

01187 /



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELACIÓN TRIDIMENSIONAL DE LA
CIRCULACIÓN ESTUARINA EMPLEANDO MALLA
CON PASO ESPACIAL VARIABLE**

T E S I S
COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
GRADO DE:
**DOCTOR EN INGENIERÍA
(AMBIENTAL)**

P R E S E N T A:
**TOMÁS RAMÓN FLORVILLE
ALEJANDRE**

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS CRUICKSHANK VILLANUEVA



MEXICO, D.F.

DICIEMBRE 2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: TOMÁS R. FLORVILLE

ALFJANDRE

FECHA: 21-11-2002

FIRMA: _____

" La simplicidad es la sofisticación extrema "

Leonardo da Vinci

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Este trabajo se realizó en la Coordinación de Hidráulica del Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, con asesoría de los Doctores Carlos Cruickshank Villanueva, Rodolfo Silva Casarín y Jorge de Victorica Almeida, así como con la colaboración de Juan Carlos Espinal González, becario de este Instituto.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Planteamiento del problema	4
2. Objetivos y Metas	5
2.1 Objetivo general	5
2.2 Objetivos particulares	5
3. Principios fundamentales	6
3.1 Leyes de la mecánica clásica y modelación estuarina	6
3.2 Transformación de las leyes de la mecánica clásica	7
3.2.1 Teorema de transporte de Reynolds	7
3.2.2 Conservación de masa	8
3.2.2.1 Conservación de masa de agua	8
3.2.2.2 Conservación de masa de sustancia	10
3.2.3 Conservación de cantidad de movimiento lineal	13
3.2.3.1 Marco de referencia inercial	13
3.2.3.2 Marco de referencia no inercial	14
3.2.4 Fuerzas generadoras de movimiento	16
3.3 Turbulencia y flujo estuarino real	20
3.3.1 Promedio de Reynolds	20
3.3.2 Turbulencia de Boussinesq	25
3.4 Viscosidad y difusión turbulenta en sistemas estuarinos	28
3.5 Aproximaciones en modelación estuarina	31
3.5.1 Aproximación al flujo incompresible	31
3.5.2 Aproximación hidrostática	31
3.5.3 Aproximación de Boussinesq	32
3.6 Condiciones iniciales y de frontera	35
3.6.1 Condiciones iniciales	35
3.6.2 Condiciones de frontera	36
3.7 Aproximación Unidimensional a las Ecuaciones de Conservación de Cantidad de Movimiento	38
3.7.1 Flujo Estacionario en Canales Rectangulares de Profundidad Constante	39

4. Construcción del algoritmo numérico	42
4.1 Malla de cálculo	42
4.2 Solución de las ecuaciones de gobierno	44
4.2.1 Componente longitudinal de la velocidad	44
4.2.2 Componente transversal de la velocidad	47
4.2.3 Componente vertical de la velocidad	49
4.2.4 Elevación de la superficie libre	50
4.2.5 Distribución de la densidad	51
4.3 Expresión numérica de las condiciones de frontera	54
4.4 Procedimiento de cálculo	55
5. Aplicación del modelo y presentación de resultados	57
5.1 Forzamiento por nivel del mar constante en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento (profundidad constante)	57
5.2 Forzamiento por nivel del mar constante en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)	57
5.3 Forzamiento por esfuerzo del viento en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)	60
5.4 Forzamiento por nivel del mar variable en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento (profundidad constante)	60
5.5 Forzamiento por nivel del mar variable en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)	60
5.6 Forzamiento por nivel del mar variable y escurrimiento superficial en presencia de fuerzas de fricción y flujos por gradiente longitudinal de densidad (profundidad constante)	64
5.7 Forzamiento por nivel del mar variable en presencia de fuerzas de fricción (profundidad variable)	64
6. Discusión	67
7. Conclusiones y Recomendaciones	74
8. Referencias	76
9. Anexos	78

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

INDICE DE FIGURAS

Figura 1	Volumen de control fijo cartesiano elemental mostrando entradas y salidas de masa de agua en las caras x	8
Figura 2	Volumen de control fijo cartesiano elemental mostrando entradas y salidas de masa de sustancia en las caras x	12
Figura 3	Sistemas coordenados comúnmente empleados para describir el movimiento del agua estuarina sobre la superficie terrestre	14
Figura 4	Diagrama esquemático del flujo estratificado en estrechos	40
Figura 5a	Malla de cálculo: distribución espacial	42
Figura 5b	Malla de cálculo: plano $z-y$	43
Figura 5c	Malla de cálculo: plano $z-x$	43
Figura 5d	Malla de cálculo: plano $y-x$	43
Figura 6	Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar fijo igual a 0.5 m) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3, 600 s, c) 10, 800 s, d) 249, 300 s.	58
Figura 7	Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r= 3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar fijo igual a 0.5 m) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3, 600 s, c) 10, 800 s, d) 249,300 s.	59
Figura 8	Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r= 3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el esfuerzo del viento ($W_s=500 \text{ cm}^2/\text{s}$, $K_v= 0.1 \times 10^{-6}$) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3, 600 s, c) 10, 800 s, d) 249, 300 s.	61
Figura 9	Distribución de velocidad y elevación en estado estacionario en un punto ubicado en la superficie libre al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento generado por	

el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar variable $a=0.5\text{ m}$, $T_m=12\text{ h}$; velocidad en la frontera más alejada del mar igual a la de la celda que le antecede y, sin restricción explícita para la elevación de la superficie libre).

62

Figura 10 Distribución de velocidad y elevación en estado estacionario en un punto ubicado en la superficie libre al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar variable $a=0.5\text{ m}$, $T_m=12\text{ h}$; velocidad en la frontera más alejada del mar igual a la de la celda que le antecede y, sin restricción explícita para la elevación de la superficie libre).

63

Figura 11 Perfil vertical de velocidad para forzamiento por marea ($a=50\text{ cm}$, $T_m=12\text{ h}$), con escurrimiento superficial en la frontera más alejada del mar ($h=0-3.5\text{ m}$, $u=80\text{ cm/s}$, $S=18$) al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_{z_{h \neq 3.5\text{ m}}}=1 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_{z_{h=3.5\text{ m}}}=0\text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) y flujos por diferencia de densidad ($D_h=1 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{z_{h \neq 3.5\text{ m}}}=2 \times 10^{-1}\text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{z_{h=3.5\text{ m}}}=0\text{ cm}^2/\text{s}$); a) marea alta, b) marea media descendente, c) marea baja, d) marea media ascendente.

65

Figura 12 Perfil vertical de velocidad para forzamiento por marea ($a=50\text{ cm}$, $T_m=12\text{ h}$) al inicio, en el centro y al final del canal de profundidad variable estudiado ($m=1:1000$) sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre;); a) marea alta, b) marea media descendente, c) marea baja, d) marea media ascendente.

66

Figura 13 Entradas y salidas a un volumen de control fijo con patrón de flujo arbitrario: un sistema llena el volumen de control al tiempo t y al tiempo $t+dt$ comienza a abandonarlo.

79

INDICE DE TABLAS

Tabla I	Flujos de Masa de Agua que Entran y Salen de un Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental	9
Tabla II	Flujos de Masa de Sustancia que Entran y Salen de un Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental	12
Tabla III	Flujos de Cantidad de Movimiento que Entran y Salen de un Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental	18

RESUMEN

Los estuarios son cuerpos de agua costeros de gran importancia ecológica y comercial, que se caracterizan por su vulnerabilidad a la influencia humana. En la aplicación de estrategias para su protección, el patrón de circulación que los rige es un factor determinante. A la fecha, se utilizan extensamente modelos uni y bidimensionales para su estimación y, en muchos casos, ellos han permitido la obtención de resultados exitosos. No obstante, para abordar problemas más complejos y obtener soluciones más confiables para aquellos que hasta ahora han sido resueltos, se hace necesario contar con herramientas más poderosas. En este sentido, los esfuerzos actuales se dirigen hacia el desarrollo de modelos tridimensionales con malla flexible como, por ejemplo, los elementos finitos o las coordenadas ajustadas a las fronteras. Aunque tales enfoques han probado su utilidad al dirigir ciertas aplicaciones en ingeniería ambiental, son computacionalmente costosos, lo cual limita grandemente su utilización.

Dentro de este marco, se presenta aquí el desarrollo de un modelo numérico tridimensional en diferencias finitas y se revisa su funcionamiento físico mediante ejemplos de aplicación. En él se utilizó un esquema numérico con paso espacial variable en las tres direcciones de los ejes coordenados, que identifica la dirección del flujo y permite cierta flexibilidad en la especificación de la malla sin sacrificio excesivo en esfuerzo de cómputo. Los resultados obtenidos muestran la necesidad de explorar nuevas expresiones matemáticas para las condiciones de frontera, y evidencian la potencialidad de aplicación práctica del modelo.

ABSTRACT

Estuaries are coastal water bodies of great ecological and commercial significance, characterized by their vulnerability to human influence. The application of strategies for their protection, show water circulation patterns as a decisive factor. Actually, one and two-dimensional models are extensively used for estimation of these patterns and, in many cases, they have lead to satisfactory results. Nevertheless, greater complexity problems and more confidence solutions for those solved to the date, require more powerful tools. With this in mind, actual efforts point to the development of flexible grid three-dimensional models, such as finite element or boundary fitted coordinates. Although this models have proved their value driving some environmental engineering applications, they are computationally expensive and their practical use is restricted.

In this paper, the development of a finite difference three-dimensional estuarine circulation model and its physical behaviour is reviewed. The model is based on a numerical scheme, with adjustable spatial step on the three coordinate axes directions, capable of identifying flow direction and enabling grid flexibility without excessive computational effort. Experimental results showed the need of exploring new mathematical expressions for boundary conditions, and evidence the practical application potential of the model.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Generalidades

Desde el punto de vista ambiental, los estuarios son cuerpos de agua costeros de gran importancia para nuestro país. Entre las características que les proporcionan este lugar preponderante se encuentra su elevada productividad orgánica, que les permite albergar un sin número de especies biológicas útiles como alimento; asimismo, sus características estéticas los convierten en sitios ideales para el desarrollo del ecoturismo y su caudal, con frecuencia elevado, permite la disposición de grandes cantidades de desechos. No obstante, su vulnerabilidad a la influencia humana es una característica que los distingue y, en muchos casos, tal influencia ha provocado la alteración a gran escala del balance natural de los mismos disminuyendo su capacidad para uso futuro.

Una de las herramientas más eficaces para proteger estos cuerpos de agua, aún después de haber sido afectados, la constituye la modelación matemática de la calidad del agua. Este tipo de modelación se fundamenta en el principio de conservación de masa, cuya expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (1a)$$

donde D_h y D_z son los coeficientes de difusión turbulenta horizontal y vertical, C la concentración de la sustancia de interés, u , v , y w las componentes longitudinal, transversal y vertical de la velocidad, t el tiempo, y las variables x , y y z las tres direcciones del plano cartesiano.

Como es claro, para hacer uso de este principio fundamental es necesario conocer, de alguna forma, las componentes de la velocidad. En ingeniería ambiental ellas se obtienen, fundamentalmente, de dos maneras: 1) por mediciones directas en campo, o 2) mediante el uso de modelos hidrodinámicos, esto es, empleando artilugios matemáticos capaces de predecir el patrón de distribución de velocidad a partir de principios fundamentales ampliamente aceptados, como la segunda ley de Newton.

El trabajo que aquí se presenta aborda este tema trascendental en la protección ambiental de regiones estuarinas, a partir del segundo enfoque: la utilización de modelos hidrodinámicos. Su tratamiento se hace desde una perspectiva tridimensional, por dos razones: primero, los

trabajos desarrollados en este campo del conocimiento son aún incipientes; y, segundo, los estuarios nacionales demandan herramientas más poderosas para su protección, a causa de la gran variabilidad espacio-temporal - tanto en patrones de circulación como en procesos de transporte y transformación - que los caracteriza. En este sentido, el desarrollo de trabajos de este tipo favorecerá no sólo la solución más confiable de problemas ambientales causados por contaminantes convencionales, como la demanda bioquímica de oxígeno y los nutrientes, sino también el tratamiento de otros más complejos que requieren un conocimiento detallado del patrón de circulación estuarina como son, por ejemplo, aquellos relativos al destino de sustancias tóxicas persistentes.

1.2 Antecedentes

En el pasado, el conocimiento detallado de la circulación estuarina no era un requisito indispensable para estructurar aplicaciones que dieran solución a problemas ambientales. Para ello, era suficiente suponer flujo permanente, mezcla completa y dilución simple (Dyer, 1973; Officer, 1976; Florville, 1998). Entonces, la atención se dirigía a estudiar la cinética de los procesos físicos, químicos y biológicos involucrados en el problema de interés (v gr. desoxigenación, reaeración, biodegradación, etc.). Mientras esto ocurría, el avance en el estudio de la circulación de los estuarios, por parte de los investigadores en el campo de la oceanografía física y la ingeniería hidráulica, prosiguió ampliando el conocimiento de los procesos que modifican la velocidad y el nivel del mar, hasta lograr efectuar simulaciones numéricas exitosas en una, dos y, en ciertos casos, en tres dimensiones (Heaps, 1969; Leenderste y Liu, 1975; Davies, 1981). Este desarrollo independiente en cada campo ha continuado hasta nuestros días. Sin embargo, la presencia de problemas ambientales en los que el transporte presenta tanta importancia como los procesos cinéticos que ocurren en la columna de agua, ha creado la necesidad de volver la vista hacia los avances alcanzados en el estudio de la circulación. Con esta perspectiva, se han adoptado extensamente modelos uni y bidimensionales como herramientas de investigación, pronóstico y diagnóstico en la comprensión de numerosos procesos ambientales que en los estuarios se presentan, así como para la generación de pautas en la toma de decisiones de manejo (Leendertse, 1970; Egan y Mahoney, 1972)

En épocas recientes, se ha abordado la utilización de modelos de circulación tridimensional para dirigir aplicaciones ambientales. A la fecha, su uso es escaso y se encuentra en etapa de investigación y desarrollo. Entre los esfuerzos realizados destacan los reportados por HydroQual (1987) y Johnson, et al. (1990) desarrollados para estudiar la circulación en la bahía

de Chesapeake, el estuario más grande y productivo de los Estados Unidos de Norteamérica. En el trabajo de HydroQual (1987) se simula la circulación con un modelo hidrodinámico que utiliza mallas ajustadas a las fronteras en las tres direcciones de los ejes coordenados, y requiere una supercomputadora para efectuar los cálculos pertinentes. Aunque sus resultados han permitido estructurar un modelo de calidad del agua en estado permanente, cuya información de salida ha sugerido la aplicación de criterios y estrategias de manejo extremadamente útiles (reducción en 40% del aporte de nutrientes vertido a la bahía por fuentes puntuales y no puntuales ubicadas en sus márgenes), la necesidad de un equipo de cómputo tan sofisticado ha limitado grandemente su aplicación. El trabajo de Johnson et al. (1990) se utilizó para confirmar los resultados obtenidos por HydroQual (1987). En éste, nuevamente se emplearon coordenadas ajustadas a las fronteras pero, solo en el plano horizontal, utilizando coordenadas cartesianas en el plano vertical con el fin de reducir el esfuerzo de cómputo al utilizar la citada supercomputadora. Los resultados obtenidos, promediados aproximadamente cada hora, dirigieron un modelo de calidad del agua en estado no permanente, cuya información de salida mostró concordancia con aquélla obtenida previamente por HydroQual (1987).

En un intento más, Huang y Spaulding (1995a) desarrollaron un modelo numérico tridimensional para predecir la circulación en aguas estuarinas y costeras, que fue empleado para dirigir otro capaz de simular la calidad del agua generada por descargas superficiales en la bahía de Mt. Hope, en los Estados Unidos de Norteamérica (Huang y Spaulding, 1995b). Este modelo empleó un nuevo sistema coordenado vertical, que utilizó una transformación algebraica dentro de la bien conocida transformación sigma (Phillips, 1957), que permitió concentrar la malla cerca de la superficie en un factor proporcional a la profundidad local, disminuyendo considerablemente el esfuerzo de cómputo para un mismo nivel de precisión, en comparación con la transformación sigma. Su aplicación al dirigir el modelo de calidad del agua generó, nuevamente, información valiosa (el campo de contaminación se concentra cerca de la superficie y es transportado bahía abajo a lo largo de la costa oriental).

Los trabajos hasta aquí descritos, son sólo un ejemplo que permite destacar la dificultad común que enfrentan los ensayos hasta ahora realizados: el gran esfuerzo de cómputo requerido. En consecuencia, el desarrollo actual de los modelos de circulación estuarina tridimensional en el campo de la ingeniería ambiental, debe orientarse a reducir su costo computacional.

1.3 Planteamiento del Problema

Desde el punto de vista ambiental el movimiento del agua es un elemento esencial para el estudio de los sistemas acuáticos y, como se vislumbra con lo que hasta ahora se ha dicho, adquiere singular importancia en sistemas altamente dinámicos como son los estuarios. Actualmente la utilización de modelos matemáticos constituye uno de los métodos más convenientes para estimar tal movimiento y, en la mayoría de los casos, estos se caracterizan por utilizar técnicas de diferencias finitas sobre mallas rectangulares con paso espacial constante. Debido a la complejidad geométrica y batimétrica que caracteriza a los estuarios, así como al hecho de que con frecuencia los residuos vertidos a ellos se desplazan en las capas de agua superficiales, se han explorado recientemente enfoques de solución alternos dirigidos a permitir flexibilidad en la especificación de la malla como, por ejemplo, los elementos finitos o las coordenadas ajustadas a las fronteras. Aunque tales enfoques han probado su utilidad al dirigir ciertas aplicaciones en ingeniería ambiental, son computacionalmente costosos, lo cual limita grandemente su utilización.

Dentro de este marco, el trabajo que aquí se presenta plantea utilizar un enfoque relativamente simple que permita cierta flexibilidad en la especificación de la malla, sin sacrificio excesivo en esfuerzo de cómputo, empleando paso espacial variable en las tres direcciones de los ejes coordenados.

2. OBJETIVO

2.1 Objetivo General

Desarrollar un modelo matemático relativamente simple que simule satisfactoriamente la circulación estuarina tridimensional en ausencia de equipo de cómputo sofisticado.

2.2 Objetivos Particulares

1. Formular las ecuaciones que gobiernan la circulación estuarina tridimensional con base en principios fundamentales ampliamente aceptados.
2. Discretizar las ecuaciones de gobierno empleando esquemas numéricos en diferencias finitas y malla con paso espacial variable en las tres direcciones de los ejes coordenados.
3. Codificar las expresiones discretizadas de manera estructurada utilizando un lenguaje de programación sencillo y, a la vez, poderoso.
4. Revisar el funcionamiento físico del modelo desarrollado efectuando ejemplos de aplicación.

3. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

3.1 Leyes de la Mecánica Clásica y Modelación Estuarina

La modelación estuarina se basa en principios fundamentales que tienen su origen en las leyes de la mecánica clásica. Originalmente, estas leyes fueron escritas para describir el comportamiento de sistemas sólidos al interactuar con sus alrededores. Si se aplicaran aquí desde esa perspectiva sería necesario seguir la ruta del sistema de interés (como puede ser en este caso una partícula de agua) por siempre o, al menos, hasta el punto en que se presentaran interacciones de importancia (como se hace con sistemas sólidos). Sin embargo, este tipo de modelación no requiere tal grado de detalle sino que, más bien, se interesa en conocer el flujo (de masa, cantidad de movimiento, energía, etc.) a gran escala, que se presenta en una región específica (volumen de control); en consecuencia, las leyes de la mecánica clásica deben ser transformadas de forma tal, que puedan ser aplicadas a dicha región, en lugar de aplicarse a masas individuales. Los apartados siguientes muestran la forma en que esta transformación se efectúa partiendo de un planteamiento general conocido como Teorema de Transporte de Reynolds y, a continuación, estas leyes se presentan sin modificación alguna.

Un sistema se define como una cantidad fija de masa, m , separada de sus alrededores por sus fronteras, lo que implica que su masa no cambia al transcurrir el tiempo, t , es decir, se conserva. Esta ley de la mecánica se conoce como principio de conservación de masa y su expresión matemática es:

$$m_{\text{sistema}} = m = \text{constante} \quad (1b)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Por otra parte, si los alrededores ejercen una fuerza neta, F_{neto} , sobre el sistema, su masa comenzará a acelerarse de acuerdo con la segunda ley de Newton. Esta ley es conocida en el campo de la modelación estuarina, como principio de conservación de cantidad de movimiento lineal (o simplemente, principio de conservación de cantidad de movimiento) y su expresión matemática es:

$$F_{\text{neto}} = \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (2)$$

donde \mathbf{V} y \mathbf{a} son la velocidad y la aceleración del sistema, respectivamente. Debe observarse aquí que este es un principio vectorial, pues involucra tres ecuaciones escalares ($F_x=ma_x$, $F_y=ma_y$, $F_z=ma_z$; siendo a_x , a_y , a_z y F_x , F_y , F_z la aceleración y la fuerza neta ejercida en las tres direcciones del plano cartesiano, respectivamente).

3.2 Transformación de las Leyes de la Mecánica Clásica

3.2.1 Teorema de Transporte de Reynolds

El Teorema de Transporte de Reynolds establece una relación entre las integrales de volumen y de superficie del volumen de control y, la derivada temporal de la propiedad de interés en el sistema, en la forma siguiente (ver Anexo I):

$$\frac{dB_{sistema}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta dm_{salida} - \iint_{SC} \beta dm_{entrada} \quad ; \quad dm = \rho V_n dA \quad (3)$$

$$\frac{dB_{sistema}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

donde B es una propiedad cualquiera del agua estuarina (por ejemplo, masa o cantidad de movimiento), $\beta = dB/dm$ su valor intensivo (cantidad de B por unidad de masa), ρ su densidad, dA y dv un diferencial de área y de volumen, respectivamente, del volumen de control, V_n la velocidad normal al diferencial de área citado y, finalmente, \mathbf{V} y \mathbf{n} la velocidad del agua estuarina y la normal local en el diferencial de área.

Debe observarse aquí que la derivada temporal de la propiedad de interés en el sistema, $dB_{sistema}/dt$, está relacionada, a su vez, con las leyes de la mecánica clásica (ver ecuaciones 1 y 2); por lo que, seleccionando una propiedad específica (como la masa o la cantidad de movimiento) y eliminando su derivada temporal en el sistema igualando las leyes de la mecánica clásica con el Teorema de Transporte de Reynolds, es posible reescribir dichas leyes en una forma que permite su aplicación en modelación estuarina (forma de volumen de control). Este procedimiento se emplea a continuación para transformar los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento.

3.2.2 Conservación de Masa

3.2.2.1 Conservación de Masa de Agua

Seleccionando a la masa de agua estuarina como variable de interés, se tiene que $B = m$ y $\beta = dm/dm = 1$; por lo que, la ecuación (3) se convierte en

$$\frac{dm_{sistema}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_{SC} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (4)$$

e igualando con la ecuación (1b)

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_{SC} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (5)$$

que es el principio de conservación de masa de agua para un volumen de control fijo (o bien, la expresión integral del principio de conservación de masa de agua). Si el volumen de control se hace infinitamente pequeño, como se muestra en la Figura 1, puede considerarse que el flujo a través de cada una de sus caras es unidimensional y, los términos de flujo (integrales de superficie) en la ecuación (5) se reducen a una simple suma de productos positivos (entradas) y negativos (salidas), que involucran las propiedades del flujo en cada sección transversal, como lo expresa la ecuación (6).

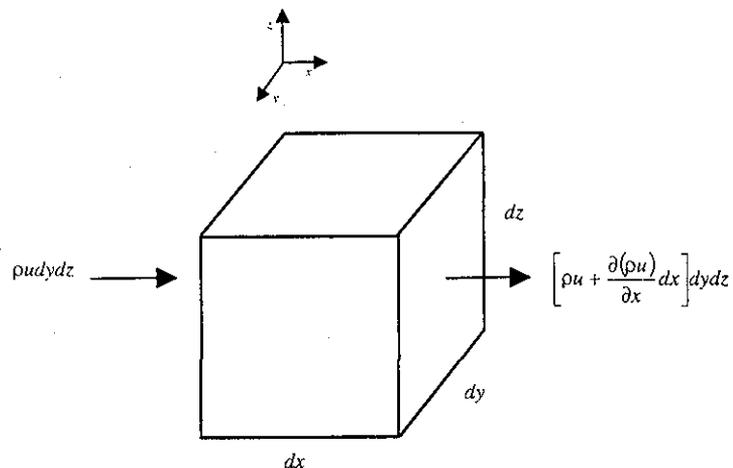


Figura 1. Volumen de control fijo cartesiano elemental mostrando entradas y salidas de masa de agua en las caras x.

$$\iint_{SC} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{salida} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{entrada} \quad (6)$$

Asimismo, como el elemento es tan pequeño la integral de volumen se reduce simplemente a un término diferencial

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (7)$$

Por lo que, considerando un volumen elemental fijo (volumen de control fijo infinitamente pequeño) puede escribirse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{salida} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{entrada} = 0 \quad (8)$$

Los flujos en la ecuación (8) se obtienen haciendo uso del concepto del continuo (que considera a todas las propiedades de un fluido como funciones que varían de manera uniforme con la posición y el tiempo); de acuerdo con él se tiene que, si se conoce el flujo de masa de agua por unidad de área en la cara izquierda del volumen elemental (flujo de entrada), ρu , su valor en la cara derecha (flujo de salida) será, $\rho u + [\partial(\rho u) / \partial x] dx$. Estos flujos se presentan en las seis caras del elemento (tres entradas y tres salidas), pero la Figura 1 solo muestra los flujos en la dirección x para evitar confusión. Los flujos en las tres direcciones, x (izquierda y derecha), y (abajo y arriba) y z (atrás y adelante) se resumen en la Tabla I.

