

0118/3



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO FACULTAD DE INGENIERÍA

**RESPUESTA ESTOCÁSTICA DE
ESTRUCTURAS HISTERÉTICAS
SUJETAS A SISMOS**

T E S I S D O C T O R A L

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POR: FRANCISCO LEONEL SILVA GONZÁLEZ

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA
(E S T R U C T U R A S)



DIRECTORA DE TESIS: DRA. SONIA ELDA RUIZ GÓMEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.

OCTUBRE 2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta investigación pudo llevarse a cabo gracias al invaluable apoyo
brindado por la Dirección General de Estudios de Posgrado de la
Universidad Nacional Autónoma de México y por CONACYT dentro del
proyecto 31210-U "Método de Linealización Equivalente Estocástica
Aplicado a Estructuras Sujetas a Sismos Intensos"

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

R E S U M E N

Debido al comportamiento no lineal común que exhibe la mayoría de las estructuras sometidas a temblores, es necesario contar con métodos de análisis de sistemas no lineales excitados aleatoriamente.

El objetivo general del trabajo es proponer y calibrar una herramienta eficaz y versátil para estimar las respuestas estocásticas de sistemas estructurales no lineales histeréticos sujetos a excitaciones sísmicas aleatorias. Se propone un criterio de linealización equivalente estocástica que consiste en reemplazar el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan el comportamiento del sistema estructural por un conjunto equivalente de ecuaciones diferenciales lineales. A diferencia de otros criterios de linealización, el propuesto toma en cuenta la naturaleza no gaussiana de la respuesta.

Se propone un modelo que representa adecuadamente la evolución de la función de densidad de probabilidad de la respuesta obtenida con simulación de Monte Carlo. Con este modelo se calculan los coeficientes linealizadores no gaussianos quedando definidos por expresiones cerradas.

El método propuesto se calibra con resultados de simulación de Monte Carlo y se compara con dos técnicas de linealización estocástica propuestas en la literatura. Se encuentra razonablemente preciso llegando a ser mejor que las técnicas de linealización mencionadas. Se hacen recomendaciones sobre el intervalo de aplicabilidad del método y se señalan algunas técnicas para mejorar su precisión.

También se demuestra que existe un error en los coeficientes linealizadores gaussianos que han sido publicados en diversos trabajos internacionales y que son comúnmente utilizados en diversas aplicaciones. Además de estudiar el error, se proponen las expresiones correctas para dichos coeficientes.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A B S T R A C T

Due to the non-linear common behavior that exhibits most of structures subject to earthquakes, it is necessary to have methods for analysis of nonlinear systems subject to random loads or inputs.

The general objective of this work is to propose and to calibrate an effective and versatile tool to estimate the stochastic response of hysteretic non-linear structural systems subject to earthquakes. It is proposed a stochastic equivalent linearization approach that consists in replacing the set of non-linear differential equations that govern the behavior of structural system by an equivalent set of linear differential equations. Contrary to other linearization approaches, this proposal considers the non-gaussian characteristics of the response.

It gives a model that represents appropriately the evolution of the probability density function of response obtained with Monte Carlo simulation. With this model the non-gaussian linearization coefficients are calculated and defined by closed expressions.

The suggested method is calibrated with results of Monte Carlo simulation and it is compared with two stochastic linearization techniques proposed in the literature. It is reasonably precise, and it is even better than the linearization techniques mentioned previously. Recommendations are made about the applicability range of the method and some techniques are pointed out to improve their precision.

It is also demonstrated that an error exists in the gaussian linearization coefficients that have been published in diverse international papers and that are commonly utilized in diverse applications. Besides studying the error, the correct expressions are proposed for these coefficients.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Í N D I C E

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUCCIÓN | |
| 1.1 INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.2 OBJETIVO GENERAL DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN | 4 |
| 2. MODELO ESTOCÁSTICO DE LA EXCITACIÓN SÍSMICA | |
| 2.1 INTRODUCCIÓN | 5 |
| 2.2 MODELOS ESTACIONARIOS | 6 |
| 2.2.1 Modelo de Kanai-Tajimi | 6 |
| 2.2.2 Modelo de Clough-Penzien | 8 |
| 2.3 MODELOS NO ESTACIONARIOS | 8 |
| 2.3.1 Modelo evolutivo | 9 |
| 2.4 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES MODULADORAS Y DE LOS FILTROS | 11 |
| 2.4.1 Función de modulación de amplitud | 12 |
| 2.4.2 Función de modulación de frecuencia | 13 |
| 2.4.3 Estimador de la densidad espectral de potencia | 13 |
| 2.4.4 Estimación de los parámetros del filtro. | 15 |
| 2.5 SIMULACIÓN DE ACELEROGRAMAS SÍSMICOS | 15 |
| 2.5.1 Simulación de procesos gaussianos estacionarios | 16 |
| 2.5.2 Simulación de procesos gaussianos no estacionarios | 17 |
| 3. MÉTODO DE LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA | |
| 3.1 INTRODUCCIÓN | 18 |
| 3.2 VIBRACIÓN ALEATORIA DE SISTEMAS LINEALES. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO | 19 |
| 3.3 EL MÉTODO DE LA LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA | 24 |
| 3.4 LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE GAUSSIANA | 27 |
| 3.4.1 Desarrollo de las ecuaciones de movimiento para un sistema de un grado de libertad | 28 |

| | |
|--|-----|
| 4. MODELOS DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA | |
| 4.1 INTRODUCCIÓN | 54 |
| 4.2 DENSIDADES DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA OBTENIDAS MEDIANTE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO | 55 |
| 4.3 MODELO PROPUESTO PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA | 58 |
| 4.3.1 Cálculo de los parámetros $\sigma_{z_{00}}$, $\sigma_{z_{01}}$, \bar{p} y \bar{z}_x de la fdp propuesta | 62 |
| 4.4 OTROS MODELOS | 72 |
| 4.4.1 Función de densidad uniforme | 73 |
| 4.4.2 Suma de funciones de probabilidad | 76 |
| 4.4.3 Transformación de variables | 77 |
| 5. LINEALIZACIÓN ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE NO GAUSSIANA | |
| 5.1 INTRODUCCIÓN | 80 |
| 5.2 COEFICIENTES LINEALIZADORES NO GAUSSIANOS | 81 |
| 5.3 CALIBRACIÓN DEL CRITERIO PROPUESTO | 85 |
| 6. CONCLUSIONES | |
| 6.1 CONCLUSIONES | 136 |
| 6.2 RECOMENDACIONES Y ESTUDIOS FUTUROS | 142 |
| 6.2.1 Factores correctivos | 143 |
| 6.2.2 Refinamiento del método | 144 |
| 6.2.3 Aspectos a desarrollar para promover el uso del método propuesto en aplicaciones prácticas | 146 |
| 6.2.4 Modelos matemáticos para la estimación de parámetros estadísticos de las respuestas máximas para fines de diseño sísmico basado en confiabilidad | 147 |
| REFERENCIAS | 151 |
| APÉNDICE A. UN MODELO PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA HISTERÉTICO | 156 |
| APÉNDICE B. COEFICIENTES LINEALIZADORES NO GAUSSIANOS | 166 |

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En el diseño sismo-resistente resulta impráctico diseñar para que una estructura resista las acciones sísmicas, de naturaleza aleatoria, en su intervalo de comportamiento elástico. En la mayoría de los diseños convencionales los elementos estructurales de edificios reales sujetos a niveles altos de cargas dinámicas exhiben un comportamiento histerético significativo. En otros casos, cuando se emplean dispositivos antisísmicos por ejemplo los de control pasivo, también existe un comportamiento histerético de dichos elementos. Debido al comportamiento no lineal común que exhibe la mayoría de las estructuras, sea en elementos estructurales o en dispositivos adicionales, es necesario contar con métodos de análisis de sistemas no lineales excitados aleatoriamente.

Por otra parte, la consideración de incertidumbres dentro de los procesos de análisis y diseño de estructuras y componentes mecánicos en términos cuantitativos ha progresado considerablemente, particularmente en la década anterior. Sus ventajas respecto a lograr diseños

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

más racionales son reconocidas ya por un amplio grupo de ingenieros de la práctica de otros países. Esto se refleja por ejemplo, en la introducción de códigos basados en probabilidad, i.e. EUROCODE dentro de la comunidad europea en 1993 y los procedimientos de diseño presentados por el comité VISION 2000. Sin embargo, algunas áreas tales como en las que se analizan las estructuras bajo excitación estocástica, por ejemplo los temblores, se requieren de análisis más sofisticados con el fin de proporcionar información acerca de las propiedades de su respuesta. Para este propósito se requieren análisis no lineales de sistemas de múltiples grados de libertad bajo excitaciones aleatorias no estacionarias.

La teoría de vibración aleatoria es actualmente una herramienta indispensable en el análisis y diseño de una amplia variedad de sistemas ingenieriles. Por ejemplo, el análisis y diseño de aeronaves sujetas a turbulencias atmosféricas, edificios y puentes bajo la acción cargas de viento o sísmicas, barcos y plataformas marinas sujetos a viento y olas, y vehículos que se desplazan en superficies rugosas están basados frecuentemente en técnicas de *vibración aleatoria*. El uso de modelos deterministas que ignoren las incertidumbres inherentes en el viento, sismo, turbulencia atmosférica, rugosidad de la superficie y otras excitaciones pueden resultar en errores graves en el análisis así como un diseño insatisfactorio.

Se han desarrollado varias técnicas para determinar la respuesta probabilista de sistemas no lineales. Se citan las siguientes To (1984), Roberts (1981), Branstetter *et al.* (1988) y Soong y Grigoriu (1993).

1. *Linealización Equivalente Estocástica*
2. *Procesos de Difusión*
3. *Promedio Estocástico*
4. *Técnicas de Perturbación*
5. *Sistemas No lineales Equivalentes*
6. *Simulación de Monte Carlo*

El método de *linealización equivalente estocástica* es uno de los métodos más populares dentro de todos los métodos aproximados para el análisis dinámico de sistemas no lineales bajo excitación aleatoria ya que ha demostrado ser una técnica versátil y computacionalmente eficiente, particularmente para aplicaciones prácticas. Debido a su relevancia en el contexto del diseño

sísmico, las no linealidades de tipo histerético juegan un papel importante dentro de los problemas de la ingeniería civil. Por lo anterior, la aplicabilidad de la linealización equivalente estocástica tiene un gran impacto en esta área.

La *linealización equivalente estocástica* consiste en resolver un problema no lineal reemplazando el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de movimiento por un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales lineales; la diferencia entre ambos sistemas se minimiza en algún sentido apropiado. El método recibió un mayor impulso cuando Kazakov (1965) y Atalik y Utku (1976) mostraron que para respuestas gaussianas el cálculo de los coeficientes linealizadores se realizaba de una forma mucho más simple que para otro tipo de respuestas. Desde entonces el método ha sido aplicado extensamente en ingeniería estructural para la predicción de la estadística de la respuesta de edificios. Actualmente se considera como el método más versátil para el análisis de vibración aleatoria de estructuras no lineales (Lin *et al*, 1986). Sin embargo, se ha encontrado una deficiencia importante del método cuando se considera que la respuesta es gaussiana, por ejemplo se produce una subestimación de la desviación estándar del desplazamiento del orden de 45% (Silva, 1988) con la consecuencia de que la predicción de las probabilidades de falla se desvían mucho de los resultados de la simulación, especialmente para estructuras con demandas de ductilidad altas. Esto se debe al hecho de que el comportamiento gaussiano se supone para todas las variables, mientras que en realidad la fuerza restauradora está obligada a caer en una región finita lo que implica que su densidad de probabilidad es no gaussiana.

Como consecuencia, se han hecho varios intentos en los últimos años para superar este problema. Pradlwarter y Schüeller (1991) y Schüeller, Pandey y Pradlwarter (1994) han propuesto algunas técnicas numéricas para obtener una mejor estadística de la respuesta; pero con el fin de obtener el resultado deseado estas técnicas requieren el uso de transformaciones no lineales de variables gaussianas, simulación de Monte Carlo y solución de problemas de mínimos cuadrados los cuales, en el caso no estacionario, implican una gran sobrecarga de labor computacional. Aún si se realizan las transformaciones no lineales, el procedimiento sigue subestimando la desviación estándar del desplazamiento del orden de 25% como se ha visto en Schüeller, Pandey y Pradlwarter (1994). Por otro lado, el uso de una densidad gaussiana truncada más pulsos de Dirac propuesto por Kimura, Yasumuro y Sakata (1994) para un oscilador elastoplástico es muy preciso pero requiere el cálculo de varias integrales dobles en cada instante de tiempo, lo que incrementa

la cantidad de cálculos. Wen y Yeh (1989) derivaron una expresión empírica para el caso especial de vibración biaxial de edificios que pueden modelarse como sistemas masa-amortiguador-resorte. Debido a que se requiere del conocimiento del grado de no-linealidad alcanzado por el oscilador con el fin de calcular los coeficientes involucrados en la expresión mencionada y a que estos coeficientes dependen de la localización del piso, la corrección debe aplicarse *a posteriori* y su uso, en general, está limitado a ese tipo de estructuras. Park (1992) intenta corregir los resultados dados por el método convencional con bases puramente empíricas. Las ecuaciones que corrigen los resultados están basadas en las siguientes situaciones específicas: a) una excitación sísmica modelada por el espectro de Iwan y Paparizos (1988) cuyo pico se localiza en la frecuencia inicial del sistema histerético que se vaya a analizar y b) una función moduladora de amplitud que también depende de la frecuencia inicial del sistema histerético que se vaya a analizar. Como resultado este método empírico da estimaciones erróneas en casos diferentes a los usados para su calibración, como lo ha observado Hurtado (1998).

Por otro lado, Hurtado (1998) ha propuesto un algoritmo que resulta de la modificación del método clásico conocido como linealización equivalente gaussiana (LEG). El método hace uso de las ventajas matemáticas de las funciones gaussianas y de la Delta de Dirac. Esto permite, para el caso del modelo de histéresis de Bouc-Wen-Baber (Baber y Wen, 1981), el cálculo de expresiones de forma exacta para los coeficientes linealizadores, preservando así la eficiencia computacional del método gaussiano convencional. La comparación con los resultados de simulación muestra una gran mejora en la estimación de la estadística del desplazamiento. La desventaja del método es que la función de densidad de probabilidad (*f_dp*) empleada no reproduce adecuadamente a la *f_dp* "real" de la variable histerética y por lo tanto los parámetros en los que se basa el método dependen fuertemente del tipo de excitación y de la demanda de ductilidad.

1.2 OBJETIVO GENERAL DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta investigación es proponer y calibrar una herramienta eficaz y versátil para estimar las respuestas estocásticas sísmicas de sistemas no lineales. Se plantea un criterio de linealización equivalente que toma en cuenta la naturaleza no gaussiana de la respuesta del sistema no lineal. La teoría general del método se expone para sistemas de múltiples grados de libertad; sin embargo, la calibración se realiza con análisis paramétricos de sistemas de un grado de libertad.

CAPÍTULO

2

MODELO ESTOCÁSTICO DE LA EXCITACIÓN SÍSMICA

2.1 INTRODUCCIÓN

Los sismos tienen características impredecibles en el sentido determinista. Son aleatorios en doble sentido ya que no sólo la ocurrencia en el tiempo es estocástica sino también su movimiento espacial. Debido a las enormes incertidumbres en el conocimiento de las características de los sismos es necesario que estos fenómenos se consideren como procesos aleatorios caracterizados por sus propiedades estadísticas. El uso de modelos deterministas que ignoren las incertidumbres inherentes en el viento, sismo, turbulencia atmosférica y otras fuentes de excitación puede dar lugar a errores graves en el análisis así como a un diseño insatisfactorio.

En este capítulo se describen algunos modelos estocásticos sísmicos. Esencialmente se trata con modelos no estacionarios cubriendo el proceso del cálculo de sus parámetros a partir de registros de sismos reales. Se trata también sobre la simulación digital de acelerogramas sísmicos necesarios

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

para el análisis de Monte Carlo el cual aquí se usa para juzgar la bondad del método de linealización equivalente propuesto en esta tesis.

La atención se centra en modelos estocásticos basados en filtros de segundo orden, debido al hecho de que ellos pueden integrarse fácilmente a las ecuaciones de movimiento (característica deseable que está ausente en otro tipo de modelos espectrales orientados a aplicaciones sísmológicas)

2.2 MODELOS ESTACIONARIOS

Un proceso estocástico se dice que es estacionario o estrictamente estacionario si todas sus distribuciones de probabilidad asociadas permanecen invariantes bajo cualquier cambio arbitrario del parámetro tiempo. En un problema físico con frecuencia es difícil determinar si la característica anterior se cumple. Para propósitos prácticos es de interés definir una clase más amplia de procesos estocásticos estacionarios denominados débilmente estacionarios, estacionarios de segundo orden o estacionarios en el sentido amplio. Un proceso estocástico es débilmente estacionario si su media es constante y su autocorrelación para dos instantes de tiempo depende sólo de la diferencia entre dichos instantes.

Los problemas en donde están involucrados procesos estacionarios pueden ser estudiados mediante un análisis de Fourier. El estudio de esta categoría de procesos es de gran utilidad para el entendimiento de los procesos aleatorios no estacionarios.

2.2.1 Modelo de Kanai-Tajimi

Los análisis de *Fourier* de acelerogramas de movimientos fuertes muestran que los *espectros* de amplitudes de *Fourier* no son constantes aún en una banda estrecha de frecuencias. Ellos son de carácter oscilatorio, existen una o varias frecuencias dominantes del movimiento y se amortiguan en frecuencias altas. La característica anterior sugiere el uso de un *ruido blanco filtrado* de duración limitada. Kanai (1957) y Tajimi (1960) han sugerido como modelo de aceleración horizontal (a_{KT}) la siguiente expresión:

$$a_{KT}(t) = -2\xi_g \omega_g \dot{x}_g - \omega_g^2 x_g \quad (2.1)$$

en donde los parámetros ξ_g y ω_g se consideran deterministas y pueden interpretarse como el amortiguamiento y la frecuencia equivalentes del terreno, respectivamente. x_g es la respuesta de un filtro de segundo orden a un ruido blanco estacionario $w(t)$, la cual se obtiene al resolver:

$$\ddot{x}_g + 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g = -w(t) \quad (2.2)$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene la *función de transferencia* $h_{KT}(\omega)$ de a_{KT}

$$h_{KT}(i\omega) = \frac{\omega_g^2 + i2\xi_g \omega_g \omega}{\omega_g^2 - \omega^2 + i2\xi_g \omega_g \omega} \quad (2.3)$$

y la densidad espectral de potencia está dada por

$$S_{KT}(\omega) = |h_{KT}(i\omega)|^2 s_0 = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} s_0 \quad (2.4)$$

donde s_0 es la amplitud de la *densidad espectral bilateral* del ruido blanco estacionario $w(t)$. El filtro de Kanai-Tajimi atenúa las componentes en frecuencia alta y amplifica aquellas componentes en la vecindad de $\omega = \omega_g$. Obsérvese que cuando $\omega \rightarrow 0$ las amplitudes de la densidad espectral tienden a s_0 y este es el problema principal del modelo ya que no corresponde a la energía nula observada en frecuencias nulas de espectros de potencia de la mayoría de los sismos reales.

La varianza del proceso, dada por la integral de la densidad espectral de potencia en el rango completo de frecuencias, es

$$\sigma_{KT}^2 = \pi \frac{\omega_g (1 + 4\xi_g^2)}{4\xi_g} s_0 \quad (2.5)$$

2.2.2 Modelo de Clough-Penzien

El problema del modelo anterior conduce a errores serios en el análisis de estructuras no lineales. En tal caso resulta más adecuado introducir el filtro de Clough-Penzien (Clough y Penzien, 1975) al modelo anterior. El modelo de Clough-Penzien resulta de pasar la respuesta del filtro anterior $a_{KT}(t)$ por un segundo filtro que atenúa componentes de baja frecuencia. La dinámica del filtro adicional es gobernada por la siguiente ecuación lineal

$$\ddot{x}_f + 2\xi_f \omega_f \dot{x}_f + \omega_f^2 x_f = -a_{KT}(t) \quad (2.6)$$

donde el parámetro de amortiguamiento ξ_f y el de frecuencia ω_f se consideran también deterministas. El modelo se define por la respuesta en aceleración del segundo filtro, es decir,

$$a_{CP}(t) = \ddot{x}_f = 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g - 2\xi_f \omega_f \dot{x}_f - \omega_f^2 x_f \quad (2.7)$$

por lo tanto su densidad espectral es

$$S_{CP}(\omega) = \left(\frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \left(\frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \right) S_0 \quad (2.8)$$

y la varianza del modelo es:

$$\sigma_{CP}^2 = \pi S_0 \frac{\omega_g^4 (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 [\xi_g \omega_f^3 + \xi_f \omega_g^3 + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g)]}{2\xi_g \xi_f [(\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2 \omega_f^2 (\xi_g^2 + \xi_f^2) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\omega_g^2 + \omega_f^2)]} \quad (2.9)$$

2.3 MODELOS NO ESTACIONARIOS

Como se sabe, los movimientos del terreno son una superposición de ondas sísmicas con rapidez de propagación, amplitudes y frecuencias diferentes. Son generalmente no estacionarios

en intensidad y frecuencia por lo que para que el diseño sísmico de un sistema estructural sea racional, debe considerarse dicho carácter no estacionario. La acción sísmica puede modelarse como proceso no estacionario de dos formas:

1. Como un proceso uniformemente modulado, es decir, un proceso estacionario transformado a un proceso no estacionario solo en amplitud.
2. Como un proceso con densidad espectral de potencia evolutiva, es decir, uno en el que no sólo sus amplitudes varían sino también el contenido de frecuencia a lo largo del tiempo.

Enseguida se describe este último tipo de modelo ya que el primero puede considerarse como un caso particular del segundo.

2.3.1 Modelo evolutivo

Se han propuesto varios modelos para el análisis de sistemas ante la acción sísmica considerando su carácter no estacionario. Algunos de ellos están basados en la teoría del espectro evolutivo desarrollada por Priestley (1981). Destacan los trabajos de Grigoriu, *et al.* 1988, Spanos, *et al* (1992), Beck y Papadimitrou (1993), Fan y Ahmadi(1990), Kameda y Nojima (1988), Faravelli (1988) y Carli (1992,1995) entre otros.

El modelo usado en este trabajo se basa en el llamado *espectro instantáneo* desarrollado por Yeh y Wen (1989). Éste se basa en el concepto de modulación de frecuencia. En este caso, el movimiento sísmico se modela como:

$$A(t) = c(t) \zeta(\kappa(t)) \tag{2.10}$$

donde $c(t)$ es una función determinista que controla la amplitud de $A(t)$; $\zeta(\kappa)$ es un ruido blanco filtrado estacionario en la escala κ ; que caracteriza la forma de la densidad espectral de $A(t)$, y $\kappa(t)$ es una función del tiempo continua y estrictamente creciente llamada función de modulación de frecuencia la cual determina la tasa de cambio del contenido de frecuencias de $A(t)$. Por lo tanto el comportamiento no estacionario del proceso es controlado por las funciones $c(t)$ y $\kappa(t)$. La ventaja

de este modelo es que puede modelar fácilmente excitaciones sísmicas a través de filtros. La modulación se puede introducir a los filtros convencionales de Kanai-Tajimi y Clough-Penzien introduciendo la función de escala del tiempo $\kappa(t)$ y usando la regla de la cadena para obtener las siguientes relaciones:

$$x' = \frac{\dot{x}}{\kappa} \quad \text{y} \quad x'' = \left(\dot{x} - \frac{\kappa'}{\kappa} \dot{x} \right) \frac{1}{\kappa^2} \quad (2.11)$$

donde un apóstrofe indica derivada respecto a κ , y un punto indica derivada respecto al tiempo. Al usar estas expresiones, el filtro convencional de Kanai-Tajimi se transforma en:

$$\ddot{x}_g + \left(2\xi_g \omega_g \kappa' - \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa} \right) \dot{x}_g + \omega_g^2 \kappa^2 x_g = -\kappa^2 c(t) w(\kappa(t)) \quad (2.12)$$

y el filtro de Clough-Penzien en:

$$\ddot{x}_f + \left(2\xi_f \omega_f \kappa' - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \dot{x}_f + \omega_f^2 \kappa^2 x_f = -\kappa^2 \left(-2\xi_g \omega_g \frac{\dot{x}_g}{\kappa} - \omega_g^2 x_g \right) \quad (2.13)$$

Las expresiones que dan la respuesta de aceleración de cada filtro son:

$$a_{KT-M}(t) = -2\xi_g \omega_g \frac{\dot{x}_g}{\kappa} - \omega_g^2 x_g \quad (2.14)$$

y

$$a_{CP-M}(t) = \frac{2\xi_g \omega_g}{\kappa} \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g - \frac{2\xi_f \omega_f \dot{x}_f}{\kappa} - \omega_f^2 x_f \quad (2.15)$$

La densidad espectral de la respuesta modulada del filtro de Kanai-Tajimi es:

$$S_{KT-I}(t, \omega) = c^2(t) \frac{1}{\kappa(t)} S_{KT} \left(\frac{\omega}{\kappa(t)} \right) \quad (2.16)$$

donde $S_{KT}(\omega)$ es el espectro definido por la ecuación (2.4). La densidad espectral de la respuesta modulada del filtro de Clough-Penzien es:

$$S_{CP-I}(t, \omega) = c^2(t) \frac{1}{\kappa(t)} S_{CP} \left(\frac{\omega}{\kappa(t)} \right) \quad (2.17)$$

donde $S_{CP}(\omega)$ es el espectro definido por la ecuación (2.8)

Si los parámetros de la función $c(t)$ se ajustan de tal forma que la varianza del ruido blanco filtrado estacionario $\zeta(\phi)$ sea uno, de la ecuación (2.17) se nota que la varianza del proceso aleatorio modulado en amplitud y frecuencia son controladas solamente por $c(t)$.

2.4 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES MODULADORAS Y DE LOS FILTROS

Enseguida se describe el proceso de cálculo de las funciones $c(t)$ y $\kappa(t)$ y de los parámetros $\xi_g, \omega_g, \xi_f, \omega_f$ y s_0 que definen filtro de Clough-Penzien, para poder así establecer un modelo para el proceso estocástico de excitación. El procedimiento que se describe enseguida resulta adecuado para sitios en donde se encuentran disponibles acelerogramas registrados en el pasado y que son estadísticamente representativos de sismos futuros. Para sitios en donde no existe información suficiente, la función de modulación de la frecuencia puede construirse de la consideración del patrón de propagación de las ondas sísmicas o de movimientos registrados en estaciones cercanas. Las funciones de intensidad dependerán de la duración de eventos futuros. Se puede usar la duración efectiva que se ha visto que es función de la magnitud ó intensidad de Mercalli y de la distancia epicentral (Eliopoulos y Wen, 1991). Los parámetros del espectro de Clough-Penzien pueden determinarse a partir de espectros empíricos de amplitudes de Fourier de acelerogramas que son función de la fuente, trayectoria y parámetros del sitio (Trifunac y Lee, 1989).

En este trabajo se recurre a la hipótesis de ergodicidad, de tal forma que las propiedades del proceso aleatorio de excitación se calculan a partir de una realización, $a(t)$, de éste; de duración t_T .

2.4.1 Función de modulación de amplitud

Existen en la literatura varias expresiones para modelar la variación de la amplitud de un proceso estocástico de excitación, ver por ejemplo Shinozuka y Sato (1967) y Amin y Ang(1966). La función moduladora $c(t)$ que se usa en este trabajo es la propuesta por Yeh y Wen (1989):

$$c^2(t) = a \frac{t^b}{d + t^e} e^{-ct} \quad (2.18)$$

Los valores de los parámetros a , b , c , d y e de esta función se determinan con base en la energía instantánea de la realización $a(t)$ calculada como:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t a^2(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Considerando que $a(t)$ es una realización del proceso $A(t)$ definido por la ecuación (2.10), el valor esperado de la energía instantánea del proceso es:

$$E[\varepsilon(t)] = \int_0^t E[A^2(\tau)] d\tau = \int_0^t E[c^2(\tau) \zeta^2(\kappa(\tau))] d\tau \quad (2.20)$$

al considerar que $c(t)$ es determinista, que ζ tiene media cero y establecer $E[\zeta^2(\kappa(t))] = 1$, se tiene que la esperanza de la energía instantánea es controlada completamente por $c(t)$

$$E[\varepsilon(t)] = \int_0^t c^2(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

Así entonces, la identificación de los parámetros de la función moduladora se puede hacer obligando a que la esperanza de la energía instantánea del proceso de excitación y la energía instantánea de la realización $a(t)$ sean iguales, esto es:

$$\int_0^t c^2(\tau) d\tau = \int_0^t a^2(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

Para este propósito debe recurrirse a algoritmos de ajuste no lineal (Bard, 1974) y conviene realizar el ajuste con $\int_0^t c^2(\tau) d\tau$, y no con $c^2(t)$.

2.4.2 Función de modulación de frecuencia

Una función que es estrictamente creciente y que esta directamente relacionada con la evolución de la frecuencia de un registro sísmico es la tasa de cruces por el eje del tiempo (μ_0). El modelo matemático para la función de modulación de frecuencia propuesto por Yeh y Wen (1989), es:

$$\kappa(t) = \frac{\mu_0(t)}{\mu_0(t_s)} \quad (2.23)$$

donde la forma funcional de la tasa de cruces es:

$$\mu_0(t) = \sum_{i=1}^m r_i t^i \quad (2.24)$$

El tiempo t_s corresponde al comienzo de la parte intensa del movimiento y puede ser estimada por inspección visual como el primer punto de inflexión de la función de energía instantánea (ecuación 2.19) de la realización $a(t)$. El punto en el denominador de la ecuación (2.23) indica derivada respecto al tiempo. Los parámetros r_i del modelo de la tasa de cruces se estiman también por un ajuste no lineal (Bard, 1974) usando la tasa de cruces de la realización $a(t)$.

2.4.3 Estimador de la densidad espectral de potencia

Un estimador de la densidad espectral de una realización $a_e(t)$ de un proceso aleatorio estacionario ergódico de longitud finita T ; es: (Parzen 1962; Vanmarcke, 1983; Silva, 1998):

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} |A(\omega)|^2 \quad (2.25)$$

donde $A(\omega)$ es la transformada de Fourier de $a(t)$, definida por:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^T a_e(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.26)$$

Sin embargo al analizar los registros sísmicos resulta claro que las aceleraciones del terreno son inherentemente *no estacionarias*. No obstante un proceso *estacionario* puede ser, en ciertas ocasiones, una buena aproximación al proceso aleatorio de movimiento del terreno. Para aplicar la ecuación (2.25) es necesario transformar una señal no estacionaria (acelerograma $a(t)$) en una estacionaria equivalente; empleando cualquiera de las dos técnicas siguientes:

1. Usando una aproximación para la duración en la cual el movimiento puede considerarse estacionario o aquella en la que se concentra la mayor parte de la energía del movimiento. La duración de la parte intensa de la realización $a(t)$ puede calcularse mediante la expresión propuesta por Vanmarcke y Lai (1980)

$$T_I = \frac{2\varepsilon}{(a_{\max})^2} \ln\left(\frac{2T_I}{T_e}\right) \quad (2.27)$$

donde ε es la energía total del registro $a(t)$ de duración t_T : $\varepsilon = \int_0^{t_T} a^2(\tau) d\tau$, a_{\max} la aceleración absoluta máxima de $a(t)$ y T_e es el periodo dominante de $a(t)$. Las principales características del valor de T_I son: *i)* se considera la energía total del movimiento y *ii)* hay una relación congruente entre a_{\max} y la aceleración media cuadrática del movimiento. Si T_e es conocido la ecuación (2.27) puede resolverse para T_I usando algún método numérico. La duración T_I puede usarse en las ecuaciones (2.25) y (2.26) para estimar la densidad espectral.

2. Transformando la señal no estacionaria $a(t)$ de duración t_T en una señal estacionaria con la misma duración. Esta técnica consiste en usar las funciones moduladoras de intensidad $c(t)$ y

de frecuencia $\kappa(t)$ de la siguiente manera: La variación de las amplitudes se “remueve” usando la función $c(t)$.

$$a_{ea}(t) = \frac{a(t)}{c(t)} \tag{2.28}$$

Luego la señal resultante se mapea en el eje del tiempo modificado κ

$$a_e(t) = a_{ea}(\kappa(t)) \tag{2.29}$$

La señal resultante $a_e(t)$ puede usarse para estimar la densidad espectral usando la duración total t_T .

2.4.4 Estimación de los parámetros del filtro.

Para calcular los parámetros $\xi_g, \omega_g, \xi_f, \omega_f$ y s_0 que definen filtro de Clough-Penzien, no existe otra alternativa que llevar a cabo un ajuste entre la función $S_{CP}(\omega)$ (ecuación 2.8) y el estimador espectral $S(\omega)$ (ecuación 2.25) usando una técnica adecuada de estimación paramétrica no lineal. El valor de s_0 que se obtiene del ajuste no lineal se corrige para obligar a que la varianza del modelo del proceso sea igual a uno, con el fin de que la esperanza de la energía sea completamente controlada por $c(t)$ (ecuaciones 2.20 y 2.21). Para este fin puede usarse la ecuación (2.9) para despejar s_0 y luego sustituir en la expresión resultante $\sigma_{CP}^2=1$ y el valor de los parámetros ξ_f, ω_f, ξ_g y ω_g determinados a partir del ajuste no lineal. Los parámetros ξ_g, ω_g, ξ_f y ω_f principalmente dan forma a $S_{CP}(\omega)$, y s_0 controla su amplitud.

2.5 SIMULACIÓN DE ACELEROGRAMAS SINTÉTICOS

En los párrafos que siguen se describe el procedimiento para simular acelerogramas sintéticos a partir de la densidad espectral unilateral de potencia del proceso aleatorio que se quiere modelar. Los acelerogramas mencionados corresponden entonces a realizaciones sintéticas de un proceso

estocástico gaussiano, debido a que este tipo de procesos quedan completamente definidos por información estadística de segundo orden que esta dada indirectamente por la densidad espectral de potencia.

2.5.1 Simulación de procesos gaussianos estacionarios

Las realizaciones pueden generarse con la siguiente expresión (Shinozuka, 1987)

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \sqrt{2G(\omega_j)\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \theta_j) \quad (2.30)$$

donde $G(\omega)$ es la densidad espectral unilateral de potencia definida por

$$G(\omega) = 2S(\omega) \quad ; \quad \omega > 0 \quad (2.31)$$

$G(\omega)$ se discretiza en n frecuencias ω_j las cuales tienen asociados ángulos de fase θ_j uniformemente distribuidos entre 0 y 2π . Evidentemente

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{max}}{n} \quad (2.32)$$

donde ω_{max} es la frecuencia máxima de la señal seleccionada a través de criterios sismológicos y estructurales.

Se puede demostrar que $X(t)$ es un proceso con media cero y función de autocorrelación

$$R_{XX}(\tau) = \sum_{j=1}^n G(\omega_j)\Delta\omega_j \cos(\omega_j\tau) \quad (2.33)$$

2.5.2 Simulación de procesos gaussianos no estacionarios

La simulación de procesos gaussianos no estacionarios con media cero puede hacerse a través de una simple modificación al algoritmo anterior. En el caso de procesos uniformemente modulados se puede recurrir al algoritmo

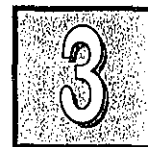
$$X(t) = c(t) \sum_{j=1}^n \sqrt{2G(\omega_j) \Delta\omega} \cos(\omega_j t + \theta_j) \quad (2.34)$$

Para simular acelerogramas de acuerdo al modelo de espectro instantáneo, puede recurrirse al cálculo de la respuesta de filtros lineales variables de segundo orden excitados por realizaciones sintéticas de ruido blanco (ecuaciones 2.12 y 2.13). Otra técnica se basa en usar el espectro de amplitudes de Fourier $A(\omega)$ de una realización $a(t)$ del proceso aleatorio que se pretende modelar (ecuación 2.26). La simulación de un acelerograma modulado en amplitud y frecuencia requiere de los siguientes pasos:

1. Dividir $A(\omega)$ en m regiones no traslapadas $A_i(\omega)$, $i=1,2, \dots, m$
2. Cada región se transforma al dominio del tiempo usando la transformada rápida inversa de Fourier, para obtener m registros $a_i(t)$, $i=1,2, \dots, m$
3. Para cada registro $a_i(t)$ se calculan sus funciones moduladoras de amplitud y frecuencia $c_i(t)$ y $\kappa_i(t)$, $i=1,2, \dots, m$
4. Se remueve la variación de amplitudes y frecuencia de cada registro $a_i(t)$ usando las ecuaciones (2.28) y (2.29) para obtener las señales $a_{e_i}(t)$, $i=1,2, \dots, m$
5. Se calcula la densidad espectral $S_i(\omega)$, $i=1,2, \dots, m$ de cada señal $a_{e_i}(t)$; por ejemplo a través de la transformada rápida de Fourier de la función de autocorrelación de $a_{e_i}(t)$
6. Con cada densidad espectral se genera una señal estacionaria $X_i(\kappa)$ usando la ecuación (2.30)
7. Cada señal obtenida se mapea al eje del tiempo real usando su respectiva función $\kappa_i(t)$ y la señal resultante se multiplica por la función moduladora de amplitud $c_i(t)$
8. El acelerograma sintético no estacionario resulta de sumar los registros obtenidos en el paso anterior, es decir

$$X(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) X_i(t(\kappa_i)) \quad (2.35)$$

CAPÍTULO



MÉTODO DE LA LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe uno de los métodos disponibles para calcular los momentos estadísticos de primero y segundo orden del vector de respuesta de estructuras deterministas no lineales sujetas a vibración aleatoria en su base. El método que se describe se conoce como *linealización equivalente estocástica* (LE). Este no es el único que existe para tal propósito (ver por ejemplo Soong y Grigoriu, 1993; Lin, 1967; Lin y Cai, 1995). Se exponen los fundamentos teóricos de la LE y se señalan las simplificaciones que se realizan en la LE tradicional (gaussiano) mostrando las fuentes de error más importantes (Silva, 1998; Silva y Ruiz, 2000).

