

6 00384



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

POSGRADO EN MATEMATICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

NUDOS SALVAJES OBTENIDOS COMO CONJUNTOS  
LIMITE DE GRUPOS KLEINIANOS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
**DOCTORA EN CIENCIAS MATEMATICAS**

**P R E S E N T A :**

**M. en C. GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO VERJOVSKY SOLA

MEXICO, D. F.

NOVIEMBRE 2002.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Gabriela Gpe. Hinojosa Palafox

FECHA: 18/11/03

FIRMA: [Signature]

ESTA COPIA SALE  
DE LA BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

*A mi Madre.*

*A la memoria de mi Padre.*



*A Alberto Verjovsky  
en su sexagésimo aniversario.*



# Agradecimientos

Ha sido un camino muy largo el llegar a este punto y han sido muchas las personas que me han apoyado en las diferentes etapas y momentos para lograr finalizar este proyecto de mi vida. A todas estas personas quiero darles las gracias por su ayuda, comprensión y cariño que me profesaron.

A mis queridos padres Eduardo y Alejandrina, por todo su amor y por haberme impulsado siempre a continuar. A mis hermanos Eduardo Antonio, Jesús Fernando y Pily por estar siempre a mi lado. A mis sobrinos Diana, Jesus, Laura, Luis, Elizabeth y Dulce Valeria, por la alegría que me han transmitido. A mis tías Paqui, Carmen y Ofelia por su cariño. A Ma. del Carmen Ponce y Lolita Quintana a quienes considero parte muy importante de mi familia.

A mi asesor el Dr. Alberto Verjovsky por el gran honor de haberme aceptado como su estudiante.

A los Profesores: José Seade, Francisco González, Víctor Núñez, José Carlos Gómez Larrañaga, Mario Eudave, Xavier Gómez Mont, Misha Kapovich, Etienne Ghys, por sus valiosos comentarios sobre este trabajo.

A Martha Guzmán por haberme convencido a estudiar el doctorado. A Araceli Medina y Gloria Andablo por su amistad y afecto. A Margareta Boege por su paciencia en nuestras largas charlas sobre matemáticas. A Paulino Preciado, Carlos Villegas, José Luis Cisneros, Radmila Bulajich, Víctor "inge" Domínguez, Eduardo Sacristán, Franco Toledo, Romana Mendoza, Rosalía Crescencio, Liz Domínguez, Mary Sarabia, por haber hecho mi estancia en el IMATE muy grata.

A Emilio Carranza por su ayuda y apoyo incondicional.

A mis amigos y hermanos de la Gran Fraternidad Universal: Licha y Jaime Bobadilla, Chela y Freddy Rosas, Lucero y Carlos Miguel González, Cecilia y Narciso Medrano, Lucy Huerta, Fernando Sánchez, Karla, Nalleli y Juan Carlos Vives, Irene y Mario Burgos, por su cariño.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidad Cuernavaca, por haberme brindado condiciones muy favorables de estudio y a la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) por la beca que me otorgo para la realización de mi doctorado. Al Programa de Apoyo a Estudiantes de Posgrado (PAEP) por haberme brindado la oportunidad de asistir a la Escuela de Verano "Geometría de 3-Variedades".

# Índice general

Índice de Figuras	VIII
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Grupos Kleinianos	3
1.1.1. Dominio Fundamental	4
1.1.2. Teorema del Poliedro de Poincaré	4
1.2. Nudos	6
1.2.1. Nudos Fibrados	7
1.2.2. Descomposición en Libro Abierto	11
1.2.3. Monodromía	12
2. Nudos salvajes de dimensión uno.	15
2.1. Definiciones	15
2.2. Descripción del Conjunto Límite	18
2.3. Variedades Hiperbólicas Asociadas	23
2.4. Fibración del complemento de $\Lambda(\Gamma)$ sobre $\mathbb{S}^1$	26
2.5. Monodromía	31
2.6. Hiperbolicidad	33
2.7. Otros Collares de Perlas	34
3. Nudos salvajes de dimensión dos	39
3.1. Introducción	39
3.2. Construcción	41
3.3. Descripción del Conjunto Límite	52
3.4. Variedades Hiperbólicas Asociadas	63
3.5. Fibración del complemento de $\Lambda(\Gamma, A)$ sobre $\mathbb{S}^1$	66

3.6. Monodromía . . . . .	68
3.7. Espacio Twistorial y Grupos Kleinianos . . . . .	69
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

1.1. Cubriente universal del toro con la preimagen del nudo. . . . .	8
1.2. El toro complementario. . . . .	10
1.3. La fibra. . . . .	10
1.4. Homeomorfismo de pegado. . . . .	11
2.1. Un collar de perlas cuyo molde es el nudo trébol. . . . .	16
2.2. Inversión con respecto a $\Sigma_k$ . . . . .	17
2.3. Inversión con respecto a $\Sigma_k$ y después con respecto a $\Sigma_j$ . . . . .	17
2.4. Primera etapa del proceso de inversión. . . . .	19
2.5. Collares de Perlas $T$ y $C$ . . . . .	20
2.6. La fibra interseca a cada perla en arcos. . . . .	24
2.7. Suma de las superficies $S^*$ y $S^{*j}$ a lo largo del arco $a_j$ . . . . .	28
2.8. Un collar de perlas traslapado y no anudado. . . . .	35
2.9. La intersección de la fibra con el collar traslapado $T$ . . . . .	37
3.1. Nudo girado. . . . .	40
3.2. $Spin(A)$ con seis meridianos preferenciales. . . . .	43
3.3. Una perla colocada en un polo de $Spin(A)$ . . . . .	43
3.4. Dos perlas consecutivas de $T_i$ y las correspondientes de $T_{i+1}$ . . . . .	44
3.5. $S_i$ formado por 6 esferas que se traslapan. . . . .	45
3.6. $S_i$ formado por 6 esferas tangentes. . . . .	45
3.7. Isotopía radial en el nivel $A(t)$ . . . . .	46
3.8. La esfera punteada es la perla $P_i^k$ . . . . .	47
3.9. El arco-trébol $A$ . . . . .	49
3.10. Un collar desanudado y la primera iteración. . . . .	53
3.11. Una 2-vecindad estrellada de $p$ en $\Pi^2(p)$ . . . . .	54
3.12. El rayo $d(\theta)$ es transformado al rayo $n(\theta)$ por una isotopía radial. . . . .	54
3.13. Perlas punteadas forman $ V_1 $ . . . . .	55
3.14. La curva punteada $L$ une los extremos del arco $A$ . . . . .	57

3.15. El collar de perlas $Z$ subordinado al nudo $K$ . . . . .	57
3.16. El nudo $K^1$ y la curva $L^1$ . . . . .	58
3.17. El collar de perlas $Z$ subordinado al nudo $K^1$ . . . . .	59
3.18. Fibración de $\mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^1$ . . . . .	64

# Introducción

Henri Poincaré en la década de 1880 introdujo la noción de grupos Kleinianos como la monodromía de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Durante el siglo pasado, los grupos Kleinianos han desempeñado un rol muy importante en muchas áreas de las matemáticas, por ejemplo en superficies de Riemann y la teoría de Teichmüller, dinámica holomorfa, geometría conforme e hiperbólica, teoría de 3-variedades, etc. Muchos resultados muy interesantes sobre funciones racionales en  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  obtenidos en las últimas dos décadas han sido motivados por la dinámica de grupos Kleinianos. Estos son, por definición, grupos discretos de automorfismos holomorfos de la línea proyectiva compleja, cuyo conjunto límite no es todo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Equivalentemente, éstos pueden ser considerados como grupos de isometrías del 3-espacio hiperbólico o como grupos de automorfismos conformes de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Mucha de la teoría de grupos Kleinianos ha sido generalizada a grupos Kleinianos conformes en dimensiones altas, es decir, grupos discretos de automorfismos conformes de la esfera  $\mathbb{S}^n$  cuyo conjunto límite no es toda la esfera. No es mucho lo que se sabe sobre los posibles conjuntos límite que pueden ser obtenidos y es en este contexto que surge la pregunta: ¿Es posible obtener  $\mathbb{S}^n$  salvajemente encajado en  $\mathbb{S}^{n+2}$  como conjunto límite de la acción de un grupo Kleiniano conforme en  $\mathbb{S}^{n+2}$ ?

Para  $n = 1$  la respuesta es afirmativa. Este tipo de ejemplos han sido dados por B. Apanasov, B. Maskit, M. Kapovich, entre otros. Consiste en tomar un collar anudado de 2-esferas redondas tangentes (ver sección 2.1) y considerar el grupo generado por las inversiones en cada una de las esferas. Este grupo es Kleiniano y su conjunto límite es un nudo salvaje en el sentido de Artin y Fox. En otras palabras, el conjunto límite es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$

pero no es equivalente a un nudo poligonal finito; Artin y Fox en 1948 fueron quienes introdujeron esta definición, dando además ejemplos sorprendentes de ellos. Es importante hacer notar que en este caso se obtienen nudos salvajes a través de la acción de un grupo, en otras palabras, de manera dinámica.

La parte central de este trabajo es estudiar la pregunta anterior. En el primer capítulo se dan las definiciones y resultados sobre grupos Kleinianos y teoría de nudos que estaremos utilizando, así como ejemplos que ilustren cada concepto.

En el segundo capítulo, se describen grupos Kleinianos conformes que tienen como conjunto límite a nudos salvajes de dimensión uno en  $\mathbb{S}^3$ . Se estudian sus propiedades topológicas obteniendo resultados muy interesantes como por ejemplo, si estos grupos Kleinianos actúan en un nudo manso, fibrado, no trivial, entonces el complemento del conjunto límite  $\Lambda$ , fibra sobre  $\mathbb{S}^1$  y como consecuencia, el cubriente universal de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda$  es  $\mathbb{R}^3$ . Además estudiamos la monodromía de  $\Lambda$ , así como una pregunta formulada por el Prof. Etienne Ghys que dice: Si el complemento del nudo original es una 3-variedad hiperbólica. ¿Es el complemento de  $\Lambda$  una 3-variedad hiperbólica?

En el tercer capítulo, se construye explícitamente un grupo Kleiniano  $\Gamma$  tal que su conjunto límite  $\Lambda$  es un nudo salvaje de dimensión dos en  $\mathbb{S}^4$ , contestando afirmativamente la pregunta para  $n = 2$ . También se describe el complemento de  $\Lambda$  encontrando que la mayor parte de los resultados del capítulo anterior se generalizan. En la última sección, haciendo uso de una muy bonita construcción hecha por J. Seade y A. Verjovsky en [25], se levanta la acción de este grupo Kleiniano al espacio twistorial  $P_{\mathbb{C}}^3$ , y su conjunto límite resulta ser homeomorfo a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

En este trabajo estamos estudiando conjuntos límite de grupos Kleinianos que resultan ser nudos salvajes, es por esto que en este capítulo daremos algunas de las definiciones y teoremas que utilizaremos a lo largo de esta tesis en los temas de grupos Kleinianos y nudos. No pretendemos dar una exposición detallada de cada tópico, para esto se puede consultar [16], [12], [13], [7], [11], [23], entre otros.

### 1.1. Grupos Kleinianos

Sea  $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  la esfera de dimensión  $n$  dotada de la métrica esférica estándar. Sea  $Möb(\mathbb{S}^n)$  el grupo de transformaciones de Möbius de la  $n$ -esfera. Para un subgrupo  $G \subset Möb(\mathbb{S}^n)$  su *conjunto de discontinuidad*, denotado por  $\Omega(G)$ , es igual a  $\{x \in \mathbb{S}^n : \text{el punto } x \text{ posee una vecindad } U(x) \text{ tal que la intersección } U(x) \cap g(U(x)) \text{ es vacía excepto para un número finito de elementos } g \in G\}$ . El complemento  $\mathbb{S}^n - \Omega(G) = \Lambda(G)$  es el *conjunto límite* (ver [12]).

Se dice que un grupo  $G \subset Möb(\mathbb{S}^n)$  es *Kleiniano* si  $\Omega(G)$  no es vacío.

El grupo  $Möb(\mathbb{S}^n)$  es también el grupo de isometrías del espacio hiperbólico de dimensión  $n + 1$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$ , que preservan orientación. Esto nos permite dar una definición de conjunto límite de un grupo Kleiniano a través de sucesiones. Es esta equivalencia la que estaremos utilizando a lo largo de este trabajo.

Un punto  $x$  es un *punto límite* para el grupo Kleiniano  $G$ , si existen un punto  $z \in \mathbb{S}^n$  y una sucesión  $\{g_m\}$  de *elementos distintos* de  $G$ , tal que  $g_m(z) \rightarrow x$ . El conjunto de puntos límite es  $\Lambda(G)$  (ver [16] sección II.D).

### 1.1.1. Dominio Fundamental

Un camino para ilustrar la acción de un grupo Kleiniano  $G$ , es elaborar una imagen de  $\Omega/G$ . Para este fin, un dominio fundamental resulta ser de gran importancia. A *grosso modo*, éste contiene un punto por cada clase de equivalencia de  $\Omega$  (ver [13], [16]).

**Definición 1.1.1** *Un dominio fundamental (poliedro fundamental)  $D$  para un grupo Kleiniano  $G$ , es una subvariedad de codimensión cero y lisa por pedazos (subpoliedro) de  $\Omega(G)$ , que satisface lo siguiente:*

1.  $\bigcup_{g \in G} g(Cl_{\Omega(G)}D) = \Omega$ .
2.  $g(Int(D)) \cap Int(D) = \emptyset$  para todo  $g \in G - \{e\}$ .
3. La frontera de  $D$  en  $\Omega(G)$  es una subvariedad lisa por pedazos (poliedro) en  $\Omega(G)$ , y está dividida en una unión de variedades suaves (polígonos convexos), las cuales son llamadas caras. Para cada cara  $S$ , hay otra cara  $T$  y un elemento  $g = g_{ST} \in G - \{e\}$  tal que  $gS = T$  ( $g$  es llamada una transformación de identificación de caras);  $g_{ST} = g_{TS}^{-1}$ .
4. Dado un compacto en  $\Omega(G)$ , sólomente un número finito de traslaciones de  $D$  lo intersecan.

**TEOREMA 1.1.2** ([13], [16]) *Sea  $D^* = \overline{D} \cap \Omega / \sim_G$ . Entonces  $D^*$  es homeomorfo a  $\Omega/G$ .*

### 1.1.2. Teorema del Poliedro de Poincaré

Básicamente el teorema del poliedro de Poincaré (ver [6]) establece que dado un poliedro  $P$  en el  $n$ -espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , y una colección de isometrías  $g_1, \dots, g_k, \dots$  que identifican parejas de lados de  $P$  acordes a ciertas condiciones, entonces el grupo  $\Gamma$  generado por  $g_1, \dots, g_k, \dots$  es discreto y  $P$  es un poliedro fundamental para  $\Gamma$ .

En general, las condiciones del teorema del poliedro de Poincaré son muy difíciles de verificar. Sin embargo, en el caso en que  $P$  tiene un número finito de lados y todas las isometrías  $g_1, \dots, g_k$  son inversiones en los lados de  $P$ , casi todas las condiciones del teorema del poliedro de Poincaré se cumplen; únicamente hay que verificar que los ángulos diédricos de  $P$  son submúltiplos de  $\pi$ . En este caso, decimos que  $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  es un grupo de reflexiones (ver [13], [16]).

A continuación enunciamos el teorema del poliedro de Poincaré, para su demostración puede consultar [16], [6], [13], entre otros.

**TEOREMA 1.1.3** *Sea  $D$  un poliedro en un espacio  $X$  ( $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{B}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{S}^n$ ) con transformaciones de identificación de lados (celdas de codimensión uno) que cumplen las siete condiciones que a continuación se enlistan. Entonces el grupo generado por las transformaciones de identificación de lados  $G$ , es discreto y  $D$  es un poliedro fundamental para  $G$ .*

1. *Los lados de  $D$  son apareados por elementos de  $G$ . Esto es, asumimos que para cada lado  $s$  de  $D$ , hay un lado  $s'$ , no necesariamente distinto de  $s$ , y hay un elemento  $g_s \in G$  que satisface  $g_s(s) = s'$ .*
2.  *$g_{s'} = g_s^{-1}$ . Si  $s = s'$ , está condición implica que  $g_s^2 = 1$ . Si esto ocurre, la relación  $g_s^2 = 1$ , es llamada relación de reflexión.*
3.  *$g_s(D) \cap D = \emptyset$ . Las isometrías  $g_s$  son llamadas las transformaciones de identificación de lados.*

Las transformaciones de identificación de lados inducen una relación de equivalencia en  $\overline{D}$ , donde cada punto de  $D$  es únicamente equivalente a sí mismo. Sea  $D^*$  el espacio de clases de equivalencia con la topología usual, así la proyección  $p: \overline{D} \rightarrow D^*$  es continua y abierta.

4. *Para cada punto  $z \in D^*$ ,  $p^{-1}(z)$  es un conjunto finito.*

La relación de equivalencia anterior define una relación de equivalencia en las aristas (recordemos que las aristas son celdas de codimensión dos y los lados son de codimensión uno); cada clase de equivalencia de aristas puede ser ordenada cíclicamente como sigue: Se empieza con

una arista  $e_1$ . Ésta se encuentra en la frontera de dos lados, llámese a uno de ellos  $s_1$ ; existe una transformación de identificación de lados  $g_1$ , con  $g_1(s_1) = s'_1$ . Sea  $e_2 = g_1(e_1)$ . Puesto que  $e_2$  se encuentra en la frontera de exactamente dos lados y uno de ellos es  $s'_1$ , llámese al otro  $s_2$ . De nuevo, hay un lado  $s'_2$  y una transformación de identificación de lados  $g_2$ , con  $g_2(s_2) = s'_2$ . Continuando de esta forma, se genera una sucesión  $\{e_m\}$  de aristas, una sucesión  $\{g_m\}$  de transformaciones de identificaciones de lados y una sucesión  $(s_m, s'_m)$  de pares de lados. La sucesión cíclicamente ordenada de aristas  $\{e_1, \dots, e_k\}$  es llamada un *ciclo* de aristas y  $k$  es su *período*. Cada arista se encuentra exactamente en una clase de equivalencia de ciclos. Nótese que  $g_k \circ \dots \circ g_1(e_1) = e_1$ . La transformación  $h = g_k \circ \dots \circ g_1$  recibe el nombre de transformación cíclica en  $e_1$ .

5. Para cada arista  $e$ , existe un entero positivo  $t$  tal que  $h^t = 1$ .

Las relaciones en  $G$  de la forma  $h^t = 1$ , son llamadas *relaciones cíclicas*. Sea  $\alpha(e)$  el ángulo medido desde adentro de  $D$  en la arista  $e$ . Requerimos

6. 
$$\sum_{m=1}^k \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}.$$

7.  $D$  es compacto relativo a  $\mathbb{X}$ .

**Observación 1.1.4** *Las relaciones de reflexión y las relaciones cíclicas definidas en los puntos 2 y 5 respectivamente, forman un conjunto completo de relaciones para  $G$ .*

## 1.2. Nudos

Un subconjunto  $K$  de un espacio  $X$  es un *nudo* si  $K$  es homeomorfo a la esfera  $S^p$ . Más general,  $K$  es un *enlace* si  $K$  es homeomorfo a la unión disjunta  $S^{p_1} \cup \dots \cup S^{p_r}$  de una ó mas esferas. Dos nudos ó enlaces  $K, K'$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que  $h(K) = K'$ . A lo largo de este trabajo estaremos interesados en nudos de codimensión dos.

Un nudo  $K \subset S^3$  es *manso* si es equivalente a un nudo poligonal. En general, un nudo es manso si posee una vecindad tubular. En caso contrario se dice que es *salvaje*.

**Definición 1.2.1** Una homotopía  $h_t : X \rightarrow X$  es llamada una isotopía ambiental si  $h_0 = \text{identidad}$  y además  $h_t$  es homeomorfismo para  $t \in [0, 1]$ . Decimos que dos nudos (ó enlaces)  $K, K'$  son isotópicos ambientalmente si existe una isotopía ambiental tal que  $h_1(K) = K'$ .

Una operación que nos permite a partir de dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  obtener otro es la *suma conexa de nudos*, que por abuso de notación se denota por  $K_1 \# K_2$ . Esta operación consiste en lo siguiente: Dadas dos parejas de espacios  $(\mathbb{S}^n, K_1), (\mathbb{S}^n, K_2)$ , se remueven las parejas de bolas estándares  $(\text{Int}(B_i^n), \text{Int}(B_i^{n-2}))$  de  $(\mathbb{S}^n, K_i)$   $i = 1, 2$ , y se "cosen" las parejas resultantes por un homeomorfismo  $h : (\partial B_2^n, \partial B_2^{n-2}) \rightarrow (\partial B_1^n, \partial B_1^{n-2})$ .

Uno de los problemas que surge es cómo reconocer cuándo dos nudos son equivalentes. En este sentido, uno de los invariantes más útiles es el grupo fundamental del complemento del nudo, llamado *el grupo fundamental del nudo*.

Un procedimiento para escribir una presentación del grupo de un nudo  $K \subset \mathbb{S}^3$  es la *presentación de Wirtinger*, que establece un algoritmo para calcularlo a través de una proyección del nudo en un plano. No es nuestro objetivo el dar una descripción de este algoritmo (ver [23] para más detalles), pero deseamos puntualizar que como consecuencia de él tenemos que si un nudo es manso, entonces su grupo fundamental es finitamente generado.

### 1.2.1. Nudos Fibrados

Una función  $f : E \rightarrow B$  se dice que es una *fibración localmente trivial* con *fibra*  $F$ , si cada punto de  $B$  tiene una vecindad  $U$  y un homeomorfismo "trivializante"  $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ f \downarrow & \swarrow \text{proyección} & \\ U & & \end{array}$$

$E$  y  $B$  son conocidos como los espacios *total* y *base*, respectivamente. Cada conjunto  $f^{-1}(b)$  es llamada una *fibra* y es homeomorfa a  $F$ . Estaremos interesados en fibraciones con espacio base  $\mathbb{S}^1$ .

**Definición 1.2.2** Un nudo ó enlace  $L^n$  en  $\mathbb{S}^{n+2}$  es fibrado si existe una fibración localmente trivial  $f : \mathbb{S}^{n+2} - L \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Requerimos además que  $f$  se comporte bien cerca de  $L$ : Esto es, cada componente  $L_i$  tiene una vecindad enmarcada como  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^n$ , con  $L_i \cong \{0\} \times \mathbb{S}^n$ , tal que la restricción de  $f$  a  $\mathbb{D}^2 - \{0\} \times \mathbb{S}^n$  está dada por  $(x, y) \rightarrow \frac{y}{|y|}$ .

