



1 01181

**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN INGENIERÍA

TESIS

**“MODELADO NUMÉRICO DE LA FRACTURA
EN EL CONCRETO”**

PRESENTADA POR

LUIS ENRIQUE FERNÁNDEZ BAQUEIRO

PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)**

DIRIGIDA POR

DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Cd. Universitaria, diciembre 2002



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposa, Sary
(Gen. 2, 24; Ont. 4, 9; Tob. 8, 7)

A mis padres, Luis y Elia
(Ex. 20, 12; Ef. 6, 1-4)

A Dios
(Sal. 23; Jn. 8, 32)

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Envío a la Dirección General de Bibliotecas
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso
el contenido de mi trabajo receptor
NOMBRE: Luis Enrique
Fernández Bagoero
FECHA: 21 de nov. de 2002
FIRMA: [Firma]

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo del presente trabajo doctoral han participado mucha gente e instituciones, quienes con su apoyo han contribuido a alcanzar esta meta.

Primeramente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme la beca que permitió realizar estos estudios de doctorado.

Al Instituto Mexicano del Petróleo (IMP) agradezco el apoyo económico brindado a través del proyecto FIES "Desarrollo de modelos numéricos y herramientas de software para evaluar el proceso de fractura en estructuras de acero y concreto sometidas a cargas estáticas y/o cíclicas aplicando la Mecánica de Fractura", cuyos responsables son: Dr. Gustavo Ayala Milián y M. C. Manuel Cervantes.

Un especial reconocimiento a dos instituciones de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) que me permitieron realizar mis estudios de posgrado:

1. Instituto de Ingeniería (II), que me brindó el ambiente y la infraestructura material y humana necesaria para el desarrollo de mi tesis.
2. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (DEPFI), en cuyas aulas los profesores compartieron su conocimiento conmigo.

Un muy especial agradecimiento a mi tutor académico: Dr. Gustavo Ayala Milián, quien fue más allá de sus responsabilidades de director de tesis compartiendo conmigo su amistad y brindándome su apoyo a lo largo de estos años de trabajo conjunto. Los motivos por los cuáles manifiesto mi agradecimiento son muchos, por lo que simplemente escribo: *muchas gracias*.

A los miembros de mi Comité Doctoral: Dr. Ismael Herrera Revilla (UNAM), Dr. Francisco Sánchez Sesma (UNAM), Dr. Javier Oliver Olivella (UPC-Barcelona, España), Dr. Luis Hernández Gómez (IPN), Dr. Javier Avilés López (IMTA) y Dr. Arturo Tena Colunga (UAM), mi agradecimiento por su paciente y rápida revisión del documento y por sus atinados comentarios.

Deseo resaltar la participación del Dr. Javier Oliver; sus discusiones e indicaciones al presente trabajo fueron claves y permitieron elevar el nivel del mismo. En particular quiero agradecer el que me haya permitido realizar una estancia con él en la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) en Barcelona, España y el que haya aceptado venir a México para interactuar con nosotros. Adicionalmente, quiero agradecer al Dr. Eugenio Oñate, quien dirige el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), por brindarme el apoyo económico necesario para la realización de mi estancia en España.

Quiero externar mi agradecimiento a todos los profesores y amigos que han participado en mi formación como ingeniero e investigador: a mis profesores y amigos de licenciatura

en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán, con especial recuerdo a los del área de estructuras; a mis profesores de posgrado en el II y en la DEPFI; y a mis profesores y amigos de las estancias que hice en la Universidad de British Columbia (Vancouver, Canadá) y en la UPC.

A lo largo de estos años que he estado en la UNAM he podido disfrutar de la amistad de mucha gente. No escribo los nombres por miedo a omitir alguno, pero a todos ustedes muchas gracias. En particular a mi muy apreciada Comunidad Yucateca, gracias.

Finalmente, quiero agradecer a toda la gente que ha estado a mi alrededor apoyandome. Aquí en México a la comunidad de la Parroquia de la Medalla Milagrosa. En Mérida a mis amigos y familiares (Fernández, Baqueiro, Mendoza y Mézquita), en quienes he tenido un gran apoyo y me han dado fortaleza; con un cariño muy especial a mis hermanas Nelly y Elia y a mis padres Elia y Luis. Termino estos agradecimientos manifestando mi amor y gratitud a *m d, l& p w* Sary, quien con su apoyo, cariño, amor y paciencia me ha acompañado en estos años de mutuo crecimiento, alcanzando una nueva meta juntos.

RESUMEN

En esta tesis doctoral se investiga el problema de modelación de Discontinuidades Interiores con el Método de los Elementos Finitos. Los modelos emplean modos incompatibles para simular la presencia de discontinuidades y no requieren remallar durante la propagación de la discontinuidad. En este trabajo se estudian tres tipos de aproximación de discontinuidades: Discreta, Continua con Discontinuidades Fuertes y Continua con Discontinuidades Débiles. La Aproximación Discreta está caracterizada por el empleo de relaciones constitutivas de tipo discreto: salto de los desplazamientos y tracciones. La Aproximación Continua está caracterizada por el empleo de relaciones constitutivas de tipo continuo: deformaciones y esfuerzos.

El trabajo se inicia presentando algunos conceptos básicos de las Teorías de Falla y los antecedentes relativos a las herramientas computacionales para simular numéricamente discontinuidades en sólidos. Se desarrolla la Formulación Teórica del problema, consistente en la Formulación Variacional y la definición de la Cinemática, para cada tipo de aproximación; esta formulación proporciona las ecuaciones necesarias para su implantación numérica. Se desarrolla un modelo de Daño Isotrópico para la Aproximación Discreta y un modelo de Daño Anisotrópico para la Aproximación Continua, cuya equivalencia está garantizada al satisfacer las ecuaciones que relacionan sus parámetros; estas ecuaciones son obtenidas a través de un Análisis Energético de los modelos.

Las ecuaciones necesarias para la implantación numérica de estas aproximaciones se obtienen al emplear un método nombrado "Imposición Fuerte del Equilibrio en la Discontinuidad"; el método se aplica a las Aproximaciones Discreta y Continua. Los desarrollos abarcan elementos finitos planos que aproximan el salto de los desplazamientos como constante dentro de los elementos. La evaluación de la ecuación constitutiva se realiza por medio de una formulación total de los desplazamientos. Se identifica y evalúa cualitativamente el problema de Deformaciones Falsas, las cuales producen errores en la aproximación. Se propone y desarrolla un algoritmo modificado de propagación de discontinuidades, el cual permite disminuir los efectos de las Deformaciones Falsas.

Este trabajo se finaliza con la simulación numérica del proceso de agrietamiento de elementos de concreto simple. Se presentan cuatro ejemplos: dos que fallan en Modo I y dos que fallan en Modo Mixto. Del análisis de los resultados se observa que la simulación numérica reproduce satisfactoriamente las observaciones experimentales.

Se concluye que este tipo de desarrollos teóricos y las correspondientes herramientas computacionales son de gran utilidad para la ingeniería estructural al permitir reproducir todas las etapas del comportamiento de las estructuras y de los elementos en los que se presentan grietas aisladas (daño localizado). Este tipo de herramientas tiene aplicaciones en el análisis, diseño y evaluación de elementos y estructuras, tanto para la investigación como

para la práctica profesional. Esto se debe a que éstas proporcionan información valiosa, por ejemplo: cargas de agrietamiento y máxima, energía necesaria para producir la falla y modo de fallar, entre otras.

ABSTRACT

In this dissertation the problem of modeling Embedded Discontinuities with the Finite Element Method is investigated. The models use incompatible modes to simulate the presence of discontinuities and remeshing is not required during the discontinuity propagation process. In this study three types of discontinuity approximations are analyzed: Discrete, Continuous with Strong Discontinuities and Continuous with Weak Discontinuities. The Discrete Approximation is characterized by the use of a discrete type of constitutive relationships: displacement jumps and tractions. The Continuous Approximation is characterized by the use of a continuum type of constitutive relationships: strains and stresses.

In the first chapters of this work, some basic concepts of Failure Theories and the background concepts of the computational tools for the numerical simulation of discontinuities in solids are presented. The Theoretical Formulation of the problem, constituted by the Variational Formulation and the definition of the Kinematics, is developed for each type of approximation. This formulation gives the necessary equations for its numerical implementation. An Isotropic Damage model for the Discrete Approximation and an Anisotropic Damage model for the Continuous Approximation are developed. The equivalence between these two models is achieved by the fulfillment satisfaction of the equations which relate their parameters; these equations are obtained by an Energetic Analysis of the models.

The equations for the numerical implementation are obtained by the application of a method called "Strong Enforcement of the Equilibrium at the Discontinuity"; this method is applied to the Discrete and Continuous Approximation. The developments of this work cover plane finite elements which approximate as a constant the displacement jump within the finite element. The evaluation of the constitutive equation is carried out by means of a total formulation of the displacements. The Spurious Strains problem is identified and evaluated qualitatively; these strains induce errors in the approximation. A modified algorithm for the discontinuity propagation (tracking) is developed for the minimization of the Spurious Strains.

This work finishes with the numerical simulation of the cracking process in plain concrete elements. Four examples are presented: two of them fail in Mode I and the other two fail in Mixed Mode. It is observed from the results analysis that the numerical simulations satisfactorily reproduce the experimental data.

It is concluded that this type of theoretical developments and the corresponding computational tools can be very useful to structural engineering because they allow the prediction of the behavior ranges in structures and elements with single cracks (localized damage). These tools can be used for research purposes and professional practice in the

analysis, design and evaluation of elements and structures. This fact is due to the valuable information that is given by them, for example: cracking and maximum loads, energy needed to produce failure and mode of failure, among others.

Índice General

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Antecedentes	2
1.3	Objetivos	4
1.4	Contenido	5
2	TEORÍAS DE FALLA Y EL CONCRETO	7
2.1	Mecánica de la Fractura	8
2.1.1	Introducción a la Mecánica de la Fractura	8
2.1.2	Clasificación del Proceso de Fractura según el Material	10
2.2	Mecánica de la Fractura No Lineal	12
2.2.1	Generalidades	12
2.2.2	Modelos Cohesivos	15
2.3	Teorías de Continuo	16
2.3.1	Generalidades y Análisis de Bifurcación	16
2.3.2	Limitadores de la localización	18
2.4	Propiedades mecánicas del concreto	20
2.4.1	Generalidades	20
2.4.2	Fractura del concreto	20
3	SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA FALLA	23
3.1	Modelo de Grieta Discreta	24
3.2	Modelo de Grieta Distribuida	25
3.3	Discontinuidades Interiores	28
3.4	Métodos Libres de Malla	32
4	FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE DISCONTINUIDADES INTERIORES	34
4.1	Aproximación Discreta	35

4.2	Aproximación Continua. Discontinuidades Fuertes	39
4.3	Aproximación Continua. Discontinuidades Débiles	43
5	MODELOS CONSTITUTIVOS	47
5.1	Cinemática de medios con discontinuidades	48
5.1.1	Discontinuidades Fuertes	48
5.1.2	Discontinuidades Débiles	49
5.2	Análisis de la discontinuidad en las deformaciones	50
5.3	Modelos de Daño. Generalidades	52
5.4	Modelos de Daño Isotrópico para Discontinuidades Interiores	55
5.4.1	Aproximación Discreta	55
5.4.2	Aproximación Continua	59
5.5	Modelos de Daño Anisotrópico para la Aproximación Continua	63
5.6	Análisis Energético de las Aproximaciones	70
5.6.1	Energía de Fractura	70
5.6.2	Equivalencias entre variables	71
6	IMPLANTACIÓN EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	76
6.1	Definición de campos y ecuaciones	77
6.1.1	Aproximación Discreta	77
6.1.2	Discontinuidades Débiles	79
6.1.3	Discontinuidades Fuertes	80
6.1.4	Ejemplo ilustrativo de las distintas aproximaciones	80
6.2	Definición de los términos en el MEF	82
6.3	Deducción de las ecuaciones del MEF	85
6.3.1	Método Mixto de Deformaciones Mejoradas	85
6.3.2	Imposición Fuerte del Equilibrio en la Discontinuidad (IFED)	89
6.3.3	IFED. Aproximación Discreta	90
6.3.4	IFED. Aproximación Continua	93
7	ASPECTOS ALGORÍTMICOS Y COMPUTACIONALES	96
7.1	Solución Global	96
7.2	Solución Local	99
7.3	Deformaciones Falsas	102
7.3.1	Introducción	102
7.3.2	Análisis y Evaluación	103
7.3.3	Observaciones finales	108
7.4	Algoritmo de Propagación Modificado	109

7.4.1	Descripción	109
7.4.2	Ejemplo ilustrativo	111
8	SIMULACIÓN NUMÉRICA: EJEMPLOS	114
8.1	Objetividad con respecto a la malla	115
8.2	Placa entallada sometida a tensión	118
8.3	Viga de cuatro puntos con modo I de falla	121
8.4	Viga de tres puntos con modo mixto de falla	123
8.5	Viga de cuatro puntos con modo mixto de falla	125
8.6	Observaciones finales	128
	CONCLUSIONES	129
A	NOTACIÓN Y SIMBOLOGÍA	133
A.1	Notación Compacta e Indicial	133
A.2	Simbología	135
B	MODELO ANISOTRÓPICO. MATRICES CONSTITUTIVAS	140
C	INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA AL CAPÍTULO 6	141
	BIBLIOGRAFÍA	146

Índice de Figuras

2.1	Distribución de esfuerzos en una placa elástica con una grieta y sistema de referencia	9
2.2	Modos Fundamentales de Deformación	10
2.3	Tipos de respuesta en los materiales	11
2.4	Tipos de Fracturamiento. Adaptado de Bazant (1985)	12
2.5	Comportamiento a tensión del concreto. Adaptado de Karihaloo (1995) . . .	13
2.6	Proceso de fractura del concreto. Adaptado de Karihaloo (1995)	14
2.7	Zona de localización de deformaciones	17
2.8	Localización de deformaciones en una barra: (a) modelo y (b) curva Esfuerzo-Desplazamiento	19
2.9	(a) Curva Esfuerzo-Deformación uniaxial y (b) superficie de falla para estados biaxiales de esfuerzos en el concreto	21
3.1	(a) Malla alrededor de la punta de la grieta. Tipos de elementos empleados en el análisis (b) elástico y (c) elasto-plástico	25
3.2	Sistema de coordenadas local (al plano de la falla) y global	27
3.3	Tipos de aproximaciones para Discontinuidades Interiores	29
4.1	Definición de un cuerpo con una discontinuidad para la Aproximación Discreta	36
4.2	Definición (a) del campo de desplazamientos y (b) de la función M_S	36
4.3	Definición de un cuerpo con una discontinuidad para la Aproximación Continua de Discontinuidades Fuertes	40
4.4	Definición de un cuerpo con una banda de localización de deformaciones para la Aproximación Continua de Discontinuidades Débiles	44
4.5	Definición (a) del campo de desplazamientos y (b) de la función M_k	44
5.1	Salto de las deformaciones en (a) una línea de discontinuidad y (b) una zona de localización	51
5.2	Descripción fenomenológica del concepto de Daño	52
5.3	Definición de la curva $T_n - [[u]]_n$	57

5.4	Criterio de Daño para la Aproximación Discreta: (a) superficie de falla y (b) evolución del daño	58
5.5	Curva Esfuerzo-Deformación en la zona de localización de deformaciones para las Aproximaciones Continuas. Modelo unidimensional	60
5.6	Criterio de Daño para la Aproximación Continua: (a) superficie de falla y (b) evolución del daño	68
5.7	Efecto de la variación del ancho de la zona de localización k	75
6.1	Barra sometida a tensión en sus extremos que presenta una discontinuidad al centro	81
6.2	Resumen ilustrativo de las distintas aproximaciones	81
6.3	Discretización de un dominio con una discontinuidad	82
7.1	Método de Newton-Raphson	98
7.2	Método iterativo para obtener r_{n+1}^i	101
7.3	(a) Falla de una viga de cuatro puntos y (b) Distribución del $[[u]]$ producido por el primer elemento en agrietarse	102
7.4	Elemento triangular con una discontinuidad arribando a su frontera: numeración de los nodos y distribución de $[[\mathbf{u}]]$	104
7.5	Efecto del ángulo θ_Δ con respecto a las deformaciones producidas por $[[\mathbf{u}]]$ para $k_3 = \infty$	106
7.6	Efecto del ángulo θ_Δ con respecto a las deformaciones producidas por $[[\mathbf{u}]]$ para $k_3 = 0$	107
7.7	Descripción del parche para la recuperación de los esfuerzos	111
7.8	Placa sometida a tensión uniaxial con elementos debilitados en los bordes . .	112
8.1	Definición del modelo e ilustración del proceso de falla teórico	115
8.2	Curva Esfuerzo(σ_{yy})-Desplazamiento(δ) de una placa	117
8.3	Descripción de la placa entallada de van Vliet (2000)	118
8.4	Curva fuerza-desplazamiento de la placa entallada de Vliet (2000)	120
8.5	Descripción de la viga de cuatro puntos de Hordijk (1992)	121
8.6	Curva Carga (P) - Deflexión del punto A del experimento de Hordijk (1992)	122
8.7	Descripción de la viga de tres puntos de Gálvez <i>et al.</i> (1998)	123
8.8	Curvas Carga - Abertura de la boca de la grieta y Carga - Desplazamiento del punto B	124
8.9	Definición de la viga de cuatro puntos de Schlangen (1993)	125
8.10	Curva Carga - Deslizamiento de la boca de la grieta para el experimento de Schlangen (1993)	127

C.1	Localización de una discontinuidad en un elemento triangular	142
C.2	Definición de las funciones H_{S_e} y φ_e^h para un elemento triangular de deformación constante y uno cuadrilátero de deformación lineal	143
C.3	Construcción de las funciones H_{S_e} y φ_e^h comparando el efecto de la continuidad en la ubicación de la discontinuidad en elementos vecinos	144
C.4	Propagación de la discontinuidad	145

Índice de Tablas

7.1	Orientación de la discontinuidad en el elemento analizado	113
8.1	Ilustración de la falla en una placa: (a) Malla de elementos finitos, (b) Zona donde se localiza la discontinuidad y (c) Malla deformada	116
8.2	Ilustración del proceso de falla de la placa entallada de van Vliet (2000) . . .	119
8.3	Ilustración del proceso de falla de la viga de 4 de puntos de Hordijk (1992) .	122
8.4	Ilustración del proceso de falla de la viga de tres puntos de Gálvez et al (1998)	124
8.5	Ilustración del proceso de falla de la viga de Schlangen (1993)	126
8.6	Relación entre la carga de agrietamiento y la carga última para los ejemplos estudiados	128

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Generalidades

Durante las últimas décadas se ha incrementado el número de trabajos cuya finalidad es el completo conocimiento del comportamiento de las estructuras y de los materiales. En general, muchas de las estructuras y de los materiales comúnmente usados en la ingeniería civil poseen un intervalo de comportamiento inicialmente elástico, posteriormente comienza la degradación (intervalo de endurecimiento por deformación) y en algunos casos (materiales cuasifrágiles) se alcanza una carga máxima a partir de la cual se produce un ablandamiento por deformación. El completo conocimiento del comportamiento estructural permite establecer diseños económicos, calcular con precisión los factores de seguridad y la energía necesaria para hacer fallar a una estructura, conocer los mecanismos de falla y la resistencia asociada a éstos, entre otros muchos aspectos.

Para reproducir teórica y numéricamente los primeros dos intervalos, mencionados en el párrafo anterior, existen múltiples herramientas de uso común. Sin embargo, para el intervalo de ablandamiento por deformación, la tarea resulta en general difícil de realizar. Esta situación ha dado lugar al desarrollo de teorías de falla, métodos y modelos numéricos, y estudios experimentales que permiten analizar el proceso de falla en estructuras y materiales. A este respecto, este trabajo está orientado hacia el desarrollo de métodos y modelos numéricos capaces de simular el proceso de falla.

La iniciación y evolución de la falla se estudia por medio de teorías de falla, entre las que se encuentran las Teorías de Continuo y las de la Mecánica de la Fractura. Se reconoce ampliamente la importancia sobre el empleo de estas teorías, no sólo para los estudios académicos sino también para la práctica profesional. Por ejemplo, el Comité 446 del ACI (ACI Committee 446, 1992) establece cinco razones para la utilización de la Mecánica de la Fractura en los códigos de diseño de estructuras de concreto:

1. Requerimiento energético para el crecimiento de la grieta.- Se requiere un criterio energético para determinar la formación y propagación de grietas en el diseño.
2. Análisis objetivo.- El análisis numérico de la estructura debe ser independiente de aspectos tales como la elección del tamaño del elemento finito, de tal suerte que siempre se produzca la misma disipación de energía durante el proceso de agrietamiento.
3. El material no es plástico perfecto.- Materiales como el concreto presentan un comportamiento de ablandamiento por deformación, por lo que los análisis plásticos no son del todo adecuados debido a que se produce una sobreestimación de la capacidad de carga.
4. Capacidad de absorción de energía y ductilidad.- Para muchos problemas es necesario conocer la energía absorbida, lo cual no es posible con un análisis plástico.
5. Efecto del tamaño.- El esfuerzo nominal de falla disminuye con el incremento del tamaño de la estructura.

El auge en el empleo de teorías de falla y sus correspondientes métodos y modelos numéricos, en la práctica profesional se hace patente con el creciente uso de programas de cómputo como el ATENA, antes SBETA, (Cervenka consulting, 2001) y DIANA (TNO, 1998). Estos paquetes han sido empleados para simular numéricamente el daño en estructuras por medio del Método de los Elementos Finitos.

Con las ideas presentadas en esta sección, se busca señalar la importancia y la necesidad de desarrollar métodos y modelos numéricos capaces de simular el proceso de falla en estructuras y materiales. El desarrollo de estas líneas de investigación permite alcanzar una mejor comprensión sobre el comportamiento de las estructuras y de los materiales (de manera conjunta con las observaciones y resultados experimentales) y abre un abanico de posibilidades para el estudio de múltiples casos, que sin estas herramientas desarrolladas *ad hoc* no sería posible o factible realizar.

1.2 Antecedentes

Físicamente el proceso de falla puede ser localizado (el daño se concentra) o distribuido (el daño se distribuye sobre una región, como ocurre con el concreto reforzado). Este trabajo está orientado hacia la simulación del proceso de falla localizado, el cual se caracteriza por la concentración del daño a través de la formación de bandas de ancho pequeño (donde se localizan las deformaciones o se produce una concentración de microgrietas) o de grietas

(discontinuidades en el cuerpo). Este fenómeno ocurre en una gran cantidad de materiales como es el concreto, las rocas, las arcillas, los metales, entre otros.

A este respecto, los modelos de Grieta Discreta y de Grieta Distribuida, los cuales han sido implantados en el Método de los Elementos Finitos, son los dos métodos más empleados y conocidos para simular numéricamente el proceso de falla (agrietamiento) en sólidos. El primero modela la grieta como una discontinuidad en la geometría por medio de la separación de los bordes de los elementos, lo cual conlleva un proceso permanente de remallado durante todo el análisis. El segundo modela el agrietamiento como un conjunto de pequeñas grietas distribuidas sobre una cierta zona a través de la modificación de las propiedades constitutivas de dicha zona. Mientras que el primero posee la capacidad para modelar fallas localizadas, el segundo no es, en general, capaz de hacerlo satisfactoriamente. Por otra parte, el primero posee un costo computacional adicional por el continuo proceso de remallado, mientras que el otro no. Esta situación dió lugar a la creación de un nuevo tipo de aproximación: Discontinuidades Interiores, la cual posee las dos características fuertes de estos dos modelos: capacidad de localización del daño y no requerir remallar.

La aproximación de Discontinuidades Interiores surge a finales de la década de los ochenta y se caracteriza por el mejoramiento de la aproximación de los campos de desplazamiento y de deformaciones, de tal suerte que sean capaces de simular adecuadamente la presencia de discontinuidades en sólidos. Las aproximaciones de discontinuidades pueden ser clasificadas como: (1) Aproximación Discreta.- La discontinuidad, dada por una superficie (3D) o línea (2D), corresponde a un salto en los desplazamientos y su comportamiento está definido por relaciones de tipo discreto ("salto de los desplazamientos - tracciones"); (2) Aproximación Continua.- La discontinuidad, dada por una zona de localización de deformaciones (área en 2D y volumen en 3D), tiene un comportamiento definido por relaciones de tipo continuo ("esfuerzo - deformación"); si el ancho de dicha zona es muy pequeño la aproximación se denomina Discontinuidad Fuerte (posee desplazamientos discontinuos), de lo contrario se denomina Discontinuidad Débil (posee deformaciones discontinuas).

En la literatura técnica reciente se puede encontrar una gran cantidad de trabajos sobre el tema de Discontinuidades Interiores, siendo más numerosas las aportaciones con relación a las Aproximaciones Discretas (*e.g.* Dvorkin y Assanelli, 1991; Lofti y Shing, 1995 y Klisinski *et al.*, 1991) y a las Discontinuidades Fuertes (*e.g.* Simo *et al.*, 1993 y Oliver, 1996a). Sin embargo, no todos los métodos publicados de Discontinuidades Interiores tienen un comportamiento del todo satisfactorio. En particular, Jirasek (2000) realizó un estudio comparativo entre muchos de los trabajos sobre el tema, señalando que existen algunas aproximaciones (a las cuales él denominó: Formulación No Simétrica, Estática y Cinemáticamente Óptima -SKON-) que tienen un mejor desempeño; entre estos trabajos se encuentran los de Dvorkin y Assanelli (1991), Klisinski *et al.* (1991) y Simo *et al.* (1993).

Estos antecedentes fueron la motivación para realizar un trabajo que desarrolle una visión completa del problema (desde la Formulación Variacional hasta su implantación en el Método de los Elementos Finitos) y que sea unificadora de las aproximaciones de Discontinuidades Interiores, pero particularizando en la formulación no simétrica que ha demostrado tener un desempeño satisfactorio para simular la presencia de discontinuidades. Este trabajo debe cubrir los distintos tipos de discontinuidades: Aproximación Discreta, Discontinuidades Débiles y Discontinuidades Fuertes.

1.3 Objetivos

El objetivo general de este trabajo es:

Desarrollar una formulación general del problema de Discontinuidades Interiores que abarque los distintos tipos de aproximaciones de discontinuidades. Adicionalmente, desarrollar los procedimientos y algoritmos necesarios para la implantación numérica de dicha formulación en el Método de los Elementos Finitos y emplear esta implantación en la simulación numérica del proceso de agrietamiento en elementos de concreto simple.

Para la realización de este objetivo general se establecieron los siguientes objetivos particulares:

1. Desarrollar la Formulación Variacional del Problema de Discontinuidades Interiores para cada tipo de aproximación: Discreta, Discontinuidad Fuerte en la Aproximación Continua y Discontinuidad Débil en la Aproximación Continua.
2. Desarrollar Modelos Constitutivos, dentro del contexto de los Modelos de Daño Clásico, que sean adecuados para la modelación de Discontinuidades Interiores de acuerdo al tipo de aproximación.
3. Establecer metodologías para la implantación numérica de las Discontinuidades Interiores en el Método de los Elementos Finitos, con base en los desarrollos realizados en los objetivos particulares 1 y 2.
4. Desarrollar los algoritmos numéricos necesarios e implantarlos en un programa de Elementos Finitos para crear una herramienta computacional de utilidad práctica.
5. Emplear la herramienta computacional desarrollada para simular numéricamente el proceso de agrietamiento en elementos de concreto simple; emplear información experimental para verificar la calidad de los resultados numéricos.

1.4 Contenido

A continuación se hace una descripción global del contenido de la presente tesis doctoral:

- En el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura y de las Teorías de Falla de Continuo, ya que a través de éstas es posible estudiar el proceso de falla. Para el primer caso se profundiza en la Mecánica de la Fractura No Lineal, la cual es adecuada para modelar la falla en materiales cuasifrágiles. En el segundo caso se presenta el análisis de bifurcación que estudia las condiciones necesarias para que se produzca ésta (en estas teorías el problema de localización de deformaciones se trata como un problema de bifurcación del camino de equilibrio) y se justifica la necesidad de emplear “Limitadores de la Localización” si se desea emplear una formulación continua. Este capítulo finaliza presentando las propiedades del concreto, el cual es un material cuasifrágil y se emplea en las aplicaciones de este trabajo.
- En el Capítulo 3 se realiza una discusión sobre algunos métodos numéricos empleados en la simulación numérica de la falla. Se inicia con los modelos de Grieta Discreta y de Grieta Distribuida, los cuales son empleados actualmente y son los antecesores de la aproximación de Discontinuidades Interiores. Se resumen las aportaciones de los principales trabajos de la aproximación de Discontinuidades Interiores. Al final se comenta brevemente sobre los métodos libres de malla, los cuales han tomado auge recientemente, y su aplicación a la simulación numérica de la falla.
- En el Capítulo 4 se desarrolla la Formulación Variacional del problema de Discontinuidades Interiores para cada uno de los tres tipos de aproximación: Aproximación Discreta, Discontinuidades Fuertes y Discontinuidades Débiles. Para todos los casos se parte de la aplicación del “Principio de los Trabajos Virtuales”. Se obtiene una ecuación relacionada con el equilibrio global y otra con el equilibrio (continuidad de tracciones) en los bordes de la discontinuidad.
- El Capítulo 5 se inicia describiendo la Cinemática de cuerpos con discontinuidades y se complementa con unos comentarios sobre las características del salto de las deformaciones. Se desarrollan los modelos constitutivos específicos para cada tipo de aproximación de Discontinuidades Interiores. Se aborda la familia de modelos de Daño Clásico. Para la Aproximación Discreta se desarrolla un modelo de Daño Isotrópico y para la Aproximación Continua uno de Daño Anisotrópico. Se realiza un análisis energético entre las distintas aproximaciones, el cual permite establecer relaciones entre los parámetros de cada una de ellas.

- En el Capítulo 6 se desarrolla la implantación numérica de la aproximación de Discontinuidades Interiores en el Método de los Elementos Finitos. Esta implantación puede realizarse por medio de dos metodologías: (1) el Método Mixto de Deformaciones Mejoradas y (2) el Método de Imposición Fuerte de la Continuidad de Tracciones en la discontinuidad. Se desarrolla la segunda metodología y se obtienen tres Grupos de Ecuaciones distintos que permiten resolver el problema. Los Grupos son desarrollados para las Aproximaciones Discreta y Continua.
- En el Capítulo 7 se discuten algunos aspectos algorítmicos y computacionales relativos a la implantación numérica. Se describe el método desarrollado para la evaluación de las ecuaciones constitutivas. Se define y discute el problema de Deformaciones Falsas, el cual se presenta en la aproximación de Discontinuidades Interiores. Se finaliza el capítulo presentando un algoritmo de propagación de discontinuidades modificado, que tiene como objetivo minimizar el efecto de las Deformaciones Falsas.
- En el Capítulo 8 se presentan cinco ejemplos ilustrativos. El primero es teórico y tiene como propósito verificar la capacidad del método para modelar discontinuidades. Los cuatro restantes corresponden a ejemplos relacionados con el agrietamiento y la falla de especímenes de concreto para los cuales se cuenta con la información experimental.
- Se finaliza el trabajo con las conclusiones, apéndices y referencias bibliográficas. En el Apéndice A se presenta la notación y la simbología empleada en el presente trabajo; se recomienda al lector revisar este apéndice antes de leer el trabajo. En el Apéndice B se presentan las matrices constitutivas del modelo de Daño Anisotrópico para los casos de deformación plana y esfuerzo plano. En el Apéndice C se presenta información necesaria para la implantación numérica de las aproximaciones en el Método de los Elementos Finitos.

Las implantaciones numéricas de los desarrollos de este trabajo se realizaron en el programa FEAP (Finite Element Analysis Program - versión 7.3; Taylor, 2001), desarrollado en la Universidad de California en Berkeley, EUA. El lenguaje de programación empleado es Fortran90 (Chapman, 1998). Los desarrollos y las simulaciones numéricas se realizaron en una computadora personal, con un procesador AMD Athlon 1.10 GHz, operando bajo el sistema Windows XP. El preproceso y posproceso de los modelos numéricos se realizó empleando el paquete de graficación GiD (CIMNE, 2000), desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Capítulo 2

TEORÍAS DE FALLA Y EL CONCRETO

Durante las últimas tres décadas muchos investigadores del área de ingeniería han conducido sus esfuerzos hacia el desarrollo y profundización de Teorías de Falla¹. Los desarrollos de esta área se han orientado hacia el estudio de la degradación de los materiales y de las estructuras. Entre las aplicaciones particulares de estas teorías está la determinación de la resistencia o carga máxima que soporta un material o estructura, así como la descripción del comportamiento posterior a dicho punto máximo y el modo y patrones de falla del mismo.

La Mecánica de la Fractura es quizá una de las Teorías de Falla más conocida y recurrida para modelar el proceso de falla. La Mecánica de la Fractura ve el proceso de falla como la formación y propagación de discontinuidades en un cuerpo, ya sea como macrogrietas o como un conjunto de microgrietas. Las bases de la Mecánica de la Fractura se establecieron en los trabajos de Inglis (1913), Griffith (1921, 1924) e Irwin (1957), los cuales fundamentan la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Posteriormente, la Mecánica de la Fractura continuó su desarrollo dando lugar a la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica y a la Mecánica de la Fractura No Lineal. A pesar de que la línea de investigación de este trabajo está asociada a la Mecánica de la Fractura No Lineal, se consideró importante hacer una revisión general de los conceptos fundamentales de la Mecánica de la Fractura y de los modelos básicos de la Mecánica de la Fractura No Lineal.

La falla de los materiales no solamente se presenta (o puede modelarse) como discontinuidades² en un cuerpo, sino también como zonas donde se presenta una concentración de deformaciones (zonas de localización de deformaciones) en las que los desplazamientos no presentan saltos. Las Teorías de Falla basadas en Teorías de Continuo ven el problema de

¹En este trabajo se hace referencia a la falla del material únicamente, excluyéndose el efecto de la geometría y de las condiciones de frontera (*i.e.* inestabilidades geométricas, *e.g.* pandeo).

²Saltos de los desplazamientos

la falla precisamente como un fenómeno de localización de deformaciones. El fenómeno de localización de deformaciones es un problema de bifurcación del camino de equilibrio, por lo que en este capítulo se presenta una breve descripción sobre el análisis de bifurcación. Adicionalmente, se presenta una discusión en torno al ancho de la zona de localización y a la necesidad de emplear "Limitadores de la Localización".

Al final de este capítulo se realiza una breve presentación de las propiedades mecánicas del concreto, que es el material de los ejemplos de aplicación de esta tesis. El objetivo de esta sección es el de presentar los parámetros más sobresalientes que deben ser considerados para la definición de un modelo constitutivo representativo del comportamiento del concreto. En particular se presenta una discusión sobre los parámetros asociados a la falla del concreto. Es importante mencionar que los desarrollos presentados en esta tesis no son de aplicación exclusiva para el concreto, sino generales para todos los materiales con comportamiento cuasifrágil.

2.1 Mecánica de la Fractura

2.1.1 Introducción a la Mecánica de la Fractura

La fractura es un problema que la sociedad ha enfrentado por mucho tiempo, desde que los hombres comenzaron a construir sus propias estructuras. A la fecha podemos observar una gran cantidad de estructuras que, funcionando satisfactoriamente, han durado varios centenares de años, lo que sólo puede ser justificado si tienen factores de seguridad elevados. Estos factores respondieron a la necesidad de evitar la falla de dichas estructuras, dado el gran desconocimiento que existía en relación a su comportamiento y a los mecanismos de falla de los materiales y de las estructuras.

El comportamiento y la falla de las estructuras como consecuencia de la formación y propagación de grietas se estudia a través de la Mecánica de la Fractura. La Mecánica de la Fractura es la parte de la Mecánica que estudia la falla de los materiales y de las estructuras por medio de un criterio energético en posible conjunción con un criterio de esfuerzos. Algunas de las principales aplicaciones de la Mecánica de la Fractura son (Shah *et al.*, 1995):

1. Determinación de la resistencia residual como función del tamaño de la grieta.
2. Determinación del tamaño de la grieta que es aceptable estructuralmente, dadas unas condiciones de carga.
3. Descripción cuantitativa del efecto de los parámetros que intervienen en la fractura: nivel de esfuerzos, dureza del material, tamaño de las imperfecciones, etc.

Se considerara que la Mecánica de la Fractura tuvo su origen en el artículo de Inglis (1913), en el cual se obtuvo la solución elástica para el estado de esfuerzos en un sólido infinito con una cavidad elíptica. Inglis observó que cuando uno de los ejes de la elipse se hace tender a cero, es decir, la elipse aparenta ser una línea, los esfuerzos en el vértice tienden a infinito. Con base en este resultado, Griffith (1921, 1924) concluyó que el valor de los esfuerzos en la vecindad del vértice no puede ser empleado como criterio de falla y propuso un criterio energético, en el cual el crecimiento de las grietas está controlado por un balance energético entre la energía de deformación disponible y la energía requerida para propagar la grieta.

Más tarde, Irwin (1957) resolvió varios problemas de agrietamiento en placas empleando soluciones de la elasticidad lineal (fig. 2.1) y demostró que el estado de esfuerzos en la vecindad de la punta de una grieta tiene siempre la misma forma:

$$\sigma(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2r\pi}} \mathbf{f}^*(\theta) \quad (2.1)$$

donde σ es el tensor de orden 2 de esfuerzos en un punto (r, θ) ; r y θ son las coordenadas polares con origen en la punta de la grieta; $\mathbf{f}^*(\theta)$ es un tensor de orden 2 cuyos términos contienen funciones trigonométricas; K es una constante, la cual se denomina Factor de Intensidad de Esfuerzos. Con base en esta ecuación, se establece un criterio de falla en donde si el factor de intensidad de esfuerzos es superior o igual a un factor de intensidad de esfuerzos crítico, el cual es una propiedad del material, la grieta crece.

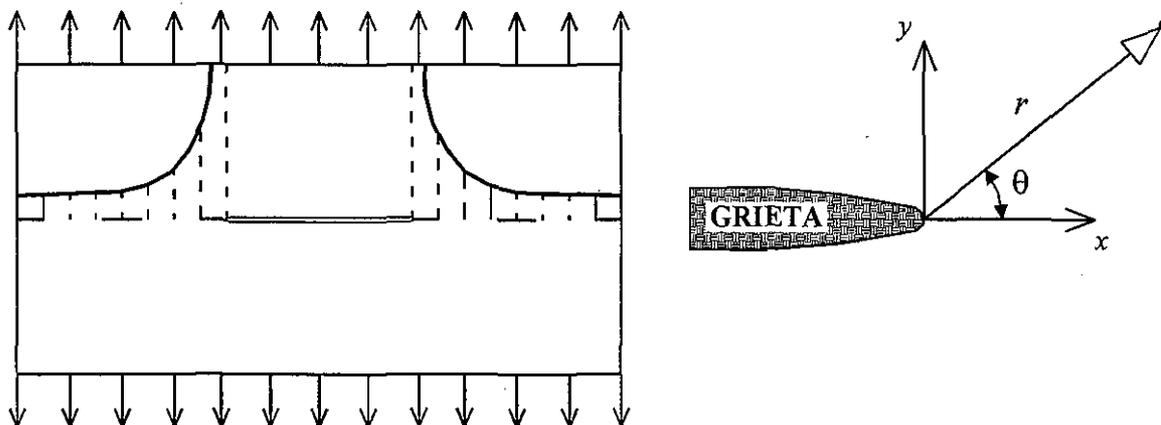


Figura 2.1: Distribución de esfuerzos en una placa elástica con una grieta y sistema de referencia

Irwin demostró que la aproximación al problema de la fractura por medio del “balance energético” es equivalente a la aproximación por medio del “Factor de Intensidad de Esfuerzos Crítico”. Los desarrollos de Irwin fueron de suma importancia para la fundamentación teórica de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL). El postulado fundamental de la MFEL

establece que el comportamiento de las grietas está determinado solamente por el valor del Factor de Intensidad de Esfuerzos (Aliabadi y Rooke, 1991).

La MFEL identifica tres modos básicos de deformación en un cuerpo agrietado, los cuales están caracterizados por el movimiento relativo entre las superficies de la grieta. Estos modos son comúnmente referidos como (fig. 2.2): Modo I (modo de abertura), Modo II (modo de deslizamiento o cortante en el plano), Modo III (modo de deslizamiento o cortante fuera del plano).

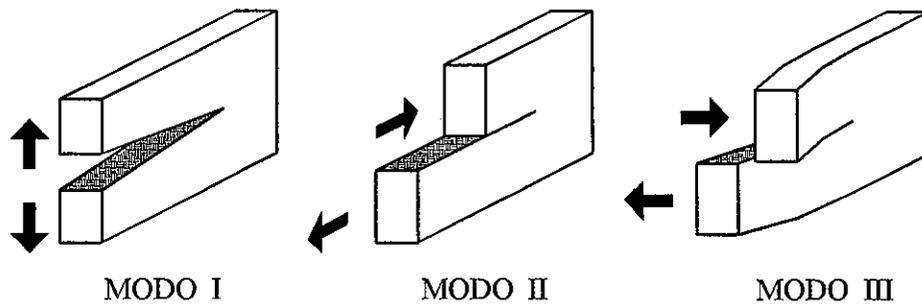


Figura 2.2: Modos Fundamentales de Deformación

La MFEL es altamente simplificada debido a que considera que todo el cuerpo es elástico antes y después de la fractura y que el proceso de fractura (definido en la siguiente sección) se realiza en una pequeña zona ubicada en la punta de la grieta. De hecho, la MFEL reconoce que el estado de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta es muy elevado por lo que acepta que debe ocurrir un comportamiento no lineal (plastificación) en la vecindad de la punta. Lo simplificado de la MFEL hace que su intervalo de aplicaciones sea limitado, por lo que se han desarrollado otras aproximaciones dentro de la Mecánica de la Fractura que permiten cubrir otros casos.

2.1.2 Clasificación del Proceso de Fractura según el Material

En la clasificación del proceso de fractura es importante identificar el tipo de comportamiento del material, ya que éste caracteriza al fracturamiento. La mayoría de los materiales empleados en la Ingeniería pueden ser clasificados en tres grupos, con base en su respuesta “esfuerzo-deformación” a tensión (fig. 2.3):

- a) Frágiles. En estos materiales los esfuerzos rápidamente se reducen a cero cuando el material se fractura.
- b) Dúctil. En estos materiales los esfuerzos se mantienen constantes o aumentan gradualmente con el incremento de la deformación cuando el material ha alcanzado un esfuerzo de fluencia.

c) Cuasifrágil: En estos materiales los esfuerzos gradualmente van disminuyendo después de que el material alcanza su esfuerzo máximo.

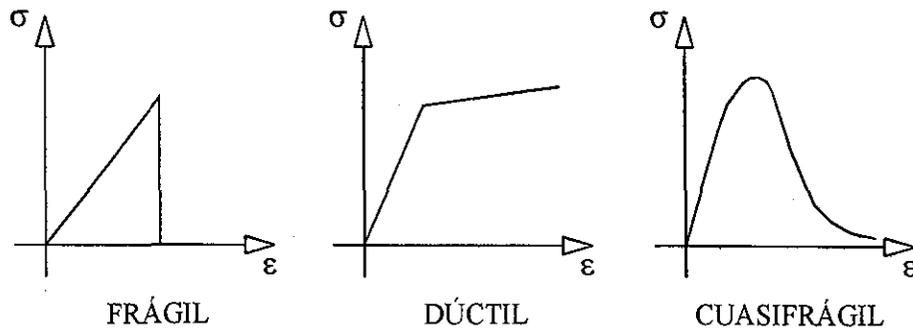


Figura 2.3: Tipos de respuesta en los materiales

La MFEL permite que los esfuerzos se aproximen a infinito en la cercanía de la punta de la grieta (ec. 2.1). Como el estado de esfuerzos no puede ser infinito en la realidad, se debe formar una zona inelástica alrededor de la punta de la grieta, la cual tendrá un comportamiento caracterizado por el tipo de material. El estado de esfuerzos alrededor de la grieta y el tipo de material da lugar a la formación de tres zonas: (1) zona de Proceso de Fractura, (2) zona Plástica y (3) zona Elástica. En la zona de Proceso de Fractura se lleva cabo el proceso de fracturamiento, es una zona caracterizada por un ablandamiento progresivo, para el cual los esfuerzos disminuyen con el aumento de las deformaciones; en ella se produce la grieta. La zona de Proceso de Fractura está rodeada por una zona Plástica caracterizada por un endurecimiento a la deformación, para la cual los esfuerzos aumentan o se mantienen constantes con el aumento de las deformaciones. Para efectos de esta discusión se puede considerar que el material que está fuera de ambas zonas es elástico lineal. A partir del tamaño relativo de dichas zonas es posible identificar tres tipos de Fracturamiento, como se muestra en la fig. 2.4 (Bazant y Planas, 1998; Karihaloo, 1995):

- a) Elástico Lineal
- b) Elasto-Plástico
- c) No Lineal

En la Fractura Elástica Lineal, la zona de Proceso de Fractura y la zona Plástica son muy pequeñas en comparación con el tamaño de la estructura. En particular, se considera que la zona de fractura ocupa un punto (la punta de la grieta). Este tipo de problema se analiza a través de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal. Esta aproximación es adecuada para materiales frágiles como son los metales frágiles, los cerámicos frágiles y el cristal;

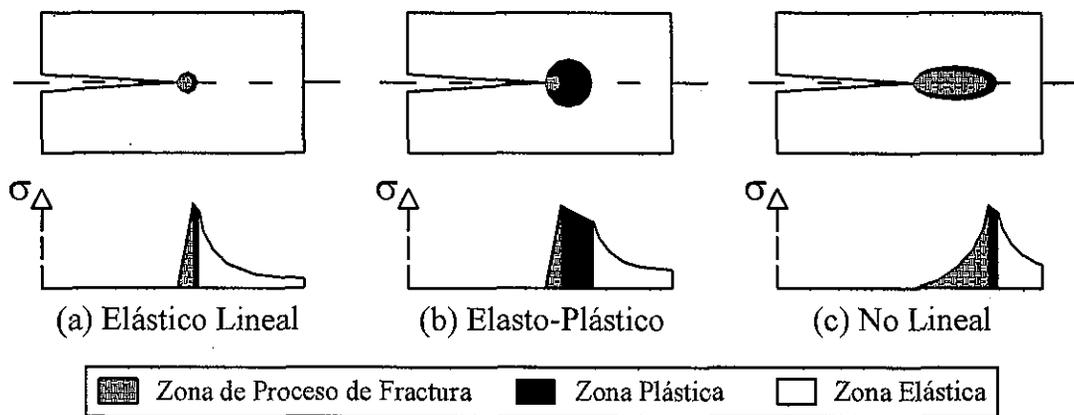


Figura 2.4: Tipos de Fracturamiento. Adaptado de Bazant (1985)

además, es adecuada para el análisis de presas de concreto, donde la zona de fracturamiento es pequeña en comparación al tamaño de la estructura. La MFEL no es aplicable a los tipos de fracturamiento (b) y (c), a menos que se emplee una aproximación lineal equivalente en la que se considere que las zonas de Proceso de Fractura y Plástica no son muy grandes.

Cuando la zona Plástica es relativamente grande, la MFEL deja de ser aplicable y se recurre a la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica. En esta aproximación la zona de proceso de fractura se mantiene pequeña, pero la zona Plástica es relativamente grande (ver Anderson, 1995, para una descripción más detallada de esta aproximación). Este tipo de aproximación es adecuada para materiales dúctiles, como son los metales dúctiles.

Este trabajo está orientado hacia el tercer tipo de fracturamiento: Fractura No lineal. En esta aproximación la zona de Proceso de Fractura es grande y la zona Plástica es pequeña en comparación con la primera. Algunos de los materiales que poseen este comportamiento son: concreto, roca, hielo, arenas cementadas, arcillas duras, algunos cerámicos y materiales compuestos, entre otros; esto es, los materiales cuasifrágiles pueden ser adecuadamente modelados por medio de la Mecánica de la Fractura No Lineal.

2.2 Mecánica de la Fractura No Lineal

2.2.1 Generalidades

Una gran cantidad de materiales que se emplean en la Ingeniería pertenecen al grupo de los materiales cuasifrágiles. Por ello se puede encontrar en la literatura técnica una gran cantidad de trabajos asociados a la modelación del comportamiento constitutivo y a los procedimientos de análisis del fracturamiento de dichos materiales. En particular, ha sido de gran interés el estudio del Concreto por su empleo e importancia en la industria de la

construcción, ver por ejemplo: Bazant y Planas (1998); de Borst *et al.* (1998); Isenberg (1993); Karihaloo (1995); Shah *et al.* (1995); van Mier (1997). Los conceptos y modelos de la Mecánica de la Fractura No Lineal que a continuación se describen, están basados en estudios realizados en especímenes de concreto; sin embargo, estos conceptos son aplicables a otros materiales cuasifrágiles.

La curva “esfuerzo - deformación” a tensión del concreto está compuesta por cinco intervalos (Karihaloo, 1995), como se muestra en la fig. 2.5. El primer intervalo es el elástico o proporcional, y está contenido entre O y A (límite de proporcionalidad o fluencia). A partir del punto de fluencia f_y comienza a existir un comportamiento no lineal generado por la formación de microgrietas distribuidas aleatoriamente. Aproximadamente, cuando se alcanza el esfuerzo máximo f_t , las microgrietas comienzan a unirse dando lugar a un ablandamiento del material. En el punto C las microgrietas se han terminado de unir y forman una macrogrieta, la cual tiene un ancho de abertura w^\ddagger ; a pesar de la formación de una macrogrieta, el material puede ser capaz de transmitir esfuerzos debido a varios fenómenos, como es el “puenteo de los agregados”. Los esfuerzos transmitidos a través de la grieta son denominados esfuerzos cohesivos. Finalmente, a partir del punto D la grieta está completamente abierta y no es capaz de transmitir esfuerzos de tensión. El ancho de grieta en el punto D se denomina ancho de grieta crítica w_c . Es importante señalar que: la trayectoria que siguen las grietas en el concreto no es una línea recta, esto se debe a la presencia del agregado; y es difícil identificar dónde se localiza la punta de la grieta y el tamaño de la zona de proceso de fractura.

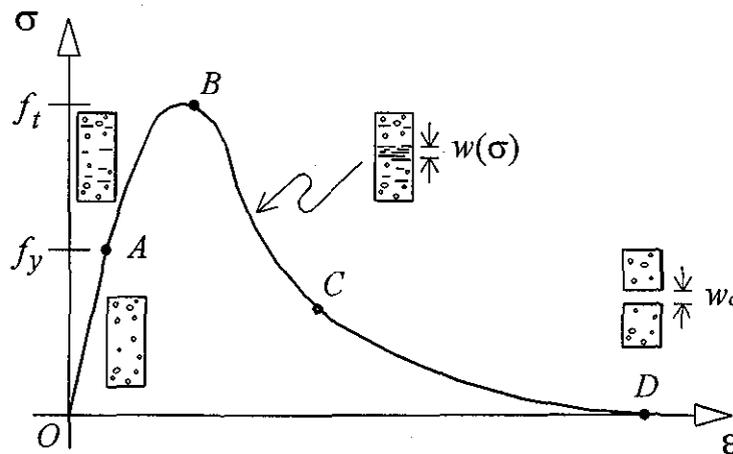


Figura 2.5: Comportamiento a tensión del concreto. Adaptado de Karihaloo (1995)

La Mecánica de la Fractura emplea la tasa de liberación de energía G como un criterio para describir el proceso de fractura de un material. Para materiales cuasifrágiles, esta tasa

[‡]En capítulos posteriores w será referida como $[[u]]_n$

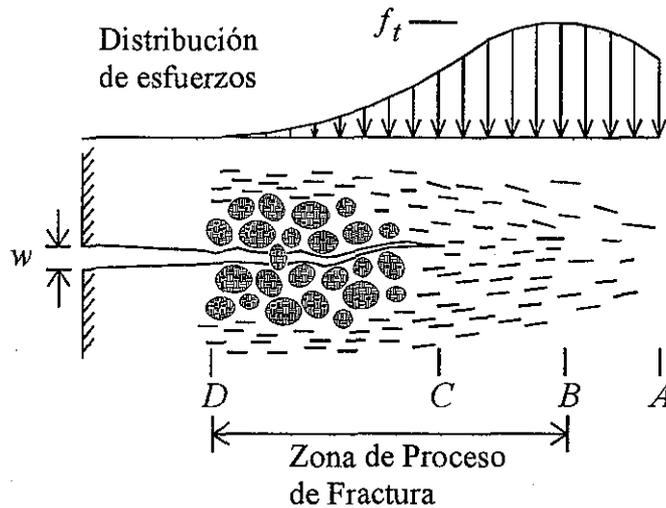


Figura 2.6: Proceso de fractura del concreto. Adaptado de Karihaloo (1995)

está compuesta por dos partes (Shah *et al.*, 1995): (1) la tasa correspondiente a la energía consumida, durante el fracturamiento del material, para crear dos superficies; y (2) la tasa de la energía asociada a los esfuerzos cohesivos que actúan a través de la grieta en el intervalo de ablandamiento del material. Con base en estas dos partes, es posible clasificar los modelos empleados en la Mecánica de la Fractura No Lineal para materiales cuasifrágiles (Karihaloo, 1995):

- a) Modelos Cohesivos de la Mecánica de la Fractura No Lineal. En estos modelos se desprecia la energía consumida durante el fracturamiento del material, modelándose exclusivamente la energía asociada a los esfuerzos cohesivos presentes en la zona de fracturamiento. Pertenecen a este grupo de modelos el de Grieta Ficticia y el de Banda de Agrietamiento. Es importante señalar que en la literatura técnica no existe un consenso sobre un nombre que agrupe estos modelos; en particular, algunos autores hacen referencia al Modelo de Grieta Ficticia como el Modelo Cohesivo; sin embargo, aquí se nombran Modelos Cohesivos a aquellos que aproximan los esfuerzos cohesivos presentes en la zona de fracturamiento. Estos son los modelos empleados en este trabajo.
- b) Modelos de Grieta Efectiva, que aproximan la Mecánica de la Fractura No Lineal. En estos modelos se desprecia, aparentemente, la energía asociada a los esfuerzos cohesivos, sustituyéndose la zona de proceso de fractura por una grieta equivalente que está gobernada por los criterios de la MFEL. Estos modelos no son empleados en este trabajo.