3.2 VIBRACIÓN ALEATORIA DE SISTEMAS LINEALES. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

A continuación se describe la técnica de *espacio de estado* que es la más adecuada para el desarrollo de la teoría de vibración aleatoria; algunas de sus ventajas son:

1. Adaptabilidad al cálculo mediante computadora.
2. Extensión directa de sistemas de un grado de libertad (UGL) a sistemas de múltiples grados de libertad (MGL) y,
3. Extensión sencilla para la descripción de sistemas más generales tales como sistemas con parámetros que varían en el tiempo y sistemas con amortiguamiento no lineal.

La ecuación de movimiento de una estructura lineal de n grados de libertad es:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = P(t) \quad (3.1)$$

donde M , C y K son matrices simétricas constantes de $n \times n$ definidas como matrices de inercia, de amortiguamiento viscoso y de rigidez respectivamente. $q(t)$ es un vector de $n \times 1$ de respuestas estructurales generales y $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ son sus derivadas de primero y segundo orden. $P(t)$ es un vector de $n \times 1$ que contiene n fuerzas generalizadas correspondientes a $q(t)$. En este trabajo $P(t)$ se considera un proceso aleatorio.

La ecuación (3.1) puede describirse en la forma espacio de estado, definiendo el vector de estado de $2n \times 1$ como sigue

$$Z(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Así, el sistema original de n ecuaciones diferenciales de segundo orden se transforma en el siguiente sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A Z(t) + F(t) \quad (3.3)$$

donde A se conoce como matriz del sistema y está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

y el vector de cargas externas es

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}P(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La ecuación (3.3) se llama *ecuación de estado* de la estructura. Ésta es completamente equivalente a la ecuación (3.1) ya que cualquiera de ellas puede usarse para determinar la respuesta del sistema, sin embargo la técnica espacio de estado proporciona un marco teórico natural en el que puede desarrollarse la formulación de la vibración aleatoria.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución de los momentos estadísticos de primero y segundo orden de la respuesta aleatoria de una estructura lineal gobernada por la ecuación (3.3), se calcula como sigue. Al tomar esperanzas a todos los términos de la ecuación (3.3) se obtiene:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = A\mu(t) + \mu_F(t) \quad (3.6)$$

donde $\mu(t) = E[Z(t)]$ y $\mu_F(t) = E[F(t)]$. La ecuación anterior satisface la condición inicial $\mu(0) = \mu_0$. Sin pérdida de generalidad, la expresión para la covarianza se calcula enseguida considerando que la media de la excitación y por lo tanto de la respuesta vale cero. La derivada respecto al tiempo de la matriz de covarianza Σ de la variable Z es:

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} E[Z(t) Z^T(t)] = E[Z(t) \{AZ(t) + F(t)\}^T] + E[\{AZ(t) + F(t)\} Z^T(t)] \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = E[Z(t) Z^T(t)]A^T + E[Z(t) F^T(t)] + AE[\dot{Z}(t) Z^T(t)] + E[F(t) Z^T(t)] \quad (3.8)$$

es decir

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = \Sigma(t)A^T + A\Sigma(t) + E[F(t) Z^T(t) + Z(t) F^T(t)] \quad (3.9)$$

Si el proceso de excitación se modela como un ruido blanco modulado en amplitud, es decir

$$F(t) = c(t) W(t) \quad (3.10)$$

donde $W(t)$ es un vector de ruidos blancos estacionarios y $c(t)$ es un vector de funciones deterministas moduladoras de amplitud, entonces se puede demostrar que (Roberts y Spanos, 1990 y Hurtado, 1998)

$$E[F(t) Z^T(t) + Z(t) F^T(t)] = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1}c(t) S_W c^T(t)M^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

en la que S_W es una matriz de intensidades s_0 del ruido blanco. Entonces la ecuación (3.9) queda:

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = A\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T + 2\pi S_F(t) \quad (3.12)$$

donde

$$S_F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1}c(t) S_W c^T(t)M^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Se puede demostrar que la ecuación (3.12) se aplica también al caso en que la excitación tiene media diferente a cero (Soong y Grigoriu, 1993).

Finalmente es importante notar que pueden tratarse con excitaciones no blancas introduciendo filtros a los ruidos blancos. Cuando el proceso de excitación se modela como la respuesta de filtros lineales a ruidos blancos o disparo, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = A Z(t) + B Z_F(t) \quad (3.14)$$

donde B es una matriz que contiene los coeficientes de la combinación lineal de las respuestas Z_F de los filtros. La dinámica de la respuesta de los filtros está gobernada por:

$$\frac{dZ_F(t)}{dt} = D Z_F(t) + W'(t) \quad (3.15)$$

En la que D es una matriz que contiene los coeficientes de los filtros considerados y $W'(t)$ es un vector de ceros excepto el último elemento que corresponde a un ruido blanco estacionario de intensidad unitaria. Las ecuaciones (3.14) y (3.15) pueden agruparse en una sola ecuación que adopta la forma:

$$\frac{dq}{dt} = H(t) q + W \quad (3.16)$$

donde el vector de estado es

$$q(t) = \begin{Bmatrix} Z(t) \\ Z_F(t) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

y

$$H(t) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

y W tiene la misma forma que W' pero es de dimensión mayor.

Obsérvese que el sistema es ahora un sistema aumentado que consiste en los filtros lineales y el sistema original en serie. Sin embargo, se requiere realizar una modificación con el fin de evitar el efecto que introduce la respuesta transitoria de los filtros. Esencialmente, con el fin de formar la excitación del sistema original, debe permitirse que la respuesta de los filtros alcance su estado estacionario antes de que ésta se multiplique por la función moduladora $c(t)$. Analíticamente, este objetivo se consigue seleccionando las condiciones iniciales adecuadas para la matriz de covarianza de la variable de estado $q(t)$, la cual es gobernada por la ecuación diferencial matricial para un sistema excitado por un ruido blanco (ver ecuación 3.12) la que con la presente notación puede escribirse como:

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = H(t)\Sigma(t) + \Sigma(t)H^T(t) + P \quad (3.19)$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\pi s_0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

En la solución de la ecuación (3.19) es esencial comenzar el proceso de integración en el instante en que la respuesta de los filtros ha alcanzado su estado estacionario. En este instante (digamos $t=0$), algunos elementos de Σ que están relacionados directamente con Z_F son diferentes a cero. Para determinar la magnitud de tales elementos, es conveniente particionar la matriz Σ de acuerdo a la ecuación (3.17). Así

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{ZZ} & \Sigma_{ZZ_F} \\ \Sigma_{ZZ_F}^T & \Sigma_{Z_F Z_F} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde $\Sigma_{ZZ} = E[ZZ^T]$, $\Sigma_{ZZ_F} = E[ZZ_F^T]$ y $\Sigma_{Z_F Z_F} = E[Z_F Z_F^T]$. Si el sistema está en reposo en el instante $t=0$, resulta claro que la respuesta será cero y todos los elementos de Σ_{ZZ} y Σ_{ZZ_F} serán

nulos en dicho instante. Sin embargo, los elementos de $\Sigma_{Z_F Z_F}$, en $t=0$, corresponderán a la respuesta estacionaria de los filtros. Sea $\Sigma_{Z_F Z_F}^s$ la matriz de covarianza estacionaria de Z_F la cual está gobernada por:

$$D\Sigma_{Z_F Z_F}^s + \Sigma_{Z_F Z_F}^s D^T + P' = 0 \quad (3.22)$$

donde P' tiene la misma forma que P pero de dimensión menor.

En resumen, para determinar la covarianza de la respuesta del sistema original es necesario seguir los siguientes pasos:

- a) Resolver la ecuación (3.22) para determinar la matriz de covarianza estacionaria de la respuesta de los filtros $\Sigma_{Z_F Z_F}^s$.
- b) Integrar numéricamente la ecuación (3.19) con la siguiente condición inicial:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{Z_F Z_F}^s \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.3 EL MÉTODO DE LA LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA

La ecuación (3.1) resulta un modelo matemático adecuado para estudiar el comportamiento de sistemas mecánicos involucrados en diversos problemas prácticos y juega un papel importante en la teoría clásica de vibración lineal. Sin embargo, existen sistemas físicos para los cuales las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son insuficientes para describir su comportamiento. En la mayoría de estos casos, las estructuras tienen comportamiento *no lineal* antes de que algunos de sus componentes estructurales fallen. Numerosos sistemas dinámicos exhiben comportamiento no lineal por ejemplo en las fuerzas restauradoras y/o en las fuerzas de amortiguamiento. La consideración del comportamiento *no lineal* es indispensable en los casos donde las estructuras deben analizarse para eventos de carga extraordinarios.

En el caso más general, los modelos matemáticos de sistemas no lineales son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales *no lineales* de orden superior con coeficientes variables. En otros casos, un nivel de generalidad adecuado resulta de considerar la siguiente ecuación:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = P(t) \quad (3.24)$$

donde M , C y K denotan a matrices constantes de $n \times n$ definidas como matrices de inercia, de amortiguamiento y de rigidez, respectivamente y $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es un vector de funciones no lineales del vector de respuestas generales q y de sus derivadas, y $P(t)$ es un vector de $n \times 1$ de procesos aleatorios de la variable independiente t .

Como se sabe, no existen métodos simples para resolver problemas generales de vibración no lineal (Soong y Grigoriu, 1993; Roberts y Spanos, 1990). Se puede recurrir a las técnicas de simulación, sin embargo este método resulta ineficiente cuando se tratan de sistemas complejos. El concepto de linealización estadística ofrece un método sistemático y fácilmente aplicable para generar una solución aproximada a la ecuación (3.24).

La linealización equivalente estocástica propone reemplazar el vector de funciones no lineales $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ por una ecuación lineal de la siguiente forma

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + (M_e \ddot{q} + C_e \dot{q} + K_e q) = P(t) \quad (3.25)$$

Por lo tanto el sistema lineal equivalente queda gobernado por la siguiente ecuación

$$(M + M_e) \ddot{q} + (C + C_e) \dot{q} + (K + K_e) q = P(t) \quad (3.26)$$

donde M_e , C_e y K_e son matrices deterministas. Dichas matrices se determinan minimizando el vector ε de $n \times 1$ que mide la diferencia entre el sistema real y el sistema lineal equivalente. La diferencia ε es

$$\varepsilon = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) - (M_e \ddot{q} + C_e \dot{q} + K_e q) \quad (3.27)$$

El procedimiento más común consiste en minimizar la norma euclidiana de ε , esto es:

$$E\|\varepsilon\|^2 = E[\varepsilon^T \varepsilon] \rightarrow \text{mínimo} \quad (3.28)$$

De acuerdo a esta formulación las matrices M_e , C_e y K_e dependen de la respuesta $q(t)$. Puesto que la solución al sistema lineal equivalente depende de M_e , C_e y K_e existe una relación cíclica entre dichas matrices y $q(t)$, y será necesario recurrir a un proceso iterativo de solución.

La ecuación (3.28) requiere del conocimiento de la función de densidad de probabilidad conjunta del vector de respuesta no lineal. Claramente, esta densidad de probabilidad conjunta no es conocida, puesto que si lo fuera no habría necesidad de linealizar. Además se puede afirmar que si se usa la verdadera densidad de probabilidad conjunta de la respuesta no lineal en la ecuación (3.28), la solución (vector de medias y matriz de covarianza) calculada por medio de la linealización equivalente sería exacta (Roberts y Spanos 1990; Pradlwarter y Schuëller, 1991).

La ecuación (3.28) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^n E[\varepsilon_i^2] \rightarrow \text{mínimo} \quad (3.29)$$

de 3.27

$$\varepsilon_i = \phi_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) - \sum_{j=1}^n (m_{ij}^e \ddot{q}_j + c_{ij}^e \dot{q}_j + k_{ij}^e q_j) \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.30)$$

donde $\phi_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es la i -ésima componente del vector $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})$ mientras que m_{ij}^e , c_{ij}^e y k_{ij}^e son los elementos de las matrices M_e , C_e y K_e respectivamente. Puesto que los términos de la suma 3.29 son todos positivos la minimización del error total equivale a minimizar cada término individual, lo que se logra con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_{ij}^e} E[\varepsilon_i^2] &= E \left[\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial m_{ij}^e} \right] = E \left[\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial m_{ij}^e} \right] = E \left[2\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial m_{ij}^e} \right] = 2E \left[\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial m_{ij}^e} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c_{ij}^e} E[\varepsilon_i^2] &= 2E \left[\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial c_{ij}^e} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_{ij}^e} E[\varepsilon_i^2] &= 2E \left[\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial k_{ij}^e} \right] = 0 \end{aligned} \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.31)$$

Sustituyendo la ecuación (3.30) en la (3.31), simplificando y escribiendo las expresiones obtenidas en forma compacta, queda:

$$E[\phi_i Q] = E[QQ^T] \begin{bmatrix} m_{ei}^{*T} \\ c_{ei}^{*T} \\ k_{ei}^{*T} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

donde m_{ei}^* , c_{ei}^* y k_{ei}^* son los i -ésimos renglones de las matrices M_e , C_e y K_e respectivamente y $Q = [q, q, q]^T$. La expresión (3.32) es la ecuación fundamental de la linealización equivalente estocástica. Obsérvese que el vector de las matrices de coeficientes linealizadores es función de la covarianza de la respuesta así como del valor esperado del producto del vector de estado Q y el vector de funciones no lineales Φ . Esta estructura complicada se simplifica al suponer que el proceso de respuesta es gaussiano (Kazakov, 1965; Atalik y Utku, 1976).

3.4 LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE GAUSSIANA

En la sección anterior se ha mostrado la teoría general del comportamiento de sistemas estructurales de múltiples grados de libertad con comportamiento no lineal sujetas a excitaciones dinámicas aleatorias. La metodología presentada es independiente de la función de densidad de probabilidad de la respuesta que pueda considerarse en el cálculo de las esperanzas indicadas en la ecuación (3.32). En esta sección los parámetros del sistema lineal equivalente se determinan adoptando la hipótesis de que el vector Q es conjuntamente gaussiano. En tal caso Kazakov (1965) demostró que:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$E[U g(U)] = E[U U^T] E[\nabla g(U)] \quad (3.33)$$

donde $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ es un vector de variables gaussianas, $g(U)$ es una función escalar de U y ∇ es el operador diferencial definido por

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n} \right]^T \quad (3.34)$$

Utilizando la ecuación (3.33) en el lado izquierdo de la ecuación (3.32) (utilizando como U al vector Q y como g a la función ϕ) y usando el hecho de que la matriz $E[QQ^T]$ es no singular, los elementos de las matrices M_e , C_e y K_e son iguales a:

$$\begin{aligned} m_{ij}^e &= E \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right] \\ c_{ij}^e &= E \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \\ k_{ij}^e &= E \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right] \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

Una manera de determinar la precisión de la linealización equivalente es a través del análisis paramétrico de sistemas de un grado de libertad. Enseguida se establecen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sistema histerético de un grado de libertad sujeto a un proceso de excitación aleatorio no estacionario. Los desarrollos que se muestran son importantes ya que las ecuaciones que resultan se usarán en la metodología que se describe en los capítulos siguientes. Primero, se linealizan las ecuaciones de movimiento adoptando la hipótesis de respuesta gaussiana y después se introduce un modelo adecuado para la excitación aleatoria en la base.

3.4.1 Desarrollo de las ecuaciones de movimiento para un sistema de un grado de libertad.

Considérese un sistema histerético de un grado de libertad sometido a un movimiento aleatorio en

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

su base el cual tiene como única fuente de no-linealidad a su fuerza restauradora que se supone del tipo endocrónico. La ecuación de movimiento de tal sistema es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \alpha_2\omega^2x + (1 - \alpha_2)\omega^2z = -a(t) \quad (3.36)$$

donde \ddot{x} , \dot{x} y x son la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de la masa respectivamente, $\xi = c/2m\omega$ es la fracción de amortiguamiento crítico viscoso, $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia circular de vibración del sistema, m es la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso, k es la rigidez inicial, α_2 es la razón entre la rigidez de postfluencia y la rigidez inicial, t es el tiempo y $a(t)$ la aceleración del terreno. z es la componente histerética del desplazamiento, que en este trabajo se ha propuesto modelar por la siguiente ecuación diferencial no lineal, denominada modelo de Bouc-Wen-Baber (Baber y Wen, 1981):

$$\dot{z} = h(\dot{x}, z) = \{A(\varepsilon)\dot{x} - \nu(\varepsilon)(\beta z|\dot{x}|z|^{n-1} + \gamma\dot{x}|z|^n)\} / \eta(\varepsilon) \quad (3.37)$$

Este modelo representa una gran variedad de formas de ciclos de histéresis (Wen, 1980) y además puede considerar el deterioro de las propiedades del sistema (Baber y Wen, 1981). A , β , γ y n son parámetros que definen el tamaño y la forma de los ciclos histeréticos. Más específicamente A está relacionada con la rigidez inicial así como con el nivel máximo de la fuerza restauradora, n controla la transición entre el comportamiento elástico e inelástico. β representa el nivel de disipación de energía. γ junto con β definen la suavización o endurecimiento del sistema. La primera condición corresponde a $\beta + \gamma > 0$ mientras que la segunda a $\beta + \gamma \leq 0$. Los parámetros β y γ pueden obtenerse a partir de la fuerza de fluencia y de la rigidez de un sistema estructural. Por ejemplo, si los elementos estructurales son de acero, Casciati y Faravelli (1991) recomiendan que $\beta = \gamma$, y si se trata de concreto reforzado $\beta = -2\gamma$. Estas relaciones junto con el valor máximo de z llevan a las siguientes expresiones (Silva, 1998)

Para acero:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{f_y} \right)^n$$

Para concreto reforzado:

$$\gamma = - \left(\frac{k}{f_y} \right)^n \quad (3.38)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde f_y es la fuerza de fluencia. Finalmente $\eta(\varepsilon)$, $\nu(\varepsilon)$ y $A(\varepsilon)$ son parámetros que varían en función de la energía disipada (ε) en cada instante y controlan la degradación de rigidez y resistencia del sistema (Baber y Wen, 1981).

Por sencillez considérese que no existe la degradación de rigidez ni de resistencia, por lo tanto sustitúyase $A(\varepsilon) = 1$, $\nu(\varepsilon) = 1$, $\eta(\varepsilon) = 1$ en la ecuación (3.37) para obtener:

$$\dot{z} = h(x, z) = Ax - \beta z|x||z|^{n-1} - \gamma \dot{x}|z|^n \quad (3.39)$$

Sea el vector

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Las ecuaciones (3.36) y (3.39) pueden combinarse para formar la siguiente ecuación matricial:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = P(t) \quad (3.41)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\xi\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_2\omega^2 & (1-\alpha_2)\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h(q_1, q_2) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

La ecuación (3.41) es idéntica a la (3.24) por lo que puede linealizarse utilizando la metodología descrita en la sección 3.2. Utilizando las ecuaciones (3.35), es decir considerando que el vector q es conjuntamente gaussiano, se obtiene:

$$M_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{21}^e & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde

$$s_e \equiv k_{21}^e = E \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \right] = -E \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.50)$$

$$c_e \equiv c_{21}^e = E \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \right] = -E \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (3.51)$$

$$k_e \equiv k_{22}^e = E \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} \right] = -E \left[\frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (3.52)$$

Obsérvese que la linealización llevada a cabo consiste en reemplazar la ecuación (3.39) por la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\dot{z} = s_e \dot{x} + c_e \dot{x} + k_e z \quad (3.53)$$

Los coeficientes s_e , c_e y k_e se denominan de aquí en adelante coeficientes linealizadores del sistema. Llevando a cabo el cálculo de las derivadas y esperanzas, Baber y Wen (1981) obtienen:

$$s_e = 0 \quad (3.54)$$

$$c_e = A - \beta F_1 - \gamma F_2 \quad (3.55)$$

$$k_c = -\beta F_3 - \gamma F_4 \quad (3.56)$$

donde:

$$F_1 = \frac{\sigma_z^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} I_s \quad (3.57)$$

$$F_2 = \frac{\sigma_z^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \quad (3.58)$$

$$F_3 = \frac{n\sigma_x\sigma_z^{n-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2(1-\rho_{xz}^2)^{(n+1)/2}}{n} + \rho_{xz} I_s \right) \quad (3.59)$$

$$F_4 = \frac{n\rho_{xz}\sigma_x\sigma_z^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \quad (3.60)$$

$\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, σ_x es la desviación estándar de x , σ_z es la desviación estándar de z , ρ_{xz} el coeficiente de correlación entre \dot{x} y z , y

$$I_s = 2 \int_{\lambda}^{\pi} \sin^n \psi \, d\psi \quad (3.61)$$

con

$$\lambda = \text{AngTan} \left(\frac{\sqrt{1-\rho_{xz}^2}}{\rho_{xz}} \right) \quad (3.62)$$

Enseguida se describe el modelo para la excitación sísmica del sistema linealizado anteriormente. La excitación $a(t)$ del sistema se modela como un proceso estocástico no estacionario de media cero usando el modelo basado en el filtro de segundo orden de Clough-Penzien descrito en el capítulo 2. Por sencillez se considera que el proceso de excitación es uniformemente modulado, por lo tanto las expresiones que gobiernan el comportamiento de los filtros respectivos se obtienen a partir de las ecuaciones (2.12) y (2.13), considerando que $\kappa = 1$ y $\kappa = 0$ debido a que

en este caso $\kappa = t$. En Silva, *et al* (2001) se hace un estudio sobre el efecto que tiene la modulación de frecuencia del proceso de excitación en la respuesta de sistemas histeréticos. Por otra parte, con el fin de evitar los efectos de la respuesta transitoria de los filtros, la función moduladora debe “moverse” de la ecuación (2.12) a la (2.13). Las ecuaciones resultantes se adhieren a las ecuaciones (3.36) y (3.53) para formar un sistema extendido de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden el cual puede transformarse en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden utilizando la técnica espacio de estado descrita en la sección 2.2

$$\frac{dq}{dt} = H(t)q + W \quad (3.63)$$

donde el vector de estado es

$$q(t) = \begin{Bmatrix} Z(t) \\ Z_F(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ x_f \\ x_g \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_g \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

y

$$H(t) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2\omega^2 & -2\xi\omega & -(1-\alpha_2)\omega^2 & \omega_f^2 c(t) & -\omega_g^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ s_e & c_e & k_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & \omega_g^2 & -2\xi_f \omega_f & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & 0 & -2\xi_g \omega_g \end{array} \right] \quad (3.65)$$

$$W(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

donde $w(t)$ es un ruido blanco estacionario.

La estadística de la respuesta del sistema (medias y covarianzas) se obtiene resolviendo las ecuaciones (3.6) y (3.19). La solución de dichas ecuaciones depende de la naturaleza de la excitación; en el caso estacionario en el que $d\Sigma/dt = 0$ se requiere realizar un proceso iterativo, y en el no estacionario un esquema de integración paso a paso. También puede emplearse un análisis modal complejo (Casciati y Faravelli, 1991).

Aunque la linealización equivalente gaussiana (LEG) ha sido aplicada extensamente a problemas no lineales de vibración, existen algunas limitaciones. Por ejemplo, las distribuciones de probabilidad de la respuesta del sistema original y del equivalente pueden ser substancialmente diferentes. También cuando el sistema original exhibe esencialmente un fenómeno no lineal, su respuesta es inherentemente diferente de un proceso *gaussiano* supuesto por la LEG. En estos casos, la aplicación de la LEG puede conducir a resultados erróneos (Silva y Ruiz, 2000).

Se han realizado varios estudios para investigar sobre la precisión y eficiencia del método, por ejemplo: Silva y Ruiz (1990), Spanos (1981), Fan y Ahmadi (1988), Park (1992), Roberts y Spanos (1990), Schuëller, *et al* (1991) y Hurtado *et al* (1988). Estos indican que puede esperarse un error menor que 20% en aplicaciones prácticas. Sin embargo Beaman (1980) reporta la ocurrencia de errores relativos del 100% para ciertos sistemas no lineales. Se ha observado que el origen de estos errores es precisamente el grado de no-linealidad exhibido por el sistema y la consideración de respuesta y excitación gaussiana.

En particular, Silva (1998) ha hecho un estudio extenso sobre la calibración de la *LEG*. La calibración se realizó en términos de la desviación estándar máxima del desplazamiento y de la velocidad así como de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía *histerética* disipada de un sistema de un grado de libertad sujeto a un proceso estocástico cuyas propiedades se obtuvieron a partir de la componente este-oeste de las aceleraciones registrado en la estación SCT durante el temblor del 19 de septiembre de 1985 (SCTEW85). Para los casos analizados se encontró que:

1. El modelo *no estacionario* de la excitación conduce a mejores resultados que el *estacionario*.
2. *Grosso modo*, el método *LEG* subestima la desviación estándar del desplazamiento con un *error relativo promedio* menor que 45%. La desviación estándar de la velocidad de sistemas *UGL* de período medio a largo, se sobrestima con un *error relativo promedio* menor que 25%. La rapidez de cambio de la energía *histerética* disipada tiene un *error relativo promedio* del orden de 40% excepto en sistemas *UGL* de período corto con nivel de ductilidad $\eta \neq 1$ donde esta cantidad tiende a sobrestimarse con un error considerable.
3. El error relativo depende en gran medida del período natural de vibración del sistema *UGL*. En general, en períodos cortos se presentan errores relativos altos. Cabe mencionar que en períodos cortos la respuesta es baja y entonces el *error absoluto* asociado a *errores relativos* altos, es muy pequeño.
4. Valores altos del parámetro n , que define el grado de *no-linealidad* del sistema, propician un incremento en el *error relativo promedio*, afectando principalmente el valor de la rapidez de cambio de la energía *histerética*.
5. Si se aceptan errores relativos de hasta 15% el método *LEG* es adecuado para el cálculo de:
 - la desviación estándar del desplazamiento de sistemas *UGL* de período medio ($1.0s < T \leq 2.5s$) con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo $0.001 \leq \alpha_2 \leq 0.75$, niveles de *no-linealidad* en el intervalo $1 \leq \alpha_6 \leq 5$ y nivel de ductilidad $0 \leq \eta \leq 2$.

- la desviación estándar de la velocidad de sistemas *UGL* de período medio a largo ($2.5s < T \leq 6.0s$) con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo $0.015 \leq \alpha_2 \leq 0.25$, niveles de *no-linealidad* en el intervalo $1 \leq \alpha_6 \leq 7$ y nivel de ductilidad $1 \leq \eta \leq 4$.
 - la rapidez de cambio de la energía *histerética* de sistemas *UGL* de período medio a largo con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo $0.001 \leq \alpha_2 \leq 0.5$, niveles de *no-linealidad* en el intervalo $1 \leq \alpha_6 \leq 4$ y nivel de ductilidad $\eta \geq 3$.
6. Una de las ventajas que interviene de manera importante en la decisión del uso de la *LEG* es su eficiencia. Ésta es del orden de 200 a 1500 veces mayor en el caso *estacionario* y del orden de 14 veces mayor en el caso *no estacionario*. El tiempo de cálculo de un análisis de respuesta *no lineal* puede disminuir a costa de tener errores relativos del orden señalado arriba.

En general, las fuentes de error en la *LEG* pueden agruparse de la siguiente forma (Hurtado, 1998)

- i. Modelo de la densidad de probabilidad de la respuesta.
- ii. Deriva (*Drift* en inglés) ($\alpha_2 \rightarrow 0$)
- iii. Modelo de excitación (filtros que cortan frecuencias bajas, Clough y Penzien)
- iv. No-linealidad alta ($n \rightarrow \infty$ y μ es alta)
- v. Forma del ciclo histerético. Sistemas suaves ($\beta + \gamma > 0$), duros ($\beta + \gamma \leq 0$) o con tendencia al endurecimiento ($\beta + \gamma > 0$ con $\gamma < 0$, $|\gamma| \leq \beta$)

Además, dentro de los estudios realizados en la presente investigación doctoral, se identificó un error en los coeficientes linealizadores gaussianos definidos por las ecuaciones (3.54) a (3.60) los cuales han sido publicados en diversos trabajos internacionales (Baber y Wen, 1981; Baber y Wen, 1982; Casciati y Faravelli, 1985, Casciati y Faravelli, 1991; Hurtado, 1998). Por ejemplo, uno de los coeficientes linealizadores gaussianos se calcula a partir de (véanse ecuaciones 3.39 y 3.51):

$$F_1 = E \left[\beta \frac{\partial |x|}{\partial x} |z|^{n-1} z \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sign}(x) |z|^{n-1} z \varphi_{xz} dx dz \quad (3.67)$$

donde φ_x es la densidad de probabilidad gaussiana conjunta de la velocidad y la variable histerética z y $\text{Sign}(\cdot)$ es la función signo. Resolviendo la integral doble se llega a la siguiente solución analítica:

$$F_1 = \frac{\sigma_z^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{n/2} \left(2\rho_{xz} {}_2F_1\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \rho_{xz}^2\right) \right) \quad (3.68)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss definida por:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \quad (3.69)$$

La solución analítica obtenida (ecuación 3.68) se comparó con los resultados que se obtienen al resolver con métodos numéricos la integral doble (ecuación 3.67), encontrando que la solución analítica es correcta. Sin embargo, Baber y Wen (1981) publican que la solución a la integral doble es la ecuación (3.57). La diferencia entre las soluciones (3.57) y (3.68) se halla en los factores

$$2 \int_0^{\pi/2} \text{Sen}^n \theta d\theta \quad (3.70)$$

y

$$2\rho_{xz} {}_2F_1\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \rho_{xz}^2\right) \quad (3.71)$$

Al comparar el valor de las funciones 3.70 y 3.71 no se encuentran diferencias para $\rho_{xz} \geq 0$, sin embargo cuando $\rho_{xz} < 0$ el valor de dichas funciones difiere completamente. Esto sucede independientemente del valor de n .

Las siguientes gráficas muestran las diferencias que se presentan entre estas dos funciones en términos del coeficiente de correlación ρ_{xz} y dos valores particulares de n .

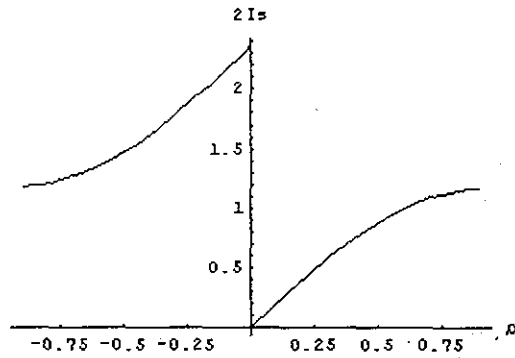
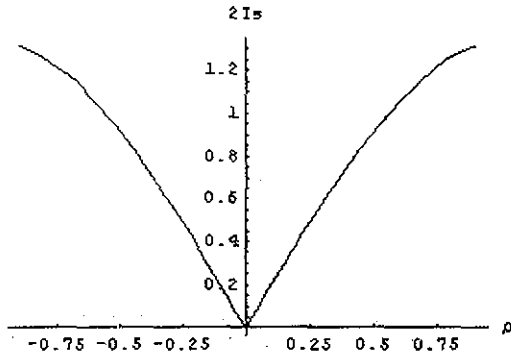


Figura 3.1. Ecuación (3.70) (Baber y Wen, 1981) para $n=3$ Figura 3.2. Ecuación (3.70) (Baber y Wen, 1981) para $n=4$

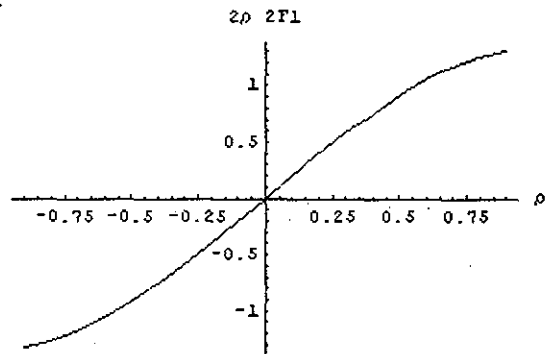
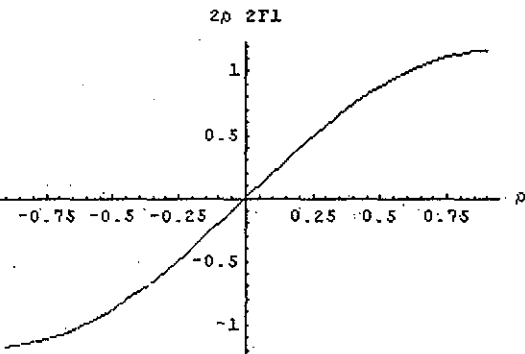
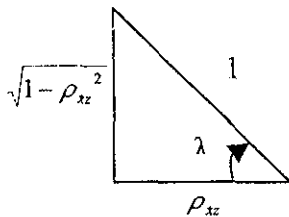


Figura 3.3. Ecuación (3.71), obtenida por el autor, para $n=3$

Figura 3.4. Ecuación (3.71), obtenida por el autor, para $n=4$

Los resultados anteriores implican un análisis detallado de la integral de la ecuación (3.70). Primero, considérese el siguiente triángulo rectángulo que se crea a través de la ecuación (3.62)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

a partir de esta figura se obtienen las siguientes relaciones

$$\text{Sen}(\lambda) = \sqrt{1 - \rho_{xz}^2} \quad (3.72)$$

$$\text{Cos}(\lambda) = \rho_{xz} \quad (3.73)$$

y por supuesto:

$$\text{Tan}(\lambda) = \frac{\sqrt{1 - \rho_{xz}^2}}{\rho_{xz}} \quad (3.74)$$

para resolver la integral mencionada a través de un programa de computadora deben añadirse ciertas condiciones que consideren principalmente el comportamiento de la ecuación (3.73) ya que la solución analítica de la integral (3.70) es función de $\text{Cos}(\lambda)$. Considérese $\rho_{xz} < 0$, entonces $\text{Cos}(\lambda) < 0$ (véase ecuación 3.73); en cambio si se usa la ecuación (3.62) resulta que $\lambda < 0$ y por lo tanto se obtendrá $\text{Cos}(\lambda) > 0$ (ya que $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$ porque $-1 < \rho_{xz} < 1$). La discontinuidad de la función 3.70 en $\rho_{xz} = 0$ se debe a la discontinuidad que también la función 3.62 tiene en $\rho_{xz} = 0$. En la figura 3.5 se muestra el comportamiento de dicha función.

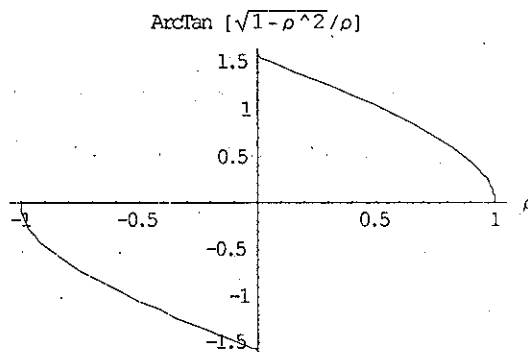


Figura 3.5. Grafica de la ecuación 3.62

La solución que propone el autor de esta tesis es: o bien usar la ecuación (3.71) en vez de la (3.70), o usar la (3.70) pero con límite inferior igual a: (ver ecuación 3.73)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\lambda = \text{AngCos}(\rho_{xz}) \quad (3.75)$$

la cual reemplazaría a la ecuación (3.62).

Para determinar el efecto que tiene la discontinuidad de la función (3.62) en el cálculo de la covarianza de la respuesta, enseguida se estudia la evolución de los coeficientes de correlación del desplazamiento y la velocidad $\rho_{vx} = \rho_{xx}$, del desplazamiento y la variable histerética ρ_{xz} y de la velocidad y la variable histerética $\rho_{vz} = \rho_{xz}$. Estas cantidades se obtienen del análisis de sistemas de un grado de libertad con periodos de vibración $T=0.5s$, $T=2.1s$ y $T=4.0s$, cada uno con tres diferentes niveles de demanda de ductilidad esperada $\eta=1.5$, $\eta=4.0$, $\eta=5.0$. Las propiedades de tales sistemas se describen detalladamente en el capítulo 5. La excitación empleada es un conjunto de 50,000 sismos artificiales generados con las propiedades de la componente este-oeste del acelerograma registrado en la Cd. de México en la Secretaria de Comunicaciones y Transportes durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 (SCTEW85). En las figuras 3.6 a 3.14 se muestra la evolución de los coeficientes de correlación obtenidos.

