UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIOS VARIACIONALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

LAURA MATRAJT ARBETMAN

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MONICA ALICIA CLAPP JIMENEZ-LABORA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2005

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Principios variacionales y ecuaciones diferenciales parciales.

realizado por Laura Matrajt Arbetman

con número de cuenta 09950127-7, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez-Labora
Propietario	Dr. Salvador Pérez Esteva
Propietario	Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza
Suplente	Dr. Sergio Hernández Linares Sergio Hernández Linares
Suplente	Dr. Ricardo Gómez Aíza

Consejo Departamental de
Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Principios variacionales y ecuaciones diferenciales parciales

Laura Matrajt Arbetman

Febrero del 2005

A mi mamá y a mi papá
por enseñarme a querer y a luchar por lo que creo.

"Quisiera estar en Buenos Aires para decirte que nos tomáramos un vino juntos y entonces, vagando por alguna calle de noche, decirte a mi manera todo lo que aquí se enfría y se ordena en rayitas horizontales y se convierte en idioma. La gratitud es incómoda, decía no se quién; no es que sea incómoda en sí, es que resulta casi imposible, entre hombres, hacerla sentir si no es con uno de esos gestos casi imperceptibles, ofreciendo un cigarrillo o rozando apenas un hombro, o quedándose callado en el momento en el que los manuales de buena educación ordenan decir las frases justas. Pero por suerte vos y yo nos hemos visto lo bastante en esta vida como para saber que mucho de lo que no nos decimos queda dicho para siempre. Me basta con que estés seguro de eso..."

Carta de Julio Cortázar a Paco Porrúa.

Agradecimientos...

A la Dra. Mónica Clapp, antetodo por haberme abierto las puertas de su cubículo sin conocerme, por haberme enseñado mucho acerca de las Matemáticas y de la vida, por compartir conmigo su pasión por lo que hace y apoyarme en todo momento, por ser además de directora de tesis mi amiga, gracias Mónica!

A mis sinodales les agradezco no sólo el tiempo y el esfuerzo que le dedicaron a esta tesis, sino estar siempre en la mejor actitud para favorecerme. A la Dra.Luz De Teresa, le agradezco la prontitud con la que leyó mi tesis y sus atinadas correcciones. Al Dr.Salvador Pérez Esteva le agradezco sus útiles comentarios y su cariño. Al Dr. Ricardo Gómez le agradezco su interés y sus discusiones. Al Dr. Hernández le agradezco el haber leido este trabajo a profundidad y haberme hecho tantísimas correcciones.

Al Dr. Marcos López, el cuidado con el que leyó este trabajo y todas las correcciones que me hizo.

A la Dra. Carmen Reyes, por descubrirme otras formas de ver y pensar las Matemáticas, por permitirme desarrollarme y trabajar con absoluta libertad en Centro Geo, por su cariño y su apoyo siempre y en todo lo que puede, por su amistad, gracias Carmen!

A la Dra. Karen K. Uhlenbeck, por compartir conmigo un cachito de su visión de las Matemáticas, por haberme apoyado en absolutamente todo lo que estuvo a su alcance durante mi estadía en Austin, y sobre todo por haberme hecho recuperar la confianza en mí misma.

Al Dr. William Beckner, por su confianza ciega en mí, por haberme apoyado como lo hizo y compartido conmigo su gusto por el análisis.

A todos aquellos que me han enseñado algo de Matemáticas (que son una cantidad casi no numerable) por su paciencia. A G. Bayon por incitarme a seguir este camino, a J. Thierry por haberme enseñado que los ejercicios de Matemáticas pueden ser bonitos. A mis maestros de la Facultad de Ciencias y en especial a Héctor Méndez, Luis Briseño, León Kushner. A Luis Montejano además por sus consejos siempre sabios,por su amistad y su cariño. Al Roll por lo mucho que aprendí en este año y medio de ser su ayudante, por ser mi coach el último tiempo, por ser mi amigo. A todos ellos les agradezco profundamente el haberme transmitido su pasión por las Matemáticas.

A la UNAM, y en especial a la facultad de Ciencias, y al IMATE, en donde fui recibida con más hospitalidad de la que siquiera podía recibir.

A mi familia, por su incondicional apoyo siempre y en todo lo que hago. A mis papás, por su amor, por favorecerme siempre y en todo, sus buenos consejos y por transmitirme su manera de ver la vida. A Graciela y a Pablo, por quererme sin pedir nada a cambio, por estar siempre ahí conmigo, por la enorme alegría que me da quererlos. A Alicia, por todo su amor aunque esté lejos. A Hervé, por ser mi hermano mayor desde hace 12 años, por su cariño. A mi familia en Argentina, porque siento su cariño a pesar de los 13000 km que nos separan...

A mis amigas del alma: Barbara y María L. por estar ahí, por no dejarme caer en los momentos difíciles. A Barbarita, por ser mi hermana durante los últimos 13 años de mi vida con todo lo que eso significa. A María, por ser mi confidente de tiempo completo, por la complicidad que nos une, por todo lo que hemos vivido juntas durante tanto tiempo. A sus respectivas familias, por el cariño que me han dado desde siempre.

A Amanda por compartir conmigo su forma de ver la vida, por su apoyo, por todos los cafecitos en el IMATE. A María C., por ser una excelente amiga, por su compromiso con lo que cree, por lo mucho que nos queremos.

A Sofía, por todas aquellas pláticas nocturnas, pero sobre todo por enseñarme a quererla. A Nadia y a Alejandra S. por la amistad recuperada.

A mis amigos de la facultad, ustedes saben quienes son, por todo lo que vivimos juntos. En especial a la banda, por el cariño, las risas, los viajes, los dominós, las fiestas, los cuernavacazos, por todo lo que nos hemos divertido y aprendido juntos. A Alejandro, por la consolidada amistad, por sus consejos.

A Emi, por su tierno cariño, por tener siempre la respuesta que me va a hacer reir. A Rodrigo, por ser el ayatolah de la banda, por compartir su filosofía conmigo. A Mauricio por lo que vivimos juntos.

A mis amigos que están lejos, pero no por eso se les quiere menos: a Carolina, porque a pesar del Atlántico y del tiempo el cariño sigue intacto. A Helga, David y Sandra, por lo que vivimos juntos, porque la distancia no es impedimento para que estén conmigo.

A mis huelguiamigos por la historia que nos une. A Ale, por las risas, las pláticas y angustias compartidas, por su cariño. A Kim por su energía, por ser un apasionado que lucha siempre por lo que cree. A Victor por la sólida amistad, por sus consejos, las charlas, los cafés, por su franqueza.

A mis compañeros del Imate, por tener siempre la mejor disposición para ayudarme. En particular, a Lalo, quién me enseñó a usar Latex. Muy especialmente a Checo y a Eric, por ayudarme a entender y explicarme como lo hicieron.

A mis nuevos amigos, ustedes podrán reconocerse...

A Centro Geo y todos los que ahí laboran, por tener siempre una sonrisa para mí y la mejor actitud para ayudarme.

A Sara S. por su invaluable ayuda.

A Edgar, por ser mi compañero en la última parte de este recorrido, por ser mi apoyo emocional y sentimental, por tu infinita paciencia.

A todos los que estuvieron conmigo durante los últimos meses, simplemente por eso, por estar ahí, porque sin su apoyo nada de lo que está escrito aquí hubiera podido ser.

Índice general

Introducción

Diversos fenómenos en la naturaleza se pueden modelar con la ayuda de herramientas matemáticas, como por ejemplo, de las ecuaciones diferenciales parciales. Dado un cierto problema que depende de una o más variables, se trata de encontrar una función que "modele" la solución. Aquí estudiaremos la ecuación de Poisson con condición de Dirichlet a la frontera: Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto, acotado, con $\partial\Omega$ lisa, $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Buscamos una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & f & \text{en } \Omega \\ u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Esta ecuación sirve para modelar problemas de reacción-difusión, potenciales eléctricos, cuestiones de aeronáutica, o cuestiones biológicas tales como la formación de patrones entre otros. Aún cuando para ciertos casos se puede encontrar una solución explícita al problema de Poisson, en la mayoría de los casos se recurre al uso de métodos numéricos para aproximar la solución. Para esto se requiere, antes que nada, demostrar que este problema tiene solución y que dicha solución es única.

Esto motivó el desarrollo de nuevos métodos y teorías matemáticas, en particular, los métodos variacionales. Los principios variacionales consisten en expresar a las soluciones de una ecuación diferencial con condición a la frontera como mínimos (o más general, como puntos críticos) de un funcional en un espacio de Hilbert.

En el presente trabajo se plantea una revisión de las herramientas que se desarrollaron para resolver ciertos problemas que tienen una formulación variacional. En el capítulo 1 se estudia el problema de Poisson y su formulación débil, en el capítulo 2 se repasan algunas propiedades interesantes de los espacios de Hilbert. En el siguiente capítulo se introduce la noción de derivada débil y se enuncian algunas propiedades interesantes. En el capítulo 4 se definen los espacios de Sobolev y se dan algunos teoremas al respecto. Más adelante, se revisan algunos teoremas de extensión y se definen a los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$ para llegar en el capítulo 6 a los teoremas de encaje de Sobolev y finalmente en el último capítulo se aborda la obtención de la solución clásica a partir de la solución débil.

The good Christian should beware of mathematicians,
and all those who make empty prophecies.
The danger already exists that the mathematicians
have made a covenant with the devil to darken the spirit
and to confine man in the bonds of Hell.
St Augustine.

Capítulo 1

Problema de Poisson

1.1. Notación

A lo largo del presente trabajo denotaremos para $k = 0, 1, \cdots, \infty$ como:

$C^k(\Omega)$ al espacio de funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que son $k-$ veces continuamente diferenciables en Ω.

$C^k(\overline{\Omega})$ al espacio de funciones continuas $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que son $k-$veces diferenciables en Ω y que para cada derivada parcial de orden menor o igual a k existe una extensión continua a $\overline{\Omega}$.

$supp\, f = \overline{\{x \in \Omega \big| f(x) \neq 0\}}$.

$C_0^k(\Omega) = \{\varphi \in C^k(\Omega) \big| supp\, \varphi$ es compacto y $supp\, \varphi \subset \Omega\}$.

Definición 1.1.1 *Decimos que Ω es de clase C^1 si $\forall x \in \Gamma = \partial\Omega$ existe una vecindad U_x en $\mathbb{R}^N$ y una función $H : Q \to U_x$ biyectiva tal que:*

$$H \in C^1(\overline{Q}) \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U_x}) \quad H(Q_+) = U_x \cap \Omega \quad H(Q_0) = U_x \cap \Gamma.$$

En general, decimos que $\partial\Omega$ es de clase C^k, $k = 0, 1, \cdots$ si para todo $x \in \partial\Omega$ existe una función $h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que salvo una reordenación y una reorientación de los ejes se tiene que

$$\Omega \cap B_r(x) = \{y \in B_r(x) \big| h(y_1, \cdots, y_{N-1}) < y_N\}.$$

$\partial\Omega$ es de clase C^∞ o suave si es de clase C^k para toda k.

1.2. Motivación

Supongamos que tenemos el siguiente problema: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado, con frontera lisa, $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Buscamos una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \qquad \text{en } \Omega \\ \qquad\quad u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

A este problema se le denomina *Problema de Poisson*. Las soluciones de (1.1) son conocidas como soluciones fuertes del Problema de Poisson o como soluciones clásicas. Multiplicando (1.1) por $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ obtenemos:

$$-\Delta u \cdot \varphi + u\varphi = f\varphi,$$

e integrando obtenemos

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

Si $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, usando el teorema de la divergencia tenemos:

$$-\int_\Omega [div(\varphi\nabla u) - \nabla u \nabla\varphi] \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx,$$
$$-\int_{\partial\Omega} (\varphi\nabla u) \cdot n \, ds + \int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi) \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

donde n es la normal exterior. Ahora bien, si $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, donde $C_0^1(\Omega)$ es el conjunto de funciones $\varphi \in C^1(\Omega)$ con soporte compacto obtenemos

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + u\varphi) \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

A este problema se le llama *formulación débil* de (1.1) y una solución de (1.2) es una solución débil de (1.1) (en un sentido amplio que precisaremos en esta tesis). Usualmente, es más fácil encontrar soluciones débiles que soluciones fuertes.

La búsqueda de este tipo de soluciones dio lugar a la creación de nuevas herramientas y técnicas para entender qué clase de características poseen las funciones que son soluciones débiles.

Por ejemplo, nos gustaría que dichas funciones "vivan" en espacios "bonitos", es decir, que tengan una estructura vectorial, que tengan algún tipo de

métrica (noción de distancia entre dos funciones), que sean completos y que tengan algún tipo de producto interior.
Ya conocemos ese tipo de espacios:
El espacio de las funciones continuas $C^0[a,b]$ forma un espacio vectorial sobre los reales, y son completos o no dependiendo de la métrica que le demos. Los espacios L^p son otro ejemplo de espacios de funciones completos, y si $p = 2$ son además espacios con producto interior.

1.3. El problema variacional

Definición 1.3.1 *Producto escalar Un producto escalar (o interior) en un espacio vectorial X sobre $\mathbf{R}$ es una función*
$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes propiedades:* $\forall x,\ y,\ z \in X,\ \alpha \in \mathbf{R}$,

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

ii) $\langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle$

iii) $\langle x, z\rangle = \langle z, x\rangle$

iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$

$\langle x, x\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$

Un producto escalar en X define una norma y por ende una métrica dadas por:

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Y

$$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

respectivamente.
En virtud de lo que obtuvimos en (1.2) podemos definir un producto interior $\forall u,\ \varphi$ en $C^1(\Omega)$ como sigue:

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx \tag{1.3}$$

Verifiquemos que (1.3) es en efecto, un producto interior.
Demostración:

i)

$$\begin{aligned}\langle u+v,\varphi\rangle &= \int_\Omega (\nabla(u+v)\nabla\varphi + (u+v)\varphi)\ dx\\ &= \int_\Omega [(\nabla u+\nabla v)\nabla\varphi + (u+v)\varphi]\ dx\\ &= \int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)\ dx + \int_\Omega (\nabla v\nabla\varphi + v\varphi)\ dx\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\langle \alpha u,\varphi\rangle &= \int_\Omega (\nabla(\alpha u)\nabla\varphi + (\alpha u)\varphi)\ dx\\ &= \alpha\int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)\ dx\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle u,\varphi\rangle &= \int_\Omega (\nabla u\nabla\varphi + u\varphi)\ dx\\ &= \int_\Omega (\nabla\varphi\nabla u + \varphi u)\ dx = \langle\varphi,u\rangle\end{aligned}$$

iv)

$$\langle u,u\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\ dx \geq 0$$

Y si $u=0$ entonces:

$$\langle u,u\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\ dx = 0$$

Inversamente, si

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega u^2\,dx = 0$$

entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_\Omega u^2\,dx = 0 \quad \text{(ya que cada término es no negativo)}$$

en particular, $|\nabla u|^2 = 0$ y $u^2 = 0$ c.t.p.

y por lo tanto $u=0$ c.t.p. en Ω.

Pero u es continua en Ω, así que $u=0$ en Ω.

■

Proposición 1.3.2 *Si $f \in L^2(\Omega)$ el funcional definido por*

$$L\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

es un funcional lineal y acotado en $C_0^1(\Omega)$ con la norma inducida por el producto escalar (1.3),

$$\|\varphi\| = \int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2\right) dx.$$

Demostración: Claramente L es lineal. Para ver que es acotado, basta utilizar la desigualdad de Hölder. En efecto, si $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ entonces $\varphi \in L^2(\Omega)$ y tenemos que:

$$\left|\int_\Omega f\varphi\right| \leq \int_\Omega |f\varphi| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|.$$

■

Viendo (1.2) de esta manera, encontrar soluciones débiles equivale entonces a encontrar funciones u que satisfagan:

$$\langle u, \varphi\rangle = L(\varphi) \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Esto nos lleva a la siguiente pregunta: dado un espacio vectorial V con producto escalar y $L : V \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua, existirá $v_0 \in V$ tal que $\langle v_0, v\rangle = L(v)$ $\forall v \in V$?¿Y si existe, es único?
Para contestarla, podemos pensar primero en lo que más conocemos, es decir, en $\mathbf{R}^N$. Sabemos que toda función lineal $u : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$ se expresa como una matriz de $M \times N$. Ahora bien, si lo que tenemos es una función lineal a los reales, entonces tenemos una matriz de $1 \times N$ que podemos pensar como un vector en el espacio $\mathbb{R}^N$. Es decir, trivialmente se satisface que exista un $v_0 \in \mathbf{R}^N$ tal que

$$\langle v_0, v\rangle = L(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

De manera más general, Riesz demostró en 1935 que, si el espacio V es de Hilbert, dicha representación existe. Esto dio lugar a un teorema muy bonito que veremos en el próximo capítulo. Pero la respuesta a la pregunta anterior no siempre es positiva.

Ejemplo:

Sea $C_0^1(-1,1)$ con el producto escalar $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi'(t)\psi'(t)\,dt$. Es claro que esta definición cumple con las propiedades del producto escalar I), II) y III) dadas en (1.3.1). Resta checar que si $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ entonces $\varphi = 0$. Ahora bien, si

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi'(t)\varphi'(t)\,dt = 0$$

$$\text{entonces } \varphi'(t) = 0 \quad \forall t \in (-1,1)$$

$$\text{lo cual a su vez implica que } \varphi(t) = C \quad C \in \mathbb{R}$$

Pero φ tiene soporte compacto, así que no le queda más que ser cero.
Por otro lado,

$$L\varphi = -\int_{-1}^{0} \varphi'(t)\,dt + \int_{0}^{1} \varphi'(t)\,dt$$

es una función lineal y continua en $C_0^1(-1,1)$ pero no existe ningún $\varphi_0 \in C_0^1(-1,1)$ tal que

$$\langle \varphi_0, \varphi \rangle = L\varphi \qquad \forall\, \varphi \in C_0^1(-1,1).$$

Demostración: El hecho de que L es un funcional lineal es obvio ya que sabemos que derivar e integrar son operaciones lineales. Tenemos que demostrar que L es continuo, o equivalentemente, que L es acotado. Es decir, tenemos que demostrar que existe una constante C tal que

$$|L\varphi| \leq C\,\|\varphi\|$$

donde

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

$$\|\varphi\| = \left(\int_{-1}^{1} |\varphi'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En efecto, tenemos que

$$|L\varphi| = \left|-\int_{-1}^{0} \varphi'(t)\,dt + \int_{0}^{1} \varphi'(t)\,dt\right| \leq \int_{-1}^{0} |\varphi'(t)|\,dt + \int_{0}^{1} |\varphi'(t)|\,dt \leq \int_{-1}^{1} |\varphi'(t)|\,dt$$

$$\leq \sqrt{2}\left(\int_{-1}^{1} |\varphi'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donde la desigualdad anterior se obtiene usando la desigualdad de Hölder.
Por lo tanto

$$|L\varphi| \leq \sqrt{2}\,\|\varphi\| \qquad \forall \varphi \in C_0^1(-1,1).$$

Así, L es acotado y por tanto continuo.