Se sigue que  $f^{-1}(x) \cup L$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ , es una  $(n+1)$ -variedad con frontera  $L$ . De hecho, es una superficie de Seifert para  $L$  (ver [23]).

**Ejemplo 1.2.3** El nudo trivial  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+2}$  es fibrado a través de la proyección  $(\mathbb{S}^n * \mathbb{S}^1) - \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ , donde  $\mathbb{S}^{n+2} \cong (\mathbb{S}^n * \mathbb{S}^1)$  es el "join" de  $\mathbb{S}^n$  con  $\mathbb{S}^1$ . Las fibras son  $(n+1)$ -discos (ver [23]).

A continuación daremos una construcción explícita de la fibración del complemento del trébol sobre la circunferencia (ver [23], [35]).

**Ejemplo 1.2.4** El nudo trébol  $K = T_{2,3}$  es un nudo fibrado (ver [19], [23], [35]). En efecto, recordemos que podemos pensar a  $T_{2,3}$  encajado en la frontera de un toro sólido  $B$ . Tomemos el cubriente universal  $q : \tilde{B} \rightarrow B$ . Podemos visualizar a  $\tilde{B}$  como un tubo infinito  $\{y^2 + z^2 \leq 1\}$  en  $\mathbb{R}^3$ , así las transformaciones cubrientes son traslaciones en la dirección del eje  $x$  por múltiplos de  $2\pi$ . Entonces  $\tilde{T}_{2,3} = q^{-1}(T_{2,3})$  es la doble hélice con ecuaciones  $y = \pm \sin \frac{3}{2}x$ ,  $z = \pm \cos \frac{3}{2}x$  (ver figura 1.1).

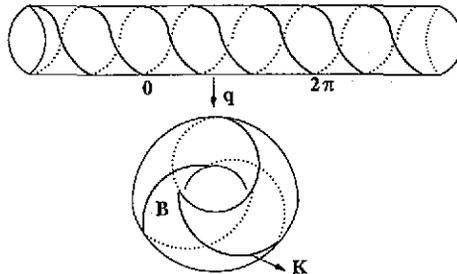


Figura 1.1: Cubriente universal del toro con la preimagen del nudo.

Ahora construimos una superficie reglada  $\tilde{S}$  en la región  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  en  $\tilde{B}$  junto con todas sus traslaciones por múltiplos de  $\frac{2\pi}{3}$  en la dirección  $x$ . Entonces  $\tilde{S}$  es el conjunto de todos los puntos en  $\mathbb{R}^3$  de la forma

$$r(x, \pm \sin \frac{3}{2}x, \pm \cos \frac{3}{2}x) \\ + (1-r)(\frac{2\pi}{3} - x, \pm \sin \frac{3}{2}(\frac{2\pi}{3} - x), \pm \cos \frac{3}{2}(\frac{2\pi}{3} - x)) + (\frac{2}{3}\pi n, 0, 0)$$

donde

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sea  $R_\theta$  una rotación de  $\tilde{B}$  por un ángulo de  $\frac{\theta}{2}$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, con eje de rotación el eje  $x$ . Notemos que  $\widetilde{T_{2,3}}$  permanece invariante. Una fórmula explícita es

$$R_\theta = (x + \frac{\theta}{3}, y \cos \frac{\theta}{2} + z \sin \frac{\theta}{2}, -y \sin \frac{\theta}{2} + z \cos \frac{\theta}{2}).$$

Definimos  $\tilde{S}_\theta = R_\theta(\tilde{S})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

De esta forma, hemos obtenido una familia  $\tilde{S}_\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , de 2-variedades homeomorfas entre sí que llenan totalmente a  $\tilde{B}$  y son disjuntas, excepto que  $\tilde{S}_0 = \tilde{S}_{2\pi}$ . La frontera de  $\tilde{S}_\theta$  es  $\widetilde{T_{2,3}}$  más dos líneas horizontales en  $\partial\tilde{B}$  las cuales son opuestas y están rotadas por un ángulo de  $\frac{\theta}{2}$  con respecto a la vertical. Claramente cada  $\tilde{S}_\theta$  es invariante bajo el grupo de transformaciones cubrientes de  $\tilde{B}$  por lo que las podemos proyectar a una familia de superficies

$$F'_\theta = q(\tilde{S}_\theta)$$

las cuales son homeomorfas entre sí, llenan totalmente a  $B$  y todas contienen al nudo trébol en su frontera además de dos circunferencias  $C_\theta^0$  y  $C_\theta^1$ . Notemos que  $C_{2\pi}^0 = C_0^1$  y  $C_{2\pi}^1 = C_0^0$ . Para completar la fibración de  $\mathbb{S}^3 - K$ , consideremos el toro sólido

$$W = \overline{\mathbb{S}^3 - B}$$

En  $W$ ,  $C_\theta^0$  y  $C_\theta^1$  son meridianos y frontera de las familias de discos  $D_\theta^0$  y  $D_\theta^1$ , las cuales son disjuntas excepto que  $D_{2\pi}^0 = D_0^1$  y  $D_{2\pi}^1 = D_0^0$  (ver figura 1.2).

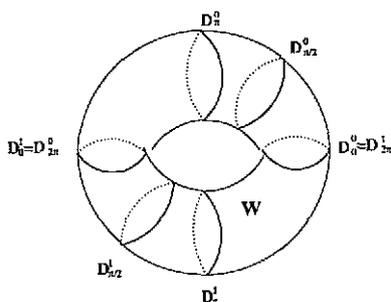


Figura 1.2: El toro complementario.

Consideremos

$$F_\theta = (F'_\theta \cup D_0^0 \cup D_\theta^1 - T_{2,3})$$

entonces,  $F_\theta$  es la superficie que aparece en la figura 1.3.

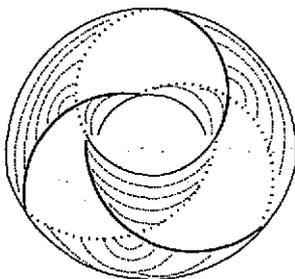


Figura 1.3: La fibra.

Claramente su característica de Euler es  $-1$ , por lo que es el toro punchado (la superficie de Seifert del nudo trébol).

Definimos la fibración

$$P : \mathbb{S}^3 - T_{2,3} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

como  $P(x) = e^{2\pi i\theta}$ , donde  $\theta$  es el único número en  $[0, 1)$  tal que  $x \in F_\theta$ . Su fibra es exactamente  $F_\theta$ .

Ahora, el homeomorfismo de pegado  $h : F_0 \rightarrow F_0$  de la tapa  $F_0 \times \{0\}$  con  $F_0 \times \{1\}$  es la composición

$$h = q \circ R_{2\pi} \circ q^{-1}$$

Geoméricamente este homeomorfismo permuta cíclicamente las tres bandas dobladas de  $F_0$  seguido de una reflexión que intercambia los discos  $D_0^0$  y  $D_0^1$ .

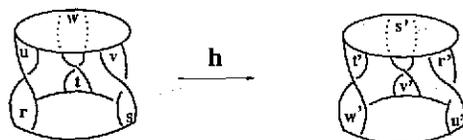


Figura 1.4: Homeomorfismo de pegado.

Luego  $h$  es de período 6 (i.e.  $h^6 = id$ ,  $h^n \neq id$  si  $1 \leq n < 6$ ).

Otra manera de describir la fibración del complemento del nudo trébol es la siguiente:

**Ejemplo 1.2.5** Sea  $\mathbb{S}_\epsilon^3 \subset \mathbb{C}^2$  la 3-esfera centrada en el origen de radio  $\epsilon$  para  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño. Sea  $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 + z_2^3 = 0\}$ . Entonces  $\mathbb{S}_\epsilon^3 \cap V = K$  es el nudo trébol derecho y la aplicación  $F : \mathbb{S}_\epsilon^3 - K \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $F(z_1, z_2) = \frac{z_1^2 + z_2^3}{|z_1^2 + z_2^3|}$  es una fibración localmente trivial con fibra el toro ponchado (ver [19] sección 1, [23] pags. 327-333, [35]).

### 1.2.2. Descomposición en Libro Abierto

Una *descomposición en libro abierto* de una  $n$ -variedad  $M$  consiste de una subvariedad de codimensión dos  $N^{n-2}$  llamada el "lomo", y una fibración  $f : M - N \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Las fibras son llamadas las *páginas*. Además se requiere que la fibración se comporte bien cerca de  $N$ , es decir, se requiere que  $N$  tenga una vecindad tubular  $N \times \mathbb{D}^2$  tal que  $f$  restringido a  $N \times (\mathbb{D}^2 - 0)$  es la aplicación  $(x, y) \rightarrow \frac{y}{|y|}$ . Así un enlace fibrado en  $\mathbb{S}^n$  es un caso especial de una descomposición en libro abierto ([34]).

**TEOREMA 1.2.6** ([23]) *Toda 3-variedad orientable y cerrada  $M^3$  tiene una descomposición en libro abierto.*

### 1.2.3. Monodromía

Sea  $K$  un nudo no trivial de dimensión  $n$ , suave y fibrado con fibra  $S$ . Puesto que  $\mathbb{S}^{n+2} - K$  fibra sobre la circunferencia, sabemos que  $\mathbb{S}^{n+2} - K$  es igual a  $S \times [0, 1]$  módulo un homeomorfismo de identificación  $\psi : S \rightarrow S$ , que pega  $S \times \{0\}$  con  $S \times \{1\}$ . Este homeomorfismo induce un automorfismo

$$\psi_{\#} : \Pi_1(S) \rightarrow \Pi_1(S)$$

llamado *la monodromía de la fibración*.

Otra manera de entender la monodromía es a través de la *aplicación de primer retorno de Poincaré* definida como sigue: Sea  $M$  una variedad conexa y compacta y sea  $f_t$  un flujo que posee una sección transversa  $\eta$ . Tenemos que si  $x \in \eta$ , entonces existe una función continua  $t(x) > 0$  tal que  $f_t \in \eta$ . Podemos definir la aplicación de primer retorno de Poincaré  $F : \eta \rightarrow \eta$  como  $F(x) = f_{t(x)}(x)$ . Esta función es un difeomorfismo.

Se puede probar que existe una función  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y positiva, tal que el campo vectorial  $Y = \phi X$  genera un flujo  $g_t$  que tiene las mismas órbitas del flujo  $f_t$  y tal que su correspondiente función  $t(x)$  es idénticamente igual a uno.

De lo anterior, se sigue que la familia de subvariedades  $\{\eta_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  es una familia de subvariedades disjuntas dos a dos y difeomorfas a  $\eta$ . Evidentemente,  $\eta = \eta_0$ . Además cada  $\eta_t$  es transversa al flujo y cada  $y \in M$  pertenece exactamente a una de las subvariedades  $\eta_{h(y)}$ .

La función  $P : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por la fórmula  $P(y) = e^{2\pi i h(y)}$  es una fibración lisa y localmente trivial. Consecuentemente, la variedad  $M$  fibra sobre la circunferencia con fibra  $\eta$ .

La aplicación de primer retorno de Poincaré induce un automorfismo

$$\psi_{\#} : \Pi_1(\eta) \rightarrow \Pi_1(\eta)$$

que es llamado *la monodromía del fibrado* (ver [33]).

En nuestro caso, para la variedad  $\mathbb{S}^{n+2} - K$ , el flujo que define la aplicación de primer retorno de Poincaré  $\Phi$ , es el flujo que corta transversalmente

cada página de su descomposición en libro abierto.

Por la sucesión exacta corta asociada a la fibrición, tenemos

$$0 \rightarrow \Pi_1(S) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^{n+2} - K) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (1)$$

la cual tiene una sección  $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^{n+2} - K)$  puesto que la fibra es conexa. Por lo tanto (1) se escinde. Como consecuencia  $\Pi_1(\mathbb{S}^{n+2} - K)$  es el producto semi-directo de  $\mathbb{Z}$  con  $\Pi_1(S)$  a través de  $\Psi$ .

**Ejemplo 1.2.7** Sea  $K = T_{2,3}$  el nudo trébol. Tenemos que el homeomorfismo de pegado es  $h = q \circ R_{2\pi} \circ q^{-1}$  el cual permuta cíclicamente las bandas e invierte los dos discos de su superficie de Seifert (ver figura 1.4).

Ahora calculemos la monodromía

$$h_{\#} : \Pi_1(\text{toro ponchado}) \rightarrow \Pi_1(\text{toro ponchado})$$

Para esto, nos restringiremos al 1-esqueleto que es un retracto fuerte por deformación del toro ponchado. Recordemos que  $\Pi_1(\text{toro ponchado}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Por lo que si  $[a]$  y  $[b]$  son sus generadores, para determinar  $h_{\#}$  es suficiente conocer sus imágenes. Con apoyo de la figura 1.4, es sencillo verificar que  $h_{\#}([a]) = b^{-1}$  y  $h_{\#}([b]) = ab$ . Sabemos que el orden de  $h$  es 6, veamos que ocurre con  $h_{\#}$

$$\begin{aligned} [a] &\xrightarrow{h_{\#}} [b]^{-1} \xrightarrow{h_{\#}^2} [ab]^{-1} \xrightarrow{h_{\#}^3} [b^{-1}a^{-1}b] \xrightarrow{h_{\#}^4} [b^{-1}a^{-1}bab] \xrightarrow{h_{\#}^5} [b^{-1}a^{-1}ba^2b] \\ &\xrightarrow{h_{\#}^6} [a^{-1}b^{-1}ab]^{-1}[a][a^{-1}b^{-1}ab] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [b] &\xrightarrow{h_{\#}} [ab] \xrightarrow{h_{\#}^2} [b^{-1}ab] \xrightarrow{h_{\#}^3} [b^{-1}a^{-1}b^{-1}ab] \xrightarrow{h_{\#}^4} [b^{-1}a^{-2}b^{-1}ab] \\ &\xrightarrow{h_{\#}^5} [b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ab] \xrightarrow{h_{\#}^6} [a^{-1}b^{-1}ab]^{-1}[b][a^{-1}b^{-1}ab] \end{aligned}$$

de aquí que  $h_{\#}^6$  es conjugado a la identidad por un automorfismo externo, por lo que es isotópicamente equivalente a la identidad.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

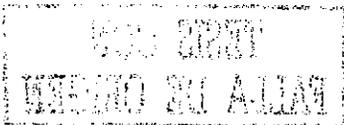
Luego,

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(\mathbb{S}^3 - K) &\cong \Pi_1(\mathbb{S}^1) \rtimes_{\psi} \Pi_1(S) \\
 &= \{a, b, c : a * c = b^{-1}, b * c = ab\} \\
 &= \{a, c : c^{-1}a^{-1}c = ac^{-1}a^{-1}\} \\
 &= \{a, c : c = acac^{-1}a^{-1}\} \\
 &= \{a, c : c = cacac^{-1}a^{-1}c^{-1}\} \\
 &= \{a, c : c = cac^{-1}c^2ac^{-1}c^{-1}ca^{-1}c^{-1}\}
 \end{aligned}$$

Sea  $\alpha = cac^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \{\alpha, c : c = \alpha c \alpha c^{-1} \alpha^{-1}\} \\
 &= \{\alpha, c : c \alpha c = \alpha c \alpha\}
 \end{aligned}$$

que es precisamente el grupo fundamental del nudo trébol.



## Capítulo 2

# Nudos salvajes de dimensión uno.

En este capítulo estudiaremos grupos Kleinianos de tipo Schottky que actúan en  $\mathbb{S}^3$ , cuyo conjunto límite es un nudo salvaje en el sentido de Artin y Fox. Este tipo de ejemplos ya han sido descritos por B. Apanasov (ver [12]), B. Maskit (ver [16]), M. Kapovich (see [12]), entre otros. Nosotros estamos interesados en sus propiedades topológicas.

En las primeras secciones describimos geoméricamente la acción de estos grupos, su conjunto límite así como su dominio fundamental y variedades hiperbólicas asociadas. En las secciones 4 y 5, determinamos topológicamente el complemento del nudo salvaje para el caso en que el “nudo original” fibra sobre la circunferencia. En la sección 7, estudiamos la hiperbolicidad del complemento del nudo salvaje en el caso en que el complemento del nudo original sea hiperbólico. En la sección 8 extendemos la noción de “collar de perlas” y estudiamos la acción de grupos Kleinianos en estos casos.

### 2.1. Definiciones

En esta sección definiremos el tipo de grupos Kleinianos en los que estamos interesados y explicaremos como actúan.

**Definición 2.1.1** Un collar de  $n$  perlas  $T$ , es una colección de  $n$  2-esferas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  en  $\mathbb{S}^3$ , tales que las esferas adyacentes son tangentes, es decir,

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |i - j| \neq 1 \\ \text{punto} & \text{si } |i - j| = 1 \text{ ó } n - 1 \end{cases}$$

Cada 2-esfera es llamada *perla*. Si unimos los puntos de tangencia por segmentos geodésicos en  $\mathbb{S}^3$ , el resultado es un nudo poligonal  $K$  al cual llamaremos el *molde* (en inglés *template*) de  $T$ . Notemos que la numeración de las perlas nos da una orientación para  $K$ .

Recíprocamente, dado un nudo poligonal orientado  $K : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ . Un collar de perlas  $T$  subordinado al nudo  $K$ , es un conjunto de 2-esferas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  en  $\mathbb{S}^3$ , tales que los segmentos de  $K$  contenidos en sus interiores están desanudados, las esferas adyacentes son tangentes, y  $K$  está totalmente cubierto por éstas.

Definimos el *relleno* de  $T$  como  $|T| = \cup_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i = |\Sigma_i|$  es la 3-bola cerrada cuya frontera  $\partial B_i$  es  $\Sigma_i$  y contiene un segmento de  $K$ .

**Ejemplo 2.1.2** Sea  $K = \text{El nudo trébol}$ .

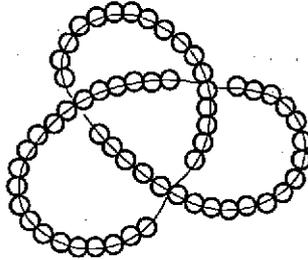


Figura 2.1: Un collar de perlas cuyo molde es el nudo trébol.

Sea  $\Gamma$  el grupo generado por las inversiones  $I_j$  en  $\Sigma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Primero describiremos geoméricamente como actúa este grupo en un collar de perlas  $T$ .

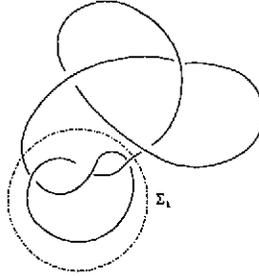


Figura 2.2: Inversión con respecto a  $\Sigma_k$ .

Al invertir con respecto a cada perla  $\Sigma_k$ , obtenemos una copia de  $T - \Sigma_k$  en el interior de  $B_k$  con la orientación invertida (ver figura 2.2).

Si  $w \in \Gamma$  es tal que  $w = I_j \circ I_k$  con  $j \neq k$ , entonces primero invertimos con respecto a la perla  $\Sigma_k$ . En particular se tiene una copia de la perla  $\Sigma_j$  en el interior de  $B_k$ , que denotamos por  $\Sigma_{(j)}$ . Ahora, nos fijamos únicamente en  $\Sigma_k$  e invertimos con respecto a la perla  $\Sigma_{(j)}$ ; obtenemos una copia de  $T - \Sigma_j$ , que llamaremos  $\Sigma_{(kj)}$ , con la misma orientación que el nudo  $K$ . Esto es claro, ya que el segmento de  $\mathbb{S}^1$  que se encuentra dentro de  $\Sigma_j$  al aplicar  $I_j$  es reemplazado por  $T - \Sigma_j$  (ver figura 2.3).

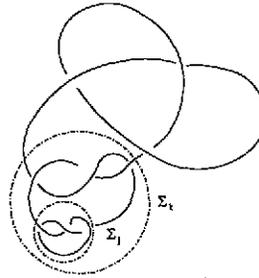


Figura 2.3: Inversión con respecto a  $\Sigma_k$  y después con respecto a  $\Sigma_j$ .

En general, si  $w = I_{i_k} I_{i_{k-1}} \cdots I_{i_1} \in \Gamma$ ; primero invertimos con respecto a  $\Sigma_{i_1}$ , después nos restringimos a  $\Sigma_{i_1}$  e invertimos con respecto a  $\Sigma_{i_2}$ . Luego

nos fijamos únicamente en  $\Sigma_{i_2}$  e invertimos con respecto a  $\Sigma_{i_3}$ . Continuamos de esta forma hasta invertir con respecto a  $\Sigma_{i_k}$  que se encuentra en  $\Sigma_{i_{k-1}}$ , obteniéndose como imagen una copia de  $T - \Sigma_{i_k}$ , que llamaremos  $\Sigma_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ .

**Observación 2.1.3** 1. *Un elemento  $w \in \Gamma$ , si consiste de un número par de inversiones preserva orientación. Si está formado por un número impar de inversiones, la invierte.*

2. *El grupo  $\Gamma$  es Kleiniano. En efecto, si  $X = \mathbb{S}^3 - |T|$ , de la construcción se sigue que  $w(X) \cap X = \emptyset$  para  $w \in \Gamma - \{e\}$ ; es decir, la acción de  $\Gamma$  en  $X$  es libre y propiamente discontinua. Más aún  $X$  es el dominio fundamental de  $\Gamma$  (ver capítulo anterior).*
3. *Los nudos resultantes de invertir con respecto a  $\Sigma_i$  y  $\Sigma_j$  ( $i \neq j$ ) son isotópicos, por lo que podemos considerar que una copia de  $T - \Sigma_j$  es obtenida como imagen para cada  $w \in \Gamma$ .*

## 2.2. Descripción del Conjunto Límite

Para encontrar el conjunto límite de  $\Gamma$ , requerimos encontrar todos sus puntos límite (ver capítulo 1). Para esto, vamos a considerar todas las posibles sucesiones de elementos de  $\Gamma$ . Lo haremos por etapas:

1. *Primera Etapa: Al invertir con respecto a cada perla  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , tenemos una copia de  $T - \Sigma_j$  dentro de cada una, por lo que se ha obtenido un nuevo collar  $T_1$  formado por  $n(n-1)$  perlas subordinado a un nudo  $K_1$ , el cual es homeomorfo a la suma conexa de  $n+1$  copias de  $K$  (ver figura 2.4). De la construcción tenemos que  $|T_1| \subset |T|$ .*
2. *Segunda Etapa: Si consideramos la acción de los elementos de  $\Gamma$  en  $T_1$ , obtenemos un nuevo collar  $T_2$  con  $n(n-1)^2$  perlas subordinado a un nudo  $K_2$ , el cual es homeomorfo a la suma conexa de  $n^2+1$  copias del nudo  $K$ . Notemos que  $|T_2| \subset |T_1|$ .*
3.  *$k$ -ésima Etapa: La acción de elementos de  $\Gamma$  en  $T_{k-1}$ , determina un collar  $T_k$  de  $n(n-1)^k$  perlas subordinado al nudo  $K_k$ , el cual es homeomorfo a la suma conexa de  $1 + n \left[ \frac{(n-1)^{k+1} - 1}{n-2} \right]$  copias de  $K$ . Por construcción  $|T_k| \subset |T_{k-1}|$ .*

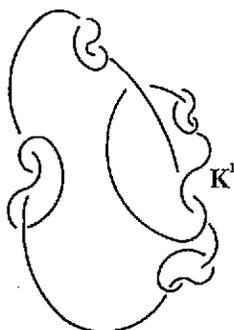


Figura 2.4: Primera etapa del proceso de inversión.