2.2.2 Modelos Cohesivos

En esta sección se presentan brevemente los Modelos Cohesivos de “Grieta Ficticia” y de “Banda de Agrietamiento”. Estos modelos poseen algunas características comunes, como son: el considerar que la energía consumida por el fracturamiento del material es nula (o en otros términos $K = 0$); el aproximar la energía asociada a los esfuerzos cohesivos (fig. 2.6); y el que ambos modelos fueron concebidos originalmente para modelar sólo el Modo I de falla.

El Modelo de Grieta Ficticia fue desarrollado por Hillerborg *et al.* (1976). Ellos analizaron el proceso de fractura en materiales cementados, observando que si una barra de concreto se somete a tensión, ésta tiene un comportamiento casi lineal antes de los esfuerzos máximos y que a partir de estos esfuerzos comienza a formarse una zona de agrietamiento pequeña donde se concentran las deformaciones (ver probeta correspondiente a la zona $B-D$ en la fig. 2.5), mientras que fuera de esa zona se presenta una descarga casi elástica. Ellos consideraron que no sería adecuado modelar dicho comportamiento con una relación “esfuerzo-deformación” y propusieron modelar la zona de proceso de fractura por medio de un modelo “esfuerzo-abertura de grieta”.

En este modelo se considera que la grieta se forma cuando los esfuerzos principales alcanzan una cierta resistencia. Posteriormente se introduce un comportamiento de ablandamiento en la zona de proceso de fractura. Este modelo está caracterizado por dos parámetros (propiedad del material): la tensión resistente (f_t) y la energía de fractura G_f , definida por el área bajo la curva esfuerzo-abertura de la grieta ($\sigma - w$):

$$G_f = \int_{f_t}^0 w(\sigma) d\sigma = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (2.2)$$

Para evaluar la energía de fractura (ec. 2.2) se requiere conocer o establecer la forma de la curva $\sigma - w$.

El proceso de fractura en materiales como el concreto no ocurre a lo largo de una línea (visto el problema en dos dimensiones), como se supone en el modelo de Hillerborg, sino que ocurre en una zona o banda debido al microagrietamiento, al puenteo de agregados y a la ramificación de las grietas. El modelo de “Banda de Agrietamiento”, el cual fue desarrollado por Bazant y Oh (1983), modela la zona de proceso de fracturamiento por medio de una banda, de ancho fijo k [§], donde se concentran de manera uniforme las microgrietas. El ancho de esta banda se considerado una propiedad del material, el cual está relacionado con el tamaño de los agregados en el caso del concreto (generalmente se considera igual a tres veces el tamaño máximo del agregado).

[§]Tradicionalmente se emplea la letra h para definir el ancho de la zona de agrietamiento; sin embargo, en este trabajo h es el ancho del subdominio que contiene a las grietas, mientras que k es el ancho de la zona de agrietamiento o localización de deformaciones

En el Modelo de “Banda de Agrietamiento” el elemento a tensión de la fig. 2.5 se modela considerando que todo el cuerpo es elástico hasta que los esfuerzos principales alcanzan el esfuerzo resistente a tensión. Posteriormente se genera una banda de agrietamiento donde se concentra el efecto inelástico de las grietas, mientras que fuera de esta banda ocurre una descarga elástica. Las deformaciones en el interior de la banda se calculan como:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \quad (2.3)$$

donde ϵ^e son las deformaciones elásticas, las cuales experimenta todo el cuerpo; y ϵ^f son las deformaciones inelásticas de fractura generadas por el microagrietamiento.

El trabajo por unidad de volumen necesario para formar una grieta completamente abierta se denomina Densidad de Energía de Fractura y se calcula como:

$$\gamma_f = \int_0^\infty \sigma \, d\epsilon^f \quad (2.4)$$

La abertura de la grieta w del modelo de Grieta Ficticia se relaciona con las deformaciones inelásticas ϵ^f del modelo de Banda de Agrietamiento:

$$k \epsilon^f = w \quad (2.5)$$

Correspondientemente, la energía de fractura y la densidad de energía de fractura se relacionan a través de la siguiente expresión:

$$G_f = k \gamma_f \quad (2.6)$$

Ambos modelos fueron originalmente concebidos considerando que el cuerpo descarga elásticamente y que el agrietamiento ocurre en Modo I. Sin embargo, estos modelos se han extendido a modos mixtos de falla y a situaciones en las que el comportamiento de la zona no agrietada no tiene que ser elástico.

2.3 Teorías de Continuo

2.3.1 Generalidades y Análisis de Bifurcación

En las Teorías de Continuo, la falla se concibe como un fenómeno de localización de deformaciones. Dicha localización se puede definir como la concentración de deformaciones en bandas de ancho finito. Dentro de dichas bandas las deformaciones pueden alcanzar valores significativamente superiores respecto a los de su vecindad, generándose un salto en las deformaciones a través de los bordes de la banda o zona de localización. El proceso de

falla de múltiples materiales no se produce como una discontinuidad en el cuerpo o grieta, sino a través de la formación de zonas de localización de deformaciones de ancho finito. En particular, el daño en el concreto comienza con un microagrietamiento en una zona y posteriormente las microgrietas se van uniendo hasta formar una macrogrieta. El fenómeno de localización del cual se hace referencia se produce únicamente por la inestabilidad del material, excluyéndose la inestabilidad geométrica que depende de la geometría y de las condiciones de frontera. Las inestabilidades del material siguen un criterio local dependiente de la respuesta del material (Needleman y Tvergaard, 1992).

En este trabajo se estudia el problema de localización de deformaciones como una consecuencia del ablandamiento por deformación producido por el deterioro de un material. Este fenómeno no sólo da lugar a la localización de deformaciones, sino también a la localización de la disipación de la energía. El fenómeno de localización es un problema de bifurcación en el que el camino principal (que preserva uniforme el campo de deformaciones) no es posible y el camino secundario (que produce localización) tiene que ocurrir (Bazant y Cedolin, 1991).

A continuación se presenta una revisión general sobre la teoría de localización de deformaciones, la cual encuentra sus principios básicos aplicados a cuerpos inelásticos en los trabajos de Hill (1962) y Rice (1976), entre otros. Considérese un material homogéneo e independiente de la velocidad de carga, sujeto a incrementos de carga cuasi-estáticos. Se busca determinar si es posible la bifurcación del material en una banda cuya orientación esté definida por el vector \mathbf{n} (fig. 2.7). La determinación de las condiciones bajo las cuales se produce dicha banda se denomina análisis de bifurcación. La bifurcación está asociada a la pérdida de elipticidad de las ecuaciones que gobiernan el problema.

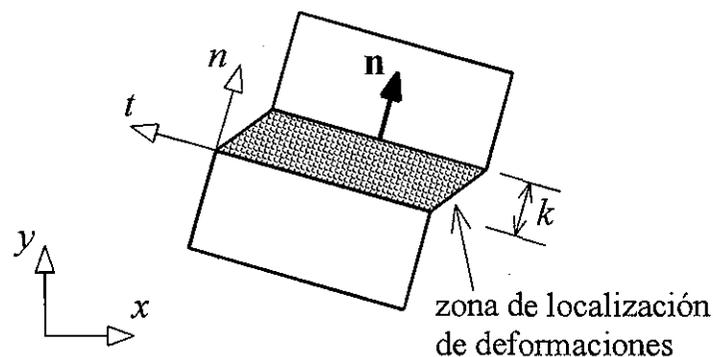


Figura 2.7: Zona de localización de deformaciones

En este análisis se considera que el campo de desplazamientos es continuo, pero las deformaciones presentan un salto en las líneas que limitan la zona de localización. Para que las deformaciones satisfagan la condición de compatibilidad, se requiere que éstas estén

definidas como:

$$\dot{\epsilon}^b = \dot{\epsilon}^o + (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}) \quad (2.7)$$

donde los superíndices b y o indican los valores dentro y fuera de la banda, respectivamente; el punto sobre el tensor indica derivada con respecto al tiempo; $(\mathbf{g} \otimes \mathbf{n})$ es el salto de las deformaciones.

Además de la condición de compatibilidad, se requiere como segunda condición que exista equilibrio a través de la banda, esto es, que exista continuidad de tracciones (\mathbf{T}):

$$\mathbf{T}^o = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^o = \mathbf{T}^b = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^b \quad (2.8)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ son los esfuerzos que pueden ser calculados a partir de las deformaciones y del tensor constitutivo tangente \mathbf{C} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^o = \mathbf{C}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^o \quad \text{y} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^b = \mathbf{C}^b : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^b + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n}) \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ec. 2.9 en la ec. 2.8 se obtiene:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (2.10)$$

La ec. 2.10 puede verse como un sistema de ecuaciones, el cual siempre tiene una solución trivial $\mathbf{g} = 0$. Sin embargo, la localización ocurre cuando exista una solución distinta a la trivial, la cual se presentará cuando el determinante del tensor acústico \mathbf{Q} sea igual a cero. El tensor acústico es función de la dirección del vector \mathbf{n} . Es fácil comprobar que el determinante del tensor acústico elástico nunca es nulo, por lo que un material elástico nunca bifurca. Ottosen y Runesson (1991) y Runesson *et al.* (1991) obtuvieron resultados analíticos para la determinación de la dirección crítica de bifurcación y su correspondiente valor crítico del módulo de endurecimiento con modelos de Plasticidad.

Como alternativa al análisis de bifurcación está el de Imperfección. En este análisis se considera que el material no es homogéneo (posee imperfecciones), lo cual permite que a partir de un cierto esfuerzo, los valores de las deformaciones sean diferentes dentro y fuera de la banda de localización; aunque se supone que los valores de la deformación son los mismos antes de alcanzar dicho esfuerzo (Bazant y Cedolin, 1991; Needleman y Tvergaard, 1992).

2.3.2 Limitadores de la localización

El análisis de bifurcación no es capaz de dar información respecto al ancho de la zona de localización k . Esto es una limitante importante, ya que la respuesta del cuerpo con una

banda de localización está definido por el valor de k . Para ilustrar el efecto del valor de k considérese una barra de longitud L sometida a un estado de tensión uniforme. Al alcanzarse en la barra un esfuerzo σ_u se produce una zona de localización de ancho k como se ilustra en la fig. 2.8(a). En la fig. 2.8(b) se grafica la respuesta esfuerzo contra desplazamiento del extremo libre de la barra.

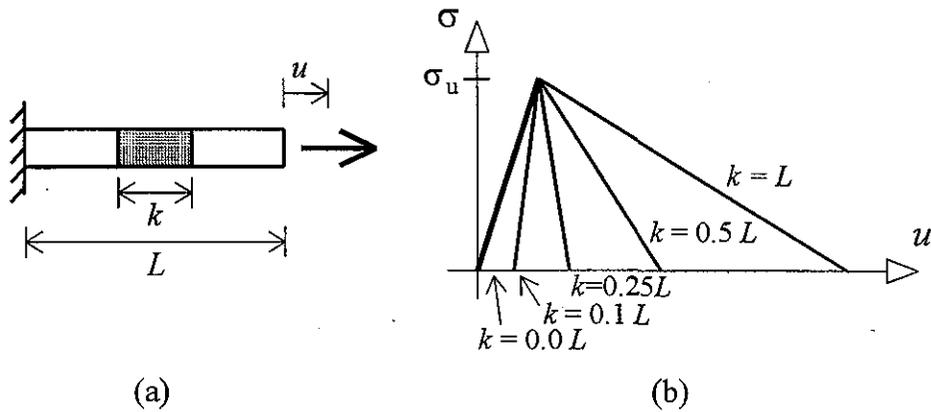


Figura 2.8: Localización de deformaciones en una barra: (a) modelo y (b) curva Esfuerzo-Desplazamiento

En la fig. 2.8(b) se muestra cómo cambia la respuesta de la barra al variar el valor de k , lo cual indica que no hay objetividad en los resultados con respecto al ancho de la zona de localización. En relación a esto, Bazant *et al.* (1991 y 1998) establecen que para encontrar el correcto camino de equilibrio se requiere minimizar el trabajo de segundo orden ($\delta^2 W = \delta \epsilon : \mathbf{C} : \delta \epsilon = \min$). La aplicación de este principio resulta en que la zona de localización debe tener un ancho y volumen iguales a cero ($k = 0$), lo que se traduce en un desplazamiento inelástico y una energía de fractura iguales a cero. Bazant y Belytschko (1985) obtuvieron resultados similares al modelar ondas elásticas en una barra. Este resultado es físicamente inaceptable, ya que el fenómeno de localización de deformaciones ocurre (es un fenómeno real) y no puede ser que se produzca energía de fractura nula (en otras palabras, disipación nula).

La conclusión es que estos modelos no son adecuados ya que la localización no se produce en una región de ancho nulo. Por lo tanto, si se desea emplear una formulación continua (empleando relaciones esfuerzo - deformación para el ablandamiento), es necesario complementar dicho modelo con condiciones que eviten que las deformaciones se localicen en una región de ancho cero. A estas condiciones se les denomina "Limitadores de la Localización" (Bazant y Belytschko, 1985). Uno de los modelos más sencillos que incluye limitadores es el de banda de agrietamiento de Bazant y Oh (1983), el cual se presentó en la sección anterior. Este modelo establece un ancho de zona de localización mínimo, que para

el caso del concreto es función del tamaño del agregado.

2.4 Propiedades mecánicas del concreto

2.4.1 Generalidades

En esta sección se hace una breve presentación de las características más sobresalientes que definen el comportamiento del concreto. Con base en estas características se pueden establecer las propiedades que deben ser incorporadas al modelo constitutivo a emplearse en los análisis numéricos. Las propiedades mecánicas de los materiales se establecen con base en resultados experimentales, los cuales más que establecer el comportamiento del material, determinan el comportamiento del espécimen para condiciones muy particulares.

En este trabajo se entiende por Concreto al material denominado Concreto Hidráulico, el cual es el resultado de la mezcla de agregados (generalmente pétreos), agua y cemento Portland. Debido a esto es que sus propiedades están afectadas por las características de los materiales que lo componen y la proporción de los mismos.

El concreto es un material que posee una elevada resistencia a la compresión, f_c , en relación a su resistencia a la tensión, f_t , (aproximadamente diez veces), fig. 2.9(a). Tanto en compresión como en tensión, la curva esfuerzo-deformación está compuesta por una parte elástica lineal (comprendida entre 0 y 30% del esfuerzo máximo); posteriormente se produce una parte no lineal, generada por la formación de microagrietamiento, hasta llegar a un esfuerzo máximo a partir del cual comienza un ablandamiento. El cálculo de este esfuerzo para distintas condiciones de esfuerzos permite establecer las superficies de falla del material. Numerosos investigadores han realizado experimentos para evaluar el comportamiento del concreto bajo distintos estados de carga, siendo el estudio de Kupfer *et al.* (1969) el más citado para el caso plano (esfuerzos biaxiales), fig. 2.9(b). En este estudio se encontró que, ante estados de esfuerzos en compresión biaxial, los esfuerzos resistentes aumentaban entre un 15 y un 25% con relación a los esfuerzos uniaxiales a compresión; ante esfuerzos en tensión-compresión la resistencia a compresión disminuye cuando se incrementa el esfuerzo a tensión; y la tensión resistente bajo tensiones biaxiales es aproximadamente igual a la que se presenta bajo tensión uniaxial.

2.4.2 Fractura del concreto

Como se mencionó anteriormente, la fractura y la falla del concreto se producen a consecuencia de la proliferación de imperfecciones y microgrietas, las cuales existen antes de la aplicación de la carga. En particular, la fractura en Modo I presenta las siguientes características: microagrietamiento distribuido, zona de puenteo y ramificación y una zona

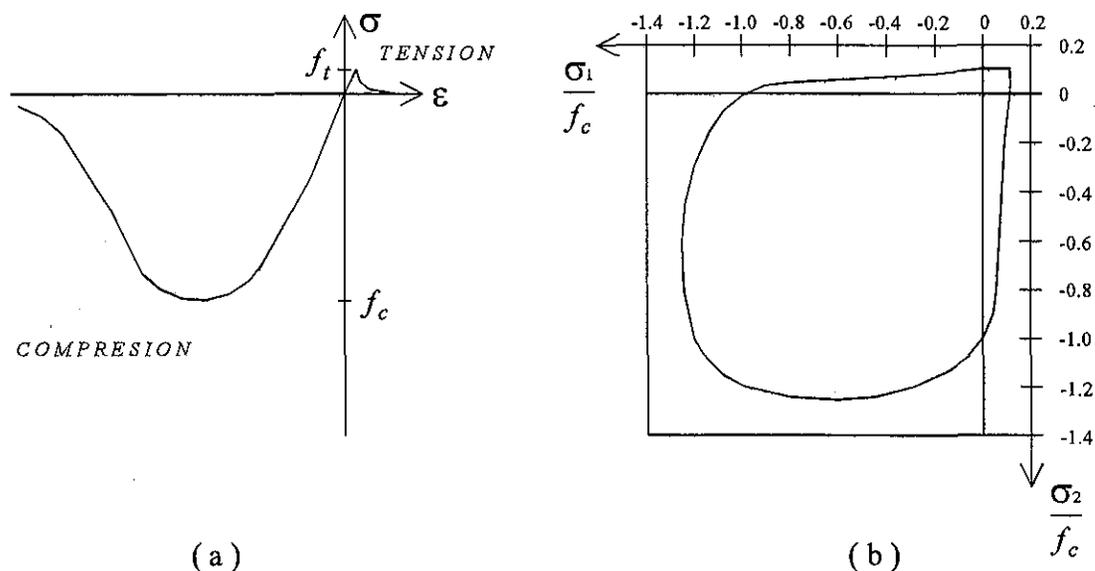


Figura 2.9: (a) Curva Esfuerzo-Deformación uniaxial y (b) superficie de falla para estados biaxiales de esfuerzos en el concreto

donde existe una macrogrieta cuya superficie no transmite esfuerzos. Estas zonas no son constantes a través del espesor del espécimen por lo que el problema es estrictamente tridimensional, aunque para fines prácticos se simplifica a dos dimensiones.

El comportamiento del ablandamiento a tensión del concreto depende en gran medida de la composición del material; por ejemplo, el tamaño de los agregados influye sobre el ancho de la zona de fracturamiento, los esfuerzos residuales en la parte final de la curva de ablandamiento y la energía de fractura G_f . La proporción agua-cemento afecta la porosidad y como consecuencia ocurre una disminución de la resistencia a tensión dado un aumento de la porosidad, produciéndose un decremento de la energía de fractura. Finalmente, los parámetros del ablandamiento varían con los ciclos de carga.

Los modelos de la Mecánica de la Fractura No Lineal, y en particular el modelo de Grieta Ficticia, requieren de la definición de una curva “esfuerzo-abertura de la grieta” ($\sigma - w$) para cuantificar la energía disipada por la abertura de la grieta. La forma de la curva $\sigma - w$ influye en la predicción de la respuesta estructural. Varias formas de curvas $\sigma - w$ han sido propuestas; por ejemplo, Hillerborg *et al.* (1976) y Cedolin *et al.* (1987) propusieron curvas de ablandamiento lineal, el Código de Modelos Europeo (CEB, 1991) una curva bilineal, y Hordijk (1991) y Reinhardt (1984) curvas exponenciales.

Por otra parte, el estudio del comportamiento del concreto ante estados de esfuerzos cortantes ha generado grandes debates dentro de la comunidad científica. En principio, un estado de esfuerzos cortantes puede ser considerado como un estado biaxial de esfuerzos en tensión-compresión, por lo que se puede considerar que el estudiar la falla en tensión-

compresión cubre todos los estados de esfuerzo cortante dada una rotación de ejes; sin embargo, el problema no es tan simple porque el agrietamiento genera anisotropía en el comportamiento del material.

Existen múltiples estudios experimentales sobre el comportamiento a cortante de elementos de concreto, verificando sus resultados mediante análisis numéricos empleando la aproximación de la MFEL. Es importante mencionar que existen discrepancias entre los diversos estudios sobre el tema, por ejemplo Bazant y Pfeiffer (1986) defienden la existencia de una energía de fractura en Modo II, mientras que Ingraffea y Panthaki (1986) establecen que no existe un Modo II puro, sino que existe en realidad Modo I curvo o Modos Mixtos (Modos I y II).

Shah *et al.* (1995) y van Mier (1997) mencionan que muchas de las pruebas experimentales, como las citadas en el párrafo anterior, coinciden en su deseo de obtener las propiedades mecánicas asociadas al Modo II de fractura; sin embargo, desde sus puntos de vista, nadie ha logrado alcanzar estos objetivos. Adicionalmente, coinciden en que la propagación de grietas en Modo Mixto puede ser modelado empleando solamente parámetros de Modo I.

Capítulo 3

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA FALLA

Las Teorías de Falla son un campo muy extenso, cuya área más conocida y recurrida es la Mecánica de la Fractura. En particular, la Mecánica de la Fractura está subdividida en varias áreas entre las cuales figuran: Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica, Mecánica de la Fractura No Lineal, entre otras. Lo amplio de este tema da lugar a otro vasto campo compuesto por todos aquellos métodos numéricos y sus correspondientes implantaciones computacionales que buscan aproximar, modelar, analizar y resolver el proceso de falla. Los trabajos en este campo son muchos y diversos, por lo que no es posible presentar un resumen de todos ellos; de modo que se presentan algunos de los trabajos más sobresalientes de ciertas áreas, lo cual permitirá establecer el contexto bajo el cual se desarrolla la presente investigación.

Primeramente, se describe el modelo de Grieta Discreta el cual tiene la desventaja de requerir modificar constantemente la malla; sin embargo, este método es capaz de localizar las deformaciones (o de manera más precisa, modelar la grieta) de manera adecuada. Posteriormente se presenta el modelo de Grieta Distribuida, el cual no requiere modificar la malla, pero no es capaz de localizar las deformaciones de manera adecuada. Buscando desarrollar un método con las virtudes sobresalientes de los dos modelos antes mencionados, se llega a la aproximación de Discontinuidades Interiores, a la cual pertenece este trabajo y es el apartado principal de este capítulo. En esta aproximación se mejoran los campos de desplazamientos y deformaciones para incluir a la discontinuidad. Se finaliza este capítulo comentando brevemente sobre los métodos Libres de Malla, los cuales han tomado auge recientemente y cuya aplicación a la Mecánica de la Fractura es interesante y prometedora.

3.1 Modelo de Grieta Discreta

El modelo de Grieta Discreta reproduce numéricamente la(s) grieta(s) como una discontinuidad geométrica, lo cual se hace separando los bordes de los elementos. La propagación de la grieta bajo este modelo requiere de un remallado en la región de estudio, generándose un costo computacional adicional al necesario por el propio análisis numérico, fig. 3.1(a). Este remallado ha sido frecuentemente señalado como la deficiencia de este modelo. Es importante mencionar que los resultados obtenidos al emplear este modelo son buenos, siendo éstos frecuentemente empleados por algunos autores como punto de comparación y referencia.

El Método de los Elementos Finitos y el Método de la Ecuación Integral de Frontera han sido ampliamente usados para analizar problemas de la Mecánica de la Fractura con el modelo de Grieta Discreta (Aliabadi y Rooke, 1991; Owen y Fawkes, 1983; Wawrzynek e Ingraffea, 1991). En estos métodos se emplean aproximaciones numéricas (las cuales no son descritas en el presente trabajo) para calcular el factor de intensidad de esfuerzos K o la tasa de liberación de energía G y así permitir relacionar G con K . Calcular la tasa de liberación de energía tiene la ventaja de que se puede aplicar a materiales con comportamiento no lineal.

Como se mencionó en el capítulo anterior, los problemas elásticos son aproximados por medio de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL), la cual considera que la distribución de esfuerzos en la vecindad de la punta de la grieta es función de $1/\sqrt{r}$ (ec. 2.1), donde r es la distancia radial a la punta de la grieta. Esta distribución de esfuerzos puede ser obtenida si se mueven los nodos medios a los cuartos para el caso de elementos triangulares de seis nodos; para elementos cuadriláteros de ocho nodos se hace lo mismo, pero además se colapsa un lado del elemento, fig. 3.1(b).

Cuando se forma una zona plástica grande alrededor de la punta de la grieta la MFEL deja de ser válida y se recurre a la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica. En este caso, la singularidad $1/\sqrt{r}$ deja de existir y se requiere una distribución de deformaciones función $1/r$ para modelar una punta de grieta completamente plastificada. Esta distribución se obtiene degenerando un elemento cuadrilátero de ocho nodos en un elemento triangular, pero sin colapsar los nodos del lado reducido a un punto y manteniendo el nodo medio en su posición, fig. 3.1(c), (Anderson, 1995).

Las dos aproximaciones aquí mencionadas consideran que una vez formada la grieta, por medio de la separación de los bordes de los elementos, no se produce transmisión de esfuerzos a través de la misma. Por lo tanto, esto no es aplicable a materiales cuasifrágiles de manera directa, ya que en este tipo de material se presenta transmisión de esfuerzos a través de la grieta. Una opción para modelar materiales cuasifrágiles utilizando el modelo de Grieta Discreta es colocando elementos de interfaz en la superficie de la grieta para incluir el efecto

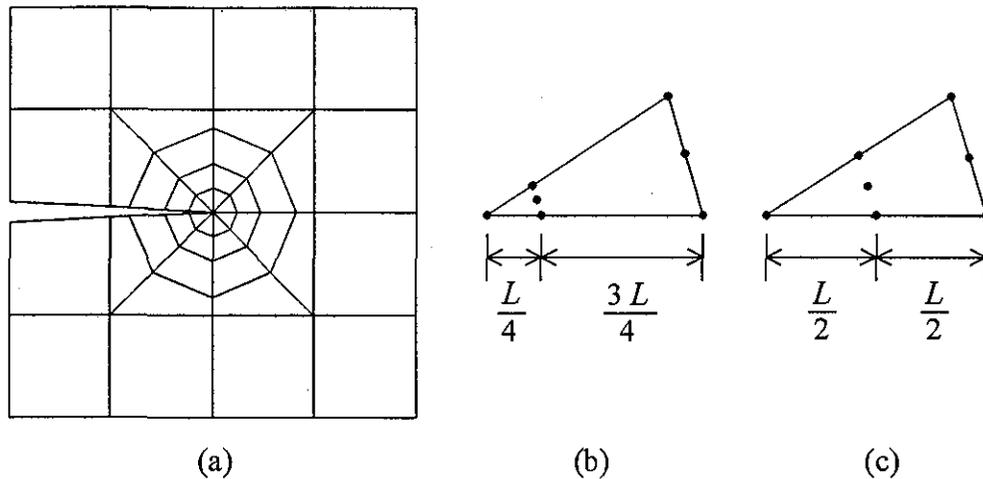


Figura 3.1: (a) Malla alrededor de la punta de la grieta. Tipos de elementos empleados en el análisis (b) elástico y (c) elasto-plástico

de los esfuerzos cohesivos presentes en la grieta durante su abertura.

3.2 Modelo de Grieta Distribuida

El modelo de Grieta Distribuida aproxima numéricamente a la(s) grieta(s) como un conjunto de múltiples pequeñas grietas paralelas uniformemente distribuidas sobre una cierta área o región (elemento finito agrietado). Este modelo, cuyo origen se le atribuye a Rashid (1968), considera al cuerpo agrietado como un medio continuo e incorpora la presencia de la grieta por medio de la modificación de las propiedades físicas. El modelo tomó mucha popularidad principalmente en las décadas de los 70's y 80's debido a la economía computacional obtenida al no requerirse modificar la malla durante el proceso de fracturamiento, a diferencia del modelo de Grieta Discreta.

Este modelo abarca una gran cantidad de aproximaciones que buscan reproducir numéricamente el proceso de fractura. Dentro de éste se encuentran los modelos de daño (Oliver *et al.*, 1990), de plasticidad (Feenstra, 1993), no locales de daño (Bazant y Planas, 1998), medio continuo de Cosserat y de Grado- n (de Borst *et al.*, 1993), y dependientes de la velocidad de carga, entre otros. En Isenberg (1993) se encuentra una amplia presentación sobre los modelos de fractura distribuida, donde se discuten aspectos diversos como modelos constitutivos, aspectos computacionales y aplicaciones.

Los modelos tradicionales de Grieta Distribuida (Rots, 1988) pueden ser divididos en tres grupos:

- Grieta Fija. Se forma una sola grieta cuya orientación se mantiene fija durante todo

el análisis computacional. Por lo tanto, se preserva en la memoria la orientación del daño.

- Grieta Fija Multidireccional. Se pueden formar múltiples grietas cuya orientación individual se mantiene fija durante todo el análisis computacional. Rots (1988) concibe esta aproximación como un caso intermedio entre la Grieta Fija y la Grieta Giratoria.
- Grieta Giratoria. Se forma una grieta cuya orientación varía, manteniéndose perpendicular al eje de la deformación principal. Esto implica que no se preserva en la memoria la orientación del daño.

La característica fundamental de este modelo es la descomposición aditiva de las deformaciones, lo cual fue originalmente propuesto por Litton (1974). De manera similar que en el modelo de Banda de Agrietamiento de Bazant (ver capítulo 2), en este modelo las deformaciones totales ϵ se descomponen en deformaciones de la parte continua (o elástica generalmente) ϵ^e y las deformaciones de agrietamiento ϵ^f :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \quad (3.1)$$

El comportamiento del cuerpo depende de las propiedades constitutivas del material no agrietado y del material agrietado. El comportamiento constitutivo se implanta por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\sigma = D^e \Delta\epsilon^e \quad (3.2)$$

$$\Delta T = D^f \Delta\epsilon^f \quad (3.3)$$

donde $\Delta\sigma$ y ΔT son los incrementos en los esfuerzos en coordenadas globales y locales respectivamente; $\Delta\epsilon^e$ y $\Delta\epsilon^f$ son los incrementos en las deformaciones elásticas globales y en las deformaciones de agrietamiento locales; D^e y D^f son las matrices constitutivas de la parte no agrietada y de la parte agrietada. El sistema coordenado local es el referenciado a la superficie de la grieta, donde \mathbf{n} es la normal a la grieta y se asocia al Modo I de falla (ver capítulo 2), fig. 3.2.

La matriz constitutiva de la grieta es función de los módulos de rigidez de la grieta en Modo I, II y III de falla. Para el caso más simple, los Modos de falla son modelados de manera desacoplada. El Modo I de falla ha sido ampliamente estudiado para múltiples materiales y en particular para el concreto, existiendo una gran cantidad de modelos constitutivos. Pero el módulo del Modo II de falla es un parámetro de controversia para el concreto y

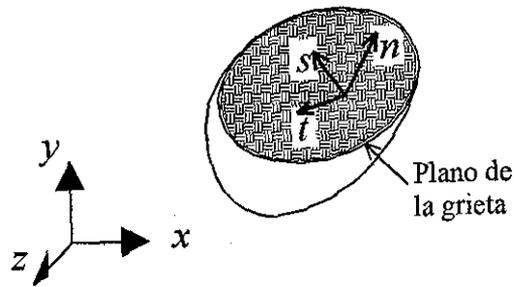


Figura 3.2: Sistema de coordenadas local (al plano de la falla) y global

otros materiales; este módulo generalmente es expresado en función del módulo de rigidez a cortante y del factor de retención de cortante β , el cual toma valores entre 0 y 1.

Otro ingrediente importante en esta aproximación es la determinación del ancho de banda de agrietamiento del elemento finito fisurado. La adecuada determinación de este parámetro permite hacer objetivos los resultados a través de la correcta disipación de energía. Existen muchas expresiones en la literatura técnica para calcular el ancho de banda de agrietamiento, algunas de ellas son sencillas en su empleo como la de Bazant y Oh (1983) y la empleada en el programa DIANA (TNO, 1998); asimismo, existen expresiones derivadas de manera consistente con la disipación de energía (Oliver, 1989) y hasta expresiones no locales como la de Mosalam *et al.* (1997). Desde el punto de vista del autor del presente trabajo, si se desea emplear una expresión sencilla es recomendable utilizar la expresión que usa el programa DIANA, la cual corresponde a la raíz cuadrada del área; pero si se desea emplear una expresión adecuada desde el punto de vista teórico, se recomienda el trabajo de Oliver (1989).

Rots (1988) identificó algunos problemas que son característicos de los modelos tradicionales de Grieta Distribuida. Estos fueron observados al modelar casos de fractura localizada en modo mixto de falla:

- Efecto de la malla. Los resultados son afectados por el tamaño y la orientación de los elementos; sin embargo, este efecto puede ser reducido utilizando mallas finas.
- Modos cinemáticos falsos. Estos son producidos por la falta de convergencia en el análisis.
- Atoramiento de los esfuerzos. Este fenómeno ocurre como consecuencia de la compatibilidad de desplazamientos entre elementos y de que la grieta no está alineada con el borde del elemento. En consecuencia, el elemento en el interior de la banda de ablandamiento impone deformaciones a los elementos vecinos; si los elementos vecinos

limitan dichas deformaciones se produce un atoramiento de los esfuerzos en el interior y no llega a descargarse la banda por el ablandamiento.

El modelo de Grieta Distribuida ha sido exitosamente empleado para modelar procesos de fracturamiento en los cuales las fisuras son distribuidas sobre una cierta área, como ocurre con el concreto reforzado. Sin embargo, este modelo no ha sido del todo satisfactorio para modelar fractura localizada, como ya se mencionó. En la siguiente sección se presentan múltiples modelos que buscan mejorar la capacidad de los modelos de Grieta Distribuida para simular el proceso de fractura localizada.

3.3 Discontinuidades Interiores

En un principio los problemas de fractura eran modelados usando los modelos de Grieta Discreta y Grieta Distribuida, los cuales tienen limitaciones como se mencionó en las secciones anteriores. Las aproximaciones con Discontinuidades Interiores surgen como resultado de buscar nuevos métodos que sean capaces de modelar problemas de fractura localizada, como ocurre con el modelo de Grieta Discreta, pero sin la necesidad de modificar la malla, como sucede con el modelo de Grieta Distribuida.

En la aproximación de Discontinuidades Interiores, los elementos finitos son mejorados en sus funciones de interpolación para que sus campos de desplazamientos y deformaciones sean más adecuados para resolver problemas de fractura y/o localización de deformaciones. Es importante señalar que, en este tipo de aproximación, no se implanta la distribución asintótica de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta como ocurre en el modelo de Grieta Discreta. Estas aproximaciones pueden ser divididas de acuerdo al tipo de discontinuidad y a las relaciones constitutivas empleadas como se muestra a continuación. Se ilustra esta agrupación de las aproximaciones por medio de la fig. 3.3, en la que se muestra una barra sometida a carga axial que falla en Modo I.

1. Aproximación Continua. Esta aproximación considera que el sólido es continuo en todos sus puntos y emplea relaciones constitutivas estándares (relaciones esfuerzo - deformación) en todo el dominio. La falla del elemento produce una zona de localización de deformaciones, donde el deterioro causa una concentración de deformaciones.
 - (a) Discontinuidades Débiles. En estos modelos el campo de desplazamientos es continuo, pero el campo de deformaciones es discontinuo dentro del dominio ya que se presenta un salto en el campo de deformaciones a través de los bordes de la zona de localización. Por ejemplo: Belytschko *et al.* (1988); Sluys y Berrends (1998).

(b) Discontinuidades Fuertes. En estos modelos el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones es infinito (no acotado) en la discontinuidad. Esto se produce al hacer que el ancho de la zona de localización tienda a cero. Por ejemplo: Simo *et al.*, (1993); Oliver, (1996a); Regueiro y Borja (1999).

2. Aproximación Discreta. En esta aproximación se considera que el cuerpo deja de ser continuo ya que se produce una grieta o discontinuidad en el cuerpo, por lo cual se emplean relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, mientras que el resto del dominio utiliza relaciones constitutivas estándares. Por ejemplo: Dvorkin y Assaneli, (1991); Klisinski *et al.*,(1991); Lofti y Shing, (1995).

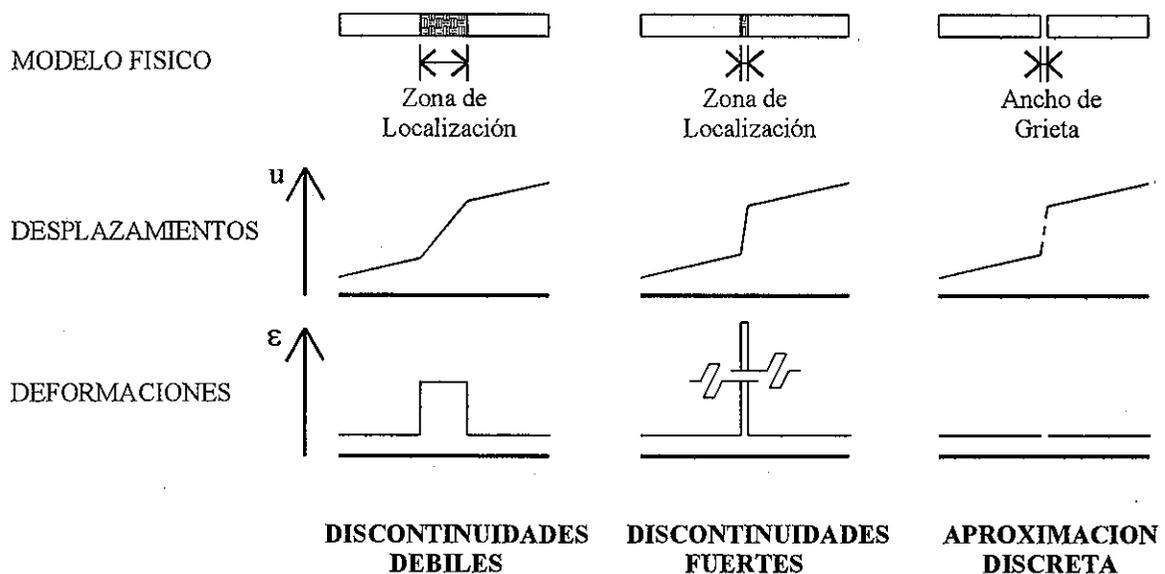


Figura 3.3: Tipos de aproximaciones para Discontinuidades Interiores

Siendo numerosos los trabajos realizados en el tema de Discontinuidades Interiores, a continuación se presentan algunos de los trabajos más sobresalientes:

- Ortiz *et al.* (1987) propusieron un método para mejorar el desempeño de los elementos isoparamétricos en problemas de fallas localizadas, los cuales involucran localización de deformaciones. Ellos consideran que los elementos que están en el borde de una banda de cortante (o banda de localización de deformaciones) deben contener una línea de discontinuidad de deformaciones. El método consiste en adicionar un modo de deformación donde ocurre la localización de deformaciones, la cual es determinada por medio de un análisis de bifurcación. El método fue formulado como un Método \bar{B} (B barra, Hughes, 1980) y derivado directamente del principio de Hellinger - Reissner.

- Belytschko *et al.* (1988) desarrollaron una metodología para localizar bandas de cortante que sean de ancho menor que el tamaño del elemento. La formulación introduce en el campo de deformaciones una banda de localización de deformaciones cuyo ancho es considerado como un parámetro del material. A partir de un análisis de bifurcación se introduce la banda de localización; la magnitud de la discontinuidad de las deformaciones se obtiene por medio de la imposición de la continuidad de tracciones y de la compatibilidad dentro del elemento.
- Dvorkin *et al.* (1990, 1991) propusieron una formulación de elemento finito que incorpora una línea de discontinuidad de desplazamientos. La formulación se deriva del “Principio de los Trabajos Virtuales” para un sólido con una línea de discontinuidad que transmite tracciones y cuyo comportamiento está definido por una ley constitutiva esfuerzo-salto de los desplazamientos. Esta formulación fue aplicada a un elemento cuadrilátero basado en el Método de Interpolación Mixta de los Componentes Tensoriales (QMITC). Si bien la metodología propuesta conduce a un elemento capaz de localizar deformaciones, el desarrollo del trabajo no es consistente variacionalmente y no es muy claro.
- Lofti y Shing (1995) desarrollaron una aproximación que incluye una discontinuidad en desplazamientos que tiene tracciones cohesivas, pero derivada de la formulación variacional de tres campos de H_u - Washizu. En este trabajo fueron desarrollados y evaluados varios elementos mixtos con modos de deformación adicionales.
- Larsson, Runesson y Ottosen (1993), quienes han realizado contribuciones en el tema de las relaciones constitutivas y del análisis de bifurcación, propusieron una aproximación que regulariza las discontinuidades de los desplazamientos a lo largo de la frontera entre elementos, empleando modelos constitutivos elasto-plásticos. Esta aproximación requiere que el borde de los elementos esté alineado con la discontinuidad. Posteriormente, Larsson y Runesson (1996) desarrollaron un elemento triangular de deformación constante con una banda de localización cuyo ancho se hace tender a cero. La formulación de este elemento es mixta y se basa en la aproximación de deformaciones mejoradas de Simo y Rifai (1990). Este trabajo fue extendido (Larsson *et al.*, 1996) para estudiar el problema de localización en suelos no drenados por medio de la regularización de discontinuidades en los desplazamientos y en la presión de poro.
- Klisinski, Runesson y Sture (1991) establecieron el modelo de elemento finito con banda interior de ablandamiento. Pero en este modelo, más que tener una banda, lo cual significa trabajar con deformaciones, considera en realidad una línea de discontinuidad. La deducción del modelo se realiza con sencillez bajo una concepción simplista de

este tipo de problema; su implantación también es simple ya que sólo se requiere sustituir la matriz constitutiva por una matriz constitutiva modificada que incluye el efecto de la discontinuidad de desplazamientos. Olofsson, Klisinski y Nedar (1994) relacionaron este modelo con el modelo de Grieta Distribuida a través de la matriz de redistribución de desplazamientos nodales A . Ohlsson y Olofsson (1997) implantaron un modelo constitutivo para modo mixto de falla en este tipo de aproximación de Discontinuidades Interiores. Finalmente, Tano, Klisinski y Olofsson (1998) realizaron un estudio sobre el problema de atoramiento de esfuerzos en los modelos de Grieta Distribuida y en el de Banda Interior de Ablandamiento. En este trabajo modificaron el procedimiento de deducción de la matriz de rigidez; la matriz de rigidez ya no se calcula modificando la matriz constitutiva, sino calculando la matriz de rigidez de manera estándar y multiplicándola por una matriz que incorpora los efectos de la discontinuidad, de manera similar a Dvorkin *et al.* (1990, 1991).

- La aproximación de Discontinuidades Fuertes fue introducida por Simo, Oliver y Armero (1993). En este trabajo se presentaron los elementos y conceptos básicos de esta aproximación: introducción de una función Delta de Dirac δ para las deformaciones localizadas, reinterpretación del módulo de ablandamiento, definición del campo de desplazamiento discontinuo y construcción de sus correspondientes funciones de forma; el ejemplo ilustrativo es sencillo, siendo un problema unidimensional de una línea de deslizamiento. Simo y Oliver (1994) detallaron el Marco Teórico de esta aproximación, en particular, dedujeron las formas locales de las ecuaciones de equilibrio a partir de la forma débil (Principio de los Trabajos Virtuales aplicado a todo el dominio); esta aproximación se construyó empleando el Método de las Deformaciones Mejoradas (Simo y Rifai, 1990). Posteriormente, Oliver (1996.a y 1996.b) realizó una descripción amplia, clara y detallada de esta aproximación. Armero y Garikipati (1996) establecieron esta aproximación aplicada a Plasticidad Multiplicativa. Oliver y Pulido (1998) extendieron los conceptos de discontinuidades fuertes a grandes deformaciones, empleando modelos de daño isotrópico. Oliver *et al.* (1999) desarrollaron un modelo de ancho de banda variable a través del cual se establecía una transición entre los regímenes: de discontinuidades débiles a discontinuidades fuertes; esto se realizó debido a que el fenómeno de bifurcación no siempre se da en régimen de discontinuidad fuerte. Oliver (2000) deduce las relaciones de tipo discreto (tracción - salto de los desplazamientos), asociados a la Mecánica de la Fractura No Lineal, a partir de la aproximación de Discontinuidades Fuertes que tiene relaciones de tipo continuo (relaciones esfuerzo - deformación), asociados a la Mecánica de los Medios Continuos.
- Jirasek (2000) realizó un estudio comparativo entre las distintas aproximaciones,

disponibles en la literatura técnica, del Método de los Elementos Finitos con Discontinuidades Interiores. Estableció un marco variacional general válido para todas las aproximaciones, a partir del cual fue derivando las aproximaciones estudiadas como casos particulares. Todas las aproximaciones las dividió en tres grupos: Formulación Simétrica Estáticamente Optima (SOS), Formulación Simétrica Cinemáticamente Optima (KOS) y Formulación No Simétrica Estática y Cinemáticamente Optima (SKON), reportando que el último grupo posee el mejor desempeño. A este último grupo pertenecen las aproximaciones de Dvorkin *et al.* (1990, 1991), de Klisinski *et al.* (1991) y de Simo y Oliver (1994). En un trabajo posterior Jirasek y Zimmermann (2001a y 2001b) implantaron, en un triángulo de deformación constante, una aproximación desarrollada con la formulación SKON. Adicionalmente, desarrollaron detalladamente un modelo de daño para modelar el comportamiento de la grieta y proponen un modelo que inicia como uno de Grieta Distribuida (Giratoria) para posteriormente cambiar a uno de Discontinuidades Interiores. Finalmente, comparan el desempeño de varios modelos buscando remediar patologías tales como el atoramiento de esfuerzos.

3.4 Métodos Libres de Malla

Recientemente, en la literatura técnica se han publicado múltiples trabajos referentes al mejoramiento de la aproximación tradicional del Método de los Elementos Finitos. En particular, en estos trabajos se ha buscado desarrollar nuevas aproximaciones dentro del método de Galerkin, pero con la cualidad de que no se requiera de la malla para la construcción de la aproximación. Estos métodos, llamados “libres de malla” o “sin malla”, buscan evitar las dificultades y limitaciones asociadas a la malla de elementos finitos por medio de la construcción de una aproximación que se basa en la información de los nodos y en un conjunto de funciones de peso. Belytschko *et al.* (1996) realizan un análisis general de los desarrollos realizados en este tema.

Moes *et al.* (1999) y Dolbow *et al.* (2000) estudian el proceso de propagación de una grieta por medio del mejoramiento local de la aproximación de desplazamientos empleando el Método de la Partición de la Unidad (Melenk y Babuska, 1996). Las características especiales que poseen sus modelos son:

1. Mejoramiento del campo de desplazamientos para incorporar la discontinuidad producida por la presencia de la grieta. Esto permite propagar la grieta sin modificar la malla.
2. Implantación de la distribución asintótica de esfuerzos alrededor de la punta de la

grieta.

Moes *et al.* (1999) y Dolbow *et al.* (2000) han buscado recuperar dos virtudes básicas de los modelos de Grieta Discreta: la grieta se modela como una discontinuidad geométrica y se modela el estado de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta con lo que se puede evaluar el factor de intensidad de esfuerzos.

Wells y Sluys (2001) desarrollaron un modelo, con base en el método de la Partición de la Unidad, que permite introducir saltos en el campo de desplazamientos. Esta aproximación está orientada hacia materiales heterogéneos cuasifrágiles y emplea un modelo de grieta cohesiva. Ellos indicaron que esta aproximación arroja buenos resultados, pero reconocen que se incrementa la complejidad de implantación con respecto a los métodos de Discontinuidades Interiores.

Capítulo 4

FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE DISCONTINUIDADES INTERIORES

Los métodos pertenecientes a la “Aproximación de Discontinuidades Interiores” pueden ser divididos en tres grupos: Aproximación Discreta, Discontinuidades Fuertes en la Aproximación Continua y Discontinuidades Débiles en la Aproximación Continua. Las características particulares de cada grupo se presentan brevemente en el capítulo anterior. En este capítulo se establece la Formulación Variacional correspondiente a cada grupo. La Formulación Variacional del problema establece su base teórica y permite deducir las ecuaciones necesarias para resolver el mismo. Estas ecuaciones son el punto de partida para resolver el problema por el Método de los Elementos Finitos, lo cual será tratado posteriormente.

Los desarrollos aquí presentados se realizan dentro de un marco bidimensional, siendo directa su extrapolación al caso tridimensional. El punto de partida es el “Principio de los Trabajos Virtuales” (Fung, 1965; Malvern, 1969), el cual es válido para cualquier Ley Constitutiva; por lo tanto, las ecuaciones obtenidas a partir de este principio variacional también son válidas para cualquier ley de comportamiento de material. A continuación se presentan las tres actividades realizadas para cada una de las aproximaciones estudiadas:

- Se define un campo de desplazamientos que incluye la discontinuidad, el cual está compuesto por una parte regular y una parte asociada a la discontinuidad.
- Se obtiene una ecuación variacional asociada al equilibrio global del cuerpo, empleando los desplazamientos virtuales asociados a la parte regular. Esta ecuación es similar para

las tres aproximaciones.

- Se obtiene una ecuación asociada al equilibrio a través de los bordes de la discontinuidad.

4.1 Aproximación Discreta

Sea un cuerpo sólido y continuo cuyos puntos materiales están referenciados a un sistema coordenado \mathbf{x} (con componentes x, y). El cuerpo posee un dominio Ω y una frontera Γ (fig. 4.1), al que se le introduce una discontinuidad (*grieta*) en S , cuya normal está definida por el vector \mathbf{n} y establece el sistema coordenado local $\hat{\mathbf{n}}$ (con componentes n, t). La posición de los puntos materiales se describe a través del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, el cual se define como (fig. 4.2a):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ corresponde a la parte regular del campo de desplazamientos; $[[\mathbf{u}]](\mathbf{x})$ es el salto de los desplazamientos que se produce en S ; $M_S(\mathbf{x})$ es una función que se define como (fig. 4.2b):

$$M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi^h(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

$H_S(\mathbf{x})$ es una función escalón definida como:

$$\begin{aligned} H_S(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^- \cup \Omega^- \\ H_S(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^+ \cup \Omega^+ \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\varphi^h(\mathbf{x})$ es una función continua que cumple con:

$$\begin{aligned} \varphi^h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \varphi^h(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (4.4)$$

La función M_S posee dos propiedades: el salto de M_S a través de S es igual a uno ($[[M_S]] = 1$) y $M_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$.

En la fig. 4.1 se puede observar que las líneas S_h^- y S_h^+ dividen al dominio en tres subdominios: $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_h \cup \Omega^+$; mientras que la línea S divide al subdominio Ω_h en dos: $\Omega_h = \Omega_h^- \cup \Omega_h^+$.

