inciso (a) de la figura 2.9. Si $y \in N^+(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$ es el pozo del torneo inducido por $N^+(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$, entonces $yx \in F(T)$ para todo $x \in N^-(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$, por lo que $u_{2k}y \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T))$, véase el inciso (b) de la figura 2.9). Luego $P_{0,2k}$ no es maximal en $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Recíprocamente su-

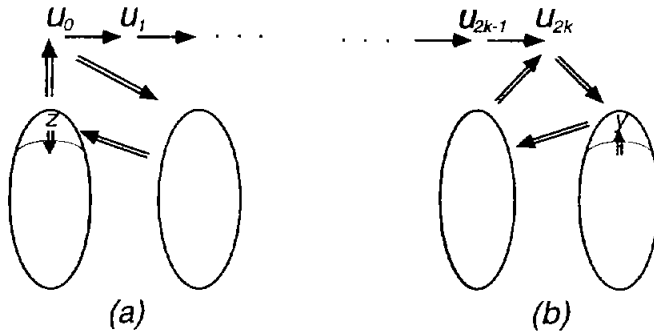


Figura 2.9: (a) $u_{2k} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\}}$ y (b) $u_{2k} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\}}$

pongamos por contrapositiva que $P_{0,2k} \subset \mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ no es maximal en $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Entonces existe un vértice $z \in N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$ o $y \in N^+(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$ tal que $zu_0 \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T))$ o $u_{2k}y \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T))$.

Si $zu_0 \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T))$, entonces para todo vértice $x \in N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$ se tiene que $zx \in F(T)$, por lo que z es el fuente del torneo inducido

por los vértices de $N^-(u_0, T \setminus P_{0,2k})$, véase el inciso (a) de la figura 2.9. Análogamente si $u_{2k}y \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$, entonces y es el pozo del torneo inducido por los vrtices de $N^+(u_{2k}, T \setminus P_{0,2k})$, véase el inciso (b) de la figura 2.9.

□

Sea $\mathcal{D}_{T'}^\rightarrow(T) = \mathcal{D}^\rightarrow(T)[V(T')]$.

Nótese que en el Lema 2.4, $\mathcal{D}_{T'}^\rightarrow(T)$ no necesariamente es inducida en $\mathcal{D}^\rightarrow(T')$, puede haber flechas de la discordancia de T' que no aparecen en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$. Cuando $\mathcal{D}_{T'}^\rightarrow(T)$ es subdigráfica inducida de $\mathcal{D}^\rightarrow(T')$ decimos que T' es subtorneo *fiel* de T .

Lema 2.18 *Sea $P_{u_0u_r} = (u_0, u_1, \dots, u_r)$ una trayectoria maximal en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ con $r \geq 2$. Entonces $T \setminus \{u_0, u_1\}$ y $T \setminus \{u_{r-1}, u_r\}$ son subtorneos fieles de T .*

Demostración Sea $T' = T \setminus \{u_0, u_1\}$ y $vw \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T'))$, entonces T' es regular por el Corolario 2.15.

Supongamos que $u_2 \in N^{+-}(v, w; T')$. Por los incisos (i) y (iii) del Lema 2.7,

$$u_0 \equiv u_2 \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, u_2\}} \text{ y } u_0 \mid u_2 \pmod{u_1},$$

entonces $u_0 \in N^{+-}(v, w)$ y $u_1 \in N^{-+}(v, w)$ por lo que $v \mid w \pmod{\{u_0, u_1\}}$ y así $v \mid w \pmod{T}$.

La demostración para $T \setminus \{u_{r-1}, u_r\}$ es análoga. □

Lema 2.19 *Sea $P_{u_0u_r} = (u_0, u_1, \dots, u_r)$ una trayectoria en $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ donde $r \geq 3$. Entonces para $0 < i, i+1 < r$, el torneo $T' = T \setminus \{u_i, u_{i+1}\}$ es subtorneo regular, pero no fiel de T . Además*

$$\mathcal{D}^\rightarrow(T') = \mathcal{D}_{T'}^\rightarrow(T) \cup (u_{i-1}, u_{i+2}).$$

Demostración Sea $u_iu_{i+1} \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$, entonces T' es regular por el Corolario 2.15. Además por el inciso (i) del Lema 2.7,

$$u_{i-1} \mid u_{i+2} \pmod{T \setminus \{u_i, u_{i+1}\}}$$

y por el Lema 2.4, se sigue que

$$F(\mathcal{D}_{T'}^\rightarrow(T) \cup (u_{i-1}, u_{i+2})) \subset F(\mathcal{D}^\rightarrow(T')).$$

Sea $vw \in F(\mathcal{D} \rightarrow (T'))$ tal que $vw \notin F(\mathcal{D} \rightarrow (T))$, entonces

$v \equiv w \pmod{u_i}$ ($v \equiv w \pmod{u_{i+1}}$). Luego,

$$\begin{aligned} u_i &\equiv u_{i+2} \pmod{T \setminus \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}\}} \text{ y } u_i \mid u_{i+2} \pmod{u_{i+1}} \\ (u_{i-1} &\equiv u_{i+1} \pmod{T \setminus \{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\}} \text{ y } u_{i-1} \mid u_{i+1} \pmod{u_i}) \end{aligned}$$

si $vw \neq u_{i-1}u_{i+2}$, entonces $v \equiv w \pmod{u_{i+2}}$ ($v \equiv w \pmod{u_{i-1}}$) lo cual contradice que $vw \in F(\mathcal{D} \rightarrow (T'))$. Por lo que $vw = u_{i-1}u_{i+2}$,

$$F(\mathcal{D} \rightarrow (T')) \subset F(\mathcal{D}_{T'}^{\rightarrow}(T) \cup (u_{i-1}, u_{i+2})).$$

y sigue el resultado. \square

Corolario 2.20 $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \setminus \{i, i+m\} \cong \vec{C}_{2m-1} \langle \emptyset \rangle$.

Demostración $\mathcal{D} \rightarrow (\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) = (0, m, 2m, m-1, \dots, 1, m+1, 0)$, sea $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle^* = \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \setminus \{i, i+m\}$ por el lema anterior, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \rightarrow (\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle^*) &= \mathcal{D}_{\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle^*}^{\rightarrow} (\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) \cup (i-m, i+2m) \\ &= (0, m, \dots, i+m+1, i+2m, i+m-1, \dots, m+1, 0). \end{aligned}$$

Como la discordancia de $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \setminus \{i, i+m\}$ es un ciclo, se sigue el resultado por el Corolario 2.11. \square

Definición 2.21 Sea D una digráfica y U, V subconjuntos ajenos de los vértices de D . Definimos las siguientes subdigráficas de D :

$$V(D[U \leftrightarrow V]) = U \cup V$$

$$\begin{aligned} F(D[U \leftrightarrow V]) &= \{uv \in F(D) : u \in U, v \in V\} \\ &\cup \{vu \in F(D) : u \in U, v \in V\} \end{aligned}$$

$$V(D[U \rightarrow V]) = U \cup V$$

$$F(D[U \rightarrow V]) = \{uv \in F(D) : u \in U, v \in V\}$$

$$V(D[U \leftarrow V]) = U \cup V$$

$$F(D[U \leftarrow V]) = \{vu \in F(D) : u \in U, v \in V\}$$

Sea $P = \{u_0, u_1, \dots, u_r\}$ una trayectoria maximal en $\mathfrak{D}^\rightarrow(T)$, tal vez trivial, y sean $V^- = N^+(u_0; T \setminus P)$ y $V^+ = N^-(u_0; T \setminus P)$.

Lema 2.22 $\mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P$ es subdigráfica de $T[V^- \leftrightarrow V^+]$, más aún

$$\mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P = \mathfrak{D}^\rightarrow(T \setminus P) [V^- \leftrightarrow V^+].$$

Demostración Sea $T' = T \setminus P$ y $vw \in F(\mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P)$. En particular, se tiene que $v \mid w \pmod{u_0}$, por lo que tanto v como w no pueden estar en la misma semivecindad de u_0 y $vw \in T[V^- \leftrightarrow V^+]$.

Sea $vw \in F(\mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P)$. Del Lema 2.4 se sigue que $vw \in F(\mathfrak{D}^\rightarrow(T'))$. Como $\mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P$ es subdigráfica de $T[V^- \leftrightarrow V^+]$, entonces

$$vw \in \mathfrak{D}^\rightarrow(T') [V^- \leftrightarrow V^+].$$

Sea $vw \in \mathfrak{D}^\rightarrow(T') [V^- \leftrightarrow V^+]$, entonces $vw \in \mathfrak{D}^\rightarrow(T')$ y como se tiene que $|\{v, w\} \cap V^\epsilon| = 1$ con $\epsilon \in \{-, +\}$, entonces $v \mid w \pmod{u_0}$. Como P es una trayectoria de discordancia, entonces $v \mid w \pmod{u_i}$ para todo $u_i \in P$, por lo que $vw \in \mathfrak{D}^\rightarrow(T) \setminus P$. \square

Dado un torneo regular y una \mathfrak{D} -flecha, éste último lema nos dice donde pueden estar las otras \mathfrak{D} -flechas del torneo (en el caso en que las hubiera) en el residuo de la \mathfrak{D} -flecha.

Capítulo 3

Moldes y Orígenes de torneos regulares.

En este capítulo introducimos un concepto nuevo - el de moldes - que nos permite estudiar propiedades de una familia de torneos regulares a partir de un cierto representante de ella.

3.1 Moldes

Definición 3.1 Si T es un torneo regular y todas las trayectorias en la digráfica de discordancia $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ son de orden a lo más 2, entonces decimos que T es un molde.

Nótese que la digráfica de discordancia de un molde consta de vértices aislados y flechas ajenas dos a dos.

Sea T un torneo regular, $\{P_i^1\}$ el conjunto de trayectorias maximales de orden impar de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ y $\{P_i^2\}$ el conjunto de trayectorias maximales de orden par de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$, $P_i^1 = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,2k_i+1}\}$, $P_i^2 = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,2k_i}\}$. Definimos los siguientes conjuntos de vértices:

$V^1 = \{u_{i,1} \in V(T) : u_{i,1} \in P_i^1\}$ y $V^2 = \{v_{i,1}, v_{i,2} \in V(T) : (v_{i,1}, v_{i,2}) \in P_i^2\}$.

Definición 3.2 Se define el molde M^T de un torneo $T \in \mathbb{TR}^{\circ}$ como sigue:

$$V(M^T) = V^1 \cup V^2.$$

$$M^T = T[V(M^T)].$$

Observación 3.3 *El molde M^T de un torneo $T \in \mathbb{TR}^\circ$ es un molde y es un subtorneo único de T .*

Sea T un torneo regular, M^T su molde, P_i una componente maximal de $\mathfrak{D}^\rightarrow(T)$ y $c_i \subset P_i$ la componente maximal de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$. Sea $\varphi : S_0 \cup S_1 \rightarrow \mathbb{N}$ la función de peso que le asigna a cada componente c_i de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$ el orden de P_i en $\mathfrak{D}^\rightarrow(T)$, es decir que $\varphi(c_i) = |P_i|$; nótese que $\varphi|_{S_0} \subset 2\mathbb{N}^0 + 1$ y $\varphi|_{S_1} \subset 2\mathbb{N}$.

A continuación veremos como podemos reconstruir cualquier torneo regular $T \in \mathbb{TR}^\circ$ a partir de su molde y la función de pesos φ_T .

Sea el torneo $T \in \mathbb{TR}^\circ$, M^T su molde y φ_T su función de pesos. Definimos la familia $\{\alpha_u\}$ en base al molde y la función de peso como sigue:

(i) Si z es un vértice aislado de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$, entonces

$$\alpha_z = \begin{cases} z & \text{si } \varphi(z) = 1 \\ \vec{C}_{\varphi(z)} \langle \emptyset \rangle & \text{si } \varphi(z) > 1 \end{cases}$$

(ii) Si vw es una flecha de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$, entonces

$$\begin{cases} \alpha_v = v \text{ y } \alpha_w = w & \text{si } \varphi(vw) = 2 \\ \alpha_v \cong \alpha_w = TT_{\frac{1}{2}\varphi(vw)} \langle \emptyset \rangle & \text{si } \varphi(vw) > 2 \end{cases}$$

Sea $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T)$ la suma lexicográfica de la familia $\{\alpha_u\}$ sobre el molde M^T . Nótese que si T es un molde, entonces $T = M^T$, y $\alpha_u = u$ para todo $u \in V(M^T)$, por lo que $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T) = M^T = T$.

Definimos $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)$ como el torneo que se obtiene al aplicarle las operaciones $O(i)$, $O(ii)$ a cada componente de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$ en $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T)$.

$O(i)$ Si z es un vértice aislado de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$ donde $\varphi(z) > 1$ y por lo tanto $V(\alpha_z) = \{z_1, \dots, z_{\varphi(z)}\}$, entonces invertimos las flechas entre el subtorneo $T \setminus \alpha_z$ y todos los vértices z_{2i} .

Nótese que si x, y son componentes de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M^T)$ con $xy \in F(T)$ y $\varphi(x), \varphi(y) > 1$, entonces $x_{2i}y_{2j} \in F(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T))$ para $0 < 2i < \varphi(x)$ y $0 < 2j < \varphi(y)$.

O (ii) Si vw es una flecha de $\mathcal{D} \rightarrow (M^T)$ donde $\varphi(vw) > 2$, entonces

$$V(\alpha_v) = \{v_1, \dots, v_{\frac{1}{2}\varphi(vw)}\} \text{ y}$$

$$V(\alpha_w) = \{w_1, \dots, w_{\frac{1}{2}\varphi(vw)}\}$$

donde

$$\left(v_{\frac{1}{2}\varphi(vw)}, v_{\frac{1}{2}\varphi(vw)-1}, \dots, v_1\right) \text{ y}$$

$$\left(w_{\frac{1}{2}\varphi(vw)}, w_{\frac{1}{2}\varphi(vw)-1}, \dots, w_1\right)$$

son las sucesiones de fuentes en $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T)$ de $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T)[V(\alpha_v)]$ y $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T)[V(\alpha_w)]$ respectivamente. En este caso invertimos las flechas $v_i w_j$ si $j < i$.

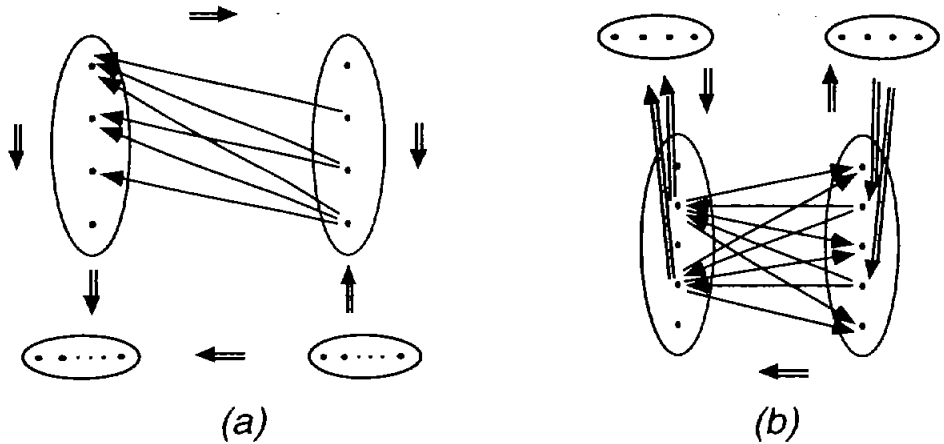


Figura 3.1: (a) La operación $o(i)$ y (b) la operación $o(i)$.

Nótese que $(z_1, \dots, z_{\varphi(z)})$ y $(v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_{\frac{1}{2}(\varphi(vw)-1)}, w_{\frac{1}{2}(\varphi(vw)-1)})$ son trayectorias de la digráfica de discordancia de $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)$.

Lema 3.4 $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)$ es un torneo regular.

Demostración Si T es un molde, entonces $T = M^T$, $\alpha_u = u$ para todo $u \in V(M^T)$ y $\sigma(\{\alpha_u\}, M^T) = M^T = T$, que es un torneo regular. Supongamos que T no es molde. Sea z una componente de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$ tal que z no es componente de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Podemos asumir que $\alpha_z = \vec{C}_{\varphi(z)}^{\rightarrow}(\emptyset)$, con $\varphi(z) > 1$, entonces para todo $z_i \in \alpha_z$ se tiene que

$$d^+(z_i; \alpha_z) = d^-(z_i; \alpha_z).$$

Sea S_1 el conjunto de flechas de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$ y $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T[S_1])$. Por construcción se tiene que para $z_i \in \alpha_z$

$$d^+(z_i; \tilde{\sigma}_1) = d^-(z_i; \tilde{\sigma}_1).$$

Sea S_0 el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$, $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T[S_0])$ y $x, y \in S_0$ tales que $xz, zy \in F(M^T)$. Para $z_{2i} \in \alpha_z$ se tiene por construcción que $d^-(z_{2i}; \alpha_x) = d^+(z_{2i}; \alpha_x) + 1$ y $d^+(z_{2i}; \alpha_y) = d^-(z_{2i}; \alpha_y) + 1$. Como $M^T[S_0]$ es regular, entonces $d^+(z; M^T[S_0]) = d^-(z; M^T[S_0])$ por lo que

$$d^+(z_{2i}; \tilde{\sigma}_0 \setminus \alpha_z) = d^-(z_{2i}; \tilde{\sigma}_0 \setminus \alpha_z).$$

Para $z_{2i+1} \in \alpha_z$, se tiene que

$$\begin{aligned} d^+(z_{2i+1}; \alpha_x) &= d^-(z_{2i+1}; \alpha_x) + 1 \text{ y} \\ d^-(z_{2i+1}; \alpha_y) &= d^+(z_{2i+1}; \alpha_y) + 1. \end{aligned}$$

Como $M^T[S_0]$ es regular, entonces $d^+(z; M^T[S_0]) = d^-(z; M^T[S_0])$ por lo que

$$d^+(z_{2i+1}; \tilde{\sigma}_0 \setminus \alpha_z) = d^-(z_{2i+1}; \tilde{\sigma}_0 \setminus \alpha_z).$$

Por lo tanto $d^+(z_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)) = d^-(z_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T))$ para todo $z_i \in \alpha_z$.

Sea vw una componente de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$ tal que vw no es componente de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Sea $v_i \in \alpha_v$. Por construcción se tiene que

$$\begin{aligned} d^+(v_i; \tilde{\sigma}[\alpha_v \cup \alpha_w]) &= d^-(v_i; \tilde{\sigma}[\alpha_v \cup \alpha_w]) + 1 \text{ y} \\ d^+(v_i; \tilde{\sigma}_1 \setminus \{\alpha_v \cup \alpha_w\}) &= d^-(v_i; \tilde{\sigma}_1 \setminus \{\alpha_v \cup \alpha_w\}). \end{aligned}$$

Sean $x, y \in S_0$ tales que $xv, vy \in F(M^T)$. Por construcción se tiene que $d^-(v_i; \alpha_x) = d^+(v_i; \alpha_x) + 1$ y $d^+(v_i; \alpha_y) = d^-(v_i; \alpha_y) + 1$. Como

$d^-(v; M^T [S_0]) = d^+(v; M^T [S_0]) + 1$, entonces $d^-(v_i; \tilde{\sigma}_0) = d^+(v_i; \tilde{\sigma}_0) + 1$, por lo que para todo $v_i \in \alpha_v$, y se tiene que

$$d^+(v_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)) = d^-(v_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)).$$

Análogamente se tiene que $d^+(w_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)) = d^-(w_i; \tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T))$ para todo $w_i \in \alpha_w$, con lo que queda demostrado el lema. \square

Proposición 3.5 *Sea M^T y φ_T el molde y la función de pesos de $T \in \mathbb{TR}^\circ$. Entonces $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T) \cong T$.*

Demostración Sea $T \in \mathbb{TR}^\circ$, M y φ su molde y su función de pesos. Basta probar que cada componente X de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M)$ induce una componente de $\mathfrak{D}^\rightarrow(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M))$ de orden $\varphi(X)$.

Sea $z \in V(M)$ una componente de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M)$. Nótese que $\varphi(z)$ es impar, por lo que $\mathfrak{D}^\rightarrow(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M) \{ \{\alpha_z\} \}) \cong \overrightarrow{C}_{\varphi(z)}$. Sea

$$\mathfrak{D}^\rightarrow(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M) \{ \{\alpha_z\} \}) = (z = z_1, z_2, \dots, z_{\varphi(z)}, z_1).$$

Como $\varphi(z)$ es impar, se sigue que

$$\begin{aligned} z_1 &\equiv z_{\varphi(z)} \pmod{\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M) \setminus \{\alpha_z\}} \text{ y} \\ z_i &\mid z_{i+1} \pmod{\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M)}, 1 \leq i < \varphi(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{D}^\rightarrow(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M) \{ \{\alpha_z\} \})$ es una trayectoria dirigida de orden $\varphi(z)$.

Sea $vw \in V(M)$ una componente de $\mathfrak{D}^\rightarrow(M)$. Nótese que $\varphi(vw)$ es par. Sea

$$\begin{aligned} V(\{\alpha_v\}) &= \left\{ v = v_1, v_2, \dots, v_{\frac{1}{2}\varphi(vw)} \right\} \text{ y} \\ V(\{\alpha_w\}) &= \left\{ w = w_1, w_2, \dots, w_{\frac{1}{2}\varphi(vw)} \right\}. \end{aligned}$$

Por construcción

$$\begin{aligned} v_i &\mid w_i \pmod{\tilde{\sigma}(\{\alpha_v \cup \alpha_w\}, M)}, 1 \leq i \leq \varphi(vw) \text{ y} \\ w_i &\mid v_{i+1} \pmod{\tilde{\sigma}(\{\alpha_v \cup \alpha_w\}, M)}, 1 \leq i < \varphi(vw). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{D}^\rightarrow(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M) \{ \{\alpha_v \cup \alpha_w\} \})$ es una trayectoria dirigida de orden $\varphi(vw)$.

Sean $x_i, y_j \in V(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M))$ tal que $x_i y_j \in F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M)))$. Sean $x, y \in V(M)$ tales que $x_i \in V(\alpha_x)$ y $y_j \in V(\alpha_y)$. Supongamos que $x \neq y$. Por el Lema 3.4 y el Lema 2.6, $d^-(u), d^+(u) \leq 1$ para todo $u \in V(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M))$, entonces $y_j = y$.

Si x es componente de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$, entonces $\varphi(x)$ es impar y $x_i = x_{\varphi(x)}$, por lo que $x \mid y \pmod{M}$, contradiciendo que x es componente de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$.

Si vx es componente de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$, entonces $\varphi(vx)$ es par y $x_i = x_{\frac{1}{2}\varphi(vx)}$, por lo que $(v, x, y) \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$, contradiciendo que M es molde.

Por lo tanto $x = y$ y $x_i, y_j \in \{\alpha_x\}$. Como $\mathcal{D}^{\rightarrow}(\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M))[\{\alpha_x\}]$ es una trayectoria dirigida, entonces $y_j = x_{i+1}$.

Las componentes de la digráfica de discordancia de $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)$ son $\{(z_1, \dots, z_{\varphi(z)})\}_{z \in S_0}$ y $\{(v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_{\frac{1}{2}(\varphi(vw)-1)}, w_{\frac{1}{2}(\varphi(vw)-1)})\}_{vw \in S_1}$.

Además $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M)[M] = M$. Con lo que queda demostrado. \square

Hemos visto que podemos reconstruir cualquier torneo $T \in \mathbf{TR}^o$ a partir de M^T y φ_T .

Nótese que si $T, T' \in \mathbf{TR}_{2m+1}^o$ cumplen que $M^T \not\cong M^{T'}$, entonces $T \not\cong T'$.

3.2 \mathcal{D} -orígenes y \mathcal{D} -destinos

Definición 3.6 Sea M un molde, S_0 el conjunto de los vértices aislados de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$, S_1^- el conjunto de los vértices iniciales de las flechas de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$ y S_1^+ el conjunto de los vértices terminales de las flechas de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$; decimos que $O = M[S_0 \cup S_1^-]$ es el torneo de origen del molde M y la pareja (O, S_0) es el \mathcal{D} -origen del molde M ; $D = M[S_0 \cup S_1^+]$ es el torneo de destino del molde M y (D, S_0) es el \mathcal{D} -destino del molde M .

Nótese que si M es un molde cuyo \mathcal{D} -origen es (O, S_0) y $S_1^- = V(O) \setminus S_0$, entonces

$$M \cong O \langle S_1^-, \rightarrow \rangle$$

(véase la figura 3.2) y por construcción (página 10) se tiene que $M[S_1^-] \cong M[S_1^+]$. Sea T un torneo, $U \subset V(T)$ tales que (T, U) es el \mathcal{D} -origen del molde M . Decimos que $M(T, U)$ es el molde inducido por el \mathcal{D} -origen (T, U) . Sea $\bar{U} = V(T) \setminus U$. En adelante usaremos la siguiente notación:

$$U = T[U] \text{ y } \bar{U} = T[\bar{U}].$$

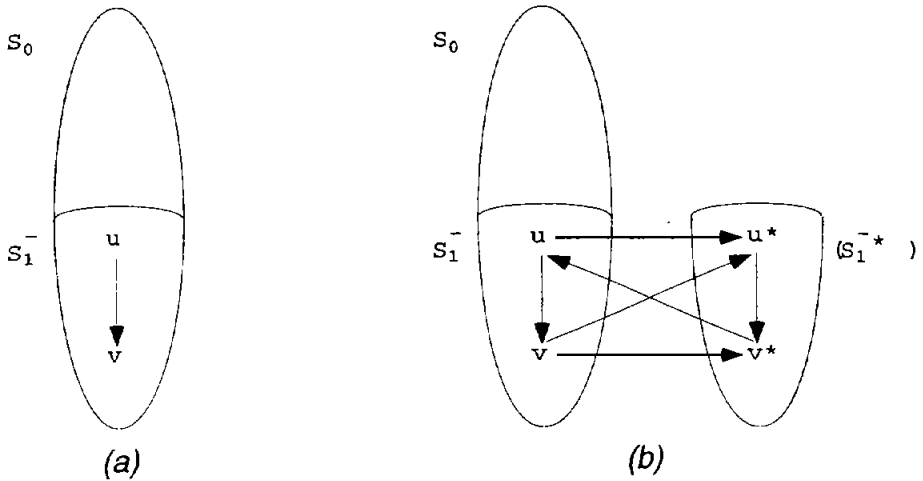


Figura 3.2: (a) El torneo O y (b) la construcción $O\langle S_1^-, \rightarrow \rangle$

Decimos que dos \mathfrak{D} -orígenes (T, U) y (T', U') son *isomorfos* si existe un isomorfismo $\varphi : V(T) \rightarrow V(T')$ tal que $\varphi(U) = U'$.

Observación 3.7 Sean M y M' dos moldes cuyos \mathfrak{D} -orígenes son (T, U) y (T', U') respectivamente. Entonces $M \cong M'$ si y sólo si $(T, U) \cong (T', U')$.

Decimos que una pareja (T, U) es un \mathfrak{D} -origen si existe un molde M para el cual (T, U) es \mathfrak{D} -origen. Un problema interesante es caracterizar las parejas (T, U) que son \mathfrak{D} -orígenes. Otro problema es estudiar los torneos regulares cuyos \mathfrak{D} -orígenes coinciden.

Lema 3.8 La pareja (T, U) es un \mathfrak{D} -origen si y sólo si $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es molde y no hay discordancias de T en U .

Demostración Sea (T, U) un \mathfrak{D} -origen, entonces por la definición de \mathfrak{D} -origen $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es molde y el torneo T no tiene discordancias en U . Supongamos que $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es molde y T no tiene discordancias en U . Por el inciso (iii) de la Observación 1.3, cada vértice $u \in \bar{U}$ es vértice inicial de una flecha uu^* que está en la discordancia del molde $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$. Como $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es un molde y T no tiene discordancias en U , entonces las flechas uu^* son las únicas \mathfrak{D} -flechas de $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ por lo que \bar{U} es el conjunto vértices

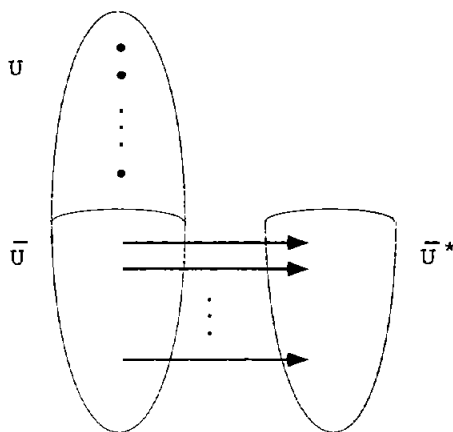


Figura 3.3: La discordancia de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$

iniciales de las \mathfrak{D} -flechas de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ y U es el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$. Por lo tanto (T, U) es el \mathfrak{D} -origen del molde $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$. \square

Proposición 3.9 *Sea (T, U) un \mathfrak{D} -origen. T es regular si y sólo si $T = U$.*

Demostración Si $T = U$, entonces T es regular por definición. Sea T regular. Por contradicción supongamos que $T \setminus U \neq \emptyset$. Sea $\bar{U} = T \setminus U$. Como U es un subtorneo regular de T , entonces $|\bar{U}| = 2m$. Sea $v \in \bar{U}$, entonces $d^+(v; U) = r$ y $d^-(v; U) = r + 1$. Como T es regular, entonces $d^+(v; \bar{U}) = m$ y $d^-(v; \bar{U}) = m - 1$, lo cual contradice el hecho de que $\sum_{v \in \bar{U}} d^-(v) = \sum_{v \in \bar{U}} d^+(v)$. \square

Observación 3.10 *La pareja (T, U) es un \mathfrak{D} -destino si y sólo si $T \langle \bar{U}, \leftarrow \rangle$ es molde y no hay discordancias de T en U .*

El siguiente teorema es equivalente al Teorema 3.4 de Cho et al. en [7]. Ellos piden que T esté bien - cubierto (página v), pero por construcción basta revisar las discordancias y concordancias de nuestros incisos (iii) y (iv) del siguiente teorema.

Teorema 3.11 *La pareja (T, U) es un \mathfrak{D} -origen si y sólo si cumple las siguientes condiciones:*

- (i) U es regular.
- (ii) Para todo $u \in \bar{U}$ $d^+(u; U) = r$ y $d^-(u; U) = r + 1$, donde $|U| = 2r + 1$.
- (iii) T no tiene una pareja u, v concordante con $u \in \bar{U}$,
- (iv) T no tiene una flecha discordante con el origen en U .

Demostración Sea (T, U) un \mathfrak{D} -origen. Por el Lema 3.8 y el Corolario 2.15, se tiene que U es regular. Como U es el conjunto de los vértices aislados de $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$, entonces T no tiene

- (a) discordancias en U ,
- (b) U (\bar{U})-flechas en $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$,
- (c) (\bar{U}) U -flechas en $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$.

Por (a) y (b) $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$ no tiene flechas discordantes con el origen en U , por (c) y (iii) de la Observación 1.3, T no tiene parejas u, v concordantes con $u \in U$ y $v \in \bar{U}$. Como $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es molde, entonces $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle) \setminus U$ es una colección de flechas ajenas entre sí y por (i) de la Observación 1.3 T no tiene parejas concordantes en \bar{U} . Nótese que $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U = \bar{U} \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$, por lo que $d^+(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}|$ y $d^-(u; T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U) = |\bar{U}| - 1$ para todo $u \in \bar{U}$. Como $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es regular por el Lema 3.8, entonces para todo $u \in \bar{U}$ se tiene que $d^+(u; U) = r$ y $d^-(u; U) = r + 1$.

Supongamos que la pareja (T, U) cumple las cuatro condiciones del teorema. Basta probar que $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es un molde y U es el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$. Por la condición (iii), $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ no tiene discordancias en U , por la condición (iii) y por (i) y (iii) de la Observación 1.3, se sigue que tampoco tiene \mathfrak{D} -flechas en $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}]$. Por la condición (iv), T no tiene \mathfrak{D} -flechas en $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}^*]$, por lo que en efecto todos los vértices de U son vértices aislados en $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$. Por construcción, cada vértice en $V(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U)$ está en una \mathfrak{D} -flecha uu^* en $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ por lo que U es el conjunto de los vértices aislados en $\mathfrak{D}^+(T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$. Ahora

falta ver que $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es un molde. Como U es el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$ basta demostrar que la discordancia de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \setminus U$ son flechas ajenas entre sí. Sea $xy \in F(\mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle))$. Sabemos por el inciso (i) del Lema 2.6, que $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)}^{+}(u), d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)}^{-}(u^*) \leq 1$ para todo $u \in \bar{U}$ y $u^* \in \bar{U}^*$. Como $uu^* \in \mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)$, entonces la \mathfrak{D} -flecha xy es del tipo uu^* o v^*u con $uv \in F(\bar{U})$. Si xy es del tipo v^*u , entonces u, v es una pareja concordante, lo que contradice la condición (iii), por lo que $\mathfrak{D}^{\rightarrow} (T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle) \setminus U$ es una colección de \mathfrak{D} -flechas ajenas entre sí. Se sigue por el Lema 3.8, que (T, U) es un \mathfrak{D} -origen.

