



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

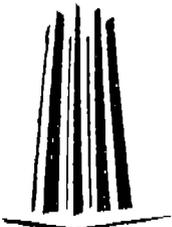
CAMPUS ARAGÓN

“EVALUACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS EN
MEDIOS AGRIETADOS SUJETOS A CARGAS
DE IMPULSO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
I N G E N I E R O C I V I L
P R E S E N T A :
G U I L L E R M O E S C U D E R O J A S S O

ENEF



ARAGON

SAN JUAN DE ARAGÓN, MEXICO

2005

m 340202



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esudera Jasso

Guilleme

2010/10/4

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Guilleme', written over the date.

AGRADECIMIENTOS.

Al Instituto Mexicano del Petróleo por permitirme el desarrollo de este trabajo dentro de sus instalaciones y en especial al Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos por guiarme durante la elaboración del trabajo.

A la ing. Karla Ivonne Gutiérrez Vázquez por la ayuda prestada durante el tiempo de la elaboración de la tesis.

A la ENEP Aragón por abrirme las puertas de la universidad y permitirme gozar de los beneficios y obligaciones que esto conlleva así como a todos mis compañeros que me ayudaron a terminar la carrera.

Esta tesis se la dedico a mis hermanas Rebeca y Osiris Escudero Jasso, ya que sin su apoyo nunca hubiera podido lograr este objetivo.

Y muy especialmente les dedico tanto este como todos los logros que he tenido en mi vida a mis padres Guillermo Escudero Mancera y Cecilia Jasso López, ya que han estado conmigo y me han ayudado a salir adelante durante los peores momentos, sin su guía nunca hubiera podido llegar a este momento.

GRACIAS.

INDICE.

INTRODUCCIÓN.

I. ANTECEDENTES.

- 1.1. Antecedentes Generales.
- 1.2. Clasificación de los problemas de Mecánica de la Fractura.

II. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

- 2.1. Estudios analíticos.
- 2.2. Estudios numéricos.
- 2.3. Planteamiento del problema.

III. MARCO TEÓRICO.

- 3.1. Tipos de ondas.
- 3.2. Modos de fractura.
- 3.3. Parámetros de fractura.
 - 3.3.1. Mecánica de la fractura estática.
 - 3.3.2. Mecánica de la fractura dinámica.
- 3.4. Ondas en sólidos elásticos.
 - 3.4.1. Velocidad de ondas en medios elásticos.
 - 3.4.2. Ondas de superficie.

IV. FORMULACIÓN DEL MÉTODO.

- 4.1. Representación integral.
- 4.2. Funciones de Green bi-dimensionales.
- 4.3. Aplicación a dominios semi infinitos agrietados.
- 4.4. Condiciones de frontera.
 - 4.4.1. Formulación integral.
- 4.5. Esquema de discretización.

V. ANÁLISIS NUMÉRICO.

- 5.1. Casos de estudio.
- 5.2. Obtención de curvas de desplazamiento-tiempo.
 - 5.2.1. Grietas paralelas a la superficie.
 - 5.2.2. Grietas inclinadas.
- 5.3. Resultados en frecuencia.
- 5.4. Representaciones en campo completo.

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

REFERENCIAS.

INTRODUCCIÓN.

En la construcción, es de vital importancia el tener en cuenta métodos para la detección de grietas dentro de elementos estructurales, ya que éstas son la principal causa de la pérdida de resistencia en dichos elementos y pueden provocar el colapso al estar sujetos a distintas solicitaciones de carga.

En el presente trabajo se estudia la detección de grietas superficiales por medio de la incidencia de ondas de Rayleigh en un medio con alguna discontinuidad (en este caso se utilizaron grietas en distintas posiciones), las cuales, al impactarse con la grieta, muestran difracciones y reflexiones dependiendo del tamaño y la posición en que se encuentra la grieta.

Para dar origen a la propagación de ondas se utiliza una aplicación repentina de carga (ondas de impacto), las cuales dan origen a solicitaciones importantes de esfuerzos en cortos periodos de tiempo. Este tipo de aplicaciones de carga dan origen a ondas P(primarias), S(secundarias), y a ondas de Rayleigh. Para el presente trabajo solo se tomarán en cuenta las ondas de Rayleigh, ya que por su carácter de ondas superficiales son muy útiles en la detección de grietas poco profundas.

Para lograr el estudio realizado en esta tesis, se tomó como base la mecánica de la fractura, la cual, en una de sus líneas de investigación (Mecánica de la Fractura Dinámica), se estudia la propagación de ondas en medios y el efecto que se presenta al impactarse con discontinuidades.

Para una mayor comprensión del tema en estudio, en este trabajo se encontrarán los estudios realizados por distintos investigadores con respecto al problema planteado en esta tesis así como algunos antecedentes de lo que es la Mecánica de la Fractura y su área de estudio. Se encontrará también una explicación de los distintos tipos de ondas que se presentan en un medio sólido y sus características. Se presenta además una explicación del método utilizado para la solución del problema, el análisis numérico realizado, los resultados obtenidos presentados en forma gráfica y una serie de conclusiones y comentarios referentes a estos resultados.

I. ANTECEDENTES.

En este capítulo se tratarán los inicios de la mecánica de la fractura y se hablará de algunos de sus precursores así como de las investigaciones realizadas por éstos. Se tratará también la clasificación de los problemas de la mecánica de la fractura.

1.1. Antecedentes Generales

La Mecánica de la Fractura surge como una necesidad de conocer el comportamiento de componentes estructurales en los cuales existe la presencia de un defecto o de alguna grieta y que, por lo tanto, la resistencia de tal elemento ya no es función tan solo de sus propiedades elásticas y geométricas, ahora es necesario conocer la severidad de la concentración de esfuerzos debido al defecto o grieta.

De tal manera que esta concentración de esfuerzos en las zonas cercanas a la grieta y más específicamente en la punta de ésta gobierna el comportamiento del elemento o sistema estructural. El parámetro con el que se acostumbra llamar a esta medida de concentración de esfuerzos es conocido como Factor de Intensidad de Esfuerzos (*FIE*) y es una generalización del concepto de concentración de esfuerzos. Es importante mencionar que el primer investigador que estudió el comportamiento de cuerpos agrietados fue Griffith (1921), quién abordó el problema de propagación de grietas en vidrio, desde el punto de vista energético, teoría que dada su complejidad no fue aplicada a la solución de problemas prácticos.

Posteriormente Irwin (1948) y Orowan (1948) extendieron la teoría de Griffith a metales. Irwin (1957) relacionó los conceptos de la teoría de Griffith con un parámetro que evalúa la severidad del campo de esfuerzos en la punta de la grieta. Éste es más fácil de obtener desde el punto de vista ingenieril. Esta teoría es conocida como Mecánica de la Fractura de Griffith-Irwin y es la base de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (*MFLE*). Ésta tiene como objetivo principal la determinación del Factor de Intensidad de Esfuerzos y el cual puede ser evaluado conociendo el esfuerzo normal en la línea de la grieta y el desplazamiento de apertura de las caras de ésta.

Algunas extensiones a los conceptos de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica empezaron a aparecer en la literatura (Rossmann, 1980), durante el período 1960-1965, siendo las cinco más notables las que están relacionadas con:

- 1.- Crecimiento de grietas debidas a fatiga
- 2.- Agrietamiento debido a esfuerzos de corrosión
- 3.- Efectos de la plasticidad en la punta de la grieta
- 4.- Mecánica de Fractura dinámica
- 5.- Termofluencia y fractura viscoelástica

El primer estudio referente a la dinámica de la fractura se atribuye a Mott (1948) quién dedujo una expresión que sugiere la existencia de una velocidad límite de propagación de grieta, la cual es dependiente del material. Mencionó que este límite es proporcional a la velocidad de onda de la barra para el material. Yoffé (1951) proporcionó la primera solución donde se incluyen fuerzas de inercia en la ecuación de movimiento, su estudio lo enfocó a la determinación del campo de esfuerzos frente de una grieta propagándose, con el propósito de desarrollar el criterio para la ramificación de grietas.

1.2. Clasificación de los problemas de Mecánica de la Fractura

Al paso del tiempo, la definición y clasificación de la mecánica de la fractura dinámica ha ido evolucionando, por ejemplo Kanninen y Popelar (1985) clasificaron los problemas de dinámica de la fractura en aquellos donde las fuerzas de inercia son significantes y, además, aquellos casos donde se tienen variaciones fuertes de cargas y propagación rápida de grietas. Freund (1990) clasificó el concepto de mecánica de la fractura dinámica en aquellos problemas donde las fuerzas de inercia son importantes (lo cual ratificó parte de lo dicho por Kanninen y Popelar). En 1994 Nishioka, en su artículo " The state of the art in dynamic fracture mechanics ", proporcionó una clasificación de mecánica de fractura dinámica, la cual consistió básicamente en lo siguiente:

- a) Grietas sin crecimiento sometidas a cargas de impacto

En este tipo de problemas se tiene una grieta sujeta a cargas de impacto y donde se cuenta con alteraciones importantes del Factor de Intensidad de Esfuerzos debido a la

propagación de las ondas de esfuerzos provocados por el impacto. En este caso deben de considerarse las reflexiones de ondas en las fronteras de los cuerpos finitos. En el presente trabajo se estudian problemas de este tipo.

b) Propagación de grietas

Aquí se consideran diversos conceptos relacionados con el inicio, propagación, arresto, ramificación y curvado de grietas. Algunos aspectos ligados con esta clasificación se mencionan en esta tesis.

II. REVISION BIBLIOGRÁFICA.

En este capítulo se encuentran algunos trabajos realizados por distintos investigadores referentes al tema tratado en esta tesis, divididos en estudios analíticos y estudios numéricos. También se encuentra el planteamiento del problema a tratar en el presente trabajo.

2.1. Estudios analíticos.

El problema clásico de una grieta moviéndose a velocidad constante fue considerado por Yoffé (1951) quién estudió la ramificación de grietas propagándose. En otro orden de ideas, los problemas de grietas estacionarias, cargadas con ondas de esfuerzo, fueron estudiados por Broberg (1960), Baker (1962) entre otros. Freund (1972a,b, 1973 y 1974) en sus artículos pioneros, derivó la solución fundamental para velocidades constantes y variables de grietas corriendo sujetas a carga dinámica. Así también, fueron realizadas importantes contribuciones en desarrollos numéricos en dinámica de la fractura.

Desde el punto de vista de caracterización de materiales, se ha observado que las propiedades mecánicas, por ejemplo la tenacidad a la fractura, cambia a mayores velocidades de variación de la carga, por tanto la tenacidad en la propagación dinámica de grietas puede ser una función de la velocidad de propagación de la grieta, ésta puede ser evaluada por principios de los métodos fotoelásticos y cáusticos en conjunción con fotografía de alta velocidad. El grupo de Mecánica de la Fractura de la Universidad de Maryland orientados por el Prof. Irwin emplearon fotoelasticidad dinámica para valorar la velocidad de la grieta y el Factor de Intensidad de Esfuerzos durante la propagación rápida de grietas. Otros laboratorios tales como Freiburg en Alemania desarrollaron y emplearon extensamente el método de cáusticas en sus trabajos sobre dinámica de fractura (Kalthoff *et al.*, 1980).

Achenbach y Nuismer (1971) investigaron las condiciones para la propagación de una grieta cuando una onda incidente, cuyo frente es paralelo a la grieta, se impacta sobre ella. Básicamente, su investigación consiste en la determinaron los esfuerzos normales en vecindad de la punta de la grieta debido a la difracción de ondas generadas por la presencia de ésta, la cual se extiende a una

velocidad constante una vez que el frente de onda se ha impactado en la grieta. Adicionalmente, emplearon el criterio de balance de energía para determinar la forma del pulso incidente, el cual es compatible con la propagación instantánea de la grieta. Ellos comentaron que cuando se aplican cargas de forma repentina, los efectos dinámicos no pueden ser despreciados y por tanto se debe solucionar como un problema de propagación transitoria de ondas. Como el frente de onda impacta a la grieta, la propagación puede iniciar instantáneamente, dependiendo de la magnitud y la dependencia en el tiempo de los esfuerzos en el frente de onda. El tamaño de la grieta se hace importante cuando la onda la envuelve. Como criterio de fractura emplearon criterio de energía, el cual establece que la formación de nuevas superficies grietas requiere energía y que por tanto la fractura solo ocurre si existe energía disponible.

Ramalu *et al.* (1982) realizaron revisiones a los criterios relacionados con el curvado y ramificación de grietas. Justificaron dos criterios para predecir el curvado y ramificación en pruebas fotoelásticas en dinámica de la fractura en especímenes formados por Homalite-100. Ellos comentan que la ramificación de grietas requiere como una condición necesaria un valor crítico del Factor de Intensidad de Esfuerzos dinámico, el cual es acompañado por otra condición que involucra primero el curvado de grietas. Estos criterios fueron también verificados mediante análisis numéricos con elementos finitos en tuberías de acero, donde los cálculos numéricos del *FIE* en la ramificación y el ángulo de la ramificación concuerda con pruebas experimentales. Es importante mencionar que el ángulo obtenido mediante simulaciones numéricas, en el tubo de acero, para la ramificación es de 64° , y que corresponde a los 64° en las pruebas experimentales.

Achenbach *et al.* (1983 y 1984) estudiaron la difracción de ondas elásticas debida a grietas localizadas cerca de la superficie libre. Consideraron la incidencia de ondas *P*, *SV* y de Rayleigh. Los análisis que ellos realizaron fueron en el

dominio de la frecuencia para diferentes relaciones de profundidad a tamaño de la grieta.

Isida y Noguchi (1992) desarrollaron una serie de formulaciones y obtuvieron resultados del *FIE* para ramificaciones de grietas en placas sujetas a condiciones de carga dinámica. Los análisis los basaron en el método de fuerzas de cuerpo combinado con el procedimiento de perturbación. Ellos determinaron los *FIE*'s en la punta de la grieta de todas las ramas y de la grieta principal mediante la formulación en series de potencias. Además, muestran una gama interesante de gráficas para diferentes configuraciones de grietas ramificadas, estableciendo la influencia que guarda el ángulo entre las ramificaciones, así como la importancia de la longitud de estas ramificaciones con respecto a la longitud de la grieta principal. Ellos concluyeron que su formulación proporciona buenos resultados para ángulos entre ramificaciones de 20° a 180° con relaciones entre longitud de ramificación a longitud de grieta principal menores o iguales a 0.3.

Xu (1998) encontró que la inestabilidad dinámica se observa cuando la velocidad de propagación de una grieta se acerca a una tercera parte de la velocidad de ondas de Rayleigh. Al rebasar esta velocidad, la grieta tiende a cambiar de dirección e incluso a ramificarse. Él menciona que la anisotropía debida a largas deformaciones en la punta de la grieta juega un papel importante en la determinación de la dirección de la grieta.

Chen e Yu (1999) recientemente estudiaron vigas con comportamiento rígido-plástico sujetas a cargas de impacto, las cuales fueron preagrietadas en sus extremos. Ellos plantearon una solución que considera la interacción entre momentos flexionantes y fuerzas axiales. Los resultados mostraron que la relación de masas (masa del objeto que impacta y masa de la viga) y la fuerza axial tiene una influencia significativa en la deformación total y el valor de la integral J .

P. Hess (2002) estudió la propagación de ondas superficiales creadas por medio de pulsos acústicos generados por una excitación en el material creada por un pulso laser. Estudió los efectos que tienen al contacto con capas de otros materiales y el uso de esta técnica para la detección de fallas dentro del material.

Cuozzo, et. al. (1977) estudiaron los efectos en una onda de Rayleigh al ser dispersada por esquinas a 90 grados y 270 grados mediante un método de diferencias finitas. En su trabajo se hicieron estudios analíticos los cuales fueron verificados experimentalmente para finalmente corroborar sus resultados con los trabajos realizados por otros investigadores, encontrando una buena concordancia entre sus resultados y los consultados.

Kundu y Mal. (1981). estudiaron la difracción de ondas de Rayleigh provocada por una fractura normal a la superficie de una placa aplicando la teoría de difracción asintótica. Hicieron estudios sobre una fractura de una profundidad mucho menor al espesor de la placa y variando el ángulo de la onda incidente.

Achenbach y Liu (1995). Estudiaron el problema de la dispersión de ondas por fracturas utilizando el método de elemento lineal. Las placas son divididas en dominios en los cuales se aplica el método. Para cada dominio se aplican ecuaciones de método obteniendo relaciones entre los vectores de tracción y desplazamiento en las fronteras verticales. Estas ecuaciones se resuelven utilizando las condiciones en las uniones de los dominios. Para obtener resultados en tiempo es utilizada una transformada de Furier . Se obtuvieron resultados en tiempo y frecuencia.

2.2. Estudios numéricos.

En lo que respecta al análisis numérico, el método de diferencias finitas fue inicialmente considerado adecuado para el desarrollo de simulaciones dinámicas en mecánica de la fractura, sin embargo, para el modelado de grietas en superficies complejas este método ya no es muy atractivo. Chen (1975) realizó el cálculo numérico del Factor de Intensidad de Esfuerzos en una placa agrietada centralmente y sujeta a tensión uniaxial, la cual se aplica súbitamente y bajo condiciones de deformación plana. Chen determinó el campo de esfuerzos en la cercanía de la punta de la grieta y graficó la variación del Factor de Intensidad de Esfuerzos con respecto al tiempo.

Muchas aplicaciones del Método de Elementos Frontera han sido encaminadas a las solución numérica de problemas de dinámica de la fractura. Esto debido a la relativa facilidad de efectuar refinamiento de la red en los puntos de análisis. Das y Kostrov (1987) aplicaron el método de elementos frontera en 2D y 3D, así como un mecanismo de liberación de nodos para solucionar problemas de propagación en geofísica. Otros autores como Bergkvist (1978), Mettu y Kim (1991) han estudiado la propagación dinámica de grietas mediante el método de elementos frontera. Para el análisis de la propagación dinámica de grietas en cuerpos infinitos y finitos, Gallego y Domínguez (1992) desarrollaron este método en el dominio del tiempo y así también adicionaron un elemento singular móvil y una técnica de remallado.