Sea  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} |T_k|$ . A continuación probaremos que  $x$  es un punto límite. En efecto, existe una sucesión de bolas cerradas  $\{B_m\}$  con  $B_m \subset |T_m|$  tal que  $x \in B_m$  para cada  $m$ . Por lo que podemos encontrar a  $z \in \mathbb{S}^3 - T$  y una sucesión  $\{w_m\}$  de elementos distintos de  $\Gamma$ , tal que  $w_m(z) \in B_m$ . Como  $\text{diam}(B_m) \rightarrow 0$  se sigue que  $w_m(z)$  converge a  $x$ . La otra inclusión es clara. Por lo tanto, el conjunto límite está dado por

$$\Lambda(\Gamma) = \varprojlim_k |T_k| = \bigcap_{k=1}^{\infty} |T_k|$$

**LEMA 2.2.1** ([12], [16]) *El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .*

*Demostración.*

A continuación daremos un bosquejo de la demostración; para más detalles consultar [12], [16]. La idea central es comparar a  $\Lambda(\Gamma)$  con un modelo ya conocido.

Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ , subordinado al nudo poligonal  $K$ . Entonces existe un homeomorfismo  $h$  de  $|T|$  al relleno del collar trivial  $C$  de  $n$  perlas  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , tal que cada  $\Delta_i$  es del mismo tamaño y es ortogonal al molde  $\mathbb{S}^1$  de  $C$  (ver figura 2.5).

Invirtiendo con respecto a cada perla  $\Sigma_j$  y  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) respectivamente, tenemos que la copia de  $T - \Sigma_j$  que aparece en el interior de  $B_j$  es

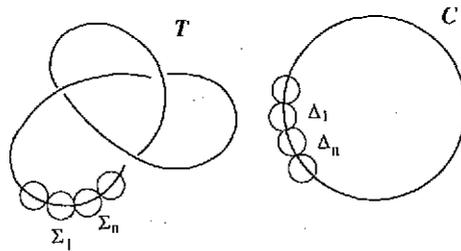


Figura 2.5: Collares de Perlas  $T$  y  $C$ .

homeomorfa a la copia de  $C - \Delta_j$  que aparece en el interior de  $|\Delta_j|$ , y puesto que los puntos de tangencia de las perlas quedan fijos, hay un homeomorfismo  $h_1$  de  $|T_1|$  a  $|C_1|$ , tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |T_1| & \xrightarrow{i_1} & |T| \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h \\ |C_1| & \xrightarrow{i_1} & |C| \end{array}$$

donde  $i_1$  es la inclusión.

Continuando con este proceso, en el  $k$ -ésimo paso tenemos que al invertir con respecto a cada perla en ambos collares  $T_{k-1}$ ,  $C_{k-1}$ , las imágenes obtenidas son homeomorfas; y los puntos de tangencia de las perlas permanecen fijos, de aquí que existe un homeomorfismo  $h_k$  de  $|T_k|$  en  $|C_k|$ . Además, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |T_k| & \xrightarrow{i_k} & |T_{k-1}| \\ h_k \downarrow & & \downarrow h_{k-1} \\ |C_k| & \xrightarrow{i_k} & |C_{k-1}| \end{array}$$

donde  $i_k$  es la inclusión en cada caso.

Así, por la propiedad universal del límite inverso, tenemos que

$$\Lambda(\Gamma) \cong \varprojlim |T_k| = \Lambda(C)$$

pero  $\Lambda(C) = \mathbb{S}^1$  (ver [16]), por lo que

$$\Lambda(\Gamma) \cong \mathbb{S}^1 \quad \blacksquare$$

**LEMA 2.2.2** ([12], [16]) *Sea  $T$  un collar de perlas subordinado al nudo poligonal y no trivial  $K$ . Entonces  $\Lambda(\Gamma)$  está salvajemente encajado en  $\mathbb{S}^3$ .*

*Demostración.*

Es suficiente probar que  $\Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))$  está infinitamente generado y no es equivalente a una presentación finita.

Notemos que  $K$  es un retracto fuerte por deformación de  $|T|$ , de aquí que sus grupos fundamentales son isomorfos. Luego, ya que  $K$  es poligonal podemos calcular su grupo fundamental a través de la presentación de Wirtinger. Así

$$\Pi_1(|T|) \cong \Pi_1(K) = \{g_1, g_2, \dots, g_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Por Van-Kampen tenemos que

$$\Pi_1(K \# K) = \frac{\Pi_1(K) * \Pi_1(K)}{\{z\}}$$

donde  $z$  es el generador del grupo fundamental de la intersección de los espacios respectivos. La igualdad anterior en términos de generadores y relaciones se traduce en

$$\begin{aligned} \Pi_1(K \# K) &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_1^2, g_2^2, \dots, g_n^2 \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, g_1^1 = g_1^2\} \\ &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2 \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2\} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\cong \Pi_1(K) *_{\{g_1\}} \Pi_1(K)$$

Si  $L = K \# K \# \dots \# K$ ,  $l$ -veces. Utilizando de nuevo Van-Kampen tenemos que

$$\begin{aligned} \Pi_1(L) &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots, g_2^l, \dots, g_n^l \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, \dots, r_1^l, r_2^l, \dots, r_m^l\} \end{aligned}$$

Ahora apliquemos lo anterior a nuestra construcción. En la  $k$ -ésima etapa,  $K_k$  es un retracto fuerte por deformación de  $|T_k|$ , de aquí que

$$\begin{aligned} \Pi_1(|T_k|) &\cong \Pi_1(K_k) = \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots, g_2^{l(k)}, \dots, g_n^{l(k)} \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, \dots, r_1^{l(k)}, r_2^{l(k)}, \dots, r_m^{l(k)}\} \\ &\cong (\dots (\Pi_1(K) *_{\{g_1\}} \Pi_1(K)) *_{\{g_1\}} \dots *_{\{g_1\}} \Pi_1(K)) \end{aligned}$$

$l(k)$ -veces, donde

$$l(k) = 1 + n \left[ \frac{(n-1)^{k+1} - 1}{n-2} \right]$$

Por otra parte,  $\mathbb{S}^3 - |T_k| \subset \mathbb{S}^3 - |T_{k+1}|$  para toda  $k$ , así

$$\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) = \varinjlim (\mathbb{S}^3 - |T_k|) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{S}^3 - |T_k|)$$

entonces,

$$\Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))$$

es el límite directo del sistema

$$\{\Pi_1(\mathbb{S}^3 - |T_k|), k = 1, 2, \dots; f_k, k = 1, 2, \dots\}$$

donde

$$f_k : \Pi_1(\mathbb{S}^3 - |T_k|) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^3 - |T_{k+1}|)$$

es la inclusión (ver lema 2.4.1 en [24]); por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)) &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots, g_2^k, \dots, g_n^k, \dots \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, \dots, r_1^k, r_2^k, \dots, r_m^k, \dots\} \\ &\cong (\dots ((\Pi_1(K) *_{\{g_1\}} \Pi_1(K)) *_{\{g_1\}} \dots *_{\{g_1\}} \Pi_1(K)) *_{\{g_1\}} \dots \end{aligned}$$

que es un producto infinito amalgamado del grupo fundamental del nudo por lo que no es equivalente a un grupo finitamente generado. De aquí que,  $\Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))$  está infinitamente generado. ■

**Ejemplos 2.2.3** 1. Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas subordinado al nudo trébol  $(T_{2,3})$ . Entonces

$$\Pi_1(T_{2,3}) = \{x, y \mid xyx = yxy\}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)) &= \{x_1, y_1, \dots, y_n, \dots \mid \\ & x_1 y_1 x_1 = y_1 x_1 y_1, x_1 y_2 x_1 = y_2 x_1 y_2, \dots, x_1 y_n x_1 = y_n x_1 y_n, \dots\} \\ &\cong (\dots ((\Pi_1(T_{2,3}) *_{\{g_1\}} \Pi_1(T_{2,3})) *_{\{g_1\}} \dots *_{\{g_1\}} \Pi_1(T_{2,3})) *_{\{g_1\}} \dots \end{aligned}$$

está infinitamente generado y tiene un número infinito de relaciones.

2. Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas subordinado al nudo  $K_8 =$  Figura ocho; entonces

$$\Pi_1(K_8) = \{x, y \mid x^{-1} y x y^{-1} x y = y x^{-1} y x\}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)) &= \{x_1, y_1, \dots, y_n, \dots \mid \\ & x_1^{-1} y_1 x_1 y_1^{-1} x_1 y_1 = y_1 x_1^{-1} y_1 x_1, \\ & x_1^{-1} y_2 x_1 y_2^{-1} x_1 y_2 = y_2 x_1^{-1} y_2 x_1, \\ & \vdots \\ & x_1^{-1} y_n x_1 y_n^{-1} x_1 y_n = y_n x_1^{-1} y_n x_1, \dots\} \end{aligned}$$

$$\cong (\dots ((\Pi_1(K_8) *_{\{g_1\}} \Pi_1(K_8)) *_{\{g_1\}} \dots *_{\{g_1\}} \Pi_1(K_8)) *_{\{g_1\}} \dots$$

está infinitamente generado y tiene un número infinito de relaciones.

### 2.3. Variedades Hiperbólicas Asociadas

Consideremos la acción de  $\Gamma$  en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^d$ . Entonces  $\Gamma$  es un subgrupo de  $\text{Isom } \mathbb{H}^d$  que actúa propia y discontinuamente en  $\mathbb{H}^d$ . El poliedro fundamental  $\mathcal{P}$  del grupo es  $\mathbb{H}^d - |\tilde{T}|$ , donde  $\tilde{T}$  es la extensión natural del collar de perlas en  $\mathbb{H}^d$ . De aquí que  $\mathcal{P}$  es convexo y tiene un número finito de lados por lo que  $\Gamma$  es geoméricamente finito (ver [4]).

El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\overline{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathcal{M}_\Gamma^d = \mathbb{H}^d / \Gamma \cong \overline{\mathcal{P}}$  es un orbifold hiperbólico de volumen infinito, orientable, no compacto, tal que como subconjunto de  $\mathbb{D}^d - \Lambda(\Gamma)$  tiene una frontera que posee una estructura conforme dada por la acción. En efecto:

Para el grupo Kleiniano  $\Gamma$  que actúa en el collar de perlas  $T$ , su dominio fundamental es  $D = \mathbb{S}^3 - |T|$ . El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\mathbb{S}^3 - |T|$ , así  $\partial\mathcal{M}_\Gamma^4 = \overline{D} \cap \Omega \cong \Omega(\Gamma)/\Gamma = (\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  es un 3-orbifold conformemente plano (ver [9]), orientable, no compacto y con frontera. Su grupo fundamental es precisamente el grupo del molde de  $T$ .

**LEMA 2.3.1** *Sea  $T$  un collar formado por  $n$  perlas subordinado al nudo manso, fibrado  $K$ , con fibra  $S$ . Entonces  $(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  fibra sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra  $S^*$ , la cual es la cerradura de  $S$  en  $\mathbb{S}^3$  sin los  $n$  puntos de tangencia de las perlas en su frontera.*

*Demostración.*

Sea  $\tilde{P} : \mathbb{S}^3 - K \rightarrow \mathbb{S}^1$  la fibración localmente trivial dada, con fibra la superficie  $S$ . Observemos que  $\tilde{P}|_{\mathbb{S}^3 - T} \equiv P$  es también una fibración y, después de modificar  $\tilde{P}$  por una isotopía si es necesario, podemos asumir que la fibra  $S$  corta a cada perla  $\Sigma_i \in T$  en arcos  $a_i$ , cuyos extremos son los puntos de tangencia de la perla. Estos puntos pertenecen al conjunto límite (ver figura 2.6).

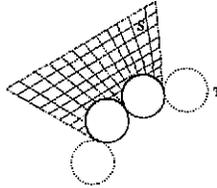


Figura 2.6: La fibra interseca a cada perla en arcos.

De aquí que el espacio  $\overline{D} \cap \Omega(\Gamma)$  fibra sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra la 2-variedad  $S^*$ , la cual es la cerradura de la superficie  $S$  en  $\mathbb{S}^3$  sin los  $n$  puntos de tangencia de las perlas en su frontera. Puesto que  $\Omega(\Gamma)/\Gamma \cong D^*$  y en nuestro caso  $D^* = \overline{D} \cap \Omega(\Gamma)$ , el resultado se sigue. ■

Por lo que si el nudo es fibrado, para describir a  $(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  completamente sólo falta determinar su monodromía, la cual coincide con la monodromía del nudo.

Consideremos ahora el subgrupo  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  de índice dos que preserva orientación. En este caso, el poliedro fundamental  $\tilde{\mathcal{P}}$  es  $(\mathbb{H}^4 - |T|) \cup (\tilde{B}_j - I_j(|T - \Sigma_j|))$ , donde tilde significa la extensión natural al espacio hiperbólico tanto de la perla como de la inversión correspondiente. Puesto que  $\tilde{\mathcal{P}}$  es convexo y tiene un número finito de lados, tenemos que  $\tilde{\Gamma}$  es geoméricamente finito.

El grupo  $\tilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en el poliedro fundamental  $\tilde{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathcal{M}_{\tilde{\Gamma}}^4 = \mathbb{H}^4 / \tilde{\Gamma} \cong \tilde{\mathcal{P}} / \sim_{\tilde{\Gamma}}$  es una variedad hiperbólica, no compacta y de volumen infinito, la cual como subconjunto de  $\mathbb{D}^4 - \Lambda(\Gamma)$  posee una frontera provista de una estructura conforme natural dada por la acción.

El dominio fundamental  $\tilde{D}$  para el grupo  $\tilde{\Gamma}$  en  $\mathbb{S}^3$  es  $\tilde{D} = (\mathbb{S}^3 - |T|) \cup (B_j - I_j(|T - \Sigma_j|))$ . Luego,  $D^* \cong \Omega / \tilde{\Gamma}$  donde  $\partial \mathcal{M}_{\tilde{\Gamma}}^4 = D^* = \tilde{D} \cap \Omega / \sim_{\tilde{\Gamma}}$  (ver capítulo 1, [16]). Por otra parte,  $\tilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en  $\Omega(\tilde{\Gamma})$ . Así  $\Omega / \tilde{\Gamma}$  es una 3-variedad conformemente plana, orientable, no compacta y sin frontera. Su grupo fundamental es el grupo fundamental del molde de  $T \# T$  (ver la siguiente definición), es decir, es el grupo fundamental de  $K \# K$ .

**Definición 2.3.2** *Se define la suma conexa del collar de perlas  $T$  consigo mismo, como el collar  $T - \Sigma_j$  pegado a  $I_j(T - \Sigma_j)$  por las intersecciones de  $\Sigma_j$  con las perlas adyacentes. Se denotará por  $T \# T$ .*

**LEMA 2.3.3** *Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas subordinado al nudo manso, fibrado  $K$ , con fibra  $S$ . Entonces  $\Omega / \tilde{\Gamma}$  fibra sobre  $\mathbb{S}^1$ , con fibra  $S^*$  homeomorfa a la 2-variedad  $S \# S$  sin  $n$  puntos (los  $n$  puntos de tangencia de las perlas).*

*Demostración.*

El espacio  $\tilde{D} \cap \Omega$  fibra sobre la circunferencia con fibra la 2-variedad  $\tilde{S}$  que es la suma de  $S$  con  $S$  a lo largo de un arco, y cuya frontera es una circunferencia menos  $n(n - 2)$  puntos, correspondientes a los puntos de tangencia de las esferas las cuales se encuentran en el conjunto límite. En efecto:

Podemos asumir, módulo isotopía, que la fibra  $S$  corta cada perla  $\Sigma_i \in T$  en arcos  $a_i$  cuyos extremos son los puntos de tangencia de la esfera. Por lo

que al invertir obtenemos una copia de  $S$  que está unida a  $S$  por el arco  $a_i$ , y corta la copia de  $\Sigma_i$  en  $\Sigma_j$  en arcos  $a_i^j$ , cuyos extremos son los puntos de tangencia correspondientes. Para más detalle ver la demostración del teorema 2.4.1 y figura 2.7.

Observemos que la acción de  $\tilde{\Gamma}$  identifica cada perla de  $T$ , con la correspondiente imagen en el interior de  $B_j$ . Esta identificación es equivalente a identificar los arcos  $a_i(\theta)$  con  $a_i^j(\theta)$  para  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

Por lo tanto,  $D^* \cong \Omega/\tilde{\Gamma}$  fibra sobre  $\mathbb{S}^1$ . La fibra es la superficie  $S^* = \tilde{S}/\sim_{\tilde{\Gamma}}$ , que es homeomorfa a  $S\#S$  sin los  $n$  puntos correspondientes a los puntos de tangencia de las perlas. ■

De nuevo, si el nudo es fibrado tenemos que para describir completamente a  $\Omega/\tilde{\Gamma}$ , nos falta determinar su monodromía. Esta será estudiada en la sección 2.5.

## 2.4. Fibración del complemento de $\Lambda(\Gamma)$ sobre $\mathbb{S}^1$

En la sección anterior probamos que para los grupos  $\Gamma$  y  $\tilde{\Gamma}$ , los dominios fundamentales correspondientes fibran sobre la circunferencia, si el nudo fibra. En esta sección con el apoyo de estos resultados, estudiaremos el complemento del conjunto límite para el caso en que el nudo original sea fibrado. Recordemos que un nudo manso es fibrado si y sólo si su subgrupo conmutador es finitamente generado (ver [23] pag. 324, [28], [35]).

Primeramente, observemos que debido a que  $\tilde{\Gamma}$  es un subgrupo normal de  $\Gamma$ , se sigue por el lema 8.1.3. en [31] que  $\tilde{\Gamma}$  tiene el mismo conjunto límite que  $\Gamma$ . Por lo tanto,  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) = \mathbb{S}^3 - \Lambda(\tilde{\Gamma})$ .

**TEOREMA 2.4.1** *Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ , subordinado al nudo poligonal y no trivial  $K$ , cuyo complemento fibra sobre  $\mathbb{S}^1$ . Sea  $\Gamma$  el grupo generado por las inversiones  $I_j$  en  $\Sigma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), y sea  $\tilde{\Gamma}$  subgrupo de índice dos de  $\Gamma$  formado por las palabras pares. Sea  $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\tilde{\Gamma})$  el conjunto límite. Entonces*

1. Existe  $\psi : \mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) \rightarrow \mathbb{S}^1$  una fibración localmente trivial, cuya fibra  $\Sigma_\theta = \psi^{-1}(\theta)$  es una superficie de género infinito con una sola punta (en inglés end).
2.  $\overline{\Sigma_\theta} - \Sigma_\theta = \Lambda(\Gamma)$  donde  $\overline{\Sigma_\theta}$  es la cerradura de  $\Sigma_\theta$  en  $\mathbb{S}^3$ .

*Demostración.*

Puesto que  $\tilde{\Gamma}$  actúa libremente en  $\Omega(\tilde{\Gamma})$ , tenemos que  $\zeta : \Omega(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \Omega(\tilde{\Gamma})/\tilde{\Gamma}$  es un cubriente de orden infinito. Por el lema anterior, existe una fibración localmente trivial  $\phi : \Omega(\tilde{\Gamma})/\tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{S}^1$  con fibra  $S^*$ .

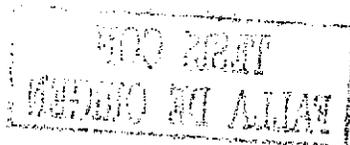
Entonces  $\psi = \phi \circ \zeta : \Omega(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una fibración localmente trivial. La fibra es  $\tilde{\Gamma}(S^*)$ , es decir, la órbita de la fibra. A continuación describiremos  $\Sigma = \tilde{\Gamma}(S^*)$  en detalle.

Sea  $\tilde{P} : \mathbb{S}^3 - K \rightarrow \mathbb{S}^1$  la fibración dada. Por el mismo argumento que en el lema anterior, podemos suponer que  $\tilde{P}|_{\mathbb{S}^3 - T} \equiv P$  es una fibración tal que  $P^{-1}(\theta) \cong \tilde{P}^{-1}(\theta)$  es una superficie de Seifert  $S^*$ , de  $K$  para cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Recuérdese que la frontera de  $S^*$  corta a cada perla  $\Sigma_i$  en un arco  $a_i$  que va de un punto de tangencia al otro.

Si invertimos con respecto a la perla  $\Sigma_j$  tenemos que una copia de  $T - \Sigma_j$  llamada  $T^j$ , y una copia de la superficie de Seifert  $S^*$  que denotaremos por  $S^{*j}$ , son enviadas dentro de la bola  $B_j$ . Notemos que  $S^*$  y  $S^{*j}$  están unidas por el arco  $a_j$ , el cual tiene la misma orientación en ambas superficies (estamos asumiendo que  $\mathbb{S}^3$  está orientada). Ver figura 2.7.

En otras palabras, hemos obtenido un nuevo collar de perlas isotópico a la suma conexa  $T \# T^j$ , cuyo complemento también fibra sobre la circunferencia con fibra la suma de  $S^*$  con  $S^{*j}$  a lo largo del arco  $a_j$ , que denotaremos por  $S^* \#_{a_j} S^{*j}$ .