□

Dualmente se tiene:

Teorema 3.12 *La pareja (T, U) es un \mathfrak{D} -destino si y sólo si cumple las siguientes condiciones:*

- (i) U es regular.
- (ii) Para todo $u \in \bar{U}$ $d^{-}(u; U) = r$ y $d^{+}(u; U) = r + 1$, donde $|U| = 2r + 1$.
- (iii) T no tiene una pareja u, v concordante con $u \in \bar{U}$.
- (iv) T no tiene una flecha discordante con el destino en U .

Definición 3.13 *Sea $(T, U)^{\#}$ la pareja (T', U) donde T' es el torneo que se obtiene de T invirtiendo las flechas de U y las flechas de \bar{U} .*

Lema 3.14 *Sea $M(T, U)$ el molde inducido por el \mathfrak{D} -origen. Entonces*

- (i) $(T, U)^{\#\#} = (T, U)$.
- (ii) $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \cong (M(T, U))^{\text{op}}$.

Demostración El inciso (i) se siguen de la definición de $(T, U)^{\#}$. Sea $\bar{U} = V(T) \setminus U$ y T' el torneo que se obtiene de T invirtiendo las flechas de U y de \bar{U} . Por la construcción del torneo $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ y $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ se tiene que

- (a) $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U] = U^{\text{op}} = (M(T, U))^{\text{op}} [U]$,
- (b) $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [\bar{U}] = \bar{U}^{\text{op}} = (M(T, U))^{\text{op}} [\bar{U}]$ y

$$(c) T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}] = M(T, U) [U \longleftrightarrow \bar{U}].$$

Por la construcción del torneo $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ se tiene además un isomorfismo $\psi' : \bar{U} \rightarrow \bar{U}^*$ tal que $\psi'(\bar{u}_i) = \bar{u}_i^*$ para todo $\bar{u}_i \in \bar{U}$. Nótese que \bar{U}^* es el conjunto de vértices iniciales de las \mathfrak{D} -flechas de $M(T, U)^{op}$. Luego por (b) $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [\bar{U}] = (M(T, U))^{op} [\bar{U}]$ y bajo ψ' se tiene que $(M(T, U))^{op} [\bar{U}]$ es isomorfo a $(M(T, U))^{op} [\bar{U}^*]$, por lo que ψ' es un isomorfismo entre $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [\bar{U}]$ y $(M(T, U))^{op} [\bar{U}^*]$.

Sea $u\bar{u} \in M(T, U) [U \longleftrightarrow \bar{U}]$, entonces $u\bar{u} \in T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}]$ y $u\bar{u}^* \in (T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)^{op} [U \longleftrightarrow \bar{U}^*]$, si $\bar{u}u \in M(T, U) [U \longleftrightarrow \bar{U}]$, entonces $\bar{u}u \in T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}]$, $\bar{u}^*u \in (T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle)^{op} [U \longleftrightarrow \bar{U}^*]$, por lo que $(M(T, U))^{op} [U \longleftrightarrow \bar{U}] \cong T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle [U \longleftrightarrow \bar{U}^*]$. Sea $\psi'' : \bar{U}^* \rightarrow \bar{U}$ con $\psi'' : (\bar{u}^*) = \bar{u}$ para todo $\bar{u}^* \in \bar{U}^*$. Entonces $\psi : (M(T, U))^{op} \rightarrow T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$, donde $\psi' |_U$ es la identidad, $\psi |_{\bar{U}} = \psi'$ y $\psi |_{\bar{U}^*} = \psi''$ es un isomorfismo y se sigue el inciso (ii). \square

Corolario 3.15 Si (T, U) es un \mathfrak{D} -origen, entonces $(T, U)^\#$ es un \mathfrak{D} -origen. Más aún

$$M((T, U)^\#) \cong (M(T, U))^{op}.$$

Demostración Por el Lema 3.14 se tiene que $(\mathfrak{D}^\rightarrow(T))^{op} = \mathfrak{D}^\rightarrow(T^{op})$ y $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle \cong (M(T, U))^{op}$. Por lo que $T' \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es un molde, $(T, U)^\#$ es un \mathfrak{D} -origen y $M((T, U)^\#) \cong (M(T, U))^{op}$. \square

Nótese por el inciso (i) del Lema 3.14 y el Corolario 3.15, se sigue que

$$M(T, U) \cong M((T, U)^\#)^{op}.$$

3.2.1 Parejas admisibles y parejas adecuadas

Sea U, \bar{U} una pareja de torneos, con U regular. En esta parte de la tesis queremos ver si podemos extender $U \cup \bar{U}$ a un torneo T tal que (T, U) es un \mathfrak{D} -origen. Para ello resulta útil introducir el concepto de parejas admisibles y el concepto de parejas adecuadas. Nótese que si (T, U) es un \mathfrak{D} -origen,

\mathbf{U} un torneo regular de orden $2r + 1$ y $\bar{U} = T \setminus U$, entonces la exvecindad de un vértice $u \in \bar{U}$ en U se puede ver como un r -conjunto de U ya que $d^+(u; U) = r$ para todo $u \in \bar{U}$ por (3) del Teorema 3.11. Las exvecindades de los vertices $u \in \bar{U}$ en U se pueden ver como un r -cubrimiento \mathfrak{F} de U tal que cada pareja u, v discordante de \mathbf{U} se tiene que $|\{u, v\} \cap X| \neq 1$ para algún $X \in \mathfrak{F}$.

Definición 3.16 Sea \mathbf{U} un torneo regular de orden $2r + 1$ y $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$. Decimos que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible si $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ y para toda pareja discordante u, v de \mathbf{U} existe $X \in \mathfrak{F}$ tal que $|X \cap \{u, v\}| \neq 1$.

Si $\mathfrak{F} = \emptyset$, entonces decimos que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible.

Antes de seguir adelante queremos hacer las siguientes observaciones acerca de parejas admisibles

Observación 3.17 Sea \mathbf{U} un torneo regular de orden $2r + 1$ y $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$.

- (i) Si $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible y $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$, entonces $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ es admisible.
- (ii) Si $\mathfrak{F} = U^{[r]}$, entonces $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es una pareja admisible.
- (iii) Si (T, \mathbf{U}) es un \mathcal{D} -origen y $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ admisible, entonces \mathfrak{F} induce una partición π de \bar{U} de la siguiente manera:

1. $|\pi| = |\mathfrak{F}|$,
2. para cada $X \in \mathfrak{F}$ existe $\pi_X \in \pi$ tal que $N^+(u, \mathbf{U}) = X$ si y sólo si $u \in \pi_X$,
3. para cada pareja u, v concordante de \bar{U} , existe $\pi_X \in \pi$ tal que $|\pi_X \cap \{u, v\}| = 1$ por (iii) del Teorema 3.11.

Del inciso (ii) sigue que dado un torneo regular \mathbf{U} , siempre existe una $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$ tal que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible.

Definición 3.18 Sea \bar{U} un torneo y π una partición de \bar{U} . Decimos que la pareja (\bar{U}, π) es adecuada si $\pi \neq \emptyset$ y las clases de la partición π no tienen parejas concordantes de \bar{U} .

Antes de seguir adelante queremos hacer las siguientes observaciones acerca de parejas adecuadas.

Observación 3.19 Sea \bar{U} un torneo.

- (i) Para $k \geq 2$, siempre existe una partición π , con $|\pi| = k$, de los vértices de \bar{U} , tal que (\bar{U}, π) es adecuada.
- (ii) Si $\bar{U} = \{x, y\}$ y $\{\pi\} = \bar{U}$, entonces x, y es una pareja concordante de \bar{U} . Por lo que (\bar{U}, π) no es una pareja adecuada.

Sea U un torneo regular de orden $2r + 1$ y \bar{U} un torneo (tal vez vacío). Sea $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$ tal que (U, \mathfrak{F}) es admisible y sea π una partición de \bar{U} tal que $|\pi| = |\mathfrak{F}|$ y (\bar{U}, π) es adecuada. Ahora estudiaremos bajo qué condiciones existe un torneo T tal que U es un subtorneo de T , $T \setminus U = \bar{U}$ y (T, U) es un \mathfrak{D} -origen.

Definición 3.20 Sean (U, \mathfrak{F}) admisible y (\bar{U}, π) adecuada. Un preacuerdo es una biyección $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$. Un preacuerdo es un acuerdo si existe un torneo T tal que:

- (i) Para todo $X \in \mathfrak{F}$ se tiene que $\varphi(X) = \{w \in \bar{U} : N^+(w; U) = X\}$.
- (ii) $U \subset T$, $\bar{U} = T \setminus U$ y (T, U) un es \mathfrak{D} -origen.

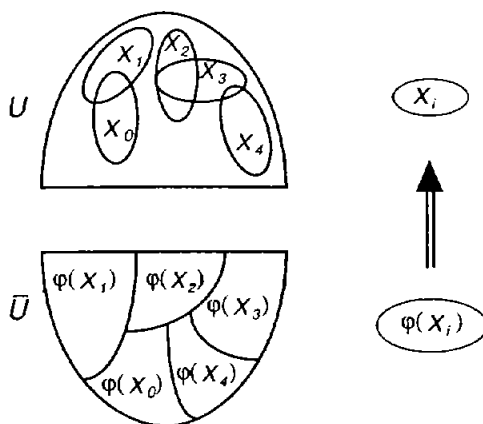


Figura 3.4: Las adyacencias entre \mathfrak{F} y π en $\varphi(T)$ bajo el acuerdo φ .

Nótese que si φ es un preacuerdo, entonces $T(\varphi)$ no necesariamente es un \mathcal{D} -origen. Cuando existe un acuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ decimos que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ acuerdan y $T(\varphi)$ es el \mathcal{D} -origen inducido por las parejas $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$, $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ y la biyección φ .

Nótese que:

- (i) Si $|\pi| = 1$, entonces $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ es adecuada si y sólo si $|\overline{\mathbf{U}}| \neq 2$ y $\overline{\mathbf{U}}$ no tienen parejas concordantes.
- (ii) Si $|\overline{\mathbf{U}}| \geq n > 1$, entonces existe una pareja $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ adecuada con $|\pi| = n$.

Sea \mathbf{S} es conjunto de semivecindades de \mathbf{U} . Sea $\mathbf{U} \in \text{TR}_{2r+1}$ y $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$. Definimos

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \setminus \mathbf{S},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_- &= \{S \in \mathfrak{F} : S = N^-(w), w \in U\} \\ \mathfrak{F}_+ &= \{S \in \mathfrak{F} : S = N^+(w), w \in U\}. \end{aligned}$$

Nótese $\mathfrak{F}_0 \cap (\mathfrak{F}_- \cup \mathfrak{F}_+) = \emptyset$, pero $\mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$ no necesariamente es vacío. Sea $U^-(\mathfrak{F}) = \{w \in U : N^-(w) \in \mathfrak{F}\}$ y $U^+(\mathfrak{F}) = \{w \in U : N^+(w) \in \mathfrak{F}\}$.

Lema 3.21 Sea $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ admisible y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$ adecuada con $|\overline{\mathbf{U}}| \geq |\pi| = |\mathfrak{F}|$ y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

1. Sea $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces

- (a) para toda pareja x, z con $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$ existe $y \in U \setminus \{x\}$ tal que $y \in N^{+-}(x, z)$.
- (b) para toda pareja w, z con $w \in U \setminus X$ y $z \in \varphi(X)$ existen $x, x' \in X$ tales que $x \in N^{-+}(w, z)$ y $x' \in N^{++}(w, z)$.

2. Sea $X \in \mathfrak{F}_-$ y $w \in U^-(\mathfrak{F})$ tal que $N^-(w; U) = X$, entonces

- (a) para toda pareja x, z con $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$, se tiene que el vértice $w \in N^{+-}(x, z)$.
- (b) para toda pareja y, z con $y \in N^+(w; U)$ y $z \in \varphi(X)$ existen dos vértices $x, x' \in X$ tales que $x \in N^{++}(y, z)$ y $x' \in N^{-+}(y, z)$.

3. Si $X \in \mathfrak{F}_+$ y $w \in U^+(X)$ tal que $N^+(w; U) = X$, entonces

(a) para toda $z \in \varphi(X)$, entonces $x \in N^{++}(w, z)$.

(b) para toda pareja y, z con $y \in N^-(w; U)$ y $z \in \varphi(X)$, entonces $w \in N^{+-}(y, z)$. Además si $N^-(y; U) \neq X$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in N^{++}(y, z)$.

(c) para toda pareja x, z con $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$ existe $y \in N^-(w; U)$ tal que $y \in N^{+-}(x, z)$.

Demostración Sea (U, \mathfrak{F}) una pareja admisible y (\bar{U}, π) una pareja adecuada con $|\bar{U}| \geq |\pi| = |\mathfrak{F}|$. Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre las parejas (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

1. Sea $X \in \mathfrak{F}_0$,

(a) Sean $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$. Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces se sigue que $N^+(x; U) \setminus X \neq \emptyset$. Sea $y \in N^+(x; U) \setminus X$, como $y \notin X$, entonces $y \in N^-(z, U)$ e $y \in N^{+-}(x, z)$.

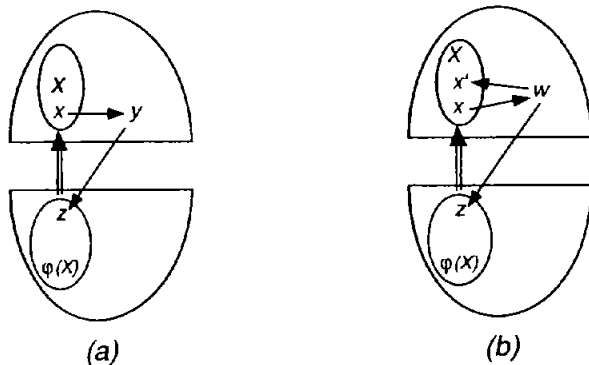


Figura 3.5: inciso (a) e inciso (b)

(b) Sean $w \in U \setminus X$ y $z \in \varphi(X)$. Para todo $x \in X$ se tiene que $x \in N^+(z)$. Como w no es vértice extremo de X , entonces existen $x, x' \in X$ tales que $x \in N^{+-}(w, z)$ y $x' \in N^{++}(w, z)$.

2. Sea $X \in \mathfrak{F}_-$, $w \in U^-(X)$ tal que $N^-(w; U) = X$,

- (a) Sean $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$. Por construcción se tiene que el vértice $w \in N^{+-}(x, z)$.

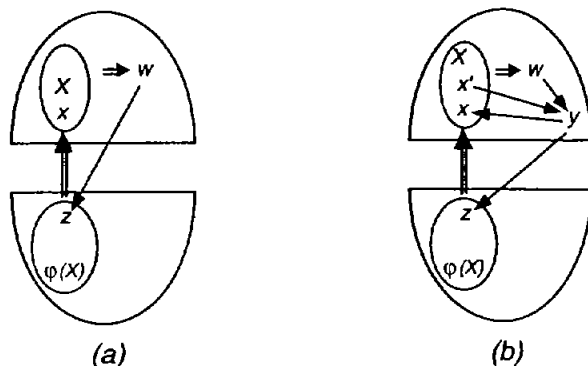


Figura 3.6: inciso (a) e inciso (b)

- (b) Sea $y \in N^+(w; U)$ tal que $N^-(y, U) \neq X$. Entonces existen $x, x' \in X$ tales que $x \in N^{++}(y, z)$ y $x' \in N^{-+}(y, z)$, ya que $x \in N^+(z)$ para todo $x \in X$.

3. Sea $X \in \mathfrak{F}_+$, $w \in U^+(\mathfrak{F})$ tal que $N^+(w; U) = X$,

- (a) Sean $x \in X$, $y \in N^-(w; U)$ y $z \in \varphi(X)$. Por construcción se tiene que $w \in N^{--}(x, z)$, $x \in N^{++}(w, z)$ y $w \in N^{+-}(y, z)$.
 (b) Si $N^+(y, U) \neq X$, entonces existe $x \in N^{++}(y, z)$.
 (c) Sea $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$, entonces existe $y \in N^-(w; U)$ tal que $y \in N^{+-}(x, z)$, ya que $y \in N^-(z)$ para todo $y \in N^-(w; U)$.

□

Lo que hemos visto entonces, es que dado (U, \mathfrak{F}) admisible, (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) basta revisar las discordancias entre $w \in U^-(\mathfrak{F})$ tal que $N^-(w; U) = X$ y $z \in \varphi(X)$, y las concordancias entre $w \in U^+(\mathfrak{F})$ tal que $N^+(w; U) = X$ y $z \in \varphi(X)$ para saber si φ es un acuerdo.

Lema 3.22 Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo. Sea $w \in U$ y $z \in \bar{U}$.

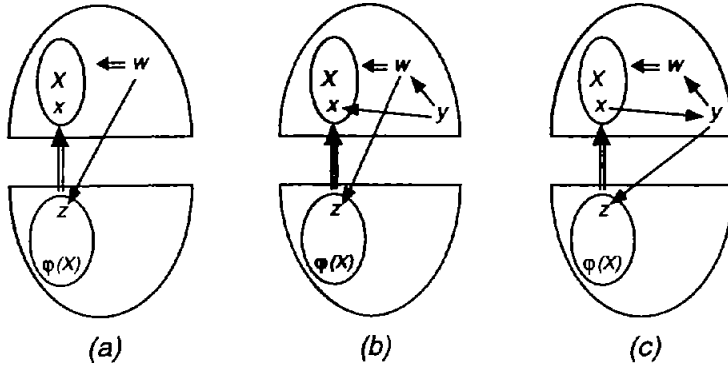


Figura 3.7: inciso (a), inciso (b) e inciso (c)

(i) La pareja wz es discordante si y sólo si:

1. $w \in U^-(\mathfrak{F})$, donde $N^-(w; U) = X$ y
2. $z \in \varphi(X)$ es pozo de $N^+(w; \bar{U})$ y fuente de $N^-(w; \bar{U}) \cup \{z\}$.

(ii) La pareja wz es concordante si y sólo si:

1. $w \in U^+(\mathfrak{F})$, donde $N^+(w; U) = X$ y
2. $z \in \varphi(X)$ es pozo de $N^-(w; \bar{U})$ y fuente de $N^+(w; \bar{U}) \cup \{z\}$.

Demostración Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo. Sea $w \in U$ y $z \in \bar{U}$.

(i) Sea wz una pareja discordante, entonces cumple las dos condiciones. Sea wz una pareja que cumple las dos condiciones. Por (i1) y el preacuerdo se tiene que $N^-(w; U) = X = N^+(z; U)$ por lo que wz es discordante con respecto a U , por (i2) se tiene que wz es discordante con respecto a \bar{U} .

(ii) La demostración es análoga al inciso anterior. □

Proposición 3.23 Sean (U, \mathfrak{F}) admisible, (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Entonces φ es un acuerdo si y sólo si:

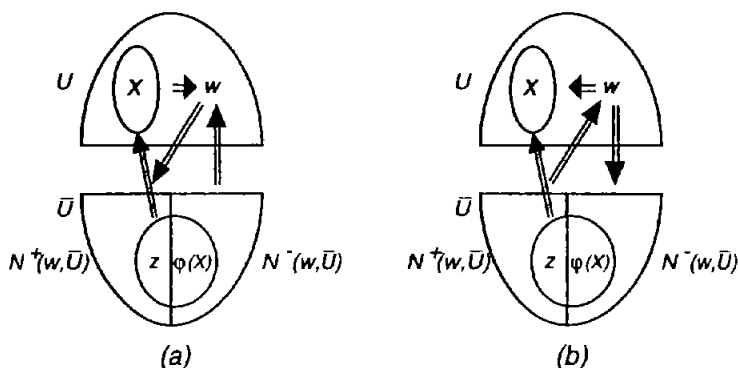


Figura 3.8: (a) z, w son discordantes, (b) z, w son concordantes

(i) Para todo $w \in U^-(\mathfrak{F})$ y todo $z \in \varphi(N^-(w, U))$ se tiene que

$$N^-(z; \bar{U}) \neq N^+(w; \bar{U}).$$

(ii) Para todo $w \in U^+(\mathfrak{F})$ y todo $z \in \varphi(N^+(w, U))$ se tiene que

$$N^+(z; \bar{U}) \neq N^+(w; \bar{U}).$$

Demostración Es una consecuencia del Lema 3.22. □

Sea \mathcal{S} es conjunto de semivecindades de \mathbf{U} . Decimos que (U, \mathfrak{F}) es una pareja \mathcal{S} -libre si $\mathfrak{F} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ o bien $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$.

Observación 3.24 Sea (U, \mathfrak{F}) una pareja admisible y uv una \mathcal{D} -flecha de U . Si $u, v \in X$, entonces $X \in \mathfrak{F}_0$.

Demostración Como uv es una \mathcal{D} -flecha de U , entonces para cualquier $w \in X$ se tiene que $|N^-(w, U) \cap \{u, v\}| = 1$. □

Corolario 3.25 Sea U un torneo regular y $\mathfrak{F} = U^{[r]} \setminus \mathcal{S}$, entonces (U, \mathfrak{F}) es admisible.

Demostración Sea uv una \mathfrak{D} -flecha de U . Se extiende la pareja $\{u, v\}$ a un r -conjunto de U . Entonces $X \in U^{[r]} \setminus \mathfrak{S}$ y (U, \mathfrak{F}) es admisible. \square

Una pareja (U, \mathfrak{F}) admisible es *universal* si todo preacuerdo con dominio (U, \mathfrak{F}) es un acuerdo. Una pareja (\bar{U}, π) adecuada es *universal* si todo preacuerdo con codominio (\bar{U}, π) es un acuerdo.

Observación 3.26 Sea (\bar{U}, π) adecuada. Si $|\bar{U}| = 2$, entonces $|\pi| = 2$.

Proposición 3.27 Sea (U, \mathfrak{F}) admisible con $|\mathfrak{F}| > 1$. La pareja (U, \mathfrak{F}) es universal si y sólo si (U, \mathfrak{F}) es \mathfrak{S} -libre.

Demostración Sea (U, \mathfrak{F}) \mathfrak{S} -libre. Por la Proposición 3.23, (U, \mathfrak{F}) es universal.

Sea (U, \mathfrak{F}) universal. Supongamos que \mathfrak{F} no es \mathfrak{S} -libre y que $w \in U^-(\mathfrak{F})$, sea $N^-(w, U) = Y$. Sea $\mathfrak{F}' = \{X \in \mathfrak{F} : w \in X\}$ y $\mathfrak{F}'' = \{X \in \mathfrak{F} \setminus Y : w \notin X\}$. Sea $|\mathfrak{F}'| = k$, $|\mathfrak{F}''| = l$, donde $|\mathfrak{F}| = k + l + 1$. Sea \bar{U} un torneo de orden $n \geq \min\{|\mathfrak{F}|, 2k\}$. Construimos la n -partición π de los vértices del torneo \bar{U} como sigue: Sea $z \in \bar{U}$, con $d^-(z; \bar{U}) \geq k$. Sea π' una $k + 1$ -partición de $N^-[z; \bar{U}]$ y π'' una l -partición de $N^+(z; \bar{U})$, ambas particiones libres de parejas concordantes. Sea $\pi = \pi' \cup \pi''$. Claramente (\bar{U}, π) es adecuada y $|\mathfrak{F}| = |\pi|$. Sea π^* la clase de π' que contiene al vértice z . Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que $\varphi(Y) = \pi^*$, $\varphi(X) \in \pi'$ para todo $X \in \mathfrak{F}'$ y $\varphi(X) \in \pi''$ para todo $X \in \mathfrak{F}''$. Entonces wz es una pareja discordante de $T(\varphi)$, lo cual contradice que la pareja (U, \mathfrak{F}) es universal.

Para el caso en que $U^+(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ la prueba es análoga. \square

Un torneo es *fluyente* si no tiene vértices extremos. Una pareja (\bar{U}, π) es *fluyente*, si cada clase π_i de π no tiene vertices extremos en $\bar{U}[\pi_i]$.

Proposición 3.28 Sea (\bar{U}, π) adecuada. La pareja (\bar{U}, π) es universal si y sólo si cumple uno de las siguientes:

(i) (\bar{U}, π) es fluyente.

(ii) Si $\pi^* \in \pi$ tiene un vértice extremo z , entonces para al menos una clase $\pi_i \in \pi \setminus \pi^*$ existe $u, v \in V(\pi_i)$ tal que $z \in N^{+-}(u, v; \pi^*)$.

Demostración Sea (\bar{U}, π) adecuada y fuente. Por la Proposición 3.23, (\bar{U}, π) es universal. Sea (\bar{U}, π) adecuada donde la partición π cumple la condición (ii). Por la Proposición 3.23, (\bar{U}, π) es universal.

Sea (\bar{U}, π) universal y no fuente. Supongamos que $\pi^* \in \pi$ tiene un pozo z de π^* tal que para toda clase $\pi_i \in \pi \setminus \pi^*$ se tiene que z es vértice extremo de $\bar{U}[\pi_i \cup z]$. Sea

$$\begin{aligned}\pi' &= \{\pi_i \in \pi \setminus \pi^* : z \text{ es fuente de } \bar{U}[\pi_i \cup z]\} \text{ y} \\ \pi'' &= \{\pi_i \in \pi \setminus \pi^* : z \text{ es pozo de } \bar{U}[\pi_i \cup z]\}.\end{aligned}$$

Sea $|\pi'| = k$, $|\pi''| = l$, donde $|\pi| = k + l + 1$. Sea U un torneo regular de orden $2r + 1$. Construimos la familia $\mathfrak{F} \subset U^{[r]}$ como sigue: Sea $w \in U$, entonces $N^-(w; U)$ es un r -conjunto. Sea $\{X_i\}_{i=1}^k \subset U^{[r]}$ tal que $w \in X_i$ y sea $\{Y_i\}_{i=1}^l \subset U^{[r]}$ tales que $w \notin Y_i$. Nótese que los conjuntos $\{X_i\}_{i=1}^k$ y $\{Y_i\}_{i=1}^l$ los podemos elegir tales que toda \mathcal{D} -flecha uv de U cumple que $|\{u, v\} \cap W| \neq 1$ para algún $W \in (\{X_i\}_{i=1}^k \cup \{Y_i\}_{i=1}^l)$. Sea

$$\mathfrak{F} = N^-(w; U) \cup \{X_i\}_{i=1}^k \cup \{Y_i\}_{i=1}^l.$$

Claramente (U, \mathfrak{F}) admisible y $|\mathfrak{F}| = |\pi|$. Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que $\varphi(N^-(w; U)) = \pi^*$, $\varphi(X_i) \in \pi'$ y $\varphi(Y_i) \in \pi''$. Entonces wz es una pareja discordante de $T(\varphi)$, lo que contradice que la pareja (\bar{U}, π) es universal.

Para el caso en que z es fuente de π^* la prueba es análoga. □

Proposición 3.29 Sea (U, \mathfrak{F}) una pareja admisible, (\bar{U}, π) una pareja adecuada y $|\mathfrak{F}| = |\pi| = 1$. Entonces (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

- (i) (U, \mathfrak{F}) es \mathbb{S} -libre.
- (ii) \bar{U} es fuente.
- (iii) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_-$, $|\bar{U}| > 2$ y \bar{U} no tiene pozo.
- (iv) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+$, $|\bar{U}| > 2$ y \bar{U} no tiene fuente.

Demostración Nótese que si (\bar{U}, π) es una pareja adecuada y $|\pi| = 1$, entonces $|\bar{U}| \neq 2$. Si (U, \mathfrak{F}) es \mathfrak{S} -libre, entonces (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan. Si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_-$, $|\bar{U}| > 2$ y \bar{U} no tiene pozo o $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+$, $|\bar{U}| > 2$ y \bar{U} no tiene fuente, entonces por la Proposición 3.23, (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan.

Sea (U, \mathfrak{F}) admisible y (\bar{U}, π) adecuada con $|\mathfrak{F}| = |\pi| = 1$, tales que (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan. Supongamos que ni (U, \mathfrak{F}) ni (\bar{U}, π) son universales. Supongamos que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_- = X$. Sea $U^-(\mathfrak{F}) = \{w\}$, donde $N^-(w, U) = X$. Si $\bar{U} = \{z\}$ o si \bar{U} tiene un pozo z , entonces por el inciso (i) del Lema 3.22 wz sería una pareja discordante, y entonces (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) no acuerdan. Si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+$, la prueba es análoga. \square

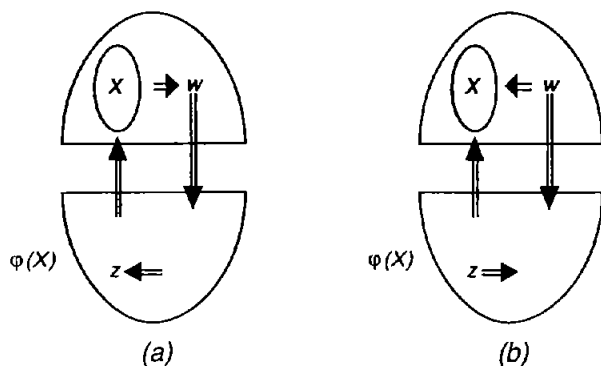


Figura 3.9: (a) \bar{U} tiene un pozo z , (b) \bar{U} tiene una fuente z .

Nótese que las condiciones de la Proposición 3.29 no son excluyentes. Como corolario de lo anterior se tiene

Corolario 3.30 *Sea M, M' moldes y $(T, U), (T', U')$ sus \mathfrak{D} -orígenes correspondientes. Sean $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ las r -cubrimientos de U y U' y π, π' las particiones de \bar{U} y \bar{U}' . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) $M \cong M'$
- (ii) $(T, U) \cong (T', U')$.
- (iii) $(U, \mathfrak{F}) \cong (U', \mathfrak{F}')$ y $(\bar{U}, \pi) \cong (\bar{U}', \pi')$.

3.3 Ejemplos pequeños

3.3.1 \mathfrak{D} -origen con $|U| = 1$

Caracterizamos las parejas $(T, \{w\})$ que son \mathfrak{D} -orígenes, donde T es un torneo y $w \in V(T)$.

Proposición 3.31 *Sea $w \in V(T)$. La pareja $(T, \{w\})$ es un \mathfrak{D} -origen si y sólo si $T = w + (T \setminus \{w\})$, $T \setminus \{w\} \neq \emptyset$ y $T \setminus \{w\}$ no tiene vértices extremos ni parejas concordantes.*

Demostración Sea $(T, \{w\})$ un \mathfrak{D} -origen. Por el Lema 2.9, se sigue que $T \setminus \{w\} \neq \emptyset$. Por el Lema 3.8, se tiene que $T \langle T \setminus \{w\}, \rightarrow \rangle$ es un molde que supongamos tiene orden $2m + 1$ y w es el único vértice aislado de $\mathfrak{D}^\rightarrow(T \langle T \setminus \{w\}, \rightarrow \rangle)$. Por el inciso (ii) del Teorema 3.11, $wv \in F(T)$ para todo $v \in T \setminus \{w\}$, por lo que $T = w + (T \setminus \{w\})$. Por el inciso (iii) del Teorema 3.11, $T \setminus \{w\}$ no tiene pozo ni fuente por lo que $T \setminus \{w\}$ no tiene vértices extremos y por el inciso (iv) del Teorema 3.11, T no tiene concordancias en $T \setminus \{w\}$.

Sea $T = w + (T \setminus \{w\})$ con $T \setminus \{w\}$ sin vértices extremos ni parejas concordantes de T . Como $|\{w\}| = 1$ trivialmente se cumple el inciso (i) del Teorema 3.11 y se cumple que T no tiene discordancias en $\{w\}$. Por hipótesis, T no tiene concordancias en $T \setminus \{w\}$. Como $T \setminus \{w\}$ no tiene vértices extremos, entonces T no tiene una pareja u, w concordante con $u \in T \setminus \{w\}$ ni una \mathfrak{D} -flecha wu con lo que se satisface el inciso (iii) del Teorema 3.11. Como $T = w + (T \setminus \{w\})$, entonces para todo $u \in T \setminus \{w\}$ se tiene que $d^-(u; U) = 1$ y $d^+(u; U) = 0$, por lo que se cumple el inciso (ii) del Teorema 3.11 y la pareja $(T, \{w\})$ es un \mathfrak{D} -origen. \square

Corolario 3.32 *Si $T = w + (T \setminus \{w\})$ y para toda pareja $u, v \in V(T) \setminus \{w\}$ se tiene que uv esta en un triángulo cíclico, entonces la pareja $(T, \{w\})$ es un \mathfrak{D} -origen.*

Dualmente se tiene:

Proposición 3.33 *Sea $w \in V(T)$. La pareja $(T, T \setminus \{w\})$ es un \mathfrak{D} -destino si y sólo si $T = (T \setminus \{w\}) + w$ y $T \setminus \{w\}$ no tiene vértices extremos ni parejas concordantes.*

Corolario 3.34 Si $T = (T \setminus \{w\}) + w$ y para toda pareja $u, v \in V(T) \setminus \{w\}$ se tiene que uv esta en un triángulo cíclico, entonces la pareja $(T, \{w\})$ es un \mathcal{D} -destino.

3.3.2 \mathcal{D} -origen con $|U| = 3$

Caracterizamos las parejas (T, U) que son \mathcal{D} -orígenes, donde T es un torneo y $U \subset V(T)$, con $|U| = 3$. Para ello caracterizamos primero las parejas $(\vec{C}_3, \mathfrak{F})$ que son admisibles, $\mathfrak{F} \subset V(\vec{C}_3)$.