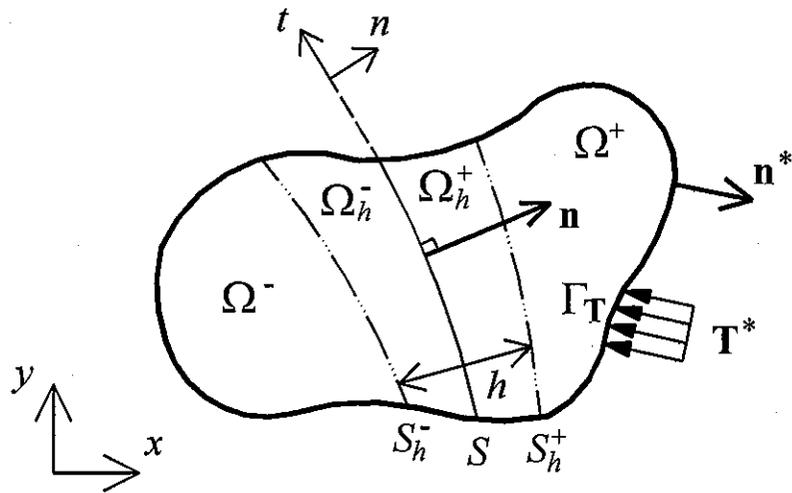


Figura 4.1: Definición de un cuerpo con una discontinuidad para la Aproximación Discreta

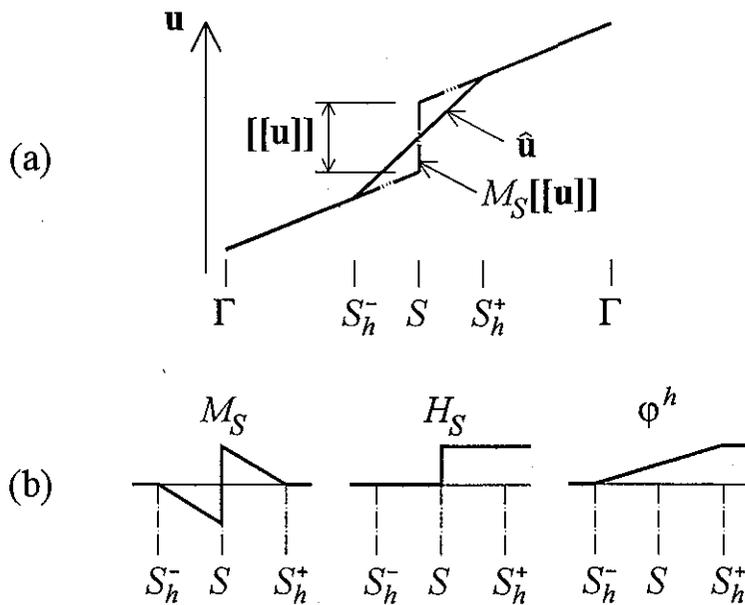


Figura 4.2: Definición (a) del campo de desplazamientos y (b) de la función M_S

Las condiciones de frontera del problema son:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{T}}\end{aligned}\quad (4.5)$$

donde \mathbf{u}^* son los desplazamientos prescritos y \mathbf{T}^* son las tracciones prescritas, cumpliéndose en la frontera que: $\Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{T}} = \Gamma$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{T}} = \emptyset$. Las tracciones en cualquier punto de la superficie pueden calcularse como:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^* \quad (4.6)$$

donde \mathbf{n}^* es el vector normal a la superficie de cuerpo y $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ es el tensor de esfuerzos.

Para desarrollar la Formulación Variacional se parte del “Principio de los Trabajos Virtuales”, el cual se aplica al cuerpo que tiene una discontinuidad, obteniéndose:

$$\blacktriangleright \int_{\Omega \setminus S} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}([\![\mathbf{u}]\!]) \, d\Gamma = \int_{\Omega \setminus S} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.7)$$

donde $\nabla(\bullet)$ es el gradiente de (\bullet) ; $\mathbf{T}([\![\mathbf{u}]\!])$ son las tracciones producidas en la discontinuidad, las cuales son función del salto de los desplazamientos; \mathbf{b} son las fuerzas de cuerpo; $\delta \mathbf{u}$ son los desplazamientos virtuales (también referidos como funciones “de prueba” desde un punto de vista matemático más amplio). De acuerdo con la definición del campo de desplazamientos (ec. 4.1), los desplazamientos virtuales se definen como:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}} + M_S \delta[\![\mathbf{u}]\!] \quad (4.8)$$

Como se sabe, la ec. 4.7 posee un sentido físico: el trabajo interno es igual al trabajo externo. En esta aproximación, el trabajo interno está compuesto por el trabajo producido en la parte continua del dominio ($\Omega \setminus S$), más el trabajo producido por las tracciones cohesivas que tienen lugar en la discontinuidad. El trabajo externo presenta su forma estándar, compuesta por las fuerzas de cuerpo y las tracciones prescritas sobre la superficie.

A continuación se procede a obtener las ecuaciones que gobiernan el problema. Para ello se analizan dos condiciones básicas: primero se analiza la condición $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$ (con $\delta[\![\mathbf{u}]\!] = 0$) y posteriormente la condición $\delta \mathbf{u} = M_S \delta[\![\mathbf{u}]\!]$ (con $\delta \hat{\mathbf{u}} = 0$).

Condición 1. Haciendo $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$, la ec. 4.7 se transforma en:

$$\blacktriangleright \int_{\Omega \setminus S} \nabla \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega \setminus S} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.9)$$

El segundo término de la ec. 4.7 fue cancelado debido a que $\delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in S} = \delta[[\mathbf{u}]]$ ($\delta \mathbf{u}^+|_{\mathbf{x} \in S} - \delta \mathbf{u}^-|_{\mathbf{x} \in S} = \delta[[\mathbf{u}]]$). La ec. 4.9 es muy importante ya que es empleada en la implantación numérica en el Método de los Elementos Finitos. Integrando por partes el primer término de la ec. 4.9 y reordenando términos se obtiene:

$$\int_{\Omega \setminus S} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma = 0 \quad (4.10)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^+$ y $\boldsymbol{\sigma}^-$ son los esfuerzos evaluados en $\Omega_h^+ \setminus S$ y $\Omega_h^- \setminus S$ respectivamente.

La ec. 4.10 indica que se cumple de forma débil con el equilibrio interno, el equilibrio del cuerpo con las tracciones prescritas en la superficie y el equilibrio a través de la discontinuidad S :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \\ \blacktriangleright \quad & \mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_T \\ \blacktriangleright \quad & \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}^* = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n}^* & \forall \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\nabla \cdot (\bullet)$ que es la divergencia de (\bullet) .

Condición 2. Haciendo $\delta \mathbf{u} = M_S \delta[[\mathbf{u}]]$ y considerando que $M_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$ y que $\delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in S} = \delta[[\mathbf{u}]]$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h \setminus S} \nabla (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{T} ([[\mathbf{u}]]) \, d\Omega = & \quad (4.12) \\ \int_{\Omega_h \setminus S} (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T \cap \Gamma_h} (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \end{aligned}$$

con:

$$\nabla (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) = \nabla H_S \otimes \delta[[\mathbf{u}]] + H_S \nabla \delta[[\mathbf{u}]] - \nabla \varphi^h \otimes \delta[[\mathbf{u}]] - \varphi^h \nabla \delta[[\mathbf{u}]] \quad (4.13)$$

Para analizar el primer término de la ec. 4.12 se sustituye en éste la ec. 4.13 y se hacen algunas simplificaciones:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h \setminus S} \nabla (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = & \quad (4.14) \\ \int_{\Omega_h^+ \setminus S} \nabla \delta[[\mathbf{u}]] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega_h \setminus S} (\nabla \varphi^h \otimes \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega_h \setminus S} \varphi^h (\nabla \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \end{aligned}$$

Integrando por partes el primer término a la derecha de la igualdad se obtiene:

$$\int_{\Omega_h^+ \setminus S} \nabla \delta[[\mathbf{u}]] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{S_h^+} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_h^+ \cap \Gamma_T} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^* \, d\Gamma \quad (4.15)$$

$$- \int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_h^+ \setminus S} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}^+$, localizado en el tercer término a la derecha de la igualdad, corresponde al estado de esfuerzos evaluado en el subdominio $\Omega_h^+ \setminus S$; es este término el que posteriormente se igualará al término de las tracciones en la discontinuidad (segundo término de la ec. 4.7).

Sustituyendo la ec. 4.14 en la ec. 4.12 y tras algunas integraciones por partes se obtiene:

$$\boxed{\int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \{\mathbf{T}([\mathbf{u}]) - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}\} \, d\Gamma} \quad (4.16)$$

$$= + \int_{\Omega_h^+ \setminus S} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_h^+ \cap \Gamma_T} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma$$

$$- \int_{\Omega_h \setminus S} \varphi^h \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_h \cap \Gamma_T} \varphi^h \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma$$

Los términos a la derecha de la igualdad verifican el cumplimiento del equilibrio interno y externo en los subdominios: $\Omega_h^+ \setminus S$ y $\Omega_h \setminus S$, resultado que ya había sido garantizado por medio de las ecs. 4.10 y 4.11. El término enmarcado en la ec. 4.16 debe ser igual a cero para que se satisfaga la ec. 4.12, obteniéndose una ecuación de equilibrio en la discontinuidad S : $\int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \{\mathbf{T}([\mathbf{u}]) - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}\} \, d\Gamma = 0$. Al satisfacerse el equilibrio de manera débil en S , se debe satisfacer también de manera fuerte (punto a punto):

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{T}([\mathbf{u}]) = \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n} \quad (4.17)$$

La ecuación anterior, que se establece tomando en cuenta la ec. 4.11₃, define una segunda ecuación que es empleada en la implantación numérica de esta aproximación en el Método de los Elementos Finitos.

4.2 Aproximación Continua. Discontinuidades Fuertes

En esta sección se desarrolla la Formulación Variacional de la aproximación de Discontinuidades Fuertes, la cual ha sido previamente desarrollada por Simo y Oliver (1994). Sea un cuerpo sólido y continuo cuyos puntos materiales están referenciados a un sistema coordenado \mathbf{x} (con componentes x, y). El cuerpo posee un dominio Ω y una frontera Γ (fig. 4.3), al que se le introduce una discontinuidad (*zona de localización de deformaciones, cuyo ancho tiende*

a cero) en S , cuya normal está definida por el vector \mathbf{n} y establece el sistema coordenado local $\hat{\mathbf{n}}$ (con componentes n, t). La posición de los puntos materiales se describe a través del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, el cual tiene la misma definición que en la Aproximación Discreta (ver ec. 4.1):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (4.18)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ corresponde a la parte regular del campo de desplazamientos; $[[\mathbf{u}]](\mathbf{x})$ es el salto de los desplazamientos que se produce en S ; $M_S(\mathbf{x})$ es una función: $M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi^h(\mathbf{x})$, igual a la definida para la Aproximación Discreta (ver ecs. 4.3-4.5).

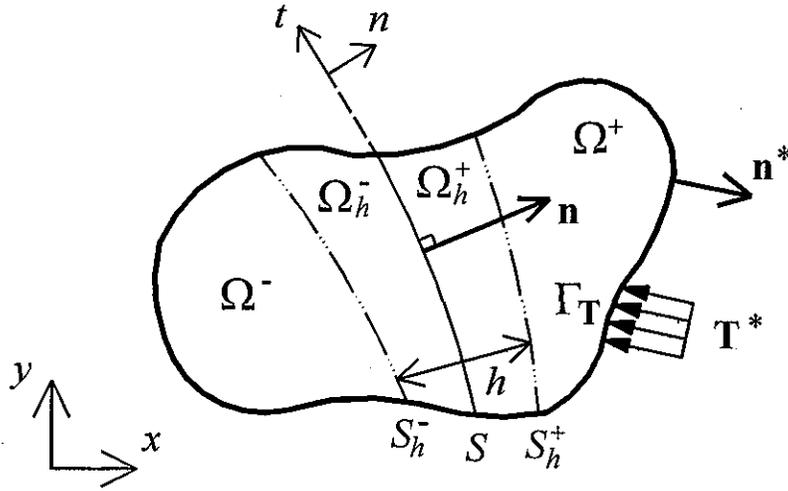


Figura 4.3: Definición de un cuerpo con una discontinuidad para la Aproximación Continua de Discontinuidades Fuertes

Las condiciones de frontera del problema son: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{T}}$, donde \mathbf{u}^* y \mathbf{T}^* son los desplazamientos y tracciones prescritos, con: $\Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{T}} = \Gamma$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{T}} = \emptyset$. La superficie del cuerpo tiene una normal \mathbf{n}^* .

Para desarrollar la Formulaci3n Variacional se parte del ‘‘Principio de los Trabajos Virtuales’’, el cual se aplica a un cuerpo que tiene una zona de localizaci3n cuyo ancho tiende a cero:

$$\blacktriangleright \quad \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.19)$$

donde $\nabla(\bullet)$ es el gradiente de (\bullet) ; $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ son los esfuerzos; \mathbf{b} son las fuerzas de cuerpo; $\delta \mathbf{u}$ son los desplazamientos virtuales (tambi3n referidos como funciones ‘‘test’’ desde un punto de vista matemático m3s amplio), que se definen de acuerdo a la ec. 4.18 como:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}} + M_S \delta [[\mathbf{u}]] \quad (4.20)$$

El sentido físico de la ec. 4.19 consiste en el equilibrio entre el trabajo interno y el trabajo externo. Se observa en las ecs. 4.7 y 4.19, que la diferencia entre la Aproximación Discreta y la Aproximación de Discontinuidades Fuertes está en la manera como se define el trabajo interno, siendo en este caso la discontinuidad parte del continuo. A continuación se procede a obtener las ecuaciones que gobiernan el problema. Para ello se analizan dos condiciones básicas: primero se analiza la condición $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$ (con $\delta [[\mathbf{u}]] = 0$) y posteriormente la condición $\delta \mathbf{u} = M_S \delta [[\mathbf{u}]]$ (con $\delta \hat{\mathbf{u}} = 0$).

Condición 1. Haciendo $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$, la ec. 4.19 se transforma en:

$$\blacktriangleright \quad \int_{\Omega} \nabla \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.21)$$

La ec. 4.21 es similar a su correspondiente en la Aproximación Discreta (ec. 4.7); existiendo una diferencia mínima en la definición del dominio de integración, ya que en este caso se integra todo el dominio debido a que la discontinuidad es parte del dominio. Esta ecuación es empleada en la implantación de esta aproximación en el Método de los Elementos Finitos.

Integrando por partes el primer término de la ec. 4.20 y considerando la discontinuidad, al reordenar términos se obtiene:

$$\int_{\Omega \setminus S} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma = 0 \quad (4.22)$$

La ec. 4.22 indica que se cumple de forma débil con el equilibrio interno, el equilibrio del cuerpo con las tracciones prescritas en la superficie y el equilibrio a través de la discontinuidad S :

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \\ \blacktriangleright \quad & \mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_T \\ \blacktriangleright \quad & \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}^* = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n}^* & \forall \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $\nabla \cdot (\bullet)$ es la divergencia de (\bullet) .

Condición 2. Haciendo $\delta \mathbf{u} = M_S \delta [[\mathbf{u}]]$ y considerando que $M_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$:

$$\int_{\Omega_h} \nabla (M_S \delta [[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega_h} (M_S \delta [[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T \cap \Gamma_h} (M_S \delta [[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.24)$$

con:

$$\nabla (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) = \underbrace{\nabla H_S}_{\delta \otimes \mathbf{n}} \otimes \delta[[\mathbf{u}]] + H_S \nabla \delta[[\mathbf{u}]] - \nabla \varphi^h \otimes \delta[[\mathbf{u}]] - \varphi^h \nabla \delta[[\mathbf{u}]] \quad (4.25)$$

Para analizar el primer término de la ec. 4.24 se sustituye en éste la ec. 4.25 y se simplifica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla (M_S \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \\ + \int_{\Omega_h^+} \nabla \delta[[\mathbf{u}]] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &- \int_{\Omega_h} (\nabla \varphi^h \otimes \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega_h} \varphi^h (\nabla \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.26)$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}_S$, que aparece en el primer término a la derecha de la igualdad, corresponde al estado de esfuerzos evaluado en el interior de la zona de localización o discontinuidad S .

Integrando por partes el segundo término a la derecha de la igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^+} \nabla \delta[[\mathbf{u}]] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \int_{S_h^+} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_h^+ \cap \Gamma_T} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^* \, d\Gamma \\ &- \int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_h^+} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.27)$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}^+$, que aparece en el tercer término a la derecha de la igualdad, corresponde al estado de esfuerzos evaluado en el subdominio $\Omega_h^+ \setminus S$.

Sustituyendo la ec. 4.26 en la ec. 4.24, y tras algunas integraciones por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} &\boxed{\int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma} \\ &= \int_{\Omega_h^+} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_h^+ \cap \Gamma_T} \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma \\ &- \int_{\Omega_h} \varphi^h \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_h \cap \Gamma_T} \varphi^h \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\mathbf{T}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.28)$$

En los términos de la derecha de la igualdad se verifica que se cumple el equilibrio interno y externo en Ω_h^+ y Ω_h . El primer término de la ecuación debe ser igual a cero para que se satisfaga la ec. 4.24, obteniéndose una ecuación de equilibrio en la discontinuidad S : $\int_S \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = 0$. Al satisfacerse el equilibrio de manera débil en S , se debe satisfacer también de manera fuerte (punto a punto):

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n} \quad (4.29)$$

La ecuación anterior, que se establece tomando en cuenta la ec. 4.23₃, define una segunda ecuación que es empleada en la implantación numérica de esta aproximación en el Método de los Elementos Finitos.

4.3 Aproximación Continua. Discontinuidades Débiles

Sea un cuerpo sólido y continuo cuyos puntos materiales están referenciados a un sistema coordenado \mathbf{x} (con componentes x, y). El cuerpo posee un dominio Ω y una frontera Γ (fig. 4.4), al que se le introduce una discontinuidad (*zona de localización de deformaciones de ancho k*) en S , cuya normal está definida por el vector \mathbf{n} y establece el sistema coordenado local $\hat{\mathbf{n}}$ (con componentes n, t). La posición de los puntos materiales se describe a través del campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, el cual se define como (fig. 4.5a):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + M_k(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (4.30)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ corresponde a la parte regular del campo de desplazamientos; $[[\mathbf{u}]](\mathbf{x})$ es el salto de los desplazamientos que se produce en el interior de la zona de localización; $M_k(\mathbf{x})$ es una función que se define como (fig. 4.5b):

$$M_k(\mathbf{x}) = H_k(\hat{\mathbf{n}}) - \varphi^h(\mathbf{x}) \quad (4.31)$$

H_K es una función continua (más adelante se emplea una función rampa para definirla) que cumple con:

$$\begin{aligned} H_k(\hat{\mathbf{n}}) &= 0 \quad \forall \hat{\mathbf{n}} < S_h^- \\ H_k(\hat{\mathbf{n}}) &= 1 \quad \forall \hat{\mathbf{n}} > S_h^+ \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\varphi^h(\mathbf{x})$ es una función continua que cumple con:

$$\begin{aligned} \varphi^h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ \varphi^h(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (4.33)$$

La función M_k tiene como propiedad que: $M_k = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$.

En la fig. 4.4 se puede observar que las líneas S_h^- y S_h^+ dividen al dominio en tres

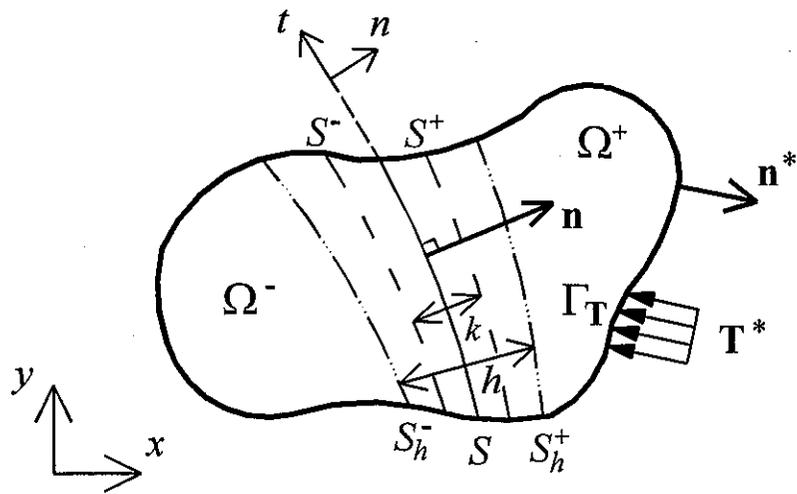


Figura 4.4: Definición de un cuerpo con una banda de localización de deformaciones para la Aproximación Continua de Discontinuidades Débiles

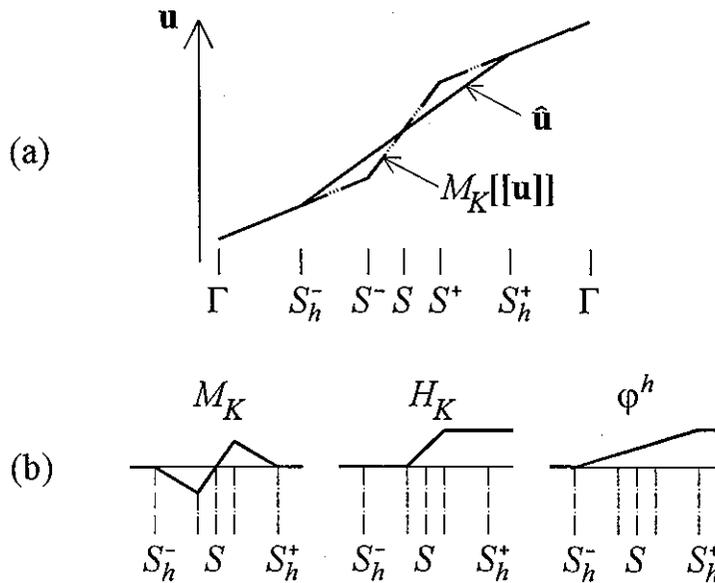


Figura 4.5: Definición (a) del campo de desplazamientos y (b) de la función M_k

subdominios: $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_h \cup \Omega^+$. Las líneas S_h^- y S_h^+ contienen al dominio Ω_h , mientras que las líneas S^- y S^+ contienen al dominio Ω_k , por lo que $\Omega_k \subset \Omega_h$. A su vez, la discontinuidad S divide a los subdominios Ω_h y Ω_k , de tal suerte que: $\Omega_h = \Omega_h^- \cup \Omega_h^+$ y $\Omega_k = \Omega_k^- \cup \Omega_k^+$.

Las condiciones de frontera del problema son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{T}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde \mathbf{u}^* son los desplazamientos prescritos y \mathbf{T}^* son las tracciones prescritas, cumpliéndose en la frontera que: $\Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{T}} = \Gamma$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{T}} = \emptyset$. Las tracciones en cualquier punto de la superficie pueden calcularse como:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^* \quad (4.35)$$

donde \mathbf{n}^* es el vector normal a la superficie de cuerpo y $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ es el tensor de esfuerzos.

Para desarrollar la Formulación Variacional se parte del "Principio de los Trabajos Virtuales", el cual se aplica al cuerpo que tiene una zona de localización de deformaciones de ancho k , obteniéndose:

$$\blacktriangleright \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.36)$$

donde $\nabla(\bullet)$ es el gradiente de (\bullet) ; \mathbf{b} son las fuerzas de cuerpo; $\delta \mathbf{u}$ son los desplazamientos virtuales (también referidos como funciones "test" desde un punto de vista matemático más amplio). De acuerdo con la definición del campo de desplazamientos (ec. 4.30), los desplazamientos virtuales se definen como:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}} + M_k \delta [[\mathbf{u}]] \quad (4.37)$$

La ec. 4.36 representa el equilibrio entre el trabajo interno y el trabajo externo, siendo el caso de Discontinuidades Fuertes (ec. 4.19) idéntico al caso de Débiles (ec. 4.36). A continuación se procede a obtener las ecuaciones que gobiernan el problema, para lo cual se sigue el procedimiento empleado en las secciones anteriores consistente en el análisis de dos condiciones: (1) $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$ (con $\delta [[\mathbf{u}]] = 0$) y (2) $\delta \mathbf{u} = M_k \delta [[\mathbf{u}]]$ (con $\delta \hat{\mathbf{u}} = 0$).

Condición 1. Haciendo $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}$, la ec. 4.36 se transforma en:

$$\blacktriangleright \int_{\Omega} \nabla \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.38)$$

Esta ecuación es idéntica a la obtenida para Discontinuidades Fuertes (ec. 4.21) y es

la base para implantar numéricamente esta aproximación en el Método de los Elementos Finitos. Integrando por partes el primer término de la ec. 4.38 y reordenando los términos se obtiene que esta ecuación cumple de forma débil con el equilibrio interno y el equilibrio del cuerpo con las tracciones prescritas: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S$ y $\mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{T}}$.

Condición 2. Haciendo $\delta \mathbf{u} = M_k \delta[[\mathbf{u}]]$ y considerando que $M_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \cup \Omega^+$:

$$\int_{\Omega_h} \nabla (M_k \delta[[\mathbf{u}]]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega_h} (M_k \delta[[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{T}} \cap \Gamma_h} (M_k \delta[[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (4.39)$$

Se divide el dominio de integración en tres: $\Omega_h^- \setminus \Omega_k^-, \Omega_k, \Omega_h^+ \setminus \Omega_k^+$; de igual manera se divide en tres la superficie de integración: $(\Gamma_h^- \setminus \Gamma_k^-) \cap \Gamma_{\mathbf{T}}, \Gamma_k \cap \Gamma_{\mathbf{T}}, (\Gamma_h^+ \setminus \Gamma_k^+) \cap \Gamma_{\mathbf{T}}$. Integrando por partes y reagrupando términos se obtiene la forma débil de la ecuación de equilibrio interno para cada uno de los tres subdominios, así como el equilibrio del cuerpo con las tracciones prescritas para cada una de las tres superficies, lo cual había sido garantizado por medio de las ecuaciones de la Condición 1. Adicionalmente, se obtienen los siguientes términos:

$$\blacktriangleright \int_{S^-} M_k \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_h^- \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_k^- \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \int_{S^+} M_k \delta[[\mathbf{u}]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_k^+ \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_h^+ \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \quad (4.40)$$

Los dos términos de la expresión 4.40 deben ser iguales a cero para satisfacer la ec. 4.39. Por lo tanto, la expresión anterior establece el equilibrio a través de las líneas S^- y S^+ , con base en el cálculo de los esfuerzos dentro de la zona de localización de deformaciones en Ω_k ($\boldsymbol{\sigma}_k^-$ y $\boldsymbol{\sigma}_k^+$) y fuera de esta zona ($\boldsymbol{\sigma}_h^-$ y $\boldsymbol{\sigma}_h^+$). Estas líneas contienen la zona de localización de deformaciones. Es importante mencionar que para el caso más general: $\boldsymbol{\sigma}_k^- \neq \boldsymbol{\sigma}_k^+$, salvo para el caso en que el ancho de la zona de localización tiende a cero ($k \rightarrow 0$), con lo cual se recupera la aproximación de Discontinuidades Fuertes y se obtiene que: $\boldsymbol{\sigma}_k^- = \boldsymbol{\sigma}_k^+ = \boldsymbol{\sigma}_S$. Al satisfacerse el equilibrio de manera débil en S^- y S^+ , se debe satisfacer también de manera fuerte (punto a punto):

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\sigma}_k^- \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_h^- \cdot \mathbf{n} \quad y \quad \boldsymbol{\sigma}_k^+ \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_h^+ \cdot \mathbf{n} \quad (4.41)$$

Capítulo 5

MODELOS CONSTITUTIVOS

La Formulación Variacional de cuerpos con discontinuidades fue desarrollada en el capítulo anterior para obtener las ecuaciones que gobiernan el problema. La Formulación fue desarrollada dentro de un ámbito general, de tal suerte que es válida independientemente de la Ley Constitutiva empleada. En la Formulación no se describió por completo la cinemática del problema, sólo se definieron los campos de desplazamientos que describen el movimiento de los puntos materiales de un cuerpo con una discontinuidad en su interior.

Para definir el comportamiento de un cuerpo, además de requerirse las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema, se requiere conocer su cinemática y en particular la Ley Constitutiva que caracteriza el comportamiento de un material. Por este motivo en este capítulo se comienza presentando la cinemática de medios con discontinuidades, lo cual implica la definición de los campos de desplazamientos y de deformaciones. Con base en la definición de los campos de desplazamientos, la cinemática se presenta en dos grupos: Discontinuidades Fuertes (desplazamientos discontinuos) y Discontinuidades Débiles (desplazamientos continuos). Posteriormente, se realiza un breve análisis sobre el salto de las deformaciones en la discontinuidad.

La parte más sustancial de este capítulo consiste en el desarrollo de Modelos Constitutivos aplicables en la aproximación de Discontinuidades Interiores. Los modelos están orientados a reproducir el comportamiento de materiales como el concreto, caracterizados porque fallan inicialmente en Modo I y posteriormente pueden evolucionar en Modo Mixto dependiendo del estado de esfuerzos en la discontinuidad. Se aborda únicamente una familia de Modelos Constitutivos: Daño (infinitesimal, local e independiente de la velocidad de carga), cubriéndose los casos Isotrópico y Anisotrópico. Los modelos de Daño Anisotrópicos son explorados para desarrollar un modelo constitutivo de tipo continuo que permita satisfacer siempre las Condiciones de Discontinuidad Fuerte desde el momento en que se alcanza la superficie de falla y se produce la bifurcación en la trayectoria de equilibrio. Los modelos constitutivos son desarrollados para cada una de las aproximaciones: Aproximación Discreta,

Discontinuidades Débiles y Discontinuidades Fuertes, describiéndose las características que cada uno posee. Se realiza un “Análisis Energético”, el cual define la energía de fractura y permite establecer las ecuaciones que relacionan las variables de las distintas aproximaciones (e.g. módulo de ablandamiento). En este trabajo se consideran a las deformaciones (o al salto de los desplazamientos) como variables independientes, dado que el esquema de evaluación de la ecuación constitutiva es conducido por las deformaciones; por lo que los esfuerzos son variables dependientes.

5.1 Cinemática de medios con discontinuidades

La cinemática es el estudio del movimiento y de las deformaciones sin consideración a la causa que los origina. La cinemática de los cuerpos con discontinuidades interiores puede ser abordada desde dos planteamientos básicos: Discontinuidades Fuertes y Discontinuidades Débiles. En el primero se define un campo de desplazamientos discontinuo y se puede agrupar en éste a la Aproximación Discreta y al método de Discontinuidades Fuertes de la Aproximación Continua. En el segundo se define un campo de deformaciones discontinuo y agrupa a las Discontinuidades Débiles de la Aproximación Continua. El establecimiento de la cinemática permite definir el campo de deformaciones para cada planteamiento. Varios de los términos empleados en esta sección han sido previamente definidos en el capítulo anterior, por lo que se realiza una presentación breve del tema y se hace referencia a las figuras del capítulo anterior.

Para efecto de establecer la cinemática de cuerpos con discontinuidades interiores, considérese un cuerpo sólido y homogéneo cuyos puntos materiales están referenciados a un sistema coordenado \mathbf{x} (con componentes x, y). El cuerpo posee un dominio Ω y una frontera Γ . En su interior tiene una discontinuidad S , que está contenida dentro del subdominio Ω_h , y ésta posee una normal \mathbf{n} que define un sistema coordenado local $\hat{\mathbf{n}}$ (con componentes n, t). El dominio está dividido en tres subdominios: $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_h \cup \Omega^+$, siendo el subdominio Ω^+ el que está en la dirección del vector normal \mathbf{n} . Las líneas S_h^- y S_h^+ delimitan al subdominio Ω_h , de tal suerte que: $S_h^- = \partial\Omega_h^- \cap \partial\Omega^-$ y $S_h^+ = \partial\Omega_h^+ \cap \partial\Omega^+$, y están separadas una distancia h . Para ilustrar esta descripción ver las figs. 4.1 (Discontinuidades Fuertes) y 4.4 (Discontinuidades Débiles) del capítulo anterior.

5.1.1 Discontinuidades Fuertes

La tasa del campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ se define como:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, \hat{t}) + H_S(\mathbf{x}) [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, \hat{t}) \quad (5.1)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}$ y $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ son las tasas del desplazamiento “continuo” y del salto de los desplazamientos; H_S es una función escalón tal que: $H_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^- \cup \Omega^-$ y $H_S(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^+ \cup \Omega^+$; \hat{t} es el tiempo y el punto significa derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{u}} = \partial_{\hat{t}}\mathbf{u}$. Los desplazamientos “continuos” están relacionados con los desplazamientos “regulares” como: $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \hat{t}) + \varphi(\mathbf{x}) [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, \hat{t})$, siendo $\varphi^h(\mathbf{x})$ una función continua que cumple con: $\varphi^h(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $\varphi^h(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$.

La tasa de las deformaciones $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ se define como el gradiente simétrico de la tasa de los desplazamientos. Consecuentemente, la tasa de los deformaciones se define respectivamente para la aproximación discreta en $\Omega \setminus S$ (ec. 5.2) y para las discontinuidades fuertes en la aproximación continua en Ω (ec. 5.3) como:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_S \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.2)$$

$$\blacktriangleright \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_S \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] + \delta_S ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.3)$$

donde $\nabla^s(\bullet)$ es el gradiente simétrico de (\bullet) ; δ_S es la función Delta de Dirac en S . La única diferencia entre las ecs. 5.2 y 5.3 es la definición de la tasa de las deformaciones en la discontinuidad, la cual contiene un término no acotado que es función de δ_S válido solamente para las Discontinuidades Fuertes de la Aproximación Continua. Para efectos de simplificación, la tasa de las deformaciones que ocurren fuera de la discontinuidad se denominan $\dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}$ y se definen como:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + H_S \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.4)$$

5.1.2 Discontinuidades Débiles

La tasa del campo de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ se define como:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \hat{t}) + H_k(\hat{\mathbf{n}}) [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, \hat{t}) \quad (5.5)$$

donde $H_k(\hat{\mathbf{n}})$ es una función rampa definida como:

$$\begin{aligned} H_k(\hat{\mathbf{n}}) &= 0 & \forall & \quad n < n^- \\ H_k(\hat{\mathbf{n}}) &= \frac{n - n^-}{n^+ - n^-} & \forall & \quad n^- \leq n \leq n^+ \\ H_k(\hat{\mathbf{n}}) &= 1 & \forall & \quad n > n^+ \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las líneas S^- ($n = n^-$) y S^+ ($n = n^+$) delimitan al subdominio Ω_k ($\Omega_k \subset \Omega_h$) y están

separadas una distancia k ($k = n^+ - n^-$). El subdominio Ω_k corresponde a la zona de localización de deformaciones y en las líneas S^- y S^+ se presenta el salto de deformaciones ($[[\epsilon]]$).

La tasa de las deformaciones $\dot{\epsilon}$ se define como el gradiente simétrico de la tasa de los desplazamientos:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + H_k \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] + \mu_k \frac{1}{k} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.7)$$

donde μ_k es una función definida como: $\mu_k = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_k$ y $\mu_k = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_k$. El último término de la ec. 5.7 se obtuvo considerando que: $\nabla H_k = \partial_{\mathbf{x}} H_k = \partial_{\hat{\mathbf{n}}} H_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \frac{\mu_k}{k} \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{n}}}$, siendo $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{n}}}$ un vector unitario tal que: $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{n}$. Para efectos de simplificación, la tasa de las deformaciones que ocurren fuera de la discontinuidad se denominan $\dot{\hat{\epsilon}}$ y se define como:

$$\blacktriangleright \quad \dot{\hat{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + H_k \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.8)$$

La cinemática de Discontinuidad Fuerte puede ser aproximada por la cinemática de la Discontinuidad Débil haciendo pequeño el ancho de la zona de localización k en comparación a las dimensiones del dominio, de tal suerte que: $H_k \approx H_S$ y $\frac{1}{k} \approx \delta_S$.

5.2 Análisis de la discontinuidad en las deformaciones

En la definición de la cinemática de un cuerpo con discontinuidades interiores se observa que en la discontinuidad (S) o en la zona de localización de deformaciones (Ω_k) se presenta un salto en el campo de desplazamientos (ecs. 5.3 y 5.7). Este salto de las deformaciones ($[[\epsilon]]$) está compuesto por un término común entre ambas aproximaciones¹ y por un factor escalar c_1 ($c_1 = \frac{\mu_k}{k}$ o $c_1 = \delta_S$ dependiendo del tipo de discontinuidad). Por lo que, de manera general, se puede definir la tasa del salto de deformaciones como:

$$[[\dot{\epsilon}]] = c_1 ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.9)$$

Tomando como referencia el sistema coordenado tridimensional local $\hat{\mathbf{n}}$ (n, t, s), la ecuación anterior puede reescribirse como:

¹Estrictamente, en la aproximación de Discontinuidades Fuertes el salto de las deformaciones en S^- ($S = S^- = S^+$) tiene dos contribuciones: $[[\epsilon]]$ y $H_S \nabla^s [[\mathbf{u}]]$. Sin embargo, cuando se aproximan las Discontinuidades Fuertes por medio de las Discontinuidades Débiles (haciendo k pequeño) es válido considerar que el salto de las deformaciones en S^- es $[[\epsilon]]$ ya que $S \neq S^- \neq S^+$. También es oportuno indicar que los términos de $[[\epsilon]]$ son significativamente mayores que los de $H_S \nabla^s [[\mathbf{u}]]$ por ser $[[\epsilon]]$ función de δ_S , por lo que la contribución de $H_S \nabla^s [[\mathbf{u}]]$ es despreciable.

$$[[\dot{\epsilon}]] = \begin{bmatrix} [[\dot{\epsilon}]]_{nn} & [[\dot{\epsilon}]]_{nt} & [[\dot{\epsilon}]]_{ns} \\ [[\dot{\epsilon}]]_{tn} & [[\dot{\epsilon}]]_{tt} & [[\dot{\epsilon}]]_{ts} \\ [[\dot{\epsilon}]]_{sn} & [[\dot{\epsilon}]]_{st} & [[\dot{\epsilon}]]_{ss} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} [[\dot{u}]]_n & \frac{1}{2} [[\dot{u}]]_t & \frac{1}{2} [[\dot{u}]]_s \\ \frac{1}{2} [[\dot{u}]]_t & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} [[\dot{u}]]_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

donde $[[\dot{\epsilon}]]_{ij}$ y $[[\dot{u}]]_i$ son los términos que componen el tensor tasa del salto de las deformaciones y el vector tasa del salto de desplazamientos ($[[\dot{\mathbf{u}}]] = \{[[\dot{u}]]_n, [[\dot{u}]]_t, [[\dot{u}]]_s\}^T$) en coordenadas locales. En la fig. 5.1 se ilustra el sentido físico y matemático de las ecs. 5.9 y 5.10 para los casos de línea de discontinuidad (Discontinuidad Fuerte) y zona de localización (Discontinuidad Débil):

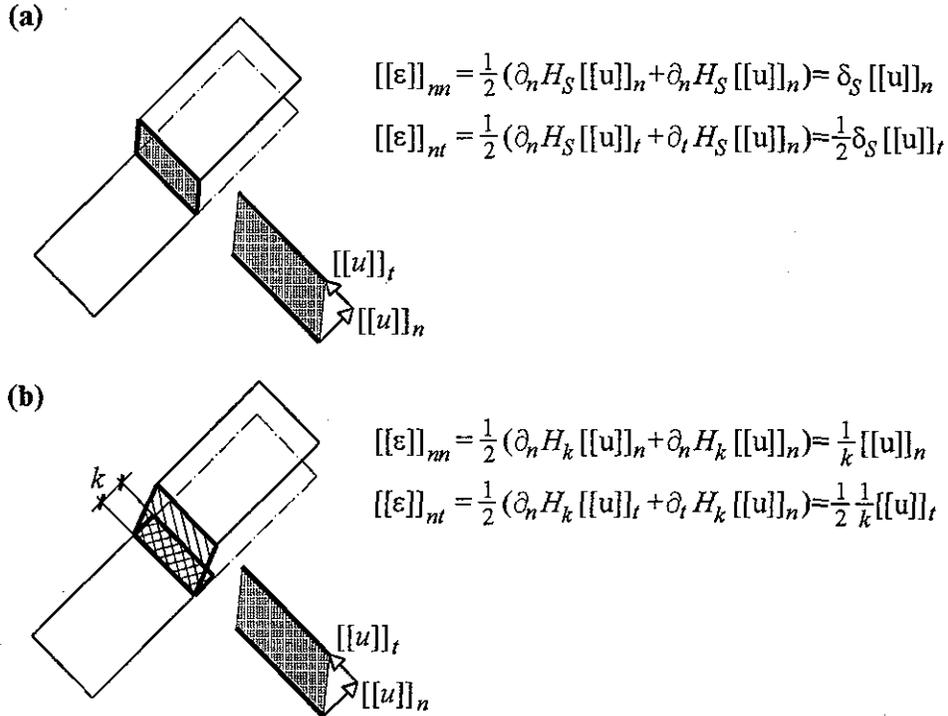


Figura 5.1: Salto de las deformaciones en (a) una línea de discontinuidad y (b) una zona de localización

La cinemática de la discontinuidad establece que el salto de las deformaciones debe cumplir con: $[[[\dot{\epsilon}]]_{tt} = [[\dot{\epsilon}]]_{st} = [[\dot{\epsilon}]]_{ss} = 0$ (ver ecs. 5.9 y 5.10) y consecuentemente con $[[[\epsilon]]_{tt} = [[\epsilon]]_{st} = [[\epsilon]]_{ss} = 0$, la cual Oliver (1996b) denomina como “Condición de Discontinuidad Fuerte”. Esta puede ser considerada como una restricción en la utilización directa de modelos constitutivos estándares, ya que muchos modelos sólo son capaces de representar esta cinemática bajo un cierto intervalo de estados de esfuerzos como ocurre con el modelo de daño isotrópico para la Aproximación Continua que se presenta posteriormente. La descripción cinemática del salto de las deformaciones (ecs. 5.9 y 5.10) es consistente con las condiciones de compatibilidad de Maxwell (Oliver, 2001). Estas condiciones hacen referencia

a campos que son continuos en el dominio, pero cuyas primeras derivadas son discontinuas a través de una línea (para 2 dimensiones) o una superficie (para 3 dimensiones).

5.3 Modelos de Daño. Generalidades

Las teorías de la Mecánica de Daño Continuo están basadas en la termodinámica de procesos irreversibles y en la teoría de la variable interna de estado (Mazars y Pijaudier-Cabot, 1989; Simo y Ju, 1987). Existen básicamente dos tipos de modelos de daño: (1) Daño Isotrópico, el cual emplea una variable escalar de daño y (2) Daño Anisotrópico, el cual puede emplear un tensor de daño. En la sección 5.4 se estudian los modelos de Daño Isotrópico, mientras que en la sección 5.5 se propone un modelo de Daño Anisotrópico para la Aproximación Continua. A continuación se presentan los conceptos básicos de los modelos de Daño Isotrópico (infinitesimal, local e independiente de la velocidad de carga).

Concepto de Esfuerzo Efectivo. Este es el concepto central en los modelos de Daño y puede ser fácilmente explicado por medio de la fenomenología del problema: considérese un cuerpo cuyo material no es homogéneo, por lo tanto en algún momento de la historia de carga se produce la falla del material en las zonas de menor resistencia, lo que genera microfisuras en un área $A - \bar{A}$ (fig. 5.2). La parte resistente de la sección está en la parte continua (\bar{A}) donde actúa el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$.

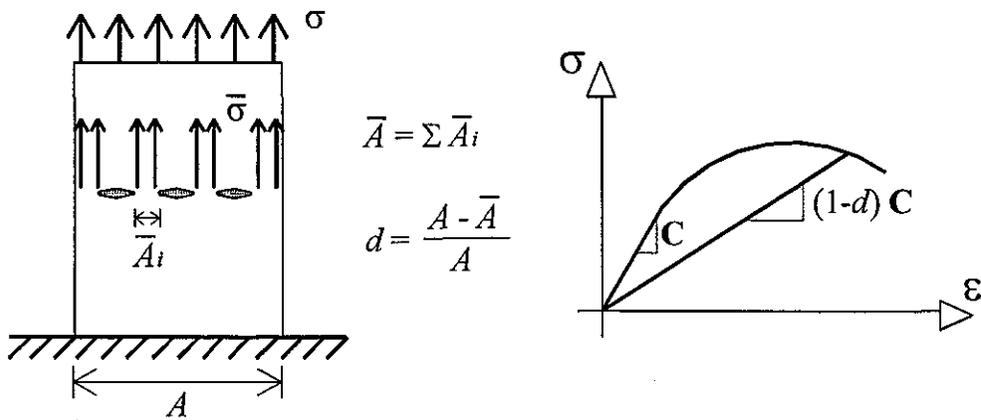


Figura 5.2: Descripción fenomenológica del concepto de Daño

En los modelos de Daño Isotrópico el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ y los esfuerzos σ se relacionan a través de la ecuación:

$$\sigma = (1 - d) \bar{\sigma} \tag{5.11}$$

donde d es la variable de daño ($d \in [0, 1]$), cuyo sentido físico corresponde a la relación entre el área dañada y el área total. La variable de daño está asociada a un proceso

irreversible, por lo que: $\dot{d} \geq 0$. El sentido físico del factor $(1 - d)$ corresponde a la relación entre la rigidez inicial y la rigidez dañada, como se muestra en la fig. 5.2.

El tensor de esfuerzos σ está relacionado con el tensor de deformaciones ϵ por medio de la función de energía libre (por unidad de masa) $\Psi(\epsilon, r)$:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\epsilon, r)}{\partial \epsilon} = (1 - d) \mathbf{C} : \epsilon \quad (5.12)$$

con:

$$\Psi(\epsilon, r) = [1 - d(r)] \Psi^e(\epsilon), \quad \Psi^e(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon : \mathbf{C} : \epsilon \quad (5.13)$$

donde Ψ^e es la energía libre elástica; \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico, el cual es constante y se define como: $\mathbf{C} = \hat{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\hat{\mu} \mathbf{I}$, siendo $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ las constantes de Lamé, $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de orden 2 ($\mathbf{1} = \delta_{ij}$; δ_{ij} es la Delta de Kronecker) y \mathbf{I} es el tensor identidad de orden 4 ($\mathbf{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$); r es una variable interna de tipo deformación.

Criterio de falla. La función f define el criterio de falla en el espacio de esfuerzos. Esta función contiene en su interior al dominio elástico o elástico degradado ($f < 0$) y en su superficie la condición de falla ($f = 0$). Por lo tanto, la función f siempre cumple que:

$$f(\sigma, q) \leq 0 \quad (5.14)$$

y se define en función de la norma τ_σ y de la variable interna q :

$$f(\sigma, q) = \tau_\sigma - q \quad (5.15)$$

De manera análoga se puede establecer una función g que defina el criterio de falla en el espacio de las deformaciones ($g(\epsilon, r) \leq 0$). La función g es a su vez función de la norma τ_ϵ y de la variable interna r :

$$g(\epsilon, r) = \tau_\epsilon - r \quad (5.16)$$

La definición de las normas τ_σ y τ_ϵ se presenta más adelante, dado que esta sección tiene el objetivo de presentar las generalidades del tema.

Variable de daño y ley de evolución. La variable de daño se define como:

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \frac{1}{E} \quad (5.17)$$

donde E es el Módulo de Elasticidad.

El intervalo de la variable de daño es $d \in [0, 1]$; este intervalo corresponde a $d = 0$ cuando el material no ha sufrido degradación y $d = 1$ cuando el material está completamente degradado.

La variable interna r posee un valor inicial r_o ($r \in [r_o, \infty)$) y se define como:

$$r = \max \{r_o, \max (\tau_\epsilon)\} \quad (5.18)$$

La ley de evolución establece que:

$$\dot{r} = \lambda \quad (5.19)$$

donde λ es un parámetro denominado multiplicador de daño (el cual es equivalente al multiplicador plástico).

Ley de endurecimiento. El comportamiento no lineal del modelo depende de la definición de la ley de endurecimiento:

$$\dot{q} = \mathcal{H}\dot{r} \quad (5.20)$$

donde \mathcal{H} es el módulo de endurecimiento/ablandamiento del modelo de daño.

Condiciones de carga y descarga. El multiplicador de daño λ y la función de falla f deben cumplir con las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker y el requerimiento de consistencia:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\sigma, q) \leq 0, \quad \lambda f(\sigma, q) = 0 \quad (5.21)$$

$$\lambda \dot{f}(\sigma, q) = 0 \quad (5.22)$$

La interpretación de estas ecuaciones permite establecer las condiciones de carga y descarga:

$$\begin{aligned}
 f < 0 & \Rightarrow \lambda = 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{no hay evolución del daño}) & (5.23) \\
 f = 0 & \left\{ \begin{array}{ll} \dot{f} < 0 & \Rightarrow \lambda = 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{descarga}) \\ \dot{f} = 0 & y \quad \lambda = 0 \quad \dot{d} = 0 \quad (\text{carga neutra}) \\ \dot{f} = 0 & y \quad \lambda > 0 \quad \dot{d} > 0 \quad (\text{carga}) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

5.4 Modelos de Daño Isotrópico para Discontinuidades Interiores

5.4.1 Aproximación Discreta

En la Aproximación Discreta la variable independiente en la modelación constitutiva de la discontinuidad es el salto de los desplazamientos. Estos modelos son inicialmente rígidos perfectos, esto es, la magnitud del salto de los desplazamientos se mantiene nula ($||[\mathbf{u}]|| = 0$) para valores iniciales de las tracciones hasta que se alcanza la superficie de falla y $[[\dot{\mathbf{u}}]] > 0$. Por lo tanto, los valores de los términos del tensor constitutivo son inicialmente no acotados. Dadas las inconveniencias propias de trabajar con un tensor constitutivo con valores no acotados, se procede a emplear un tensor constitutivo con valores intermedios entre las condiciones de perfectamente rígido y completamente dañado. Para este propósito se define, por conveniencia para efecto de comparar con otros modelos, el tensor constitutivo “inicial” \mathbf{C}_S^o (de orden 2) en función del Módulo de Elasticidad E y del Módulo de Cortante G :

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{C}_S^o = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}E + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}G + \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}G \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} (C_S^o)_{nn} & (C_S^o)_{nt} & (C_S^o)_{ns} \\ (C_S^o)_{tn} & (C_S^o)_{tt} & (C_S^o)_{ts} \\ (C_S^o)_{sn} & (C_S^o)_{st} & (C_S^o)_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

donde \mathbf{n} , \mathbf{t} y \mathbf{s} son vectores unitarios en la dirección de los ejes locales n, t, s . Esta definición es conveniente para efectos de comparación entre las Aproximaciones Discreta y Continua (en la sección 5.6 se realiza el Análisis Energético de los Modelos).

El tensor constitutivo \mathbf{C}_S se define como:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{C}_S = (1 - d^d) \mathbf{C}_S^o \quad (5.26)$$

donde d^d es la variable de daño (escalar), la cual será definida posteriormente. El superíndice “ d ” indica que se trata de la Aproximación Discreta.

La energía libre (por unidad de masa) del cuerpo se define como:

$$\Psi^d = (1 - d^d) \frac{1}{2} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{C}_S^o \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (5.27)$$

Con base en la energía libre se puede definir el tensor de las tracciones:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{T} = \frac{\partial \Psi^d}{\partial [[\mathbf{u}]]} = (1 - d^d) \mathbf{C}_S^o \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (5.28)$$

La superficie de falla f está definida en el espacio de las tracciones y es función de la norma $\tau_{\mathbf{T}}$ y de la variable interna de tipo tracción q^d :

$$\blacktriangleright \quad f(\tau_{\mathbf{T}}, q^d) = \tau_{\mathbf{T}} - q^d \leq 0 \quad (5.29)$$

La norma $\tau_{\mathbf{T}}$ se define como:

$$\blacktriangleright \quad \tau_{\mathbf{T}} = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}} \cdot \mathbf{T}} \quad (5.30)$$

donde \mathbf{T} es el vector de tracciones; $\mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}}$ es un tensor de pesos (de orden 2), el cual se define posteriormente. El criterio de falla, definido en la ec. 5.29, indica que la discontinuidad se produce cuando $\tau_{\mathbf{T}} = q_o^d$ (q_o^d es el valor inicial de q^d), siendo $q_o^d = f_t$ (f_t es el esfuerzo resistente a tensión). El vector normal a la discontinuidad \mathbf{n} se define como la dirección de los esfuerzos principales en el momento del agrietamiento; como se ha mencionado, las tracciones se calculan como: $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Este criterio de falla es equivalente al criterio de falla por esfuerzos máximos principales a tensión. En este modelo la falla se inicia básicamente en Modo I (dado que $T_n = q_o^d$ y que $T_t = 0$ y $T_s = 0$), aunque posteriormente se pueden desarrollar otros modos de falla si $T_t \neq 0$ (se produce Modo II) o $T_s \neq 0$ (se produce Modo III).