Ahora hacemos esto para cada  $j = 1, \dots, n$ . Al final de la primera etapa, tenemos un nuevo collar de perlas  $T_1$  cuyo molde es el nudo  $K_1$  que como ya vimos es isotópico a la suma conexa de  $n + 1$  copias de  $K$ . Su complemento fibra sobre la circunferencia con fibra la superficie de Seifert  $S_1^*$ , la cual es homeomorfa a la suma a lo largo de los arcos respectivos de  $n + 1$  copias de



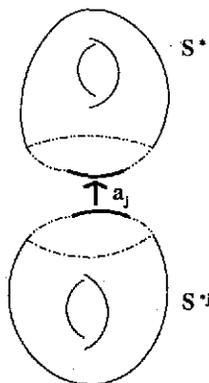


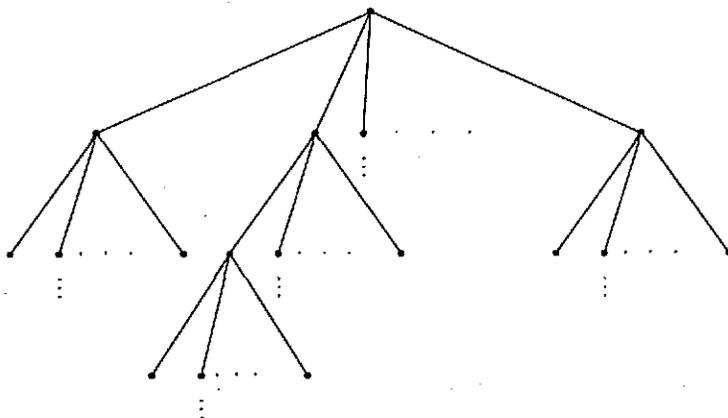
Figura 2.7: Suma de las superficies  $S^*$  y  $S^{*j}$  a lo largo del arco  $a_j$ .

$S^*$ . Una manera de visualizar lo anterior es construir un árbol, en donde cada punto representa una copia de  $S^*$  y un segmento significa suma a lo largo de un arco.



Continuando con este proceso, se sigue que de la segunda etapa en adelante, a cada superficie  $S_k^{*i}$  (la  $i^{\text{ma}}$  copia de  $S^*$  en la  $k^{\text{ma}}$  etapa), le son adheridas  $n - 1$  copias de  $S^*$  a lo largo de arcos. Notemos que en cada paso los puntos de tangencia son removidos ya que éstos pertenecen al conjunto límite, y la longitud de los arcos  $a_j$  tiende a cero.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



De lo anterior, se sigue que  $\Sigma_\theta$  es una superficie orientable de género infinito; puesto que es la suma a lo largo de arcos de un número infinito de copias de  $S^*$ . Para determinar qué tipo de superficie es, acorde al teorema de clasificación de superficies no compactas (ver [22]), necesitamos describir su conjunto de puntas.

Recuérdese (ver [27]) que una *punta* (ó *final* y en inglés *end*) de un espacio de Hausdorff  $X$  es una función  $\epsilon$  que asigna a cada subconjunto compacto  $K \subset X$ , una componente conexa  $\epsilon(K)$  de  $X - K$  tal que la siguiente condición se verifica: Si  $K$  y  $L$  son dos subconjuntos compactos de  $X$  tal que  $K \subset L$  entonces  $\epsilon(L) \subset \epsilon(K)$ .

Consideremos el modelo fuchsiano (ver [16]). En este caso, el collar está formado por perlas del mismo radio, donde cada una de éstas es ortogonal a la circunferencia unitaria. Entonces su conjunto límite es la circunferencia y su complemento fibra sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra el disco.

En cada etapa, al disco le hemos adherido asas de tal forma que ellas se acumulan a la frontera. Si intersecamos este disco con cualquier conjunto compacto, tenemos una sola componente conexa en el complemento. De aquí que tiene sólo una punta. Por lo tanto, nuestra superficie tiene una punta.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La primera parte del teorema ha sido probada. Para la segunda parte, observemos que la cerradura de la fibra en  $\mathbb{S}^3$  es la fibra unión su frontera,  $\Lambda(\Gamma)$ . Por lo tanto,  $\overline{\Sigma_\theta} - \Sigma_\theta = \Lambda(\Gamma)$ . ■

**Observación 2.4.2** 1.  $\psi$  puede ser construida tal que sea de clase  $C^\infty$ .

*En efecto: Por un teorema de Nielsen, sabemos que cada haz de superficies sobre  $\mathbb{S}^1$  depende únicamente de la clase de isotopía de la monodromía, y de nuevo por un teorema de Nielsen tenemos que cada homeomorfismo de una superficie es isotópico a un difeomorfismo.*

2. Esta construcción puede ser hecha para enlaces que fibren sobre  $\mathbb{S}^1$ .
3. Este teorema nos da una descomposición de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  como libro abierto, donde el "lomo" es el nudo salvaje  $\Lambda(\Gamma)$ , y cada página es la fibra, es decir, una superficie de género infinito con una punta.

*En efecto, esta descomposición puede ser pensada de la siguiente forma: Por el teorema anterior  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  es  $\Sigma \times [0, 1]$  módulo la identificación de la tapa de arriba con la de abajo a través de un homeomorfismo de identificación. Esto es equivalente a mantener  $\partial \overline{\Sigma}$  fija y girar  $\Sigma \times \{0\}$  con respecto a  $\partial \overline{\Sigma}$  hasta que lo peguemos con  $\Sigma \times \{1\}$ . Removiendo  $\partial \overline{\Sigma}$ , obtenemos la descomposición de libro abierto.*

**COROLARIO 2.4.3** El recubrimiento universal de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  es  $\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.*

Sea  $P : \mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) \rightarrow \mathbb{S}^1$  una fibración localmente trivial dada por el teorema anterior. Si  $e : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  denota la aplicación cubriente  $r \mapsto e^{ir}$  tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{P}} & \mathbb{R}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow e \\ \mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) & \xrightarrow{P} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde  $\tilde{P} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^1$  es el pull back de la fibración  $P : \mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma) \rightarrow \mathbb{S}^1$ .



Cualquier fibración con base contraíble es trivial, es decir, el espacio total es homeomorfo al producto de la fibra con el espacio base,  $\tilde{X} \cong \mathbb{R}^1 \times \Sigma_\theta$ , donde  $\Sigma_\theta =$  fibra.

Luego, el cubriente universal la circunferencia es  $\mathbb{R}$  y el cubriente universal de  $\Sigma_\theta$  es  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, el cubriente universal de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  es  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Observación 2.4.4** *Por el teorema de la esfera (ver [23] pag. 102) sabemos que el cubriente universal de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  debe ser contraíble. Sin embargo, nos gustaría puntualizar que existe una cantidad no numerable de abiertos de  $\mathbb{R}^3$  tales que no son homeomorfos dos a dos (ver [17]).*

**Observación 2.4.5** 1. *A través del proceso de inversión, hemos construido una "Superficie de Seifert" para el nudo salvaje  $\Lambda(\Gamma)$ , con la propiedad de que su interior es una 2-variedad y su cerradura es una superficie arrugada (crumpled surface). Esto continúa siendo válido aun cuando el molde no sea fibrado.*

2. *Sea  $E = \overline{\Sigma_\theta} \cup \overline{\Sigma_{\theta+\pi}}$ . Entonces  $E$  es un ecuador salvaje de  $\mathbb{S}^3$ . Es decir, existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ , tal que  $h(E) = E$  y  $h(\mathcal{H}^+) = \mathcal{H}^-$ , donde  $\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathbb{S}^3 - E : x \in \Sigma_\psi, \theta < \psi < \theta + \pi\}$  y  $\mathcal{H}^- = (\mathbb{S}^3 - E - \mathcal{H}^+)$ .*

## 2.5. Monodromía

En la sección anterior probamos que si un nudo  $K$  no trivial y manso fibra con fibra  $S$ , entonces el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  también es fibrado con fibra la superficie  $\Sigma_\theta$ . En esta sección describiremos la monodromía del nudo salvaje.

Recordemos que una forma de entender la monodromía es a través de la aplicación de primer retorno de Poincaré. En nuestro caso, para la variedad  $\mathbb{S}^3 - [T]$ , el flujo que define la aplicación de primer retorno de Poincaré  $\Psi$ , es el flujo que corta transversalmente cada página de su descomposición en libro abierto.

Consideremos un collar de perlas  $T$  subordinado a  $K$ . Como hemos ya descrito durante el proceso de reflexión  $K$  y  $S$  son copiados en cada inversión;

así como el flujo  $\Psi$ . De aquí que la aplicación de primer retorno de Poincaré se puede extender en cada etapa del proceso de inversión, obteniendo al final un homeomorfismo  $h : \Sigma_\theta \rightarrow \Sigma_\theta$  que identifica  $\Sigma_\theta \times \{0\}$  con  $\Sigma_\theta \times \{1\}$ , el cual induce la monodromía para el nudo salvaje.

Notemos que si conocemos la monodromía de  $K$ , conocemos entonces la monodromía del nudo salvaje.

Como ya vimos en el capítulo anterior en la sección de monodromía, el grupo fundamental de un nudo fibrado, en particular el del nudo salvaje, es el producto semidirecto de  $\mathbb{Z}$  con  $\Pi_1(\Sigma_\theta)$  a través de la monodromía.

**Ejemplo 2.5.1** Sea  $K = T_{2,3}$  el nudo trébol. Entonces la fibra  $S$  es el toro ponchado y su grupo fundamental es el grupo libre en dos generadores,  $a$  y  $b$ . La monodromía  $\psi_\#$  envía  $a \mapsto b^{-1}$  y  $b \mapsto ab$ .

En el límite, la monodromía  $\psi_\# : \Pi_1(\Sigma_\theta) \rightarrow \Pi_1(\Sigma_\theta)$  está dada por  $a_i \mapsto b_i^{-1}$  y  $b_i \mapsto a_i b_i$ , donde  $\Pi_1(\Sigma_\theta) = \{a_i, b_i\}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)) &\cong \Pi_1(\mathbb{S}^1) \rtimes_{\psi_\#} \Pi_1(\Sigma_\theta) \\ &= \{a_i, b_i, c : a_i * c = b_i^{-1}, b_i * c = a_i b_i\} \\ &= \{a_i, c : c^{-1} a_i^{-1} c = a_i c^{-1} a_i^{-1}\} \\ &= \{a_i, c : c = a_i c a_i c^{-1} a_i^{-1}\} \\ &= \{a_i, c : c = c a_i c a_i c^{-1} a_i^{-1} c^{-1}\} \\ &= \{a_i, c : c = c a_i c^{-1} c^2 a_i c^{-1} c^{-1} c a_i^{-1} c^{-1}\} \end{aligned}$$

Sea  $\alpha_i = c a_i c^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \{\alpha_i, c : c = \alpha_i c \alpha_i c^{-1} \alpha_i^{-1}\} \\ &= \{\alpha_i, c : c \alpha_i c = \alpha_i c \alpha_i\} \end{aligned}$$

que es exactamente el grupo que obtuvimos en la sección 2.3, cuando calculamos el grupo fundamental de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  utilizando el Teorema de Van-Kampen.

**COROLARIO 2.5.2** Sea  $T$  un collar de perlas cuyo molde es un nudo manso, fibrado y no trivial. Entonces  $\Pi_1(\Omega(\Gamma)/\Gamma) \cong \Pi_1(\mathbb{S}^1) \rtimes_{\psi_\#} \Pi_1(S^*)$  y para  $n > 1$ , el  $n$ -ésimo grupo de homotopía  $\Pi_n(\Omega(\Gamma)/\Gamma) = 0$ .

## 2.6. Hiperbolicidad

En esta sección, discutiremos la siguiente pregunta formulada por el Profr. Etienne Ghys: Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo poligonal tal que su complemento es una 3-variedad hiperbólica. ¿Es el complemento del nudo salvaje obtenido de  $K$  una 3-variedad hiperbólica?

Desafortunadamente la respuesta es “no”. Para cada nudo  $K_k$  obtenido durante el proceso de inversión (ver sección 2.2), considérese una vecindad tubular cerrada  $V_k$  de éste, tal que  $T_k \subset V_k$  y  $V_k \subset V_{k-1}$ . La frontera de cada  $V_k$  es un toro incompresible (ver [13] sección 1.2) en  $\mathbb{S}^3 - \Lambda$ . Obsérvese que ninguna pareja de estos toros es isotópica ambientalmente y ninguno de ellos es isotópico a una componente de la frontera. Por lo tanto,  $\mathbb{S}^3 - \Lambda$  no puede ser hiperbólico (ver [13] section 4.13).

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.6.1** *Sea  $K$  un nudo manso, fibrado, cuyo complemento es una 3-variedad hiperbólica. Entonces, el complemento del conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  obtenido de  $K$ , admite una descomposición en una unión numerable de subvariedades  $M_j$  con frontera, cuyos interiores son disjuntos e  $\text{Int}(M_j)$  es hiperbólico completo. La frontera de  $M_j$  está compuesta por un número finito de cilindros incompresibles propiamente encajados, tales que son disjuntos.*

*Demostración.*

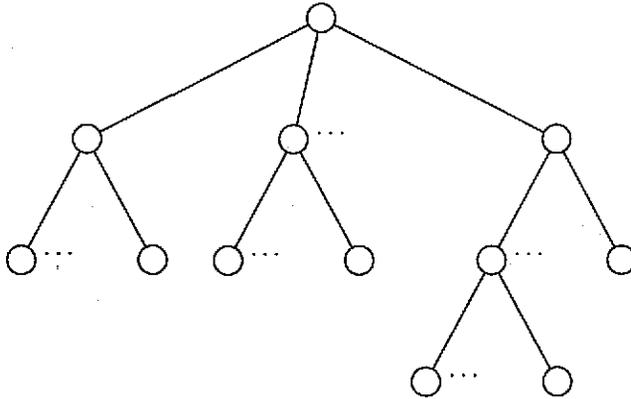
Sea  $T$  un collar de  $n$  perlas subordinado al nudo  $K$ . Puesto que  $\mathbb{S}^3 - |T|$  es el “mapping torus” de un homeomorfismo  $\psi : S \rightarrow S$ , donde  $S$  es la fibra. Entonces por el teorema de hiperbolización de Thurston (ver teorema 3.9 de [18]) se sigue que  $\psi$  es pseudo-Anosov.

Como ya vimos en la sección anterior, cuando invertimos con respecto a un perla  $\Sigma$ , la monodromía  $\psi$  y  $T - \Sigma$  son copiados en  $\text{Int}(B)$  por la inversión  $I$ , donde  $B$  es la bola cuya frontera es  $\Sigma$ . Puesto que  $\text{Int}(B) - I(|T - \Sigma|)$  también fibra sobre la circunferencia, tenemos que es hiperbólico. Notemos que las piezas hiperbólicas están separadas por las correspondientes perlas sin los puntos de tangencia, y claramente éstas son cilindros incompresibles.

De aquí que el resultado se sigue. ■

Notemos que en la primera etapa de la descomposición anterior,  $n$  copias de  $M_1$  son adheridas a ella a lo largo de componentes cilíndricas de la frontera. De la segunda etapa en adelante, a cada  $M_j$  del paso anterior, le son adheridas  $n - 1$  copias de ella a lo largo de componentes cilíndricas.

De esta forma, a la anterior descomposición le podemos asociar una gráfica, donde cada círculo representa una pieza  $M_j$  y cada línea entre dos círculos denota suma a lo largo de una componente cilíndrica de la frontera.



**COROLARIO 2.6.2** *Sea  $K$  un nudo manso, fibrado, cuyo complemento es una 3-variedad hiperbólica. Entonces, el complemento del conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  obtenido de  $K$ , satisface la conjetura de Geometrización de Thurston ([8]) para un número infinito de piezas.*

## 2.7. Otros Collares de Perlas

En la definición 2.1.1 requerimos que las perlas consecutivas fueran tangentes, en cuyo caso la demostración de que el grupo generado por las inversiones en las perlas es Kleiniano resulta inmediata. Esta condición puede ser modificada de tal forma que utilizando el teorema del poliedro de Poincaré (ver capítulo anterior) podamos garantizar que el grupo en cuestión sea Kleiniano.

**Definición 2.7.1** *Un collar traslapado de  $n$  perlas  $T$ , es una colección de  $n$  2-esferas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  en  $\mathbb{S}^3$ , tales que las esferas adyacentes se traslapan con ángulo diédrico un submúltiplo de  $\pi$ . Esto es,*

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |i - j| \neq 1 \\ \text{circunferencia} & \text{si } |i - j| = 1 \text{ ó } n - 1 \end{cases}$$

De nuevo, cada 2-esfera es llamada *perla*. Si los centros de las circunferencias de intersección de perlas consecutivas son unidos por segmentos geodésicos en  $\mathbb{S}^3$ , obtenemos un nudo manso  $K$ , llamado el *molde* (en inglés *template*) de  $T$ . Definimos el relleno de  $T$  de la misma forma que lo hicimos en la sección 2.1.

Recíprocamente, dado un nudo poligonal orientado  $K : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$ , un collar de perlas traslapado  $T$  subordinado al nudo  $K$  es un conjunto de 2-esferas  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  en  $\mathbb{S}^3$ , tales que los segmentos de  $K$  contenidos en sus interiores están desanudados, las esferas adyacentes se traslapan con ángulo diédrico un submúltiplo de  $\pi$  y  $K$  está totalmente cubierto por éstas.

**Ejemplo 2.7.2** *Sea  $K =$  El nudo trivial. En el siguiente collar de perlas traslapado, las perlas adyacentes son ortogonales.*

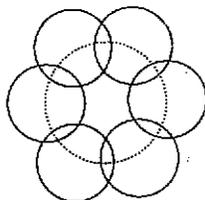


Figura 2.8: Un collar de perlas traslapado y no anudado.

Sea  $T$  un collar traslapado de  $n$  perlas  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ , subordinado al nudo poligonal  $K$ . Consideremos el grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones  $I_j$ , en las perlas  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Al igual que en el caso descrito en la sección 2.1, tenemos que  $\mathbb{S}^3 - |T|$  se encuentra en su dominio de discontinuidad  $\Omega(\Gamma)$ . Luego por el teorema del poliedro de Poincaré se sigue que  $\Gamma$  es discreto y puesto que  $\Omega \neq \emptyset$ , tenemos que es Kleiniano. Este teorema además nos da una presentación para  $\Gamma$ : Supongamos que los ángulos diédricos entre las

perlas  $\Sigma_i, \Sigma_j \in T$  son  $\frac{\pi}{n_{ij}}$  si éstas son adyacentes, donde  $n_{ij} > 1$  son enteros, y en caso contrario  $n_{ij} = 0$ . Entonces

$$\Gamma = \langle I_j, j = 1, \dots, n \mid (I_j)^2 = 1, (I_i I_j)^{n_{ij}} = 1 \rangle$$

Geoméricamente la acción de este grupo es muy similar a la del caso ya descrito, para más detalles puede consultar las secciones 2.2 y 3.3. El conjunto límite vuelve a ser homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  y está salvajemente encajado en  $\mathbb{S}^3$ . Su demostración es en esencia la de los lemas 2.2.1 y 2.2.2 (compare con [16]).

De nuevo, podemos considerar a  $\Gamma$  como subgrupo de  $\text{Isom } \mathbb{H}^4$ . Este actúa propia y discontinuamente en  $\mathbb{H}^4$  y su poliedro fundamental  $\mathcal{P}$  es  $\mathbb{H}^4 - |\widetilde{T}|$ , donde  $\widetilde{T}$  es la extensión natural del collar de perlas en  $\mathbb{H}^4$ . Se sigue que  $\mathcal{P}$  es convexo y tiene un número finito de lados por lo que  $\Gamma$  es geoméricamente finito (ver [4]).

El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\overline{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathcal{N}_\Gamma^4 = \mathbb{H}^4/\Gamma \cong \overline{\mathcal{P}}$  es un orbifold hiperbólico de volumen infinito, orientable y no compacto. Su compactificación como subconjunto de  $\mathbb{D}^4$  tiene frontera que posee una estructura conforme. En efecto:

Si consideramos a  $\Gamma$  actuando en el collar de perlas  $T$ , su dominio fundamental es  $D = \mathbb{S}^3 - |T|$ . El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\overline{\mathbb{S}^3 - |T|}$ , así  $(\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  es un 3-orbifold conformemente plano, orientable, compacto y con frontera. Su grupo fundamental es precisamente el grupo del molde de  $T$ . Por la misma demostración del lema 2.4.3, tenemos que si  $K$  es un nudo fibrado con fibra  $S$ , entonces  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  también fibra, pero en este caso la fibra es la cerradura de  $S$ .

Tomemos ahora el subgrupo de índice dos  $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ . En este caso, el poliedro fundamental  $\widetilde{\mathcal{P}}$  es  $(\mathbb{H}^4 - |\widetilde{T}|) \cup (\widetilde{B}_j - I_j(|\widetilde{T} - \Sigma_j|))$ , donde tilde significa la extensión natural al espacio hiperbólico tanto de la perla como de la inversión correspondiente. Puesto que  $\widetilde{\mathcal{P}}$  es convexo y tiene un número finito de lados, tenemos que  $\widetilde{\Gamma}$  es geoméricamente finito.

El grupo  $\widetilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en el poliedro fundamental  $\widetilde{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathbb{H}^4/\widetilde{\Gamma} \cong \widetilde{\mathcal{P}}/\sim_{\widetilde{\Gamma}}$  es una variedad hiperbólica

completa con frontera, compacta, orientable y de volumen infinito.

El dominio fundamental para  $\tilde{\Gamma}$  en  $\mathbb{S}^3$  es  $D = (\mathbb{S}^3 - T) \cup (B_j - I_j(|T - \Sigma_j|))$ . Por otra parte,  $\tilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en  $\Omega(\tilde{\Gamma})$ . Así  $\Omega/\tilde{\Gamma}$  es una 3-variedad conformemente plana, orientable, compacta y sin frontera. Su grupo fundamental es el grupo del molde de  $T\#T$ , es decir, es el grupo fundamental de  $K\#K$ .

**LEMA 2.7.3** *Sea  $T$  un collar traslapado de  $n$  perlas subordinado al nudo fibrado  $K$ , con fibra  $S$ . Entonces  $\Omega/\tilde{\Gamma}$  fibra sobre la circunferencia con fibra  $S^*$ , la cual es homeomorfa a la 2-variedad  $S\#S$ .*

*Demostración.*

El espacio  $\bar{D} = \bar{D} \cap \Omega$  fibra sobre la circunferencia con fibra la 2-variedad  $\tilde{S}$  que es la suma de  $S$  con  $S$  a lo largo de un arco y cuya frontera es un círculo.

Podemos asumir, módulo isotopía, que la fibra  $\tilde{S}$  corta cada perla  $\Sigma_i \in T$  en arcos  $\alpha_i$  cuyos extremos van de un punto de  $\Sigma_{i-1} \cap \Sigma_i$  a un punto de  $\Sigma_i \cap \Sigma_{i+1}$  (ver figura 2.9).

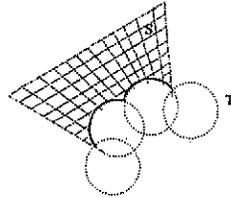


Figura 2.9: La intersección de la fibra con el collar traslapado  $T$ .

Por lo que al invertir, la fibra corta a la copia de  $\Sigma_i$  en  $\Sigma_j$  en arcos  $\alpha_i^j$ , cuyos extremos están en las imágenes de las intersecciones correspondientes.