Lema 3.35 Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo. (U, \mathfrak{F}) es admisible si y sólo si $\mathfrak{F} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}\}$.

Demostración Si $\mathfrak{F} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}\}$, entonces (U, \mathfrak{F}) es admisible. Sea (U, \mathfrak{F}) admisible. Si $\{u_i\} \notin \mathfrak{F}$, entonces $|\{u_{i+1}, u_{i-1}\} \cap X| = 1$ para todo $X \in \mathfrak{F}$. \square

Nótese que si $|U| = 3$, entonces (U, \mathfrak{F}) no es universal.

Proposición 3.36 Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo, (U, \mathfrak{F}) admisible y (\bar{U}, π) adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$. Un preacuerdo $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) es un acuerdo si y sólo si para todo $a \in \varphi(u_i)$ pasa al menos uno de los siguientes casos:

- (i) existe $a_{i-1} \in \varphi(u_{i-1})$ tal que $aa_{i-1} \in F(T)$ o
- (ii) existe $a_{i+1} \in \varphi(u_{i+1})$ tal que $a_{i+1}a \in F(T)$ o
- (iii) a no es vértice extremo de $\varphi(u_i)$.

Demostración Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo, (U, \mathfrak{F}) admisible y (\bar{U}, π) adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$. Si $\varphi(u_i)$ es fuente, entonces (\bar{U}, π) es universal por lo que existe un acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Supongamos que $\varphi(u_i)$ no es fuente. Sea $a_i \in \varphi(u_i)$ tal que a_i es pozo (fuente) de $\varphi(u_i)$, $a_i \Rightarrow \varphi(u_{i+1})$ y $\varphi(u_{i-1}) \Rightarrow a_i$, entonces $u_{i+1}a_i$ es una pareja discordante de $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ (u_{i-1}, a_i es una pareja concordante de T contradiciendo el Teorema 3.11).

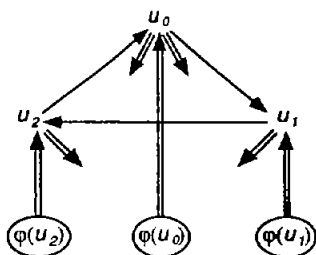


Figura 3.10: Las flechas entre U y \bar{U} , cuando $|U| = 3$.

Sea (\bar{U}, π) y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que para todo $a \in \varphi(u_i)$, con $u_i \in U$, satisfice alguno de los tres casos, entonces φ es un acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . \square

Corolario 3.37 Sea T un torneo, $U \subset V(T)$ tal que $U \cong \vec{C}_3$, donde U es el ciclo (u_0, u_1, u_2, u_0) . Si $T[\varphi(u_i)]$ es libre de vértices extremos y parejas concordantes para $i \in \{0, 1, 2\}$. Entonces la pareja (T, U) es un \mathcal{D} -origen.

Corolario 3.38 Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo, \bar{U} un torneo de orden al menos 3 y η una 3-partición de \bar{U} tal que $\eta_2 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \eta_0$ además de que cada clase η_i es libre de parejas concordantes de \bar{U} . Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que $\varphi(u_i) = \eta_i$. Entonces φ es un acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

A continuación veremos que si $\bar{U} \in \mathbb{T}_4$, entonces existe una partición π de los vértices de T tal que (\bar{U}, π) es adecuada si $|\pi| = 2$.

Ejemplo 3.39 Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo y \bar{U} un torneo de orden 4.

(i) Sea $\bar{U} = TT_4$. Las siguientes parejas $\{u_0, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}$ son concordantes de TT_4 , así la pareja (\bar{U}, π) es adecuada si

$$\pi_1 \in \{\{u_0, u_2\}, \{u_0, u_3\}, \{u_1, u_3\}\}$$

- (ii) Sea $\bar{U} = w \Rightarrow \vec{C}_3$, donde (v_0, v_1, v_2, v_0) es el ciclo, entonces $\bar{U} = T_4$ es libre de parejas concordantes. Sea η una 3-partición de \bar{U} tal que $\eta_2 = \{w, v_0\}$, $\eta_1 = \{v_1\}$ y $\eta_0 = \{v_2\}$. Entonces por el Corolario 3.38 $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ tal que $\varphi(u_i) = \eta_i$ es un acuerdo.
- (iii) Sea $\bar{U} = \vec{C}_3 \Rightarrow w$, donde (v_0, v_1, v_2, v_0) es el ciclo, entonces $\bar{U} = T_4$ es libre de parejas concordantes. Sea η una 3-partición de \bar{U} tal que $\eta_2 = \{v_0\}$, $\eta_1 = \{v_1\}$ y $\eta_0 = \{v_2, w\}$. Entonces por el Corolario 3.38 $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ tal que $\varphi(u_i) = \eta_i$ es un acuerdo.
- (iv) Sea $\bar{U} = T_4$, la única pareja concordante de T_4 es $\{v_1, v_2\}$. Sea η una 3-partición de \bar{U} tal que $\eta_2 = \{v_0\}$, $\eta_1 = \{v_1\}$ y $\eta_0 = \{v_2, v_3\}$. Entonces por el Corolario 3.38 $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ tal que $\varphi(u_i) = \eta_i$ es un acuerdo.

Nótese que por el Corolario 3.37 y P.1, (página 18), podemos construir \mathfrak{D} -orígenes para $|T| = 12$ y $|T| \geq 14$ con $|U| = 3$ sin importar la orientación de las flechas entre cada $T[\varphi(u_i)]$. Por el Corolario 3.38 y P.2, (página 18), podemos construir \mathfrak{D} -orígenes para $|T| = 6$, $|T| \geq 8$ con $|U| = 3$, sin importar la orientación de las flechas en cada $T[\varphi(u_i)]$. Luego junto con el Ejemplo 3.39, se tiene para cada $k \geq 6$ un torneo T tal que (T, U) es un \mathfrak{D} -origen y $U \cong \vec{C}_3$.

3.3.3 \mathfrak{D} -origen con $|U| = 5$

Sea $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ admisible, (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo. Revisamos basandonos en la Proposición 3.23, cuales conjuntos $X \in \mathfrak{F}$ puede generar parejas x, z discordantes o concordantes con $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$. Caracterizamos las parejas (T, U) que son \mathfrak{D} -orígenes, donde T es un torneo y $U \subset V(T)$, con $|U| = 5$. Nótese que U es regular por lo que podemos asumir que $U = \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$.

El siguiente conjunto es un sistema de representantes de las órbitas de las flechas en $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$

$$\{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}.$$

- (i) Sea $X = \{i, i + 1\} \in \mathfrak{F}$. Se tiene que

$$i + 2 \nmid i - 1 \pmod{U}.$$

58CAPÍTULO 3. MOLDES Y ORÍGENES DE TORNEOS REGULARES.

Además $X \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$ y $N^-(i+2) = X = N^+(i-1)$. Sea z pozo de $\varphi(X)$ (fuente de $\varphi(X)$), entonces por el inciso (i) (inciso (ii)) de la Proposición 3.23

$$N^+(i+2; \bar{U}) \neq N^-(z; \bar{U})$$

$$(N^+(i-1; \bar{U}) \neq N^+(z; \bar{U})).$$

No hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i, i+2), (i-1, i+1), (i+1, i-2) \text{ y } (i-2, i).$$

(ii) Sea $X = \{i, i+2\} \in \mathfrak{F}$. Se tiene que

$$i \nmid i+2 \pmod{U}, i-1 \nmid i+1 \pmod{U}, i+1 \nmid i-2 \pmod{U}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por observación 3.21 no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i+2, i-1) \text{ y } (i-2, i).$$

Observación 3.40 Sea $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ una pareja admisible, entonces $|\mathfrak{F}| > 1$. Si $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $\mathfrak{F} = \{\{i, i+2\}, \{i+2, i-1\}\}$ para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$. En éste caso $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ es universal.

Observación 3.41 Si $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ es admisible, con $|\mathfrak{F}| = 3$ y \mathfrak{F} minimal, entonces para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$, se tiene que

$$\mathfrak{F} = \{\{i, i+1\}, \{i, i+2\}, \{i+1, i+2\}\} \text{ o}$$

$$\mathfrak{F} = \{\{i, i+1\}, \{i, i+2\}, \{i+1, i-1\}\}.$$

Demostración Sea $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ admisible con $|\mathfrak{F}| = 3$ y \mathfrak{F} minimal. Por el inciso (i) de la sección 3.3.3 $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}_0 \neq \emptyset$. Asumimos que $X_0 = \{0, 2\}$.

(a) $\mathfrak{F}_0 = X_0$. Sea $X_1 = \{i, i+1\}$ y $X_2 = \{j, j+1\}$. Por el inciso (ii) de ésta sección

$$0 \nmid 2 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}, 6 \nmid 1 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}, 1 \nmid 3 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}$$

y se sigue del inciso (i) de ésta sección que $\{i, j\} = \{0, 1\}$. Por lo tanto como $\mathfrak{F} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$.

(b) $\mathfrak{F}_0 = \{X_0, X_1\}$. Como \mathfrak{F} es minimal, entonces por la observación 3.40 $\{2, 4\}, \{3, 0\} \notin \mathfrak{F}$. Por dualidad podemos asumir que $X_1 = \{4, 1\}$ y $X_2 = \{i, i+1\}$. Por el inciso (ii) de ésta sección

$$\begin{aligned} 0 \nmid 2 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}, 6 \nmid 1 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}, \\ 1 \nmid 3 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)}, 3 \nmid 0 \pmod{\vec{C}_5(\emptyset)} \end{aligned}$$

y se sigue del inciso (i) de ésta sección que $i = 0$. Por lo tanto como $\mathfrak{F} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{4, 1\}\}$. \square

Lema 3.42 Sea $\mathfrak{F} \subset (\vec{C}_5(\emptyset))^{[2]}$ tal que $(\vec{C}_5(\emptyset), \mathfrak{F})$ es admisible. Sea (\bar{U}, π) una pareja adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$ y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre $(\vec{C}_5(\emptyset), \mathfrak{F})$ y (\bar{U}, π) . Entonces φ es un acuerdo si y sólo si pasa alguno de las siguientes cosas:

(i) $(\vec{C}_5(\emptyset), \mathfrak{F})$ es universal.

(ii) Para cada $X \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$ con $w_- \in U^-(\mathfrak{F}), w_+ \in U^+(\mathfrak{F})$ tales que $N^-(w_-; U) = N^+(w_+; U) = X$ y $z \in \varphi(X)$ se tiene que

$$N^+(w_-; \bar{U}) \neq N^-(z; \bar{U}) \text{ y } N^+(w_+; \bar{U}) \neq N^+(z; \bar{U}).$$

3.3.4 \mathfrak{D} -origen con $|U| = 7$

Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, donde U es un torneo regular de orden 7. Sea (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo. Revisamos basandonos en la Proposición 3.23 cuales conjuntos $X \in \mathfrak{F}$ puede generar parejas x, z discordantes o concordantes con $x \in X$ y $z \in \varphi(X)$. Nótese que U es regular de orden 7 por lo que podemos asumir que $U \cong \vec{C}_7(\emptyset)$, $U \cong \vec{C}_7\langle 3 \rangle$ o $U \cong W_0$. Vamos

a revisar los 3 casos.

$$U \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$$

Sea $\mathfrak{F} \subset (\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle)^{[3]}$ tal que $(\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ es admisible. Sea (\bar{U}, π) una pareja adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$ y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un acuerdo entre $(\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ y (\bar{U}, π) .

$$\{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}\}$$

es un sistema de representantes de las órbitas de 3-conjuntos en $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$. Por el Lema 3.14 los conjuntos $\{0, 1, 3\}$ y $\{0, 2, 3\}$ son duales por el Corolario 3.15, por lo que salvo dualidad hay cuatro 3-conjuntos diferentes

$$\{i, i + 1, i + 2\}, \{i, i + 1, i + 3\}, \{i, i + 1, i + 4\}, \{i, i + 2, i + 4\}.$$

(i) Sea $X = \{i, i + 1, i + 2\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$i + 3 \nmid i - 1 \pmod{U}.$$

Además $X \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$ y $N^-(i + 3) = X$ ($N^+(i - 1) = X$), por el inciso (i) ((ii)) de la Proposición 3.23 si z es pozo (fuente) de $\varphi(X)$, entonces

$$N^+(i + 3; \bar{U}) \neq N^-(z; \bar{U}) \\ (N^+(i - 1; \bar{U}) \neq N^+(z; \bar{U})).$$

No hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i, i + 3), (i - 1, i + 2), (i + 2, i - 2), \\ (i - 2, i + 1), (i + 1, i - 3), (i - 3, i).$$

(ii) Sea $X = \{i, i + 1, i + 3\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$i \nmid i + 3 \pmod{U}, i - 1 \nmid i + 2 \pmod{U}, i + 2 \nmid i - 2 \pmod{U}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21 no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i + 3, i - 1), (i - 2, i + 1), (i + 1, i - 3), (i - 3, i).$$

(iii) Sea $X = \{i, i + 2, i + 4\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$i + 3 \nmid i - 1 \pmod{U}, i - 2 \nmid i + 1 \pmod{U}, i - 3 \nmid i \pmod{U}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21 no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i, i + 3), (i - 1, i + 2), (i + 2, i - 2), (i + 3, i - 3).$$

(iv) Sea $X = \{i, i + 1, i + 4\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$i + 3 \nmid i - 1 \pmod{U}, i - 1 \nmid i + 2 \pmod{U}, \\ i + 2 \nmid i - 2 \pmod{U}, i + 1 \nmid i - 3 \pmod{U}, i - 3 \nmid i \pmod{U}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21 no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$(i, i + 3), (i - 2, i + 1).$$

Observación 3.43 Sea $(\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ una pareja admisible, entonces $|\mathfrak{F}| > 1$. Si $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $\{i, i + 1, i + 4\} \in \mathfrak{F}$ para algún $i \in \mathbb{Z}_7$.

$$U \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$$

Sea $\mathfrak{F} \subset (\vec{C}_7 \langle 3 \rangle)^{[3]}$, como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ es \mathcal{D} -libre, entonces $(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle, \mathfrak{F})$ es admisible. Sea (\bar{U}, π) una pareja adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$ y $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un acuerdo entre $(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle, \mathfrak{F})$ y (\bar{U}, π) .

Como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ es transitivo en vértices, transitivo en 3-conjuntos acíclicos y $\{\{0, 1, 3\}, \{0, 1, 5\}\}$ es un sistema de representantes de las órbitas de los 3-conjuntos cíclicos, entonces hay esencialmente tres casos:

(i) Sea $X \in \mathfrak{F}$ acíclico, entonces $X \in \mathfrak{F}_0$ y por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} . Así $T(\varphi)$ no tiene parejas discordantes ni concordantes.

(ii) Sea $X = \{i, i + 1, i - 2\} \in \mathfrak{F}$ cíclico, $X \in \mathfrak{F}_-$ y $N^-(i + 2) = X$. Por el inciso (i) de la Proposición 3.23, si z es pozo de $\varphi(X)$, entonces

$$N^+(i + 2; \bar{U}) \neq N^-(z; \bar{U})$$

Así no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que $T(\varphi)$ no tiene parejas discordantes ni concordantes.

(iii) Sea $X = \{i, i + 1, i + 3\} \in \mathfrak{F}$ cíclico, $X \in \mathfrak{F}_+$ y $N^+(i - 1) = X$. Por el inciso (ii) de la Proposición 3.23, si z es fuente de $\varphi(X)$, entonces

$$N^+(i - 1; \bar{U}) \neq N^+(z; \bar{U}).$$

Así no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que $T(\varphi)$ no tiene parejas discordantes ni concordantes.

$U \cong W_0$

(para la definición de W_0 , véase página 13).

Sea $\mathfrak{F} \subset (W_0)^{[3]}$ tal que (W_0, \mathfrak{F}) es admisible. Sea (\bar{U}, π) una pareja adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$ y $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un acuerdo entre (W_0, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

W_0 tiene trece órbitas de 3-conjuntos de vértices y

$$\begin{aligned} & \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}, \{w_1^-, w_2^-, w_0\}, \{w_1^-, w_0, w_1^+\}, \{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \\ & \{w_1^-, w_0, w_3^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_1^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_3^+\}, \\ & \{w_1^-, w_1^+, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^+, w_3^+\}, \{w_1^-, w_3^+, w_1^+\}, \{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}, \\ & \{w_0, w_1^+, w_2^+\}. \end{aligned}$$

es un sistema de representantes de las órbitas de 3-conjuntos en W_0 . Nótese que por el Lema 3.14

$$\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}, \{w_1^-, w_2^-, w_0\}, \{w_1^-, w_2^-, w_1^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_3^+\}$$

son duales a

$$\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}, \{w_0, w_1^+, w_2^+\}, \{w_1^-, w_3^+, w_1^+\}, \{w_1^-, w_1^+, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^+, w_3^+\}$$

respectivamente por el Corolario 3.15. Por lo tanto hay esencialmente 8 casos diferentes

$$\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}, \{w_1^-, w_2^-, w_0\}, \{w_1^-, w_0, w_1^+\}, \{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \\ \{w_1^-, w_0, w_3^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_1^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_3^+\}.$$

- (i) Sea $X = \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\} \in \mathfrak{F}$. Como $X \in \mathfrak{F}_-$ y $N^-(w_0) = X$, por el inciso (i) de la Proposición 3.23, si z es pozo de $\varphi(X)$, entonces

$$N^+(w_0; \bar{U}) \neq N^-(z; \bar{U}).$$

No hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$w_2^+ w_1^-, w_3^+ w_2^-, w_1^+ w_3^-.$$

- (ii) Sea $X = \{w_1^-, w_2^-, w_0\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_1^+ \nmid w_3^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$w_2^+ w_1^-, w_3^+ w_2^-.$$

- (iii) Sea $X = \{w_1^-, w_0, w_1^+\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_3^+ \nmid w_2^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$w_2^+ w_1^-, w_1^+ w_3^-.$$

- (iv) Sea $X = \{w_0, w_2^+, w_1^-\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_2^+ \nmid w_1^- \pmod{W_0}, w_3^+ \nmid w_2^- \pmod{W_0} \text{ y } w_1^+ \nmid w_3^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} .

(v) Sea $X = \{w_1^-, w_0, w_3^+\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_1^+ \nmid w_3^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$ y $N^-(w_1^+) = X$, $(N^+(w_3^-) = X)$ por el inciso (i) ((ii)) de la Proposición 3.23, si z es pozo (fuente) de $\varphi(X)$, entonces

$$\begin{aligned} N^+(w_1^+; \bar{U}) &\neq N^-(z; \bar{U}) \\ (N^+(w_3^-; \bar{U}) &\neq N^+(z; \bar{U})). \end{aligned}$$

No hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$w_2^+ w_1^-, w_3^+ w_2^-.$$

(vi) Sea $X = \{w_1^-, w_2^-, w_1^+\} \in \mathfrak{F}$. Como $X \in \mathfrak{F}_+$, entonces por la Proposición 3.23, si z es fuente de $\varphi(X)$, entonces

$$N^+(w_3^+; \bar{U}) \neq N^+(z; \bar{U})$$

No hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ son las flechas

$$w_2^+ w_1^-, w_3^+ w_2^-, w_1^+ w_3^-.$$

(vii) Sea $X = \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_2^+ \nmid w_1^- \pmod{W_0} \text{ y } w_1^+ \nmid w_3^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ es la flecha

$$w_3^+ w_2^-.$$

(viii) Sea $X = \{w_1^-, w_2^-, w_3^+\} \in \mathfrak{F}$, se sigue que

$$w_3^+ \nmid w_2^- \pmod{W_0} \text{ y } w_1^+ \nmid w_3^- \pmod{W_0}.$$

Como $X \in \mathfrak{F}_0$, entonces por la Observación 3.21, no hay parejas concordantes ni parejas discordantes entre W_0 y $\varphi(X)$ ni entre X y \bar{U} por lo que los únicos probables elementos para ser parejas discordantes de $T(\varphi)$ es la flecha

$$w_2^+ w_1^-.$$

Observación 3.44 Sea $U = W_0$ y (U, \mathfrak{F}) admisible.

- (i) Si $|\mathfrak{F}| = 1$, entonces $\mathfrak{F} = \{w_1^-, w_0, w_2^+\}$ y (U, \mathfrak{F}) es universal.
- (ii) Si $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $\mathfrak{F} \cap (\{w_1^-, w_2^-, w_2^+\} \cup \{w_1^-, w_2^-, w_3^+\}) \neq \emptyset$ o \mathfrak{F} no es minimal.

3.4 Caracterización de los \mathfrak{D} -orígenes

H Cho, Faun Doherty, S.-R. Kim, J. Lundgren clasificaron en [7, 6] las gráficas de discordancia de los torneos regulares (véase Teorema 3.4 de [7] o página x). En esta sección daremos una clasificación de las digráfica de discordancia de los torneos regulares usando \mathfrak{D} -orígenes; nuestra demostración es más corta y más sencilla que la mencionada.

Al caracterizar los moldes de torneos regulares quedan automáticamente caracterizadas las digráficas de discordancia de torneos regulares. Ésto es consecuencia de la Proposición 3.5, que nos dice que podemos reconstruir cualquier torneo regular (salvo los torneos cíclicos) a partir de su molde y su función de pesos.

Teorema 3.45 Existe un \mathfrak{D} -origen (T, U) si y sólo si una de las condiciones siguientes se cumple

- (i) $|U| = 1$ y $|\bar{U}| = 3$ o $|\bar{U}| \geq 5$,
- (ii) $U \cong \vec{C}_3$ y $|\bar{U}| \geq 3$,
- (iii) U un torneo regular de orden $2m + 1$ con $m \geq 2$, y $|U| + |\bar{U}| \geq 7$.

Demostración (i) Sea $w \in V(T)$ tal que $(T, \{w\})$ es un \mathfrak{D} -origen. Sea $\bar{U} = T \setminus \{w\}$, por la Proposición 3.31, $\bar{U} \neq \emptyset$. Si $|\bar{U}| = 1, 2$, entonces \bar{U} tiene un vértice extremo. Sea $|\bar{U}| = 4$. Sólo hay cuatro torneos de orden

cuatro (Observación 1.4). Si \bar{U} es isomorfo a cualquiera de los torneos TT_4 , $\{u\} + \vec{C}_3$, $\vec{C}_3 + \{u\}$, entonces \bar{U} tiene un vértice extremo. Si \bar{U} es isomorfo al torneo T_4 , entonces \bar{U} tiene una pareja de vértices concordantes. En los cuatro casos, se sigue de la Proposición 3.31, que si $T \cong \{w\} + \bar{U}$, entonces $(T, \{w\})$ no es un \mathcal{D} -origen. Luego $|\bar{U}| = 3$ o $|\bar{U}| \geq 5$.

Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, (\bar{U}, π) adecuada tal que $|\mathfrak{F}| = |\pi|$ y (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan.

(ii) Sea $|U| = 3$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo. Por el Lema 3.35, $|\mathfrak{F}| = 3$. Como (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) acuerdan, entonces $|\bar{U}| \geq |\pi| = |\mathfrak{F}| = 3$.

(iii) Sea $|U| = 5$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Como la pareja $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ es admisible, $\mathfrak{F} \subset (\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle)^{[2]}$ y $\mathcal{D}(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle) = \vec{C}_5$, entonces $|\mathfrak{F}| \geq 2$ por la Observación 3.40. Como $(\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle, \mathfrak{F})$ y (\bar{U}, π) acuerdan, entonces $|\bar{U}| \geq |\pi| = |\mathfrak{F}| \geq 2$ y $|U| + |\bar{U}| \geq 7$.

Sea $|U| = 2m + 1$, con $m \geq 3$. Entonces $|U| + |\bar{U}| \geq 7$.

Supongamos que se cumple (i). Sea $U = \{w\}$, $\bar{U} \cong \vec{C}_3$ y $T = \{w\} + \bar{U}$, entonces por la Proposición 3.31, la pareja $(T, \{w\})$ es un \mathcal{D} -origen. Sea $U = \{w\}$. Por P.2 (página 18), existe un torneo \bar{U} de orden k tal que \bar{U} es libre de vértices extremos y libre de parejas concordantes para $k = 3, k \geq 5$. Sea $T = \{w\} + \bar{U}$. Por la Proposición 3.31, $(T, \{w\})$ es un \mathcal{D} -origen.

Supongamos que se cumple (ii). Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, $|U| = 3$ y $|\bar{U}| \geq 3$. Asumimos que $U = \vec{C}_3$ donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo. Por el Lema 3.35 sigue que $\mathfrak{F} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}\}$. Sea $\bar{U} = \sigma(U^{op}, \{A_i\})$ con $i = 0, 1, 2$ donde cada A_i es un torneo libre de parejas concordantes y $|A_i| \neq 2$. Sea π una 3-partición de \bar{U} tal que las clases de π son los torneos A_i y sea $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) tal que $\varphi(u_i) = A_i$. Si $|\bar{U}| \neq 4$, entonces φ es un acuerdo por el Corolario 3.38. Si $|\bar{U}| = 4$, entonces por el Ejemplo 3.39 (página 56), existe (\bar{U}, π) adecuada y $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que φ es un acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

Supongamos que se cumple (iii). Sea (U, \mathfrak{F}) admisible, $|U| = 5$ y $|\bar{U}| \geq 2$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Sea $|\mathfrak{F}| = 2$ por la Observación 3.40 se tiene que la pareja (U, \mathfrak{F}) es universal. Sea $\bar{U} \cong \sigma(u_0 u_1, \{A_i\})$ con $i = 0, 1$ donde cada A_i es un torneo libre de parejas concordantes y $|A_i| \neq 2$. Sea π una 2-partición de \bar{U} tal que las clases de π son los torneos A_0 y A_1 , entonces

(\bar{U}, π) es adecuada. Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo tal que $\varphi(u_i) = A_i$. Si $|\bar{U}| \neq 3$, entonces φ es un acuerdo. Sea $|\bar{U}| = 3$ y $\bar{U} \cong \vec{C}_3$ donde (v_0, v_1, v_2, v_0) es el ciclo. Sea π una 2-partición de \bar{U} , (\bar{U}, π) es adecuada y universal.

Sea $\mathbf{U} = \vec{C}_{2m+1} \langle i \rangle$, con $i \in \mathbb{Z}_m$ y $m \geq 3$. Por el Lema 2.12, se tiene que \mathbf{U} es \mathfrak{D} -libre. Si $|\bar{U}| = 0$, entonces (\mathbf{U}, \mathbf{U}) es el \mathfrak{D} -origen por la Proposición 3.9 y $|\mathbf{U}| + |\bar{U}| \geq 7$. Si $|\bar{U}| = 2$, entonces sea $\mathfrak{F} \subset \mathbf{U}^{[m]} \setminus \mathbf{S}$, tal que $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $|\pi| = 2$. Si $\bar{U} = \{u_0, u_1\}$, entonces $\pi = \{\{u_0\}, \{u_1\}\}$. Nótese que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible y universal por lo que existe un acuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y (\bar{U}, π) . Sea $\mathfrak{F} \subset \mathbf{U}^{[m]} \setminus \mathbf{S}$ con $|\mathfrak{F}| = 1$, entonces la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible y universal. Si $|\bar{U}| = 1$ o $|\bar{U}| \geq 3$, entonces sea \bar{U} un torneo tal que \bar{U} es libre de parejas concordantes. \square

Capítulo 4

Moldes de orden pequeño

4.1 Automorfismos

En esta sección revisamos los resultados ya obtenidos sobre automorfismos en torneos regulares, en moldes y en \mathfrak{D} -orígenes. El conteo de los torneos regulares cuyo orden y molde coinciden, nos llevan al estudio de los automorfismos en los moldes y en los \mathfrak{D} -orígenes. Nótese que si el molde y la función de pesos de dos torneos coinciden, entonces los torneos son isomorfos.

Probaremos que un automorfismo que respeta la función de peso en un molde induce un automorfismo en el torneo inducido por el molde y la función de pesos y viceversa. También probaremos que un automorfismo ψ en un \mathfrak{D} -origen (T, U) tal que $\psi|_U = U$ induce un automorfismo en el molde inducido por el \mathfrak{D} -origen (T, U) y viceversa.

Proposición 4.1 *Sea T un torneo regular, M su molde y $\psi_T : T \rightarrow T$ un automorfismo.*

- (i) *El automorfismo ψ_T induce un automorfismo $\psi_M : M \rightarrow M$ que respeta la función de peso φ_T , a saber $\psi_M = \psi_T|_M$.*
- (ii) *Sea $\psi_M : M \rightarrow M$ un automorfismo que respeta la función de peso φ_T . El automorfismo ψ_M se puede extender a un isomorfismo*

$$\psi_T : T \rightarrow T(\psi_M(M), \psi_M(\varphi_T)).$$

Demostración La primera parte (i), se sigue de los siguientes hechos:

1. El conjunto de \mathfrak{D} -flechas es invariante bajo automorfismo.
2. El conjunto de flechas iniciales de las trayectorias de longitud par es invariante bajo automorfismo.
3. El conjunto de flechas iniciales de las trayectorias de longitud impar es invariante bajo automorfismo.
4. El conjunto vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$ es invariante bajo automorfismo (Observación 3.7).

La segunda parte (ii), se sigue del hecho que $F(\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T))$ es invariante bajo automorfismo y la reconstrucción de un torneo regular a partir de su molde y su función de pesos. \square

Proposición 4.2 *Sea M el molde inducido por el \mathfrak{D} -origen (H, U) y $\psi_M : M \rightarrow M$ un automorfismo.*

- (i) *El automorfismo ψ_M induce un automorfismo $\psi_{\mathfrak{D}} : H \rightarrow H$ tal que $\psi_{\mathfrak{D}}|_{U=U}$, a saber $\psi_{\mathfrak{D}} = \psi_M|_H$.*
- (ii) *Sea $\psi_{\mathfrak{D}} : H \rightarrow H$ un automorfismo tal que $\psi_{\mathfrak{D}}|_{U=U}$. El automorfismo $\psi_{\mathfrak{D}}$ se puede extender a un isomorfismo $\psi_M : M \rightarrow M$ ($\psi_{\mathfrak{D}}(H), \psi_{\mathfrak{D}}(U)$).*

Demostración La primera parte (i), se sigue del hecho que $F(\mathfrak{D}(M^T))$ es invariante bajo automorfismo. Así el automorfismo ψ_M fija el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$.

La segunda parte (ii), se sigue del hecho que el automorfismo $\psi_{\mathfrak{D}}$ fija el conjunto de vértices aislados de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M^T)$ y la definición del molde inducido por un \mathfrak{D} -origen. \square

Corolario 4.3 *Sea T un torneo regular, M su molde, (H, U) su \mathfrak{D} -origen y $\psi_T : T \rightarrow T$ un automorfismo. El automorfismo ψ_T induce un automorfismo $\psi_H : H \rightarrow H$ tal que $\psi_H|_{U=U}$ a saber $\psi_H = \psi_T|_H$.*

Corolario 4.4 *Sea T un torneo regular, M su molde, φ su función de pesos, (H, U) su \mathfrak{D} -origen y $\psi_H : H \rightarrow H$ un automorfismo tal que $\psi_H|_{U=U}$. Si la extensión de ψ_H al isomorfismo $\psi_M : M \rightarrow M$ ($\psi_{\mathfrak{D}}(T), \psi_{\mathfrak{D}}(U)$) respeta la función de pesos φ , entonces ψ_H se puede extender a un isomorfismo $\psi : T \rightarrow T'$, donde T' es el torneo regular inducidos por el molde M' y la función de pesos $\psi_M(\varphi)$.*

El Corolario 4.4 tiene como consecuencia que el número de torneos regulares no isomorfos cuyo orden y molde coinciden, es igual al número de particiones inducidas por la función de pesos entre el número de automorfismos de M^T , que a su vez es igual al número de particiones inducidas por la función de pesos entre el número de automorfismos del \mathcal{D} -origen (H, U) de T tal que U es invariante.

Ejemplo 4.5 Sea T un torneo regular de orden 13, tal que $M^T = W_0$. $\mathcal{D} \rightarrow (M^T)$ consta de tres flechas y un vértice aislado. Sea $\mathcal{D} \rightarrow (M^T) = \{f_1, f_2, f_3, v\}$. Sea π_i la partición asociada a la función de pesos φ_i . Entonces π_i es una partición de 13 en cuatro sumandos tales que exactamente uno de ellos es impar. Entonces

$$(7, 2^3), (5, 4, 2^2), (3, 6, 2^2), (3, 4^2, 2), (1, 8, 2^2), (1, 4^3), (1, 6, 4, 2)$$

son las posibles particiones. Como M^T es transitivo en sus \mathcal{D} -flechas, entonces hay un sólo torneo regular (salvo isomorfismo) para los primeros 6 casos y dos torneos regulares (salvo isomorfismo) para el último caso.

4.2 Contando moldes

Antes de empezar a contar los moldes de orden 9, 11 y algunos de orden 13 necesitamos unas definiciones que nos va a facilitar la escritura.

Definición 4.6 Decimos que un molde M tiene \mathcal{D} -tipo $(2m+1; i)$ si M es de orden $2m+1$ y $\mathcal{D} \rightarrow (M)$, consta de i vértices aislados y $(2m+1-i)/2$ flechas ajenas dos a dos.