De manera similar a la función de falla f (ec. 5.29), es posible establecer una función de daño g definida en el espacio de los saltos de los desplazamientos, la cual es función de la norma $\tau_{[[\mathbf{u}]}}$ y de la variable interna de tipo salto de desplazamientos r^d . La función de daño g y la norma $\tau_{[[\mathbf{u}]}}$ se definen como:

$$\blacktriangleright \quad g(\tau_{[[\mathbf{u}]}, r^d) = \tau_{[[\mathbf{u}]} - r^d \leq 0 \quad (5.31)$$

$$\blacktriangleright \quad \tau_{[[\mathbf{u}]} = \sqrt{[[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}} \cdot [[\mathbf{u}]]} \quad (5.32)$$

siendo $\mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}}$ un tensor de orden 2 definido como:

$$\mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]} = \begin{bmatrix} W_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & W_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & W_{ss} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

con:

$$\begin{aligned}
W_{nn} &= \begin{cases} 1 & \text{si } T_n \geq 0 \text{ y } [[u]]_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } T_n < 0 \end{cases} & (5.34) \\
W_{tt} &= \frac{(([[u]]_n)_{crit})^2}{(([[u]]_t)_{crit})^2} \\
W_{ss} &= \frac{(([[u]]_n)_{crit})^2}{(([[u]]_s)_{crit})^2}
\end{aligned}$$

siendo $(([[u]]_n)_{crit})$, $(([[u]]_t)_{crit})$ y $(([[u]]_s)_{crit})$ los valores críticos del salto de los desplazamientos en Modo I, II y III respectivamente, los cuales corresponden al valor del salto para cada modo de falla cuando la discontinuidad no es capaz de transmitir tracciones. En la fig. 5.3 se ejemplifican estos valores para el caso de Modo I de falla y se ilustran las trayectorias de carga y descarga para este modelo de daño.

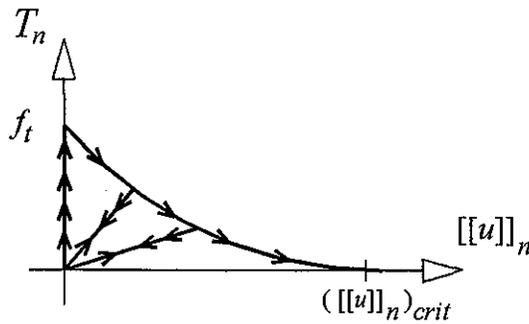


Figura 5.3: Definición de la curva $T_n - [[u]]_n$

Es conveniente señalar que, para el concreto, el Modo I de falla se ha estudiado ampliamente a nivel experimental, siendo bien conocido el valor de $(([[u]]_n)_{crit})$. Pero, como se mencionó en el capítulo II, esto no ocurre con los otros modos de falla; por lo que los valores de W_{tt} y W_{ss} deben ser propuestos sin base experimental.

La función de falla g se representa gráficamente en la fig. 5.4. La superficie de falla inicia como un punto en el origen, con $r^d = 0$ y $[[\mathbf{u}]] = 0$; posteriormente ésta va creciendo en proporción a $(([[u]]_n)_{crit})$, definiéndose la variable interna de tipo salto de desplazamiento r^d como:

$$r^d = \max \{ r_o^d, \max (\tau_{[[\mathbf{u}]])} \} \quad (5.35)$$

donde r_o^d es el valor inicial de r^d y en este modelo toma el valor $r_o^d = 0$, por lo que $r^d \in [0, +\infty)$.

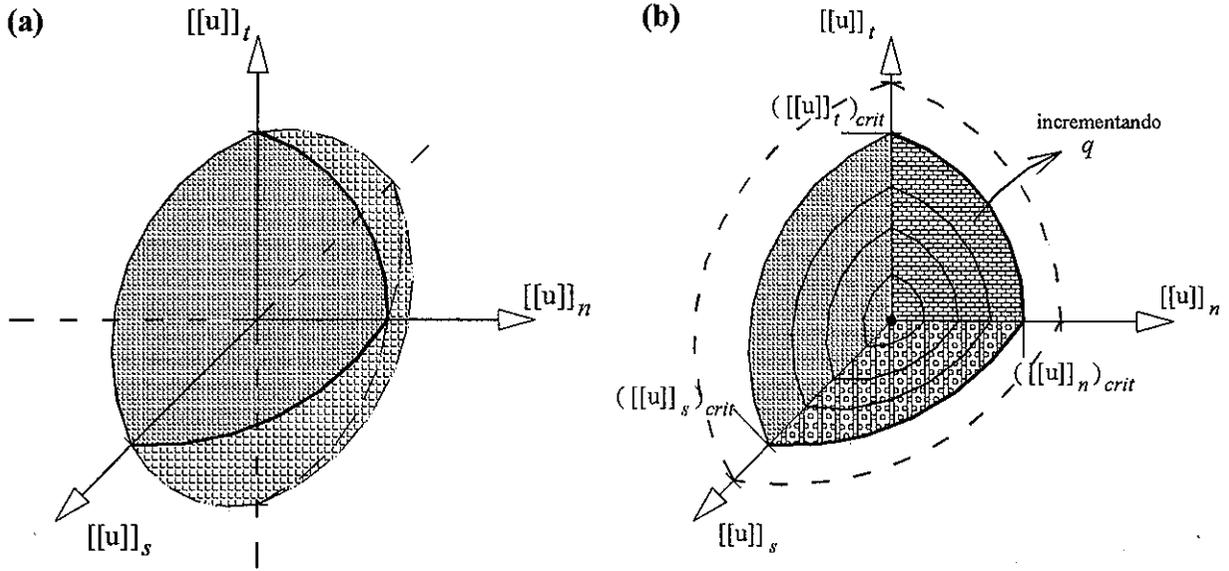


Figura 5.4: Criterio de Daño para la Aproximación Discreta: (a) superficie de falla y (b) evolución del daño

Considerando que el intervalo de la variable interna de tipo salto de desplazamientos r^d es $r^d \in [0, +\infty)$ y que el intervalo de la variable interna de tipo tracción q^d es $q^d \in [0, f_t]$, es posible obtener el intervalo de la variable de daño d^d por medio de la ec. 5.17 (la cual es válida para la Aproximación Discreta): $d^d \in (-\infty, 1]$. Obsérvese que el intervalo de la variable de daño deja de ser $[0, 1]$ como en los modelos tradicionales de tipo continuo. Lo que no cambia, y es el principio fundamental de los modelos de daño, es que la tasa de la variable de daño siempre cumple que $\dot{d}^d \geq 0$.

Para obtener el operador constitutivo tangente de este modelo se parte de la relación constitutiva (ec. 5.28), la cual se deriva con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{T}} = (1 - d^d) \mathbf{C}_S^o \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] - \dot{d}^d \mathbf{C}_S^o \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (5.36)$$

El término \dot{d}^d se calcula como (ver ecs. 5.17, 5.31 y 5.32):

$$\begin{aligned} \dot{d}^d &= \frac{\partial d^d}{\partial r^d} \dot{r}^d = \left((1 - d^d) - \frac{\mathcal{H}^d}{E} \right) \dot{r}^d \\ \dot{r}^d &= \dot{\tau}_{[[\mathbf{u}]]} = \frac{1}{\tau_{[[\mathbf{u}]]}} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]]} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Sustituyendo las ecs. 5.37₁ y 5.37₂ en la ec. 5.36, se obtienen los operadores constitutivos tangentes que relacionan las tasas de las tracciones $\dot{\mathbf{T}}$ con las tasas de los saltos de los desplazamientos $[[\dot{\mathbf{u}}]]$:

- Para el intervalo de carga o descarga elástica ($d^d = 0$):

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{T}} = (1 - d^d) \mathbf{C}_S^o \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.38)$$

- Para el intervalo de carga no lineal o neutra ($d^d > 0$):

$$\blacktriangleright \quad \dot{\mathbf{T}} = \left[(1 - d^d) \mathbf{C}_S^o + \left(- (1 - d^d) + \frac{\mathcal{H}^d}{E} \right) \left(\frac{1}{(\tau_{[[\mathbf{u}]])^2} \right) (\mathbf{C}_S^o \cdot [[\mathbf{u}]]) \otimes ([[\mathbf{u}]]) \cdot \mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]])} \right] \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (5.39)$$

Es importante hacer notar que las ecuaciones presentadas en esta parte sólo son válidas cuando $[[u]]_n \geq 0$. Esto se debe a que el sentido físico del Modo I solamente existe cuando la grieta está abierta ($[[u]]_n > 0$) o cerrada ($[[u]]_n = 0$). Por otra parte, $[[u]]_t$ y $[[u]]_s$ pueden tomar valores positivos o negativos dependiendo de los signos de T_t y T_s respectivamente. Si se presenta el caso donde la componente de la tracción T_n tiene signo negativo, solamente se requiere modificar el valor de $(C_S^o)_{nn} = (1 - d^d) E$ por un valor infinito ($(C_S^o)_{nn} = \infty$) y se emplea el mismo procedimiento y ecuaciones establecidas en esta sección.

RESUMEN: En este modelo de Daño Isotrópico para la Aproximación Discreta las variables independientes son las deformaciones ϵ ($\epsilon = \bar{\epsilon}$) en $\Omega \setminus S$ y el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ en S . Las variables dependientes son los esfuerzos σ en $\Omega \setminus S$ y las tracciones \mathbf{T} en S . En este modelo el daño se concentra en S y en $\Omega \setminus S$ no ocurre daño. Se considera que f_t y \mathcal{H}^d son propiedades del material. El modelo inicia en Modo I de falla y posteriormente pueden producir otros modos dependiendo de las tracciones en la discontinuidad.

5.4.2 Aproximación Continua

En esta sección se emplea un modelo estándar correspondiente a Daño Isotrópico, como se presentó en la sección 5.3, cuyas ecuaciones fundamentales son:

Energía Libre:

$$\Psi(\epsilon, r) = [1 - d(r)] \frac{1}{2} \epsilon : \mathbf{C} : \epsilon \quad (5.40)$$

Ecuación constitutiva:

$$\sigma = \partial_\epsilon \Psi(\epsilon, r) = (1 - d) \mathbf{C} : \epsilon \quad (5.41)$$

Variable de daño:

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \frac{1}{E}, \quad d \in [0, 1] \quad (5.42)$$

Ley de evolución:

$$\dot{r} = \lambda \quad (5.43)$$

Criterios de daño:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q = 0, \quad g(\boldsymbol{\epsilon}, r) = \tau_{\boldsymbol{\epsilon}} - r = 0 \quad (5.44)$$

Regla de endurecimiento:

$$\dot{q} = \mathcal{H}(r) \dot{r} \quad (5.45)$$

En la fig. 5.5 se ilustra el comportamiento del modelo para las Discontinuidades Fuertes y las Débiles, respectivamente. Las ecs. 5.40 a 5.45 describen de manera general el modelo, faltando por definir las normas: $\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}$ y $\tau_{\boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}}$. Cabe aclarar que este modelo no se implanta computacionalmente en este trabajo por las razones que se discuten a continuación. El propósito de presentar este modelo radica en justificar el empleo de modelos anisotrópicos y ampliar el entendimiento sobre estos problemas.

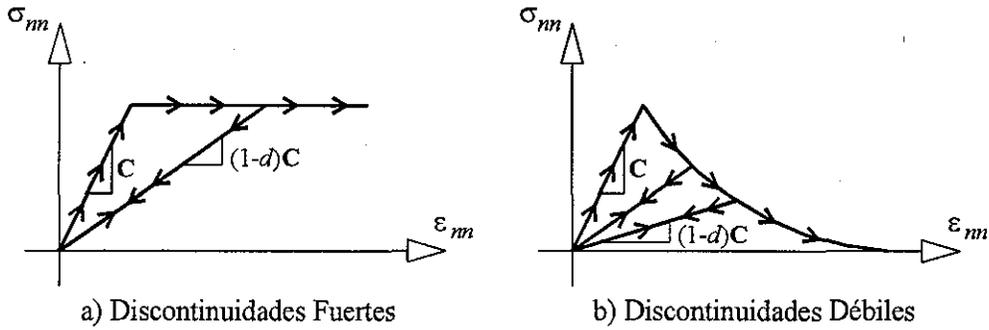


Figura 5.5: Curva Esfuerzo-Deformación en la zona de localización de deformaciones para las Aproximaciones Continuas. Modelo unidimensional

Discontinuidades Fuertes

El punto de partida de este apartado es el establecimiento de la relación entre los esfuerzos y las deformaciones, para lo cual se sustituye la definición de las deformaciones (ec. 5.3) en la ecuación constitutiva (ec. 5.41):

$$\left(1 + \frac{d^{sd}}{1 - d^{sd}}\right) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : [\bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \delta_S ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s] \quad (5.46)$$

El superíndice “sd” indica que se trata de una Aproximación de Discontinuidades Fuertes.

Las tracciones en cualquier punto del continuo deben estar acotadas, así como también los esfuerzos deben estar acotados en cualquier punto del dominio. Las deformaciones poseen

una parte acotada ($\bar{\epsilon}$) y una parte no acotada ($[[\epsilon]]$) como consecuencia de la presencia de una Delta de Dirac δ_S . Con base en esta información la ec. 5.46 puede reinterpretarse dado que σ y $\bar{\epsilon}$ están acotados, de tal suerte que esta ecuación puede ser satisfecha por medio del cumplimiento de las siguientes ecuaciones:

$$\sigma = \mathbf{C} : \bar{\epsilon} \quad (5.47)$$

$$\left(\frac{d^{sd}}{1 - d^{sd}} \right) \sigma = \mathbf{C} : [\delta_S ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}]^s \quad (5.48)$$

El sentido de estas ecuaciones es que el daño se concentra en la discontinuidad S , mientras que fuera de ella el continuo se mantiene elástico sin degradación. La ec. 5.47 se caracteriza porque sus términos están acotados. Por otra parte, en la ec. 5.48 se observa que el salto de las deformaciones no está acotado; de esto se puede inferir que los esfuerzos no están acotados, lo cual rompe el sentido físico del problema. Por lo anterior, es necesario encontrar las condiciones que permitan darle sentido físico y matemático a esta ecuación; este proceso es denominado Análisis de Discontinuidad Fuerte (Oliver, 1996).

Para efecto de analizar este problema se reescribe la ec. 5.48 como:

$$\left(\frac{q^{sd} - r^{sd}}{q^{sd}} \right) \sigma = \mathbf{C} : [\delta_S ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}]^s \quad (5.49)$$

Para que la ecuación anterior tenga sentido físico y matemático se requiere que el término entre paréntesis sea no acotado; por lo tanto alguna de las variables internas debe ser no acotada. La variable interna de tipo esfuerzo q^{sd} es función de los esfuerzos, los cuales siempre están acotados, por lo tanto q^{sd} siempre está acotada; además, aunque estuviese no acotada, no le daría sentido físico ya que está tanto en el numerador como en el denominador. Por otra parte, la variable interna de tipo deformación r^{sd} es función de las deformaciones: $\epsilon = \bar{\epsilon} + \delta_S ([[\mathbf{u}]]) \otimes \mathbf{n}]^s$. Esto indica que r^{sd} no está acotada y, por lo tanto, se recupera el sentido físico y matemático de las ecs. 5.48 y 5.49.

El Análisis de Discontinuidad Fuerte conduce a la redefinición de algunas variables, las cuales están no acotadas. Las variable interna r^{sd} y el módulo de ablandamiento \mathcal{H}^{sd} son redefinidos como (Simo *et al.*, 1993; Oliver 1996):

$$\dot{r}^{sd} = \delta_S \dot{\bar{r}} \quad y \quad \frac{1}{\mathcal{H}^{sd}} = \delta_S \frac{1}{\bar{\mathcal{H}}} \quad (5.50)$$

donde \bar{r} es la variable interna de tipo discreto y $\bar{\mathcal{H}}$ es el módulo de ablandamiento de tipo discreto. Esto es, en la Formulación de Discontinuidades Fuertes se supone una relación con la Aproximación Discreta por medio de la ec. 5.50: $\dot{r} = \dot{\bar{r}}^d$ y $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^d$. Esta consideración se ha manejado como una hipótesis, aunque su validez puede demostrarse por medio de un

“Análisis Energético” como el que se presenta al final de este capítulo.

Con base en esta redefinición de términos y en la ecuación constitutiva, es posible establecer relaciones entre el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ y los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ o las deformaciones $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q^{sd}}{\bar{r}} \mathbf{C} : ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.51)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{q^{sd}}{\bar{r}} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.52)$$

La ec. 5.52 establece de manera explícita la proporcionalidad entre las deformaciones $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ y $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ (ver ec. 5.9: $[[\boldsymbol{\epsilon}]] = c_1 ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s$), lo cual se puede ver como una consecuencia del carácter isotrópico del modelo. De esta ecuación es posible establecer las Condiciones de Discontinuidad Fuerte que son: $\boxed{\bar{\epsilon}_{tt} = \bar{\epsilon}_{ts} = \bar{\epsilon}_{ss} = 0}$; éstas indican cómo debe ser el tensor de deformaciones para modelar Discontinuidades Fuertes; como consecuencia este modelo es capaz de modelar Discontinuidades Fuertes solamente bajo ciertos estados de esfuerzos y deformaciones. Una opción ante esta limitante es emplear el procedimiento de ancho de banda de localización variable desarrollado por Oliver *et al.* (1999). Otra opción es desarrollar un modelo anisotrópico que permita satisfacer siempre las Condiciones de Discontinuidad Fuerte cuando se alcanza la superficie de falla y ocurre la bifurcación; este modelo se desarrolla en la sección 5.5.

RESUMEN: En la aproximación de Discontinuidades Fuertes las deformaciones en la discontinuidad no pueden emplearse como variables puesto que no están acotadas (consecuencia de que $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ no está acotado). Las variables independientes empleadas son las deformaciones $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ (que siempre están acotadas) y el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$. Como variable dependiente están los esfuerzos, los cuales pueden calcularse en cualquier punto del dominio, inclusive en la discontinuidad. Se considera que f_t y \mathcal{H}^d son propiedades del material.

Discontinuidades Débiles

En este apartado se realiza un análisis del modelo de Daño Isotrópico para Discontinuidades Débiles, el cual conduce a expresiones similares a las de Discontinuidades Fuertes (realizado en el apartado anterior), pero con diferentes razonamientos y justificaciones. El análisis parte de la relación entre esfuerzos y deformaciones definida a partir de las ecs. 5.7 y 5.41:

$$\left(1 + \frac{d^{wd}}{1 - d^{wd}}\right) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \left[\bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s\right] \quad (5.53)$$

El superíndice “ wd ” indica que se trata de una Aproximación de Discontinuidades Débiles.

La ecuación anterior se satisface si se cumplen las siguientes dos ecuaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.54)$$

$$\left(\frac{d^{wd}}{1 - d^{wd}} \right) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \left[\frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s \right] \Rightarrow \left(\frac{d^{wd}}{1 - d^{wd}} \right) \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (5.55)$$

La ec. 5.54 establece la relación elástica no dañada estándar entre las deformaciones “continuas” $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ y los esfuerzos. Esta ecuación significa que fuera de la discontinuidad (zona de localización de deformaciones) se puede considerar que el comportamiento es elástico sin degradación. Por lo tanto, se puede suponer que el comportamiento no lineal asociado al daño se produce en la zona de localización de deformaciones y consecuentemente está asociado al salto de las deformaciones $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ (ec. 5.55₁). Al sustituir la ec. 5.54 en la ec. 5.55₁ se obtiene la ec. 5.55₂, la cual establece como requerimiento las condición: $\bar{\epsilon}_{tt} = \bar{\epsilon}_{ts} = \bar{\epsilon}_{ss} = 0$; esta condición puede considerarse como una limitante a la aplicación de este modelo. Por lo anterior, surge la necesidad de desarrollar un modelo Anisotrópico que siempre satisfaga las Condiciones de Discontinuidad Fuerte en el momento que se alcanza la falla y la bifurcación, a diferencia de este modelo.

RESUMEN: En este modelo de daño isotrópico para Discontinuidades Débiles las variables independientes son las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$. Las deformaciones en la zona de localización se calculan como: $\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + [[\boldsymbol{\epsilon}]]$, donde $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ puede expresarse en términos del salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$. Las variables dependientes son los esfuerzos. El daño se concentra en Ω_k y en $\Omega \setminus \Omega_k$ no ocurre daño. Se considera que f_t , \mathcal{H}^{wd} y k son propiedades del material.

5.5 Modelos de Daño Anisotrópico para la Aproximación Continua

La aplicación de modelos de Daño Isotrópico en la Aproximación Continua de discontinuidades tiene como limitante que, al producirse la falla, no necesariamente se satisfacen las Condiciones de Discontinuidad Fuerte. Por lo anterior, en esta sección se exploran los modelos de Daño Anisotrópico para desarrollar un modelo constitutivo específico para la modelación de discontinuidades con la Aproximación Continua. El contenido de esta sección se ha desarrollado considerando la Aproximación Continua con Discontinuidades Débiles (wd), pero su extrapolación a Discontinuidades Fuertes es directa.

El daño en los modelos de Daño Anisotrópico puede caracterizarse en términos de

cantidades vectoriales, tensoriales de orden 2 y tensoriales de orden 4 (Simo y Ju, 1987). Inicialmente se exploraron dos opciones empleadas en la literatura técnica: Esfuerzos Efectivos ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}$) y Deformaciones Efectivas ($\check{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\epsilon}$); donde \mathbf{M} es un tensor de orden 4 que caracteriza el daño, \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ son los esfuerzos efectivos y $\check{\boldsymbol{\epsilon}}$ son las deformaciones efectivas. En este estudio se propone la siguiente definición del tensor de daño: $\mathbf{M} = \mathbf{I} - d^{wd} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n})$. Desafortunadamente estos dos modelos no satisfacen simultáneamente dos condiciones necesarias para modelar discontinuidades:

1. Tracciones Nulas. Si el material está completamente dañado, *i.e.* $d^{wd} = 1$, la discontinuidad no debe ser capaz de transmitir tracciones; por lo tanto: $\sigma_{nn} = \sigma_{nt} = \sigma_{ns} = 0$.
2. Cinemática de Discontinuidades (o Condición de Discontinuidades Fuertes; Oliver, 1996): $[[\boldsymbol{\epsilon}]]_{tt} = [[\boldsymbol{\epsilon}]]_{ss} = [[\boldsymbol{\epsilon}]]_{ts} = 0$.

El concepto de Esfuerzos Efectivos satisface la condición de Tracciones Nulas ($d^{wd} = 1 \Rightarrow \sigma_{nn} = \sigma_{nt} = \sigma_{ns} = 0$), pero no satisface la condición Cinemática ya que para el caso más general se tiene que $[[\boldsymbol{\epsilon}]]_{tt} \neq 0$ y $[[\boldsymbol{\epsilon}]]_{ss} \neq 0$. El concepto de Deformaciones Efectivas cumple con la condición Cinemática ($[[\boldsymbol{\epsilon}]]_{tt} = [[\boldsymbol{\epsilon}]]_{ss} = [[\boldsymbol{\epsilon}]]_{ts} = 0$), pero no cumple con la condición de Tracciones Nulas (si $\epsilon_{tt} \neq 0$ y/o $\epsilon_{ss} \neq 0$, se obtiene en general que $\sigma_{nn} \neq 0$ para $d^{wd} = 1$).

A continuación se presenta una tercera opción, en la que se cumplen las dos condiciones antes citadas. Para facilitar esta presentación se parte del inverso de la ecuación constitutiva ($\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{C}_S]^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$), expresando cada uno de sus términos en coordenadas locales:

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \quad \epsilon_{nn} &= \frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \sigma_{nn} - \frac{\nu}{E} \sigma_{tt} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ss} \\
 \epsilon_{tt} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{nn} + \frac{1}{E} \sigma_{tt} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ss} \\
 \epsilon_{ss} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{nn} - \frac{\nu}{E} \sigma_{tt} + \frac{1}{E} \sigma_{ss} \\
 \blacktriangleright \quad \epsilon_{nt} &= \frac{1}{(1 - d^{wd}) (2G)} \sigma_{nt} \\
 \blacktriangleright \quad \epsilon_{ns} &= \frac{1}{(1 - d^{wd}) (2G)} \sigma_{ns} \\
 \epsilon_{ts} &= \frac{1}{2G} \sigma_{ts}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

En estos modelos de Daño el salto de las deformaciones $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$ está asociado a la parte “degradada” de las deformaciones ($d \boldsymbol{\epsilon}$). Para identificar y analizar las partes “no degradada”

(asociada a la parte continua) y “degradada” (asociada al salto en la discontinuidad) de la componente de la deformación ϵ_{nn} , se procede a dividirla (ec. 5.56₁) en dos partes:

$$\epsilon_{nn} = \epsilon_{nn}^a + \epsilon_{nn}^b \quad (5.57)$$

donde

$$\epsilon_{nn}^a = \frac{1}{(1 - d^{wd})E} \sigma_{nn} \quad \text{y} \quad \epsilon_{nn}^b = -\frac{\nu}{E} \sigma_{tt} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ss} \quad (5.58)$$

Con base en las ecs. 5.57 y 5.58 se puede identificar la parte degradada de la deformación ϵ_{nn} : $[[\epsilon]]_{nn}$ (asociada al Modo I de falla), y la parte no degradada de la deformación: $\bar{\epsilon}_{nn}$, de tal suerte que:

$$\blacktriangleright \quad \epsilon_{nn} = \bar{\epsilon}_{nn} + [[\epsilon]]_{nn} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{nn} = (1 - d^{wd}) \epsilon_{nn}^a + \epsilon_{nn}^b \\ [[\epsilon]]_{nn} = d^{wd} \epsilon_{nn}^a \end{array} \right. \quad (5.59)$$

Por otra parte, en las componentes de la deformación ϵ_{nt} y ϵ_{ns} es fácil de identificar la parte degradada (asociadas al Modo II: $[[\epsilon]]_{nt}$ y al Modo III: $[[\epsilon]]_{ns}$ de falla) y la no degradada ($\bar{\epsilon}_{nt}$ y $\bar{\epsilon}_{ns}$):

$$\blacktriangleright \quad \epsilon_{nt} = \bar{\epsilon}_{nt} + [[\epsilon]]_{nt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{nt} = (1 - d^{wd}) \epsilon_{nt} \\ [[\epsilon]]_{nt} = d^{wd} \epsilon_{nt} \end{array} \right. \quad (5.60)$$

$$\blacktriangleright \quad \epsilon_{ns} = \bar{\epsilon}_{ns} + [[\epsilon]]_{ns} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{ns} = (1 - d^{wd}) \epsilon_{ns} \\ [[\epsilon]]_{ns} = d^{wd} \epsilon_{ns} \end{array} \right. \quad (5.61)$$

La ausencia de la variable de daño en las ecs. 5.56₂, 5.56₃ y 5.56₆ hace evidente que las siguientes componentes del salto de la deformación son nulas: $[[\epsilon]]_{tt} = [[\epsilon]]_{ss} = [[\epsilon]]_{ts} = 0$ y en consecuencia este modelo constitutivo satisface la Condición Cinemática (o Condición de Discontinuidad Fuerte). Adicionalmente, cumple con la condición de Tracciones Nulas para el caso $d^{wd} = 1$ debido a que las deformaciones “continuas” $\bar{\epsilon}$ siempre están acotadas (independientemente de que sea Discontinuidad Fuerte o Débil), como se demuestra a continuación:

$$\begin{array}{l} \text{*Ver ecs. 5.58}_1 \text{ y 5.59 : } \sigma_{nn} = (1 - d^{wd}) (E) \epsilon_{nn}^a, \quad \text{si } d^{wd} = 1 \Rightarrow \sigma_{nn} = 0 \\ \text{*Ver ecs. 5.56}_4 \text{ y 5.60 : } \sigma_{nt} = (1 - d^{wd}) (2G) \epsilon_{nt}, \quad \text{si } d^{wd} = 1 \Rightarrow \sigma_{nt} = 0 \\ \text{*Ver ecs. 5.56}_5 \text{ y 5.61 : } \sigma_{ns} = (1 - d^{wd}) (2G) \epsilon_{ns}, \quad \text{si } d^{wd} = 1 \Rightarrow \sigma_{ns} = 0 \end{array} \quad (5.62)$$

La Energía Libre (por unidad de masa) se define como:

$$\Psi^{wd} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_S : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.63)$$

donde el tensor constitutivo (de orden 4) \mathbf{C}_S . En el Apéndice B se presentan las matrices constitutivas para los casos de Deformación Plana y Esfuerzo Plano. Como se puede observar en este Apéndice las matrices constitutivas son simétricas, pero sus términos no son expresiones sencillas.

El estado de esfuerzos se calcula como:

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{wd}(\boldsymbol{\epsilon}, r)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}_S : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.64)$$

La función de falla f define la superficie de falla en el espacio de los esfuerzos y es función de la norma τ_σ y de la variable interna de tipo esfuerzo q^{wd} . La función de falla f y la norma τ_σ se definen como:

$$\blacktriangleright \quad f(\tau_\sigma, q^{wd}) = \tau_\sigma - q^{wd} \leq 0 \quad (5.65)$$

$$\blacktriangleright \quad \tau_\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^\circledast : \mathbf{W}_\epsilon : \boldsymbol{\sigma}^\circledast} \quad (5.66)$$

donde \mathbf{W}_ϵ es un tensor que se define más adelante y $\boldsymbol{\sigma}^\circledast$ es un tensor de orden 2 (cuyos términos corresponden a las componentes $\sigma_{nn}, \sigma_{nt}, \sigma_{ns}$ del tensor de esfuerzos), definido como: $\boldsymbol{\sigma}^\circledast = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H}^\circledast : \boldsymbol{\sigma}$, siendo \mathbf{H}^\circledast un tensor de orden 4 que se define posteriormente.

La función de daño g define la superficie de falla en el espacio de las deformaciones y es función de la norma τ_ϵ y de la variable interna de tipo deformación r^{wd} . La función de falla g y la norma τ_ϵ se definen como:

$$\blacktriangleright \quad g(\tau_\epsilon, r^{wd}) = \tau_\epsilon - r^{wd} \leq 0 \quad (5.67)$$

$$\blacktriangleright \quad \tau_\epsilon = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^\circledast : \mathbf{W}_\epsilon : \boldsymbol{\epsilon}^\circledast} \quad (5.68)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^\circledast$ corresponde a aquella parte del tensor de deformaciones que está asociada al daño y en consecuencia al salto de las deformaciones (ver ecs. 5.59 - 5.61):

$$\blacktriangleright \quad \boldsymbol{\epsilon}^\circledast = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn}^a & \epsilon_{nt} & \epsilon_{ns} \\ \epsilon_{tn} & 0 & 0 \\ \epsilon_{sn} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d^{wd}} [[\boldsymbol{\epsilon}]] \quad (5.69)$$

por lo que la norma τ_ϵ (ec. 5.68) puede reescribirse como:

$$\blacktriangleright \quad \tau_\epsilon = \frac{1}{d^{wd}} \sqrt{[[\epsilon]] : \mathbf{W}_\epsilon : [[\epsilon]]} \quad (5.70)$$

\mathbf{W}_ϵ es un tensor de orden 4 que se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\epsilon = & W_{\epsilon,nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + W_{\epsilon,nt} \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + W_{\epsilon,nt} \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \\ & W_{\epsilon,ns} \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} + W_{\epsilon,ns} \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.71)$$

donde:

$$\begin{aligned} W_{\epsilon,nn} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{nn} \geq 0 \text{ o } \epsilon_{nn}^a \geq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_{nn} < 0 \text{ o } \epsilon_{nn}^a \leq 0 \end{cases} \\ W_{\epsilon,nt} &= \frac{((\epsilon_{nn}^a)_{crit})^2}{2 ((\epsilon_{nt})_{crit})^2} \\ W_{\epsilon,ns} &= \frac{((\epsilon_{nn}^a)_{crit})^2}{2 ((\epsilon_{ns})_{crit})^2} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Los valores de $(\epsilon_{nn}^a)_{crit}$, $(\epsilon_{nt})_{crit}$ y $(\epsilon_{ns})_{crit}$ corresponden a los valores de las deformaciones cuando en los bordes de la zona de localización no se transmiten tracciones ($q^{wd} = 0$). Estos valores están asociados al ancho de la zona de localización k y en la siguiente sección se relacionan con los saltos de los desplazamientos del modelo discreto. Los comentarios de la sección anterior, relativos a los estudios experimentales sobre la falla de materiales y a la dificultad para determinar los valores de $\mathbf{W}_{[[u]]}$, son aplicables a esta sección y en particular al cálculo de \mathbf{W}_ϵ .

Obsérvese en la definición de ϵ^\circledast (ec. 5.69) que las componentes $\epsilon_{nt}^\circledast$ y $\epsilon_{ns}^\circledast$ corresponden a la totalidad de la deformación ϵ , mientras que $\epsilon_{nn}^\circledast$ corresponde solamente a una parte de la deformación (ϵ_{nn}^a). El término ϵ_{nn}^a puede calcularse con cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \epsilon_{nn}^a &= \frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_S : \epsilon \\ \blacktriangleright \quad \epsilon_{nn}^a &= \epsilon_{nn} + \frac{\nu}{E} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} : \mathbf{C}_S : \epsilon + \frac{\nu}{E} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} : \mathbf{C}_S : \epsilon \end{aligned} \quad (5.73)$$

Si se emplea la ec. 5.73₁, la deformación ϵ^\circledast puede calcularse como:

$$\blacktriangleright \quad \epsilon^\circledast = \frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_S : \epsilon + \mathbf{H}^\circledast : \epsilon \quad (5.74)$$

con

$$\blacktriangleright \mathbf{H}^{\otimes} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} \quad (5.75)$$

El vector \mathbf{n} se define como la dirección del esfuerzo principal cuando se alcanza por primera vez la superficie de falla. Este criterio de falla es equivalente al criterio de falla por esfuerzos máximos principales a tensión. En este modelo se inicia la falla en Modo I y posteriormente puede producirse los modos de falla II y III dependiendo del estado de esfuerzos en la discontinuidad. La superficie de falla g es función de la variable interna de tipo deformación r^{wd} , la cual se calcula como:

$$r^{wd} = \max \{ r_o^{wd}, \max(\tau_\epsilon) \} \quad (5.76)$$

donde r_o^{wd} es el valor inicial de r^{wd} y en este modelo toma el valor: $r_o^{wd} = \frac{f_t}{E}$, por lo que $r^{wd} \in [\frac{f_t}{E}, \infty)$. En la fig. 5.5 se representa gráficamente la evolución de la superficie de falla al incrementarse r^{wd} . Obsérvese que primeramente se alcanza el punto A de la superficie de falla, el cual se localiza sobre el eje ϵ_{nn}^a (Modo I de falla) y posteriormente se pueden desarrollar Modos II y III dependiendo del estado de esfuerzos. En este modelo se considera que el material falla en Modo I porque se busca modelar el comportamiento del concreto; sin embargo, las ecuaciones aquí presentadas pueden ser extendidas a otros tipos de comportamiento sin dificultad.

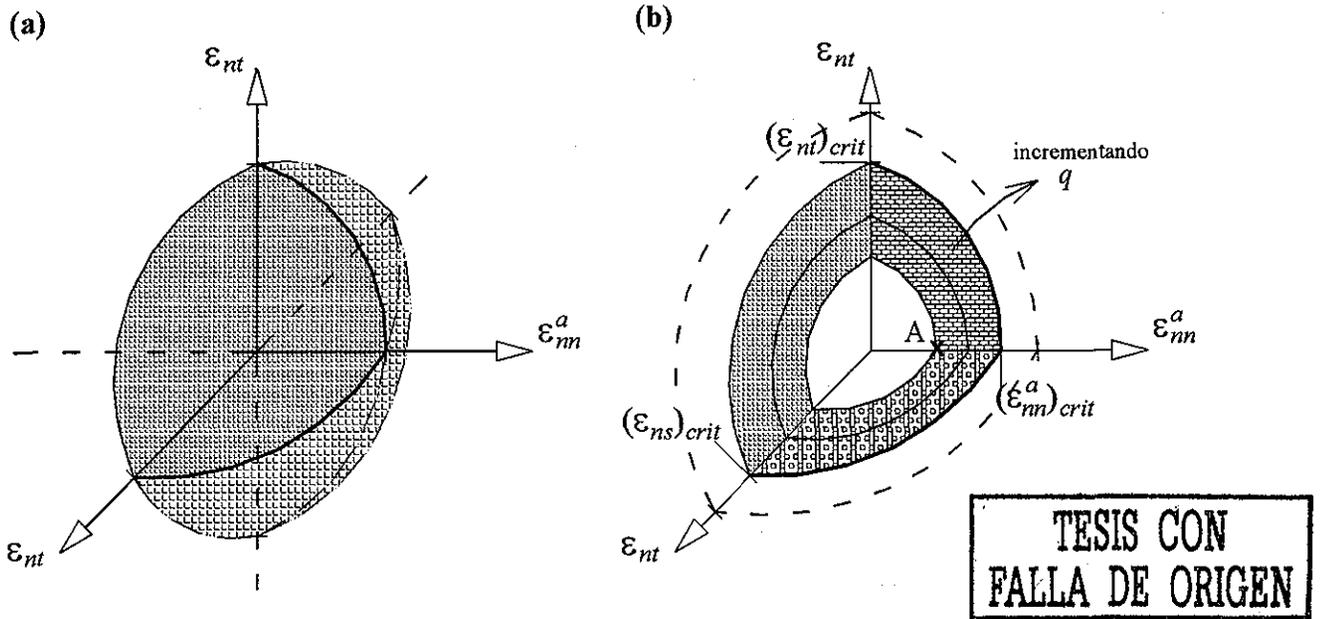


Figura 5.6: Criterio de Daño para la Aproximación Continua: (a) superficie de falla y (b) evolución del daño

Dado que la variable interna de tipo esfuerzo q^{wd} varía de f_t a 0, y que $r^{wd} \in [\frac{f_t}{E}, +\infty)$,

se verifica que el intervalo de la variable de daño es $d^{wd} \in [0, 1]$, como ocurre con el modelo de Daño Isotrópico presentado anteriormente.

El operador constitutivo tangente se obtiene de derivar la relación constitutiva con respecto al tiempo:

$$\dot{\sigma} = \dot{C}_S : \epsilon + C_S : \dot{\epsilon} = d' \dot{r}^{wd} C'_S : \epsilon + C_S : \dot{\epsilon} \quad (5.77)$$

con

$$C'_S = \partial_d C_S \quad y \quad d' = \partial_r d^{wd} = \left[(1 - d^{wd}) - \frac{\mathcal{H}^{wd}}{E} \right] \frac{1}{r^{wd}} \quad (5.78)$$

El término \dot{r}^{wd} se calcula empleando las ecs. 5.67 y 5.68. Como se indica en la ec. 5.73 existen dos maneras alternas de calcular ϵ_{nn}^a ; a continuación se trabaja con la ec. 5.73₁ por tener la forma más compacta para calcular \dot{r}^{wd} (tomando la ec. 5.74):

$$\dot{r}^{wd} = \dot{\tau}_\epsilon = \frac{1}{\tau_\epsilon} \left[\epsilon_{nn}^a \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{W}_\epsilon : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \dot{\epsilon}_{nn}^a + \epsilon : \mathbf{H}^\otimes : \mathbf{W}_\epsilon : \mathbf{H}^\otimes : \dot{\epsilon} \right] \quad (5.79)$$

con

$$\dot{\epsilon}_{nn}^a = \frac{d' \dot{r}^{wd}}{(1 - d^{wd})^2 E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C_S : \epsilon + \frac{d' \dot{r}^{wd}}{(1 - d^{wd}) E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C'_S : \epsilon + \frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C_S : \dot{\epsilon} \quad (5.80)$$

y

$$\dot{d}^{wd} = d' \dot{r}^{wd} = d' \dot{\tau}_\epsilon \quad (5.81)$$

Se definen las constantes A_1 y A_3 para simplificar las expresiones anteriores:

$$A_1 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{W}_\epsilon : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \epsilon_{nn}^a = (W_\epsilon)_{nnnn} \epsilon_{nn}^a \quad (5.82)$$

$$A_3 = \frac{d'}{(1 - d^{wd})^2 E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C_S : \epsilon + \frac{d'}{(1 - d^{wd}) E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C'_S : \epsilon \quad (5.83)$$

Sustituyendo las constantes A_1 (ec. 5.82) y A_3 (ec. 5.83) en la ec. 5.79 y reordenando términos se obtiene:

$$\dot{r}^{wd} = \dot{\tau}_\epsilon = \frac{1}{(\tau_\epsilon - A_1 A_3)} \left[A_1 \left(\frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : C_S : \dot{\epsilon} + \epsilon : \mathbf{H}^\otimes : \mathbf{W}_\epsilon : \mathbf{H}^\otimes : \dot{\epsilon} \right] \quad (5.84)$$

De tal suerte que el tensor constitutivo tangente que relaciona la tasa de esfuerzos $\dot{\sigma}$ con la tasa de deformaciones $\dot{\epsilon}$, se puede definir como:

- Para el intervalo de carga elástica o descarga elástica ($\dot{d}^{wd} = 0$):

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_S : \dot{\epsilon} \quad (5.85)$$

- Para el intervalo de carga inelástica o neutra ($\dot{d}^{wd} > 0$):

$$\dot{\sigma} = \left(\mathbf{C}_S + \left[(1 - d^{wd}) - \frac{\mathcal{H}^{wd}}{E} \right] \left[\frac{1}{r^{wd}} \right] \left[\frac{1}{\tau_\epsilon - A_1 A_3} \right] \right. \\ \left. \left[A_1 \left(\frac{1}{(1 - d^{wd}) E} \right) (\mathbf{C}'_S : \epsilon) \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_S) + (\mathbf{C}'_S : \epsilon) \otimes (\epsilon : \mathbf{H}^\otimes : \mathbf{W}_\epsilon) \right] \right) : \dot{\epsilon} \quad (5.86)$$

Al igual que para la Aproximación Discreta, es importante enfatizar que las ecuaciones presentadas en esta parte sólo son válidas cuando $[[\epsilon]]_{nn} \geq 0$. Esto se debe a que el sentido físico del Modo I solamente existe cuando la grieta está abierta ($[[\epsilon]]_{nn} > 0$) o cerrada ($[[\epsilon]]_{nn} = 0$). Por otra parte, $[[\epsilon]]_{nt}$ y $[[\epsilon]]_{ns}$ pueden tomar valores positivos o negativos, dependiendo del signo de σ_{nt} y σ_{ns} . Si se presenta el caso en el que la componente del tensor de esfuerzos σ_{nn} tenga signo negativo, solamente se requiere modificar el valor de $([\mathbf{C}_S]^{-1})_{nn} = \frac{1}{(1-d^{wd})E}$ por el valor del inverso del Módulo de Elasticidad ($([\mathbf{C}_S]^{-1})_{nn} = \frac{1}{E}$) y emplear el mismo procedimiento y ecuaciones establecidas en esta sección, obteniéndose una ecuación más compacta que la 5.86.

Este modelo se puede aplicar a Discontinuidades Fuertes haciendo un Análisis de Discontinuidad Fuerte, como el que se realizó para el modelo de Daño Isotrópico, obteniéndose ecuaciones similares a las aquí presentadas.

RESUMEN: En este modelo de Daño Anisotrópico para Discontinuidades Débiles, al igual que en el modelo de Daño Isotrópico, las variables independientes son las deformaciones ϵ . Las deformaciones en la zona de localización se calculan como: $\epsilon = \bar{\epsilon} + [[\epsilon]]$, donde $[[\epsilon]]$ puede expresarse en términos del salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$. Las variables dependientes son los esfuerzos. En este modelo el daño se concentra en Ω_k y en $\Omega \setminus \Omega_k$ no ocurre daño. Se considera que f_t , \mathcal{H}^{wd} y k son propiedades del material.

5.6 Análisis Energético de las Aproximaciones

5.6.1 Energía de Fractura

Es de interés desarrollar ecuaciones que permitan relacionar los parámetros de las distintas aproximaciones aquí estudiadas. Para este fin se propone realizar un “Análisis Energético” de las aproximaciones como un medio para encontrar dichas ecuaciones. Con base en el “Análisis Energético” se determina una relación entre los módulos de ablandamiento, posteriormente

se evalúa el efecto de variar el ancho de la zona de localización de deformaciones.

Para este propósito se calcula la energía de deformación interna (EI^d) para la Aproximación Discreta. En este modelo se considera que el cuerpo permanece elástico lineal y que el daño se concentra en la discontinuidad. Por lo tanto, la energía de deformación interna se puede calcular como:

$$EI^d = \int_{\Omega \setminus S} \int_0^{\hat{t}_i} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\hat{t} \, d\Omega + \int_S \int_0^{\hat{t}_i} \mathbf{T}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \, d\hat{t} \, d\Gamma \quad (5.87)$$

donde \hat{t} es el tiempo y \hat{t}_i es el tiempo en el instante i .

En las Discontinuidades Débiles se considera que el material fuera de la banda de localización de deformaciones tiene un comportamiento elástico lineal, mientras que el daño se concentra en la zona de localización de deformaciones. En la zona de localización de deformaciones una parte de las deformaciones está asociada al daño ($[[\boldsymbol{\epsilon}]]$) y la otra no lo está ($\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$). La energía de deformación interna (EI^{wd}) se puede calcular como:

$$EI^{wd} = \int_{\Omega} \int_0^{\hat{t}_i} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\hat{t} \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \int_0^{\hat{t}_i} \boldsymbol{\sigma} : [[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] \, d\hat{t} \, d\Omega \quad (5.88)$$

Los primeros términos de EI^d y EI^{wd} son iguales y pueden ser interpretados como la energía del volumen no dañado. Esto quiere decir que la igualdad energética entre ambas aproximaciones se cumple si:

$$\blacktriangleright \int_S \int_0^{\hat{t}_i} \mathbf{T}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \, d\hat{t} \, d\Gamma = \int_{\Omega_k} \int_0^{\hat{t}_i} \boldsymbol{\sigma} : [[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] \, d\hat{t} \, d\Omega \quad (5.89)$$

La ec. 5.89 indica que la energía de fractura (definida en el capítulo 2) debe ser la misma para ambas aproximaciones. En particular, la segunda integral del primer término ($\int_0^{\hat{t}_i} \mathbf{T}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \, d\hat{t}$) corresponde a la energía de fractura G_f del modelo de Grieta Cohesiva y la segunda integral del segundo término ($\int_0^{\hat{t}_i} \boldsymbol{\sigma} : [[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] \, d\hat{t}$) corresponde a la densidad de la energía de fractura γ_f del modelo de Banda de Agrietamiento, cuando se evalúan para $\hat{t}_i = \infty$. G_f y γ_f son propiedades del material.

5.6.2 Equivalencias entre variables

Si se establece como hipótesis que el ancho de la zona de localización k es pequeño, es posible considerar que las tracciones ($\mathbf{T}_k = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k$) son constantes en Ω_k para una coordenada local t . Por lo tanto, se puede establecer que las tracciones en la Aproximación Discreta y los esfuerzos en las Discontinuidades Débiles se relacionan como:

$(T_S)_n = (\sigma_k)_{nn}$, $(T_S)_t = (\sigma_k)_{nt}$ y $(T_S)_s = (\sigma_k)_{ns}$. A partir de las ecuaciones constitutivas de tipo discreto, ecs. 5.24 y 5.26, y de tipo continuo, ecs. 5.56 - 5.61, es posible establecer las

siguientes ecuaciones:

- Aproximación Discreta:

$$[[u]]_n = \frac{1}{(1-d^d)E} T_n \quad [[u]]_t = \frac{1}{(1-d^d)G} T_t \quad [[u]]_s = \frac{1}{(1-d^d)G} T_s \quad (5.90)$$

- Aproximación Continua:

$$[[\epsilon]]_{nn} = \frac{d^{wd}}{(1-d^{wd})E} \sigma_{nn} \quad [[\epsilon]]_{nt} = \frac{d^{wd}}{(1-d^{wd})(2G)} \sigma_{nt} \quad [[\epsilon]]_{ns} = \frac{d^{wd}}{(1-d^{wd})(2G)} \sigma_{ns} \quad (5.91)$$

Sustituyendo las ecs. 5.90 y 5.91 en la ec. 5.89, y dada la hipótesis de que k es pequeño, se obtiene para el caso de dos dimensiones:

$$\begin{aligned} & \int_S \int_0^{\hat{t}_i} (1-d^d) (E [[u]]_n [[\dot{u}]]_n + G [[u]]_t [[\dot{u}]]_t) d\hat{t} dS \\ &= \int_{\Omega_k} \int_0^{\hat{t}_i} \frac{(1-d^{wd})}{d^{wd}} (E [[\epsilon]]_{nn} [[\dot{\epsilon}]]_{nn} + 4G [[\epsilon]]_{nt} [[\dot{\epsilon}]]_{nt}) d\hat{t} d\Omega \end{aligned} \quad (5.92)$$

La cinemática de la Aproximación Continua, descrita al inicio del capítulo, establece que (ecs. 5.9 y 5.10): $[[\epsilon]]_{nn} = \frac{1}{k} [[u]]_n$, $[[\epsilon]]_{nt} = \frac{1}{2k} [[u]]_t$ y $[[\epsilon]]_{ns} = \frac{1}{2k} [[u]]_s$. Estas ecuaciones permiten relacionar las dos aproximaciones y establecer que los modelos Discreto y Continuo son equivalentes, dado que la energía interna entre ambas aproximaciones es igual, si se satisface la siguiente ecuación:

$$\blacktriangleright \quad (1-d^d) = \frac{(1-d^{wd})}{d^{wd}} \frac{1}{k} \quad (5.93)$$

Tomando en cuenta la definición de la variable de daño ($d = 1 - \frac{q}{r} \frac{1}{E}$), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\blacktriangleright \quad \frac{q^d}{Er^d} = \frac{q^{wd}}{Er^{wd} - q^{wd}} \frac{1}{k} \quad (5.94)$$

El primer paso para verificar el cumplimiento de la ec. 5.94 consiste en encontrar una ecuación que relacione las variables internas r^d y r^{wd} . Para este propósito se parte de la definición de la norma τ_ϵ (ec. 5.70) dado que $r^{wd} = \tau_\epsilon$, la cual se escribe para el caso plano como:

$$r^{wd} = \frac{1}{d^{wd}} \sqrt{(W_\epsilon)_{nnnn} ([[\epsilon]]_{nn})^2 + 2(W_\epsilon)_{ntnt} ([[\epsilon]]_{nt})^2} \quad (5.95)$$

Tomando en cuenta la cinemática del salto de las deformaciones para la Aproximación Continua, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$r^{wd} = \frac{1}{d^{wd}} \frac{1}{k} \sqrt{(W_\epsilon)_{nnnn} ([[u]]_n)^2 + \frac{1}{2} (W_\epsilon)_{ntnt} ([[u]]_t)^2} \quad (5.96)$$

y a partir de esta ecuación se puede establecer que:

$$\blacktriangleright \quad r^{wd} = \frac{1}{k} \frac{1}{d^{wd}} r^d \quad (5.97)$$

dado que: $(W_\epsilon)_{nnnn} = (W_{[[u]]})_{nn}$ y $\frac{1}{2} (W_\epsilon)_{ntnt} = (W_{[[u]]})_{nt}$.

Con base en la ec. 5.97 se verifica que el denominador de los dos términos de la ec. 5.94 son iguales: $Er^d = E(kd^{wd}r^{wd}) = Ek\left(1 - \frac{1}{E} \frac{q^{wd}}{r^{wd}}\right)r^{wd} = (Er^{wd} - q^{wd})k$. Dado que se puede verificar fácilmente que $q^{wd} = q^d$, se concluye que las ecs. 5.93 y 5.94 se satisfacen y consecuentemente los modelos Discreto y Continuo son equivalentes.

Con base en las ecs. 5.93 a 5.97, se deducen las ecuaciones que relacionan los módulos de ablandamiento de la Aproximación Discreta y de la Discontinuidad Débil. Para este propósito considérese el caso particular de ablandamiento lineal:

$$\text{Discontinuidades Débiles} : \quad q^{wd} = q_o + \mathcal{H}^{wd} (r^{wd} - r_o^{wd}) \quad (5.98)$$

$$\text{Aproximación Discreta} : \quad q^d = q_o + \mathcal{H}^d r^d$$

Dado que $q^{wd} = q^d$, las ecs. 5.98₁ y 5.98₂ se pueden igualar obteniéndose:

$$\frac{\mathcal{H}^{wd}}{\mathcal{H}^d} = \frac{r^d}{r^{wd} - r_o^{wd}} \quad (5.99)$$

Sustituyendo la ec. 5.77 en la ec. 5.99, y empleando la ec. 5.98₁, se obtiene tras algunas manipulaciones algebraicas:

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H}^d = \frac{\mathcal{H}^{wd}}{k \left(1 - \frac{\mathcal{H}^{wd}}{E}\right)} \quad (5.100)$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{H}^{wd} = \frac{k\mathcal{H}^d}{1 + k \frac{\mathcal{H}^d}{E}} \quad (5.101)$$

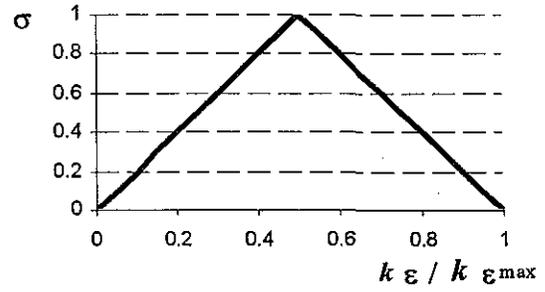
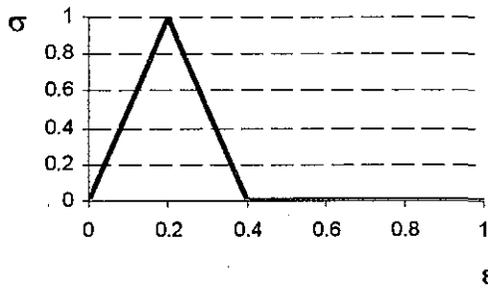
Las ecuaciones anteriores son válidas también para curvas de ablandamiento $(q - r)$ multilineales, siendo la demostración fácil de realizar.