Las características generales del comportamiento de los coeficientes de correlación son las siguientes:

- Para niveles bajos de la excitación la velocidad y la parte histerética del desplazamiento no están correlacionadas. En la parte intensa, el coeficiente crece, adoptando valores positivos.
- El desplazamiento y la velocidad son respuestas no correlacionadas. El coeficiente de correlación no es exactamente igual a cero pero si adopta valores muy pequeños. Antes del instante en que la excitación es más fuerte ($t = 59s$) es positivo y después adopta valores negativos (aparece un punto de inflexión de la curva).
- Para niveles bajos de la excitación, el desplazamiento y la variable histerética están altamente correlacionados. Este coeficiente de correlación tiene un comportamiento singular ya que al principio de la excitación es positivo y al final adopta valores negativos.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

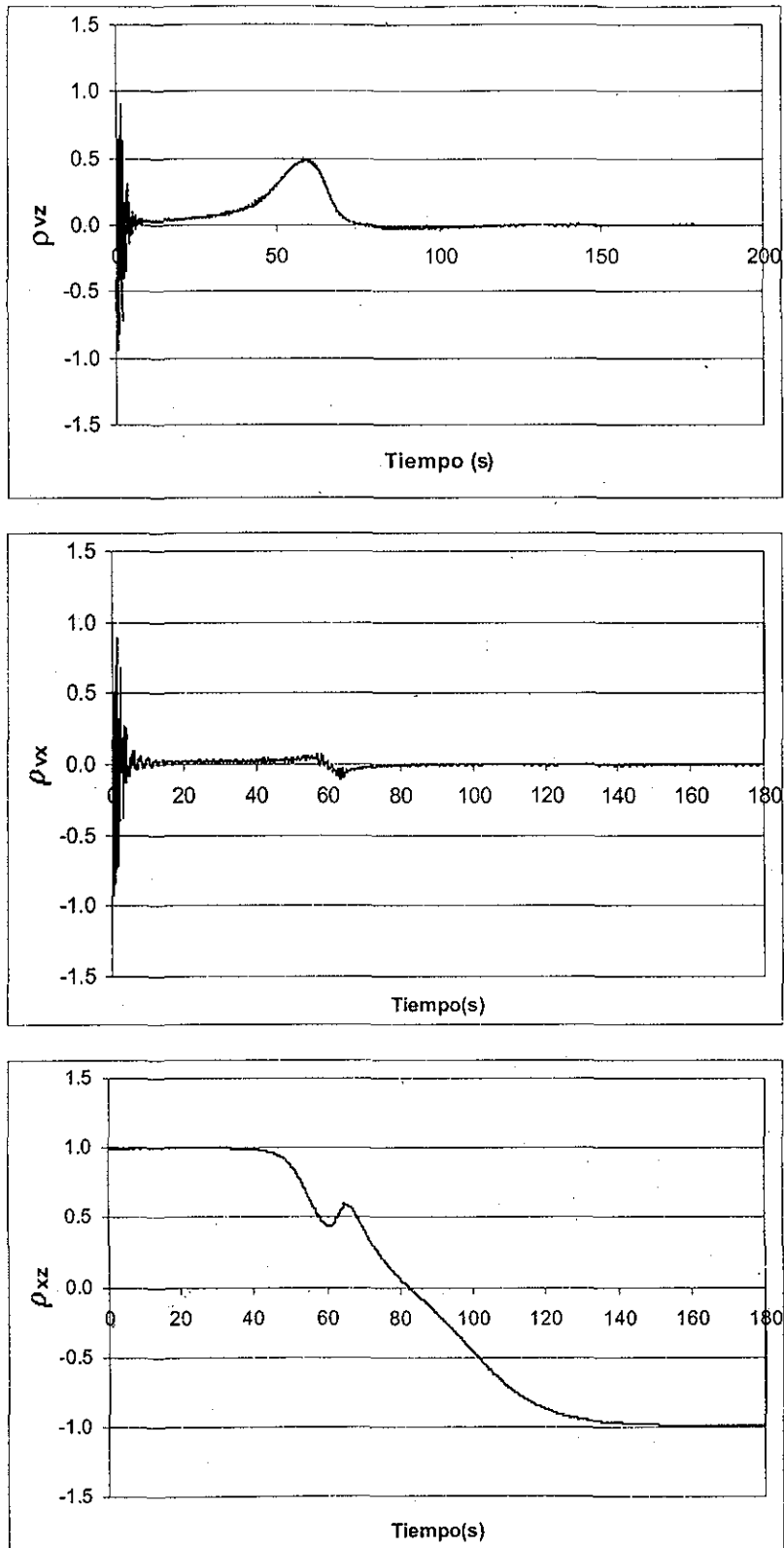


Figura 3.6 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=0.5$, $\eta=1.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

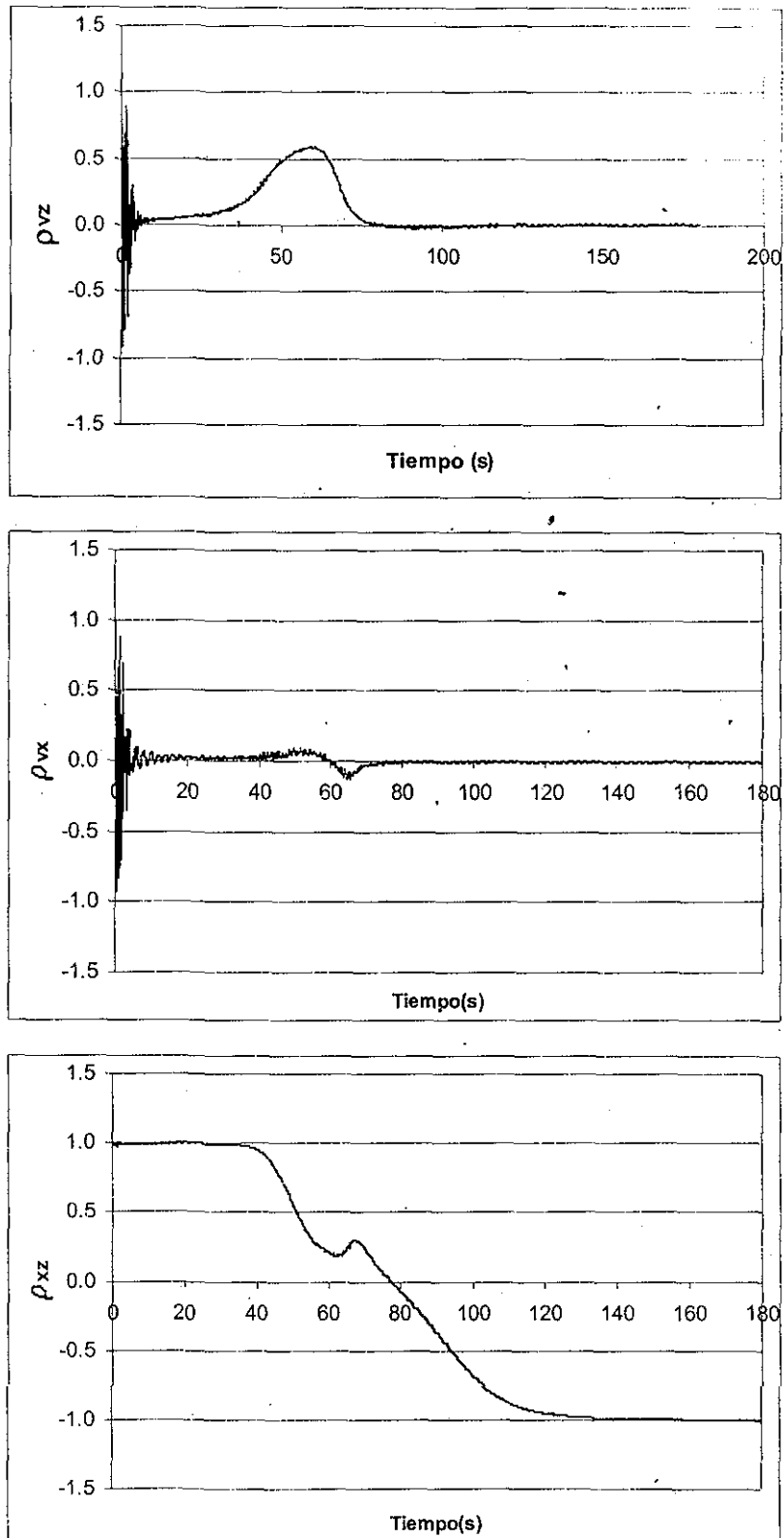


Figura 3.7 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=0.5$, $\eta=4.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

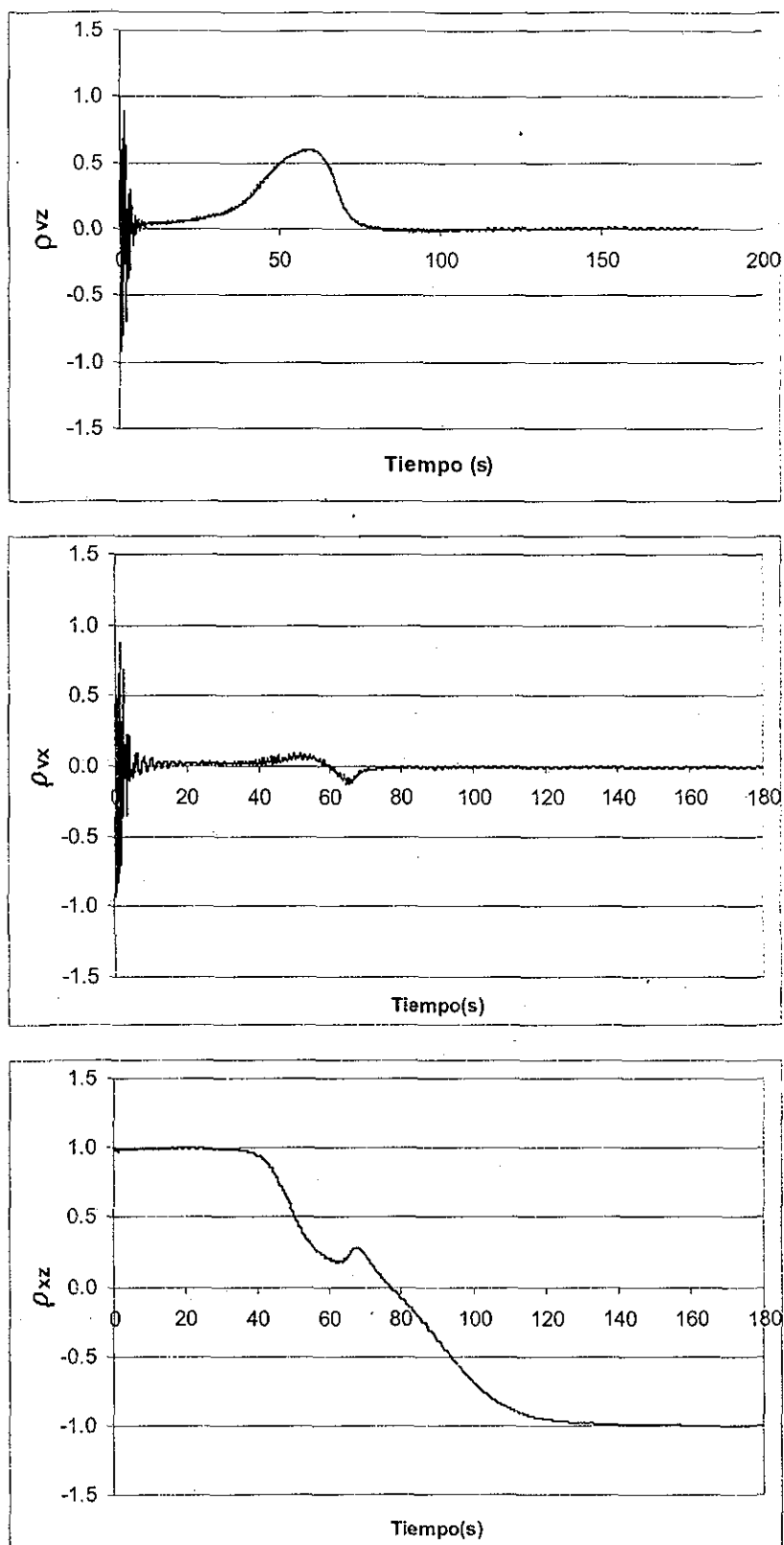


Figura 3.8 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=0.5$, $\eta=5.0$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

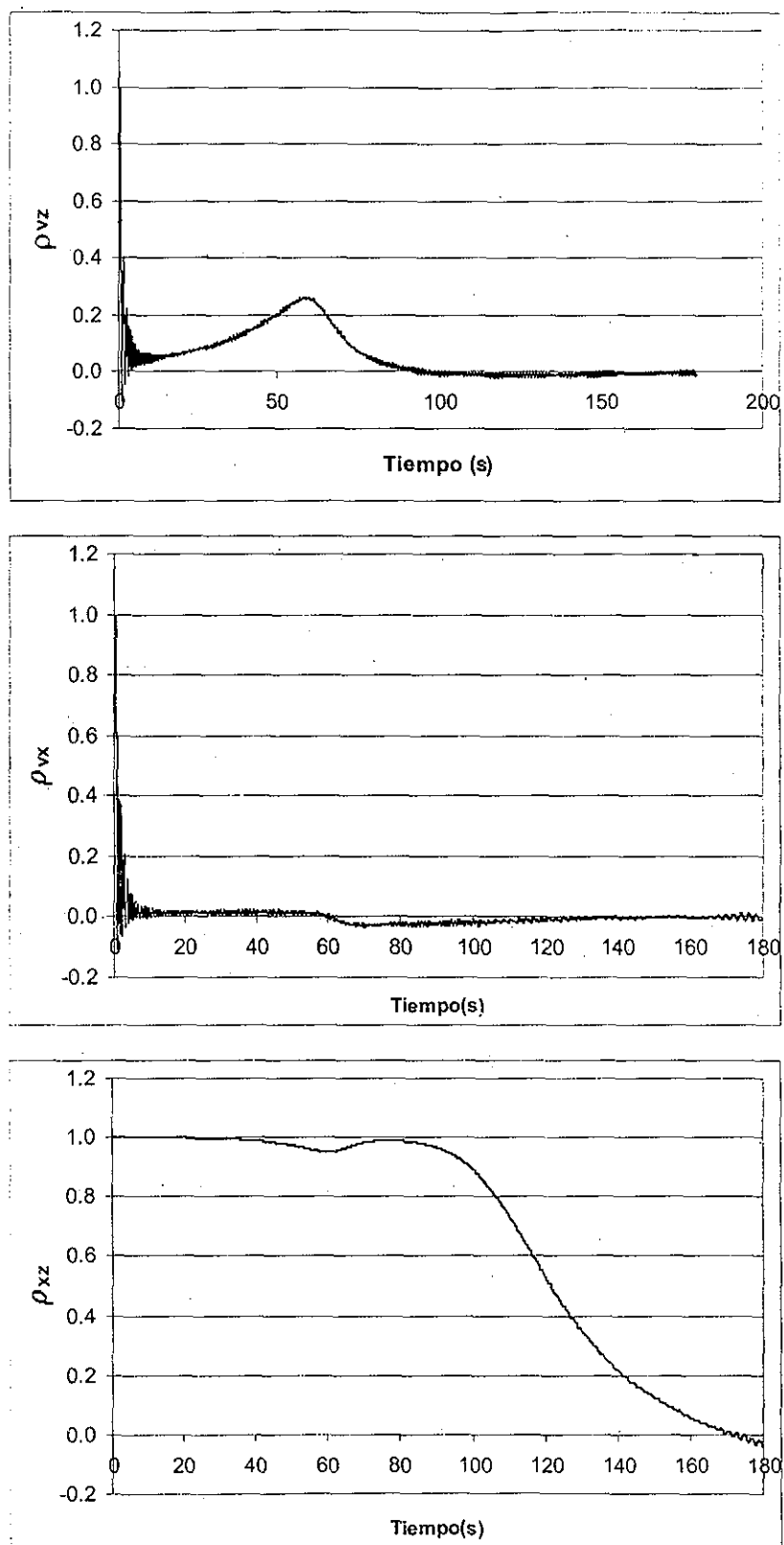


Figura 3.9 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=2.1$, $\eta=1.5$

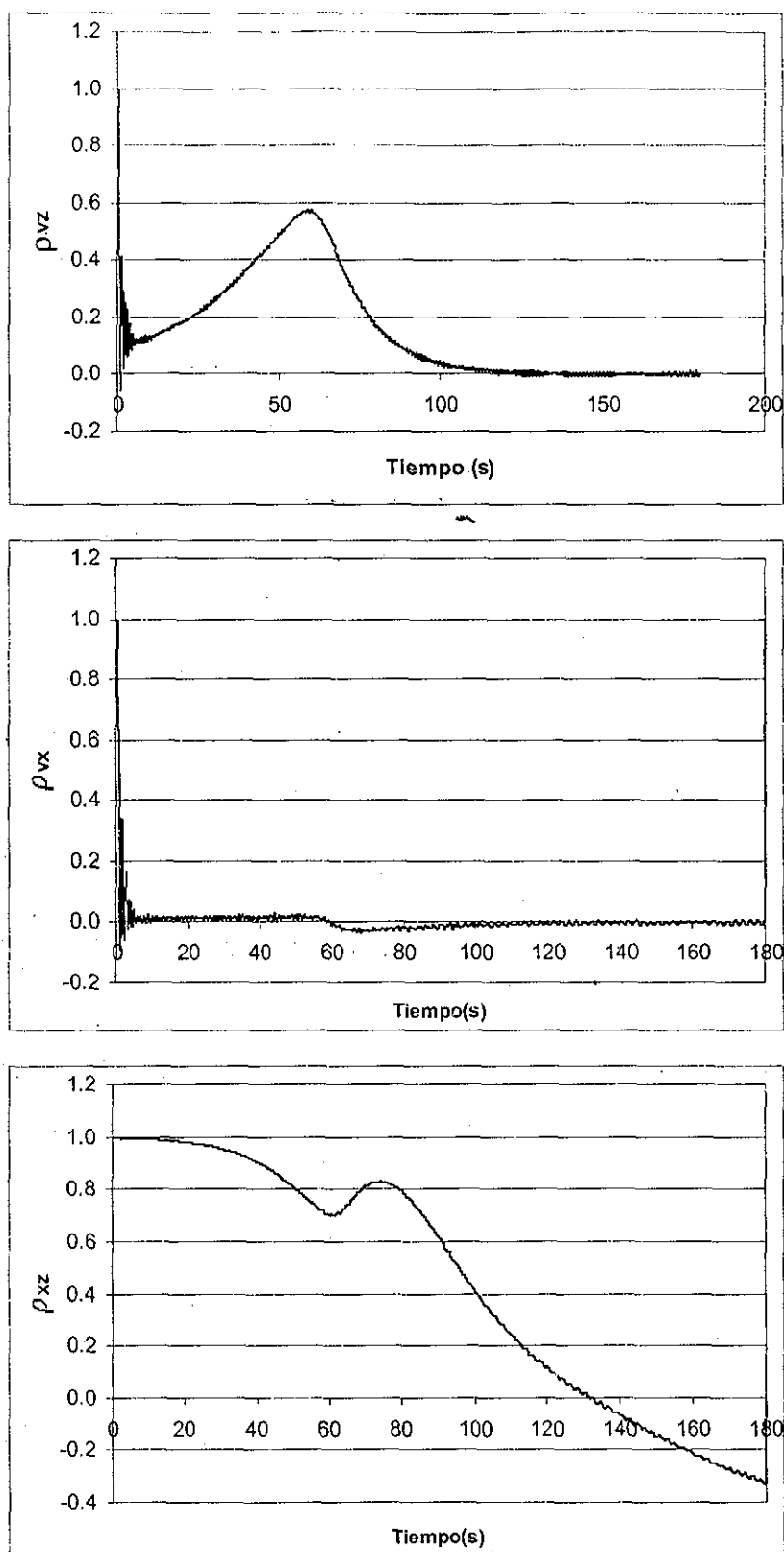


Figura 3.10 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=2.1$, $\eta=4.0$

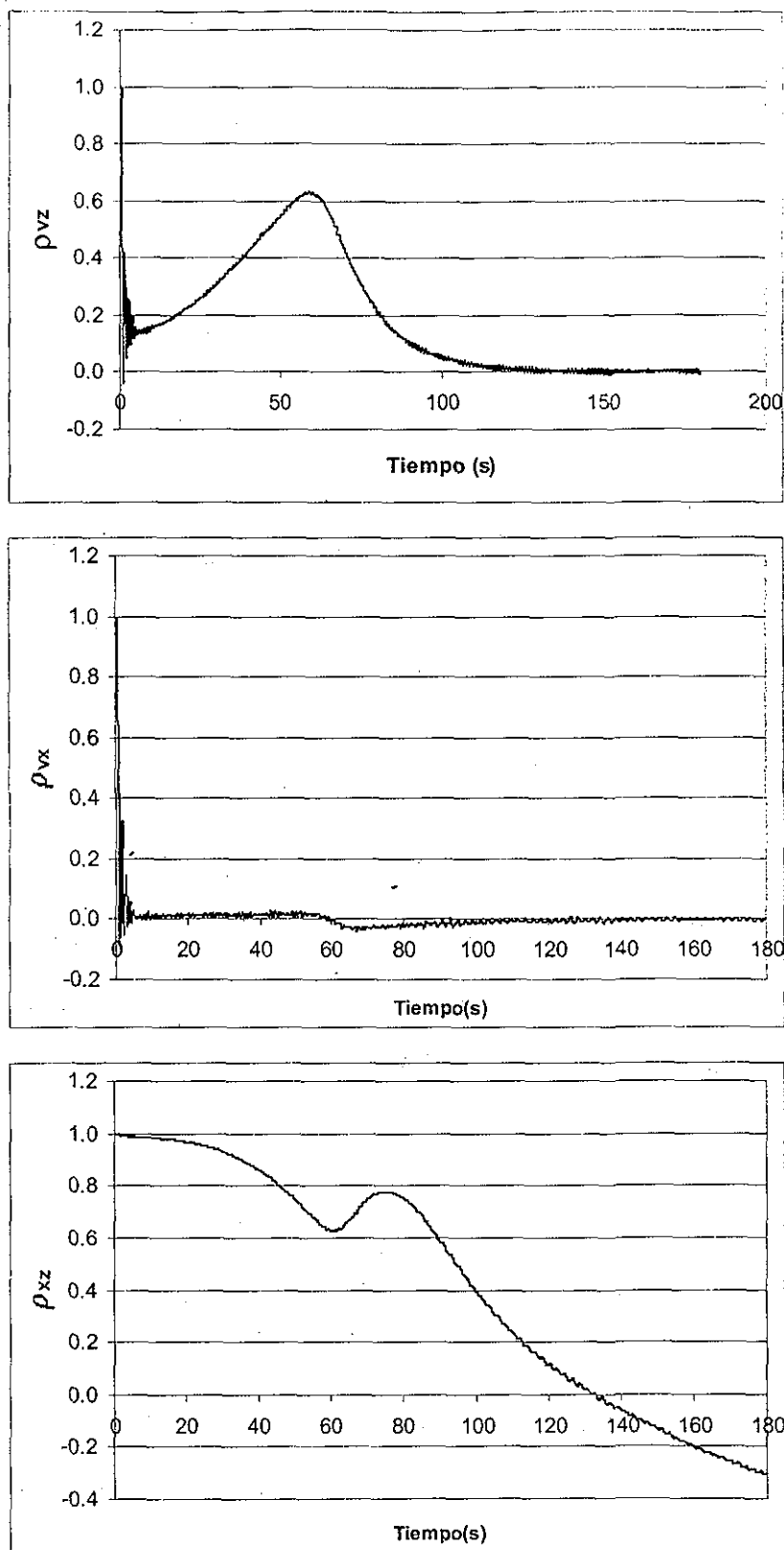


Figura 3.11 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=2.1, \eta=5.0$

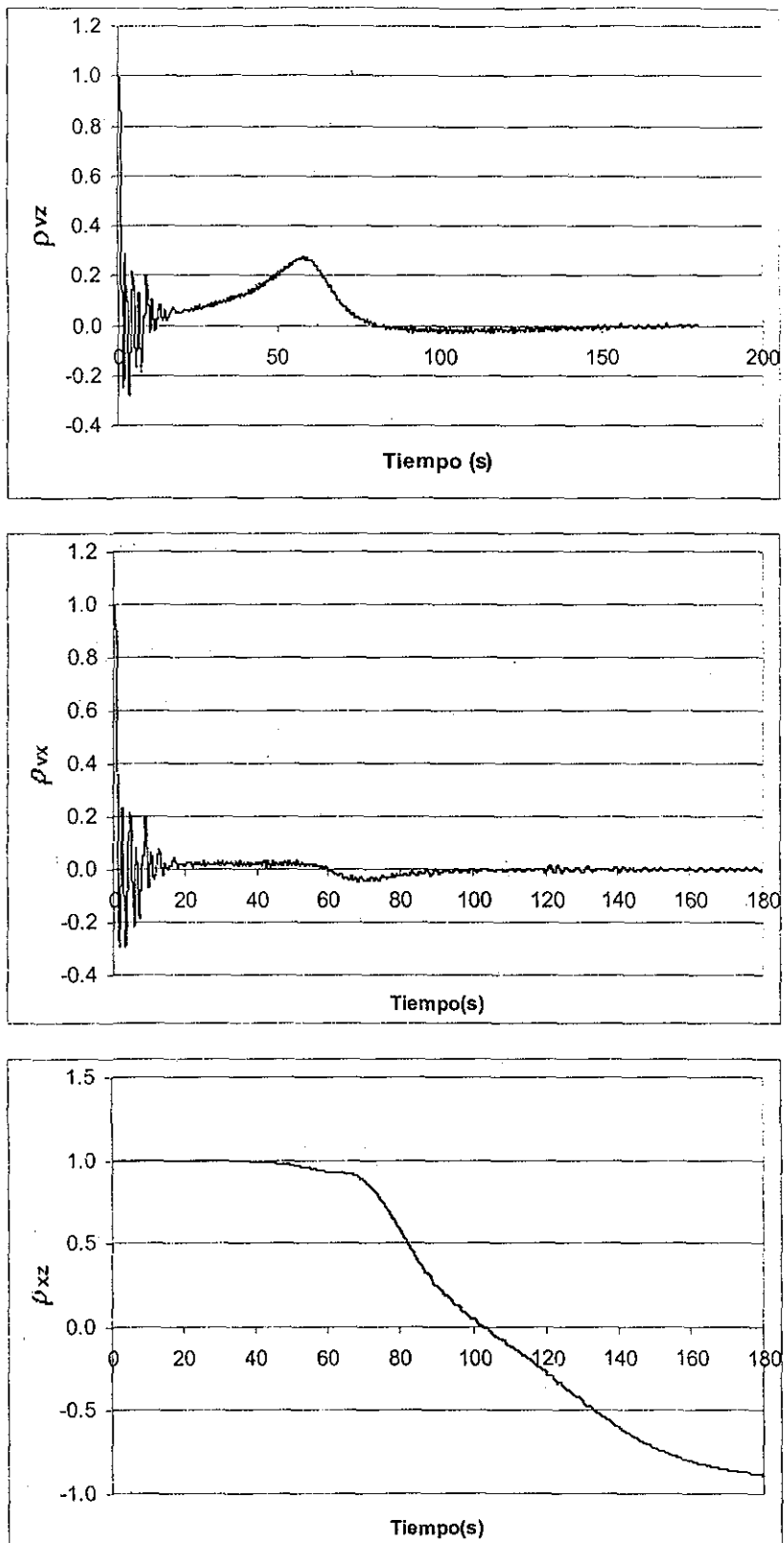


Figura 3.12. Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=4.0$, $\eta=1.5$

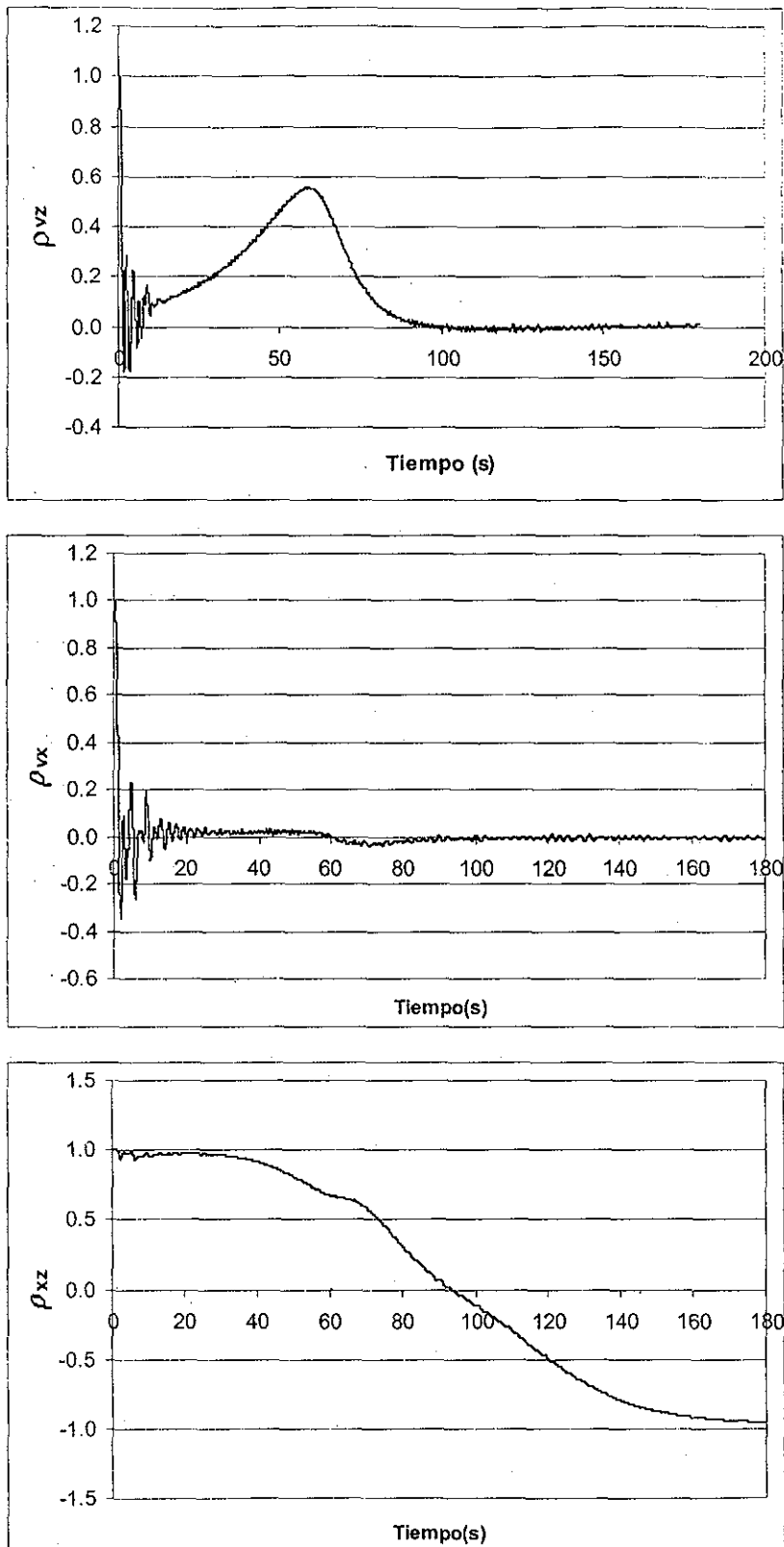


Figura 3.13 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=4.0, \eta=4.0$

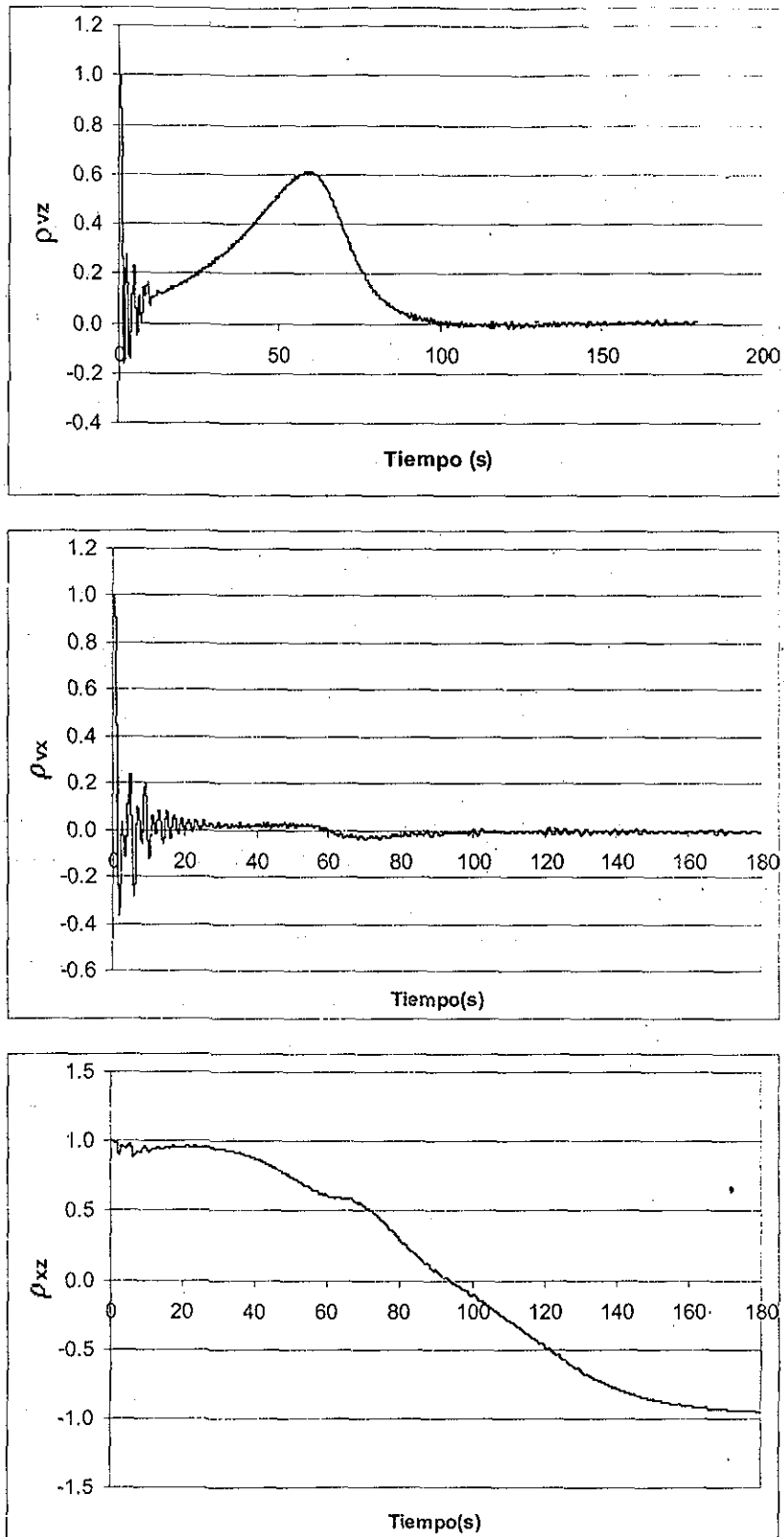
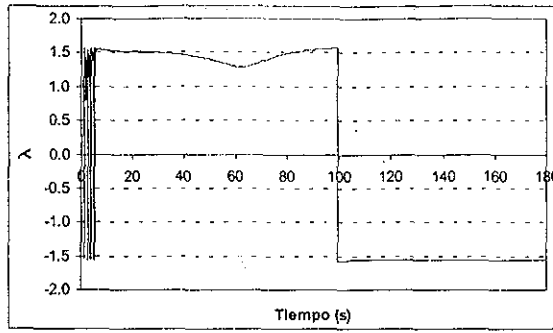


Figura 3.14 Comportamiento de los coeficientes de correlación de la respuesta, $T=4.0$, $\eta=5.0$

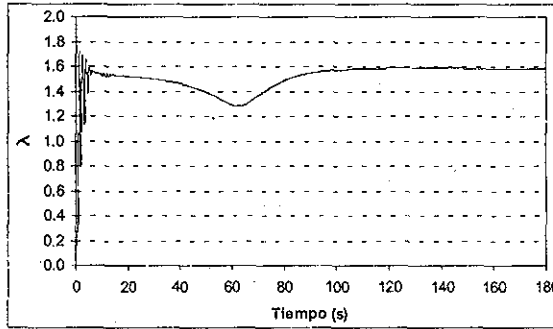
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Obsérvese que el coeficiente de correlación que interviene en el cálculo de los coeficientes linealizadores gaussianos ($\rho_{vz} = \rho_{xz}$) es negativo al inicio y al final de la respuesta pero en intervalos de tiempo muy cortos. Esto hace pensar que la influencia de la discontinuidad de la función 3.62 en la covarianza de la respuesta quizá no sea significativa. Para verificar esta hipótesis, se determina la respuesta de un sistema de un grado de libertad mediante el método de linealización equivalente gaussiana utilizando dos técnicas para calcular los coeficientes linealizadores: en una se adopta la ecuación (3.62) y en la otra se utiliza la ecuación (3.75). El sistema analizado es de periodo $T=4.0s$ con un nivel de ductilidad esperada $\eta=1.5$ y con dos valores del exponente n ($n=1$ y $n=2$). Se utiliza el proceso de excitación SCTEW85 (véase capítulo 5 para detalles sobre las propiedades de la excitación y del oscilador). En figuras 3.15 y 3.16 se muestra la evolución del parámetro λ calculado con las dos técnicas mencionadas y para los dos valores del exponente n . Obsérvese el comportamiento irregular que exhibe el parámetro calculado con la ecuación (3.62). Considerando que los valores determinados con la ecuación (3.75) proporcionan los valores "exactos" de la respuesta del oscilador, en las figuras 3.17 y 3.18 se muestran los errores relativos originados por el uso de la ecuación (3.62) en el cálculo de la desviación estándar del desplazamiento, la desviación estándar de la velocidad, la desviación estándar de la variable histerética, el coeficiente de correlación entre la velocidad y la variable histerética y los coeficientes linealizadores c_e y k_e . La figura 3.17 muestra los errores asociados a las respuestas del oscilador con $n=1$ y la figura 3.18 muestra los errores asociados a las respuestas del oscilador con $n=2$. Las respuestas mencionadas se obtienen de la matriz de covarianza calculada al resolver la ecuación (3.19).

En las figuras 3.17 y 3.18 se observa que los errores relativos son mayores en la parte inicial y final que en la parte central de la respuesta en donde la excitación es intensa. Esto coincide con los intervalos de tiempo en los que el coeficiente de correlación ρ_{vz} es negativo. Esto significa que el error relativo causado por el uso de la ecuación (3.62) en el cálculo del valor máximo de la respuesta no es significativo; sin embargo, en el inicio y en el final de la excitación sí lo es. Además se comprobó que la desviación estándar del desplazamiento es la respuesta más afectada y el problema es más crítico cuando n es par.