Sánchez-Sesma *et al.* (1991) formularon un método denominado como *Método Indirecto de Elementos Frontera (MIEF)* para el análisis de ondas P , SV y Rayleigh que inciden en topografías irregulares. Este método se basa en una representación integral del campo elástico difractado en términos de fuentes de frontera de capa simple, la cual es derivada de la identidad de Somigliana. La

introducción de las condiciones de frontera conduce a una ecuación integral del tipo Fredholm de segunda clase de fuentes de frontera. Asimismo, introdujeron un esquema de discretización basado en la integración numérica y analítica de las funciones exactas de Green para desplazamientos y tracciones. Ellos validaron la aplicación de este método con algunos problemas planteados en la literatura abierta, encontrando buena concordancia con sus resultados.

Sánchez-Sesma *et al.* (1993 y 1995) plasmaron la potencialidad del método *MIEF* para la solución de problemas de difracción de ondas en topografías irregulares en 2D y 3D debido a la incidencia de ondas *P*, *S* y Rayleigh, los resultados obtenidos mostraron buena concordancia con los publicados en la literatura.

Luzón *et al.* (1997) estudió el problema de difracción de ondas *P*, *S* y de Rayleigh en topografías en 3D en un semi espacio elástico empleando el *MIEF*. Ellos compararon las amplitudes de desplazamiento, en el dominio del tiempo y de la frecuencia, con los publicados en la literatura abierta, encontrando buena concordancia.

Vai *et al.* (1999) estudiaron la propagación de ondas elásticas en un medio irregularmente estratificado mediante la aplicación del *MIEF*. Confrontaron sus resultados (desplazamientos verticales y horizontales) con los obtenidos mediante el Método de Elementos Espectrales. Los resultados muestran convergencia.

Brickstad (1983) empleó el Método de Elementos Finitos para evaluar el Factor de Intensidad de Esfuerzos antes y después del arresto de grietas en placas agrietadas en un borde y en condiciones de esfuerzo plano. La información que sirvió para alimentar al programa de Método de Elementos Finitos fue la obtenida de experimentos en especímenes de aceros de alta resistencia, donde se monitoreo

la velocidad de la grieta y los desplazamientos en las fronteras. Él observó que los efectos dinámicos influyen el proceso durante un tiempo considerable después del arresto, encontrando oscilaciones del Factor de Intensidad de Esfuerzos dinámico.

Geubelle y Rice (1995) presentaron una formulación numérica para problemas tridimensionales para fractura elastodinámica. El campo de esfuerzos y de desplazamientos se calculan mediante una representación en series de Fourier. Básicamente estudiaron el modo I de fractura y cuyos resultados obtenidos fueron comparados con problemas planteados en la literatura abierta, (problemas de grietas propagándose y no).

Frangi (1998) aplicó el Método de Elementos Frontera a problemas evolutivos y no lineales de mecánica de sólidos, con atención muy particular a la simulación de propagación, en modos mixtos, de fracturas en sólidos cuasi-frágiles y a la respuesta de una estructura sujeta a carga dinámica. Su trabajo doctoral fue enfocado, en el aspecto de Mecánica de la Fractura, a la determinación de la dirección de propagación de grietas en vigas sujetas a cargas estáticas, comparando los resultados obtenidos con resultados experimentales. Así también solucionó el problema planteado por Chen (1975), con relación al comportamiento que muestra el Factor de Intensidad de Esfuerzos en placas con grietas pasantes perpendiculares a cargas de impulso. Estos resultados fueron validados con otras soluciones dadas en la literatura. Frangi también estudió el comportamiento de placas con grietas inclinadas y placas con grietas rectas y curvas sujetas a flexión.

Providakis y Beskos (1999) realizaron una revisión del estado del arte de las aplicaciones del Método de Elementos de Frontera para el tratamiento numérico de vibraciones libres y forzadas en placas a flexión. Un caso particular es el de una placa circular sujeta a una carga de impacto, adicionalmente graficaron la

respuesta obtenida por el Método de Elementos Frontera y cotejada con varias soluciones numéricas y analíticas dadas al mismo problema, como conclusión manifestaron la potencialidad del método para la solución de problemas dinámicos.

Krysl y Belytschko (1998) estudiaron el problema de propagación de grietas en 3D empleando el Método de Elementos Libres de Galerkin, ellos comentan que la propagación de la grieta se realiza mediante el uso del Factor de Intensidad de Esfuerzos en la dirección perpendicular del mayor esfuerzo principal de tensión. Este factor es evaluado en los vértices sobre el frente de la grieta y entonces ésta es avanzada, por tanto los vértices son transformados ahora en superficies libres del cuerpo. Esta técnica según Krysl y Belytschko muestra considerables ventajas computacionales comparadas con el Método de Elementos Finitos en el caso de propagación de grietas y el consecuente proceso de remallado.

Henshell y Shaw (1975) presentaron la técnica conocida como *quarter-point element* para la evaluación del parámetro de fractura, *K_{IC}*. Esta es una contribución importante, porque evita la singularidad numérica del problema de fractura y, por ende, actualmente es muy empleada en el *FEM*. Diversos estudios realizados por Yagawa *et al.* (1977), Hoff *et al.* (1987), Stlund y Gudmondson (1987), y Swenson e Ingrassia (1988), entre otros, han sido encaminados a los procesos de remallados en la punta de la grieta durante procesos de propagación dinámica de fractura.

Beall *et al.* (1989) simularon el crecimiento arbitrario de grietas en sólidos de 2D y 3D mediante los Métodos de Elementos Finitos y Elementos Frontera. Ellos establecen que el análisis del proceso de crecimiento de grietas solucionadas con dichos métodos requieren de simuladores que contengan: (1) un módulo que contemple un mecanismo de fractura apropiado, el cual sea capaz de predecir la forma de la fractura y la estabilidad local y global de la grieta; (2) un módulo de

modelado de sólidos, el cual reciba información de los cambios en la forma e incrementalmente ajuste la geometría del modelo en respuesta al cambio de grieta; (3) un módulo, el cual ejecute los análisis apropiados para producir el nuevo frente de grieta; (4) un módulo de visualización y por último, (5) una eficiente base de datos que integre todos los módulos mencionados.

Li *et al.* (1999) estudiaron la respuesta de sólidos sujetos a impactos torsionales. Emplcaron los métodos de transformadas de Laplace y Hankel para solucionar la ecuación integral de Fredholm, a través de esto obtuvieron el campo de esfuerzos en la punta de la grieta. También investigaron la influencia de la no-homogeneidad y ortotropía del material en el Factor de Intensidad de Esfuerzos, determinando finalmente, una expresión para el cálculo de dicho factor para el modo III en función del tiempo.

Wang *et al.* (1999) estudiaron el comportamiento de grietas en medios estratificados con diferentes propiedades del material y sujetos a cargas dinámicas. Estos medios son formados por muchos pero pequeños estratos donde las propiedades varían de uno a otro, sin embargo permanecen constantes en su propio estrato. Emplcaron transformadas de Laplace y de Hankel para reducir el problema de fractura a un sistema de ecuaciones integrales singulares. La solución en el tiempo se obtiene mediante la transformada inversa de Laplace. Para determinar el Factor de Intensidad de Esfuerzos realizaron varios análisis numéricos, donde se observa el comportamiento de éste para un material compuesto (aluminio y cerámica). Comentaron que el *FIE* se incrementa rápidamente cuando se da la carga de impacto, alcanza un pico y posteriormente el *FIE* decrece.

Seelig y Gross (1999) investigaron numéricamente el fenómeno de dinámica de la fractura en materiales frágiles. Los estudios conciernen al Factor de

Intensidad de Esfuerzos y las variaciones velocidad de la punta de la grieta, la estabilidad de propagación simultánea de varias grietas y la interacción de grietas de diferentes medidas. Además, estudiaron la ramificación dinámica de grietas desde un punto de vista macroscópico y postularon un criterio para saber si y cuando una grieta se ramifica. Así también formularon el respectivo problema de valor inicial en la frontera de elastodinámica lineal como un sistema de ecuaciones integrales de frontera, dependientes del tiempo, con un criterio experimental para el crecimiento y ramificación. Establecieron que en los materiales reales rara vez toma lugar la propagación de una grieta única, mas real es que algunas macrogrietas o un sistema de microgrietas están involucradas en el proceso de falla o de fractura y mencionan que la dimensión y localización juegan un papel importante en el proceso.

Karim y Awal. (1992) investigaron la dispersión de ondas elásticas debidas a inclusiones como remaches ó soldaduras así como a fracturas. Su estudio fue hecho por medio de una combinación del método analítico y el método de elementos finitos. Utilizaron estos estudios para simular los receptores de superficie utilizados en las pruebas ultrasónicas no destructivas. Se encontró una gran similitud de resultados al ser comparados sus resultados con los obtenidos por las pruebas ultrasónicas.

2.3. Planteamiento del problema.

La revisión bibliográfica y las necesidades de la industria han mostrado que actualmente son de gran interés los estudios relacionados con elementos estructurales que por alguna razón han sido agrietados, y los cuales están sujetos a cargas dinámicas. Como se ha observado, se han desarrollado procedimientos analíticos y numéricos encaminados a la comprensión de problemas en dinámica de la fractura.

Debido a que se está considerando el estudio de cargas de corta duración, se torna indispensable contemplar los efectos de inercia en la propagación de energía en el elemento estudiado. Esta propagación se hace a través de las ondas generadas en el sólido, una vez impactado. La interacción de ondas con discontinuidades y fronteras genera el fenómeno de difracción y reflexión de los diferentes tipos de ondas en sólidos, los cuales conllevan a alteraciones del estado de esfuerzos en la punta de la grieta.

III. MARCO TEÓRICO.

En este capítulo se hablará de los tipos de ondas que existen así como de las ondas de Rayleigh las cuales serán utilizadas para la obtención de los resultados de la presente tesis. Se encuentran también los distintos modos de fractura existentes así como los conceptos teóricos de la Mecánica de la Fractura. Se tratará también las propiedades de las ondas en sólidos elásticos para lograr una mayor comprensión del problema en estudio.

3.1. Tipos de ondas.

Existen varios tipos de ondas, las cuales se mueven en diferentes modos. Estas ondas se clasifican en dos tipos principales, las ondas de cuerpo y las ondas de superficie. Las ondas de cuerpo viajan a través de las capas internas de los sólidos, mientras que las de superficie viajan a través de la superficie de éstos.

Ondas de cuerpo.

El primer tipo de ondas de cuerpo son las ondas P o primarias. Estas ondas son las más rápidas, se pueden mover a través del agua ó de la roca sólida. Su movimiento es hacia delante y atrás, empujando y jalando la roca. En este tipo de ondas, las partículas oscilan hacia delante y atrás en su posición de equilibrio. Estas ondas también son llamadas longitudinales.

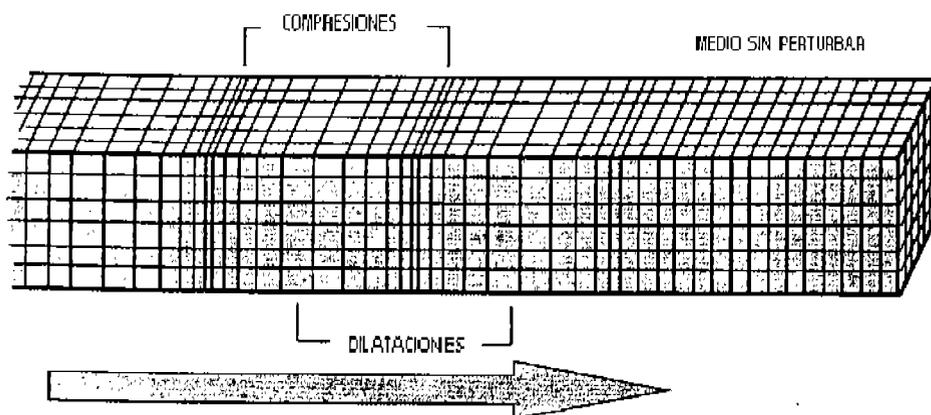


Figura. 3.1. Diagrama que muestra el movimiento de una onda Primaria.

El otro tipo de ondas son ondas S ó secundarias, estas ondas son más lentas que las ondas P, y sólo se pueden mover a través de cuerpos sólidos. Su

movimiento puede ser de arriba abajo ó de lado a lado. Estas ondas también son llamadas transversales.

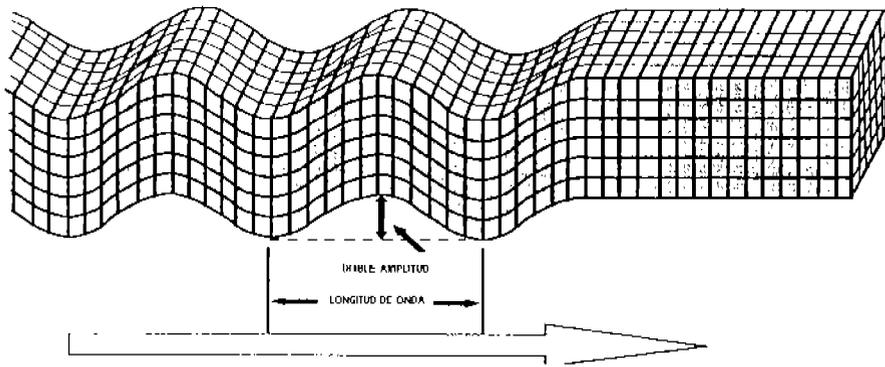


Figura. 3.2. Movimiento de una onda secundaria.

Ondas de superficie.

Dentro de este tipo de ondas se encuentran las ondas Love, llamadas así por A.E.H. Love. Es la onda de superficie más rápida y su movimiento es transversal.

El otro tipo de ondas son llamadas ondas de Rayleigh, llamadas así por Lord Rayleigh, quien probó su existencia matemáticamente en 1885. Este tipo de ondas tienen un movimiento tanto transversal como longitudinal.

Ondas de Rayleigh.

Las ondas de Rayleigh, son por definición, ondas de superficie, resultado de la incidencia de ondas P y SV interactuando en una superficie libre y viajando paralelamente a ésta. Estas ondas tienen un movimiento elíptico y retrógrado, el cual, al ir aumentando la profundidad va cambiando de sentido, hasta llegar a un punto donde no hay movimiento. La amplitud de las ondas de Rayleigh, decrece exponencialmente con la profundidad.

Para la realización de la presente tesis es utilizada una onda de Rayleigh, ya que debido a sus características son muy socorridas para la detección de grietas superficiales.

ONDA DE RAYLEIGH

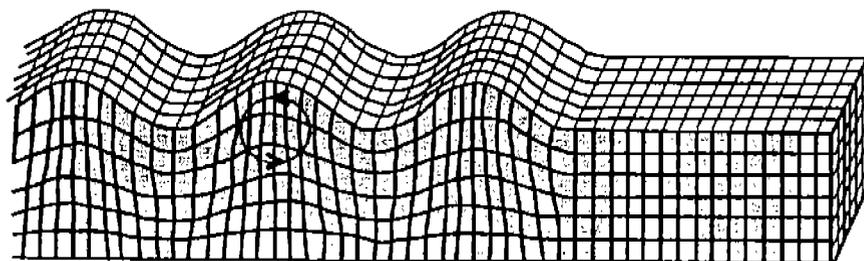


Figura 3.3. Movimiento de una onda de Rayleigh

3.2. Modos de fractura.

En esta sección se describen los conceptos teóricos de Mecánica de la Fractura, los cuales están encaminados a la comprensión del problema de interés. Por tanto, se consideran aquellos que son de importancia para entender el problema dinámico de grietas sujetas a cargas de corta duración. Cabe mencionar que en el estudio solo se contempla el campo de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica (MFLE) aunque en ocasiones se citan algunos parámetros relacionados con los aspectos no lineales del problema. La razón es que la mayoría de los materiales se comportan elásticamente a medida que aumenta la velocidad de la carga.

Es oportuno mencionar que existen tres modos de fractura, los cuales se observan en la Figura 3.4, éstos pueden presentarse en forma separada o combinada en elementos o sistemas estructurales, aunque en el caso más general estos modos de fractura se presentan en forma combinada. Cabe mencionar que aunque la mayor parte de la teoría desarrollada en la Mecánica de la Fractura es encaminada a la

comprensión del modo I, los conceptos son extendidos a los modos II y III de fractura.

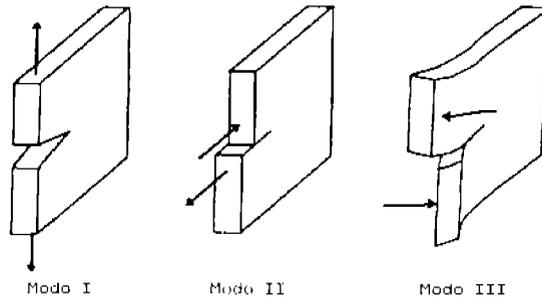


Figura. 3.4 Modos de Fractura

El modo I es conocido como de apertura, el modo II como de corte y el modo III es el de desgarramiento.

Una vez obtenida la medida de concentración de esfuerzos a través del Factor de Intensidad de Esfuerzos se compara con la tenacidad de fractura del material, la cual indica el límite para que una grieta se propague y a la vez es una propiedad del material.