Es de interés conocer el comportamiento de las variables \mathcal{H}^d y \mathcal{H}^{wd} a través de las ecs. 5.100 y 5.101. Para esto se debe tener presente que al emplear un modelo continuo existen dos condiciones básicas: (1) se tienen las propiedades constitutivas obtenidas en términos

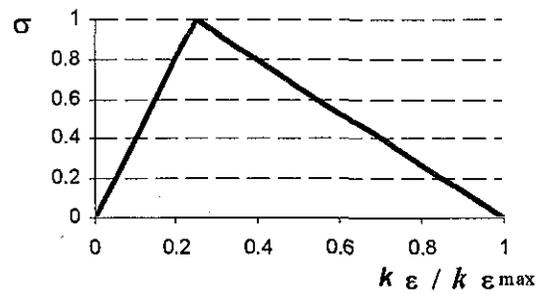
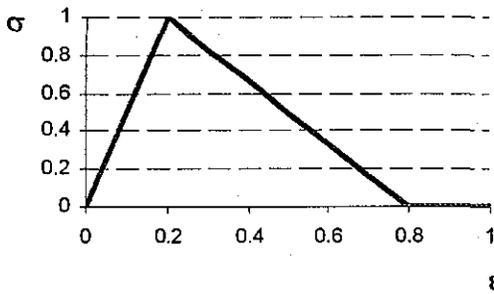
de continuo (Bazant y Oh, 1983; Belytschko *et al.*, 1988), *i.e.* se conoce \mathcal{H}^{wd} y k ; (2) se tienen las propiedades de tipo discreto (\mathcal{H}^d) y se emplea la ec. 5.101 para calcular el valor de \mathcal{H}^{wd} dado un valor de k . El análisis de los parámetros de ablandamiento se realiza adoptando la segunda condición, para lo cual se considera un modelo unidimensional y se hace variar el ancho de la zona de localización k dado un \mathcal{H}^d constante. Las propiedades consideradas son: $E = 5$, $f_t = 1$ y $\mathcal{H}^d = -2.5$. Las gráficas presentadas en la fig. 5.7 ilustran el efecto de variar k ($k = 1, 0.5, 0.1, 0.01$) y su efecto en \mathcal{H}^{wd} . En la primera columna se grafican curvas $\sigma - \epsilon$ en Ω_k ; las áreas definidas bajo estas curvas corresponden a la energía de deformación interna por unidad de masa en el subdominio Ω_k . En la segunda columna se grafican curvas $\sigma - k\epsilon / (k\epsilon_{\max})$ en Ω_k ; las áreas bajo estas curvas son proporcionales a la energía de deformación interna producida en el subdominio Ω_k (estas gráficas se normalizan con respecto a $k\epsilon_{\max}$ para facilitar su interpretación, siendo ϵ_{\max} la deformación asociada a $[[\epsilon]]_{crit}$).

Con base en la fig. 5.7 y en la ec. 5.101, es posible generar algunas conclusiones en torno a las variables de ablandamiento y, en general, al comportamiento del modelo constitutivo. En la primera columna se observa que al disminuir k disminuye \mathcal{H}^{wd} , y en particular, cuando $k \rightarrow 0$ se observa que $\mathcal{H}^{wd} \rightarrow k\mathcal{H}^d \rightarrow 0$, verificándose que en Discontinuidad Fuerte el ablandamiento es nulo: $\mathcal{H}^{wd} = 0$ (Simo *et al.*, 1993). En la segunda columna se observa como al disminuir k se reduce la contribución elástica no dañada de la energía y cuando $k \rightarrow 0$ se obtiene un modelo “rígido-daño” desde el punto de vista energético, como ocurre en el modelo discreto. La disminución de la energía elástica no dañada en la zona de localización de deformaciones Ω_k se verifica a través de la ec. 5.88: $\int_{\Omega_k} \int_{\epsilon_o}^{\epsilon_i} \sigma : \bar{\epsilon} \, d\epsilon \, d\Omega$; en esta ecuación $\bar{\epsilon}$ siempre está acotada, por lo que al disminuir k disminuye Ω_k y consecuentemente disminuye la contribución de la parte de la energía elástica no dañada.

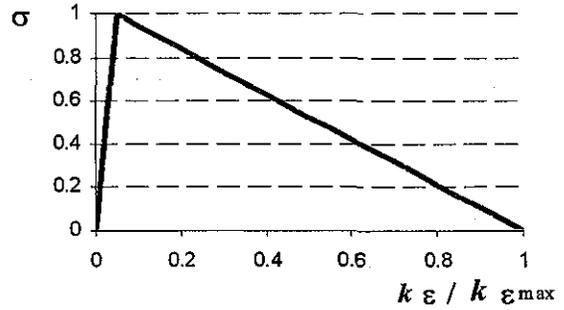
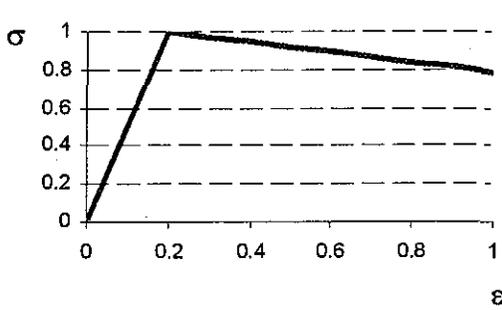
$$k = 1, \mathcal{H}^d = -2.5, \mathcal{H}^{wd} = -5.0000$$



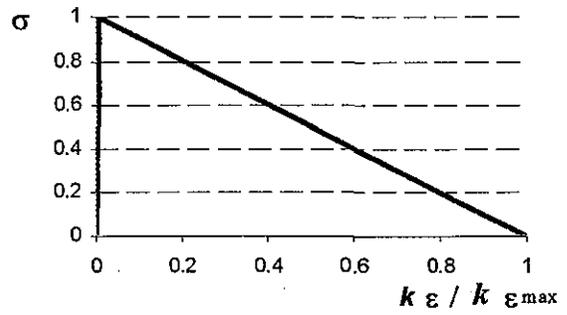
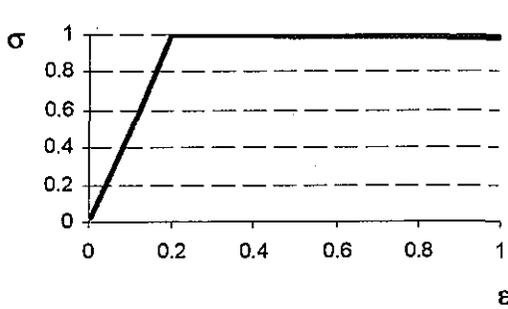
$$k = 0.5, \mathcal{H}^d = -2.5, \mathcal{H}^{wd} = -1.6666$$



$$k = 0.1, \mathcal{H}^d = -2.5, \mathcal{H}^{wd} = -0.2631$$



$$k = 0.01, \mathcal{H}^d = -2.5, \mathcal{H}^{wd} = -0.0251$$



$\sigma - \epsilon$

$\sigma - k\epsilon / (k\epsilon_{\max})$

Figura 5.7: Efecto de la variación del ancho de la zona de localización k

Capítulo 6

IMPLANTACIÓN EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es, desde hace ya muchos años, el método numérico más popular para el análisis de medios continuos. Las aplicaciones de este método son sumamente amplias: problemas uni, bi y tridimensionales, no linealidades en el material y en la geometría, análisis dinámico, etc. Como se sabe el método se basa en la discretización del dominio, el empleo de nodos a los cuales se le asocian los grados de libertad y la aproximación de los campos (*e.g.* desplazamientos) por medio de funciones de interpolación. Desafortunadamente, la formulación por desplazamientos estándar del método no es capaz de simular adecuadamente el comportamiento de cuerpos con discontinuidades interiores, por lo que en esta sección se desarrolla la aplicación del método a este tipo de problemas.

Para realizar esta implantación se requiere tener en cuenta las ecuaciones que gobiernan el problema (obtenidas en la Formulación Variacional), la Cinemática (definición de los campos de desplazamientos y deformaciones) y los Modelos Constitutivos. Por lo anterior, este capítulo se comienza presentando, de manera compacta, las principales ecuaciones que definen el problema para cada tipo de aproximación, así como un ejemplo ilustrativo de las mismas. Posteriormente estas ecuaciones son reescritas en términos matriciales comunes al Método de los Elementos Finitos, pero en este apartado ya no se pone énfasis en el tipo de aproximación.

La parte medular de este capítulo se localiza en la sección 6.3 y corresponde a la deducción de las ecuaciones a emplear en la resolución numérica del problema por el MEF. Esta actividad se realiza empleando dos metodologías diferentes: el Método Mixto de Deformaciones Mejoradas (Simo y Rifai, 1990) y la Imposición Fuerte de la Continuidad de Tracciones en la Discontinuidad. La primera metodología ha sido desarrollada y empleada ampliamente para aproximar discontinuidades fuertes (por ejemplo Simo y Oliver, 1994); sin embargo, su aplicación a la aproximación discreta no es del todo aceptable como se discute en

el apartado 6.3.1.2. La segunda metodología se basa en el establecimiento de ecuaciones que relacionen los desplazamientos “continuos” y los “regulares” (en este trabajo se establecen tres Grupos de Ecuaciones diferentes entre sí), las cuales son implantadas en la ecuación de equilibrio global. Esta metodología es aplicada tanto para la aproximación continua como para la discreta. En general, ambas metodologías conducen a sistemas de ecuaciones no lineales y no simétricos.

6.1 Definición de campos y ecuaciones

En esta sección se presentan los campos y las ecuaciones que definen al problema de discontinuidades interiores para las distintas aproximaciones aquí tratadas. El contenido de esta sección se escribe posteriormente en términos matriciales comunes al Método de los Elementos Finitos. Esta información fue extraída del Capítulo 4 (Formulación Variacional) y de la sección 5.1 (Cinemática) y se presenta de forma resumida. Al final de esta sección se presenta un ejemplo ilustrativo de una barra sujeta a tensión que falla en el centro de la misma, ilustrándose las diferencias entre las distintas aproximaciones.

Sea un cuerpo sólido y homogéneo cuyas partículas materiales están referenciadas a un sistema coordenado \mathbf{x} (x, y). El cuerpo posee un dominio Ω y una frontera Γ . A este cuerpo se le introduce una discontinuidad (ya sea en el campo de desplazamientos como grieta o en el campo de deformaciones como banda de localización) en S , cuya normal está definida por el vector \mathbf{n} y establece el sistema coordenado local $\hat{\mathbf{n}}$ (n, t). Las condiciones de frontera del problema son los desplazamientos prescritos (\mathbf{u}^*): $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^*$ en $\Gamma_{\mathbf{u}}$, donde $\hat{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos “regulares”. Adicionalmente, están las tracciones prescritas (\mathbf{T}^*): $\mathbf{T}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^*$ en $\Gamma_{\mathbf{T}}$, donde \mathbf{n}^* es la normal a la superficie del cuerpo y $\boldsymbol{\sigma}$ son los esfuerzos. En la frontera se cumple que: $\Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{T}} = \Gamma$ y $\Gamma_{\mathbf{u}} \cap \Gamma_{\mathbf{T}} = \emptyset$. Es importante tener presente que los desplazamientos “regulares” $\hat{\mathbf{u}}$ satisfacen las condiciones de frontera del problema.

6.1.1 Aproximación Discreta

El campo de desplazamientos se define como (ver ecs. 4.1 y 5.1):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + M_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + H_S(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.2)$$

con

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \varphi^h(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

donde $[[\mathbf{u}]]$ es el salto de los desplazamientos; $\bar{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos “continuos”; M_S es una función que se define como: $M_S = H_S - \varphi^h$; H_S es una función escalón ($H_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^- \cup \Omega^-$ y $H_S(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^+ \cup \Omega^+$); φ^h es una función continua que cumple con: $\varphi^h(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $\varphi^h(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$; con $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_h \cup \Omega^+$ y $S \subset \Omega_h$.

El campo de deformaciones $\epsilon(x)$, definido únicamente en $\Omega \setminus S$, se expresa como:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}} + H_S \nabla^s [[\mathbf{u}]] = \bar{\epsilon}(\mathbf{x}) \quad (6.4)$$

con

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}} + H_S \nabla^s [[\mathbf{u}]] \quad (6.5)$$

donde $\bar{\epsilon}$ son las deformaciones “continuas”.

Al igual que para las deformaciones, los esfuerzos únicamente están definidos en $\Omega \setminus S$. Los esfuerzos se calculan por medio de la relación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (6.6)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ representa de manera generalizada el comportamiento constitutivo del material, el cual es función de la historia de deformaciones en el punto (relación constitutiva local) e independiente de la velocidad de carga.

El comportamiento de la discontinuidad está regido por las tracciones y el salto de los desplazamientos, que se relacionan entre sí por medio de una relación constitutiva. Las tracciones se calculan como:

$$\mathbf{T}_S = \mathbb{T}([[\mathbf{u}]]) \quad (6.7)$$

donde \mathbb{T} representa de manera generalizada el comportamiento constitutivo de la discontinuidad, el cual es función de la historia del salto de desplazamientos en el punto (relación constitutiva local) e independiente de la velocidad de carga.

De la aplicación del “Principio de los Trabajos Virtuales” se obtuvieron dos ecuaciones. La primera corresponde al equilibrio global y la segunda corresponde al equilibrio en la discontinuidad:

$$\int_{\Omega \setminus S} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega \setminus S} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (6.8)$$

$$\mathbf{T}_S = \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} \quad (6.9)$$

donde $\delta(\bullet)$ es la variación de (\bullet) ; \mathbf{b} son las fuerzas de cuerpo; \mathbf{T}_S son las tracciones en la discontinuidad evaluadas en una partícula en S , mientras que $\boldsymbol{\sigma}^+$ corresponde al estado

de esfuerzos evaluado en una partícula contigua a S pero en Ω_h^+ .

6.1.2 Discontinuidades Débiles

El campo de desplazamientos se define como (ver ecs. 4.30 y 5.5):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + M_k(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + H_k(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.11)$$

con

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \varphi^h(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}) \quad (6.12)$$

donde M_k es una función que se define como: $M_k(\mathbf{x}) = H_k(\hat{\mathbf{n}}) - \varphi^h(\mathbf{x})$; H_k es una función rampa: $H_k(\hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad \forall < n^-, H_k(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{n-n^-}{n^+-n^-} \quad \forall^- \leq n \leq n^+, H_k(\hat{\mathbf{n}}) = 1 \quad \forall > n^+$. Las líneas S^- ($n = n^-$) y S^+ ($n = n^+$) delimitan al subdominio Ω_k ($\Omega_k \subset \Omega_h$) y están separadas una distancia k ($k = n^+ - n^-$). El subdominio Ω_k corresponde a la zona de localización de deformaciones.

El campo de deformaciones $\epsilon(\mathbf{x})$, definido en Ω , se calcula como:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}} + H_k \nabla^s [[\mathbf{u}]] + \mu_k \frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s = \bar{\epsilon} + [[\epsilon]] \quad (6.13)$$

con

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^s \bar{\mathbf{u}} + H_k \nabla^s [[\mathbf{u}]] \quad \text{y} \quad [[\epsilon]] = \mu_k \frac{1}{k} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (6.14)$$

El campo de esfuerzos $\sigma(\mathbf{x})$, definido en Ω , se calcula como:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \Sigma(\epsilon) \quad (6.15)$$

De la aplicación del "Principio de los Trabajos Virtuales" se obtuvieron dos ecuaciones; la primera corresponde al equilibrio global y la segunda corresponde al equilibrio en los bordes de la zona de localización:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (6.16)$$

$$\sigma_{K^-} \cdot \mathbf{n} = \sigma_h^- \cdot \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \sigma_{K^+} \cdot \mathbf{n} = \sigma_h^+ \cdot \mathbf{n} \quad (6.17)$$

La ecs. 6.17₁ y 6.17₂ establecen la continuidad de tracciones a través de las líneas S^- y S^+ , que corresponden a los bordes de la zona de localización de deformaciones.

6.1.3 Discontinuidades Fuertes

El campo de desplazamientos se define de la misma manera que en la Aproximación Discreta (ecs. 6.1 - 6.3). El campo de deformaciones y de esfuerzos están definidos en Ω ; las deformaciones pueden ser aproximadas empleando la definición del campo de deformaciones de las Discontinuidades Débiles (ecs. 6.13 y 6.14), pero considerando un ancho de banda de localización muy pequeño. De la aplicación del “Principio de los Trabajos Virtuales” se obtiene una ecuación asociada al equilibrio global (ec. 6.16) y una relativa a la continuidad de tracciones en la discontinuidad, que corresponde al caso en el cual se colapsan los bordes de la banda (S^- y S^+) en S , de tal suerte que: $\sigma_K^- = \sigma_K^+ = \sigma_S$ y por lo tanto la continuidad de tracciones se expresa como: $\sigma_S \cdot \mathbf{n} = \sigma_h^- \cdot \mathbf{n} = \sigma_h^+ \cdot \mathbf{n}$.

6.1.4 Ejemplo ilustrativo de las distintas aproximaciones

Para ilustrar las distintas aproximaciones aquí abordadas, se presenta la respuesta (desplazamientos, deformaciones y esfuerzos) de una barra sometida a tensión en sus extremos que tiene una discontinuidad al centro (fig. 6.1). La fig. 6.2 permite ilustrar de forma sencilla las características básicas de las aproximaciones, las cuales han sido enfatizadas en los capítulos anteriores.

El campo de desplazamientos es igual en la Aprox. Discreta y en la Aprox. Continua de Discontinuidades Fuertes y está caracterizado por un salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ en S ; en la Aprox. Continua de Discontinuidades Débiles el salto de los desplazamientos está localizado dentro de la zona de localización de deformaciones contenida entre S^- y S^+ , siendo los desplazamientos continuos. Las deformaciones son constantes en la Aprox. Discreta, pero no están definidas en S . En la Aprox. Continua las deformaciones presentan un salto, el cual se localiza en los bordes de la zona de localización de deformaciones para las Discontinuidades Débiles y se localiza en S para las Discontinuidades Fuertes; en el primer caso las deformaciones están acotadas y en el segundo no lo están. Los esfuerzos son constantes en toda la barra, pero para la Aprox. Discreta éstos no están definidos en S ya que las deformaciones no están definidas en S .

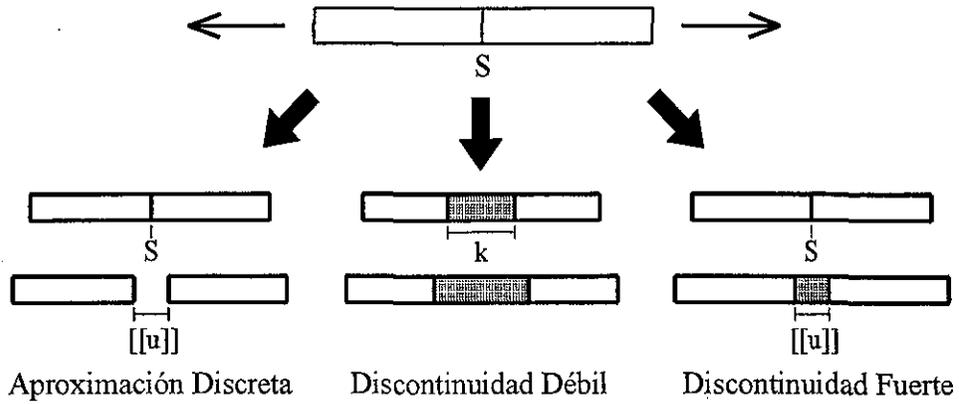


Figura 6.1: Barra sometida a tensión en sus extremos que presenta una discontinuidad al centro

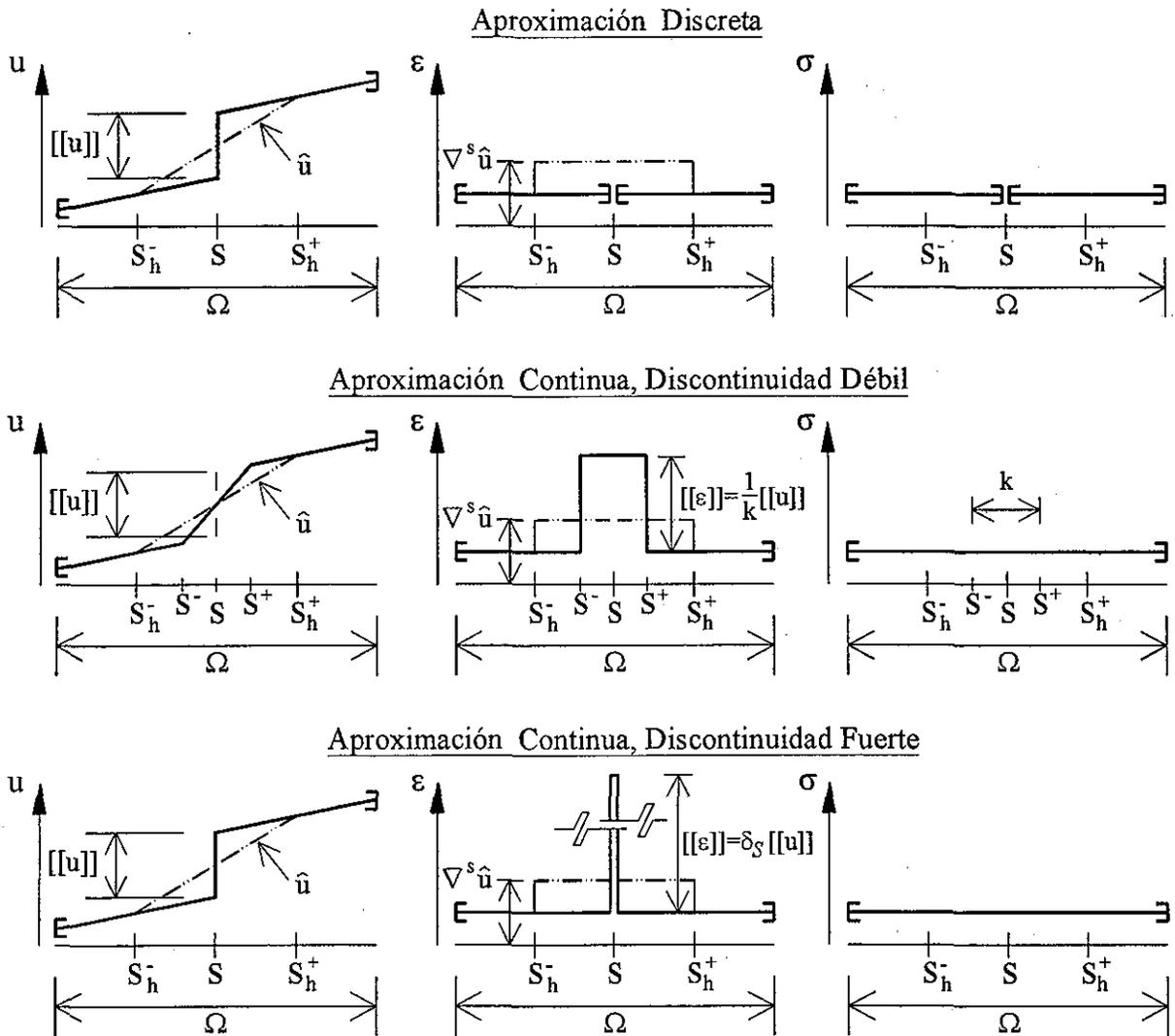


Figura 6.2: Resumen ilustrativo de las distintas aproximaciones

6.2 Definición de los términos en el MEF

El problema de Discontinuidades Internas es resuelto en este trabajo empleando el Método de los Elementos Finitos. Para este efecto, el dominio es discretizado en n_{elm} elementos, como se ilustra en la fig. 6.3. El dominio está compuesto por tres subdominios: $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_h \cup \Omega^+$, donde Ω_h está compuesto por todos los elementos que contienen en su interior a la discontinuidad. Las líneas S_h^- y S_h^+ definen las fronteras comunes entre los subdominios ($S_h^- = \partial\Omega^- \cap \partial\Omega_h$ y $S_h^+ = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega_h$). Los elementos finitos contenidos en Ω^- y Ω^+ son aproximados de la manera estándar, mientras que los que están contenidos en Ω_h son mejorados en su aproximación para que sean capaces de modelar la presencia de la discontinuidad. A este respecto, Ω_e y S_e hacen referencia al dominio y a la discontinuidad de un elemento finito.

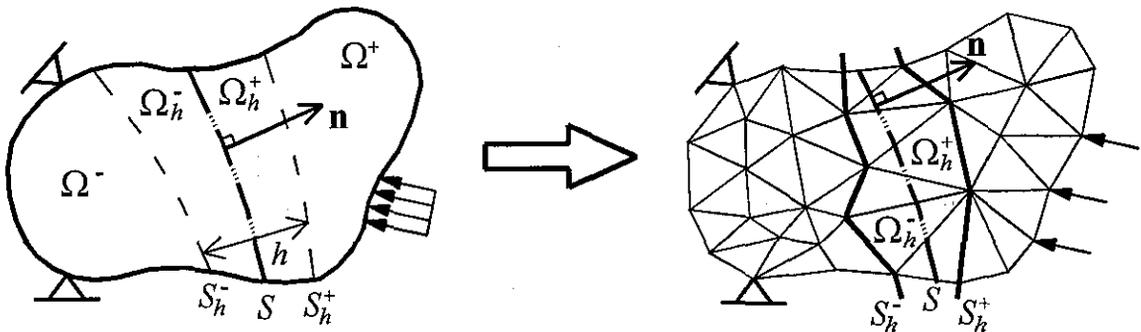


Figura 6.3: Discretización de un dominio con una discontinuidad

En el Método de los Elementos Finitos los campos son aproximados por medio de funciones de interpolación. La técnica empleada en este trabajo consiste en mejorar las aproximaciones de los campos de desplazamientos y de deformaciones (introduciendo modos incompatibles) de manera consistente con la cinemática del problema. Por este motivo, al principio de este capítulo se realizó un resumen de los términos y ecuaciones que definen al problema, los cuales son redefinidos en esta sección en términos matriciales comunes al Método de los Elementos Finitos. En esta sección ya no se pone énfasis en el tipo de aproximación, lo que permite ir teniendo una visión unificadora del problema.

El campo de desplazamientos “regular” se aproxima como:

$$\hat{\mathbf{u}} \cong \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}_i \quad (6.18)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_e$ es la aproximación dentro del elemento del campo de desplazamientos “regular”; \mathbf{N} son las funciones de forma estándar (Zienkiewicz y Taylor, 1994a); $\hat{\mathbf{u}}_i$ es el vector de desplazamientos “regulares” nodales. Para el caso de que todos los nodos estén en S_h^- o S_h^+ , es válida la siguiente relación: $\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i$, siendo \mathbf{u}_i los desplazamientos (totales) nodales.

El salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ corresponde a un grado de libertad interno. En este trabajo se considera que la aproximación del salto de los desplazamientos dentro del elemento es constante. La aproximación del salto de desplazamientos se denota $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$ si está en coordenadas globales y $[[\mathbf{u}]]_{n,t}$ si está en coordenadas locales. Ambos vectores se relacionan entre si a través de la matriz de transformación de coordenadas \mathbf{T}_{lg} (se define en el Apéndice C para el caso plano):

$$[[\mathbf{u}]]_{x,y} = \mathbf{T}_{lg} [[\mathbf{u}]]_{n,t} \quad (6.19)$$

Se propone que la función continua φ^h sea:

$$\varphi^h(\mathbf{x}) = \varphi_e^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\Phi \quad (6.20)$$

donde φ_e^h es la definición de φ^h para un elemento finito; esta función se construye empleando las funciones de forma estándar \mathbf{N} y una matriz Φ constituida por constantes: 0 y 1, de tal suerte que φ_e^h satisface la definición de φ^h establecida en el Capítulo 4. Los valores de Φ dependen de la posición relativa de los nodos (a los cuales se asocia el grado de libertad j) con respecto a la discontinuidad:

$$\begin{aligned} \Phi_j(\mathbf{x}) &= 0 & \forall \mathbf{x} \in S_h^- \\ \Phi_j(\mathbf{x}) &= 1 & \forall \mathbf{x} \in S_h^+ \end{aligned} \quad (6.21)$$

En el Apéndice C, se presenta un ejemplo sobre el cálculo de Φ para el caso de un elemento triangular de tres nodos y se ilustra el efecto de la posición de la discontinuidad en la definición de φ_e^h y H_{S_e} (la función escalón en el elemento).

La formulación del problema indica que los desplazamientos “continuos” (ec. 6.3) son función de $\hat{\mathbf{u}}$, φ^h y $[[\mathbf{u}]]$. Tanto $\hat{\mathbf{u}}_e$, como φ_e^h , emplean las funciones de forma estándar \mathbf{N} en sus aproximaciones. Por lo tanto, los desplazamientos “continuos” $\bar{\mathbf{u}}$ pueden ser aproximados como:

$$\bar{\mathbf{u}} \cong \bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}_i - \mathbf{N}\Phi [[\mathbf{u}]]_{x,y} \quad (6.22)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_e$ es la aproximación de $\bar{\mathbf{u}}$ en el elemento y $\bar{\mathbf{u}}_i$ es el vector con los valores nodales de los desplazamientos “continuos”.

A continuación se establece el cálculo de las deformaciones en términos matriciales ($\boldsymbol{\epsilon}_i = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$) para cada una de las aproximaciones. Primeramente se definen las deformaciones “continuas” (ecs. 6.5 y 6.14), las cuales son comunes a todas las aproximaciones. Dada la consideración de que el salto de los desplazamientos es aproximado

como constante dentro del elemento, las deformaciones “continuas” se definen como:

$$\bar{\epsilon} \cong \bar{\epsilon}_i = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}_i - \mathbf{B}\Phi [[\mathbf{u}]]_{x,y} \quad (6.23)$$

donde $\bar{\epsilon}_i$ es el vector de deformaciones “continuas”; \mathbf{B} es la derivada de las funciones de forma (Zienkiewicz y Taylor, 1994).

Para la aproximación discreta las deformaciones se calculan como: $\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i$ (definido únicamente en $\Omega \setminus S$). En las aproximaciones continuas las deformaciones se calculan como: $\epsilon = \bar{\epsilon} + [[\epsilon]]$ (ec. 6.13), con el salto de las deformaciones definido como: $[[\epsilon]] = \nabla H_S \otimes [[\mathbf{u}]]$ o $[[\epsilon]] = \nabla H_k \otimes [[\mathbf{u}]]$, dependiendo del tipo de discontinuidad. La derivada de la función escalón y de la función rampa se calculan como:

$$\begin{aligned} \nabla H_S &= \delta_S \mathbf{n} \\ \nabla H_K &= \mu_k \frac{1}{k} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Las deformaciones para las discontinuidades débiles se calculan como:

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i + \mu_{k_e} \frac{1}{k_e} \mathbf{n}_e [[\mathbf{u}]]_{x,y} \quad (6.25)$$

con

$$\mathbf{n}_e = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

donde μ_{k_e} es una función de pesos tal que: $\mu_{k_e} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \setminus \Omega_{k_e}$ y $\mu_{k_e} = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{k_e}$; k_e es el valor de k en Ω_e ; n_x y n_y son las componentes del vector normal a la discontinuidad \mathbf{n} . Las deformaciones pueden aproximarse para el caso de Discontinuidades Fuertes haciendo k_e muy pequeño (este valor depende de la precisión computacional empleada).

La relación constitutiva de continuo permite establecer relaciones entre la tasa de los esfuerzos $\dot{\sigma}_i$ y la tasa de las deformaciones $\dot{\epsilon}_i$. En este trabajo se considera que el material se comporta elásticamente fuera de la discontinuidad:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \mathbf{D}^e \epsilon_i \\ \dot{\sigma}_i &= \mathbf{D}^e \dot{\epsilon}_i \end{aligned} \quad \underbrace{\forall \mathbf{x} \in \Omega_e \setminus S_e}_{\text{Disc. Fuerte}} \quad \text{o} \quad \underbrace{\forall \mathbf{x} \in \Omega_e \setminus \Omega_{k_e}}_{\text{Disc. Débil}} \quad (6.27)$$

donde \mathbf{D}^e es la matriz constitutiva elástica estándar (Zienkiewicz y Taylor, 1994a); σ_i es el vector de esfuerzos ($\sigma_i = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$).

Para el caso continuo la relación entre $\dot{\epsilon}_i$ y $\dot{\sigma}_i$ dentro de la discontinuidad (Ω_{k_e}) se define como:

$$\dot{\sigma}_i = \mathbf{D}^{wd} \dot{\epsilon}_i \quad (6.28)$$

donde \mathbf{D}^{wd} es la matriz constitutiva linealizada del material dentro de la zona de localización para las Discontinuidades Débiles. Para el caso de Discontinuidades Fuertes la matriz constitutiva es \mathbf{D}^{sd} .

Por otra parte, el comportamiento de la discontinuidad en la aproximación discreta está definido por la relación entre la tasa de las tracciones $\dot{\mathbf{T}}_S$ y la tasa del salto de desplazamientos $[[\dot{\mathbf{u}}]]_{n,t}$ (en este caso expresado localmente):

$$\dot{\mathbf{T}}_S = \mathbf{D}^d [[\dot{\mathbf{u}}]]_{n,t} \quad (6.29)$$

donde \mathbf{D}^d es la matriz constitutiva linealizada del comportamiento de la interfaz de la discontinuidad.

El vector de tracciones, asociado a un plano, se puede calcular a partir del vector de esfuerzos como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_T \boldsymbol{\sigma}_i \quad (6.30)$$

donde \mathbf{n}_T es la matriz de transformación, la cual se define para el caso plano en el Apéndice C.

6.3 Deducción de las ecuaciones del MEF

En esta sección se deducen las ecuaciones requeridas para resolver el problema de discontinuidades interiores por el Método de los Elementos Finitos. La deducción de dichas ecuaciones se realiza con base en dos metodologías diferentes: (1) el Método Mixto de Deformaciones Mejoradas y (2) la Imposición Fuerte de la Continuidad de Tracciones en la Discontinuidad. Si bien ambos caminos pueden conducir a una misma matriz de rigidez tangente, las consideraciones iniciales y las expresiones son distintas. Por este motivo se realiza una presentación y discusión sobre estas dos metodologías.

6.3.1 Método Mixto de Deformaciones Mejoradas

Existen muchos problemas en los cuales el desempeño de los elementos finitos estándares no es satisfactorio, por lo que existe la necesidad de mejorar sus formulaciones para adecuar sus capacidades a necesidades específicas. Una alternativa a este respecto han sido los Métodos Mixtos de Deformaciones Mejoradas, del cual Simo y Rifai (1990) hacen una buena presentación y generalización. El concepto central en esta metodología consiste en mejorar

el campo de deformaciones de tal suerte que éste esté compuesto por una parte “compatible” y una parte “mejorada” ($\tilde{\epsilon}$).

Esta metodología se ha empleado para formular el problema de Discontinuidades Interiores en el MEF en la Aproximación de Discontinuidades Fuertes (Simo *et al.*, 1993; Simo y Oliver, 1994; Oliver, 1996b). A continuación se realiza la aplicación de esta metodología para la Aproximación Continua y posteriormente para la Aproximación Discreta.

Aproximación Continua

La aplicación del Método Mixto de Deformaciones Mejoradas al problema de Discontinuidades Interiores, empleando una Aproximación Continua, requiere del establecimiento de una parte “compatible” y una parte “mejorada” para las deformaciones. Para este problema el gradiente de los desplazamientos “regulares” ($\nabla^s \hat{\mathbf{u}}$) corresponde a las deformaciones compatibles, mientras que las deformaciones asociadas a $M_S [[\mathbf{u}]]$ corresponden a las deformaciones mejoradas ($\tilde{\epsilon}$), de tal suerte que:

$$\epsilon = \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \tilde{\epsilon} \quad (6.31)$$

De manera consistente con esta ecuación (6.31), las variaciones del campo de deformaciones son: $\delta \epsilon = \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} + \delta \tilde{\epsilon}$. Dentro de este contexto, la formulación variacional del problema está dada por el sistema de ecuaciones (Simo y Oliver, 1994):

$$\int_{\Omega_e} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{T_e}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}^* \, d\Gamma \quad (6.32)$$

$$\int_{\Omega_e} \delta \tilde{\epsilon} : \sigma \, d\Omega = 0 \quad (6.33)$$

La ec. 6.33 corresponde a la forma estándar del equilibrio de un cuerpo; esta ecuación fue obtenida de la Formulación Variacional (ec. 6.16), aunque ahora está definida para un elemento finito. La ec. 6.33 establece la condición de ortogonalidad que debe existir entre las interpolaciones de los esfuerzos y de la variación de las deformaciones mejoradas. Esto es, una definición de $\delta \tilde{\epsilon}$ tal que cumpla con la ec. 6.33 permite asegurar la consistencia ($\int_{\Omega_e} \delta \tilde{\epsilon} \, d\Omega = 0$) y la estabilidad (la interpolación de las deformaciones “mejoradas” y de las deformaciones “regulares” deben ser independientes) del Método Mixto de Deformaciones Mejoradas (Simo y Rifai, 1990). Un aspecto interesante de la ec. 6.33, es su sentido físico: “El trabajo virtual interno asociado a las deformaciones mejoradas debe ser nulo”.

El cálculo del vector tasa de deformaciones (ecs. 6.23 y 6.25) se redefine, de manera conveniente, como:

$$\dot{\epsilon}_i = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{G} [[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} \quad (6.34)$$

con

$$\mathbf{G} = \mu_{k_e} \frac{1}{k_e} \mathbf{n}_e - \mathbf{B}\Phi \quad (6.35)$$

Por lo tanto, la tasa de las deformaciones mejoradas se calcula como: $\tilde{\epsilon} = \mathbf{G} [[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y}$. Sin embargo, la variación de las deformaciones mejoradas se define como: $\delta\tilde{\epsilon} = \mathbf{G}^*$. En general $\mathbf{G} \neq \mathbf{G}^*$, lo cual corresponde a una formulación de Petrov-Galerkin, generando un sistema de ecuaciones no simétrico. Manzoli *et al.* (1998) identifican dos alternativas para aproximar las variaciones admisibles del campo de deformaciones mejoradas \mathbf{G}^* :

- Alternativa 1 (Oliver, 1996b):

$$\mathbf{G}^* = \frac{\delta_{S_e}}{l_{S_e}} \mathbf{n}_e - (1 - \mu_{k_e}) \frac{\mathbf{n}_e}{A_e} \quad (6.36)$$

Sustituyendo la ec. 6.36 en la ec. 6.33:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}^* \sigma_i \, d\Omega = \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{T}_S \, d\Gamma - \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{T} \, d\Gamma = 0 \quad (6.37)$$

- Alternativa 2:

$$\mathbf{G}^* = \left(\frac{\delta_{S_e}}{l_{S_e}} - \frac{\delta_+}{l_{S_e}} \right) \mathbf{n}_e \quad (6.38)$$

Sustituyendo la ec. 6.38 en la ec. 6.33:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}^* \sigma_i \, d\Omega = \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{T}_S \, d\Gamma - \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{T}_+ \, d\Gamma = 0 \quad (6.39)$$

donde l_{S_e} es la longitud de la discontinuidad en el elemento; A_e es el área del elemento; δ_{S_e} es la función Delta de Dirac en S_e ; δ_+ es la función Delta de Dirac evaluada en Ω_h^+ junto a S_e ; \mathbf{T}_S es la tracción evaluada en S_e y \mathbf{T}_+ es la tracción evaluada en Ω_h^+ junto a S_e .

La alternativa 1 da lugar a un equilibrio de tracciones promedio sobre todo el elemento (ec. 6.37), mientras que la alternativa 2 corresponde al equilibrio de tracciones sobre la discontinuidad (ec. 6.39). Como se mencionó, en general $\mathbf{G} \neq \mathbf{G}^*$ lo que conduce a un sistema de ecuaciones no simétricas. Como caso particular, si $\nabla\varphi_e^h = \mathbf{n}$ se obtiene que $\mathbf{G} = \mathbf{G}^*$, generándose un sistema simétrico de ecuaciones. Este es el caso cuando la discontinuidad es paralela a un lado de un triángulo.

Con base en las ecuaciones 6.32 y 6.33 y en las definiciones de la sección 5.2, es posible establecer el siguiente sistema de ecuaciones no lineales (para el caso de Discontinuidades Fuertes):

$$\begin{bmatrix} K_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} & K_{\hat{\mathbf{u}}\{[\mathbf{u}]\}} \\ K_{\{[\mathbf{u}]\}\hat{\mathbf{u}}} & K_{\{[\mathbf{u}]\}\{[\mathbf{u}]\}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{u}}}_i \\ \{[\dot{\mathbf{u}}]\}_{x,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} K_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} &= \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, d\Omega & K_{\hat{\mathbf{u}}\{[\mathbf{u}]\}} &= - \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \Phi \, d\Omega \\ K_{\{[\mathbf{u}]\}\hat{\mathbf{u}}} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega & K_{\{[\mathbf{u}]\}\{[\mathbf{u}]\}} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{G} \, d\Omega \\ \dot{\mathbf{f}}_{ext} &= \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{T_e}} \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{T}}^* \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde los términos dentro del corchete en la ec. 6.40 corresponden a las submatrices de la matriz de rigidez del elemento. La matriz constitutiva \mathbf{D} en las submatrices $K_{\{[\mathbf{u}]\}\hat{\mathbf{u}}}$ y $K_{\{[\mathbf{u}]\}\{[\mathbf{u}]\}}$ no tiene índices debido a que toma los valores \mathbf{D}^e y \mathbf{D}^{sd} según sea el caso (ver definición de \mathbf{G}^*).

Para implantar estas ecuaciones en un programa estándar del Método de los Elementos Finitos, se procede a realizar una condensación estática de los grados de libertad asociados al salto de los desplazamientos, obteniéndose:

$$\left(K_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} - K_{\hat{\mathbf{u}}\{[\mathbf{u}]\}} \left[K_{\{[\mathbf{u}]\}\{[\mathbf{u}]\}} \right]^{-1} K_{\{[\mathbf{u}]\}\hat{\mathbf{u}}} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{u}}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{ext} \end{Bmatrix} \quad (6.42)$$

La matriz $K_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}}$ es la matriz de rigidez estándar de la formulación por desplazamientos del MEF, a la cual se le resta el producto de las matrices $K_{\hat{\mathbf{u}}\{[\mathbf{u}]\}} \left[K_{\{[\mathbf{u}]\}\{[\mathbf{u}]\}} \right]^{-1} K_{\{[\mathbf{u}]\}\hat{\mathbf{u}}}$. Estas ecuaciones fueron desarrolladas explícitamente para Discontinuidades Fuertes. Su aplicación a Discontinuidades Débiles es directa; sin embargo, surge el conflicto de seleccionar el borde de la banda de localización (S^- o S^+) respecto al cual se establece el equilibrio de tracciones. En si, la satisfacción del equilibrio en un borde no implica la satisfacción del equilibrio en el otro borde. Un artificio para superar este inconveniente consiste en considerar que la banda de localización es muy pequeña (tipo Discontinuidad Fuerte) y simplemente establecer el equilibrio de tracciones en S_e .

Aproximación Discreta

El Método Mixto de Deformaciones Mejoradas no es aplicable de manera directa al problema de Discontinuidades Interiores empleando una Aproximación Discreta. El motivo radica en que los esfuerzos y las deformaciones no están definidos en todo el dominio, ya que el comportamiento en S_e está definido por las tracciones y el salto de los desplazamientos. Si se aplica este método a la Aproximación Discreta se obtiene la ecuación de equilibrio global

(ec. 6.32) y la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \delta \tilde{\epsilon} : \sigma \, d\Omega + \int_{S_e} \delta [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{T} \, d\Gamma = 0 \quad (6.43)$$

Con base en esta ecuación es posible establecer, dada la adecuada definición de $\delta \tilde{\epsilon}$, el equilibrio en la discontinuidad (de manera similar a la ec. 6.33). Pero esta ecuación rompe con la concepción original del Método Mixto de Deformaciones Mejoradas. En particular, no se satisface la condición de ortogonalidad entre la interpolación de los esfuerzos y de las deformaciones, en consecuencia, no se puede asegurar la consistencia y estabilidad del método.

6.3.2 Imposición Fuerte del Equilibrio en la Discontinuidad (IFED)

El punto de partida de esta metodología son las dos ecuaciones básicas (ecs. 6.8 y 6.9 Aprox. Discreta, ecs. 6.16 y 6.17 Aprox. Continua) obtenidas de la Formulación Variacional: Equilibrio Global y Equilibrio en la Discontinuidad. Ambas ecuaciones tienen como incógnitas a los desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}_i$ y $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$. Por lo tanto, el problema puede ser resuelto empleando estas ecuaciones y aplicando una condensación estática de los grados de libertad asociados a $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$. Pero este no es el camino que se sigue en esta sección; aquí se busca emplear sólo una ecuación (equilibrio global), manejando únicamente los grados de libertad $\hat{\mathbf{u}}_i$.

Un aspecto interesante a resaltar es el hecho de que el equilibrio en la discontinuidad debe ser satisfecho punto a punto en S de acuerdo a lo establecido en la Formulación Variacional. Sin embargo, en la implantación numérica en el Método de los Elementos Finitos se aproxima el salto como constante dentro del elemento finito, lo que conduce a dos posibles maneras de aproximarlos: (1) con base en la ecuación que satisface de manera Fuerte el equilibrio en la discontinuidad obtenida de la Formulación Variacional (ecs. 4.17, 4.29 y 4.41), se elige un punto cuyo valor de las tracciones define el valor de $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$; (2) con base en la ecuación que satisface de manera Débil el equilibrio en la discontinuidad obtenida de la Formulación Variacional, se considera el equilibrio global de la discontinuidad (tracción promedio en la discontinuidad) y la tracción resultante define el valor de $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$. Como caso particular está el triángulo de deformación constante en la que ambas aproximaciones conducen al mismo resultado.

A continuación se detalla esta metodología para la Aproximación Discreta y, posteriormente, para la Aproximación Continua. El valor del salto se define a través de la satisfacción del equilibrio en un punto representativo de la discontinuidad. Como se presenta en la siguiente sección, el objetivo final en esta metodología es establecer ecuaciones que relacionen los desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}_i$ y $\bar{\mathbf{u}}_i$, de modo que se pueda emplear únicamente la ecuación de

equilibrio global para resolver el problema. Al final se obtiene un sistema de ecuaciones no lineal, siendo la matriz de rigidez del elemento no simétrica para el caso más general, al igual que en el Método Mixto de Deformaciones Mejoradas.

6.3.3 IFED. Aproximación Discreta

Para efecto de desarrollar esta metodología se parte de la ecuación de equilibrio global (ec. 6.8). Esta ecuación puede expresarse en función de una sola incógnita $\bar{\mathbf{u}}_i$ (o de dos: $\hat{\mathbf{u}}_i$ y $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$), dado que $\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}^e \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \mathbf{D}^e \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{D}^e (\mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_i - \mathbf{B} \Phi [[\mathbf{u}]]_{x,y})$. El problema radica en que no se puede usar como incógnita a los desplazamientos “continuos” $\bar{\mathbf{u}}_i$ dado que las condiciones de frontera están aplicadas sobre $\hat{\mathbf{u}}_i$ o \mathbf{u}_i . Por otra parte, si se emplea como incógnita $\hat{\mathbf{u}}_i$, se agrega una incógnita adicional al problema ($[[\mathbf{u}]]_{x,y}$) y se requiere resolver otra ecuación adicional. Por lo tanto, se desea encontrar una expresión que relacione los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$ o las deformaciones $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i$ y $\nabla^s \hat{\mathbf{u}}_i$ para resolver el problema empleando únicamente la ecuación de equilibrio global.

Para encontrar una expresión que relacione los desplazamientos “regulares” y los “continuos” se recurre a la Cinemática del problema y a la Formulación Variacional. La Cinemática del problema define ecuaciones que permiten relacionar las tres incógnitas: $\bar{\mathbf{u}}_i$, $\hat{\mathbf{u}}_i$ y $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$ por medio de los desplazamientos (ecs. 6.3 y 6.22) y de las deformaciones (como el gradiente de los desplazamientos). Para eliminar una de las incógnitas ($[[\mathbf{u}]]_{x,y}$) se recurre a la Formulación Variacional, la cual establece una ecuación adicional por la continuidad de tracciones en la discontinuidad (ec. 6.9). Dada la imposición fuerte de la continuidad de tracciones, se sustituyen en esta ecuación las ecuaciones constitutivas (ecs. 6.27 y 6.29) y la definición de la deformación (ec. 6.23), obteniéndose:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{n,t} = [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_i|_{\mathbf{x} \in S^+} = [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} \dot{\hat{\mathbf{u}}}_i \quad (6.44)$$

En esta ecuación las deformaciones son evaluadas en una partícula contigua a la discontinuidad S , pero en Ω_h^+ .

A continuación se desarrollan tres ecuaciones que establecen relaciones linealizadas entre los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$. Todas las ecuaciones surgen de la manipulación algebraica de la ec. 6.44 y de las aproximaciones de los desplazamientos y de las deformaciones. Solamente se presentan tres Grupos de Ecuaciones; sin embargo, se pueden establecer otros más por medio de la manipulación algebraica de las mismas ecuaciones; pero se considera que desarrollar otros Grupos de Ecuaciones no conduce a ninguna aportación sustancial.

Grupo 1.

Para obtener las ecuaciones del Grupo 1 se inicia sustituyendo la ec. 6.44 en la ec. 6.22:

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{N}\Phi\mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{x \in S^+} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.45)$$

Factorizando \mathbf{N} y tras algunas operaciones algebraicas:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \left(\mathbf{I} + \Phi\mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{x \in S^+} \right)^{-1} \dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{X}_I) \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.46)$$

con:

$$\mathbf{X}_I = \left(\mathbf{I} + \Phi\mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{x \in S^+} \right)^{-1} \quad (6.47)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La ecuación anterior establece una relación linealizada entre los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$, la cual puede ser directamente insertada en la ec. 6.8:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, d\Omega (\mathbf{X}_I) \hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.48)$$

La implantación de esta ecuación es muy simple debido a que sólo se requiere calcular la matriz de rigidez estándar y multiplicarla por la matriz cuadrada \mathbf{X}_I . La experiencia surgida de implantar este procedimiento indica que, aunque su implantación es sencilla e implica solamente un número reducido de operaciones matriciales, la inversión de la matriz (\mathbf{X}_I) puede resultar difícil cuando el ablandamiento es nulo (en términos numéricos se elige un valor muy pequeño) debido a que se produce un mal condicionamiento de la matriz. Una relación similar ha sido empleada por Tano *et al.* (1998).

Grupo 2.

El punto de partida de las ecuaciones del Grupo 2 es la ec. 6.44, la cual se reescribe en términos del salto de los desplazamientos en coordenadas globales:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} = \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{x \in S^+} \dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{X}) \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.49)$$

con

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{x \in S^+} \quad (6.50)$$

Se sustituye la definición de la aproximación del campo de desplazamientos (ec. 6.22) en la ec. 6.49 y se reordenan los términos:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} = (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X}\dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.51)$$

Esta ecuación se sustituye a su vez en la ec. 6.22 y reordenando términos se obtiene:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.52)$$

En esta ecuación, el tamaño de la primera matriz identidad \mathbf{I} es igual al número de grados

de libertad del elemento finito estándar, mientras que el tamaño de la segunda corresponde al número de grados de libertad del salto de los desplazamientos.