Nótese que i es un número impar positivo ya que M es un torneo regular y por lo tanto de orden impar.

Ejemplo 4.7 El \mathcal{D} -tipo de $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ (página 7) y W_0 (página 13) es $(7; 7)$ y $(7; 1)$ respectivamente ($\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ no tiene \mathcal{D} -tipo)

En esta sección encontramos para los moldes de orden pequeño, todos los moldes no isomorfos con \mathcal{D} -tipo fijo, para ello usaremos los \mathcal{D} -orígenes. Antes de seguir adelante, recordamos que hay un único molde por cada \mathcal{D} -origen.

Definición 4.8 Sea τ_i el conjunto de moldes de orden i , $\Omega(2m+1; i)$ el conjunto de moldes no isomorfos de \mathcal{D} -tipo $(2m+1; i)$ y $\omega(2m+1; i)$ es la cardinalidad de $\Omega(2m+1; i)$.

Sólo hay un torneo regular de orden 3 y uno de orden 5, \vec{C}_3 y $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ respectivamente, como la digráfica de discordancia de \vec{C}_3 y $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ es un ciclo dirigido de orden 3 y 5 respectivamente, entonces $\tau_3, \tau_5 = \emptyset$. Los únicos moldes de orden 7 son $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ y W_0 con \mathcal{D} -tipo $(7; 7)$ y $(7; 1)$ respectivamente por lo que $\tau_7 = \{ \vec{C}_7 \langle 3 \rangle, W_0 \}$; además $\Omega(7; 7) = \{ \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \}$ y $\Omega(7; 1) = \{ W_0 \}$ por lo que $\omega(7; 7) = 1$ y $\omega(7; 1) = 1$.

Denotamos por $\text{TR}_n(\pi, M)$ al conjunto de torneos regulares de orden n cuyo molde es M y cuyo función de peso ξ_M se puede expresar mediante la partición π . Sea $\mathcal{F}(M)$ la familia de torneos regulares cuyo molde es M . Nótese que si $T \in \text{TR}_n(\pi, M)$, entonces $T \in \mathcal{F}(M)$ y T es un torneo regular de orden n .

4.2.1 Moldes de orden 9

En 1966 Anton Kotzig demostró [18, 19] que hay exactamente 15 torneos regulares de orden 9. En esta parte contamos y clasificamos los moldes de orden 9 usando propiedades de los torneos pequeños y usando los \mathcal{D} -orígenes.

(i) Hay 3 torneos regulares de orden 9, con molde de orden 7.

Demostración Sea $T \in \text{TR}_9^0$ tal que T no es molde, entonces M^T es de orden 7, por lo que $M^T \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ o $M^T \cong W_0$.

1. Sea $M^T \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Podemos asumir que $M^T = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ es transitivo en vértices, entonces $\text{TR}_9 \left((3, 1_6); \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \right)$ consta de un sólo torneo.
2. Sea $M^T \cong W_0$. Podemos asumir que $M^T = W_0$. Como W_0 tiene \mathcal{D} -tipo $(7; 1)$ y es transitivo sus \mathcal{D} -flechas, entonces $\text{TR}_9 \left((3, 2_3); W_0 \right)$ y $\text{TR}_9 \left((1, 4, 2_2); W_0 \right)$ constan ambos de un sólo torneo.

Claramente los tres torneos son no isomorfos. □

(ii) $\omega(9; 1) = 0$.

Demostración Sea T un torneo de orden 4; hay 4 torneos no isomorfos de orden 4 y son los siguientes:

$$TT_4, K_1 + \vec{C}_3, \vec{C}_3 + K_1, T_4$$

donde T_4 es fuertemente conexo. Los torneos $TT_4, K_1 + \vec{C}_3, \vec{C}_3 + K_1$ tienen al menos un vértice extremo y $\{v_1, v_2\}$ es una pareja concordante del torneo T_4 por lo que $(\{w\} + T, \{w\})$ no es un \mathfrak{D} -origen y se sigue el resultado por la Proposición 3.31. \square

(iii) $\omega(9; 3) = 2$.

Demostración Sea $U \cong \vec{C}_3$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_3$ donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo. Sea $\mathfrak{F} \in U^{[1]}$ tal que (U, \mathfrak{F}) es admisible. Por el Lema 3.35 se tiene que $\mathfrak{F} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}\}$. Sea \bar{U} un torneo de orden 3 y π una 3-partición de \bar{U} . Nótese que $\bar{U} \cong TT_3$ o $\bar{U} \cong \vec{C}_3$.

1. Sea $\bar{U} \cong TT_3$ con (v_0, v_1, v_2) como sucesión de fuentes. Hay dos preacuerdos $\varphi_1, \varphi_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Como $U \cong \vec{C}_3$ es transitivo en vértices asumimos que $\varphi_i(u_0) = v_0$, donde $i \in \{1, 2\}$. Sea $\varphi_1(u_i) = v_i$. Como $(\varphi_1(u_0), \varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2))$, entonces por la Proposición 3.36 φ_1 no es un acuerdo. Sea $\varphi_2(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi_2(u_2) = \{v_1\}$. Como $(\varphi_2(u_0), \varphi_2(u_2), \varphi_2(u_1))$, entonces por la Proposición 3.36 φ_2 sí es un acuerdo. Sea $T_{(9;3)}^1 = T(\varphi_2)$ el torneo construido y $M_{(9;3)}^1$ el molde inducido por el \mathfrak{D} -origen $(T_{(9;3)}^1, U)$.
2. Sea $\bar{U} \cong \vec{C}_3$. Podemos asumir que \bar{U} es el ciclo (v_0, v_1, v_2, v_0) . Hay dos preacuerdos $\varphi_1, \varphi_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Asumimos que $\varphi_i(u_0) = v_0$, donde $i \in \{1, 2\}$. Sea $\varphi_1(u_i) = v_i$. Como $(\varphi_1(u_0), \varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2))$, entonces φ_1 no es un acuerdo por la Proposición 3.36. Asumimos que $\varphi_2(u_0) = v_0$, y sea $\varphi_2(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi_2(u_2) = \{v_1\}$. Como $(\varphi_2(u_0), \varphi_2(u_2), \varphi_2(u_1))$, entonces φ_2 sí es un acuerdo por la Proposición 3.36. Sea $T_{(9;3)}^2 = T(\varphi_2)$ el torneo construido y $M_{(9;3)}^2$ el molde inducido por el \mathfrak{D} -origen $(T_{(9;3)}^2, U)$. Nótese que $T_{(9;3)}^2 \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \setminus \{0\}$ con $\bar{U} \cong N^-(0)$ y $U \cong N^+(0)$.

Hay dos \mathcal{D} -orígenes con $|T| = 6$ y $|U| = 3$ y se sigue el resultado. \square

Observación 4.9 En $(T_{(9;3)}^1, U)$ \bar{U} es transitivo, por lo que todo automorfismo de $T_{(9;3)}^1$ lo fija y luego también queda fijo $T_{(9;3)}^1$. El molde $M_{(9;3)}^1$ es rígido ya que $(T_{(9;3)}^1, U)$ lo es. Como $T_{(9;3)}^2 \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \setminus \{0\}$ con $\bar{U} \cong N^-(0)$ y $U \cong N^+(0)$, entonces $T_{(9;3)}^2$ es transitivo en los vértices de U y en los vértices de \bar{U} , por lo que $M_{(9;3)}^2$ es transitivo en \mathcal{D} -flechas y transitivo en los vértices que son aislados en su discordancia.

(iv) $\omega(9;5) = 2$.

Demostración Sea $U \cong \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Sea $\bar{U} = \{u, v\}$ y π una 2-partición de \bar{U} . Sea $\mathfrak{F} \in U^{[2]}$ tal que $|\mathfrak{F}| = 2$ y (U, \mathfrak{F}) es admisible. Por la Observación 3.40, podemos asumir que $\mathfrak{F} = \{\{0, 2\}, \{2, 4\}\}$ y (U, \mathfrak{F}) es universal. Hay dos acuerdos $\varphi_1, \varphi_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Como $|\pi| = |\bar{U}| = 2$, entonces $\{\varphi_i(\{0, 2\}), \varphi_i(\{2, 4\})\} \in F(T(\varphi_i))$, donde $i \in \{1, 2\}$. Sea φ_1 tal que

$$\varphi_1(\{0, 2\}) \varphi_1(\{2, 4\}) \in F(T(\varphi_1))$$

y φ_2 tal que

$$\varphi_2(\{2, 4\}) \varphi_2(\{0, 2\}) \in F(T(\varphi_2)).$$

Sea $T_{(9;5)}^1 \cong T(\varphi_1)$ y $T_{(9;5)}^2 \cong T(\varphi_2)$. \square

Observación 4.10 En ambos casos \bar{U} queda fijo bajo todo automorfismo y luego $T_{(9;5)}^i$ también, $i = 1, 2$. Como $(T_{(9;5)}^1, U)$ y $(T_{(9;5)}^2, U)$ son rígidos, entonces $M_{(9;5)}^1$ y $M_{(9;5)}^2$ también lo son.

(v) $\omega(9;7) = 2$.

Demostración Sea U un torneo regular de orden 7. Entonces se tiene que $U \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$, $U \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ o $U \cong W_0$. Sea $\bar{U} = \{a\}$ y π una partición de \bar{U} . Sea $\mathfrak{F} \in U^{[3]}$ tal que $|\mathfrak{F}| = 1$ y (U, \mathfrak{F}) es admisible. Se sigue por la Observación 3.43, que $U \not\cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$.

1. Sea $\mathbf{U} \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Podemos asumir que $\mathbf{U} = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$.

Como $|\mathfrak{F}| = 1$, podemos asumir que $\mathfrak{F} = \{0, 1, 2\}$ y luego $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible y universal. Entonces $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ es un acuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\bar{\mathbf{U}}, \pi)$. Sea $T_{(9;7)}^1 \cong T(\varphi)$.

2. Sea $\mathbf{U} \cong W_0$. Podemos asumir que $\mathbf{U} = W_0$.

Como $|\mathfrak{F}| = 1$, entonces por el inciso 1 de la Observación 3.44 podemos asumir que $\mathfrak{F} = \{w_1^-, w_0, w_2^+\}$. Como $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal, entonces $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ es un acuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\bar{\mathbf{U}}, \pi)$. Sea $T_{(9;7)}^2 = T(\varphi)$.

Claramente los dos moldes son no isomorfos, ya que el residuo de la única \mathcal{D} -flecha de los moldes correspondientes no son isomorfos. \square

Observación 4.11 *En ambos casos $\bar{\mathbf{U}}$ queda fijo bajo todo automorfismo. Como un 3-conjunto acíclico fija el torneo $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$, entonces $(T_{(9;7)}^1, U)$ es rígido y también lo es $M_{(9;7)}^1$. Un 3-conjunto que contiene una \mathcal{D} -flecha y no interseca a las otras dos \mathcal{D} -flechas fija el torneo W_0 , por lo tanto $(T_{(9;7)}^2, U)$ es rígido y también lo es $M_{(9;7)}^2$.*

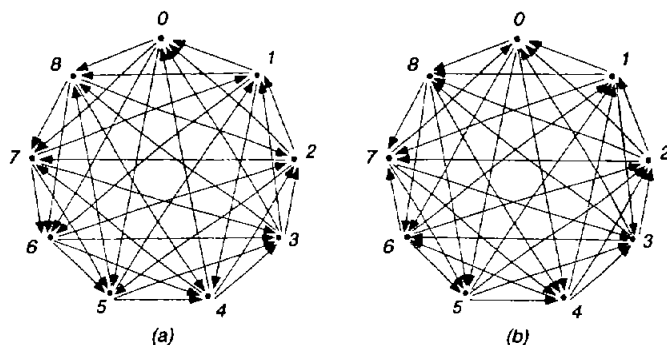
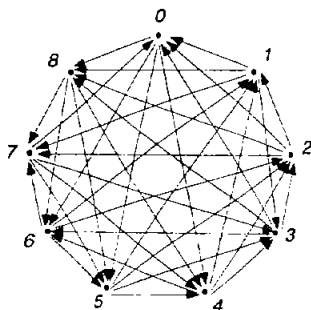
(vi) $\omega(9; 9) = 5$.

Demostración Hay 15 torneos regulares no isomorfos [18, 19], de ellos 6 son moldes no triviales ($\omega(9; 1) = 0$, $\omega(9; 3) = 2$, $\omega(9; 5) = 2$, $\omega(9; 7) = 2$), 3 tienen moldes de orden 7 y 1 no tiene molde ($\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$), por lo que hay 5 moldes triviales no isomorfos.

Sean $M_{(9;9)}^1 \cong \vec{C}_9 \langle 1 \rangle$, $M_{(9;9)}^2 \cong \vec{C}_9 \langle 2 \rangle$, $M_{(9;9)}^3$ (véase el inciso (a) de la figura 4.1), $M_{(9;9)}^4$ (véase el inciso (b) de la figura 4.1) y $M_{(9;9)}^5$ (véase la figura 4.3) los 5 moldes con \mathcal{D} -tipo (9; 9). \square

Observación 4.12 $M_{(9;9)}^1$ y $M_{(9;9)}^2$ son transitivos en vértices por ser torneos circulantes. $(1, 4, 7) (2, 5, 8) (3, 6, 9)$ genera el grupo de automorfismos del molde $M_{(9;9)}^3$; $(1, 4, 8) (2, 5, 9) (3, 6, 7)$ genera el grupo de automorfismos del molde $M_{(9;9)}^4$. El molde $M_{(9;9)}^5$ es rígido.

Para concluir por (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) tenemos 11 moldes de orden 9. Si M es un molde, entonces su \mathcal{D} -tipo es de la forma $\{(9; i) \mid i \in \{3, 5, 7, 9\}\}$.

Figura 4.1: El molde $M_{(9,9)}^3$.Figura 4.2: El molde $M_{(9,9)}^4$.

4.2.2 Moldes de orden 11

No se sabe exactamente cuántos torneos regulares no isomorfos hay de orden 11, pero se estima que son más de mil. De estos muchos no son moldes, pero sí tienen molde. En esta parte contamos los torneos regulares de orden 11 que no son moldes y los moldes de orden 11 con 1, 3, 5 y 7 vértices aislados en la digráfica de discordancia. Para las demostraciones usamos los \mathcal{D} -orígenes.

(i) Hay 6 torneos regulares de orden 11 con molde de orden 7.

Demostración Sea $T \in \text{TR}_{11}^0$ tal que el molde de T es de orden 7, entonces $M^T \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ o $M^T \cong W_0$.

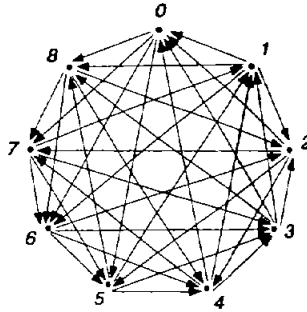


Figura 4.3: El molde $M_{(9,9)}^5$.

1. Sea $M^T \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Podemos asumir que $M^T = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ tiene \mathfrak{D} -tipo $(7; 7)$ y es transitivo en vértices y en flechas, entonces $\text{TR}_{11} \left((5, 1_6); \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \right)$ y $\text{TR}_{11} \left((3_2, 1_5); \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \right)$ constan ambos de un sólo torneo.
2. Sea $M^T \cong W_0$. Podemos asumir que $M^T = W_0$. Como W_0 tiene \mathfrak{D} -tipo $(7; 3)$ y es transitivo sus \mathfrak{D} -flechas, entonces $\text{TR}_{11} \left((5, 2_3); W_0 \right)$, $\text{TR}_{11} \left((3, 4, 2_2); W_0 \right)$, $\text{TR}_{11} \left((1, 6, 2_2); W_0 \right)$ y $\text{TR}_{11} \left((1, 4_2, 2); W_0 \right)$ consta cada uno de un sólo torneo.

Claramente los 6 torneos son no isomorfos. □

(ii) Hay 55 torneos regulares de orden 11 con molde de orden 9

Demostración Sea $T \in \text{TR}_{11}^{\circ}$ tal que el molde de T es de orden 9.

1. Sea M^T de \mathfrak{D} -tipo $(9; 3)$, $\Omega(9; 3) = \left\{ M_{(9,3)}^1, M_{(9,3)}^2 \right\}$.

(a) Sea $M^T \cong M_{(9,3)}^1$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9,3)}^1$, como $M_{(9,3)}^1$ es rígido, entonces

$$\text{TR}_{11} \left((3, 1_2, 2_3); M_{(9,3)}^1 \right) \text{ y } \text{TR}_{11} \left((1_3, 4, 2_2); M_{(9,3)}^1 \right)$$

consta ambos de tres torneos.

- (b) Sea $M^T \cong M_{(9,3)}^2$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9,3)}^2$, como $M_{(9,3)}^2$ es transitivo en \mathfrak{D} -flechas y transitivo en vértices aislados de $\mathfrak{D} \rightarrow (M^T)$, entonces

$$\text{TR}_{11}((3, 1_2, 2_3); M_{(9,3)}^2) \text{ y } \text{TR}_{11}((1_3, 4, 2_2); M_{(9,3)}^2)$$

consta ambos de un sólo torneo.

En total 8 torneos regulares de orden 11 cuyo molde tiene \mathfrak{D} -tipo (9; 3).

2. Sea M^T de \mathfrak{D} -tipo (9; 5), $\Omega(9; 5) = \{M_{(9,5)}^1, M_{(9,5)}^2\}$. Ambos moldes son rígidos.

Sea $M^T \cong M_{(9,5)}^i$, $i = 1, 2$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9,5)}^i$, como $M_{(9,5)}^i$ es rígido, entonces

$$\text{TR}_{11}((3, 1_4, 2_2); M_{(9,5)}^i) \text{ y } \text{TR}_{11}((1_5, 4, 2); M_{(9,5)}^i)$$

constan de cinco y dos torneos respectivamente para cada $i = 1, 2$.

En total 14 torneos regulares de orden 11 cuyo molde tiene \mathfrak{D} -tipo (9; 5).

3. Sea M^T de \mathfrak{D} -tipo (9; 7), $\Omega(9; 7) = \{M_{(9,7)}^1, M_{(9,7)}^2\}$. Ambos moldes son rígidos.

Sea $M^T \cong M_{(9,7)}^i$, $i = 1, 2$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9,7)}^i$, como $M_{(9,7)}^i$ es rígido, entonces

$$\text{TR}_{11}((3, 1_6, 2); M_{(9,7)}^i) \text{ y } \text{TR}_{11}((1_7, 4); M_{(9,7)}^i)$$

constan de siete y un torneo respectivamente para cada $i = 1, 2$.

En total 16 torneos regulares de orden 11 cuyo molde tiene \mathfrak{D} -tipo (9; 7).

4. Sea M^T de \mathfrak{D} -tipo (9; 9), $\Omega(9; 9) = \{M_{(9,9)}^1, M_{(9,9)}^2, M_{(9,9)}^3, M_{(9,9)}^4, M_{(9,9)}^5\}$. Por la Observación 4.12, sabemos que los moldes $M_{(9,9)}^1$ y $M_{(9,9)}^2$ son transitivos en vértices, el grupo de automorfismos de los moldes $M_{(9,9)}^3, M_{(9,9)}^4$ son de orden 3 y $M_{(9,9)}^5$ es rígido.

- (a) Sea $M^T \cong M_{(9;9)}^i$, $i = 1, 2$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9;9)}^i$, como $M_{(9;9)}^i$ es transitivos en vértices, entonces $\text{TR}_{11} \left((3, 1_8); M_{(9;9)}^1 \right)$ y $\text{TR}_{11} \left((3, 1_8); M_{(9;9)}^2 \right)$ constan ambos de un sólo torneo.
- (b) Sea $M^T \cong M_{(9;9)}^i$, $i = 3, 4$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9;9)}^i$, como el grupo de automorfismos de $M_{(9;9)}^i$ es de orden 3, entonces $\text{TR}_{11} \left((3, 1_8); M_{(9;9)}^3 \right)$, $\text{TR}_{11} \left((3, 1_8); M_{(9;9)}^4 \right)$ consta cada uno de tres torneos.
- (c) Sea $M^T \cong M_{(9;9)}^5$. Podemos asumir que $M^T = M_{(9;9)}^5$, como $M_{(9;9)}^5$ es rígido, entonces $\text{TR}_{11} \left((3, 1_8); M_{(9;9)}^5 \right)$ consta de nueve torneos.

En total 17 torneos regulares de orden 11 cuyo molde tiene \mathfrak{D} -tipo $(9; 9)$. \square

Observación 4.13 Hay 61 torneos regulares de orden 11 que no son moldes.

En [26] hay una tabla con todos los torneos no isomorfos de orden 1 al 7. Usaremos la notación de éstas tablas para los torneos de orden 5.

(iii) $\omega(11; 1) = 4$.

Demostración Sea $U = \{w\}$ y \bar{U} un torneo de orden 5. Hay 12 torneos de orden 5 no isomorfos [26]; 6 de ellos ($Tn9, Tn10, \dots, Tn14$) tienen algún vértice extremo y dos ($Tn15, Tn18$) tienen una pareja concordante. Por la Proposición 3.31, en éstos casos $(\{w\} + \bar{U}, \{w\})$ no es un \mathfrak{D} -origen. En los restantes 4 casos, se tiene por la misma proposición que $(\{w\} + \bar{U}, \{w\})$ es un \mathfrak{D} -origen. \square

(iv) $\omega(11; 3) = 12$.

Demostración Sea $U \cong \vec{C}_3$, donde (u_0, u_1, u_2, u_0) es el ciclo y (U, \mathfrak{F}) admisible (véase la figura 3.10). Por el Lema 3.35, $\mathfrak{F} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{u_2\}\}$. Sea \bar{U} un torneo de orden 4 y π una 3-partición de \bar{U} tal que (\bar{U}, π) es adecuada. Hay 4 torneos no isomorfos de orden 4 (Observacion 1.4) y son los siguientes: .

$$TT_4, K_1 + \vec{C}_3, \vec{C}_3 + K_1, T_4.$$

Podemos asumir que $|\varphi(u_0)| = 2$ en los cuatro casos.

1. Sea $\bar{U} \cong TT_4$ con (v_0, v_1, v_2, v_3) como sucesión de fuentes de \bar{U} . Como v_0, v_1, v_1, v_2 y v_2, v_3 son parejas concordantes no están ambos en $\varphi(u_0)$.

Sea $\varphi_1(u_0) = \{v_0, v_2\}$, $\varphi_1(u_1) = \{v_3\}$ y $\varphi_1(u_2) = \{v_1\}$. Como u_1, v_2 es una pareja discordante de T , entonces φ_1 no es un acuerdo.

Sea $\varphi_2(u_0) = \{v_0, v_2\}$, $\varphi_2(u_1) = \{v_1\}$ y $\varphi_2(u_2) = \{v_3\}$. Como $\varphi_2(u_0) \Rightarrow \varphi_2(u_2)$ y $\varphi_2(u_1) \Rightarrow v_2 \in \varphi_2(u_0)$, entonces por el Teorema 3.11, φ_2 es un acuerdo. Por dualidad si $\varphi_3(u_0) = \{v_1, v_3\}$, entonces φ_3 es un acuerdo sólo si $\varphi_3(u_1) = \{v_0\}$ y $\varphi_3(u_2) = \{v_2\}$.

Sea $\varphi_4(u_0) = \{v_0, v_3\}$. Para todo vértice $i \in \varphi_4(u_1) \cup \varphi_4(u_2)$ existen $a, a' \in \varphi_4(u_0)$ tal que $a'i, ia \in F(T)$, por los incisos (i) y (ii) de la Proposición 3.36, si $\varphi_4(u_1) = \{v_1\}$ y $\varphi_4(u_2) = \{v_2\}$ o $\varphi_4(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi_4(u_2) = \{v_1\}$, entonces φ_4 es un acuerdo. En ambos casos $T \langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$ es autodual.

Hay 4 \mathfrak{D} -orígenes con $\bar{U} \cong TT_4$.

2. Sea $\bar{U} \cong K_1 + \vec{C}_3$ donde $\{v_0\} \Rightarrow (v_1, v_2, v_3, v_1)$. En \bar{U} no hay parejas concordantes.

Supongamos que $v_0 \in \varphi(u_0)$. Podemos asumir que $\varphi(u_0) = \{v_0, v_1\}$. Si $\varphi(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_3\}$, entonces $\varphi(u_0) \Rightarrow \varphi(u_1) \Rightarrow \varphi(u_2)$ y u_2, v_2 es una pareja discordante de T . Si $\varphi(u_1) = \{v_3\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_2\}$, entonces $\varphi(u_0) \Rightarrow \varphi(u_2) \Rightarrow \varphi(u_1)$ y por el Corolario 3.38 (T, U) es un \mathfrak{D} -origen. Por dualidad si $\bar{U} \cong \vec{C}_3 + K_1$ donde $(v_0, v_1, v_2, v_0) \Rightarrow \{v_3\}$ y $v_3 \in \varphi(u_0)$, entonces (T, U) es un \mathfrak{D} -origen si $\varphi(u_2) \Rightarrow \varphi(u_1)$.

Si $v_0 \notin \varphi(u_0)$, podemos asumir que $\varphi(u_0) = \{v_1, v_2\}$. Si $\varphi(u_1) = \{v_3\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_0\}$, entonces $\varphi(u_2) \Rightarrow \{v_2\} \Rightarrow \varphi(u_1)$ y u_1, v_2 es una pareja discordante de T . Si $\varphi(u_1) = \{v_0\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_3\}$, entonces $\varphi(u_1) \Rightarrow \varphi(u_0)$ y $v_2 \Rightarrow \varphi(u_2)$ con $v_2 \in \varphi(u_0)$, por el Teorema 3.11, (T, U) es un \mathfrak{D} -origen. Por dualidad si $\bar{U} \cong \vec{C}_3 + K_1$ donde $(v_0, v_1, v_2, v_0) \Rightarrow \{v_3\}$ y $v_3 \notin \varphi(u_0)$, entonces (T, U) es un \mathfrak{D} -origen si $\varphi(u_2) = \{v_3\}$ y $\varphi(u_1) = \{v_0, v_1, v_2\} \setminus \varphi(u_0)$.

Por dualidad hay 4 \mathfrak{D} -orígenes con $\bar{U} \cong K_1 + \vec{C}_3$ o $\bar{U} \cong \vec{C}_3 + K_1$.

3. Sea $\bar{U} \cong T_4$. En \bar{U} la única pareja concordante es v_1, v_2 .

Supongamos que $\varphi(u_0) = \{v_0, v_1\}$. Si $\varphi(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_3\}$, entonces $\varphi(u_0) \Rightarrow \varphi(u_1) \Rightarrow \varphi(u_2)$ y u_2, v_2 es una pareja discordante

de T . Si $\varphi(u_1) = \{v_3\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_2\}$, entonces $\varphi(u_0) \Rightarrow \varphi(u_2) \Rightarrow \varphi(u_1)$ y (T, U) es un \mathfrak{D} -origen por el Corolario 3.38. Por dualidad si $\varphi(u_0) = \{v_2, v_3\}$, entonces (T, U) es un \mathfrak{D} -origen sólo si $\varphi(u_1) = \{v_1\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_0\}$.

Supongamos que $\varphi(u_0) = \{v_0, v_2\}$. Si $\varphi(u_1) = \{v_1\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_3\}$, entonces $\varphi(u_2) \Rightarrow \{v_0\} \Rightarrow \varphi(u_1)$ y u_2, v_0 es una pareja concordante de T . Si $\varphi(u_1) = \{v_3\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_1\}$, entonces $\varphi(u_2) \Rightarrow \{v_2\} \Rightarrow \varphi(u_1)$ y u_1, v_2 es una pareja discordante de T , por lo que (T, U) no es un \mathfrak{D} -origen. Por dualidad (T, U) no es un \mathfrak{D} -origen si $\varphi(u_0) = \{v_1, v_3\}$.

Supongamos que $\varphi(u_0) = \{v_0, v_3\}$, entonces v_0, v_3 es una pareja discordante con respecto a $\varphi(u_1) \cup \varphi(u_2)$ y para todo vértice $i \in \varphi(u_1) \cup \varphi(u_2)$ existen $a, a' \in \varphi(u_0)$ tal que $a'i, ia \in F(T)$ por los incisos (i) y (ii) de la Proposición 3.36, si $\varphi(u_1) = \{v_2\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_1\}$ o $\varphi(u_1) = \{v_1\}$ y $\varphi(u_2) = \{v_2\}$, entonces (T, U) es un \mathfrak{D} -origen.

Hay 4 \mathfrak{D} -orígenes con $\bar{U} \cong T_4$.

En total hay 12 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos de orden 7 tales que $U \cong \vec{C}_3$. \square

(v) $\omega(11; 5) = 51$.

Demostración Sea $U \cong \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Podemos asumir que $U = \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$. Sea $\bar{U} \in \mathfrak{T}_3$ y π una r -partición de \bar{U} tal que (\bar{U}, π) es adecuada, entonces $r \leq 3$. Sea $\mathfrak{F} \subset U^{[2]}$ tal que $|\mathfrak{F}| = r$ y (U, \mathfrak{F}) es admisible, entonces $2 \leq |\mathfrak{F}| = |\pi| \leq 3$. Nótese que $\bar{U} \cong TT_3$ o $\bar{U} \cong \vec{C}_3$. Sea $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

1. Sea $\mathfrak{F} = \{X_0, X_1\}$. Por la Observación 3.40 (U, \mathfrak{F}) es universal. Si $\bar{U} = TT_3$, con (v_0, v_1, v_2) como sucesión de fuentes, entonces $\pi = \{\{v_0, v_2\}, \{v_1\}\}$ es la única 2-partición de \bar{U} tal que (\bar{U}, π) es adecuada. Sean

$$\begin{aligned}\varphi_1(X_0) &= \{v_0, v_2\} \text{ y } \varphi_1(X_1) = \{v_1\}, \\ \varphi_2(X_0) &= \{v_1\} \text{ y } \varphi_2(X_1) = \{v_0, v_2\}.\end{aligned}$$

φ_1, φ_2 son acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Nótese que $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$ son duales, pero no isomorfos. Si $\bar{U} \cong \vec{C}_3$, con (v_0, v_1, v_2, v_0) como ciclo,

entonces $\pi = \{\{v_0, v_1\}, \{v_2\}\}$ es salvo isomorfismo la única 2-partición de \bar{U} tal que (\bar{U}, π) es adecuada. Sean

$$\varphi_1(X_0) = \{v_0, v_2\} \text{ y } \varphi_1(X_1) = \{v_1\}$$

$$\varphi_2(X_0) = \{v_1\} \text{ y } \varphi_2(X_1) = \{v_0, v_2\}$$

φ_1, φ_2 son acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Nótese que $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$ son duales, pero no isomorfos.

Hay 4 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $|\mathfrak{F}| = 2$.

2. Sea $|\mathfrak{F}| = 3$ con \mathfrak{F} minimal. Sea $\mathfrak{F} = \{X_0, X_1, X_2\}$. Por la Observación 3.41, podemos asumir que

$$\mathfrak{F} = \{\{0, 2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}\} \text{ o } \mathfrak{F} = \{\{0, 2\}, \{4, 1\}, \{0, 1\}\}.$$

Nótese que cada clase de la partición π consta de un sólo vértice, por lo que $\varphi(X_j) \in \bar{U}$, para $j \in \{1, 2, 3\}$.

- (a) Sea $X_0 = \{0, 2\}$, $X_1 = \{0, 1\}$ y $X_2 = \{1, 2\}$. Nótese que $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y $X_1, X_2 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, por lo tanto cualquier automorfismo de (U, \mathfrak{F}) fija a X_0 y la pareja (U, \mathfrak{F}) es autodual. Como

$$N^+(4, U) = X_1 = N^-(2, U) \text{ y } N^+(0, U) = X_2 = N^-(3, U),$$

entonces por el Lema 3.42, se tiene que

$$N^+(4; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_1); \bar{U}) \text{ y } N^+(2; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_1); \bar{U}),$$

$$N^+(0; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y } N^+(3; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}).$$

$N^+(4; \bar{U}) = \bar{U}$ y $N^+(2; \bar{U}) = \varphi(X_1)$, por lo que

$$N^-(\varphi(X_1); \bar{U}) \neq \emptyset,$$

y sigue que $\varphi(X_1)$ no es fuente de \bar{U} . $N^+(0; \bar{U}) = \varphi(X_2)$ y $N^+(3; \bar{U}) = \bar{U}$, por lo que $N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \emptyset$ y sigue que $\varphi(X_2)$ no es pozo de \bar{U} . Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, para $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$(\varphi_1(X_0), \varphi_1(X_2), \varphi_1(X_1)), (\varphi_2(X_2), \varphi_2(X_1), \varphi_2(X_0)), \\ (\varphi_3(X_2), \varphi_3(X_0), \varphi_3(X_1)).$$

Nótese que $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$ son duales, pero no isomorfos y $T(\varphi_3)$ es autodual. Si \bar{U} es cíclico, entonces cada uno de las dos orientaciones cíclicas de \bar{U} induce un \mathfrak{D} -origen autodual.

Hay cinco acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $|\mathfrak{F}| = 3$, \mathfrak{F} minimal y $|\mathfrak{F}_0| = 1$.