Veamos que no existe ningún $\varphi_0 \in C_0^1(-1,1)$ tal que

$$\langle \varphi_0, \varphi \rangle = L\varphi \qquad \forall\, \varphi \in C_0^1(-1,1)$$

ya que si existiera, debería cumplir que

$$\int_{-1}^{1} \varphi_0'(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-1}^{0} \varphi'(t)\,dt + \int_{0}^{1} \varphi'(t)\,dt \quad \forall\, \varphi \in C_0^1(-1,1)$$

de donde, tendríamos que

$$\varphi_0'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \le 1 \end{cases}$$

es decir, la función $\varphi_0'(t)$ sería necesariamente discontinua en $t = 0$, y por tanto no pertenecería a $C_0^1(-1,1)$. ■

Como veremos en el siguiente capítulo, el problema radica en que $C_0^1(-1,1)$ no es un espacio de Hilbert. En efecto,

Proposición 1.3.3 $C_0^1(-1,1)$ *con la norma*

$$\|\varphi\| = \left(\int_{-1}^{1} |\varphi'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

no es completo.

Demostración: Consideremos las funciones $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{(1-\frac{1}{n})^2}\right)^2 & \text{si } |x| \le 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| > 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

y

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1-\frac{1}{n})^2}\left(1 - \frac{x^2}{(1-\frac{1}{n})^2}\right) & \text{si } |x| \le 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| > 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Es claro por su definición que $f_n \in C_0^1(-1,1)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Además,

$$\begin{aligned} \|f_n - f_{n+k}\|^2 &= 2\int_0^{1-\frac{1}{n+k}} |f_n'(x) - f_{n+k}'(x)|^2\,dx \\ &= 2\int_0^{1-\frac{1}{n+k}} \left| \frac{-4x}{(1-\frac{1}{n+k})^2}\left(1 - \frac{x^2}{(1-\frac{1}{n+k})^2}\right) + \frac{-4x}{(1-\frac{1}{n})^2}\left(1 - \frac{x^2}{(1-\frac{1}{n})^2}\right)\right|^2 \\ &\longrightarrow 0 \text{ si } n \to \infty. \end{aligned}$$

para cada k fija. Por lo tanto, (f_n) es de Cauchy en $C_0^1(-1,1)$.
Por otro lado, si $n \to \infty$, entonces $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ donde f está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Pero f no tiene soporte compacto en $(-1,1)$, por lo tanto f no pertenece a $C_0^1(-1,1)$, y este espacio por ende, no es completo. ∎

Espacios de Hilbert

2.1. Espacios de Hilbert

En esta sección daremos un repaso rápido a algunas propiedades de los espacios de Hilbert, que nos permiten entender mejor la estructura de los espacios infinito-dimensionales, en particular los espacios de funciones.

Definición 2.1.1 *Espacios de Banach*
Un espacio vectorial normado completo es llamado espacio de Banach.

Definición 2.1.2 *Un espacio de Banach cuya norma está inducida por un producto escalar es llamado espacio de Hilbert.*

Ejemplos de espacios de Hilbert:

i) El espacio euclidiano $\mathbb{R}^N$ con el producto escalar usual:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$.

ii) El espacio de sucesiones l^2 con el producto escalar dado por:

$$\langle (x_j), (y_j)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_jy_j.$$

Nota: los espacios l^p con $p \neq 2$ no son espacios con producto escalar, por tanto no son espacios de Hilbert.

iii) El espacio de funciones $L^2(\Omega)$ con el producto escalar dado por:

$$\langle x, y\rangle = \int_\Omega x(t)y(t)\, dt$$

2.1.1. Algunas propiedades interesantes de los espacios de Hilbert

Definición 2.1.3 *Ortogonalidad*
Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que $x \in H$ es ortogonal a un elemento $y \in H$ si:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

y lo denotamos por $x \perp y$.

De manera análoga, decimos que dos subconjuntos A y B son ortogonales si se cumple que $\langle a, b \rangle = 0 \quad \forall a \in A, \forall b \in B$.

Proposición 2.1.4 *Desigualdad de Schwarz*
Todo producto escalar satisface la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Demostración: Si $y = 0$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$ y la desigualdad se cumple trivialmente. Supongamos entonces $y \neq 0$ entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, -\alpha y \rangle + \langle -\alpha y, x \rangle + \langle -\alpha y, -\alpha y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \alpha \langle x, y \rangle - \alpha (\langle x, y \rangle - \alpha \langle y, y \rangle)
\end{aligned}$$

Si escojemos $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ la expresión entre paréntesis es igual a 0 de manera que obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\
|\langle x, y \rangle|^2 &\leq \|x\|^2 \|y\|^2
\end{aligned}$$

sacando raíces, obtenemos la desigualdad deseada. ■

Corolario 2.1.5 *Continuidad del producto escalar El producto escalar es una función continua de $X \times X \to \mathbb{R}$, es decir, si $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$.*

Demostración:

Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de X tales que $x_n \longrightarrow x$, y $y_n \longrightarrow y$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y - y_n\rangle| + |\langle x - x_n, y\rangle| \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Schwarz,

$$\leq \|x_n\| \, \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \, \|y\| \longrightarrow 0$$

ya que $x_n \longrightarrow x$, y $y_n \longrightarrow y$. ■

Proposición 2.1.6 *Regla del paralelogramo*
Una norma es inducida por un producto escalar si y sólo si satisface la regla del paralelogramo, que es:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que la norma sí está inducida por un producto escalar. Entonces

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\quad + \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle \\ \text{y como } \langle x, -y\rangle &= \langle -y, x\rangle \text{ entonces} \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que la norma satisface la regla del paralelogramo y definamos el producto escalar como sigue:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Resta probar que se satisfacen las propiedades del producto escalar.

i)

$$\begin{aligned}
\langle x, y+z\rangle - (\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle) &= \frac{1}{4}(\| x+y+z \|^2 - \| x-(y+z) \|^2 - \| x+y \|^2 \\
&\quad + \| x-y \|^2 - \| x+z \|^2 + \| x-z \|^2) \\
&= \frac{1}{4}(2 \| x+y \|^2 + 2 \| z \|^2 - \| x+y-z \|^2 \\
&\quad - \left[2 \| x-z \|^2 + 2 \| y \|^2 - \| x+y-z \|^2 \right] \\
&\quad - \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 - \| x+z \|^2 + \| x-z \|^2) \\
&= \frac{1}{4}(2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 + 2 \| z \|^2 \\
&\quad - 2 \| y \|^2 - 2 \| x \|^2 - 2 \| z \|^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

La demostración de que $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ es análoga a ésta.

ii) Dado que $\| x+y \| = \| y+x \|$, es claro que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

iii) Queremos probar que $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$. Para esto, empezaremos por probarlo para $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Si fijamos x y pensamos en nuestro producto interior como sólo una función de y, entonces podemos pensar en una nueva función $T_x : H \to \mathbb{R}$ tal que $T_x(y) = \langle x, y\rangle$. Por el inciso anterior, sabemos que T_x es una función aditiva, y usando la proposición (A.1) sabemos entonces que $T_x(\lambda y) = \lambda T_x(y) \quad \forall\lambda \in \mathbb{Q}$. Ahora bien, como el producto escalar está en este caso dado en términos de la norma, que es una función continua, y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces se sigue que $T_x(\lambda y) = \lambda T_x(y) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

iv)

$$\langle x, x\rangle = \frac{1}{4} \| 2x \|^2 = \| x \|^2$$

$\| x \|^2 \geq 0$ y además, por las propiedades de la norma, $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

■

Teorema 2.1.7 *"vector minimizador"*
Sea H un espacio vectorial con producto escalar y $Y \neq \emptyset$ un subconjunto convexo cerrado. Entonces para cada $x \in H$ existe una única $y \in Y$ tal que:

$$\inf_{\tilde{y} \in Y} \| x - \tilde{y} \| = \| x - y \| . \tag{2.1}$$

Más aún, si Y es un subespacio vectorial cerrado de H, entonces también se cumple que $x - y$ es ortogonal a Y.

Demostración: Sea $\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \| x - \tilde{y} \|$.
Por definición de ínfimo, existe una sucesión $(y_n) \in Y$ tal que $\| x - y_n \| \to \delta$.
Buscamos demostrar que (y_n) es de Cauchy en H.
Sea $v_n = y_n - x$, y se tiene que

$$\begin{aligned} \| v_n + v_m \| = \| y_n - x + y_m - x \| &= \| y_n + y_m - 2x \| \\ &= 2 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \geq 2\delta \end{aligned} \tag{2.2}$$

ya que, como Y es convexo, $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in Y$.
Por otro lado, $v_n - v_m = y_n - x - y_m + x = y_n - y_m$. Así que

$$\| y_n - y_m \|^2 = \| v_n - v_m \|^2$$

usando la regla del paralelogramo

$$\begin{aligned} &= - \| v_n + v_m \|^2 + 2(\| v_n \|^2 + \| v_m \|^2) \\ &\leq -2\delta^2 + 2(\| v_n \|^2 + \| v_m \|^2) \\ &\longrightarrow 0 \text{ ya que } \| v_n \| \to \delta \end{aligned}$$

lo cual implica que y_n es de Cauchy en H. Además como Y es completo, entonces y_n converge a y, $y \in Y$. Así tenemos que

$$\| x - y \| \leq \delta.$$

Por otro lado,

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \| x - \tilde{y} \| \leq \| x - y \|,$$

de donde,

$$\| x - y \| = \delta.$$

Resta probar ahora la unicidad.
Asumimos que existen y, $y_0 \in Y$ tales que:

$$\| x - y \| = \delta \quad \text{y} \quad \| x - y_0 \| = \delta$$

$$\begin{aligned}
\| y - y_0 \|^2 &= \| (y - x) - (y_0 - x) \|^2 \\
&= 2 \| y - x \|^2 + 2 \| y_0 - x \|^2 - \| (y - x) + (y_0 - x) \|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2 \| \frac{1}{2}(y + y_0) - x \|^2
\end{aligned}$$

pero $\frac{1}{2}(y + y_0) \in Y$ así que $\| \frac{1}{2}(y + y_0) - x \|^2 \geq \delta^2$

de donde,

$$\| y - y_0 \|^2 \leq 0$$

lo cual implica

$$\| y - y_0 \| = 0 \quad \text{y} \quad y = y_0.$$

Finalmente, queremos ver que se cumple que $x - y$ es ortogonal a Y. Es decir,

$$\langle x - y, \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in Y.$$

Supongamos que no, entonces existe $y_1 \in Y$ tal que

$$\langle x - y, y_1 \rangle = \beta \quad \text{con } \beta > 0$$

Para aligerar la notación, sea $z = x - y$, sabemos entonces que $\| z \| = \delta$ y suponemos que $\langle z, y_1 \rangle = \beta$.

$$\begin{aligned}
\| z - \alpha y_1 \|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \alpha \langle z, y_1 \rangle - \alpha \langle y_1, z \rangle + \alpha^2 \langle y_1, y_1 \rangle \\
&= \| z \|^2 - \alpha\beta - \alpha \left[\beta - \alpha \langle y_1, y_1 \rangle \right]
\end{aligned}$$

la expresión entre corchetes es cero si escogemos $\alpha = \dfrac{\beta}{\langle y_1, y_1 \rangle}$.

Como $\| z \| = \delta$ la ecuación se vuelve

$$\| z - \alpha y_1 \|^2 = \delta^2 - \frac{\beta^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2$$

pero esto es imposible porque y era el vector que satisfacía ser el mínimo. Por lo tanto,

$$\langle x - y, \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in Y.$$

■

Definición 2.1.8 *Se dice que un espacio de Hilbert es la suma directa de dos subespacios H_1 y H_2, denotado como*

$$H = H_1 \oplus H_2$$

si para cada $x \in H$ existe una única representación

$$x = h_1 + h_2 \qquad h_1 \in H_1, \; y \; h_2 \in H_2.$$

Definimos el *complemento ortogonal* de un subespacio Y de Hilbert como el conjunto de todos los vectores ortogonales a Y:

$$Y^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp Y\}$$

Así como en $\mathbb{R}^N$ podemos hacer proyecciones sobre sus subespacios, en los espacios de Hilbert tenemos un resultado análogo dado en el siguiente teorema.
Recordemos que una función lineal $P : H \to Y$ es una proyección si $P^2 = P$.

Teorema 2.1.9 *Teorema de la Proyección Ortogonal*
Sea $Y \neq \emptyset$ un subespacio cerrado propio de un espacio de Hilbert H. Entonces existe una proyección

$$P_Y : H \to Y \text{ tal que } \| P_Y \| = 1, \qquad Y^{\perp} = ker P_Y,$$

$$Id - P_Y : H \to Y^{\perp} \text{ es una proyección, con } \| Id - P_Y \| = 1,$$

y

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

P_Y se llama la proyección ortogonal sobre Y.

Demostración: Como H es completo y Y es cerrado, entonces Y es completo. Además Y es un subespacio vectorial, entonces se cumple que $\forall x \in H$ existe una única $y \in Y$ tal que

$$z = (x - y) \perp Y$$

de donde,

$$x = z + y \quad \text{con } z \in Y^{\perp}, \, y \in Y.$$

Por otro lado, si $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp}$ entonces es claro que

$$\| y + z \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2$$

Así, podemos definir una proyección $P_Y : H \to Y$ dada por $P_Y x = y$. Se tiene que P_Y es lineal, y además

$$\| P_Y \| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| = 1}} \| P_Y x \| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| = 1}} \| y \| = 1$$

ya que el supremo se alcanza cuando $\| y \|^2 = 1$ y $\| z \|^2 = 0$.
Ahora bien, si $x \in Y^\perp$, i.e. $x = z$, entonces $x = 0 + z$ y $P_Y x = 0$. De donde

$$ker P_Y = Y^\perp.$$

Finalmente, $Id - P_Y : H \to Y^\perp$ ya que

$$\begin{aligned}(Id - P_Y)(x) &= (Id - P_Y)(y + z)\\ &= y + z - y = z \in Y^\perp\end{aligned}$$

Y $(Id - P_Y)^2(x) = (Id - P_Y)(z) = z$, por lo tanto, $Id - P_Y$ es una proyección y claramente,

$$\| Id - P_Y \| = 1.$$

■

2.2. Teorema de representación de Riesz

Teorema 2.2.1 *Teorema de Representación de Riesz.*
Todo funcional lineal acotado L en un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos del producto escalar, es decir, existe un único $v_0 \in H$ tal que

$$L(v) \ = \ \langle v_0, v \rangle \qquad \forall v \in H, \tag{2.3}$$

donde v_0 depende exclusivamente de L y tiene norma:

$$\| v_0 \| = \| L \| . \tag{2.4}$$

Más aún, v_0 minimiza el problema

$$\inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} \| v \|^2 - Lv \right\} . \tag{2.5}$$

Este es el llamado Principio de Dirichlet.

Demostración:
Empecemos por preguntarnos ¿como tendría que ser v_0?

i) si $L \equiv 0$ entonces es muy fácil, tomamos $v_0 = 0$ y se cumple que $\langle v_0, v \rangle = 0 = L(v)$ $\forall v \in H$ y trivialmente $\| v_0 \| = \| L \|$.

ii) si $L(v) \neq 0$ entonces v_0 no puede ser igual a 0 (si no tendríamos exactamente el caso anterior). Además, se tiene que $\langle v_0, v \rangle = 0$ para toda v tal que $L(v) = 0$, o sea si $v \in ker L$, esto implica que nuestro $v_0 \perp ker L$. Esto nos sugiere considerar a $ker L$ y a su complemento ortogonal $(ker L)^\perp$.

En efecto, como L es continua, $kerL$ es un subespacio cerrado de H y por tanto podemos escribir:

$$H = kerL \oplus (kerL)^{\perp}.$$

Ahora bien, como $L(v) \neq 0$ se sigue que $kerL \neq H$ y por ende $(kerL)^{\perp} \neq \{0\}$. Luego, existe un elemento $z \neq 0 \in (kerL)^{\perp}$.
Sea $x = L(v)z - L(z)v$ donde $v \in H$ es arbitrario. Aplicamos L al elemento x:

$$L(x) = L(v)L(z) - L(z)L(v) = 0$$

Por lo tanto, escoger a x de esta manera nos permite encontrar a un elemento de $kerL$. Ahora bien, como sabemos que $z \perp kerL$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, z\rangle \\ &= \langle L(v)z - L(z)v, z\rangle \\ &= L(v)\langle z, z\rangle - L(z)\langle v, z\rangle \end{aligned}$$

Notemos que $\langle z, z\rangle > 0$ ya que $z \neq 0$, luego, despejamos $L(v)$ de la última ecuación para obtener

$$L(v) = \frac{L(z)}{\langle z, z\rangle}\langle v, z\rangle \quad \forall v \in H$$

así que si tomamos $v_0 = \frac{L(z)}{\langle z,z\rangle}z$ se cumple que $L(v) = \langle v_0, v\rangle \ \forall v \in H$.
Unicidad:
Supongamos ahora que para toda $v \in H$, existen v_0 y v_1 tales que:

$$L(v) = \langle v, v_0\rangle = \langle v, v_1\rangle$$

Entonces $\langle v, v_0 - v_1\rangle = 0 \ \forall v \in H$. Escogiendo $v = v_0 - v_1$ tenemos que:

$$\langle v_0 - v_1, v_0 - v_1\rangle = \| v_0 - v_1 \|^2 = 0$$

Y esto implica por la definición del producto escalar que $v_0 - v_1 = 0$ de donde $v_0 = v_1$.
Probemos (2.4):
De la definición misma de norma de un funcional lineal acotado se sigue que:

$$| L(v) | \leq \| L \| \| v \|,$$

tomando $v = v_0$ tenemos que:

$$L(v_0) = \langle v_0, v_0\rangle = \| v_0 \|^2$$

de ahí que
$$\| v_0 \|^2 \leq \| L \| \, \| v_0 \|$$
y por tanto,
$$\| v_0 \| \leq \| L \| \, .$$
Por otra parte, usando (2.3) y la desigualdad de Schwarz tenemos que
$$| \, L(v) \, | = | \, \langle v, v_0 \rangle \, | \leq \| v \| \| v_0 \|$$
y esto implica que
$$\| L \| = \sup_{\|v\|=1} | \, \langle v, v_0 \rangle \, | \leq \| v_0 \|,$$
y, por tanto,
$$\| L \| \leq \| v_0 \| \, .$$
Así,
$$\| v_0 \| = \| L \| \, .$$
Probemos por último el *Principio de Dirichlet*.
Sea $I(v) = \frac{1}{2} \| v \|^2 - \langle v_0, v \rangle$.
Queremos ver que $I(v_0) \leq I(v_0 + u) \quad \forall u \in H$.

$$\begin{aligned}
I(v_0 + u) &= \frac{1}{2} \| v_0 + u \|^2 - \langle v_o, v_0 + u \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle v_0 + u, v_0 + u \rangle - \langle v_0, u \rangle - \langle v_0, v_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle v_0, v_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle v_0, u \rangle + \frac{1}{2} \langle u, v_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle u, u \rangle - \langle v_0, u \rangle - \langle v_0, v_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{1}{2} \| v_0 \|^2 \\
&- \frac{1}{2} \| u \|^2 + I(v_0) \geq I(v_0) \quad \forall u \in H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, v_0 minimiza el problema:
$$\inf_{v \in H} \{ \frac{1}{2} \| v \|^2 - Lv \}.$$

■

Nota: Es interesante remarcar una de las bellezas de este teorema: no sólo nos dice que sí existe dicho elemento v_0, sino que además nos da la forma explícita para encontrarlo.
Existen otras variantes del Teorema de representación de Riesz que no necesariamente requieren que el espacio sea un espacio de Hilbert, en particular existe una para espacios L^p, pero en general los resultados son también menos fuertes.