La ecuación anterior establece una relación linealizada entre los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$, la cual puede ser directamente insertada en la ec. 6.8:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, d\Omega \left(\mathbf{I} - \Phi (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X} \right) \hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.53)$$

De igual manera que en la ec. 6.48 del Grupo 1, el empleo de la ec. 6.53 indica que se debe calcular la matriz de rigidez de manera estándar y posteriormente multiplicarla por una matriz $(\mathbf{I} - \Phi (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X})$. Este procedimiento implica más operaciones matriciales que las involucradas en las ecuaciones del Grupo 1; sin embargo, en este caso no se produce el problema de mal condicionamiento de las matrices cuando el módulo de ablandamiento es nulo.

Grupo 3.

Para obtener las ecuaciones del Grupo 3 se inicia sustituyendo la 6.44 en la ec. 6.23:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_i - \mathbf{B} \Phi \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (6.54)$$

Considerando el caso particular: $\boxed{\mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in \Omega} = \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+}}$, que implica que la aproximación del campo de deformaciones es constante en todo el dominio, se obtiene después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_i = \left(\mathbf{I} + \mathbf{B} \Phi \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \right)^{-1} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.55)$$

La ecuación anterior establece una relación linealizada entre los gradientes de los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$, la cual puede ser directamente insertada en la ec. 6.8:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \left(\mathbf{I} + \mathbf{B} \Phi \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \right)^{-1} \mathbf{B} \, d\Omega \hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.56)$$

Esta ecuación se expresa de manera simplificada como:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{mod} \mathbf{B} \, d\Omega \hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.57)$$

con:

$$\mathbf{D}_{mod} = \mathbf{D}^e \left(\mathbf{I} + \mathbf{B} \Phi \mathbf{T}_{lg} [\mathbf{D}^d]^{-1} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \right)^{-1} \quad (6.58)$$

Para emplear esta relación se requiere sustituir la matriz constitutiva estándar por una matriz constitutiva modificada \mathbf{D}_{mod} (ec. 6.58) y se realiza el cálculo de la matriz de rigidez de la manera estándar (ec. 6.57). La desventaja de esta relación consiste en que está limitada a aproximaciones constantes del campo de deformaciones, como ocurre en un triángulo de

deformación constante y en un cuadrilátero de deformación lineal subintegrado (con un punto de integración). Una relación similar ha sido empleada por Olofsson *et al.* (1994).

Algunas observaciones:

Los Grupos de Ecuaciones desarrollados en esta sección emplean la versión Fuerte de la ecuación de equilibrio en la discontinuidad obtenida de la Formulación Variacional. Sin embargo, se puede emplear la versión Débil de esta ecuación y deducir los tres Grupos de Ecuaciones establecidos en esta sección. Para este propósito se requiere sustituir la ec. 6.44 por la siguiente:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{n,t} = [\mathbf{D}^d]^{-1} \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \dot{\hat{\mathbf{e}}}|_{\mathbf{x} \in S^+} d\Gamma = [\mathbf{D}^d]^{-1} \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} d\Gamma \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.59)$$

Posteriormente, se siguen los pasos realizados en esta sección. Aunque esta modificación pudiese ser juzgada como un cambio conceptual importante, su desarrollo no modifica significativamente las expresiones obtenidas en esta sección (ecs. 6.45 - 6.58), por lo que en este trabajo no se reescriben estas expresiones.

6.3.4 IFED. Aproximación Continua

Al igual que para la Aproximación Discreta, se requiere encontrar ecuaciones que relacionen los desplazamientos "regulares" $\hat{\mathbf{u}}_i$ y los desplazamientos "continuos" $\bar{\mathbf{u}}_i$. Para este propósito, se recurre a la cinemática del problema, ya que ésta permite relacionar las tres incógnitas: $\bar{\mathbf{u}}_i$, $\hat{\mathbf{u}}_i$ y $[[\mathbf{u}]]_{x,y}$ (por medio de ecuaciones de desplazamientos: ecs. 6.12 y 6.22, y de deformaciones: ecs. 6.13 y 6.25). Adicionalmente, se emplea a la Formulación Variacional, la cual establece una ecuación adicional dada por la continuidad de tracciones en la discontinuidad (ec. 6.17). El punto de partida es el establecimiento de una ecuación que relacione $[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y}$ con $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_i$, similar a la ec. 6.44. Para este fin, se reescribe la ecuación de continuidad de tracciones en forma incremental y en términos matriciales:

$$\mathbf{n}_T \dot{\hat{\sigma}}_K^+ = \mathbf{n}_T \dot{\hat{\sigma}}_h^+ \quad (6.60)$$

Sustituyendo las relaciones constitutivas (ecs. 6.27 y 6.28) en la ecuación anterior y considerando la definición de la aproximación de las deformaciones (ec. 6.25), se obtiene:

$$\mathbf{n}_T \mathbf{D}^{wd} [[\dot{\hat{\mathbf{e}}}] = \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \dot{\hat{\mathbf{e}}}|_{\mathbf{x} \in S^+} \quad (6.61)$$

con:

$$[[\dot{\hat{\mathbf{e}}}] = \frac{1}{k} \mathbf{n}_e [[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} \quad (6.62)$$

Realizando algunas operaciones algebraicas se obtiene:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} = \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \dot{\mathbf{e}}|_{\mathbf{x} \in S^+} \quad (6.63)$$

con:

$$\mathbf{X}_* = \frac{1}{k} \mathbf{n}_T \mathbf{D}^{wd} \mathbf{n}_e \quad (6.64)$$

La ec. 6.63 establece una relación linealizada entre las tasas de los desplazamientos $[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y}$ y $\dot{\mathbf{u}}_i$. Una consideración fundamental de esta metodología (aplicada al caso continuo) es que el salto está definido por el equilibrio de tracciones en S , lo cual corresponde al caso cuando k es muy pequeño (aproximando una Discontinuidad Fuerte) o cuando el estado de esfuerzos es constante; esto es, se supone que k es muy pequeño, aunque no necesariamente lo sea.

A continuación se desarrollan tres ecuaciones que establecen relaciones linealizadas entre los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$, de manera similar a la Aproximación Discreta. Estas ecuaciones surgen de la manipulación algebraica de la ec. 6.63 y de las aproximaciones de los desplazamientos y de su gradiente.

Grupo 1.

Para obtener las ecuaciones del Grupo 1 se inicia sustituyendo la ec. 6.63 en la ec. 6.22:

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}_i + \mathbf{N} \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (6.65)$$

Factorizando \mathbf{N} y tras algunas operaciones algebraicas:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{I} + \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+})^{-1} \dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{X}_I) \hat{\mathbf{u}}_i \quad (6.66)$$

con:

$$\mathbf{X}_I = (\mathbf{I} + \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+})^{-1} \quad (6.67)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La ecuación anterior establece una relación linealizada entre los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_i$ y $\hat{\mathbf{u}}_i$, la cual puede ser directamente insertada en la ec. 6.16:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, d\Omega (\mathbf{X}_I) \hat{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.68)$$

La implantación de esta ecuación requiere del cálculo de la matriz de rigidez estándar y, posteriormente, multiplicarla por la matriz cuadrada \mathbf{X}_I .

Grupo 2.

El punto de partida de las ecuaciones del Grupo 2 es la ec. 6.63, la cual se reescribe en términos del salto de los desplazamientos en coordenadas globales:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x,y} = \mathbf{X} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.69)$$

con:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} \quad (6.70)$$

Se sustituye la definición de la aproximación del campo de desplazamientos (ec. 6.22) en la ec. 6.69 y se reordenan los términos, obteniéndose la ec. 6.51 (sección anterior). La ec. 6.51 se sustituye en la ec. 6.22 y reordenando términos se obtiene la ec. 6.52: $\dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{I} - \Phi (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{u}}_i$. La ec. 6.52 puede ser directamente insertada en la ec. 6.16, obteniéndose:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \, d\Omega (\mathbf{I} - \Phi (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.71)$$

La implantación de esta ecuación simplemente requiere del cálculo de la matriz de rigidez estándar y, posteriormente, se multiplica por la matriz $(\mathbf{I} - \Phi (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X})$.

Grupo 3.

Para obtener las ecuaciones del Grupo 3 se inicia sustituyendo la ec. 6.63 en la ec. 6.23:

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{B} \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}) \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.72)$$

Considerando el caso particular: $\boxed{\mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in \Omega} = \mathbf{B}|_{\mathbf{x} \in S^+}}$, que implica que la aproximación del campo de deformaciones es constante en todo el dominio, se obtiene después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{B} \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}))^{-1} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_i \quad (6.73)$$

Insertando esta ecuación en la ec. 6.16 y renombrando algunos términos:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{mod} \mathbf{B} \, d\Omega \dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{f}}_{ext} \quad (6.74)$$

con:

$$\mathbf{D}_{mod} = \mathbf{D}^e (\mathbf{I} + \mathbf{B} \Phi \mathbf{X}_*^{-1} \mathbf{n}_T (\mathbf{D}^e - \mathbf{D}^{wd}))^{-1} \quad (6.75)$$

Para emplear esta relación se requiere sustituir la matriz constitutiva estándar por una matriz constitutiva modificada \mathbf{D}_{mod} (ec. 6.75), y se realiza el cálculo de la matriz de rigidez de la manera estándar (ec. 6.74). La desventaja de esta relación consiste en que está limitada a aproximaciones constantes del campo de deformaciones, como ocurre en un triángulo de deformación constante y en un cuadrilátero de deformación lineal subintegrado (con un punto de integración).

Capítulo 7

ASPECTOS ALGORÍTMICOS Y COMPUTACIONALES

Este capítulo complementa el capítulo anterior en el que se aborda la implantación en el MEF, ya que proporciona información necesaria para la realización de esta actividad. Primeramente se discuten temas generales de los problemas no lineales: métodos de solución, criterios de convergencia, entre otros. Posteriormente, se presenta una metodología para calcular el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ en función de los desplazamientos regulares $\hat{\mathbf{u}}$, de tal suerte que se obtengan los datos necesarios para la evaluación de las ecuaciones constitutivas; esta metodología parte de la satisfacción del equilibrio local de la discontinuidad.

Una aportación importante de este trabajo es la identificación y análisis del fenómeno de Deformaciones Falsas (o Espurias). Estas deformaciones corresponden a aquellas que son producidas por $[[\mathbf{u}]]$ de los elementos vecinos y que no son consistentes con la formulación del problema. Se analiza el comportamiento de un elemento triangular plano con una respuesta simétrica para evaluar cualitativamente las Deformaciones Falsas.

Finalmente, se propone una modificación al procedimiento de propagación de discontinuidades descrito en el Apéndice C. El objetivo de esta modificación es disminuir los posibles errores inherentes a la aproximación de discontinuidades interiores: “Deformaciones Falsas” y “Estado de Esfuerzos No Representativo de la Discontinuidad”.

7.1 Solución Global

En los problemas aquí analizados, el comportamiento del material es elástico lineal en los elementos por donde no pasa la discontinuidad; sin embargo, en los elementos por donde pasa la discontinuidad el material es no lineal. Por lo tanto, este tipo de problema es no lineal¹ y

¹La no linealidad está asociada únicamente al material, sin incluir las no linealidades geométricas.

consecuentemente la solución no siempre es única; es más, dada la obtención de una solución no necesariamente se tiene la solución buscada. Para obtener una solución satisfactoria se requiere establecer la correcta interpretación física del problema y emplear procedimientos numéricos adecuados.

La solución del problema no lineal se obtiene a partir de las ecuaciones de equilibrio del cuerpo, las cuales se formulan en función de un parámetro de discretización \mathbf{a} (para los problemas aquí tratados son los desplazamientos nodales), como se presenta en Zienkiewicz y Taylor (1994b):

$$\Psi_{n+1} \equiv \Psi(\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) - \mathbf{f} = 0 \quad (7.1)$$

La ec. 7.1 establece que el residuo Ψ en el paso $n + 1$ debe ser nulo. El análisis se inicia con una solución de (casi) equilibrio en: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$, $\Psi_n = 0$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n$. En esta misma ecuación, \mathbf{P} es el vector de fuerzas internas el cual es función de \mathbf{a} y \mathbf{f} es el vector de fuerzas externas. La solución del problema se obtiene realizando incrementos (pequeños) en las fuerzas externas: $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \Delta\mathbf{f}_n$ y determinando el cambio del parámetro \mathbf{a} : $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n$, o viceversa.

Existen muchos procedimientos de solución de problemas no lineales entre los que se encuentran Newton-Raphson, los Newton-Raphson modificados, BFGS (por sus autores Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno), etc. En este trabajo se empleó el método de Newton-Raphson que se caracteriza por tener la convergencia más rápida (cuadrática). El método se basa en la aproximación de primer orden de la ec. 7.1:

$$\Psi(\mathbf{a}_{n+1}^{i+1}) \approx \Psi(\mathbf{a}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{a}}\right)_{n+1}^i \delta\mathbf{a}_n^i = 0 \quad (7.2)$$

donde i es el contador; $\delta\mathbf{a}_n^i$ es la corrección iterativa del incremento de los desplazamientos nodales ($\delta\mathbf{a}_n^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} \Psi_{n+1}^i$); \mathbf{K}_T es la matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}_T = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{a}} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{a}}$). La solución del problema no lineal se obtiene a través de una serie de aproximaciones sucesivas (fig. 7.1):

$$\mathbf{a}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{a}_n + \Delta\mathbf{a}_n^i = \mathbf{a}_{n+1}^i + \delta\mathbf{a}_n^i \quad (7.3)$$

con

$$\Delta\mathbf{a}_n^i = \sum_{k=1}^i \delta\mathbf{a}_n^k \quad (7.4)$$

El método de Newton-Raphson se caracteriza por calcular la matriz de rigidez en cada iteración, como se ilustra en la fig. 7.1. Esta característica hace que el método sea computacionalmente costoso, pero permite que la discontinuidad se vaya propagando en cada iteración ya que al calcular la matriz de rigidez se evalúa el estado de esfuerzos y se

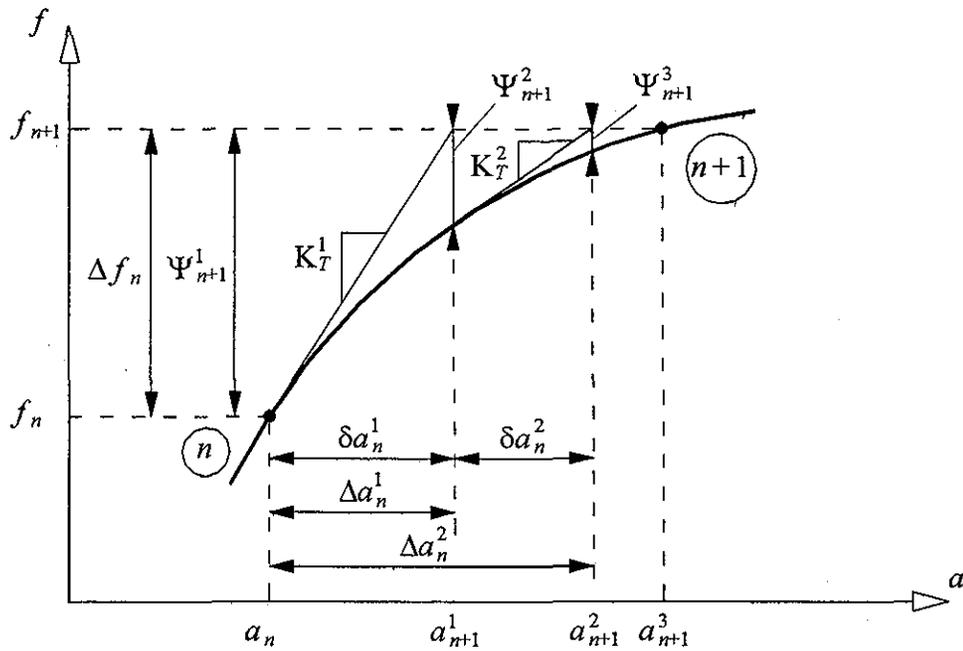


Figura 7.1: Método de Newton-Raphson

determina qué elementos han alcanzado la superficie de falla.

Para determinar si la solución es adecuada se verifica un criterio de convergencia, que puede ser: fuerza, desplazamiento, energía, etc. En este trabajo se emplea un criterio basado en energía:

$$E^i < tol E^o \quad (7.5)$$

$$E^i = \delta \mathbf{a}^i \cdot \Psi^i \quad (7.6)$$

donde E^i es la energía de la iteración i y tol es el valor de la tolerancia.

Es necesario señalar la importancia de la selección de los valores de tolerancia para el criterio de convergencia, ya que si el criterio es muy estricto se consumirá más tiempo computacional y en algunos casos se puede divergir de la solución deseada; por otra parte, si el criterio es muy laxo la solución puede ser insatisfactoria.

En general, en los problemas no lineales no está garantizada la obtención de la solución deseada dado que intervienen múltiples factores, por ejemplo: tamaño del incremento de carga, criterio de convergencia, método de solución, etc. Esto significa que en esta clase de análisis interviene la experiencia y la destreza de quien lo realiza. Afortunadamente, existen múltiples herramientas de apoyo para resolver problemas no lineales, como son:

- Búsqueda direccional. Este es un procedimiento de aceleración de convergencia.

- Métodos de longitud de arco. En problemas donde la carga es proporcional: $\Delta \mathbf{f}_n = \Delta \lambda_n \mathbf{f}_o$; estas metodologías permiten identificar cuándo se alcanza una carga máxima y consecuentemente $\Delta \lambda_n$ pasa a ser negativo como ocurre en la rama de ablandamiento.

Para mayor detalle con respecto a estos temas consultar: Crisfield (1991 y 1997), Simons y Powell (1982) y Zienkiewicz y Taylor (1994b).

7.2 Solución Local

En la sección 6.3 se presentan tres relaciones para calcular la matriz de rigidez de un elemento con una discontinuidad. En particular, en este trabajo se emplean las correspondientes al Grupo 2 (ecs. 6.53 y 6.71) de la Aproximación Discreta y de la Continua. En la metodología aquí utilizada (Imposición Fuerte del Equilibrio en la Discontinuidad), las únicas incógnitas asociadas a la matriz de rigidez son los desplazamientos regulares $\hat{\mathbf{u}}$. Si bien el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ no es una incógnita necesaria en las ecuaciones de equilibrio global, sí requiere ser calculada para evaluar la ecuación constitutiva y determinar la matriz constitutiva de la discontinuidad y el estado de esfuerzos en el elemento. El valor de $[[\mathbf{u}]]$ se determina con base en el equilibrio que debe existir en la discontinuidad, existiendo dos opciones:

1. La variación de la tracción a través de la discontinuidad debe ser constante; esto es, la tasa de la tracción en un punto de la discontinuidad ($\dot{\mathbf{T}}_S$) debe ser igual a la tasa de la tracción en un punto contiguo pero fuera de la discontinuidad ($\dot{\mathbf{T}}_+$) (versión incremental del equilibrio local):

$$\dot{\mathbf{T}}_S = \dot{\mathbf{T}}_+ \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^d [[\dot{\mathbf{u}}]]_{n,t} &= \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \dot{\hat{\epsilon}}|_{x \in S^+} && \text{Aproximación Discreta} \\ \mathbf{n}_T \mathbf{D}^{wd} \left(\dot{\hat{\epsilon}}|_{x \in S^+} + [[\dot{\epsilon}]] \right) &= \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \dot{\hat{\epsilon}}|_{x \in S^+} && \text{Aproximación Continua} \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde \mathbf{D}^d y \mathbf{D}^{wd} son las versiones incrementales de la matriz constitutiva.

2. La tracción a través de la discontinuidad debe ser constante; esto es, la tracción en un punto de la discontinuidad (\mathbf{T}_S) debe ser igual a la tracción en un punto contiguo pero fuera de la discontinuidad (\mathbf{T}_+) (versión total del equilibrio local):

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_+ \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^d [[\mathbf{u}]]_{n,t} &= \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \bar{\epsilon}|_{\mathbf{x} \in S^+} && \text{Aproximación Discreta} \\ \mathbf{n}_T \mathbf{D}^{wd} (\bar{\epsilon}|_{\mathbf{x} \in S^+} + [[\epsilon]]) &= \mathbf{n}_T \mathbf{D}^e \bar{\epsilon}|_{\mathbf{x} \in S^+} && \text{Aproximación Continua} \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde \mathbf{D}^d y \mathbf{D}^{wd} son las versiones totales de la matriz constitutiva.

Calcular $[[\mathbf{u}]]$ empleando la versión incremental tiene algunos inconvenientes con relación a la versión total: requiere guardar en memoria mayor cantidad de información y el error es acumulable pudiéndose presentar divergencia de la solución. En particular, se presentan dificultades en la aproximación discreta cuando $[[\mathbf{u}]] = 0$ y se requiere determinar la matriz constitutiva de la discontinuidad (ver ec. 5.39). Por estos motivos se elige la versión total.

Como se mencionó al principio de este apartado, el primer problema a resolver en la evaluación de la ecuación constitutiva es el hecho de que en el planteamiento numérico del problema la única variable independiente es el desplazamiento regular $\hat{\mathbf{u}}$. Esto significa que se requiere definir una ecuación que permita calcular el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ en función de los desplazamientos regulares $\hat{\mathbf{u}}$. Para este propósito se emplea como punto de partida la ec. 7.9 y se efectúa un procedimiento algebraico idéntico al realizado en el Grupo 2 de la sección 6.3, de tal suerte que al final se obtiene la siguiente expresión (ver ec. 6.51):

$$[[\mathbf{u}]]_{x,y} = (\mathbf{I} + \mathbf{X}\Phi)^{-1} \mathbf{X}\hat{\mathbf{u}}_i \quad (7.11)$$

La segunda dificultad a resolver radica en el hecho de que la ec. 7.11 es función de la matriz constitutiva de la discontinuidad, la cual a su vez es función de la variable de daño d , que a su vez es función de la variable interna r ; finalmente, r es función del salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ y éste es la incógnita que se desea obtener. Para calcular $[[\mathbf{u}]]$ se recurre a las condiciones de Kuhn-Tucker y posteriormente se emplea el método de Regula Falsa (Press *et al.*, 1986). Las condiciones de Kuhn-Tucker permiten identificar la evolución de r y d , como se indica en el siguiente procedimiento:

Datos: r_n

1.- Calcular: $[[\mathbf{u}]]_{n+1}^1(r_n)$, empleando la ec. 7.11.

2.- Calcular: $\tau_{n+1}^1 ([[\mathbf{u}]]_{n+1}^1)$, empleando la definición de la norma correspondiente

Si $\tau_{n+1}^1 < r_n$ Descarga

Si $\tau_{n+1}^1 = r_n$ Carga Neutra

Si $\tau_{n+1}^1 > r_n$ Carga Inelástica

Cuando ocurre descarga ($\tau_{n+1}^1 < r_n$) o carga neutra ($\tau_{n+1}^1 = r_n$) la variable de daño se mantiene constante, por lo tanto:

$$r_{n+1} = r_n, \quad d_{n+1} = d_n, \quad [[\mathbf{u}]]_{n+1} = [[\mathbf{u}]]_{n+1}^1 \quad (7.12)$$

Por otro lado, si ocurre carga inelástica ($\tau_{n+1}^1 > r_n$), necesariamente $r_{n+1} > r_n$ y el valor calculado de $[[\mathbf{u}]]_{n+1}^1$ es incorrecto. A continuación se establece un procedimiento para calcular el valor de r_{n+1} y $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$; en este procedimiento se emplea el método de Regula Falsa, el cual sirve para resolver ecuaciones no lineales dados los límites que definen el intervalo que contiene la solución.

Procedimiento para obtener $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$ y r_{n+1} :

1. Identificar el intervalo que contiene a r_{n+1} : $[r^a, r^b]$. El límite inferior de dicho intervalo corresponde a $r^a = r_n$, dado que el proceso de daño es irreversible (ver ec. 5.18). El límite superior r^b , corresponde a un valor tal que al calcular $[[\mathbf{u}]]$ con la ec. 7.11 se cumpla que (ver fig. 7.2):

$$\tau ([[\mathbf{u}]] (r^b)) < r^b \tag{7.13}$$

2. Emplear el método de Regula Falsa para resolver la ecuación (ver fig. 7.2):

$$\tau_{n+1}^i ([[\mathbf{u}]] (r_{n+1}^i)) - r_{n+1}^i = 0 \tag{7.14}$$

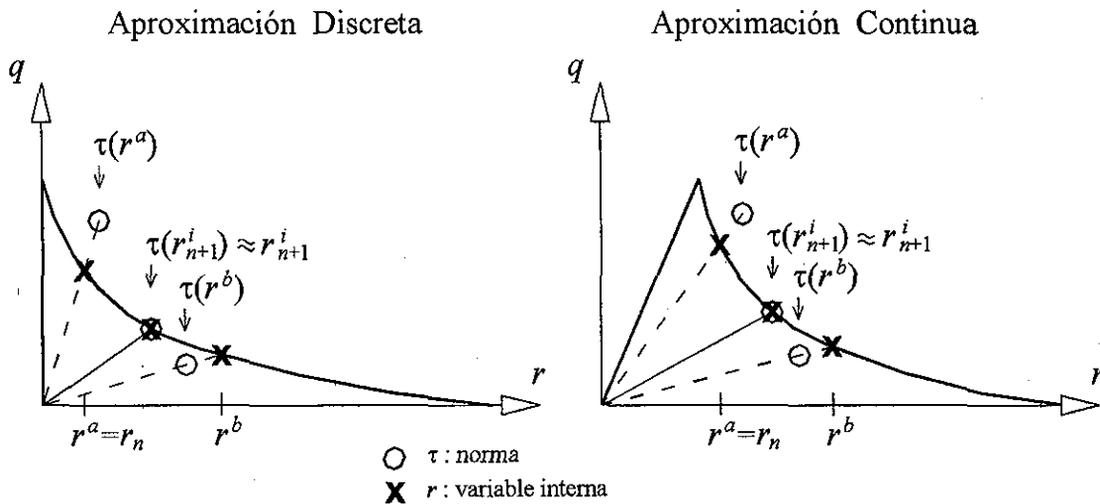


Figura 7.2: Método iterativo para obtener r_{n+1}^i .

7.3 Deformaciones Falsas

7.3.1 Introducción

El problema de Deformaciones Falsas fue identificado en este trabajo durante el análisis de una viga de cuatro puntos, como la que se ilustra en la fig. 7.3, en la que la orientación de la discontinuidad es conocida (90°). Durante el experimento numérico se observó que después del agrietamiento del primer elemento (localizado arriba de la muesca), en el siguiente elemento a agrietarse giraban los ejes de los esfuerzos principales (y consecuentemente la posible orientación de la discontinuidad), de tal suerte que al ocurrir la falla en este elemento la orientación de la nueva discontinuidad se había desviado con respecto a la orientación esperada.

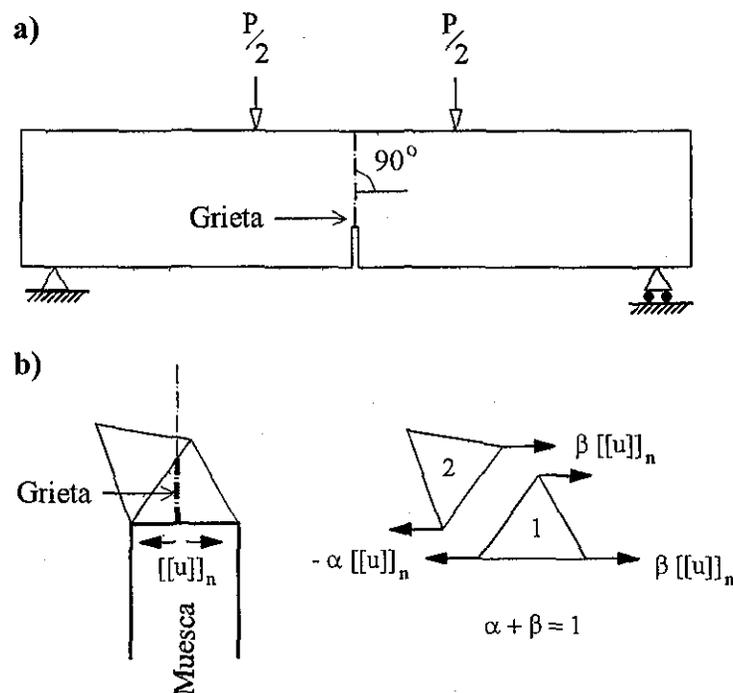


Figura 7.3: (a) Falla de una viga de cuatro puntos y (b) Distribución del $[[u]]$ producido por el primer elemento en agrietarse

Al investigar la causa de este fenómeno se encontró que se debe a la introducción del modo incompatible y del correspondiente salto de los desplazamientos. En este ejemplo numérico la discontinuidad debe tener una orientación de 90° y la falla se produce en Modo I (*i.e.* $[[u]]_n \neq 0$, $[[u]]_t = 0$). Esto significa que en el elemento "1" (primer elemento en alcanzar la falla) el salto produce únicamente un incremento en ϵ_{nn} ($\epsilon_{nn} = \epsilon_{xx}$) de acuerdo a la ec. 5.7. Sin embargo, dada la compatibilidad de desplazamientos nodales, el salto de los

desplazamientos del elemento "1" produce en el elemento "2" tanto deformaciones ϵ_{nn} como deformaciones por cortante ϵ_{nt} ($\epsilon_{nt} = \epsilon_{xy}$). Estas deformaciones ϵ_{nt} , que en el modelo teórico son nulas, son las causantes de que los esfuerzos principales giren. El problema radica en que estas deformaciones por cortante son espurias, dado que son generadas por la aproximación en el MEF y no son consistentes con la física del problema.

En este trabajo se entiende por **Deformaciones Falsas** (o **Deformaciones Espurias**) a aquellas deformaciones que son producidas por el salto de los desplazamientos de los elementos vecinos y que no son consistentes con la formulación del problema. Esto responde a que si $[[\mathbf{u}]]$ es aproximado como constante en la discontinuidad, como ocurre en el elemento triangular, necesariamente se debe cumplir que (ver ec. 5.7):

1. El término $[[u]]_n$ únicamente contribuye a la componente ϵ_{nn} de las deformaciones.
2. El término $[[u]]_t$ únicamente contribuye a la componente ϵ_{nt} de las deformaciones.

7.3.2 Análisis y Evaluación

El ejemplo de la viga de cuatro puntos, presentado en el apartado anterior, sirvió para identificar y definir el problema de Deformaciones Falsas. Para evaluar este problema considérese un elemento triangular, como el que se muestra en la fig. 7.4, que tiene un elemento vecino con una discontinuidad cuyas coordenadas locales (n, t) coinciden² con los ejes de las coordenadas globales (x, y) . El campo de desplazamientos de un elemento triangular plano de tres nodos se define como:

$$\begin{aligned} u &= L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 \\ v &= L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3 \end{aligned} \quad (7.15)$$

con

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \quad (7.16)$$

donde L_i son las funciones de forma estándar (Zienkiewicz y Taylor, 1994a); u_i y v_i son los desplazamientos nodales en la dirección x y y respectivamente; A es el área del elemento; a_i , b_i y c_i son constantes, función de las coordenadas nodales.

Por compatibilidad de desplazamientos, un elemento vecino con una discontinuidad impone al elemento de interés unos desplazamientos en los nodos "1" y "2", los cuales están asociados al salto de los desplazamientos. Dichos desplazamientos nodales se definen como:

²Se hace coincidir los ejes de los sistemas de coordenadas para efectos de simplificar el planteamiento del problema. Esto es por conveniencia y no afecta los alcances del planteamiento.

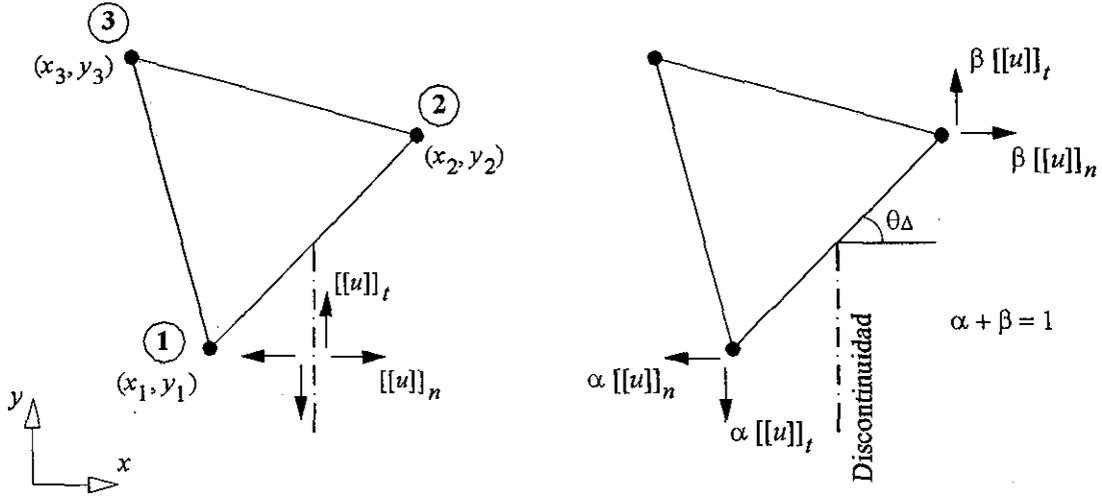


Figura 7.4: Elemento triangular con una discontinuidad arribando a su frontera: numeración de los nodos y distribución de $[[\mathbf{u}]]$

$$\text{Desplazamiento } x: \quad u_1 = -\alpha [[u]]_n \quad u_2 = \beta [[u]]_n \quad (7.17)$$

$$\text{Desplazamiento } y: \quad v_1 = -\alpha [[u]]_t \quad v_2 = \beta [[u]]_t \quad (7.18)$$

con

$$\alpha + \beta = 1 \quad (7.19)$$

Las deformaciones del elemento triangular se pueden calcular como:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{nn} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2A} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + \boxed{b_3 u_3}) \quad (7.20)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{tt} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2A} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \boxed{c_3 v_3}) \quad (7.21)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{nt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{4A} (c_1 u_1 + b_1 v_1 + c_2 u_2 + b_2 v_2 + \boxed{c_3 u_3 + b_3 v_3}) \quad (7.22)$$

con

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Los términos de las ecs. 7.20-7.22 dentro del recuadro son función del desplazamiento del

nodo "3" (u_3, v_3). Pero los valores de u_3 y v_3 , producidos por la imposición del salto de los desplazamientos en los nodos "1" y "2", son desconocidos. Los valores de u_3 y v_3 dependen del medio continuo, en otras palabras, dependen de la rigidez de los elementos vecinos. De aquí se pueden identificar dos condiciones extremas:

1. Si el medio continuo tiene una rigidez infinita, $k_3 = \infty$, el desplazamiento del nodo "3" es nulo: $u_3 = v_3 = 0$. Este también es el caso cuando u_3 y v_3 son pequeños y su contribución se desprecia.
2. Si el medio continuo tiene una rigidez nula, $k_3 = 0$, el desplazamiento del nodo "3" se puede calcular aplicando los desplazamientos nodales en "1" y "2" a un elemento triangular aislado y empleando un programa del MEF.

A continuación se realiza un análisis de las Deformaciones Falsas para las dos condiciones anteriores. Estas dos condiciones definen los límites que contiene cualquier caso particular.

Condición 1: $k_3 = \infty$

Sustituyendo los valores de u_i y v_i (ecs. 7.17 y 7.18) en las ecs. 7.20-7.22 y tomando en cuenta que $u_3 = v_3 = 0$, se pueden calcular las deformaciones en el elemento de interés dada la presencia de un salto de los desplazamientos en un elemento vecino como:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{nn} = \underbrace{\frac{1}{2A} (-\alpha b_1 + \beta b_2)}_{\text{SI}} [[u]]_n \quad (7.24)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{tt} = \underbrace{\frac{1}{2A} (-\alpha c_1 + \beta c_2)}_{\text{NO}} [[u]]_t \quad (7.25)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{nt} = \frac{1}{4A} \left(\underbrace{(-\alpha c_1 + \beta c_2)}_{\text{NO}} [[u]]_n + \underbrace{(-\alpha b_1 + \beta b_2)}_{\text{SI}} [[u]]_t \right) \quad (7.26)$$

En estas ecuaciones (7.24-7.26) se puede observar que algunos términos están señalados con "SI" y otros con "NO". Los términos señalados con "SI" satisfacen la formulación y el sentido físico del problema. Por otra parte, los términos señalados con "NO" corresponden a las Deformaciones Falsas. En estas ecuaciones se puede observar que para que no se presenten las Deformaciones Falsas se requiere que se cumpla las siguientes ecuaciones:

$$-\alpha c_1 + \beta c_2 = 0 \quad (7.27)$$

$$-\alpha (x_3 - x_2) + \beta (x_1 - x_3) = 0 \quad (7.28)$$

Para evaluar la ec. 7.28 considérese que el triángulo de interés es equilátero y asúmase que el salto presenta una distribución simétrica: $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$; las dimensiones del triángulo son: base $b_{\Delta} = 1$ y altura $h_{\Delta} = \sqrt{0.75} = 0.866$. En la fig. 7.5 se ilustra el efecto de variar la orientación del lado del elemento con respecto a la discontinuidad. En esta gráfica el ángulo θ_{Δ} se define como el ángulo comprendido entre la normal a la discontinuidad y la orientación del lado del elemento, como se ilustra en la fig. 7.4; en el eje "y" se grafica el valor de los factores de interés en términos de deformaciones ($\frac{factSI}{2A}$ y $\frac{factNO}{2A}$):

1. $factSI$ corresponde al factor que interviene en los términos de las deformaciones cuya presencia es consistente con la formulación: $factSI = -\alpha b_1 + \beta b_2$.
2. $factNO$ corresponde al factor que interviene en las Deformaciones Falsas: $factNO = -\alpha c_1 + \beta c_2$.

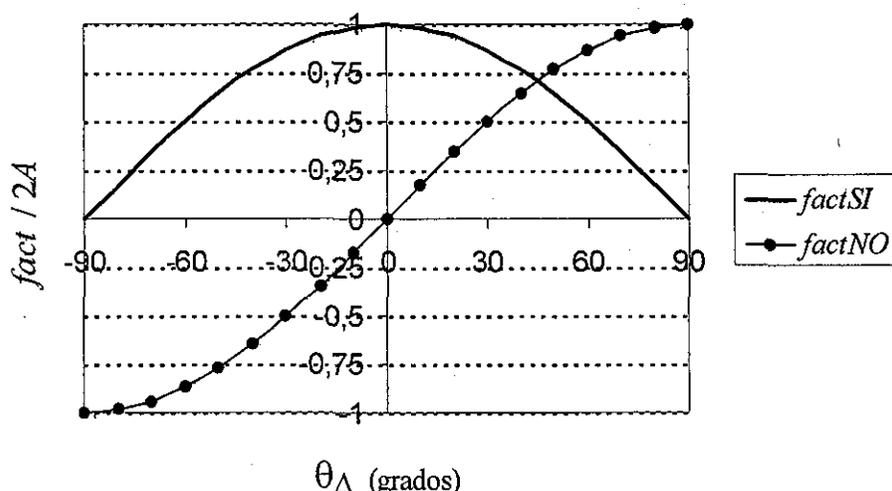


Figura 7.5: Efecto del ángulo θ_{Δ} con respecto a las deformaciones producidas por $[[\mathbf{u}]]$ para $k_3 = \infty$

En la fig. 7.5 se pueden observar las distribuciones de los factores ($fact$) en función de θ_{Δ} , las cuales están descritas por la ecuaciones: $factOK = h_{\Delta} \sin(\theta_{\Delta})$ y $factNO = h_{\Delta} \cos(\theta_{\Delta})$. Esto significa que existen dos casos extremos:

1. Si el lado del elemento es perpendicular a la discontinuidad ($\theta_{\Delta} = 0^{\circ}$), no se producen Deformaciones Falsas ($factNO = 0$). Esta es la mejor condición.
2. Si el lado del elemento es paralelo a la discontinuidad ($\theta_{\Delta} = 90^{\circ}$), el salto de desplazamientos del elemento vecino únicamente produce Deformaciones Falsas ($factOK = 0$). Esto significa que el elemento de interés hace una interpretación completamente incorrecta de $[[\mathbf{u}]]$.

Condición 2: $k_3 = 0$

Para evaluar el efecto de las Deformaciones Falsas bajo esta condición ($k_3 = 0$), se define la geometría del elemento triangular y se aplica el salto de los desplazamientos del elemento vecino. Se emplea la geometría utilizada para la condición anterior ($k_3 = \infty$): triángulo equilátero con base $b_\Delta = 1$ y altura $h_\Delta = \sqrt{0.75} = 0.866$; se emplea una relación de Poisson nula para facilitar la interpretación de los resultados. El salto de los desplazamientos se aplica de manera simétrica: $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$ (ver ecs. 7.17 - 7.19); se calculan las deformaciones en el elemento empleando un programa del Método de los Elementos Finitos y considerando un comportamiento elástico. En la fig. 7.6 se grafican las deformaciones³ ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \epsilon_{11}$ ⁴) contra el valor del ángulo θ_Δ (ver fig. 7.4). En esta figura se presentan dos gráficas:

1. Modo I. Se aplica únicamente el salto de los desplazamientos en x : $u_1 = -0.5 [[u]]_n$, $u_2 = 0.5 [[u]]_n$, $v_1 = v_2 = 0$. Para efectos de graficación se considera un salto unitario $[[u]]_n = 1$.
2. Modo II. Se aplica únicamente el salto de los desplazamientos en y : $v_1 = -0.5 [[u]]_t$, $v_2 = 0.5 [[u]]_t$, $u_1 = u_2 = 0$. Para efectos de graficación se considera un salto unitario $[[u]]_t = 1$.

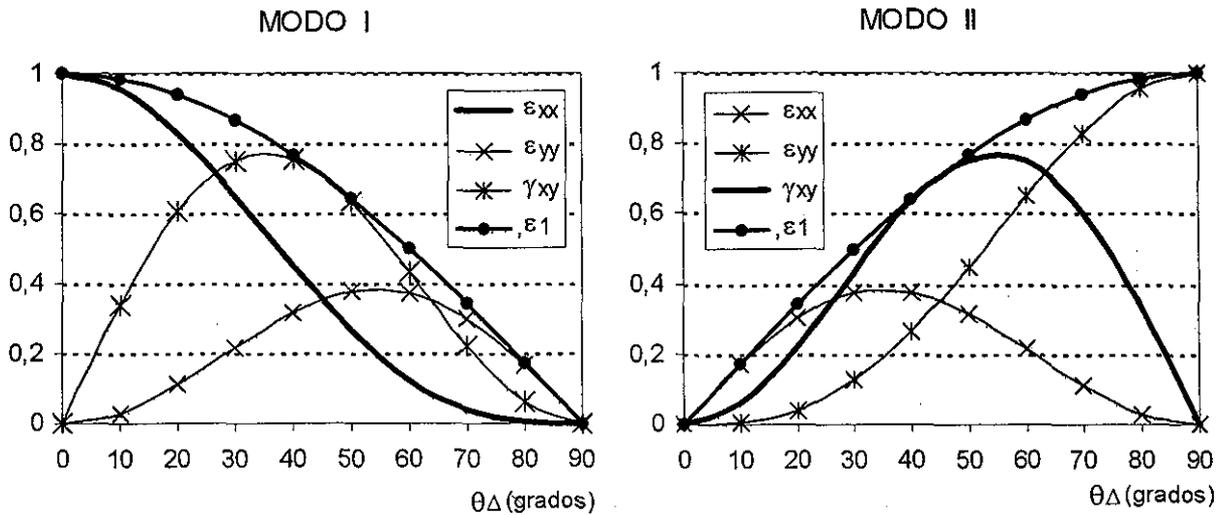


Figura 7.6: Efecto del ángulo θ_Δ con respecto a las deformaciones producidas por $[[\mathbf{u}]]$ para $k_3 = 0$

Al aplicar el salto de los desplazamientos en los nodos se observa que la componente paralela al lado del elemento produce deformaciones, mientras que la componente perpendicular produce un giro de cuerpo rígido. Por lo tanto la deformación principal ϵ_{11} se produce

³Tener presente que $\epsilon_{nn} = \epsilon_{xx}$, $\epsilon_{tt} = \epsilon_{yy}$, $\gamma_{nt} = \gamma_{xy}$ y $\gamma_{nt} = 2\epsilon_{nt}$

⁴Deformación principal

en la dirección del lado del elemento. Por eso en la fig. 7.6 se observa que para Modo I no se producen deformaciones cuando $\theta_{\Delta} = 90^{\circ}$ y para el Modo II no se producen deformaciones cuando $\theta_{\Delta} = 0^{\circ}$. En esta figura se ha graficado con línea gruesa las deformaciones consistentes con la formulación teórica: para Modo I ($[[u]]_n \neq 0, [[u]]_t = 0$) son las deformaciones ϵ_{xx} (o ϵ_{nn}) y para Modo II ($[[u]]_n = 0, [[u]]_t \neq 0$) son las deformaciones γ_{xy} (o γ_{nt}). Las Deformaciones Falsas se grafican con línea delgada y las deformaciones principales ϵ_{11} con un grosor intermedio. En Modo I no se producen Deformaciones Falsas cuando $\theta_{\Delta} = 0^{\circ}$; a medida que θ_{Δ} incrementa, se produce un aumento en las Deformaciones Falsas, pero también disminuye la magnitud de las deformaciones (ver ϵ_{11}) hasta que $\theta_{\Delta} = 90^{\circ}$ y $\epsilon_{11} = 0$. En Modo II no se producen deformaciones ($\epsilon_{11} = 0$) cuando $\theta_{\Delta} = 0^{\circ}$; la distribución de γ_{xy} no es simple como se muestra en la figura; para este modo de falla la condición más desfavorable es cuando $\theta_{\Delta} = 90^{\circ}$ ya que únicamente se presentan Deformaciones Falsas.

7.3.3 Observaciones finales

En esta sección se ha identificado y evaluado cualitativamente el fenómeno de Deformaciones Falsas. El análisis de un elemento triangular dista de ser un análisis completo del problema, aunque ha permitido tener una visión general de éste; es necesario hacer más estudios sobre el tema; sin embargo, esto queda fuera de los alcances del presente trabajo. La información presentada en esta sección permite hacer las siguientes observaciones:

1. Las Deformaciones Falsas dependen básicamente de tres parámetros:
 - (a) La manera como se distribuye el salto en los nodos (α y β). Esto depende del medio continuo y de las condiciones de frontera.
 - (b) La orientación del lado del elemento con respecto a la discontinuidad. Para las dos condiciones estudiadas ($k_3 = \infty$ y $k_3 = 0$), las Deformaciones Falsas son nulas para $\theta_{\Delta} = 0^{\circ}$ y son máximas para $\theta_{\Delta} = 90^{\circ}$ (salvo para $k_3 = 0$ en Modo I, ya que las deformaciones son nulas).
 - (c) La diferencia en magnitud del salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ entre elementos vecinos.
2. Una manera de disminuir las Deformaciones Falsas es por medio del refinamiento de la malla, de tal suerte que la variación de la magnitud $[[\mathbf{u}]]$ sea menor entre elementos vecinos.
3. El problema de Deformaciones Falsas no es exclusivo de las aproximaciones de Discontinuidades Interiores. Cuando se distribuye el daño ($[[\mathbf{u}]]$), como ocurre en

la Fractura Distribuida, se reparte el problema hacia otros elementos minimizando el efecto de las Deformaciones Falsas.

4. El problema de Deformaciones Falsas no invalida el empleo de esta clase de aproximación ya que, como se presenta en el siguiente capítulo, se pueden obtener resultados satisfactorios. Sin embargo, si es importante identificar cuáles casos son sensibles a este problema para dar una correcta interpretación a los resultados.
5. En la rutina de propagación de las discontinuidades se verifica que los nuevos tramos de discontinuidad no se desvíen mas allá de una cierta tolerancia con respecto al tramo anterior. Por lo tanto, la aparición de Deformaciones Falsas puede crear conflictos en este aspecto dado que éstas producen giros en la dirección de los esfuerzos principales. Estos conflictos pueden ser minimizados realizando algunas modificaciones como la que se propone y desarrolla en la siguiente sección.
6. Algunos autores han observado problemas con el empleo de Discontinuidades Interiores; algunos de esos problemas son probablemente atribuibles a las Deformaciones Falsas. Por ejemplo, en las conclusiones de *Manzoli et al.*, (1998) se menciona haber tenido problemas con esfuerzos residuales que impiden terminar algunos análisis; *Jirasek y Zimmermann* (2001b) mencionan que al usar el método de Discontinuidades Interiores las grietas formadas en los elementos estaban desalineadas con respecto a la macrogrieta.

7.4 Algoritmo de Propagación Modificado

7.4.1 Descripción

En el análisis de discontinuidades por medio de esta metodología se pueden identificar dos fuentes de error. La primera son las Deformaciones Falsas, las cuales han sido abordadas en la sección anterior. La segunda proviene de considerar que el estado de esfuerzos en cierto punto (generalmente se toma el centro geométrico) del elemento finito es representativo de lo que ocurre en el tramo de la discontinuidad que pasa por dicho elemento, tanto para efectos de determinar la orientación de la discontinuidad, como para la evaluación de la ecuación constitutiva. En general esta consideración es adecuada, no produciéndose errores significativos en el resultado, salvo en casos particulares como ocurre en los elementos vecinos a una muesca. El posible error producido por este hecho se disminuye refinando la malla de elementos finitos, de tal suerte que cuando se hace tender a cero el tamaño del elemento se obtiene que el punto de evaluación de los esfuerzos está localizado en la discontinuidad.

El algoritmo de propagación de discontinuidades estandar, descrito en el Apéndice C, evalúa el estado de esfuerzos en el centro geométrico del elemento y a partir de éste determina la orientación de la discontinuidad. Esto implica que la orientación calculada es susceptible de tener los dos errores antes mencionados: Deformaciones Falsas y Estado de Esfuerzos No Representativo de la Discontinuidad.

Bajo este contexto, se hace evidente la necesidad de modificar el procedimiento para mejorar la calidad de los resultados por medio de la disminución de los errores antes mencionados. Con este fin, se proponen dos modificaciones: una al algoritmo de propagación de discontinuidades y otra al criterio de falla. La primera modificación consiste en calcular el estado de esfuerzos en la discontinuidad a través de una recuperación de los esfuerzos en el punto de interés utilizando la información de ciertos elementos vecinos; esto es, se propone un cálculo no local de la orientación de la discontinuidad. Esta modificación permite obtener un estado de esfuerzos representativo de la discontinuidad y disminuir el efecto de las Deformaciones Falsas. Se realiza una segunda modificación, consistente en redefinir el criterio de falla de manera consistente con la primera modificación.

El procedimiento de recuperación de esfuerzos para calcular la orientación de la discontinuidad es sencillo y consiste en los siguientes cinco puntos:

1. Se define el parche (ver fig. 7.7). Para este propósito se selecciona un primer parche con todos los elementos que comparten algún nodo (círculos negros en la figura) con el elemento de interés. Posteriormente se eliminan los elementos por donde pasa la discontinuidad y el elemento donde se localiza la punta de la discontinuidad; no se incluyen estos elementos para disminuir el efecto de las Deformaciones Falsas.
2. Se calcula el estado de esfuerzos en el centro geométrico de cada uno de los elementos del parche.
3. Se calculan las constantes C_i de la función de interpolación por medio del procedimiento estandar de Mínimos Cuadrados. Se emplea una función polinomial para la interpolación de los esfuerzos: $\sigma_{ij} = C_0 + C_1x + C_2y + C_3xy$.
4. Se obtiene el estado de esfuerzos interpolado para la punta de la discontinuidad.
5. Se calcula la orientación de la discontinuidad empleando el estado de esfuerzos interpolado y se continua con el procedimiento estandar de propagación.

Dado que la orientación de la discontinuidad está “predefinida” por el algoritmo de propagación, el criterio estándar de falla (basado en el estado de esfuerzos local) no puede ser seguido porque se obtendrían dos orientaciones de falla distintas. Por este motivo se

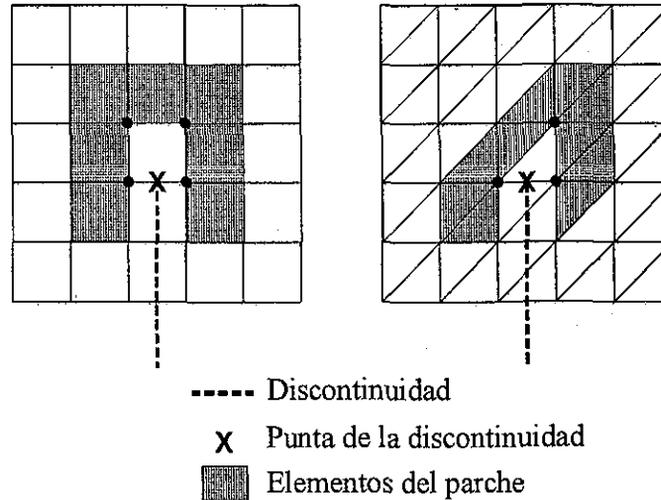


Figura 7.7: Descripción del parche para la recuperación de los esfuerzos

propone modificar el criterio de falla. Considerando que la falla se produce en Modo I predominantemente, se propone el siguiente criterio de falla:

$$\sigma_{nn} = f_t \quad (7.29)$$

donde σ_{nn} corresponde al esfuerzo normal a la posible discontinuidad, cuya orientación fue definida por medio del criterio no local; f_t es el esfuerzo de falla a tensión.