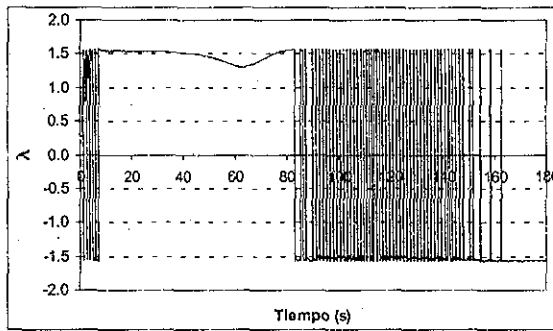


(a) Valores calculados con la ecuación (3.62).

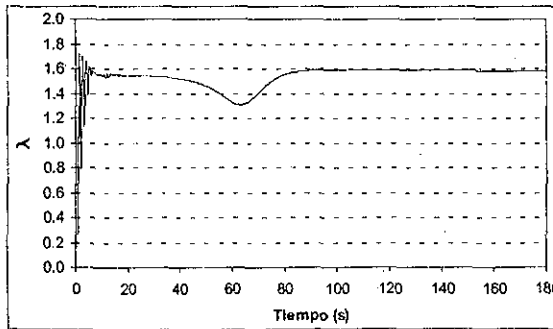


(b) Valores calculados con la ecuación (3.75).

Figura 3.15. Evolución de λ para el sistema con $n=1$.



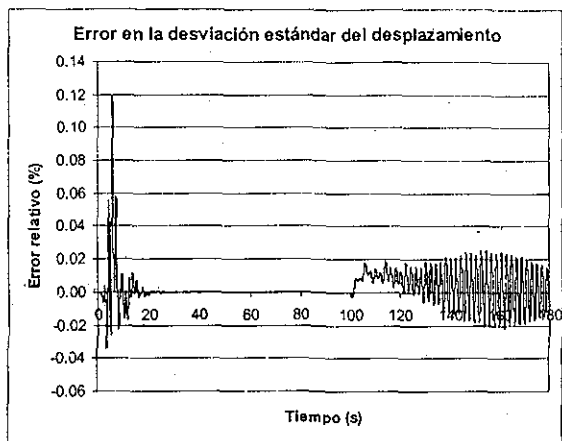
(a) Valores calculados con la ecuación (3.62).



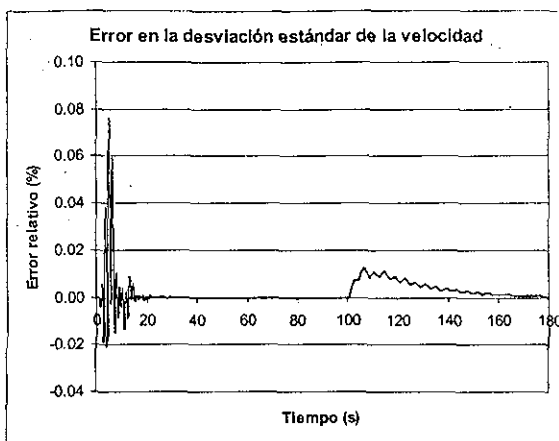
(b) Valores calculados con la ecuación (3.75).

Figura 3.16. Evolución de λ para el sistema con $n=2$.

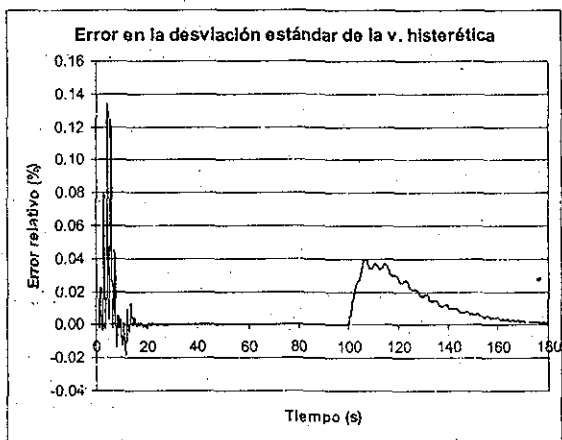
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



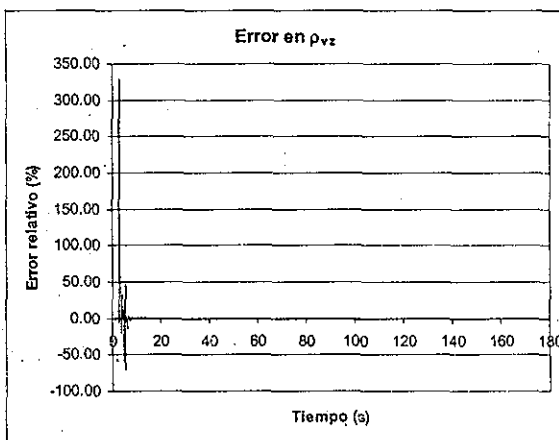
(a) Error en el cálculo de la desviación estándar del desplazamiento.



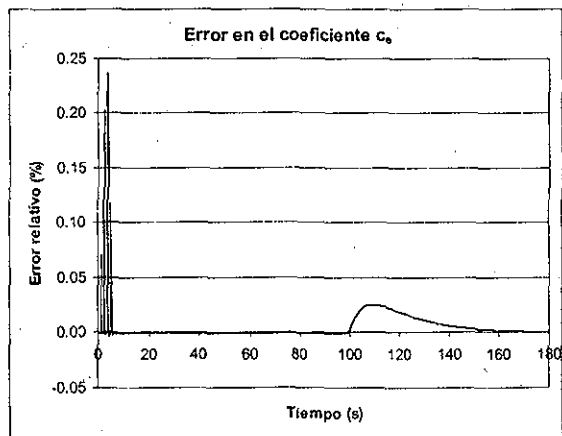
(b) Error en el cálculo de la desviación estándar de la velocidad.



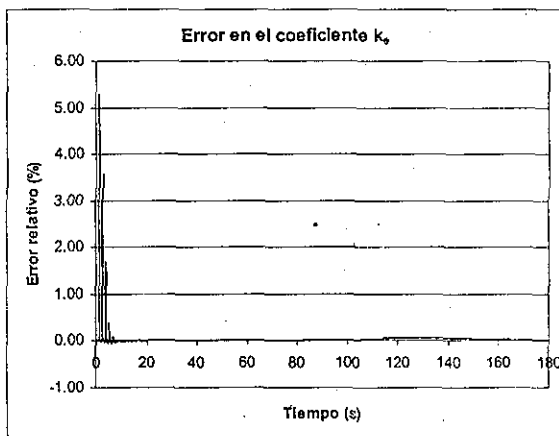
(c) Error en el cálculo de la desviación estándar de la variable histerética.



(d) Error en el cálculo del coef. de correlación entre la velocidad y la v. histerética



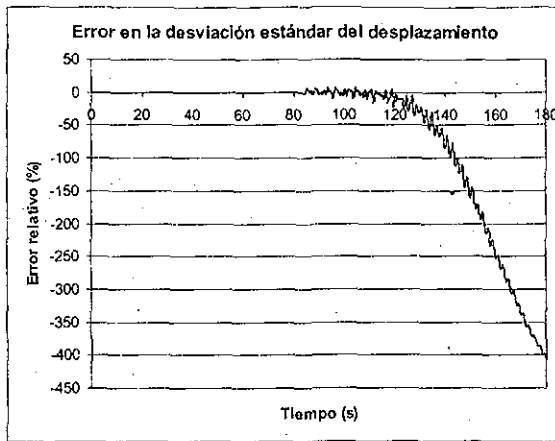
(e) Error en el cálculo del coeficiente linealizador c_e .



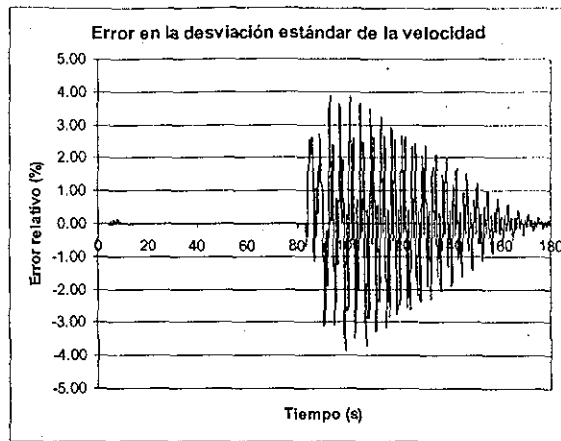
(f) Error en el cálculo del coeficiente linealizador k_e .

Figura 3.17. Errores relativos en el cálculo de la respuesta del oscilador con $n=1$.

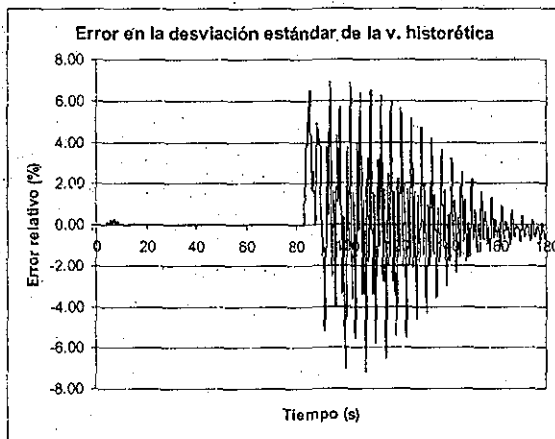
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



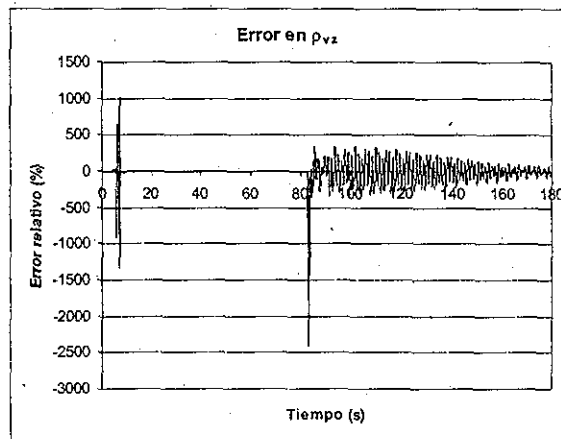
(a) Error en el cálculo de la desviación estándar del desplazamiento.



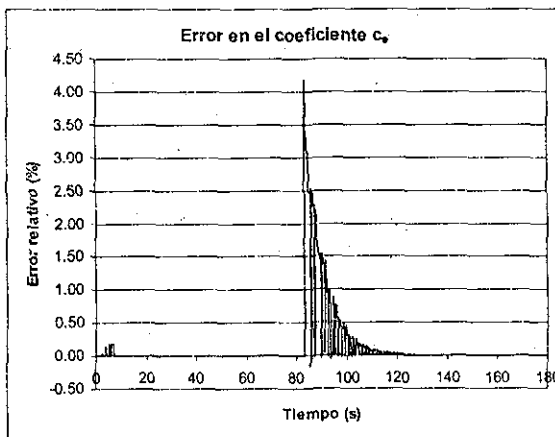
(b) Error en el cálculo de la desviación estándar de la velocidad.



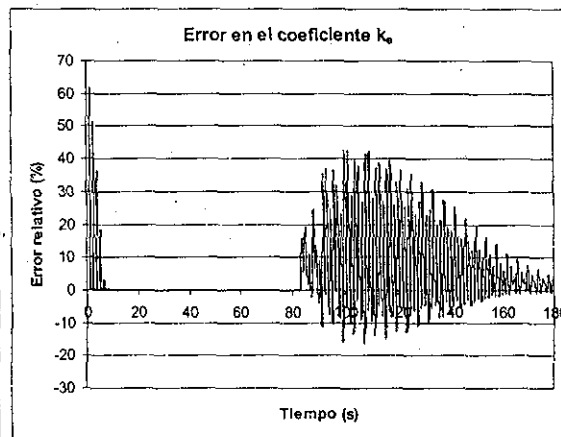
(c) Error en el cálculo de la desviación estándar de la variable histerética.



(d) Error en el cálculo del coef. de correlación entre la velocidad y la v. histerética



(e) Error en el cálculo del coeficiente linealizador c_e .



(f) Error en el cálculo del coeficiente linealizador k_e .

Figura 3.18. Errores relativos en el cálculo de la respuesta del oscilador con $n=2$.

CAPÍTULO



MODELOS DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA

4.1 INTRODUCCIÓN

La causa más evidente de los errores obtenidos con el método LEG es la hipótesis de gaussianidad de todas las variables de respuesta. Las tres componentes del vector de estado (desplazamiento, velocidad y parte histerética del desplazamiento) de un sistema no lineal histerético son en general variables no gaussianas. Se ha observado que las densidades de probabilidad del desplazamiento y de la velocidad muestran una tendencia hacia una distribución tipo exponencial bilateral (Pradlwarter y Schuëller, 1991). Sin embargo se ha visto que estas dos pueden aproximarse de manera razonable por una distribución gaussiana, pero la parte histerética del desplazamiento no puede considerarse normalmente distribuida, ya que su densidad de probabilidad difiere en mucho de una distribución gaussiana.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se ha mostrado que si se usa la verdadera *función de densidad de probabilidad (fdp)* multidimensional del vector de estado, la respuesta estimada por la linealización equivalente estocástica es exacta (Roberts y Spanos, 1990). En este capítulo se proponen funciones de densidad de probabilidad que permiten, además de modelar adecuadamente a las verdaderas *fdp* de la respuesta, determinar en forma cerrada los coeficientes linealizadores asociados.

En este trabajo se consideran únicamente las características no gaussianas de la parte histerética del desplazamiento, por lo que se supone que la velocidad y el desplazamiento son variables conjuntamente gaussianas.

4.2 DENSIDADES DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA OBTENIDAS MEDIANTE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO.

Considérese un sistema histerético de un grado de libertad sujeto a un proceso aleatorio de excitación, cuya ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \alpha_2\omega^2x + (1 - \alpha_2)\omega^2z = -a(t) \quad (4.1)$$

$$z = h(\dot{x}, z) = A\dot{x} - \beta z|\dot{x}|z^{n-1} - \gamma x|z|^n \quad (4.2)$$

donde \ddot{x} , \dot{x} y x son la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de la masa respectivamente, $\xi = c/2m\omega$ es la fracción de amortiguamiento crítico viscoso, $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia circular de vibración del sistema, m es la masa, c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso, k es la rigidez inicial, α_2 es la razón entre la rigidez de postfluencia y la rigidez inicial, t es el tiempo y $a(t)$ la aceleración aleatoria del terreno. z es la componente histerética del desplazamiento, modelada la ecuación diferencial no lineal de primer orden ecuación (4.2) (modelo de Bouc-Wen) propuesta originalmente por Bouc (1967) y generalizada posteriormente por Wen (1980).

Físicamente la fuerza restauradora no puede adoptar valores superiores a los de resistencia última del sistema, es decir, su función de densidad de probabilidad es acotada. Obviamente el valor

límite de la fuerza restauradora depende directamente de la variable z . El valor máximo que alcanza z se puede determinar igualando a cero la derivada de z respecto a t (Silva, 1998)

$$\frac{dz}{dt} = z = 0 \tag{4.3}$$

o bien, igualando a cero la derivada de z con respecto a x , ya que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 0 \tag{4.4}$$

Usando 4.4, se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{z}{\dot{x}} = \frac{A\dot{x} - \beta z|\dot{x}||z|^{n-1} - \gamma\dot{x}|z|^n}{\dot{x}} = A - \frac{\beta z|\dot{x}||z|^{n-1}}{\dot{x}} - \gamma|z|^n = 0$$

Sin pérdida de generalidad, en el caso en que $z > 0$ y $\dot{x} > 0$, se obtiene:

$$z_u = \left(\frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \tag{4.5}$$

Lo cual da la siguiente expresión para la fuerza de fluencia f_y del sistema:

$$f_y = k z_u = k \left(\frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \tag{4.6}$$

La densidad de probabilidad de z es también acotada ya que: $-z_u \leq z \leq z_u$ y es de esperarse que su masa de probabilidad se concentre alrededor de sus límites superior e inferior en aquellos casos en donde la respuesta del sistema exceda el desplazamiento de fluencia.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con el fin de proponer una función que modele de forma adecuada a la verdadera función de densidad de probabilidad de z enseguida se obtienen, mediante simulación de Monte Carlo (SMC), densidades de probabilidad de z de diferentes sistemas histeréticos cuya ecuación de movimiento es la (4.1) y (4.2).

El sistema de un grado de libertad tiene las siguientes propiedades:

- Fracción de amortiguamiento crítico $\xi = 0.05$
- Masa $m = 1.7/981 = 1.7329 \times 10^{-3}$ tons²/cm

Los parámetros del modelo Bouc-Wen (ecuación 4.2) son:

- k tal que el periodo de vibración sea $T = 2.0$ s
- $\alpha_2 = 0.015$
- $\beta = \gamma$ tal que la ductilidad esperada sea $\eta = 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ y 4.0 (ecuación 4.6)
- $n = 1$
- Se supone que el sistema no tiene degradación de rigidez ni de resistencia

Se usaron 50,000 sismos simulados. Los parámetros del espectro de Clough-Penzien (ecuación 2.8) se determinan a partir del espectro de potencia del sismo registrado en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el evento del 19 de septiembre de 1985 (SCTEW85), siguiendo la metodología descrita en el capítulo 2.

$$\xi_g = 0.0220 ; \omega_g = 3.1017 ; \xi_f = 0.0492 ; \omega_f = 2.2988 \text{ y } s_0 = 7.2776 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}^3$$

La función moduladora es la propuesta por Yeh y Wen (1989) (ecuación 2.18) con los parámetros calculados en la forma descrita en el capítulo 2.

$$a = 5.8161 \times 10^{48} \text{ cm}^2/\text{s}^4 ; b = -0.3388 ; c = -0.1258 ; d = 2.166 \times 10^{47} ; e = 26.461$$

En las figuras 4.1 a 4.5 se muestran algunas de las densidades de probabilidad de la variable histerética z obtenidas. Las densidades mostradas corresponden al instante en el que la excitación es más intensa ($t=59s$). Se calcularon para cinco diferentes niveles de ductilidad esperada. Se observa que en la medida en que la demanda de ductilidad aumenta, la densidad de probabilidad se vuelve más alta y estrecha, y adquiere una forma bimodal totalmente distinta a la forma gaussiana. Obsérvese que todas las *fdp* mostradas están acotadas dentro del intervalo $-z_u \leq z \leq z_u$. En Silva, *et al* (2001) se hace un estudio sobre el efecto del tipo de modelo utilizado para la excitación en las propiedades de la *fdp* de la respuesta, por ejemplo en la curtosis.

4.3 MODELO PROPUESTO PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA

La concentración de valores de la variable z en la vecindad de su valor máximo z_u sugiere el uso de la siguiente densidad de probabilidad de z :

$$f_z(z) = {}_a\phi_z(z)(1-2p) + {}_b\phi_z(z-z_z)p + {}_b\phi_z(z+z_z)p \quad ; \quad 0 \leq p \leq 0.5 \quad (4.7)$$

donde ${}_a\phi_z$ y ${}_b\phi_z$ son funciones exponenciales definidas como:

$${}_a\phi_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{za}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_{za}^2}\right) \quad ; \quad {}_b\phi_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{zb}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_{zb}^2}\right) \quad (4.8)$$

p es un factor de peso. La figura 4.6 muestra gráficamente la *fdp* propuesta.

También es necesario determinar la función de densidad de probabilidad conjunta entre el desplazamiento, la velocidad y la componente histerética. Esta densidad de probabilidad conjunta se determina considerando que es razonable suponer que el desplazamiento y la velocidad están normalmente distribuidas y que la densidad de probabilidad de la variable histerética es la función (4.7).

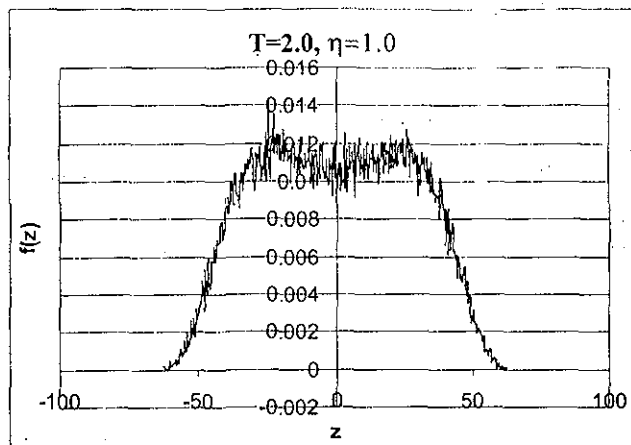


Figura 4.1. Densidad de probabilidad de z , para una demanda de ductilidad de 1.0, $z_u = 76.03$

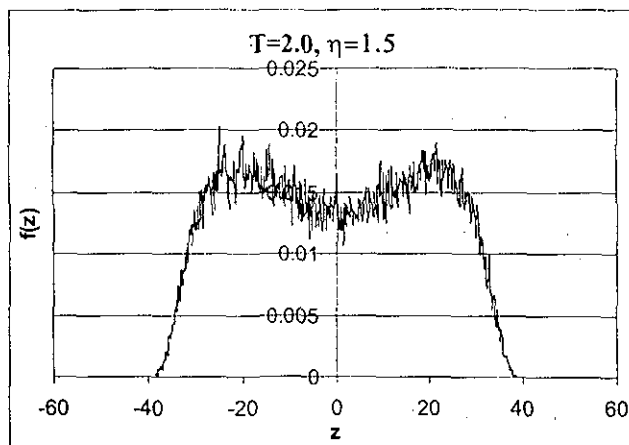


Figura 4.2. Densidad de probabilidad de z , para una demanda de ductilidad de 1.5, $z_u = 40.49$

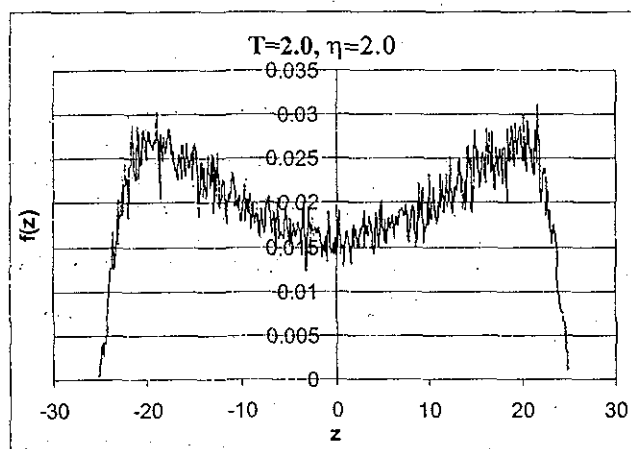


Figura 4.3. Densidad de probabilidad de z , para una demanda de ductilidad de 2.0, $z_u = 25.42$

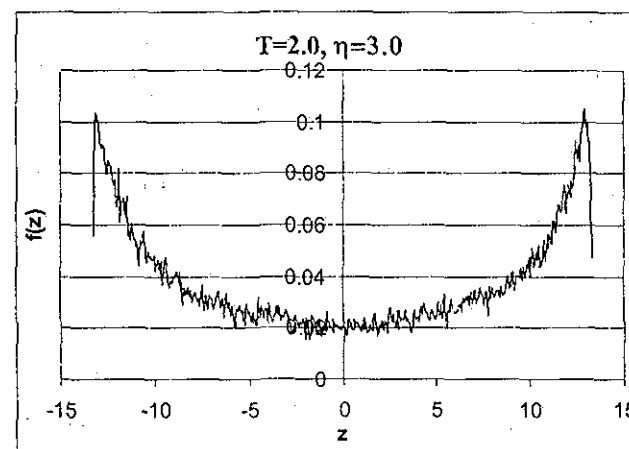


Figura 4.4. Densidad de probabilidad de z , para una demanda de ductilidad de 3.0, $z_u = 13.31$

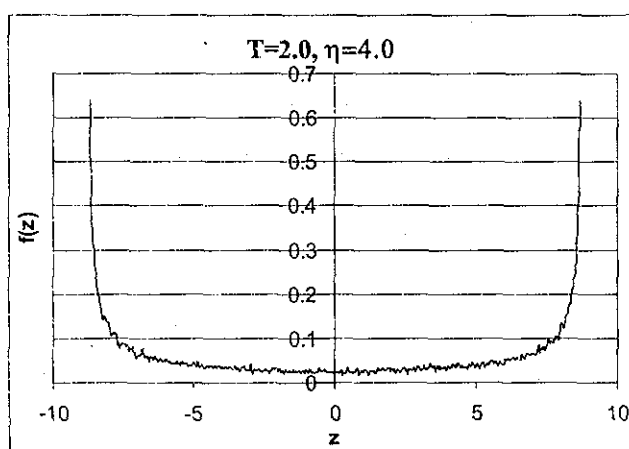


Figura 4.5. Densidad de probabilidad de z , para una demanda de ductilidad de 4.0, $z_u = 8.69$

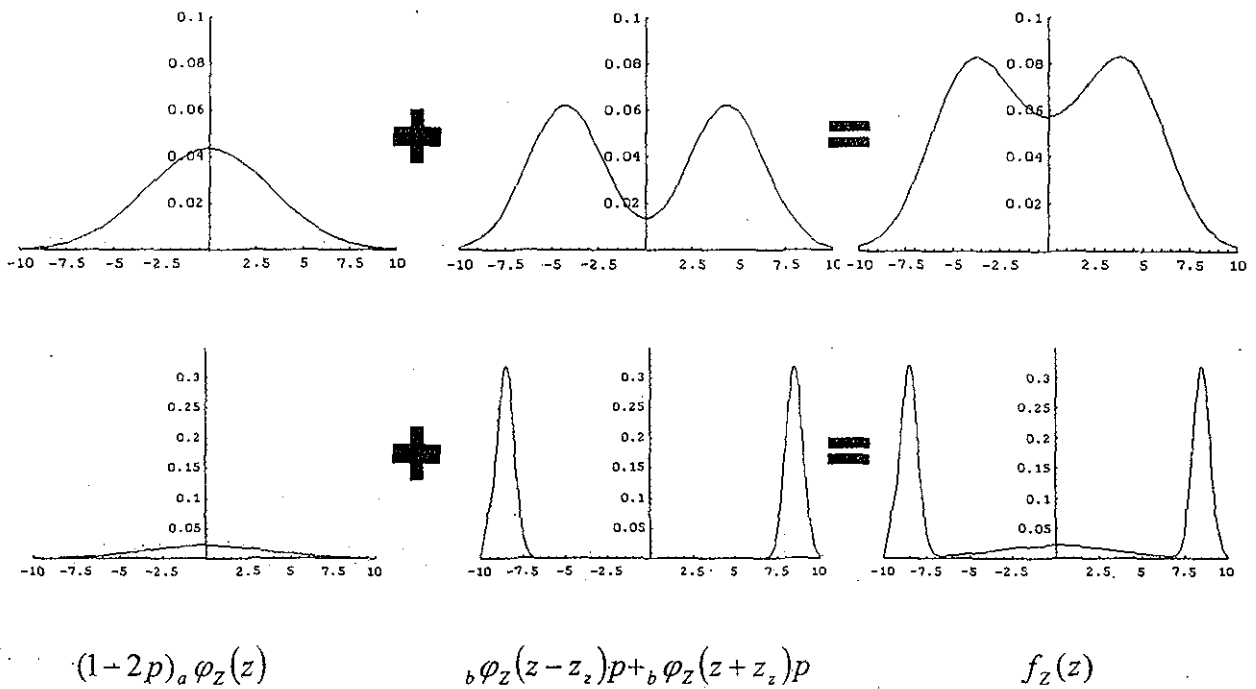


Figura 4.6. Función de densidad de probabilidad de z propuesta.

Existen diversas formas de calcular una *fdp* conjunta con *fdp* marginales prescritas (ver por ejemplo: Johnson *et al*, 1994; Liu y Der Kiureghian, 1986). En esta investigación se decidió determinar la *fdp* $f_{xxz}(x, \dot{x}, z)$ a partir de la *fdp* condicional de x y \dot{x} dado z , de la siguiente forma:

$$f_{xxz}(x, \dot{x}, z) = h(x, \dot{x}|z) f_z(z) \tag{4.9}$$

dónde $h(x, \dot{x}|z)$ es la *fdp* condicional de x y \dot{x} dado z y $f_z(z)$ es la densidad marginal de z dada por la ecuación (4.7).

Se adopta un procedimiento de estimación lineal, el cual lleva a plantear las siguientes tres hipótesis sobre la *fdp* condicional conjunta del desplazamiento y de la velocidad:

1. Es conjuntamente normal para cada valor real de z
2. Sus medias condicionales son funciones lineales de z
3. Su varianzas condicionales son constantes, no dependen de ningún valor de z .

Además se considera que la media del proceso de respuesta es cero. Al usar estas hipótesis junto con las ecuaciones (4.7) y (4.9) se obtiene (ver apéndice A):

$$\begin{aligned}
 f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) = & \\
 & \frac{1-2p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{za} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{z^2}{\sigma_{za}^2} (1-\rho_{xx}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{xz}\rho_{xz}\rho_{xz}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{xz}^2) - 2\frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right. \\
 & \left. - 2\frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}} \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right] + \\
 & \frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{zb} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} (1-\rho_{xx}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{xz}\rho_{xz}\rho_{xz}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{xz}^2) - 2\frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right. \\
 & \left. - 2\frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}} \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right] + \\
 & \frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{zb} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} (1-\rho_{xx}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{xz}\rho_{xz}\rho_{xz}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{xz}^2) - 2\frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right. \\
 & \left. - 2\frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}} \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} (\rho_{xz} - \rho_{xz}\rho_{xz}) \right]
 \end{aligned}$$

donde

$$\kappa = 1 - \rho_{xz}^2 - \rho_{\dot{x}z}^2 - \rho_{xz}^2 + 2\rho_{xz}\rho_{xz}\rho_{xz} \quad (4.10)$$

Se puede demostrar que la función (4.10) satisface las propiedades de una función de densidad de probabilidad. Cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) = 1 \quad (4.11)$$

Las densidades de probabilidad marginal se obtienen integrando la ecuación (4.10). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 f_{\dot{x}z}(\dot{x}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) dx = \\
 \frac{1-2p}{2\pi\sigma_{\dot{x}}\sigma_{za}\sqrt{1-\rho_{\dot{x}z}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{\dot{x}z}^2)} \left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} - 2\rho_{\dot{x}z} \frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}}\sigma_z} + \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} + \rho_{\dot{x}z}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) \right) \right] + \\
 \frac{p}{2\pi\sigma_{\dot{x}}\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{\dot{x}z}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{\dot{x}z}^2)} \left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} - 2\rho_{\dot{x}z} \frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}}\sigma_z} + \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{\dot{x}z}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right] + \\
 \frac{p}{2\pi\sigma_{\dot{x}}\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{\dot{x}z}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{\dot{x}z}^2)} \left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} - 2\rho_{\dot{x}z} \frac{\dot{x}z}{\sigma_{\dot{x}}\sigma_z} + \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{\dot{x}z}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right] \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

En la figura 4.7 se muestra la grafica de la ecuación (4.12) con diferentes valores del coeficiente de correlación $\rho_{\dot{x}z}$.

Debe hacerse notar que las *fdp* conjunta y marginales del desplazamiento y la velocidad dependen de los coeficientes de correlación $\rho_{\dot{x}z}$ y ρ_{xz} , y se asemejan a una distribución gaussiana para valores pequeños del coeficiente de correlación mientras que para valores altos adoptan una forma no gaussiana similar a la *fdp* de la variable histerética z (véanse las figuras 4.8 y 4.9)

4.3.1 Cálculo de los parámetros σ_{za} , σ_{zb} , p y z_z de la *fdp* propuesta

Los parámetros σ_{za} , σ_{zb} , p y z_z deben ser tales que cumplan con ciertas restricciones. Una de las condiciones más importantes es que el área debajo de la función (4.7) debe ser suficientemente cercana a uno, es decir:

$$\int_{-z_u}^{z_u} f_z(z) dz = (1-2p) \text{Erf} \left(\frac{z_u}{\sqrt{2}\sigma_{za}} \right) + p \left[\text{Erf} \left(\frac{z_u - z_z}{\sqrt{2}\sigma_{za}} \right) + \text{Erf} \left(\frac{z_u + z_z}{\sqrt{2}\sigma_{za}} \right) \right] \approx 1 \quad (4.13)$$

ya que la ecuación (4.7) no es una función acotada. Si esta condición se cumple puede aproximarse la varianza de z con la siguiente expresión:

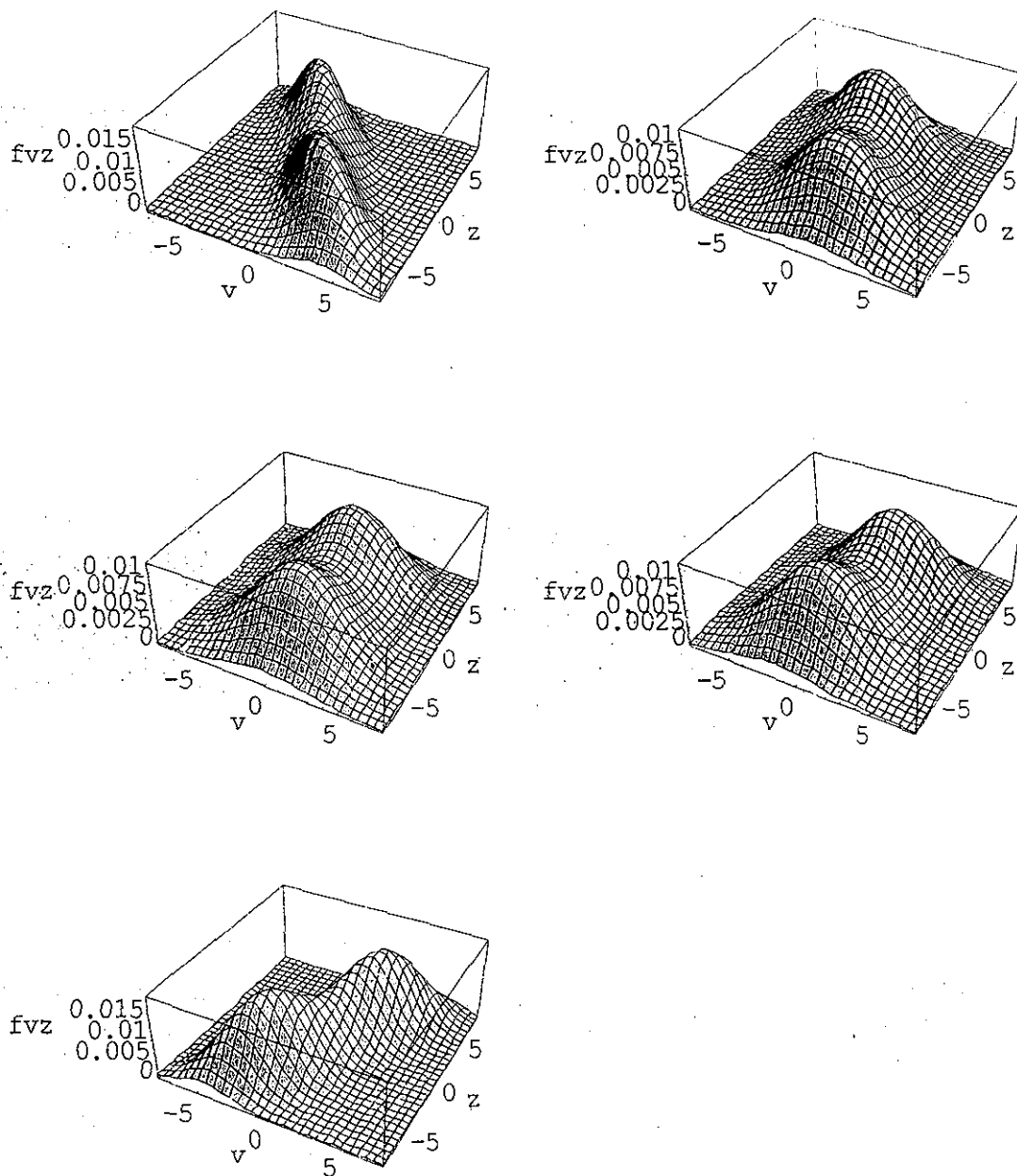


Figura 4.7. *Fdp* con diferentes valores del coeficiente de correlación ρ_{xz} .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

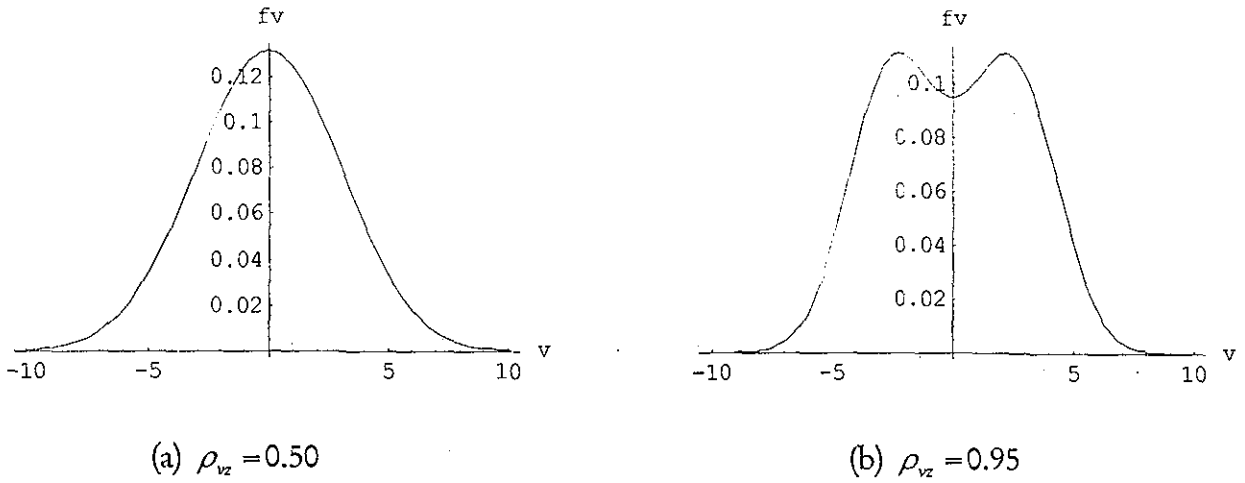


Figura 4.8 Fdp marginal de la velocidad para dos coeficientes de correlación.