La Mecánica de la Fractura Lineal Elástica es aplicable para todas las grietas, estructuras y condiciones de carga donde las deformaciones inelásticas alrededor de la punta de la grieta son pequeñas (Kanninen y Popelar, 1985), por tanto es aplicable a materiales frágiles donde la zona de cedencia es pequeña en comparación con la longitud de la grieta. La mayor parte de los metales tienen una zona moderada de cedencia y pueden no ser clasificados como materiales frágiles. Cuando consideramos metales, el comportamiento inelástico del material es referido como plasticidad. En el caso de cedencia moderada, existen métodos para corregir el resultado de *MFLLE* para considerar la plasticidad en la punta de la grieta. Para una cedencia mayor, entonces debe aplicarse la Mecánica de la

Fractura Elastoplástica para tomar en cuenta el comportamiento no lineal del material (Venter, 1998).

Por lo tanto, la categoría de problemas donde la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica es válida es cuando se satisface la condición "small-scale yielding". Esto significa que los esfuerzos no generan la cedencia plástica. En la Figura 3.5 puede apreciarse el criterio para la aplicación de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica. Esta figura relaciona los tres tipos de falla, donde la primera se refiere a la falla por fractura rápida, la segunda por plasticidad y por último al colapso plástico (Martínez, 2000). Cabe mencionar que el postulado fundamental en MFLE es la determinación del Factor de Intensidad de Esfuerzos.

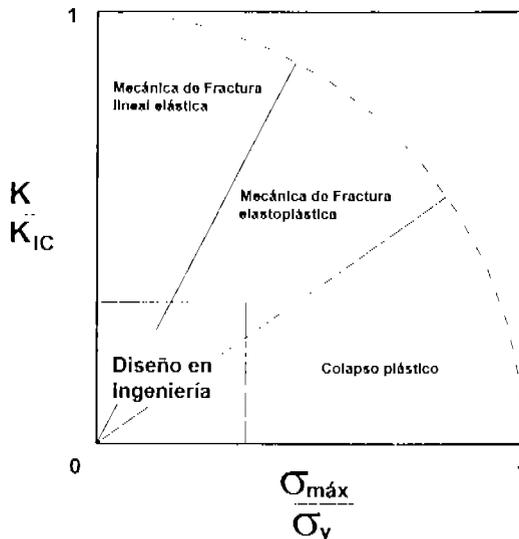


Figura. 3.5 Criterio de aplicación de la Mecánica de Fractura

Existen tres caminos por los cuales pueden aparecer grietas en una estructura:

- Defectos inherentes al material (inclusiones en el metal, no adherencia en un compuesto, etc.).
- Defectos en fabricación de un componente estructural (falta de fusión en soldaduras, etc.).
- Daño ocurrido durante la vida de servicio.

Es importante mencionar que la Mecánica de Fractura proporciona:

- La máxima carga de operación segura que una estructura puede sostener para una localización de grietas y dimensiones dadas.
- Para cargas dadas, la mayor grieta que puede existir sin afectar a la estructura.

3.3. Parámetros de fractura.

3.3.1. Mecánica de la fractura estática.

Griffith (1921) fue el primer investigador en determinar, desde el punto de vista energético, las condiciones para que una grieta se extienda, creando el conocido "Balance de energía de un cuerpo agrietado", el cual menciona que:

Energía pérdida en el sistema= Energía absorbida por el crecimiento de la grieta

esto para un incremento de grieta dado.

Se consideran tres caminos por medio de los cuales puede ocurrir el crecimiento de la grieta (Figura 3.6), estos son:

1. Desplazamientos constantes
2. Cargas constantes
3. Energía constante

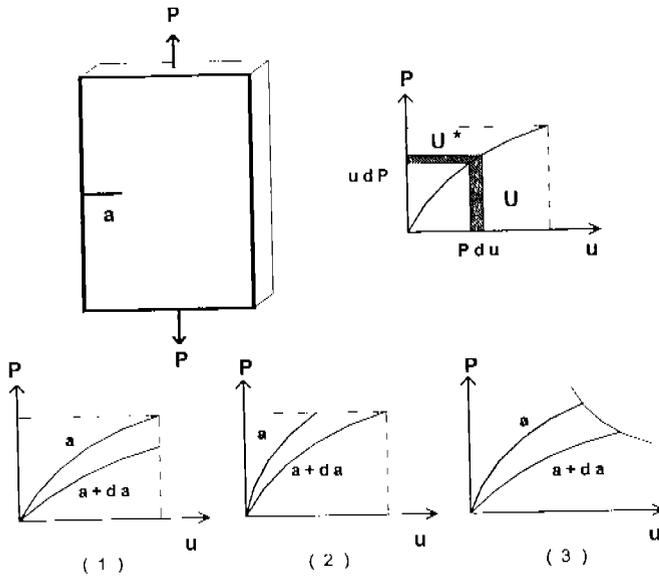


Figura. 3.6. Gráficas Carga-desplazamiento para el crecimiento de grietas

Que conducen a una forma de la ecuación de Griffith para el balance de energía:

$$R = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial U^*}{\partial a} \right)_P = - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_U \quad (3.1)$$

donde,

- R ; es la resistencia al agrietamiento y es una propiedad del material
- U^* ; es la energía de deformación complementaria
- U ; es la energía de deformación
- a ; es la longitud de la grieta
- B ; espesor del elemento.

En el caso de fractura frágil, la resistencia de la grieta es caracterizada por la energía de superficie del material γ . Griffith calculó la relación de liberación energía de deformación del campo elástico alrededor de la punta de la grieta empleando la solución de Inglis (Meguid, 1989) para problemas de concentración

de esfuerzos en agujeros elípticos. Posteriormente, Irwin introdujo el concepto del Factor de Intensidad de Esfuerzos. La distribución de esfuerzos frente a la grieta de longitud "a" es debida a la solución de Westergard (Kanninen y Popelar, 1985) para el modo I, la cual se expresa como:

$$\sigma_{11} = \sigma_{nominal} \sqrt{\frac{a}{2r}} \tag{3.2}$$

donde,

$\sigma_{nominal}$; esfuerzo en la misma posición de la grieta, pero en un cuerpo sin agrietar

r ; distancia frente a la grieta del punto donde se desea conocer el esfuerzo

Cuando se requiere el esfuerzo σ_{11} en cualquier otra posición de la placa, entonces, éste está en función de θ y de la forma de la placa, entonces se tiene que:

$$\sigma_{11} = \sigma_{nominal} \sqrt{\frac{a}{2r}} f(\theta, forma), \tag{3.3}$$

donde,

θ ; representa el ángulo con respecto al plano de fractura

El efecto de las fronteras puede ser caracterizado por el parámetro k_t , el cual es invariante para una geometría dada. Por tanto, la solución dada por Westergard puede escribirse como:

$$\sigma_{11} = k_t \sigma_{nominal} \sqrt{\frac{a}{2r}} f(\theta). \tag{3.4}$$

En el caso de una grieta centrada en un cuerpo infinito $k_I \neq 1$, para una placa con ancho finito w , k_I se puede expresar como:

$$k_I = \left(\frac{w \tan \frac{\pi a}{w}}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

una forma más usual de la ecuación 3.4 es:

$$\sigma_{ii} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta), \quad (3.6)$$

donde,

K_I es el Factor de Intensidad de Esfuerzos y puede ser escrito como:

$$K_I = k_I \sigma_{nominal} \sqrt{\pi a}, \quad (3.7)$$

en forma general, las componentes del estado de esfuerzos pueden expresarse como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I, \dots}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta); (i, j = 1, 2), \quad (3.8)$$

donde,

$K_{I, \dots}$ es el Factor de Intensidad de Esfuerzos

θ y r ; representan el ángulo y radio con respecto al plano de fractura.

La expresión (3.8) puede extenderse a los modos II y modo III.

En el caso de grietas centradas en una placa infinita, la definición del campo de esfuerzos, con el factor de forma unitario, se usa para derivar la energía total de deformación elástica en el cuerpo:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{nominal}^2 V}{E} + \frac{1}{2} \frac{\pi \sigma_{nominal}^2 a^2 B}{E}, \quad (3.9)$$

donde,

V ; es el volumen del cuerpo. Por tanto la relación de energía de deformación liberada es:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\sigma_{nominal}^2 \pi a}{E} = \frac{K_I^2}{E}, \quad (3.10)$$

$$K_I = \sqrt{\frac{E}{B} \frac{\partial U}{\partial a}} = \sqrt{EG_I}. \quad (3.11)$$

Extendiendo al caso más general, modo I, II y III y a condiciones de deformaciones y esfuerzos planos tenemos:

para esfuerzo plano,

$$EG = K_I^2 + K_{II}^2 + (1+\nu)K_{III}^2, \quad (3.12)$$

y para deformación plana,

$$EG = (1-\nu^2)K_I^2 + (1-\nu^2)K_{II}^2 + (1+\nu)K_{III}^2, \quad (3.13)$$

$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 + \frac{(1-\nu^2)}{E} K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{2\mu}. \quad (3.14)$$

Donde la relación entre K y G fue derivada por Irwin y representa la identidad fundamental de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica.

Es importante mencionar que la grieta se propagará cuando K_I alcanza a su correspondiente valor de K_{IC} el cual representa la tenacidad a la fractura.

3.3.2. Mecánica de la fractura dinámica.

Dentro del campo de la Mecánica de la Fractura dinámica se encuentran aspectos importantes tales como las velocidades de propagación, ramificación, curvado y arresto de grietas.

Cuando se tiene una grieta sujeta a carga dinámica, el balance de energía para estas condiciones dinámicas podemos expresarla en términos de la teoría de Griffith modificada, para un crecimiento de grieta δa . El balance de energía es:

Energía pérdida en el sistema = Energía absorbida por el crecimiento de la grieta

$$\delta U + \delta T = BR\delta a + \delta Q, \quad (3.15)$$

donde,

U ; es la energía total de deformación

T ; es la energía cinética total

Q ; es la energía calorífica disipada

R ; es la resistencia de la grieta

La energía cinética es debida al movimiento de las partículas del material. Q en la expresión anterior representa la pérdida de calor debida al amortiguamiento interno del material y puede considerarse que es un valor grande para cuando una grieta se propaga rápidamente. Un concepto importante es el flujo de energía dentro del cuerpo, debido a que existe reflexión de las ondas de esfuerzo debido a la existencia de fronteras cercanas en cuerpos finitos. Este flujo de energía es un índice de la cercanía de la fractura.

En términos generales, situaciones dinámicas incluyen la iniciación, propagación y arresto de grietas. Como se verá, el problema de iniciación de la grieta está

centrado en el problema de evaluar el Factor de Intensidad de Esfuerzos en condiciones dinámicas.

El criterio de falla al tiempo t podemos definirlo como:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial a} = BR. \quad (3.16)$$

Así como para el caso estático existe un valor crítico de la relación de energía de deformación liberada, para el cual la grieta se propaga inestablemente, por tanto para el caso dinámico esto es:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{1}{B} \frac{\partial T}{\partial a} = R. \quad (3.17)$$

En muchos casos prácticos el segundo elemento del miembro izquierdo tiende a cero y el primer tiende al valor de R . Existen métodos que estiman el flujo de energía que causa la fractura. Por ejemplo, para la relación de energía dinámica liberada $G(t,l)$, englobada la energía cinética y de deformación, Freund (1990) derivó la siguiente relación para condiciones de deformación plana y grieta estacionaria:

$$K(t,l) = \sqrt{\frac{E'}{1-\nu^2}} G(t,l), \quad (3.18)$$

donde,

l ; es la velocidad de la grieta, igual a cero
y en condiciones de fractura

$$G(t_f, 0) = R$$

donde,

t_f ; es el tiempo de fractura

En pruebas de tenacidad dinámica a la fractura se emplea la flexibilidad estática, lo cual asume que las fuerzas de cuerpo, energía cinética y las ondas de esfuerzo son despreciadas. Por tanto, se hace que el análisis tienda a un análisis estático:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial a} = G(t,0), \quad (3.19)$$

$$G(t,0) = G_{IC_d}, \quad (3.20)$$

$$G_{IC_d} = \frac{K_{IC_d}^2}{E}, \quad (3.21)$$

donde,

K_{IC_d} es una propiedad del material.

3.4. Ondas en sólidos elásticos.

3.4.1. Velocidad de ondas en medios elásticos.

La ecuación de equilibrio para un elemento en un cuerpo elástico, lineal e isótropo en problemas de propagación es dada por:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_k^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_k \partial X_l} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}; i, k, l = 1, 2, 3, \quad (3.22)$$

donde,

E ; es el módulo de Young

ρ ; es la densidad

ν ; es la relación de Poisson

U_i ; desplazamiento en la i -ésima dirección

X_i ; coordenada en la i -ésima dirección

Reduciendo a dos dimensiones, los desplazamientos pueden ser expresados como:

$$U_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial X_2}; U_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial X_1}, \quad (3.23)$$

donde las funciones Φ y Ψ son:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(X_1, X_2, t), \\ \Psi &= \Psi(X_1, X_2, t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

y representan la parte dilatacional y distorsional del vector desplazamiento.

Entonces la ecuación de equilibrio se reduce a:

$$C_d^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (3.25)$$

$$C_s^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (3.26)$$

donde,

$$C_d^2 = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3.27)$$

para deformación plana

$$C_d^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad (3.28)$$

para esfuerzo plano

$$C_s^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)} = \frac{\mu}{\rho}, = \beta^2 \quad (3.29)$$

para esfuerzo y deformación plana.

donde,

μ ; es el módulo de rigidez al corte.

C_d ; es la velocidad de onda dilatacional

C_s ; es la velocidad de onda distorsional

En un sólido infinito, las partes dilatacional y distorsional se propagan a diferentes velocidades. Note que $C_d > C_s$ y que C_d / C_s depende solo de la relación de Poisson, por lo tanto es una propiedad del material.

La Tabla No. 3.1. muestra una serie de propiedades mecánicas típicas para diferentes materiales.

Tabla No.3.1. Velocidad característica de onda para diferentes materiales, $m s^{-1}$ (Corran, 1982)

	E X10 ⁹ Pa	ρ Kg m ⁻³	ν	C_d Def. plana	C_d Esf., plano	C_s	C_l *
Acero	206	7800	0.30	5963	5387	3187	5139
Aluminio	69	2699	0.34	6273	5376	3089	5056
Titanio	115.8	4507	0.34	6289	5390	3096	5059
Homalite 100	4.82	1197	0.31	2363	2150	1230	2006
Epóxico KTE	3.86	1147	0.34	2275	1970	1130	1834
PMMA	2.89	1190	0.35	1976	1665	949	1560

* C_l es la velocidad de ondas longitudinales.

3.4.2. Ondas de superficie.

Adicionalmente de las ondas mencionadas anteriormente (dilatacional y distorsional) ocurridas en un cuerpo infinito, podemos mencionar que existen ondas en la superficie libre del cuerpo, las cuales representan una distorsión de la superficie. Estas ondas presentan un decaimiento exponencial con respecto a la profundidad, y son conocidas como ondas de Rayleigh. Su velocidad es C_R cae

dentro del rango $0 < \nu < 0.5$. C_R solo depende de la relación C_d/C_s , por tanto de la relación de Poisson, y para valores típicos de $\nu \approx 0.30$ a 0.33 , $C_R/C_s \approx 0.91$ a 0.95 , como se observa en la Figura 3.7.

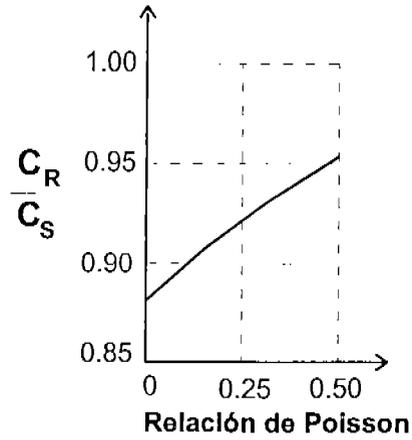


Fig. 3.7. Variación de la velocidad de ondas de Rayleigh

IV. FORMULACIÓN DEL MÉTODO.

Este capítulo tratará el método utilizado para la solución del problema planteado en el trabajo de tesis así como su aplicación en el caso planteado para dicho trabajo.

4.1. Representación Integral.

Si consideramos un dominio V , delimitado por su frontera S , y si este dominio está formado por un material elástico, el campo de desplazamientos armónicos pueden ser escritos, despreciando las fuerzas de cuerpo, por principios de la integral de frontera de capa simple

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (4.1)$$

donde $u_i(\mathbf{x})$ es la i -ésima componente de desplazamiento en \mathbf{x} , $G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$ es el tensor de Green, el cual representa el desplazamiento en la dirección i en el punto \mathbf{x} debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección j en el punto ξ , y $\phi_j(\xi)$ es la densidad de fuerza en la dirección j . El producto $\phi_j(\xi) dS_\xi$ en la integral representa a una distribución de fuerzas sobre la superficie S . El subscrito en la diferencial muestra la variable sobre la cual es realizada la integración. Esta representación integral para desplazamientos puede ser obtenida a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991). Kupradze (ver Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) probó que si $\phi_j(\xi)$ es continua a lo largo de S , entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de S .

Esta representación integral permite el cálculo de esfuerzos y tracciones mediante la aplicación directa de la Ley de Hooke y la ecuación de Cauchy, excepto en singularidades de frontera, esto es cuando \mathbf{x} es igual a ξ sobre la superficie S . Mediante un proceso límite basado en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad en la frontera, es posible escribir, para \mathbf{x} sobre S ,

$$t_i(\mathbf{x}) = c \phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) \mathcal{L}_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (4.2)$$

donde $t_i = i$ -ésima componente de tracción asociada a la dirección $n(\mathbf{x})$, frontera suave, $c = 0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde dentro de la región. $c = -0.5$ si \mathbf{x} tiende a S desde fuera de la región, $c = 0$ si \mathbf{x} no está en S . $T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) =$ la función de Green de tracción, es decir, la tracción en la dirección i en el punto \mathbf{x} , sobre la frontera con normal asociada $n(\mathbf{x})$, debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en ξ sobre S .