Tabla I

Flujos de Masa de Agua que Entran y Salen de un Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental

CARA	MASA DE AGUA ENTRANTE	MASA DE AGUA SALIENTE
x	$\rho u dy dz$	$[\rho u + [\partial(\rho u) / \partial x] dx] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$[\rho v + [\partial(\rho v) / \partial y] dy] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$[\rho w + [\partial(\rho w) / \partial z] dz] dx dy$

Sustituyendo tales flujos en la ecuación (8) y eliminando términos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0 \quad (9) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \end{aligned}$$

que es el principio de conservación de masa de agua para un volumen de control fijo infinitesimal (o bien, la expresión diferencial del principio de conservación de masa). Este principio es llamado frecuentemente principio de continuidad y, la ecuación (9) ecuación de continuidad, por requerir como única suposición que la velocidad y la densidad sean funciones continuas (en consecuencia, es aplicable a flujos permanentes y transitorios, viscosos o carentes de fricción, compresibles e incompresibles; pero no permite singularidades de fuentes y sumideros dentro del volumen elemental). Como se verá más adelante, en la modelación de estuarios se emplea frecuentemente una simplificación de esta ecuación, en la que se aproxima al agua estuarina como un fluido incompresible.

3.2.2.2 Conservación de Masa de Sustancia

Al considerar el caso de conservación de masa de sustancias es necesario ampliar el Teorema de Transporte de Reynolds de forma tal, que incluya tanto la cantidad de masa de la sustancia de interés por unidad de volumen de agua estuarina, como el flujo neto de ésta por gradientes de concentración a través de la superficie de control. Aplicando un razonamiento análogo al utilizado para obtener la ecuación (3), la forma ampliada de dicho teorema para un volumen de control fijo puede expresarse como

$$\frac{dB_{\text{sistema}}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta C)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta C (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA + \iint_{SC} \beta \frac{E}{\Delta s_n} \Delta C_n dA \quad \text{salida} - \iint_{SC} \beta \frac{E}{\Delta s_n} \Delta C_n dA \quad \text{entrada} + \mathcal{S} \quad (10)$$

donde C es la cantidad de masa de la sustancia de interés por unidad de volumen de agua estuarina (concentración), E es el coeficiente de dispersión (coeficiente de mezcla que incorpora el efecto de oscilaciones del flujo de la marea, diferencias de densidad y gradientes de velocidad), ΔC_n es la diferencia en concentración de la sustancia de interés medida a ambos lados del elemento de área de la superficie de control (dentro y fuera del volumen de control) en dirección normal al mismo, Δx_n la distancia entre los puntos en que se mide esta diferencia de

Tabla II
Flujos de Masa de Sustancia que Entran y Salen de un
Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental

CARA	MASA DE SUSTANCIA ENTRANTE		MASA DE SUSTANCIA SALIENTE	
	ADVECCIÓN	DIFUSIÓN	ADVECCIÓN	DIFUSIÓN
x	$uCdydz$	$K[\partial C/\partial x] dydz$	$[uC + \{\partial(uC) / \partial x\} dx] dydz$	$K[\partial C/\partial x + \{\partial(\partial C/\partial x)/\partial x\} dx] dydz$
y	$vCdx dz$	$K[\partial C/\partial y] dx dz$	$[vC + \{\partial(vC) / \partial y\} dy] dx dz$	$K[\partial C/\partial y + \{\partial(\partial C/\partial y)/\partial y\} dy] dx dz$
z	$wC dx dy$	$K[\partial C/\partial z] dx dy$	$[wC + \{\partial(wC) / \partial z\} dz] dx dy$	$K[\partial C/\partial z + \{\partial(\partial C/\partial z)/\partial z\} dz] dx dy$

En este caso se considera adicionalmente la presencia de flujo por difusión molecular, como se muestra en la Figura 2.

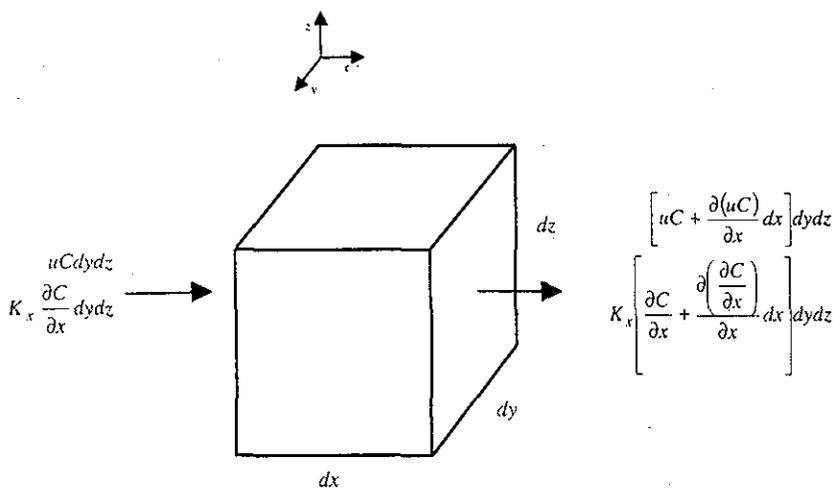


Figura 2. Volumen de control fijo cartesiano elemental mostrando entradas y salidas de masa de sustancia en las caras x.

La sustitución de tales flujos en la ecuación (12) y la posterior simplificación de la misma, genera la expresión matemática del principio de conservación de masa de sustancia conservativa para un volumen de control fijo infinitesimal (o bien, la expresión diferencial del principio de conservación de masa de sustancia conservativa, mejor conocida como ecuación de advección-difusión)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial(wC)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C - K \cdot \nabla^2 C &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

3.2.3 Conservación de Cantidad de Movimiento Lineal

3.2.3.1 Marco de Referencia Inercial

Seleccionando como variable de interés a la cantidad de movimiento lineal, $m\mathbf{V}$, la variable muda es $B = m\mathbf{V}$ y $\beta = d(m\mathbf{V})/dm = \mathbf{V}$; por lo que, la ecuación (3) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\mathbf{V})}{dt} &= \iiint_{VC} \frac{\partial(\mathbf{V}\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V}\rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned} \quad (14)$$

e igualando con la ecuación (2)

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V}\rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (15)$$

que es el principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control fijo (o bien, la expresión integral del principio de conservación de cantidad de movimiento lineal). En él la velocidad, representada por el vector \mathbf{V} , está referida a un sistema coordinado inercial (sistema en reposo o moviéndose a velocidad constante, es decir, sin aceleración). Sin embargo, en la modelación estuarina esta velocidad es siempre medida con referencia a un sistema coordinado no inercial (sistema moviéndose a velocidad variable, es decir, con aceleración). En consecuencia, es necesario expresar la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en términos de éste, y ello se hace a continuación (se ha mostrado que el principal movimiento que debe ser considerado es la rotación de nuestro planeta, mientras que otros movimientos como el movimiento orbital alrededor del Sol, etc., pueden despreciarse).

3.2.3.2 Marco de Referencia No Inercial

Puesto que la segunda Ley de Newton sólo se aplica a la aceleración absoluta, a_{abs} (aceleración referida a un sistema coordenado en reposo), cuando se desea expresar la velocidad del agua estuarina con relación a un sistema coordenado en movimiento que se encuentra en rotación sobre la superficie terrestre, se acostumbra ubicar el origen del sistema en reposo en el centro de nuestro planeta (ver Figura 3)

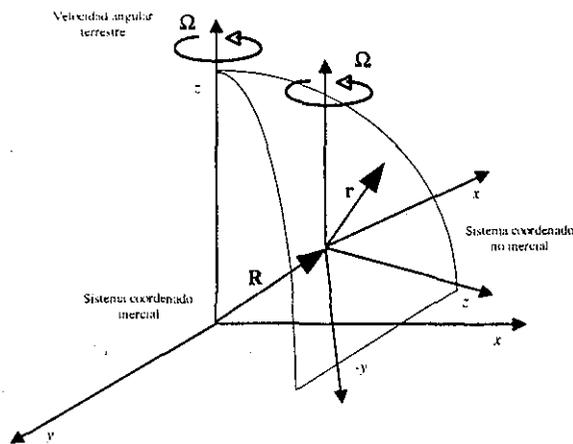


Figura 3. Sistemas coordenados comúnmente empleados para describir el movimiento del agua estuarina sobre la superficie terrestre.

requiriendo expresar, por tanto, la aceleración absoluta como la suma vectorial de la variación temporal de la citada velocidad referida al sistema en movimiento, dV/dt , más la aceleración del sistema en movimiento en relación con el sistema en reposo, a_{rel}

$$\mathbf{a}_{abs} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{a}_{rel} \quad (16)$$

En consecuencia, a partir de la ecuación (2) se tiene

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a}_{abs} = m \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{a}_{rel} \right) \\ \sum \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{rel} &= m \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{aligned} \quad (17)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Es importante observar, que la única diferencia entre las ecuaciones (2) y (17) son las fuerzas de inercia agregadas a la izquierda de la igualdad. Por tanto, puede establecerse que la expresión matemática del principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control fijo en coordenadas no inerciales, sólo añade términos de inercia debido a la integración de la aceleración relativa sobre cada diferencial de masa en el volumen de control, esto es

$$\sum \mathbf{F} - \iiint_{VC} \mathbf{a}_{rel} dm = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V} \rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (18)$$

$$\sum \mathbf{F} - \iiint_{VC} \rho \mathbf{a}_{rel} dv = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V} \rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

La expresión matemática de la aceleración relativa involucrada en el primer término a la izquierda de la igualdad en la ecuación anterior, puede obtenerse partiendo de la Figura 3. En ella se observa que el desplazamiento absoluto de una partícula es

$$\mathbf{S}_{abs} = \mathbf{r} + \mathbf{R} \quad (19)$$

y, por tanto, su velocidad absoluta puede expresarse como

$$\mathbf{V}_{abs} = \mathbf{V} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (20)$$

por lo que, su aceleración absoluta toma la forma

$$\mathbf{a}_{abs} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (21)$$

Comparando esta igualdad con la ecuación (16), es claro que los últimos cuatro términos a su derecha constituyen la aceleración relativa adicional, esto es

$$\mathbf{a}_{rel} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (22)$$

en donde, el último término representa la aceleración centrípeta, el penúltimo la aceleración de Coriolis (que es perpendicular tanto a \mathbf{V} como a $\boldsymbol{\Omega}$), el antepenúltimo el efecto de rotación de la Tierra y, el primero la aceleración del origen del sistema coordinado ubicado sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la rotación de este sistema es constante en relación con aquél cuyo origen se encuentra en el centro de nuestro planeta y, considerando que la velocidad de rotación angular de la Tierra no varía ($\boldsymbol{\Omega} = 2\pi/24 \text{ h} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), el primer y segundo término a la derecha de la igualdad se vuelven nulos; si en adición se desprecia la aceleración centrípeta (por no depender de la velocidad y sólo tener importancia en la determinación del campo gravitacional terrestre) se tiene

$$\mathbf{a}_{rel} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (23)$$

y, en consecuencia, la ecuación (18) puede expresarse en la forma siguiente:

$$\sum \mathbf{F} - \iiint_{VC} \rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} dv = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V} \rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (24)$$

3.2.4 Fuerzas Generadoras de Movimiento

Las principales fuerzas generadoras de movimiento en los estuarios son de dos tipos, fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. Las primeras actúan directamente sobre la superficie del volumen de control e incluyen, a su vez, a las fuerzas de presión y de fricción; las segundas actúan directamente sobre toda la masa del volumen citado y comprenden, en el caso que nos ocupa, exclusivamente a la fuerza de gravedad. En consecuencia, la expresión matemática del segundo término a la izquierda de la igualdad en la ecuación (24), se obtiene sumando dichas fuerzas, lo cual, se hace en los párrafos siguientes.

Con ayuda de los teoremas de la divergencia de Gauss y fundamental de Cauchy, así como del tensor de esfuerzo, mostrado a continuación,

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xc} & \tau_{yc} & -p + \tau_{zc} \end{vmatrix} \quad (25)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde p es la presión hidrostática y τ_{ij} los esfuerzos viscosos que surgen del movimiento con gradientes de velocidad ($\tau_{ij} = i\tau_x + j\tau_y + k\tau_z$; $\tau_x = i\tau_{xx} + j\tau_{yx} + k\tau_{zx}$; $\tau_y = i\tau_{xy} + j\tau_{yy} + k\tau_{zy}$; $\tau_z = i\tau_{xz} + j\tau_{yz} + k\tau_{zz}$), la fuerza de superficie total que actúa sobre el volumen de control se expresa como

$$\iint_{SC} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} dA = \iiint_{VC} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV \quad (26)$$

Por otra parte, la fuerza de cuerpo total que actúa sobre el volumen de control está dada por el peso del mismo, es decir,

$$\iiint_{VC} \rho \mathbf{g} dV \quad (27)$$

La inclusión de estas dos últimas expresiones en la ecuación (24), permite que el principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control fijo en un sistema coordenado no inercial pueda expresarse como

$$\iiint_{VC} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV + \iiint_{VC} \rho \mathbf{g} dV - \iiint_{VC} \rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} dv = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V} \rho dv \right) + \iint_{SC} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (28)$$

Nuevamente, considerando un volumen de control infinitamente pequeño, como el mostrado en la Figura 1, es posible aproximar el flujo a través de cada una de sus caras como unidimensional, siendo posible reducir los términos de flujo (integrales de superficie) a una simple suma de productos positivos (entradas) y negativos (salidas), que involucran las propiedades del flujo en cada sección transversal, de manera que, la expresión apropiada para la conservación de cantidad de movimiento lineal toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \iiint_{VC} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV + \iiint_{VC} \rho \mathbf{g} dV - \iiint_{VC} \rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} dv = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{VC} \mathbf{V} \rho dv \right) \\ + \sum_i \mathbf{V}_i (\rho_i A_i V_i)_{salida} - \sum_i \mathbf{V}_i (\rho_i A_i V_i)_{entrada} \end{aligned} \quad (29)$$

Asimismo, siendo el volumen elemental tan pequeño, las integrales de volumen se reducen, de nuevo, a un término diferencial

$$(\nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho g - \rho 2\Omega \times \mathbf{V}) dx dy dz = \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} dx dy dz + \sum_i \mathbf{V}_i (\rho_i A_i V_i)_{salida} - \sum_i \mathbf{V}_i (\rho_i A_i V_i)_{entrada} \quad (30)$$

Mediante un razonamiento análogo al descrito para la obtención de la ecuación (9), los flujos de cantidad de movimiento en las seis caras de dicho elemento (tres entradas y tres salidas) pueden expresarse como se muestra en la Tabla III.

Tabla III
Flujos de Cantidad de Movimiento que Entran y Salen de un Volumen de Control Fijo Cartesiano Elemental

CARA	CANTIDAD DE MOVIMIENTO ENTRANTE	CANTIDAD DE MOVIMIENTO SALIENTE
x	$\rho u V dy dz$	$[\rho u \mathbf{V} + [\partial(\rho u \mathbf{V}) / \partial x] dx] dy dz$
y	$\rho v V dx dz$	$[\rho v \mathbf{V} + [\partial(\rho v \mathbf{V}) / \partial y] dy] dx dz$
z	$\rho w V dx dy$	$[\rho w \mathbf{V} + [\partial(\rho w \mathbf{V}) / \partial z] dz] dx dy$

Sustituyendo en la ecuación (30) los flujos resumidos en dicha Tabla, se obtiene la relación vectorial

$$(\nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho g - \rho 2\Omega \times \mathbf{V}) dx dy dz = \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \mathbf{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \mathbf{V})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \mathbf{V})}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (31)$$

y desarrollando derivadas parciales

$$(\nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho g - \rho 2\Omega \times \mathbf{V}) dx dy dz = \left\{ \mathbf{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz \quad (32)$$

Los dos términos entre paréntesis a la derecha de la igualdad corresponden, respectivamente, a la ecuación de continuidad (cuyo valor es nulo) y a la aceleración total de una partícula que ocupa instantáneamente el volumen de control (aceleración local + aceleración advectiva), por lo que la ecuación (32) se reduce a:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho g - \rho 2\Omega \times \mathbf{V} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (33)$$

donde,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (34)$$

o bien, separando los términos de esfuerzo en esfuerzos viscosos y esfuerzos de presión, puede escribirse como

$$-\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} + \rho g - \rho 2\Omega \times \mathbf{V} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (35)$$

La ecuación (35) es tan breve y compacta que su complejidad inherente es casi imperceptible, por lo que, para ilustrar las dificultades matemáticas que le caracterizan, frecuentemente se expresa en términos de sus componentes

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f v &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \rho f u &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

donde $f = 2\Omega \sin \phi$, $\phi = \text{latitud}$ y, el resto de los parámetros tienen el significado dado previamente. Debe señalarse aquí que, en general, el agua estuarina se comporta como un fluido newtoniano, por lo que, cumple con las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde μ es el coeficiente de viscosidad molecular y, en consecuencia, las ecuaciones (36) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \rho f v &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial v}{\partial z} - \rho f u &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial w}{\partial z} + \rho g &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{38}$$

al considerar que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \lll \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \lll \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \lll \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \lll \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \lll \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \lll \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{39}$$

El grupo de ecuaciones (38) constituyen la expresión matemática del principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control fijo infinitesimal (o bien, la expresión diferencial del principio de conservación de movimiento lineal) en un sistema coordinado no inercial. Ellas permiten predecir el movimiento instantáneo del agua estuarina en casos ideales, es decir, en aquellos casos en los que la turbulencia es mínima o inexistente (flujo laminar). Sin embargo, en la solución de problemas prácticos el conocimiento de este movimiento instantáneo carece de importancia, más bien, interesa conocer su movimiento promedio en condiciones turbulentas y no, en ausencia de ellas pues, el flujo real en los estuarios es de tipo turbulento. En consecuencia, dichas ecuaciones deben modificarse de manera tal, que contemplen estas necesidades.

3.3 Turbulencia y Flujo Estuarino Real

3.3.1 Promedio de Reynolds

Con el fin predecir el movimiento promedio del agua estuarina en condiciones reales (en presencia de turbulencia), se acostumbra utilizar descripciones estadísticas del mismo, siendo

aquella propuesta por Osborne Reynolds la más adecuada. La idea básica de Reynolds consistió en dividir cada propiedad del flujo en la suma de una variable media y otra fluctuante, sustituir su valor en la ecuación de interés (vgr. ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento) y, a continuación, tomar el promedio temporal de la ecuación resultante. Para ello, definió al promedio de una función turbulenta $u(x,y,z,t)$ como

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (40)$$

donde \bar{u} es el valor promedio de dicha función en el tiempo T (un intervalo de tiempo de gran tamaño comparado con la escala temporal del movimiento turbulento pero, de magnitud pequeña comparado con la escala temporal del flujo transitorio medio). Asimismo, definió a la fluctuación, u' , como la desviación de una función turbulenta de su valor promedio, \bar{u} , en la forma siguiente:

$$u' = u - \bar{u} \quad (41)$$

y, en consecuencia, la magnitud de $\overline{u'}$ y $\overline{u'u'}$

$$\begin{aligned} \overline{u'} &= \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u dt - \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt = \bar{u} - \bar{u} = 0 \\ \overline{u'u'} &= \overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u})^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2) dt = \overline{u^2} - 2\bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T u dt + \bar{u}^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

mostrando que, la media de una fluctuación es cero pero, el valor promedio del producto de fluctuaciones (tal como $\overline{u'v'}$, $\overline{u'p'}$) no lo es, necesariamente.

Aplicando la idea de Reynolds a la ecuación de continuidad de volumen (9), se tiene (ver Anexo II)

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (43)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Esta ecuación constituye la ecuación de continuidad de volumen para el flujo estuarino turbulento promedio y, a partir de este punto se escribirá omitiendo las barras que indican promedio, pues se dará por hecho que se tiene el conocimiento de que se trata de variables promediadas.

Aplicando nuevamente la idea de Reynolds, la aceleración local promedio en dirección x está dada por (ver Anexo III)

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (44)$$

y los términos de aceleración advectiva promedio en esa misma dirección mediante (ver Anexo III)

$$\overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$$

$$\overline{v \frac{\partial u}{\partial y}} = \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \quad (45)$$

$$\overline{w \frac{\partial u}{\partial z}} = \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}}$$

Por tanto, la aceleración total promedio en dirección x puede expresarse en la forma siguiente:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{D\bar{u}}{Dt} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \quad (46)$$

Asimismo las fuerzas de Coriolis, gradiente de presión y viscosas promedio en esa dirección se representan como (ver Anexo IV)

$$\overline{f v} = f \bar{v}$$

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

(47)

$$\begin{aligned}\overline{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \\ \overline{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \\ \overline{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(47 Cont.)

En consecuencia, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección x (primer ecuación 38) se transforma en

$$\rho \left(\frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right) \quad (48)$$

o bien, recordando que $\overline{u'} = 0$, es posible sumar

$$-\rho u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = -\rho \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0 \quad (49)$$

a la derecha de la igualdad de la ecuación (48) sin alterarla, obteniendo:

$$\rho \left(\frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (50)$$

Realizando cálculos análogos en las direcciones y y z se llega a

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{D\bar{v}}{Dt} + f\bar{u} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \rho \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \\ \rho \left(\frac{D\bar{w}}{Dt} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \rho \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right)\end{aligned} \quad (51)$$

Estas tres últimas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de Reynolds y, constituyen la expresión matemática de la segunda Ley de Newton para el flujo estuarino turbulento promedio. Como puede observarse, ellas son muy parecidas a las ecuaciones (38) que las originaron. Cada fuerza tiene la misma expresión matemática pero, ahora, en función de

valores de velocidad o presión promedio. Adicionalmente, cada ecuación presenta tres términos en los que intervienen productos promedio de las velocidades fluctuantes (por ejemplo, para la primer ecuación (38), ellos son $\overline{\rho u' u'}$, $\overline{\rho u' v'}$ y $\overline{\rho u' w'}$), a los que se conoce como esfuerzos turbulentos o esfuerzos de Reynolds. Como muestra el desarrollo anterior (ver ecuaciones (46) (48) (49) y (50)), estos términos no son esfuerzos verdaderos, sino términos de inercia advectiva causados por las velocidades fluctuantes. No obstante, debido a que tienen las dimensiones y el efecto matemático de un esfuerzo, se les llama comúnmente así.

Para el caso de transporte de masa de sustancias presentes en el agua estuarina, el promedio de Reynolds se aplica a la ecuación (13), en forma análoga a la descrita aquí para las ecuaciones de continuidad de cantidad de movimiento, llevando a obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u' C'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' C'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} \\ \frac{D \bar{C}}{D t} &= \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u' C'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' C'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (52)$$

Nuevamente, esta ecuación es muy parecida a aquella que la originó y, al igual que en la ecuación de continuidad de volumen para flujo turbulento (ecuación 43) y en las ecuaciones de Reynolds (ecuaciones 50 y 51), las variables dependientes aparecen expresadas como valores promedio. A semejanza con éstas últimas, presenta tres términos adicionales constituidos, en este caso, por productos promedio de velocidades y concentraciones fluctuantes ($\overline{u' C'}$, $\overline{v' C'}$ y $\overline{w' C'}$) que, de nuevo, tienen origen advectivo.

Resumiendo, puede decirse que el promedio de Reynolds permite obtener las ecuaciones que rigen el transporte de masa y cantidad de movimiento promedio en el flujo estuarino real, el flujo turbulento, a partir de las ecuaciones para flujo ideal (flujo laminar) correspondientes. En consecuencia, transforma el problema de determinar las variables dependientes u , v , w , p y C , en un problema análogo que, ahora, requiere determinar sus valores promedio (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} y \bar{C}). Es importante notar que este promedio ha introducido cinco variables adicionales (u' , v' , w' , p' y C'), haciendo necesario contar, al menos teóricamente, con cinco ecuaciones más para poder obtener una solución.