Observemos que la acción de  $\tilde{\Gamma}$  identifica cada perla de  $T$ , con la correspondiente imagen en el interior de  $\Sigma_j$ . Esta identificación es equivalente a identificar los arcos  $\alpha_i(\theta)$  con  $\alpha_i^j(\theta)$  para  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

Por lo tanto,  $D^* \cong \Omega/\tilde{\Gamma}$  fibra sobre el círculo. La fibra es la superficie  $S^* = \tilde{S}/\sim_{\tilde{\Gamma}}$ , que es homeomorfa a  $S\#S$ . ■

Como consecuencia, volvemos a tener para el caso en que el nudo original es no trivial, poligonal y fibrado, el teorema que establece que el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\tilde{\Gamma})$  fibra sobre el círculo con fibra  $\Sigma$ , una superficie de género infinito con una punta y  $\tilde{\Sigma} - \Sigma = \Lambda(\Gamma)$  (ver teorema 2.4.4); y el corolario, el recubrimiento universal de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  es  $\mathbb{R}^3$ .

Por lo anterior tenemos, para el caso de que el nudo original libre y sea no trivial, una descomposición en libro abierto de  $\mathbb{S}^3 - \Lambda(\Gamma)$  con "lomo" el nudo salvaje y página la fibra. La monodromía queda determinada de la misma manera que está descrita en la sección 2.5.

Sobre la pregunta formulada por el Profr. Etienne Ghys discutida en la sección anterior, tenemos de nuevo que si el complemento del nudo molde  $K \subset \mathbb{S}^3$  es una 3-variedad hiperbólica, el complemento del nudo salvaje obtenido de  $K$  "no" es una 3-variedad hiperbólica. En efecto, para cada nudo  $K_k$  obtenido durante el proceso de inversión, podemos encontrar una vecindad tubular cerrada  $V_k$  de éste, tal que  $V_k \subset V_{k-1}$ . La frontera de cada  $V_k$  es un toro incompresible (ver [13] sección 1.2) en  $\mathbb{S}^3 - \Lambda$ , además ninguna pareja de estos toros es isotópica ambientalmente y ninguno de ellos es isotópico a una componente de la frontera. Por lo tanto,  $\mathbb{S}^3 - \Lambda$  no puede ser hiperbólico (ver [13] section 4.13). Sin embargo, tenemos un resultado muy similar al teorema 2.6.1, cuya demostración es en esencia la misma.

**TEOREMA 2.7.4** *Sea  $K$  un nudo manso y fibrado, cuyo complemento es una 3-variedad hiperbólica. Consideremos un collar de perlas traslapado y subordinado a  $K$ . Entonces  $\Lambda(\Gamma)$  obtenido de  $K$  es fibrado con fibra una superficie de género infinito con una punta. Su monodromía es descomponible y deja circunferencias ajenas invariantes que separan a la superficie en piezas también invariantes tal que la restricción de la monodromía en cada una de éstas es pseudo-Anosov.*

**COROLARIO 2.7.5** *Sea  $K$  un nudo manso, fibrado y cuyo complemento es una 3-variedad hiperbólica. Consideremos un collar de perlas traslapado y subordinado a  $K$ . Entonces, el complemento del conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  obtenido de  $K$ , satisface la conjetura de Geometrización de Thurston ([3]) para un número infinito de piezas.*

## Capítulo 3

# Nudos salvajes de dimensión dos

### 3.1. Introducción

Emil Artin ([1]) describió dos métodos para construir 2-esferas anudadas en  $\mathbb{S}^4$  a partir de nudos en  $\mathbb{S}^3$ . El primero de ellos es llamado suspensión. A *grosso modo* este proceso consiste en tomar la suspensión de  $(\mathbb{S}^3, K)$ , donde  $K \subset \mathbb{S}^3$  es un nudo; se obtiene un 2-nudo  $\Sigma K$  en  $\mathbb{S}^4$ . Debido a la construcción el grupo fundamental de  $\Sigma K$  es fácil de calcular.

El segundo método, llamado "spinning", utiliza un proceso de rotación. La fórmula  $Spin(\mathbb{D}^1) = \mathbb{S}^2$  significa, enviar homeomórficamente el arco  $\mathbb{D}^1$  a un meridiano de  $\mathbb{S}^2$  y manteniendo  $\partial\mathbb{D}^1$  fija en los polos, multiplicar el interior de  $\mathbb{D}^1$  por  $\mathbb{S}^1$ ; en otras palabras, consiste en girar el meridiano con respecto a los polos para formar  $\mathbb{S}^2$ . Similarmente,  $Spin(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n+1}$  significa mantener  $\partial\mathbb{D}^n$  fija y multiplicar el interior de  $\mathbb{D}^n$  por  $\mathbb{S}^1$ . En particular  $Spin(\mathbb{D}^3) = \mathbb{S}^4$ .

Este segundo método es el que utilizaremos para construir una 2-esfera salvajemente encajada en  $\mathbb{S}^4$ , por lo que daremos una descripción más rigurosa.

En  $\mathbb{R}^4$ , considere el subconjunto

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_3 \geq 0\}$$

cuya frontera es

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$$

Podemos girar cada punto  $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$  de  $\mathbb{R}_+^3$  con respecto a  $\mathbb{R}^2$  acorde a la fórmula

$$x_\theta = (x_1, x_2, x_3 \cos \theta, x_3 \sin \theta)$$

en decir, tenemos una función  $R_\theta : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida como  $R_\theta(x) = x_\theta$ .

Esta es una estructura de libro abierto de  $\mathbb{R}^4$  con "lomo"  $\mathbb{R}^2$  y página  $\mathbb{R}_+^3$  (ver [23]).

Definimos  $Spin(X)$  de un conjunto  $X \subset \mathbb{R}_+^3$  como

$$Spin(X) = \{x_\theta : x \in X, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Para obtener un nudo en  $\mathbb{R}^4$ , escogemos un arco  $A$  en  $\mathbb{R}_+^3$  con sus extremos en  $\mathbb{R}^2$  y su interior contenido en  $\mathbb{R}_+^3 \setminus \mathbb{R}^2$ . Entonces  $Spin(A)$  es una 2-esfera en  $\mathbb{R}^4$ , llamada *nudo girado* (en inglés spun knot).

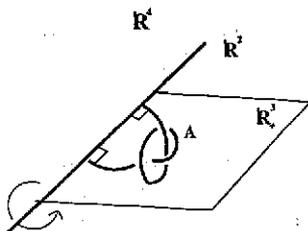


Figura 3.1: Nudo girado.

Recordemos que podemos pensar al arco  $A$  como la imagen de una función  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  que por abuso de notación la seguimos denotando por la misma letra. Bajo este contexto, diremos que un arco es *girable* si  $A \subset \mathbb{R}_+^3$  es suave en todo punto, y con contacto de orden infinito con respecto a las normales de  $\mathbb{R}^2$  en ambos extremos del arco.

Se puede demostrar que el grupo de  $Spin(A)$  es isomorfo a  $\Pi_1(\mathbb{R}_+^3 - A)$ , el cual a su vez es isomorfo al grupo del nudo  $A \cup L$  en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $L \subset \mathbb{R}^3$  es

el segmento que une los extremos de  $A$ . (Ver [23], [35]).

En este capítulo, nuestro objetivo es obtener una 2-esfera salvajemente encajada en  $\mathbb{S}^4$  como el conjunto límite de un grupo Kleiniano conforme. Como ya lo mencionamos en el capítulo 1, estamos considerando a  $\mathbb{S}^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$  con la métrica esférica.

### 3.2. Construcción

La principal idea de esta construcción es utilizar la simetría del proceso spin para encontrar una “envoltura” de un encaje de  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^4$ , formada por bolas cerradas redondas de dimensión 4, tal que el grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones en sus fronteras (esferas de dimensión 3) sea Kleiniano y su conjunto límite sea una esfera de dimensión dos salvajemente encajada en  $\mathbb{S}^4$ .

**Definición 3.2.1** Diremos que  $E = \cup_{i=1}^m B_i$  donde  $B_i$  es una bola de dimensión  $n$ , es una envoltura para el espacio  $X$  si éste está contenido en el interior de  $E$ .

Sea  $A$  un arco girable anudado en  $\mathbb{R}_+^3$ . Tomemos un *semi-collar de perlas*  $T$  subordinado a él, es decir, una colección de 3-esferas consecutivas  $\Sigma^k$  ( $k = 1, \dots, l$ ) contenidas en  $\mathbb{R}_+^3$ ; tales que esferas adyacentes son ortogonales y cubren a  $A$  excepto en dos pequeños intervalos desanudados que contienen a sus extremos. Cada esfera es llamada *perla* y el segmento de  $A$  que está contenido en su interior está desanudado.

A continuación definiremos un collar de perlas  $Spin(T)$ , para el nudo  $Spin(A)$ , con las características que requerimos para que el grupo generado por inversiones en las perlas sea Kleiniano. Como veremos más adelante,  $Spin(T)$  es obtenido a partir del semi-collar  $T$ .

**Definición 3.2.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}_+^3$  un arco girable anudado. Un collar de perlas  $Spin(T)$  subordinado y bien adaptado al nudo  $Spin(A) \subset \mathbb{S}^4$  está formado de la siguiente manera:

1. Por perlas  $\Sigma_i^k$ ;  $k = 1, \dots, l$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , tales que  $\Sigma_i^k$  es ortogonal a  $\Sigma_{i+1}^k$ , al igual que  $\Sigma_i^k$  a  $\Sigma_i^{k+1}$ . Los subíndices varían módulo 6.

2. En cada polo del nudo  $Spin(A)$  se coloca una perla  $\Sigma_m$ ,  $m = 1, 2$ , ortogonal a las perlas  $\Sigma_i^1$  y  $\Sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , respectivamente; tales que  $\Sigma_1 \cap (\bigcap_{s=i}^{i+1} \Sigma_s^1) \neq \emptyset$  y  $\Sigma_2 \cap (\bigcap_{s=i}^{i+1} \Sigma_s^2) \neq \emptyset$
3. En la intersección de dos perlas consecutivas  $\Sigma_i^k, \Sigma_{i+1}^{k+1}$  en  $T_i$  y las correspondientes  $\Sigma_{i+1}^k, \Sigma_{i+1}^{k+1}$  en  $T_{i+1}$ , se coloca una perla  $P_i^k$  que la contiene y que sea ortogonal a éstas cuatro perlas. Además requerimos que  $P_i^k \cap \Sigma_s^r = \emptyset$  para  $r \neq k, k+1$ ,  $s \neq i, i+1$  y  $P_i^k \cap \Sigma_m = \emptyset$ , para  $m = 1, 2$ .
4. El disco de  $Spin(A)$  que se encuentra en el interior de cada esfera está desanudado.

Definimos el relleno de  $Spin(T)$  como  $|Spin(T)| = \cup_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i$  es la 4-bola cerrada cuya frontera  $\partial B_i$ , es la perla  $\Sigma_i$  y contiene un disco desanudado de  $Spin(A)$ ,  $n$  denota el número de perlas.

Geoméricamente la definición anterior significa que al rotar  $A$  y  $T$  con respecto a  $\mathbb{R}^2$ , obtenemos una cantidad infinita de perlas que cubren al nudo  $Spin(A)$  de las cuales vamos a extraer una cantidad finita manteniendo una "simetría", esto es, vamos a escoger  $T$  de tal forma que al momento de girar cada perla  $\Sigma^k \in T$  podamos elegir seis de ellas con la propiedad de que sus centros formen un hexágono regular y perlas adyacentes sean ortogonales. En otras palabras, se elegirán seis  $\mathbb{R}_+^3$  (seis páginas de la descomposición en libro abierto de  $\mathbb{R}^4$ ). Como consecuencia, en  $Spin(A)$  se tendrán seis meridianos preferenciales (uno por cada página). Cada meridiano  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), es una copia de  $A$  y tiene subordinado a él un semi-collar de perlas  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), que es copia isométrica de  $T$ . Las perlas que componen a  $T_i$  serán denotadas por  $\Sigma_i^k$ ; donde el supraíndice  $k = 1, \dots, l$ , indica la "latitud" y el subíndice  $i = 1, \dots, 6$ , indica el "meridiano" (ver figura 3.2 y compare [16] pag. 208).

Luego, en cada polo del nudo  $Spin(A)$  colocamos una perla  $\Sigma_m$  ( $m = 1, 2$ ), ortogonal a las otras seis del anterior ó siguiente nivel respectivamente (ver figura 3.3), de tal forma que no queden huecos entre ellas, es decir,  $\Sigma_m \cap \Sigma_i^j \cap \Sigma_{i+1}^j \neq \emptyset$  ( $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ), para las ternas de índices ( $m = 1, j = 1, i$ ) y ( $m = 2, j = l, i$ ). Por argumentos estándares de geometría, esta esfera siempre existe.

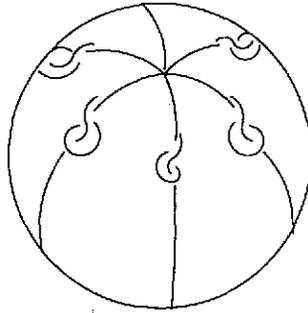


Figura 3.2:  $Spin(A)$  con seis meridianos preferenciales.

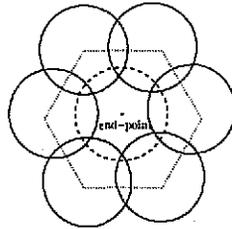


Figura 3.3: Una perla colocada en un polo de  $Spin(A)$ .

Hasta este momento, hemos seleccionado una cantidad finita de perlas. Sin embargo, no hemos demostrado que  $Spin(A)$  está cubierto totalmente por ellas.

**PROPOSICIÓN 3.2.3** Las perlas  $\Sigma_i^k$ ,  $k = 1, \dots, l$ ,  $i = 1, \dots, 6$  y las dos perlas  $\Sigma_m$ , ( $m = 1, 2$ ) en los polos, cubren totalmente a un nudo isotópico a  $Spin(A)$ .

*Demostración.*

Primero verificaremos que la intersección de las perlas  $\Sigma_i^k$ ,  $\Sigma_i^{k+1} \in T_i$  y las correspondientes  $\Sigma_{i+1}^k$ ,  $\Sigma_{i+1}^{k+1} \in T_{i+1}$  no es vacía.

Sea  $r$  el radio de las perlas  $\Sigma_i^k$  y  $\Sigma_{i+1}^k$  con centros  $c_i^k$  y  $c_{i+1}^k$  respectivamente. Sea  $R$  el radio de las perlas  $\Sigma_i^{k+1}$  y  $\Sigma_{i+1}^{k+1}$  con centros  $c_i^{k+1}$  y  $c_{i+1}^{k+1}$

respectivamente (ver figura 3.4). Sabemos que dos esferas son ortogonales si el cuadrado de la distancia de sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios; por lo que

$$\begin{aligned}d^2(c_i^k, c_{i+1}^k) &= 2r^2 \\d^2(c_i^{k+1}, c_{i+1}^{k+1}) &= 2R^2 \\d^2(c_i^k, c_i^{k+1}) &= d^2(c_{i+1}^k, c_{i+1}^{k+1}) = r^2 + R^2\end{aligned}$$

De aquí que

$$d(c_i^k, c_{i+1}^{k+1}) = d(c_{i+1}^k, c_i^{k+1}) = r + R$$

por lo que estas cuatro esferas se intersecan en un punto; obteniendo así la figura 3.4.

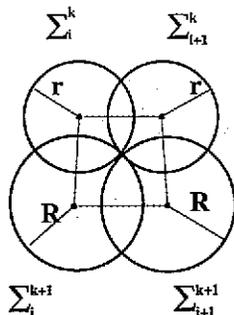


Figura 3.4: Dos perlas consecutivas de  $T_i$  y las correspondientes de  $T_{i+1}$ .

Ahora, consideremos el relleno de cada  $T_i$ , esto es,  $|T_i|$ . Vamos a probar que existe un nudo isotópico a  $Spin(A)$  que está totalmente contenido en  $\mathcal{E} := (\cup_{i=1}^6 |T_i|) \cup_{m=1}^2 B_m$ , donde  $B_m$  es la bola de dimensión cuatro cuya frontera es la perla  $\Sigma_m$ .

Consideremos el arco  $A : I \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  parametrizado por  $t \in [0, 1]$ . Sea  $\Pi_t \subset \mathbb{R}^4$  un plano afín paralelo al plano coordenado  $zw$ . Notemos que  $Spin(A(t)) \subset \Pi_t$  es una circunferencia para  $t \in (0, 1)$  y un punto para  $t = 0, 1$ .

Luego, sea  $t = \epsilon_1 > 0$  el más pequeño  $t$  para el cual  $A(\epsilon_1) \in B_1^4 \cap \Sigma_1$  (recuerde que  $B_i^k$  es la 4-bola tal que  $\partial B_i^k = \Sigma_i^k$ ). Sea  $t = \epsilon_2 > 0$  el menor  $t$  tal

que  $A(\epsilon_2) \in B_1^l \cap \Sigma_2$ . Así, para  $t \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$ , tenemos que  $A(t) \in B_1^k$  para algún índice  $k$ . Entonces, por lo que probamos anteriormente,  $S_t := \Pi_t \cap \bigcap_{i=1}^6 |\Sigma_i^k|$  es una unión de seis discos del mismo radio tal que discos adyacentes se traslapan ó son tangentes. Observemos que  $Spin(A(t))$  no necesariamente está contenido en  $S_t$  (ver figuras 3.5 y 3.6).

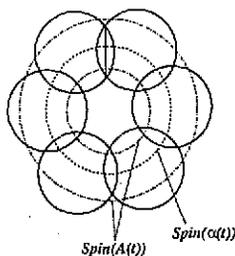


Figura 3.5:  $S_t$  formado por 6 esferas que se traslapan.

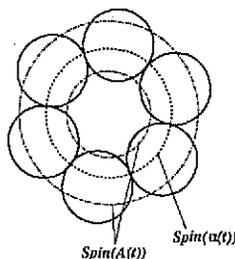


Figura 3.6:  $S_t$  formado por 6 esferas tangentes.

Por medio de una isotopía podemos enviar a  $Spin(A(t))$  a una circunferencia  $Spin(\alpha(t))$ , que pase por el punto medio de cada cuerda que une a los dos puntos de intersección de discos adyacentes; ó en el otro caso, que pase por los puntos de tangencia de los discos adyacentes (ver figuras 3.5 y 3.6). En efecto, esta isotopía  $\phi_t$  puede ser construida radialmente a partir de una función  $\psi_t$  cuya gráfica aparece en la figura 3.7 (los dos posibles casos). Así,  $\phi_t(s, x) = s(\psi_t(x)) + (1 - s)x$  es una isotopía estable, es decir, fuera de un cerrado es la identidad.

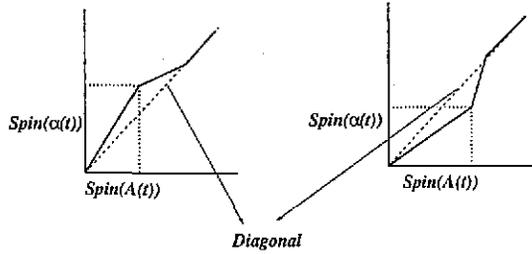


Figura 3.7: Isotopía radial en el nivel  $A(t)$ .

Luego, en las perlas colocadas en los polos, tenemos que  $Spin(A(t)) \subset B_1$  para  $t \in [0, \epsilon_1]$  y  $Spin(A(t)) \subset B_2$  para  $t \in [\epsilon_2, 1]$ . Por lo que a través de una isotopía, se transforma a  $A(t)$  para  $t \in [0, \epsilon_1] \cup [\epsilon_2, 1]$ , por dos arcos contenidos dentro de las bolas respectivas y tal que sus extremos coincidan con  $\alpha(\epsilon_1)$  y  $A(0)$  para uno, y con  $\alpha(\epsilon_2)$  y  $A(1)$  para el otro.

Por lo anterior, podemos definir una función que en cada nivel  $A(t)$  sea la isotopía ya descrita. Esta función depende de dos parámetros: El parámetro de la isotopía en cada nivel  $y$   $t$ . Debido a que es continua con respecto a cada uno de ellos, es continua. Notemos que en cada nivel  $A(t)$  tenemos que la isotopía correspondiente es la identidad fuera de cierto disco. Puesto que  $A(t)$  varía en un compacto se sigue que es la identidad fuera de una bola.

Esta función se extiende a una isotopía de  $S^4$  (ver [21]) que envía a  $Spin(A(t))$  en  $Spin(\alpha(t))$ .

De esta manera, un nudo isotópico a  $Spin(A)$  está totalmente cubierto por las perlas  $\Sigma_i^k$ ,  $k = 1, \dots, l$ ,  $i = 1, \dots, 6$  y las dos perlas en los polos. ■

Al punto de intersección de las perlas  $\Sigma_i^k$ ,  $\Sigma_i^{k+1} \in T_i$  y las correspondientes  $\Sigma_{i+1}^k$ ,  $\Sigma_{i+1}^{k+1} \in T_{i+1}$  lo denotaremos por  $p_i^k$  (ver figura 3.8). A continuación, vamos a colocar una perla  $P_i^k$  que contenga en su interior a  $p_i^k$  y que sea ortogonal a estas cuatro de tal manera que no interseque a ninguna otra (esfera punteada en la figura 3.8). Observemos que ésta siempre existe y su construcción utiliza argumentos estándares de geometría.

En efecto: Trazamos primero los espacios equipotentes entre las parejas de esferas  $(\Sigma_i^k, \Sigma_i^{k+1})$ ,  $(\Sigma_{i+1}^k, \Sigma_{i+1}^{k+1})$ ,  $(\Sigma_i^k, \Sigma_{i+1}^k)$  y  $(\Sigma_i^{k+1}, \Sigma_{i+1}^{k+1})$ . Puesto que éstos son ortogonales a las líneas que unen los centros respectivos, tenemos que los espacios equipotentes de las parejas  $(\Sigma_i^k, \Sigma_{i+1}^k)$  y  $(\Sigma_i^{k+1}, \Sigma_{i+1}^{k+1})$  coinciden, no así los otros dos que en general se intersecan en un plano (ver figura 3.8), excepto cuando las esferas son del mismo tamaño, en cuyo caso la intersección es un  $\mathbb{R}^3$ . Este plano no necesariamente contiene al punto  $p_i^k$ , esto sucede cuando las cuatro esferas son del mismo tamaño.

El centro  $\tilde{c}_i^k$  de  $P_i^k$  está en la intersección de los cuatro espacios equipotentes, que en nuestro caso resulta ser en general, un plano ortogonal al plano que contiene a los cuatro centros de las perlas. Luego trazamos una recta tangente desde este punto a cualquiera de las perlas y la distancia de  $\tilde{c}_i^k$  al punto de tangencia es precisamente el radio de  $P_i^k$ . Por supuesto, hay que elegir  $\tilde{c}_i^k$  de tal manera que el radio sea el más pequeño y  $p_i^k$  esté contenido en el interior de la bola.