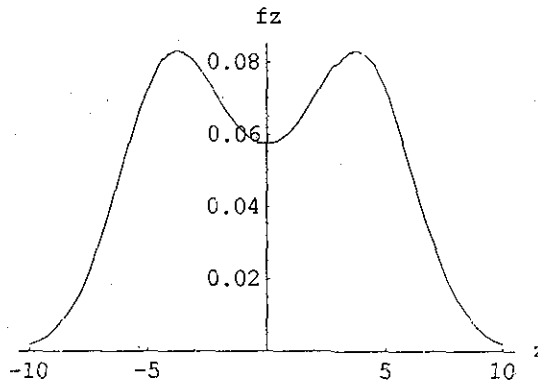


Figura 4.9 Fdp marginal de z . No depende de ρ_{vz}

$$E[z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) dx d\dot{x} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_z(z) dz = (1-2p)\sigma_{za}^2 + 2p(z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \approx \sigma_z^2 \quad (4.14)$$

El problema puede verse como uno que tiene dos ecuaciones (4.13 y 4.14) con cuatro incógnitas. Las ecuaciones faltantes podrían estar dadas por los momentos de tercero y cuarto orden. La solución al sistema de ecuaciones no lineal así planteado podría limitar la eficiencia computacional de la linealización equivalente. Además la linealización no proporciona información estadística de orden mayor que dos.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Así pues, se propone como medida de la no gaussianidad del proceso de respuesta de un sistema histerético con una desviación estándar σ_z , al área debajo de una función gaussiana en el intervalo $-z_u > z > z_u$, es decir:

$$\lambda = \int_{-z_u}^{z_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \text{Exp}\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) dz = \frac{1}{2} \left(1 - \text{Erf}\left(\frac{z_u}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)\right) \quad (4.15)$$

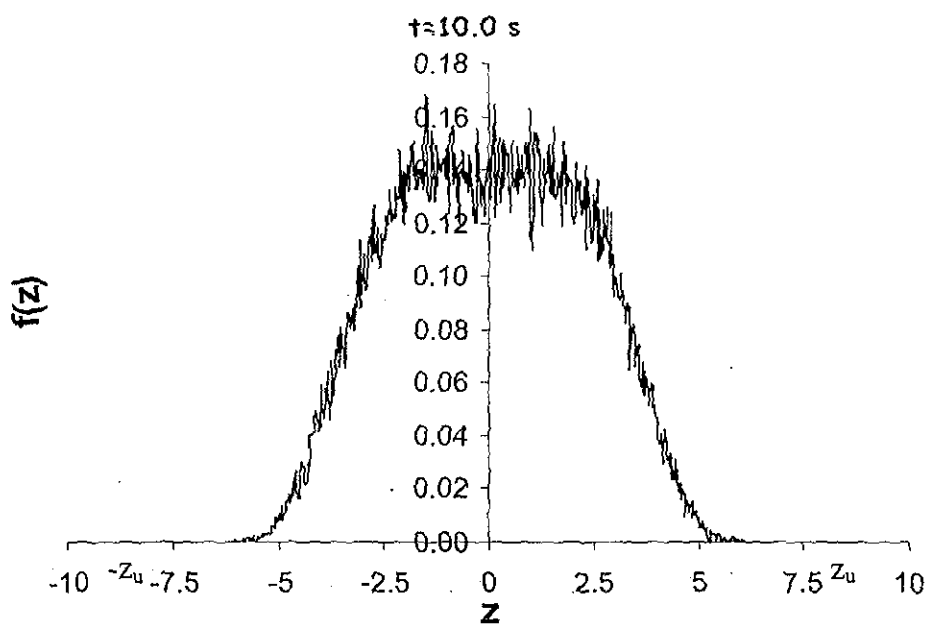
Para una intensidad determinada del proceso de excitación, si z_u es grande de tal forma que el desplazamiento no excede el de fluencia, la respuesta es gaussiana y entonces $\lambda \rightarrow 0$. Por el contrario si z_u es pequeña de tal forma que el desplazamiento de fluencia se excede, la respuesta es no gaussiana y entonces $0 < \lambda < \lambda_u < 1$.

La interpretación gráfica de la ecuación (4.15) se muestra en las figuras 4.10 y 4.11. En la figura 4.10a se muestra la densidad de probabilidad de z en el instante $t=10.0s$ y en la figura 4.11a se muestra la densidad de probabilidad de z en el instante $t=39.5s$ obtenidas a partir del análisis de simulación de Monte Carlo de un sistema de un grado de libertad con las siguientes propiedades:

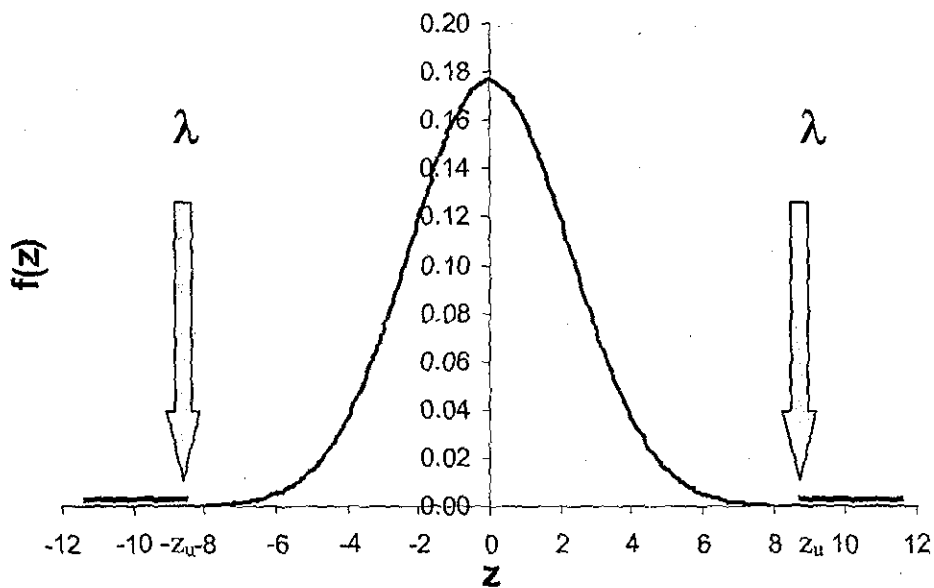
$$T=2.1s, f_y=0.1347\text{ton}, \xi=0.05, n=1, \alpha_2=0.015, z_u=8.69\text{cm}$$

El proceso de excitación es el SCTEW85 cuyas propiedades se definieron en la sección 4.2. El valor de la desviación estándar de z en el instante $t=10.0s$ es de 2.26cm y en el instante $t=39.5s$ es de 5.02cm.

En las figuras 4.10b y 4.11b se muestran funciones de densidad gaussiana con las mismas desviaciones de 2.26 y 5.02cm. Puesto que en el instante $t=10$ la intensidad del proceso de excitación es baja, el nivel de ductilidad esperado es bajo y por lo tanto el valor del parámetro λ es bajo. En el instante $t=39.5s$ la intensidad de la excitación es intensa y ha provocado que se exceda el desplazamiento de fluencia, en este caso el valor del parámetro λ es relativamente alto. En las gráficas el valor del parámetro λ es igual al tamaño de uno de los triángulos mostrados en la figura 4.11b.



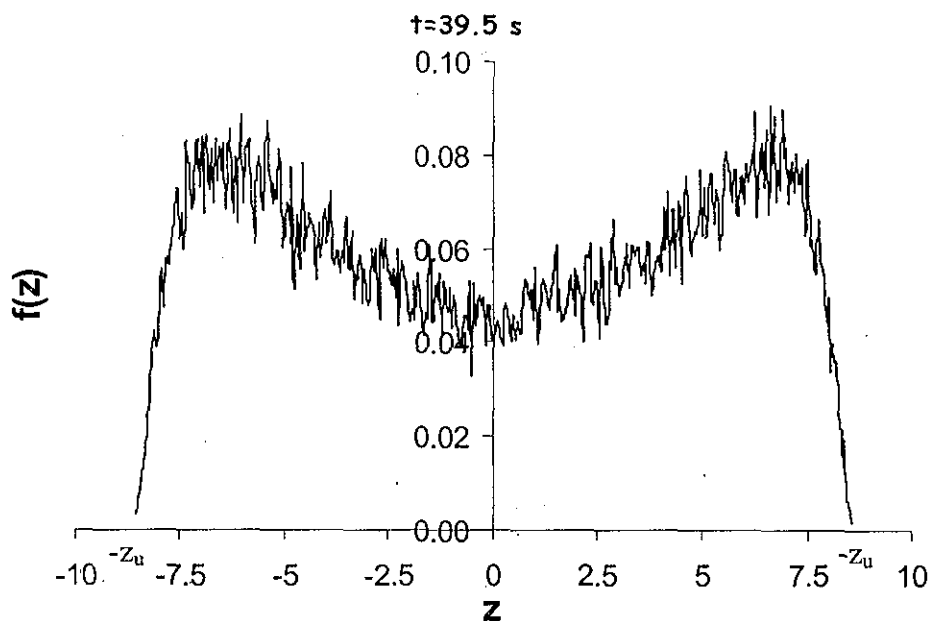
a) F_{dp} obtenida con simulación de Monte Carlo. Instante $t=10.0s$



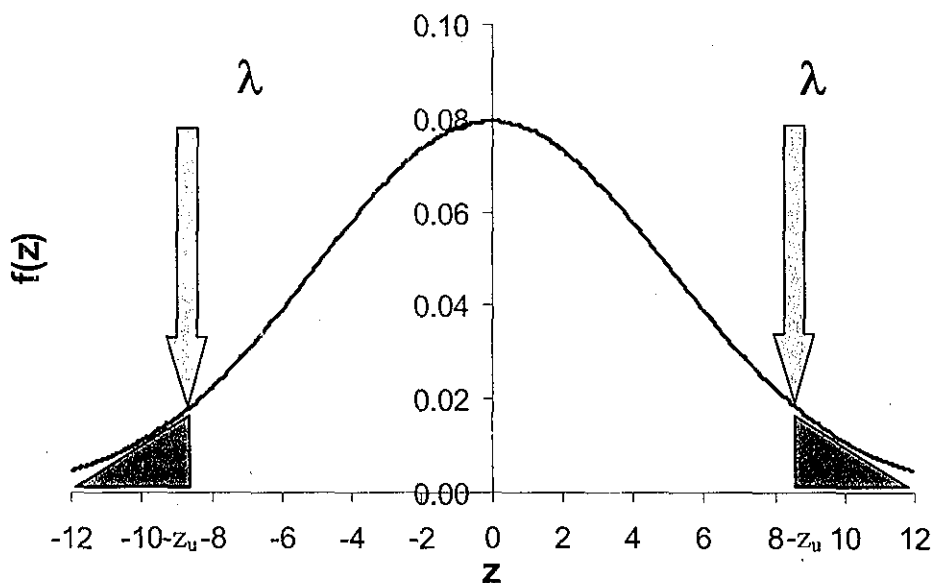
b) Magnitud del parámetro λ

Figura 4.10. Medida de la no gaussianidad del proceso de repuesta. Instante $t=10.0s$ en el que la excitación es débil.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



a) Fdp obtenida con simulación de Monte Carlo. Instante $t=39.5s$



b) Magnitud del parámetro λ

Figura 4.11. Medida de la no gaussianidad del proceso de repuesta. Instante $t=39.5s$ en el que la excitación es intensa.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con el fin de proponer expresiones generales con las que puedan determinarse los parámetros de la *fdp* propuesta (ecuación 4.10), y considerando que la forma que adopta la *fdp* de z depende del valor máximo z_u de z y de la intensidad de la excitación reflejada en la magnitud de σ_z , se realiza el siguiente análisis:

1. Se determina el valor máximo que puede alcanzar λ . Después de haber analizado con simulación de Monte Carlo varios sistemas con diferentes periodos y demandas de ductilidad se encontró que el intervalo de λ varía entre 0 y 0.1.

2. A partir de simulación de Monte Carlo se determina la forma en que evoluciona la *fdp* de la variable histerética del mismo sistema de un grado de libertad mencionado anteriormente. La excitación usada sigue siendo el proceso SCTEW85. El caso considerado es un caso no gaussiano extremo ya que el sistema tiene un periodo de vibración igual al periodo dominante del proceso de excitación y además exhibe una demanda de ductilidad esperada alta. La figura 4.12 muestra la evolución de la *fdp* de z .

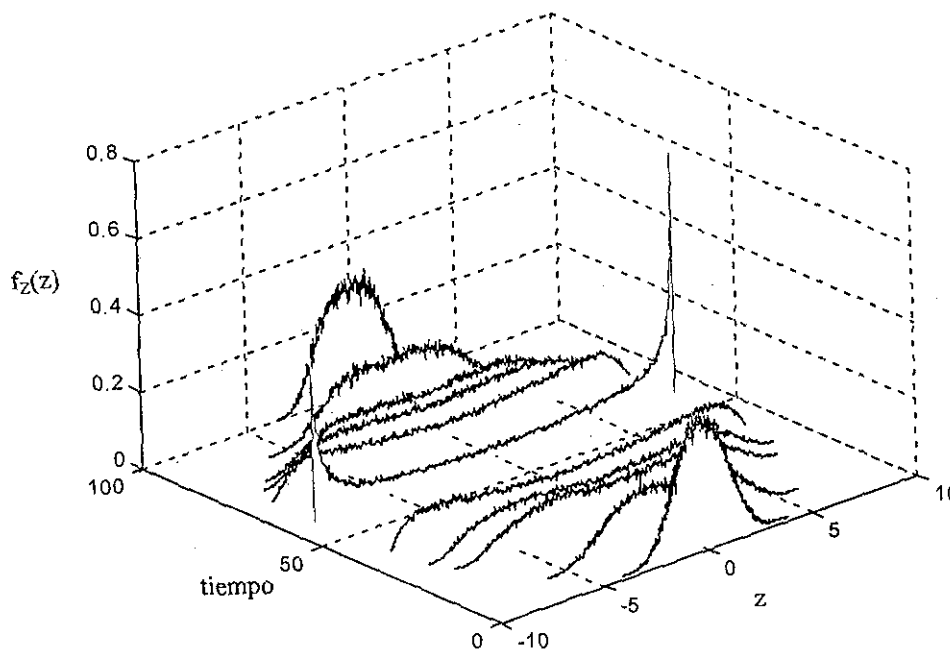


Figura 4.12. Evolución de la *fdp* de la variable z .

3. Con un ajuste no lineal a cada fdp de cada instante, se determinan los valores de los parámetros σ_{za} , σ_{zb} , p y z_z . Estos valores se corrigen de manera empírica con el fin de satisfacer las ecuaciones (4.13) y (4.14). En este ajuste empírico se encontró que si $\sigma_{za} > \sigma_{zb}$ se obtiene un modelo adecuado para la fdp de z .

4. Los valores obtenidos se normalizan utilizando las propiedades del sistema analizado y su respuesta ante el proceso de excitación usado. Se obtienen las cantidades normalizadas: σ_{za}/σ_z , σ_{zb}/σ_z , p , z_z/z_u . Después, estas cantidades se asocian con su respectivo valor de λ , es decir se determinan las siguientes relaciones σ_{za}/σ_z vs. λ , σ_{zb}/σ_z vs. λ , p vs. λ , z_z/z_u vs. λ .

5. Finalmente se efectúa un ajuste no lineal para dichas relaciones, y se obtienen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \frac{z_z}{z_u} &= 0.187594 \text{Ln}(31.9902\lambda + 0.042957) + 0.590462 \\ p &= 0.043416 \text{Ln}(455.1269\lambda + 0.003949) + 0.240276 \\ \frac{\sigma_{za}}{\sigma_z} &= -0.269012 \text{Ln}(8.247666\lambda + 0.125757) + 0.442229 \\ \frac{\sigma_{zb}}{\sigma_z} &= -0.239519 \text{Ln}(1.408468\lambda + 0.007419) - 0.391143 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Además, las funciones (4.16) deben cumplir ciertas condiciones de frontera. Por ejemplo, en $\lambda=0$ se tiene:

$$\frac{z_z}{z_u} = 0 \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad \frac{\sigma_{za}}{\sigma_z} = 1 \quad ; \quad \frac{\sigma_{zb}}{\sigma_z} < 1 \quad (4.17)$$

Y para valores mayores al límite superior $\lambda_u \approx 0.1$ de λ , se tiene:

$$\frac{z_z}{z_u} \leq 1 \quad ; \quad p < 0.5 \quad ; \quad \frac{\sigma_{za}}{\sigma_z} > 0 \quad ; \quad \frac{\sigma_{zb}}{\sigma_z} > 0 \quad (4.18)$$

Las funciones (4.16) se muestran gráficamente en las figuras 4.13. En ellas se muestran con puntos los resultados obtenidos con SMC y que sirvieron para realizar el ajuste no lineal para determinar las funciones (4.16).

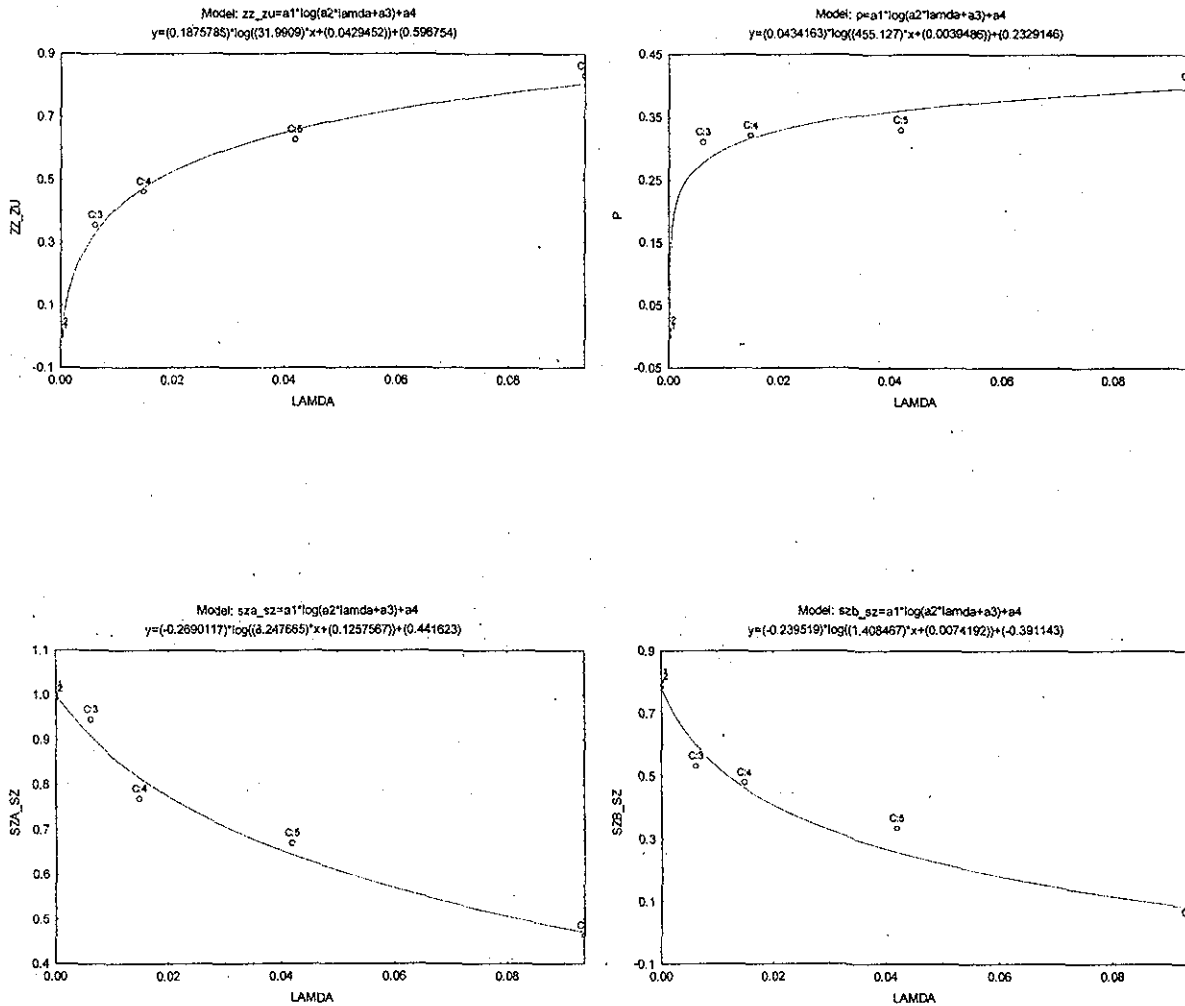


Figura 4.13. Ajuste por mínimos cuadrados no lineales de las relaciones

$$\sigma_{z_a}/\sigma_z \text{ vs. } \lambda, \sigma_{z_b}/\sigma_z \text{ vs. } \lambda, p \text{ vs. } \lambda, z_z/z_u \text{ vs. } \lambda$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se considera que las funciones (4.16) son independientes de cualquier otro parámetro (por ejemplo el periodo de vibración y el tipo de excitación) y por lo tanto se confía en que sean una buena aproximación para modelar la *fdp* de la respuesta de UGL con propiedades diferentes a las usadas para este ajuste. En el capítulo 5 se determinara la bondad de este modelo.

Obsérvese que los parámetros σ_{za} , σ_{zb} , p y z_z no son constantes sino que varían en el tiempo. Esto significa que el modelo propuesto (ecuación 4.10) toma en cuenta la evolución de la densidad de probabilidad, lo que no hacen otros métodos propuestos en la literatura.

La figura 4.14 muestra las diferentes formas que adopta la *fdp* de z (ecuación 4.7) usando las funciones (4.16) para diferentes valores del parámetro λ . Dichas gráficas modelan la evolución de la densidad de probabilidad de z mostrada en la figura 4.12.

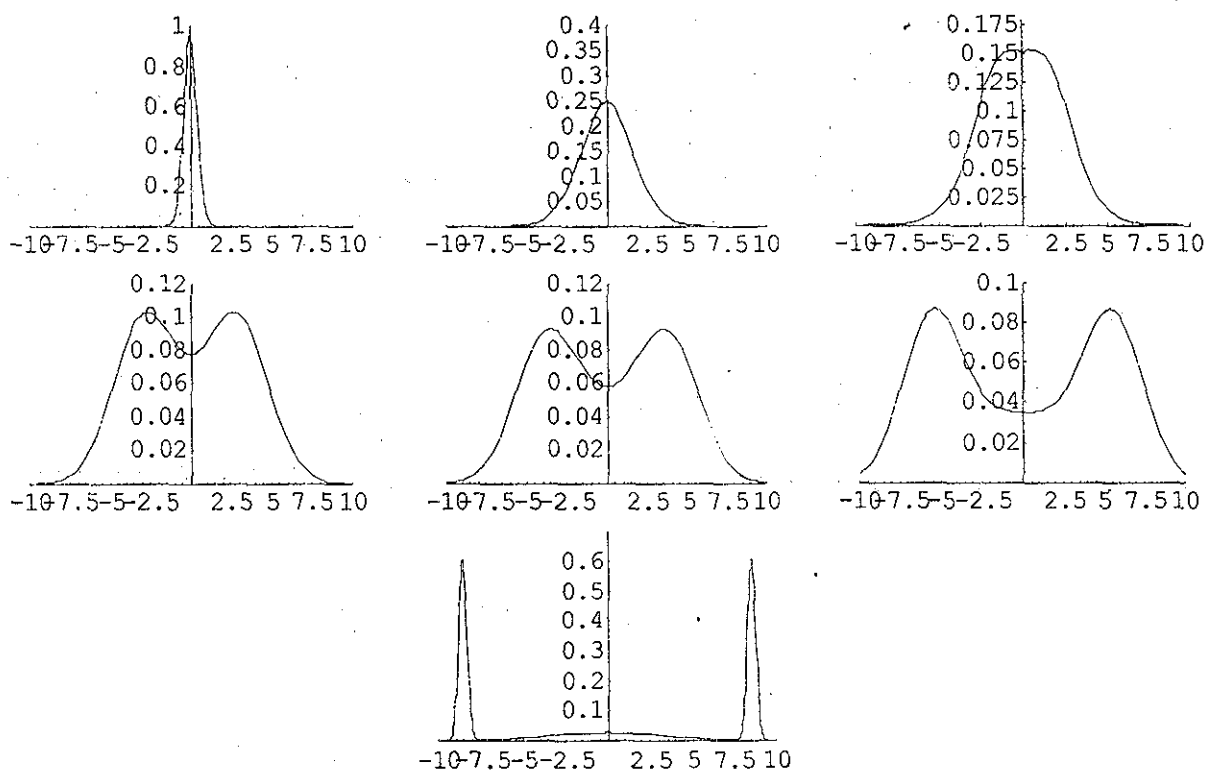


Figura 4.14 Modelo para la evolución de la *fdp* de z .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la figura 4.15 se muestra la representación continua de la ecuación (4.7)

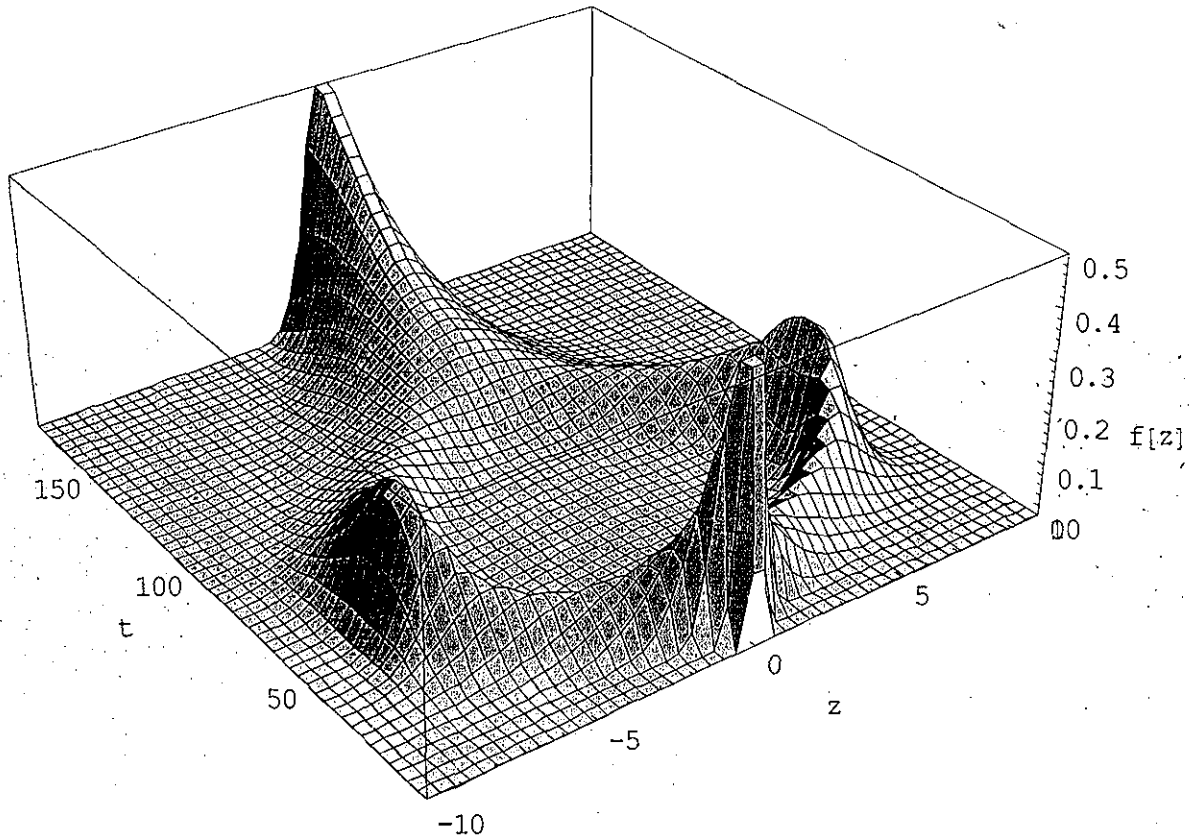


Figura 4.15 Comportamiento del modelo propuesto: evolución de $f_z(z)$.

Para determinar la gráfica mostrada en la figura 4.15 se supuso, para fines de ilustración, que la evolución de la varianza de z está dada por:

$$\sigma_z(t) = 6.5 \text{Exp}[-2 \text{Ln}[0.15(t+10)]^2]$$

4.4 OTROS MODELOS

El modelo propuesto en la sección anterior es el resultado de varios estudios llevados a cabo durante la investigación doctoral. Se exploraron métodos tan simples como el modelar la *fdp* de z a

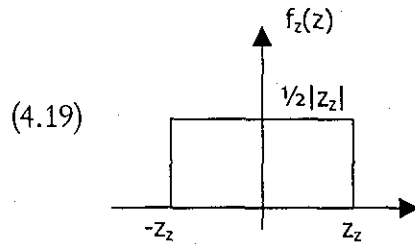
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

través de una *fdp* uniforme, y tan complicados como el modelar la misma *fdp* de z como una suma de varias funciones de probabilidad. Estas se revisan brevemente en lo que sigue.

4.4.1 Función de densidad uniforme

Se exploró, debido a la naturaleza acotada de la variable z , modelar la *fdp* de z con una *fdp* uniforme de la siguiente manera:

$$f_z = \frac{1}{2|z_z|} \quad -z_u \leq z_z \leq z_u$$



(4.19)

con $\mu_z = 0$ y $\sigma_z^2 = \frac{z_z^2}{3}$ (4.20)

A manera de ilustración, se describe enseguida el proceso de cálculo de la *fdp* conjunta de la velocidad y de la variable histerética z y de la *fdp* conjunta del desplazamiento y de la variable histerética z . Estas dos *fdp* son similares porque se supone que x y \dot{x} tienen el mismo tipo de *fdp*. Sea $v = \dot{x}$ ó x . Se adoptará un procedimiento de estimación lineal, el cual lleva a plantear las siguientes tres hipótesis sobre la *fdp* condicional de v dado z .

- a) Es normal para cada valor real de z
- b) Su media condicional es una función lineal de z
- c) Su varianza condicional es constante, no depende de ningún valor de z .

Según la hipótesis b

$$E[v|z] = \mu_v + \rho_{vz} \frac{\sigma_v}{\sigma_z} (z - \mu_z)$$
 (4.21)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La hipótesis c, implica:

$$\sigma_{v|z}^2 = \sigma_v^2(1 - \rho_{vz}^2) \tag{4.22}$$

de acuerdo a la hipótesis a), la *fdp* condicional de v dado z es:

$$h(v|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2(1-\rho_{vz}^2)}} \text{Exp} \left[-\frac{\left(v - \mu_v - \rho_{vz} \frac{\sigma_v}{\sigma_z} (z - \mu_z) \right)^2}{2\sigma_v^2(1-\rho_{vz}^2)} \right] \tag{4.23}$$

Considerando que la media del proceso de respuesta es cero y que z está distribuida de manera uniforme, al sustituir (4.19), (4.20) y (4.23) en la siguiente ecuación:

$$f_{vz}(v, z) = h(v|z) f_z(z) \tag{4.24}$$

se obtiene:

$$f_{vz}(v, z) = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}\sqrt{1-\rho_{vz}^2}\sigma_v\sigma_z} \text{Exp} \left[-\frac{\left(v - \mu_v - \rho_{vz} \frac{\sigma_v}{\sigma_z} (z - \mu_z) \right)^2}{2\sigma_v^2(1-\rho_{vz}^2)} \right] \tag{4.25}$$

Un proceso similar, pero de orden mayor, se siguió en la sección 4.3 para determinar la ecuación (4.10) (Véase apéndice A).

En las figuras 4.16 y 4.17 se muestran las densidades marginales obtenidas al integrar la expresión (4.25).

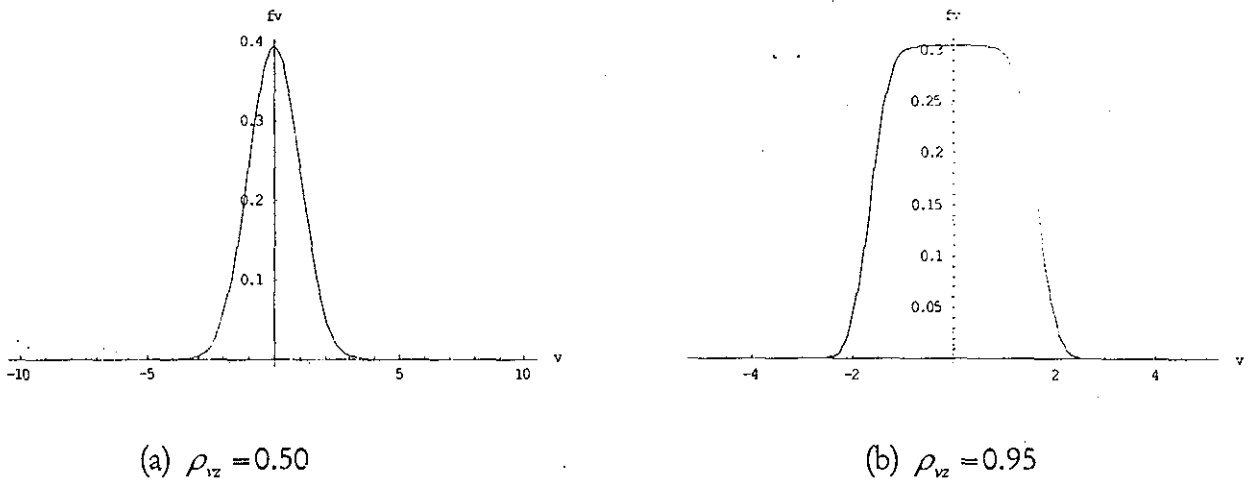


Figura 4.16. *Fdp* marginal de v para dos coeficientes de correlación

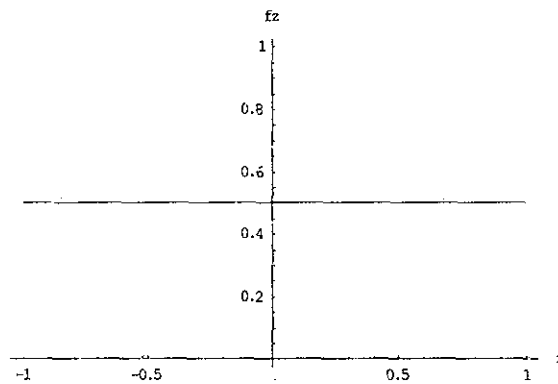


Figura 4.17. *Fdp* marginal de z . No depende de ρ_{vz}

Aquí se observa que la *fdp* marginal de v es función del coeficiente de correlación ρ_{vz} ; para valores pequeños de ρ_{vz} dicha *fdp* se asemeja a una gaussiana, sin embargo para valores altos de ρ_{vz} adopta una forma no gaussiana similar a la *fdp* de la variable histerética z . En cambio, la *fdp* de z es uniforme y no depende de ρ_{vz} , tal como se esperaba.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

4.4.2 Suma de funciones de probabilidad

Se exploró también la posibilidad de modelar a la *fdp* de z usando la siguiente expresión:

$$f_m(z) = \sum_{i=0}^m p_i f_i(z) \quad \text{con} \quad p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (4.26)$$

en la cual p_i son factores de peso y f_i son *fdp* completamente definidas por sus primeros dos momentos. El método se basa en una suma de probabilidades f_m que depende de ciertos parámetros, digamos θ_i y que converge a la probabilidad $f_z(z)$ cuando $m \rightarrow \infty$, siempre que los valores de θ_i se seleccionen apropiadamente (Grigoriu, 1991).

Se seleccionó como *fdp* a una suma de m funciones exponenciales, es decir

$$f_m(z) = \sum_{i=1}^m p_i \varphi_i(z) \quad \text{con} \quad p_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (4.27)$$

donde:

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right) \quad (4.28)$$

Los parámetros a determinar son m conjuntos de valores (μ_i, σ_i, p_i) incluyendo el valor de m . Se determinó que los pesos pueden calcularse adecuadamente con la expresión (Pradlwarter y Schuëller, 1991)

$$p(z) = k \frac{z_u}{\varepsilon(z_u - |z|)\sqrt{2\pi}\sigma_z^2} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_u}{\varepsilon\sigma_z} \text{Ln}\left(1 - \frac{|z|}{z_u}\right)\right)^2\right) \quad (4.29)$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

donde ε es un factor empírico que debe determinarse con simulación de Monte Carlo. La ecuación (4.29) coincide bastante bien con las densidades de probabilidad obtenidas con SMC, sin embargo, su forma matemática no permite el calculo cerrado de los coeficientes linealizadores.

La desventaja del método es que el cálculo de la densidad de probabilidad conjunta $f_{xz}(x, \hat{x}, z)$ se complica demasiado.

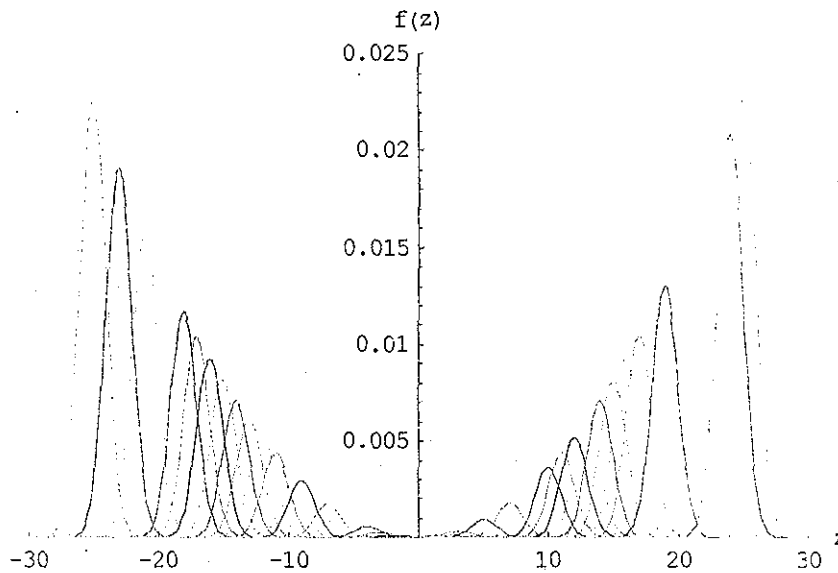


Figura 4.18. Fdp de z modelada como una suma de m funciones exponenciales.