3.3.2 Turbulencia de Boussinesq

Con el afán de resolver la complicación que implica requerir ecuaciones adicionales para obtener una solución, desde hace más de un siglo numerosos investigadores han propuesto la aplicación de diversas teorías sobre turbulencia sin que, a la fecha, alguna de ellas haya sido aceptada universalmente. La descripción de tales teorías excede los alcances del presente documento, por lo que, para una descripción más amplia, se sugiere consultar los trabajos realizados por Rodi (1985) y American Society of Civil Engineering (1988). Para los fines que aquí se persiguen, basta con establecer que se considerará adecuada la teoría propuesta por Boussinesq (1877). De acuerdo con ella, los términos adicionales generados al promediar las ecuaciones de continuidad de masa y cantidad de movimiento, se relacionan con el valor promedio de las variables involucradas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \rho \overline{u'u'} &= -N \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \rho \overline{u'v'} &= -N \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \rho \overline{u'w'} &= -N \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\
 \rho \overline{v'u'} &= -N \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} & \rho \overline{v'v'} &= -N \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \rho \overline{v'w'} &= -N \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
 \rho \overline{w'u'} &= -N \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} & \rho \overline{w'v'} &= -N \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} & \rho \overline{w'w'} &= -N \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\
 \overline{u'C'} &= -D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} & \overline{v'C'} &= -D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} & \overline{w'C'} &= -D \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{53}$$

donde N y D son los coeficientes de viscosidad y difusión turbulenta, respectivamente. Ellos se introducen más bien por conveniencia que por rigor físico matemático, y no están relacionados con las propiedades del fluido sino que, más bien, dependen exclusivamente del carácter del flujo y del nivel de promediación. Su valor se obtiene de manera empírica.

La sustitución de las expresiones (53) en las ecuaciones (50), (51) y (52) lleva a obtener

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + N) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + N) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu + N) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\
 \rho \left(\frac{D\bar{v}}{Dt} + f\bar{u} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + N) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + N) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu + N) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
 \rho \left(\frac{D\bar{w}}{Dt} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} (\mu + N) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu + N) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu + N) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\frac{D\bar{C}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} (K + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (K + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (K + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \quad (55)$$

En la práctica, se ha observado que el coeficiente de difusión molecular, K , es varios órdenes de magnitud menor que el coeficiente de difusión turbulenta, D , y el coeficiente de viscosidad molecular, μ , mucho menor que el coeficiente de viscosidad turbulenta, N , por lo que, se acostumbra escribir las ecuaciones (54) y (55) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} N \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{D\bar{v}}{Dt} + f\bar{u} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} N \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{D\bar{w}}{Dt} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} N \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\frac{D\bar{C}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \quad (57)$$

Asimismo, debido a que las dimensiones horizontales de los estuarios son, generalmente, mucho mayores que sus dimensiones verticales, los coeficientes de viscosidad y difusión turbulenta difieren ampliamente en dirección horizontal y vertical. Para describir este comportamiento, se introducen los coeficientes de viscosidad y difusión turbulenta horizontal (N_h , D_h) y vertical (N_z , D_z), transformando las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento en

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Du}{Dt} - fv \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} + fu \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{Dw}{Dt} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (59)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde, nuevamente, se han omitido las barras que denotan promedio por razones análogas a las expuestas al obtener la ecuación de continuidad de volumen para el flujo estuarino turbulento promedio (ecuación 43).

Como es posible observar, las ecuaciones (58) y (59) tienen seis incógnitas (u, v, w, p, C y ρ). Sin embargo, sólo han sido definidas cuatro ecuaciones por lo que, para obtener su solución, es necesario contar con dos ecuaciones adicionales que, acostumbra ser, la ecuación de continuidad de volumen con la aproximación al flujo incompresible (ecuación (73)), presentada en el siguiente apartado y, una ecuación de estado que se caracteriza por definir la densidad del agua estuarina como función de la salinidad, S , dejando de lado el efecto de la temperatura (pues se ha mostrado (Bowden, 1967) que ello es generalmente suficiente al trabajar en estuarios). Entre las diversas expresiones utilizadas se encuentra la que se muestra a continuación (Blumberg, 1978)

$$\rho = \rho_{ref} (1 + a_{ref} S) \quad (60)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_{ref} &= 0.99891 \text{ g/cm}^3 \\ a_{ref} &= 7.5 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (61)$$

Es importante observar que la ecuación (60) ha introducido una nueva variable (la salinidad) que tiene que definirse matemáticamente. Para lo cual se emplea la ecuación (59) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_v \frac{\partial S}{\partial z} \quad (62)$$

Resumiendo, se han definido siete variables (u, v, w, p, C, ρ y S) mediante siete ecuaciones (58), (59), (60), (61) y (62). Para obtener una solución única de ellas deben especificarse condiciones iniciales y de frontera convenientes; así como, estimarse el valor de los coeficientes de viscosidad (N_x y N_h) y difusión (D_x y D_h) turbulenta, a partir del conocimiento de los procesos de mezcla que presentan los estuarios.

3.4 Viscosidad y Difusión Turbulenta en Sistemas Estuarinos

Actualmente el estudio de la viscosidad y la difusión turbulenta en sistemas estuarinos se encuentra en una etapa de investigación vigorosa, por lo que, para estimar el valor de los coeficientes que la caracterizan se emplean diversos métodos sin que, a la fecha, alguno de ellos haya sido aceptado universalmente.

Al estimar el valor de los coeficientes de viscosidad turbulenta vertical se acostumbra:

- 1) Especificar una distribución de N_z .
- 2) Emplear un enfoque de longitud de mezcla en el que la distribución de N_z se expresa como una relación funcional del número de Richardson, Ri ,

$$Ri = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (63)$$

mediante ecuaciones que toman la forma siguiente:

$$N_z = N_{z,0} (1 + \sigma Ri)^{\frac{1}{2}} \quad (64)$$

siendo σ una constante universal adimensional cuyo valor va desde 0.1 hasta 0.5 y, $N_{z,0}$ el coeficiente de viscosidad turbulenta vertical en ausencia de estratificación ($\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$)

$$N_{z,0} = l_m^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

en donde l_m es la longitud de mezcla.

- 3) Utilizar un modelo de turbulencia de ecuación única donde se especifica la distribución de escala de longitud de disipación en la profundidad, L_0 , y en el que las ecuaciones de enlace toman la forma siguiente:

$$N_z = \frac{C_m k^2}{\epsilon} \quad (66)$$

$$\epsilon = \frac{C_d k^{\frac{3}{2}}}{L_0}$$

siendo ϵ la tasa de disipación de energía turbulenta por unidad de masa, C_m y C_d constantes numéricas con un valor alrededor de 0.3, y k la energía cinética turbulenta por unidad de masa de las fluctuaciones en el flujo, que se determina resolviendo la ecuación:

$$\frac{dk}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N_z}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) - N_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \epsilon = 0 \quad (67)$$

donde σ_k es el número de Prandtl efectivo, de orden unitario.

- 4) Emplear un modelo de dos ecuaciones en cual k y ϵ se determinan mediante expresiones similares a la ecuación (67).

En la estimación de los coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal se utilizan frecuentemente alguno de los siguientes métodos:

- 1) Especificar una distribución de N_h .
- 2) Parametrizar la fricción para las escalas no resueltas por la malla seleccionando los coeficientes en relación con el paso espacial, mediante expresiones análogas a la siguiente:

$$N_h = a_1 h^2 \bar{S}^{\frac{1}{2}} \quad (68)$$

en donde las ecuaciones de enlace toman la forma

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.176 \\
 h &= 8^{\frac{1}{3}} (\Delta X \Delta Y \Delta Z)^{\frac{1}{3}} \\
 \bar{S} &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{69}$$

siendo $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ el paso espacial del filtro utilizado, que puede o no coincidir con el tamaño de malla.

Al estimar la difusión turbulenta vertical se suele:

- 1) Especificar una distribución de D_z .
- 2) Aplicar la hipótesis de similitud de Kolmogorov, de acuerdo con la cual

$$\frac{D_z}{N_z} = \sigma \tag{70}$$

en donde σ representa la constante universal antes citada.

- 2) Emplear un enfoque de longitud de mezcla en el que la distribución de D_z se expresa como una relación funcional del número de Richardson, Ri , mediante ecuaciones que toman la forma siguiente:

$$D_z = D_{z,0} (1 + \beta Ri)^{-\frac{3}{2}} \tag{71}$$

siendo β una constante adimensional cuyo valor es igual a 3.33 y, $D_{z,0}$ el coeficiente de difusión turbulenta vertical en ausencia de estratificación, cuya expresión matemática es

$$D_{z,0} = l_m^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sigma \tag{72}$$

En la estimación de los coeficientes de difusión turbulenta horizontal se habitúa:

- 1) Especificar una distribución de D_h a partir del valor correspondiente al coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal.

3.5 Aproximaciones en Modelación Estuarina

3.5.1 Aproximación al Flujo Incompresible

Para efecto de conservación de masa, en regiones estuarinas los efectos debidos a diferencias de densidad son despreciables comparados con aquéllos causados por diferencias de presión y velocidad. En consecuencia, la densidad del agua en los estuarios puede suponerse aproximadamente constante tanto en tiempo como en espacio, al considerar continuidad de masa. En este caso, la ecuación (9) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (73)$$

esta simplificación es llamada, frecuentemente, aproximación al flujo incompresible. Debe enfatizarse aquí, que ella no significa necesariamente que el flujo mantiene densidad constante sino, únicamente, el que la divergencia es nula y que los cambios temporales y advectivos de la densidad se equilibran.

3.5.2 Aproximación Hidrostática

Las ecuaciones obtenidas hasta este punto describen un espectro completo del movimiento promedio del agua en los estuarios. Sin embargo, en la solución de problemas prácticos interesa estudiar, principalmente, aquél tipo de movimiento que se presenta a macro y mesoescala. Para obtener un grupo específico de ecuaciones que describa exclusivamente este tipo de movimiento, se acostumbra aplicar el enfoque conocido con el nombre de análisis dimensional, que se caracteriza por la necesidad de conocer *a priori* cierta información relativa a la escala espacial y temporal del movimiento de interés. La aplicación de este enfoque a la ecuación de cantidad de movimiento en dirección vertical, conduce a una aproximación conocida con el nombre de aproximación hidrostática. Ella se presenta a continuación.

La característica geofísica más relevante de los sistemas estuarinos a nivel macro y mesoescala, es la gran diferencia en el orden de magnitud de sus dimensiones horizontal y vertical por lo que, las componentes horizontales de la velocidad, u y v , en este dominio

geofísico son mucho mayores que la componente vertical ($w = 0$). Asimismo, la circulación en él se caracteriza por ser eminentemente horizontal y, en consecuencia, tanto la aceleración vertical Dw/Dt como la difusión horizontal y vertical de la cantidad de movimiento, son despreciables comparadas con la aceleración gravitacional. En estas condiciones, la ecuación de continuidad de cantidad de movimiento en dirección z (tercer ecuación (58)) se transforma en

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad (74)$$

Esto significa que la distribución de presión se supone hidrostática, es decir, que sigue un comportamiento lineal; o bien, que el peso por unidad de volumen del agua estuarina balancea exactamente al gradiente vertical de presión. Nunca se ha dado una explicación rigurosa de esta aproximación y, es posible que localmente, donde la profundidad cambie en forma abrupta, se presenten corrientes verticales de gran magnitud.

3.5.3 Aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq describe la forma en que las variaciones de densidad se introducen en la ecuación de cantidad de movimiento. Esta aproximación puede obtenerse considerando que el estado base del agua estuarina es hidrostático (carente de movimiento) y, se encuentra definido por una presión $p_0(z)$ y una densidad $\rho_0(z)$. El movimiento surgirá sólo debido a variaciones de densidad $\rho'(x, y, z, t)$ y presión $p'(x, y, z, t)$, por tanto,

$$\begin{aligned} p &= p_0(z) + p'(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ u &= u'(x, y, z, t) \\ v &= v'(x, y, z, t) \\ w &= w'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (75)$$

donde $\rho' \ll \rho_0$, y $p' \ll p_0$.

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de cantidad de movimiento en dirección x (primera ecuación (58)),

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{Du}{Dt} - fv \right) = - \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} \quad (76)$$

y despreciando aquéllos términos en los que se presentan productos de ρ' ($\rho' (Du/Dt)$, $\rho' fv$) se obtiene,

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} - \rho_0 fv = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} \quad (77)$$

que es la representación simplificada, en la forma de Boussinesq, de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección longitudinal. Para obtener esta ecuación en una forma que permita su aplicación práctica, es necesario conocer la expresión matemática de p' . Una manera conveniente de obtener esta expresión, requiere auxiliarse de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección vertical, simplificada por la aproximación hidrostática (ecuación (74)), como se muestra en los párrafos siguientes.

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección vertical con las aproximaciones hidrostática y de Boussinesq está dada por

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g(\rho_0 + \rho') \quad (78)$$

y su integral desde una profundidad z hasta la superficie libre $z = \zeta(x, y, t)$ es

$$\int_z^\zeta dp = - \int_z^\zeta g(\rho_0 + \rho') dz$$

$$p(\zeta) - p(z) = - \int_z^\zeta g\rho_0 dz - \int_z^\zeta g\rho' dz \quad (79)$$

Observando que la presión en la superficie libre $p(\zeta)$ es igual a la presión atmosférica p_a y que, la presión a una profundidad cualquiera $p(z)$ es igual a $(p_0 + p')$, se tiene

$$p_a - p_0 - p' = - \int_z^{\zeta} g \rho_0 dz - \int_z^{\zeta} g \rho' dz$$

$$p' = p_a - p_0 + \int_z^{\zeta} g \rho_0 dz + \int_z^{\zeta} g \rho' dz$$
(80)

En la ecuación de cantidad de movimiento (77) p' es derivada respecto a la variable independiente x , por lo que es conveniente dividir el tercer término a la derecha de la igualdad de la ecuación anterior en dos partes, de manera tal que la primera de ellas sea independiente de la variable x y, la segunda dependiente de dicha variable (por incluir la elevación de la superficie libre, $\zeta(x, y, z, t)$)

$$p' = p_a - p_0 + \int_z^0 g \rho_0 dz + \int_0^{\zeta} g \rho_0 dz + \int_z^{\zeta} g \rho' dz$$
(81)

Considerando despreciable la variación de la gravedad con la profundidad ($g(z) \approx \text{constante}$), la expresión buscada puede escribirse como

$$p' = p_a - p_0 + g \rho_0 z + g \rho_0 (\zeta - z) + g \int_z^{\zeta} \rho' dz$$
(82)

Derivando esta expresión con respecto a la variable independiente x (recordando que las variables g , p_0 , ρ_0 y z no dependen de ella)

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p_a}{\partial x} + g \rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho' dz$$
(83)

sustituyendo en la ecuación (77) y, aplicando consideraciones similares para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y , se obtiene el sistema de ecuaciones de cantidad de movimiento con las aproximaciones hidrostática y de Boussinesq

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho' dz + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\zeta} \rho' dz + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (84)$$

Si la variación de la presión atmosférica es despreciable y se expresa en forma desarrollada la derivada total, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho' dz + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\zeta} \rho' dz - fu \end{aligned} \quad (85)$$

Resumiendo, puede decirse que la aproximación de Boussinesq establece que, en las ecuaciones de cantidad de movimiento horizontal (ecuaciones en dirección x e y) debe utilizarse la densidad promedio que caracteriza a la región estuarina de interés, pero en la ecuación de cantidad de movimiento vertical, que se reduce a la ecuación hidrostática, deben usarse los valores *in situ* para calcular el campo de presión. Esta aproximación permite considerar esencialmente constante la densidad del agua estuarina y, sus variaciones sólo agregan un nuevo término (que caracteriza a la fuerza de flotación de Arquímedes) a la ecuación de cantidad de movimiento.

Es importante notar que a pesar de haber supuesto despreciable la aceleración vertical y, reducir la ecuación de cantidad de movimiento vertical a la ecuación hidrostática, aún es posible calcular la componente vertical de la velocidad a partir de la ecuación de continuidad (73).

3.6 Condiciones Iniciales y de Frontera

3.6.1 Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales empleadas al resolver las ecuaciones de gobierno son la distribución de salinidad, elevación de la superficie libre y de las componentes de la velocidad en dirección longitudinal, transversal y vertical en el dominio del modelo para el tiempo $T=0$

$$\begin{aligned}
S_0 &= S_0(x, y, z, T = 0) \\
\zeta_0 &= \zeta_0(x, y, T = 0) \\
u_0 &= u_0(x, y, z, T = 0) \\
v_0 &= v_0(x, y, z, T = 0) \\
w_0 &= w_0(x, y, z, T = 0)
\end{aligned}
\tag{86}$$

Normalmente, las funciones ζ_0, u_0, v_0, w_0 no son conocidas por lo que, con frecuencia, se suponen nulas, pues cuando el movimiento que se modela es periódico, como es el caso de la marea, después de varios ciclos se obtiene una solución estable.

3.6.2 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera comúnmente utilizadas para dar solución a las ecuaciones de gobierno son las siguientes:

1) En la superficie libre

La presión atmosférica se supone constante o variable. En el segundo caso, debe ser una función conocida, empírica o analítica, del tiempo y el espacio

$$\begin{aligned}
p_a &= \text{constante} \\
p_a &= p_a(x, y, t)
\end{aligned}
\tag{87}$$

Los esfuerzos tangenciales, τ_x , se suponen generados por el viento y se acostumbra expresarlos empíricamente en función de éste

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{sx}}{\rho} &= N_z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = K_v W_x (W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{\tau_{sy}}{\rho} &= N_z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = K_v W_y (W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{88}$$

siendo W_x y W_y las componentes longitudinal y transversal de la velocidad del viento, W , en cm/s , y K_v el coeficiente de fricción por viento cuya magnitud se estima utilizando la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 K_v &= C_{10} \rho_{\text{aire}} \\
 C_{10} &= (0.75 + 0.067 \times 10^{-2} W) \times 10^{-3} \\
 \rho_{\text{aire}} &\approx 1.2 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3
 \end{aligned} \tag{89}$$

El flujo difusivo de sal normal a la superficie libre se supone nulo

$$D_z \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \tag{90}$$

2) En las fronteras cerradas

La componente de la velocidad normal a las fronteras cerradas (vgr. márgenes estuarinos, fondo, etc.) y, debajo de ellas, se supone nula

$$u_n = v_n = w_n = 0 \tag{91}$$

El flujo difusivo de sal y velocidad normal a las fronteras cerradas y debajo de ellas ($z \geq H$) se supone nulo

$$\begin{aligned}
 D_h \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{z \geq H} = 0, \quad D_h \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{z \geq H} = 0, \quad D_z \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z \geq H} = 0 \\
 N_h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z \geq H} = 0, \quad N_h \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z \geq H} = 0 \\
 N_h \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z \geq H} = 0, \quad N_h \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z \geq H} = 0 \\
 N_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \geq H} = 0, \quad N_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z \geq H} = 0
 \end{aligned} \tag{92}$$

Los esfuerzos tangenciales se expresan mediante una dependencia cuadrática en función del coeficiente de Chezy, C , en la forma siguiente:

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = N_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{g u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} = \frac{r u (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad r = \frac{g}{C^2} \approx (2-4) \times 10^{-3} \tag{93}$$

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = N_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{gu\sqrt{u^2+v^2}}{C^2} = \frac{ru(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad r = \frac{g}{C^2} = (2-4) \times 10^{-3}$$

(93 Cont.)

$$\frac{\tau_{by}}{\rho} = N_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{gv\sqrt{u^2+v^2}}{C^2} = \frac{rv(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad r = \frac{g}{C^2} = (2-4) \times 10^{-3}$$

3) En las fronteras abiertas

Preferiblemente se utilizan mediciones de campo. En caso de no existir se emplean ecuaciones simplificadas para cálculo de las variables de interés, condiciones de libre transmisión y/o condiciones de gradiente lineal o nulo.

3.7 Aproximación Unidimensional a las Ecuaciones de Conservación de Cantidad de Movimiento

Desde los tiempos de Newton distinguidos matemáticos y físicos como Bernoulli, Laplace, y Poincaré, entre otros, dirigieron sus esfuerzos al estudio del movimiento causado por la marea y el viento. En sus trabajos, el objetivo fundamental era obtener soluciones analíticas unidimensionales de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, de manera que la predicción de la elevación del nivel del mar y de las corrientes generadas por la marea y el viento, fuera posible. Desafortunadamente, estas soluciones sólo pudieron encontrarse para el estado estacionario en ciertos casos donde las geometrías del cuerpo de agua eran bastante simples. Las dificultades encontradas permitieron comprender que, procediendo en esa forma, sería virtualmente imposible cuantificar los fenómenos hidrodinámicos que ocurren tanto en el océano abierto como en regiones costeras, incluidos los estuarios, y condujeron a la búsqueda de soluciones numéricas al problema.

Actualmente es común utilizar estas aproximaciones en las etapas iniciales de desarrollo de modelos numéricos, como una guía de lo que es posible esperar de sus resultados experimentales. En los párrafos siguientes se resumen, a manera de ejemplo, algunas de ellas y se sugiere consultar trabajos clásicos, como los de Ippen (1966) y Officer (1976), para una explicación más amplia y el tratamiento de otros casos.

3.7.1 Flujo Estacionario en Canales Rectangulares de Profundidad Constante

La mayor parte de las aproximaciones unidimensionales de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en estuarios han adoptado, por su simplicidad y relativamente extensa aplicación, la geometría rectangular con profundidad constante. En casos donde es posible considerar la pendiente del nivel del mar estacionaria, la velocidad media del flujo se aproxima empleando ecuaciones similares a la que a continuación se presenta (Fischer et al., 1995), expresada en términos del coeficiente de arrastre de fondo por Florville (2002):

$$u^2 = \frac{r}{g} (K_v |W| W_x - gH i_1) \quad (94)$$

aquí se desconoce el gradiente longitudinal de elevación de la superficie libre, i_1 ; sin embargo, este problema suele resolverse utilizando observaciones de campo, o bien, cuando existe esfuerzo del viento, ecuaciones análogas a la siguiente (Florville, 2002):

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{K_v |W| W_x}{gH}, \quad \zeta_{\text{final}} > \zeta_{\text{inicial}} \\ i_1 &= -\frac{K_v |W| W_x}{gH}, \quad \zeta_{\text{final}} < \zeta_{\text{inicial}} \end{aligned} \quad (95)$$

obtenidas partiendo de la aproximación propuesta por Ramming y Kowalik (1980) para la elevación de la superficie libre:

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{x\tau_{xx}}{gH} \quad (96)$$

Si en el canal existe estratificación vertical con flujo apreciable en la capa superior e inferior, como se esquematiza a continuación

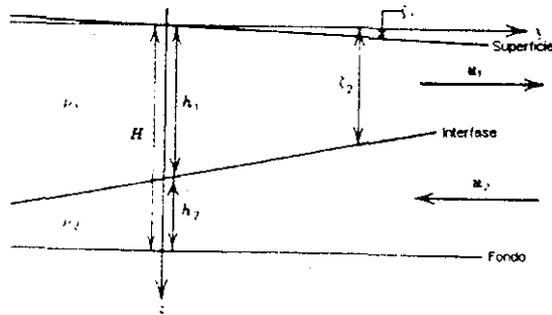


Figura 4. Diagrama esquemático del flujo estratificado en estrechos.

es posible aproximar su comportamiento mediante expresiones basadas en el trabajo de Defant (1961) como la que aquí se muestra (Florville, 2002):

$$\begin{aligned} u_1 &= A(h_1^2 - zh_1) \\ u_2 &= B(z - h_1)(H - z) \end{aligned} \quad (97)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{gi_1}{2N_z} \\ B &= \frac{g(\alpha i_1 + \beta i_2)}{2N_z} \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad ; \quad \beta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \end{aligned} \quad (98)$$

Por otra parte, cuando ocurre una oscilación periódica del nivel del mar generada por una onda de marea armónica simple en aguas someras (esto es, donde la aproximación $\zeta \ll H$ carece de validez) la velocidad puede aproximarse utilizando expresiones como la siguiente (Officer, 1976):

$$u = \frac{ga}{c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (99)$$

y cuando hay presencia de fricción mediante

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$u = \frac{a\omega}{H\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} e^{-\mu x} \cos(\omega t - \kappa x + \alpha) \quad (100)$$

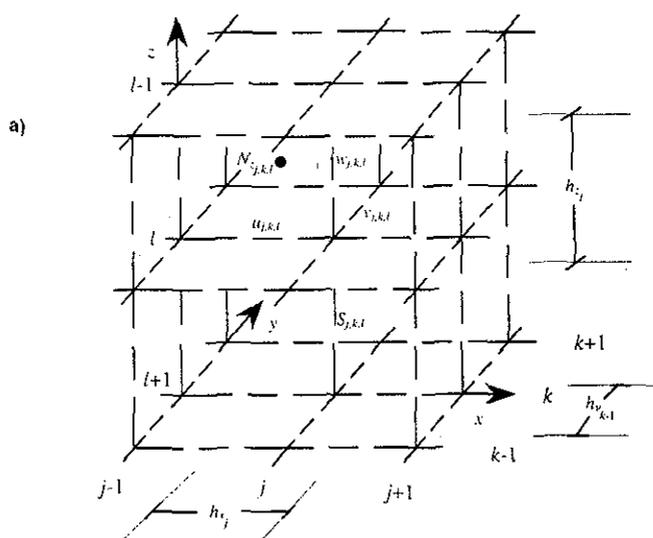
siendo

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \kappa &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \\ \beta &= \frac{8r}{3\pi} \frac{C_b}{H} \\ \mu &= \frac{\beta}{2c_0} \\ \alpha &= \arctan \frac{\mu}{\kappa} = \arctan \frac{\beta}{2\omega} \end{aligned} \quad (101)$$

4. CONSTRUCCIÓN DEL ALGORITMO NUMÉRICO

4.1 Malla de Cálculo

Las ecuaciones de gobierno con las condiciones de frontera se resolvieron empleando el enfoque conocido con el nombre de diferencias finitas. Para ello se utilizó una malla escalonada donde las variables dependientes u , v , w , y S se fijaron en diferentes puntos, de manera tal que fuera posible emplear un arreglo en el que se indizara a cada grupo de estas cuatro variables con un mismo subíndice (ver Figura 5). En la superficie libre, la velocidad vertical y el nivel del mar se determinaron en puntos comunes. La gran variabilidad en la forma de los cauces estuarinos y en su distribución de densidad, especialmente en las cercanías a la superficie, requirió que la malla utilizada presentara paso espacial variable en las tres direcciones de los ejes coordenados. El paso espacial en dirección vertical se denotó como h_{z_l} , donde $l = 1, 2, \dots, L$ y la distancia a partir de la superficie libre, z , como la suma de los pasos en esa dirección. La numeración de los índices procedió desde la superficie libre hacia el fondo, pero en la construcción de las expresiones numéricas en la vertical, la distancia z se dirigió de manera opuesta, es decir, desde el fondo hacia la superficie libre. En forma análoga, el paso longitudinal se representó como h_{x_j} , donde $j = 1, 2, \dots, J$ y la distancia longitudinal, x , como la suma de los pasos en esa dirección. Igualmente, el paso transversal se denominó h_{y_k} , donde $k = 1, 2, \dots, K$ y la distancia en esa dirección, y , como la suma de dichos pasos. El paso de tiempo, T , se manejó en la forma usual, es decir, designando al tiempo transcurrido $t = mT$, donde $m = 1, 2, \dots, N$.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5. Malla de cálculo: a) distribución espacial, b) plano $z-y$, c) plano $z-x$ y d) plano $y-x$.