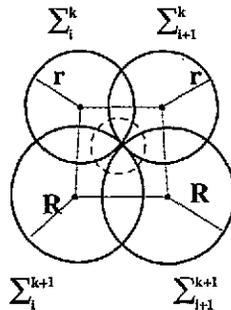


Figura 3.8: La esfera punteada es la perla  $P_i^k$ .

Por lo que  $Spin(T)$  consistirá de las perlas  $\Sigma_i^k$ ,  $k = 1, \dots, l$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , más las dos perlas de los polos  $\Sigma_m$ ,  $m = 1, 2$ , y las perlas  $P_i^k$ . Decimos que  $Spin(A)$  es el molde (en inglés *template*) de  $Spin(T)$ .

Consideremos el grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones en las perlas. Para garantizar que el grupo  $\Gamma$  es Kleiniano, haremos uso del teorema del poliedro de Poincaré (ver capítulo 1), el cual establece condiciones bajo las cuales el

grupo es discreto. En nuestro caso, el poliedro fundamental es  $D = \mathbb{S}^4 - Spin(T)$ , y todas las hipótesis del teorema se verifican ya que  $\Gamma$  es un grupo de reflexiones y por la construcción todos los ángulos diédricos son  $\frac{\pi}{2}$ .

Este teorema nos permite además dar una presentación para el grupo  $\Gamma$ . Supongamos que el collar de perlas  $Spin(T)$  está formado por las perlas  $\Sigma_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) e  $I_j$  es la inversión en la perla  $\Sigma_j$ . Puesto que los ángulos diédricos entre las caras  $F_i, F_j$  de  $D$  son  $\frac{\pi}{n_{ij}}$  donde  $n_{ij}$  es 2 si las caras son adyacentes y 0 en el otro caso. Se sigue que

$$\Gamma = \langle I_j, j = 1, \dots, n \mid (I_j)^2 = 1, (I_i I_j)^{n_{ij}} = 1 \rangle$$

**PROPOSICIÓN 3.2.4** *El grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones en las perlas, es Kleiniano.*

*Demostración.*

Por lo anterior,  $\Gamma$  es discreto y su conjunto de discontinuidad es no vacío (el interior del poliedro). Por lo tanto es Kleiniano. ■

La primera pregunta que surge es si existe un collar de perlas  $Spin(T)$  bien adaptado para algún nudo  $Spin(A)$ . En el siguiente teorema daremos un semi-collar  $T$  subordinado al arco trébol  $A$ , que satisface todas las condiciones para la construcción de un collar de perlas  $Spin(T)$  bien adaptado al nudo  $Spin(A)$ .

**TEOREMA 3.2.5** *Existe un encaje del arco-trébol  $A$  en  $\mathbb{R}_1^3$  que admite un semi-collar de perlas con las condiciones de la definición 3.2.2.*

*Demostración.*

Por la descripción anterior, se tiene que una vez construido el collar de perlas es posible encontrar un nudo isotópico al nudo  $Spin(A)$  totalmente contenido en éste. Por otra parte, el grupo está definido por medio del collar de perlas. Esto nos lleva a pensar, que en este sentido, el molde no resulta fundamental no así la configuración de bolas (en esencia su "nervio"). Por lo anterior, podemos considerar el arco-trébol  $A$  como un arco poligonal (ver figura 3.9) que resulta de unir los centros  $c_k$  de las perlas  $\Sigma_1^k$ , que se enlistan

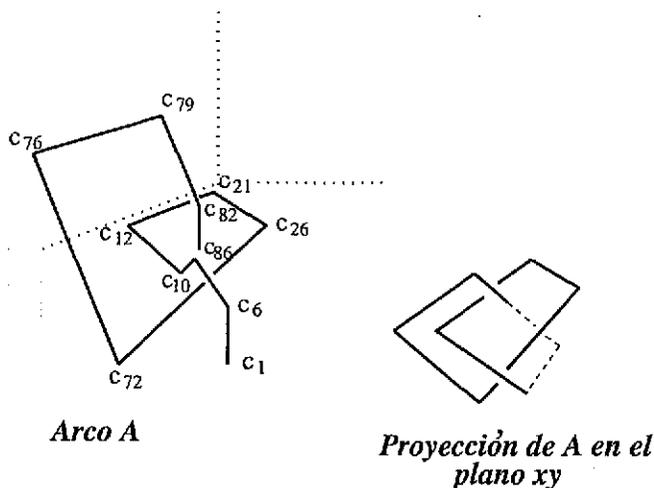


Figura 3.9: El arco-trébol A.

a continuación.

La siguiente tabla contiene los centros de las esferas así como sus radios. Nuevamente, recordemos que dos esferas son ortogonales si el cuadrado de la distancia entre sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

Para facilitar la verificación de las condiciones de ortogonalidad, observemos que la perla  $\Sigma_i^k$  y la correspondiente rotada  $\Sigma_{i+1}^k$  son ortogonales si y sólo si su radio es igual a su coordenada z dividida por  $\sqrt{2}$ .

$\Sigma_1$	$C_1=(2426.06421, 2296.89168, .75966995, 0)$	$R_1=.537167778$
$\Sigma_2$	$C_2=(2426.06421, 2296.89168, 2.835126878, 0)$	$R_2=2.004737441$
$\Sigma_3$	$C_3=(2426.06421, 2296.89168, 10.58083755, 0)$	$R_3=7.481781981$
$\Sigma_4$	$C_4=(2426.06421, 2296.89168, 39.48822332, 0)$	$R_4=27.92239049$
$\Sigma_5$	$C_5=(2426.06421, 2296.89168, 147.3720558, 0)$	$R_5=104.20778$
$\Sigma_6$	$C_6=(2426.06421, 2296.89168, 550, 0)$	$R_6=388.9087297$
$\Sigma_7$	$C_7=(2426.06421, 1746.89168, 550, 0)$	$R_7=388.9087297$
$\Sigma_8$	$C_8=(2426.06421, 1196.89168, 550, 0)$	$R_8=388.9087297$
$\Sigma_9$	$C_9=(2426.06421, 740, 400, 0)$	$R_9=282.8427125$

$\Sigma_{10}$	$C_{10}=(2226.56071, 597.879, 200,0)$	$R_{10}=141.4213562$
$\Sigma_{11}$	$C_{11}=(2126.56071, 397.879, 258.5786444,0)$	$R_{11}=182.8427129$
$\Sigma_{12}$	$C_{12}=(2026.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{12}=141.4213562$
$\Sigma_{13}$	$C_{13}=(1826.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{13}=141.4213562$
$\Sigma_{14}$	$C_{14}=(1626.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{14}=141.4213562$
$\Sigma_{15}$	$C_{15}=(1426.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{15}=141.4213562$
$\Sigma_{16}$	$C_{16}=(1226.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{16}=141.4213562$
$\Sigma_{17}$	$C_{17}=(1026.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{17}=141.4213562$
$\Sigma_{18}$	$C_{18}=(826.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{18}=141.4213562$
$\Sigma_{19}$	$C_{19}=(626.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{19}=141.4213562$
$\Sigma_{20}$	$C_{20}=(426.56071, 197.879, 200,0)$	$R_{20}=141.4213562$
$\Sigma_{21}$	$C_{21}=(426.56071, 390.842826, 186.6225781,0)$	$R_{21}=131.9620905$
$\Sigma_{22}$	$C_{22}=(426.56071, 556.1388641, 150,0)$	$R_{22}=106.0660172$
$\Sigma_{23}$	$C_{23}=(426.56071, 695.063304, 130,0)$	$R_{23}=91.92388155$
$\Sigma_{24}$	$C_{24}=(390, 804.611533, 105,0)$	$R_{24}=74.24621202$
$\Sigma_{25}$	$C_{25}=(420.7470362, 905.0088369, 105,0)$	$R_{25}=74.24621202$
$\Sigma_{26}$	$C_{26}=(518.54878, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{26}=65.0453$
$\Sigma_{27}$	$C_{27}=(610.5368498, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{27}=65.0453$
$\Sigma_{28}$	$C_{28}=(702.5249198, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{28}=65.0453$
$\Sigma_{29}$	$C_{29}=(794.5129898, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{29}=65.0453$
$\Sigma_{30}$	$C_{30}=(886.5010598, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{30}=65.0453$
$\Sigma_{31}$	$C_{31}=(978.4891298, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{31}=65.0453$
$\Sigma_{32}$	$C_{32}=(1070.4772, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{32}=65.0453$
$\Sigma_{33}$	$C_{33}=(1162.46527, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{33}=65.0453$
$\Sigma_{34}$	$C_{34}=(1254.45334, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{34}=65.0453$
$\Sigma_{35}$	$C_{35}=(1346.44141, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{35}=65.0453$
$\Sigma_{36}$	$C_{36}=(1438.42948, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{36}=65.0453$
$\Sigma_{37}$	$C_{37}=(1530.41755, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{37}=65.0453$
$\Sigma_{38}$	$C_{38}=(1622.40562, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{38}=65.0453$
$\Sigma_{39}$	$C_{39}=(1714.39369, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{39}=65.0453$
$\Sigma_{40}$	$C_{40}=(1806.38176, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{40}=65.0453$
$\Sigma_{41}$	$C_{41}=(1898.36983, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{41}=65.0453$
$\Sigma_{42}$	$C_{42}=(1990.3579, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{42}=65.0453$
$\Sigma_{43}$	$C_{43}=(2082.34597, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{43}=65.0453$
$\Sigma_{44}$	$C_{44}=(2174.33404, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{44}=65.0453$
$\Sigma_{45}$	$C_{45}=(2266.32211, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{45}=65.0453$
$\Sigma_{46}$	$C_{46}=(2358.31018, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{46}=65.0453$
$\Sigma_{47}$	$C_{47}=(2450.29825, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{47}=65.0453$

$\Sigma_{48}$	$C_{48}=(2542.28632, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{48}=65.0453$
$\Sigma_{49}$	$C_{49}=(2634.27439, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{49}=65.0453$
$\Sigma_{50}$	$C_{50}=(2726.26246, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{50}=65.0453$
$\Sigma_{51}$	$C_{51}=(2818.25053, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{51}=65.0453$
$\Sigma_{52}$	$C_{52}=(2910.2386, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{52}=65.0453$
$\Sigma_{53}$	$C_{53}=(3002.22667, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{53}=65.0453$
$\Sigma_{54}$	$C_{54}=(3094.21474, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{54}=65.0453$
$\Sigma_{55}$	$C_{55}=(3186.20281, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{55}=65.0453$
$\Sigma_{56}$	$C_{56}=(3278.19088, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{56}=65.0453$
$\Sigma_{57}$	$C_{57}=(3370.17895, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{57}=65.0453$
$\Sigma_{58}$	$C_{58}=(3462.16702, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{58}=65.0453$
$\Sigma_{59}$	$C_{59}=(3554.15509, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{59}=65.0453$
$\Sigma_{60}$	$C_{60}=(3646.14316, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{60}=65.0453$
$\Sigma_{61}$	$C_{61}=(3738.13123, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{61}=65.0453$
$\Sigma_{62}$	$C_{62}=(3830.1193, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{62}=65.0453$
$\Sigma_{63}$	$C_{63}=(3922.10737, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{63}=65.0453$
$\Sigma_{64}$	$C_{64}=(4014.09544, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{64}=65.0453$
$\Sigma_{65}$	$C_{65}=(4106.08351, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{65}=65.0453$
$\Sigma_{66}$	$C_{66}=(4198.07158, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{66}=65.0453$
$\Sigma_{67}$	$C_{67}=(4290.05965, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{67}=65.0453$
$\Sigma_{68}$	$C_{68}=(4382.04772, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{68}=65.0453$
$\Sigma_{69}$	$C_{69}=(4474.03579, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{69}=65.0453$
$\Sigma_{70}$	$C_{70}=(4566.02386, 907.99193, 91.98807,0)$	$R_{70}=65.0453$
$\Sigma_{71}$	$C_{71}=(4650.89687, 943.4652579, 91.98807,0)$	$R_{71}=65.0453$
$\Sigma_{72}$	$C_{72}=(4750, 914.7460538, 120,0)$	$R_{72}=84.85281374$
$\Sigma_{73}$	$C_{73}=(4750, 770.0255859, 203.776124,0)$	$R_{73}=144.0914791$
$\Sigma_{74}$	$C_{74}=(4750, 522.386491, 451.4162296,0)$	$R_{74}=319.19947$
$\Sigma_{75}$	$C_{75}=(4570, 0, 930.302113,0)$	$R_{75}=657.8229327$
$\Sigma_{76}$	$C_{76}=(3611.943, -100, 1000,0)$	$R_{76}=707.1067812$
$\Sigma_{77}$	$C_{77}=(2611.943, -100, 1000,0)$	$R_{77}=707.1067812$
$\Sigma_{78}$	$C_{78}=(1611.943, -100, 1000,0)$	$R_{78}=707.1067812$
$\Sigma_{79}$	$C_{79}=(1096.504432, 756.930197, 1000,0)$	$R_{79}=707.1067812$
$\Sigma_{80}$	$C_{80}=(922.2268, 600, 300,0)$	$R_{80}=212.1320344$
$\Sigma_{81}$	$C_{81}=(750, 500, 163.335525,0)$	$R_{81}=115.4956573$
$\Sigma_{82}$	$C_{82}=(750, 500, 43.765626,0)$	$R_{82}=30.94697$
$\Sigma_{83}$	$C_{83}=(750, 500, 11.72696421,0)$	$R_{83}=8.29221591$
$\Sigma_{84}$	$C_{84}=(750, 500, 3.1422119,0)$	$R_{84}=2.221879342$
$\Sigma_{85}$	$C_{85}=(750, 500, .841953143,0)$	$R_{85}=.595350776$

Como ya vimos, el grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones  $I_j$  en las perlas  $\Sigma_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), del collar de perlas  $Spin(T)$  bien adaptado al 2-nudo  $Spin(\text{trébol})$ , es un grupo Kleiniano conforme.

### 3.3. Descripción del Conjunto Límite

Sea  $A$  un arco girable anudado en  $\mathbb{R}_+^3$ . Consideremos el nudo de dimensión dos  $Spin(A)$  en  $\mathbb{R}^4$ , y tomemos una configuración de perlas  $Spin(T)$  subordinada y bien adaptada a  $Spin(A)$  consistente en  $n$  perlas.

Ya hemos visto que la acción del grupo  $\Gamma$  generado por las inversiones en las perlas es Kleiniano. La pregunta natural que surge es: ¿Cuál es su conjunto límite? Recordemos que para encontrar todos los puntos límite, debemos considerar todas las posibles sucesiones de elementos de  $\Gamma$ , es decir, vamos a encontrar todos los puntos de acumulación de sus órbitas. Esto lo haremos por etapas.

1. Al invertir con respecto a cada  $\Sigma_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), una copia del exterior de  $Spin(A) - \Sigma_j$  es obtenida dentro de ésta. Así, al efectuar todas las inversiones se obtiene un nuevo 2-nudo  $Spin(A_1)$ , el cual es isotópico a la suma conexas de  $n + 1$  copias de  $Spin(A)$  y está totalmente cubierto por  $n(n - 2)$  perlas (envoltura), las que serán denotadas por  $E(T_1)$ .

Notemos que existe una isotopía de  $S^4$  tal que transforma al nudo  $Spin(A \# A)$  en  $Spin(A) \# Spin(A)$ . Más aún, esto continua siendo cierto para la suma conexas de cualquier pareja de arcos anudados. Por lo tanto,  $Spin(A_1)$  es isotópico al Spin de la suma conexas de  $n + 1$  copias de  $A$ .

Consideremos el relleno de  $Spin(T)$  y  $E(T_1)$ . Tenemos que  $|Spin(T)| = |E(T_1)|$  ya que cada perla de  $Spin(T)$  se encuentra en  $E(T_1)$ . De aquí que  $E(T_1)$  es una vecindad cerrada de  $Spin(A)$ . Para clarificar lo anterior consideremos el caso más sencillo, es decir, un collar desanudado semicircular (ver figura 3.10).

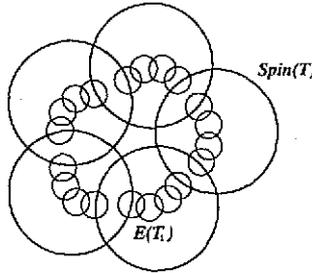


Figura 3.10: Un collar desanudado y la primera iteración.

**Afirmación 3.3.1**  $|E(T_1)| = V$  es isotópico a una vecindad tubular cerrada de  $Spin(A)$ .

En efecto:

Sea  $N$  una vecindad tubular de  $Spin(A)$  tal que  $N \subset Int(V)$ . Como  $A$  es girable, se sigue que  $Spin(A)$  es liso. Dado  $p \in Spin(A)$ , consideremos el plano tangente  $T_p Spin(A)$  de  $Spin(A)$  en  $p$ . Sea  $\Pi^2(p) \subset \mathbb{S}^4$  una 2-esfera totalmente geodésica con respecto a la métrica esférica (es decir, de radio 1) que pasa por  $p$  e interseca transversalmente a  $T_p Spin(A)$ . Así  $\Pi^2(p)$  corta a cada perla  $\Sigma_i \in Spin(T)$  que contiene a  $p$  en un disco  $D_i$ . Entonces  $D_p = \cup D_i$  es estrellado con respecto a  $p$ , y por lo tanto es convexo. Esta vecindad se encuentra contenida en una bola cerrada  $\mathcal{B}_{R_p}(p)$ , donde el radio  $R_p = \sup\{d(x, p) : x \in D_p\} + \epsilon$ . Notemos además que  $N_p = \Pi^2(p) \cap N \subset D_p$  (ver figura 3.11).

Por lo que para cada punto  $p \in Spin(A)$  le hemos encontrado una 2-vecindad estrellada  $D_p$  con respecto a  $p$  en  $\Pi^2(p)$ , que se retracta radialmente a  $N_p$ . En efecto, a continuación describiremos como construir una isotopía  $\phi_p(\theta, t)$ , que depende del ángulo  $\theta$  y de  $t$ . Tracemos un rayo  $r_\theta$  que parta de  $p$  con ángulo  $\theta$ . Sea  $n(\theta)$  el punto de intersección de  $r_\theta$  con  $N_p$  y sea  $d(\theta)$  el punto de intersección de  $r_\theta$  con  $D_p$  (ver figura 3.11). Luego, el rayo  $d(\theta)$  lo podemos enviar al rayo  $n(\theta)$  a través de una isotopía  $\phi_p(t, x) = t\psi_p(x) + (1 - t)x$ , donde  $\psi_p(s)$  es la única función poligonal cuya gráfica aparece en la figura 3.12. Notemos que es la identidad después de cierto punto a distancia  $R_p$  de  $p$ .

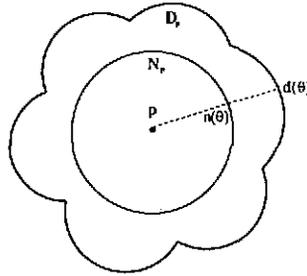


Figura 3.11: Una 2-vecindad estrellada de  $p$  en  $\Pi^2(p)$ .

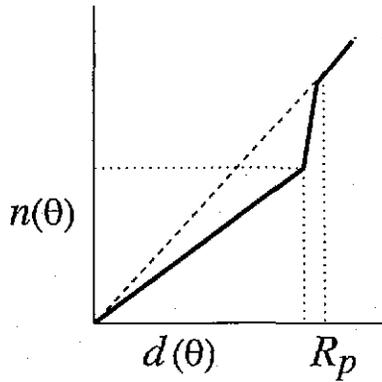


Figura 3.12: El rayo  $d(\theta)$  es transformado al rayo  $n(\theta)$  por una isotopía radial.

Por lo que en  $\Pi^2(p)$  tenemos una isotopía que transforma a  $D_p$  en  $N_p$  y es la identidad fuera del disco cerrado  $B_{R_p}(p)$ . Puesto que  $\Pi^2(p)$  varía continuamente con respecto a  $p$ , tenemos una isotopía que transforma a  $V$  en  $N$  y por [21] esta isotopía se extiende a  $\mathbb{S}^4$ . Por lo anterior, esta isotopía es la identidad fuera de una vecindad tubular cerrada  $Spin(A) \times \mathbb{S}^1$ , tal que el radio de  $\mathbb{S}^1$  es  $\sup\{R_p\}$ . ■

- Segunda etapa: Consideremos la acción de elementos de  $\Gamma$  en  $E(T_1)$ . De esta forma, obtenemos un nuevo nudo  $Spin(A_2)$  con envoltura  $E(T_2)$  formada por  $n(n^2 - 2n + 7)$  perlas. El nudo  $Spin(A_2)$  es isotópico a

la suma conexas de  $n^2 + 1$  copias de  $Spin(A)$ . De aquí que es también isotópico al Spin de la suma conexas de  $n^2 + 1$  copias de  $A$ .

Sea  $V_1 = E(T_2) - Spin(T)$ . Entonces  $|V_1|$  es una vecindad cerrada y conexas de un 2-nudo  $Spin(P_1)$  el cual es isotópico a la suma conexas de  $2n + 1$  copias de  $Spin(A)$  (una copia en cada perla de  $V_1$  más la original). Por la afirmación anterior,  $|V_1|$  es isotópica a una vecindad tubular cerrada de  $Spin(P_1)$ . Notemos que  $|V_1| \subset |V|$  (ver figura 3.13).

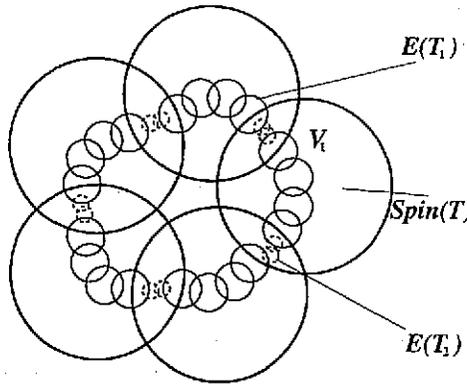


Figura 3.13: Perlas punteadas forman  $|V_1|$ .

3.  $k^{ma}$  etapa: La acción de elementos de  $\Gamma$  en  $E(T_{k-1})$  determina un nudo manso  $Spin(A_k)$ , el cual es isotópico a la suma conexas de  $n \lfloor \frac{(n-1)^k - 1}{n-2} \rfloor + 1$  copias de  $Spin(A)$  y es también isotópico al Spin de la suma conexas de  $n \lfloor \frac{(n-1)^k - 1}{n-2} \rfloor + 1$  copias de  $A$ .