4.4.3 Transformación de variables

Otra forma de resolver el problema es a través de transformaciones no lineales de las variables de respuesta. El método consiste en transformar la variable histerética que es una variable acotada de naturaleza no gaussiana, en una variable gaussiana, digamos u . La transformación que se sugiere es:

$$u = \text{Tan}\left(\frac{\pi z}{2 z_u}\right) \tag{4.30}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La función tangente es la adecuada ya que es una función que tiene asíntotas, es decir está acotada. Se comenzó por determinar las *fdp* de u considerando la transformación mencionada (ecuación 4.30) a partir de las densidades de z obtenidas de la simulación de Monte-Carlo (ver figura 4.1 a 4.5 y 4.12). En las figuras 4.19 a 4.21 se muestran dichas *fdp*. Se observa que las *fdp* de u son muy similares a una distribución gaussiana.

En realidad lo que debe hacerse es transformar las ecuaciones de movimiento (ecuaciones 4.1 y 4.2) usando la ecuación (4.3) y después obtener mediante SMC la *fdp* de u . Las *fdp* de u obtenidas de esta forma deberían ser iguales a las mostradas en las figuras 4.19 a 4.21.

Esta transformación implicaría poder usar las hipótesis de gaussianidad de la respuesta y en particular el poder emplear el teorema de Kazakov (1965) con el fin de simplificar el cálculo de los coeficientes linealizadores.

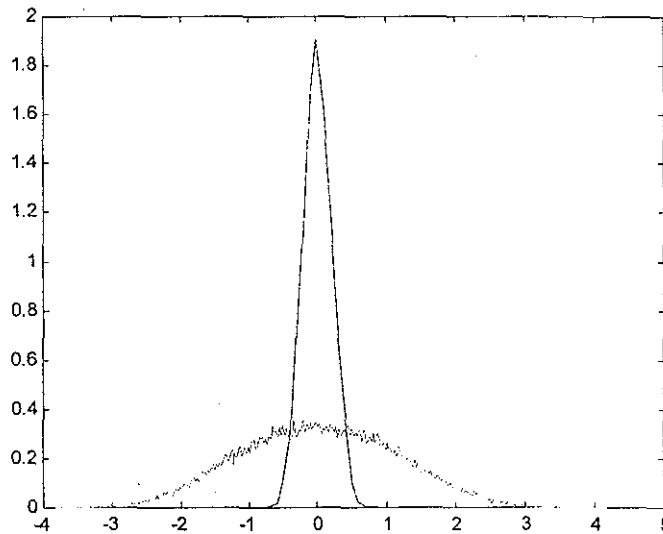


Figura 4.19. Se muestra la *fdp* de z obtenida mediante SMC a los 1.5 s y la *fdp* de la variable $u = \text{Tan}(\pi z/2z_u)$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

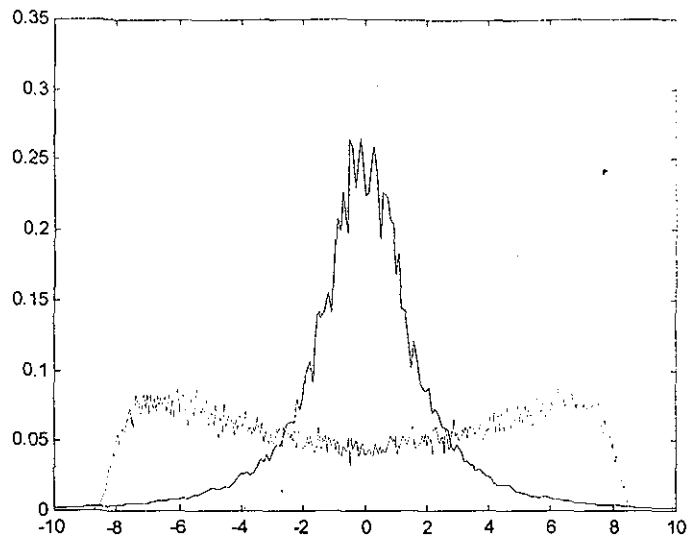


Figura 4.20. Se muestra la *fdp* de z obtenida mediante SMC a los 39.5 s y la *fdp* de la variable $u = \text{Tan}(\pi z/2z_u)$

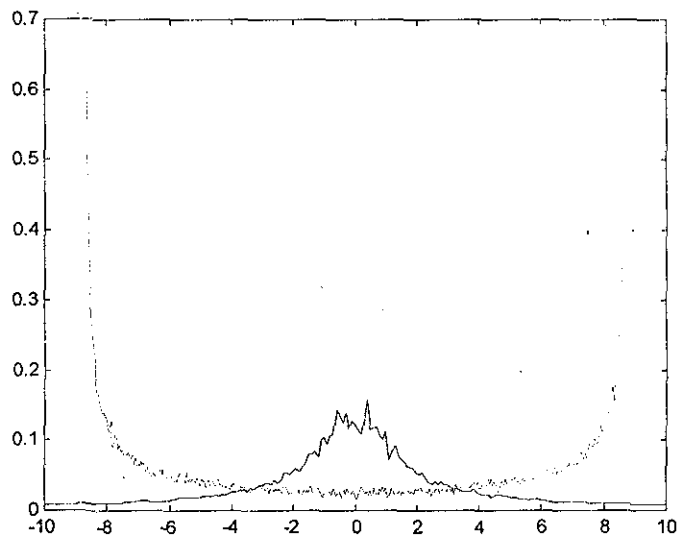
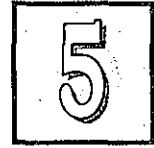


Figura 4.21. Se muestra la *fdp* de z obtenida mediante SMC a los 60.0 s y la *fdp* de la variable $u = \text{Tan}(\pi z/2z_u)$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

CAPÍTULO



LINEALIZACIÓN ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE NO GAUSSIANA

5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha mencionado que la hipótesis de gaussianidad de la respuesta en el criterio de linealización equivalente estocástica conduce a resultados erróneos y dada la naturaleza no gaussiana de la respuesta es necesario plantear un nuevo criterio de linealización equivalente.

En el capítulo 4 se han propuesto algunos modelos para la función de densidad de probabilidad de la respuesta. Dichos modelos se usarán aquí para determinar los coeficientes linealizadores no gaussianos. Cabe mencionar que el teorema de Kazakov (1965) ya no puede aplicarse directamente para el cálculo de dichos coeficientes debido a que la *fdp* de la respuesta no es gaussiana.

El criterio de linealización propuesto es de carácter general; para fines de ilustración se determinan los coeficientes linealizadores. Se realiza la calibración del método propuesto usando un sistema histerético de un grado de libertad.

5.2 COEFICIENTES LINEALIZADORES NO GAUSSIANOS

Considérese un sistema de un grado de libertad cuya fuerza restauradora es de naturaleza histerética de tal forma que la componente histerética del desplazamiento está modelada por la ecuación de Bouc-Wen (Wen, 1980). La ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \alpha_2\omega^2x + (1 - \alpha_2)\omega^2z = -a(t) \quad (5.1)$$

$$z = h(x, z) = Ax - \beta z|x||z|^{n-1} - \gamma x|z|^n \quad (5.2)$$

El modelo lineal que se propone para la ecuación (5.2) es:

$$\dot{z} = s_e x + c_e \dot{x} + k_e z \quad (5.3)$$

Sea el vector

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) pueden describirse de la siguiente forma:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = P(t) \quad (5.5)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\xi\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_2\omega^2 & (1-\alpha_2)\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h(q_1, q_2) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

La ecuación (5.5) es idéntica a la (3.24), por lo tanto el modelo lineal es:

$$(M + M_e)\ddot{q} + (C + C_e)\dot{q} + (K + K_e)q = P(t) \quad (5.11)$$

donde, según la ecuación (5.3):

$$M_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{21}^e & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Los coeficientes linealizadores se calculan con la ecuación (3.32). De dicha ecuación se obtiene:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{bmatrix} k_{21}^e \\ c_{21}^e \\ k_{22}^e \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} s_e \\ c_e \\ k_e \end{bmatrix} = \{E[QQ^T]\}^{-1} E[hQ] \quad (5.15)$$

donde $Q = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{bmatrix}$. Desarrollando:

$$\begin{bmatrix} s_e \\ c_e \\ k_e \end{bmatrix} = \{E[QQ^T]\}^{-1} \begin{bmatrix} E[h(\dot{x}, z)x] \\ E[h(\dot{x}, z)\dot{x}] \\ E[h(\dot{x}, z)z] \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

es decir:

$$H_e = \Sigma_Q^{-1} \begin{bmatrix} \iiint xh(\dot{x}, z) f_{x\dot{x}z} d\dot{x}dxdz \\ \iint \dot{x}h(\dot{x}, z) f_{\dot{x}z} d\dot{x}dz \\ \iint zh(\dot{x}, z) f_{\dot{x}z} d\dot{x}dz \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

donde $\Sigma_Q = E[QQ^T]$ y $H_e = \begin{bmatrix} s_e \\ c_e \\ k_e \end{bmatrix}$.

En la ecuación (5.17), $f_{x\dot{x}z}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta del desplazamiento (x), de la velocidad (\dot{x}) y de la componente histerética del desplazamiento (z) y $f_{\dot{x}z}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de la velocidad (\dot{x}) y de la componente histerética del desplazamiento (z). En el criterio de linealización gaussiana, se considera que estas densidades de probabilidad son gaussianas; en cambio en el siguiente desarrollo esas densidades se consideran no gaussianas, tomando en cuenta los modelos estudiados en el capítulo 4.

Considerando que la función de densidad de probabilidad conjunta f_{xXZ} está dada por la ecuación (4.10) y por lo tanto la densidad f_{XZ} por la ecuación (4.12), el cálculo de las integrales de las ecuaciones (5.17) es relativamente simple llegando a obtener expresiones cerradas, lo cual implica que los coeficientes linealizadores estarán dados también por expresiones cerradas.

Por ejemplo, para el caso en que el exponente de la ecuación (5.2) es $n=1$ la simplificación de la ecuación (5.17) resulta (ver apéndice B):

$$s_e = 0$$

$$\begin{aligned}
 c_e &= (1-2p) \left[A - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\rho_{xz} \sigma_{za}^2}{\sqrt{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \sigma_{za} \right] + \\
 & 2p \left[A - \beta \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_{xz} \sigma_{zb}^2}{\sqrt{\varepsilon_b}} \text{Exp} \left(-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right) + z_z \text{Erf} \left(\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right) \right\} - \gamma \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{zb} \text{Exp} \left(-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right) + z_z \text{Erf} \left(\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}^2}} \right) \right\} \right] \\
 k_e &= (1-2p) \left[A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\sigma_x \sigma_{za}^2 (\varepsilon_a + \rho_{xz}^2 (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2))}{\sigma_z^3 \sqrt{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x \sigma_{za} (2\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} \right] + \\
 & 2p \left[\begin{aligned}
 & A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (z_z^2 + \sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Exp} \left(-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right) \frac{z_z^2 \varepsilon_b + \sigma_{zb}^2 (\varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2))}{\sqrt{\varepsilon_b}} + \right. \\
 & \left. z_z \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) \text{Erf} \left(\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right) \right\} - \\
 & \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Exp} \left(-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right) \sigma_{zb} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) + z_z (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) \text{Erf} \left(\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}^2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

$$\text{donde } \varepsilon_a = (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_z^2 + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2 \quad \text{y} \quad \varepsilon_b = (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_z^2 + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2.$$

Obsérvese que al considerar que el proceso aleatorio de respuesta está gobernado por la función (4.10), se sigue conservando la sencillez en el cálculo de las esperanzas de la ecuación (5.16) y la obtención de expresiones cerradas para los coeficientes linealizadores. Esto se debe en gran medida a que siguen involucrándose funciones exponenciales en las densidades de probabilidad.

5.3 CALIBRACIÓN DEL CRITERIO PROPUESTO

A continuación se compara la respuesta obtenida mediante el criterio propuesto de linealización equivalente no gaussiana con la calculada a través de simulación de Monte Carlo (SMC). Se muestran además los resultados que se obtienen con linealización gaussiana y con el criterio no gaussiano propuesto por Hurtado con un valor del coeficiente empírico $r = -0.5$ (Hurtado, 1998).

La calibración se lleva a cabo a través del análisis de un sistema de un grado de libertad con las siguientes propiedades:

- Fracción de amortiguamiento crítico $\xi = 0.05$
- Masa $m = 1.7/981 = 1.7329 \times 10^3$ tons²/cm
- $\alpha_2 = 0.015$
- $n = 1$

Los parámetros restantes se determinan con la fuerza de fluencia asignada al sistema para obtener tres niveles de demanda de ductilidad esperada $\eta = 1.5, 4.0$ y 5.0 . La fuerza de fluencia se obtuvo por iteraciones hasta obtener la demanda de ductilidad esperada requerida (Silva, 1998).

Tabla 5.1. Propiedades de los sistemas de periodo $T = 0.5s$

| $T = 0.5s \Rightarrow k = 0.2736$ ton/cm | | | |
|--|--------|------------------|------------|
| f_y (ton) | η | $\beta = \gamma$ | z_u (cm) |
| 0.3530 | 1.5 | 0.3875 | 1.29 |
| 0.2427 | 4.0 | 0.5636 | 0.88 |
| 0.2348 | 5.0 | 0.5825 | 0.85 |

Tabla 5.2. Propiedades de los sistemas de periodo $T = 1.0s$

| $T = 1.0s \Rightarrow k = 6.8413 \times 10^2$ ton/cm | | | |
|--|--------|----------------------|------------|
| f_y (ton) | η | $\beta = \gamma$ | z_u (cm) |
| 0.4437 | 1.5 | 7.7078×10^2 | 6.48 |
| 0.2755 | 4.0 | 0.1241 | 4.02 |
| 0.2460 | 5.0 | 0.1390 | 3.59 |

Tabla 5.3 Propiedades de los sistemas de periodo $T=2.1s$

| $T=2.1s \Rightarrow k=1.5513 \times 10^2 \text{ ton/cm}$ | | | |
|--|--------|-------------------------|------------|
| f_y (ton) | η | $\beta=\gamma$ | z_u (cm) |
| 0.4322 | 1.5 | 1.2214×10^{-2} | 40.93 |
| 0.1347 | 4.0 | 5.7555×10^{-2} | 8.68 |
| 0.1000 | 5.0 | 7.7548×10^{-2} | 6.44 |

Tabla 5.4 Propiedades de los sistemas de periodo $T=4.0s$

| $T=4.0s \Rightarrow k=4.2758 \times 10^3 \text{ ton/cm}$ | | | |
|--|--------|-------------------------|------------|
| f_y (ton) | η | $\beta=\gamma$ | z_u (cm) |
| 0.1085 | 1.5 | 1.9692×10^{-2} | 25.39 |
| 0.0330 | 4.0 | 6.4785×10^{-2} | 7.71 |
| 0.0257 | 5.0 | 8.3120×10^{-2} | 6.01 |

El proceso de excitación usado en la simulación de Monte Carlo es una muestra de 50,000 sismos simulados. El usado en la linealización equivalente es un proceso no estacionario modelado como un ruido blanco filtrado modulado en amplitud. Ambos procesos (SCTEW85) se basan en las características del espectro de potencia del sismo registrado en la Secretaria de Comunicaciones y Transportes durante el evento del 19 de septiembre de 1985. El periodo dominante de este proceso es $T_0=2.0s$. Los parámetros del espectro de Clough-Penzien (ecuación 2.8) se determinan siguiendo la metodología descrita en el capítulo 2.

$$\xi_g=0.0220 \quad \omega_g=3.1017 \quad \xi_f=0.0492 \quad \omega_f=2.2988 \quad \text{y } s_0=7.2776 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}^3 \quad (5.19)$$

Las condiciones iniciales de la matriz de covarianza de la respuesta (ecuación 3.23) corresponden a la covarianza de la respuesta estacionaria $\Sigma_{z_F z_F}^s$ del filtro de Clough-Penzien la cual se obtiene al resolver la ecuación (3.22). A partir de cálculos realizados en el presente trabajo, para el sistema analizado esta matriz es igual a:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v_{44} & v_{45} & v_{46} & v_{47} \\ 0 & 0 & 0 & v_{54} & v_{55} & v_{56} & v_{57} \\ 0 & 0 & 0 & v_{64} & v_{65} & v_{66} & v_{67} \\ 0 & 0 & 0 & v_{74} & v_{75} & v_{76} & v_{77} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned}
 V_{44} &= \frac{\pi s_0 \omega_g (4 \xi_f^2 \xi_g \omega_f^2 \omega_g + \xi_g \omega_g (4 \xi_g^2 \omega_f^2 + \omega_g^2) + \xi_f ((1 + 4 \xi_g^2) \omega_f^2 + 4 \xi_g^2 \omega_f \omega_g^2))}{2 \xi_f \xi_g \omega_f^2 (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{45} = V_{54} &= \frac{\pi s_0 (\omega_f^2 + 8 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g + (-1 + 8 \xi_g^2) \omega_g^2)}{2 \xi_g \omega_g (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{46} = V_{46} &= 0 \\
 V_{47} = V_{74} &= \frac{\pi s_0 (-\xi_f \omega_f \omega_g + \xi_g (\omega_f^2 - 2 \omega_g^2))}{\xi_g (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{55} &= \frac{\pi s_0}{2 \xi_g \omega_g^3} \\
 V_{56} = V_{65} &= \frac{\pi s_0 (\xi_f \omega_f \omega_g - \xi_g (\omega_f^2 - 2 \omega_g^2))}{\xi_g (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{57} = V_{75} &= 0 \\
 V_{66} &= \frac{\pi s_0 \omega_g^2 (4 \xi_g^3 \omega_f^2 + \xi_f \omega_f \omega_g + 4 \xi_f \xi_g^2 \omega_f \omega_g + \xi_g \omega_g^2)}{2 \xi_f \xi_g \omega_f (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{67} = V_{76} &= \frac{\pi s_0 \omega_g ((1 + 4 \xi_g^2) \omega_f^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g - \omega_g^2)}{2 \xi_g (\omega_f^4 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f^3 \omega_g + 2 (-1 + 2 \xi_f^2 + 2 \xi_g^2) \omega_f^2 \omega_g^2 + 4 \xi_f \xi_g \omega_f \omega_g^3 + \omega_g^4)} \\
 V_{77} &= \frac{\pi s_0}{2 \xi_g \omega_g}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

La función moduladora es la propuesta por Yeh y Wen (1989) (ecuación 2.18) con los parámetros calculados en la forma descrita en el capítulo 2.

$$a = 5.8161 \times 10^{48} \text{ cm}^2/\text{s}^4 ; b = -0.3388 ; c = -0.1258 ; d = 2.166 \times 10^{47} ; e = 26.461 \tag{5.22}$$

En las figuras 5.1 a 5.24 se muestra la respuesta de los sistemas cuyas propiedades se describieron anteriormente, excitados con el proceso SCTEW85. Se muestra la desviación estándar del desplazamiento (σ_x), la desviación estándar de la velocidad ($\sigma_{\dot{x}}$) y la desviación estándar de la componente histerética del desplazamiento (σ_z). Además, se muestra el comportamiento de los coeficientes linealizadores.

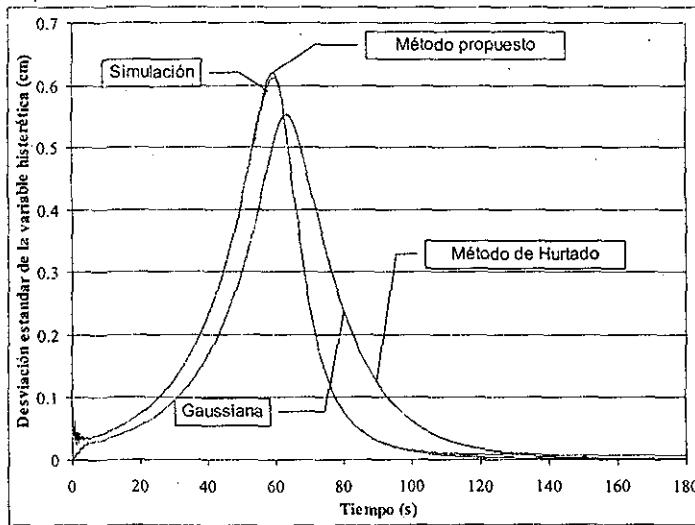
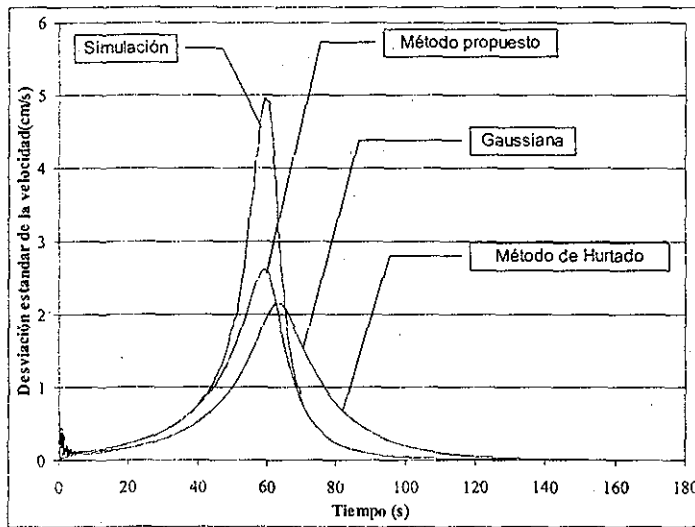
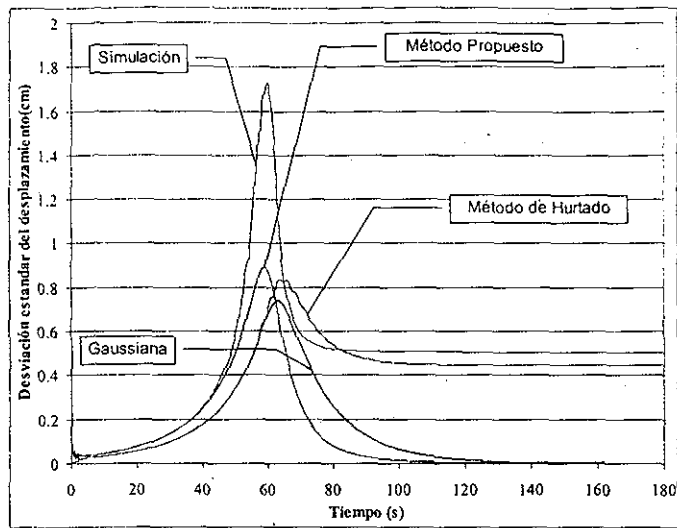


Figura 5.1. Desviación estándar de la variable $T=0.5$, $\eta=1.5$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

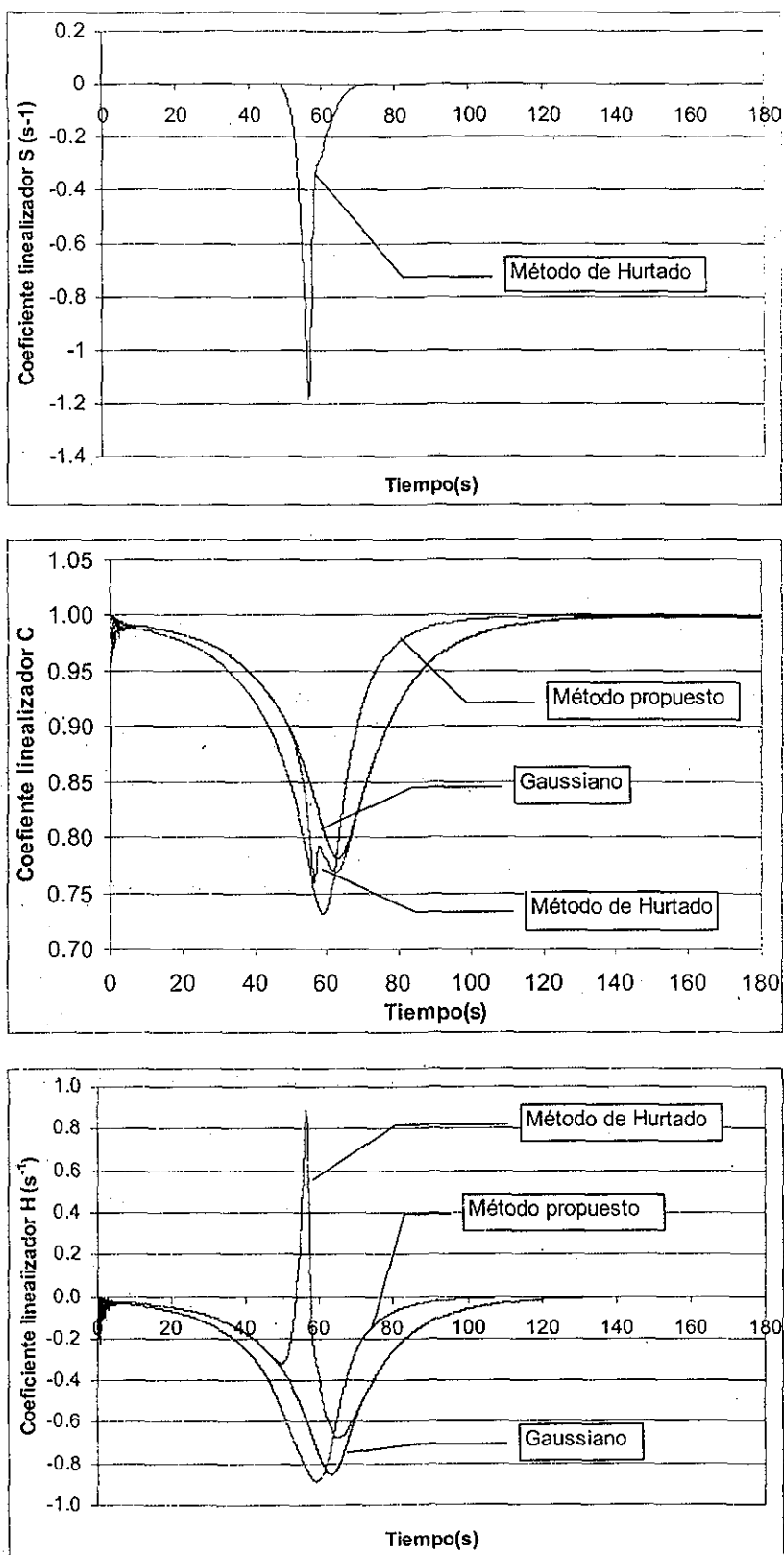


Figura 5.2 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=0.5$, $\eta=1.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

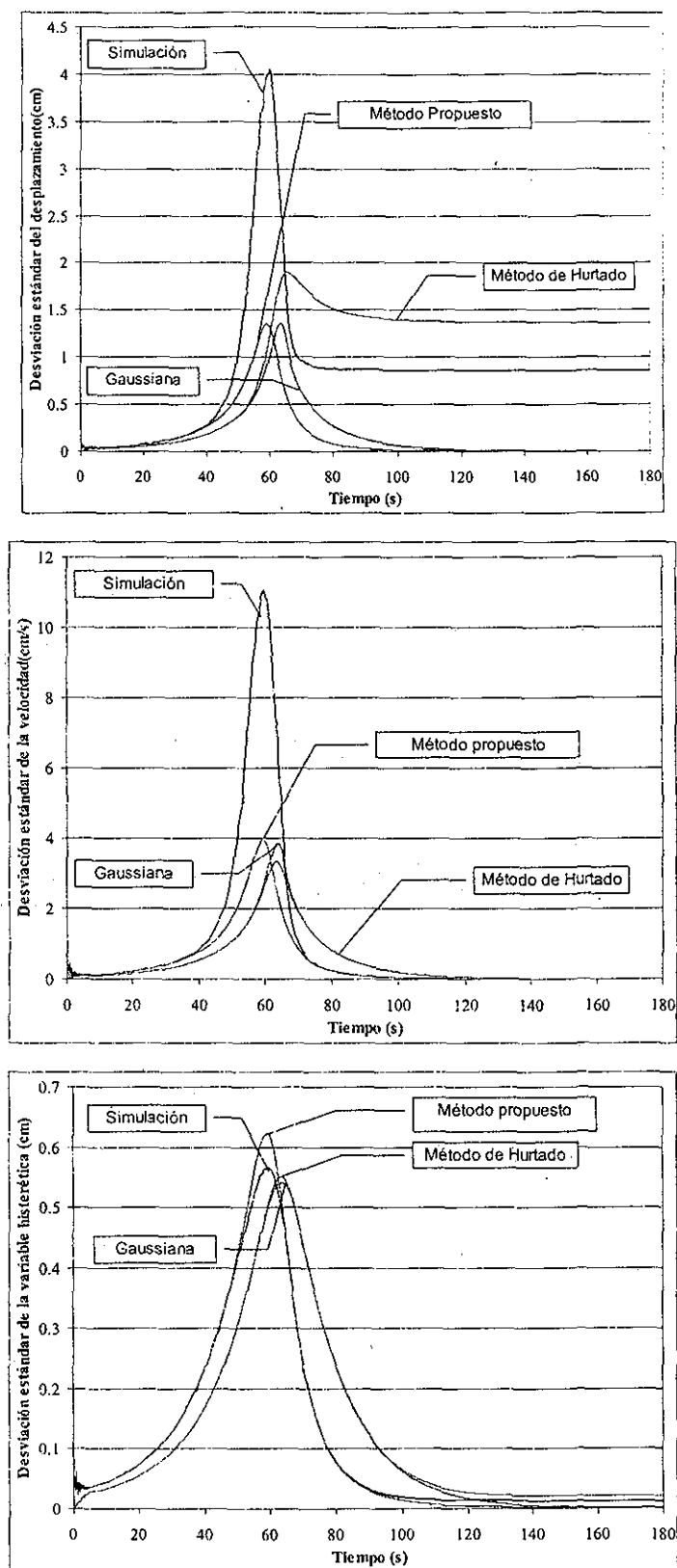


Figura 5.3. Desviación estándar de la variable $T=0.5, \eta=4.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

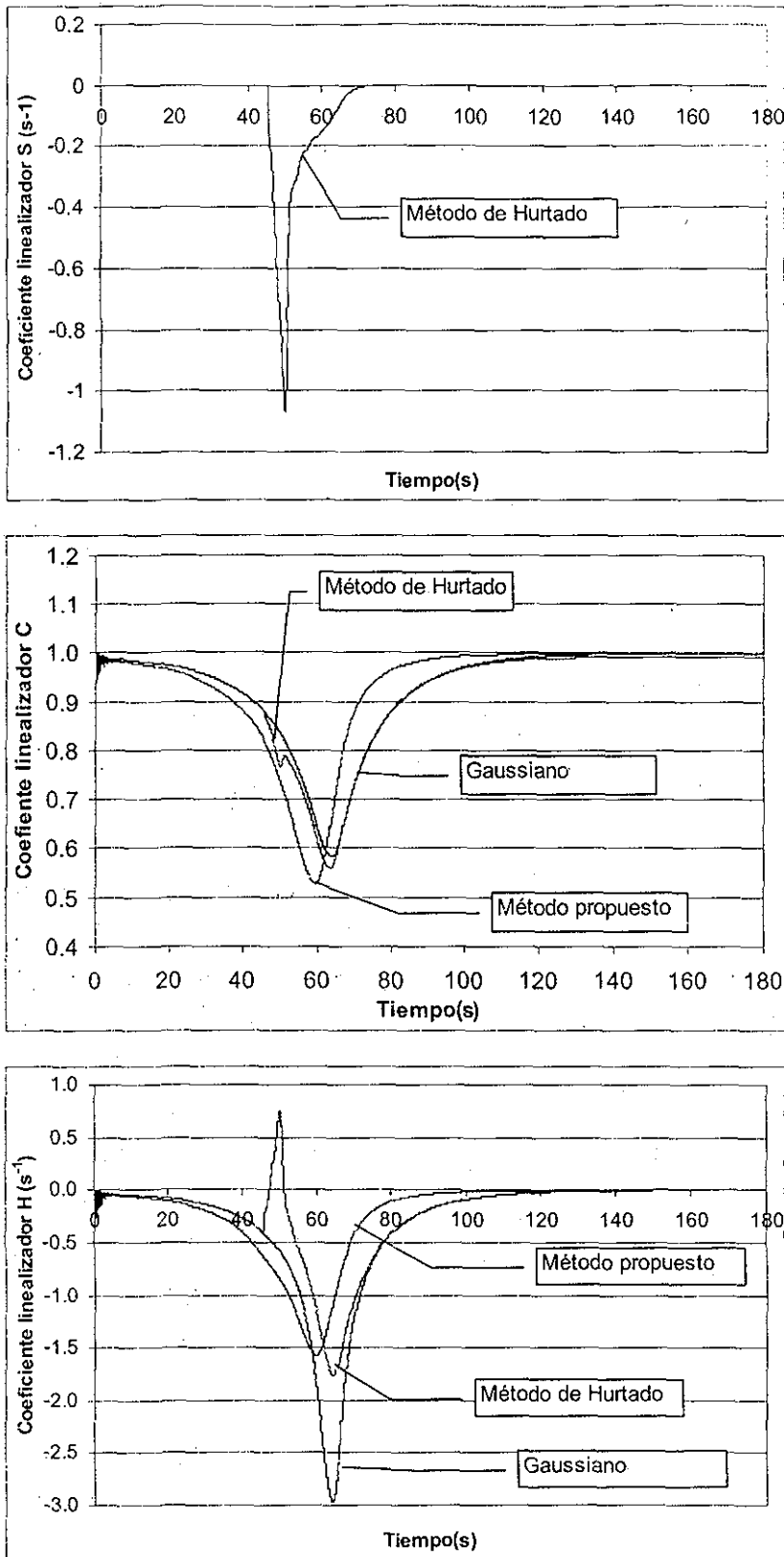


Figura 5.4 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=0.5$, $\eta=4.0$

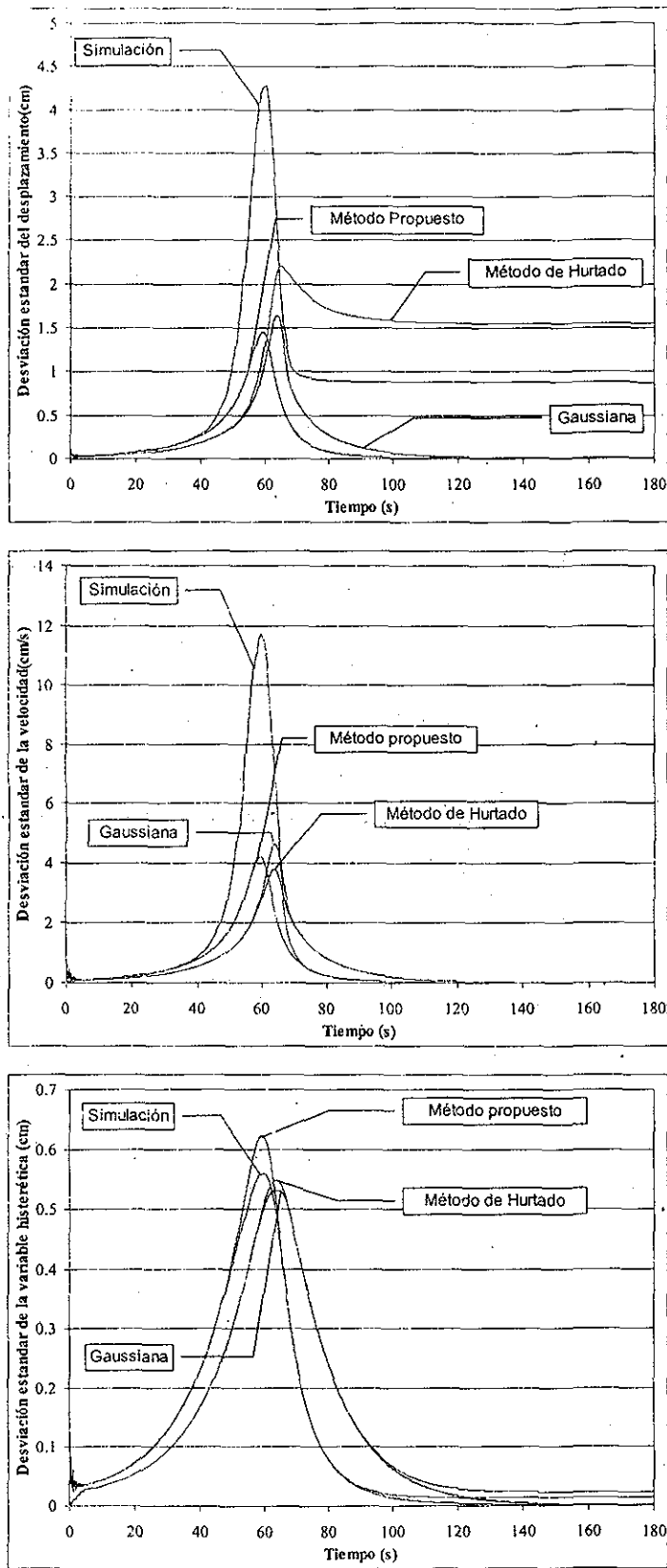


Figura 5.5. Desviación estándar de la variable. $T=0.5$, $\eta=5.0$

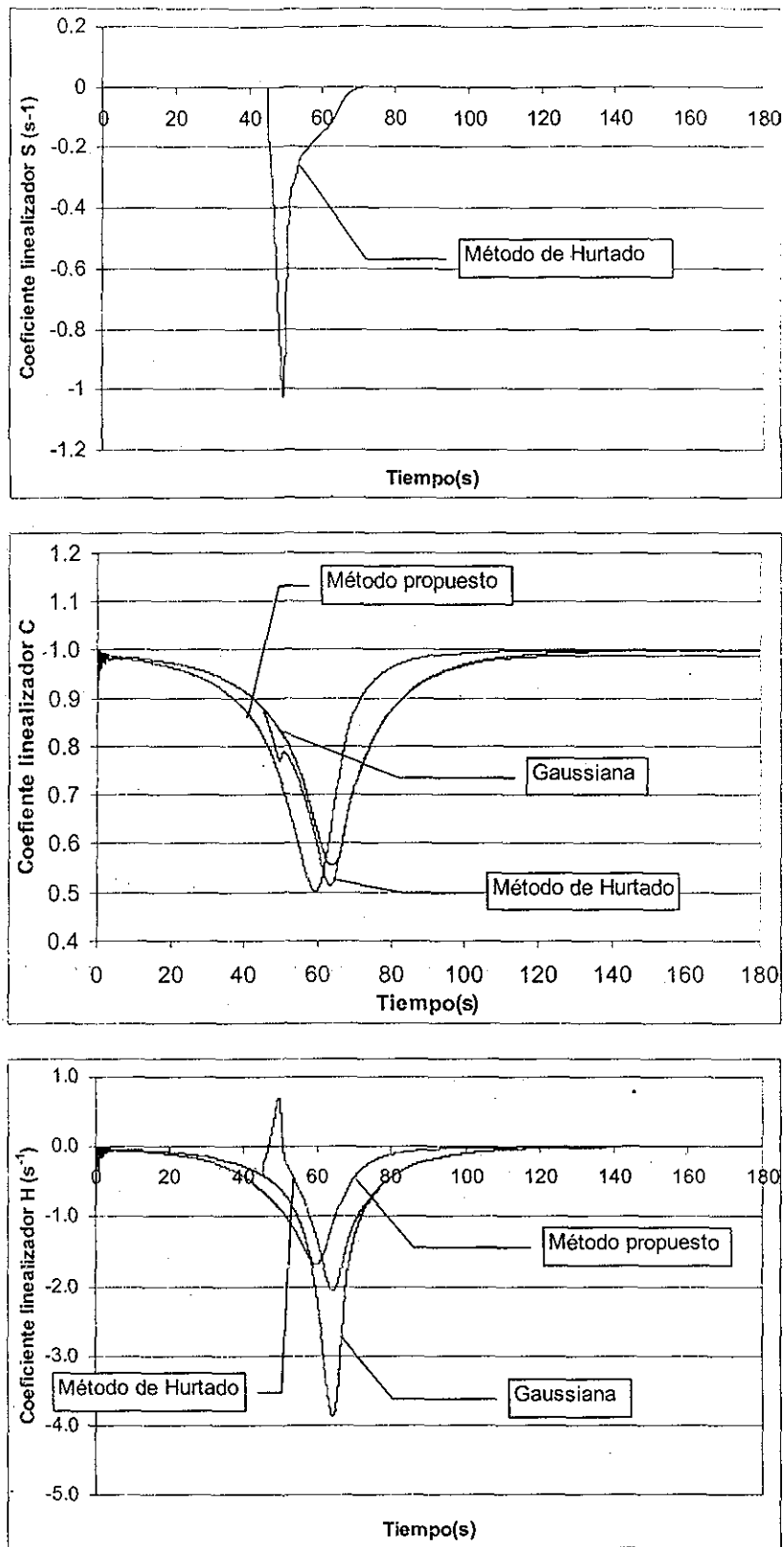


Figura 5.6 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=0.5$, $\eta=5.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