- (b) Sea $X_0 = \{0, 2\}$, $X_1 = \{4, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$. Nótese que se tiene que $X_0, X_1 \in \mathfrak{F}_0$ y $X_2 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, por lo tanto cualquier automorfismo de (U, \mathfrak{F}) fija a X_2 . Además (U, \mathfrak{F}) es autodual. Como $N^+(4, U) = X_2 = N^-(2, U)$, entonces por el Lema 3.42 se tiene que

$$N^+(4; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y } N^+(2; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}).$$

$$N^+(4; \bar{U}) = \{\varphi(X_0), \varphi(X_2)\} \text{ y } N^+(2; \bar{U}) = \{\varphi(X_1), \varphi(X_2)\},$$

por lo que

$$N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \{\varphi(X_0)\} \text{ y } N^-(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \{\varphi(X_1)\}.$$

Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$\begin{aligned} &(\varphi_1(X_0), \varphi_1(X_1), \varphi_1(X_2)), (\varphi_2(X_0), \varphi_2(X_2), \varphi_2(X_1)), \\ &(\varphi_3(X_1), \varphi_3(X_0), \varphi_3(X_2)), (\varphi_4(X_2), \varphi_4(X_0), \varphi_4(X_1)), \\ &(\varphi_5(X_2), \varphi_5(X_1), \varphi_5(X_0)). \end{aligned}$$

Nótese que $T(\varphi_1)$, $T(\varphi_3)$ son duales pero no isomorfos a $T(\varphi_4)$, $T(\varphi_5)$, respectivamente y $T(\varphi_2)$ es autodual. Si \bar{U} es cíclico, entonces $(\varphi(X_0), \varphi(X_2), \varphi(X_1), \varphi(X_0))$ es la orientacion de \bar{U} y $T(\varphi)$ es autodual.

Hay seis acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $|\mathfrak{F}| = 3$, \mathfrak{F} minimal y $|\mathfrak{F}_0| = 2$.

Hay 11 \mathfrak{D} -órigenes no isomorfos con $|\mathfrak{F}| = |\pi| = 3$ y \mathfrak{F} minimal.

3. Sea $|\mathfrak{F}| = 3$ con \mathfrak{F} no minimal. Sea $\mathfrak{F} = \{X_0, X_1, X_2\}$. Como \mathfrak{F} no es minimal asumimos que $X_0 = \{0, 2\}$ y $X_1 = \{2, 4\}$.
- (a) Sea $X_2 = \{i, i+2\}$ con $i \in \{1, 3\}$. Entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y por la Observación 3.40 (U, \mathfrak{F}) es universal. Sea $X_2 = \{3, 0\}$. Nótese

que cualquier automorfismo de (U, \mathfrak{F}) fija a X_0 . Además (U, \mathfrak{F}) es autodual. Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$\begin{aligned} & (\varphi_1(X_0), \varphi_1(X_1), \varphi_1(X_2)), (\varphi_2(X_0), \varphi_2(X_2), \varphi_2(X_1)). \\ & (\varphi_3(X_1), \varphi_3(X_0), \varphi_3(X_2)), (\varphi_4(X_1), \varphi_4(X_2), \varphi_4(X_0)), \\ & (\varphi_5(X_2), \varphi_5(X_0), \varphi_5(X_1)), (\varphi_6(X_2), \varphi_6(X_1), \varphi_6(X_0)), \end{aligned}$$

Nótese que $T(\varphi_1)$, $T(\varphi_3)$ son duales, pero no isomorfos a $T(\varphi_5)$, $T(\varphi_6)$, respectivamente, y tanto $T(\varphi_2)$ como $T(\varphi_4)$ son autoduales. Si \bar{U} es cíclico, entonces cada uno de las dos orientaciones cíclicas de \bar{U} induce un \mathfrak{D} -origen autodual. Entonces hay seis acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) para $i = 3$. En el caso de $i = 1$, cualquier automorfismo de (U, \mathfrak{F}) fija a X_2 y (U, \mathfrak{F}) es autodual. El análisis es análogo y también hay seis acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

Hay 12 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $|\mathfrak{F}| = 3$, \mathfrak{F} no minimal y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$.

- (b) Sea $\mathfrak{F}_{(i)} = \{X_0, X_1, X_2\}$, con $X_2 = \{i, i+1\}$ e $i \in \mathbb{Z}_5$. Nótese que $X_0, X_1 \in \mathfrak{F}_0$ y $X_2 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, por lo tanto cualquier automorfismo de (U, \mathfrak{F}) fija a X_2 . Como $N^+(i-1, U) = X_2 = N^-(i+2, U)$, entonces por el Lema 3.42 se tiene que

$$\begin{aligned} N^+(i-1; \bar{U}) &\neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y} \\ N^+(i+2; \bar{U}) &\neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}). \end{aligned}$$

Nótese que $(U, \mathfrak{F}_{(0)})$, $(U, \mathfrak{F}_{(1)})$ son duales a $(U, \mathfrak{F}_{(3)})$, $(U, \mathfrak{F}_{(2)})$ respectivamente y $(U, \mathfrak{F}_{(4)})$ es autodual.

Sea $i = 0$. Entonces por el Lema 3.42, se tiene que

$$N^+(4; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y } N^+(2; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}).$$

Como $N^+(4; \bar{U}) = \{\varphi(X_0), \varphi(X_2)\}$ y $N^+(2; \bar{U}) = \{\varphi(X_2)\}$, se tiene que

$$N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \{\varphi(X_0)\} \text{ y } N^-(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \emptyset.$$

Por lo que $\varphi(X_2)$ no es fuente de \bar{U} . Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$\begin{aligned} & (\varphi_1(X_0), \varphi_1(X_1), \varphi_1(X_2)), (\varphi_2(X_0), \varphi_2(X_2), \varphi_2(X_1)). \\ & (\varphi_3(X_1), \varphi_3(X_0), \varphi_3(X_2)). \end{aligned}$$

Nótese que $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_3)$ son duales, pero no isomorfos y $T(\varphi_2)$ es autodual. Si \bar{U} es cíclico, entonces la orientacion de \bar{U} es el siguiente ciclo $(\varphi(X_0), \varphi(X_2), \varphi(X_1), \varphi(X_0))$. Nótese que $T(\varphi)$ es autodual. Entonces hay cuatro acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) para $i = 0$. Por dualidad si $i = 3$, entonces hay otros cuatro acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

Sea $i = 1$. Entonces por el Lema 3.42, se tiene que

$$N^+(0; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y } N^+(3; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}).$$

Como $N^+(0; \bar{U}) = \{\varphi(X_1), \varphi(X_2)\}$ y $N^+(3; \bar{U}) = \bar{U}$, se tiene que

$$N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \{\varphi(X_1)\} \text{ y } N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \emptyset.$$

Por lo que $\varphi(X_2)$ no es pozo de \bar{U} . Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$\begin{aligned} (\varphi_1(X_1), \varphi_1(X_2), \varphi_1(X_0)), (\varphi_2(X_2), \varphi_2(X_0), \varphi_2(X_1)), \\ (\varphi_3(X_2), \varphi_3(X_1), \varphi_3(X_0)). \end{aligned}$$

Nótese que $T(\varphi_2)$ y $T(\varphi_3)$ son duales, pero no isomorfos y $T(\varphi_1)$ es autodual. Si \bar{U} es cíclico, entonces la orientacion de \bar{U} es $(\varphi(X_0), \varphi(X_1), \varphi(X_2), \varphi(X_0))$. Nótese que $T(\varphi)$ es autodual. Entonces hay cuatro acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) para $i = 1$. Por dualidad si $i = 2$, entonces hay otros cuatro acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

Sea $i = 4$. Entonces por el Lema 3.42, se tiene que

$$N^+(3; \bar{U}) \neq N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \text{ y } N^+(1; \bar{U}) \neq N^-(\varphi(X_2); \bar{U}).$$

Como $N^+(3; \bar{U}) = \bar{U}$ y $N^+(1; \bar{U}) = \bar{U}$, se tiene que

$$N^-(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \emptyset \text{ y } N^+(\varphi(X_2); \bar{U}) \neq \emptyset.$$

Por lo que $\varphi(X_2)$ no es vértice extremo de \bar{U} . Si \bar{U} es acíclico y φ_i un acuerdo, $i \in \{1, 2\}$, entonces las sucesiones de fuentes de \bar{U} son

$$(\varphi_1(X_0), \varphi_1(X_2), \varphi_1(X_1)), (\varphi_2(X_1), \varphi_2(X_2), \varphi_2(X_0)).$$

Nótese que $T(\varphi_1)$ y $T(\varphi_2)$ son duales. Si \overline{U} es cíclico, entonces cada uno de las dos orientaciones cíclicas de \overline{U} induce un \mathcal{D} -origen autodual. Hay cuatro acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\overline{U}, π) para $i = 4$.

Hay 20 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\overline{U}, π) con $|\mathfrak{F}| = 3$, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_0$, y \mathfrak{F} no minimal.

En total hay 32 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos con $|\mathfrak{F}| = 3$ con \mathfrak{F} no minimal.

En total hay 51 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos de orden 8 tales que $U \cong \vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$.
□

(vi) $\omega(11; 7) = 171$.

Demostración Sea U un torneo regular de orden 7, entonces $U \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$, $U \cong W_0$ o $U \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Sea \overline{U} un torneo de orden 2, π una 2-partición de \overline{U} y $\mathfrak{F} \subset U^{[3]}$ tal que $|\mathfrak{F}| = 2$ y (U, \mathfrak{F}) es admisible. Nótese que (\overline{U}, π) es adecuada.

1. Sea $U \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$.

Podemos asumir que $U = \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$. Como $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ es transitivo en vértices y por la Observación 3.43, podemos asumir que $X_0 = \{0, 3, 6\}$. Como (U, \mathfrak{F}) es admisible, entonces $|\{4, 0\} \cap X_1|, |\{6, 2\} \cap X_1| \neq 1$. Por lo que hay tres casos: (i) $X_1 = \{1, 3, 5\}$, (ii) $\{4, 0\} \subset X_1$ y $\{6, 2\} \cap X_1 = \emptyset$, (iii) $\{6, 2\} \subset X_1$ y $\{4, 0\} \cap X_1 = \emptyset$.

(i) Sea $X_1 = \{1, 3, 5\}$, entonces (U, \mathfrak{F}) es universal.

Hay 2 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\overline{U}, π) con $X_1 = \{1, 3, 5\}$.

(ii) $\{4, 0\} \subset X_1$ y $\{6, 2\} \cap X_1 = \emptyset$.

Sea $X_1 = \{0, 4, i\}$, donde $i \in \{1, 3, 5\}$. La pareja (U, \mathfrak{F}) es universal en los tres casos ($i = 1, i = 3, i = 5$) y en cada caso hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\overline{U}, π) .

Hay 6 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\overline{U}, π) tales que $\{4, 0\} \subset X_1$ y $\{6, 2\} \cap X_1 = \emptyset$.

(iii) $\{6, 2\} \subset X_1$ y $\{4, 0\} \cap X_1 = \emptyset$.

Sea $X_1 = \{6, 2, i\}$, donde $i \in \{1, 3, 5\}$. Sea $i = 3$, entonces T es isomorfo al torneo del caso 2, (ii) con $i = 3$ ($\{0, 3, 6\} + 4 = \{4, 0, 3\}$ y $\{3, 6, 2\} + 4 = \{0, 3, 6\}$). En los otros dos casos ($i = 1, i = 5$) la pareja (U, \mathfrak{F}) es universal y en cada caso hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

Hay 4 acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $\{6, 2\} \subset X_1$.

En total hay 12 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos de orden 9 con $U \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$.

2. $U \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$.

Podemos asumir que $U = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. U es transitivo en flechas, es transitivo en 3-conjuntos acíclicos y $\{\{0, 1, 3\}, \{0, 1, 5\}\}$ es un sistema de representantes de las órbitas de 3-conjuntos cíclicos en U . Como U es \mathcal{D} -libre, entonces (U, \mathfrak{F}) es admisible para todo 2-conjunto $\mathfrak{F} \subset U^{[3]}$. Sea $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) .

(i) Sea X_0 acíclico, y X_1 cíclico. Asumimos que $X_0 = \{0, 1, 2\}$. Nótese que X_0 fija $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Sea $X_1 \in \mathfrak{F}_+$, entonces $X_1 = \{i, i+1, i+3\}$ y $i-1 \in U^+(\mathfrak{F})$. Si $i-1 \in X_0$, entonces por el inciso (iii) del caso $U = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ (página 62), φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Si $i-1 \notin X_0$, entonces por el inciso (iii) del caso $U = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ (página 62), φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0) \varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$. Nótese que en cada caso $T(\varphi)$ es autodual, por lo que para cada $i \in \mathbb{Z}_7$ hay un único acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) con $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y $X_1 \in \mathfrak{F}_+$. Por dualidad si $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y $X_1 \in \mathfrak{F}_-$, entonces hay un único acuerdo entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) para cada $i \in \mathbb{Z}_7$.

Hay 14 \mathcal{D} -orígenes con X_0 acíclico y X_1 cíclico.

(ii) Sean X_0, X_1 acíclicos, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal.

$$\begin{aligned} & \{ \{0, 1, 2\}, \{i, i+1, i+2\} : i \in \mathbb{Z}_4 \}, \\ & \{ \{0, 1, 2\}, \{j, j+2, j+4\} : j \in \mathbb{Z}_7 \} \end{aligned}$$

es un sistema de representantes de parejas de 3-conjuntos acíclicos en $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Como $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $i \neq 0$. Como (U, \mathfrak{F}) es

universal, entonces en cada caso hay dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

Hay 20 \mathcal{D} -orígenes con X_0 y X_1 acíclicos.

(iii) Sean X_0, X_1 cíclicos.

$$\begin{aligned} & \{ \{0, 1, 3\}, \{i, i+1, i+3\} : i \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\} \}, \\ & \{ \{0, 1, 5\}, \{k, k+1, k-2\} : k \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\} \} \\ & \{ \{0, 1, 3\}, \{j, j+1, j-2\} : j \in \mathbb{Z}_7 \}, \end{aligned}$$

es un sistema de representantes de parejas de 3-conjuntos acíclicos en $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Como $|\mathfrak{F}| = 2$, entonces $i, k \neq 0$.

Sea $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_+$. Podemos asumir que $X_0 = \{0, 1, 3\}$ por lo que $6 \in U^+(\mathfrak{F})$. Si $6 \in X_1$, entonces $X_1 = \{3, 4, 6\}$ y $2 \in U^+(\mathfrak{F})$. Como $2 \notin X_0$, entonces el preacuerdo φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0) \varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$. Si $6 \notin X_1$, entonces se tiene que $X_1 = \{i, i+1, i+3\}$ con $i \in \{1, 2\}$ y $i-1 \in U^+(\mathfrak{F})$. Como $i-1 \in X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Por lo que hay un único \mathcal{D} -origen para $i = 1, 2, 3$.

Sea $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_-$. Por dualidad hay un único \mathcal{D} -origen para $i = 1, 2, 3$. Sea $X_0 \in \mathfrak{F}_+$ y $X_1 \in \mathfrak{F}_-$. Podemos asumir que $X_0 = \{0, 1, 3\}$ por lo que $6 \in U^+(\mathfrak{F})$. Si $6 \in X_1$, entonces $X_1 = \{j, j+1, j+5\}$ con $j \in \{1, 5, 6\}$ y $j+2 \in U^-(\mathfrak{F})$. Como $j+2 \in X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0) \varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$. Si $6 \notin X_1$, entonces $X_1 = \{j, j+1, j+5\}$ con $j \in \{0, 2, 3, 4\}$ y $j+2 \in U^-(\mathfrak{F})$. Como $j+2 \notin X_0$, entonces el preacuerdo φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Por lo que hay un único acuerdo para cada $j \in \mathbb{Z}_7$. Nótese que cada $T(\varphi)$ es autodual.

Hay 13 \mathcal{D} -orígenes con X_0 y X_1 cíclicos.

En total hay 47 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos de orden 9 tales que $\mathbf{U} \cong \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$.

3. $\mathbf{U} \cong W_0$.

Podemos asumir que $\mathbf{U} = W_0$ (página 13). Por la Observación 3.44, sabemos que W_0 es transitivo en \mathcal{D} -flechas y podemos asumir que $\{w_1^-, w_2^+\} \subset X_0$. Entonces

$$X_0 \in \{ \{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_3^-, w_1^-, w_2^+\} \}.$$

Nótese que $\{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}$ es dual a $\{w_1^-, w_1^+, w_2^+\}$ y $\{w_3^-, w_1^-, w_2^+\}$ es dual a $\{w_1^-, w_2^+, w_3^+\}$. Sea $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \pi$ un preacuerdo. Como $|\overline{U}| = 2$, entonces por el inciso (ii) de la Observación 3.19 $|\mathfrak{F}| = 2$.

(a) Sea $X_0 = \{w_1^-, w_0, w_2^+\} \in \mathfrak{F}$. Se tiene que $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y

$$w_1^- \dagger w_2^+, w_2^- \dagger w_3^+ \text{ y } w_3^- \dagger w_1^+.$$

i. Sea $X_1 = \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ con $\mathfrak{F}' = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}\}$. $X_1 \in \mathfrak{F}_-$. Como $w_0 \in U^-(\mathfrak{F})$ y $w_0 \in X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0) \varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$.

Por dualidad hay 2 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

ii. Sea $X_1 = \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_0\}$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ con $\mathfrak{F}' = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_0, w_i^+, w_{i+1}^+\}\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ por lo que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal y en cada caso ($i = 1, 2, 3$) hay dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$. Claramente los \mathfrak{D} -orígenes son no isomorfos.

Por dualidad hay 12 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

iii. Sea $\mathfrak{F}_{(i)} = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_i^-, w_0, w_i^+\}\}$. Nótese que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(1)})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(2)})$ y $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(3)})$ es autodual. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que $\mathfrak{F}_{(i)} = \mathfrak{F}_0$ y la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal y hay dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

Hay 6 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

iv. Sea $\mathfrak{F}_{(i)} = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_i^-, w_0, w_{i+1}^+\}\}$. Como $|\mathfrak{F}_{(i)}| = 2$, entonces $i \neq 1$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(2)})$ es isomorfo a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(3)})$ y son autoduales. $\mathfrak{F}_{(i)} = \mathfrak{F}_0$ por lo que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal y se tienen dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

Hay 2 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

v. Sea $\mathfrak{F}_{(i)} = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_i^-, w_0, w_{i-1}^+\}\}$. Nótese que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(1)})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(3)})$ y $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}_{(2)})$ es autodual. $X_1 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, $w_{i-1}^- \in U^+(\mathfrak{F})$ y $w_i^+ \in U^-(\mathfrak{F})$.

Sea $i = 1$. Entonces $w_3^- \notin X_0$ y φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0) \varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$, pero como $w_1^+ \notin X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Por lo que no existen acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$. Por dualidad si $i = 3$, entonces no existen acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

Sea $i = 2$. Entonces $w_1^- \in X_0$ y φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1)\varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$, pero como $w_2^+ \in X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0)\varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$. Por lo que no existen acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

- vi. Sea $X_1 = \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_i^+\}$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ con $\mathfrak{F}' = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_{i+1}^-, w_i^+, w_{i+1}^+\}\}$. $X_1 \in \mathfrak{F}_+$ y $w_{i-1}^+ \in U^+(\mathfrak{F})$.

Sea $i = 1, 2$. Como $w_3^+ \notin X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_0)\varphi(X_1) \in F(T(\varphi))$.

Sea $i = 3$. Como $w_2^+ \in X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1)\varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$.

En cada caso ($i = 1, 2, 3$) hay un único acuerdo entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$.

Por dualidad hay 6 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

- vii. Sea $X_1 = \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_{i+1}^+\}$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ con $\mathfrak{F}' = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_i^-, w_i^+, w_{i+1}^+\}\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ por lo que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es una pareja universal y en cada caso ($i = 1, 2, 3$), se tiene dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$. Claramente los \mathfrak{D} -orígenes son no isomorfos.

Por dualidad hay 12 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

- viii. Sea $X_1 = \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_{i-1}^+\}$. Nótese que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es dual a $(\mathbf{U}, \mathfrak{F}')$ donde $\mathfrak{F}' = \{\{w_1^-, w_0, w_2^+\}, \{w_{i-1}^-, w_i^+, w_{i+1}^+\}\}$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ por lo que la pareja $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal y en cada caso ($i = 1, 2, 3$), se tiene dos acuerdos entre $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ y $(\overline{\mathbf{U}}, \pi)$. Claramente los \mathfrak{D} -orígenes son no isomorfos.

Por dualidad hay 12 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

En total hay 52 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos con $X_0 = \{w_i^-, w_0, w_{i+1}^+\}$.

- (b) Sea $X_0 = \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\} \in \mathfrak{F}$ y $X_1 \neq \{w_i^-, w_0, w_{i+1}^+\}$. Se tiene que $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y

$$w_1^- \nmid w_2^+ \text{ y } w_3^- \nmid w_1^+.$$

Como $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es admisible, entonces $|\{w_2^-, w_3^+\} \cap X_1| \neq 1$.

Supongamos que $\{w_2^-, w_3^+\} \subset X_1$. Entonces $X_1 = \{w_2^-, w_3^+, i\}$ donde $i \in \{w_1^-, w_3^-, w_1^+, w_2^+\}$.

- i. Si $i \in \{w_1^-, w_3^-, w_1^+\}$, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ por lo que $(\mathbf{U}, \mathfrak{F})$ es universal y en cada caso ($i = w_1^-, w_3^-, w_1^+$) hay dos acuerdos

entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Por dualidad de X_0 hay 4 \mathfrak{D} -orígenes en cada caso. Claramente los \mathfrak{D} -orígenes son no isomorfos.

En total hay 12 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

- ii. Sea $X_1 = \{w_2^-, w_2^+, w_3^+\}$, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ por lo que (U, \mathfrak{F}) es universal y hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Como (U, \mathfrak{F}) es autodual, entonces hay 2 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos. Supongamos que $\{w_2^-, w_3^+\} \cap X_1 = \emptyset$. Entonces

$$X_1 \subset \{w_0, w_1^-, w_3^-, w_1^+, w_2^+\}.$$

- iii. $X_1 \neq \{w_1^-, w_3^-, w_1^+\}$ ya que $(U, \mathfrak{F}) \cong (U, \mathfrak{F}')$ con

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \{ \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_1^-, w_3^-, w_1^+\} \} \text{ y} \\ \mathfrak{F}' &= \{ \{w_1^-, w_2^-, w_2^+\}, \{w_2^-, w_3^-, w_3^+\} \}. \end{aligned}$$

(\mathfrak{F}' corresponde al caso 3(b)i con $i = w_3^-$).

- iv. Sea

$$X_1 \in \{ \{w_1^-, w_3^-, w_0\}, \{w_1^-, w_0, w_1^+\}, \\ \{w_0, w_1^+, w_2^+\}, \{w_3^-, w_1^-, w_2^+\}, \{w_3^-, w_1^+, w_2^+\} \}.$$

$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal. En cada caso hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) y por dualidad de X_0 en cada caso se obtienen 4 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

En total hay 20 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

- v. Sea $X_1 \in \{w_3^-, w_0, w_2^+\}$. $X_1 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, $w_2^- \in U^+(\mathfrak{F})$ y $w_3^+ \in U^-(\mathfrak{F})$. Como $w_2^- \in X_0$ y $w_3^+ \notin X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Por dualidad de X_0 hay 2 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.
- vi. Sea $X_1 = \{w_1^-, w_1^+, w_2^+\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal, por lo que hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) y como (U, \mathfrak{F}) es autodual, entonces hay 2 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos.

En total hay 38 \mathfrak{D} -orígenes no isomorfos con

$$X_0 \in \{ \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_{i+1}^+\}, \{w_i^-, w_i^+, w_{i+1}^+\} \} \text{ y } X_1 \neq \{w_i^-, w_0, w_{i+1}^+\}.$$

- (c) Sea $X_0 = \{w_3^-, w_1^-, w_2^+\} \in \mathfrak{F}$. Se tiene que $X_0 \in \mathfrak{F}_0$ y

$$w_1^- \nmid w_2^+ \text{ y } w_2^- \nmid w_3^+.$$

Como (U, \mathfrak{F}) es admisible, entonces $|\{w_3^-, w_1^+\} \cap X_1| \neq 1$.

Supongamos que $\{w_3^-, w_1^+\} \subset X_1$. Entonces $X_1 = \{w_3^-, w_1^+, i\}$ donde $i \in \{w_2^-, w_2^+\}$.

i. Sea $X_1 = \{w_3^-, w_1^+, w_2^+\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal, por lo que hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Como (U, \mathfrak{F}) es autodual, entonces hay 2 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

ii. Sea $X_1 = \{w_2^-, w_3^-, w_1^+\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal, por lo que hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Por dualidad hay 4 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

Supongamos que $\{w_3^-, w_1^+\} \cap X_1 = \emptyset$. Entonces

$$X_1 \subset \{w_0, w_1^-, w_2^-, w_2^+, w_3^+\}.$$

iii. Sea $X_1 \in \{\{w_1^-, w_2^-, w_0\}, \{w_2^-, w_0, w_2^+\}, \{w_0, w_2^+, w_3^+\}\}$. Entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal. En cada caso hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Por dualidad, se tiene en cada caso, 4 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

En total hay 12 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

iv. Sea $X_1 = \{w_1^-, w_0, w_3^+\}$. $X_1 \in \mathfrak{F}_- \cap \mathfrak{F}_+$, $w_3^- \in U^+(\mathfrak{F})$ y $w_1^+ \in U^-(\mathfrak{F})$. Como $w_3^- \in X_0$ y $w_1^+ \notin X_0$, entonces φ es un acuerdo si y sólo si $\varphi(X_1) \varphi(X_0) \in F(T(\varphi))$. Por dualidad de X_0 hay 2 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

v. Sea $X_1 = \{w_1^-, w_2^+, w_3^+\}$. $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ y (U, \mathfrak{F}) es universal, por lo que hay dos acuerdos entre (U, \mathfrak{F}) y (\bar{U}, π) . Como (U, \mathfrak{F}) es autodual, entonces hay 2 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos.

En total hay 22 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos con

$$X_0 = \{w_{i-1}^-, w_i^-, w_{i+1}^+\} \text{ y } X_1 \neq \{w_i^-, w_0, w_{i+1}^+\}, \{w_i^-, w_{i+1}^-, w_{i+1}^+\}.$$

En total hay 112 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos con $U \cong W_0$.

En total hay 171 \mathcal{D} -orígenes no isomorfos de orden 9 con U regular de orden 7. \square

Corolario 4.14 $\tau_{11} = \{(11; i) \mid i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}\}$.

4.2.3 Moldes de orden 13

En [26] hay una tabla con todos los torneos no isomorfos de orden 1 al 7. Usaremos la notación de éstas tablas para los torneos de orden 6.

(i) $\omega(13; 1) = 20$.

Demostración Sea T un torneo de orden 6. Hay 56 torneos de orden 6 no isomorfos [26]; 20 de ellos

$(Tn21, Tn22, \dots, Tn33, Tn35, Tn36, Tn37, Tn45, Tn46, Tn47, Tn67)$

tienen algún vértice extremo y de los restantes 16 de ellos

$(Tn38, Tn39, Tn40, Tn43, Tn49, Tn51, Tn52, Tn54,$
 $Tn58, Tn59, Tn60, Tn63, Tn68, Tn69, Tn74, Tn76)$

tienen al menos una pareja concordante. Por la proposición 3.31 en éstos casos $(\{w\} + T, T)$ no es un \mathfrak{D} -origen, en los restantes 20 casos se tiene por la misma proposición que $(\{w\} + T, T)$ es un \mathfrak{D} -origen. \square

Capítulo 5

Moldes mansos

5.1 Clasificación de \mathcal{D} -flechas

Daremos una clasificación de las \mathcal{D} -flechas en función de la discordancia de su residuo. Estudiaremos algunas propiedades de las clases de flechas y para una clase en particular encontraremos el número exacto de estas \mathcal{D} -flechas.

Definición 5.1 Sean $T \in \mathbb{T}R$ y uv una \mathcal{D} -flecha. Entonces $T' = T \setminus \{u, v\}$ es regular y decimos que la flecha es:

1. \mathcal{C} -residual si $T' \cong \vec{C}_{2m-1} \langle \emptyset \rangle$,
2. \mathcal{M} -residual si T' es molde, y
3. \mathcal{R} -residual si la flecha no es ni \mathcal{C} -residual ni \mathcal{M} -residual.

Analizaremos algunas propiedades de los torneos regulares con flechas \mathcal{C} -residuales. Para simplificar la escritura las flechas \mathcal{C} -residuales, las llamaremos \mathcal{C} -flechas.

Proposición 5.2 Sea T un torneo regular con una \mathcal{C} -flecha (ξ^-, ξ^+) , entonces

1. T es cíclico si y sólo si $T[N^+(\xi^+)] \cong TT_m$.
2. Si T no es cíclico, entonces M^T tiene \mathcal{D} -tipo $(2m' + 1; i)$ con un número impar de \mathcal{D} -flechas.

Demostración

1. Sea T cíclico. Claramente el subtorneo inducido por $N^+(\xi^+)$ es transitivo. Recíprocamente supongamos que el subtorneo $T[N^+(\xi^+)]$ es transitivo. Entonces por el Lema 2.16, se tiene que (ξ^-, ξ^+) no es una componente de $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$. Como $T \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \cong \vec{C}_{2m-1}(\emptyset)$, asumimos que $N^+(\xi^+; T) = \{0, 1, \dots, m-1\}$ por lo que

$$\mathcal{D}^\rightarrow(T) = (\xi^-, \xi^+, m-1, 2m-2, m-2, \dots, 0, \xi^-)$$

y T es cíclico.

2. Como $T[N^+(\xi^+)]$ no es transitivo y es subtorneo de $\vec{C}_{2m-1}(\emptyset)$, entonces $T[N^+(\xi^+)]$ no tiene vértice extremo y por el Lema 2.16, la flecha (ξ^-, ξ^+) es componente de $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$. Como $\mathcal{D}^\rightarrow(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) \cong \vec{C}_{2m-1}$, entonces $\mathcal{D}^\rightarrow(T)[V^- \leftrightarrow V^+]$ aporta un número par de trayectorias de orden par a $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$. Así M^T tiene un número impar de \mathcal{D} -flechas. \square

Proposición 5.3 *Sea T_{2m+5} un torneo regular no cíclico y (ξ_0^-, ξ_0^+) , (ξ_1^-, ξ_1^+) dos \mathcal{C} -flechas de T . Entonces $\mathcal{D}^\rightarrow(T)$ consta de las dos flechas (ξ_0^-, ξ_0^+) , (ξ_1^-, ξ_1^+) y otras dos trayectorias dirigidas cuyos ordenes suman $2m+1$. Además $M^T \cong W_0$.*

Demostración Definimos los siguientes torneos:

$$T_0 = T \setminus \{\xi_1^-, \xi_1^+\}, T_1 = T \setminus \{\xi_0^-, \xi_0^+\} \text{ y } T' = T \setminus \{\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_1^-, \xi_1^+\}.$$

Por el Corolario 2.20, se tiene que

$$T_0 \cong T_1 \cong \vec{C}_{2m+3}(\emptyset) \text{ y } T_0 \cap T_1 = T' \cong \vec{C}_{2m+1}(\emptyset).$$

Como $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$ es transitivo en vértices, podemos suponer que

$$\mathcal{D}^\rightarrow(T_0) = (0, \xi_0^-, \xi_0^+, m, 2m, \dots, 0).$$

Por el Lema 2.19 y el Corolario 2.20 (página 30), podemos asumir que

$$\mathcal{D}^\rightarrow(T_1) = (0, m, 2m, \dots, k, \xi_1^-, \xi_1^+, k+m, \dots, 0), \quad 0 \leq k \leq 2m.$$

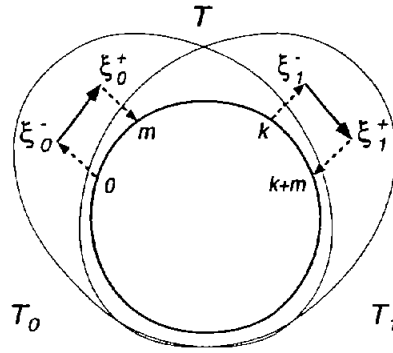


Figura 5.1: La estructura de un torneo no cíclico con dos \mathfrak{C} -flechas.

Entonces $(j, j+m) \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$ si $j \neq 0, k$ y $(\xi_0^-, \xi_0^+), (\xi_1^-, \xi_1^+) \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$. Así se tienen las siguientes discordancias:

$$\begin{aligned} 0 \mid \xi_0^- \pmod{T_0}; \xi_0^+ \mid m \pmod{T_0}; \\ k \mid \xi_1^- \pmod{T_1}; (k+m) \mid \xi_1^+ \pmod{T_1}. \end{aligned}$$

Como T_0, T_1, T son torneos regulares, entonces $val^-(\xi_i^j; T_k) = m+1$ y $val^-(\xi_i^j; T) = m+2$ por lo que $T[\{\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_1^-, \xi_1^+\} \setminus \{\xi_0^-, \xi_0^+, \xi_1^-, \xi_1^+\}] \cong \vec{C}_4$.

Asumimos que $\xi_0^+ \xi_1^+ \in T$.