Con este teorema, sabemos que una de las condiciones que tendrán que cumplir nuestros espacios de soluciones débiles es el de ser espacios de Hilbert. Pero ésta no es la única condición, como veremos en el siguiente capítulo, los espacios de soluciones tienen otras propiedades interesantes. Así que si tomamos como espacio de Hilbert la cerradura de $C_0^1(\Omega)$ bajo la norma inducida por el producto escalar que definimos anteriormente, entonces el teorema de representación de Riesz nos asegura la existencia y unicidad de una solución u al problema (1.2).

Capítulo 3

Derivadas débiles

3.1. Definición

Sea $C_0^1(\Omega)$ el espacio de funciones de clase $C^1(\Omega)$ con soporte compacto sobre Ω. A este conjunto le llamaremos en lo sucesivo el conjunto de funciones de prueba.

Lema 3.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, y $1 \leq i \leq N$. Entonces para toda función $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ se tiene que:*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = 0$$

Demostración: Podemos extender φ a todo $\mathbb{R}^N$ definiendo $\varphi(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ y suponer entonces que $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Así, el soporte de φ queda contenido en un cubo $N-$*dimensional* de lado M, es decir, $supp\, \varphi \subset [-M, M]^N$. Sin pérdida de generalidad supongamos ahora que $i = N$. Entonces para $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ fija, usando el Teorema fundamental del Cálculo tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx_N &= \varphi(x_1, ...x_{n-1}, M) - \varphi(x_1, ...x_{n-1}, -M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx = \int_{-M}^{M} \cdots \int_{-M}^{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx_N \cdots dx_1 = 0$$

■

Ahora bien, si $f \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ (de manera que $f\varphi \in C_0^1(\Omega)$), y usando el Teorema de Green tenemos:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi\, dx = f\varphi\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Iterando este resultado, si ahora consideramos una función $f \in C^2(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\varphi\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\, dx.$$

Sumando sobre las i's:

$$\int_\Omega (\Delta f)\varphi\, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f(\Delta\varphi)\, dx.$$

Aquí usamos el hecho de que $f \in C^2(\Omega)$. Ahora nos gustaría generalizar este resultado a funciones que no necesariamente son continuas. Es decir, podría suceder que exista una cierta función v que satisfaga que:

$$\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v\varphi\, dx \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Definición 3.1.2 *Una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si f es integrable en todo subconjunto ω acotado y medible de Ω tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$.*

Lo anterior sirvió de motivación para definir un nuevo concepto en el análisis: el de derivada débil.

Definición 3.1.3 *Derivada débil*
Sea f una función en $L^1_{loc}(\Omega)$. Si existe una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v\varphi\, dx \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

entonces decimos que v es la ***derivada débil de f*** *en la dirección x_i y se denota $v = D_i f$. Si f tiene derivadas débiles $\forall i = 1, ..., N$ entonces decimos que f tiene derivada débil $Df = (D_1 f, ..., D_N f)$.*

Proposición 3.1.4 *La derivada débil de f (si existe) es única c.t.p en Ω.*

Demostración: Supongamos que existen dos funciones v y w que son derivadas débiles de f en la dirección x_i. Entonces se cumple que

$$\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega w\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$$
$$\int_\Omega (v-w)\,\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$$

y por densidad

$$v - w = 0 \qquad \text{c.t.p. en } \Omega$$
$$v = w \qquad \text{c.t.p. en } \Omega$$

■

Proposición 3.1.5 *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $\Omega_0 \subset \Omega$ es abierto entonces $f\big|_{\Omega_0} \in L^1_{loc}(\Omega_0)$ es débilmente diferenciable y*

$$D_i(f\big|_{\Omega_0}) = (D_i f)\big|_{\Omega_0}.$$

Demostración: Sabemos que cualquier abierto acotado de Ω_0 también lo es de Ω, así que de manera trivial se cumple que $f \in L^1_{loc}(\Omega_0)$. Sea $\varphi \in C^1_0(\Omega_0)$. Podemos extender a φ en todo Ω de manera tal que $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ (esto es muy sencillo, sólo definimos $\varphi(x) = 0$ si $x \in \Omega \setminus \Omega_0$). De aquí que cualquier función de prueba de Ω_0 también lo sea de Ω. De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\Omega} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx &= -\int_{\Omega} v\varphi\,dx \\ &= -\int_{\Omega_0} v\varphi \quad \text{ya que } \varphi \text{ tiene soporte compacto en } \Omega_0\end{aligned}$$

y además

$$D_i(f\big|_{\Omega_0}) = (D_i f)\big|_{\Omega_0}.$$

■

Definición 3.1.6 *Multiíndice y derivada débil de orden superior:*
Sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, α_i entero , $\alpha_i \geq 0$ $\forall i = 1, \cdots, N$. α se llama un multiíndice.
Definimos $|\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \geq 0$, y denotamos la derivada parcial de orden $|\alpha|$ de f por

$$D_\alpha\varphi := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}\varphi = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_d})^{\alpha_N}\varphi \quad \forall\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega).$$

Resulta natural introducir las derivadas débiles de orden superior:
Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.Una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es llamada la $\alpha-$ésima derivada débil de f, denotada como $v = D_\alpha f$ si cumple que:

$$\int_\Omega f D_\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Decimos que $f$es $k-$débilmente diferenciable si existe $D_\alpha f$ para todo multiíndice α con $|\alpha| \leq k$.

3.2. Ejemplos

Ejemplo 3.2.1

Claramente, toda función f de clase $C^1(\Omega)$ pertenece trivialmente a $L^1_{loc}(\Omega)$ así como sus derivadas parciales usuales, por lo tanto tiene derivadas débiles que coinciden con las usuales: $D_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Ejemplo 3.2.2

Sea $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$. Como $\int_\Omega |x| < \infty$, $\int_{-1}^0 (-1)$ y $\int_0^1 1 < \infty$ entonces f y Df pertenecen a $L^1_{loc}(\Omega)$ y f tiene derivada débil dada por:

$$Df(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ya que, si tomamos $\varphi \in C^1_0(-1,1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)\,dx &= -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,dx + \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx \\ &= -\left(x\varphi(x)\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1\varphi(x)\,dx\right) + \left(x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 1\varphi(x)\,dx\right) \\ &= -\varphi(-1) - \int_{-1}^0 (-1)\varphi(x)\,dx + \varphi(1) - \int_0^1 1\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^1 Df(x)\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

De manera más general, se cumple lo siguiente.

Proposición 3.2.3 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y f es continuamente diferenciable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, $a < c < b$, entonces f es débilmente diferenciable y $Df(x) = f'(x)$ para todo $x \in (a,c) \cup (c,b)$.*

Demostración: Sea $\varphi \in C^1_0([a,b])$.

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^c f(x)\varphi'(x)\,dx + \int_c^b f(x)\varphi'(x)\,dx$$

y en cada integral podemos usar integración por partes,

$$\begin{aligned} &= -\int_a^c f'(x)\varphi(x)\,dx - \int_c^b f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_a^b Df(x)\varphi(x)\,dx \end{aligned}$$

por lo tanto, $Df(x) = f'(x)$ para todo $x \in (a,c) \cup (c,b)$. ■

Proposición 3.2.4 *Sean Ω_0 y Ω abiertos acotados de $\mathbb{R}^N$, $\Omega_0 \subset \Omega$ con $\partial\Omega$, $\partial\Omega_0$ de clase C^1 y $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f|_{\overline{\Omega_0}} \in C^1(\overline{\Omega_0})$ y $f|_{\overline{\Omega \setminus \Omega_0}} \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_0})$. Entonces f es débilmente diferenciable en Ω y*

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega_0.$$

Demostración:

$$\int_{\Omega\setminus\partial\Omega_0} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\overline{\Omega\setminus\Omega_0}} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega_0} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx$$

en cada una de estas integrales podemos usar la fórmula de integración por partes

$$= -\int_{\overline{\Omega\setminus\Omega_0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx + \int_{\partial(\overline{\Omega\setminus\Omega_0})} (f\varphi)\eta_i\,dS - \int_{\Omega_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega_0} (f\varphi)\eta_i\,dS$$

donde η_i denota la normal en la i-ésima dirección

$$= -\int_{\overline{\Omega\setminus\Omega_0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} (f\varphi)\eta_i\,dS - \int_{\partial\Omega_0} (f\varphi)\eta_i\,dS - \int_{\Omega_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega_0} (f\varphi)\eta_i\,dS$$
$$= -\int_{\overline{\Omega\setminus\Omega_0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx - \int_{\Omega_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\,dx$$

■

Ejemplo 3.2.5

Sea $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ y f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

No tiene derivada débil. Supongamos que sí la tiene, por la proposición (3.1.5) f es diferenciable en $[\alpha,\beta]$, para todo $\alpha,\beta \in (-1,0) \cup (0,1)$ y su derivada ahí es cero. Entonces tendríamos que $Df(x) = 0\ \forall x \neq 0$ lo cual implicaría:

$$0 = \int_{-1}^{1} Df(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall\varphi \in C_0^1(-1,1).$$

Esto es una contradicción.

Ejemplo 3.2.6

Sea $\Omega = \mathbb{R}^N$ y f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

Tanto f como $D_1 f$ están acotadas y de aquí que para todo subconjunto acotado Ω_0 de $\mathbb{R}^N$, f y $D_1 f$ son integrables sobre Ω_0. Usando de nuevo la proposición (3.1.5) tenemos que si f fuese débilmente diferenciable, su derivada tendría que ser 0. Supongamos que sí lo es, y sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces $supp\,\varphi \subset [-M, M]^N$ para M suficientemente grande y

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} 0\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{-M}^{0} -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}\,dx_1\cdots dx_N + \\ &\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_0^M \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}\,dx_1\cdots dx_N \\ = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} -\varphi(0, x_2, \cdots, x_N) + \varphi(-M, x_2, \cdots, x_N)\,dx_2\cdots dx_N \\ + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(M, x_2, \cdots, x_N) - \varphi(0, x_2, \cdots, x_N)\,dx_2\cdots dx_N. \end{aligned}$$

Como φ tiene soporte compacto, entonces $\varphi(-M, x_2, \cdots, x_N) = \varphi(M, x_2, \cdots, x_N) = 0$ y la integral queda:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} -2\varphi(0, x_2, \cdots, x_N)\,dx_2\cdots dx_N \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Claramente, no se cumple que para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi(0, x_2, \cdots, x_N) = 0$, por lo cual la derivada débil en este caso no existe.

Ejemplo 3.2.7

Sea $f(x) = \| x \|^\alpha$ con $\alpha < 0$.
Esta función es diferenciable en el sentido usual para todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ que no contenga al origen. Así que el problema interesante es alrededor del cero. Investiguemos bajo qué condiciones f es débilmente diferenciable en Ω, donde $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \| x \| < 1\}$. Primero que nada, dado que necesitamos que nuestra función viva en el espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ averigüemos para qué valores de α se tiene $\| x \|^\alpha \in L^1(\Omega)$ y $\dfrac{\partial \| x \|^\alpha}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. (En este caso, dado que el único problema está alrededor del origen, da igual investigar cuando $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ o cuando $f \in L^1(\Omega)$). Usando el teorema (A.4) se tiene que

1.

$$\int_\Omega \|x\|^\alpha \; dx = N\omega_N \int_0^1 r^\alpha \cdot r^{N-1}\, dr = N\omega_N \int_0^1 r^{\alpha+N-1}\, dr = N\omega_N r^{\alpha+N}\Big|_0^1$$

(donde w_N es el volumen de la bola unitaria en dimensión N), y esta integral es finita sólo cuando $\alpha+N > 0$. Se sigue que $\|x\|^\alpha \in L^1(\Omega)$ si $\alpha+N > 0$.

2.

$$\frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^{\alpha/2} = \alpha x_i \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^{\alpha/2-1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i}\right| \le |\alpha| \, \|x\|^{\alpha-1} \quad \text{y usando lo anterior, } \frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i} \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow (\alpha-1)+N > 0.$$

Sea v dada por:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que v es la i-ésima derivada débil de f cuando $N + \alpha > 1$

Demostración: Sea $\varphi \in C_0^1(U)$ y sea $\varepsilon > 0$ fija. Entonces usando el hecho de que f es una función diferenciable en todos lados excepto en el origen, y usando la fórmula de integración por partes en dimensión N, (teorema (A.2)) se tiene que:

$$\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds$$

Donde η_i es la normal exterior en la i-ésima dirección.

$$= -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} (f\varphi)\eta_i\, ds - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds$$

$$= -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds \qquad \text{ya que } \varphi \text{ se anula en } \partial\Omega.$$

Ahora bien, si $(\alpha - 1) + N > 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ y podemos aplicar la desigualdad de Hölder para obtener:

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |f||\eta_i|\, ds$$

$|\eta_i| \leq 1$ por definición de la normal, y $|f| = \| x \|^\alpha = \varepsilon^\alpha$ porque estamos sobre $\partial B(0,\varepsilon)$. Así que la desigualdad queda:

$$\left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f\varphi\eta_i \, ds \right| \leq \| \varphi \|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varepsilon^\alpha \leq C\varepsilon^{\alpha+N-1}$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{si } \alpha + N - 1 > 0, \text{ o bien si } \alpha + N > 1.$$

De donde, si tomamos el límite cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \text{ si } \alpha + N > 1.$$

Así, f es débilmente diferenciable si $\alpha + N > 1$. ∎

Ejemplo 3.2.8

Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ln(\| x \|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Afirmamos que f sí tiene derivada débil en la dirección x_i y está dada por:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\partial ln(\|x\|)}{\partial x_i} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demostración: Lo primero que hay que revisar es bajo qué condiciones f y $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Observemos que para todo subconjunto acotado Ω_0 de $\mathbb{R}^N$ que no contenga al origen, esta función tiene derivada usual y es integrable. Por lo tanto, el caso interesante es aquel donde $0 \in \Omega_0$. Sea $\Omega = B(0,M) \setminus B(0,\varepsilon)$ y tenemos lo siguiente

$$\int_\Omega ln(\| x \|)\, dx = \int_\varepsilon^M ln\, r \cdot r^{N-1} \cdot N\omega_N \, dr$$

donde ω_N denota el volumen de la bola unitaria en dimensión N

$$= \omega_N \left(ln\, r \cdot r^N - \frac{1}{N} r^N \right) \Big|_\varepsilon^M$$
$$= C - \omega_N (ln\, \varepsilon \cdot \varepsilon^N - \frac{1}{N}\varepsilon^N)$$

usando la regla de L'Hôpital se tiene que

$$ln\,\varepsilon \cdot \varepsilon^N = \frac{ln\,\varepsilon}{\varepsilon^{-N}} \longrightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \to 0.$$

Por lo tanto $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Tenemos que

$$\int_\Omega D_i f = \int_\Omega \frac{x_i}{\|x\|^2} \leq \int_\Omega \frac{1}{\|x\|}$$

y sabemos que esto es integrable si $N \geq 2$. Por lo tanto, $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si y sólo si $N \geq 2$. Para ver que la derivada débil sí existe, tomamos una función que suaviza la discontinuidad en el origen como sigue. Sea $\eta_m \in C(\mathbb{R})$ dada por:

$$\eta_m(r) = \begin{cases} 1 & r \geq \frac{2}{m} \\ m(r - \frac{1}{m}) & \frac{1}{m} \leq r < \frac{2}{m} \\ 0 & 0 \leq r < \frac{1}{m} \end{cases}$$

Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, por la proposición (3.2.4), podemos usar integración por partes de manera que:

$$\int_\Omega ln(\|x\|)\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_m(\|x\|)\varphi(x))\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial ln(\|x\|)}{\partial x_i}\eta_m(\|x\|)\varphi(x)$$

y si $m \to \infty$

$$\longrightarrow -\int_\Omega \frac{\partial ln(\|x\|)}{\partial x_i}\varphi(x). \tag{3.2}$$

Ahora bien,

$$\int_\Omega ln(\|x\|)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\eta_m(\|x\|)\varphi(x)\Big)\,dx = \int_\Omega ln(\|x\|)\left(\frac{\partial \eta_m(\|x\|)}{\partial x_i}\varphi(x)\right)\,dx$$
$$+ \int_\Omega ln(\|x\|)\left(\eta_m(\|x\|)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)\,dx$$

Queremos probar que

$$\int_\Omega ln(\|x\|)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\eta_m(\|x\|)\varphi(x)\Big)\,dx \longrightarrow \int_\Omega ln(\|x\|)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx. \tag{3.3}$$

Para esto, observemos que

$$\int_\Omega ln(\|x\|)\left(\eta_m(\|x\|)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right)\,dx \longrightarrow \int_\Omega ln(\|x\|)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx \quad \text{si } m \to \infty$$

y por otro lado, haciendo el cambio de variable $r = \| x \|$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega ln(\| x \|) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_m(\| x \|) \varphi(x)\, dx \right| &\leq c \int_\Omega \left| ln(\| x \|) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_m(\| x \|) \varphi(x) \right| dx \\
&\leq c \int_{\frac{1}{m} \leq \|x\| \leq \frac{2}{m}} \left| ln(\| x \|) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_m(\| x \|) \varphi(x) \right| dx \\
&= c N \omega_N \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \left| ln\, r \frac{\partial}{\partial r} \eta_m(\| x \|) \right| r^{N-1}\, dr \\
&= c m N \omega_N \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} |ln\, r| r^{N-1}\, dr \\
&= -c m N \omega_N \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} ln\, r\, r^{N-1}\, dr \\
&= -c m N \omega_N\, r^n (ln\, r - \frac{1}{N}) \Big|_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{si } m \to \infty.
\end{aligned}$$

de donde, obtenemos (3.3).
Y juntando (3.2) y (3.3) finalmente podemos concluir que

$$\int_\Omega ln(\| x \|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx = - \int_\Omega v(x) \varphi(x)\, dx.$$