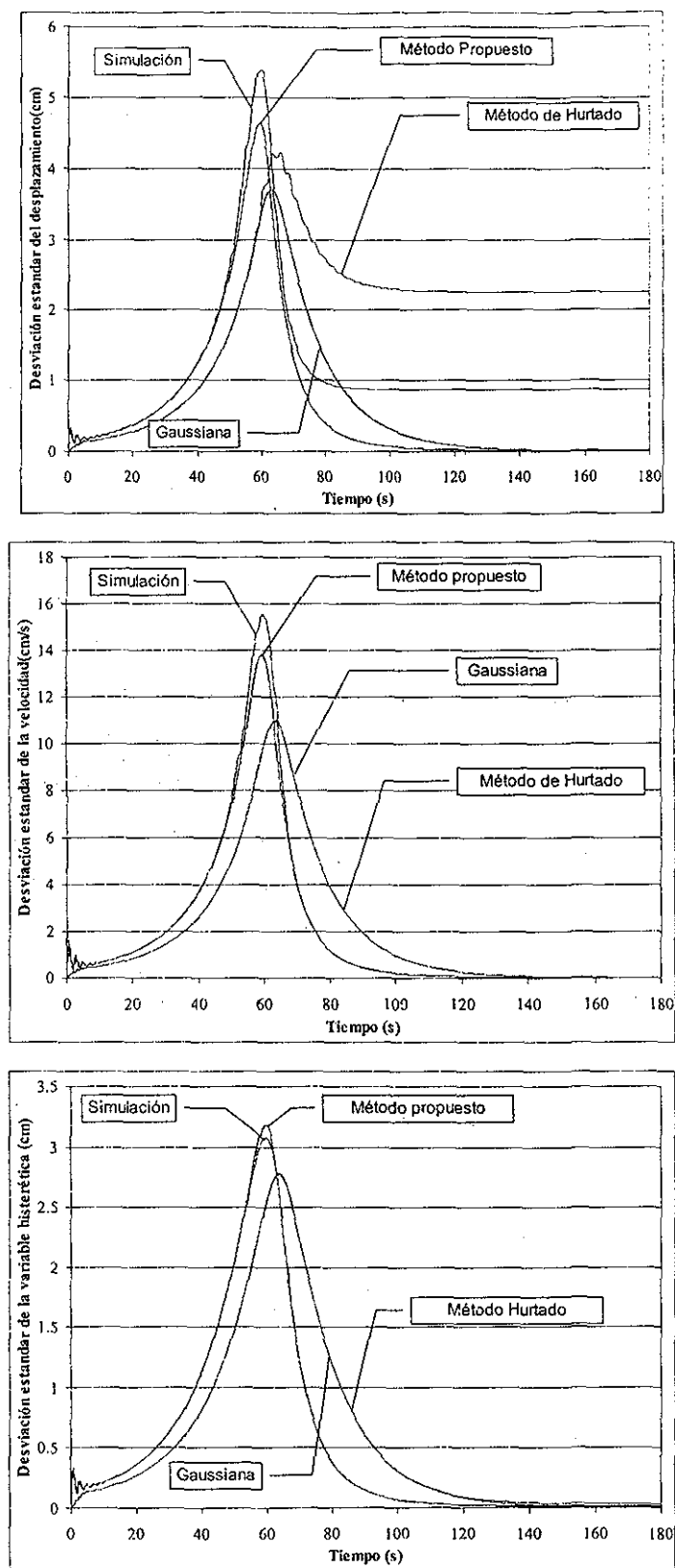


Figura 5.7. Desviación estándar de la variable. $T=1.0$, $\eta=1.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

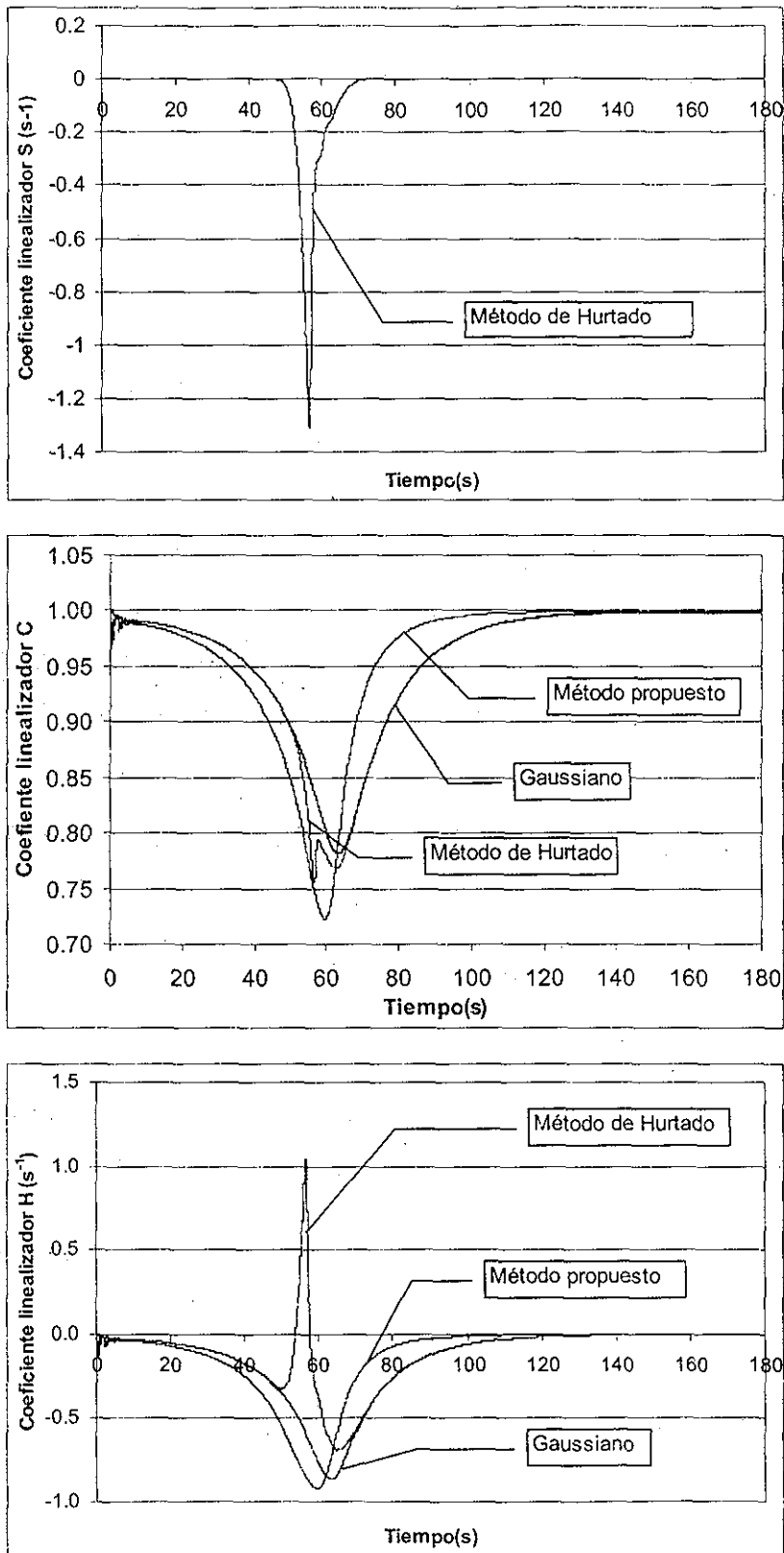


Figura 5.8 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T = 1.0$, $\eta = 1.5$

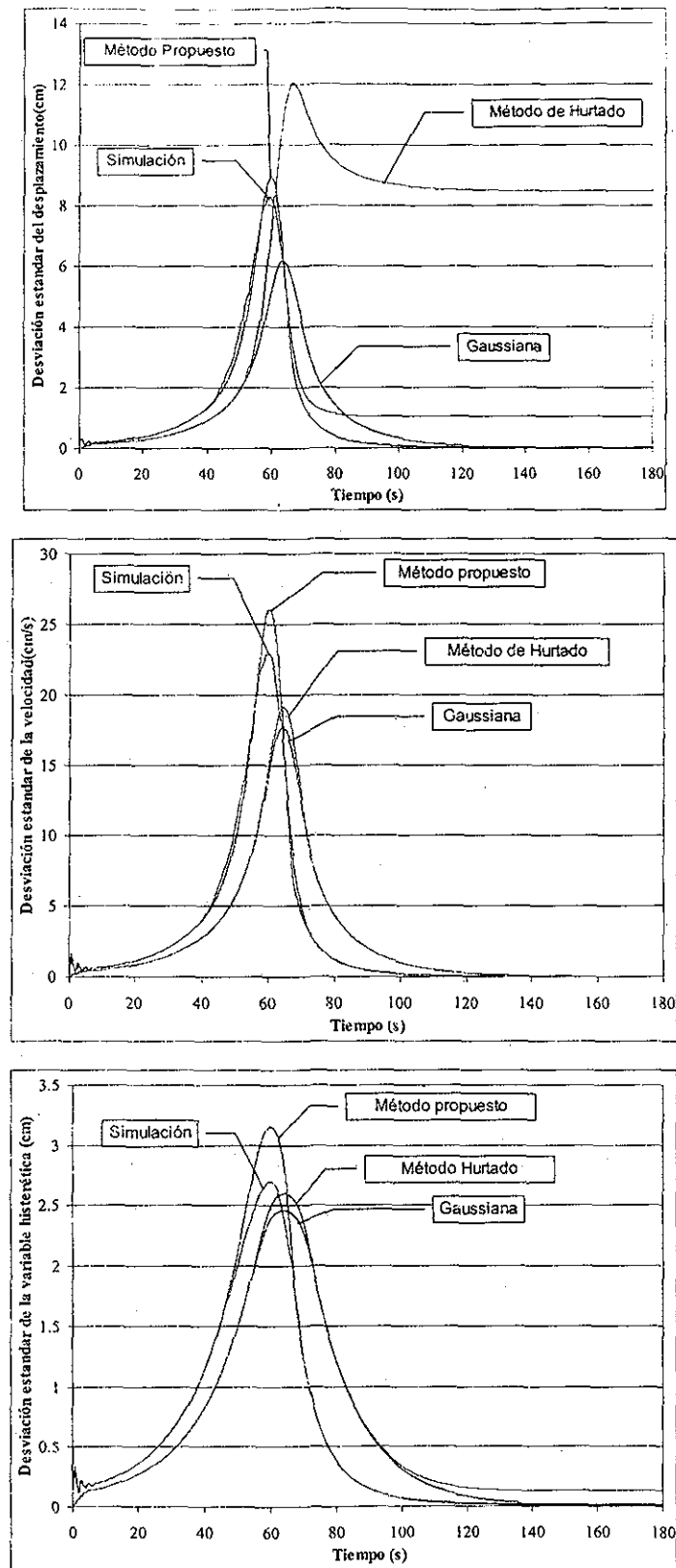


Figura 5.9. Desviación estándar de la variable. $T=1.0$, $\eta=4.0$

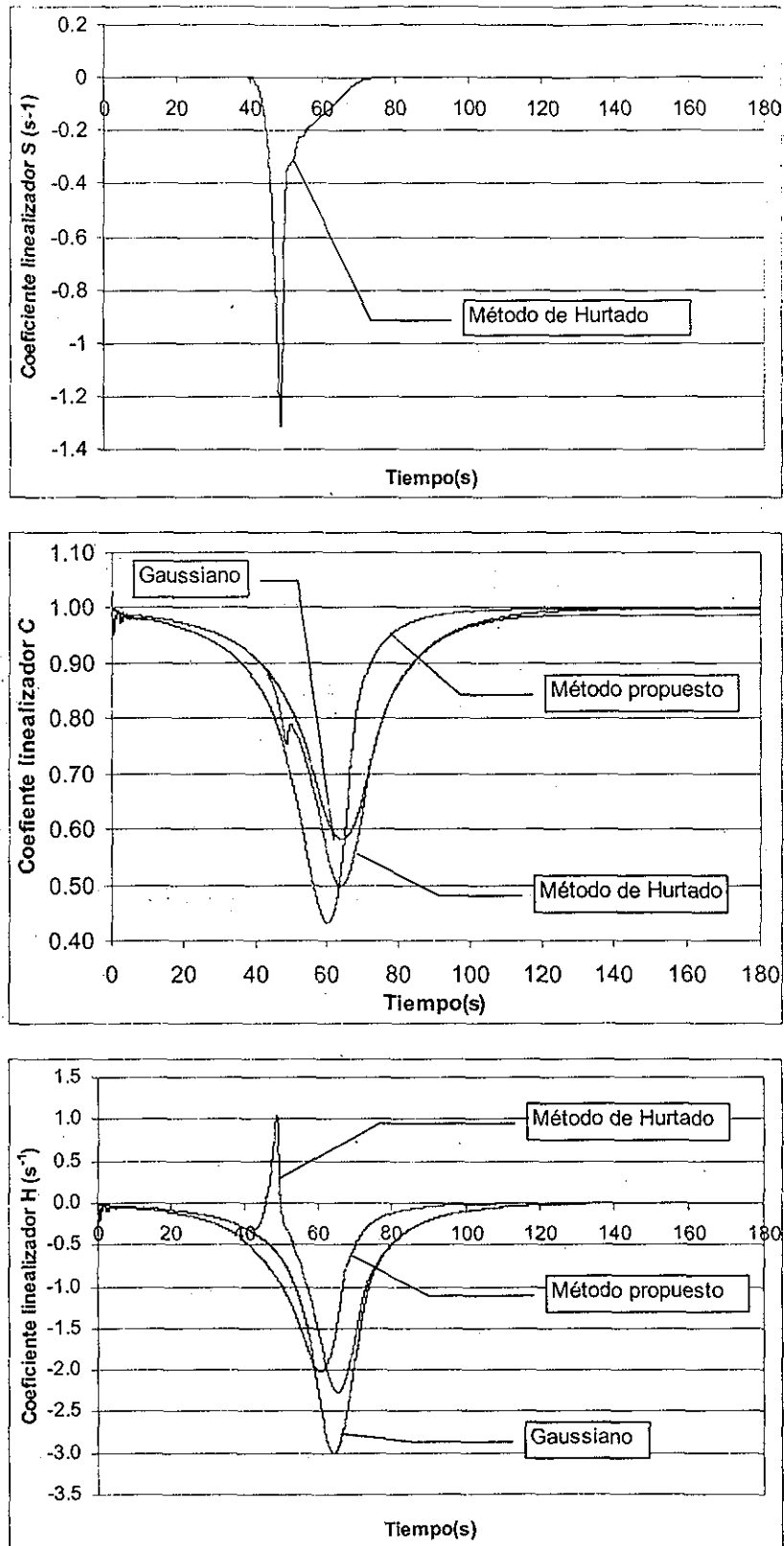


Figura 5.10 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=1.0$, $\eta=4.0$

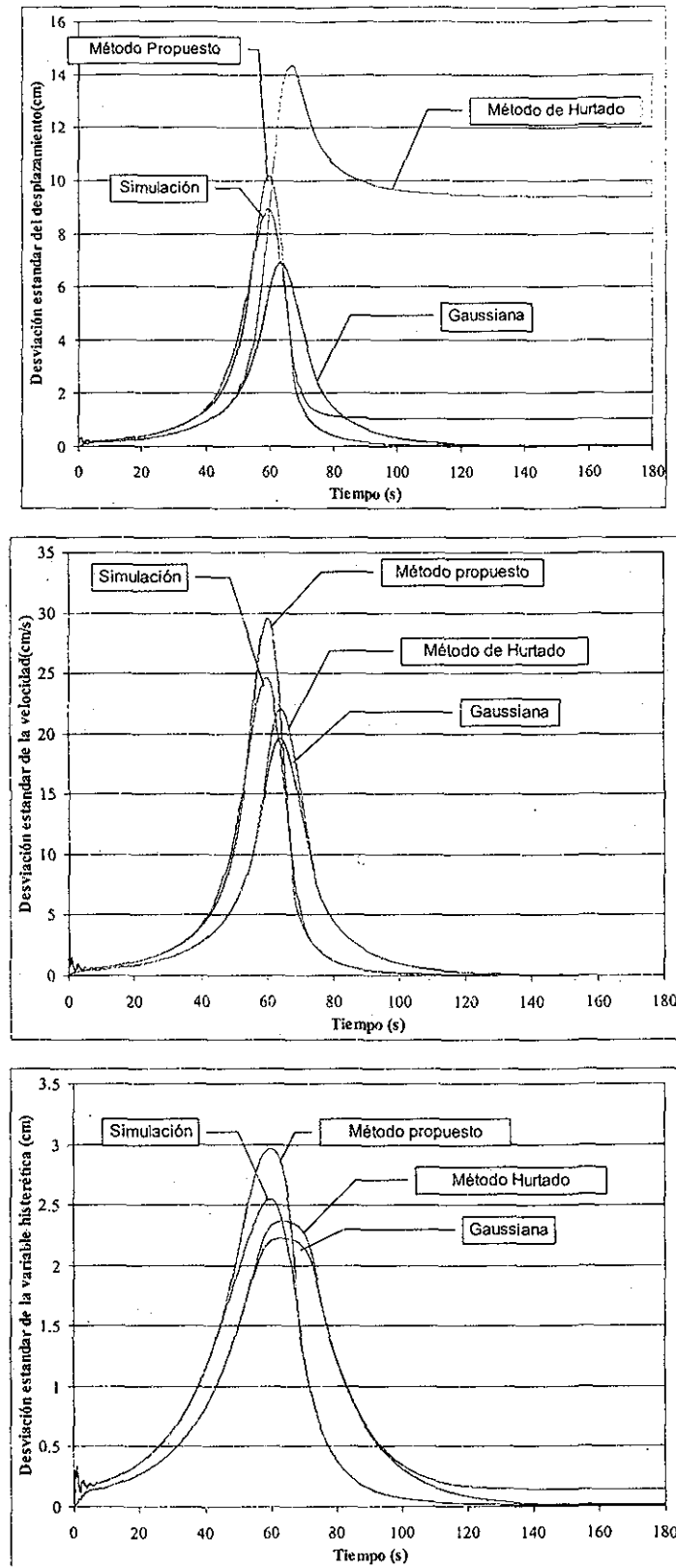


Figura 5.11. Desviación estándar de la variable. $T = 1.0$, $\eta = 5.0$

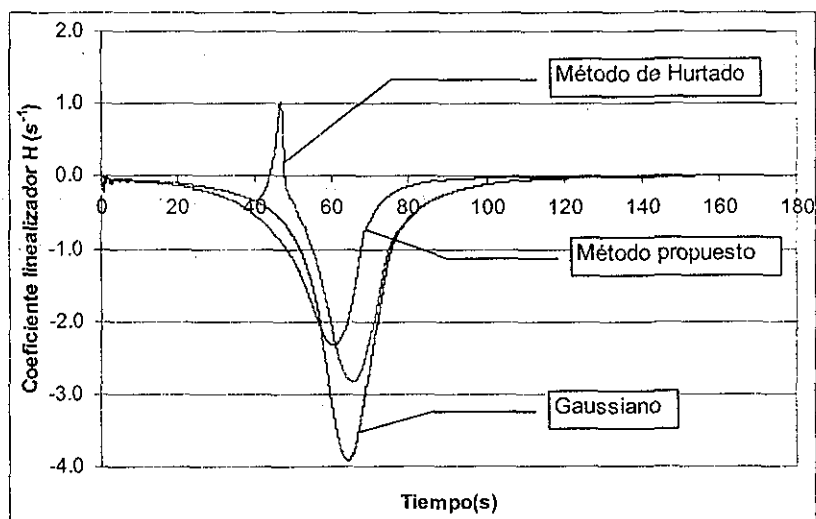
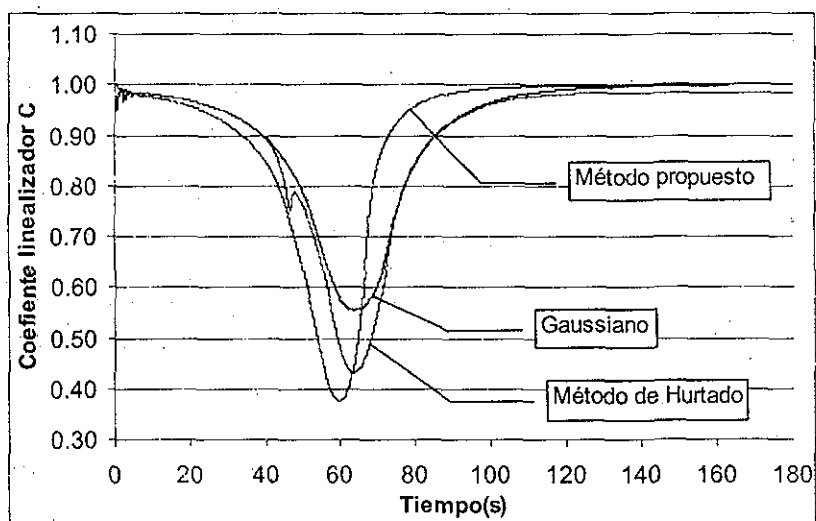
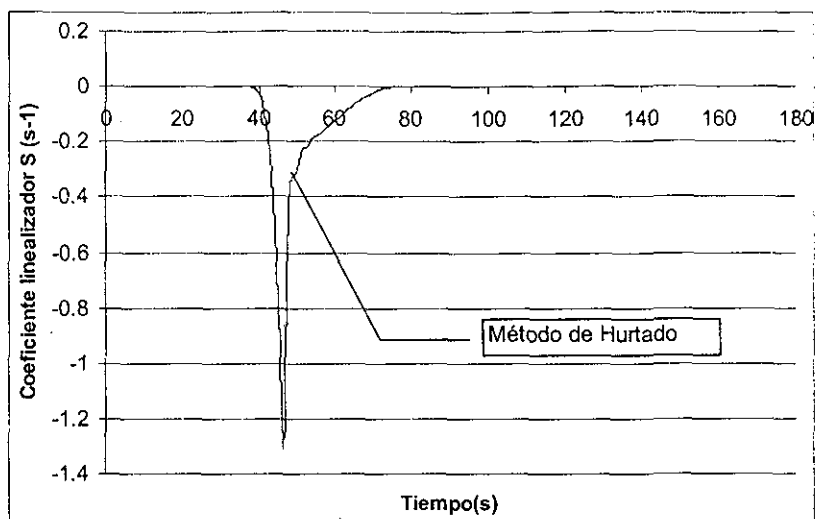


Figura 5.12 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T = 1.0$, $\eta = 5.0$

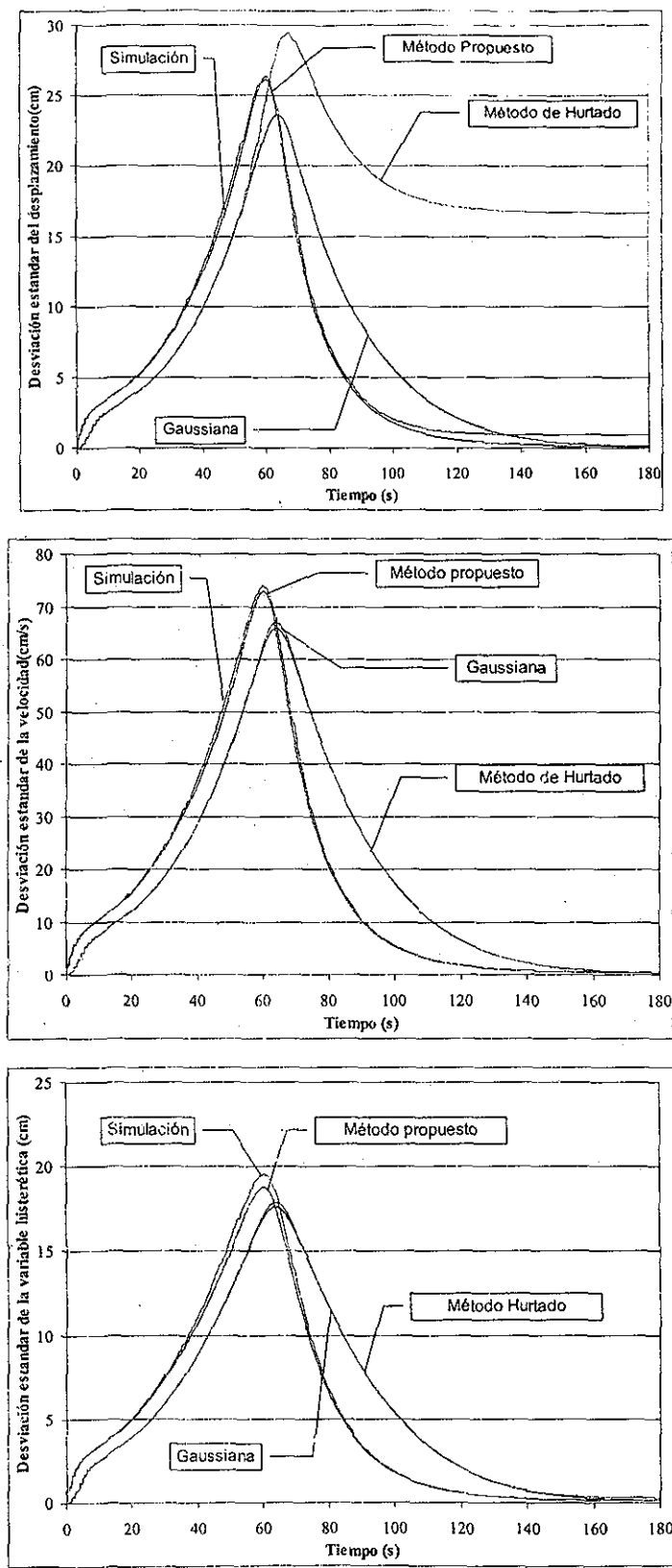


Figura 5.13. Desviación estándar de la variable. $T=2.1$, $\eta=1.5$

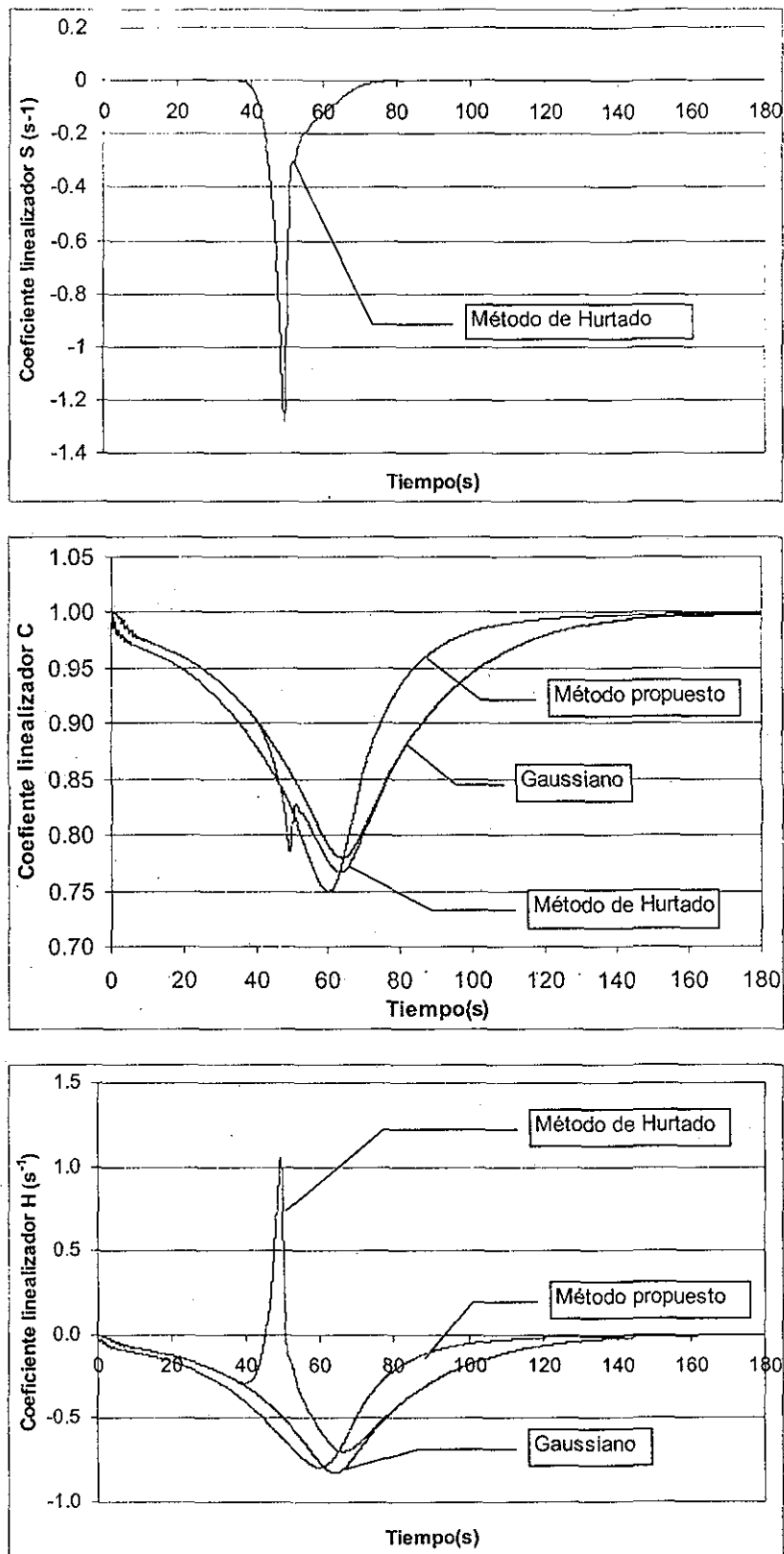


Figura 5.14 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=2.1$, $\eta=1.5$

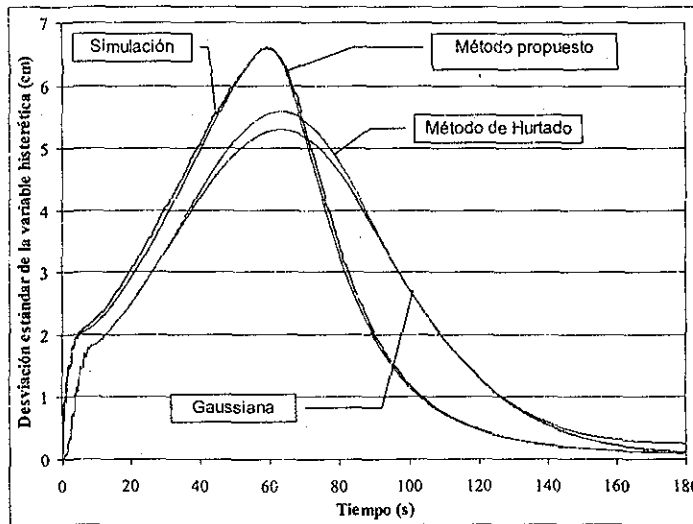
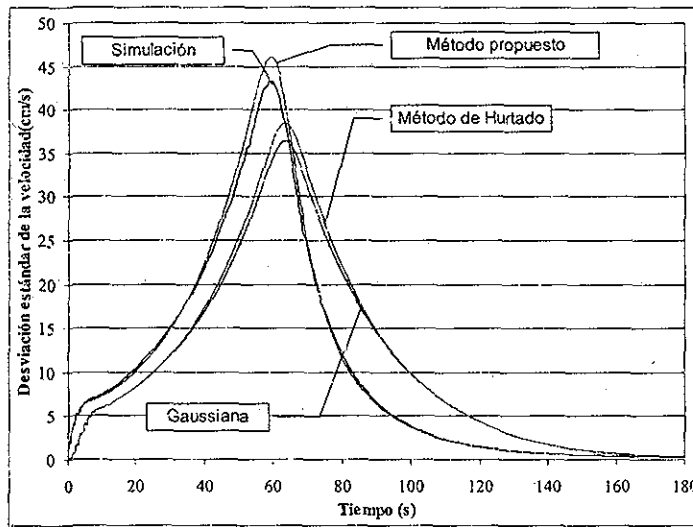
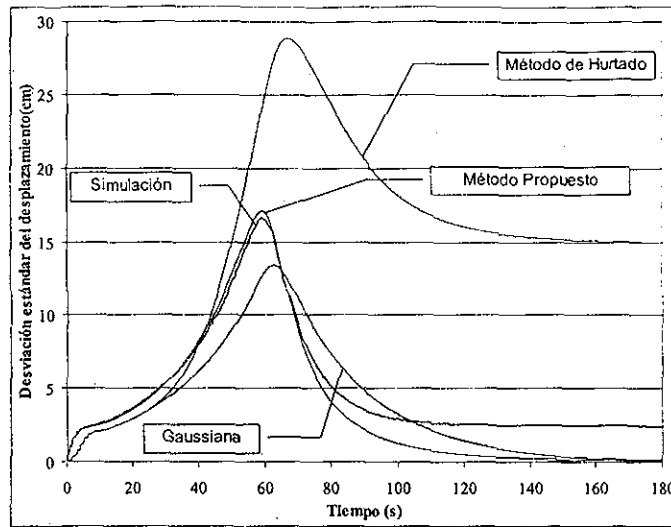