4.2. Funciones de Green bi-dimensionales.

En un medio infinito, homogéneo e isótropo, las Funciones de Green para dependencia tiempo-armónico $e^{i\omega t}$, donde $i^2 = -1$, $\omega =$ frecuencia circular, y $t =$ tiempo, pueden expresarse de la siguiente manera:

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}), \quad (4.3)$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[-4B + \lambda \frac{D(\omega r / \alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[-4B + \frac{D(\omega r / \beta)}{2\beta^2} \right] \times [\gamma_i n_j + \gamma_i n_k \delta_{jk}] \right\} + \frac{\mu}{r} \{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \} \quad (4.4)$$

donde,

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (4.5)$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (4.6)$$

$$C = \frac{D(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r / \beta)}{\beta^2}, \quad (4.7)$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p), \quad (4.8)$$

λ y μ son constantes de Lamé, ρ es la densidad de masas, α y β corresponden a las velocidades de onda P y S , respectivamente; $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$; $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$; δ_{ij} es la delta de Kronecker y $H_m^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda clase y orden m .

4.3. Aplicación a dominios semi infinitos agrietados.

El objetivo del presente estudio es analizar la influencia que tiene una o varias grietas en un medio homogéneo, isótropo y lineal elástico, ante la propagación o incidencia de ondas de Rayleigh; básicamente estas grietas se localizan cerca de la superficie en las cuales inciden ondas a diferentes ángulos, Figura 4.1. Para este caso se emplea el Método Indirecto de Elementos Frontera.

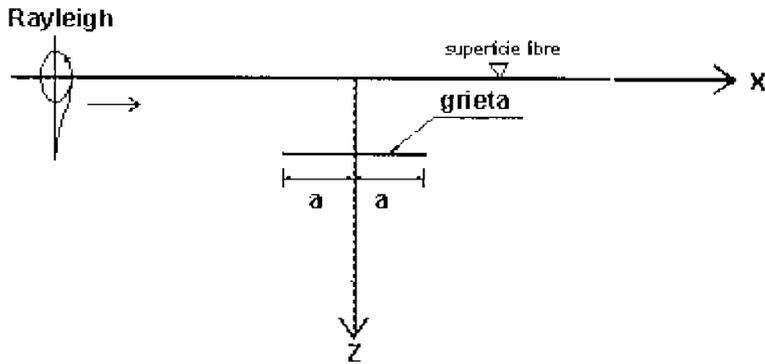


Figura 4.1. Ondas de Rayleigh que impacta un medio elástico que contiene una grieta

Es conveniente separar el dominio del problema planteado, en la Figura 4.1, en dos regiones (R y E), en las cuales se establecen las condiciones de frontera adecuadas que representen el problema considerado, Figura 4.2. Por lo tanto las fronteras del dominio son: $\partial R = \partial_1 R \cup \partial_2 R \cup \partial_3 R$ para la región R y $\partial E = \partial_1 E \cup \partial_2 E$, para la región E .

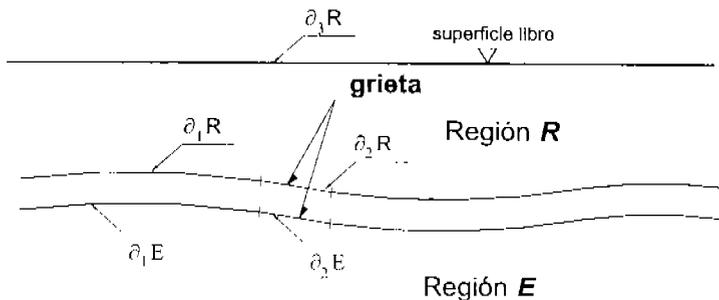


Figura 4.2. Configuración por regiones (R y L) para el

problema considerado

4.4. Condiciones de frontera.

En la superficie libre ($\partial_3 R$), tenemos que las tracciones son:

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (4.9)$$

En la interfaz continua, o no agrietada, entre la Región R y E , tenemos que los desplazamientos y tracciones están dados por:

$$u_i^R(\mathbf{x}) = u_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (4.10)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E. \quad (4.11)$$

En la discontinuidad o grieta las tracciones son nulas y por lo tanto tenemos:

$$t_i^E(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (4.12)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (4.13)$$

4.4.1. Formulación integral.

Expresando en términos del campo incidente y difractado, la ecuación (4.9) queda escrita como:

$$t_i^R(\mathbf{x}) - t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (4.14)$$

donde

$t_i^{\circ R}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo libre en la Región R , como si no existiera la grieta,

$t_i^{dR}(\mathbf{x})$ = tracciones de campo difractado en la Región R , debido a la presencia de la grieta y superficie libre. Utilizando la representación integral, la ecuación (4.14) la podemos expresar como:

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{\circ R}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (4.15)$$

de la ecuación (4.10) tenemos:

$$u_i^{dR}(\mathbf{x}) + u_i^{\circ R}(\mathbf{x}) = u_i^{dE}(\mathbf{x}) + u_i^{\circ E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R - \partial_1 E, \quad (4.16)$$

la cual se escribe como:

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = u_i^{dE}(\mathbf{x}) - u_i^{\circ E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R - \partial_1 E, \quad (4.17)$$

de la ecuación (4.11) tenemos:

$$t_i^{dR}(\mathbf{x}) + t_i^{\circ R}(\mathbf{x}) = t_i^{dE}(\mathbf{x}) + t_i^{\circ E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R - \partial_1 E, \quad (4.18)$$

la cual se escribe como:

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = t_i^{dE}(\mathbf{x}) - t_i^{\circ E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R - \partial_1 E, \quad (4.19)$$

de la ecuación (4.12) tenemos:

$$t_i^E(\mathbf{x}) - t_i^{\circ E}(\mathbf{x}) + t_i^{dE}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 E, \quad (4.20)$$

$$\int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (4.21)$$

de la ecuación (4.13) tenemos:

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R, \quad (4.22)$$

$$\int_{\partial R} \phi_i^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (4.23)$$

4.5. Esquema de discretización.

Discretizando las fronteras de las regiones R y E , Figura 4.3, y suponiendo ϕ constante sobre cada elemento tenemos:

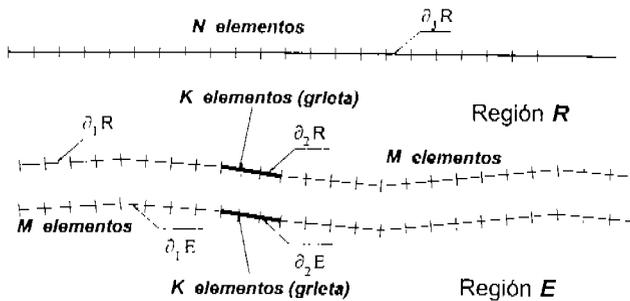


Figura 4.3. Esquema de discretización para el problema planteado

de la ecuación (4.15) y tomando en cuenta el número y posición de los elementos descritos en la figura 4.3, podemos obtener:

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{\circ R}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, N, \quad (4.24)$$

donde,

$$t_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = (\pm) \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{qp} + \int_{\Delta S_p} T_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi) dS_{\xi}, \quad l = R, E, \quad (4.25)$$

estas integrales son calculadas numéricamente excepto cuando $\mathbf{x} = \xi$, en tal caso, para segmentos rectos, las integrales se anulan, y por lo tanto tenemos:

$$t_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = (\pm) \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{qp}, \quad l = R, E, \quad (4.26)$$

de la ecuación (4.17) tenemos:

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) g_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) g_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (4.27)$$

donde,

$$g_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = \int_{\Delta S_p} G_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi) dS_{\xi}, \quad l = R, E. \quad (4.28)$$

De la ecuación (4.19) tenemos:

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (4.29)$$

Y de (4.21) tenemos:

$$\sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oE}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K, \quad (4.30)$$

de la ecuación (4.23) tenemos:

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K. \quad (4.31)$$

Si llamamos a las siguientes expresiones como:

$$T_{ij}^l = \int_{\Lambda \mathbb{S}_p} T_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi) dS_\xi, \quad l = R, E, \quad (4.32)$$

$$G_{ij}^l = \int_{\Lambda \mathbb{S}_p} G_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi) dS_\xi, \quad l = R, E, \quad (4.33)$$

las ecuaciones 4.24, 4.27, 4.29, 4.30 y 4.31 pueden expresarse matricialmente como:

$\frac{1}{2} T_{xx}^R$	0	T_{xy}^R	T_{xx}^H	T_{xx}^N	0	0	T_{xx}^R	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^R	$-t_x^{OR}$
T_{xy}^N	$\frac{1}{2} T_{xy}^R$	0	T_{xx}^R	T_{xx}^R	0	0	T_{xx}^R	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^N	$-t_x^{OR}$
0	T_{xy}^R	$\frac{1}{2} T_{xy}^R$	T_{xx}^R	T_{xx}^R	0	0	T_{xx}^R	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^H	0
T_{xx}^N	0	T_{xx}^R	$\frac{1}{2} T_{xx}^R$	T_{xx}^R	0	0	T_{xx}^R	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^R	0
G_{xx}^R	G_{xz}^R	G_{xx}^N	G_{xy}^R	$-G_{xx}^E$	$-G_{xz}^E$	G_{xx}^R	G_{xz}^H	$-G_{xx}^E$	$-G_{xz}^E$	$-G_{xz}^E$	ϕ_x^H	0
G_{xx}^R	G_{xy}^H	G_{xy}^R	G_{xz}^R	$-G_{xx}^E$	$-G_{xz}^E$	G_{xx}^R	G_{xz}^N	$-G_{xx}^E$	$-G_{xz}^E$	$-G_{xz}^E$	ϕ_x^R	0
T_{xx}^R	T_{xy}^H	$\frac{1}{2} T_{xx}^R$	0	T_{xy}^H	$\frac{1}{2} T_{xy}^H$	0	T_{xx}^R	T_{xy}^R	$-T_{xx}^E$	$-T_{xy}^E$	ϕ_x^E	0
T_{xx}^H	T_{xx}^R	0	T_{xy}^H	$\frac{1}{2} T_{xy}^H$	0	$-T_{xx}^E$	T_{xx}^R	T_{xy}^R	$-T_{xx}^E$	$-T_{xy}^E$	ϕ_x^E	0
T_{xx}^R	T_{xz}^H	T_{xx}^R	T_{xy}^R	0	0	$\frac{1}{2} T_{xx}^R$	0	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^R	$-t_x^{OR}$
T_{xz}^H	T_{xz}^R	T_{xy}^R	T_{xz}^R	0	0	0	$\frac{1}{2} T_{xz}^R$	T_{xz}^R	0	0	ϕ_x^R	$-t_x^{OR}$
0	0	0	0	T_{xx}^E	T_{xz}^E	0	0	$\frac{1}{2} T_{xx}^E$	0	T_{xy}^E	ϕ_x^E	$-t_x^{OE}$
0	0	0	0	T_{xx}^E	T_{xz}^E	0	0	0	$\frac{1}{2} T_{xx}^E$	$\frac{1}{2} T_{xz}^E$	ϕ_x^E	$-t_x^{OE}$
								T_{xx}^E	0	$\frac{1}{2} T_{xz}^E$	ϕ_x^E	$-t_x^{OE}$

(4.34)

V. ANÁLISIS NUMÉRICO.

En este capítulo se estudia el problema planteado en este trabajo así como los resultados obtenidos al aplicar el método descrito en el capítulo anterior.

Ondas de Rayleigh.

Las ondas de Rayleigh, (Figura 5.1) que son por definición ondas de superficie, son el resultado de la interacción de ondas P y SV, en una superficie libre viajando paralelamente a ésta. La componente vertical es del desplazamiento mayor que la componente horizontal. Estas ondas viajan con un movimiento elíptico y retrógrado con respecto a la dirección de propagación, este movimiento se va reduciendo exponencialmente en amplitud conforme aumenta la profundidad hasta llegar a una profundidad de 0.192λ (longitud de onda) donde no hay movimiento. A partir de esta profundidad cambia de sentido el movimiento de rotación de la onda. La amplitud de las ondas de Rayleigh, decrece exponencialmente con la profundidad.

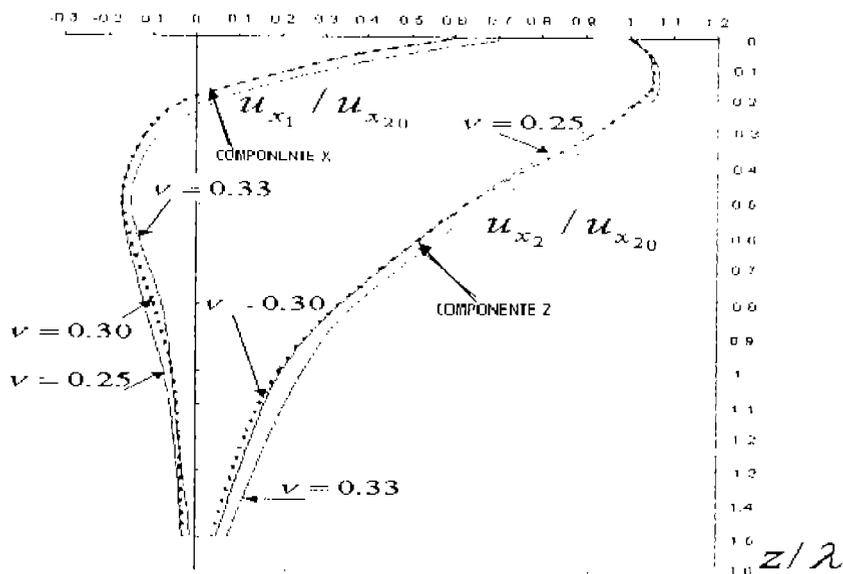


Figura 5.1. Onda de Rayleigh.

5.1. Casos de estudio.

En el presente trabajo se estudia la interacción que se presenta al hacer incidir una onda de Rayleigh en un medio semi-infinito con fracturas de diferentes tamaños y a diferentes profundidades. En algunos casos se ubicaron las grietas con diferentes ángulos de inclinación respecto a la horizontal. En la Figura 5.2. se muestra un esquema general del problema. Los casos de estudio se muestran en la Tabla 5.1. Esto tiene como finalidad el encontrar las variaciones en la forma de la onda de Rayleigh al entrar en contacto con grietas de diferentes tamaños y en diferentes posiciones, y así poder determinar las características de la grieta que se encuentra en el elemento observando como es afectada la onda al entrar en contacto con ésta.

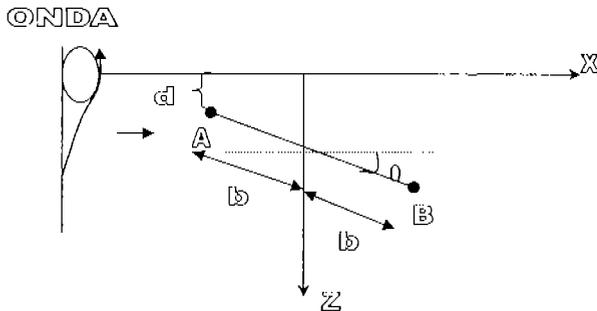


Figura 5.2. Esquema general de los casos de estudio.

Tabla 5.1. Casos de estudio.

Caso	Punto fijo	Ángulo θ	b/a	$d/2a$
1	--	0°	0.2	0.1
2	--	0°	0.3	0.1
3	--	0°	0.4	0.1
4	--	0°	0.5	0.1
5	--	0°	0.6	0.1
6	--	0°	0.7	0.1
7	--	0°	0.8	0.1
8	--	0°	0.9	0.1
9	--	0°	0.2	0.2
10	--	0°	0.3	0.2
11	--	0°	0.4	0.2
12	--	0°	0.5	0.2
13	--	0°	0.6	0.2
14	--	0°	0.7	0.2
15	--	0°	0.8	0.2
16	--	0°	0.9	0.2
17	--	0°	0.2	0.3
18	--	0°	0.3	0.3

19	--	0°	0.4	0.3
20	--	0°	0.5	0.3
21	--	0°	0.6	0.3
22	--	0°	0.7	0.3
23	--	0°	0.8	0.3
24	--	0°	0.9	0.3
25	--	0°	0.2	0.4
26	--	0°	0.3	0.4
27	--	0°	0.4	0.4
28	--	0°	0.5	0.4
29	--	0°	0.6	0.4
30	--	0°	0.7	0.4
31	--	0°	0.8	0.4
32	--	0°	0.9	0.4
33	--	0°	0.2	0.5
34	--	0°	0.3	0.5
35	--	0°	0.4	0.5
36	--	0°	0.5	0.5
37	--	0°	0.6	0.5
38	--	0°	0.7	0.5
39	--	0°	0.8	0.5
40	--	0°	0.9	0.5
41	A	30°	1	0.01
42	A	30°	1	0.02
43	A	30°	1	0.03
44	A	30°	1	0.04
45	A	30°	1	0.05
46	A	30°	1	0.06
47	A	30°	1	0.07
48	A	30°	1	0.08
49	A	30°	1	0.09
50	A	30°	1	0.1
51	A	60°	1	0.1
52	A	90°	1	0.1
53	B	30°	1	0.01
54	B	30°	1	0.02
55	B	30°	1	0.03
56	B	30°	1	0.04
57	B	30°	1	0.05
58	B	30°	1	0.06
59	B	30°	1	0.07
60	B	30°	1	0.08
61	B	30°	1	0.09
62	B	30°	1	0.1
63	B	60°	1	0.1
64	B	90°	1	0.1

*el valor de "a" se tomó igual a 1.

El método utilizado supone un arreglo de 51 receptores a lo largo de la superficie libre a una distancia de 0.08^1 , por medio los cuales se tomó el comportamiento de la onda incidente, así como los cambios que sufre al entrar en contacto con la grieta.

5.2. Obtención de curvas de desplazamiento-tiempo.

Estas curvas² nos sirven para determinar a cada momento los cambios sufridos en la forma de la onda incidente desde el inicio de su recorrido hasta el final. Se puede ubicar en que momento la onda es afectada por la grieta y como se da esta afectación.