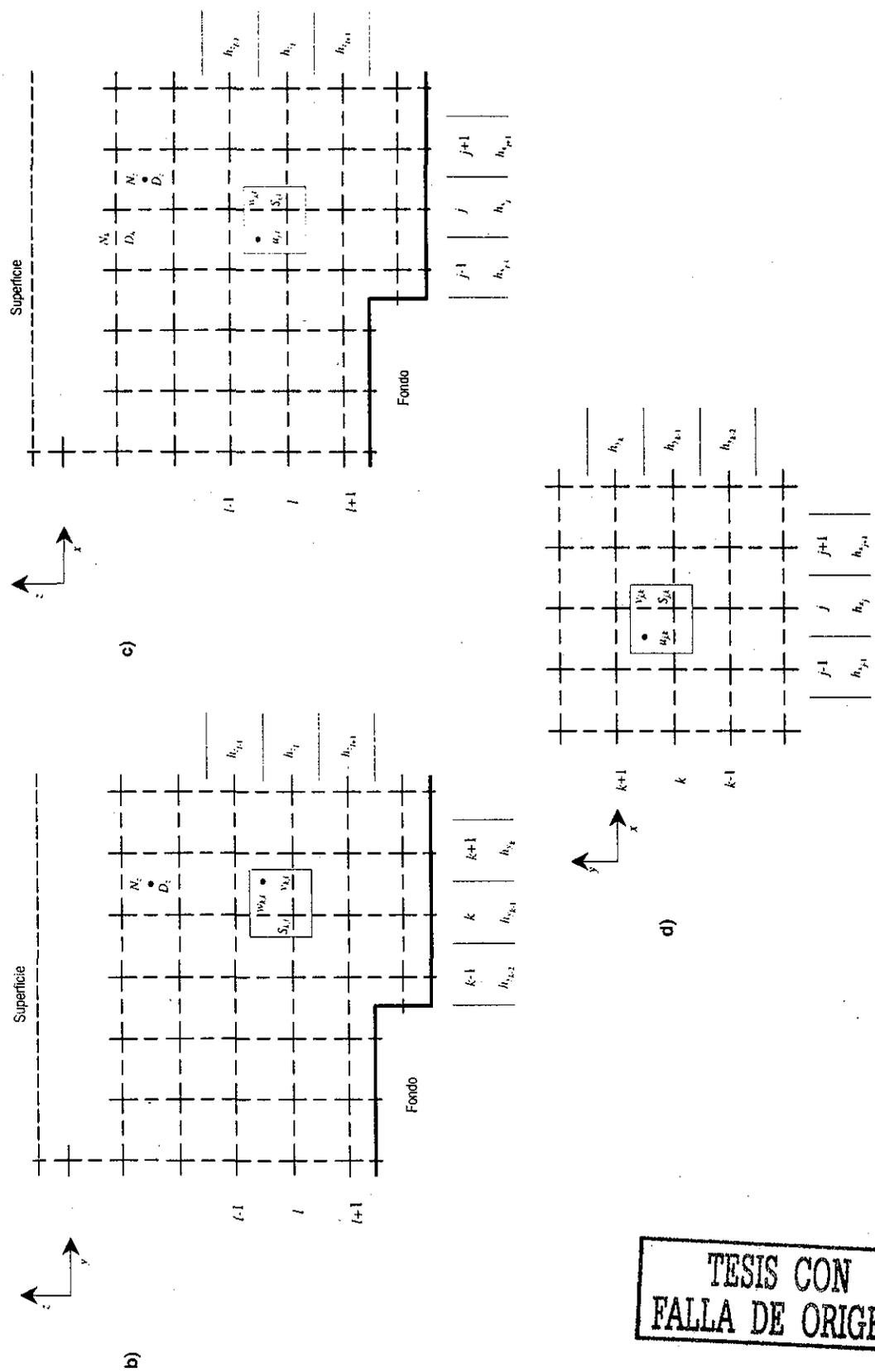


Figura 5 (Cont.). Malla de cálculo: a) distribución espacial, b) plano z-y, c) plano z-x y d) plano y-x.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

4.2 Solución de las Ecuaciones de Gobierno

4.2.1 Componente Longitudinal de la Velocidad

La solución de las ecuaciones de gobierno se inició resolviendo la primera ecuación (85), aquí reproducida

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^{\xi} \rho dz + fv \quad (102)$$

Aquí se debe observar que la ecuación (102) no es aplicable prácticamente a causa de que incluye variaciones de la densidad, ρ , en el penúltimo término a la derecha de la igualdad. Este problema se resuelve expresando dicha ecuación en la forma siguiente (ver Anexo V):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + fv \quad (103)$$

Los términos advectivos de la ecuación (103) se discretizaron mediante el esquema numérico en contra flujo; el resto de los términos mediante una modificación para paso espacial variable de esquemas tradicionales totalmente explícitos, como a continuación se muestra.

Para hacer avanzar los cálculos, es necesario expresar la variación temporal de la velocidad longitudinal en diferencias finitas adelantadas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{m+1} \approx \frac{u_{j,k,l}^{m+1} - u_{j,k,l}^m}{T} \quad (104)$$

El primer término advectivo se representa en la forma siguiente (ver Anexo VI)

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^m \approx \frac{u_{j,k,l}^m + |u_{j,k,l}^m|}{2} \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j-1,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} + \frac{u_{j,k,l}^m - |u_{j,k,l}^m|}{2} \frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} = adux \quad (105)$$

en forma análoga, el segundo término advectivo es

$$\left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^m \approx \frac{v_{j,k,l}^{u,m} + |v_{j,k,l}^{u,m}|}{2} \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j,k-1,l}^m}{hyp} + \frac{v_{j,k,l}^{u,m} - |v_{j,k,l}^{u,m}|}{2} \frac{u_{j,k+1,l}^m - u_{j,k,l}^m}{hyn} = aduy \quad (106)$$

donde

$$\begin{aligned} v_{j,k,l}^{u,m} &= 0.25(v_{j,k-1,l}^m + v_{j,k,l}^m + v_{j-1,k,l}^m + v_{j-1,k-1,l}^m) \\ hyn &= 0.5(h_{y_k} + h_{y_{k-1}}) \\ hyp &= 0.5(h_{y_{k-1}} + h_{y_{k-2}}) \end{aligned} \quad (107)$$

y el tercer término advectivo se expresa como

$$\left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m \approx \frac{w_{j,k,l}^{u,m} + |w_{j,k,l}^{u,m}|}{2} \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j,k,l+1}^m}{hzp} + \frac{w_{j,k,l}^{u,m} - |w_{j,k,l}^{u,m}|}{2} \frac{u_{j,k,l-1}^m - u_{j,k,l}^m}{hzn} = aduz \quad (108)$$

siendo aquí

$$\begin{aligned} w_{j,k,l}^{u,m} &= 0.25(w_{j,k,l}^m + w_{j-1,k,l}^m + w_{j,k,l+1}^m + w_{j-1,k,l+1}^m) \\ hzn &= 0.5(h_{z_{j-1}} + h_{z_j}) \\ hzp &= 0.5(h_{z_j} + h_{z_{j-1}}) \end{aligned} \quad (109)$$

El término de difusión longitudinal se aproxima como (ver Anexo VII)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)^m = \frac{N_{h,j,k,l}^m}{hxn} \left(\frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} - \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j-1,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} \right) = difux \quad (110)$$

y aquí

$$hxn = 0.5(h_{x_j} + h_{x_{j-1}}) \quad (111)$$

en la misma forma, el término de difusión transversal es

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial u}{\partial y} \right)^m = \frac{N_{h,j,k,l}^m}{h_{y_{l-1}}} \left(\frac{u_{j,k,l+1}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{yn}} - \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j,k,l-1}^m}{h_{yp}} \right) = \text{difuy} \quad (112)$$

y el término de difusión vertical

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m = \frac{2}{h_{zn} + h_{zp}} \left(N_{z,j,k,l}^{u,m} \frac{u_{j,k,l-1}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{zn}} - N_{z,j,k,l+1}^{u,m} \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j,k,l+1}^m}{h_{zp}} \right) = \text{difuz} \quad (113)$$

donde

$$N_{z,j,k,l}^{u,m} = 0.5 * (N_{z,j,k,l} + N_{z,j,k,l-1}) \quad (114)$$

Para simplificar la aplicación de las condiciones de frontera, el gradiente de elevación de la superficie libre se aproxima en diferencias atrasadas como

$$\left(g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^m = g \frac{\zeta_{j,k}^m - \zeta_{j-1,k}^m}{h_{xn}} = \text{vls} \quad (115)$$

En la misma forma, el gradiente de presión hidrostática se escribe en la forma siguiente (ver Anexo VIII)

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^m = \frac{1}{\rho_0} \frac{P_{j,k,l}^m - P_{j-1,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} = \text{vlph} \quad (116)$$

Finalmente, la fuerza de Coriolis es (ver Anexo IX)

$$(f_v)^m \approx f_v^{u,m} = \text{coriol} \quad (117)$$

Resumiendo las expresiones anteriores, la ecuación (102) se transforma en

$$\frac{u_{j,k,l}^{m+1} - u_{j,k,l}^m}{T} = -adux - aduy - aduz + difux + difuy + difuz - vls - vlph + coriol \quad (118)$$

4.2.2 Componente Transversal de la Velocidad

Para conocer la distribución de la componente transversal de la velocidad es necesario resolver la segunda ecuación (85), que aquí se muestra

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\zeta} \rho dz - fu \quad (119)$$

Aplicando un procedimiento análogo al empleado para calcular la distribución de la componente longitudinal, se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - fu \quad (120)$$

Nuevamente, el término de variación temporal de la velocidad se expresa con facilidad como

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^{m+1} \approx \frac{v_{j,k,l}^{m+1} - v_{j,k,l}^m}{T} \quad (121)$$

El primer término advectivo se convierte en

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)^m \approx \frac{u_{j,k,l}^{v,m} + |u_{j,k,l}^{v,m}|}{2} \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j-1,k,l}^m}{hxn} + \frac{u_{j,k,l}^{v,m} - |u_{j,k,l}^{v,m}|}{2} \frac{v_{j+1,k,l}^m - v_{j,k,l}^m}{hxp} = advx \quad (122)$$

siendo aquí

$$\begin{aligned} u^{v,m} &= 0.25(u_{j+1,k,l}^m + u_{j+1,k+1,l}^m + u_{j,k+1,l}^m + u_{j,k,l}^m) \\ hxp &= 0.5(h_{x_j} + h_{x_{j+1}}) \end{aligned} \quad (123)$$

igualmente, el segundo término advectivo es

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^m = \frac{v_{j,k,l}^m + |v_{j,k,l}^m|}{2} \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j,k-1,l}^m}{h_{y_{k-1}}} + \frac{v_{j,k,l}^m - |v_{j,k,l}^m|}{2} \frac{v_{j,k+1,l}^m - v_{j,k,l}^m}{h_{y_k}} = advy \quad (124)$$

y el tercer término advectivo se expresa como

$$\left(w \frac{\partial v}{\partial z} \right)^m = \frac{w_{j,k,l}^{v,m} + |w_{j,k,l}^{v,m}|}{2} \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j,k,l+1}^m}{h_{zp}} + \frac{w_{j,k,l}^{v,m} - |w_{j,k,l}^{v,m}|}{2} \frac{v_{j,k,l-1}^m - v_{j,k,l}^m}{h_{zn}} = advz \quad (125)$$

donde

$$w^{v,m} = 0.25 (w_{j,k,l}^m + w_{j,k+1,l}^m + w_{j,k,l+1}^m + w_{j,k+1,l+1}^m) \quad (126)$$

Asimismo, el término de difusión longitudinal se transforma en

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} N_h \frac{\partial v}{\partial x} \right)^m = \frac{N_{h,j,k,l}^{v,m}}{h_{x_j}} \left(\frac{v_{j+1,k,l}^m - v_{j,k,l}^m}{h_{xp}} - \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j-1,k,l}^m}{h_{xn}} \right) = difvx \quad (127)$$

y aquí

$$N_{h,j,k,l}^{v,m} = 0.25 * (N_{h,j,k,l}^m + N_{h_{j+1},k,l}^m + N_{h_{j,k+1},l}^m + N_{h_{j+1},k+1,l}^m) \quad (128)$$

en la misma forma, el término de difusión transversal es

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} N_h \frac{\partial v}{\partial y} \right)^m = \frac{N_{h,j,k,l}^{v,m}}{h_{y_k}} \left(\frac{v_{j,k+1,l}^m - v_{j,k,l}^m}{h_{y_k}} - \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j,k-1,l}^m}{h_{y_{k-1}}} \right) = difvy \quad (129)$$

y el término de difusión vertical se aproxima como

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} \right)^m = \frac{2}{h_{zn} + h_{zp}} \left(N_{z,j,k,l}^{v,m} \frac{v_{j,k,l-1}^m - v_{j,k,l}^m}{h_{zn}} - N_{z,j,k,l+1}^{v,m} \frac{v_{j,k,l}^m - v_{j,k,l+1}^m}{h_{zp}} \right) = difvz \quad (130)$$

donde

$$N_{z,j,l}^{v,m} = 0.5 * (N_{z,j,l}^m + N_{z,j,l+1}^m) \quad (131)$$

El gradiente de elevación de la superficie libre se expresa como

$$\left(g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^m = g \frac{\zeta_{j,k+1}^m - \zeta_{j,k}^m}{h_{yn}} = vtst \quad (132)$$

En la misma forma, el gradiente longitudinal de la presión hidrostática se escribe como

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right)^m = \frac{1}{\rho_0} \frac{P_{j,k+1,l}^m - P_{j,k,l}^m}{h_{yn}} = vtph \quad (133)$$

Finalmente, la fuerza de Coriolis es

$$(fu)^m \approx fu^{v,m} = coriot \quad (134)$$

A partir de las expresiones anteriores, la ecuación (112) puede escribirse como

$$\frac{v_{j,k,l}^{m+1} - v_{j,k,l}^m}{T} = -advx - advy - advz + difvx + difvy + difvz - vtst - vtph + coriot \quad (135)$$

4.2.3 Componente Vertical de la Velocidad

Para construir el algoritmo que permite calcular la distribución de la componente vertical de la velocidad, se decidió iniciar por la integración de la ecuación de continuidad en la vertical, desde la capa $l+1$ hasta la capa l

$$\int_{l+1}^l \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{l+1}^l \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{l+1}^l \frac{\partial w}{\partial z} dz = \int_{l+1}^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w_{j,k,l}^{m+1} + w_{j,k,l+1}^{m+1} = 0 \quad (136)$$

Aproximando la ecuación anterior de forma tal que se conserve la simetría numérica, esto es, expresando la derivada longitudinal en diferencias adelantadas y la derivada transversal en diferencias atrasadas, se llega a

$$\left(\frac{u_{j+1,k,l}^{m+1} - u_{j,k,l}^{m+1}}{h_{x_j}} + \frac{v_{j,k,l}^{m+1} - v_{j,k-l,l}^{m+1}}{h_{y_{k-1}}} \right) h_{z_j} + w_{j,k,l}^{m+1} - w_{j,k,l+1}^{m+1} = 0 \quad (137)$$

En consecuencia, es posible calcular la distribución de la componente vertical de la velocidad mediante la siguiente expresión:

$$w_{j,k,l}^{m+1} = w_{j,k,l+1}^{m+1} - \left(\frac{u_{j+1,k,l}^{m+1} - u_{j,k,l}^{m+1}}{h_{x_j}} + \frac{v_{j,k,l}^{m+1} - v_{j,k-l,l}^{m+1}}{h_{y_{k-1}}} \right) h_{z_j} \quad (138)$$

que deberá aplicarse procediendo desde el fondo, donde la velocidad vertical es nula, hacia la superficie libre donde

$$w_{j,k,2}^{m+1} = w_{j,k,3}^{m+1} - \left(\frac{u_{j+1,k,2}^{m+1} - u_{j,k,2}^{m+1}}{h_{x_j}} + \frac{v_{j,k,2}^{m+1} - v_{j,k-1,2}^{m+1}}{h_{y_{k-1}}} \right) h_{z_2} \quad (139)$$

4.2.4 Elevación de la Superficie Libre

Una vez definidas las velocidades horizontales y verticales en la superficie libre para el paso de tiempo $m+1$ ($u_{j,k,2}^{m+1}$, $v_{j,k,2}^{m+1}$, $w_{j,k,2}^{m+1}$), puede calcularse la elevación de ésta a partir de la ecuación de continuidad expresada en la forma siguiente :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \quad (140)$$

discretizando cada uno de los términos que la constituyen en la misma forma que se ha hecho para las componentes horizontales de la velocidad, se tiene lo siguiente:

El gradiente longitudinal de elevación de la superficie libre se convierte en

$$u_s \frac{\partial S}{\partial x} \approx \frac{u^{s,m+1} + |u^{s,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k}^m - S_{j-1,k}^m}{hxn} + \frac{u^{s,m+1} - |u^{s,m+1}|}{2} \frac{S_{j+1,k}^m - S_{j,k}^m}{hxp} = vtsup \quad (141)$$

y su gradiente transversal toma la forma siguiente

$$v_s \frac{\partial S}{\partial y} \approx \frac{v^{s,m+1} + |v^{s,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k}^m - S_{j,k-1}^m}{hyp} + \frac{v^{s,m+1} - |v^{s,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k+1}^m - S_{j,k}^m}{hyn} = vtsup \quad (142)$$

donde

$$\begin{aligned} u^{s,m+1} &= (u_{j,k,2}^{m+1} + u_{j+1,k,2}^{m+1}) \\ v^{s,m+1} &= (v_{j,k,2}^{m+1} + v_{j,k-1,2}^{m+1}) \end{aligned} \quad (143)$$

De manera que la ecuación (132) puede escribirse como

$$\frac{S_{j,k,l}^{m+1} - S_{j,k,l}^m}{T} = -vtsup - vtsup + w_{j,k,l}^{m+1} \quad (144)$$

4.2.5 Distribución de la Densidad

Para cerrar los cálculos es necesario conocer la nueva distribución de la densidad. Como antes se ha dicho, ésta se encuentra dada por la ecuación de estado (60), que permite estimar el valor de la densidad como función de la salinidad. En consecuencia, es necesario resolver también la ecuación de transporte de sal (62), aquí reproducida

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial S}{\partial y} \quad (145)$$

de manera tal que permita conocer la distribución de dicha variable trascendental. Esto se logra aplicando el enfoque usado previamente, recordando que se utiliza una malla escalonada y que la ecuación (145) debe escribirse en el punto en que se calcula la salinidad. Esto es:

El cambio de la salinidad en el tiempo se aproxima como

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^{m+1} \approx \frac{S_{j,k,l}^{m+1} - S_{j,k,l}^m}{T} \quad (146)$$

El transporte advectivo en dirección x se escribe en la forma siguiente

$$\left(u \frac{\partial S}{\partial x}\right)^m \approx \frac{u_{j,k,l}^{S,m+1} + |u_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j-1,k,l}^m}{h_{xn}} + \frac{u_{j,k,l}^{S,m+1} - |u_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j+1,k,l}^m - S_{j,k,l}^m}{h_{xp}} = adsx \quad (147)$$

donde

$$u^{S,m+1} = 0.5(u_{j,k,l}^{m+1} + u_{j+1,k,l}^{m+1}) \quad (148)$$

asimismo, el transporte advectivo en dirección y se representa como

$$\left(v \frac{\partial S}{\partial y}\right)^m \approx \frac{v_{j,k,l}^{S,m+1} + |v_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j,k-1,l}^m}{h_{yp}} + \frac{v_{j,k,l}^{S,m+1} - |v_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k+1,l}^m - S_{j,k,l}^m}{h_{yn}} = adsy \quad (149)$$

siendo aquí

$$v^{S,m+1} = 0.5(v_{j,k,l}^{m+1} + v_{j,k-1,l}^{m+1}) \quad (150)$$

y el transporte convectivo es

$$\left(w \frac{\partial S}{\partial z}\right)^m \approx \frac{w_{j,k,l}^{S,m+1} + |w_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j,k,l+1}^m}{h_{zp}} + \frac{w_{j,k,l}^{S,m+1} - |w_{j,k,l}^{S,m+1}|}{2} \frac{S_{j,k,l-1}^m - S_{j,k,l}^m}{h_{zn}} = adsz \quad (151)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde

$$w^{S,m+1} = 0.25(w_{j,k,l}^{m+1} + w_{j,k,l+1}^{m+1}) \quad (152)$$

El término de difusión longitudinal se convierte en

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} D_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)^m \approx \frac{2D_{h,j,k,l}^{S,m}}{hxp + hxn} \left(\frac{S_{j+1,k,l}^m - S_{j,k,l}^m}{hxp} - \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j-1,k,l}^m}{hxn} \right) = difsx \quad (153)$$

y aquí

$$\begin{aligned} D_{h,j,k,l}^{S,m} &= 0.5(D_{h,j,k,l}^m + D_{h,j+1,k,l}^m) \\ D_{h,j,k,l}^m &= \sigma N_{h,j,k,l}^m \end{aligned} \quad (154)$$

el término de difusión transversal es

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} D_h \frac{\partial u}{\partial y} \right)^m \approx \frac{2D_{h,j,k,l}^{S,m}}{hyn + hyp} \left(\frac{S_{j,k,l+1}^m - S_{j,k,l}^m}{hyn} - \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j,k,l-1}^m}{hyp} \right) = difsy \quad (155)$$

y el término de difusión vertical toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m \approx \frac{2}{hzn + hzp} \left(D_{z,j,k,l}^{S,m} \frac{S_{j,k,l-1}^m - S_{j,k,l}^m}{hzn} - D_{z,j,k,l-1}^{S,m} \frac{S_{j,k,l}^m - S_{j,k,l+1}^m}{hzp} \right) = difsz \quad (156)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{z,j,k,l}^{S,m} &= 0.25 * (D_{z,j,k,l}^m + D_{z,j,k,l+1}^m + D_{z,j-1,k,l}^m + D_{z,j-1,k,l+1}^m) \\ D_{z,j,k,l}^m &= \sigma N_{z,j,k,l}^m \end{aligned} \quad (157)$$

En consecuencia, el algoritmo de cálculo de la ecuación (137) es

$$\frac{S_{j,k,l}^{m+1} - S_{j,k,l}^m}{T} = -adsx - adsy - adsz + difsx + difsy + difsz \quad (158)$$

4.3 Expresión Numérica de las Condiciones de Frontera

1) En la superficie libre

La presión atmosférica se ha supuesto constante, por lo que las ecuaciones que hasta ahora se han discretizado, son aquellas en las que su gradiente horizontal es nulo (ecuaciones (85)).