Por lo tanto, si $N \geq 2$, f sí tiene derivada débil. ∎

Ejemplo 3.2.9

Consideremos la función f, definida sobre $\Omega = B(0,1)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Afirmamos que f sí tiene derivadas débiles y que éstas están dadas por:

$$D_i f(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

El único problema en esta función es alrededor del origen. Revisemos de manera rápida cuándo f pertenece a $L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_\Omega \frac{|x_i|}{\| x \|}\, dx \leq \int_\Omega \frac{1}{\| x \|}\, dx \in L^1(\Omega) \text{ si } N \geq 2.$$

De la misma manera, tanto para $i = j$ como para $i \neq j$

$$\int_\Omega |D_i f|\, dx \le \int_\Omega \frac{1}{\|x\|}\, dx.$$

Por lo tanto, f y $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si $N \ge 2$.
Usando la fórmula de integración por partes tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} &= -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx + \int_{\partial(\Omega\setminus B(0,\varepsilon))} (f\varphi)\eta_i\, ds \\
&= -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} (f\varphi)\eta_i\, ds - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds \\
&= -\int_{\Omega\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds
\end{aligned}$$

ya que φ se anula en $\partial\Omega$ y donde η_i es la normal exterior en la i-ésima dirección.
Ahora bien, si $N \ge 2$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$ y podemos aplicar la desigualdad de Hölder para obtener:

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f\varphi)\eta_i\, ds\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |f||\eta_i|\, ds$$

como $|\eta_i| \le 1$ por la definición de la normal, entonces nos queda

$$\begin{aligned}
&\le \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{|x_i|}{\|x\|}\, ds \le \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1\, ds \\
&\le C\omega_N \varepsilon^{N-1} \\
&\longrightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

donde ω_N es el volumen de la bola unitaria en dimensión N. Así, cuando $\varepsilon \to 0$ y $N \ge 2$,

$$\int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega D_i f\, \varphi.$$

3.3. Propiedades de la derivada débil

Proposición 3.3.1 *Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son débilmente diferenciables, entonces $f + g$ es débilmente diferenciable y*

$$D_i(f+g) = D_i f + D_i g, \quad i = 1, \cdots, N.$$

Demostración:
Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega g\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= -\int_\Omega D_i f\,\varphi - \int_\Omega D_i g\,\varphi \\ &= -\int_\Omega (D_i f + D_i g)\,\varphi \\ &= -\int_\Omega (D_i(f+g))\,\varphi.\end{aligned}$$

■

Proposición 3.3.2 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es débilmente diferenciable y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λf es débilmente diferenciable y*

$$D_i(\lambda f) = \lambda(D_i f), \quad i = 1, \cdots, N.$$

Demostración:
Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Entonces

$$\int_\Omega (\lambda f)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lambda\int_\Omega (D_i f)\,\varphi = -\int_\Omega \lambda(D_i f)\,\varphi.$$

■

Proposición 3.3.3 *Fórmula de Leibnitz*
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es débilmente diferenciable y $\zeta \in C^1(\Omega)$, entonces ζf es débilmente diferenciable y

$$D_i(\zeta f) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} f + \zeta(D_i f).$$

Demostración: Sean $\zeta \in C^1(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega f\frac{\partial(\zeta\varphi)}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f\varphi\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega f\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx &= \int_\Omega f\frac{\partial(\zeta\varphi)}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega f\varphi\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\,dx \\ &= -\int_\Omega \left(\zeta D_i f + f\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx\end{aligned}$$

por lo tanto

$$D_i(\zeta f) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} f + \zeta(D_i f).$$

∎

Proposición 3.3.4 *Sean $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1 \cdots, \beta_n)$. f es $(|\beta| + |\alpha|)-$débilmente diferenciable si y sólo si f es $|\beta|-$diferenciable y $D_\beta f$ es $|\alpha|-$débilmente diferenciable y además*

$$D_\alpha(D_\beta f) = D_\beta(D_\alpha f) \text{ y } D_\alpha(D_\beta f) = D_{\beta+\alpha} f$$

Demostración: Sea $\varphi \in C_0^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega)$.

Proposición 3.3.5 *Fórmula de Leibnitz*

Si $\zeta \in C_0^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es $|\alpha|-$débilmente diferenciable entonces ζf es $|\alpha|-$débilmente diferenciable y

$$D_\alpha(\zeta f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_\beta \zeta D_{\alpha-\beta} f. \tag{3.6}$$

donde $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \frac{(|\alpha|)!}{(|\beta|)!(|\alpha| - |\beta|)!}$ *y $\beta \leq \alpha$ si $\beta_i \leq \alpha_i \, \forall i = 1, \cdots, N$.*

Demostración: (por inducción sobre $|\alpha|$).

Si $|\alpha| = 1$ la afirmación coincide con la de la proposición (3.3.3).

Si $|\alpha| > 1$ escribimos $\alpha = \gamma + \beta$ con $|\gamma| = 1$ y $|\beta| = |\alpha| - 1$. Por hipótesis de inducción, la fórmula de Leibnitz vale para β. Así,

$$
\begin{aligned}
D_\alpha(\zeta f) &= D_\gamma D_\beta(\zeta f) \text{ por } (3.3.4)\\
&= D_\gamma\left(\sum_{\delta\le\beta}\binom{\beta}{\delta}D_\delta\zeta D_{\beta-\delta}f\right)\\
&= \sum_{\delta\le\beta}\binom{\beta}{\delta}D_\gamma\left(D_\delta\zeta D_{\beta-\delta}f\right) \text{ por } (3.3.1) \text{ y } (3.3.2)\\
&= \sum_{\delta\le\beta}\binom{\beta}{\delta}\left(D_{\gamma+\delta}\zeta D_{\beta-\delta}f \;+\; D_\delta\zeta D_{\beta-\delta+\gamma}f\right) \text{ por } (3.3.3) \text{ y } (3.3.4)\\
&= \sum_{\gamma\le\varepsilon\le\alpha}\binom{\beta}{\varepsilon-\gamma}D_\varepsilon\zeta D_{\alpha-\varepsilon}f + \sum_{\varepsilon\le\beta}\binom{\beta}{\varepsilon}D_\varepsilon\zeta D_{\alpha-\varepsilon}f\\
&= \sum_{\varepsilon\le\alpha}\binom{\alpha}{\varepsilon}D_\varepsilon\zeta D_{\alpha-\varepsilon}f,
\end{aligned}
$$

$$
\text{ya que } \binom{\alpha}{\varepsilon} = \binom{\beta}{\varepsilon} + \binom{\beta}{\varepsilon-\gamma} \quad \text{si } \gamma\le\varepsilon\le\beta.
$$

■

I keep secret spaces
Around me to fill up those
Spaces with many
Special thoughts so
To fill many pockets
In the air around me
Locked to me floating
Like tiny invisible kites
And intricate clockwork
R.C. Abbekka

CAPÍTULO 4

Espacios de Sobolev

4.1. Definición y propiedades elementales

Definición 4.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sigue:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \,|\, D_\alpha f \text{ existe y } D_\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k\}. \tag{4.1}$$

En particular, nos interesan los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ dados por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \middle| D_i f \text{ existe y } D_i f \in L^p(\Omega)\ \forall i = 1, \cdots, N. \right\}$$

Denotamos

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Nota: Podemos utilizar indistintamente a $C_0^1(\Omega)$ o a $C_0^\infty(\Omega)$ como conjunto de funciones de prueba, ya que si $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, entonces podemos tomar una sucesión regularizante (ρ_n) tal y como está definida en (C.6) y, si extendemos por 0 a φ fuera de Ω, entonces la convolución $\rho_n * \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ para n suficientemente grande. Además, sabemos por (C.8) que $\rho_n * \varphi \to \varphi$ en $L^p(\Omega)$.

Lema 4.1.2 *$f \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 1$ si y sólo si f es débilmente diferenciable y $f, D_i f \in W^{k-1,p}(\Omega)$, donde $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Como $f \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces $\forall|\alpha| \leq k$ existe $D_\alpha f \in L^p(\Omega)$. En particular, $\forall|\alpha| \leq k-1$ existen las derivadas débiles $D_\alpha f$ y están en $L^p(\Omega)$ $\forall|\alpha| \leq k-1$ y además, para $|\alpha| = 1$ obtenemos que f es débilmente diferenciable. Por lo tanto, $f \in W^{k-1,p}(\Omega)$. Aplicando la proposición (3.3.4) con $|\alpha| \leq k-1$ y $\beta = e_i$ (donde e_i es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^N$) tenemos que $D_\beta f = D_i f$

$$D_\alpha(D_i f) = D_{\alpha+e_i} f \in L^p(\Omega) \quad \forall|\alpha| \leq k-1$$

así,

$$D_i f \in W^{k-1,p}(\Omega).$$

$\Leftarrow$) Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Tomamos un multiíndice $\alpha = \gamma+\beta$ con $|\alpha| = k = |\gamma|+|\beta|$ con $|\gamma| = 1$ y $|\beta| = k-1$.

usando de nuevo la proposición (3.3.4) se tiene que

$$D_\alpha f = D_{\beta+\gamma} f = D_\beta(D_i f) \quad \text{y como } D_i f \in W^{k-1,p}(\Omega), \text{ entonces } D_\beta(D_i f) \text{ existe y pertenece a } L^p(\Omega).$$

■

Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos una norma en este espacio dada por:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D_\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |D_\alpha u| & \text{si } p = \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $D_0 u = u$ y $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f = \inf\{a \in \mathbb{R} \cup \infty \,|\, f(x) \leq a \text{ c.t.p en } \Omega\}$.

Teorema 4.1.3 $W^{k,p}(\Omega) = \left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ *es un espacio vectorial normado* $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

Demostración: El hecho de que el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial se hereda de las proposiciones (3.3.1) y (3.3.2) y del hecho de que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.
Revisemos que (4.2) cumple con las propiedades de norma: Para $1 \leq p < \infty$:

i)

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0\le|\alpha|\le k}\int_\Omega |D_\alpha \lambda u|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[|\lambda|^p \sum_{0\le|\alpha|\le k}\int_\Omega |D_\alpha u|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= |\lambda| \left[\sum_{0\le|\alpha|\le k}\int_\Omega |D_\alpha u|^p\right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

ii) Claramente, si $u = 0$ entonces $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$. Por otro lado, si

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$$
$$\text{entonces} \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k}\int_\Omega |D_\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y como cada sumando es positivo

$$\int_\Omega |D_\alpha u|^p = 0 \text{ para cada } \alpha$$

y esto implica $|D_\alpha u| = 0 \quad$ c.t.p. y $\forall 0 \le |\alpha| \le k$.

iii) Desigualdad del triángulo:

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha u + D_\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p}$$
$$\le \left[\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D_\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D_\alpha v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right]^{1/p}$$
$$\le \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D_\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$$
$$= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

donde la primera desigualdad se obtuvo aplicando la desigualdad de Minkowski para espacios L^p y la segunda usando la desigualdad de Minkowski para $\mathbb{R}^N$.

El caso $p = \infty$ es análogo a éste. ∎

El espacio $W^{1,2}$, que es de hecho, el que más nos interesa, hereda de L^2 un producto escalar dado por:

$$\langle u,v\rangle_{W^{1,2}} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N}\langle D_i u, D_i v\rangle_{L^2}$$

y la norma inducida por él:

$$\| u \|_{W^{1,2}} = \left(\| u \|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \| D_i u \|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En lo subsecuente, denotaremos por $\|\cdot\|_{L^p}$ en lugar de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ siempre y cuando sea claro el conjunto en el cual estamos trabajando.

Teorema 4.1.4 *$W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración:
Sea (u_n) una sucesión Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$. Entonces, para todo $|\alpha| \leq k$, $(D_\alpha u_n)$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$.
Como $L^p(\Omega)$ es completo, entonces existen funciones $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tales que

$$D_\alpha u_n \to u_\alpha \text{ en } L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k$$

y

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Resta ver entonces que $u \in W^{k,p}(\Omega)$, con $D_\alpha u = u_\alpha\, \forall |\alpha| \leq k$. Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D_\alpha \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D_\alpha \varphi\, dx \qquad &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D_\alpha u_n)\varphi\, dx \\ = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx &\end{aligned}$$

ya que la función $u \mapsto \int_\Omega u\varphi$ es continua en $L^p(\Omega)$.
por lo tanto,

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

Así, $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. ∎

Corolario 4.1.5 *El espacio $W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$\langle u,v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega D_\alpha u D_\alpha v.$$

4.2. Espacio $W^{1,p}(\Omega)$ en dimensión 1

Antes de ver ejemplos de espacios $W^{k,p}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, nos interesa ver cómo se comporta el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ en $\Omega subset \mathbb{R}$. En particular, nos interesa una caracterización importante para estos espacios, que no se da para dimensiones mayores a 1. Empezamos con dos lemas, que nos servirán para dar dicha caracterización. Consideramos un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, acotado o no.
Definimos el espacio $L^1_{loc}(I)$ como el conjunto de funciones localmente integrables en I, es decir, $f \in L^1_{loc}(I)$ si f es integrable en todo subconjunto acotado de I. Definimos el espacio $C(I)$ como el conjunto de funciones continuas en I, y $C_0(I)$ como el conjunto de funciones continuas con soporte compacto en I.

Lema 4.2.1 *Sea $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que:*

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_0(I).$$

Entonces, existe una constante C tal que $f = C$ c.t.p.

Demostración: Fijamos una función $\psi \in C_0(I)$ tal que $\int \psi = 1$. Ahora bien, considero la función $h = w - (\int_I w)\psi$, donde $w \in C_0(I)$. Como h es continua, tiene soporte compacto y $\int_I h = 0$, entonces, h tiene una antiderivada con soporte compacto. Es decir, para toda función $w \in C_0(I)$ existe una $\varphi \in C^1_0(I)$ tal que:

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi.$$

Se deduce entonces que:

$$\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0 \qquad \forall w \in C_0(I)$$
$$\int_I \left[f - \int_I f\psi\right] w = 0 \qquad \forall w \in C_0(I)$$

y esto implica $f - \int_I f\psi = 0$ c.t.p., i.e. $f = C$ c.t.p. con $C = \int_I f\psi$. ■

Lema 4.2.2 *Sea $g \in L^1_{loc}(I)$. Para y_0 fija en I definimos:*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)\,dt, \qquad x \in I.$$

Entonces, $v \in C(I)$ y:

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C^1_0(I).$$

Demostración:

$$\int_I v(x)\varphi'(x)\,dx = \int_I \left[\int_{y_0}^{x} g(t)\,dt\right] \varphi'(x)dx = -\int_a^{y_0}\left(\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\,dt\right)dx$$
$$+\int_{y_0}^{b}\left(\int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt\right)dx$$

aplicando el teorema de Fubini nos queda:

$$\int_I v(x)\varphi'(x)\,dx = -\left[\int_a^{y_0} g(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)\,dx\right)dt\right] + \int_{y_0}^{b} g(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)\,dx\right)dtx$$
$$= -\int_I g(t)\varphi(t)\,dt.$$

■

Este lema nos da una propiedad bonita de los espacios $W^{1,p}(I)$: toda primitiva v de una función $g \in L^p(I)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ siempre y cuando $v \in L^p(I)$.

Teorema 4.2.3 *Sea $u \in W^{1,p}(I)$, entonces existe una función $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que:*

$$u = \tilde{u} \quad c.t.p.\ en\ I$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x Du(t)\,dt \qquad x, y \in \overline{I}.$$

Demostración: Fijamos $y_o \in I$ y definimos $\bar{u}(x) = \int_{y_o}^{x} Du(t)\,dt$. Por el lema (4.2.2) tenemos que:

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I (Du)\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

Por lo tanto $\int_I (u - \bar{u})\varphi' = 0\,\forall\varphi \in C_0^1(I)$. Ahora bien, por el lema (4.2.1) tenemos que $u - \bar{u} = C\,c.t.p.$ Tomando la función $\tilde{u}$ como $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ se tienen las propiedades deseadas. ■

Es importante remarcar que el hecho de tener un representante continuo es una propiedad que sólo es válida en dimensión 1.

4.3. Ejemplos

Retomemos ahora los ejemplos del capítulo anterior e investiguemos bajo qué condiciones pertenecen al espacio $W^{1,p}(\Omega)$.

Ejemplo 4.3.1

Sabemos que toda función f de clase $C^1(\Omega)$ es débilmente diferenciable. Si además es tal que $f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ entonces pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$. En particular, $C_0^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$.

Ejemplo 4.3.2

Sea $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$. Ya vimos en (3.2.2) que f es débilmente diferenciable. Como además f y $Df \in L^p(\Omega)\, \forall p$, entonces $f \in W^{1,p}(\Omega)$.
Los ejemplos (3.2.5) y (3.2.6) no tienen ni siquiera derivada débil, así que no pertenecen a $W^{1,p}(\Omega)$.

Ejemplo 4.3.3

Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^\alpha$ y $1 \leq p < \infty$. Separaremos el estudio en dos casos: $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| < 1\}$ y $\Omega_1 = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Para Ω:

Haciendo un estudio análogo al hecho en el ejemplo (3.2.7) se tiene que:

$$\|x\|^\alpha \in L^p(\Omega) \text{ si } \alpha p + N > 0$$

$$\text{y } \frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow (\alpha - 1)p + N > 0.$$

Sea v dada por:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\partial \|x\|^\alpha}{\partial x_i} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vimos en (3.2.7) que v es la i-ésima derivada débil de f. Por lo tanto, $f \in W^{1,p}(\Omega)$ si $(\alpha - 1)p + N > 0$.

Para Ω_1:

En este conjunto, la derivada débil coincide con la usual. Por otro lado, usando lo hecho en el ejemplo (3.2.7) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \|x\|^{\alpha p} = N\omega_N \int_1^\infty r^{\alpha p + N - 1} dr,$$

y por tanto,

$$f \in L^p(\Omega_1) \Leftrightarrow \alpha p + N < 0$$

y se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega_1) \Leftrightarrow (\alpha - 1)p + N < 0$$

donde ω_N es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$. En conclusión, $f \in W^{1,p}(\Omega_1)$ si y sólo si $(\alpha - 1)p + N < 0$.

Ejemplo 4.3.4

Sea $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ un subconjunto denso y numerable de $\Omega = B(0,1)$, la bola abierta en $\mathbb{R}^N$ y u la función dada por:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|x - r_k\|^{-\alpha} \qquad \alpha > 0 \text{ y } x \in \Omega$$

Dado que esta serie converge uniformemente, podemos derivar término a término, y lo único que tenemos que revisar es bajo qué condiciones u y $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega)$. Si nos fijamos en cada uno de sus términos como funciones u_k independientes, éstas "se parecen mucho" a la del ejemplo anterior. Se trata de la función "norma" trasladada. Así que, basándonos en el ejemplo (4.3.3) tenemos que:

1.
$$u_k \in L^p(\Omega) \text{ si y sólo si } -\alpha p + N > 0$$

2.
$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ si } (\alpha + 1)p - N < 0, \text{ es decir, si } (\alpha + 1)p < N.$$

Por lo tanto, podemos concluir que cada una de estas funciones $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si $(\alpha + 1)p < N$ o sea, si $\alpha < \frac{N-p}{p}$. Esto implica que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si $0 < \alpha < \frac{N-p}{p}$.