Si $k \in N^+(\xi_0^+)$, entonces se tienen las siguientes discordancias:

$$\begin{aligned} k \mid \xi_1^- \pmod{\xi_0^e}; \xi_1^+ \mid (k+1) \pmod{\xi_0^e}; \\ 0 \mid \xi_0^- \pmod{\xi_1^e}; \xi_0^+ \mid m \pmod{\xi_1^e}. \end{aligned}$$

Se sigue que $T \cong \vec{C}_{2m+5}^{\rightarrow}(\emptyset)$ contradiciendo que T no es cíclico. Nótese que

$$\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T) = \{0, \xi_0^-, \xi_0^+, m, 2m, \dots, k, \xi_0^-, \xi_0^+, k+m, \dots, 0\}$$

Por lo tanto $k \notin N^+(\xi_0^+)$ y $k+m \in N^+(\xi_0^+)$. Entonces se tienen las siguientes concordancias:

$$\begin{aligned} k+m \equiv \xi_1^+ \pmod{\xi_0^+}; \xi_1^- \equiv k \pmod{\xi_0^+}; \\ 0 \equiv \xi_0^- \pmod{\xi_1^+}; \xi_0^+ \equiv m \pmod{\xi_1^+} \end{aligned}$$

y así $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T) = \{(\xi_0^-, \xi_0^+), (m, 2m, \dots, k), (\xi_1^-, \xi_1^+), (k+m, k+2m, \dots, 0)\}$.

Como $|V((m, 2m, \dots, k))| + |V((k + m, k + 2m, \dots, 0))| = 2m + 1$, entonces $\mathcal{D} \rightarrow (T)$ consta de dos \mathcal{C} -flechas (ξ_0^-, ξ_0^+) , (ξ_1^-, ξ_1^+) y dos trayectorias, una de orden par y otra de orden impar. Por lo que el molde es de orden 7 y tiene tres \mathcal{D} -flechas. Por el inciso (v) del Ejemplo 2.3, el molde de T es W_0 . \square

Corolario 5.4 *Un molde T tiene dos \mathcal{C} -flechas si y sólo si $T \cong W_0$.*

Corolario 5.5 *Si T es molde de orden al menos 9 y tiene una \mathcal{C} -flecha (ξ^-, ξ^+) , entonces:*

1. (ξ^-, ξ^+) es la única \mathcal{C} -flecha de T .
2. T tiene un número impar de \mathcal{D} -flechas.

Sea M un molde y $\mathcal{C}(M)$, $\mathfrak{M}(M)$, $\mathfrak{R}(M)$ los conjuntos de las flechas \mathcal{C} , \mathfrak{M} , \mathfrak{R} -residuales correspondientes. Claramente los conjuntos de las flechas $\mathcal{C}(M)$, $\mathfrak{M}(M)$, $\mathfrak{R}(M)$ son invariantes bajo automorfismo.

Veremos algunas propiedades de $\mathcal{C}(M)$, $\mathfrak{M}(M)$, $\mathfrak{R}(M)$. Fácilmente podemos decir cuantas \mathcal{C} -flechas puede tener un molde.

Proposición 5.6 $|\mathcal{C}(M)| = 0, 1$ *excepto si $M \cong W_0$, en cuyo caso se tiene que $|\mathcal{C}(W_0)| = 3$.*

Demostración Claramente $|\mathcal{C}(W_0)| = 3$ (véase el inciso (v) del Ejemplo 2.3), luego del Corolario 5.4 sigue que si $M \not\cong W_0$, entonces $|\mathcal{C}(M)| \leq 1$. \square

5.2 Moldes mansos

Sea M un molde. Decimos que M es manso si tiene una \mathcal{C} -flecha. Un torneo regular es manso si su molde lo es. Diremos que un torneo regular es salvaje, si no es cíclico ni manso. La clasificación de \mathcal{D} -flechas nos induce una partición de los moldes en tres clases:

1. Los torneos cíclicos, $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$,
2. Los torneos mansos y

3. Los torneos salvajes.

En éste capítulo vamos a estudiar los moldes mansos. Daremos el número exacto de moldes mansos no isomorfos con orden y \mathfrak{D} -tipo fijo (los moldes mansos tienen un número impar (al menos 3) de \mathfrak{D} -flechas) y estudiaremos cierto tipo de subtorneos y la estructura de los subtorneos isomorfos a W_0 .

5.2.1 Construcción del ciclo auxiliar \mathbf{C}

Por Corolario 5.4 sabemos que W_0 es el único molde manso con más de una \mathfrak{C} -flecha, por lo que podemos asumir que $|M| \geq 9$ y que M tiene una sólo \mathfrak{C} -flecha. Sea M un molde manso con \mathfrak{D} -tipo $(2m+3; 2(m-2s)+1)$ con $0 < s \leq m/2$ y sea (ξ^-, ξ^+) la única \mathfrak{C} -flecha. Podemos suponer que $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} = \vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$ por lo que

$$\mathfrak{D}^+(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) = (0, m, 2m, m-1, 2m-1, \dots, m+1, 0).$$

Como M tiene al menos otra \mathfrak{D} -flecha asumimos que $(0, m) \in \mathfrak{D}^+(M)$. Sean $V^- = N^+(\xi^-) \setminus \{\xi^+\}$, $V^+ = N^+(\xi^+)$ tales que $\{m\} \in V^-$ y $\{0\} \in V^+$, $\{P_i^\varepsilon\}$ el conjunto de trayectorias maximales de $\mathfrak{D}^+(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) \cap V^\varepsilon$, con $\varepsilon \in \{-, +\}$ y $P_0^- = \{m, 2m, \dots, lm\}$ y $P_s^+ = \{km, \dots, m+1, 0\}$, donde $|\{P_i^-\}| = |\{P_i^+\}| = s$.

Sea \mathbf{C} el ciclo que se obtiene al contraer cada trayectoria P_i^ε al vértice v_i^ε , $\varepsilon \in \{-, +\}$ y ρ_M la función de peso que le asigna a cada v_i^ε el orden de la trayectoria P_i^ε , $\rho_M(v_i^\varepsilon) = |V(P_i^\varepsilon)|$.

$$\mathbf{C} = \{v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+, \dots, v_s^-, v_s^+, v_1^-\},$$

Nótese que $\rho(v_i^\varepsilon) \geq 2$, $|V(\mathbf{C}_M)| = 2s$ y \mathbf{C}_M contiene todas las \mathfrak{D} -flechas de M salvo la \mathfrak{C} -flecha (ξ^-, ξ^+) . Además

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \rho_M(v_i^-) &= m, & \sum_{i=1}^s \rho_M(v_i^+) &= m+1 \text{ y} \\ \sum_{v \in \mathbf{C}_M} \rho_M(v) &= 2m+1. \end{aligned}$$

Nótese que si $|M| \geq 9$, entonces por el Corolario 5.5 la \mathfrak{C} -flecha es única, y el ciclo \mathbf{C}_M también. Si $|M| = 7$, entonces $M \cong W_0$. Como W_0 es transitivo en \mathfrak{C} -flechas, entonces el ciclo \mathbf{C}_{W_0} es único salvo isomorfismo. Claramente el molde manso M es completamente determinado por el ciclo \mathbf{C}_M y la función de peso ρ_M , así que hemos probado el siguiente

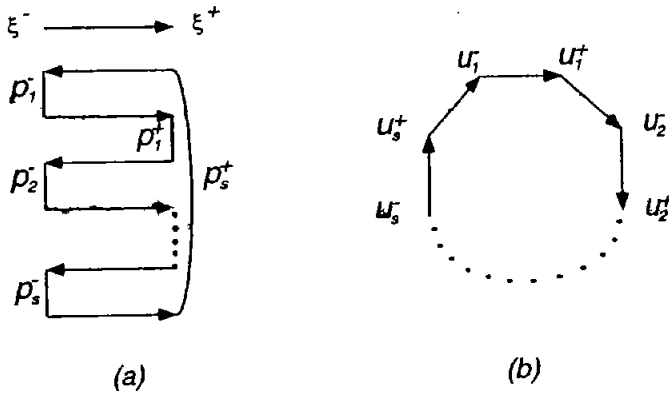


Figura 5.2: (a) La discordancia del residuo de la C-flecha, (b) el ciclo auxiliar asociado

Teorema 5.7 *Existe una biyección natural entre los moldes mansos y el conjunto de ciclos dirigidos de orden par $\vec{C}_{2s} = (v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_s, u_s, v_1)$, $s \geq 1$, con una función de peso $\varphi : V(\vec{C}_{2s}) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\varphi(v) \geq 2$ para $v \in V(\vec{C}_{2s})$ y $\sum_{i=1}^s \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^s \varphi(u_i) + 1$.*

Recordamos que una digráfica es *rígida* si el único automorfismo es la identidad.

Proposición 5.8 *Los moldes mansos de orden al menos 9 son rígid.*

Demostración Sea $\vec{C}_{2n} = (v_0, u_0, v_1, u_1, \dots, v_{n-1}, u_{n-1}, v_0)$ un ciclo dirigido de orden par. Sea $\varphi : V(\vec{C}_{2n}) \rightarrow \mathbb{N}$ una función de pesos tal que $\sum_{i=1}^s \varphi(v_i) = m$, $\sum_{i=1}^s \varphi(u_i) = m + 1$. Claramente una rotación impar de los vértices de \vec{C}_{2s} no respeta la función de pesos. Sea ψ una rotación par de los vértices de \vec{C}_{2s} tal que ψ respeta la función de pesos. Como $\text{mcd}(m, m + 1) = 1$, entonces φ es la identidad y \vec{C}_{2s} es rígido. \square

Una función de pesos ρ_M , se puede expresar como dos particiones, π_1, π_2 de m en s sumandos y $m + 1$ en s sumandos respectivamente, tales que si $\pi = (n_1^{r_1}, n_2^{r_2}, \dots, n_k^{r_k})$, entonces $n_i \geq 2$, para $1 \leq i \leq k$. Sea la partición $\pi = (n_1^{r_1}, n_2^{r_2}, \dots, n_k^{r_k})$, entonces definimos $\varepsilon(\pi)! = r_1! r_2! \dots r_s!$.

Lema 5.9 Para m, s, π_1 y π_2 fijos hay

$$\frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon(\pi_1)! \varepsilon(\pi_2)!}$$

moldes mansos no isomorfos.

Demostración Sean π_1, π_2 dos particiones de m y $m+1$ respectivamente definidos como sigue:

$$\pi_1 = (n_{1,1}^{r_{1,1}}, n_{1,2}^{r_{1,2}}, \dots, n_{1,k}^{r_{1,k}}) \text{ y } \pi_2 = (n_{2,1}^{r_{2,1}}, n_{2,2}^{r_{2,2}}, \dots, n_{2,l}^{r_{2,l}}),$$

con $n_{i,j} \geq 2$. Nótese que $r_{1,1} + r_{1,2} + \dots + r_{1,k} = s$ y $r_{2,1} + r_{2,2} + \dots + r_{2,l} = s$. Usando el argumento de permutaciones acíclicas con repetición, se tiene que el número de moldes mansos es igual a

$$\frac{1}{s} \binom{s}{r_{1,1} r_{1,2} \dots r_{1,k}} \binom{s}{r_{2,1} r_{2,2} \dots r_{2,l}} = \frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon(\pi_1)! \varepsilon(\pi_2)!},$$

donde

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

con $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. □

Como consecuencia directa tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 5.10 Con \mathfrak{D} -tipo fijo $(2m+3; 2(m-2s)+1)$ hay

$$\sum_{\pi_1, \pi_2} \frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon(\pi_1)! \varepsilon(\pi_2)!}$$

moldes mansos no isomorfos.

Corolario 5.11 Para cada m par $m \geq 4$ hay un sólo molde manso (salvo isomorfismo) con \mathfrak{D} -tipo $(2m+3; 1)$.

Demostración Sea M un molde manso con \mathfrak{D} -tipo $(2m+3; 1)$ y \mathbf{C} el ciclo inducido por las \mathfrak{D} -flechas de M del residuo de la flecha \mathfrak{C} -residual. Se tiene lo siguiente

1. $|V(\mathbf{C})| = m = 2s$,
2. π_1 es una partición de s en s sumandos y
3. π_2 es una partición de $s + 1$ en s sumandos.

Por lo tanto $\pi_1 = (1^s)$, $\pi_2 = (2, 1^{s-1})$ y

$$\sum_{\pi_1, \pi_2} \frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon(\pi_1)! \varepsilon(\pi_2)!} = \frac{(s!)^2}{s \cdot s! (s-1)!} = 1$$

□

Corolario 5.12 *Para cada $m \geq 3$ hay un sólo molde manso (salvo isomorfismo) con \mathfrak{D} -tipo $(2m + 3; 2m - 3)$.*

Demostración Sea M un molde manso con \mathfrak{D} -tipo $(2m + 3; 2m - 3)$ y \mathbf{C} el ciclo inducido por las \mathfrak{D} -flechas de M del residuo de la flecha \mathfrak{C} -residual. Se tiene lo siguiente

1. $|V(\mathbf{C})| = 2 = 2s$,
2. π_1 es una partición de m en 1 y
3. π_2 es una partición de $m + 1$ en 1.

Por lo tanto $\pi_1 = (m)$ y $\pi_2 = (m + 1)$. Como $s = 1$, $\varepsilon(\pi_1)! = 1$, $\varepsilon(\pi_2)! = 1$ se sigue el resultado por el Teorema 5.10. □

Corolario 5.13 *Para cada m impar $m \geq 3$ hay exactamente*

$$\frac{m^2 - 1}{8}$$

molde mansos (salvo isomorfismo) con \mathfrak{D} -tipo $(2m + 3; 3)$.

Demostración Sea M un molde manso con \mathfrak{D} -tipo $(2m + 3; 3)$ y \mathbf{C} el ciclo inducido por las \mathfrak{D} -flechas de M del residuo de la flecha \mathfrak{C} -residual. Se tiene lo siguiente

1. $|V(\mathbf{C})| = m - 1 = 2s$,
2. π_1 es una partición de $s + 1$ en s sumandos y
3. π_2 es una partición de $s + 2$ en s sumandos.

Por lo que $\pi_1 = (2, 1^{s-1})$, $\pi_2 \in \{(3, 1^{s-1}), (2^2, 1^{s-2})\}$ y

$$\frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon((2, 1_{s-1}))! \varepsilon((3, 1_{s-1}))!} = \frac{(s!)^2}{s(s-1)!(s-1)!} = s$$

$$\frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon((2, 1_{s-1}))! \varepsilon((2, 1_{s-2}))!} = \frac{(s!)^2}{s(s-1)!2(s-2)!} = \frac{s(s-1)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\pi_1, \pi_2} \frac{(s!)^2}{s \cdot \varepsilon(\pi_1)! \varepsilon(\pi_2)!} = s + \frac{s(s-1)}{2} = \frac{s^2 + s}{2}$$

$$= \frac{m^2 - 1}{8}.$$

□

Corolario 5.14 Con \mathcal{D} -tipo $(2m + 3; 2m - 7)$ hay

$$\frac{m^2 - 5m + 6}{2}$$

moldes mansos no isomorfos.

Demostración Como $s = 2$, entonces

$$\sum \rho(v^-) = m - 2 \text{ y } \sum \rho(v^+) = m - 1.$$

Sea $m = 2k$.

Hay $2 \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor$ combinaciones de dos particiones π_1, π_2 donde π_1 es una partición de $2k-2$ en 2 sumandos y π_2 es una partición de $2k-1$ en 2 sumandos.

$$2 \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor = 2k^2 - 5k + 3$$

$$= \frac{m^2 - 5m + 6}{2}.$$

Sea $m = 2k + 1$.

Hay $2 \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor$ combinaciones de dos particiones π_1, π_2 donde π_1 es una partición de $2k - 1$ en 2 sumandos y π_2 es una partición de $2k$ en 2 sumandos.

$$\begin{aligned} 2 \left\lfloor \frac{2k-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor &= 2k^2 - 3k + 1 \\ &= \frac{m^2 - 5m + 6}{2}, \end{aligned}$$

y se sigue el resultado. \square

Sea uv una \mathcal{D} -flecha no \mathcal{C} -residual en un molde manso. P_u es la trayectoria maximal en V^ε , con $\varepsilon \in \{-, +\}$, que contiene al vértice u .

Proposición 5.15 *Sea uv una \mathcal{D} -flecha no \mathcal{C} -residual en un molde manso la flecha uv es*

1. \mathcal{M} -residual si $l(P_u), l(P_v) > 1$.
2. \mathcal{R} -residual si $l(P_u) = 1$ o $l(P_v) = 1$.

Demostración Si $l(P_u) = 1$ o $l(P_v) = 1$ se genera una \mathcal{D} -trayectoria de orden al menos tres en el residuo de uv . \square

5.3 W_0 -subtorneos fieles de moldes mansos

En esta sección estudiaremos los subtorneos *fieles* (por definirse) de moldes mansos que son isomorfos a W_0 (página 13). El interés por estos subtorneos surge del hecho que W_0 es el único molde manso con más de una \mathcal{C} -flecha. Se sabe que $dc(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) = 2$ [24] y $dc(W_0) = 3$ [23], por lo que los torneos cíclicos no tienen subtorneos isomorfos a W_0 . Ésto obliga a los subtorneos isomorfos a W_0 de un molde manso a contener uno o ambos vértices terminales de la \mathcal{C} -flecha del molde. Hemos entonces demostrado lo siguiente:

Lema 5.16 *Sea (ξ^-, ξ^+) la \mathcal{C} -flecha de un molde manso M con $|M| \geq 9$. Si M tiene un subtorneo H isomorfo a W_0 , entonces $\{\xi^-, \xi^+\} \cap H \neq \emptyset$.*

Definición 5.17 Decimos que un subtorneo H de T es fiel si la discordancia de H es la subdigráfica de la digráfica de discordancia de T inducida por los vértices de H .

Nótese que si H es un subtorneo fiel de T y $uv \in F(\mathcal{D}^+(H))$, entonces $uv \in F(\mathcal{D}^+(T))$.

Lema 5.18 Sea $M \in \text{TR}_{2m+3}^0$ un molde manso y (ξ^-, ξ^+) la flecha \mathcal{C} -residual. Los siguientes subtorneos que contienen a la flecha (ξ^-, ξ^+) son fieles en M .

1. Sea $P = (m, 2m, \dots, 2km)$ una trayectoria de $\mathcal{D}^+(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$ tal que $|P \cap V^-| = k \leq m - 2$ y $\{0, (2k + 1)m\} \subset V^\epsilon$, $\epsilon \in \{-, +\}$. $M \setminus P$ es subtorneo fiel en T .
2. Sean $P^- \subset V^-$ y $P^+ \subset V^+$ con $P^\epsilon \subset \mathcal{D}^+(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$, $\epsilon \in \{-, +\}$, $|P^-| = |P^+| = 2k + 2 \leq m$, entonces $M \setminus \{\text{int}(P^-), \text{int}(P^+)\}$ es un subtorneo fiel en M .

Demostración Se tiene que $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \cong \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$. Además

1. Por los Corolarios 2.15 y 2.20, se tiene que

$$M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \setminus P \cong \vec{C}_{2(m-k)+1} \langle \emptyset \rangle.$$

Sea $M' = M \setminus P$, podemos asumir que $M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\} = \vec{C}_{2(m-k)+1} \langle \emptyset \rangle$ donde $2(m - k) + 1 \geq 5$. Como $M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\}$ es regular y en M' quitamos k invecinos y k exvecinos de ξ^- y quitamos k invecinos y k exvecinos de ξ^+ en M , entonces M' es regular también, además $\{\xi^-, \xi^+\}$ sigue siendo una flecha \mathcal{C} -residual en M' . Al quitar los vértices de la trayectoria P se genera la \mathcal{D} -flecha $(0, (2k + 1)m)$ en $M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\}$, pero ambos vértices terminales están en la misma semivecindad de ξ^- y de ξ^+ . Por lo que las \mathcal{D} -flechas de M' son \mathcal{D} -flechas de M y $M \setminus P$ es fiel en M .

2. Por los Corolarios 2.15 y 2.20, se tiene que

$$M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \setminus (\text{int}(P^-) \cup \text{int}(P^+)) \cong \vec{C}_{2(m-2k)+1} \langle \emptyset \rangle.$$

Sea $M' = M \setminus (\text{int}(P^-) \cup \text{int}(P^+))$. Podemos asumir que

$$M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\} = \vec{C}_{2(m-2k)+1} \langle \emptyset \rangle,$$

donde $2(m - 2k) + 1 \geq 5$. Como $M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\}$ es regular y en M' quitamos k invecinos y k exvecinos de ξ^- y quitamos k invecinos y k exvecinos de ξ^+ , entonces M' es regular también, además $\{\xi^-, \xi^+\}$ sigue siendo una flecha \mathfrak{C} -residual en M' . Sea $P^\epsilon = (u_0^\epsilon, u_1^\epsilon, \dots, u_{k+1}^\epsilon)$, $\epsilon \in \{-, +\}$. Al quitar los vértices interiores de las trayectorias P^-, P^+ se generan dos \mathfrak{D} -aristas $\{u_0^-, u_{k+1}^-\}$ y $\{u_0^+, u_{k+1}^+\}$ en $M' \setminus \{\xi^-, \xi^+\}$, pero ambos vértices terminales están en la misma semivecindad de ξ^- y de ξ^+ . Por lo que las \mathfrak{D} -flechas de M' son \mathfrak{D} -flechas de M y $M \setminus (\text{int}(P^-) \cup \text{int}(P^+))$ es fiel en M . \square

Observación 5.19 Sea M un molde manso de orden $2m + 3$, (ξ^-, ξ^+) la \mathfrak{C} -flecha de M y $\{P_i^\epsilon\}$ la colección de trayectorias en $\mathfrak{D}^+(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) \cap V^\epsilon$, $\epsilon \in \{-, +\}$, tal que $|P_i^\epsilon| = 2k_i + 2$ y $\sum |P_i^-| = \sum |P_j^+| \leq m$. Entonces $M \setminus (\{\text{int}(P_i^-)\} \cup \{\text{int}(P_j^+)\})$ es un subtorneo fiel en M .

Proposición 5.20 Sea M un molde manso con \mathfrak{D} -tipo $(4n + 1; 4n - 5)$, entonces

1. M no tiene subtorneos fieles isomorfos a W_0 .

2. M tiene

$$\frac{(n-1)^2 n^2 (n+1)}{6}$$

subtorneos no fieles isomorfos a W_0 que contiene la \mathfrak{C} -flecha de M .

3. Si H es un subtorneo isomorfo a W_0 , entonces ξ^j no es componente trivial de H .

Demostración Nótese que M tiene 3 \mathfrak{D} -flechas. Sea $\xi^- \xi^+$ la flecha \mathfrak{C} -residual de M , podemos asumir que $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} = \vec{C}_{2(2n-1)+1}(\emptyset)$. Como $\vec{C}_{2(2n-1)+1}(\emptyset)$ es transitivo en vértices podemos suponer que

$$\mathfrak{D}^+(T) = \{(\xi^-, \xi^+), (0, 2n-1), (n, 3n-1), \{w\}\},$$

$$\text{y } V^- = \{2n-1, 2(2n-1), \dots, (2n-1)(2n-1)\} \pmod{4n-1}.$$

1. Supongamos que H es un subtorneo fiel en M con H isomorfo a W_0 . Tanto M como H tiene tres \mathfrak{D} -flechas, por lo que las tres \mathfrak{D} -flechas de M están en H . Sólo falta encontrar el vértice aislado w de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(H)$. Por la estructura de W_0 , se tiene que $w \in N^{-\dots}(\xi^-, 0, n)$.

$(2n - 1)^2 \equiv n \pmod{4n - 1}$, por lo que $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(0, n) = 2n - 1$
y

$$0 \mid n \pmod{M \setminus (\{\xi^-, \xi^+\} \cup (V^- \setminus \{0, n\}))}.$$

Como $N^-(\xi^-) \subset M \setminus (\{\xi^-, \xi^+\} \cup (V^- \setminus \{0, n\}))$, entonces se tiene que $0 \mid n \pmod{N^-(\xi^-)}$, por lo que $N^{-\dots}(\xi^-, 0, n) = \emptyset$. Por lo tanto, no existe un subtorneo fiel isomorfo a W_0 en M .

2. Construimos el siguiente subtorneo H de M :

- (a) $\{\xi^-, \xi^+\} \subset V(H)$.
- (b) $V^- \cap H = \{i, j\}$ una subtrayectoria de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$ tal que $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(i, j)$ es impar.
- (c) $V^+ \cap H = \{u, v, w\}$ donde $\{u, \dots, v, \dots, w\}$ es una subtrayectoria de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$ tal que
 - i. (u, v, w) es cíclico.
 - ii. $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(u, v)$ es impar.
 - iii. $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(j, u)$ es impar.
 - iv. $d_{\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(w, i)$ es impar.

Por los incisos (a) y (b) el subtorneo H es regular, por el inciso (c) la flecha $\xi^- \xi^+$ es componente de $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(H)$ y además $|H| = 7$, por tanto $H \cong W_0$. Si $H \cong W_0$ y la \mathfrak{C} -flecha de M también está en H , entonces por construcción H satisface (b) y (c).

En V^- hay $(n - 1)n$ parejas de vértices que cumplen con la condición (b). Para cada pareja en V^- hay $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ ternas en V^+ que cumplen con la condición (c) sea $i \in V^+$ (véase la figura 5.3):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^j i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

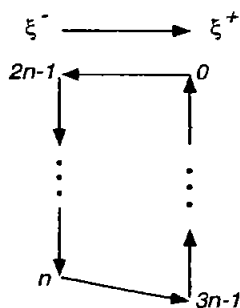


Figura 5.3: El molde manso con 3 \mathcal{D} -flechas y con $\xi^-\xi^+$ como \mathcal{C} -flecha.

Por lo que hay $\frac{1}{6}(n-1)^2 n^2 (n+1)$ subtorneos no fieles isomorfos a W_0 que contienen la \mathcal{C} -flecha de M .

3. Supongamos que ξ^j es vértice aislado de $\mathcal{D}^\rightarrow(H)$ y

$$F(\mathcal{D}^\rightarrow(H)) = \{(u_0, u_1), (v_0, v_1), (w_0, w_1)\}.$$

Por la estructura de $M[H]$ se tiene que

$$\{u_0, v_0, w_0\} \subset N^-(\xi^j) \text{ y } \{u_1, v_1, w_1\} \subset N^+(\xi^j),$$

por lo que $\{(u_0, u_1), (v_0, v_1), (w_0, w_1)\} \subset F(\mathcal{D}^\rightarrow(T))$, pero M sólo tiene dos \mathcal{D} -flechas en el residuo de la flecha (ξ^-, ξ^+) . \square

Sea M un molde manso con \mathcal{D} -tipo $(4s+3; 1)$. Nótese que M tiene $2s+1$ \mathcal{D} -flechas y si $\xi^-\xi^+$ es la \mathcal{C} -flecha de M , entonces $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \cong \vec{C}_{4s+1} \langle \emptyset \rangle$. Podemos asumir que

$$\mathcal{D}^\rightarrow(M) = \{(0, 2s+1), (4s+2, 2s), (4s+1, 2s-1), \dots, (2s+3, 1), \{2s+2\}\}$$

con $\{0\} \in V^+$ y $\{2s+1\} \in V^-$. Sea

$$F^\varepsilon = \{u^\varepsilon \in N^+(\xi^\varepsilon) : (u^-, u^+) \in \mathcal{D}^\rightarrow(M)\}, \varepsilon \in \{-, +\}.$$

Nótese que

$$F^- = \{4s, 4s-2, \dots, 2s+2\} \subset N^+(2s+1; T \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) \text{ y}$$

$$F^+ = \{2s-1, 2s-3, \dots, 1\} \subset N^+(0; T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$$

por lo que $M[F^\varepsilon] \cong TT_s$.

Proposición 5.21 *Sea M un molde manso con \mathcal{D} -tipo $(4s + 3; 1)$, $\xi^- \xi^+$ la \mathcal{C} -flecha de M y H un subtorneo de M isomorfo a W_0 , entonces*

1. *La \mathcal{C} -flecha $\xi^- \xi^+$ de M esta en H .*

2. *Sea $F(\mathcal{D}^\rightarrow(H)) = \{\xi^- \xi^+, (4s - 2i + 1, 2s - 2i), (4s - 2j, 2s - 2j - 1)\}$, entonces $i \leq j$.*

Sea $W = \{H \subset M \mid H \cong W_0\}$, entonces $|W| = s - (j - i)$.

3. *M tiene*

$$\frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$$

subtorneos isomorfos a W_0 .

Demostración *Sea $\xi^- \xi^+$ la \mathcal{C} -flecha de M y H un subtorneo fiel isomorfo a W_0 recordamos que $H \cap \{\xi^-, \xi^+\} \neq \emptyset$.*

1. *Supongamos que $|H \cap \{\xi^-, \xi^+\}| = 1$. Sea $\xi^\epsilon \in H$ donde $\epsilon \in \{-, +\}$. Como H es fiel en M , entonces ξ^ϵ es la componente trivial de $\mathcal{D}^\rightarrow(H)$. Como $H \cong W_0$, entonces $N^-(\xi^\epsilon; H)$ y $N^+(\xi^\epsilon; H)$ son cíclicos en H , pero $N^-(\xi^-) \subset F^-$ y $N^+(\xi^+) \subset F^+$ por lo que alguna semivecindad de ξ^ϵ es acíclica. Por lo tanto ξ^ϵ no es componente trivial de $\mathcal{D}^\rightarrow(H)$ y $\xi^-, \xi^+ \in V(H)$. Así $\xi^- \xi^+ \in \mathcal{D}^\rightarrow(H)$.*

2. *Supongamos que*

$$\mathcal{D}^\rightarrow(H) = \{(\xi^-, \xi^+), (4s - 2i + 1, 2s - 2i), (4s - 2i, 2s - 2i - 1), w\},$$

entonces

$$W = \{m + 1\} \cup (F^- \setminus \{4s - 2i + 1, 4s - 2(i + 1) + 1, \dots, 0\}) \\ \cup (F^+ \setminus \{1, 3, \dots, 2s - 2i - 1\})$$

y $|W| = 1 + (s - 1 - i) + i = s$.

Sea

$$\mathcal{D}^\rightarrow(H) = \{(\xi^-, \xi^+), (4s - 2i + 1, 2s - 2i), (4s - 2j, 2s - 2j - 1), w\}.$$

Supongamos que $j < i$, entonces

$$d_{\mathcal{D}^\rightarrow(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(4s - 2j, 4s - 2i + 1) = 2(2i - 1 - 2j),$$

$$\{4s - 2i + 1, \xi^-\} \subset N^-(4s - 2j)$$

y $N^+(w; H)$ es cíclico en H , por lo que $i \leq j$.

Sea $k = j - i > 0$, entonces $|W| = s - \frac{2(2j+1-2i)-2}{4} = s - (j - i)$.

3. Sea $k = j - i$, $0 \leq k \leq s - 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{s-1} \sum_{k=0}^n (s - k) &= s \sum_{n=0}^{s-1} (n + 1) - \frac{(s-1)s(s+1)}{6} \\ &= s \left(\frac{(s-1)s}{2} + s \right) - \frac{(s-1)s(s+1)}{6} \\ &= \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \quad \square \end{aligned}$$

Sean $\{P_i^-\}$, $\{P_i^+\}$ las trayectorias maximales de $\mathcal{D}^\rightarrow(M \setminus \{\xi^-, \xi^+\})$ en V^- y V^+ respectivamente,

$$C = (u_0^-, u_0^+, u_1^-, u_1^+, \dots, u_{s-1}^-, u_{s-1}^+, u_0^-)$$

el ciclo de las \mathcal{D} -flechas de $T \setminus \{\xi^-, \xi^+\}$ que aparecen en $\mathcal{D}^\rightarrow(M)$, donde u_i^ϵ es el vértice que representa a la trayectoria P_i^ϵ y $\rho: V(C) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\rho(u_i^\epsilon) = l(P_i^\epsilon)$.

$$\begin{aligned} F^- &= \{u \in V^- : uv \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(M)) \text{ para algún } v \in V^+\} \\ F^+ &= \{u \in V^+ : uv \in F(\mathcal{D}^\rightarrow(M)) \text{ para algún } v \in V^-\}. \end{aligned}$$

Si H es una digráfica, entonces denotamos por $\vec{C}_3(H)$ el conjunto de triángulos cíclicos en H .

Proposición 5.22 *Sea M un molde manso cuyo \mathcal{C} -flecha es $\xi^-\xi^+$ y con \mathcal{D} -tipo $(2m + 3; 2(m - 2s) + 1)$. Entonces M tiene los siguientes subtorneos fieles en M isomorfos a W_0 .*

(Si $2m + 3 \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $s > 1$ por la Proposición 5.20).

1. M tiene subtorneos H_0 fieles en M , $T[H_0] \cong W_0$ y $|H_0 \cap \{\xi^-, \xi^+\}| = 1$ si y sólo si $\vec{C}_3(F^-)$ o $\vec{C}_3(F^+)$ es no vacía.
2. Si se cumple 1, entonces hay exactamente $|\vec{C}_3(F^-)| + |\vec{C}_3(F^+)|$ subtorneos fieles isomorfos a W_0 con un sólo vértice extremo de la \mathcal{C} -flecha de M .