Es importante enfatizar que el procedimiento no local busca disminuir los errores por el uso de Discontinuidades Interiores. Esto significa que con este procedimiento no se eliminan las Deformaciones Falsas. Por otro lado, lo que aquí se propone es conceptualmente distinto a emplear ecuaciones constitutivas no locales, como hacen Jirasek y Zimmermann (2001b), aunque el uso de este tipo de ecuaciones permite también disminuir los errores.

7.4.2 Ejemplo ilustrativo

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo con el objetivo de evaluar el desempeño del Algoritmo de Propagación Modificado. El ejemplo consiste en someter a tensión uniaxial una placa como la que se indica en la fig. 7.8. Dicho estado de esfuerzos debe producir una falla en Modo I cuya discontinuidad debe estar orientada a 90° . En este ejemplo se evalúan cuatro condiciones distintas, las cuales se pueden dividir en dos grupos:

1. Variación de la discontinuidad con respecto al lado del elemento. Dado que todo el cuerpo está sometido a esfuerzo constante, se debilitan elementos de los lados de la placa (fig. 7.8) para que se inicie el agrietamiento en ellos.

- (a) CASO 1: se debilitan dos elementos, los cuales son los primeros en agrietarse y cuya discontinuidad tendrá una orientación de 90° . El lado del siguiente elemento en agrietarse es perpendicular a esta discontinuidad.
- (b) CASO 2: se debilita un elemento, el cual es el primero en agrietarse y cuya discontinuidad tendrá una orientación de 90° . El lado del siguiente elemento en agrietarse no es perpendicular a esta discontinuidad.
2. Se varía el porcentaje del esfuerzo de falla de los elementos debilitados: (a) $f_t^* = 0.7f_t$ y (b) $f_t^* = 0.3f_t$; f_t^* es el esfuerzo de falla del elemento debilitado. Si disminuye f_t^* , el valor de $[[u]]$ es mayor al momento de la falla de los elementos analizados.

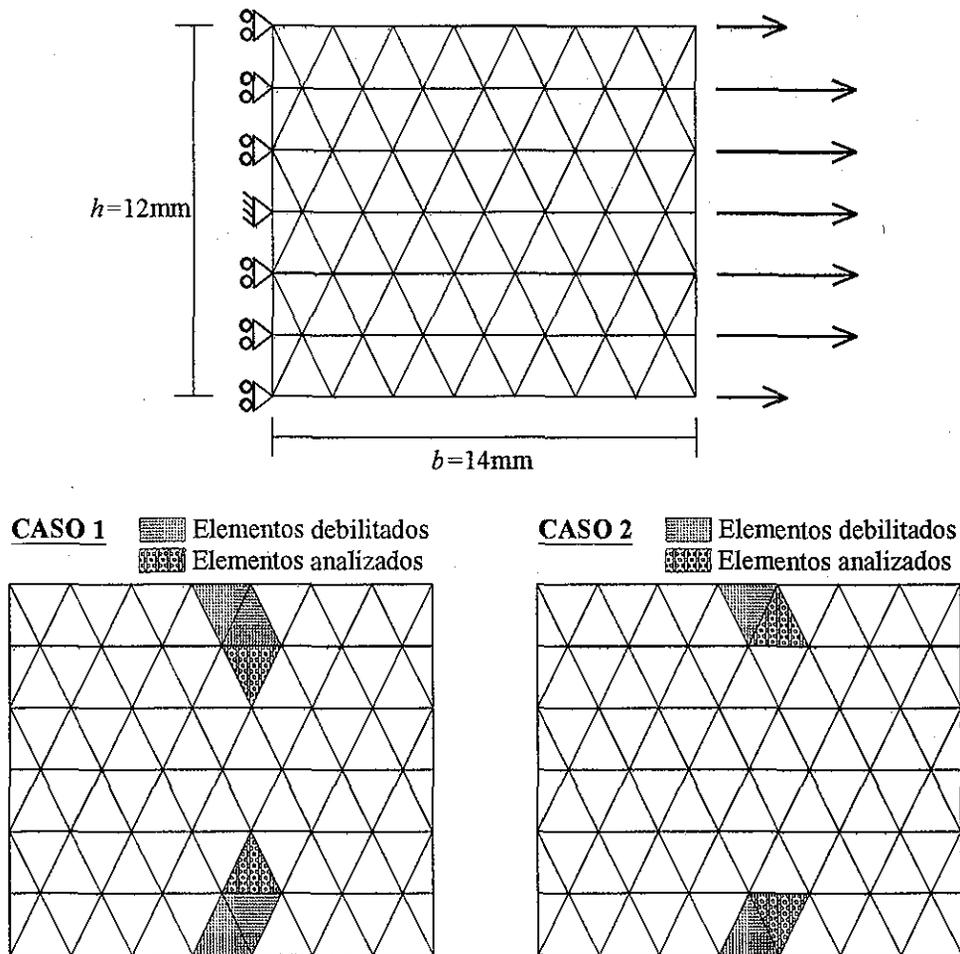


Figura 7.8: Placa sometida a tensión uniaxial con elementos debilitados en los bordes

En la tabla 7.1 se presenta el ángulo de la discontinuidad calculado de manera local y entre paréntesis el calculado de manera no local. Se observa que la discontinuidad se desvía a medida que se incrementa $[[u]]$ (disminución de f_t^*), ya que este incremento favorece

la aparición de Deformaciones Falsas. En el caso 1, cuando se debilitan dos elementos y la discontinuidad es perpendicular al lado del elemento a agrietarse, se debe producir una discontinuidad con orientación $\theta = 90^\circ$ si $[[\mathbf{u}]]$ es igual entre los dos elementos debilitados; pero en este ejemplo no son iguales los valores de $[[\mathbf{u}]]$, por lo que se producen Deformaciones Falsas muy pequeñas. En esta tabla se observa que todos los valores calculados por el método no local son cercanos a la orientación teórica. Al comparar los resultados de los CASOS 1 y 2 se debe tener presente que son calculados empleando dos parches distintos.

	Orientación θ		Error $(90^\circ - \theta)$	
	$f_t^* = 0.7f_t$	$f_t^* = 0.3f_t$	$f_t^* = 0.7f_t$	$f_t^* = 0.3f_t$
CASO 1	89.5° (89.5°)	88.7° (87.7°)	0.5° (0.5°)	1.3° (2.3°)
CASO 2	83.5° (89.7°)	79.5° (89.2°)	6.5° (0.3°)	10.5° (0.8°)

Tabla 7.1: Orientación de la discontinuidad en el elemento analizado

Capítulo 8

SIMULACIÓN NUMÉRICA: EJEMPLOS

Es de interés para la ingeniería predecir la respuesta de estructuras ante solicitaciones específicas por medio de herramientas numéricas. El empleo de éstas permite calcular la carga máxima, identificar el tipo de comportamiento para el intervalo inelástico (dúctil, frágil o cuasifrágil) y la manera como se produce la falla, así como la energía necesaria para producir dicha falla. En general esta información es difícil de obtener por medio de las herramientas computacionales comerciales, sobre todo para el caso de daño localizado (grietas aisladas y bandas de cortante). Por otra parte, la herramienta computacional desarrollada en este trabajo doctoral tiene como objetivo modelar discontinuidades y permite obtener esta información, como se muestra a lo largo del presente capítulo.

En este capítulo se presentan cinco ejemplos. El primer ejemplo es teórico y tiene como finalidad demostrar que los modelos numéricos desarrollados son capaces de simular discontinuidades independientemente de la malla empleada (objetividad con respecto a la malla). Los siguientes cuatro ejemplos corresponden a experimentos con especímenes de concreto; los primeros dos corresponden a fallas en Modo I y los dos últimos a fallas en Modo Mixto (*i.e.* combinación de Modo I y II). En todos los ejemplos se presenta una descripción del experimento, mallas deformadas que ilustran la manera de fallar del espécimen y gráficas que describen el comportamiento. Se concluye el capítulo haciendo algunos señalamientos sobre el empleo de estos métodos, los cuales son de interés para la ingeniería.

8.1 Objetividad con respecto a la malla

Dado que el objetivo de este trabajo es modelar discontinuidades en sólidos, el primer paso consiste en verificar que efectivamente los modelos desarrollados son capaces de simular discontinuidades independientemente de la malla empleada (objetividad con respecto a la malla). Para este propósito considérese una barra, con dimensiones (50 mm * 100 mm * 10 mm) y propiedades mecánicas arbitrarias (módulo de elasticidad $E = 1000$ MPa, relación de Poisson $\nu = 0$ *, esfuerzo de falla a tensión $f_t = 10$ MPa, módulo de ablandamiento discreto $\mathcal{H}^d = -250 \frac{N}{mm^2 \cdot mm}$). La barra está restringida en su lado inferior y se le impone un desplazamiento δ en su borde superior produciéndose un estado de tensión uniaxial constante en todo el cuerpo (fig. 8.1). Al inicio del proceso de carga (por control de desplazamientos), el cuerpo posee en su totalidad una respuesta elástica lineal hasta que se alcanza el esfuerzo de falla f_t ($\sigma_{yy} = f_t$) y se produce una discontinuidad en Modo I de falla como se ilustra en la fig. 8.1. Posteriormente, el cuerpo comienza a relajarse, disminuyendo uniformemente los esfuerzos; sin embargo, mientras que los elementos por donde no pasa la discontinuidad ($\Omega \setminus \Omega_h$) disminuyen sus deformaciones, los elementos que contienen a la discontinuidad (Ω_h) incrementan sus deformaciones y sus desplazamientos por la presencia del salto de los desplazamientos $[[u]]_n$ (abertura de la grieta). Finalmente el cuerpo se relaja por completo ($\sigma_{yy} = 0$); todos los elementos que no contienen a la discontinuidad ($\Omega \setminus \Omega_h$) regresan a su estado original, mientras que el salto de los desplazamientos $[[u]]_n$ únicamente se localiza en los elementos de Ω_h .

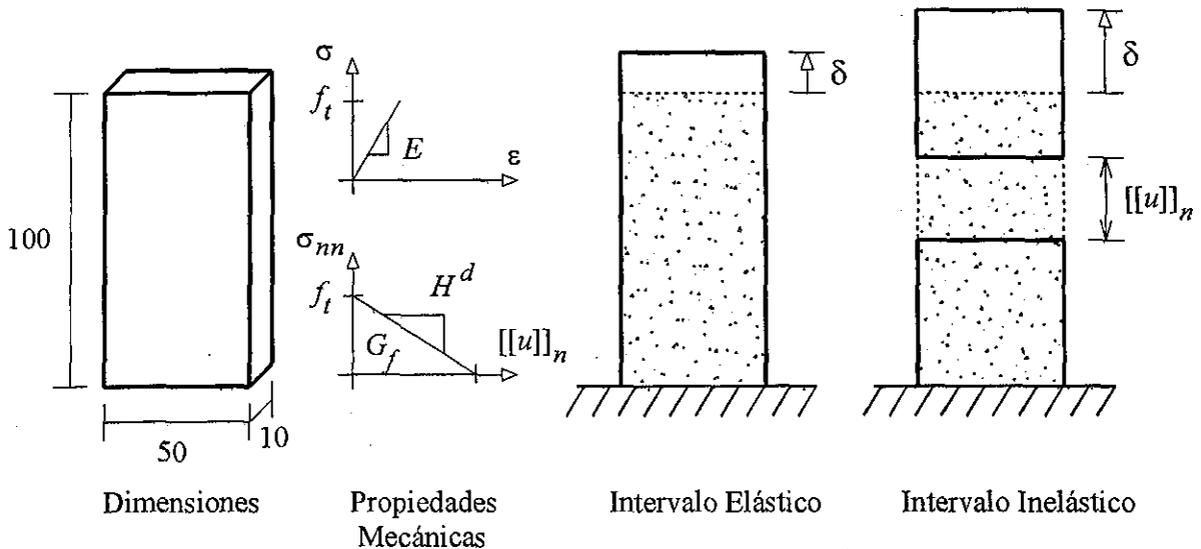


Figura 8.1: Definición del modelo e ilustración del proceso de falla teórico

*Se emplea $\nu = 0$ para lograr sencillez en el ejemplo. En los siguientes ejemplos se utiliza $\nu \neq 0$.

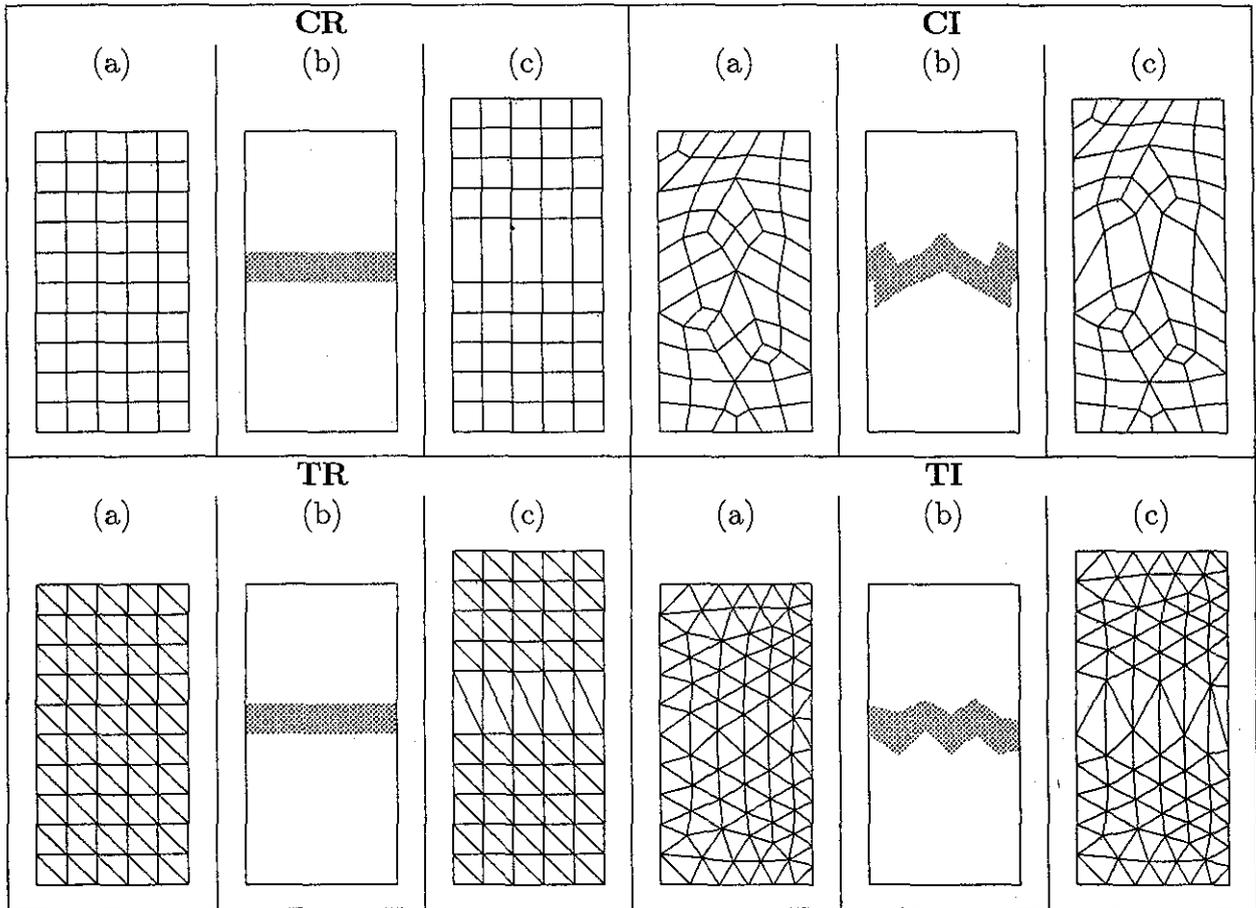


Tabla 8.1: Ilustración de la falla en una placa: (a) Malla de elementos finitos, (b) Zona donde se localiza la discontinuidad y (c) Malla deformada

La verificación del método se realiza simulando el proceso de falla de la barra, empleando varias mallas de elementos finitos. En la tabla 8.1 se presentan las distintas mallas empleadas:

1. CR: malla estructurada de elementos cuadriláteros de cuatro nodos.
2. CI: malla no estructurada de elementos cuadriláteros de cuatro nodos.
3. TR: malla estructurada de elementos triangulares de tres nodos.
4. TI: malla no estructurada de elementos triangulares de tres nodos.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

En esta tabla se presentan las mallas deformadas en las que se pueden identificar con facilidad los elementos que contienen a la discontinuidad y observar cómo los demás elementos regresan a su estado inicial. Finalmente, en la fig. 8.2 se ilustra la respuesta obtenida de la simulación numérica graficándose la curva desplazamiento del borde superior contra esfuerzo σ_{yy} en la barra. En esta gráfica se observa que se obtuvo la misma respuesta independientemente de la malla empleada. Este estudio se realiza empleando los dos modelos constitutivos desarrollados (Discreto y Continuo), obteniéndose la misma respuesta.

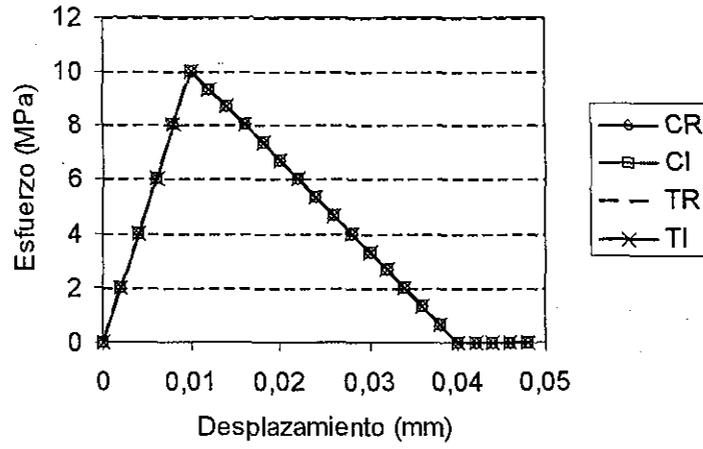


Figura 8.2: Curva Esfuerzo(σ_{yy})-Desplazamiento(δ) de una placa

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

8.2 Placa entallada sometida a tensión

Recientemente, en la Universidad Tecnológica de Delft se realizaron una serie de experimentos cuyo objetivo era el mejorar conocimiento sobre el “efecto de tamaño” en materiales cuasifrágiles, tales como el concreto y las rocas (van Vliet, 2000). En este estudio se evalúan especímenes cuya geometría se define en la fig. 8.3. Para estudiar el efecto de tamaño se varían las dimensiones D (50, 100, 200, 400, 800, 1600 mm) y r (36.25, 72.5, 145, 290, 580, 1160 mm) de los especímenes; en el presente trabajo se analiza numéricamente el espécimen denominado “Tipo C”, que tiene unas dimensiones $D = 200$ mm y $r = 45$ mm. Al espécimen se le colocan unas placas de acero en los extremos para la aplicación de la carga. La carga se aplica con una excentricidad $e = \frac{D}{50}$ (mm) sobre la placa de acero y se permite que la placa gire libremente, de tal suerte que el espécimen únicamente esté sometido a carga axial. Para obtener información (de manera escalada) sobre la deformación del espécimen, se colocaron dispositivos al centro del elemento separados una distancia $L_s = 0.6D$, como se ilustra en la fig. 8.3. En el análisis numérico se emplean propiedades mecánicas promedio obtenidas de los mismos experimentos: módulo de elasticidad $E = 40000$ MPa, esfuerzo de falla a tensión $f_t = 2.75$ MPa, energía de fractura $G_f = 0.124 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ y se supone una relación de Poisson $\nu = 0.12$. Los análisis corresponden a la serie “seca” de los experimentos. En la simulación numérica se emplean elementos triangulares de tres nodos de esfuerzo plano.

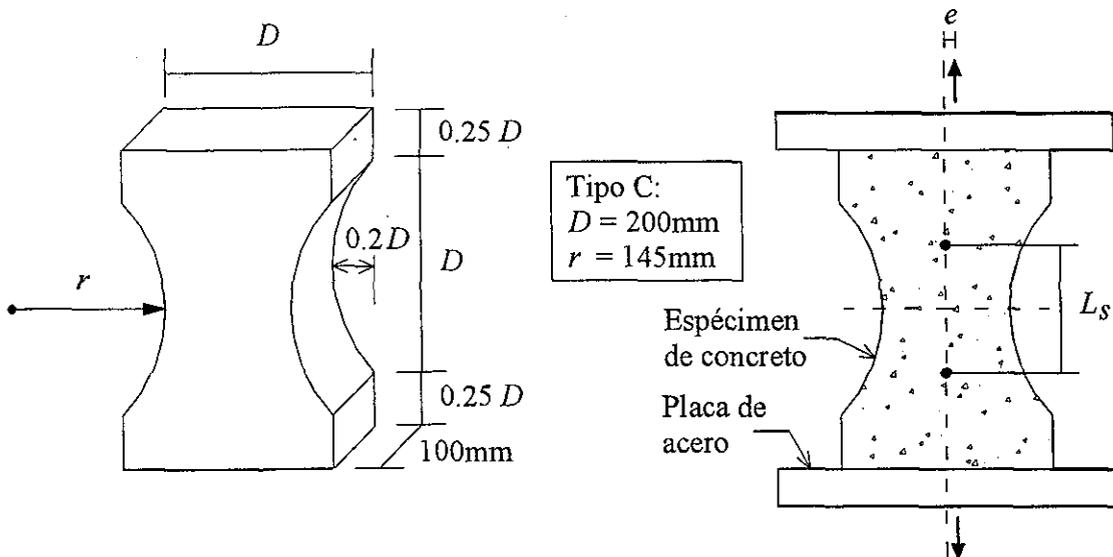


Figura 8.3: Descripción de la placa entallada de van Vliet (2000)

En la tabla 8.2 se ilustra el proceso de falla de la placa entallada. Primeramente, se presenta la malla sin deformaciones que corresponde al estado inicial; posteriormente, la

malla cuando se ha alcanzado la carga última ($F = F_u$) y la sección está parcialmente agrietada; finalmente, una malla correspondiente al rango de ablandamiento, cuando la grieta está avanzada y se producen giros. En la fig. 8.4 se grafica la curva Fuerza contra Deformación; la deformación se calcula como el desplazamiento relativo entre los puntos originalmente separados una distancia L_S (fig. 8.3) y se emplea como unidad μm ($\mu\text{m} = 1 * 10^{-6} \text{ m}$). Se observa que el modelo numérico simula satisfactoriamente el comportamiento experimental y que el modelo es capaz de relajarse (hacer que los esfuerzos se reduzcan a cero) adecuadamente.

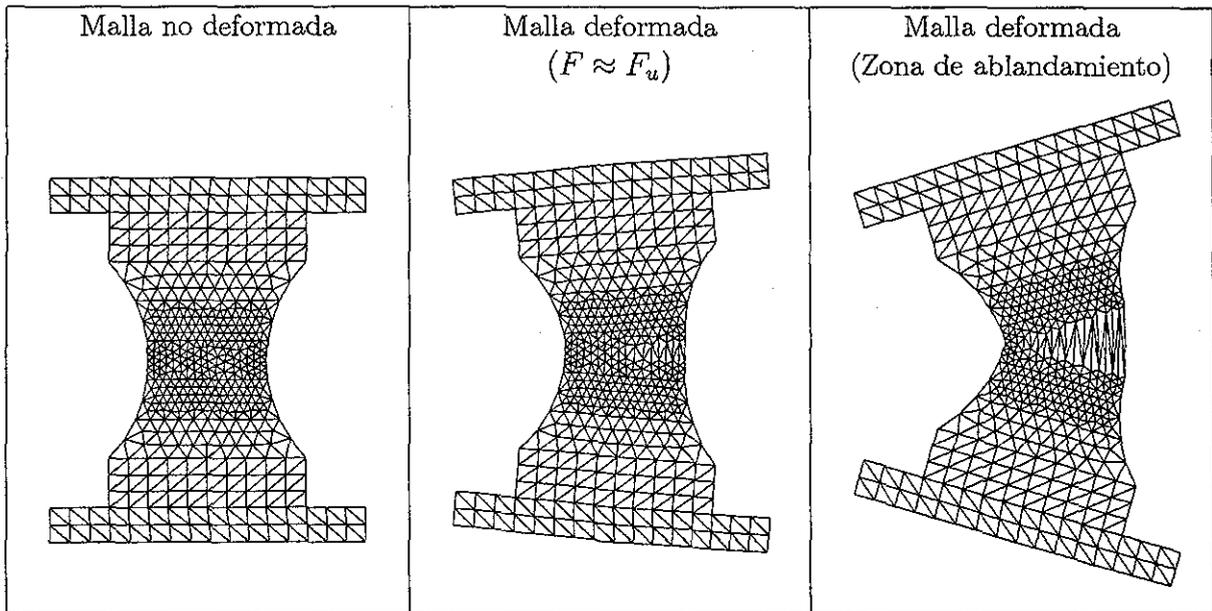


Tabla 8.2: Ilustración del proceso de falla de la placa entallada de van Vliet (2000)

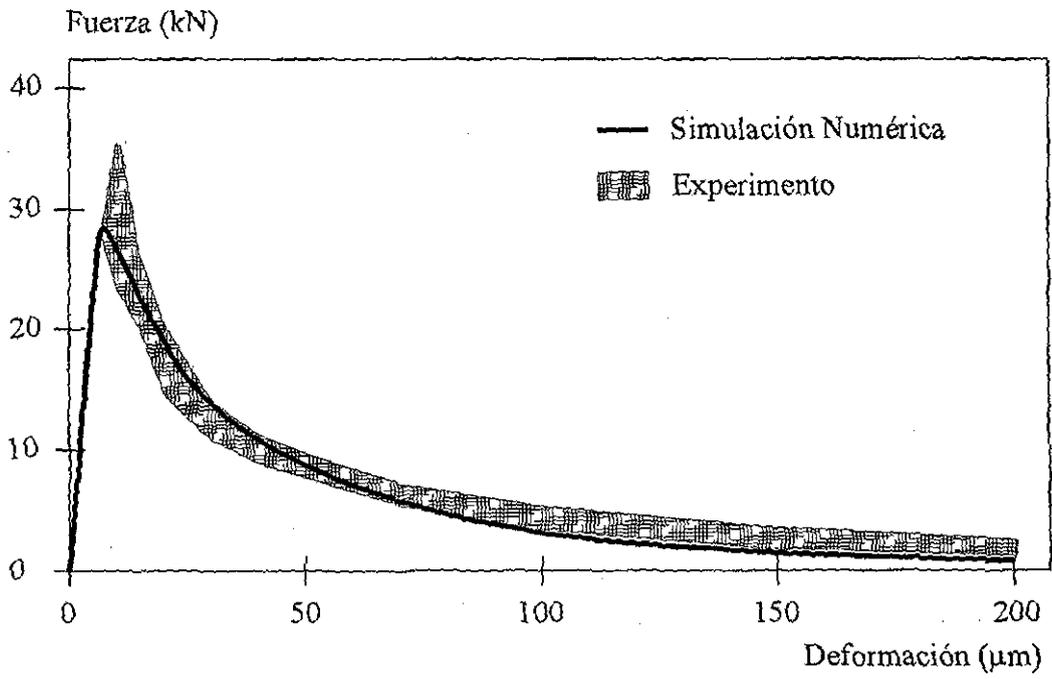


Figura 8.4: Curva fuerza-desplazamiento de la placa entallada de Vliet (2000)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

8.3 Viga de cuatro puntos con modo I de falla

En el estudio experimental de la falla a tensión del concreto y de otros materiales cuasifrágiles, se han empleado vigas con muescas al centro que fallan en Modo I. Esto se puede producir haciendo fallar a flexión vigas simplemente apoyadas siguiendo alguno de los siguientes procedimientos:

1. Viga de tres puntos. Se aplica la carga al centro.
2. Viga de cuatro puntos. Se aplican dos cargas simétricas (comúnmente a los tercios).

En esta sección se simula numéricamente uno de los experimentos de Hordijk (1992), el cual corresponde al de una viga de cuatro puntos. Hordijk realizó varios experimentos haciendo variar el tamaño de la muesca; en este trabajo se reproduce el correspondiente a una muesca de 30 mm. Las dimensiones de la viga son: 500 mm * 100 mm * 50 mm y de la muesca son: 5 mm * 30 mm, las condiciones de frontera se indican en la fig. 8.5. Las propiedades mecánicas empleadas son: esfuerzo de falla a tensión $f_t = 3.3 \text{ MPa}$, energía de fractura $G_f = 0.115 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, módulo de elasticidad $E = 40000 \text{ MPa}$ y relación de Poisson $\nu = 0.12$. En la simulación numérica se emplean elementos triangulares de tres nodos de esfuerzo plano.

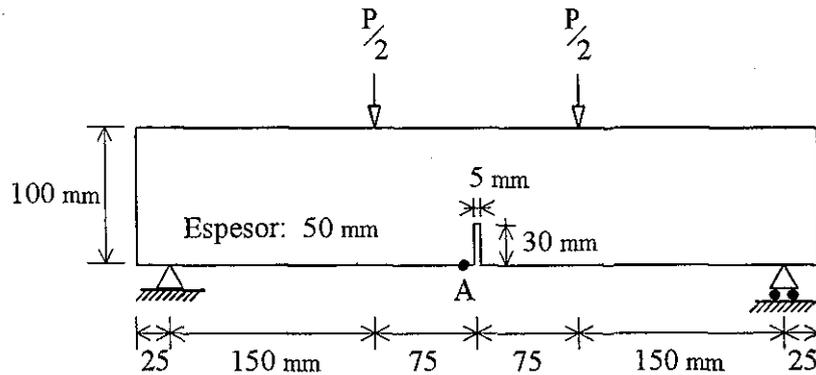


Figura 8.5: Descripción de la viga de cuatro puntos de Hordijk (1992)

En la tabla 8.3 se ilustra el proceso de falla del espécimen, iniciando con la viga sin cargas (malla no deformada), posteriormente en una condición cercana a la carga máxima ($P = P_u$) y finalmente durante el intervalo de ablandamiento. Se presenta también una ampliación de la muesca para identificar los elementos por donde pasa la discontinuidad y mostrar que sí se localizan las deformaciones. En la fig. 8.6 se grafica la curva Carga contra Deflexión; el punto A de la fig. 8.5 se emplea como referencia para medir la deflexión. Se observa que el modelo numérico reproduce satisfactoriamente al experimental; quizás es deseable mejorar los resultados en el intervalo final de la zona de ablandamiento, pero en este trabajo se decidió tomar los datos sin ajustarlos.

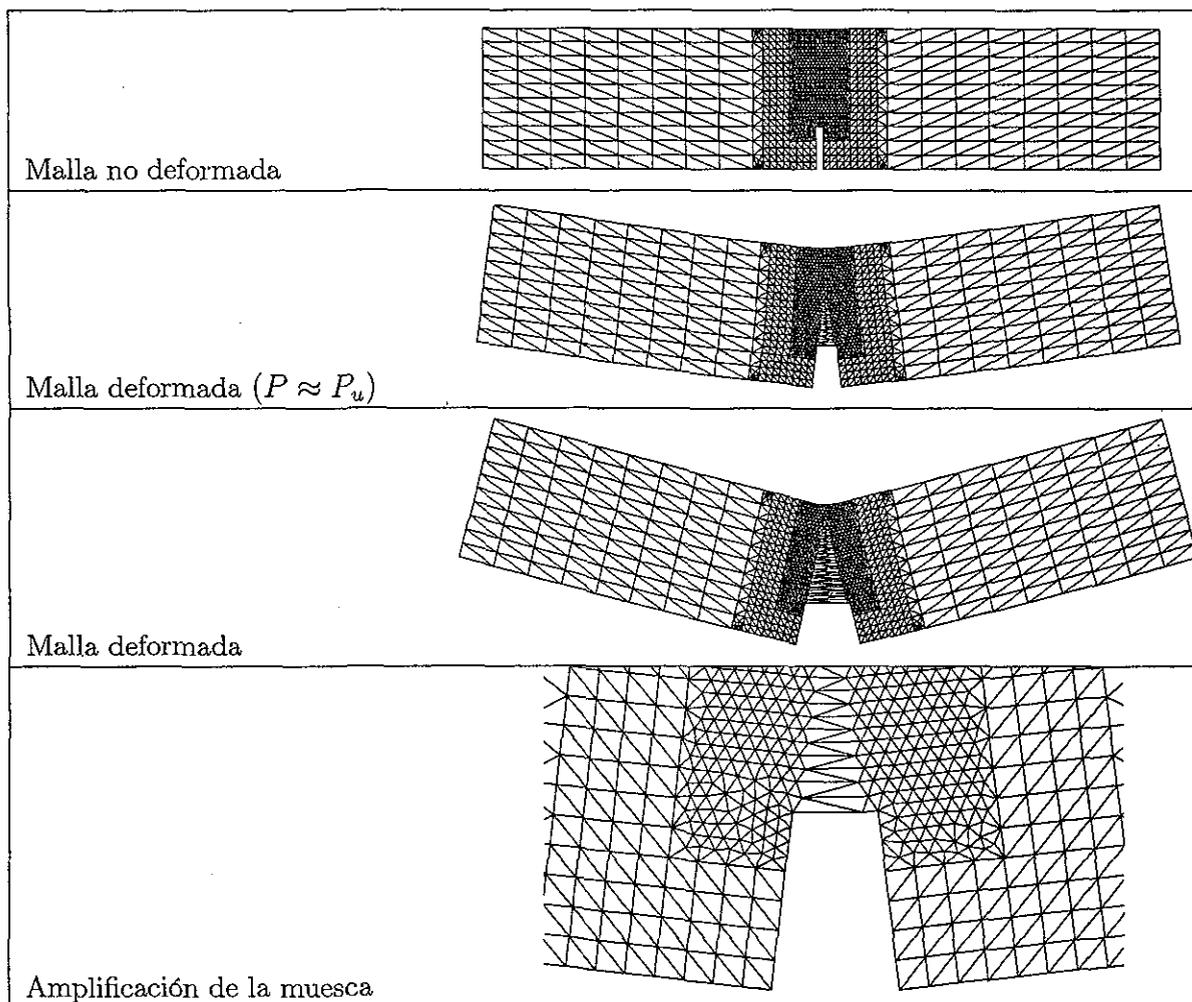


Tabla 8.3: Ilustración del proceso de falla de la viga de 4 de puntos de Hordijk (1992)

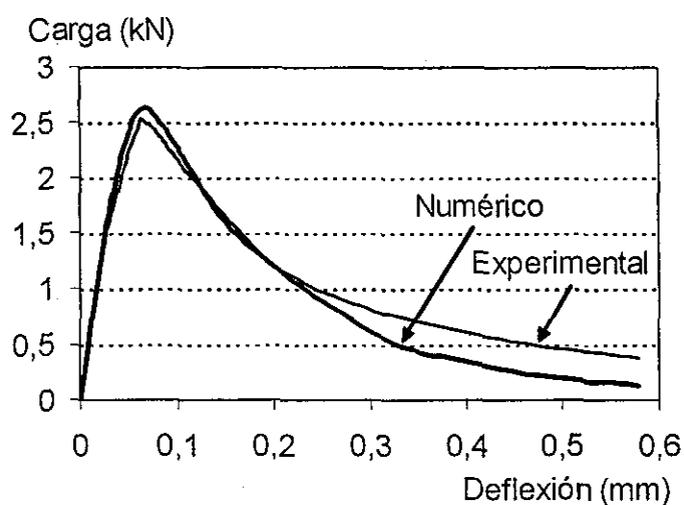


Figura 8.6: Curva Carga (P) - Deflexión del punto A del experimento de Hordijk (1992)

8.4 Viga de tres puntos con modo mixto de falla

El experimento analizado en esta sección fue realizado por Gálvez *et al.* (1998), como parte del desarrollo de un procedimiento de evaluación experimental de propagación de grietas en modo mixto de falla en el concreto. En estas pruebas se emplearon dos condiciones de carga: cuatro puntos y tres puntos de aplicación de la carga, así como tres dimensiones distintas de especímenes: $D = 75, 150$ y 300 mm (D es el peralte). En este trabajo se simula numéricamente el espécimen de 150 mm de peralte con tres puntos de aplicación de la carga, tal como se ilustra en la fig. 8.7. Las propiedades mecánicas empleadas son: esfuerzo de falla a tensión $f_t = 3.0$ MPa, energía de fractura $G_f = 0.070 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, módulo de elasticidad $E = 38000$ MPa y relación de Poisson $\nu = 0.12$. En la simulación numérica se emplean elementos triangulares de tres nodos de esfuerzo plano.

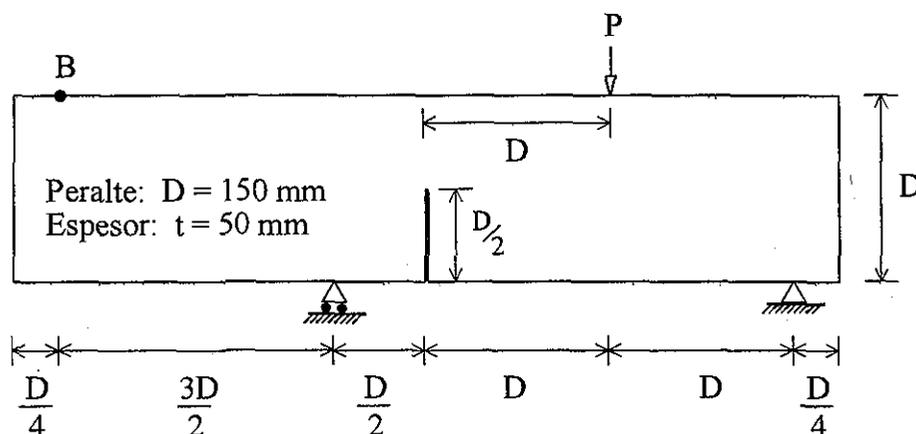


Figura 8.7: Descripción de la viga de tres puntos de Gálvez *et al.* (1998)

En la tabla 8.4 se ilustra el proceso de falla, presentándose primeramente la malla no deformada (estado inicial) y posteriormente una malla deformada correspondiente al intervalo de ablandamiento, la cual muestra cómo falla el elemento de concreto; posteriormente se presenta una amplificación de la muesca que ilustra la manera como se localizan las deformaciones. En la fig. 8.8 se presentan dos curvas que comparan la respuesta del modelo numérico contra el experimental. En estas gráficas se presenta la evolución de la abertura de la boca de la grieta y del desplazamiento del punto B (fig. 8.7) con relación a la carga aplicada. Se observa que el modelo numérico es ligeramente más rígido inicialmente, la carga máxima es cercana a la media del experimental y el intervalo de ablandamiento se reproduce satisfactoriamente.

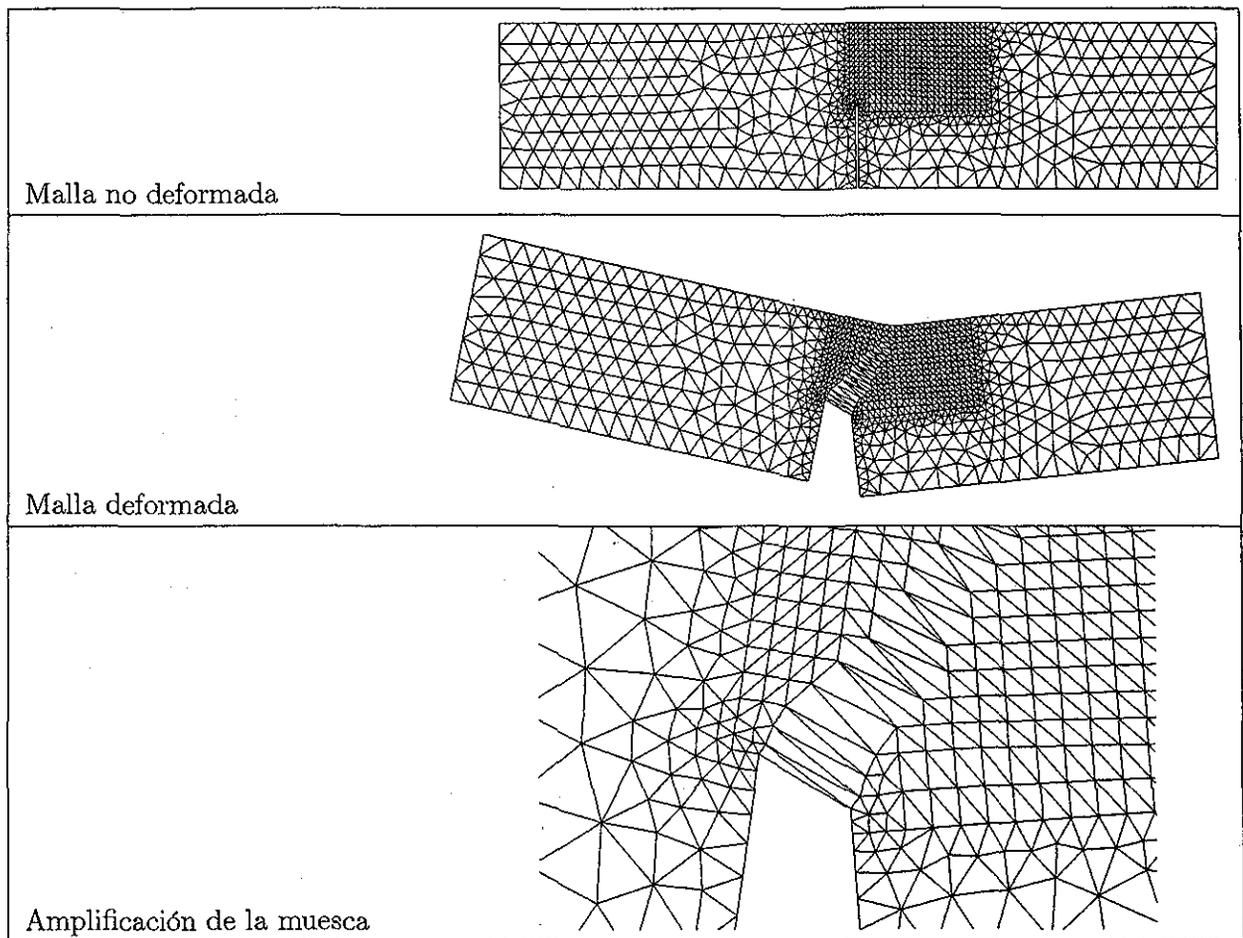


Tabla 8.4: Ilustración del proceso de falla de la viga de tres puntos de Gálvez et al (1998)

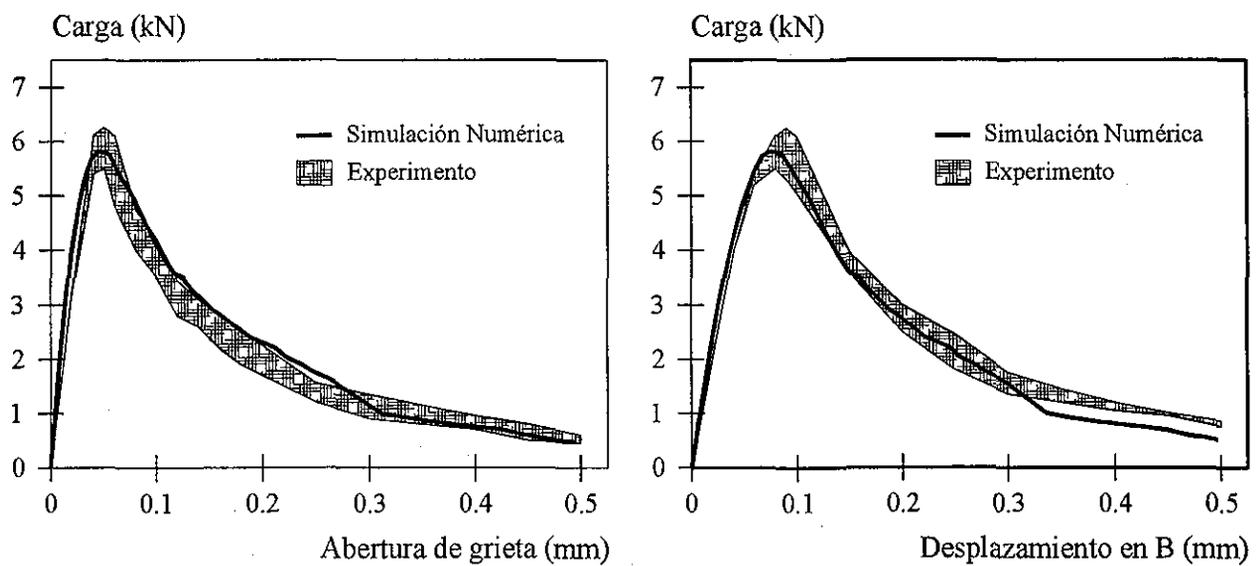


Figura 8.8: Curvas Carga - Abertura de la boca de la grieta y Carga - Desplazamiento del punto B

8.5 Viga de cuatro puntos con modo mixto de falla

En esta sección se simula numéricamente la viga de muesca sencilla investigada por Schlangen (1993). La información empleada fue extraída de los trabajos doctorales de Cervenka (1994), Feenstra (1993) y Pamin (1994). Este tipo de experimentos han sido ampliamente utilizados para estudiar el proceso de falla en modo mixto, siendo Arrea e Ingraffea (1982) pioneros en esta área. Schlangen propuso modificaciones a este tipo de experimentos para disminuir la dispersión en los resultados. La viga está sometida a un sistema de carga antisimétrica, como se indica en la fig. 8.9. Las propiedades mecánicas del espécimen de concreto son: módulo de elasticidad $E = 35000 \text{ MPa}$, esfuerzo de falla a tensión $f_t = 2.80 \text{ MPa}$, energía de fractura $G_f = 0.07 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$ y relación de Poisson $\nu = 0.12$. En esta simulación numérica se emplean elementos finitos triangulares de tres nodos de esfuerzo plano.

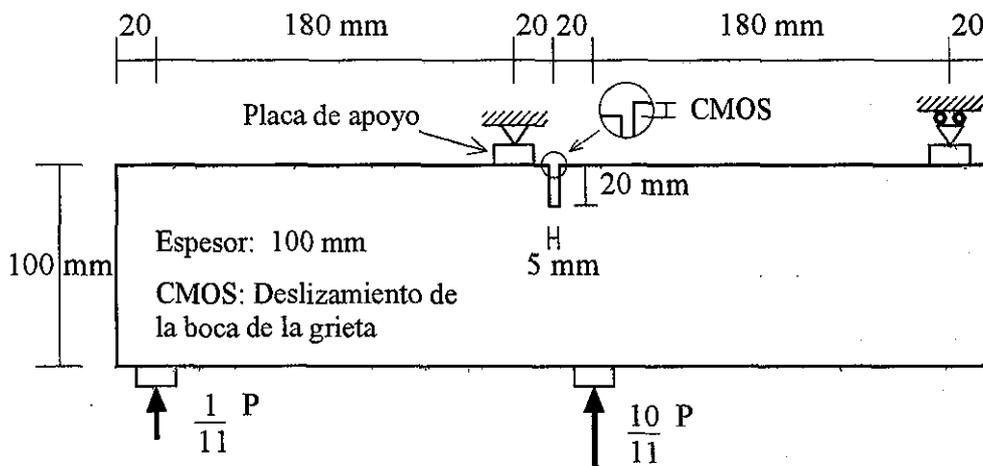


Figura 8.9: Definición de la viga de cuatro puntos de Schlangen (1993)

Para ilustrar el proceso de falla en este elemento de concreto, en la tabla 8.5 se presentan las mallas sin deformaciones (estado inicial) y con deformaciones (para el intervalo de ablandamiento); posteriormente se ilustra la trayectoria de la grieta producida por la simulación numérica. El modelo numérico fue capaz de producir la grieta curva que caracteriza a este tipo de experimentos. En la fig. 8.10 se grafica la respuesta del espécimen: Carga (P) contra Deslizamiento en la boca de la grieta (CMOS), como se define en la fig. 8.9. La simulación numérica con el método desarrollado aproxima satisfactoriamente la carga máxima, pero esta respuesta numérica es más blanda en relación a la experimental; sin embargo, este resultado se asemeja al obtenido por Pamin (1994) empleando un modelo continuo de plasticidad dependiente del gradiente y al de Cervenka (1994) empleando fractura discreta. Las diferencias de los análisis numéricos con respecto al experimental pueden tener tres orígenes: (1) las condiciones del experimento son modeladas inadecuadamente, (2) las

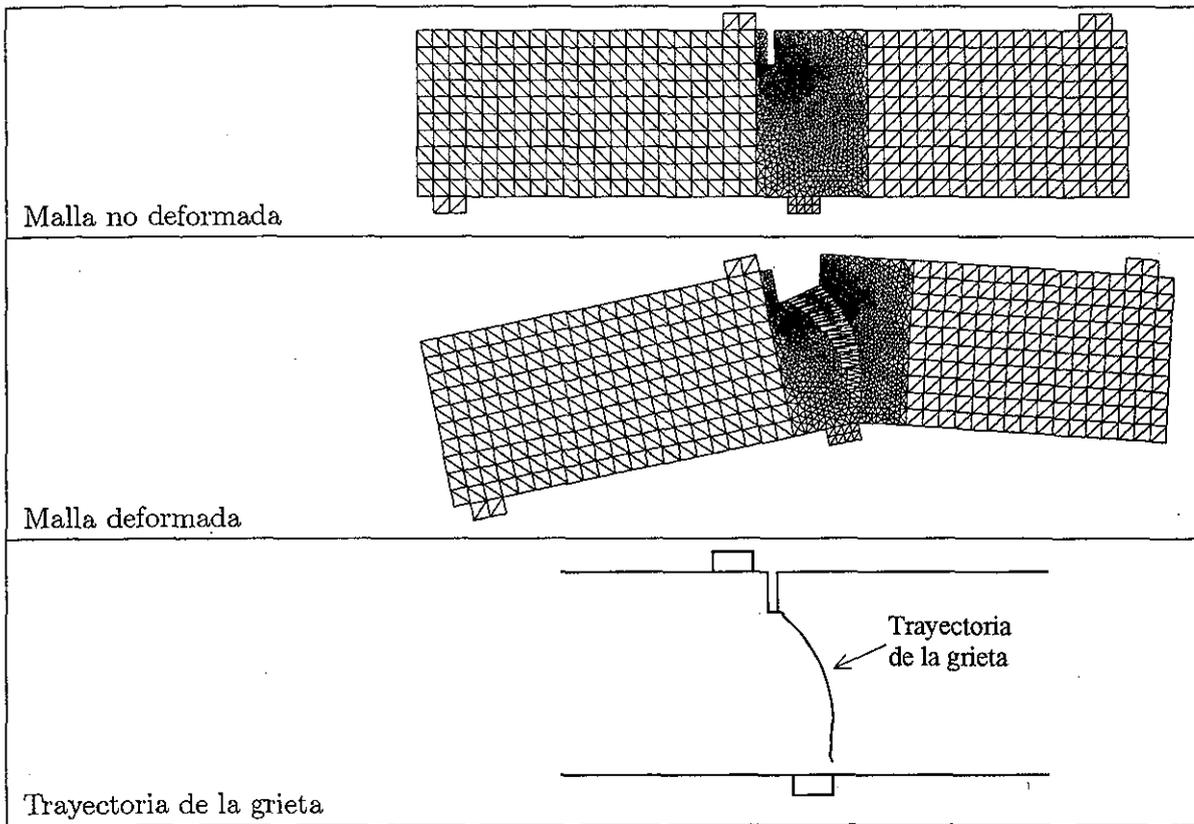


Tabla 8.5: Ilustración del proceso de falla de la viga de Schlangen (1993)

propiedades consideradas para el concreto son incorrectas, en particular la energía de fractura o (3) los modelos numéricos considerados no representan adecuadamente el proceso de falla mixto que ocurre en este problema.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

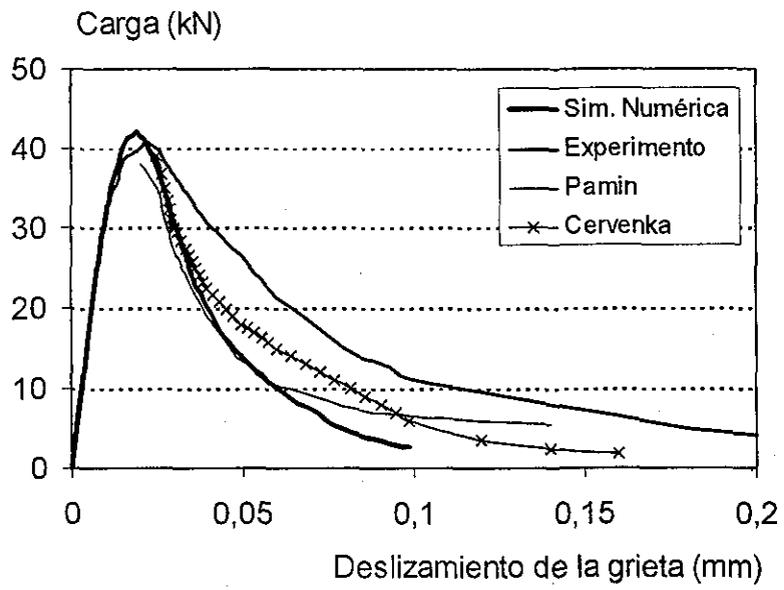


Figura 8.10: Curva Carga - Deslizamiento de la boca de la grieta para el experimento de Schlangen (1993)

8.6 Observaciones finales

En los análisis numéricos realizados no se observa una superioridad en el desempeño de un tipo de aproximación (Discreta o Continua) con respecto al otro. Con relación a las Deformaciones Falsas es evidente que en el primer ejemplo éstas no se producen debido a que el salto es constante en toda la sección; por otra parte, en el segundo ejemplo éstas se presentan con valores poco significativos, salvo para el agrietamiento final (último 20% aproximadamente) en el que se presentan desviaciones significativas de los esfuerzos principales, haciéndose necesario el empleo de la rutina de propagación modificada de discontinuidades (no local).