Sea  $V_{k-1} = E(T_k) - E(T_{k-2})$ . Así  $|V_{k-1}|$  es una vecindad cerrada y conexas del nudo  $Spin(P_{k-1})$  que es isotópico a la suma conexas de  $n \lfloor \frac{(n-1)^k - 1}{n-2} \rfloor + n(n-3)^{k-2} + 1$ . Esta vecindad está formada por  $2n(n-3)^k$  perlas y es isotópica a una vecindad tubular cerrada de  $Spin(P_{k-1})$ . Por construcción,  $|V_{k-1}| \subset |V_{k-2}|$ .

Sea  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} |V_k|$ . A continuación probaremos que  $x$  es un punto límite.

En efecto, existe una sucesión de bolas cerradas  $\{B_m\}$  con  $B_m \subset |V_m|$  tal que  $x \in B_m$  para cada  $m$ . Por lo que podemos encontrar a  $z \in \mathbb{S}^4 - Spin(T)$  y una sucesión  $\{w_m\}$  de elementos distintos de  $\Gamma$ , tal que  $w_m(z) \in B_m$ . Como  $diam(B_m) \rightarrow 0$  se sigue que  $w_m(z)$  converge a  $x$ . La otra inclusión es clara. Por lo tanto, el conjunto límite está dado por

$$\Lambda(\Gamma, A) = \varprojlim_k |V_k| = \bigcap_{k=1}^{\infty} |V_k|$$

**TEOREMA 3.3.2** *El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma, A)$  es isotópico a  $Spin(\Lambda)$ , donde  $\Lambda$  es el arco salvaje (en el sentido del capítulo 2) contenido en cada página  $(\mathbb{R}_+^3)$  de la descomposición en libro abierto de  $\mathbb{R}^4$ .*

*Demostración.*

Sea  $A$  un arco girable anudado. Construyamos el 2-nudo  $Spin(A)$  y tomemos el collar  $Spin(T)$  formado por  $n$  perlas, subordinado y bien adaptado a  $Spin(A)$ .

Ahora consideremos el semi-collar de perlas  $C$ , formado por  $n$  2-esferas tal que esferas adyacentes sean ortogonales y  $A$  está totalmente cubierto por ellas. Podemos suponer que los extremos de  $A$  son los centros de la primera perla  $\Sigma_1$ , y la última  $\Sigma_n$ . Construyamos  $Spin(C) = \cup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} R_\theta(C)$  (ver sección 3.1).

**Afirmación 3.3.3**  $|Spin(T)|$  es isotópico a  $|Spin(C)|$ .

En efecto, como hemos probado en la afirmación 3.3.1,  $|Spin(T)|$  es isotópico a una vecindad tubular cerrada del nudo  $Spin(A)$ . Utilizando el mismo argumento, tenemos que  $|Spin(C)|$  es isotópico a una vecindad tubular cerrada de  $Spin(A)$ . Ahora, dos vecindades tubulares cerradas de  $Spin(A)$  son isotópicas ([10]), de aquí que la afirmación se sigue. ■

En la primera etapa del proceso de inversión aplicado a  $Spin(T)$ , obtenemos una envoltura  $E(T_1)$  de  $Spin(A_1)$  formado por perlas. Ahora en el caso de  $C$ , unimos los extremos de  $A$  por una curva no anudada  $L$ , obteniendo así un nudo  $K$  (ver figura 3.14).

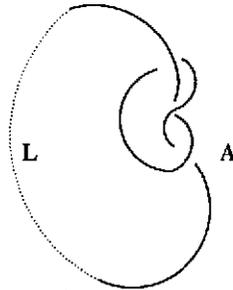


Figura 3.14: La curva punteada  $L$  une los extremos del arco  $A$ .

Luego, completamos el semi-collar de perlas  $C$  para  $K$  con perlas  $Z_s$ ,  $s = 1, \dots, r$ , manteniendo las mismas condiciones de ortogonalidad en perlas consecutivas. A este nuevo collar de perlas lo denotamos por  $Z$  (ver figura 3.15).

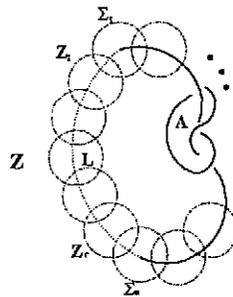


Figura 3.15: El collar de perlas  $Z$  subordinado al nudo  $K$ .

Ahora, invertimos sólo con respecto a cada perla  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de  $C$ . Así, obtenemos un nuevo nudo  $K^1$  isotópico a la suma conexas de  $n + 1$  copias de  $K$ . Para regresar  $K^1$  a un arco, removemos la curva desanudada que une a las imágenes de los extremos de  $A$  bajo las inversiones con respecto a las perlas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_n$  de  $C$  respectivamente. Este nuevo arco es llamado  $A^1$  y está totalmente cubierto por el conjunto de perlas  $C_1$ . Notemos que  $C \subset C_1$  (ver figura 3.16).

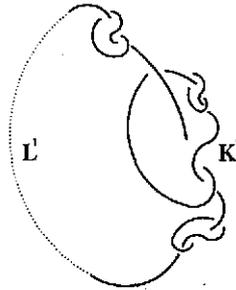


Figura 3.16: El nudo  $K^1$  y la curva  $L^1$ .

Observemos que  $Spin(A^1)$  es isotópico a  $Spin(A_1)$  y  $Spin(C_1)$  es una envoltura de él. Así,  $Spin(|C_1|) = Spin(|C|)$  (donde  $|C|$  está definido como  $|Spin(T)|$ ) es una vecindad cerrada de  $Spin(A)$ .

En la segunda etapa para  $Spin(T)$ , obtenemos una envoltura  $E(T_2)$  del nudo  $Spin(A_2)$ . Para  $C$ , unimos de nuevo los extremos del arco  $A^1$  por una curva no anudada  $L^1$ , formando de nuevo el nudo  $K^1$  de tal manera que cuando completamos el semi-collar de perlas  $C_1$ , agregamos de nuevo las perlas  $Z_s$ ,  $s = 1, \dots, r$ , es decir, formamos de nuevo el collar  $Z$ . Podemos suponer que los extremos del arco  $A^1$  coinciden con los centros de las perlas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_n \in C \subset C_1$ , respectivamente (ver figura 3.17).

Invirtiendo únicamente con respecto a cada perla de  $C$ , esto es, con respecto a las perlas  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tenemos al igual que en la etapa anterior una envoltura  $C_2$  del nuevo arco  $A^2$ , el cual es isotópico a la suma conexas de  $2n + 1$  copias de  $K$  menos una curva no anudada  $L_2$ . Cuando giramos  $C_2$  y  $A^2$ , obtenemos la envoltura  $Spin(C_2)$  de  $Spin(A^2)$ .

Definimos  $W_1 = Spin(C_2) - Spin(C) \cup \{I_j(Z) : j = 1, \dots, n\}$ . Entonces  $|W_1|$  es una vecindad cerrada del 2-nudo  $Spin(Q^2)$  (ver la sección anterior el 2-nudo análogo  $Spin(P_2)$ ), el cual es isotópico a la suma conexas de  $2n + 1$  copias de  $Spin(A)$ . De esta manera,  $|V_1|$  y  $|W_1|$  son vecindades cerradas de 2-nudos isotópicos. Usando el mismo argumento que el de la afirmación 3.3.1 y el hecho estándar de que cualquier encaje localmente plano de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{S}^4$

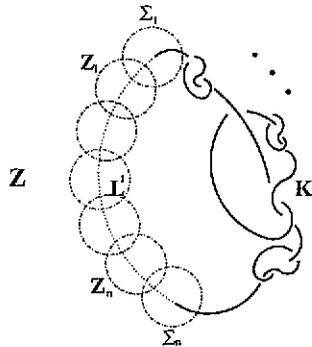


Figura 3.17: El collar de perlas  $Z$  subordinado al nudo  $K^1$ .

tiene haz normal trivial; tenemos que dos vecindades tubulares cerradas de nudos isotópicos son isotópicas (ver [10]). De aquí que  $|V_1|$  es isotópico a  $|W_1|$  y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{S}^4, |V_1|) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^4, |V|) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 (\mathbb{S}^4, |W_1|) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^4, |W|),
 \end{array}$$

donde las aplicaciones horizontales son inclusiones. Notemos que esta isotopía es estable, es decir, es la identidad en algún abierto de  $\mathbb{S}^4$ , y preserva orientación (ver [14]).

Continuando con este proceso en cada construcción, tenemos en la etapa  $k$ -ésima para  $Spin(A_k)$  su envoltura  $E(T_k)$  y para  $Spin(A^k)$  su envoltura  $Spin(C_k)$ . Donde  $Spin(A_k)$  es obtenido a través del proceso de inversión que se describió previamente. El arco  $A^k$  es formado aplicando el proceso de inversión al collar  $Z$  que completa al semi-collar  $C_{k-1}$ , y está subordinado al nudo  $K^k$ .

Luego,

$$|V_k| = |E(T_{k+1}) - E(T_{k-1})|$$

y

$$|W_k| = |Spin(C_{k+1}) - Spin(C_{k-1}) \cup \{I_{i_1 i_2 \dots i_l}(Z) : 1 \leq l \leq k\}|$$

son vecindades cerradas de los nudos  $Spin(P_k)$  y  $Spin(Q^k)$  respectivamente, los cuales son isotópicos a la suma conexas de  $n \lfloor \frac{(n-1)^k - 1}{n-2} \rfloor + n(n-3)^{k-1} + 1$  copias de  $Spin(A)$  (ver la descripción anterior). Por lo que  $|V_k|$  es isotópica a  $|W_k|$ . Esto implica que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{S}^4, |V_k|) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^4, |V_{k-1}|) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ (\mathbb{S}^4, |W_k|) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^4, |W_{k-1}|), \end{array}$$

Notemos que esta isotopía es estable y preserva orientación. Resumiendo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{S}^4, |V|) & \longleftarrow & (\mathbb{S}^4, |V_1|) & \longleftarrow \dots \longleftarrow & (\mathbb{S}^4, |V_k|) & \longleftarrow \dots & (3.1) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \\ (\mathbb{S}^4, |W|) & \longleftarrow & (\mathbb{S}^4, |W_1|) & \longleftarrow \dots \longleftarrow & (\mathbb{S}^4, |W_k|) & \longleftarrow \dots & \end{array}$$

donde las aplicaciones horizontales son inclusiones y las verticales son isotopías estables que preservan orientación.

El límite inverso en el primer renglón de (3.1) es  $(\mathbb{S}^4, \Lambda(\Gamma, A))$  y el límite inverso en el segundo renglón es  $(\mathbb{S}^4, Spin(\varprojlim_k |W_k|))$ . Pero  $\varprojlim_k |W_k|$  es un arco salvaje que denotaremos por  $\Lambda(\Gamma)$  (ver capítulo anterior). En otras palabras, el límite inverso en el segundo renglón es  $(\mathbb{S}^4, Spin(\Lambda(\Gamma)))$ .

Por la propiedad universal del límite inverso, existe un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^4$  a  $\mathbb{S}^4$  que envía  $\Lambda(\Gamma, A)$  en  $Spin(\Lambda(\Gamma))$ . Este homeomorfismo es estable porque coincide con un homeomorfismo estable en algún abierto (ver [14]) y preserva orientación. Esto implica que es isotópico a la identidad (ver [14]).

Por lo tanto, los nudos  $Spin(\Lambda(\Gamma))$  y  $\Lambda(\Gamma, A)$  son isotópicos. ■

**COROLARIO 3.3.4** *El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma, A)$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$*

*Demostración.*

Por el teorema anterior, tenemos que  $\Lambda(\Gamma, A) \cong Spin(\Lambda(\Gamma)) \cong \mathbb{S}^2$ . ■

**TEOREMA 3.3.5** *Sea  $Spin(T)$  un collar de perlas subordinado y bien adaptado a  $Spin(A)$ . Entonces  $\Lambda(\Gamma, A)$  está salvajemente encajado en  $\mathbb{S}^4$ .*

*Demostración.*

Sea  $\Delta = \mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)$ . Es suficiente probar que  $\Pi_1(\Delta)$  está infinitamente generado y no tiene presentación finita.

Sea  $A$  un arco girable anudado. Primeramente, recordemos que el grupo fundamental de  $Spin(A)$  es isomorfo al grupo fundamental de  $K = A \cup L$  en  $\mathbb{S}^3$ , donde  $L$  es una curva no anudada que une los extremos de  $A$  (ver [23], [35]) y el grupo fundamental de un nudo manso tiene presentación finita, es decir, podemos suponer que

$$\Pi_1(Spin(A)) \cong \Pi_1(K) = \{g_1, g_2, \dots, g_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

Por Van-Kampen tenemos

$$\Pi_1(Spin(A) \# Spin(A)) \cong \Pi_1(K \# K) = \frac{\Pi_1(Spin(A)) * \Pi_1(Spin(A))}{\Pi_1(\mathbb{S}^4 - \mathbb{S}^2)}$$

pero  $\Pi_1(\mathbb{S}^4 - \mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ , de aquí que lo anterior puede escribirse en términos de generadores y relaciones como sigue

$$\begin{aligned} \Pi_1(K \# K) &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_1^2, g_2^2, \dots, g_n^2 \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, g_1^1 = g_1^2\} \\ &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2 \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2\} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\cong \Pi_1(Spin(A)) *_{\{g_1\}} \Pi_1(Spin(A))$$

donde  $g_1$  es el generador de  $\Pi_1(\mathbb{S}^4 - \mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ .

Por inducción, si  $L = Spin(A) \# \dots \# Spin(A)$   $m$ -veces, entonces

$$\begin{aligned} \Pi_1(L) &= \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots, g_2^l, \dots, g_n^l \mid \\ &\quad r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_1^2, r_2^2, \dots, r_m^2, \dots, r_1^l, r_2^l, \dots, r_m^l\} \end{aligned}$$

$$\cong (\cdots (\Pi_1(\text{Spin}(A)) *_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(A)) *_{\{g_1\}}) \cdots *_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(A)))$$

$l$ -veces.

Por otro lado, notemos que en cada etapa  $\text{Spin}(P_k)$  es un retracto fuerte por deformación de  $|V_k|$  (ver la descripción geométrica al principio de esta sección). Así

$$\Pi_1(|V_k|) \cong \Pi_1(\text{Spin}(P_k))$$

Como,  $\mathbb{S}^4 - |V_k| \subset \mathbb{S}^4 - |V_{k+1}|$  para cada  $k$ , se sigue que

$$\Delta = \varinjlim (\mathbb{S}^4 - |V_k|) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{S}^4 - |V_k|)$$

esto implica que,  $\Pi_1(\Delta)$  es el límite directo del sistema

$$\{\Pi_1(\mathbb{S}^4 - |V_k|), k = 1, 2, \dots; f_k, k = 1, 2, \dots\}$$

donde

$$f_k : \Pi_1(\mathbb{S}^4 - |V_k|) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^4 - |V_{k+1}|)$$

es la inclusión (ver lema 2.4.1 de [24]). Por lo tanto,

$$\Pi_1(\Delta) = \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_n^1, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots, g_2^k, \dots, g_n^k, \dots | \\ r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1, r_2^2, \dots, r_m^2, \dots, r_1^k, r_2^k, \dots, r_m^k, \dots\}$$

$$\cong (\cdots (\Pi_1(\text{Spin}(A)) *_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(A))) *_{\{g_1\}} \cdots *_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(A))) *_{\{g_1\}} \cdots$$

Así  $\Pi_1(\Delta)$  está infinitamente generado. De hecho, este grupo fundamental coincide con el grupo fundamental del nudo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$  obtenido como el conjunto límite de la acción del grupo Kleiniano generado por inversiones en un collar de perlas subordinado al nudo  $K$  (ver lema 2.2.2). Es bien conocido que no tiene presentación finita (ver [12], [16]). ■

**Ejemplo 3.3.6** Sea  $\text{Spin}(T)$  un collar de perlas subordinado y bien adaptado a  $\text{Spin}(A)$  donde  $A$  es un arco trébol  $(T_{2,3})$ . Entonces

$$\Pi_1(\text{Spin}(A)) \cong \Pi_1(T_{2,3}) = \{x, y \mid xyx = yxy\}$$

por lo que

$$\Pi_1(\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)) = \{x_1, y_1, \dots, y_n, \dots \mid$$

$$x_1 y_1 x_1 = y_1 x_1 y_1, x_2 y_2 x_2 = y_2 x_2 y_2, \dots, x_n y_n x_n = y_n x_n y_n, \dots\}$$

$\cong (\dots (\Pi_1(\text{Spin}(T_{2,3}))_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(T_{2,3}))_{\{g_1\}} \dots)_{\{g_1\}} \Pi_1(\text{Spin}(T_{2,3}))_{\{g_1\}} \dots)$   
*es infinitamente generado y con un número infinito de relaciones.*

### 3.4. Variedades Hiperbólicas Asociadas

Consideremos la acción de  $\Gamma$  en el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^5$ . Entonces  $\Gamma$  es un subgrupo de Isom  $\mathbb{H}^5$  que actúa propia y discontinuamente en  $\mathbb{D}^5 = \mathbb{H}^5 \cup \partial\mathbb{H}^5$ . El poliedro fundamental  $\mathcal{P}$  del grupo es  $(\mathbb{H}^5 \cup \partial\mathbb{H}^5) - |\text{Spin}(T)|$ , donde  $\text{Spin}(T)$  es la extensión natural del collar de perlas a  $\mathbb{D}^5$ . De aquí que  $\mathcal{P}$  es convexo y tiene un número finito de lados por lo que  $\Gamma$  es geoméricamente finito (ver [4]).

El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\overline{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathcal{M}_\Gamma^5 = (\mathbb{D}^5 - \Lambda(\Gamma, A))/\Gamma \cong \overline{\mathcal{P}}$  es un orbifold compacto, tal que si nos restringimos a  $\text{Int}(\mathcal{M}_\Gamma^5)$  es un orbifold hiperbólico no compacto, orientable, de volumen infinito y su compactificación como subconjunto de  $\mathbb{D}^5$  tiene frontera  $\partial\mathcal{M}_\Gamma^5$  que posee una estructura conforme. En efecto:

Para el grupo Kleiniano  $\Gamma$  que actúa en el collar de perlas  $\text{Spin}(T)$ , su dominio fundamental es  $D = \mathbb{S}^4 - |\text{Spin}(T)| = \partial\mathcal{M}_\Gamma^5$ . El grupo  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente en  $\overline{D}$ , así  $\overline{D} \cong \Omega(\Gamma)/\Gamma = (\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  es una 4-variedad conformemente plana (ver [9]), orientable, compacta y con frontera. Su grupo fundamental es precisamente el grupo del molde de  $\text{Spin}(T)$ .

A continuación describiremos  $(\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma))/\Gamma$  bajo la restricción de que  $\text{Spin}(A)$  sea fibrado.

**LEMA 3.4.1** *Sea  $A$  un arco girable. Supongamos que el nudo  $K$ , obtenido a partir de  $A$  uniendo sus extremos por una curva no anudada, fibra sobre la circunferencia con fibra la superficie  $S$ . Entonces  $\text{Spin}(A)$  fibra sobre la circunferencia con fibra  $S_\theta$ ; una  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\tilde{S}$  pegadas a lo largo del meridiano de  $\partial\mathbb{D}^3$  con longitud  $\theta$ . Donde el interior de  $\tilde{S}$  es  $S$  y su frontera es un meridiano de  $\partial\mathbb{D}^3$  (ver figura 3.18).*



*Demostración.*

La fibrición localmente trivial del complemento de  $K$  induce una fibrición localmente trivial en  $\mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^1$  por superficies  $\tilde{S}_\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . El interior de  $\tilde{S}_\theta$  es  $S$  y su frontera es  $\partial\tilde{S}_\theta = M_\theta^1 =$  el meridiano de  $\partial\mathbb{D}^3$  con longitud  $\theta$  (ver figura 3.18).

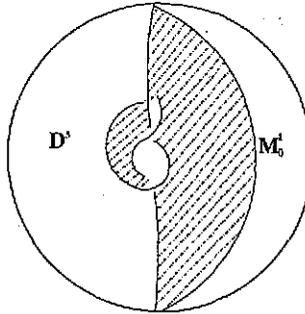


Figura 3.18: Fibración de  $\mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^1$ .

Recordemos que en el proceso spin multiplicamos el interior de  $\mathbb{D}^3$  por  $\mathbb{S}^1$  mientras que  $\partial\mathbb{D}^3$  permanece fija. Por lo que, obtenemos una fibrición localmente trivial de  $\mathbb{S}^4 - Spin(A)$  por una  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\tilde{S}$  pegadas a lo largo del meridiano  $M_\theta^1$  de  $\partial\mathbb{D}^3$  con longitud  $\theta$ . ■

De aquí en adelante, diremos que un arco manso es *fibrado* si el nudo obtenido a partir de éste uniendo sus extremos por una curva no anudada, fibra sobre la circunferencia.

**LEMA 3.4.2** Sea  $A$  un arco girable, fibrado con fibra la superficie  $S$ . Sea  $Spin(T)$  un collar de  $n$ -perlas subordinado y bien adaptado al nudo manso  $Spin(A)$ . Entonces  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  fibra sobre la circunferencia con fibra  $S^*$ , la cerradura de la 3-variedad  $S_\theta$  del anterior lema.

*Demostración.*

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Sea  $\tilde{P} : \mathbb{S}^4 - Spin(A) \rightarrow \mathbb{S}^1$  la fibración dada, cuya fibra es la 3-variedad  $S_\theta$ . Notemos que  $\tilde{P}|_{\mathbb{S}^4 - Spin(T)} \equiv P$  es también una fibración con fibra  $S_\theta$ .

Ya que  $\Omega(\Gamma)/\Gamma \cong D^*$  y en nuestro caso tenemos que  $D^* = \overline{\mathbb{S}^4 - |Spin(T)|}$ . Se tiene que  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  fibra sobre la circunferencia con fibra la cerradura de  $S_\theta$ . ■

Si el nudo es fibrado tenemos que para describir completamente a  $\Omega/\Gamma$ , nos falta determinar su monodromía, la cual es precisamente la monodromía del nudo (ver sección 3.6).

Consideremos ahora el subgrupo  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  de índice dos que preserva orientación. En este caso, el poliedro fundamental  $\tilde{\mathcal{P}}$  es  $(\mathbb{H}^5 \cup \partial\mathbb{H}^5 - |Spin(T)|) \cup (\tilde{B}_j - I_j(|Spin(T) - \tilde{\Sigma}_j|))$ , donde tilde significa la extensión natural a  $\mathbb{D}^5$  tanto de la perla como de la inversión correspondiente. Puesto que  $\tilde{\mathcal{P}}$  es convexo y tiene un número finito de lados, tenemos que  $\tilde{\Gamma}$  es geoméricamente finito.