3. M tiene subtorneos fieles H_1 isomorfos a W_0 con la \mathfrak{C} -flecha de M (salvo en el caso de $2m + 3 \equiv 1 \pmod{4}$ y $s = 1$).
4. Hay al menos $\sum_{r=i}^{r=j} \lfloor \frac{1}{2} \rho(u_r) \rfloor$ subtorneos fieles isomorfos a W_0 con la \mathfrak{C} -flecha de M .

Demostración Sea $\xi^- \xi^+$ la \mathfrak{C} -flecha de M .

1. Sea $(u_0, u_1, u_2) \in \vec{C}_3(F^\varepsilon)$ donde $\varepsilon \in \{-, +\}$. Como $u_i \in F^\varepsilon$ existen $\{v_0, v_1, v_2\} \subset V(M)$ tales que

$$\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \subset \mathfrak{D}^\rightarrow(M),$$

por lo que $T[\{\xi^\varepsilon, u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2\}]$ es isomorfo a W_0 , con ξ^ε como el vértice aislado de $\mathfrak{D}^\rightarrow(H_0)$ y $\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ las \mathfrak{D} -flechas.

Sea H_0 un subtorneo fiel en M tal que $T[H_0]$ es isomorfo a W_0 y $\{\xi^-, \xi^+\} \cap H_0 = \xi^\varepsilon$, como H_0 es fiel en M , entonces ξ^ε es el vértice aislado en $\mathfrak{D}^\rightarrow(H_0)$. Supongamos que $H_0 = M[\{\xi^\varepsilon, u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1\}]$ con $\{(u_0, u_1), (v_0, v_1), (w_0, w_1)\} \subset \mathfrak{D}^\rightarrow(M)$. Como las semivecindades de ξ^ε en H_0 son cíclicas, entonces $N^+(\xi^\varepsilon) = \{u_0, v_0, w_0\}$ es cíclico en M y $\vec{C}_3(F^\varepsilon)$ es no vacía.

2. Por (1) hay una correspondencia uníboca entre los ciclos del conjunto $\vec{C}_3(F^-) \cup \vec{C}_3(F^+)$ y los subtorneos fieles de M que son isomorfos a W_0 y cumplen que $|H_0 \cap \{\xi^-, \xi^+\}| = 1$, y se sigue el resultado.
3. Sea H_1 fiel en M con $\xi^-, \xi^+ \in V(H_1)$. Como H_1 fiel en M , entonces $(\xi^-, \xi^+) \in \mathfrak{D}^\rightarrow(H_1)$.

- (a) Probaremos que si hay una trayectoria maximal $P_i^+ \subset V^+$ tal que $|P_i^+| = 2k + 1$, entonces M tiene algún subtorneo fiel isomorfo a W_0 . Sea C el ciclo auxiliar del molde M y $u_i^+ \in V(C)$ tal que $P_i^+ = \{m, 2m, \dots, (2k + 1)m\} \subset V^+$ es la trayectoria correspondiente al vértice u_i^+ en el ciclo C , entonces

$$\{(0, m), ((2k + 1)m, (2k + 2)m)\} \subset \mathfrak{D}^\rightarrow(M),$$

Por el inciso (iii) del Lema 2.7, se tiene que $0 \equiv (2k + 1)m \pmod{P_i^+}$. Como $V(P_i^+) \subset N^-(\xi^-)$, entonces

$$N^{---}(\xi^-, 0, (2k + 1)m) = \{2m, 4m, \dots, 2km\}.$$

Nótese que $|N^{---}(\xi^-, 0, (2k+1)m)| = k$.

Sea $w \in N^{---}(\xi^-, 0, (2k+1)m)$, entonces

$$H_1 = M[\{\xi^-, \xi^+, 0, m, (2k+1)m, (2k+2)m, w\}] \cong W_0$$

y $\mathcal{D}^+(H_1) = \{(\xi^-, \xi^+), (0, m), ((2k+1)m, (2k+2)m), \{w\}\}$, por lo que H_1 es fiel en M .

- (b) Probaremos que si hay una trayectoria maximal $P_i^- \subset V^-$ tal que $|P_i^-| = 2k+2$, entonces M tiene algún subtorneo fiel isomorfo a W_0 . Sea \mathbf{C} el ciclo auxiliar del molde M y $u_i^- \in V(\mathbf{C})$ tal que $P_i^- = \{m, 2m, \dots, (2k+2)m\}$ es la trayectoria correspondiente al vértice u_i^- , entonces $(0, m), ((2k+2)m, (2k+3)m) \in \mathcal{D}^+(M)$. Como M es molde, entonces $0, -m \in N^-(\xi^-)$ y por el inciso (i) del Lema 2.7, se tiene que $0 \equiv (2k+2)m \pmod{(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\}) \setminus P_i^-}$ por lo que

$$-m \in N^{---}(\xi^-, 0, (2k+2)m).$$

Sea $H_1 = M[\{\xi^-, \xi^+, 0, m, (2k+2)m, (2k+3)m, -m\}]$, entonces

$$\mathcal{D}^+(H_1) = \{(\xi^-, \xi^+), (0, m), ((2k+2)m, (2k+3)m), \{-m\}\}$$

y $H_1 \cong W_0$.

- (c) Supongamos que $\rho(u_i^-) = 2k_i + 1$ para todo vértice $u_i^- \in V(\mathbf{C})$ y $\rho(u_i^+) = 2k'_i + 2$ para todo $u_i^+ \in V(\mathbf{C})$. Sea $(0, m) \in \mathcal{D}^+(M)$, con $0 \in V^+$. Sea $(0, m)$ la \mathcal{D} -flecha (u_0^+, u_1^-) en M y $(lm, (l+1)m)$ la \mathcal{D} -flecha (u_2^-, u_2^+) en M , entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D} \rightarrow (T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(0, lm) &= 1 + \rho(u_1^-) + 1 + \rho(u_1^+) + 1 + \rho(u_2^-) \\ &= 3 + 2k_1 + 2k'_1 + 1 + 2k_2 \\ &= 2(k_1 + k'_1 + k_2 + 2) \end{aligned}$$

por lo que $(lm, 0) \in F(M)$ y $\{\xi^-, lm, 0\}$ es cíclico en M . Como $(0, m) \in \mathcal{D}^+(M)$ y M es molde, entonces $-m \in N^-(\xi^-)$, y se sigue que $-m \in N^{---}(\xi^-, lm, 0)$, por lo que

$$M[\{\xi^-, \xi^+, lm, (l+1)m, 0, m, -m\}] \cong W_0,$$

con $\{(\xi^-, \xi^+), (lm, (l+1)m), (0, m)\}$ como \mathcal{D} -flechas. Claramente el subtorneo $M[\{\xi^-, \xi^+, lm, (l+1)m, 0, m, -m\}]$ es fiel en M .

4. Para cada $u_i^+ \in V(\mathbb{C})$ con $\rho(u_i^+) = 2k_i + 1$ hay k_i subtorneos fieles isomorfos a W_0 .

Sea $\rho(u_i^+) + \sum_{r=i+1}^{r=j} (\rho(u_r^-) + \rho(u_r^+)) = 2k + 1$, y sean

$$P_i^+ = \{m, 2m, \dots, k_i^+ m\} \text{ y } P_j^+ = \{\dots, (l-1)m, lm\}$$

las trayectorias correspondientes a los v\u00e9rtices u_i^+ y u_j^+ respectivamente, con $lm \not\equiv 0 \pmod{2m+1}$, entonces

$$(0, m), (lm, (l+1)m) \in F(\mathfrak{D}^+(M)) \text{ y}$$

$$d_{\mathfrak{D}^+(T \setminus \{\xi^-, \xi^+\})}(0, lm) = 1 + 2k + 2(j-i) = 2(k+j-i) + 1,$$

y $(0, lm) \in F(M)$. N\u00f3tese que $0, (l+1)m \in V^-$ y $m, lm \in V^+$ por lo que $(0, lm, \xi^-)$ es c\u00edclico en M . Sea $w \in N^{---}(0, lm, \xi^-) \subset V^+$, entonces

$$M[\{\xi^-, \xi^+, 0, m, lm, (l+1)m, w\}] \cong W_0$$

con $\{(\xi^-, \xi^+), (0, m), (lm, (l+1)m)\}$ como \mathfrak{D} -flechas. Claramente el subtorneo $M[\{\xi^-, \xi^+, 0, m, lm, (l+1)m, w\}]$ es fiel en M . Por el inciso (iii) del Lema 2.7, se tiene que

$$0 \equiv lm \pmod{P_{0,lm}}$$

por lo que $N^{---}(0, lm, \xi^-) = N^-(\xi^-) \cap \{2m, 4m, \dots, (l-1)m\}$ y $|N^{---}(0, lm, \xi^-)| \geq \sum_{r=i}^{r=j} \lfloor \frac{1}{2} l(P_r^+) \rfloor = \sum_{r=i}^{r=j} \lfloor \frac{1}{2} \rho(u_r^+) \rfloor$.

N\u00f3tese que si $\rho(u_i^+) + \sum_{r=i+1}^{r=j} (\rho(u_r^-) + \rho(u_r^+)) = 2k$, entonces no hay un subtorneo isomorfo a W_0 cuyos \mathfrak{D} -flechas son

$$\{(\xi^-, \xi^+), (0, m), (lm, (l+1)m)\}.$$

□

Capítulo 6

Coloraciones

En este capítulo daremos cotas tanto inferiores como superiores para el número dicromático de un torneo regular (no cíclico, ya que esos torneos son 2-dicromáticos [24]) en función de un cierto tipo de subtorneos: los moldes. También acotaremos el número dicromático de los torneos que pertenecen a una familia con molde fijo, en función del cociente de un torneo regular amplio de esta familia.

Definimos la siguiente relación de equivalencia entre dos vértices u, v en un torneo T :

Decimos que los vértices $u, v \in V(T)$ son *equivalentes* en T , $u \sim v \pmod{T}$, si $u, v \in V(P)$ y $u \equiv v \pmod{T \setminus P}$ para alguna trayectoria maximal P en $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$.

Definición 6.1 *La relación de equivalencia \sim induce una partición \mathcal{P} de los vértices de T . Sea T/\mathcal{P} el cociente de T inducido por \mathcal{P} . Nótese que $M^T \hookrightarrow T/\mathcal{P}$, y T/\mathcal{P} es un torneo sólo si T es un molde.*

Observación 6.2 *El molde M^T de un torneo $T \in \mathbb{TR}^{\circ}$ es subtorneo de T/\mathcal{P} .*

Demostración Sea T un torneo regular, M^T su molde y T/\mathcal{P} el cociente.

$$\begin{aligned} V(T/\mathcal{P}) &= V(M^T) \cup \{u_2 \in V(T) : u_1 u_2 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T) \text{ y } u_1 \in V^1\} \\ F(T/\mathcal{P}) &= F(M^T) \cup \{(u_1, u_2, u_1) : u_1 u_2 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T) \text{ y } u_1 \in V^1\} \cup \\ &\quad \{v_2 v_1 : v_1 v_2 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(M^T) \text{ y } v_1 v_2 \text{ no es maximal en } \mathcal{D}^{\rightarrow}(T)\} \cup \\ &\quad \{u_2 w : u_1 u_2 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T), w u_1 \in M^T \text{ y } u_1 \in V^1\} \cup \\ &\quad \{w u_2 : u_1 u_2 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T), u_1 w \in M^T \text{ y } u_1 \in V^1\} \cup \\ &\quad \{u_2 w_2 : u_1 w_1 \in \mathcal{D}^{\rightarrow}(T) \text{ y } u_1, w_1 \in V^1\} \end{aligned} \quad \square$$

Si M es un molde, entonces $\mathcal{F}(M)$ es la familia de torneos regulares cuyo molde es M .

Definición 6.3 Si T es un torneo regular y todas las trayectorias de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ son de orden al menos 3 decimos que T es un torneo amplio.

Decimos que T es un torneo es amplio en S ,

$$S \subset \{u_{i,1} \in V(T) : u_{i,1} \in P_i^1\} \cup \{v_{i,1} \in V(T) : v_{i,1} \in P_i^2\}$$

si cada vértice de S está contenido en una trayectoria de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ de orden al menos 3.

Sea $M^T \langle S'_0, S'_1; \leftrightarrow \rangle$, donde M^T es el molde del torneo regular T y S'_0 es el conjunto de componentes triviales de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M^T)$ que no son componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$, S'_1 es el conjunto de flechas de $F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(M^T))$ contenidas en componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ de orden al menos 3.

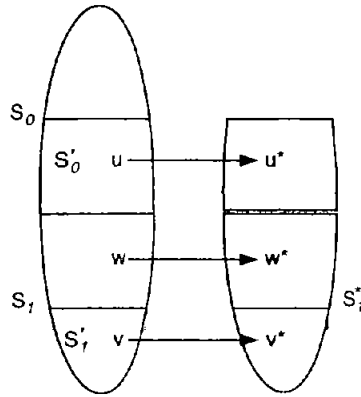


Figura 6.1: $M \langle S'_0, S'_1; \leftrightarrow \rangle$

Observación 6.4 $M^T \langle S'_0, S'_1; \leftrightarrow \rangle \cong T/\mathcal{P}$.

Demostración Nótese que

$$\begin{aligned} T/\mathcal{P} = & M^T \cup \{S_0^*\} + \{v_2v_1 : v_1v_2 \in S'_1\} + \{(u, u^*, u) : u \in S'_0\} + \\ & \{u_2w : wu_1 \in M^T \text{ y } u_1 \in S'_0\} + \{wu_2 : u_1w \in M^T \text{ y } u_1 \in S'_0\} + \\ & \{u_2w_2 : u_1w_1 \in T \text{ y } u_1, w_1 \in S'_0\} \end{aligned}$$

□

Observación 6.5 Sean $T, T' \in \mathcal{F}(M)$ con T' amplio, entonces

T'/\mathcal{P} tiene un subtorneo isomorfo a T/\mathcal{P} .

Demostración Sean $T, T' \in \mathcal{F}(M)$ con T' amplio. Sea S_0 el conjunto de componentes triviales de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$ que no son componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$, S_1 es el conjunto de flechas de $F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(M))$ contenidas en componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ de orden al menos 3. Sea S'_0 el conjunto de componentes triviales de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(M)$ que no son componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T')$, S'_1 es el conjunto de flechas de $F(\mathcal{D}^{\rightarrow}(M))$ contenidas en componentes de $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T')$ de orden al menos 3. Como T' es amplio, entonces $S_0 \subset S'_0$ y $S_1 \subset S'_1$, por lo que $M \langle S_0, S_1; \leftrightarrow \rangle$ es subtorneo de $M \langle S'_0, S'_1; \leftrightarrow \rangle$. Como M es subtorneo de tanto T/\mathcal{P} como de T'/\mathcal{P} , y se sigue el resultado por la Observación 6.4. \square

Definición 6.6 Si D es una digráfica, su número dicromático $dc(D)$ es el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de D de modo que no se formen ciclos dirigidos monocromáticos [22, 16].

Lema 6.7 Si $\varphi : D \rightarrow D'$ es un homomorfismo cuyas fibras son acíclicas, entonces $dc(D) \leq dc(D')$.

Demostración Sea $\phi' : V(D') \rightarrow C$ una coloración óptima. ϕ' induce una coloración $\phi : V(D) \rightarrow C$ de la siguiente manera: $\phi(v) = c_i \in C$ si $\phi'(\varphi(v)) = c_i$. Cada fibra es acíclica y las clases dicromáticas de ϕ' son acíclicas por lo que ϕ es una coloración acíclica. \square

Nótese que la proyección natural $\rho : T \rightarrow T/\mathcal{P}$ es un homomorfismo y sus fibras son acíclicas por el Corolario 2.8, por lo que $dc(T) \leq dc(T/\mathcal{P})$.

Proposición 6.8 Sea $T \in \text{TR}^{\circ}$, entonces

$$dc(T) = dc(T/\mathcal{P}).$$

Demostración Se tiene que $dc(T) \leq dc(T/\mathcal{P})$ por Lema 6.7, entonces basta probar que $dc(T) \geq dc(T/\mathcal{P})$. Sea φ una coloración acíclica óptima de T y \mathbf{P} el conjunto de trayectorías maximales en $\mathcal{D}^{\rightarrow}(T)$ de orden al menos 3. En cada trayectoria $P \in \mathbf{P}$ figuran al menos 2 colores ya que $T[V(P)]$ contiene triángulos cíclicamente orientados. Sean u_p, v_p dos vértices consecutivos en P de distinto color. Definimos una nueva coloración γ de T como sigue:

1. Si $x \in V(P)$ para alguna trayectoria $P \in \mathbf{P}$, entonces

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varphi(u_p) & \text{si } x \equiv u_p \pmod{T \setminus P} \\ \varphi(v_p) & \text{si } x \equiv v_p \pmod{T \setminus P} \end{cases}.$$

2. En otro caso, $\gamma(x) = \varphi(x)$.

Veremos ahora que γ también es acíclica. Si no lo fuera, existiría un ciclo dirigido C monocromático bajo γ , el cual supondremos del orden mínimo posible. Por lo tanto C es un triángulo. Obviamente C contiene algún vértice u cuyo color fue modificado, por lo que $u \in P$ para alguna trayectoria $P \in \mathbf{P}$. Como γ induce una coloración acíclica en P , C contiene algún vértice $v \in V(T) \setminus P$. Supongamos que C tiene el color $\varphi(u_p)$. Si el tercer vértice $z \in C$ estuviera en P , entonces $u \equiv z \pmod{v}$ lo cual contradice que C es cíclico, por lo tanto $z \in V(T) \setminus P$. Por otro lado, $u_p \equiv u \pmod{\{v, z\}}$, lo cual implicaría un triángulo cíclico en T bajo φ . Por lo tanto γ es una coloración acíclica en T , además γ induce una coloración acíclica en T/P y $dc(T) \geq dc(T/P)$. \square

Esta proposición tiene como consecuencia que los torneos amplios de una familia $\mathcal{F}(M)$ tienen el mismo número dicromático.

Proposición 6.9 *Todo torneo $T \in \mathbf{TR}^\circ$ cumple que*

$$dc(T) \leq 2dc(M^T).$$

Demostración Por la Proposición 6.8 sabemos que $dc(T) = dc(T/P)$ luego por el Lema 1.2, se sigue el resultado. \square

Ahora podemos dar una cota inferior y superior del número dicromático de un torneo en función del número dicromático de su molde; y podemos dar una cota superior del número dicromático de un torneo en función del número dicromático de un molde amplio de la misma familia de torneos.

Corolario 6.10 *Todo torneo $T \in \mathbf{TR}^\circ$ cumple que*

$$dc(M^T) \leq dc(T) \leq 2dc(M^T).$$

Proposición 6.11 *Sea $T, T' \in \mathcal{F}(M)$ con T' amplio, entonces*

$$dc(M) \leq dc(T) \leq dc(T').$$

Demostración T/\mathcal{P} es subtorneo de T'/\mathcal{P} . □

Definición 6.12 Sea $U \subset V(D)$. Decimos que un vértice $v \notin U$ es un U -posta (o uw -posta, se usará según convenga) si (u, v, w) es la sucesión de fuentes de un torneo transitivo de orden 3 para alguna flecha $uw \in D[U]$.

Definición 6.13 Si D es una gráfica orientada y $U_0, U_1 \subset V(D)$ son dos conjuntos acíclicos ajenos, entonces decimos que la pareja U_0, U_1 es preacíclica si para toda flecha $uw \in D[U_i]$ no existe un U_i -posta en U_j , con $\{i, j\} = \{0, 1\}$. Decimos que el conjunto $U_0 \cup U_1$ es preacíclico si U_0, U_1 es una pareja preacíclica.

Proposición 6.14 Sea U_0, U_1 una pareja preacíclica en la digráfica D . Entonces $U_i^* \cup U_j$ es acíclico en $D \langle S_0, S_1, \leftrightarrow \rangle$ si $U_i \subset S_0 \cup S_1^-$, $\{i, j\} = \{0, 1\}$.

Demostración Supongamos que $U_i \subset S_0 \cup S_1^-$. Sea C un ciclo dirigido de mínimo orden en $U_i^* \cup U_j$, $\{i, j\} = \{0, 1\}$, entonces C es un triángulo. Sea $D[C] = (u, v, w, u)$, como U_i es acíclico, entonces $C \not\subseteq D[U_i]$. Supongamos que $v \in U_i^*$ y $u, w \in U_j$, entonces $uv, vw \in F(D[U_i^* \cup U_j])$ y v es una wu -posta, contradiciendo que U_0, U_1 es una pareja preacíclica. □

Sea V_0 el conjunto de vértices aislados de $\mathcal{D}^+(M^T)$ y V_1^- el conjunto de vértices iniciales de las flechas de $\mathcal{D}^+(M^T)$.

Corolario 6.15 Sea T es un torneo amplio y U_0, U_1 una pareja preacíclica en el origen de T , entonces $U_0^* \cup U_1$ y $U_0 \cup U_1^*$ son acíclicos en el supratorneo $M^T \langle V_0, V_1, \leftrightarrow \rangle = T/\mathcal{P}$.

Si $T \in \text{TR}^\circ$ es amplio, entonces es equivalente buscar parejas preacíclicas en M^T y conjuntos acíclicos en T/\mathcal{P} . Como las clases cromáticas son conjuntos acíclicos en T/\mathcal{P} , entonces estas clases son parejas preacíclicas de M^T .

6.1 La familia de torneos mansos

Teorema 6.16 [24] Sea $T \in \text{TR}$, $dc(T) = 2$ si y sólo si T es cíclico.

Nótese que el número dicromático de los torneos en TR° es al menos 3.

Ejemplo 6.17 Sea $T \in \mathcal{F}(W_0)$ amplio. Probaremos que T es 3-dicromático.

Se sabe que $dc(W_0) = 3$ [23], por lo que basta mostrar una 3-coloración acíclica de W_0/\mathcal{P} . $W_0/\mathcal{P} = W_0 \langle \{w_0\}, \{w_1^+w_2^-, w_2^+w_3^-, w_3^+w_1^-\}, \leftrightarrow \rangle$.

Sea $\varphi : W_0 \langle \{w_0\}, \{w_1^+w_2^-, w_2^+w_3^-, w_3^+w_1^-\}, \leftrightarrow \rangle \rightarrow \{c_1, c_2, c_3\}$ la coloración definida por:

$$\varphi(u) = \begin{cases} c_1 & \text{si } u \in \{w_0^-, w_3^+, w_2^+\} \\ c_2 & \text{si } u \in \{w_1^-, w_2^-, w_1^+\} \\ c_3 & \text{si } u \in \{w_0, w_3^-\} \end{cases}$$

No es difícil comprobar que φ es una coloración acíclica y se sigue que

$W_0 \langle \{w_0\}, \{w_1^+w_2^-, w_2^+w_3^-, w_3^+w_1^-\}, \leftrightarrow \rangle$ es 3-dicromático y por lo tanto T lo es también.

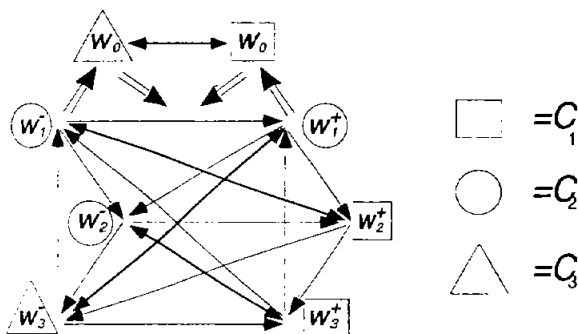


Figura 6.2: Una 3-coloración de W_0/\mathcal{P} .

Observación 6.18 Por el ejemplo anterior y la Proposición 6.11, se tiene que $dc(T) = 3$ para todo $T \in \mathcal{F}(W_0)$.

Teorema 6.19 Sea M un molde manso y $T \in \mathcal{F}(M)$. Entonces

$$dc(M) = 3 = dc(T).$$

Demostración Sea M un molde manso, por el Ejemplo 6.17, podemos asumir que $|M| \geq 9$ y por el inciso (i) del Corolario 5.5, M tiene una única flecha \mathfrak{C} -residual (ξ^-, ξ^+) . Luego $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} \cong \vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$. Podemos asumir

que $M \setminus \{\xi^-, \xi^+\} = \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$, $0 \in N^+(\xi^-)$ y $m \in N^+(\xi^+)$. Definimos la siguiente 3-coloración φ de M con colores $\{c, c^-, c^+\}$ como sigue:

$$\varphi(i) = \begin{cases} c^- & \text{si } i \in (\{0, 1, \dots, m\} \cap N^+(\xi^-)) \cup \{\xi^-\} \\ c^+ & \text{si } i \in (\{0, 1, \dots, m\} \cap N^+(\xi^+)) \cup \{\xi^+\} \\ c & \text{si } i \in \{m+1, m+2, \dots, 2m\} \end{cases}$$

Claramente φ es acíclica. Nótese además que las flechas $(0, m)$ y $\xi^- \xi^+$ tienen dos colores ($\varphi(\xi^-) = \varphi(0) = c^-$, $\varphi(\xi^+) = \varphi(m) = c^+$) y las restantes \mathcal{D} -flechas son también bicoloradas ya que un extremo tiene el color c y el otro tiene un color distinto al color c .

Definimos la siguiente 3-coloración γ de los vértices de $M \langle S_0, S_1, \leftrightarrow \rangle$:

$$\gamma(i) = \varphi(i) \text{ si } i \in V(M)$$

$$\gamma(i^*) = \begin{cases} c^- & \text{si } \varphi(i) = c \text{ y } i \in N^+(\xi^-) \\ c^+ & \text{si } \varphi(i) = c \text{ y } i \in N^+(\xi^+) \\ c & \text{si } \varphi(i) = c^- \text{ o } \varphi(i) = c^+ \end{cases}$$

Nótese que $i^* \in N^+(\xi^-)$ si y sólo si $i \in N^+(\xi^+)$ y $i^* \in N^+(\xi^+)$ si y sólo si $i \in N^+(\xi^-)$.

Sean

$$U_0 = \{ \{ \{0, 1, \dots, m\} \cap N^+(\xi^-) \} \cup \{\xi^-\} \} \text{ y}$$

$$U_1 = \{m+1, m+2, \dots, 2m\} \cap N^+(\xi^+).$$

El vértice $\{\xi^-\}$ es vértice extremo de U_0 y de $M[U_1^* \cup \{\xi^-\}]$, por lo que $U_0 \setminus \{\xi^-\} \subset \{0, 1, \dots, m\}$ y $U_1 \subset \{m+1, m+2, \dots, 2m\}$. Se sigue que U_0, U_1 es una pareja preacíclica en el molde M y por la Proposición 6.14 y la Observación 6.4, la clase cromática de c^- , $U_0 \cup U_1^*$ es acíclica en T/\mathcal{P} . De manera análoga la clase c^+ es acíclica en T/\mathcal{P} .

Sean $U'_0 = \{m+1, m+2, \dots, 2m\}$ y $U'_1 = \{0, 1, \dots, m\}$. Nótese que U'_0, U'_1 es una pareja preacíclica en M y por la Proposición 6.14 y la Observación 6.4, la clase cromática de c , $U'_0 \cup (U'_1)^*$ es acíclica in T/\mathcal{P} . Por la Proposición 6.8 y el Teorema 6.16, se sigue que $dc(T) = 3$. \square

6.2 La familia del molde $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$

En esta parte estudiaremos el número dicromático de la familia de torneos regulares cuyo molde es $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$. Determinaremos el número dicromático

de los torneos regulares amplios cuyo molde es $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$. En [23] se prueba que $dc(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle) = 3$.

En primer lugar daremos una buena 4-coloración de un torneo amplio de la familia $\mathcal{F}(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle)$. Recordamos que $V(D \langle U, \bullet \rangle) = V(D) \cup U^*$ (página 9), donde $D \langle U, \bullet \rangle [U^*]$ es una copia de $D[U]$ disjunta con $V(D)$, donde $\varphi: D[U] \rightarrow D \langle U, \bullet \rangle [U^*]$ definida por el isomorfismo $\varphi(u) = u^*$ para $u \in U$.

Lema 6.20 *Todo torneo $T \in \mathcal{F}(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle)$ cumple que*

$$3 \leq dc(T) \leq 4.$$

Demostración Como $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ es subtorneo de T , se sigue que $dc(T) \geq 3$.

Sean C_1, C_2, C_3, C_4 las clases cromáticas de la coloración φ de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle$:

$$C_1 = \{0, 1^*, 2^*, \dots, m^*\}, C_2 = \{m+1, m+2, \dots, 2m, 0^*\}$$

$$C_3 = \{1, 2, \dots, m\}, C_4 = \{(m+1)^*, (m+2)^*, \dots, (2m)^*\}$$

Como C_1, C_2 son preacíclicas y C_3, C_4 son acíclicas, entonces φ es una 4-coloración acíclica. \square

Para el caso particular cuando el torneo amplio está en la familia $\mathcal{F}(\vec{C}_9 \langle 4 \rangle)$ le podemos dar una 3-coloración acíclica.

Lema 6.21 $dc(\vec{C}_9 \langle 4 \rangle \langle \mathbb{Z}_9, \leftrightarrow \rangle) = 3$

Demostración Sea $\vec{C}_9 \langle 4 \rangle \langle \mathbb{Z}_9, \leftrightarrow \rangle$ y sea C_1, C_2, C_3 una 3-coloración de $\vec{C}_9 \langle 4 \rangle \langle \mathbb{Z}_9, \leftrightarrow \rangle$, con $C_1 = \{0, 2, 6^*, 8^*, 3, 5\}$, $C_2 = \{7^*, 0^*, 4, 6, 1^*, 3^*\}$, $C_3 = \{7, 2^*, 4^*, 8, 1, 5^*\}$. Nótese que $(0, 2, 6^*, 8^*, 3, 5)$, $(7^*, 0^*, 4, 6, 1^*, 3^*)$ y $(7, 2^*, 4^*, 8, 1, 5^*)$ son las sucesiones de fuentes de las clases cromáticas C_1, C_2 y C_3 respectivamente por lo que la coloración $\{C_1, C_2, C_3\}$ es una coloración acíclica de $\vec{C}_9 \langle 4 \rangle \langle \mathbb{Z}_9, \leftrightarrow \rangle$. \square

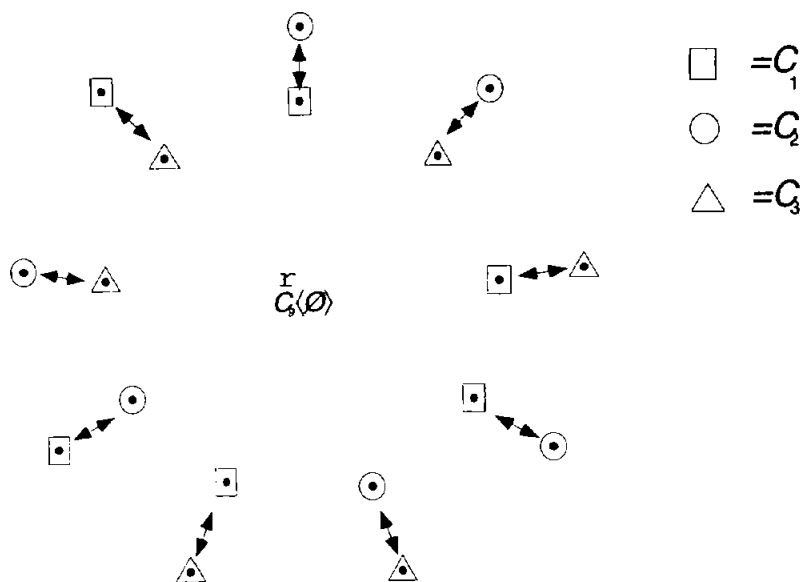


Figura 6.3: Una 3-coloración de $\vec{C}_9 \langle 4 \rangle / \mathcal{P}$.

Corolario 6.22 *Todo torneo $T \in \mathcal{F}(\vec{C}_9 \langle 4 \rangle)$ cumple que*

$$dc(T) = 3.$$

Lema 6.23 *Sea $U \subset V(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle)$ un conjunto acíclico, tal que $|U| \geq 4$ y 0 es fuente de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle [U]$, entonces*

$$|\{1, m+1\} \cap U| \leq 1.$$

Demostración Sea $U \subset \{0, 1, \dots, m-1, m+1\}$. Como $|U| \geq 4$, existe $i \in U$, donde $1 < i \leq m-1$, pero $(1, i, m+1)$ es un ciclo en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y U es acíclico por lo que $|\{1, m+1\} \cap U| \leq 1$. \square

Lema 6.24 *Sea $U \subset V(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle)$ un conjunto acíclico en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y (u_0, u_1, \dots, u_k) su sucesión de fuentes, entonces $u_{i+1} \in [u_i, u_{i+2}]$.*

Demostración Como en el lema anterior, $U \subset \{0, 1, \dots, m-1, m+1\}$. Como $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle [1, i, m+1] \cong \vec{C}_3$, entonces el resultado se sigue del hecho que $U \subset \{0, 1, \dots, m-1\}$ o $U \subset \{0, 2, 3, \dots, m-1, m+1\}$. \square

Lema 6.25 Sea $U \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$ un conjunto acíclico en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y V el conjunto de U -postas, entonces

$$|V| \geq |U| - 1.$$

Demostración Sea $U = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ y $u_j, u_{j+1} \in U$. Se tienen 2 casos:

1. Si el arco $[u_j, u_{j+1}]$ tiene longitud 1, entonces $u_j + m + 1 \in V$.
2. Si el arco $[u_j, u_{j+1}]$ tiene longitud $k > 1$, entonces

$$\{u_j + 1, u_j + 2, \dots, u_j + k - 1 = u_{j+1} - 1\} \subset V.$$

Todo arco $[u_j, u_{j+1}]$ aporta al menos un elemento a V . Ningún elemento de V es aportado por dos arcos distintos. \square

Corolario 6.26 Sea $U \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$ un conjunto acíclico en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y V el conjunto de U -postas. Entonces $|V| = |U| - 1$ si y sólo si todos los arcos $[u_j, u_{j+1}]$, $u_j, u_{j+1} \in U$ tienen longitud a lo más 1.