4.3.1. Otras propiedades interesantes

Proposición 4.3.5 *Si $\zeta \in C_0^k(\Omega)$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

Demostración: Sabemos por la proposición (3.3.5) que ζu es $|\alpha|-$débilmente diferenciable $\forall |\alpha| \leq k$. Como además ζ y $D_\alpha \zeta$ son continuas y tienen soporte compacto y $u \in W^{k,p}(\Omega)$ por hipótesis, entonces

$$D_\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_\beta \zeta D_{\alpha - \beta} u \in L^p(\Omega) \, \forall |\alpha| \leq k$$

de donde,

$$\zeta u \text{ y } D_\alpha(\zeta u) \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k.$$

Por lo tanto,

$$\zeta u \in W^{k,p}(\Omega).$$

■

Proposición 4.3.6 *Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Son equivalentes:*

i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

ii)Existe una constante C tal que:

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) Esto es muy fácil, basta tomar la desigualdad de Hölder, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| - \int_\Omega (D_i u) \, \varphi \right| &\leq \int_\Omega |(D_i u)\varphi| \\ &\leq \left(\int_\Omega |D_i u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} . \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i)Considero la forma lineal

$$L : \left(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p'}(\Omega)} \right) \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$L\varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

L es continua ya que, por hipótesis, L está acotada:

$$|L\varphi| = \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. L es lineal ya que la derivada es lineal. Sabemos por el teorema de Hahn-Banach que existe una extensión de L lineal y continua,

$$\tilde{L} : L^{p'}(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Usando el teorema de representación de Riesz para espacios L^p tenemos que existe un elemento $g \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$\tilde{L}v = \int_\Omega gv \quad \forall\, v \in L^{p'}(\Omega)$$

Así que en particular, $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = L\varphi = \tilde{L}\varphi = \int_\Omega g\varphi$$

de donde, $D_i u = -g$ y por lo tanto

$$u \in W^{1,p}(\Omega).$$

■

4.4. Regularizaciones y espacios $W^{k,p}(\Omega)$

Dadas $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ definimos la convolución de ρ y f, $\rho * f$ como sigue:

$$(\rho * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x-t) f(t)\, dt.$$

Entonces se tiene que $\rho * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Las propiedades de la convolución que utilizaremos aquí se enuncian en la tercera sección del apéndice.
Notación: Dada una función f definimos $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

Lema 4.4.1 *Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$, sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $\rho * f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y*

$$D_i(\rho * f) = \rho * D_i f \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Demostración: Supongamos que ρ tiene soporte compacto. Como $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces por el teorema (C.2) sabemos que $\rho * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ y usando el lema (C.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (\rho * f) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\tilde{\rho} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f D_i(\tilde{\rho} * \varphi) \quad \text{(usando el teorema (C.3))} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} D_i f(\tilde{\rho} * \varphi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} (D_i f * \rho)\varphi.
\end{aligned}$$

ya que $f \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ y por el corolario (C.4), $\tilde{\rho} * \varphi \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$.
Por lo tanto, $\rho * f \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ y $D_i(\rho * f) = \rho * (D_i f)$.
Ahora bien, si ρ no tiene soporte compacto, introducimos una sucesión $\delta_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tal que $\delta_n \to \rho$ en $L^1(\mathbf{R}^N)$ (sabemos que dicha sucesión existe por el teorema (B.6)). Se tiene por lo anterior

$$\delta_n * f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ y } D_i(\delta_n * f) = \delta_n * (D_i f).$$

Como $\delta_n * f \to \rho * f$ en $L^p(\mathbf{R}^N)$ y $D_i(\delta_n * f) \to D_i(\rho * f)$ en $L^p(\mathbf{R}^N)$ (por el teorema (C.2)) entonces usando el teorema de convergencia dominada se tiene que $\rho * f \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ y

$$D_i(\rho * f) = \rho * D_i f \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

■

En muchas de las demostraciones que hemos visto, y aún más en las que veremos, tratamos siempre de trabajar en dominios compactos (¡es más fácil!). En caso de que esto no suceda, inventamos algo (como hacen a veces los matemáticos) para que así sea. En este caso, introducimos una sucesión de funciones que "truncan" nuestra función original, formalmente,

Definición 4.4.2 *Sea ζ una función tal que $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ y:*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si \ |x| \leq 1 \\ 0 & si \ |x| \geq 2 \end{cases}$$

Definimos la sucesión $(\zeta_n)(x) = \zeta(\frac{x}{n})$, $n = 1, 2, ...$, y llamaremos a (ζ_n) "sucesión truncante".

Definición 4.4.3 *Una sucesión regularizante es una sucesión de funciones (ρ_n) de clase $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ con las siguientes propiedades:*

i) $\rho_n(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^N$

ii) $supp \, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$

iii) $\int_{\mathbf{R}^N} \rho_n(x) = 1$

En este trabajo, utilizaremos la llamada "sucesión regularizante estándar": sea ρ la función:

$$\rho(x) = \begin{cases} exp(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}) & para \ \|x\| \leq 1, \\ 0 & para \ \|x\| > 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx), \text{ con } C = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho\right)^{-1}.$$

Dada una función f definida en Ω definimos:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Lema 4.4.4 *Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ entonces: $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $D_i(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha D_i u + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}$.*

Demostración: Tomamos $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \alpha u\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega u \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha\varphi - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi\right] \\
&= -\int_\Omega (D_i u)\alpha\varphi + u\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right)\varphi \qquad \text{ya que } \alpha\varphi \in C_0^1(\Omega) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\left(\alpha D_i u + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u\right)}\varphi.
\end{aligned}$$

■

Corolario 4.4.5 *El mismo lema sigue siendo válido si tomamos ahora $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ y $supp\,\alpha \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ donde $\Gamma = \partial\Omega$.*

Demostración: Como $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\nabla\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ entonces tanto α como $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ están acotadas para toda $i = 1, \cdots, N$. De ahí que, usando el hecho de que tanto u como $D_i u \in L^p(\Omega)$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{\alpha u}|^p = \int_\Omega |\alpha u|^p \le M \int_\Omega |u|^p < \infty$$

de donde $\overline{\alpha u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Análogamente, $D_i(\alpha u) \in L^p(\mathbb{R}^N)\ \forall i = 1, \cdots, N$.
Por otro lado, como la función α es de clase $C^1(\mathbb{R}^N)$ y $supp\,\alpha \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$, entonces se tiene que alrededor de Γ existe una vecindad tal que $\alpha = 0$. Entonces, $supp\,\alpha|_\Omega \subset \omega$ de tal forma que $\omega \subset\subset \Omega$ (es decir, ω es un abierto tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$ y $\overline{\omega}$ es compacto). Así, podemos repetir exactamente la misma demostración que la del lema anterior. ■

Teorema 4.4.6 *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(\varphi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tal que:*

$$\varphi_n|_\Omega \to u \quad L^p(\Omega)$$

$$\nabla \varphi_n|_\omega \to Du \quad en\ L^p(\omega)^N\ para\ todo\ \omega \subset\subset \Omega.$$

Donde $\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω es un abierto tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$ y $\overline{\omega}$ es compacto.

Demostración: Sea

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

y sea

$$g_n = \rho_n * \bar{u}$$

donde ρ_n es una sucesión regularizante (definida tal y como en (4.4.3)). Sabemos por el teorema (C.2) que $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que $g_n \to \bar{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Tenemos que probar que $\nabla \varphi_n|_\omega \to D\bar{u}|_\omega$ en en $L^p(\omega)^N$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$. Fijamos una función $\alpha \in C_0^1(\Omega), 0 \leq \alpha \leq 1,$ tal que $\alpha = 1$ en una vecindad de ω. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} supp\,(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) &= supp\,(\rho_n * (1 - \overline{\alpha})\bar{u}) \\ &\subset \overline{supp\,\rho_n + supp\,(1 - \overline{\alpha})\bar{u}} \\ &\subset B\left(0, \frac{1}{n}\right) + supp\,(1 - \overline{\alpha}) \\ &\subset \mathbb{R}^N \setminus \omega \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. De donde,

$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} \quad \text{en } \omega. \tag{4.4}$$

Ahora bien, usando el lema (4.4.4) y el lema (4.4.1) es fácil ver que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \overline{(\alpha D_i u + (\frac{\partial \alpha}{\partial x_i})u)}$$

Y entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \longrightarrow \overline{\alpha D_i u + (\frac{\partial \alpha}{\partial x_i})u} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N)$$

Observando el hecho de que $\alpha = 1$ en ω, de donde $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0$ en ω:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \longrightarrow D_i u \quad \text{en } L^p(\omega)$$

Con esto tenemos ya una sucesión de funciones $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que $\nabla g_n \longrightarrow Du$ en $L^p(\omega)^n$. Resta encontrar ahora una sucesión que haga lo mismo pero que tenga soporte compacto.

Para esto, truncamos la sucesión g_n como sigue: definimos

$$\varphi_n = \zeta_n g_n = \zeta_n(\rho_n * u)$$

donde ζ_n está definida como en (4.4.2). Tenemos que probar que $\varphi_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y que $\nabla \varphi_n|_\omega \to Du$ en $L^p(\omega)^n$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$.

En efecto, tenemos que

$$\varphi_n - u = \zeta_n[(\rho_n * \bar{u}) - \bar{u}] + [\zeta_n \bar{u} - \bar{u}]$$

usando la desigualdad del triángulo

$$\| \varphi_n - u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| (\rho_n * \bar{u}) - \bar{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \| \zeta_n \bar{u} - \bar{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Usando de nuevo el teorema (C.2) se tiene que el primer sumando del lado derecho tiende a 0 si $n \to \infty$. El segundo sumando tiende a 0 ya que la sucesión $\zeta_n(x)\bar{u}(x) \to \bar{u}(x)$ puntualmente.

Así que

$$\| \varphi_n - u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por otro lado,

$$\| \varphi_n - u \|_{L^p(\Omega)} \leq \| \varphi_n - u \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

se sigue que

$$\| \varphi_n - u \|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}(\rho_n * \bar{u}) + \zeta_n(\rho_n * D_i \bar{u}).$$

Entonces, usando la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned}
\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - D_i u \|_{L^p(\omega)} &= \| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}(\rho_n * \bar{u}) + \zeta_n(\rho_n * D_i\bar{u}) - D_i u \|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \| \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_i}(\rho_n * \bar{u}) \|_{L^p(\omega)} + \| \zeta_n(\rho_n * D_i\bar{u}) - D_i u \|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \frac{C}{n} \| \rho_n * \bar{u} \|_{L^p(\omega)} + \| (\rho_n * D_i\bar{u}) - D_i u \|_{L^p(\omega)} \\
&\leq \frac{C}{n} \| \rho_n \|_{L^1(\omega)} \| \bar{u} \|_{L^p(\omega)} + \| (\rho_n * D_i\bar{u}) - D_i u \|_{L^p(\omega)} . \\
&\leq \frac{C}{n} + \| (\rho_n * D_i\bar{u}) - D_i u \|_{L^p(\omega)} .
\end{aligned}$$

Usando de nuevo el teorema (C.2), se tiene que$(\rho_n * D_i\bar{u}) \to D_i\bar{u}$ en $L^p(\omega)$ como además $D_i\bar{u} = D_i u$ en ω, entonces el lado derecho de la desigualdad tiende a 0 si $n \to \infty$.
De donde, $\nabla\varphi_n|_\omega \to Du|_\omega$ en $L^p(\omega)^n$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$. ■

4.5. Otras propiedades

Con las herramientas que hemos desarrollado hasta ahora podemos dar algunas propiedades útiles de estos espacios, es decir, queremos saber bajo qué condiciones una composición de funciones en $W^{k,p}(\Omega)$ sigue estando en $W^{k,p}(\Omega)$, cuándo el valor absoluto o las partes positiva y negativa de una función de este espacio se quedan en este espacio, qué significa que una función tenga derivada débil idénticamente cero, etc. A estas cuestiones responderemos en esta sección.

Proposición 4.5.1 *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M \, \forall s \in \mathbb{R}$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \;\; y \;\; D_i(G \circ u) = (G' \circ u) D_i u.$$

Demostración: Usando el teorema del valor medio se tiene que

$$G(s) - G(0) = G'(\xi)s \quad \text{para alguna } \xi \in \mathbb{R}$$

así que

$$|G(s)| \leq Ms \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

en particular,

$$|G \circ u(x)| \leq M|u(x)| \quad \forall x \in \Omega.$$

Ahora bien, como $u \in L^p(\Omega)$, se sigue que $G \circ u \in L^p(\Omega)$. Así mismo,

$$|G'(u(x))||D_i u(x)| \leq M|D_i u(x)| \quad \forall x \in \Omega$$

y esto implica que $(G' \circ u)D_i u \in L^p(\Omega)$ para toda $1 \leq p \leq \infty$. Consideremos dos casos:

i) $1 \leq p < \infty$.

Por el teorema (4.4.6) podemos tomar una sucesión de funciones $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ (y extrayendo una subsucesión convergente, $u_n \to u$ c.t.p. en Ω) y $\nabla u_n|_\omega \to Du|_\omega$ en $L^p(\omega)^n \, \forall \omega \subset\subset \Omega$. Entonces se sigue que

$$\int_\Omega (G \circ u_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left[(G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right] \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Por el teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$G \circ u_n \to G \circ u \text{ en } L^p(\Omega)$$
$$\text{y } (G' \circ u) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|_\omega \longrightarrow (G' \circ u) D_i u\Big|_\omega \text{ en } L^p(\omega) \; \forall \omega \subset\subset \Omega$$

de donde

$$\int_\Omega (G \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega [(G' \circ u) D_i u] \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{4.5}$$

ii) $p = \infty$.

Para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, tomamos un abierto Ω' tal que $supp\varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces $u \in W^{1,p}(\Omega') \; \forall 1 \leq p < \infty$ y se deduce entonces (4.5) por el caso anterior.

∎

Corolario 4.5.2 *Si $f \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ entonces $|f| \in W^{1,p}(\Omega)$ también y:*

$$D_i|f(x)| = \begin{cases} D_i f(x) & si\ f(x) > 0 \\ 0 & si\ f(x) = 0 \\ -D_i f & si\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Demostración: Para $\varepsilon > 0$, sea $\psi_\varepsilon(f) = (f^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$. Esta función cumple las hipótesis del lema anterior, por lo tanto $\forall\varphi \in C_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(f(x))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = -\int_\Omega \frac{f(x)D_if(x)}{((f^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\varphi(x).$$

Y usando el teorema de convergencia dominada tenemos que cuando $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) &= -\int_\Omega \frac{f(x)D_if(x)}{|f(x)|}\varphi(x)\\ &= -\int_\Omega D_i|f(x)|\varphi(x) \quad \text{con la definición que dimos de } D_i|f|.\end{aligned}$$

Además sabemos que si $f \in L^p(\Omega)$, $|f| \in L^p(\Omega)$ también. Por otro lado, por la definición que dimos de $D_i|f|$, como $D_if \in L^p(\Omega)$, se sigue que $D_i|f| \in L^p(\Omega)$. De donde si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ se sigue que $|f| \in W^{1,p}(\Omega)$. ∎

Teorema 4.5.3 *Cambio de variable*
Sean Ω y Ω' dos abiertos de $\mathbf{R}^N$ y sea $F : \Omega' \to \Omega$ una función biyectiva, $x = F(y)$ tal que

$$F \in C^1(\Omega',\Omega), \qquad F^{-1} \in C^1(\Omega,\Omega'),$$

$$|Jac\,F(x)| \leq C'\,\forall y \in \Omega' \quad y \quad |Jac\,F^{-1}(x)| \leq C\,\forall x \in \Omega$$

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \circ F \in W^{1,p}(\Omega')$ y además

$$D_j(u\circ F)(y) = \sum_i D_iu(F(y))\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \qquad \forall j = 1,\cdots,N$$

Demostración:
El hecho de que $|JacF(x)| \leq C'$ y que $|Jac\,F^{-1}(x)| \leq C$ nos aseguran que $D_i(u\circ F) \in L^p(\Omega')\,\forall i = 1,\cdots,N$. Por otro lado, escogemos una sucesión $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to Du$ en $L^p(\omega)^N$ $\forall\omega \subset\subset \Omega$. Tenemos que:

$$\int_{\Omega'}(u_n\circ F)|Jac\,F| = \int_\Omega u_n(x)$$

de donde

$$\int_{\Omega'}(u\circ F)|Jac\,F| = \int_\Omega u(x)$$

ya que podemos usar el teorema de convergencia dominada. De manera análoga,

$$\int_{\Omega'} (D_i u \circ F) \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \int_{\Omega} D_i u(x).$$

Se sigue que $u_n \circ F \to u \circ F$ en $L^p(\Omega')$ y

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ F\right) \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \longrightarrow (D_i u \circ F) \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \quad \text{en } L^p(\omega')\, \forall \omega' \subset\subset \Omega'.$$

Así que, dada una función $\psi \in C_0^1(\Omega')$ se cumple que

$$\int_{\Omega'} (u_n \circ F) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\, dj = -\int_{\Omega'} \sum_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ F\right) \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\, \psi\, dy$$

y en el límite, obtenemos el resultado.
Como $u \in L^p(\Omega)$, se tiene que

$$\int_{\Omega'} |u \circ F|^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty$$

de manera que $(u \circ F) \in L^p(\Omega)$. De forma similar, el hecho de que $|Jac F(x)| \leq C'$ y que $|Jac\, F^{-1}(x)| \leq C$ nos aseguran que $D_i(u \circ F) \in L^p(\Omega')\, \forall i = 1, \cdots, N$.

■

Capítulo 5

Extensiones y Espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

5.1. Operadores de extensión

El objetivo de esta sección es estudiar bajo qué condiciones podemos extender una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a una que viva en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Observemos que en general, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y extendemos a u como cero fuera de Ω, la extensión no tiene porqué vivir en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Notación sea $x \in \mathbb{R}^N$ denotamos:
$x = (x', x_N)$ con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\|x'\| = (\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \,|\, x_N > 0\}$$

$$Q = \{x = (x', x_N) \,|\, \|x'\| < 1 \text{ y } |x_N| < 1\}$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+ \cap Q_0$$

$$Q_0 = \{x = (x', x_N) \,|\, \|x'\| < 1,\, x_N = 0\}$$

Recordemos una definición que ya habíamos dado en el capítulo 1:

Definición 5.1.1 *Decimos que Ω es de clase C^1 si $\forall x \in \Gamma = \partial\Omega$ existe una vecindad U_x en $\mathbb{R}^N$ y una función $H : Q \to U_x$ biyectiva tal que:*

$$H \in C^1(\overline{Q}) \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U_x}) \quad H(Q_+) = U_x \cap \Omega \quad H(Q_0) = U_x \cap \Gamma.$$

En general, decimos que $\partial\Omega$ es de clase C^k, $k = 0, 1, \cdots$ si para todo $x \in \partial\Omega$ existe una función $h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que salvo una reordenación y una reorientación de los ejes se tiene que

$$\Omega \cap B_r(x) = \{y \in B_r(x) \,|\, h(y_1, \cdots, y_{N-1}) < y_N\}.$$

$\partial\Omega$ es de clase C^∞ o suave si es de clase C^k para toda k.