Por otra parte, la condición definida por la primer ecuación (88) y (92) puede escribirse en la forma siguiente:

$$N_{z_{j,k,2}}^{u,m} \frac{u_{j,k,1}^m - u_{j,k,2}^m}{hzn} = \frac{K_v W_x (W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}}}{0.5(\rho_{j,k,2}^m + \rho_{j-1,k,2}^m)} \quad (159)$$

$$N_{z_{j,k,1}}^{u,m} \frac{u_{j,k,L-1}^m - u_{j,k,L}^m}{hzp} = \frac{ru_{j,k,L} (u_{j,k,L}^2 + v_{j,k,L}^2)^{\frac{1}{2}}}{0.5(\rho_{j,k,L-1}^m + \rho_{j-1,k,L-1}^m)} \quad \text{cuando } S_{j,k,l+1}^m = 0$$

asimismo, la ecuación (113) toma la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m = \frac{2}{hzn + hzp} \left(N_{z_{j,k,2}}^{u,m} \frac{u_{j,k,1}^m - u_{j,k,2}^m}{hzn} - N_{z_{j,k,3}}^{u,m} \frac{u_{j,k,2}^m - u_{j,k,3}^m}{hzp} \right) = difuz \quad (160)$$

y, en consecuencia sustituyendo la ecuación (159) en la ecuación (160), la difusión vertical de la componente longitudinal de la velocidad en la superficie libre, puede expresarse como

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m = \frac{2}{hzn + hzp} \left(\frac{K_v W_x (W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}}}{0.5(\rho_{j,k,2}^m + \rho_{j-1,k,2}^m)} - N_{z_{j,k,3}}^{u,m} \frac{u_{j,k,2}^m - u_{j,k,3}^m}{hzp} \right) = difuz \quad (161)$$

evitando así conocer el punto falso, $u_{j,k,1}^m$, ubicado por encima de dicha superficie. Para la componente transversal de la velocidad, se aplica un razonamiento análogo.

La condición de flujo nulo establecida por la ecuación (90) se alcanza fijando

$$D_{z,i,2}^m = 0 \quad (162)$$

2) En las fronteras cerradas

La malla escalonada utilizada para realizar los cálculos fija en cero la velocidad normal a la frontera cerrada. Para igualar a cero la velocidad tangencial, es necesario hacer nulas las componentes de la velocidad fuera del cauce estuarino, esto es

$$u_{j,k,l}^{m+1} = v_{j,k,l}^{m+1} = w_{j,k,l}^{m+1} = S_{j,k,2}^{m+1} = 0 \quad \text{cuando } S_{j,k,l}^m = 0 \quad (163)$$

yi, de esta forma, se cumple la condición fijada por la ecuación (91).

La condición que establece la ecuación (91) se cumple haciendo

$$\begin{aligned} D_{h,j,k,l}^{m+1} = 0 & \quad S_{j,k,l}^m = 0 \\ D_{z,i,l}^{m+1} = 0 & \quad \text{cuando } 0 \\ & \quad S_{j,k,l}^m > 0, S_{j-1,k,l}^m = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

3) En las fronteras abiertas

En la frontera con el mar (cabeza del estuario) se proporcionan mediciones de velocidad y elevación de la superficie libre, la velocidad se estima por interpolación lineal con la celda precedente. En la frontera con el río (boca del estuario) se establecen mediciones de velocidad y salinidad la elevación se estima por interpolación lineal o considerando un gradiente nulo con la celda que le antecede; esta aproximación también se realiza para la velocidad y la salinidad cuando el caudal del río es nulo o por debajo de su zona de influencia directa.

4.4 Procedimiento de Cálculo

El procedimiento de solución se resume en la forma siguiente:

- 1) Fijar la malla espacial y temporal. Establecer límites para el paso de tiempo utilizando criterios de estabilidad básicos.

- 2) Definir las condiciones iniciales y de frontera.
- 3) Resolver las ecuaciones para las componentes horizontales de la velocidad (118) y (135).
- 4) Resolver la ecuación para la componente vertical de la velocidad (138).
- 5) Resolver la ecuación para los cambios en la elevación de la superficie libre (144).
- 6) Determinar la nueva distribución de densidad a partir de la ecuación de estado, resolviendo la ecuación de transporte de sal (158).
- 7) Iniciar un nuevo ciclo definiendo las variables al paso de tiempo $m+1$ como variables al paso de tiempo m .

5. APLICACIÓN DEL MODELO Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

La revisión del modelo descrito se realizó aplicándolo a siete casos. Debe aclararse aquí que en los seis primeros se han despreciado los flujos causados por diferencia de densidad y, en todos ellos, el efecto de Coriolis. Asimismo, más que intentar reproducir condiciones naturales se procuró generar situaciones que permitieran una exploración relativamente simple de su funcionamiento físico. Los términos "aguas arriba" y "aguas abajo" que aquí se emplean, se refieren a la posición relativa de partes del estuario con respecto al mar, denotando el primero a la parte lejana al mar y, el segundo, a la que se encuentra más cercana a éste. Conviene decir que se ha considerado como inicio de la sección estuarina a la parte del canal que tiene frontera con el mar, y como final de esta sección a aquella que tiene frontera con el río; el centro de la sección estuarina se ubica en la parte intermedia entre ambas fronteras. Finalmente, se debe aclarar que en la frontera con el río se utilizan condiciones de frontera de gradiente nulo, y en la frontera con el mar se establecen diferentes tipos de forzamiento. El sentido de la velocidad se supuso positivo del mar hacia el río y negativo del río hacia el mar.

5.1 Forzamiento por nivel del mar constante en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento (profundidad constante)

Respuesta del modelo a forzamiento por nivel del mar fijo (0.5 m) en una sección estuarina rectangular de 5800 m de longitud, 900 m de ancho y 11 m de profundidad constante, despreciando cualquier tipo de fuerza opuesta al movimiento. El dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 m x 60 m x 1 m, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 s, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) se consideró igual a la de la celda que le antecedía y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre (Figura 6).

5.2 Forzamiento por nivel del mar constante en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)

Respuesta del modelo a forzamiento por nivel del mar fijo (0.5 m) en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_c=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) en una sección estuarina rectangular de 5800 m de longitud, 900 m de ancho y 11 m de profundidad constante. El dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 m x 60 m x 1 m, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 s, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) se consideró igual a la de la celda que le antecedía y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre (Figura 7).

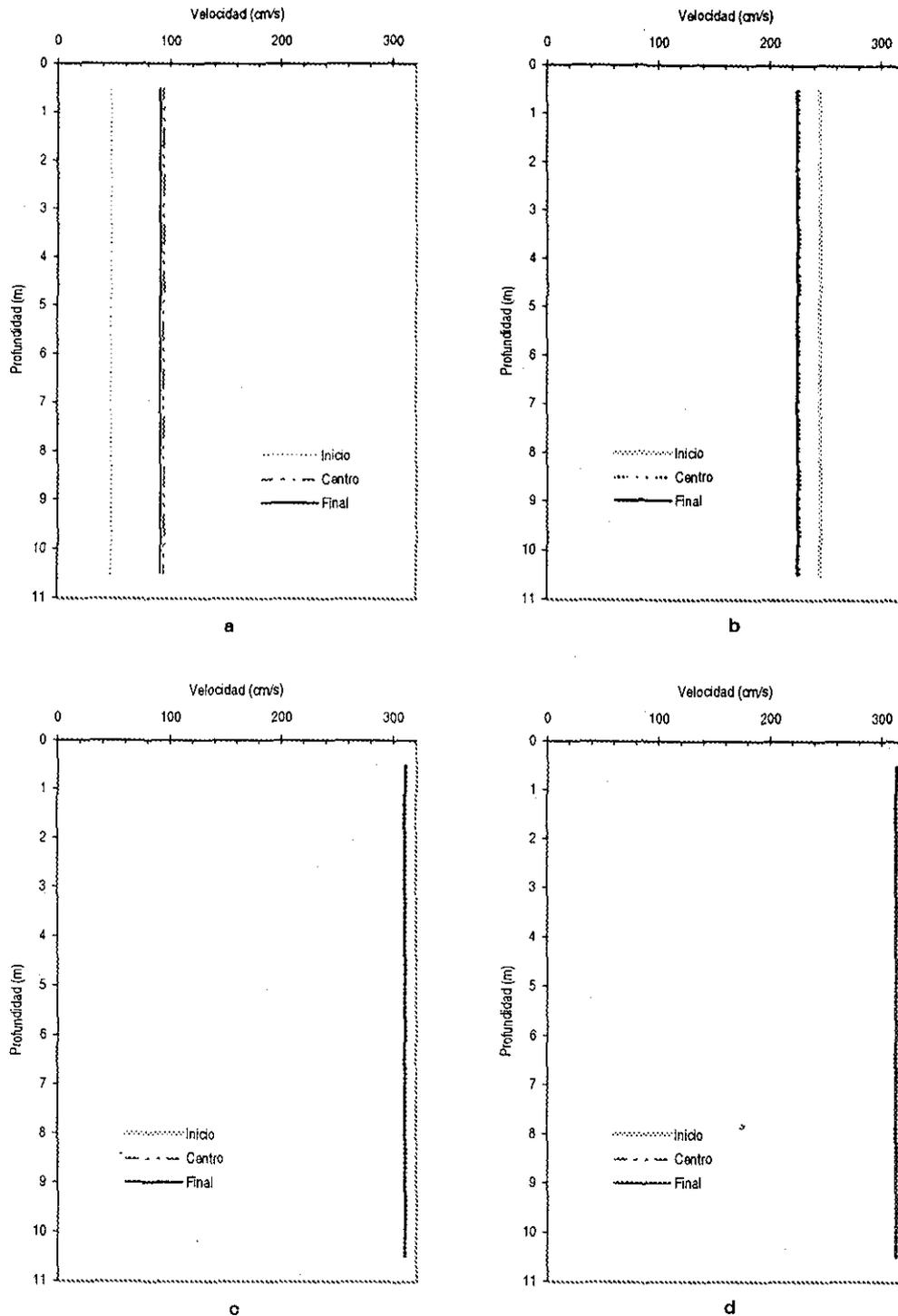


Figura 6. Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar fijo igual a 0.5 m) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3,600 s, c) 10,800 s, d) 249,300 s.

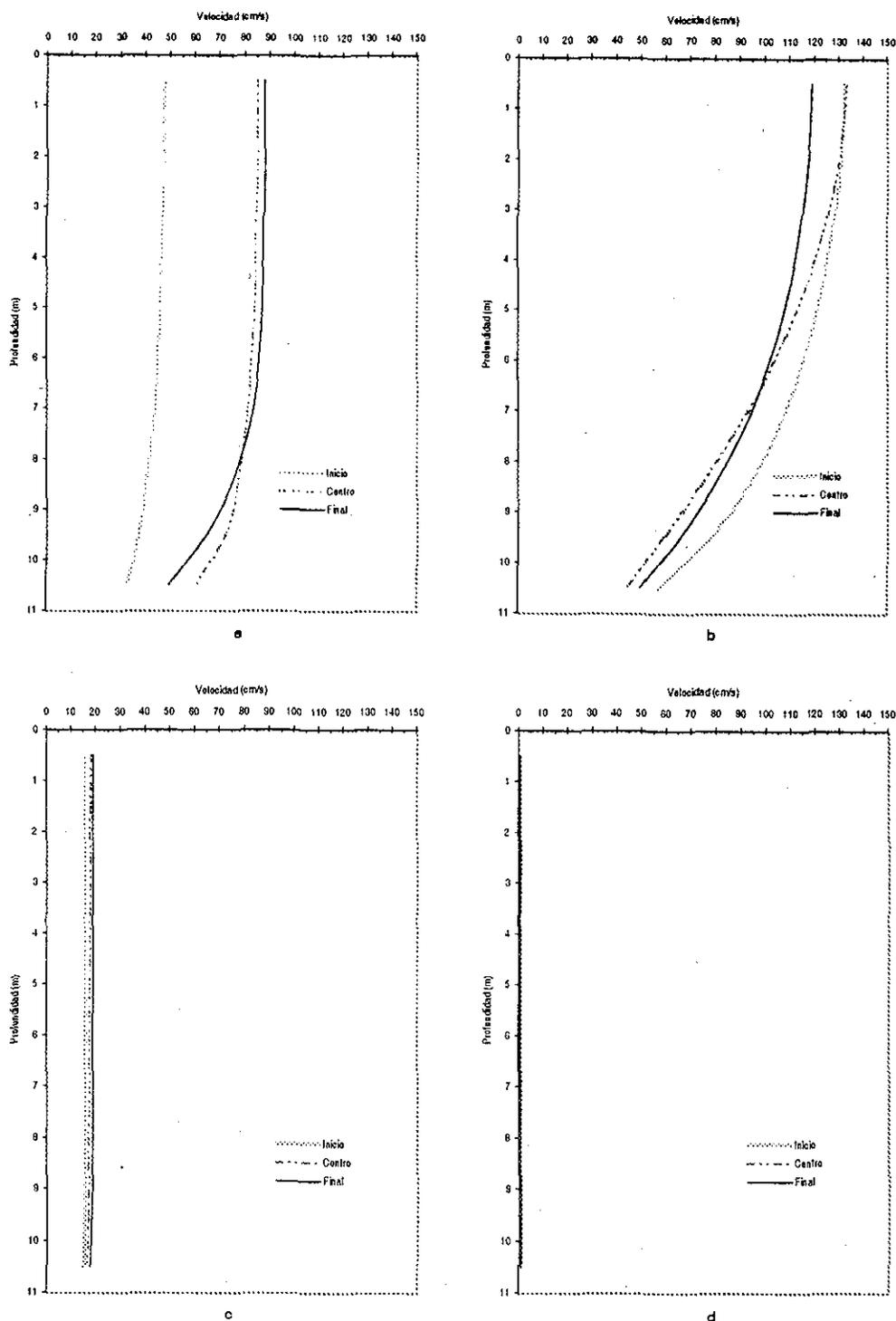


Figura 7. Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_t=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar fijo igual a 0.5 m) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3,600 s, c) 10,800 s, d) 249,300 s.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.3 Forzamiento por esfuerzo del viento en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)

Respuesta del modelo a forzamiento por viento ($W_x=500 \text{ cm/s}$, $K_v=0.1 \times 10^{-6}$) en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) en una zona costera rectangular cerrada de 5800 m de longitud, 900 m de ancho y 11 m de profundidad constante. El viento sopla en dirección longitudinal a la cuenca, el dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 m x 60 m x 1 m, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 s, a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo, así como a la velocidad y la elevación de la superficie libre en la frontera izquierda (costa). (Figura 8).

5.4 Forzamiento por nivel del mar variable en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento (profundidad constante)

Respuesta del modelo a forzamiento por nivel del mar variable ($a=50 \text{ cm}$, $T_m=12 \text{ h}$) en una sección estuarina rectangular de 5800 m de longitud, 900 m de ancho y 11 m de profundidad constante, despreciando cualquier tipo de fuerza opuesta al movimiento. El dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 m x 60 m x 1 m, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 s, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) se consideró igual a la de la celda que le antecedió y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre (Figura 9).

5.5 Forzamiento por nivel del mar variable en presencia de fuerzas de fricción (profundidad constante)

Respuesta del modelo a forzamiento por nivel del mar variable ($a=50 \text{ cm}$, $T_m=12 \text{ h}$) en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) en una sección estuarina rectangular de 5800 m de longitud, 900 m de ancho y 11 m de profundidad constante. El dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 m x 60 m x 1 m, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 s, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) se consideró igual a la de la celda que le antecedió y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre (Figura 10).

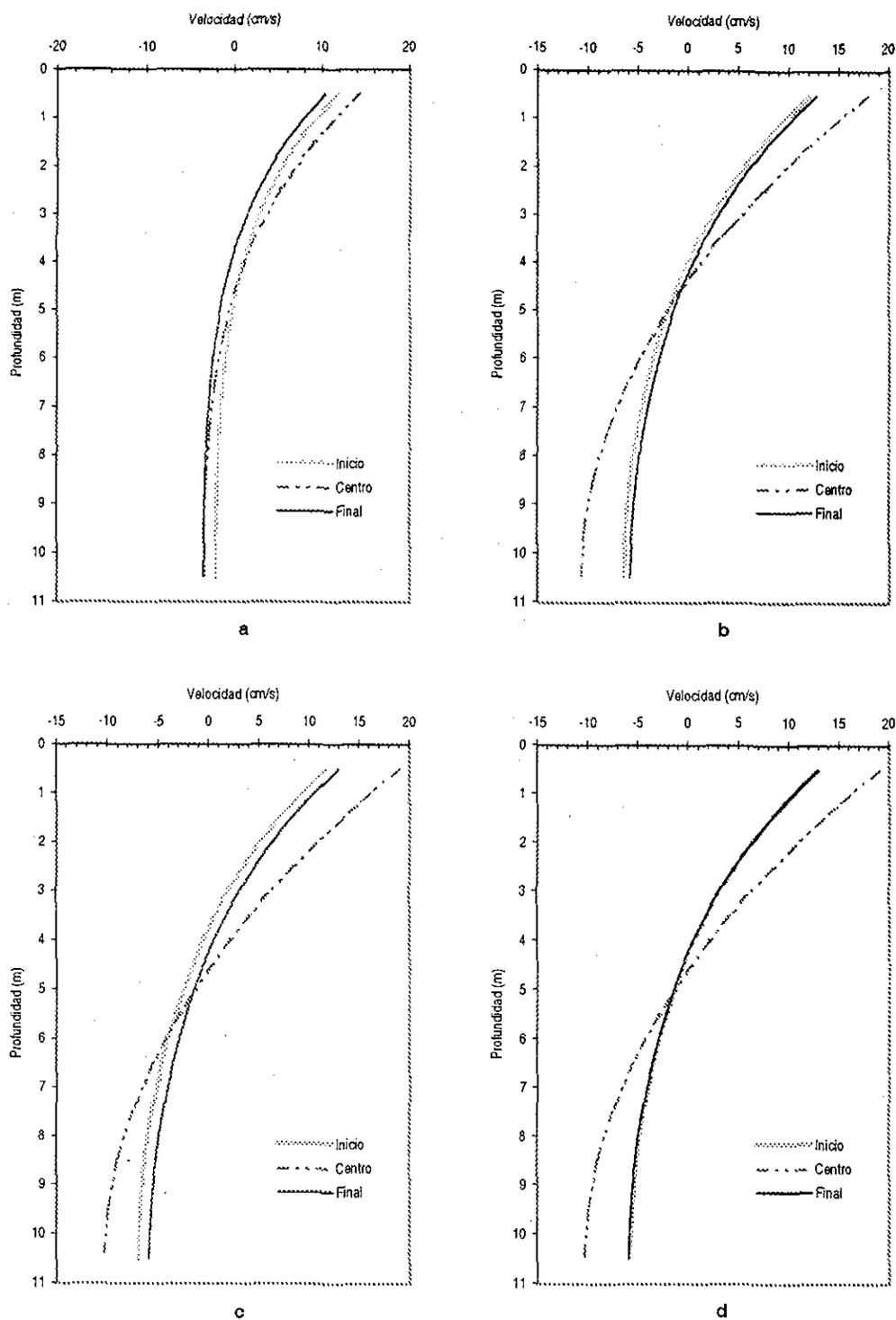


Figura 8. Perfiles verticales de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_x=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el esfuerzo del viento ($W_x=500 \text{ cm/s}$, $K_r=0.1 \times 10^{-6}$) para los tiempos siguientes: a) 900 s, b) 3, 600 s, c) 10, 800 s, d) 249,300 s.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

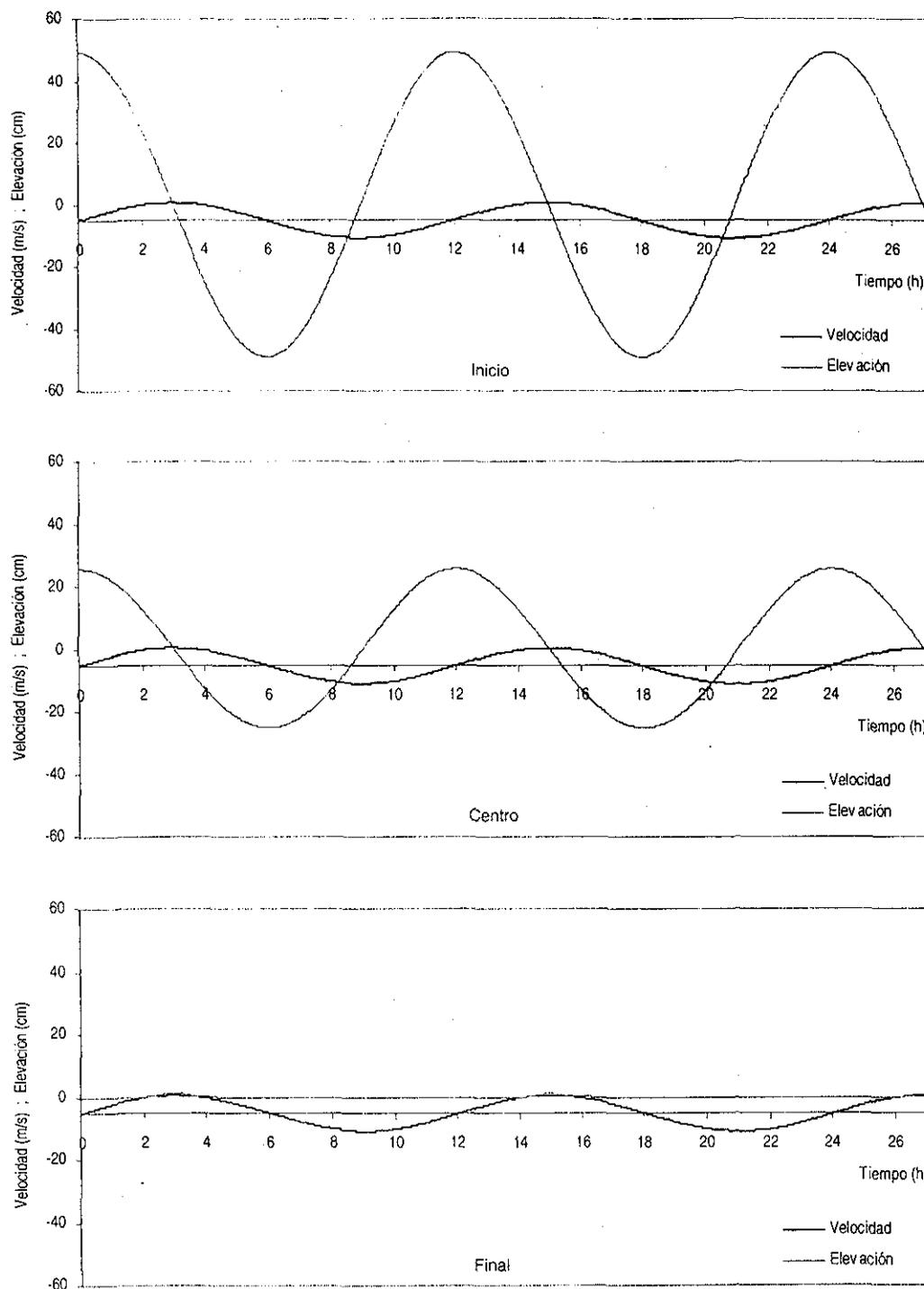


Figura 9. Distribución de velocidad y elevación en estado estacionario en un punto ubicado en la superficie libre al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar variable $a=0.5\text{ m}$, $T_m=12\text{ h}$; velocidad en la frontera más alejada del mar igual a la de la celda que le antecede y, sin restricción explícita para la elevación de la superficie libre).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

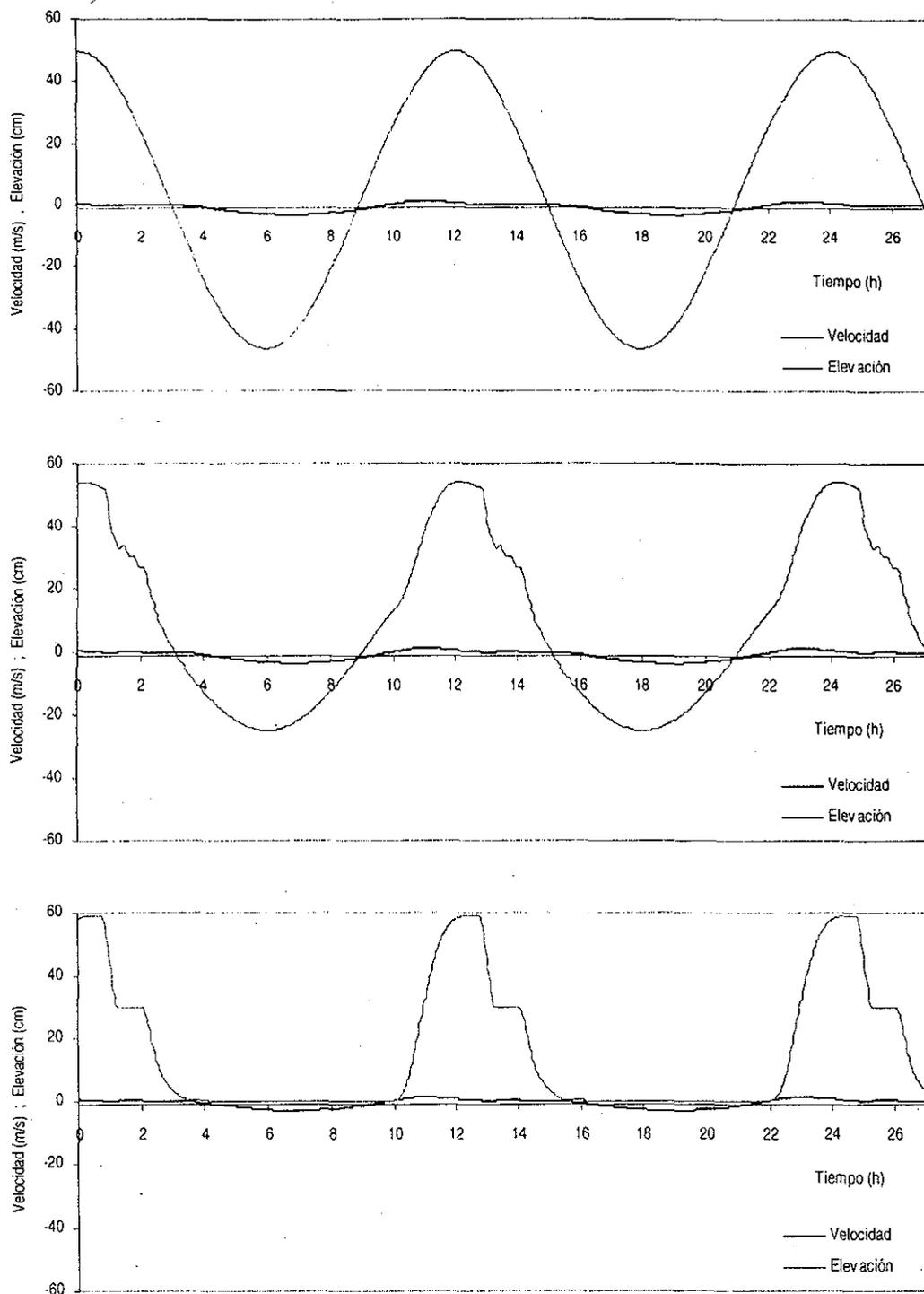


Figura 10. Distribución de velocidad y elevación en estado estacionario en un punto ubicado en la superficie libre al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo en presencia de fuerzas de fricción ($N_b=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_s=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre (nivel del mar variable $a=0.5 \text{ m}$, $T_m=12 \text{ h}$; velocidad en la frontera más alejada del mar igual a la de la celda que le antecede y, sin restricción explícita para la elevación de la superficie libre).