Un aspecto interesante a señalar, desde el punto de vista ingenieril, es el hecho de que siempre es posible determinar el límite superior del intervalo elástico; esto es, determinar el punto en el cual comienza a producirse el daño localizado (grieta). Pero únicamente con un análisis no lineal es posible identificar la carga máxima. En la tabla 8.6 se presentan las relaciones entre la carga máxima (F_u) y la carga que produce el agrietamiento del primer elemento finito de la malla empleada (F_e), así como el valor inverso para cada uno de los ejemplos estudiados en este capítulo.

Ejemplo	F_e	$\frac{F_u}{F_e}$
1) Placa de sección constante	$1.00 F_u$	1.00
2) Placa con entalle	$0.74 F_u$	1.35
3) Viga de 4 puntos con modo I de falla	$0.24 F_u$	4.16
4) Viga de 3 puntos con modo mixto de falla	$0.17 F_u$	5.77
5) Viga de 4 puntos con modo mixto de falla	$0.20 F_u$	5.02

Tabla 8.6: Relación entre la carga de agrietamiento y la carga última para los ejemplos estudiados

Aunque el valor de F_e depende de la malla empleada, también es cierto que éste es el único valor práctico que un ingeniero puede calcular con "exactitud". Se observa en la tabla cómo los valores de F_e distan de ser uniformes, siendo los más similares los correspondientes a vigas con muescas (3, 4 y 5). Los valores varían desde $F_e = F_u$ para el caso de la placa de sección constante (donde todos los puntos alcanzan la falla simultáneamente) hasta $F_e = 0.17F_u$ para la viga de tres puntos. Conocer estos valores, así como la curva de respuesta, son importantes en la ingeniería ya que permiten establecer las condiciones de servicio y últimas para una estructura particular, entre otros múltiples datos.

Los ejemplos numéricos de esta tesis estuvieron orientados hacia la simulación del proceso de falla en elementos de concreto simple. Sin embargo, estos desarrollos son aplicables a otros tipos de materiales en los que se producen discontinuidades.

CONCLUSIONES

Este trabajo doctoral está orientado hacia la modelación de Discontinuidades Interiores con el Método de los Elementos Finitos. Su alcance es la modelación de discontinuidades que pueden presentarse en forma de grietas aisladas y bandas de cortante. Se analizan tres tipos de aproximación para las Discontinuidades Interiores: Discreta, Continua con Discontinuidades Fuertes y Continua con Discontinuidades Débiles. Para conocer el marco de referencia de este tema, se presentan algunos conceptos básicos sobre Teorías de Falla (cap. 2) y los antecedentes acerca de las herramientas numéricas para la simulación de discontinuidades (cap. 3). Este trabajo parte de la Formulación Variacional de cuerpos con discontinuidades (cap. 4), pasando por el desarrollo de modelos constitutivos adecuados (cap. 5), hasta la implantación numérica en el Método de los Elementos Finitos (caps. 6 y 7). La implantación numérica se realiza en elementos planos y se aproxima el salto de los desplazamientos como constante. El trabajo doctoral se cierra con la simulación numérica de especímenes de concreto simple (cap. 8), encontrándose que al comparar los resultados numéricos con los experimentales se verifica el buen desempeño de los desarrollos realizados. Del contenido del presente trabajo es posible establecer las siguientes conclusiones:

- Es importante desarrollar la Formulación Teórica del problema de Discontinuidades Interiores, ya que ésta permite darle una sólida fundamentación a los modelos numéricos. Esta Formulación Teórica está compuesta por dos partes: Formulación Variacional y Cinemática; ésta debe realizarse para cada tipo de aproximación, de tal suerte que se vayan definiendo las ecuaciones y características propias de cada una. Estas ecuaciones son el punto de partida en la metodología empleada para la implantación numérica en el Método de los Elementos Finitos. Es importante resaltar el carácter general de estas ecuaciones, ya que no están asociadas a un método particular de solución numérica.
- Los dos modelos constitutivos desarrollados son capaces de reproducir satisfactoriamente el comportamiento de la discontinuidad. Estos modelos son: (1) Modelo de Daño Isotrópico para la Aproximación Discreta y (2) Modelo de Daño Anisotrópico para la Aproximación Continua de Discontinuidades Débiles. Estos dos modelos están

caracterizados por: (a) pertenecer a la familia de modelos de daño, (b) iniciar la falla en Modo I y posteriormente, de proceder, reproducir los otros dos modos de falla y (c) emplear funciones de peso ($\mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}$ y \mathbf{W}_ϵ) que ponderan el modo de falla en el criterio de falla (*i.e.* norma). Se encuentra que el modelo Discreto, que emplea como variable independiente al salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$ y variable dependiente a las tracciones \mathbf{T} , está asociado al modelo de Grieta Discreta de Hillerborg *et al.* (1976) y a la Energía de Fractura G_f ; se encuentra también que el modelo Continuo, que emplea como variable independiente a las deformaciones ϵ y variable dependiente a los esfuerzos σ , está asociado al Modelo de Banda de Agrietamiento de Bazant y Oh (1983) y a la Densidad de Energía de Fractura γ_f . El Análisis Energético realizado garantiza que los dos modelos son equivalentes.

- El Método de la Imposición Fuerte del Equilibrio en la Discontinuidad permite obtener las ecuaciones necesarias para realizar la implantación numérica en el Método de los Elementos Finitos. En su aplicación se comprueba que éste es susceptible de ser empleado directamente en las Aproximaciones Discreta y Continua. El uso de este método permite desarrollar múltiples Grupos de Ecuaciones para resolver el problema de discontinuidades. Se desarrollan tres Grupos de Ecuaciones para resolver el problema, empleándose en la implantación numérica la Grupo 2 por su superioridad con respecto a las otras. La implantación numérica es sencilla dado que la única incógnita asociada a la matriz de rigidez es el desplazamiento “regular”.
- La metodología desarrollada para evaluar la ecuación constitutiva de manera Total tiene un buen desempeño y es aplicable a ambas aproximaciones. Esta metodología, basada en la satisfacción del equilibrio local en la discontinuidad, se justifica porque una de las variables independientes (el salto de los desplazamientos $[[\mathbf{u}]]$) es desconocido.
- Los algoritmos para la implantación numérica del modelo Discreto son más compactos en comparación a los del modelo Continuo, pero requieren de consideraciones especiales al manejar valores pequeños de la variable de daño d ; en este último aspecto el modelo Continuo es más robusto. En relación a los tiempos de ejecución no se observan diferencias significativas entre las dos aproximaciones implantadas.
- Las Deformaciones Falsas son un defecto de las Aproximaciones de Discontinuidades Interiores por el Método de los Elementos Finitos. Estas producen giros en la dirección de los esfuerzos principales, dando lugar a errores en el cálculo de los esfuerzos y en la determinación de la orientación de la discontinuidad. Se observa que en muchas ocasiones las Deformaciones Falsas son pequeñas, arrojando errores poco significativos. Sin embargo, en ciertas ocasiones éstas son grandes y producen problemas, por

este motivo se justifica el desarrollo del algoritmo modificado de propagación de discontinuidades.

- Una parte fundamental en la implantación numérica de estas aproximaciones es el algoritmo de propagación de la discontinuidad, ya que éste permite definir el modo incompatible asociado al salto de los desplazamientos y la posición de la discontinuidad. La modificación propuesta al algoritmo de propagación permite minimizar los Efectos de las Deformaciones Falsas, aunque no los elimina. En esta modificación se calculan de manera no local los esfuerzos, a partir de un cierto parche, y con estos esfuerzos se determina la orientación de la discontinuidad.
- Los ejemplos numéricos presentados demuestran que la metodología desarrollada permite modelar discontinuidades. Este tipo de herramientas computacionales permite calcular las cargas de agrietamiento y máxima, el modo de fallar y la energía necesaria para que falle una estructura en particular. Estas herramientas son de gran utilidad para la ingeniería estructural ya que permiten reproducir todas las etapas del comportamiento de las estructuras y de los elementos en los que se presentan grietas aisladas (daño localizado). Estas tienen aplicaciones en el análisis, diseño y evaluación de elementos y estructuras, tanto para la investigación como para la práctica profesional.

Recomendaciones y trabajos futuros de investigación

En este trabajo se han cubierto varios aspectos sobre la modelación de Discontinuidades Interiores con el Método de los Elementos Finitos. Sin embargo, algunos temas están pendientes de ser cubiertos ya que no se pudieron profundizar o abordar todos ellos; entre estos temas se encuentran:

- Extender el criterio de falla a Modo II y simular numéricamente problemas de Mecánica de Suelos.
- Desarrollar y experimentar otros modelos constitutivos en la discontinuidad y en la parte continua del cuerpo.
- Desarrollar procedimientos para evaluar, cuantificar y eliminar las Deformaciones Falsas.
- Extender estos desarrollos a más de una discontinuidad para un mismo punto.
- Extender estos desarrollos a problemas en tres dimensiones.

- Modelar el comportamiento a la falla de mampostería no reforzada y elementos estructurales de concreto cuya falla sea localizada (*e.g.* vigas de concreto reforzado o presforzado sin refuerzo a cortante).

Apéndice A

NOTACIÓN Y SIMBOLOGÍA

A.1 Notación Compacta e Indicial

Comúnmente, en los trabajos de ingeniería se ha empleado la notación indicial. Esta notación es clara y permite con gran facilidad interpretar y reproducir algorítmicamente las operaciones tensoriales. Sin embargo, existe una tendencia en la comunidad internacional de ingeniería hacia el empleo de la notación compacta, debido a que se obtiene una reducción en el tamaño de las expresiones y permite resaltar los conceptos y el sentido físico de las ecuaciones sobre el detalle algorítmico. En la opinión del autor cada notación tiene sus ventajas, pero considera que es más conveniente emplear de la notación compacta en el presente trabajo.

A continuación se presenta una descripción general de ambas notaciones, empleándose ecuaciones de la Mecánica para ejemplificar su uso. En la notación compacta se emplean letras en “negrillas” para señalar que se trata de un tensor y letras “normales” para escalares; en el texto se indica el orden de los tensores. Por otra parte, en la notación indicial se emplean índices para señalar el orden del tensor (si no hay índices quiere decir que se trata de un escalar). Las operaciones tensoriales fundamentales que se emplean en este trabajo son (Spiegel, 1991 y Bonet y Wood, 1997):

- Adición. La suma de dos o más tensores del mismo orden. Por ejemplo, en la Teoría de la Plasticidad las deformaciones ϵ (tensores de orden dos) se descomponen en una parte elástica ϵ^e y una plástica ϵ^p :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (\text{A.2})$$

- Sustracción. La diferencia de dos tensores del mismo orden.

$$\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (\text{A.4})$$

- Multiplicación externa. El producto de dos tensores es otro tensor cuyo orden es la suma de los órdenes de los dos tensores dados. Por ejemplo, si se multiplican externamente los tensores **A** (orden dos) y **B** (orden uno) se obtiene un tensor **C** (orden tres):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (\text{A.5})$$

$$C_{ijk} = A_{ij}B_k \quad (\text{A.6})$$

- Contracción. El producto de dos tensores que comparten el(los) mismo(s) índice(s), eliminándose dicho(s) índice(s).
1. Contracción simple. Se comparte un índice. Por ejemplo, en el cálculo del vector de tracciones **T** por medio del tensor de esfuerzos σ (orden dos) y del vector normal a la superficie **n**:

$$\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.7})$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (\text{A.8})$$

2. Contracción doble. Se comparten dos índices. Por ejemplo, en el cálculo de los esfuerzos se realiza una contracción doble entre el tensor constitutivo **C** (orden cuatro) y el de deformaciones:

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (\text{A.10})$$

A manera de resumen se escribe a continuación la ecuación resultante de aplicar el “Principio de los Trabajos Virtuales” a un cuerpo continuo. En estas ecuaciones $\delta \mathbf{u}$ es el desplazamiento virtual, **b** son las fuerzas de cuerpo y **T*** son las tracciones prescritas en

la superficie $\Gamma_{\mathbf{T}}$ (tensores de orden uno); $\nabla(\bullet)$ y $\partial_x(\bullet)$ son los gradientes de (\bullet) ; Ω es el dominio.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \, d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} T_i^* \delta u_i \, d\Gamma \quad (\text{A.12})$$

Por otra parte, un símbolo que se emplea frecuentemente en el presente trabajo es el punto sobre las variables (*e.g.* $\dot{\epsilon}$), el cual significa derivada con respecto al tiempo: $\dot{\epsilon} = \partial_t \epsilon$. Cuando se asigna un sólo número de ecuación a un conjunto de ecuaciones, éstas se referencian por medio de dicho número más un subíndice que indica el número de ecuación numerado de izquierda a derecha y de arriba a abajo (*e.g.* ec. 16₂).

A.2 Simbología

A continuación se hace una presentación de la simbología empleada. La información se ha agrupado en capítulos dado que existen unos pocos símbolos que poseen más de un significado. En esta sección no se presentan todas las variables, sino únicamente las de uso frecuente y las de mayor relevancia.

Capítulo 2

C	Tensor constitutivo
f*	Tensor de orden dos de funciones trigonométricas (ec. 2.1)
f_c	Esfuerzo de falla a compresión
f_t	Esfuerzo de falla a tensión
f_y	Esfuerzo de fluencia
G_f	Energía de fractura
k	Ancho de la zona de agrietamiento
K	Factor de intensidad de esfuerzos
n	Vector normal a la discontinuidad
Q	Tensor acústico
r, θ	Coordenadas polares (ec. 2.1)
T	Vector de tracciones
w	Abertura de grieta

w_c	Abertrura de grieta crítica
γ_f	Densidad de energía de fractura
ϵ	Tensor de deformaciones
ϵ^e	Tensor de deformaciones elásticas
ϵ^f	Tensor de deformaciones de agrietamiento
π	Constante (3.1416)
σ	Tensor de esfuerzos

Capítulo 3

D^e	Matriz constitutiva de la parte no agrietada
D^f	Matriz constitutiva de la parte agrietada
G	Tasa de liberación de energía
K	Factor de intensidad de esfuerzos
ΔT	Véctor de incrementos de los esfuerzos en coordenadas locales
n, t, s	Ejes del sistema coordenado local a la discontinuidad
x, y, z	Ejes del sistema coordenado global
ϵ	Véctor de deformaciones
$\epsilon^e, \Delta \epsilon^e$	Véctor de deformaciones elásticas, incrementos de las def. elásticas
$\epsilon^f, \Delta \epsilon^f$	Véctor de deformaciones de agrietamiento, incrementos de las def. de agriet.
$\Delta \sigma$	Véctor de incrementos de los esfuerzos en coordenadas globales

Capítulo 4

b	Fuerzas de cuerpo
H_S	Función escalón
H_K	Función rampa
h	Ancho de la zona donde se localiza la discontinuidad
k	Ancho de la zona de localización de deformaciones ($k < h$)
M_S	Función que define el modo incompatible en Discontinuidades Fuertes
M_k	Función que define el modo incompatible en Discontinuidades Débiles
n	Véctor normal a la discontinuidad
n^*	Véctor normal a la superficie del cuerpo
\hat{n}	Sistema de coordenadas local a la discontinuidad

n, t, s	Ejes del sistema de coordenadas local a la discontinuidad
S	Discontinuidad
S_h^-, S_h^+	Límites del subdominio Ω_h , en cuya área se encuentra la discontinuidad S
\mathbf{T}	Vector de tracciones
\mathbf{T}^*	Tracciones prescritas en la frontera Γ_T
\mathbf{u}	Campo de desplazamientos
$\hat{\mathbf{u}}$	Parte regular del campo de desplazamientos
$[[\mathbf{u}]]$	Salto de los desplazamientos
\mathbf{u}^*	Desplazamientos prescritos en la frontera Γ_u
\mathbf{x}	Sistema de coordenadas global
x, y, z	Ejes del sistema de coordenadas global
φ^h	Función continua
Ω, Γ	Dominio y frontera del cuerpo ($\Gamma = \partial\Omega$)
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos
$\boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_k$	Tensor de esfuerzos evaluado en S y en Ω_k

Capítulo 5

Se emplea la misma simbología que en el Capítulo 4. Adicionalmente:

\mathbf{C}	Tensor constitutivo elástico
\mathbf{C}_S^o	Tensor constitutivo “inicial” para la Aprox. Discreta
\mathbf{C}_S	Tensor constitutivo para la discontinuidad. Aprox. Discreta y Continua
d	Variable de daño
E	Módulo de elasticidad
f	Función de falla en el espacio de esfuerzos
g	Función de falla en el espacio de deformaciones
G	Módulo de cortante
G_f	Energía de fractura
\mathcal{H}	Módulo de endurecimiento/ablandamiento
H_{ijkl}	Escalar (ver ec. 5.57)
q	Variable interna de tipo esfuerzo
r	Variable interna de tipo deformación
\hat{t}	Tiempo
\mathbf{T}	Véctor de tracciones
$\bar{\mathbf{u}}$	Desplazamiento “continuo”
$\mathbf{W}_{[[\mathbf{u}]}}$	(Tensor) Función de pesos para la norma $\tau_{[[\mathbf{u}]}}$

W_ϵ	(Tensor) Función de pesos para la norma τ_ϵ
γ_f	Densidad de energía de fractura
δ_S	Función Delta de Dirac en S
ϵ	Tensor de deformaciones
$\bar{\epsilon}$	Tensor de deformaciones “continuas”
$[[\epsilon]]$	Tensor de salto de las deformaciones
ν	Relación de Poisson
σ	Tensor de esfuerzos
$\bar{\sigma}$	Tensor de esfuerzos efectivos
$\tau_\sigma, \tau_\epsilon$	Norma función de los esfuerzos y de las deformaciones, respectivamente
$\tau_T, \tau_{[[u]]}$	Norma función de las tracciones y del salto de los desplazamientos, respect.
Ψ	Función de energía libre (por unidad de masa)

Capítulo 6

Se emplea la misma simbología que en el Capítulo 5. Adicionalmente:

B	Matriz de derivadas de las funciones de forma
D	Matriz constitutiva
D^e	Matriz constitutiva elástica
D^d	Matriz constitutiva de la discontinuidad. Aproximación Discreta.
D^{wd}	Matriz constitutiva de la zona de localización de deformaciones. Aprox Cont.
f_{ext}	Vector de fuerzas externas
K	Matriz de rigidez
n_T	Matriz de transformación del vector de esfuerzos al vector de tracciones
N	Matriz de funciones de forma
T	Vector de tracciones
T_{lg}, T_{gl}	Matrices de transformación de coordenadas: local a global y viceversa
\hat{u}_i	Vector de desplazamientos “regulares” nodales
\bar{u}_i	Vector de desplazamientos “continuos” nodales
$[[u]]_{x,y}$	Vector del salto de los desplazamientos en el sistema global
$[[u]]_{n,t}$	Salto de los desplazamientos en el sistema local
ϵ_i	Vector de deformaciones
$\bar{\epsilon}_i$	Vector de deformaciones “continuas”
Φ	Matriz de constantes 0 y 1, función de la posición de la discontinuidad
σ_i	Vector de esfuerzos

Capítulo 7

Se emplea la misma simbología que en el Capítulo 6 en lo relativo a la implementación numérica. Adicionalmente:

a	Parámetro de discretización: desplazamientos nodales
A	Area del elemento triangular
C_i	Constantes de la función de interpolación de los esfuerzos
f	Vector de fuerzas externas
factSI	Términos de la deformación consistentes con la formulación
factNO	Términos de la deformación inconsistentes con la formulación: Def. Falsas
k₃	Rigidez del medio continuo sobre el nodo 3
K	Matriz de rigidez
L_i	Funciones de forma para un elemento triangular
P	Vector de fuerzas internas
u	Desplazamientos en <i>x</i>
u_i	Desplazamientos nodales en <i>x</i>
v	Desplazamientos en <i>y</i>
v_i	Desplazamientos nodales en <i>y</i>
α, β	Factores de distribución de [[u]] sobre los nodos
Ψ	Vector de residuos

Capítulo 8

E	Módulo de Elasticidad
f_t	Esfuerzo de falla a tensión
G_f	Energía de fractura
ν	Relación de Poisson

Apéndice B

MODELO ANISOTRÓPICO. MATRICES CONSTITUTIVAS

A continuación se presentan las matrices constitutivas del modelo de Daño Anisotrópico empleado en el Capítulo 5. Las matrices están definidas respecto al sistema local de coordenadas (n, s, t) y relacionan al vector de esfuerzos ($\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{nn}, \sigma_{tt}, \sigma_{nt}\}^T$) con el vector de deformaciones ($\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{nn}, \epsilon_{tt}, \gamma_{nt}\}^T$): $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_S \boldsymbol{\epsilon}$.

- Esfuerzo Plano ($\sigma_{ss} = 0$):

$$\mathbf{C}_S = \begin{bmatrix} \frac{(1-d)E}{(1-\nu^2+\nu^2d)} & \frac{(1-d)\nu E}{(1-\nu^2+\nu^2d)} & 0 \\ \frac{(1-d)\nu E}{(1-\nu^2+\nu^2d)} & \frac{E}{(1-\nu^2+\nu^2d)} & 0 \\ 0 & 0 & (1-d)G \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

- Deformación Plana ($\epsilon_{ss} = 0$):

$$\mathbf{C}_S = \begin{bmatrix} \frac{(1-d)(1-\nu)E}{(1-\nu-2\nu^2+2\nu^2d)} & \frac{(1-d)\nu E}{(1-\nu-2\nu^2+2\nu^2d)} & 0 \\ \frac{(1-d)\nu E}{(1-\nu-2\nu^2+2\nu^2d)} & \frac{(1-\nu^2+\nu^2d)E}{(1-3\nu^2+2\nu^2d-2\nu^3+2\nu^3d)} & 0 \\ 0 & 0 & (1-d)G \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

donde E es el Módulo de Elasticidad, G es el Módulo a Cortante y ν es la relación de Poisson.

Apéndice C

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA AL CAPÍTULO 6

El objetivo de este apéndice es presentar información complementaria relativa a la definición de términos matriciales comunes al Método de los Elementos Finitos (Capítulo 6). En particular se definen las matrices \mathbf{T}_{lg} y \mathbf{n}_T para el caso plano, se ejemplifica el cálculo de la matriz Φ para el caso de un elemento triangular y se ilustra el efecto de la posición de la discontinuidad dentro de un elemento en la definición de los términos H_{S_e} y φ_e^h para elementos triangulares (de tres nodos) y cuadriláteros (de cuatro nodos). Finalmente, se presenta el algoritmo de propagación de la discontinuidad, el cual permite establecer la posición de la discontinuidad dentro del elemento.

El salto de los desplazamientos se puede definir con respecto a una base local ($[[\mathbf{u}]]_{n,t}$) o a una global ($[[\mathbf{u}]]_{x,y}$). Ambas definiciones se relacionan a través de la ec. 6.19: $[[\mathbf{u}]]_{x,y} = \mathbf{T}_{lg}[[\mathbf{u}]]_{n,t}$, en donde \mathbf{T}_{lg} se define para el caso plano como:

$$\mathbf{T}_{lg} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

donde θ es el ángulo entre el eje x y la normal a la discontinuidad (fig. C.1).

El vector de tracciones \mathbf{T} , asociado a un plano, se calcula como $\mathbf{T} = \mathbf{n}_T \boldsymbol{\sigma}$ (ec. 6.30), donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de esfuerzos y \mathbf{n}_T es la matriz de transformación que se define para el caso plano como (pag. 111 de Crisfield, 1991):

$$\mathbf{n}_T = \begin{bmatrix} (\cos(\theta))^2 & (\sin(\theta))^2 & 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \cos(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) & (\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

En el caso de un triángulo con una discontinuidad, como el que se ilustra en la figura

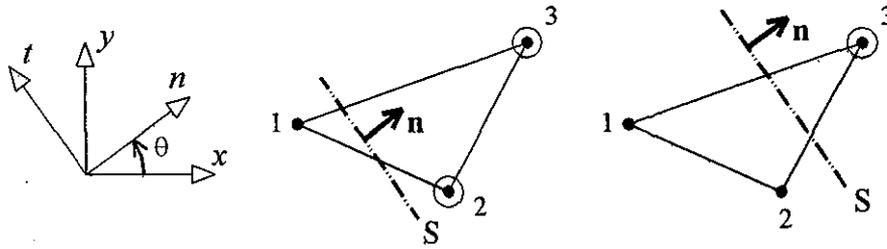


Figura C.1: Localización de una discontinuidad en un elemento triangular

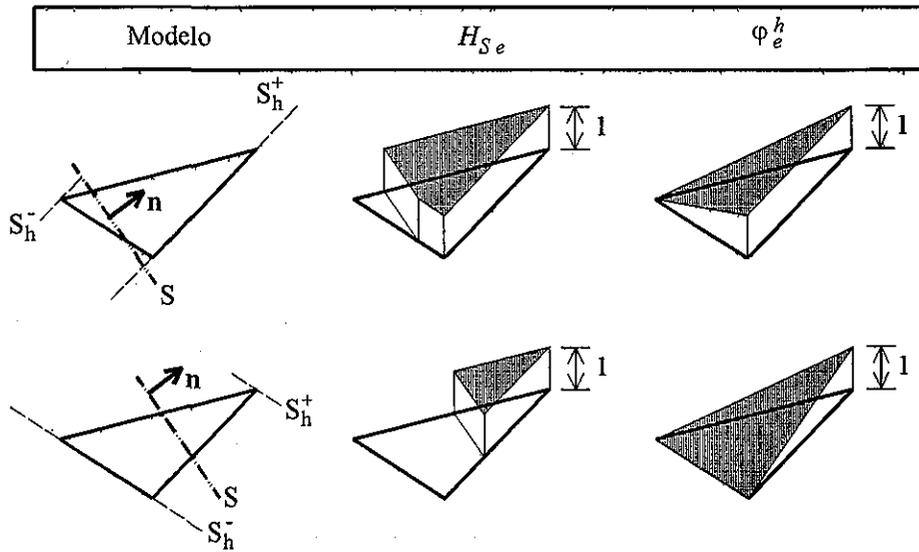
C.1, existen dos posibles definiciones de la matriz Φ . La definición de la matriz Φ depende de la posición relativa de la discontinuidad con respecto a los nodos. Para este propósito en la fig. C.1 se señalan con un círculo los nodos que se encuentran en S_{he}^+ . Las matrices Φ correspondientes a los dos triángulos de la fig. C.1 se definen respectivamente como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

Un aspecto clave en la aproximación numérica de discontinuidades es la ubicación de la ésta en el elemento. Esta posición define los términos H_{S_e} y φ_e^h , los cuales a su vez definen el modo incompatible ($M_{S_e} = H_{S_e} - \varphi_e^h$) que se introduce para aproximar de manera adecuada el campo de desplazamientos. Para ilustrar este efecto, en las fig. C.2 se presentan los distintos casos (dos para elementos triangulares de tres nodos y tres para elementos cuadriláteros de cuatro nodos) cómo se pueden definir los términos H_{S_e} y φ_e^h dado un elemento y una orientación fija de la discontinuidad. Aunque no se ilustra, se puede verificar que la función M_{S_e} toma valores nulos en los nodos.

Por medio de la fig. C.2 se ilustra la importancia que tiene la determinación de la posición de la discontinuidad en la definición del modo incompatible (M_{S_e}). Sin embargo, la información dada por un elemento finito no es suficiente para determinar dicha posición. En sí, el elemento sólo da información para determinar la orientación de la discontinuidad, que para este trabajo corresponde a la dirección perpendicular a los esfuerzos principales en el momento de la falla. A este respecto algunos autores consideran que la discontinuidad ocurre en el centro geométrico del elemento. Esta consideración simplista puede dar a lugar a una aproximación incorrecta en el sentido de que no se establece la continuación

ELEMENTO TRIANGULAR



ELEMENTO CUADRILATERO

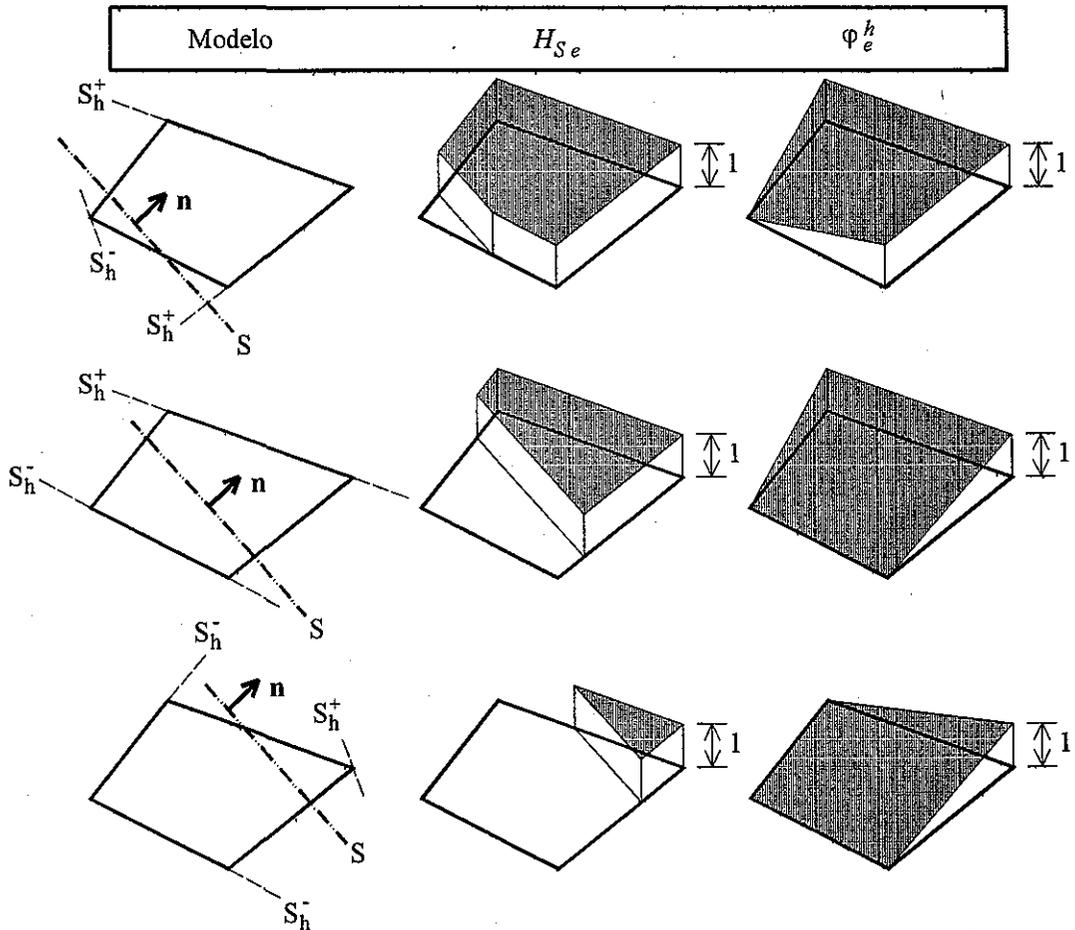


Figura C.2: Definición de las funciones H_{S_e} y φ_e^h para un elemento triangular de deformación constante y uno cuadrilátero de deformación lineal

entre elementos de la discontinuidad; como consecuencia, no se aproxima correctamente la disipación de energía y se pueden producir conflictos por la inconsistente definición de los modos incompatibles entre elementos adyacentes, como se muestra en la fig. C.3.

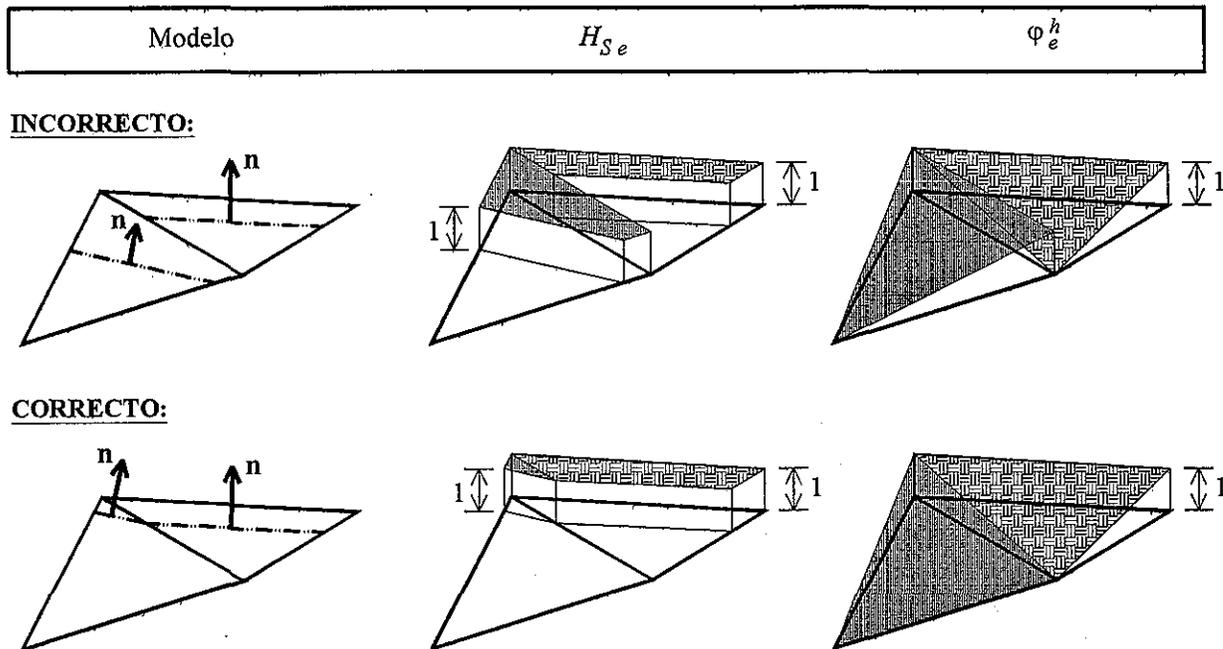


Figura C.3: Construcción de las funciones H_{S_e} y φ_e^h comparando el efecto de la continuidad en la ubicación de la discontinuidad en elementos vecinos

Un aspecto interesante de señalar es que no se requiere conocer la posición exacta de la discontinuidad para construir el modo incompatible, sino únicamente es necesario conocer la posición relativa de ésta con respecto a los nodos. En este trabajo se define la posición de la discontinuidad por medio continuación de ésta a través de los elementos, de manera similar a lo que hacen Garikipati (1996) y Oliver (1996b). A continuación se describe el algoritmo de propagación de la discontinuidad, el cual permite determinar la posición de la grieta:

1. Se selecciona el primer elemento (elemento semilla) en el cual se inicia la discontinuidad y se posiciona la discontinuidad en el centro geométrico del elemento. La selección de este elemento se realiza por medio de un análisis preliminar, el cual permite conocer la distribución de esfuerzos en el dominio.
2. Dado el estado de esfuerzos en el elemento semilla se determina la orientación de la discontinuidad y, posteriormente, los puntos sobre los bordes del elemento semilla donde se intersecta la discontinuidad (P_1).
3. A partir de estos puntos se propaga la discontinuidad como se muestra en la fig. C.4. La propagación es muy simple, ya que se conoce la orientación de la discontinuidad en

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

un elemento (n_i) y un punto por donde pasa la discontinuidad dado por el elemento vecino (P_i). La localización de la discontinuidad en un elemento y la determinación del otro punto P_{i+1} (sobre el borde del elemento) por donde pasa la discontinuidad se realiza empleando simples ecuaciones de la geometría. La propagación se realiza por un cierto número de elementos o de preferencia hasta que la discontinuidad alcance la frontera del dominio (fig. C.4).

La discontinuidad se propaga, de manera ficticia, aunque ésta no se haya producido. Esto permite conocer *a priori* la posición de la discontinuidad cuando ésta se produce. Una vez que ésta se produce se "consolida" (se mantiene fija hasta el final del análisis). Esta rutina de propagación se realiza en cada iteración para cada incremento en el tiempo, recalculándose los puntos y los elementos por donde pasa la discontinuidad.

Es de interés mencionar que la aplicación de este algoritmo da lugar a una aproximación de la discontinuidad por medio de segmentos lineales (el salto de los desplazamientos y la dirección de la discontinuidad se aproximan como constantes dentro del elemento) y continuos entre elementos, como se muestra en la siguiente figura.

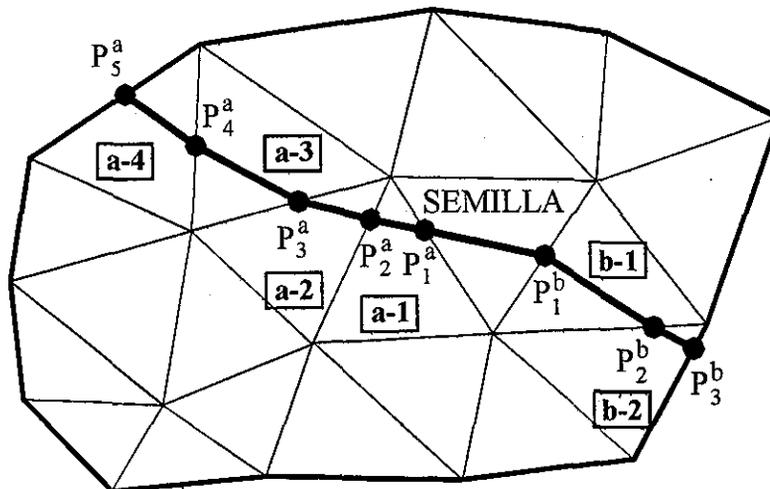


Figura C.4: Propagación de la discontinuidad

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

- [1] ACI Committee 446 (1992) "Fracture mechanics of concrete: Concepts, models and determination of materials properties", en *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Bazant ed., Elsevier Applied Science, Inglaterra.
- [2] Aliabadi, M. H. y Rooke, D. P. (1991) "Numerical Fracture Mechanics", Kluwer Academic Publishers - Computational Mechanics Publications, Inglaterra.
- [3] Anderson, T. L. (1995) "Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications", 2a. edición, CRC Press, EUA.
- [4] Armero, F. y Garikipati, K. (1996) "An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 33, pp. 2863-2885.
- [5] Arrea, M. e Ingraffea, A. R. (1982) "Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete", Informe 81-13, Universidad de Cornell, EUA.
- [6] Bazant, Z. P. (1985) "Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures", en *Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation*, Sih, G. C. y DiTommaso, A. eds., pp. 1-94, Martinus Nijhoff, Dordrecht, Holanda.
- [7] Bazant, Z. P. y Belytschko, T. B. (1985) "Wave propagation in strain-softening bar: Exact solution", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 111, pp. 381-389.
- [8] Bazant, Z. P. y Cedolin, L. (1991) "Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories", Oxford University Press, Inglaterra.
- [9] Bazant, Z. P. y Oh, B. H. (1983) "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *Materials and Structures*, RILEM, vol. 16, pp. 155-177.
- [10] Bazant, Z. P. y Pfeiffer, P. A. (1986) "Shear fracture test of concrete", *Materials and Structures*, RILEM, vol. 19, pp. 111-121.

- [11] Bazant, Z. P. y Planas, J. (1998) "Fracture and Size Effect in concrete and other quasibrittle materials", CRC Press, EUA.
- [12] Belytschko, T., Fish, J. y Engelmann, B. E. (1988) "A finite element with embedded localization zones", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 70, pp. 59-89.
- [13] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. y Krysl, P. (1996) "Meshless methods: an overview and recent developments", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 139, pp. 3-47.
- [14] Bonet, J. y Wood, R. D. (1997) "Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis", Cambridge University Press, EUA.
- [15] CEB (1991) "CEB-FIP Model Code 1990", Bulletin D'Information No. 213/214 del Comite Euro-International du Beton, Suiza.
- [16] Cedolin, L., DeiPoli, S. Y Iori, I, (1987) "Tensile behavior of concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 113, no. 3, pp. 431-449.
- [17] Cervenka, J. (1994) "Discrete crack modeling in concrete structures", Tesis Doctoral, Universidad de Colorado, EUA.
- [18] Cervenka consulting (2001) Sitio web: <http://www.cervenka.cz/> .
- [19] Chapman, S. J. (1998) "Introduction to Fortran90/95", McGraw-Hill, Malasia.
- [20] CIMNE (2001) "GiD pre/postprocessor. Version 6.1.2", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.
- [21] Crisfield, M. A. (1991) "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials", vol. 1, John Wiley and Sons, Inglaterra.
- [22] Crisfield, M. A. (1997) "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Advanced topics", vol. 2, John Wiley and Sons, Inglaterra.
- [23] De Borst, Bianic, Mang y Meschke (1998) "Computational Modelling of Concrete Structures", Balkema, Holanda.
- [24] De Borst, R., Sluys, L. J., Muhlhaus, H. B. y Pamin, J. (1993) "Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation", *Engrng. Compt.*, vol. 10, pp. 99-121.

- [25] Dolbow, J., Moes, N. y Belytschko, T (2000) "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 36, issue 3-4, pp. 235-260.
- [26] Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M. y Gioia, G. (1990) "Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 30, pp. 541-564.
- [27] Dvorkin, E. N. y Assanelli, A. P. (1991) "2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 90, pp. 829-844.
- [28] Feenstra, P. H. (1993) "Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete", Tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.
- [29] Fung, Y. C. (1965) "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall Inc., EUA.
- [30] Gálvez, J. C., Elices, M., Guinea, G. V. y Planas, J. (1998) "Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading", *Int. J. Fracture*, vol. 94, pp. 267-284.
- [31] Garikipati, K. R. (1996) "On Strong Discontinuities in Inelastic Solids and their Numerical Simulation", Tesis Doctoral, Universidad de Stanford, EUA.
- [32] Griffith, A. A. (1921) "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philos. T. Roy. Soc. A.*, vol. 221, pp. 163-197.
- [33] Griffith, A. A. (1924) "The theory of rupture", *Proceedings of the first International Conference of Applied Mechanics*, pp. 55-63.
- [34] Hill, R. (1962) "Acceleration waves in solids", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, Pergamon Press Ltd, pp. 1-16.
- [35] Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P. E. (1976) "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773-782.
- [36] Hordijk, D. A. (1991) "Local approach to fatigue of concrete", Tesis doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.
- [37] Hordijk, D. A. (1992) "Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses", *HERON*, vol. 37.

- [38] Hughes, T. R. J. (1980) "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 15, pp. 1413-1418.
- [39] Inglis, C. E. (1913) "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", *Transactions of the Institute of Naval Architects*, vol. 55, pp. 219-241.
- [40] Ingraffea, A. R. y Panthaki, M. J. (1986) "Analysis of shear fracture test of concrete beams", *Proceedings of Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, pp. 151-173, Tokio, Japón.
- [41] Irwin, G. R. (1957) "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *J. Appl. Mech. -T. ASME*, vol. 24, pp. 361-364.
- [42] Isenberg, J. (1993) "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II", *Proceedings of the International Workshop*, ASCE, EUA.
- [43] Jirasek, M. (2000) "Comparative study on finite elements with embedded discontinuities", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 188, pp. 307-330.
- [44] Jirasek, M. y Zimmermann, T. (2001a) "Embedded crack model: I. Basic formulation", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 50, pp. 1269-1290.
- [45] Jirasek, M. y Zimmermann, T. (2001b) "Embedded crack model: Part II. Combination with smeared cracks", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 50, pp. 1291-1305.
- [46] Karihaloo, B. L. (1995) "Fracture Mechanics and Structural Concrete", Longman Group Limited, Inglaterra.
- [47] Klisinski, M., Runesson, K. y Sture, S. (1991) "Finite element with inner softening band", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 117, no. 3, pp. 575-587.
- [48] Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. y Rusch, H. (1969) "Behavior of concrete under biaxial stresses", *ACI*, vol 66, no. 52, pp. 656-666.
- [49] Larsson, R., Runesson, K. y Ottosen, N. S. (1993) "Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 36, pp. 2087-2105.
- [50] Larsson, R. y Runesson, K. (1996) "Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 122, no. 5, pp. 402-411.

- [51] Larsson, R., Runesson, K. y Sture, S. (1996) "Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity- Theory and FE Analysis", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 33, no. 20 22, pp. 3081-3101.
- [52] Litton, R. W. (1974) "A contribution to the analysis of concrete structures under cyclic loading", Tesis Doctoral, Universidad de California en Berkeley, EUA.
- [53] Lofti, H. R. y Shing, P. B. (1995) "Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 38, pp. 1307-1325.
- [54] Malvern, L. E. (1969) "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall Inc., EUA.
- [55] Manzoli, O. , Oliver, X. y Cervera, M. (1998) "Localización de Deformaciones: Análisis y Simulación Numérica de Discontinuidades en Mecánica de Sólidos", Monografía No. 44, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.
- [56] Mazars, J. y Pijaudier-Cabot, G. (1989) "Continuum Damage Theory - Application to Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 115, no. 2, pp. 345-365.
- [57] Melenk, J. M. y Babuska, I. (1996) "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 139, pp. 289-314.
- [58] Moes, N., Dolbow, J. y Belytschko, T (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 46, pp. 131-150.
- [59] Mosalam, K. M., White, R. N. y Gergely, P. (1997) "Computational strategies for frames with infill walls: discrete and smeared crack analyses and seismic fragility", Informe Técnico NCEER-97-0021, Buffalo, N. Y., EUA.
- [60] Needleman, A. y Tvergaard, V. (1992) "Analyses of plastic flow localization in metals", *Appl. Mech. Rev.*, vol. 45, no. 3, parte 2, American Society of Mechanical Engineers, pp. S3-S18.
- [61] Ohlsson, U. y Olofsson, T. (1997) "Mixed-Mode fracture and anchor bolts in concrete analysis with inner softening bands", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 123, no. 10, pp. 1027-1033.
- [62] Oliver, J. (1989) "A consistent characteristic length for smeared cracking models", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 28, pp. 461-474.

- [63] Oliver, J. (1996a) "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 39, pp. 3575-3600.
- [64] Oliver, J. (1996b) "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical Simulation", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 39, pp. 3601-3623.
- [65] Oliver, J. (2000) "On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 37, pp. 7207-7229.
- [66] Oliver, J. (2001) "Mecánica de la Falla", Notas del curso impartido en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, marzo.
- [67] Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. y Lubliner, J. (1990) "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete", Bicanic et al (eds.), *Computer aided analysis and design of concrete structures*, Pineridge, Swansea, Inglaterra. pp. 945-957.
- [68] Oliver, J., Cervera, M., y Manzoli, O. (1999) "Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach", *Int. J. Plasticity*, vol. 15, no. 3, pp. 319-351.
- [69] Oliver, J. y Pulido, D. G. (1998) "On the use of strain-softening damage constitutive equations to model cracking of concrete", de Borst, Bicanic, Mang y Meschke (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema, Rotterdam, Holanda, pp. 363-372.
- [70] Olofsson, T., Klisinski, M. y Nedar, P. (1994) "Inner softening bands: a new approach to the localization in finite elements", Mang, Bicanic, de Borst (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Pineridge, Swansea, Inglaterra, pp. 373-382.
- [71] Ortiz, M., Leroy, y Needleman, A. (1987) "A finite element method for localized failure analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 61, pp. 189-214.
- [72] Ottosen, N. S. y Runesson, K. (1991) "Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 27, no. 4, pp. 401-421.
- [73] Owen, D. R. J. y Fawkes, A. J. (1983) "Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications", Pineridge Press, Inglaterra.
- [74] Pamin, J. K. (1994) "Gradient-Dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena", Tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.

- [75] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. y Vetterling, W. T. (1986) "Numerical Recipes", Cambridge University Press, EUA.
- [76] Rashid, Y. R. (1968) "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, no.4, pp. 334-344.
- [77] Regueiro, R. A. y Borja, R. I. (1999) "A finite element model of localized deformation in frictional materials taking strong discontinuity approach", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 33, pp. 283-315.
- [78] Reinhardt, H. W. (1984) "Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete", *Heron*, vol. 29, no. 2, Holanda.
- [79] Rice, J. R. (1976) "The localization of plastic deformation", *Theoretical and Applied Mechanics*, W. T. Koiter ed., pp. 207-220, North-Holland Publishing Company, Holanda.
- [80] Rots, J. G. (1988) "Computational modeling of concrete fracture", Tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.
- [81] Runesson, K., Ottosen, N. S. y Peric, D. (1991) "Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain", *Int. J. Plasticity*, vol. 7, pp. 99-121.
- [82] Schlangen, E. (1993) "Experimental and numerical analysis of fracture process in concrete", Tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.
- [83] Shah, S. P., Swartz, S. E. y Ouyang, C. (1995) "Fracture Mechanics of concrete: Applications of fracture mechanics to concrete, rock and other quasibrittle materials", John Wiley and Sons, EUA.
- [84] Simo, J. C. y Ju, J. W. (1987) "Strain and stress based continuum damage modes - 1. Formulation", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 23, pp. 821-840.
- [85] Simo, J. C., Oliver, J. y Armero, F. (1993) "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computational Mechanics*, vol. 12, pp. 277-296.
- [86] Simo, J. C. y Oliver, J. (1994) "A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids", *Proceedings of the US-Europe Workshop on Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, Bazant, Bittnar y Jirasek (eds.), Praga, República Checa, pp. 25-39.

- [87] Simo, J. C. y Rifai, M. S. (1990) "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 29, pp. 1595-1638.
- [88] Simons, J. W. y Powell, G. H. (1982) "Solution strategies for statically loaded nonlinear structures", Informe no. UCB/EERC-82/22, Earthquake Engineering Research Center, California, EUA
- [89] Sluys, L. J. y Berrends, A. H. (1998) "Discontinuous Failure Analysis for Mode I and Mode II Localization Problems", *Int. J. Solids and Structures*, vol 35, no. 31-32, pp. 4257-4274.
- [90] Spiegel, M. (1991) "Análisis Vectorial", Serie Schaum, McGraw-Hill, México.
- [91] Tano, R., Klisinski, M. Y Olofsson, T. (1998) "Stress locking in the inner softening band method: A study of the origin and how to reduce the effects", de Borst, Bicanic, Mang y Meschke (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema, Rotterdam, pp. 329-335.
- [92] Taylor, R. (2001) "FEAP - Finite Element Analysis Program. Version 7.3", Universidad de California en Berkeley, EUA.
- [93] TNO (1998) "DIANA. Online user's manual", versión 7, TNO Building and Construction Research, Delft, Holanda.
- [94] Van Mier, J. G. M. (1997) "Fracture Process of Concrete: assessment of material parameters for fracture models", CRC Press, EUA.
- [95] Van Vliet, M. R. A. (2000) "Size effect in tensile fracture of concrete and rock", Tesis Doctoral, Universidad Tecnológica de Delft, Holanda.
- [96] Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R. (1991) "Discrete Modeling of Crack Propagation: Theoretical Aspects and Implementation Issues in Two and Three Dimensions", Informe 91-5, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y., EUA.
- [97] Wells, G. N. y Sluys, L. J. (2001) "A new method for modelling cohesive cracks using finite elements", *Inter. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 50, pp. 2667-2682.
- [98] Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. (1994a) "El Método de los Elementos Finitos. Formulación básica y problemas lineales", cuarta edición, vol. 1, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.

- [99] Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. (1994b) "El Método de los Elementos Finitos. Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad", cuarta edición, vol. 2, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.