Para hacer el estudio, se tomaron lecturas en diferentes lugares colocando receptores tanto en la superficie libre así como en cada una de las caras de la grieta. Debido a la gran cantidad de resultados obtenidos, en esta tesis se presentarán los casos más representativos para cada uno de los diferentes lugares donde se colocaron los receptores.

5.2.1. Grietas paralelas a la superficie.

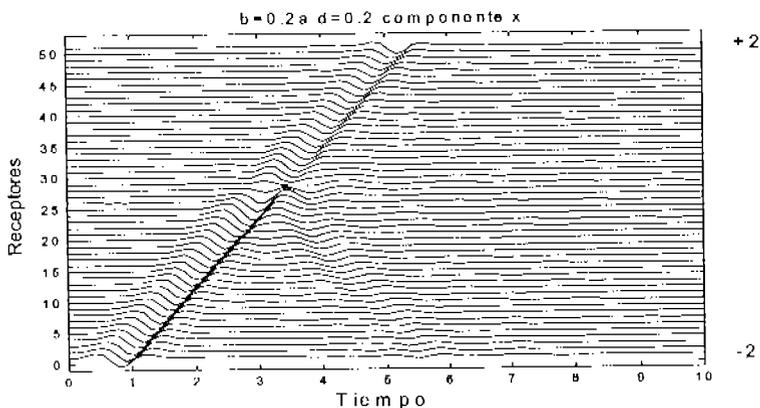


Figura 5.3. Gráfica desplazamiento-tiempo una grieta con longitud de 0.2 y a una profundidad de 0.2 componente x.

¹ Los datos utilizados para el estudio son adimensionales.

² Estas curvas son obtenidas tomando en un determinado momento las afectaciones detectadas por todos los receptores.

En la Figura 5.3. podemos observar una onda reflejada de menor tamaño a la onda incidente², la cual es generada al momento en que la onda impacta la grieta. Esta onda reflejada tiene una velocidad igual a la que lleva la onda incidente (0.92 m/s), ya que hace el recorrido de regreso en el mismo tiempo que la onda incidente. A pesar de haber sido obstruida en su camino, la onda no es reflejada en su totalidad, ya que continúa el recorrido una onda con menor tamaño que la onda incidente.

Al ir aumentando de tamaño la grieta se pudo concluir que: conforme la grieta aumenta de tamaño, la onda reflejada es también de mayor tamaño. La onda que logra continuar después de haber impactado la grieta es cada vez menor, conforme aumenta la grieta, hasta que la grieta tiene un tamaño igual a 0.6 donde se genera una onda reflejada de mayor tamaño que en los casos anteriores. Al seguir creciendo la grieta, se genera una onda en la punta final de la grieta, la cual tiene menor tamaño que la onda incidente.

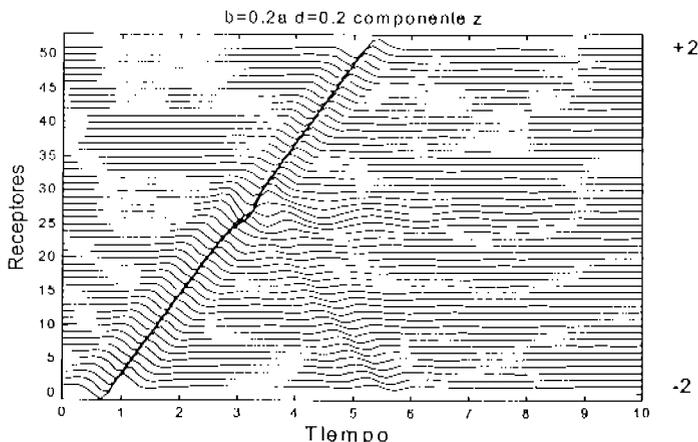


Figura 5.4 Gráfica desplazamiento-tiempo de una grieta con longitud de 0.2 y a una profundidad de 0.2 componente z

En la componente z (figura 5.4), se presenta un comportamiento similar al que se presenta con la componente x. En ambos casos, cuando la grieta tiene un tamaño de 0.7 se puede observar una onda reflejada la cual se origina en la punta final de la grieta. También en esta punta se presenta una atenuación en el tamaño

² La onda incidente se refiere a la onda generada por medio de una carga puntual de choque.

de la onda. Aquí la afectación debida al choque de la onda con la grieta es menor que la presentada en la componente x.

Para el siguiente caso se tomó la configuración del caso anterior, pero en esta ocasión, se colocaron los receptores a lo largo de la cara superior de la grieta.

En la componente x podemos apreciar que:

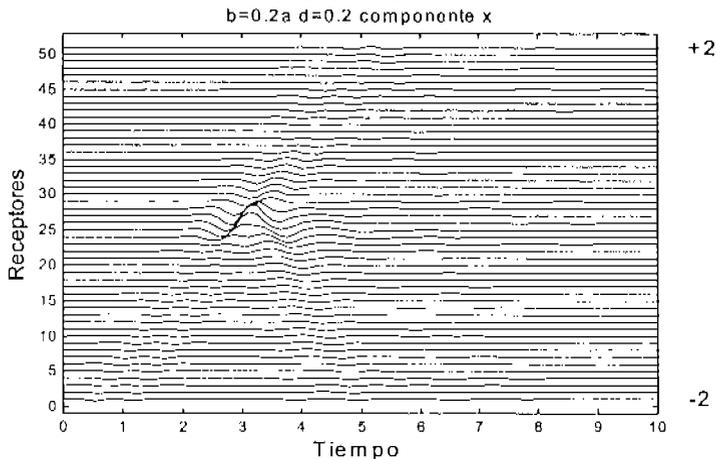


Figura 5.5. Gráfica desplazamiento-tiempo de una grieta con longitud de 0.2 y a una profundidad de 0.2 componente x. (mediciones en la cara superior de la grieta).

En la Figura 5.5. se puede notar que las mayores afectaciones en la onda están en el lugar donde se encuentra la grieta. Las ondas detectadas antes de llegar a la grieta y después de haber pasado por ésta son muy pequeñas, así como la onda reflejada, la cual presenta una mayor afectación sobre la grieta.

Se puede comprobar este comportamiento al analizar los casos en los que va creciendo el tamaño de la grieta. La onda reflejada crece conforme crece en tamaño la grieta¹. A partir de que la grieta tiene un tamaño de 0.6, la onda es completamente reflejada. Al ir creciendo la grieta después de este tamaño, la onda que se genera después del impacto va siendo cada vez mayor.

¹ En estos casos solo se cambió el lugar de los receptores, siendo estos ubicados en la cara superior de la grieta.

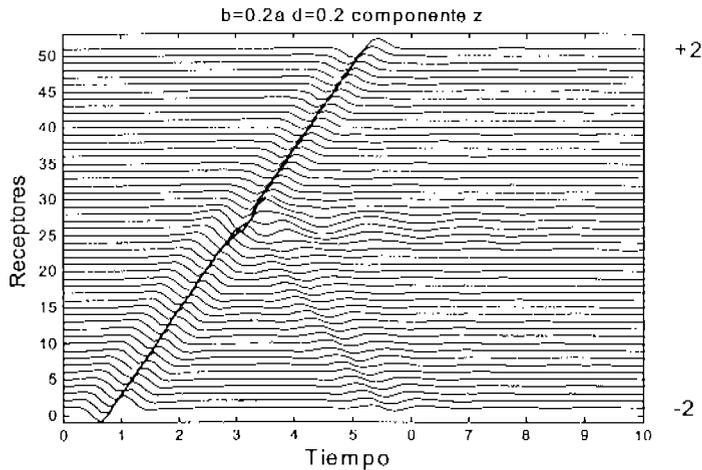


Figura 5.6. Gráfica desplazamiento-tiempo de una grieta con longitud de 0.2 y a una profundidad de 0.2 componente z. (mediciones en la cara superior de la grieta).

En la componente z (Figura 5.6.) podemos apreciar que la onda sufre una afectación al chocar con la punta de la grieta, provocando una onda reflejada más chica que la onda incidente. Después de que la onda llega a la punta final de la grieta se genera una onda similar a la onda incidente pero de menor tamaño.

Conforme se va aumentando el tamaño de la grieta, también aumenta el tamaño de la onda reflejada, así como también disminuye el tamaño de la onda generada después del impacto. Al llegar a la configuración con una grieta de un tamaño igual a 0.7 la onda incidente es reflejada casi en su totalidad, después de este tamaño, vuelve a aumentar su tamaño la onda después de haber pasado la grieta. También en este tamaño de grieta se presentan ondas reflejadas más chicas que en los tamaños anteriores.

Para las lecturas tomadas bajo la grieta tenemos¹:

¹ En estos casos se colocaron receptores a lo largo de la cara inferior de la grieta.

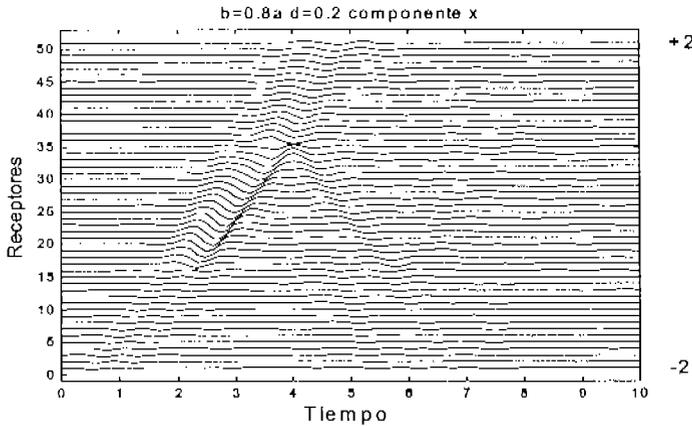


Figura 5.7. Gráfica desplazamiento-tiempo de una grieta con longitud de 0.8 y a una profundidad de 0.2 componente x. (mediciones en la cara inferior de la grieta).

En la figura 5.7 se presenta un comportamiento muy parecido al observado en las mediciones tomadas sobre la grieta. En este caso se puede observar que la mayor afectación se encuentra a lo largo de la grieta, ya que es aquí donde se detecta una amplificación en el tamaño de la onda incidente. La onda reflejada es muy pequeña para todos los casos, siendo mayor sobre la grieta.

Es en este tamaño de grieta (0.8) en donde la onda reflejada comienza a hacerse cada vez menor conforme crece la grieta, mientras que en los tamaños anteriores² la onda reflejada es cada vez menor hasta llegar a este tamaño de grieta.

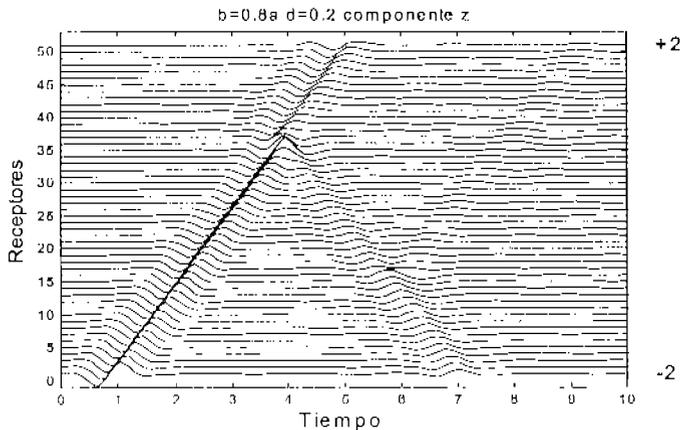


Figura 5.8. Gráfica desplazamiento-tiempo de una grieta con longitud de 0.8 y a una profundidad de 0.2 componente z. (mediciones en la cara inferior de la grieta).

² Casos 9 a 13 de la Tabla 5.1.

Para la componente z (Figura 5.8.), se puede apreciar una atenuación en el tamaño de la onda incidente después de haber impactado con la grieta, así como ondas reflejadas en las puntas de la grieta. Al aumentar el tamaño de la grieta, la onda reflejada crece de tamaño mientras que la onda incidente va teniendo atenuaciones mayores.

5.2.2. Grietas inclinadas.

Para la obtención de estos resultados se tomó una grieta inclinada, de una longitud unitaria y a la cual se le fue variando la profundidad e inclinación¹.

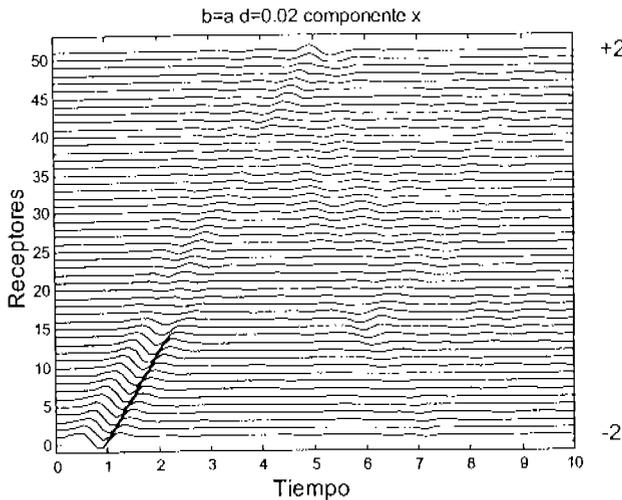


Figura 5.9. Grieta a 30° a una profundidad 0.02 componente x

Se puede observar en la Figura 5.9¹ que la onda incidente viaja normalmente hasta encontrar la punta de la grieta, momento en el cual reduce de tamaño volviéndose muy pequeña, esta onda conforme avanza va creciendo en tamaño. Se puede observar en la otra punta de la grieta una onda reflejada de menor tamaño que la onda incidente.

¹ Estos casos van del 41 al 64 de la Tabla 5.1

¹ Para las Figuras 5.9 y 5.10 se tomó como punto fijo el punto A (ver Figura 5.2)

Este comportamiento se mantiene igual conforme se va alejando la grieta de la superficie de la superficie. Se puede ver que mientras más se aleja la grieta de la superficie es menor la reducción que sufre la onda debida a el impacto con la punta de la grieta. También se puede distinguir una onda reflejada muy pequeña en la punta contraria.

Para la componente en z tenemos:

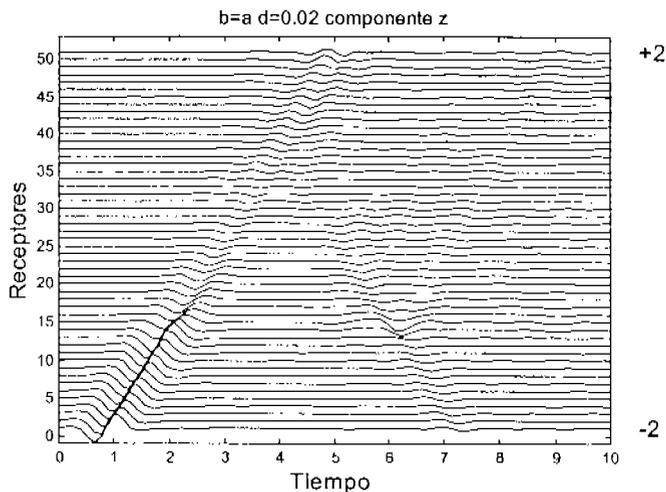


Figura 5.10. Grieta a 30° a una profundidad 0.02 componente z.

Hay un comportamiento muy similar al de la componente en x, con la diferencia de que en este caso se nota aun más la onda reflejada y se da una segunda onda reflejada al final de la grieta.

Al cambiar el punto fijo de la grieta¹ (Figura 5.11), podemos notar que las afectaciones se dan en la punta final de la grieta, dándose aquí una amplificación en la onda incidente, sufriendo después de esta punta una atenuación. En la punta final de la grieta se origina una onda reflejada de menor tamaño que la onda incidente.

¹ Para las Figuras 5.11 y 5.12 se tomo como punto fijo el punto B (ver Figura 5.2)

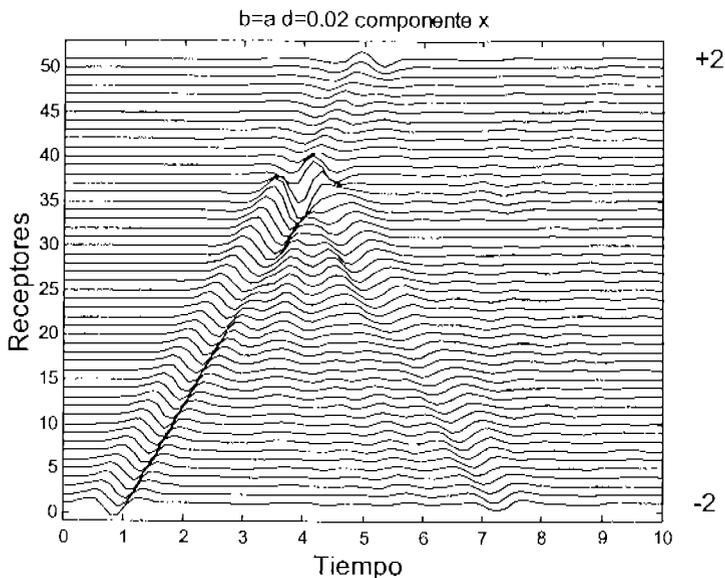


Figura 5.11. Grieta a 30° a una profundidad 0.02 componente x.

Para la componente en z (Figura 5.12), se puede apreciar un comportamiento similar, aunque la amplificación de la onda incidente debida al impacto con la punta de la grieta es mayor al presentado en el caso anterior. También se presenta una atenuación en el tamaño de la onda después de haber impactado la grieta. Al alejar la grieta de la superficie se observa que esta amplificación va siendo cada vez menor, así como el tamaño de la onda reflejada también se reduce. Por otro lado, se puede apreciar que la onda que se presenta después de pasar la grieta aumenta de tamaño conforme se aleja la grieta de la superficie.