5.6 Forzamiento por nivel del mar variable y escurrimiento superficial en presencia de fuerzas de fricción y flujos por gradiente longitudinal de densidad (profundidad constante)

Respuesta del modelo en una sección estuarina rectangular de 5800 *m* de longitud, 900 *m* de ancho y 11 *m* de profundidad constante, a forzamiento aguas abajo (frontera más cercana al mar) por nivel del mar variable ($a= 50 \text{ cm}$, $T_m= 12 \text{ h}$) y aguas arriba (frontera más alejada del mar) por escurrimiento superficial ($h= 0 - 3.5 \text{ m}$) con velocidad y salinidad constante ($u= 80 \text{ cm/s}$, $S= 18$), en presencia de fuerzas de fricción ($N_h= 1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_{z_{h \neq 3.5 \text{ m}}}= 1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_{z_{h=3.5 \text{ m}}}= 0 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r= 3.3 \times 10^{-3}$) y flujos por diferencia de densidad ($D_h= 1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{z_{h \neq 3.5 \text{ m}}}= 2 \times 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{z_{h=3.5 \text{ m}}}= 0 \text{ cm}^2/\text{s}$). El escurrimiento fluye en dirección longitudinal al canal, el dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 *m* x 60 *m* x 1 *m*, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 *s*, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad y la salinidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) por debajo del escurrimiento superficial se consideró igual a la de la celda que le antecedía y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre. En la frontera aguas abajo (frontera más cercana al mar) se mantuvo un perfil de salinidad constante ($S_{0.5 \text{ m}}= 24$, $S_{1.5 \text{ m}}= 26.5$, $S_{2.5 \text{ m}}= 31$, $S_{3.5 \text{ m}}= 33.5$, $S_{4.5 \text{ m}}= 34.5$, $S_{5.5 \text{ m}}= 35.5$, $S_{6.5 \text{ m}}= 36.0$, $S_{7.5 \text{ m}}= 36.5$, $S_{8.5 \text{ m}}= 36.7$, $S_{9.5 \text{ m}}= 36.8$, $S_{10.5 \text{ m}}= 36.9$); (Figura 11).

5.7 Forzamiento por nivel del mar variable en presencia de fuerzas de fricción (profundidad variable)

Respuesta del modelo a forzamiento por nivel del mar variable ($a= 50 \text{ cm}$, $T_m=12 \text{ h}$) en presencia de fuerzas de fricción ($N_h=1 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $N_z=1 \times 10^2 \text{ cm}^2/\text{s}$, $r= 3.3 \times 10^{-3}$) en una sección estuarina rectangular de 5800 *m* de longitud, 900 *m* de ancho, y profundidad variable ($m= 1:1000$). El dominio de cálculo se discretizó empleando celdas de 100 *m* x 60 *m* x 1 *m*, el paso de tiempo utilizado fue igual a 1 *s*, y a las velocidades iniciales se les asignó un valor nulo. La velocidad en la frontera aguas arriba (frontera más alejada del mar) se consideró igual a la de la celda que le antecedía y, en ella no se establece explícitamente restricción alguna para la elevación de la superficie libre (Figura 12).

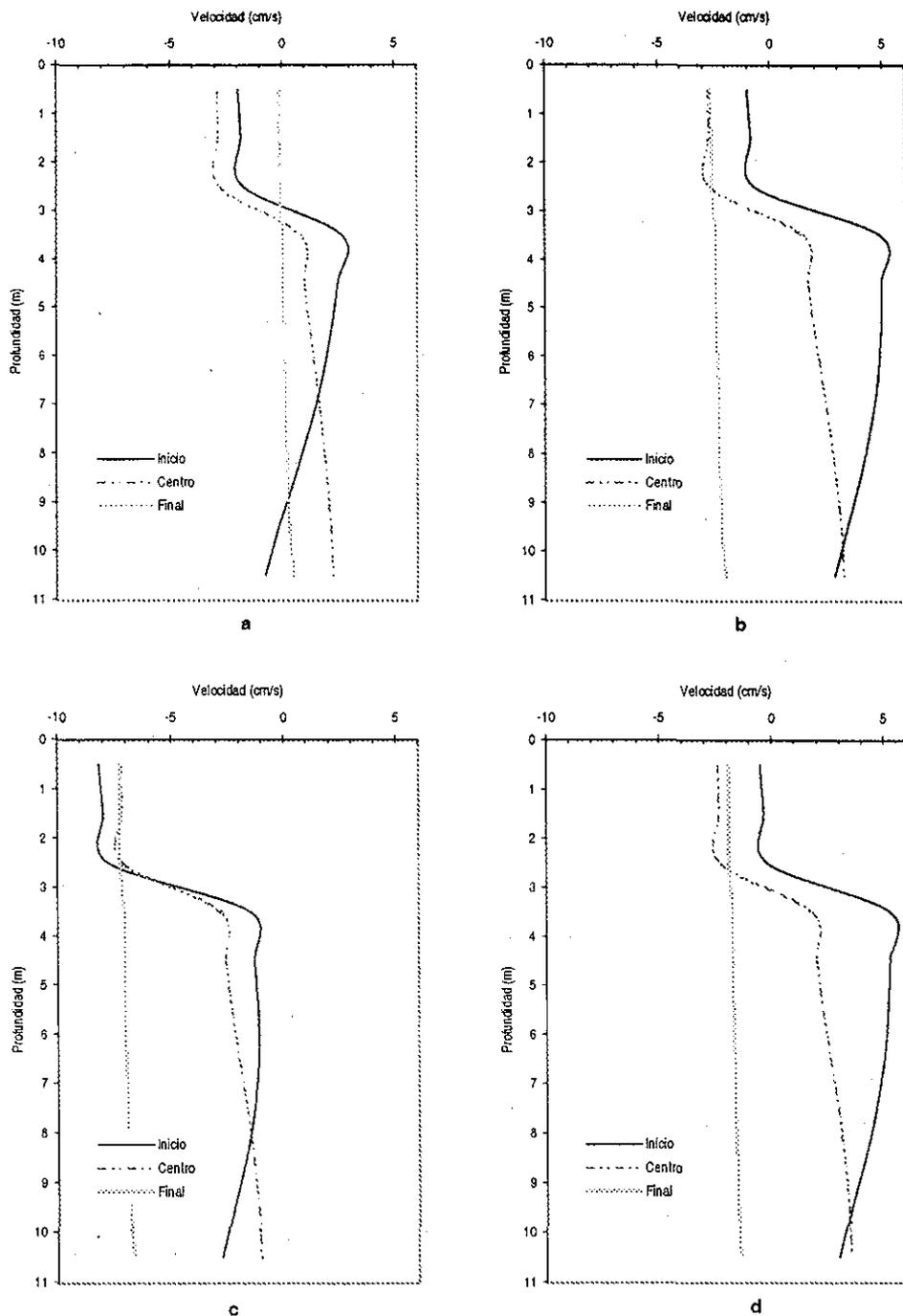


Figura 11. Perfil vertical de velocidad en estado estacionario para forzamiento por marea ($a = 50$ cm, $T_m = 12$ h), con escurrimiento superficial en la frontera aguas arriba ($h = 0 - 3.5$ m, $u = 80$ cm/s, $S = 18$), al inicio, en el centro y al final del canal estudiado sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_h = 1 \times 10^5$ cm²/s, $N_{z_{h=3.5m}} = 1 \times 10^2$ cm²/s, $N_{z_{h=3.5m}} = 0$ cm²/s, $r = 3.3 \times 10^3$) y flujos por diferencia de densidad ($D_h = 1 \times 10^2$ cm²/s, $D_{z_{h=3.5m}} = 2 \times 10^{-1}$ cm²/s, $D_{z_{h=3.5m}} = 0$ cm²/s); a) marea alta, b) marea media descendente, c) marea baja, d) marea media ascendente.

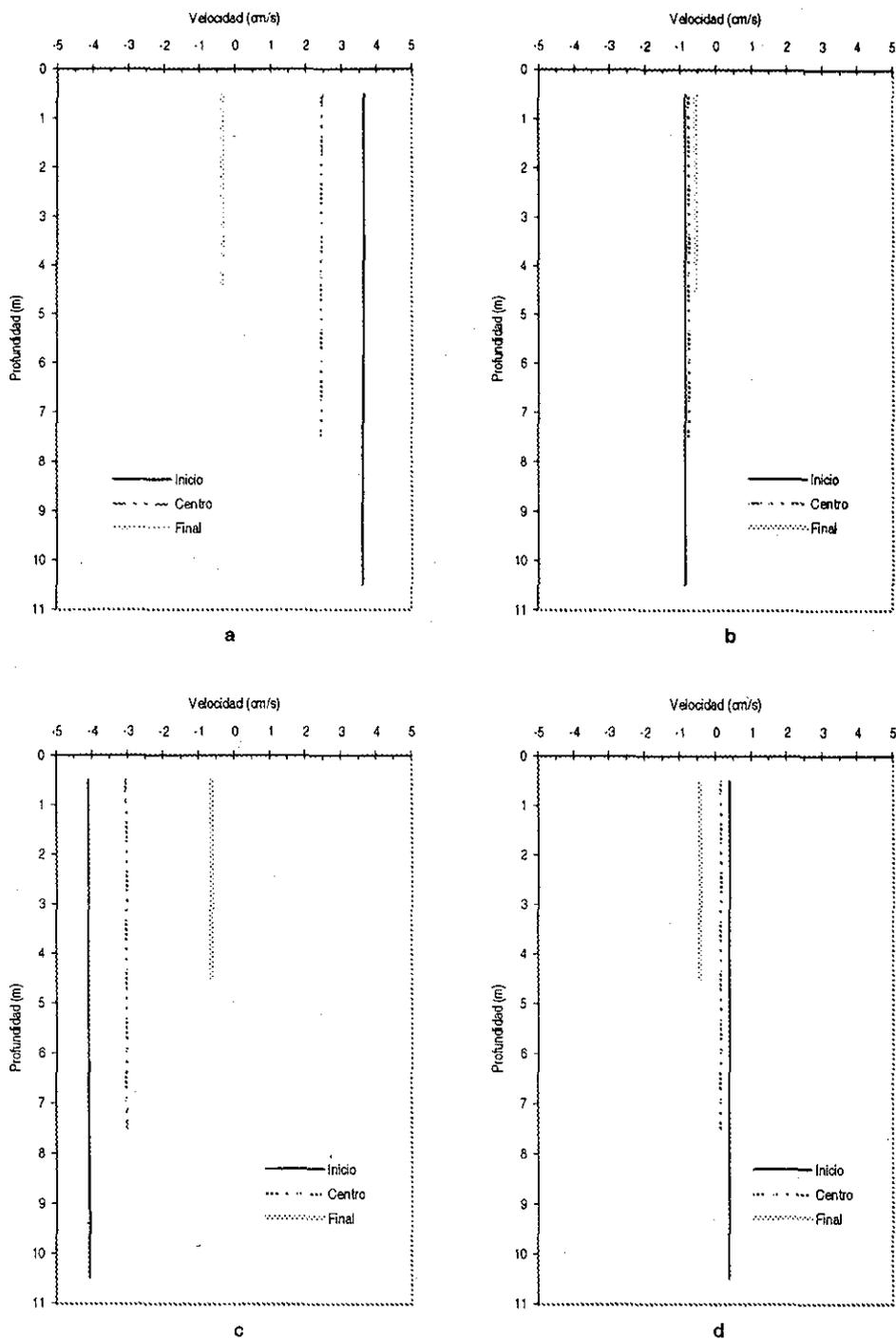


Figura 12. Perfil vertical de velocidad para forzamiento por marea ($a=50\text{ cm}$, $T_m=12\text{ h}$) al inicio, en el centro y al final del canal de profundidad variable estudiado ($m=1:1000$) sobre un transecto localizado en la parte central del mismo, en presencia de fuerzas de fricción ($N_1=1 \times 10^5\text{ cm}^2/\text{s}$, $N_2=1 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}$, $r=3.3 \times 10^{-3}$) opuestas al movimiento generado por el gradiente de elevación de la superficie libre; a) marea alta, b) marea media descendente, c) marea baja, d) marea media ascendente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

6. DISCUSIÓN

En primer término, se debe aclarar que en las simulaciones realizadas se decidió utilizar una geometría rectangular con profundidad constante para eliminar la variación del flujo que causaría un cauce y/o batimetría irregular. De esta manera, se logra aislar al fenómeno que se desea estudiar – la circulación - y observar exclusivamente el efecto que las variables de interés (viento, marea, fricción, etc.) provocan en él.

La simulación de la circulación inducida por nivel del mar constante en ausencia de fuerzas opuestas al movimiento, generó perfiles verticales de velocidad de gran similitud después de tres horas de simulación, como muestran las Figuras 6c y 6d, permitiendo considerar que después de transcurrido ese tiempo el sistema alcanza el estado estacionario. En dicho estado los perfiles de velocidad al inicio, en el centro y al final del canal son iguales, implicando que no existen gradientes longitudinales de velocidad (Figura 6d). Asimismo, tales perfiles se caracterizan por mantener un valor constante en toda la profundidad, indicando que su gradiente vertical es nulo y confirmando así la ausencia de fuerzas de fricción; aquí, es conveniente señalar que tampoco se observó un gradiente transversal de velocidad. Físicamente, esto significa que en el estado estacionario el agua en el canal se desplaza como un bloque, sin diferencia de velocidad entre la superficie y el fondo, ni entre una margen del cauce y la otra. Adoptando la terminología empleada en ingeniería ambiental, puede decirse que la circulación tiene un comportamiento de flujo en pistón, es decir, existe mezcla completa en el plano transversal, pero mínima o nula en la dirección del flujo. Este comportamiento puede explicarse a partir de la evolución temporal del flujo en la forma siguiente: inicialmente las partículas de agua, que están en reposo, son aceleradas por el gradiente de elevación de la superficie libre sin sufrir el efecto de fuerzas que reduzcan su movimiento, aumentando así su velocidad progresivamente (Figura 6a). Al transcurrir el tiempo dicho gradiente disminuye y, aunque las partículas continúan siendo aceleradas, esto ocurre a una tasa menor (Figura 6a, 6b, y 6c). Al alcanzar el estado estacionario la pendiente de la superficie libre se anula y, por tanto, las partículas dejan de ser aceleradas pero, de acuerdo con la segunda ley de Newton, conservan la velocidad adquirida (313 *cm/s*, aproximadamente, en este caso) pues no existen fuerzas que modifiquen ese estado (Figura 5d). Esta explicación se fortalece al confirmar que la elevación calculada dentro del canal permanece constante, e igual a la del nivel del mar, al finalizar la simulación.

La evolución temporal de los perfiles verticales de velocidad (Figuras 6a, 6b, 6c y 6d) muestra también, en todo momento, al agua en la parte central y final del canal moviéndose con una velocidad virtualmente idéntica que, al poco tiempo de comenzar la simulación, excede a aquella que existe en su parte inicial (Figura 6a); esto sugiere que, en esa etapa del experimento, el agua al inicio del canal es "arrastrada" por la que se encuentra delante de ella; posteriormente, antes de alcanzar el estado estacionario, se presenta un comportamiento inverso, esto es, el agua al inicio del canal posee velocidades mayores (Figura 6b), indicando ahora que esta "empuja" a la que se ubica en el centro y al final del canal; progresivamente este efecto desaparece (Figuras 6c y 6d).

Debe observarse también que la aplicación de la ecuación (94) a este caso experimental (ver Anexo XI), hace evidente la gran similitud que existe entre los resultados experimentales (estado estacionario: 313 cm/s) y la solución analítica (365 cm/s).

Con relación a la propagación de la onda monocinética puede decirse que los resultados analíticos - basados en los hallazgos experimentales - señalan que su velocidad de desplazamiento es igual a 10.79 m/s , por lo que se estima que atraviesa el canal en poco más de 537 s (ver Anexo XII). Estos resultados concuerdan con los hallazgos experimentales; sin embargo, en ellos el equilibrio se alcanza hasta después de transcurridos 3600 s , posiblemente a causa de una expresión matemática poco adecuada de las condiciones de frontera.

Al efectuar una simulación análoga a la descrita en los párrafos anteriores, pero incluyendo ahora fuerzas de fricción, el estado estacionario se alcanza mucho después de transcurridas tres horas de simulación (aproximadamente veinte horas después). Nuevamente, en dicho estado se observa la ausencia de gradientes de velocidad tanto en dirección longitudinal como vertical (Figura 7d). Esta conducta se repite en dirección transversal. Se observa también, a diferencia del primer experimento, que la magnitud de la velocidad es - para la mayoría de los casos prácticos, en ingeniería ambiental - virtualmente nula (Figura 7d). En este punto debe advertirse que, aumentando el tiempo total de simulación se alcanzará un valor tan cercano a cero como se desee pero, sin perder de vista, que esto aumentará también el esfuerzo de cómputo. Estas características describen físicamente al canal estudiado como un cuerpo de agua carente de movimiento en todos sus puntos al alcanzar el equilibrio. Desde un punto de vista ambiental, puede decirse que el agua eventualmente permanecerá estancada. Con base en los resultados obtenidos para la evolución temporal del flujo, el razonamiento que explica

este comportamiento puede expresarse en la forma siguiente: las partículas de agua, inicialmente en reposo, son aceleradas por el gradiente de elevación de la superficie libre sufriendo, al moverse, el efecto de las fuerzas de fricción – fuerzas que se oponen a ese movimiento –. Como resultado aumentan progresivamente su velocidad, pero no lo hacen de manera homogénea en todo el canal, es decir, generan gradientes de velocidad tanto en dirección horizontal como vertical (Figuras 7a y 7b). Al transcurrir el tiempo, el gradiente de elevación de la superficie libre disminuye hasta que las fuerzas de fricción comienzan a superarlo y, entonces, las partículas de agua inician su desaceleración (Figura 7c). Al alcanzar el estado estacionario la pendiente de la superficie libre se anula - dejando así de acelerar a las partículas de agua - y las fuerzas de fricción terminan por detener su movimiento, eliminando también los gradientes de velocidad (Figura 7d). La presencia de gradientes de velocidad dentro del canal al transcurrir la simulación, su anulación al alcanzar el estado estacionario, así como la comprobación de que la elevación de la superficie libre adquiere, nuevamente, un valor constante e igual al del nivel del mar al término de la misma, contribuyen a robustecer esta explicación.

Al igual que en el primer experimento, el agua en el centro y al final del canal se mueve con una velocidad muy similar en todo momento (Figuras 7a, 7b, 7c y 7d) y, nuevamente, poco tiempo después de iniciada la simulación aquella que se encuentra en la parte inicial se desplaza con mayor lentitud (Figura 7a); posteriormente se presenta, también aquí, la inversión de este comportamiento (Figura 7b). Esta conducta revela que los efectos de “arrastre” y “empuje” detectados en el experimento previo, ocurren ahora de nuevo.

Por su parecido con el experimento anterior, merece atención el aumento de la velocidad en la etapa inicial de la simulación (Figuras 7a y 7b); así como, en contraste con él, su disminución posterior hasta alcanzar un valor, como antes se ha dicho, prácticamente nulo (Figuras 7c y 7d). Asimismo, es importante enfatizar que la fricción generó una deformación aproximadamente parabólica en la parte inferior de los perfiles verticales de velocidad (Figuras 7a y 7b), que aumentó al hacerlo la velocidad y se desvaneció al disminuir ésta (Figuras 7c y 7d).

Cuantitativamente se observa gran similitud entre la aproximación analítica ($u = 0.0 \text{ cm/s}$, $u_{max} = 116 \text{ cm/s}$) y los resultados experimentales (estado estacionario: $u = 0.1 \text{ cm/s}$, $u_{max} = 118 - 133 \text{ cm/s}$) (ver Anexo XI).

Ensayos análogos a los hasta ahora descritos, pero siendo inducidos por una elevación del nivel del mar variable y periódica, muestran que el estado estacionario se alcanza, aproximadamente, cinco ciclos de marea después de iniciada la simulación. La oscilación se transmite a lo largo del canal (Figuras 9 y 10), sufriendo deformaciones y una ligera disminución en su magnitud cuando existen fuerzas de fricción (Figura 9). Asimismo, la distribución temporal de la velocidad y la elevación de la superficie libre en un punto fijo exhibe un desfase, y refleja también la naturaleza oscilatoria del forzamiento.

Es importante observar que, en ausencia de fricción, la elevación del nivel del mar disminuye su magnitud conforme el punto de interés se aleja de la frontera en que el forzamiento se ejerce, hasta alcanzar un valor nulo al finalizar el canal (Figura 9); al existir fricción el mismo fenómeno ocurre pero sólo en períodos de bajamar (Figura 10). Este comportamiento es anormal, y se genera al establecer un gradiente nulo para las componentes horizontales de la velocidad en la frontera aguas arriba - condición de Neumann -, fijando con ello una velocidad vertical igual a cero, y anulando así la elevación de la superficie libre en ese sitio.

El comportamiento anómalo arriba descrito (valor fijo y nulo de la elevación de la superficie libre al finalizar el canal) genera grandes pendientes que causan fuertes aceleraciones del flujo, y provocan una gran discrepancia entre los resultados experimentales (Caso 4: $u = -1,100 - 50.6 \text{ cm/s}$; Caso 5: $u = -53.2 - 345 \text{ cm/s}$) y la solución analítica (Caso 4: $u = \pm 47.2 \text{ cm/s}$; Caso 5: $u = \pm 39.9 - \pm 38.6 \text{ cm/s}$) (ver Anexo XI). Esta conducta aconseja explorar la aplicación de condiciones de frontera distintas a la condición de Neumann aquí utilizada. Experimentos preliminares muestran que este comportamiento mejora al emplear como condición de frontera un gradiente de velocidad lineal.