Sea U un conjunto acíclico de un torneo y P la trayectoria de máxima longitud, entonces definimos $\text{int}(U) = \text{int}(P)$ (véase página 4).

Lema 6.27 Sea $U \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$ un conjunto acíclico y V el conjunto de U -postas;

1. Sea $\{j, j+1, \dots, j+k-1\} \subset \text{int}(U)$ tal que $j-1, j+k \notin U$, entonces hay un arco de longitud k en $V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U \cup V)$.
2. Sea $j \in \text{int}(U)$ un vértice tal que $\{j-1, j+1\} \cap U = \emptyset$, entonces hay por lo menos cuatro consecutivos en $V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U \cup V)$.

Demostración Sea $U \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$ un conjunto acíclico.

1. Sea $\{j, j+1, \dots, j+k-1\} \subset \text{int}(U)$, entonces

$$\{j+m+1, j+m+2, \dots, j+m+k-1\} \subset V$$

y $\{j+m, j+m+k\} \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U \cup V)$ por lo tanto el arco $[(j+m, j+m+k)]$ tiene longitud k en $V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U \cup V)$.

2. Sea $j \in \text{int}(U)$ tal que $\{j-1, j+1\} \cap U = \emptyset$, entonces

$$\{j+m-1, j+m, j+m+1, j+m+2\} \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U \cup V).$$

□

Lema 6.28 Sean $U_0, U_1 \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$ una pareja preacíclica en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ tal que $|U_0| \leq |U_1|$, 0 es fuente de U_0 . Sea V_0 el conjunto de postas de U_0 . Si $\{U_0, V_0, U_1\}$ es una partición de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$, entonces

1. $1 \notin U_0$.
2. $m+1 \in U_0$.
3. $|\{j-1, j, j+1\} \cap U_0| \geq 2$ para todo $j \in U_0$, $2 \leq j \leq m-1$.

Demostración

1. Supongamos que $1 \in U_0$, entonces

$$m+1 \in V_0 \text{ y } \{m, 2m\} \subset V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U_0 \cup V_0).$$

Entonces 1 es una $(2m, m)$ -posta, por lo que la pareja

$$U_0, V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U_0 \cup V_0)$$

no es preacíclica.

2. Supongamos que $\{m+1\} \notin U_0$, entonces

$$\{m, m+1, 2m\} \subset V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0)$$

y $\{m, m+1, 2m\}$ es cíclico en $\vec{C}_{2m+1}(m)$ y $V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0)$ no sería acíclico.

3. Supongamos que $\{j-1, j+1\} \cap U_0 = \emptyset$ para algún vértice $j \in U_0$, donde $2 \leq j \leq m-1$, entonces

$$m+j, m+j+1 \in V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0)$$

y el vértice j sería una $(m+j, m+j+1)$ -posta por lo que la pareja $U_0, V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0)$ no es preacíclica. \square

Lema 6.29 Sea U_0, U_1 una pareja preacíclica en $\vec{C}_{2m+1}(m)$ con $|U_0| \leq |U_1|$, entonces

$$|U_0| + |U_1| \leq 2m + 2 - |U_0|$$

Demostración Sea V_0 el conjunto de U_0 -postas, entonces

$$|U_1| \leq 2m + 1 - |U_0| - |V_0|, \quad |V_0| \geq |U_0| - 1$$

$$|U_1| \leq 2m + 1 - |U_0| - (|U_0| - 1)$$

$$|U_1| \leq 2m + 2 - 2|U_0| \text{ por lo que}$$

$$|U_0| + |U_1| \leq 2m + 2 - |U_0| \quad \square$$

Observación 6.30 Si $\vec{C}_{2m+1}(m)$ contiene una pareja preacíclica U_0, U_1 con $|U_0| \geq |U_1|$ tal que $|U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}$, entonces

$$\frac{2m+1}{3} \leq |U_0| \leq \frac{2m+4}{3}$$

Demostración $|U_0| \leq 2m + 2 - (|U_0| + |U_1|)$, $|U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}$
 $|U_0| \leq 2m + 2 - \frac{4m+2}{3} = \frac{2m+4}{3} \quad \square$

Definición 6.31 Sea U un conjunto acíclico de vértices de un torneo T y $(0, 1, \dots, n)$ la trayectoria de máxima longitud en T . Nótese que es única y $n = |U|$. Decimos que un vértice $j \in U$ es solitario si

$$\{j-1, j+1\} \cap U = \emptyset.$$

Decimos que dos vértices $j, j+1 \in U$ forman un par en U si

$$\{j-1, j+2\} \cap U = \emptyset.$$

Lema 6.32 Si $2m+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ no contiene una pareja preacíclica U_0, U_1 tal que $|U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}$.

Demostración Sea U_0, U_1 una pareja preacíclica en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ tales que

$$|U_0| \geq |U_1| \quad \text{y} \quad |U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}.$$

Por la Observación 6.30, $\frac{2m+1}{3} \leq |U_0| \leq \frac{2m+4}{3}$. Podemos asumir que 0 es la fuente de U_0 por lo que $U_0 \subset \{0, 1, \dots, m-1, m+1\}$.

Caso 1 $2m+1 \equiv 1 \pmod{6}$.

Sea $2m+1 = 6n+1$ con $m = 3n$, entonces $|U_0| = 2n+1$. Sea V_0 el conjunto de U_0 -postas. Como $|U_0| + |U_1| \geq 4n+1$, entonces $|V_0| = 2n$ y $\{U_0, V_0, U_1\}$ es una partición de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y $m+1 \in U_0$ por el Lema 6.28.

Sea $W = \{1, 2, \dots, m-1\}$, $U_0 \setminus \{0, m+1\} \subset W$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m+1\}|}{|W|} = \frac{(2m-3)/3}{m-1} < \frac{2}{3}.$$

Esto implica que U_0 tiene un vértice solitario lo que contradice el inciso 3 del Lema 6.28; por lo tanto $|U_1| < 2n$ y $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ no contiene una pareja preacíclica U_0, U_1 tal que $|U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}$.

Caso 2 $2m+1 \equiv -1 \pmod{6}$.

Sea $2m+1 = 6n-1$ con $m = 3n-1$, entonces $|U_0| = 2n$. Sea V_0 el conjunto de U_0 -postas. Como $|U_0| + |U_1| \geq 4n$, entonces $|V_0| = 2n-1$

y $\{U_0, V_0, U_1\}$ es una partición de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y $m+1 \in U_0$ por el Lema 6.28.

Sea $W = \{1, 2, \dots, m-1\}$, $U_0 \setminus \{0, m+1\} \subset W$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m+1\}|}{|W|} = \frac{(2m-4)/3}{m-1} < \frac{2}{3}$$

Esto implica que U_0 tiene un vértice solitario lo que contradice el inciso 3 del Lema 6.28, por lo tanto $|U_1| < 2n$ y $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ no contiene una pareja preacíclica U_0, U_1 tal que $|U_0| + |U_1| \geq \frac{4m+2}{3}$. \square

Corolario 6.33 $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle$, donde $2m+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, no tiene conjuntos acíclicos de orden $\frac{4m+2}{3}$.

Corolario 6.34 $dc(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle) = 4$ si $2m+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Demostración Por el Lema 6.20, $dc(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle) \leq 4$ con lo que se llega al resultado. \square

Lema 6.35 Si $2m+1 \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ tiene dos tipos de conjuntos preacíclicos de orden $\frac{4m+2}{3}$:

1. $|U_0| = \frac{2m+1}{3} + 1$, $V(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle) \setminus (U_0 \cup V_0) = U_1$ y
 $U_0 = \{0, 2, 3, 5, 6, \dots, m-2, m-1, m+1\}$,
 $U_1 = \{m+2, m+4, m+5, m+7, m+8, \dots, 2m-3, 2m-2, 2m\}$.
2. $|U_0| = \frac{2m+1}{3}$, $V(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle) \setminus (U_0 \cup V_0 \cup U_1) = \{m\}$ y
 $U_0 = \{0, 2, 3, 5, 6, \dots, m-2, m-1\}$,
 $U_1 = \{m+1, m+2, m+4, m+5, \dots, 2m-3, 2m-2, 2m\}$.

Demostración Sea $2m+1 = 6n+3$ con $m = 3n+1$. Sea U_0, U_1 una pareja preacíclica en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ tales que

(i) $|U_0| \geq |U_1|$

(ii) $|U_0| + |U_1| \geq \lceil \frac{12n+6}{3} \rceil = 4n + 2$

Por la Observación 6.30, tenemos que $2n + 1 \leq |U_0| \leq 2n + 2$. Podemos asumir que 0 es la fuente de U_0 , $U_0 \subset \{0, 1, \dots, m - 1, m + 1\}$. Sea V_0 el conjunto de U_0 -postas.

1. Sea $|U_0| = 2n + 2$, como $|U_0| + |U_1| \geq 4n + 2$, entonces $|V_0| = 2n + 1$, y $\{U_0, V_0, U_1\}$ es una partición de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y $m + 1 \in U_0$ por el Lema 6.28. Como $|V_0| = |U_0| - 1$, entonces los arcos en U_0 son de longitud a lo más 2. Sea $W = \{1, 2, \dots, m - 1\}$, $U_0 \setminus \{0, m + 1\} \subset W$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m + 1\}|}{|W|} = \frac{2}{3}.$$

Por cada terna de vértices consecutivos en W hay en promedio dos en U_0 . Por el Lema 6.28, no hay solitarios en U_0 por lo que sólo hay pares en el interior de U_0 . Como $1 \notin U_0$, entonces

$$\begin{aligned} U_0 &= \{0, 2, 3, 5, 6, \dots, m - 2, m - 1, m + 1\} \\ U_1 &= \mathbb{Z}_{2m+1} \setminus (U_0 \cup V_0) \\ &= \{m + 2, m + 4, m + 5, \dots, 2m - 3, 2m - 2, 2m\} \end{aligned}$$

2. Sea $|U_0| = 2n + 1$, como $|U_0| + |U_1| \geq 4n + 2$, entonces $2n \leq |V_0| \leq 2n + 1$ y $|U_1| = 2n + 1$.

Supongamos que $|V_0| = 2n + 1$, entonces $\{U_0, V_0, U_1\}$ es una partición de los vértices de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ y $m + 1 \in U_0$ por el Lema 6.28. Como $|V_0| = |U_0|$, entonces tenemos exactamente un arco en U_0 de longitud 3 y los demás son de longitud a lo más 2. Sea $W = \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Nótese que $U_0 \setminus \{0, m + 1\} \subset W$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m + 1\}|}{|W| - 1} = \frac{1}{3} \frac{2m - 5}{m - 2} < \frac{2}{3}.$$

Esto implica que U_0 tiene un vértice solitario lo que contradice el Lema 6.28.

Por lo tanto $|V_0| = |V_1| = 2n$ y $U_1 \neq V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U_0 \cup V_0)$. En U_i los arcos son de longitud a lo más 2.

Supongamos $m + 1 \in U_0$. Sea $W = \{1, 2, \dots, m - 1\}$, Nótese que $U_0 \setminus \{0, m + 1\} \subset W$. Como

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m + 1\}|}{|W|} = \frac{1}{3} \frac{2m - 5}{m - 1} < \frac{2}{3} \text{ y}$$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0, m + 1\}| - 1}{|W| - 2} = \frac{1}{3} \frac{2m - 8}{m - 3} < \frac{2}{3},$$

entonces U_0 tiene al menos dos vértices solitarios y hay dos arcos de longitud tres en $V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0)$, por lo que U_1 tendría al menos un arco de longitud tres lo que contradice el Corolario 6.26.

Por lo tanto $m + 1 \notin U_0$ y $\{m, 2m\} \subset \mathbb{Z}_{2m+1} \setminus (U_0 \cup V_0)$. Como $\{m, m + i, 2m\}$ es cíclico en $\vec{C}_{2m+1}(m)$, entonces $|\{m, 2m\} \cap U_1| = 1$, y así tenemos dos casos.

- (a) Supongamos que $m \notin U_1$, entonces $U_1 = \mathbb{Z}_{2m+1} \setminus (U_0 \cup V_0 \cup \{m\})$. Como m no es U_i -posta $i = 0, 1$, entonces $V_0 = V_1$. Ahora un vértice solitario o una terna de vértices consecutivos en U_0 implica un arco de longitud tres en U_1 , lo que contradice el Corolario 6.26. Por lo tanto $U_0 \setminus \{0\} \subset W$

$$\frac{|U_0 \setminus \{0\}|}{|W|} = \frac{1}{3} \frac{2m - 2}{m - 1} = \frac{2}{3}.$$

Por cada terna de vértices consecutivos en W hay en promedio dos en U_0 , como no hay solitarios ni ternas de vértices consecutivos en U_0 , entonces sólo hay pares en el interior de U_0 . Si $1 \in U_0$, entonces $m + 1 \in V_0 = V_1$, pero $U_1 \subset \{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$ por lo que $m + 1 \notin V_1$. Por lo tanto $1 \notin U_0$ y

$$U_0 = \{0, 2, 3, 5, 6, \dots, m - 2, m - 1\} \text{ y}$$

$$U_1 = V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_0 \cup V_0 \cup \{m\})$$

$$= \{m + 1, m + 2, m + 4, m + 5, \dots, 2m - 3, 2m - 2, 2m\}$$

- (b) Supongamos que $2m \notin U_1$, entonces $U_1 \subset \{m, m + 1, \dots, 2m - 1\}$, además $2m$ no es una U_0 -posta por lo que

$$U_0 = V(\vec{C}_{2m+1}(m)) \setminus (U_1 \cup V_1 \cup \{m\}).$$

Si hacemos el mismo análisis para U_1 que se hizo para U_0 , se obtiene que los conjuntos U'_0, U'_1 forman una pareja preacíclica:

Sean

$$\begin{aligned} U'_0 &= \{0, 1, 3, 4, \dots, m-4, m-3, m-1\} \text{ y} \\ U'_1 &= V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \setminus (U_0 \cup V_0 \cup \{2m\}) \\ &= \{m, m+2, m+3, m+5, m+6, \dots, 2m-2, 2m-1\}. \end{aligned}$$

Claramente $U'_0 = U_1 + \{m\}$ y $U'_1 = U_0 + \{m\}$. \square

Corolario 6.36 Si $2m+1 \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle$ tiene conjuntos acíclicos de orden $\frac{4m+2}{3}$.

Lema 6.37 No existe un 3-cubrimiento acíclico de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle$ si $2m+1 \equiv 0 \pmod{3}$ y $m \geq 7$.

Demostración Sea $2m+1 \equiv 0 \pmod{3}$ y $m \geq 7$, entonces los conjuntos acíclicos de máxima cardinalidad de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle$ tienen cardinalidad $\frac{4m+2}{3}$. En un 3-cubrimiento con conjuntos acíclicos, se necesita que los tres conjuntos acíclicos tengan cardinalidad máximo y no se puede repetir ningún vértice. Sea $m = 3k+1$ con $k \geq 2$. Supongamos $\{0, 2, 3, 5, 6\} \subset C_1$ y $4 \in C_2$, entonces $\{2, 6\} \cap C_2 \neq \emptyset$. Por lo que si $m \geq 7$ ($2m+1 \geq 15$) no existe un 3-cubrimiento con conjuntos acíclicos. \square

Corolario 6.38 Para $m = 2, 3$ y $m \geq 5$ se tiene que

$$3 = dc \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) < dc \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle \right) = 4.$$

Demostación Por el Corolario 6.34, tenemos que si $2m+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces $dc \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \langle \mathbb{Z}_{2m+1}, \leftrightarrow \rangle \right) = 4$

Por Corolario 6.21, tenemos que $dc \left(\vec{C}_9 \langle 4 \rangle \langle \mathbb{Z}_9, \leftrightarrow \rangle \right) = 3$. \square

Corolario 6.39 Sea T un torneo regular T cuyo molde es $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$, con $m \geq 3$. Entonces $3 \leq dc(T) \leq 4$.

Observación 6.40 $dc(\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \langle \mathbb{Z}_{10}, \leftrightarrow \rangle) = 3$.

Demostración Sea $\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \langle \mathbb{Z}_{10}, \leftrightarrow \rangle$ y C_1, C_2, C_3 una 3-coloración de $\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \langle \mathbb{Z}_{10}, \leftrightarrow \rangle$, con $C_1 = \{7, 1^*, 3^*, 8, 10, 4^*, 0\}$, $C_2 = \{9, 5^*, 1, 6^*, 8^*, 2, 4\}$ y $C_3 = \{7^*, 9^*, 3, 5, 10^*, 6, 2^*\}$. Nótese que

$$(7, 1^*, 3^*, 8, 10, 4^*, 0), (9, 5^*, 1, 6^*, 8^*, 2, 4), (7^*, 9^*, 3, 5, 10^*, 6, 2^*)$$

son las sucesiones de fuentes de las clases cromáticas C_1, C_2 y C_3 respectivamente, por lo que la coloración $\{C_1, C_2, C_3\}$ es una coloración acíclica de $\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \langle \mathbb{Z}_{10}, \leftrightarrow \rangle$. \square

Corolario 6.41 Sea $M^T \cong \vec{C}_{11} \langle 5 \rangle$ si T no es amplio, entonces $dc(T) = 3$.

Observación 6.42 $dc(\vec{C}_{15} \langle 7 \rangle \langle \mathbb{Z}_{14}, \leftrightarrow \rangle) = 3$.

Demostración Sea $\vec{C}_{15} \langle 7 \rangle \langle \mathbb{Z}_{14}, \leftrightarrow \rangle$ y C_1, C_2, C_3 una 3-coloración de $\vec{C}_{15} \langle 7 \rangle \langle \mathbb{Z}_{14}, \leftrightarrow \rangle$, con $C_1 = \{8, 10, 11, 13, 14, 1, 2^*, 4^*, 5^*, 7^*\}$, $C_2 = \{12, 14, 0, 2, 3, 5, 6^*, 8^*, 9^*, 11^*\}$ y $C_3 = \{10^*, 12^*, 13^*, 0^*, 1^*, 3^*, 4, 6, 7, 9\}$. Nótese que

$$(8, 10, 11, 13, 14, 1, 2^*, 4^*, 5^*, 7^*), (12, 14, 0, 2, 3, 5, 6^*, 8^*, 9^*, 11^*), \\ (10^*, 12^*, 13^*, 0^*, 1^*, 3^*, 4, 6, 7, 9)$$

son las sucesiones de fuentes de las clases cromáticas C_1, C_2 y C_3 respectivamente por lo que la coloración $\{C_1, C_2, C_3\}$ es una coloración acíclica de $\vec{C}_{15} \langle 7 \rangle \langle \mathbb{Z}_{14}, \leftrightarrow \rangle$. \square

Corolario 6.43 Sea $M^T \cong \vec{C}_{15} \langle 7 \rangle$ si T no es amplio, entonces $dc(T) = 3$.

Observación 6.44 $dc(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_6, \leftrightarrow \rangle) = 4$.

Demostración $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle [N^\varepsilon(v) \setminus v^*]$, $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle [N^\varepsilon(v^*) \setminus v]$ son isomorfos a ST_6 por lo que $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle$ es libre de TT_5 , como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_6, \leftrightarrow \rangle \subset \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle$ y $|\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_6, \leftrightarrow \rangle| = 13$, entonces

$$dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_6, \leftrightarrow \rangle\right) \geq \left\lceil \frac{13}{4} \right\rceil = 4.$$

Sabemos que $dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle\right) = 4$ por lo que $dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_6, \leftrightarrow \rangle\right) = 4$.
□

Observación 6.45 $dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_5, \leftrightarrow \rangle\right) = 3$.

Demostración Como $\vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ es transitivo en flechas podemos asumir que

$$\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_5, \leftrightarrow \rangle = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle \setminus \{0^*, 1^*\}.$$

Sea $T = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle \setminus \{0^*, 1^*\}$, $C_1 = \{3, 0, 6^*, 4\}$, $C_2 = \{2^*, 1, 5, 4^*\}$, $C_3 = \{3^*, 2, 6, 5^*\}$ una 3-coloración de T . Nótese que

$$(3, 0, 6^*, 4), (2^*, 1, 5, 4^*), (3^*, 2, 6, 5^*)$$

son las sucesiones de fuentes de las clases cromáticas C_1, C_2 y C_3 respectivamente por lo que la coloración $\{C_1, C_2, C_3\}$ es una coloración acíclica de T , por lo que

$$dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_7, \leftrightarrow \rangle \setminus \{0^*, 1^*\}\right) = 3 \text{ y } dc\left(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle \langle \mathbb{Z}_5, \leftrightarrow \rangle\right) = 3.$$

□

6.3 La familia del molde $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle$

Lema 6.46 Si $m \geq 2$, entonces $dc\left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \langle \mathbb{Z}_{6m+1}, \leftrightarrow \rangle\right) \leq 5$.

Demostración La siguiente coloración es una 5-coloración acíclico de $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \langle \mathbb{Z}_{6m+1}, \leftrightarrow \rangle$:

Sea m par.

$$U_0 = \{0, 2, 4, \dots, 2m-2, 2m+1, 2m+3, \dots, 3m-1\},$$

$$U'_0 = \{3m+1, 3m+3, \dots, 4m-1, 4m+2, 4m+4, \dots, 6m\};$$

$$U_1 = U_0^*, U'_1 = (U'_0)^*; U_2 = U_1 + 2m, U'_2 = U'_1 + 2m;$$

$$U_3 = \{0, 2, 4, \dots, 2m-2\} + 2m,$$

$$U'_3 = \{2m, 3m+1, 3m+3, \dots, 4m-1, 4m+2\};$$

$$U_4 = \{2m, 2m+1, 2m+3, \dots, 3m-1\}, U'_4 = \{4m+4, 4m+6, \dots, 6m\};$$

Sea m impar.

$$U_0 = \{0, 2, 4, \dots, 2m-2, 2m+1, 2m+3, \dots, 3m\},$$

$$U'_0 = \{3m+2, 3m+4, \dots, 4m-1, 4m+2, 4m+4, \dots, 6m\};$$

$$U_1 = U_0^*, U'_1 = (U'_0)^*; U_2 = U_1 + 2m, U'_2 = U'_1 + 2m;$$

$$U_3 = \{0, 2, 4, \dots, 2m-2\} + 2m,$$

$$U'_3 = \{2m, 3m+2, 3m+4, \dots, 4m-1, 4m+2\};$$

$$U_4 = \{2m, 2m+1, 2m+3, \dots, 3m\},$$

$$U'_4 = \{4m+4, 4m+6, \dots, 6m\};$$

Tanto en el caso cuando m es par como cuando m es impar los conjuntos U_i, U'_i forman parejas preacíclicas, por lo que $U_0 \cup (U'_0)^*$, $U_1 \cup (U'_1)^*$, $U_2 \cup (U'_2)^*$, $U_3 \cup (U'_3)^*$, $U_4 \cup (U'_4)^*$ son clases cromáticas de una 5-coloración acíclica. \square

Definiciones y Notaciones

- $\vec{C}_{2m+1} \langle K \rangle$, página 7
 $dc(D)$, Definición 6.6, página 117
 \mathfrak{F}_0 , página 46
 \mathfrak{F}_- , página 46
 \mathfrak{F}_+ , página 46
 $int(P)$, página 4
 $int(U)$, página 124
 M^T , Definición 3.2, página 33
 $M(T, U)$, página 38
 $N^{\epsilon\epsilon}(u, v)$, página 3
 $T[U - V]$, Definición 2.21, página 30
 $T(U, *)$, $*$ $\in \{\bullet, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, página 9
 T/\mathcal{P} , Definición 6.1, página 115
 (T, U) , Definición 3.6, página 38
 $(T, U)^\#$, Definición 3.13, página 42
 (U, \mathfrak{F}) , página 44
 (\bar{U}, π) , página 44
 $\sigma(\{\alpha\}, D)$, página 12
 $\tilde{\sigma}(\{\alpha_u\}, M^T)$, página 34
 $\tau_i(2m + 1)$, Definición 4.8, página 72
 $\omega(2m + 1)$, Definición 4.8, página 72
 $\Omega(2m + 1)$, Definición 4.8, página 72
 $\mathfrak{D}^{\rightarrow}(T)$, Definición 2.2, página 18
 $\mathcal{F}(M)$, página 72
 $\mathbb{T}R_n$, página 7
 $\mathbb{T}R_n^{\circ}$, página 7
 $\mathbb{T}R_n(\pi, M)$, página 72
 \equiv , Definición 1.1, página 7

|, **Definición 1.1**, página 7
acuerdo, **Definición 3.20**, página 45
adecuada, **Definición 3.18**, página 44
admisible, **Definición 3.16**, página 44
C-flecha, página 95
concordante, **Definición 1.1**, página 7
D-flecha, página 19
D-origen, **Definición 3.6**, página 38
D-tipo, **Definición 71**, página 71
discordante, **Definición 1.1**, página 7
flecha C-residual, **Definición 1**, página 95
fuente, página 51
molde, **Definición 3.1**, página 33
número dicromático, **Definición 6.6**, página 117
par, **Definición 6.31**, página 127
preacíclico, **Definición 6.13**, página 119
preacuerdo, **Definición 3.20**, página 45
posta, **Definición 6.12**, página 119
solitario, **Definición 6.31**, página 127
subtorneo fiel, **Definición 5.17**, página 105
supratorneo, página 5
torneo amplio, **Definición 6.3**, página 116
torneo cíclico, página 98
torneo manso, página 98
torneo salvaje, página 99
u-posta, **Definición 6.12**, página 119
universal, página 51

Índice de Figuras

1.1	(a) la digráfica D y (b) $D\langle S, F; \bullet \rangle$	9
1.2	La pareja u, v es (a) discordante con respecto a \bar{U}^* y (b) concordante con respecto a \bar{U}^*	11
1.3	La pareja u, v^* es (a) discordante con respecto a T y (b) discordante con respecto a \bar{U}^*	12
1.4	(a) La digráfica D y (b) la suma de Zykov de $\{\alpha_u\}$ sobre la digráfica D	13
1.5	El torneo W_0	14
1.6	Dos representaciones del torneo ST_7	15
2.1	(a) \vec{C}_3 y (b) su digráfica de discordancia.	19
2.2	(a) $\vec{C}_5\langle \emptyset \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.	19
2.3	(a) $\vec{C}_7\langle \emptyset \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.	20
2.4	(a) $\vec{C}_7\langle 3 \rangle$ y (b) su digráfica de discordancia.	20
2.5	(a) W_0 y (b) su digráfica de discordancia.	21
2.6	Las adyacencias internas (a) y externas (b) en el torneo T , de la trayectoria de discordancia (u_0, u_1, \dots, u_4)	23
2.7	El residuo de la \mathcal{D} -flecha uv	26
2.8	(a) $u_{2k+1} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, \dots, u_{2k}\}}$ y (b) $u_0 \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, \dots, u_{2k}\}}$	27
2.9	(a) $u_{2k} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\}}$ y (b) $u_{2k} \mid z \pmod{T \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\}}$	28
3.1	(a) La operación $o(i)$ y (b) la operación $o(i)$	35
3.2	(a) El torneo O y (b) la construcción $O\langle S_1^-, \rightarrow \rangle$	39
3.3	La discordancia de $T\langle \bar{U}, \rightarrow \rangle$	40
3.4	Las adyacencias entre \mathfrak{F} y π en $\varphi(T)$ bajo el acuerdo φ	45
3.5	inciso (a) e inciso (b)	47

3.6	inciso (a) e inciso (b)	48
3.7	inciso (a), inciso (b) e inciso (c)	49
3.8	(a) z, w son discordantes, (b) z, w son concordantes	50
3.9	(a) \bar{U} tiene un pozo z , (b) \bar{U} tiene una fuente z	53
3.10	Las flechas entre U y \bar{U} , cuando $ U = 3$	56
4.1	El molde $M_{(9,9)}^3$	76
4.2	El molde $M_{(9,9)}^4$	76
4.3	El molde $M_{(9,9)}^5$	77
5.1	La estructura de un torneo no cíclico con dos \mathcal{C} -flechas.	97
5.2	(a) La discordancia del residuo de la \mathcal{C} -flecha, (b) el ciclo auxiliar asociado	100
5.3	El molde manso con 3 \mathcal{D} -flechas y con $\xi^- \xi^+$ como \mathcal{C} -flecha.	108
6.1	$M \langle S'_0, S'_1; \leftrightarrow \rangle$	116
6.2	Una 3-coloración de W_0/\mathcal{P}	120
6.3	Una 3-coloración de $\vec{C}_9 \langle 4 \rangle / \mathcal{P}$	123

Bibliografía

- [1] A. Astié-Vidal, V. Dugat, *Autonomous parts and decomposition of regular tournaments*, Discrete Math. **111** (1993) 27-36.
- [2] A. Astié-Vidal, V. Dugat, Z. Tuza, *Construction of non-isomorphic regular tournaments*, Combinatorics '90
- [3] L.W. Beineke, K.B. Reid, *Tournaments*, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, New York, 1979, pp. 169-204.
- [4] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications* (American Elsevier Pub. Co., 1976).
- [5] S. Bowser, C. Cable, R. Lundgren, *Niche graphs and mixed pair graphs of tournaments*, J Graph Theory **31** (1999) 319-332.
- [6] H. Cho, F. Doherty, S-R. Kim, J. Lundgren, *Domination graphs of regular tournaments II*, Congr Numer **130** (1998) 95-111.
- [7] H. Cho, S-R. Kim, J. Lundgren, *Domination graphs of regular tournaments*, Discrete Math **252** (2002) 57-71.
- [8] J.E. Cohen, *Food webs and dimensionality of tropical niche space*, Proceedings of the National Academy of Science, **74** (1977) 4533-4536.
- [9] J.E. Cohen, Z. J. Palka, *A stochastic theory of community food webs tropical niche space*, American Naturalist, **135** (1990) 435-463.
- [10] R.D. Dutton, R.C. Brigham, *A Characterization of competition graphs*, Discrete Appl Math **6**(1983) 315-317.

- [11] D.C. Fisher, D. Guichard, J.R. Lundgren, S.K. Merz, K.B. Reid, *Domination graphs with nontrivial components*, *Graphs Combin.* **17** (2001), no. 2, 227-236.
- [12] D.C. Fisher; J.R. Lundgren, *Connected domination graphs of tournaments*, *J Combin Math Combin Comput* **31** (1999) 169-176.
- [13] D.C. Fisher, J.R. Lundgren, *Domination graphs of tournaments with isolated vertex*, *Ars Combin* **66** (2003), 299-311.
- [14] D.C. Fisher, J.R. Lundgren, S.K. Merz, K.B. Reid, *Domination graphs of tournaments and digraphs*, *Congr Numer* **108** (1995) 97-107.
- [15] D.C. Fisher, J.R. Lundgren, S.K. Merz, K.B. Reid, *The domination and competition graphs of a tournament*, *J Graph Theory* **29** (1998) 103-110.
- [16] H. Jacob and H. Meyniel, *Extension of Turan's and Brooks theorem and new notions of estabiltiy and colorings in digraphs*, *Ann. Discrete Math.* **17** (1983) 365-370.
- [17] G. Jimenez; J.R. Lundgren, *Tournaments with yield connected domination graphs*, *Congr Numer* **131** (1998) 123-133.
- [18] A. Kotzig, *Cycles in complete graph oriented in equilibrium*, *Mat. casopis Sloven.* **16** (1966), 175-182.
- [19] A. Kotzig, *Des cycles dans les tournois*, in "Théorie des graphes", journées internationales d'étude, Rome 1966, Dunod & Gordon and Breach, New York (1966) 203-208.
- [20] J.R. Lundgren, *Food Webs, competition graphs, competition-common enemy graphs, and niche graphs*, in *Applications of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences*, F.S. Roberts, Ed. Springer-Verlag (1989). In *IMH Volumes in Mathematics and Its Applications*, **17**.
- [21] J.W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1968.
- [22] V. Neumann-Lara, *The dichromatic number of a digraph*, *J. Combin. Theory Ser. B* **33** (1982) 265-270.

- [23] V. Neumann-Lara, *The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order*, Discrete Math. **135** (1984) 233-243.
- [24] V. Neumann-Lara and J. Urrutia, *Vertex critical r -dichromatic tournaments*, Discrete Math. **40** (1984) 83-87.
- [25] E.T. Parker, K.B Reid, *Disproof of a conjecture of Erdős and Moser on tournaments*, J. Combin. Theory **9** (1970) 225-238.
- [26] R. C. Read and R. J. Wilson, *An Atlas of Graphs*, Oxford Science Publications