Lema 5.1.2 *Sea $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Definimos en Q la función u^* extendida por reflexión, es decir:*

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & si\ x_N \geq 0 \\ u(x', -x_N) & si\ x_N < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

entonces, $u^* \in W^{1,p}(Q)$ y

$$\| u^* \|_{L^p(Q)} \leq 2 \, \| u \|_{L^p(Q_+)}$$

$$\| u^* \|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(Q_+)}$$

Demostración: Afirmamos que:

$$D_i(u^*) = (D_i u)^* = \begin{cases} D_i u(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ D_i u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

$$i = 1, \cdots, N-1$$

$$D_N(u^*) = (D_N u)^\circ = \begin{cases} D_N u(x', x_N) & \text{si } x_N \geq 0 \\ -D_N u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0 \end{cases} \tag{$**$}$$

Definimos también $\eta_k(t) = \eta(kt)$ con $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \cdots$ donde η es una función fija de clase $C^\infty(\mathbf{R})$ tal que:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

Demostración de $(*)$:
Tomamos $\varphi \in C_0^1(Q)$.Para $1 \leq i \leq N-1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{Q \cap \mathbb{R}_+^N} u(x', x_N) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x', x_N) + \int_{Q \cap \mathbb{R}_-^N} u(x', -x_N) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x', x_N) \\ &= \int_{Q_+} u(x', x_N) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x', x_N) + \int_{Q_+} u(x', x_N) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x', -x_N) \\ &= \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$ e hicimos el cambio de variable $y = -x_N$.
Observemos que en general, ψ no tiene por qué ser una función de clase $C_0^1(Q_+)$, así que debemos suavizarla. Para esto, definimos una nueva función $\tilde{\eta} : \mathbb{R}^N \to \mathbf{R}$ tal que $\tilde{\eta}_k(x) = \eta_k(x_N)$ donde x_N denota la proyección en la

N–ésima coordenada. De esta forma, $\tilde{\eta}_k\psi \in C_0^1(Q_+)$, y ahora sí, podemos usarla como función de prueba:

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\eta}_k\psi) = -\int_{Q_+} D_i u\,(\tilde{\eta}_k\psi)$$

$$\text{pero } \frac{\partial \tilde{\eta}_k}{\partial x_i} = 0 \text{ así que}$$

$$\int_{Q_+} u\left(\tilde{\eta}_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = -\int_{Q_+} D_i u\,(\tilde{\eta}_k\psi)$$

y usando el teorema de convergencia dominada

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} (D_i u)\,\psi \tag{5.4}$$

$$\text{pero } \int_{Q_+} (D_i u)\psi = \int_Q (D_i u)^*\varphi. \tag{5.5}$$

Así que combinando (5.3) y (5.4) se obtiene

$$\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} (D_i u)\psi = -\int_Q (D_i u)^*\varphi$$

que es $(*)$.
Resta probar $(**)$.
Sea $\varphi \in C_0^1(Q)$. Haciendo de nuevo un cambio de variable, obtenemos

$$\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N}$$

donde $\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$.
Usando el teorema del valor medio tenemos que:

$$|\chi(x', x_N) - \chi(x', 0)| = |\chi'(x', \xi)|\,|x_N|$$

para alguna $\xi \in (0, x_N)$. Ahora bien, si pensamos por un momento a $\chi(x', \cdot)$ como una función de $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ (esto es, dejamos fija la variable x'), se tiene que χ es diferenciable en $[-1, 1]$, y su derivada es continua, así que alcanza un máximo M. Como además $\chi(x', 0) = 0$ entonces

$$|\chi(x', x_N)| \leq M|x_N|.$$

Además $\tilde{\eta}_k\chi \in C_0^1(Q_+)$ así que

$$\int_Q u\frac{\partial}{\partial x_N}(\tilde{\eta}_k\chi) = -\int_{Q_+} (D_N u)(\tilde{\eta}_k\chi)$$

ahora bien,

$$\frac{\partial}{\partial x_N}\tilde{\eta}_k\chi(x) = \frac{\partial\tilde{\eta}_k}{\partial x_N}(x)\chi(x) + \tilde{\eta}_k(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_N}(x)$$
$$= k\eta'(kx_N)\chi(x) + \tilde{\eta}_k(x)\frac{\partial\chi}{\partial x_N}(x)$$

así que queremos probar que

$$\int_{Q_+} u(k\eta'(kx_N)\chi) \longrightarrow 0 \text{ si } k\to\infty$$

$$\left|\int_{Q_+} u\, k\eta'(kx_N)\,\chi\right| \le k\int_Q M|u|\,|\eta'(kx_N)|\,|x_N|$$
$$\le k\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} M|u|\,|\eta'(kx_N)|\,|x_N|$$
$$\le kC\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|$$
$$\longrightarrow 0 \text{ si } k\to\infty$$

de donde

$$\int_{Q_+} u\,\eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} D_N u\,(\eta_k\chi)$$

y pasando al límite (usando el teorema de convergencia dominada)

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+}(D_N u)\,\chi$$

pero ahora

$$\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+}(D_N u)\,\chi = -\int_Q (D_N u)^\circ\,\varphi$$
$$\int_Q u^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = -\int_Q (D_N u)^\circ\,\varphi$$

Además, se cumple que

$$\int_Q |u^*|^p \le 2\int_{Q_+}|u|^p$$
$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \le 2\,\|u\|_{L^p(Q_+)}$$

Y se cumple lo mismo para las derivadas débiles, de donde,

$$\| u^* \|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2 \, \| u \|_{W^{1,p}(Q_+)} \, .$$

■

Nota: Si cambiamos Q_+ por $\mathbb{R}^N_+$ la demostración es análoga.

Teorema 5.1.3 *Supongamos que Ω es de clase C^1 con $\Gamma = \partial\Omega$ acotado (o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Entonces existe un operador lineal $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$*

i) $Pu\big|_\Omega = u$

ii) $\| Pu \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \| u \|_{L^p(\Omega)}$

iii) $\| Pu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$

donde la constante C depende únicamente de Ω. P se llama un operador de extensión.

Demostración: Como Γ es compacto y de clase C^1 entonces existen abiertos U_i de $\mathbb{R}^N$ tales que $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k U_i$ y existen funciones biyectivas $H_i : Q \to U_i$ tales que:

$$H_i \in C^1(\overline{Q}) \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U_i}) \quad H(Q_+) = U_i \cap \Omega \quad H(Q_0) = U_i \cap \Gamma$$

Podemos tomar entonces una partición de unidad subordinada a esta cubierta, sabemos por (D.1) que existen funciones $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que:

i) $0 \leq \theta_i \leq 1 \; \forall i = 0, 1, \cdots, k$ y $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}^N$

ii) $supp\, \theta_i$ es compacto y $supp\, \theta_i \subset U_i \; \forall i = 1, \cdots k$
$supp\, \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$

y si Ω es abierto y acotado, entonces $\theta_0\big|_\Omega \in C_0^\infty$.
Más aún, podemos escribir

$$u = \sum_{i=0}^k \theta_i u = \sum_{i=0}^k u_i, \quad \text{donde } u_i = \theta_i u.$$

Vamos a extender a cada u_i como sigue:

a) Extensión de u_o:

$$\bar{u}_0(x) = \begin{cases} u_o(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

Observemos lo siguiente:

$\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ por construcción.

$\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ya que:

$$\nabla \sum_{i=0}^{k} \theta_i = \nabla 1 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^{k} \nabla\theta_i$$

pero cada una de éstas tiene soporte compacto, así que $\nabla\theta_0$ también. Como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se sigue por el corolario (4.4.5) que $\bar{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $D_i\bar{u}_0 = \theta_0\overline{D_i u} + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\bar{u}$.

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_0|^p = \int_\Omega |u_0|^p = \int_\Omega |\theta_0 u|^p \leq \int_\Omega |u|^p$$

y además,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |D_i\bar{u}_0|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\theta_0\overline{D_i u} + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\bar{u}|^p \\ &\leq \int_\Omega |\theta_0 D_i u + \frac{\partial\theta_0}{\partial x_i} u|^p \\ &\leq C\left[\int_\Omega |\theta_0|^p |D_i u|^p + \int_\Omega |\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}|^p |u|^p\right] \end{aligned}$$

de donde,

$$\| \bar{u}_0 \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

b) Extensión de u_i, $i = 1, \cdots, k$.

Consideramos la restricción de u a $U_i \cap \Omega$ y "trasladamos" esto a Q_+ con la ayuda de H_i. Es decir, sea $v_i(y) = u(H_i(y))$ con $y \in Q_+$.

Sabemos por el teorema de cambio de variable que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. Ahora extendemos a v_i por reflexión a todo Q usando el lema (5.1.2). Formalmente, sea v_i^* la función dada por:

$$v_i^*(x', x_N) = \begin{cases} v_i(x', x_N) & \text{si } x_N \geq 0 \\ v_i(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

y sabemos por el mismo lema que $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$.

Ahora, regresamos v_i^* a U_i con H_i^{-1} es decir, definimos:

$$w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x)) \text{ con } x \in U_i$$

Se cumple que $w_i \in W^{1,p}(U_i)$, $w_i = u$ en U_i y además $\| w_i \|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}$. Así que finalmente, para $x \in \mathbf{R}^N$, definimos:

$$\hat{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) w_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R}^N \setminus U_i \end{cases}$$

de manera que, usando de nuevo el lema (4.4.4) se tiene:

$$\hat{u}_i(x) \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

$$\hat{u}_i(x) = u_i(x) \, \forall x \in \Omega$$

y

$$\| \hat{u}_i \|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}$$

En conclusión, tomando el operador $Pu = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i$ se cumple lo que queríamos.

■

5.2. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

5.2.1. Definición y ejemplo

Definición 5.2.1 *Definimos a $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la cerradura del subespacio $C_0^\infty(\Omega)$ en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$.*
Denotaremos en particular,

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

La definición de arriba puede reescribe como:

$$f \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si } \exists (f_n) \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_{W^{1,p}} = 0.$$

Para darnos una idea más clara de cómo son las funciones que viven en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ empezamos esta sección con un ejemplo.

Ejemplo 5.2.2

Sea $\Omega = B(0,1)$, f una función tal que $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y sea $f = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración:

Sea $\lambda < 1$, tomamos $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Entonces $f_\lambda \in C_0^1(\Omega)$ ya que $f_\lambda(x) = 0$ si $\lambda x > 1$. Se sigue por (C.8) que $f_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ya que es el límite de las regularizaciones que sabemos que son clase $C_0^\infty(\Omega)$.

Ahora bien, como f es continua, entonces

$$\lim_{\lambda \to 1} f_\lambda(x) = \lim_{\lambda \to 1} f(\lambda x) = f(x) \quad \text{puntualmente.}$$

$$\text{y } D_i f_\lambda(x) = \lambda \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x_i} \overset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad \text{también puntualmente}$$

De donde, usando el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_{\lambda \to 1} \int_\Omega f_\lambda(x) = \int_\Omega \lim_{\lambda \to 1} f_\lambda(x) = \int_\Omega f(x)$$

$$\text{y } \lim_{\lambda \to 1} \int_\Omega D_i f_\lambda(x) = \int_\Omega \lim_{\lambda \to 1} D_i f_\lambda(x) = \int_\Omega D_i f(x).$$

Así, $f_\lambda \to f$ en la norma $W^{1,p}(\Omega)$. Como $f_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ es por definición, cerrado, entonces $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

¿Será cierto que toda función que se anula en la frontera vive en $W_0^{1,p}(\Omega)$? ¿Qué condiciones tiene que cumplir una función que vive en este espacio?

5.2.2. Caracterizaciones del espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Lema 5.2.3 *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ con $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ y compacto. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración: Fijemos un abierto ω tal que $\operatorname{supp} u \subset \omega \subset\subset \Omega$. Elegimos $\alpha \in C_0^1(\omega)$ tal que $\alpha = 1$ en el $\operatorname{supp} u$. Por otro lado, sabemos por el teorema (4.4.6) que existe una sucesión $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\nabla u_n \to Du$ en $L^p(\omega)^N$.

Por un lado,

$$\alpha u_n \to \alpha u \text{ en } L^p(\Omega)$$

y como $\operatorname{supp} u \subset \omega$ entonces $\operatorname{supp} Du \subset \omega$ y

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(\alpha u_n) - D(\alpha u)|^p &= \int_\omega |\nabla(\alpha u_n) - D(\alpha u)|^p \\
&\leq \int_\omega |\nabla \alpha|^p |u_n - u|^p + |\alpha|^p |\nabla u_n - Du|^p \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{ya que } \nabla u_n \to Du \text{ en } L^p(\omega)^N.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha u_n \to \alpha u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.
Como $\alpha u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, se sigue que $\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pero $\alpha = 1$ en *supp* u. De donde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

Ahora estamos en condiciones de dar dos caracterizaciones importantes de estos espacios.

Teorema 5.2.4 *Sea Ω de clase C^1, $\Gamma = \partial\Omega$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

i) $u = 0$ *en* Γ

ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) Supongamos primero que *supp* u es acotado. Fijamos una función $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1 \\ t & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases} \qquad \text{con } |g(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definimos también a

$$u_n(x) = \frac{1}{n} g(nu(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u(x)| \leq \frac{1}{n} \\ u(x) & \text{si } |u(x)| \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

Queremos ver que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$. Es claro que las funciones u_n son débilmente diferenciables, ya que son composición de funciones débilmente diferenciables (esto se sigue de la prueba de la proposición (4.5.1)). Así que sólo resta probar que tanto u_n como $D_i u_n$ viven en $L^p(\Omega)$.

$$|u_n| = |\frac{1}{n} g(nu(x))| \leq \frac{1}{n} \cdot n|u(x)| \leq |u(x)|$$

y como $u \in L^p(\Omega)$ entonces $u_n \in L^p(\Omega)$.
Por otro lado, $D_i u_n = \frac{1}{n} g'(nu(x)) \cdot D_i u$. Notemos que $g'(x) = 0$ excepto en los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,2]$. Pero estos intervalos son compactos y como g es de clase $C^1(\mathbb{R})$, $g'(x)$ alcanza su máximo en $[-2,-1] \cap [1,2]$. De manera que

$$\int_\Omega |D_i u_n|^p \leq M \int_\Omega |D_i u|^p \quad \forall i = 1, \cdots N$$

de donde $D_i u_n \in L^p(\Omega)$.
Gracias al teorema de convergencia dominada, se tiene que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Ahora bien, resta ver que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Observemos que *supp* $u_n \subset \{x \in \Omega \mid |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$.

Como estamos suponiendo a *supp* u acotado, entonces *supp* u_n es compacto, y por el lema (5.2.3) $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de donde se sigue que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Por otro lado, si *supp* u no es acotado, entonces "truncamos" a la función u de la siguiente forma: Definimos la función $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ como sigue:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

y sea $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$. Proponemos $u_n(x) = \zeta_n(x)u(x)$. En este caso, claramente el *supp* u_n es compacto en Ω para cada n, de donde $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como además $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
ii) $\Rightarrow$ i) Sabemos que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y Ω de clase C^1. Usando el mismo método que el del teorema de extensión (5.1.3), demostrar que

$$\text{si } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ entonces } u = 0 \text{ en } \Gamma$$

equivale a demostrar que

$$\text{si } u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(Q_+) \text{ entonces } u = 0 \text{ en } Q_0.$$

Sabemos que existe una sucesión $u_n \in C_0^1(Q_+)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(Q_+)$. Para $(x', x_N) \in Q_+$, usando el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$|u_n(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt$$

y entonces, para $0 < \varepsilon < 1$:

$$\int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon |u_n(x', x_N)|\, dx_N dx' \leq \int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt dx' dx_N$$
$$\int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon |u_n(x', x_N)|\, dx_N dx' \leq \varepsilon \int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt dx'$$

Y usando el teorema de convergencia dominada, cuando $n \to \infty$ y ε fija tenemos

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon |u(x', x_N)|\, dx_N dx' \leq \int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon |D_N u(x', t)|\, dt dx'.$$

Ahora bien, por un lado,

$$\int_{\|x'\|<1} \int_0^\varepsilon |D_N u(x', t)|\, dt dx' \longrightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \to 0$$

por el otro, usando el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\int_{\|x'\|<1}|u((x',x_N)|\,dx'dx_N \longrightarrow \int_{\|x'\|<1}|u(x',0)|\,dx' \quad \text{si } \varepsilon\to 0$$

de donde $|u(x',0)| = 0\,\forall x'$ con $\|x'\|<1$, es decir, $u=0$ en Q_0. ∎

Este teorema nos revela el importante papel que juegan los espacios $W_0^{1,p}(I)$ en ecuaciones diferenciales y particularmente en nuestro problema inicial (1.1): dado que en (1.1) pedimos a nuestra función que se anule en la frontera, sabemos que cualquier solución de (1.1) vivirá en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. De ahí que nos resulte vital el conocer a profundidad dichos espacios, para poder decir propiedades útiles de nuestras funciones solución.

Teorema 5.2.5 *Sea Ω de clase C^1 y $u\in L^p(\Omega)$ con $1<p<\infty$. Son equivalentes:*

i) $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) *Existe una constante C tal que:*

$$\left|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \le C\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

iii) *La función definida por:*

$$\overline{u}(x)=\begin{cases} u(x) & si\ x\in\Omega\\ 0 & si\ x\in\mathbf{R}^N\setminus\Omega\end{cases}$$

pertenece a $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ y en este caso $D_i\overline{u(x)}=\overline{D_iu(x)}$.

Demostración:

i) ⇒ ii) Sea $u_n\in C_0^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Tomamos $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y usando la desigualdad de Hölder

$$\left|\int_\Omega u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| = \left|-\int_\Omega\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\right| \le \|Du_n\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Tomando límites, por la continuidad de la función $u\mapsto\int uv$, $v\in L^{p'}(\Omega)$ obtenemos **ii)**.

ii) ⇒ iii) Sea $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, se tiene (de nuevo usando la desigualdad de Hölder)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\bar u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \le C\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}\le C\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbf{R}^N)}$$

Esto implica, por el teorema (4.3.6) que $\bar u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

iii) $\Rightarrow$ i) Así como hicimos en el teorema anterior, podemos "trasladar" este problema al siguiente:

Sea $u \in L^p(Q_+)$ y suponemos que la función $\bar{u}$ dada por

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in Q,\ x_N > 0 \\ 0 & \text{si } x \in Q,\ x_N < 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

pertenece a $W^{1,p}(Q_+)$. Tenemos que demostrar que $\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$ $\forall \alpha \in C_0^1(Q)$.