Al estudiar la circulación inducida por efecto del viento se observa que el estado estacionario se alcanza poco después de transcurrida una hora de simulación (Figura 8c). A diferencia de los dos primeros experimentos, en dicho estado se presentan gradientes de velocidad tanto en dirección longitudinal como vertical (Figura 8d). Es importante mencionar que estos se manifiestan también en dirección transversal. Se observa además la presencia de velocidades positivas en la porción superior del canal y negativas en su parte inferior; así como una mayor magnitud de la velocidad en la parte central, indicando que en la capa superior (por arriba de 5m de profundidad, en este caso) el agua ubicada en el centro "arrastra" a aquella que

se encuentra al inicio del canal, y “empuja” a la que se encuentra al final; en la capa inferior (por debajo de 5m de profundidad) se presenta el comportamiento opuesto (Figura 8d). El significado físico de esta conducta corresponde al de un flujo con retrocirculación en el fondo, esto es, un tipo de movimiento en el que el agua fluye en la parte inferior del canal en dirección opuesta a aquella con la que se desplaza en la parte superficial. Este comportamiento puede entenderse, a partir de los resultados obtenidos, en la forma siguiente: al principio, las partículas de agua en reposo son aceleradas hacia la costa por intercambio de cantidad de movimiento con el viento que sopla sobre la superficie (Figura 8a). Al transcurrir el tiempo, estas comienzan a apilarse en esa región e, intentando reestablecer el equilibrio – mantener un gradiente de elevación nulo –, buscan salir desplazándose por la zona donde encuentran menor oposición - corrientes más débiles -, lo cual ocurre en las capas de agua inferiores. De esta manera, se establece un flujo incipiente que introduce agua por la parte superior y la extrae por la parte inferior (Figuras 8b y 8c), alcanzando un completo desarrollo en el estado estacionario (Figura 8d). Esta explicación se refuerza al comprobar la existencia de un perfil longitudinal de elevación de la superficie libre que muestra una sobre elevación del nivel del mar en la costa al finalizar la simulación.

Para este caso la aproximación analítica ($u = 3.8 \text{ cm/s}$, $K_v = 1.0 \times 10^{-7}$) al resultado experimental en estado estacionario ($u \approx 0.0 \text{ cm/s}$) es también aceptable (ver Anexo XI). Aquí es necesario señalar que la solución analítica referida proporciona el valor de la velocidad promedio en la columna de agua por lo que, por congruencia, es éste valor el que se da para comparación en el resultado experimental.

En un ensayo más, al aplicar forzamiento por nivel del mar variable y escurrimiento superficial en presencia de fuerzas de fricción y flujos por gradiente longitudinal de densidad, se observa la formación de un patrón de circulación característico de regiones estuarinas, al alcanzarse el estado estacionario (Figuras 11a, 11b, 11c y 11d). En marea media - descendente o ascendente - el agua que se encuentra en la capa superior (por arriba de 2.5 m, en este caso) se desplaza en dirección negativa, esto es, aguas abajo, y la que se encuentra en la capa inferior (por debajo de 2.5 m) lo hace en dirección opuesta, es decir, aguas arriba; este comportamiento se desvanece progresivamente hacia el final del canal, donde el flujo es negativo en toda la profundidad (Figuras 11b y 11d). En marea alta se observa un comportamiento similar, pero ahora el agua en la parte inicial del canal fluye con mayor rapidez en la capa superior, y de forma más lenta en la capa inferior, respecto a su movimiento en marea media; asimismo, aquella ubicada en la porción final del canal permanece prácticamente

sin movimiento en toda la profundidad (Figura 11a). En marea baja se presentan las mayores velocidades de todo el ciclo de marea; la capa superior mantiene un flujo bien definido aguas abajo, en el que la magnitud de la velocidad aumenta desde el final hacia el inicio del canal; en la capa inferior aunque el flujo es también aguas abajo, se observa que la magnitud de la velocidad aumenta en sentido opuesto, es decir, del mar hacia el río (Figura 11c). Esta conducta puede explicarse considerando que las diferencias de densidad provocan que el agua superficial responda con mayor intensidad a las fuerzas advectivas causadas por el escurrimiento, y las capas inferiores al efecto generado por la marea. Esta explicación se refuerza al confirmar la entrada de agua salada hacia el interior del canal por su parte inferior, y la salida de agua salobre por su parte superior.

A pesar de que las dificultades discutidas para el cuarto y quinto caso experimental también aquí ocurren, se advierte que el flujo advectivo provocado por el escurrimiento superficial disminuye la discrepancia entre los resultados experimentales y la aproximación analítica. La mayor diferencia entre ellos se presenta en marea baja a una profundidad de 7 m, donde se tiene lo siguiente: solución analítica: $u = 8.1 \text{ cm/s}$, resultado experimental: $u = -6.9 - -1.2 \text{ cm/s}$.

Por otra parte, la respuesta del modelo al forzamiento por nivel del mar variable y periódico en presencia de fuerzas de fricción en un canal con profundidad variable, permite observar un comportamiento análogo a aquél en el que la profundidad es constante - transmisión de la oscilación a lo largo del canal, defasamiento entre velocidad y elevación, etc. -. En marea alta y marea baja la magnitud de la velocidad es mayor al inicio del canal, y decrece conforme aumenta la distancia a la frontera donde el forzamiento se ejerce, generando gradientes longitudinales de velocidad; el flujo en marea alta ocurre aguas arriba y, en marea baja aguas abajo (Figuras 12a y 12c). En marea media descendente existe un lento movimiento aguas abajo a lo largo de todo el canal (Figura 12b) y, en marea media ascendente este ocurre en ese sentido sólo en la parte final del mismo (Figura 12d).

La evaluación cuantitativa de los resultados experimentales para este caso no fue posible pues, en la revisión bibliográfica realizada, no se encontraron expresiones analíticas que permitieran aproximar su comportamiento.

El tamaño de malla empleado en las simulaciones discutidas, fue diferente y uniforme en cada una de las tres direcciones de los ejes coordenados. Debe destacarse aquí que la solución de las ecuaciones de gobierno, en la forma que en este trabajo se realizó, permite el uso de

pasos espaciales variables no sólo entre diferentes direcciones sino, más aún, dentro de una misma dirección. Esta característica favorece el uso del modelo desarrollado en aplicaciones de ingeniería ambiental; por ejemplo, una malla fina en la superficie facilitará el estudio de vertidos menos densos que el agua estuarina (agua residual, hidrocarburos, etc.).

El equipo de cómputo utilizado para realizar este trabajo fue un procesador Intel Pentium III, 128 MB RAM, 233 MHz con tecnología MMX, fácilmente asequible en el mercado. El tiempo de cómputo requerido varió, básicamente, en función del número de resultados que fueron almacenados y de la frecuencia con que el almacenamiento se realizó; como ejemplo, puede decirse que al almacenar información de tres planos longitudinales del canal estudiado, a intervalos de 900 segundos, se observó la siguiente equivalencia: 3 días de tiempo real : 1 día de simulación. Es importante notar que, a la fecha, se encuentra disponible equipo de cómputo mucho más poderoso que el aquí utilizado, por lo que el problema relativo al esfuerzo de cálculo se considera superado en este trabajo.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este trabajo manifiesta la necesidad de establecer una estrecha y mutua cooperación entre oceanógrafos, ingenieros ambientales, y especialistas en matemática aplicada y en sistemas, para enfrentar con éxito los altamente demandantes y complejos problemas de protección ambiental que afectan actualmente a las regiones costeras.

El avance en el desarrollo de modelos capaces de proporcionar un conocimiento detallado de los patrones de circulación en estuarios, permitirá resolver con mayor precisión problemas de protección ambiental inherentes a contaminantes convencionales en estos cuerpos de agua, así como abordar problemas causados por contaminación no convencional.

Los esquemas numéricos empleados demuestran ser suficientemente económicos permitiendo aplicaciones en equipo de cómputo convencional (computadora personal o estación de trabajo), evitando así el uso de supercomputadoras.

La codificación de las ecuaciones de gobierno - en forma discretizada - es un factor de gran importancia en la economía computacional, por lo que debe realizarse siguiendo un estilo estructurado y disciplinado.

Los experimentos realizados indican que el modelo desarrollado es capaz de reproducir satisfactoriamente, a nivel conceptual, el comportamiento físico de la circulación tridimensional en sistemas estuarinos, incluyendo aquel generado por gradientes longitudinales de densidad. Cuantitativamente, este modelo muestra la necesidad de explorar condiciones de frontera alternas a la de gradiente nulo en la frontera aguas arriba, de manera tal que se disminuya la diferencia entre los resultados experimentales y las aproximaciones analíticas. Asimismo, los resultados experimentales evidencian su potencialidad de aplicación práctica.

Las mejoras que es posible realizar al modelo que aquí se presenta son numerosas; entre ellas destacan la evaluación del efecto producido por la variación del paso espacial al interior de cada una de las tres direcciones de los ejes coordenados, el uso de coeficientes de arrastre por viento y de viscosidad variables, la evaluación del comportamiento en geometrías complejas, entre otras.

El trabajo que se visualiza para el futuro deberá enfocarse a: 1) Obtener un conocimiento más profundo de los procesos físicos que ocurren en zonas costeras; 2) Formular de manera

detallada y exitosa las ecuaciones de gobierno; 3) Desarrollar procedimientos de solución que permitan manejar modelos de complejidad creciente; 4) Aumentar la economía computacional.

8. REFERENCIAS

- American Society of Civil Engineering, Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations., 1988. Turbulence modeling of surface water flow and transport: Part 1. *Journal of Hydraulic Engineering*, **114**(9) : 970-991.
- Blumberg, A. F., 1978. The influence of density variations on estuarine tides and circulation. *Estuarine Coastal Marine Science*, **6**: 209-215
- Boussinesq, J., 1903. *Theorié analytique de chaleur*. Vol. 2. Gauthier – Villars, Paris.
- Bowden, K. F., 1986. *Physical Oceanography of Coastal Waters*. Ellis Horwood Ltd., New York, U.S.A.
- Chow, V. 1994. *Hidráulica de Canales Abiertos*. McGraw-Hill Interamericana, S. A., Santafé de Bogotá, Colombia.
- Davies, A. M., 1981. Three dimensional modeling of surges. pp. 45-74. En: D. H. Peregrine (ed.). *Floods due to High Winds and Tides*. Academic Press, London.
- Defant, A., 1961. *Physical Oceanography*. Vol. I, Pergamon Press, New York, U.S.A.
- Dyer, K. R., 1973. *Estuaries: A Physical Introduction*. John Wiley & Sons, New York, U. S. A.
- Egan, B. A. y J. R. Mahoney, 1972. Numerical modeling of advection and diffusion of urban area source pollutants. *Journal of Applied Meteorology*, **11**: 312-322.
- Fischer, M., F. Vázquez, y H. Fernández, 1995. Notas del Curso: Modelo de Simulación MIKE 21 Aplicado a la Calidad del Agua. Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México, Mayo 8-12, 1995.
- Florville, T. R., 1998. *Modelación de la Calidad del Agua en Estuarios*. Instituto de Ingeniería Universidad Nacional Autónoma de México. No publicado. Correo electrónico: fatr@correo.unam.mx
- Florville, T. R., 2002. *Aproximación Unidimensional a la Circulación en Estuarios: Memoria de Cálculo*. Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, Universidad Nacional Autónoma de México. No publicado. Correo electrónico: fatr@correo.unam.mx
- Heaps, N. S., 1969. A two-dimensional numerical sea model. *Philosophy Transactions Royal Society of London Series. A*, **275**: 93-137
- Huang, W. y M. Spaulding, 1995a. 3D model of estuarine circulation and water quality induced by surface discharges. *Journal of Hydraulic Engineering*, **121**(4): 300-311.

-
- Huang, W. y M, Spaulding, 1995b. Modeling of CSO-induced pollutant transport in Mt. Hope bay. *Journal of Environmental Engineering*, **121**(7): 492–498.
- HydroQual, Inc., 1987. Development of a coupled hydrodynamic/water quality model of the eutrophication and anoxia processes of the Chesapeake bay, reporte sometido a la U.S. Environmental Protection Agency, Annapolis, MD.
- Ippen, A.T., (ed.) ,1966. *Estuary and Coastline Hydrodynamics*. McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Johnson, B. H., K. W. Kim, Y. P. Sheng, y R. P. Heath, 1990. Development of three dimensional hydrodynamic model of Chesapeake bay. En *Proceedings of Estuarine and Coastal Modeling*, Spaulding, M.L., Ed., ASCE, New York, 113.
- Leenderste, J. J. y S. K. Liu, 1975. A three dimensional model for the estuaries and coastal seas: Volume II, *Aspects of Computation*. RAND Corporation. R-1764-OWRT.
- Officer, C.B., 1976. *Physical Oceanography of Estuaries (and Associated Coastal Waters)*. John Wiley & Sons, New York, U. S. A.
- Phillips, N. A., 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *Journal of Meteorology*, **14**: 184–185.
- Ramming, H. G. y Z. Kowalik, 1980. *Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics: Applications to Dynamic Physical Processes*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands.
- Rödi, W., 1985. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids. *Journal of Geophysical Research*. **92**(C5): 5305-5328.

ANEXO I

Teorema de Transporte de Reynolds

Para transformar las ecuaciones (1b) y (2), referidas originalmente a sistemas, de forma tal que puedan aplicarse en modelación estuarina es necesario, como antes se ha dicho, expresarlas en términos de volúmenes de control. Esto se logra relacionando el cambio respecto al tiempo de la propiedad de interés (masa o cantidad de movimiento) en un sistema arbitrario, con su variación temporal en el volumen de control. La Figura 13 presenta un esquema cuyo análisis facilita la obtención de esta relación. En ella se muestra un volumen de control fijo generalizado, con un patrón de flujo arbitrario que lo atraviesa con flujos entrantes y salientes sobre toda la superficie de control. En general, cada diferencial de área, dA , tendrá una velocidad diferente, \mathbf{V} , formando un ángulo distinto, θ , con la normal local al diferencial de área. Algunas áreas elementales tendrán volúmenes entrantes $(VA \cos\theta)_{entrada} dt$ y otras, volúmenes salientes $(VA \cos\theta)_{salida} dt$. Algunas superficies corresponderán a líneas de corriente ($\theta = 90^\circ$) o a paredes sólidas ($\mathbf{V}=0$) sin entrada ni salida de flujo. En consecuencia, si se considera a B como una propiedad cualquiera del agua estuarina (por ejemplo, masa o cantidad de movimiento) y a $\beta = dB/dm$ como su valor intensivo (cantidad de B por unidad de masa en cualquier cantidad de agua), la expresión de transformación deseada toma la forma:

$$\frac{dB_{sistema}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta\rho V \cos\theta dA - \iint_{SC} \beta\rho V \cos\theta dA \quad (i)$$

salida *entrada*

que es el Teorema de Transporte de Reynolds para un volumen de control fijo con patrón de flujo arbitrario. Como dicho volumen se encuentra fijo en el espacio, los volúmenes elementales, dv , no varían con el tiempo y, en consecuencia, el primer término de la ecuación (i) puede despreciarse, a menos que β o ρ dependan del tiempo (flujo transitorio). Asimismo, la ecuación (i) indica que la derivada temporal de la propiedad de interés en un sistema, es igual a la suma de la derivada temporal de la propiedad de interés dentro del volumen de control, más el flujo de salida de dicha propiedad a través de la superficie de control, menos su flujo entrante a través de esta superficie. Observando que $V \cos\theta$ es la componente de \mathbf{V} normal al elemento de área de la superficie de control y, considerando un diferencial de masa, dm , a través de dicha superficie, es posible expresar la ecuación (i) de forma tal que se facilite la visualización de lo que se calcula

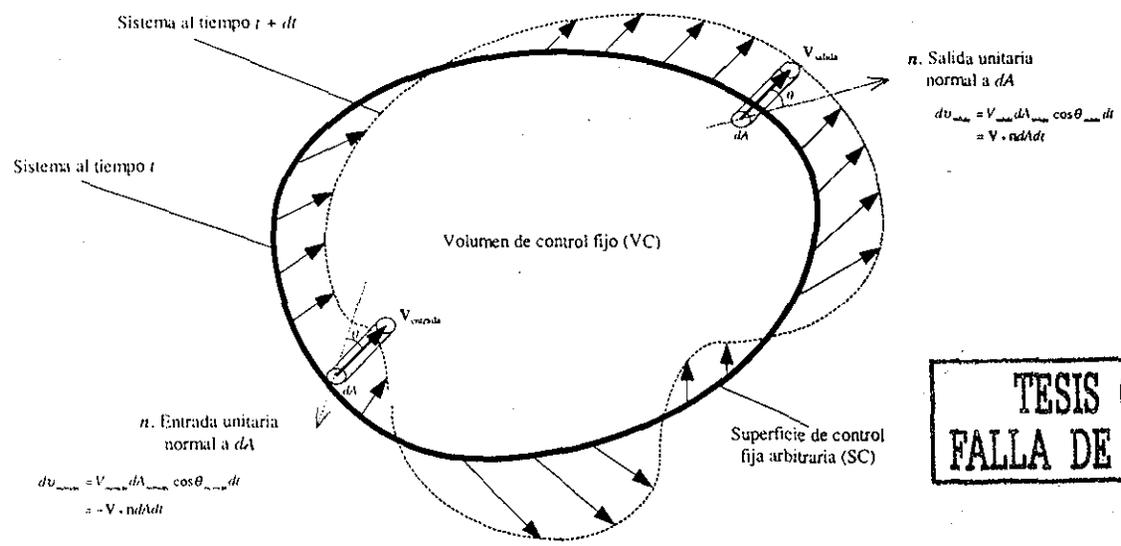


Figura 13. Entradas y salidas a un volumen de control fijo con patrón de flujo arbitrario: un sistema llena el volumen de control al tiempo t y al tiempo t+dt comienza a abandonarlo.

$$\begin{aligned}
 \frac{dB_{sistema}}{dt} &= \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta\rho V_n dA_{salida} - \iint_{SC} \beta\rho V_n dA_{entrada} \\
 &= \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta dm_{salida} - \iint_{SC} \beta dm_{entrada} \quad ; \quad dm = \rho V_n dA
 \end{aligned}
 \tag{ii}$$

Con frecuencia la ecuación (i) se representa en una forma compacta, pero poco útil desde el punto de vista práctico, expresando los flujos de entrada y salida por una integral única que considera a la vez flujos positivos (flujos de salida) y negativos (flujos de entrada). Esta representación se obtiene definiendo un vector unitario normal de salida, n , en cualquier punto sobre la superficie de control, quedando entonces representados los flujos citados por $V \cdot n = V_n$ (flujo de salida) y, $-V_n$ (flujo de entrada). En consecuencia, la ecuación (i) se expresa alternativamente como:

$$\frac{dB_{sistema}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} dv + \iint_{SC} \beta\rho(V \cdot n) dA
 \tag{iii}$$

La dificultad al utilizar esta forma compacta del Teorema de Transporte de Reynolds, radica en que requiere emplear un sistema coordinado adecuado idealmente al volumen de control

elegido. De otra manera, los cálculos son más simples cuando el flujo de salida de la propiedad de interés es sumado y su flujo de entrada restado, de conformidad con las ecuaciones (i) y (ii).

Resumiendo, puede decirse que el Teorema de Transporte de Reynolds establece una relación entre las integrales de volumen y de superficie del volumen de control, y la derivada temporal de un sistema, la cual, a su vez, está relacionada con las leyes de la mecánica clásica; por lo que, si se selecciona una propiedad específica (como la masa o la cantidad de movimiento) y se elimina su derivada en el sistema (igualando las leyes de la mecánica clásica con el Teorema de Transporte de Reynolds), es posible reescribir las leyes de la mecánica clásica en una forma aplicable en modelación estuarina (forma de volumen de control).

ANEXO II

Continuidad de Volumen Promedio

Aplicando el promedio de Reynolds a la ecuación de continuidad de volumen (9), recordando que las variables \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} y sus derivadas se consideran constantes durante el intervalo de tiempo en que se realiza el promedio, se tiene

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}} &= 0 \\
 &= \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial \rho u}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \rho v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial \rho w}{\partial z}} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho u}{\partial x} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho v}{\partial y} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \rho w}{\partial z} dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \rho dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \rho u dt + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T \rho v dt + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \rho w dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{\rho} + \rho') dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{\rho} + \rho') (\bar{u} + u') dt \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{\rho} + \rho') (\bar{v} + v') dt + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{\rho} + \rho') (\bar{w} + w') dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} dt + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' dt \tag{iv} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} u dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} u' dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' \bar{u} dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' u' dt \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} v dt + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} v' dt + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' \bar{v} dt + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' v' dt \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} w dt + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\rho} w' dt + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' \bar{w} dt + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \rho' w' dt \\
 &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w'}{\partial z} \\
 &\quad + \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho}' u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}' w'}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w}}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

que es la ecuación de continuidad de volumen para el flujo estuarino turbulento promedio y, se escribe frecuentemente omitiendo las barras que denotan a éste, al dar por hecho que se tiene el conocimiento de que se refiere a variables promedio.