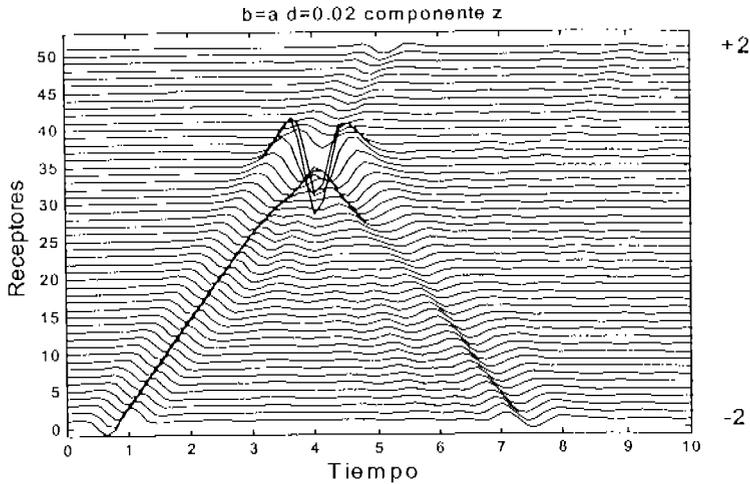


Figura 5.12. Grieta a 30° a una profundidad 0.02 componente z.

Los siguientes resultados se obtuvieron al mantener una profundidad de la grieta de 0.2, dejando como punto fijo el punto A y colocando la grieta a 30, 60 y 90 grados¹.

La onda al impactar una grieta a 90 grados (Figura 5.13), es reflejada, disminuyendo su tamaño pero sin llegar a ser totalmente destruida. Para un ángulo de 30 grados se presenta una onda reflejada al final de la grieta. Para un ángulo de 60 grados la onda solo sufre una pequeña reducción de tamaño al impactar la punta de la grieta.

Para ambas componentes el comportamiento observado es muy similar, siendo la componente x la más afectada.

¹ Véase Figura 5.2 y Tabla 5.1 casos 50, 51 y 52

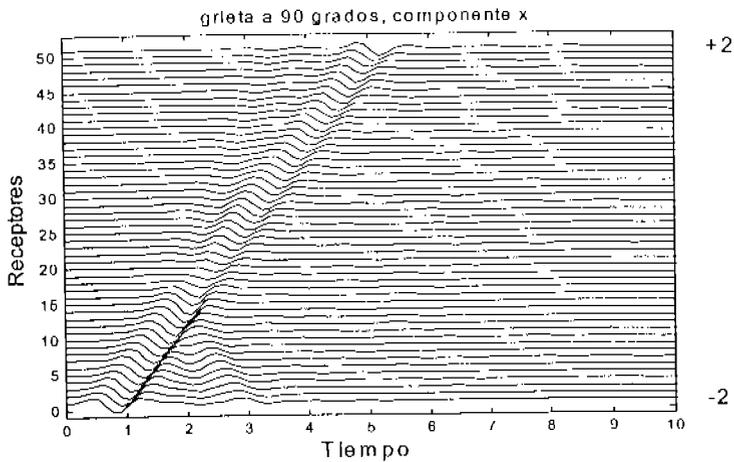


Figura 5.13. gráfica desplazamiento-tiempo de una onda de Rayleigh al impactar una grieta a 90 grados a una profundidad de 0.2, componente x.

Para el mismo caso pero manteniendo como punto fijo el punto B, sucede!:

Para la componente x:

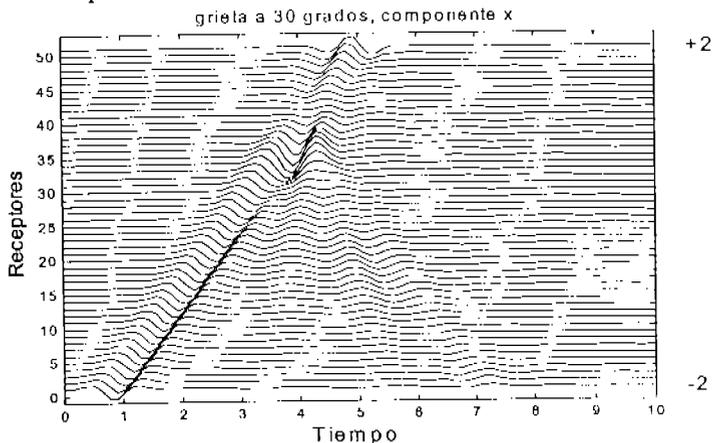


Figura 5.14. gráfica desplazamiento-tiempo de una onda de Rayleigh al impactar una grieta a 30 grados a una profundidad de 0.2, componente x.

En la Figura 5.14, se observa una reducción en el tamaño de la onda incidente al momento de llegar al extremo opuesto de la grieta, pasando esta punta se presenta una amplificación en la onda. En este mismo punto se presenta una onda reflejada, la cual reduce su tamaño conforme avanza.

¹ Véase Figura 5.2 y Tabla 5.1 casos 62, 63 y 64

Al ir aumentando el ángulo de la grieta, se observa que mientras más aumenta, la onda incidente sufre menos afectaciones y la onda reflejada va siendo cada vez más grande, teniendo la misma forma que la onda incidente, pero de menor tamaño.

Para la componente en z (Figura 5.15). Se observa una reducción de la onda incidente al llegar ésta a la punta final de la grieta, así como una onda reflejada, la cual inicia en este mismo punto.

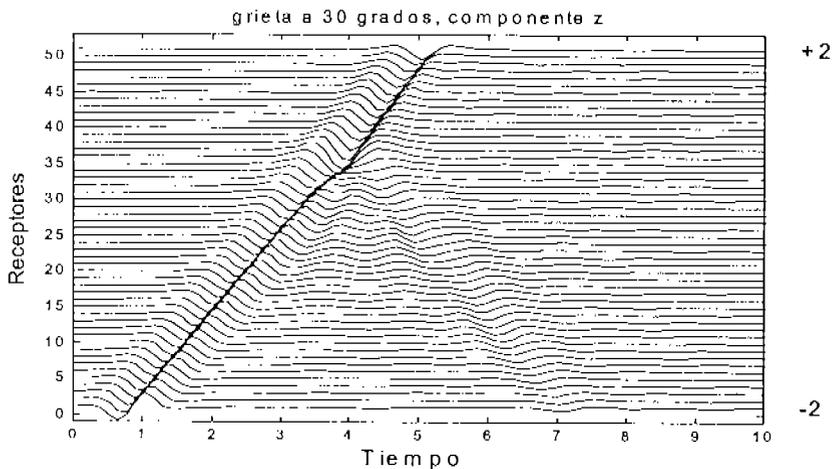


Figura 5.15 gráfica desplazamiento-tiempo de una onda de Rayleigh al impactar una grieta a 30 grados a una profundidad de 0.2, componente z.

Las Figuras 5.16, 5.17 y 5.18, muestran las variaciones en el tamaño que presenta la onda antes de impactar la grieta, al centro de la misma y después de impactar la grieta.

Estas gráficas se obtuvieron normalizando las longitudes de onda, esto es, tomando la longitud total de la onda incidente (receptor 1 ubicado en -2), la onda una vez que ha impactado la grieta (receptor 26 ubicado en 0) y la onda después de haber impactado (receptor 51 ubicado en 2) y dividiéndola entre la longitud de la onda incidente.

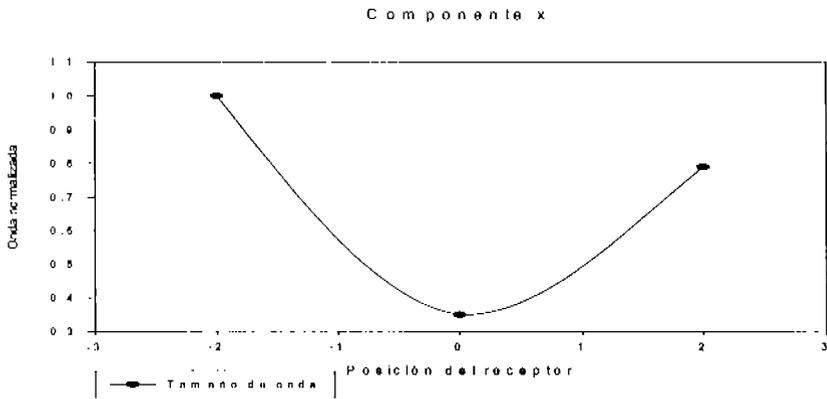


Figura 5.16. Comparación de los tamaños de onda para una grieta a 30 grados, a una profundidad de 0.02 y una longitud de onda de 2. Componente x.

En la Figura 5.16 se puede apreciar que la onda disminuye su tamaño al impactar la grieta. También se observa una recuperación del tamaño al llegar a la punta contraria de la grieta.

Al alejar la grieta de la superficie, se pudo notar una recuperación en el tamaño de la onda al llegar a la punta contraria va siendo cada vez mayor, hasta incluso ser mayor que antes de impactar la grieta.

En este mismo caso pero en la componente z tenemos que:

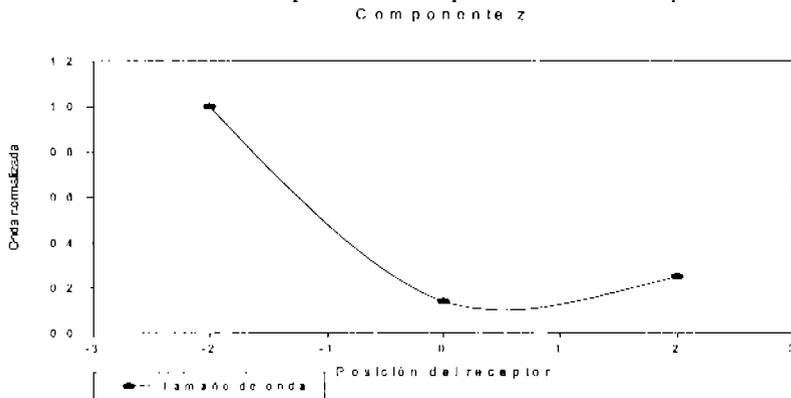


Figura 5.17. Comparación de los tamaños de onda para una grieta a 30 grados, a una profundidad de 0.02 y una longitud de onda de 2. Componente z.

La onda sigue sufriendo una reducción en su tamaño al centro de la grieta, y un aumento del mismo al momento de llegar a la punta contraria aunque de menor magnitud que el presentado en la componente x.

Al alejar la grieta de la superficie, se pueden apreciar cada vez menores atenuaciones en su tamaño al llegar al centro. Del mismo modo, se notan amplificaciones mayores al pasar la grieta.

Para el caso en que el punto fijo es el punto B tenemos que:

En la componente x:

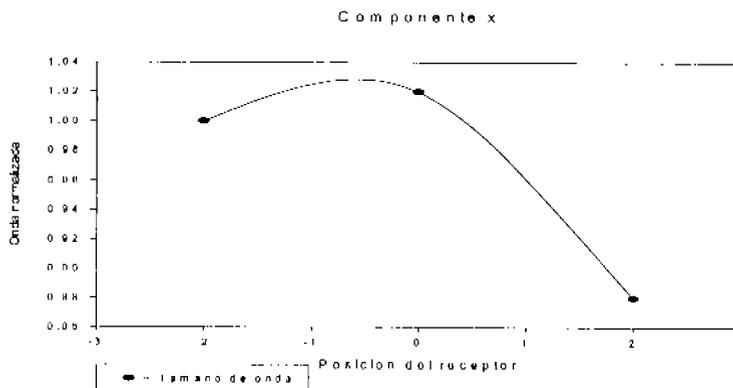


Figura 5.18. Comparación de los tamaños de onda para una grieta a 30 grados a una profundidad de 0.06 y una longitud de onda de 2. Componente x.

En la Figura 5.18 la grieta se encuentra a 0.06 de la superficie. En esta gráfica se aprecia que la onda sufre una amplificación al momento de llegar al centro. Al pasar la grieta (receptor ubicado en -2) se puede observar una considerable atenuación de la onda. Al ir aumentando la profundidad a la grieta se pudo observar que esta atenuación es cada vez menor hasta llegar a una profundidad igual a 0.1, donde se amplifica la onda.

En la componente z, la onda disminuye su tamaño conforme se acerca a la punta contraria de la grieta. Esta disminución de tamaño es menor conforme la grieta se aleja de la superficie, aunque no varía en mucho.

Para una grieta a 60 grados se logró observar que existe una disminución en el tamaño de la onda al llegar al centro de la grieta, mientras que una vez que pasó la grieta, se presentó una recuperación en su tamaño. Para la componente z, se

presentó una disminución en el tamaño de la onda al llegar al centro de la grieta, disminuyendo aún más una vez que la onda pasó la grieta.

Al cambiar el punto fijo (punto B)¹, en la componente x presentó un comportamiento contrario, ya que presenta un aumento en la longitud de la onda al momento de llegar al centro de la grieta, presentando después de pasar ésta una atenuación de su tamaño. La componente z presenta un comportamiento similar al anterior.

Para una grieta a 90 grados se presenta una disminución en el tamaño de la onda al momento de llegar al centro de la grieta, habiendo una recuperación cuando pasa la grieta. La componente z presenta un comportamiento similar, aunque la disminución al centro de la grieta es mayor y la recuperación después de pasar la grieta es menor que en la componente x. Al cambiar el punto fijo (punto B) se observa un comportamiento contrario en ambas componentes.

5.3. Resultados en frecuencia.

Para obtener los siguientes resultados en frecuencia, se colocaron 5 receptores en la superficie ubicados de la siguiente forma: se colocó uno donde se iniciará el estudio, esto es en -2, otro en la zona que abarcará la grieta (1 y -1), en la parte central de la grieta y en el lugar donde termina el área de estudio, esto es en 2 (Figura 5.19). También se colocaron receptores en dirección z a lo largo de la longitud de la onda. Se varió la profundidad de la grieta así como su longitud. Debido a la gran cantidad de resultados obtenidos sólo se colocaron los correspondientes a la grieta más superficial y al receptor central.

¹ ver Figura 5.1

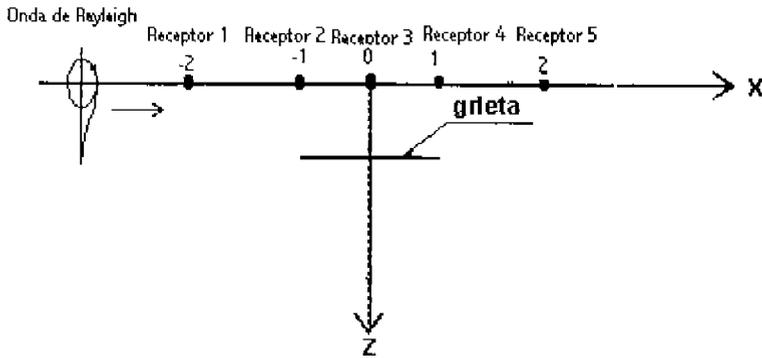


Figura 5.19. Ubicación de los receptores en la superficie libre.

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente gráfica:

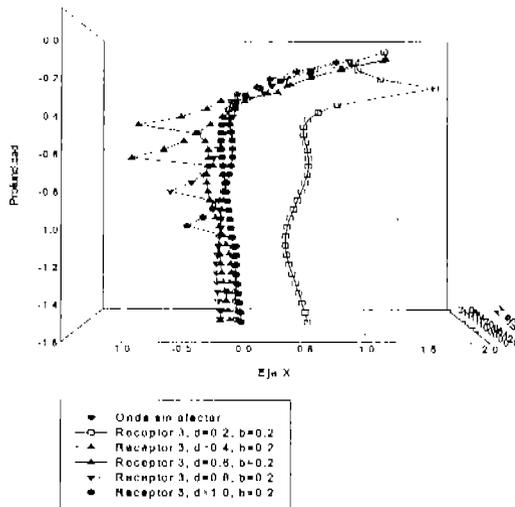


Figura 5.20. Lecturas tomadas al centro de la grieta a diferentes profundidades y una longitud de grieta de 0.2. Vista frontal componente x.

En la Figura 5.20 se puede apreciar la amplificación en la onda ocurrida al momento en que la onda llega a la profundidad donde se encuentra la grieta. Esta amplificación es mayor cuando la grieta está más cerca de la superficie.

Al verificar los demás receptores se pudo observar que las mayores amplificaciones en la onda se dan en el centro. Al pasar el centro de la grieta, se puede apreciar un cambio de la trayectoria de la onda al compararla con una la trayectoria de una onda que no tiene obstáculos en su camino.

Al incrementar el tamaño de la grieta, se observó que las amplificaciones crecen conforme crece la grieta.

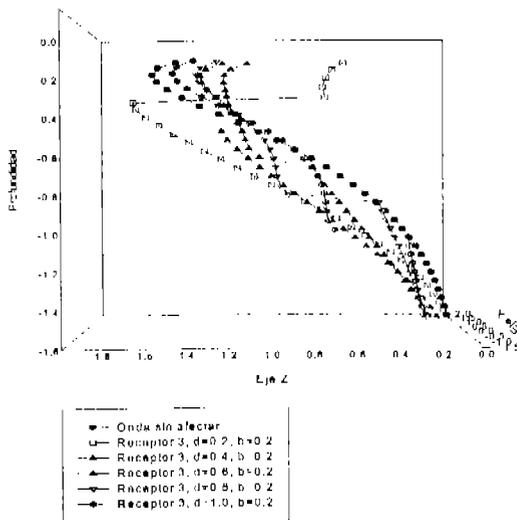


Figura 5.21. Lecturas tomadas al centro de la grieta a diferentes profundidades y una longitud de grieta de 0.2. Vista frontal componente z.

Para la componente z (Figura 5.21) se puede observar un comportamiento similar, aunque en esta componente las amplificaciones son mayores a las ocurridas en la componente x.

Se pudo determinar también que mientras más se aumenta la profundidad de la grieta, la componente más afectada es la componente z, mientras que la componente x tiene menores afectaciones, ya que las amplificaciones en la componente z son mayores. Esto es debido a que la componente z tiene una mayor influencia en la profundidad que la componente x.