Sea (ρ_n) una sucesión regularizante tal que:

$$supp\, \rho_n \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid \frac{1}{2n} \leq x_N \leq \frac{1}{n}\}.$$

De manera que si extendemos a $\alpha\bar{u}$ como cero afuera de Q, por el lema (4.4.4) $\alpha\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $\rho_n * (\alpha\bar{u}) \to \alpha\bar{u}$ en $L^p(\Omega)$, y $D(\rho_n * (\alpha\bar{u})) \to D(\alpha\bar{u})$ en $L^p(\Omega)$, se sigue que $\rho_n * (\alpha\bar{u}) \to \alpha\bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por otro lado,

$$supp\,(\rho_n * \alpha\bar{u}) \subset supp\, \rho_n + supp(\alpha\bar{u}) \subset Q_+$$

para n suficientemente grande. De ahí que:

$$\rho_n * (\alpha\bar{u}) \in C_0^\infty(Q_+) \text{ y entonces } \alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)\ \forall \alpha \in C_0^1(Q).$$

Luego, $u \in W_0^{1,p}(Q_+)$.

■

Corolario 5.2.6 *Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $\Omega_0 \subset \Omega$, $g \in W^{1,p}(\Omega)$, $h \in W^{1,p}(\Omega_0)$ y $h - g \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$. Entonces:*

$$f(x) := \begin{cases} h(x) & si\ x \in \Omega_0 \\ g(x) & si\ x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

está en $W^{1,p}(\Omega)$ y su derivada débil $\forall i = 1, \cdots, N$ está dada por:

$$D_i f(x) = \begin{cases} D_i h(x) & si\ x \in \Omega_0 \\ D_i g(x) & si\ x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

Demostración: Considerando a $f - g$ y $h - g$ en lugar de f y h podemos pensar que $g \equiv 0$. Desde esta perspectiva, el problema se vuelve el siguiente: si $h \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$ entonces tenemos que probar que:

$$f(x) := \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases}$$

está en $W^{1,p}(\Omega)$ y que su derivada es:

$$D_i f(x) = \begin{cases} D_i h(x) & \text{si } x \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_0 \end{cases} \qquad (*)$$

Pero esto se sigue inmediatamente del teorema anterior. ∎

Capítulo 6

Teoremas de encaje de Sobolev

6.1. Caso $N = 1$

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Consideramos una función $u \in W^{1,1}(I)$, sabemos por el teorema (4.4.6) que u es el límite de alguna sucesión de funciones $(u_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ bajo la norma $W^{1,1}(I)$. Esto implica que$(u_n) \to u$ en $L^1(I)$ y sus derivadas débiles $D_i u_n \to D_i u$ en $L^1(I')$ $\forall I' \subset\subset I$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I'} |u_n(x) - u(x)|\, dx + \int_{I'} |\frac{du_n}{dx}(x) - Du(x)| dx = 0$$

Como u_n es suave, entonces para toda $a, b \in I$ y $\varepsilon > 0$, usando el teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} |u_n(b) - u_n(a)| &= \left| \int_a^b \frac{du_n}{dx}(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\frac{du_n}{dx}(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b |Du(x)|\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } n \text{ suficientemente grande} \end{aligned}$$

Como $Du \in L^1(I)$ entonces tenemos que:

$$\int_a^b |Du(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } |a - b| < \delta \text{ y } n \text{ suficientemente grande}$$

en conclusión, $|u_n(b) - u_n(a)| < \varepsilon$ si $|a - b| < \delta$ y n suficientemente grande. Más aún, tomando límites en una subsucesión convergente si fuese necesario, tenemos que por un lado,

$$|u(b) - u(a)| \leq \varepsilon \text{ si } |a - b| < \delta, \qquad \forall a, b \in I$$

de donde, si $u \in W^{1,1}(I)$, entonces u es uniformemente continua sobre I. Por el otro,

$$|u(b) - u(a)| \leq \int_a^b |Du(x)|\, dx \qquad \forall a, b \in I. \tag{6.1}$$

La pregunta natural ahora es ¿se podrán generalizar este tipo de resultados a dimensiones más altas? ¿Qué tipo de relaciones existen entre los espacios de Sobolev y los espacios L^p?

6.2. Desigualdades de Sobolev

6.2.1. Motivación

En los capítulos anteriores hemos visto algunas propiedades importantes de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ y el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ahora, tratamos de dar estimaciones que nos permitan decir más cosas acerca de estos espacios, por ejemplo, nos gustaría que estos espacios se "encajen" en algún espacio L^p, para así poder usar toda la teoría que conocemos acerca de los espacios L^p. En particular, en base a lo que obtuvimos en (6.1) nos gustaría poder decir que si $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ entonces

$$\| u \|_{L^q} \leq C \, \| Du \|_{L^p} \tag{6.2}$$

para alguna q y alguna constante C que dependan únicamente de p y de N. En el resto de esta sección asumiremos que $1 \leq p < N$. Podemos investigar primero qué condiciones tendríamos que establecer sobre q para que una desigualdad del estilo de (6.2) se cumpla. Para ver esto, tomemos una función lo más bonita posible, es decir, sea $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ y definamos una nueva función reescalada de la siguiente manera:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \qquad \text{con } \lambda > 1, x \in \mathbb{R}^N$$

Si q es tal que (6.2) se cumple para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ entonces, en particular,

$$\| u_\lambda(x) \|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq C \, \| Du_\lambda \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \lambda > 1. \tag{6.3}$$

Ahora bien,

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbf{R}^N} |u(y)|^q \, dy \; = \; \frac{1}{\lambda^N} \, \| u \|_{L^q}^q,$$

y por otro lado,

$$\int_{\mathbf{R}^N} |Du_\lambda|^p \, dx = \lambda^p \int_{\mathbf{R}^N} |Du(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^N} \int_{\mathbf{R}^N} |Du(y)|^p \, dy \; = \; \frac{\lambda^p}{\lambda^N} \, \| Du \|_{L^p}^p .$$

Substituyendo esto en (6.3), se obtiene

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{N}{q}}} \, \| u \|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{N}{p}}} \, \| Du \|_{L^p(\mathbf{R}^N)},$$

y entonces

$$\| u \|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq C \lambda^{1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}} \, \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{6.4}$$

Como nos interesa que esta desigualdad sea válida para toda $\lambda \in \mathbf{R}$, necesitamos pedir que $1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} = 0$, ya que de otra forma podríamos mandar λ a

0 o a ∞ en (6.4) y obtendríamos una contradicción. Así que si queremos que (6.2) sea cierta, necesitamos $1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} = 0$, o bien $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, $q = \frac{Np}{N-p}$.
Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.2.1 *Si $1 \leq p < N$, el conjugado de Sobolev de p es*

$$p^* = \frac{Np}{N-p}$$

De manera que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *y* $p^* > p$.

6.2.2. Desigualdades de Sobolev

Teorema 6.2.2 *Desigualdad de Gagliardo-Niremberg-Sobolev*
Sea $1 \leq p < N$. Entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

donde p^* es el conjugado de sobolev de p. Además existe una constante C que depende únicamente de p y de N, tal que

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \| Du \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{6.5}$$

donde $C = \frac{p(N-1)}{N(N-p)}$.
Es decir, la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ es continua.

Demostración:
Empezaremos con el caso $p = 1$. Consideremos por ahora $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, entonces para cada $i = 1, \cdots, N$ y $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos por el teorema fundamental del cálculo:

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| dy_i$$

Para aligerar la notación utilizaremos u en lugar de $u(x)$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} |u|^N &\leq \int_{-\infty}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right| dy_N \\ &\leq \prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx_i \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|u|^{\frac{N}{N-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Integramos respecto a la primera variable y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, d\xi_1 &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} d\xi_1 \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} d\xi_1\end{aligned}$$

y el primer factor ya es constante respecto a ξ_1, así,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, d\xi_1 \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right| dx_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} d\xi_1$$

y usando la desigualdad de Hölder generalizada (dada en (B.4)) para el segundo factor de la derecha se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx_i \right)^{\frac{1}{N-1}} d\xi_1 &\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| dx_2 \right)^{\frac{N-1}{N-1}} d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdots \\ &\cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right| dx_N \right)^{\frac{N-1}{N-1}} d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}\end{aligned}$$

Metiendo este resultado en la desigualdad anterior se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, d\xi_1 \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=2}^{N} \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\xi_i\, d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Iterando este proceso,

$$\begin{aligned}\iint_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, d\xi_1 d\xi_2 &\le \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| d\xi_1 d\xi_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| d\xi_2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\quad \cdot \prod_{i=3}^{N} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\xi_i d\xi_2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}\end{aligned}$$

Así, después de N veces obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{6.6}$$

Por lo tanto, elevando ambos lados a la $\frac{N-1}{N}$,

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq \prod_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^1}^{\frac{1}{N}}$$

y usando la desigualdad de Young se tiene que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^1} =: \frac{1}{N} \|\nabla u\|_{L^1} \tag{6.7}$$

Este es el resultado para $p = 1$.
Supongamos ahora $p > 1$ y $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Aplicamos la desigualdad (6.6) a la función $|u|^\gamma$ con $\gamma > 1$, por determinar.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}} \, dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |u|^\gamma| \, dx = \frac{\gamma}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \, dx$$

usando la desigualdad de Hölder

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}} \, dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{\gamma}{N} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}}_{(*)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.8}$$

Queremos escoger a γ de manera tal que $(*)$ sea igual a la integral de la izquierda (excepto por las potencias). Esto implica escoger a γ tal que:

$$\gamma \frac{N}{N-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1}$$

Por lo tanto,

$$\gamma = \frac{p(N-1)}{N-p} > 1$$

y entonces, $\gamma \frac{N}{N-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} = \frac{Np}{N-p} = p^*$. De manera que (6.8) se vuelve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es decir,

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$$

con $C = \frac{\gamma}{N} = \frac{p(N-1)}{N(N-p)}$ que no depende más que de p y de N.
Este es el resultado para $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Sea ahora una función $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, sabemos que existe una sucesión de funciones $(u_n) \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Podemos extraer una subsucesión de manera tal que $u_n \to u$ c.t.p. Por un lado, sabemos que para toda n:

$$\| u_n \|_{L^{p^*}} \leq C \, \| \nabla u_n \|_{L^p} \tag{6.9}$$

Por el otro, como $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ podemos usar el lema de Fatou para obtener:

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p^*} \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^{p^*} \tag{6.10}$$

así que combinando (6.9) y (6.10)

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p^*} \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^{p^*} \leq \varliminf_{n \to \infty} C \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p$$

Pero

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \to \infty} C \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p &= \lim_{n \to \infty} C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p = C \int_{\mathbf{R}^N} \lim_{n \to \infty} |\nabla u_n|^p \\ &= C \int_{\mathbf{R}^N} |Du|^p \end{aligned}$$

ya que sabemos que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de donde,

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p^*} \leq C \int_{\mathbf{R}^N} |Du|^p$$

$$\| u \|_{L^{p^*}} \leq C \, \| Du \|_{L^p}$$

donde la constante C depende únicamente de p y de N.

■

Corolario 6.2.3 *Sea $1 \leq p < N$. Entonces:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall\, q \in [p, p^*]$$

con inyección continua.

Demostración: Dado $p \leq q \leq p^*$ podemos escribir:

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Usando la desigualdad de interpolación dada en (B.5) se tiene que

$$\|u\|_q \le \|u\|_p^{\alpha} \|u\|_{p^*}^{1-\alpha}$$

Ahora bien, por un lado,

$$\|u\|_p^{\alpha} \le \|u\|_{W^{1,p}}^{\alpha}$$

y por el otro, por el teorema (6.2.2),

$$\|u\|_{p^*}^{1-\alpha} \le C\,\|Du\|_p^{1-\alpha}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\|u\|_q &\le \|u\|_{W^{1,p}}^{\alpha}\, C\,\|Du\|_p^{1-\alpha} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}}^{\alpha}\|u\|_{W^{1,p}}^{1-\alpha}\\ &\le C\,\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

■

Corolario 6.2.4 *Caso límite $p = N$*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

con inyección continua.

Demostración:
Modificando un poco lo hecho para la demostración del teorema anterior, considerando la función $|u|^{\gamma-1}u$ (con $\gamma \ge 1$) en lugar de u en (6.6), donde $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ tenemos que

$$\||u|^{\gamma-1}u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}} \le \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{\gamma-1}u) \right\|_{L^1}^{\frac{1}{N}}$$

que puede reescribirse como

$$\left\|u\right\|_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}}^{\gamma} \le \gamma \prod_{i=1}^{N} \left\| |u|^{\gamma-1}\frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{N}} \tag{6.11}$$

Para cada uno de los factores de la derecha podemos usar la desigualdad de Hölder, por ejemplo, para el primero se tiene

$$\begin{aligned}\left\| |u|^{\gamma-1}\frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{N}} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)p'}\right)^{\frac{1}{Np'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\frac{\partial u}{\partial x_1}|^p\right)^{\frac{1}{pN}}\\ &\le \left\|u\right\|_{L^{p'(\gamma-1)}}^{\frac{\gamma-1}{N}} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p}^{\frac{1}{N}} \quad \text{donde } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.\end{aligned}$$

De manera que la desigualdad (6.11) se vuelve

$$\left\|u\right\|^{\gamma}_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \gamma \left\|u\right\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}} \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p}$$

y usando la desigualdad (6.7)

$$\left\|u\right\|^{\gamma}_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \frac{\gamma}{N} \left\|u\right\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p} \tag{6.12}$$

substituyendo $p = N$ obtenemos

$$\left\|u\right\|^{\gamma}_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \frac{\gamma}{N} \left\|u\right\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{N(\gamma-1)}{N-1}}} \left\|\nabla u\right\|_{L^N} \tag{6.13}$$

sacando $\frac{1}{\gamma}$-raíz de ambos lados se tiene que $\forall \gamma \geq 1$

$$\left\|u\right\|_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \left\|u\right\|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{L^{\frac{N(\gamma-1)}{N-1}}} \left(\frac{\gamma}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\|\nabla u\right\|^{\frac{1}{\gamma}}_{L^N} \tag{6.14}$$

Escogemos $\gamma = N$ y la desigualdad anterior se convierte en:

$$\left\|u\right\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}} \leq \left\|u\right\|^{\frac{N}{N-1}}_{L^N} \left\|\nabla u\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^N} \leq \left\|u\right\|^{\frac{N}{N-1}}_{W^{1,N}} \left\|u\right\|^{\frac{1}{N}}_{W^{1,N}} \tag{6.15}$$
$$\left\|u\right\|_{W^{1,N}}.$$

Ahora bien, $\forall q \in [N, \frac{N^2}{N-1}]$, usamos la desigualdad de interpolación exactamente como en la demostración anterior para obtener

$$\left\|u\right\|_{L^q} \leq C \left\|u\right\|_{W^{1,N}}.$$

Con esto tenemos el resultado para $q \in [N, \frac{N^2}{N-1}]$ y $u \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$, y como $\frac{N^2}{N-1} > N+1$, de manera trivial lo tenemos para $q \in [N, N+1]$.
Para $q \in [N+1, +\infty)$ se prosigue de la siguiente manera: substituimos en (6.13) $p = N+1$ en lugar de $p = N$ para ahora obtener

$$\left\|u\right\|^{\gamma}_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \frac{\gamma}{N} \left\|u\right\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{N+1}{N}(\gamma-1)}} \left\|\nabla u\right\|_{L^{N+1}}$$

de nuevo, sacamos $\frac{1}{\gamma}$-raíz para obtener

$$\left\|u\right\|_{L^{\frac{\gamma N}{N-1}}} \leq \left(\frac{\gamma}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\|u\right\|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{L^{\frac{N+1}{N}(\gamma-1)}} \left\|\nabla u\right\|^{\frac{1}{\gamma}}_{L^{N+1}}$$

y substituimos $\gamma = N + 1$ como en (6.15) y obtenemos

$$\begin{aligned}\left\| u \right\|_{L^{\frac{N(N+1)}{N-1}}} &\leq \left(\frac{N+1}{N} \right)^{\frac{1}{N+1}} \left\| u \right\|_{L^{N+1}}^{\frac{N}{N+1}} \left\| \nabla u \right\|_{L^{N+1}}^{\frac{1}{N+1}} \\ &\leq C \left\| u \right\|_{W^{1,N+1}}\end{aligned}$$

Finalmente, usando como antes la desigualdad de interpolación $\forall q \in [N + 1, \frac{N(N+1)}{N-1}]$ se cumple el resultado. Reiterando este argumento para $\gamma = N + 2, \gamma = N + 3, \cdots$ etc, se llega a que:

$$\| u \|_{L^q} \leq C \| u \|_{W^{1,N}} \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^N) \text{ y } \quad \forall N \leq q < \infty \tag{6.16}$$

con C una constante que depende únicamente de q y de N. El argumento se generaliza para $u \in W^{1,N}$ de manera análoga a como se hizo en el teorema (6.2.2). ∎

Teorema 6.2.5 *Morrey*
Sea $p > N$. Entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbf{R}^N) \tag{6.17}$$

con inyección continua y además, $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \| Du \|_{L^p} \quad x, y \in \mathbf{R}^N \tag{6.18}$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y C una constante que depende únicamente de p y de N.