ANEXO III

Aceleración Longitudinal Local y Advectiva Promedio

Aplicando la idea de Reynolds la aceleración longitudinal local promedio está dada por

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (v)$$

y los términos de aceleración longitudinal advectiva promedio mediante

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \frac{1}{T} \int_0^T u \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) dt \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T dt + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt + \frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \\ \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{1}{T} \int_0^T v \frac{\partial u}{\partial y} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dt \\ &= \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T dt + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{1}{T} \int_0^T v' dt + \frac{1}{T} \int_0^T v' \frac{\partial u'}{\partial y} dt = \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \end{aligned} \quad (vi)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{1}{T} \int_0^T w \frac{\partial u}{\partial z} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{w} + w') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial z} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) dt \\ &= \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T dt + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T w' dt + \frac{1}{T} \int_0^T w' \frac{\partial u'}{\partial z} dt = \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \end{aligned}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

A N E X O I V

Fuerzas de Coriolis, Gradiente de Presión y Viscosas Promedio Para la Componente Longitudinal de la Velocidad

Recordando que las variables \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} y sus derivadas se consideran constantes durante el intervalo de tiempo en que se realiza el promedio y, haciendo extensiva esta consideración a la variable dependiente p , las fuerzas de Coriolis, gradiente de presión y viscosas promedio en dirección x se expresan en la forma siguiente:

$$\bar{f}_v = \frac{1}{T} \int_0^T f v dt = f \frac{1}{T} \int_0^T v dt = f \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{v} + v') dt = f \frac{1}{T} \int_0^T \bar{v} dt + f \frac{1}{T} \int_0^T v' dt = f \bar{v}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} dt + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

(vii)

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \bar{u} dt + \int_0^T u' dt \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \bar{u} dt + \int_0^T u' dt \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \bar{u} dt + \int_0^T u' dt \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

A N E X O V

Transformación del Gradiente Longitudinal de Distribución Vertical de Variación de la Densidad

Partiendo de la aproximación de Boussinesq

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ \rho' &= \rho - \rho_0\end{aligned}\tag{viii}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho'}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial x}\end{aligned}\tag{ix}$$

e integrando desde una profundidad cualquiera, z , hasta la superficie libre, ζ ,

$$\begin{aligned}\int_z^{\zeta} \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz &= \int_z^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho' dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho dz\end{aligned}\tag{x}$$

Por otra parte, introduciendo la aproximación hidrostática

$$\begin{aligned}P &= \rho g \Delta z \\ \rho &= \frac{P}{g \Delta z}\end{aligned}\tag{xi}$$

es posible escribir

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

$$\int_z^{\xi} \rho dz \approx \sum_{i=z}^{\xi} \rho_i \Delta z_i = \sum_{i=z}^{\xi} \frac{P_i}{g \Delta z_i} \Delta z_i = \frac{1}{g} \sum_{i=z}^{\xi} P_i = \frac{1}{g} P$$

$$\int_z^{\xi} \rho dz \approx \frac{1}{g} P$$
(xii)

por lo que, derivando

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\xi} \rho dz \approx \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{g} P = \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial x}$$
(xiii)

y sustituyendo (vi) en (iii)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\xi} \rho' dz = \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial x}$$
(xiv)

<p>TESIS CON FALLA DE ORIGEN</p>

ANEXO VI

Representación Numérica de la Advección de la Componente Longitudinal de la Velocidad en Dirección x

Los estuarios son sistemas acuáticos que presentan fuertes flujos advectivos en direcciones bien definidas. En tal caso, si el flujo es positivo la cara anterior de la celda de cálculo (cara j , para flujo longitudinal) recibirá mucha más influencia del nodo anterior (nodo $j-1$, para flujo longitudinal) que del nodo al que pertenece (nodo j , para flujo longitudinal). Lo contrario ocurrirá si el flujo se dirige en dirección opuesta. En consecuencia, la solución de las ecuaciones de gobierno debe considerar este hecho. Una de las alternativas más convenientes para ello consiste en utilizar esquemas numéricos capaces de identificar la dirección del flujo. Entre los esquemas que presentan esta propiedad, la discretización conocida como "discretización contra el flujo", ha sido ampliamente estudiada y, por ello, se adopta en este trabajo. De acuerdo con ella, la promediación se hace desde donde viene el flujo hacia el centro, en consecuencia, si a una profundidad dada el flujo se dirige hacia la cabeza del estuario ($u > 0$), la distribución de velocidad está definida por el ambiente marino y se utilizan, por tanto, diferencias atrasadas; a la inversa, si la corriente proviene del río ($u < 0$), su valor está definido por el ambiente fluvial y se utilizan, por tanto, diferencias adelantadas. De tal forma su expresión matemática, para el caso de la componente longitudinal de la velocidad en una malla con paso espacial variable (como la mostrada en la Figura 5), es la siguiente:

$$\frac{u_{j,k,l}^{m+1} - u_{j,k,l}^m}{T} + \frac{u_{j,k,l}^m - |u_{j,k,l}^m|}{2} \frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} + \frac{u_{j,k,l}^m + |u_{j,k,l}^m|}{2} \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j-1,k,l}^m}{h_{x_j}} = 0 \quad (\text{xv})$$

siendo estable si se cumple la condición

$$0 \leq \frac{T|u|}{h_{\min}} \leq 1 \quad (\text{xvi})$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

ANEXO VII

Representación Numérica de la Difusión de la Componente Longitudinal de la Velocidad en Dirección x

De conformidad con el Teorema de Taylor es posible escribir

$$\begin{aligned} u_{j+1,k,l}^m &= u_{j,k,l}^m + h_{x_j} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{h_{x_j}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + O(h_{x_j}^3) \\ u_{j-1,k,l}^m &= u_{j,k,l}^m - h_{x_{j-1}} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{h_{x_{j-1}}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} - O(h_{x_{j-1}}^3) \end{aligned} \quad (\text{xvii})$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} &= \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{h_{x_j}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{O(h_{x_j}^3)}{h_{x_j}} \\ \frac{u_{j-1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} &= -\frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{h_{x_{j-1}}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} + \frac{O(h_{x_{j-1}}^3)}{h_{x_{j-1}}} \end{aligned} \quad (\text{xviii})$$

Sumando las ecuaciones (xviii) se tiene

$$\frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} + \frac{u_{j-1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} = \frac{h_{x_j} + h_{x_{j-1}}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} \quad (\text{xix})$$

donde los términos de tercer orden y de orden superior se han despreciado y, en consecuencia, es posible escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} &= \frac{1}{h_{x_j} + h_{x_{j-1}}} \left(\frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} + \frac{u_{j-1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} &= \frac{1}{h_{x_j} - h_{x_{j-1}}} \left(\frac{u_{j+1,k,l}^m - u_{j,k,l}^m}{h_{x_j}} - \frac{u_{j,k,l}^m - u_{j-1,k,l}^m}{h_{x_{j-1}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{xx})$$

siendo

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

$$h_{xn} = 0.5(h_{x_j} + h_{x_{j-1}}) \quad (\text{xxi})$$

Debe observarse aquí que la ecuación (xx) es el análogo, para paso espacial variable, del esquema totalmente implícito ampliamente conocido, que se reproduce a continuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{j,k,l}^m}{\partial x} = \frac{u_{j-1,k,l}^m - 2u_{j,k,l}^m + u_{j+1,k,l}^m}{h_x^2} \quad (\text{xxii})$$

ANEXO VIII

Representación Numérica del Gradiente Longitudinal de Presión Hidrostática

La aproximación del gradiente longitudinal de presión hidrostática requiere conocer la distribución vertical de la densidad. Una vez que ésta se conoce, la presión en el fondo de la primer capa en el sitio en que se calcula la velocidad longitudinal, u , puede estimarse como

$$P_{j,k,2}^m = \rho_{j,k,2}^m g \frac{h_{z_2}}{2} \quad (\text{xxiii})$$

y en la segunda capa

$$P_{j,k,3}^m = P_{j,k,2}^m + g \left(\rho_{j,k,2}^m \frac{h_{z_2}}{2} + \rho_{j,k,3}^m \frac{h_{z_3}}{2} \right) \quad (\text{xxiv})$$

generalizando, en la capa $l+1$ se tiene

$$P_{j,k,l}^m = P_{j,k,l-1}^m + g \left(\rho_{j,k,l-1}^m \frac{h_{z_{l-1}}}{2} + \rho_{j,k,l}^m \frac{h_{z_l}}{2} \right) \quad (\text{xxv})$$

y empleando esta ecuación en cada uno de los puntos de la malla, es posible calcular la presión hidrostática en todos ellos (v gr. $P_{j-1,k,l}$, $P_{j,k+1,l}$, $P_{j+1,k+1,l}$, $P_{j+1,k,l}$, etc.), por ejemplo, para el punto de malla anterior ($j=j-1$) se tiene

$$P_{j-1,k,l}^m = P_{j-1,k,l-1}^m + g \left(\rho_{j-1,k,l-1}^m \frac{h_{z_{l-1}}}{2} + \rho_{j-1,k,l}^m \frac{h_{z_l}}{2} \right) \quad (\text{xxvi})$$

Debe observarse aquí, que en la representación del gradiente longitudinal de presión hidrostática (ecuación 108) se ha decidido utilizar diferencias finitas atrasadas, con el fin de mantener congruencia con la representación del gradiente longitudinal de elevación de la superficie libre.

Esto es,

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^m = \frac{1}{\rho_0} \frac{P_{j,k,l}^m - P_{j-1,k,l}^m}{h_{x,j-1}} = v \rho h$$

A N E X O I X

Representación Numérica de la Componente Transversal de la Velocidad Asociada a la Fuerza de Coriolis

La ecuación para la componente longitudinal de la velocidad se estima en el punto de malla u , lo que significa que la componente v , asociada al término de Coriolis, debe tomarse como el promedio de los cuatro puntos que rodean al punto de malla citado, esto es

$$v^{u,m} = 0.25(v_{j,k-1,l}^m + v_{j,k,l}^m + v_{j-1,k,l}^m + v_{j-1,k-1,l}^m) \quad (\text{xxvii})$$

A N E X O X

Uso de Modelos Hidrodinámicos en Sistemas Estuarinos

Modelos en Diferencia Finita y en Elemento Finito

A la fecha, no existe un fundamento suficientemente sólido que permita establecer la superioridad de los modelos desarrollados en elemento finito sobre aquellos construidos con base en diferencias finitas. La elección del tipo de modelo está más bien determinada por las características propias del problema que se desea resolver, y por la familiaridad y experiencia del modelador con uno u otro tipo de modelo. Al respecto, puede decirse que los modelos en elemento finito presentan la conveniencia de adaptarse bastante bien a las fronteras físicas del estuario; sin embargo, al hacerlo disminuyen considerablemente la eficiencia de cómputo. Por otra parte, los modelos en diferencias finitas no se ajustan con tal precisión a las fronteras físicas del sistema pero, a cambio, resultan ser mucho más económicos desde el punto de vista computacional.

A la fecha, los modelos más utilizados en el campo de la ingeniería ambiental se caracterizan por emplear técnicas de diferencias finitas.

Modelos Unidimensionales

En primer término debe señalarse que la elección de la dimensionalidad del modelo hidrodinámico depende, principalmente, de las características físicas del sistema y de la naturaleza del problema que se pretende resolver. Con esta perspectiva, se aconseja el uso de modelos unidimensionales en canales angostos y someros. Debido a que en este tipo de modelos las ecuaciones de gobierno se integran tanto en dirección vertical como lateral, es conveniente restringir su aplicación a casos en los que se presuma una variación dominante de la velocidad y el nivel en dirección longitudinal.

Los modelos unidimensionales se caracterizan por reproducir variaciones de nivel con gran fidelidad, y variaciones de velocidad con mayor dificultad; por tal causa, se recomienda emplearlos cuando el objetivo fundamental de la simulación es la estimación de la elevación de la superficie libre en el ciclo de marea, o cuando se requiere tan sólo una aproximación del patrón de distribución longitudinal de velocidad.

En la solución de las ecuaciones de gobierno ellos utilizan, para el caso lineal, tanto métodos implícitos como explícitos presentando, con frecuencia, las ventajas de estabilidad incondicional y velocidad de cómputo; en consecuencia, son útiles para obtener una rápida aproximación del comportamiento del sistema.

En muchos casos, las mediciones de campo son escasas y no permiten la aplicación de modelos sofisticados; entonces, los modelos unidimensionales son extremadamente útiles para proporcionar una burda aproximación de la conducta del sistema. En el contexto educativo destaca también la utilidad de este tipo de modelos pues, debido a su relativa simplicidad, pueden utilizarse como medio para introducir los principios básicos de la modelación estuarina.

En ingeniería ambiental, los modelos unidimensionales se han utilizado ampliamente para dirigir modelos de transporte asociados a la solución de problemas de intrusión salina.

Modelos Bidimensionales Integrados en Dirección Vertical

La aplicación de los modelos bidimensionales dependerá, nuevamente, de las características físicas del sistema y de la naturaleza del problema que se pretende resolver pero, además, de la dirección en la que se realice la integración de las ecuaciones de gobierno. En este sentido, los modelos integrados en dirección vertical son de utilidad en regiones estuarinas de gran extensión horizontal y relativamente poca profundidad como, por ejemplo, las bocas de muchos estuarios mexicanos.

Al igual que los modelos unidimensionales, reproducen adecuadamente las variaciones de nivel con cierta facilidad, pero para obtener una predicción confiable del patrón de distribución de la velocidad horizontal requieren un tedioso ajuste de los coeficientes de rugosidad. Este factor debe contemplarse antes de intentar realizar cualquier simulación.

Generalmente, este tipo de modelos incorpora la aceleración advectiva y la fuerza de Coriolis e incluye con simplicidad el esfuerzo del viento; por lo que su uso debe fomentarse cuando se supone un efecto importante de dichos términos en el comportamiento del sistema.

Nuevamente, los métodos de solución de ecuaciones que aquí se emplean son tanto implícitos como explícitos; siendo común el uso de métodos de dirección alternante que, por su superioridad sobre los métodos implícitos convencionales al permitir la elección del paso de tiempo de integración en función de consideraciones prácticas y no con base en restricciones

de estabilidad, aumentan la eficiencia de cómputo soportando pasos de tiempo relativamente grandes (uno a cinco minutos).

Los modelos bidimensionales integrados en dirección vertical no muestran como la marea genera patrones de circulación interna ni la forma en la que el caudal de agua dulce se conduce dentro del sistema. Como el campo de flujo calculado es integrado en la vertical, los mecanismos de transporte asociados con el patrón de circulación estuarino bidimensional clásico no se reproducen, sino que ésta mezcla se introduce vía asignación de coeficientes de dispersión lateral y longitudinal que dependen de las características del flujo. Para hallar y probar tales coeficientes se requieren cuidadosos procedimientos de calibración y verificación.

En el campo de la calidad del agua, este tipo de modelos se han empleado exitosamente en los casos siguientes: i) cálculos intramarea, tomando en cuenta explícitamente los flujos generados por el efecto de la marea; ii) cálculos intermarea, considerando sólo flujos netos; y iii) cálculos en estado estable, a partir del flujo estacionario neto. Los cálculos intramarea han mostrado ser apropiados para describir con detalle la respuesta del estuario a descargas de masa que presentan gran variación temporal (v gr. derrames accidentales o escurrimientos de tormentas). Por otra parte, los cálculos intermarea se han aplicado en escalas temporales estacionales, obteniendo la distribución del flujo neto a partir de aquel generado por el modelo hidrodinámico intramarea promediado sobre todo el ciclo de marea - este promedio puede efectuarse debido a que el comportamiento hidrodinámico no se encuentra acoplado a los parámetros de calidad del agua -.

En particular, se supone que la distribución de temperatura y salinidad no afectan el campo de flujo integrado en la vertical, por lo que el cálculo hidrodinámico alcanza un estado estable periódico con rapidez, independientemente de la distribución de temperatura y salinidad. Comúnmente el campo de flujo neto se calcula desde cada dos semanas hasta un mes y, a continuación, se incorpora a los cálculos convencionales de calidad del agua. Con frecuencia, los coeficientes de dispersión se ajustan para reproducir las distribuciones de salinidad observadas.

Modelos Bidimensionales Integrados en Dirección Lateral

Los modelos integrados en dirección lateral resultan ser útiles en regiones estuarinas donde la principal variación del flujo ocurre en el plano vertical. En ellos la aproximación usual consiste

en integrar lateralmente las ecuaciones de gobierno manteniendo la componente vertical de la aceleración advectiva. Aquí, el movimiento es generado por la variación del gradiente de presión debida a la estratificación de la salinidad. Aún una ligera estratificación, como la característica de los estuarios parcialmente mezclados, es suficiente para inducir un flujo neto hacia la cabeza del estuario en el agua de fondo, y otro hacia la boca del mismo en la superficie. En consecuencia, este tipo de modelos es útil en la determinación de los campos de velocidad generados por tales flujos y la velocidad vertical resultante del principio de continuidad.

En comparación con los modelos integrados en dirección vertical, el número de pasos de integración que aquí se requiere es decenas a cientos de veces mayor, debido a que los primeros son independientes de la salinidad, mientras que aquellos integrados en dirección lateral son dependientes directamente de la distribuciones tanto de este parámetro como de la temperatura, quienes poseen inherentemente grandes escalas temporales características. Por tanto, la demanda de cómputo de este tipo de modelos tiende a ser importante, particularmente en cálculos intramarea, debido a que el tiempo necesario para alcanzar una condición real - ya sea estado estable; o bien, el tiempo necesario para reducir los efectos generados por la condición inicial especificada - depende de la escala temporal característica del transporte longitudinal de sal, que es del orden de un mes. En adición, es común que el paso de integración temporal sea necesariamente pequeño - aproximadamente de uno a dos minutos - como resultado de las consideraciones de estabilidad de la expresión en diferencias finitas de las ecuaciones de gobierno. Estas características dificultan el uso de los modelos integrados en dirección lateral en simulaciones de larga duración.

Antes de intentar realizar cualquier simulación, debe tenerse presente que las indeterminaciones críticas en los modelos bidimensionales integrados en dirección lateral, son la viscosidad turbulenta vertical de la cantidad de movimiento, la difusión vertical turbulenta de la sal y, si se encuentra involucrada una capa de fondo, los esfuerzos cortantes en éste.

La aplicación de este tipo de modelos en el campo de la calidad del agua, se ha dirigido al estudio de problemas en los que la variación vertical de la velocidad longitudinal es importante; como ocurre, por ejemplo, en problemas asociados con la distribución espacial de sólidos suspendidos.

Modelos Tridimensionales

Los modelos hidrodinámicos tridimensionales combinan las características de los dos tipos de modelos descritos anteriormente. Ellos calculan intramarealmente las variaciones laterales y verticales de la circulación horizontal y vertical en cada sección transversal, a lo largo de todo el estuario. Asimismo, calculan también la distribución de temperatura y salinidad, debido a que estas afectan en forma importante los detalles de la distribución vertical del campo de velocidad. Los parámetros de cálculo en este tipo de modelos son los mismos que los requeridos por los modelos bidimensionales y, en principio, son capaces de describir tanto la circulación estuarina tridimensional, como la distribución de temperatura y salinidad en el estuario.

Una de las mayores dificultades para el uso de los modelos tridimensionales, la representa el gran esfuerzo de cómputo. La mayor parte de ellos son corridos en supercomputadoras y, como consecuencia del limitado acceso a dicho hardware, se reduce considerablemente su aplicación en la solución de problemas de calidad del agua. En consecuencia, como antes se ha mencionado, el estudio reciente de los modelos hidrodinámicos tridimensionales aplicados a la ingeniería ambiental, se ha enfocado a mejorar su eficiencia computacional empleando, principalmente, coordenadas sigma, mallas ajustadas a las fronteras y cerrado de las ecuaciones hidrodinámicas por turbulencia. Los modelos que emplean el cerrado por turbulencia presentan la ventaja de permitir el cálculo independiente del coeficiente de difusión, particularmente en la dirección vertical. Estas mejoras aún se encuentran en etapa de investigación y desarrollo, por lo que no se han aplicado al manejo de la calidad del agua en sistemas reales.

ANEXO XI

Aproximación Unidimensional a Casos Experimentales

Caso 1

$$\begin{aligned}
 r &= 3.48 \times 10^{-4} \text{ }^a \\
 g &= 9.8 \text{ m/s}^2 \\
 K_v &= 0.0 \\
 w &= 0.0 \text{ m/s} \\
 W_x &= 0.0 \text{ m/s} \\
 H &= 11.0 \text{ m} \\
 i_1 &= 4.31 \times 10^{-5} \text{ }^b \\
 \\
 u &= 365 \text{ cm/s}^c \quad (\text{Ecuación 94})
 \end{aligned}$$

^a Mínima fricción en canales desde un punto de vista práctico (corresponde a un número de Manning aproximadamente igual a 0.01); tomada aquí como coeficiente límite para establecer la ausencia de fricción.

^b Pendiente promedio (pendiente inicial = $0.5 \text{ m} / 5800 \text{ m} = 8.62 \times 10^{-5}$, pendiente final = $0.0 \text{ m} / 5800 \text{ m} = 0.0$).

^c Una aproximación a la velocidad en estado estacionario es la que corresponde a la pendiente promedio ^b.

Caso 2

$$\begin{aligned}
 r &= 3.3 \times 10^{-3} \\
 g &= 9.8 \text{ m/s}^2 \\
 K_v &= 0.0 \\
 w &= 0.0 \text{ m/s} \\
 W_x &= 0.0 \text{ m/s} \\
 H &= 11.0 \text{ m} \\
 i_1 &= i) 0.0^d \quad ; \quad ii) 4.31 \times 10^{-5} \text{ }^e \\
 \\
 u &= 0.0 \text{ cm/s} \quad ; \quad i_1 = 0.0 \quad (\text{Ecuación 94}) \\
 \\
 u_{m\acute{a}x} &= 116 \text{ cm/s}^f \quad ; \quad i_1 = 4.31 \times 10^{-5} \quad (\text{Ecuación 94})
 \end{aligned}$$

^d Pendiente en estado estacionario.

^e Pendiente promedio (pendiente inicial = $0.5 \text{ m} / 5800 \text{ m} = 8.62 \times 10^{-5}$, pendiente final = $0.0 \text{ m} / 5800 \text{ m} = 0.0$).

^f Una aproximación a la máxima velocidad alcanzada es la que corresponde a la pendiente promedio.

Caso 3

$$r = 3.3 \times 10^{-3}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$K_v = \text{i) } 1.0 \times 10^{-7}; \text{ ii) } 5.0 \times 10^{-7}; \text{ iii) } 1.0 \times 10^{-6}$$

$$W = 5.0 \text{ m/s}$$

$$W_x = 5.0 \text{ m/s}$$

$$H = 11.0 \text{ m}$$

$$u = 3.8 \text{ cm/s} ; K_v = 1.0 \times 10^{-7} \quad (\text{Ecuaciones 94 y 95})$$

$$u = 8.5 \text{ cm/s} ; K_v = 5.0 \times 10^{-7} \quad (\text{Ecuaciones 94 y 95})$$

$$u = 12.0 \text{ cm/s} ; K_v = 1.0 \times 10^{-6} \quad (\text{Ecuaciones 94 y 95})$$

Caso 4

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$H = 11.0 \text{ m}$$

$$T = 43,200 \text{ s}$$

$$t = \text{i) } t_1 = 0 \text{ s} ; \text{ ii) } t_2 = 21,600 \text{ s}$$

$$x = 0.0 \text{ m}$$

$$u_1 = u_{\text{máx}} = 47.2 \text{ cm/s}^{\text{e}} \quad (\text{Ecuación 99})$$

$$u_2 = u_{\text{mín}} = -47.2 \text{ cm/s}^{\text{e}} \quad (\text{Ecuación 99})$$

^e Resultados para el inicio del canal ($x=0 \text{ m}$); su magnitud en el centro ($x=2900 \text{ m}$) y al final del mismo ($x=5800 \text{ m}$) tiene igual valor ($u_{\text{máx}}=47.2 \text{ cm/s}$; $u_{\text{mín}}=-47.2 \text{ cm/s}$) pero, con un desfaseamiento de 279.17 s y 558.34 s, respectivamente.

Caso 5

$$r = 3.3 \times 10^{-3}$$

$$C_b = 47.2 \text{ cm/s}^{\text{h}}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$H = 11.0 \text{ m}$$

$$T = 43,200 \text{ s}$$

$$x = 0 \text{ m}$$

$$t = \text{ i) } t_1 = 40,871 \text{ s} \quad ; \quad \text{ ii) } t_2 = 62,471 \text{ s}$$

$$u_1 = u_{\text{máx}} = 39.9 \text{ cm/s} \quad ; \quad u_2 = u_{\text{mín}} = -39.9 \text{ cm/s} \quad (\text{Ecuaciones 100 y 101})^i$$

$$x = 2,900 \text{ m}$$

$$t = \text{ i) } t_1 = 41,055 \text{ s} \quad ; \quad \text{ ii) } t_2 = 62,655 \text{ s}$$

$$u_1 = u_{\text{máx}} = 39.3 \text{ cm/s} \quad ; \quad u_2 = u_{\text{mín}} = -39.3 \text{ cm/s} \quad (\text{Ecuaciones 100 y 101})^i$$

$$x = 5,800 \text{ m}$$

$$t = \text{ i) } t_1 = 41,364 \text{ s} \quad ; \quad \text{ ii) } t_2 = 62,964 \text{ s}$$

$$u_1 = u_{\text{máx}} = 38.6 \text{ cm/s} \quad ; \quad u_2 = u_{\text{mín}} = -38.6 \text{ cm/s} \quad (\text{Ecuaciones 100 y 101})^i$$

^h Valor tomado del cálculo en ausencia de fricción (Caso 4).

ⁱ $C/C_0 = 0.9$

Caso 6^l

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$H = 11.0 \text{ m}$$

$$N_z = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$h_1 = 3.0 \text{ m}$$

$$z = \text{ i) } z_1 = 1.5 \text{ m}^k \quad ; \quad \text{ ii) } z_2 = 7.0 \text{ m}^k$$

$$S_1 = 32.25$$

$$S_2 = 36.25$$

$$i_1 = -9.85 \times 10^{-6}$$

$$i_2 = 1.36 \times 10^{-4}$$

$$u_1 = 2.2 \text{ cm/s} \quad (\text{Ecuaciones 60, 97 y 98})$$

$$u_2 = 8.1 \text{ cm/s} \quad (\text{Ecuaciones 60, 97 y 98})$$

^l Marea alta.

^k Las profundidades de cálculo ($z_1 = 1.5 \text{ m}$, $z_2 = 7.0 \text{ m}$) corresponden a aquellas donde se presenta la mayor diferencia entre la aproximación unidimensional y los resultados experimentales.

^l Pendientes promedio en marea alta (obtenidas de resultados experimentales en estado estacionario).

Caso 7

No se encontraron expresiones analíticas para aproximar su comportamiento.

ANEXO XII

Onda Creciente Monoclinal en Flujo Uniformemente Progresivo

La onda creciente monoclinal es el caso típico de la fluctuación por creciente en canales naturales. Se caracteriza por ser traslacional y tener configuración estable. Su viaje a lo largo del canal ocurre a velocidad constante, V_w . Matemáticamente, dicha velocidad se estima utilizando la expresión (Chow, 1994):

$$V_w = \frac{u_1 A_1 - u_2 A_2}{A_1 - A_2} \quad (\text{xxviii})$$

donde las variables u y A corresponden, respectivamente, a la velocidad del flujo y el área de la sección transversal del canal; los subíndices se refieren a secciones aguas arriba (subíndice 1) o abajo (subíndice 2) del sitio donde la onda es generada.

Los dos primeros casos experimentales presentados en este trabajo son forzados por una elevación súbita del nivel del mar, que permanece constante semejando una creciente. En el primero de ellos el flujo es uniforme, por lo que la velocidad de la onda creciente monoclinal puede estimarse aplicando la ecuación (xxviii).

Los resultados de la simulación numérica y los datos de geometría del canal para el primer caso experimental describen un canal rectangular con 900 m de ancho, donde la profundidad / velocidad del flujo aguas arriba y abajo del sitio en que la onda es generada tiene una magnitud igual a 11.5 m / 0.469 m/s y 11.0 m / 0.0 m/s, respectivamente. Introduciendo esta información a la ecuación (xxviii), se tiene que la velocidad de la onda de creciente monoclinal, V_w , es igual a 10.79 m/s.