5.4. Representaciones en campo completo.

Las siguientes figuras son representaciones en campo completo de desplazamientos, esto es, una imagen de la onda tomada en un determinado tiempo teniendo un panorama general de todo el campo. Los intervalos de tiempo considerados para el presente estudio fueron de cada 0.65 segundos.

Cabe mencionar que en estos modelos la onda no es generada dentro del campo mostrado en las figuras, si no que únicamente se ilustran los tiempos en que se presentan la interacciones con las grietas.

Para este estudio se tomaron tres casos: Una grieta a 30 grados teniendo como punto fijo el punto "B", a una profundidad de 0.02 y una longitud de $2a$, el mismo caso pero teniendo como punto fijo el punto "A", y una grieta de 2.0 de longitud paralela a la superficie libre y a una profundidad de 0.2^1 .

Para el primer caso² (Figura 5.22) se observa que la onda es dividida al entrar en contacto con la punta de la grieta (2.6 seg), volviéndose cada vez más pequeña hasta que impacta la punta contraria, donde se origina una onda reflejada de menor tamaño al de la onda incidente y una amplificación de la onda. Se puede observar también una atenuación en la onda incidente después de haber impactado la grieta, esto se puede apreciar en la figura 5.11. Se dan ondas reflejadas en ambas caras de la grieta, las cuales se van atenuando conforme avanzan. Se presentan también ondas de cuerpo al momento de que la onda llega a la punta final, las cuales se dispersan en varias direcciones. Otras ondas similares se presentan al momento de que las ondas reflejadas llegan a la punta inicial.

En la componente z (Figura 5.23) muestra un comportamiento muy similar al de la componente en x , aunque en esta componente se observa un mayor tamaño en las ondas reflejadas y se presentan ondas de cuerpo más tenues en las orillas de la grieta. Se aprecia también una amplificación mayor en la onda al momento de impactar con la punta contraria de la grieta. Esto se puede apreciar mejor en la figura 5.12.

Al cambiar el punto fijo³, para la componente x (Figura 5.24) la mayor parte de la onda viaja por la cara inferior de la grieta, y solo una pequeña parte continúa por la parte superior. Al impactar la onda con la grieta, se originan ondas de cuerpo y ondas reflejadas, las cuales se van atenuando conforme avanzan. Esto se puede apreciar en la figura 5.9, donde se puede apreciar que, debido a que los receptores están en la superficie, se aprecia una onda de menor tamaño que la

¹ Para mayor referencia de las configuraciones ver la figura 6.2 y la Tabla 6.1.

² Caso 53 de la Tabla 6.1.

³ Caso 41 de la Tabla 6.1.

onda incidente, ya que la mayor parte de la onda pasa por debajo de la grieta y no es detectada.

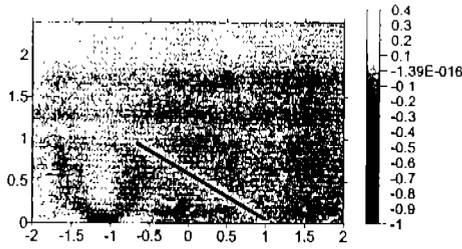
La componente z (Figura 5.25) muestra un comportamiento muy similar al de la componente en x , pero en este caso son mayores las afectaciones, puesto que la influencia mayor de la componente z se presenta en la profundidad.

Para la componente x de una grieta paralela a la superficie (Figura 5.26) la onda es dividida por la grieta pasando la mayor parte por la cara inferior. Al momento del impacto con la punta de la grieta se generan ondas de cuerpo, las cuales se van atenuando conforme avanzan. En la punta final de la grieta se puede apreciar una onda reflejada, la cual viaja por la cara inferior de la grieta.

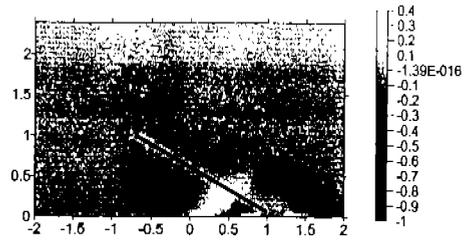
Como las ondas de Rayleigh son de superficie, y la componente x tiene una influencia muy pequeña en la profundidad, sólo se capta una pequeña parte de la onda antes de llegar a la grieta, y como al chocar con ésta la mayor parte se propaga a lo largo de la cara inferior, es aquí donde se dan los desplazamientos más fuertes.

Para la componente z (Figura 5.27) se presenta un comportamiento similar al de la componente x teniendo afectaciones de mayor magnitud debido a que esta componente tiene una influencia mayor en la profundidad. Al comparar las Figuras 5.3 y 5.4, se puede notar esta influencia mayor de la componente z en la profundidad, ya que es en la Figura 5.4 donde se pueden apreciar las mayores afectaciones.

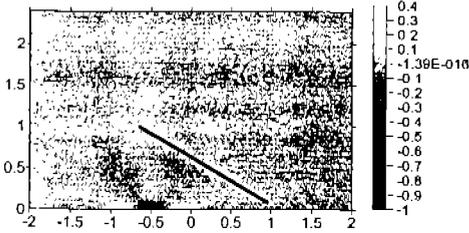
Se puede ver que al momento de que la onda impacta alguna de las puntas de la fractura, sufre un ligero aumento en su amplitud seguido de una onda reflejada la cual viaja a lo largo de la cara de la fractura, así como ondas de cuerpo las cuales viajan en diferentes direcciones. Se puede apreciar que la componente z tiene mayor influencia que la componente x . También se puede apreciar que en todos los casos se presentan ondas de superficie que viajan sobre ambas caras de la fractura.



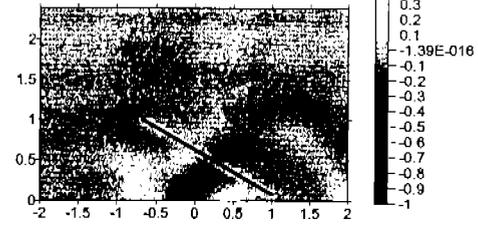
1.95 seg



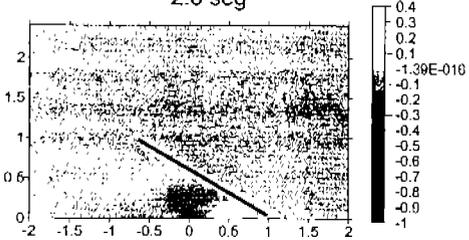
4.55 seg



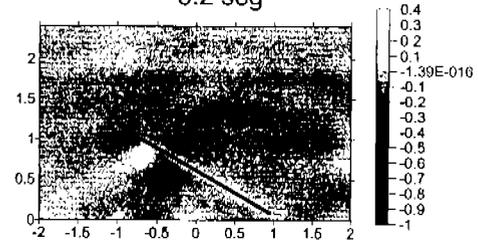
2.6 seg



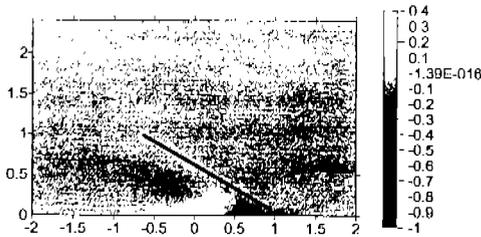
5.2 seg



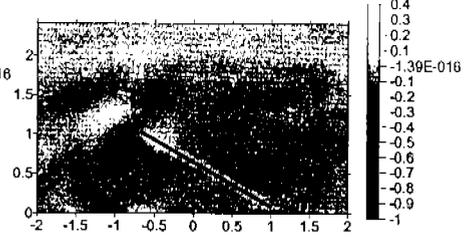
3.25 seg



5.85 seg



3.9 seg



6.5 seg

Figura 5.22. Diagrama de cuerpo completo para una grieta de 2.0 de longitud a una profundidad de 0.02 con un ángulo de 30 grados. Punto fijo "B". Componente x.

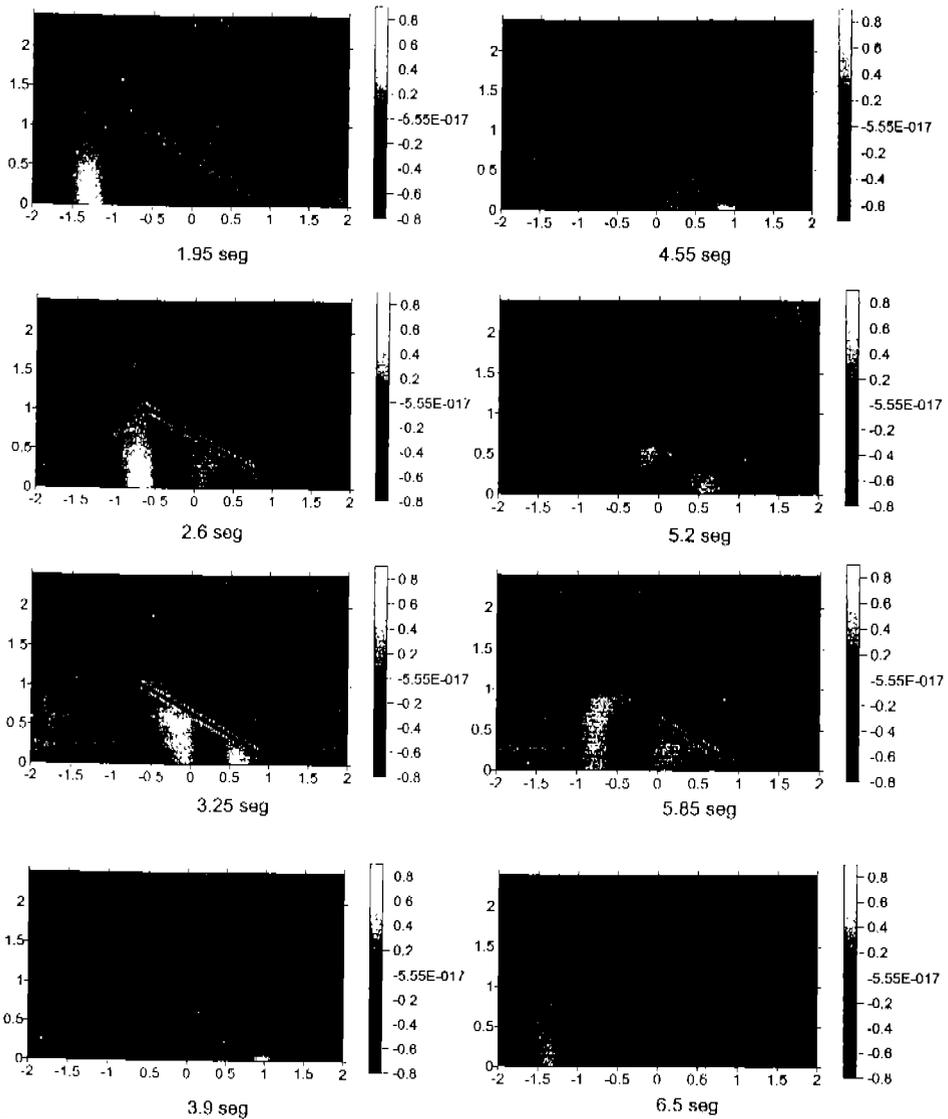


Figura 5.23. Diagrama de cuerpo completo para una grieta de 2.0 de longitud a una profundidad de 0.02 con un ángulo de 30 grados. Punto fijo "B". Componente z.

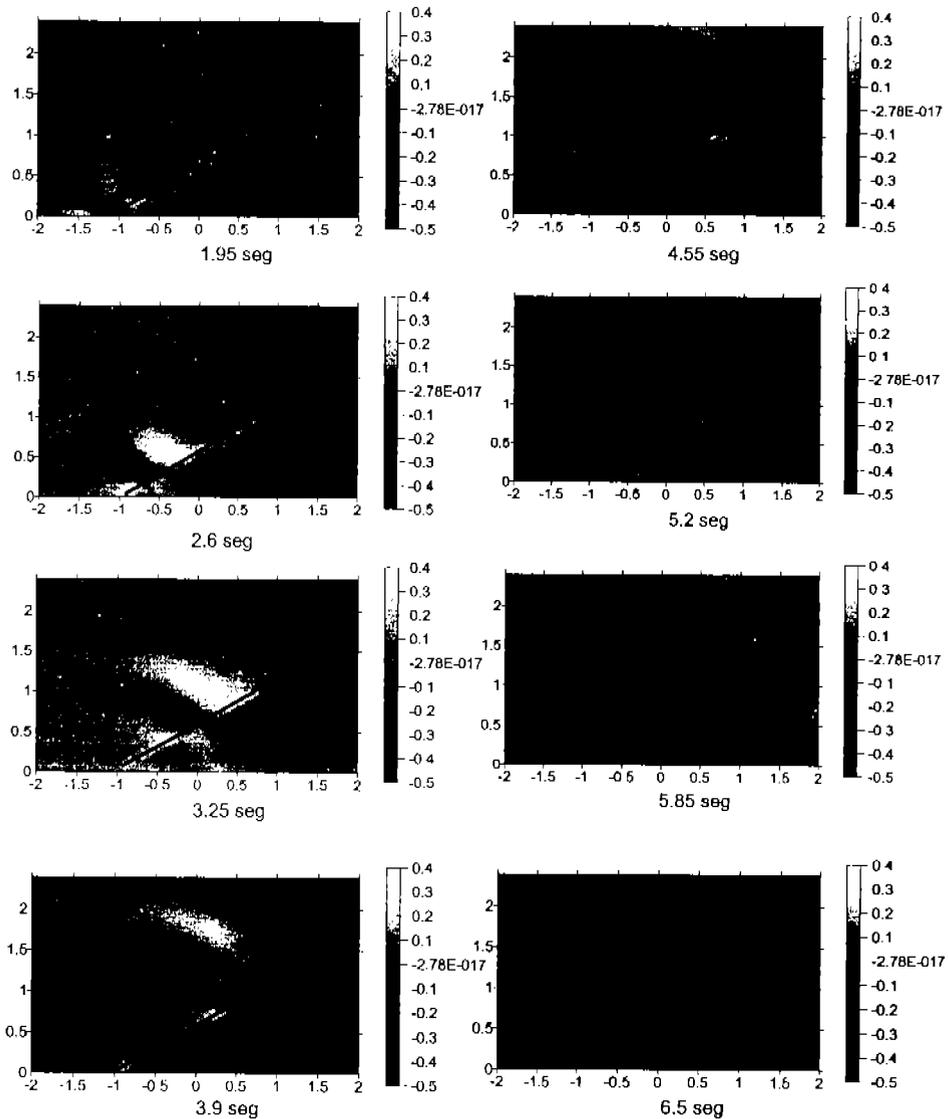


Figura 5.24. Diagrama de cuerpo completo para una grieta de 2.0 de longitud a una profundidad de 0.02 con un ángulo de 30 grados. Punto fijo "A". Componente x.

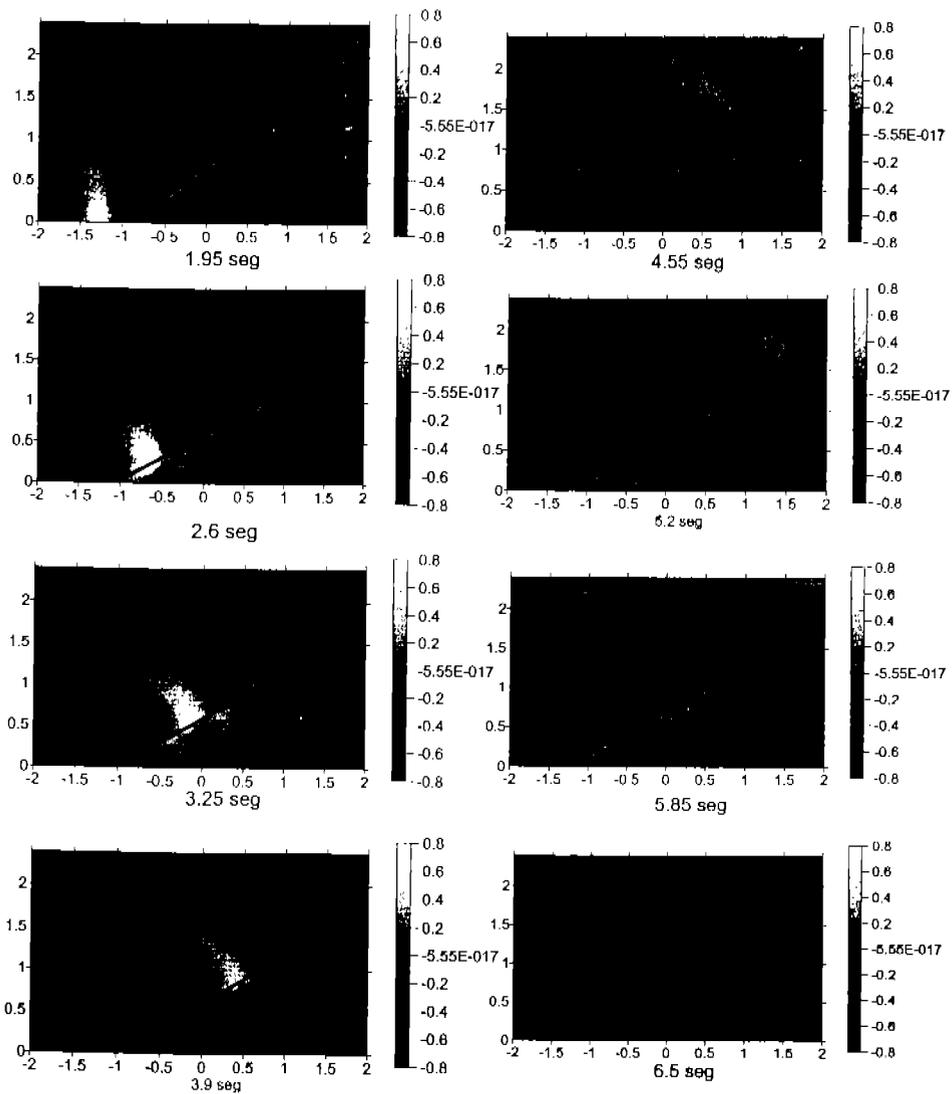


Figura 5.25. Diagrama de cuerpo completo para una grieta de 2.0 de longitud a una profundidad de 0.02 con un ángulo de 30 grados. Punto fijo "A". Componente z.