Demostración: Empezamos de nuevo por demostrar (6.18) para una función $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Sea Q un cubo abierto, que contiene al origen, de lados de longitud r paralelos a los ejes coordenados. Para $x \in Q$ tenemos por el teorema fundamental del cálculo:

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\, dt$$

Por lo tanto,

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt \leq r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt$$

Integrando sobre Q obtenemos:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x)-u(0)|\,dx \le \frac{r}{|Q|}\int_Q \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt\,dx$$

Definimos $\bar{u} = \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q u(x)\,dx$ y como Q tiene lados de longitud r la desigualdad queda

$$|\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dx$$

y haciendo el cambio de variable $y = tx$

$$|\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder en la integral de la derecha y obtenemos

$$\int_{tQ}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy \le \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} |tQ|^{\frac{1}{p'}}$$

ya que $tQ \subset Q$ si $0 \le t \le 1$. Por lo tanto, incorporando este resultado en la desigualdad anterior

$$|\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \frac{|tQ|^{\frac{1}{p'}}}{t^N}\,\|\nabla u\|_{L^p(Q)}\,dt$$

pero $|tQ|$ es la medida del cubo tQ en $\mathbf{R}^N$ así que

$|tQ|^{\frac{1}{p'}} \le |t|^{\frac{N}{p'}} r^{\frac{N}{p'}}$ de donde

$$\begin{aligned}
|\bar{u}-u(0)| &\le \frac{r^{\frac{N}{p'}}}{r^{N-1}}\int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N}\,\|\nabla u\|_{L^p(Q)}\,dt \\
&\le \frac{r^{\frac{N}{p'}-N+1}}{\frac{N}{p'}-N+1}\, t^{\frac{N}{p'}-n+1}\Big|_0^1 \,\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \\
&\le \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}\cdot \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \text{ya que } \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1
\end{aligned}$$

Este mismo procedimiento se puede hacer con un cubo de lados de longitud r paralelos a los ejes y centrado en cualquier punto x, de manera que

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \tag{$*$}$$

y usando el viejo truco de sumar y restar $\bar{u}$ se tiene que

$$|u(y) - u(x)| = |u(y) - \bar{u} + \bar{u} - u(x)| \leq |u(y) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(x)| \tag{6.19}$$

Esta última desigualdad junto con $(*)$ implican

$$|u(y) - u(x)| \leq 2\frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \forall x, y \in Q. \tag{6.20}$$

Ahora bien, para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbf{R}^N$, existe un cubo Q de lados paralelos a los ejes de longitud $2|x-y|$ que los contiene. De ahí que:

$$|u(y) - u(x)| \leq \frac{2(2|x-y|)^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}$$

donde C depende sólo de p y de N, y $\alpha = \frac{p-N}{p}$.
Con esto probamos (6.18) para $u \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$. Para $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, hacemos como en el caso $p < N$, es decir, sea una sucesión $(u_n) \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ y $u_n \to u$ c.t.p. se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(y) - u_n(x)| \leq C|x-y|^\alpha \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p}$$

y como las funciones valor absoluto y norma son continuas, podemos meter los límites

$$|u(y) - u(x)| \leq C|x-y|^\alpha \|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

donde C depende únicamente de p y de N, y $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.
Resta probar (6.17).
Sean $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ y Q un cubo de lado $r = 1$ que contiene a x. Notemos que por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\bar{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x) \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x)| \leq \frac{1}{|Q|} \|1\|_{L^{p'}(Q)} \|u\|_{L^p(Q)}$$
$$|\bar{u}| \leq \|u\|_{L^p(Q)} \tag{6.21}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Por otro lado, por (*) tenemos que

$$|\bar{u} - u(x)| \leq C \, \| \nabla u \|_{L^p(Q)}$$

Por lo tanto,

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C \, \| \nabla u \|_{L^p(Q)}$$

y usando el hecho de que $C > 1$ y la desigualdad (6.21)

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq C(\| u \|_{L^p(Q)} + \| \nabla u \|_{L^p(Q)}) \\ &\leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(Q)} \\ &\leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} \end{aligned}$$

Donde C depende sólo de p y de N. Entonces

$$\| u \|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} \quad \forall u \in C_0^1(\mathbf{R}^N).$$

Para $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ se hace de manera análoga al párrafo anterior. ■

Corolario 6.2.6 *Sea $1 \leq p \leq \infty$, y $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto de clase C^1 con frontera acotada (o bien $\Omega = \mathbf{R}^N_+$). Tenemos*

i) *si $1 \leq p < N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ donde p^* es el conjugado de Sobolev de p,*

ii) *si $p = N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty)$,*

iii) *si $p > N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ y además, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \, \| u \|_{W^{1,p}} \quad \textit{para casi toda } x, y \in \Omega$$

donde C depende únicamente de Ω, p y N, $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y todas las inclusiones son continuas.

Demostración: Consideramos el operador de extensión dado por el teorema (5.1.3):

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Como $(Pu)|_\Omega = u$, aplicando el teorema (6.2.2) se tiene que

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} = \| (Pu)|_\Omega \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \| (Pu)|_\Omega \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \, \| D(Pu) \|_{L^p(\mathbf{R}^N)}$$
$$\text{y} \quad \| D(Pu) \|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C \, \| Pu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

así,

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \| Pu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Por otra parte, por el teorema (5.1.3) sabemos que

$$\| Pu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

De donde

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C' \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Para demostrar **ii)** y **iii)** se repite exactamente el mismo procedimiento usando el corolario (6.2.3) y el teorema (6.2.5) respectivamente.

∎

Dado que en el capítulo 5 vimos que una función $u \in H_0^1(\Omega)$ se puede extender canónicamente por 0 en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, y esto para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto cualquiera (teorema (5.2.5)), entonces resulta que los incisos **i)** y **ii)** del corolario anterior siguen siendo válidos para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto cualquiera. Si además pedimos que Ω sea acotado, entonces también se cumple **iii)** dando lugar a la siguiente desigualdad:

Corolario 6.2.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $p < N$. Entonces existe una constante C que depende únicamente de p y de Ω tal que*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| Du \|_{L^p(\Omega)} .$$

Demostración: Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por el teorema (5.2.5) definimos a $\bar{u}$ como la extensión canónica de u en $\mathbb{R}^N$, es decir,

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

sabemos que $\bar{u}$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y además $D_i\overline{u(x)} = \overline{D_i u(x)}$. Usando la desigualdad de Sobolev (6.5) se tiene que

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} = \| \bar{u} \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} \| D\bar{u} \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \tilde{C} \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$
$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$

pero como $p < p^*$, sabemos por el corolario (B.3) que

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq \hat{C} \| u \|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

así que

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \, \| Du \|_{L^p(\Omega)} .$$

■

Una versión más general del resultado anterior es la siguiente:

Teorema 6.2.8 *Desigualdad de Poincaré*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado en una sola dirección, y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \, \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$

donde la constante C depende únicamente de p y de Ω.

Demostración: Basta probar el resultado cuando $u \in C_0^1(\Omega)$. Podemos extender como 0 a u en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ de manera que $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos además asumir sin pérdida de generalidad que Ω está entre los hiperplanos $x_1 = a$ y $x_1 = a + l$. Entonces tenemos que para $x \in \Omega$, usando el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{aligned} |u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\, dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right| dt \\ &\leq \int_a^{a+l} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right| dt \end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Hölder

$$|u(x)| \leq l^{\frac{1}{p'}} \, \| \frac{\partial u}{\partial x_1} \|_{L^p([a,a+l])} .$$

De donde,

$$|u(x)|^p \leq l^{\frac{p}{p'}} \int_a^{a+l} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N) \right|^p dt$$

Ahora bien, integrando y usando el teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_a^{a+l} |u(x)|^p \, dx_1 dx_2 \cdots dx_N \right) \\ &= \int_a^{a+l} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x)|^p \, dx_2 \cdots dx_N \right) dx_1 \\ &\leq l^{\frac{p}{p'}} \int_a^{a+l} \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_N) \right|^p dx \right] dx_1 \\ &\leq l^{\frac{p}{p'}+1} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^p dx \quad \text{donde } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \end{aligned}$$

en conclusión

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq l^p \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^p dx$$

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq l \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq l \, \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$$

Para $u \in H_0^1(\Omega)$ se hace por densidad, como hemos visto en las demostraciones anteriores. ■

Una consecuencia importante de este corolario es que en el espacio $H_0^1(\Omega)$ las normas $\| u \|_{W^{1,2}}$ y $\| Du \|_{L^2}$ son equivalentes.

Alice laughed: "There's no use trying," she said;
" one can't believe impossible things."
"I daresay you haven't had much practice," said the Queen.
"When I was younger, I always did it for half an hour a day.
Why, sometimes I've believed as many as six impossible things before breakfast."
Lewis Carroll

Capítulo 7

Obtención de la solución clásica

7.1. Regreso al problema de Poisson

Con las herramientas que desarrollamos en los capítulos anteriores estamos ahora en condiciones de volver a nuestro problema inicial.
En el capítulo 1 enunciamos el siguiente problema, llamado Problema de Poisson:
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado, con $\partial\Omega$ lisa, y sea $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Buscamos una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

También vimos que este problema tiene una formulación débil:

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx & \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

y que este problema tiene una única solución si tomamos como espacio la cerradura de $C_0^1(\Omega)$ bajo la norma inducida por el producto interior:

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx$$

Pero este espacio no es más que $H_0^1(\Omega)$. Así que la formulación débil del Problema de Poisson puede reescribirse:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$
$$u \in H_0^1(\Omega) \tag{7.1}$$

Proposición 7.1.1 *Toda solución clásica es una solución débil*

Demostración: Si u es una solución clásica, entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y además $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se sigue que $u \in L^2(\Omega)$ y luego $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Por el teorema (5.2.4), $u \in H_0^1(\Omega)$.
Si $v \in C_0^1(\Omega)$ se cumple que:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

esta igualdad sigue siendo válida por densidad para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, de donde toda solución fuerte es débil. ∎

7.1.1. Existencia y unicidad de la solución débil

El teorema de Representación de Riesz nos asegura, tal y como lo vimos en el capítulo 1, la existencia y unicidad de la solución débil, pero además, podemos dar una caracterización de nuestra solución:

Teorema 7.1.2 *Si u es solución débil del problema de Poisson, entonces u satisface que:*

$$I(u) = \text{mín}\{I(v) \,|\, v \in H_0^1(\Omega)\}$$

donde $I(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 - \int_\Omega fv$

Demostración: Esto no es más que el resultado (2.5) del teorema de Representación de Riesz aplicado al funcional $Lv = \int_\Omega fv$ con el producto interior definido por

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx.$$

∎

Lo que querríamos ahora es tratar de recuperar una solución clásica de nuestro problema, y si u es solución débil, u es una buena candidata.
Pero nada nos asegura que una solución débil u sea una función suficientemente bonita como para ser también solución fuerte, es decir, no sabemos nada acerca de la diferenciabilidad o de la continuidad de u. Sin embargo, si imponemos algunas condiciones extras tanto a nuestro dominio como a nuestra función f, se demuestran entonces ciertos teoremas de regularidad acerca de la función solución débil u. A continuación enunciaremos uno, aunque no lo demostraremos.

Teorema 7.1.3 *Regularidad de Schauder*
Si Ω es acotado, $\partial\Omega$ es suave y f es Hölder continua, entonces la solución débil u del problema (1.1) *satisface $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

Definición 7.1.4 *Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbf{R}$ es Hölder continua si existe $0 < \alpha < 1$ y una constante C tales que*

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

7.1.2. Obtención de la solución clásica

Teorema 7.1.5 *Si $\partial\Omega$ es suave, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, u es solución débil del problema* (1.1)*, y además, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces u es una solución clásica de* (1.1).

Demostración:
Como u es solución débil de (1.1) y $\partial\Omega$ es suave, entonces $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, y se sigue por el teorema (5.2.4) que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Ahora bien, podemos usar la fórmula de Green de manera que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\,\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Pero entonces $-\Delta u + u = f$ c.t.p. en Ω ya que $C_0^1(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Por otro lado,tanto f como $-\Delta u + u$ son continuas en $\overline{\Omega}$, entonces

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \Omega$$

Por lo tanto, u es una solución clásica. ∎

Estos dos resultados nos dan inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 7.1.6 *Si Ω es acotado, $\partial\Omega$ es suave y f es Hölder continua, entonces el problema* (1.1) *tiene una única solución.*

APÉNDICE

Todo lo que voy a usar

A. Cálculo

Proposición A.1 *Sea X un espacio vectorial y sea $T : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Entonces se cumple que*

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}. \tag{7.2}$$

Decimos que T es una función aditiva.

Demostración: Observemos que $T(x+y) = T(x)+T(y)$ implica que $T(nx) = nT(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$. Tomamos $\lambda \in \mathbb{Q}$, es decir, λ es de la forma $\lambda = \frac{n}{m}$ con m, $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$T(\lambda x) = T\left(\frac{n}{m}x\right) = nT\left(\frac{1}{m}x\right)$$

Probar (7.2) equivale entonces a probar

$$T\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}T(x)$$

pero

$$T(x) = T\left(\frac{m}{m}x\right) = mT\left(\frac{1}{m}x\right)$$

de donde,

$$T\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}T(x).$$

■

Teorema A.2 *Fórmula de integración por partes*
Sean $U \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y con ∂U de clase C^1. Sean u y $v \in C^1(\overline{U})$. Entonces

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial U} (uv)\eta_i dS \quad i = 1, \cdots, N$$

donde η_i denota la normal exterior en la dirección x_i.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [2, Teorema C.2].

Lema A.3 *Desigualdad de Young*
Sean a y $b \geq 0$, $p > 0$ entonces

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

donde p' es el conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Para la demostración de este lema véase [4, Teorema 8.4].

Teorema A.4 *Sea $0 \leq r_1 < r_2$, $f : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces tenemos para la integral en dimensión N:*

$$\int_{r_1 \leq \|x\| \leq r_2} f(\|x\|)\, dx = N\omega_N \int_{r_1}^{r_2} f(r) r^{N-1}\, dr$$

donde ω_N es el volumen de la bola unitaria de dimensión N.

Una demostración de este teorema viene en [3, Teorema 13.21].

B. Integral de Lebesgue

En esta sección Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Teorema B.1 *Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue*
Sea (f_k) una sucesión de funciones integrables en Ω tales que $f_k \longrightarrow f$ c.t.p. en Ω. Si existe $\varphi \in L(\Omega)$ tal que $|f_k| \leq \varphi$ c.t.p. en Ω para toda k, entonces

$$\int_\Omega f_k \longrightarrow \int_\Omega f.$$

Una demostración de este teorema está en [4, Teorema 5.36]

Teorema B.2 *Desigualdad de Hölder*
Sea $1 \leq p \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^p(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y se cumple que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, es decir

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Para la demostración de este teorema véase [1, Teorema IV.6].

Corolario B.3 *Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto y acotado, y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces se tiene que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y para $u \in L^q(\Omega)$ se cumple que:*

$$Vol(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq Vol(\Omega)^{-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} .$$

Para la demostración de este corolario véase [3, Corolario 19.7].

Corolario B.4 *Desigualdad de Hölder generalizada*
Sean $f_1, f_2, \cdots, f_k$ funciones tales que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \qquad con\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Entonces el producto $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ pertenece a $L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}} .$$

Para la demostración de este corolario véase [1, Nota IV.2].

Corolario B.5 *Desigualdad de interpolación*
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces $f \in L^r(\Omega)$ para toda $p \leq r \leq q$ y se tiene

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \qquad con\ \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad y\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Una demostración de este corolario también está en [1, Nota IV.2].
Notación: Denotamos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de funciones continuas con soporte compacto en Ω.

Teorema B.6 *Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto. El espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

C. Convoluciones y sucesiones regularizantes

Una muy buena referencia para todos los resultados de esta sección es [1, Sección IV.4].

Definición C.1 *Sean f y g funciones integrables en $\mathbf{R}^N$. Su convolución está dada por:*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(t) g(x-t) dt \qquad x \in \mathbf{R}^N .$$

Teorema C.2 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Entonces* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$\| f * g \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Notación: Sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ con $\alpha_1 + \cdots \alpha_N \leq m$ y denotamos la parcial de orden α de f como

$$D_\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f \right)(x).$$

Teorema C.3 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $K \in C_0^m(\mathbb{R}^N)$ *entonces* $f * g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$D_\alpha(f * K)(x) = (f * D_\alpha K)(x).$$

Corolario C.4 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *entonces* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Si además* f *tiene soporte compacto, entonces* $f * K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lema C.5 *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *y* $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g) h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\tilde{f} * h)$$

donde $\tilde{f}(x) = f(-x)$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Definición C.6 *Una sucesión regularizante es una sucesión de funciones* (ρ_n) *de clase* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *con las siguientes propiedades:*

i) $\rho_n(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^N$

ii) $supp \, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$

iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) = 1$

En este trabajo, utilizaremos la llamada "sucesión regularizante estándar": sea ρ la función:

$$\rho(x) = \begin{cases} exp(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}) & para \ \| x \| \leq 1, \\ 0 & para \ \| x \| > 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

Y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\rho_n(x) = C n^N \rho(nx), \text{ con } C = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho \right)^{-1} .$$

Teorema C.7 *Sea $f \in C(\mathbb{R}^N)$ y $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, entonces $\rho_n * f \to f$ uniformemente.*

Teorema C.8 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $\rho_n * f \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Corolario C.9 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

D. Partición de unidad

Teorema D.1 *Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^N$ cubierto por $\{U_i\}_{i\in I}$ abiertos, $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces existe una partición de unidad subordinada a $\{U_i\}$, es decir, un sistema $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ que satisfacen:*

1. *Para cada $j \in J$, $supp\varphi_j \subset U_i$ para alguna $i \in I$.*
2. $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1 \forall j \in J, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
3. $\sum_{j\in J} \varphi_j(x) = 1 \forall x \in \Omega$.
4. *$\forall K \subset \Omega$ K compacto, hay sólo un número finito de $\varphi_j, j \in J$ que no son idénticamente cero en K.*

Demostración: Para cada bola $U(x,r), x \in \mathbb{R}^N$ podemos reescalar y trasladar la función $\rho(x)$ que dimos en (C) para obtener una nueva función $\rho_{x,r}(x)$ que cumple que:

i)
$$\rho_{x,r}(x) > 0 \text{ si } x \in U(x,r)$$

ii)
$$\rho_{x,r}(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \setminus U(x,r).$$

Definimos para $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \{x \in \Omega \,\Big|\, \|x\| \leq n,\ dist(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\} \text{ con } K_0 = K_{-1} = \emptyset.$$

Se tiene que K_n es compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ y además $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \forall n$ y $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Definimos ahora a $\Omega_n = \mathring{K}_{n+1} \setminus K_{n-2}$ y $A_n = K_n \setminus \mathring{K}_{n-1}$. Y se cumple que:

1. Ω_n es un conjunto abierto,

2. A_n es compacto,

3. $A_n \subset \Omega_n \forall n \in \mathbb{N}$ y

4. $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Ahora bien, todo compacto $K \in \Omega$ está contenido en algún K_n, y por tanto intersecta a sólo un número finito de Ω_n. Más aún, para cada $x \in A_n$, podemos encontrar una bola $U(x,r) \subset \Omega_n$ y tal que $U(x,r) \subset U_i$ para alguna $i \in I$. Como A_n es compacto, se puede cubrir con un número finito de estas bolas:

$$U(x_\nu^n, r_\nu^n) \quad \nu = 1, \cdots, k_n$$

A su vez, cualquier compacto $K \subset \Omega$ intersecta a un número finito de estas bolas $U(x_\nu^n, r_\nu^n) \quad \nu = 1, \cdots, k_n, n \in \mathbb{N}$. $\{U(x_\nu^n, r_\nu^n)\}$ forman una cubierta de Ω. Simplificando la notación sea $\{U(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}} = \{U(x_\nu^n, r_\nu^n)\}$.
Para cada j, tomamos la función:

$$\rho_j = \rho_{x_j, r_j}$$

Como $\rho_j = 0$ afuera de $U(x_j, r_j)$, entonces se tiene que para todo compacto $K \subset \Omega$ sólo un número finito de ρ_j son distintas de cero. Por lo cual, $\varphi(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho_j(x)$ es convergente para cada $x \in \Omega$ y no negativa ya que $\{U(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ cubre a Ω y $\rho_j(x) > 0$ si $x \in U(x_j, r_j)$.
Tomamos entonces $\varphi_j(x) = \dfrac{\rho_j(x)}{\varphi(x)}$ y se cumplen todas las hipótesis que buscábamos. ∎

Bibliografía

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*. Dunod, Paris, 1999

[2] Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society Segunda edición, 1999

[3] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Springer, second edition, 1998

[4] Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund *Measure and integral, an Introduction to Real Analysis*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics; 43, Marcel Dekker, Inc. 1997