El grupo  $\tilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en el poliedro fundamental  $\tilde{\mathcal{P}}$ , de aquí que el cociente  $\mathcal{M}_{\tilde{\Gamma}}^5 = (\mathbb{D}^5 - \Lambda(\tilde{\Gamma}, A))/\tilde{\Gamma} \cong \tilde{\mathcal{P}}/\sim_{\tilde{\Gamma}}$  es una variedad compacta, orientable sin frontera, tal que si nos restringimos a  $Int(\mathcal{M}_{\tilde{\Gamma}}^5)$  es una variedad hiperbólica de volumen infinito, orientable, no compacta tal que su compactificación como subconjunto de  $\mathbb{D}^5$  tiene frontera, la cual es una 4-variedad conforme.

El dominio fundamental  $\tilde{D}$  para el grupo  $\tilde{\Gamma}$  en  $\mathbb{S}^4$  es  $\partial\mathcal{M}_{\tilde{\Gamma}}^5 = \tilde{D} = (\mathbb{S}^4 - |Spin(T)|) \cup (B_j - I_j(|Spin(T) - \Sigma_j|))$ . Luego,  $D^* \cong \Omega/\tilde{\Gamma}$  donde  $D^* = \tilde{D} \cap \Omega/\sim_{\tilde{\Gamma}}$  (ver capítulo 1, [16]). El grupo  $\tilde{\Gamma}$  actúa libre, propia y discontinuamente en  $\Omega(\tilde{\Gamma})$ . Así  $\Omega/\tilde{\Gamma}$  es una 4-variedad conformemente plana, orientable, compacta y sin frontera. Su grupo fundamental es el grupo del molde de  $Spin(T\#T)$ , es decir, es el grupo fundamental de  $Spin(A\#A)$ .

**LEMA 3.4.3** *Sea  $A$  un arco girable, fibrado con fibra la superficie  $S$ . Sea  $Spin(T)$  un collar de  $n$ -perlas subordinado y bien adaptado al nudo manso  $Spin(A)$ . Entonces  $\Omega/\tilde{\Gamma}$  fibra sobre la circunferencia, con fibra  $S^*$  homeomorfa a la 3-variedad  $S_\theta\#S_\theta$  donde  $S_\theta$  es la 3-variedad del lema 3.4.1.*

*Demostración.*

El espacio  $\overline{D}$  fibra sobre la circunferencia con fibra la 3-variedad  $\hat{S}_\theta$  que es la suma de  $S_\theta$  con  $S_\theta$  a lo largo de un disco (ver el equivalente para superficies en la demostración del teorema 2.4.1), y cuya frontera es un  $\mathbb{S}^2$ .

Podemos asumir, módulo isotopía, que la fibra  $S$  corta cada perla del semicollar correspondiente a  $A$ , en arcos que van desde un punto de la intersección de perlas consecutivas en otro (ver lema 2.7.3 y la figura 2.9). Por lo que la fibra  $S_\theta$  corta a cada perla  $\Sigma_i \in Spin(T)$  en discos  $\alpha_i$  cuya frontera es la intersección de  $\Sigma_i$  con las perlas adyacentes. Por lo que al invertir con respecto a  $\Sigma_j$ , la copia de  $S_\theta$  corta la copia de  $\Sigma_i$  en  $\Sigma_j$  en discos  $\alpha_i^j$  cuya frontera es la intersección de las imágenes de las perlas correspondientes.

Observemos que la acción de  $\tilde{\Gamma}$  identifica la frontera de cada perla de  $Spin(T)$  con la correspondiente frontera en  $\Sigma_j$ . Esta identificación es equivalente a identificar los discos  $\alpha_i(\theta)$  con  $\alpha_i^j(\theta)$  para  $\theta \in \mathbb{S}^1$ .

Por lo tanto,  $D^* \cong \Omega/\tilde{\Gamma}$  fibra sobre el círculo. La fibra es la superficie  $S^* = \hat{S}_\theta / \sim_{\tilde{\Gamma}}$ , que es homeomorfa a  $S_\theta \# S_\theta$ . ■

De nuevo, si el nudo es fibrado tenemos que para describir completamente a  $\Omega/\tilde{\Gamma}$ , nos falta determinar su monodromía. Esta será estudiada en la sección 3.6.

### 3.5. Fibración del complemento de $\Lambda(\Gamma, A)$ sobre $\mathbb{S}^1$

En esta sección estudiaremos el complemento del conjunto límite para el caso en que el nudo es fibrado. Para esto, nos apoyaremos en los resultados que obtuvimos en la sección anterior.

Primeramente, observemos que debido a que  $\tilde{\Gamma}$  es un subgrupo normal de  $\Gamma$ , se sigue por el lema 8.1.3. en [31] que  $\tilde{\Gamma}$  tiene el mismo conjunto límite que  $\Gamma$ . Por lo tanto,  $\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A) = \mathbb{S}^4 - \Lambda(\tilde{\Gamma}, A)$ .

**TEOREMA 3.5.1** *Sea  $A$  un arco no-trivial, girable y fibrado. Sea  $Spin(T)$*

un collar de perlas subordinado y bien adaptado al 2-nudo fibrado  $Spin(A)$ . Sea  $\Gamma$  el grupo generado por las inversiones en las perlas y sea  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  subgrupo de índice dos formado por las palabras pares. Sea  $\Lambda(\Gamma, A) = \Lambda(\tilde{\Gamma}, A)$  el correspondiente conjunto límite. Entonces:

1. Existe una fibración localmente trivial  $\psi : \mathbb{S}^1 - \Lambda(\Gamma, A) \rightarrow \mathbb{S}^1$ , cuya fibra  $\Sigma_\theta^* = \psi^{-1}(\theta)$  es una  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\Sigma$  pegadas a lo largo del meridiano  $\theta$  de  $\partial\mathbb{D}^3$  (ver lema 3.4.1). Donde  $Int(\Sigma)$  es una superficie orientable de género infinito con una punta.
2.  $\overline{\Sigma}_\theta^* - \Sigma_\theta^* = \Lambda(\Gamma, A)$ .

*Demostración.*

Sabemos que  $\zeta : \Omega(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \Omega(\tilde{\Gamma})/\tilde{\Gamma}$  es un cubriente con un número infinito de hojas. Por el lema anterior, tenemos que existe una fibración localmente trivial  $\phi : \Omega(\tilde{\Gamma})/\tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{S}^1$  con fibra  $S^*$ .

Entonces  $\psi = \phi \circ \zeta : \Omega(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una fibración localmente trivial. La fibra es  $\tilde{\Gamma}(S^*)$ , es decir, la órbita de la fibra.

A continuación daremos otra demostración. Como probamos en el teorema 3.3.2, el nudo  $\Lambda(\Gamma, A)$  es isotópico al nudo  $Spin(\Lambda(\Gamma))$ , donde  $\Lambda(\Gamma)$  es un arco salvaje. Puesto que  $A$  es fibrado, se sigue que  $\Lambda(\Gamma, A)$  también lo es. En este caso, la fibra  $\Sigma$  es una superficie orientable de género infinito con una punta (ver teorema 2.4.1). De aquí que  $Spin(\Lambda(\Gamma))$  fibra sobre la circunferencia con fibra  $\Sigma_\theta^*$ , una  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\Sigma$  pegadas a lo largo del meridiano  $\theta$ , de  $\partial\mathbb{D}^3$  (ver lema 3.4.1).

La primera parte del teorema ha sido probada. Para la segunda parte, observemos que la cerradura de la fibra es la cerradura de la  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\Sigma$ , es decir, es la cerradura de una  $\mathbb{S}^1$ -familia de puntas. Como hemos visto en la figura 3.18, cada punta tiene como frontera al arco salvaje  $\Lambda(\Gamma)$ . Por lo que la cerradura de la fibra es exactamente el conjunto límite. Por lo tanto,  $\overline{\Sigma}_\theta^* - \Sigma_\theta^* = \Lambda(\Gamma, A)$ . ■

**Observación 3.5.2** 1. Este teorema puede ser generalizado para enlaces fibrados.

2. Este teorema nos da una descomposición de  $\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)$  como libro abierto, donde el "lomo" es el 2-nudo salvaje  $\Lambda(\Gamma, A)$ , y cada página es una  $\mathbb{S}^1$ -familia de superficies  $\Sigma$  pegadas a lo largo del meridiano  $\theta$  de  $\partial\mathbb{D}^3$  e  $\text{Int}(\Sigma)$  es una superficie orientable de género infinito con una punta.

En efecto, esta descomposición puede ser pensada de la siguiente forma: Por el teorema anterior,  $\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)$  es  $\Sigma^* \times [0, 1]$  modulo la identificación de la tapa de arriba con la de abajo. Consideremos  $\overline{\Sigma^*} \times [0, 1]$  e identifiquemos  $\overline{\Sigma^*} \times \{0\}$  con  $\overline{\Sigma^*} \times \{1\}$ . Esto es equivalente a dejar  $\partial\overline{\Sigma^*}$  fija y rotar  $\Sigma^* \times \{0\}$  con respecto a  $\partial\overline{\Sigma^*}$  hasta pegarla con  $\Sigma^* \times \{1\}$ . Removiendo  $\partial\overline{\Sigma^*}$ , obtenemos la descomposición de libro abierto.

### 3.6. Monodromía

En la sección anterior vimos que si un arco manso, no trivial  $A$ , fibra entonces  $\text{Spin}(A)$  y  $\Lambda(\Gamma, A)$  también fibran. Lo que nos falta para describir completamente a  $\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)$  es determinar su monodromía.

Consideremos un collar de perlas  $\text{Spin}(T)$  subordinado y bien adaptado a  $\text{Spin}(A)$ . Recordemos que para la variedad  $\mathbb{S}^4 - |\text{Spin}(T)|$ , el flujo que define la aplicación de primer retorno de Poincaré  $\Psi$ , es el flujo que corta transversalmente cada página de su descomposición en libro abierto.

Como hemos observado durante el proceso de inversión,  $\text{Spin}(A)$  y la fibra  $S$  son copiados en cada inversión. Igualmente el flujo  $\Psi$ , que define la aplicación de primer retorno de Poincaré, es copiado. De aquí que la aplicación de primer retorno de Poincaré puede ser extendida en cada paso, dando al final un homeomorfismo  $\psi : \Sigma_\theta^* \rightarrow \Sigma_\theta^*$  que identifica  $\Sigma_\theta^* \times \{0\}$  con  $\Sigma_\theta^* \times \{1\}$  e induce la monodromía del nudo salvaje.

Por lo anterior, si sabemos la monodromía del nudo  $\text{Spin}(A)$ , entonces sabemos la monodromía del nudo salvaje  $\Lambda(\Gamma, A)$ .

Como ya vimos en el primer capítulo en la sección de monodromía, el grupo fundamental del nudo salvaje  $\Lambda(\Gamma, A)$ , es el producto semidirecto de  $\mathbb{Z}$  con  $\Pi_1(\Sigma_\theta^*)$  a través de la monodromía.

**Ejemplo 3.6.1** Sea  $A$  el arco trébol. Consideremos el nudo  $\text{Spin}(A)$ . En-

tonces  $S$  es una  $\mathbb{S}^1$ -familia de toros punchados pegados a lo largo de un meridiano (ver lema 3.4.1). Su grupo fundamental es el grupo libre en dos generadores,  $a$  y  $b$ . Puesto que  $\Pi_1(\text{Spin}(A)) \cong \Pi_1(\text{nudo trébol})$ , se sigue que la monodromía  $\psi_{\#}$  en ambos casos coincide. Así  $\psi_{\#}$  envía  $a \mapsto b^{-1}$  y  $b \mapsto ab$ . Su orden es 6 módulo un automorfismo externo (ver [23] pags. 330-333).

La monodromía en el límite  $\psi_{\#} : \Pi_1(\Sigma_{\theta}^*) \rightarrow \Pi_1(\Sigma_{\theta}^*)$  está dada por  $a_i \mapsto b_i^{-1}$  y  $b_i \mapsto a_i b_i$ , donde  $\Pi_1(\Sigma^*) = \{a_i, b_i\}$ . Así

$$\begin{aligned} \Pi_1(\mathbb{S}^4 - \Lambda(\Gamma, A)) &\cong \Pi_1(\mathbb{S}^1) \rtimes_{\psi_{\#}} \Pi_1(\Sigma_{\theta}^*) \\ &= \{a_i, b_i, c : a_i * c = b_i^{-1}, b_i * c = a_i b_i\} \\ &= \{a_i, c : c^{-1} a_i^{-1} c = a_i c^{-1} a_i\} \\ &= \{a_i, c : c = a_i c a_i c^{-1} a_i^{-1}\} \\ &= \{a_i, c : c = c a_i c a_i c^{-1} a_i^{-1} c^{-1}\} \\ &= \{a_i, c : c = c a_i c^{-1} c^2 a_i c^{-1} c^{-1} c a_i^{-1} c^{-1}\}. \end{aligned}$$

Sea  $\alpha_i = c a_i c^{-1}$ ;

$$\begin{aligned} &= \{\alpha_i, c : c = \alpha_i c \alpha_i c^{-1} \alpha_i^{-1}\} \\ &= \{\alpha_i, c : c \alpha_i c = \alpha_i c \alpha_i\} \end{aligned}$$

Este es otro método para calcular el grupo fundamental del 2-nudo salvaje cuyo complemento fibra sobre la circunferencia.

**COROLARIO 3.6.2** Sea  $\text{Spin}(T)$  un collar de perlas bien adaptado a un nudo manso, fibrado, no trivial,  $\text{Spin}(T)$ . Entonces  $\Pi_1(\Omega(\Gamma)/\Gamma) \cong \mathbb{Z} \rtimes_{\psi_{\#}} \Pi_1(\Sigma^*)$  a través de la monodromía.

### 3.7. Espacio Twistorial y Grupos Kleinianos

En esta sección se levantará la acción del grupo  $\Gamma$  en  $\mathbb{S}^4$  al espacio twistorial. Para más detalles consultar [25] y [20].

Primeramente vamos a describir brevemente la fibrición twistorial ó fibrición de Calabi-Penrose,  $\pi : P_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$  (ver [20]). Existen varias formas de hacerlo, una manera geométrica es la siguiente: El espacio  $\mathbb{S}^4$  puede ser pensado como la línea cuaterniónica proyectiva  $P_{\mathbb{H}}^1$ , de líneas cuaterniónicas

*derechas* en el plano cuaterniónico  $\mathcal{H}^2$ , considerado como  $\mathcal{H}$ -módulo derecho de dimensión dos.

Por otra parte, podemos identificar  $\mathcal{H}^2$  con  $\mathbb{C}^4$  via la aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal dada por  $(q_1, q_2) \rightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4)$ , donde  $q_1 = z_1 + z_2j = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$  y  $q_2 = z_3 + z_4j = y_1 + y_2i + y_3j + y_4k$ . En esta notación  $i, j, k$  denotan las unidades cuaterniónicas estándares y  $z_1 = x_1 + x_2i$ ,  $z_2 = x_3 + x_4i$ ,  $z_3 = y_1 + y_2i$  y  $z_4 = y_3 + y_4i$ .

Bajo esta identificación cada línea cuaterniónica derecha

$$R_q = \{(q_1\lambda, q_2\lambda) : (q_1, q_2) \in \mathcal{H}^2 - (0, 0)\}$$

es invariante bajo multiplicación por la derecha por  $i$ . Esto implica cada línea es canónicamente isomorfa a  $\mathbb{C}^2$ . Puesto que  $P_{\mathbb{C}}^3$  es el espacio de líneas complejas en  $\mathbb{C}^4$ , entonces existe una función  $\pi : P_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$  cuya fibra sobre un punto  $H \in P_{\mathcal{H}}^1$  es el espacio de líneas complejas en la línea cuaterniónica derecha dada  $H \cong \mathbb{C}^2$ ; por lo que la fibra es  $P_{\mathbb{C}}^1$ .

El grupo  $Conf_+(\mathbb{S}^4)$  de automorfismos conformes de  $\mathbb{S}^4$  que preservan orientación es isomorfo a  $PSL(2, \mathcal{H})$ , la proyectivización del grupo de matrices cuaterniónicas invertibles de  $2 \times 2$ . Este grupo es de forma natural un subgrupo de  $PSL(4, \mathbb{C})$ , ya que cada cuaternión corresponde a una pareja de números complejos. De aquí que  $Conf_+(\mathbb{S}^4)$  tiene un levantamiento canónico a un grupo de transformaciones holomorfas de  $P_{\mathbb{C}}^3$ , que envía líneas twistoreales en líneas twistoreales.

**Definición 3.7.1** ([25]) *Un grupo Kleiniano twistorial es un subgrupo discreto  $G$  de  $Aut_{hol}(P_{\mathbb{C}}^3)$  de automorfismos holomorfos, los cuales actúan en  $P_{\mathbb{C}}^3$  con región de discontinuidad  $\Omega(G)$  no vacía.*

**Observación 3.7.2** *No existe una "buena" definición general de  $\Omega$ , se adapta en cada caso. Nosotros estamos considerando la definición 1.4 de [25], con la cual  $\Omega$  es abierto,  $G$ -invariante, y  $G$  actúa propia y discontinuamente en  $\Omega(G)$ . Además  $\Omega/G$  con la topología cociente, es Hausdorff y la aplicación  $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/G$  es continua y abierta.*

En [25] se probó que si  $G \subset Conf_+(\mathbb{S}^4)$  es un subgrupo discreto que actúa en  $\mathbb{S}^4$  con conjunto límite  $\Lambda$ , entonces su levantamiento canónico  $\widetilde{Conf}_+(\mathbb{S}^4)$

actúa en  $P_{\mathbb{C}}^3$  con conjunto límite  $\tilde{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$ , así  $\tilde{\Lambda}$  es un haz fibrado sobre  $\Lambda$  con fibra  $\mathbb{S}^2$ . Por otro lado, el haz twistorial es trivial cuando se restringue a un subconjunto propio de  $\mathbb{S}^4$ .

Consideremos el grupo Kleiniano  $\Gamma$  tal que su conjunto límite es una  $\mathbb{S}^2$  salvajemente encajada en  $\mathbb{S}^4$ . De lo anterior se sigue

**TEOREMA 3.7.3** *Existe un  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  salvajemente encajado en el espacio twistorial  $P_{\mathbb{C}}^3$ . ■*



## Bibliografía

- [1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flächen im  $R_4$*  Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (1926), 174-177.
- [2] R. H. Bing, *Examples and Counterexamples*. Pi Mu Epsilon J1 (1953), 311-317.
- [3] M. Boileau, J.-P. Otal. *Advanced course on Geometric 3-Manifolds*. Centre de Recerca Matemàtica (CRM). Quaderns n0. 25. September 2002.
- [4] B.H. Bowditch. *Geometrical Finiteness for Hyperbolic Groups*. Journal of Functional Analysis 113 (1993), 245-317.
- [5] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc. 1966.
- [6] D. B. A. Epstein, C. Petronio. *An exposition of Poincare's polyhedron theorem*. Enseignement Mathématique 40, 1994, 113-170.
- [7] R. H. Fox. *A Quick Trip Through Knot Theory*. Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Prentice-Hall, Inc., 1962.
- [8] M. Gromov, H. B. Lawson, W. Thurston. *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*. Publ. Math. I.H.E.S. Vol. 68 (1988), 27-45.
- [9] W. Goldman. *Conformally Flat Manifolds with Nilpotent Holonomy and the Uniformization Problem for 3-Manifolds*. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 278 No. 2, 573-583.
- [10] W. Hirsch. *Smooth Regular Neighbourhoods*. Annals of Mathematics Vol. 76, No.3 (1962), 524-530.

- [11] Hilden-Lozano-Montesinos. *On knots that are Universal*. Topology Vol. 24 (1985), No.4, pp. 499-504.
- [12] M. Kapovich. *Topological Aspects of Kleinian Groups in Several Dimensions*. Preprint (1988).
- [13] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Progress in Mathematics, Birkhauser, 2001.
- [14] R. Kirby. *Stable Homeomorphisms and the annulus conjecture*. Ann of Math (2) 89, 1969, 575-582.
- [15] R. S. Kulkarni. *Conformal structures and Möbius structures*. Aspects of Mathematics, edited by R.S. Kulkarni and U. Pinkhall, Max Planck Institut für Mathematik, Vieweg (1988).
- [16] B. Maskit. *Kleinian Groups*. Springer Verlag, 1997.
- [17] D. R. McMillan Jr., T. L. Thickstun. *Open three-manifolds and the Poincaré Conjecture*. Topology 19 (1980), no. 3, 313-320.
- [18] C. T. McMullen. *Renormalization and 3-manifolds with Fiber over the Circle*. Annals of Mathematics, Studies 142. Princeton University Press, 1996.
- [19] J. Milnor. *Singular points of Complex Hypersurfaces*. Annales of Mathematics, Studies 61. Princeton University Press, 1968.
- [20] Le Dung Trang, J. Seade, A. Verjovsky. *Quadrics, Orthogonal Actions and Involutions in Complex Projective Spaces*. Por aparecer (2002).
- [21] R. Palais. *Local triviality of the restriction map for embeddings*. Comment. Math. Helv. 34, 1960, 305-312.
- [22] I. Richards. *On the Classification of Noncompact Surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 259-269.
- [23] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Publish or Perish, Inc. 1976.
- [24] B. Rushing. *Topological Embeddings*. Academic Press, 1973, Vol 52.
- [25] J. Seade, A. Verjovsky. *Higher dimensional complex Kleinian Groups*. Math Ann 322 (2002), No. 2, 279-300.

- 
- [26] H. Seifert. *Topology of 3-dimensional Fibered Spaces*. Seifert and Threlfall: A textbook of Topology. Academic Press, 1980.
- [27] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc. 1970.
- [28] J. Stallings. *On fibering certain 3-manifolds*. Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Prentice-Hall, Inc., 1962.
- [29] P. Tukia. *On isomorphisms of geometrically finite Mobius groups*. Publ. Math. I.H.E.S. Vol. 61 (1985), 171-214.
- [30] *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Séminaire Orsay, Société Mathématique de France. Astérisque 66-67, 1979.
- [31] W. P. Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Notes. Princeton University 1976-1979.
- [32] W. P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, volume 1. Princeton Mathematical Series 35, Princeton University Press, 1997.
- [33] A. Verjovsky. *Sistemas de Anosov*. Monografías del IMCA, XII-ELAM. 1999.
- [34] H. E. Winkelnkemper. *Manifolds as open books*. Bul. Amer. Math. Soc. Vol. 79 (1973), 45-51.
- [35] E. C. Zeeman. *Twisting Spun Knots*. Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 471-495.