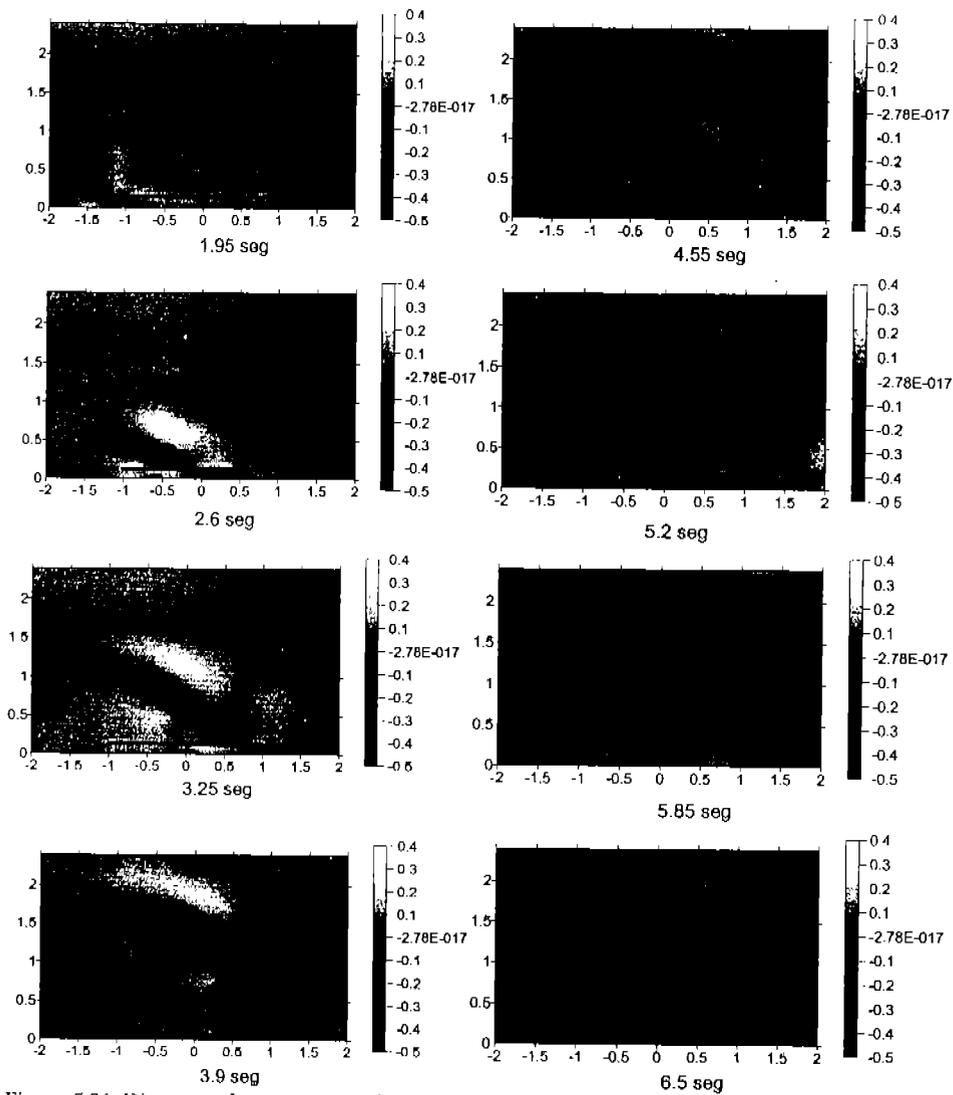


Figura 5.26. Diagrama de cuerpo completo para una grieta paralela a la superficie de 2 de longitud a una profundidad de 0.2. Componente x.

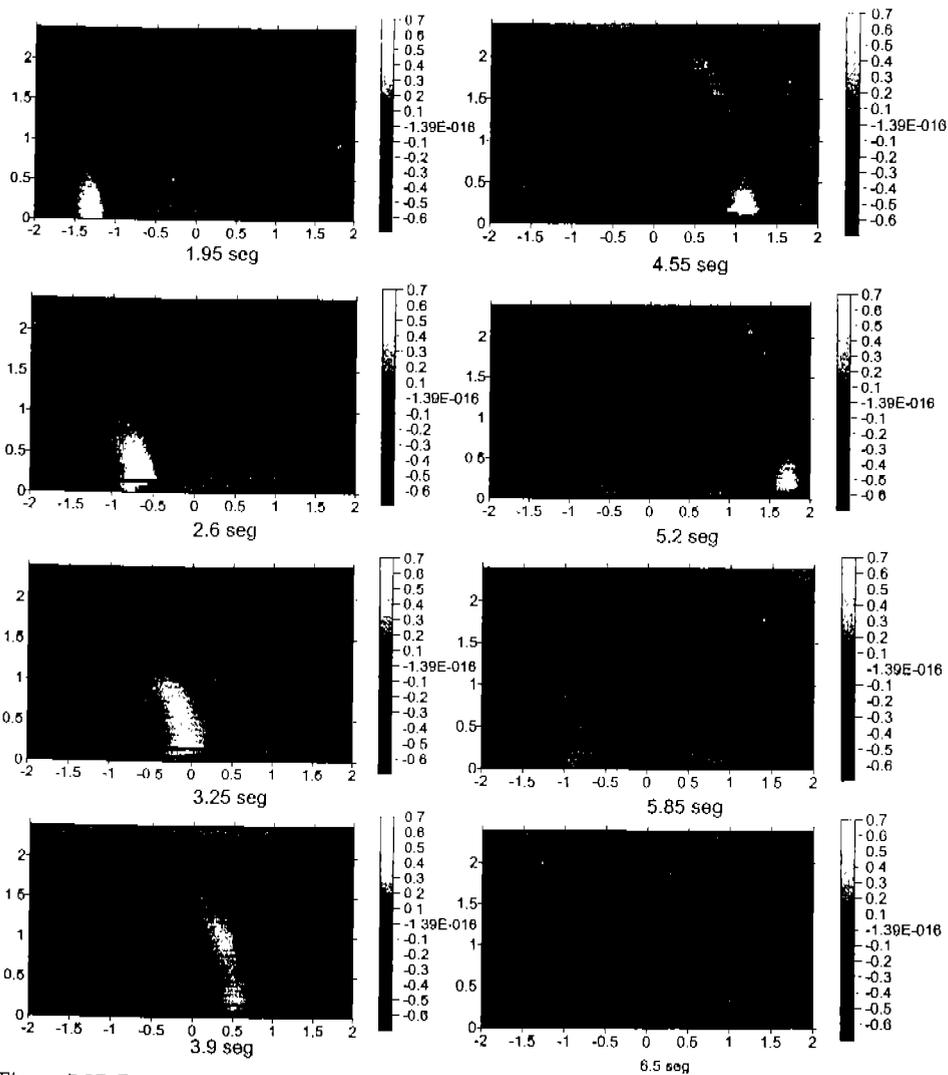


Figura 5.27. Diagrama de cuerpo completo para una grieta paralela a la superficie de 2 de longitud a una profundidad de 0.2. Componente z.

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Se pudo observar que las ondas de Rayleigh al momento de impactar con una punta de la grieta, sufren amplificaciones y una atenuación después del impacto. Se presentan también ondas reflejadas al momento de que la onda impacta las puntas de la grieta.

Al ir creciendo el tamaño de la grieta, se dieron ondas reflejadas de mayor tamaño y atenuaciones mayores de la onda incidente. Del mismo modo, al ir alejando la grieta de la superficie, las ondas reflejadas fueron más tenues así como las amplificaciones en la onda incidente debidas al impacto con las puntas de la grieta.

Al inclinar la grieta, se observó que entre más grande sea el ángulo de inclinación de la grieta, es mayor la onda reflejada que se presenta y menor la onda que logra continuar después de impactar la grieta.

Al colocar los receptores en ambas caras de la grieta se pudo apreciar que se presentan ondas de superficie en cada una de ellas al momento en que la onda incidente impacta la grieta. En los casos en que la grieta fue aumentando de tamaño, se presentaron ondas reflejadas en ambas puntas de la grieta.

También se pudo apreciar que la componente z , al tener mayor influencia en la profundidad, sus atenuaciones y amplificaciones dadas por el impacto son mayores que las presentadas en la componente x .

En los diagramas de campo completo podemos apreciar que al momento del impacto de la onda con la grieta, no solo se dan las amplificaciones y las ondas reflejadas descritas, sino que también se generan ondas de cuerpo, las cuales se dispersan en distintas direcciones.

REFERENCIAS.

- Achenbach, J. D., y G. R. Liu (1995). "Strip element method to analyze wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates". *Journal of applied mechanics*. Vol 62 pp. 607-613.
- Achenbach, J. D., y Nuismer, R. (1971). "General fracture by a dilatational wave", Dept. of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA.
- Achenbach J. D., Lin W. y Keer L. M. (1983). "Surface waves due to scattering by a near-surface parallel crack". *IEEE trans. Sonics and Ultrasonics*, SU-30, pp. 270-276.
- Achenbach J. D., Angel Y. C. y Lin W. (1984). "Scattering from surface-breaking and near-surface cracks". In *Wave propagation in homogeneous media and ultrasonic nondestructive evaluation*, G. C. Johnson (ed.), New York: American Society of Mechanical Engineering, AMD Vol. 62, p. 93.
- Baker, B. R. (1962). "Dynamic stresses created by a moving crack", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, pp. 449-458.
- Beall, M. W., Fish, J., Ingraffea, A., Shephard, M. S. y Wawrzynek, P. (1989). "Simulation of arbitrary crack growth in 2D and 3D with finite and boundary elements", Cornell University, N.Y.
- Bergkvist, H. (1978). "Brittle crack propagation at non-uniform velocity", *Proceeding of the first International Conference on Numerical Methods and Fracture Mechanics*, Luxmoore, A. R. and Owen, D. R. J. Editors, University College, Swansea, p. 685.
- Brickstad, B. (1983). "A FEM analysis of crack arrest experiments", *International Journal of Fracture*, Vol. 21, pp. 177-194.
- Broberg, K. B. (1960): "The propagation of a brittle crack", *Arkiv for Fysik*, Vo. 18, pp. 159-192.
- Chen, Y. M. (1975). "Numerical computation of dynamic stress intensity factor by a Langrangian finite-difference method, (the IIEMP code)", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 7, pp. 653-660.

- Chen, F. L. y Yu, T. X. (1999). "Dynamic behavior of a clamped plastic beam with cracks at supporting ends under impact", *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, pp. 406-412.
- Das, S y Kostrov, B.V. (1987). "On the numerical boundary integral method for three dimensional dynamic shear crack problems", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 54, p. 99.
- Felix C. Cuozzo, Edmond L. Cambiaggio, Jean Pierre Damiano, y Edouard Rivier. (1977) "Influence of elastic properties on Rayleigh wave scattering by normal discontinuities". *IEEE transactions on sonics and ultrasonics*, vol. SU-24, No 4, pp 280-288.
- Frangi, A. (1998). "Some developments in the symmetric Galerkin boundary element method". PhD. Thesis, Politecnico di Milano,
- Freund, L. B. (1972a). "Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-I, constant rate of extension", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 20, pp. 129-140.
- Freund, L. B. (1972b). "Crack propagation in a elastic solid subjected to general loading-II, nonuniform rate extension", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 20, pp. 141-152.
- Freund, L. B. (1973). "Crack propagation in a elastic solid subjected to general loading-III, stress waves loading", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 21, pp. 47-61.
- Freund, L. B. (1974). "Crack propagation in a elastic solid subjected to general loading-IV, obliquely stress pulse", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 22, pp. 137-146.
- Freund, L. B. (1990). "Dynamic fracture mechanics", Cambridge University Press, p. 563.
- Gallego, R. y Dominguez, J. (1992). "Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 59, p. 158.
- Geubelle, P. II. Rice, J.R. (1995). "A spectral method for three-dimensional elastodynamics fracture problems", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 43, No. 11, pp. 1971-1824.

Griffith, A. A. (1921). "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, A221, pp. 163-197.

Henshell, R. D. y Shaw. K. G. (1975). " Crack-tip finite elements are unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 9, pp. 495-507.

Hess P. (2002). "Surface acoustic waves in materials science", *Physics today*. Marzo 2002. pp. 42-47.

Hoff, R., Rubin, C. A., y Hahn, G. T. (1987). "Viscoplastic finite element analysis of rapid fracture", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 26, p. 445.

Irwin, G. R. (1948). "Fracture dynamics", *Fracturing of Metals*, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166.

Irwin, G. R. (1957). "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364.

Isida, M. y. Noguchi, H. (1992). "Stress intensity factors at tips of branched crack under various loading", *International Journal of Fracture*, Vol. 54, pp. 293-316.

Kalthoff, J. F., Beinert, J., Winkler, S y Klen, W. (1980). "Experimental analysis of dynamic effects in different crack arrest test specimens, in crack arrest methodology and applications", *Special technical publication 711*, eds. G. T. Hahn and M. F. Kanninen, Philadelphia, American Society for Testing and Materials, pp. 109-127.

Kanninen, M. F. y Popelar, C. H. (1985). "*Advanced fracture mechanics*", Oxford University Press.

Karim M. R. Awal M.A. y Kundu T. (1992). "Elastic Wave Scattering by cracks and inclusions in plates: in plane case." *Int. J. Solids structures*, vol 29, No. 19. pp. 2355- 2367.

Krysl, P. y Belyshko, T. (1988). "*Propagation of 3D cracks by the element free Galerkin method*", Northwestern University, IL, USA.

Kundu T. y Mal A. K. (1981). "Diffraction of elastic waves by a surface crack on a plate" *Department of mechanics and structures*, Vol. 48 pp 570-576.

Li, C. Y., Zov. Z. y. Duan, Z. P. (1999). "Torsional impact of transversely isotropic solid with functionally graded shear moduli and penny-shaped crack", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*", Vol. 32, pp.157-163.

Luzón, F., Sánchez-Sesma, F. J., Rodríguez-Zuñiga, J. L., Posadas, A. M., García, J. M., Martín, J., Romacho, M. D. y Navarro, M. (1997). "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by three-dimensional topographies", *Geophys. Journal Int.*, Vol. 129, pp. 571-578.

Martínez, J. T. (2000). "Análisis elastoplástico de estructuras agrietadas", Tesis de Maestría, IPN, México.

Meguid, S. A. (1989). "Engineering fracture mechanics", Elsevier Applied Science.

Mettu, S. y Kim, K. S. (1991). "An application of the time-domain boundary integral equation method to dynamic crack propagation", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 39, No. 2.

Mott, N. F. (1948). "Fracture of metals: theoretical considerations", *Engineering*. Vol. 165, pp. 16-18.

Orowan, E. (1948). "Fracture and strength of solids", *Reports on Progress in Physics*, XII, p. 185

Providakis, C. P. y Beskos, D. E. (1999). "Dynamic analysis of plates by boundary elements", *Applied Mechanics Review*, Vol. 52, No. 7, pp. 213-236.

Ramulu, M., Kobayashi, A. S. y Kang B. S.J. (1982). "Dynamic crack curving and branching in line-pipe", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 104, pp. 317-322.

Rossmannith, H. P. (1980) "Fracture and photoelasticity mechanics laboratory", Institute of Mechanics, Vienna University of Technology.

Sánchez-Sesma, F. J. y Campillo, M. (1991). "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features; a boundary integral formulation", *Bolletín of the Seismological Society of America*, Vol. 81, No. 6, pp. 1-20.

Sánchez-Sesma, F. J., Ramos-Martínez, J. y Campillo, M. (1993). "An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves", *Earthquake engineering and structural dynamics*, Vol. 22, pp. 279-295.

Sánchez-Sesma, F. J. y Luzón, F. (1995). "Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves", *Bolletín of the Seismological Society of America*, Vol. 85, No. 1, pp. 269-284.

Scolig, T. y Gross, D. (1999). "On the interaction and branching of fast running cracks- a numerical investigation". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 47 pp. 935-952.

Stlund, S. y Gudmondson, P. (1987). "The application of moving finite elements for the study of crack propagation in linear elastic solids" *Computer and Structures*, Vol. 25, No. 5.

Swenson, D. V. e Ingraffea, A. R. (1988). "Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements Theory and Application", *Computational Mechanics*, Vol. 3, p. 381.

Vai, R., Castillo-Covarrubias, J. M., Sánchez-Sesma, F. J., Komatitsch, D. y Vilotte, J. P. (1999). "Elastic wave propagation in an irregularly layered medium", *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 18, pp. 11-18.

Venter, G. (1998). "Crack Tip Plasticity Correction for Linear Elastic Fracture Mechanics, Irwin's Approach", Internet.

Wang, B. L., Han, J. C. y Du, S. Y. (1999). "Functionally graded penny-shaped cracks under dynamic loading", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 32, pp.165-175.

Xu, X. P. (1998) "Modeling of Dynamic Fracture at Atomistic and Continuum Scales", IBM Almaden Research Center.

Yagawa, G., Sakai, Y. y Ando, Y. (1977). "Analysis of a rapidly propagating crack using finite elements", *Fast Fracture and Crack Arrest*, Hahn, G. T. and Kanninen, M. F. Editors, ASMT STP 627, p. 109.

Yoffé, E. H. (1951). "The moving Griffith crack", *Philosophical Magazine*, Vol. 42, pp. 739-750.