Figura 5.15. Desviación estándar de la variable. $T=2.1$, $\eta=4.0$

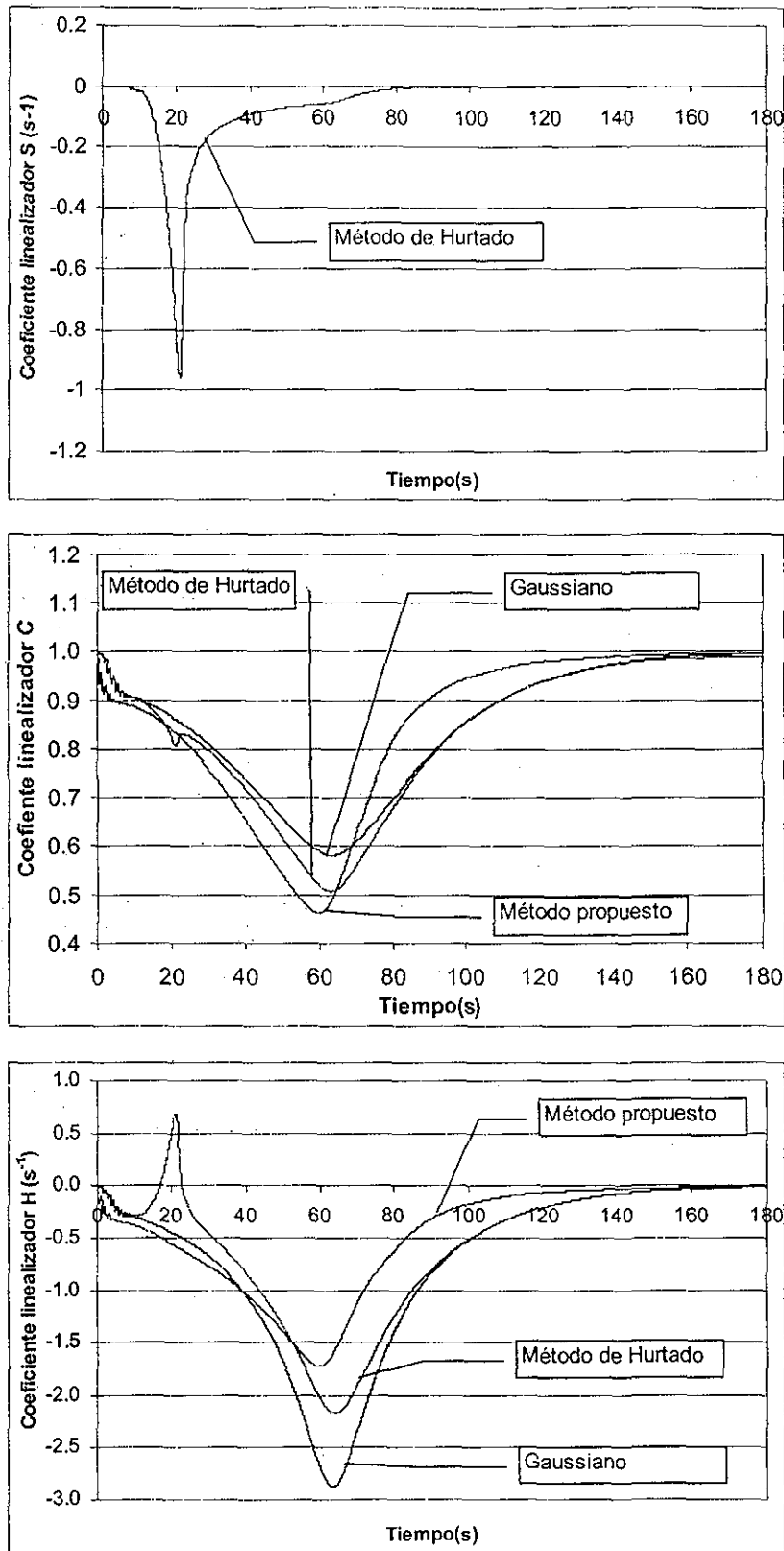


Figura 5.16 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=2.1$, $\eta=4.0$

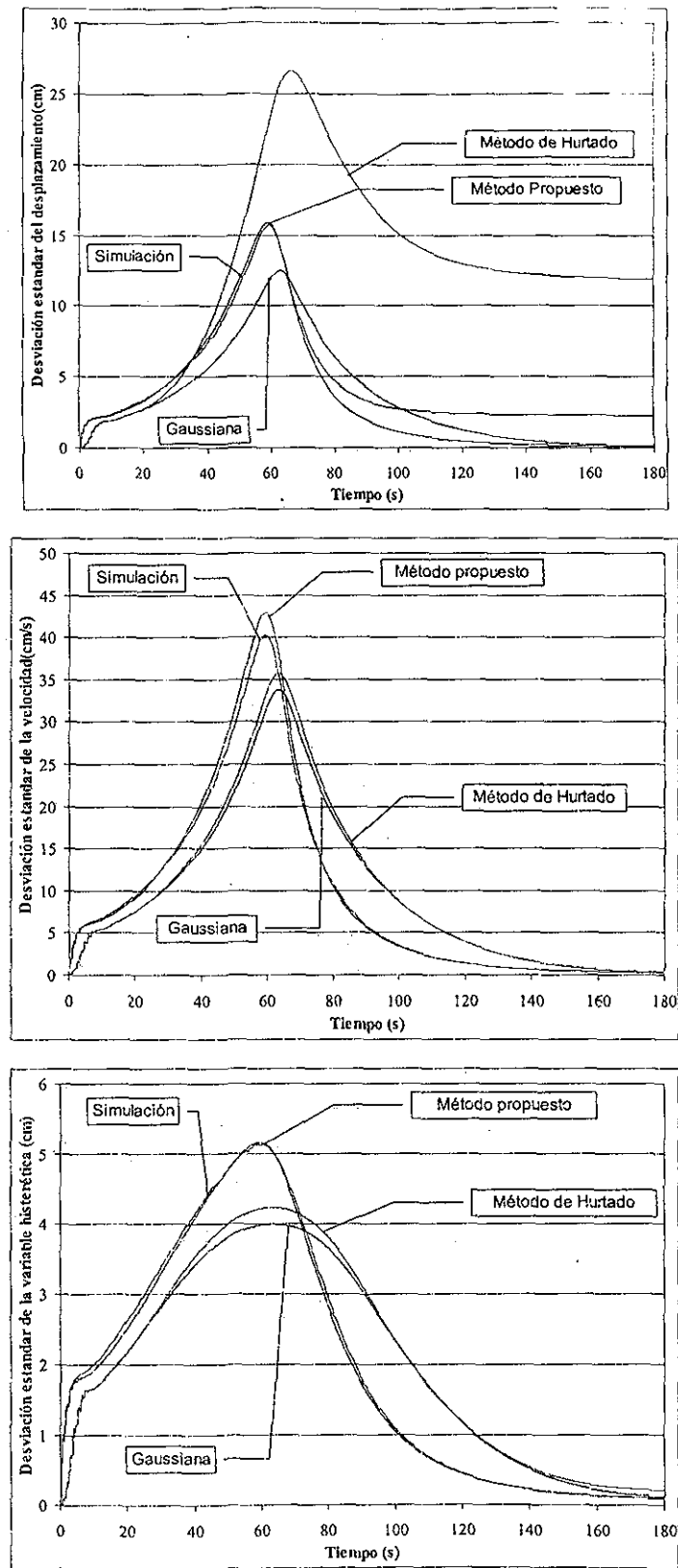


Figura 5.17. Desviación estándar de la variable. $T=2.1$, $\eta=5.0$

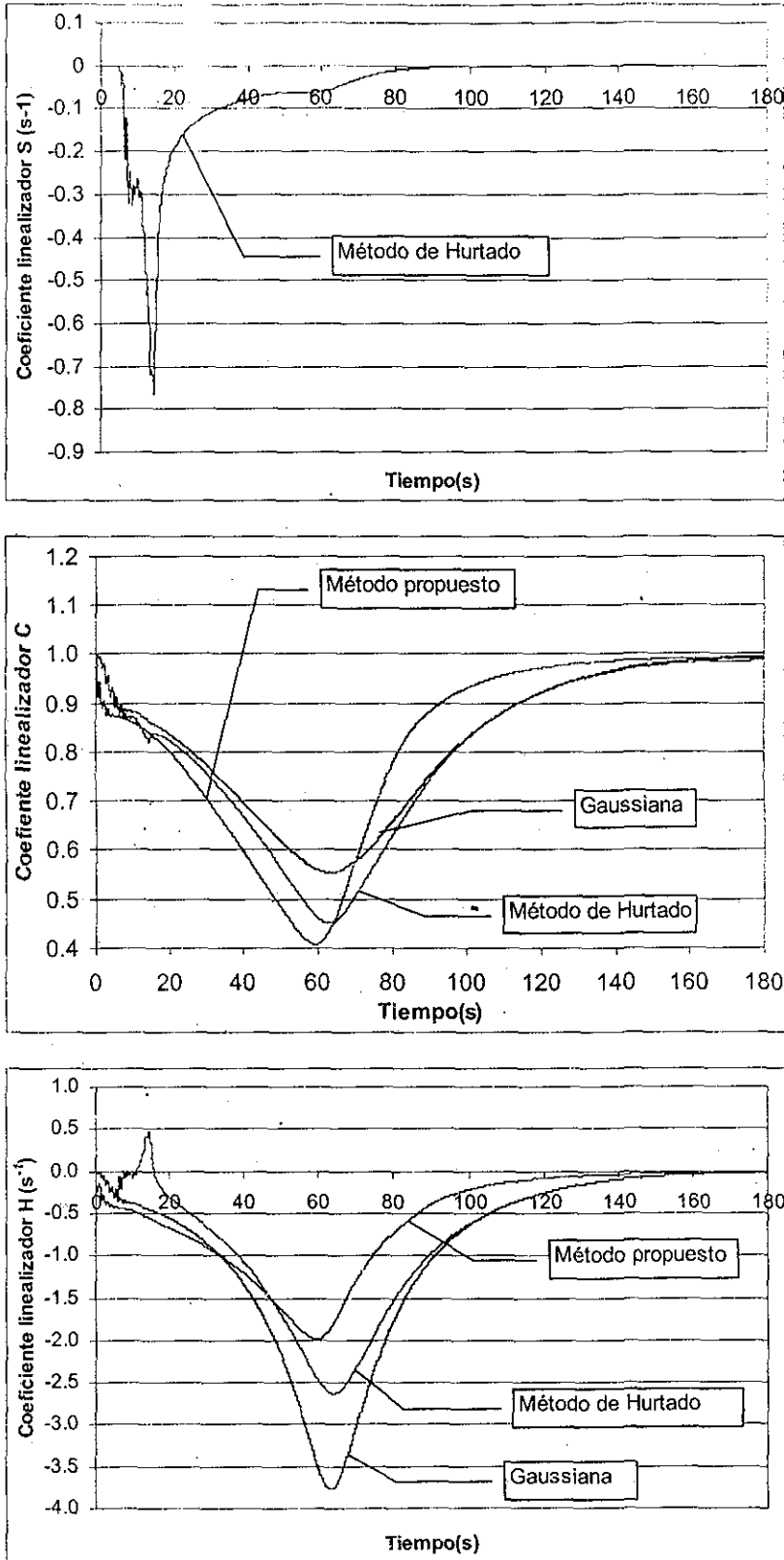


Figura 5.18 Comportamiento de los coeficientes linealizadores, $T=2.1$, $\eta=5.0$

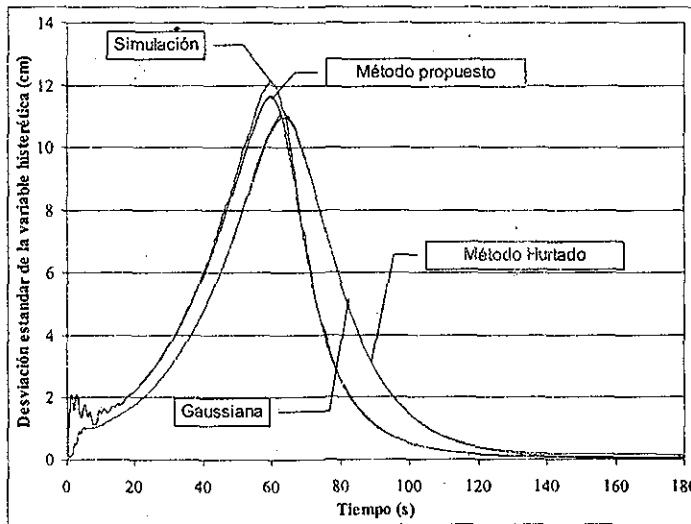
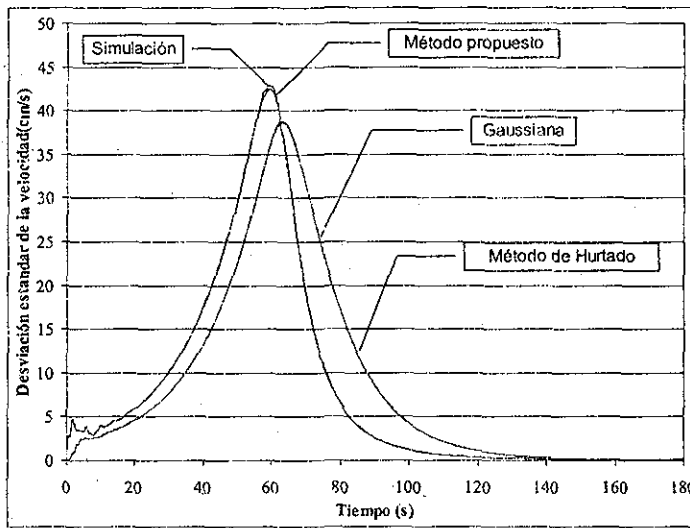
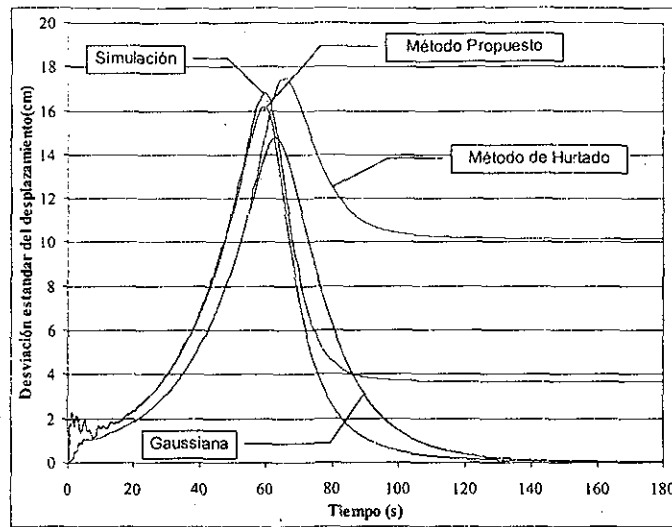


Figura 5.19. Desviación estándar de la variable. $T=4.0$, $\eta=1.5$

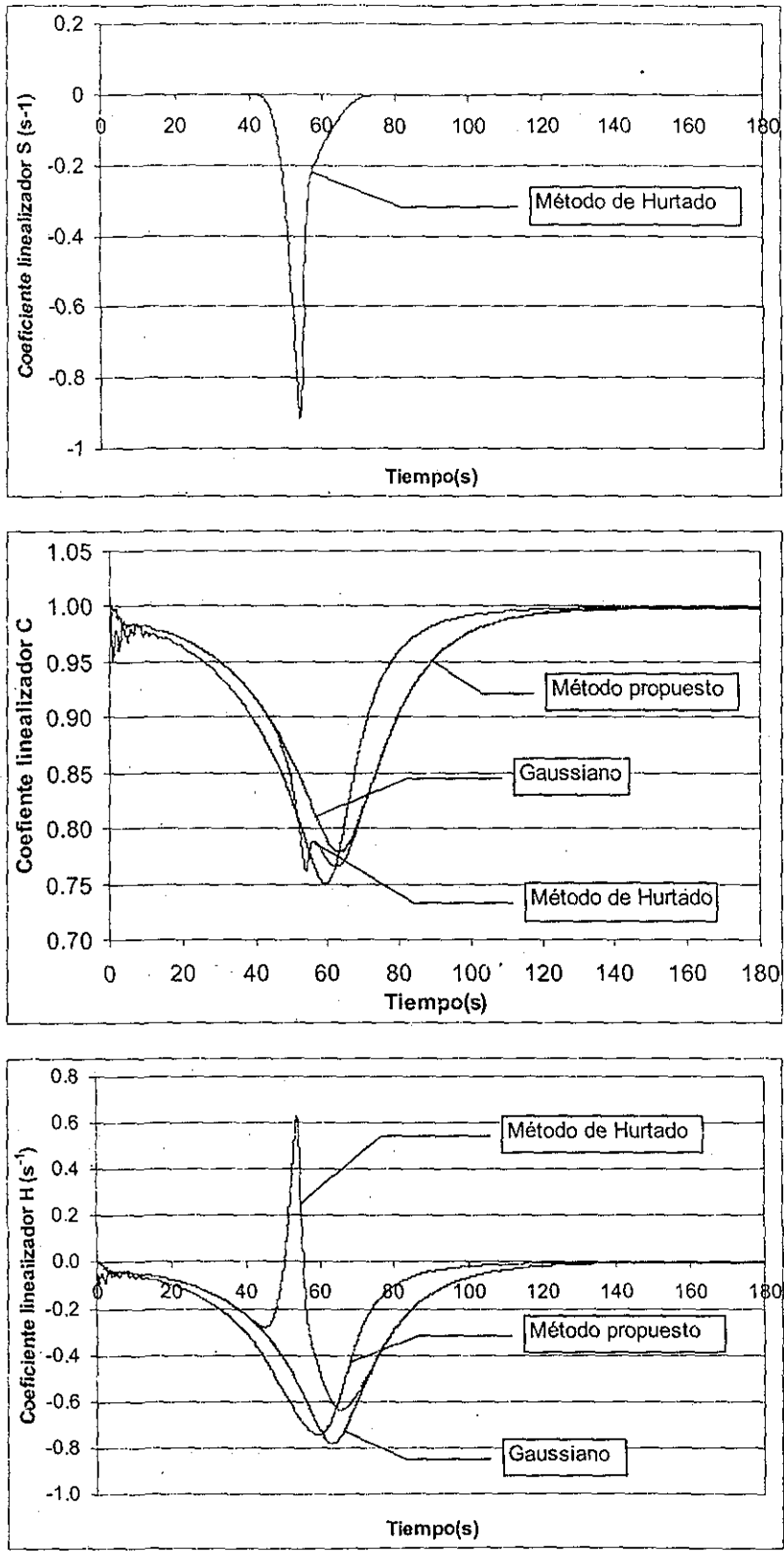


Figura 5.20 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=4.0$, $\eta=1.5$

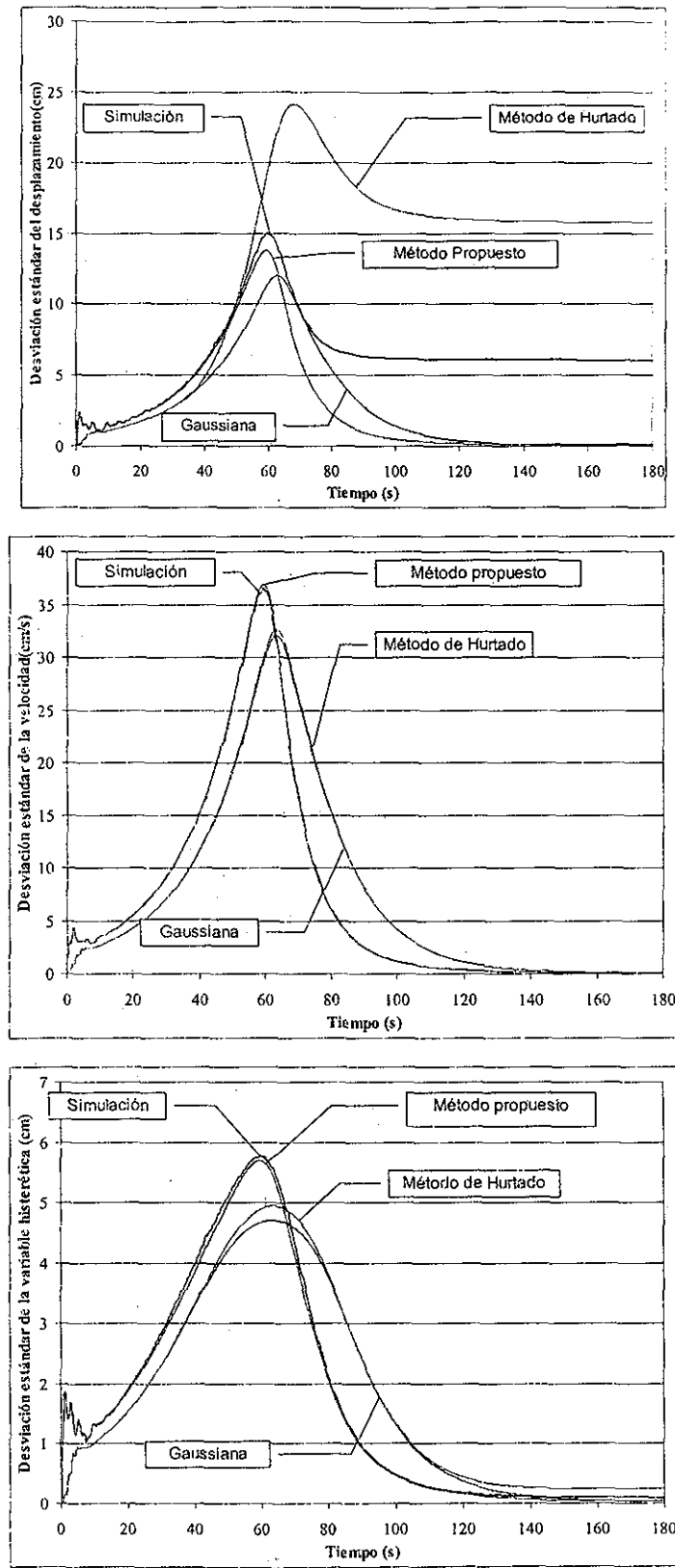


Figura 5.21. Desviación estándar de la variable. $T=4.0$, $\eta=4.0$

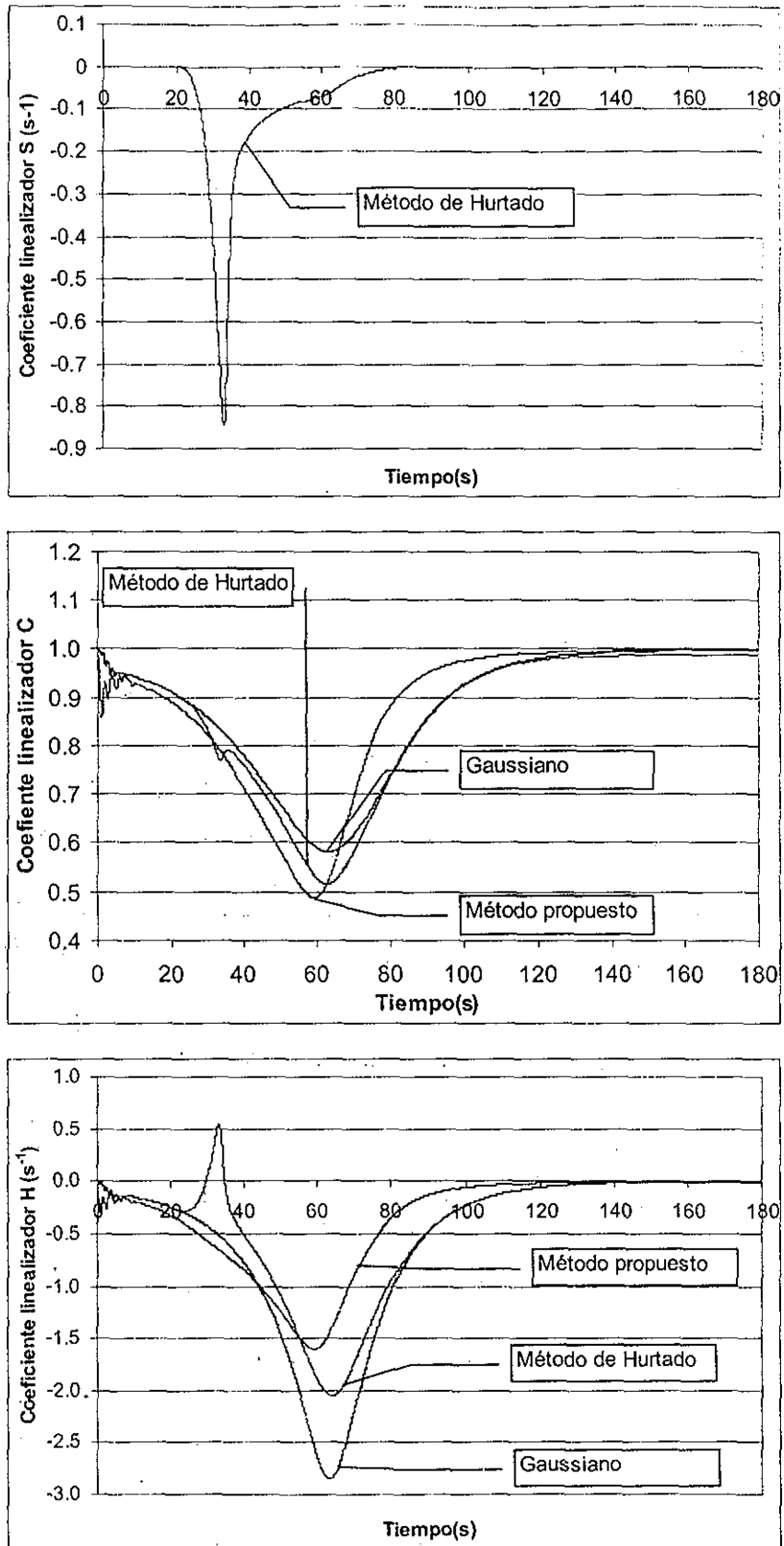


Figura 5.22 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=4.0$, $\eta=4.0$

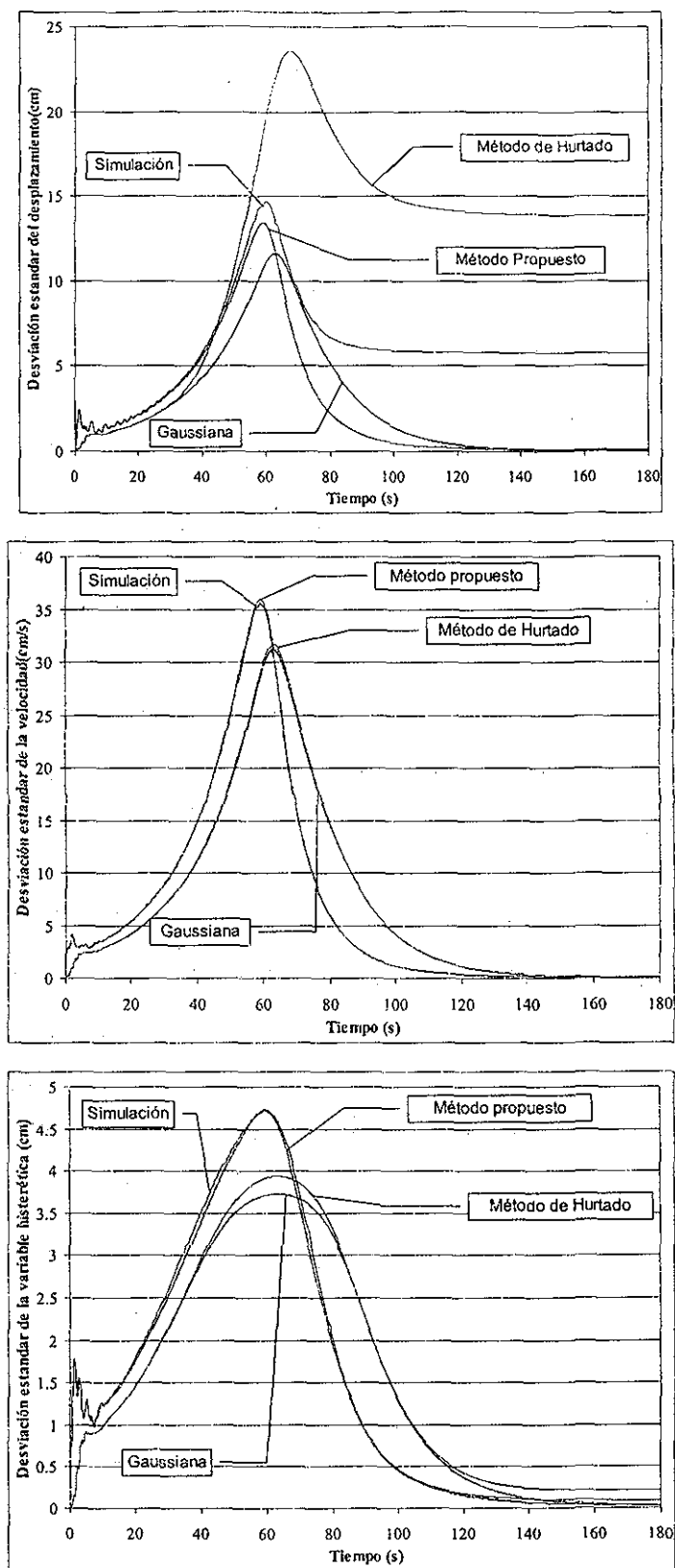


Figura 5.23. Desviación estándar de la variable. $T=4.0$, $\eta=5.0$

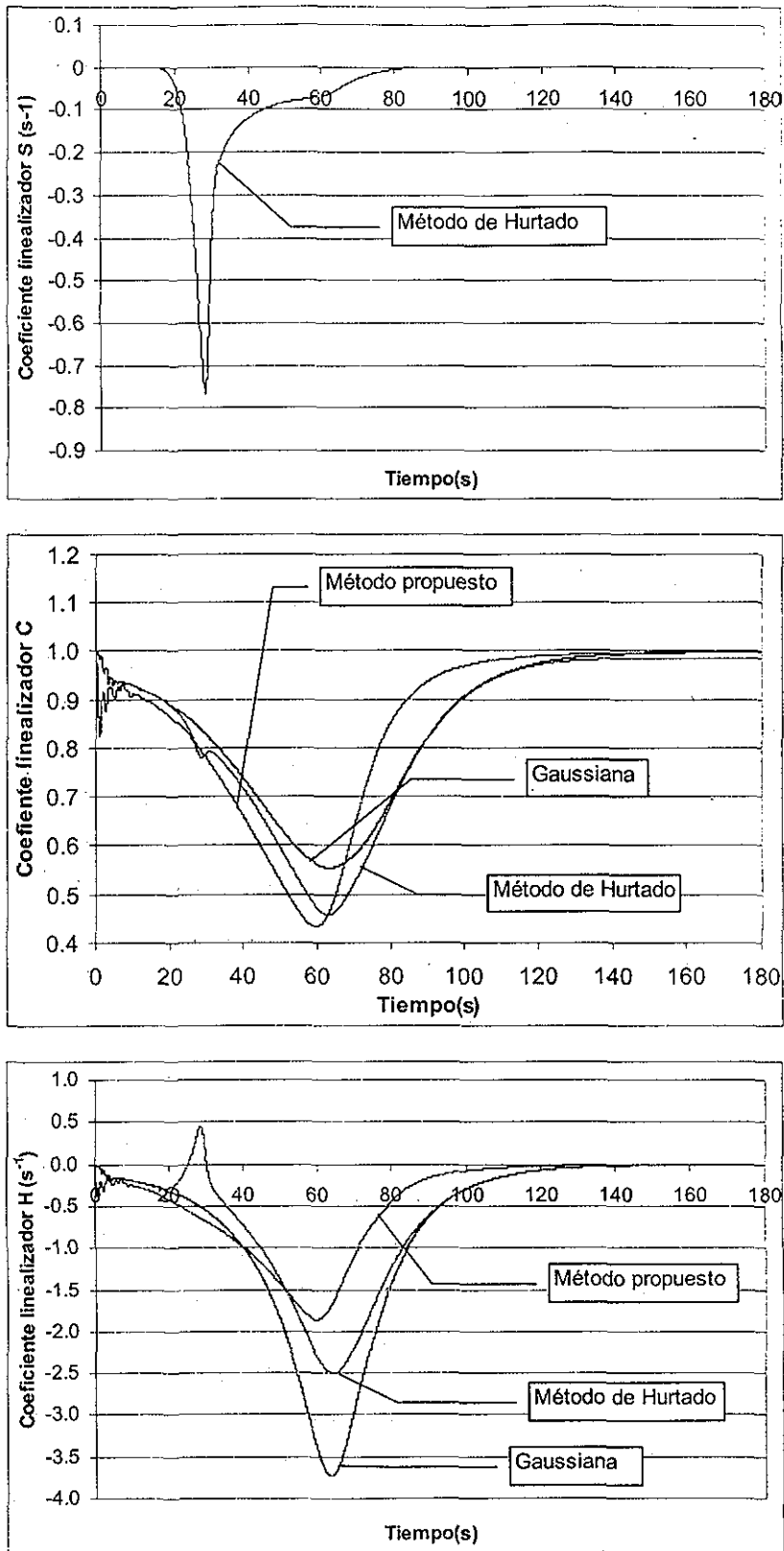


Figura 5.24 Comportamiento de los coeficientes linealizadores. $T=4.0$, $\eta=5.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En las figuras 5.1 a 5.24 se puede observar que cuando se permite que la respuesta de los filtros alcance su estado estacionario antes de modular, es decir cuando las condiciones iniciales de la matriz de covarianza son las dadas por las ecuaciones (5.20) y (5.21), la parte inicial de las curvas asociadas a las respuestas obtenidas con SMC y con linealización equivalente se sobreponen. La precisión del cálculo de la respuesta también mejora ligeramente. En la figura 5.25 se muestra el efecto que tiene la respuesta transitoria del filtro cuando no se permite que éste alcance su estado estacionario; el sistema analizado es de periodo de vibración $T=2.1s$ y $\eta=4.0$ y la respuesta se calcula con el método de linealización propuesto que se compara con lo obtenido con el método SMC. Puede afirmarse, en general, que la respuesta obtenida cuando el filtro alcanza su estado estacionario antes de modular es mayor que cuando no se permite que ocurra dicha condición. Para el caso analizado σ_x se incrementa en un 7.1%, σ_y aumenta un 7.7% y σ_z aumenta en un 1.9%

Cabe mencionar que las condiciones iniciales de la matriz de covarianza no se implementaron en la técnica gaussiana ni en la de Hurtado; por esta razón las respuestas obtenidas con esos métodos se ven desfasadas de la obtenida con SMC. Este efecto no influye en la calibración del método propuesto, ya que la magnitud de los errores obtenidos con esas técnicas es mucho mayor que los que se obtienen cuando no se consideran las condiciones iniciales adecuadas de la matriz de covarianza (ver figura 5.25).

La bondad del método propuesto se determina, en este trabajo, en función de los errores relativos en el cálculo de los valores máximos de σ_x , σ_y y σ_z , determinados como:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\text{respuesta obtenida con linealización} - \text{respuesta obtenida con simulación}}{\text{respuesta obtenida con simulación}} \times 100 \quad (5.23)$$

Los errores relativos de los valores máximos asociados a los resultados mostrados en las figuras 5.1 a 5.24 se muestran en las tablas 5.5 a 5.16, y gráficamente en las figuras 5.26 a 5.28.

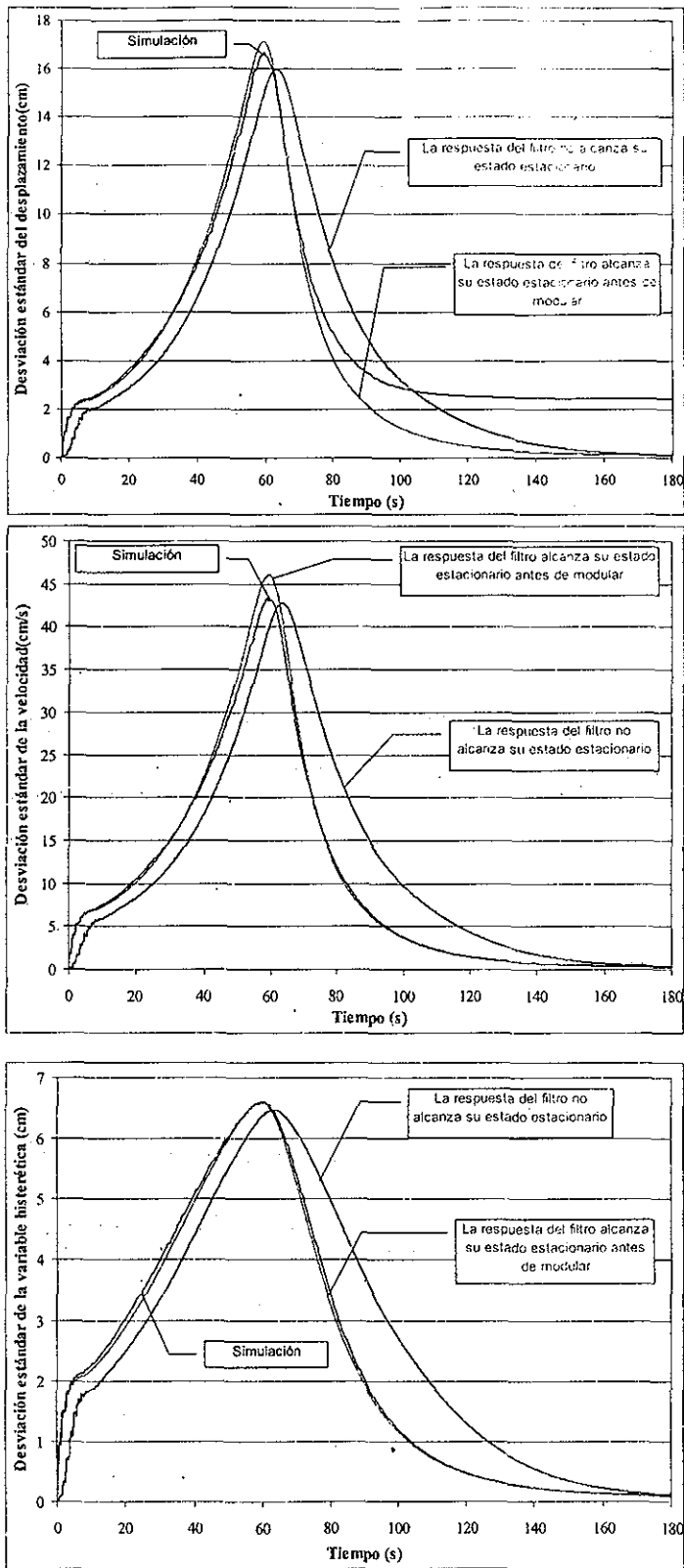


Figura 5.25. Efecto de la respuesta transitoria de los filtros. $T=2.0$, $\eta=4.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 5.5. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=0.5$, $\eta=1.5$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -57.24 | -56.40 | -9.74 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | -51.77 | -56.56 | -9.70 |
| Propuesto | -48.60 | -47.19 | 1.25 |

Tabla 5.6. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=0.5$, $\eta=4.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -66.44 | -65.19 | -4.46 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | -52.94 | -69.79 | -2.65 |
| Propuesto | -66.50 | -64.30 | 10.10 |

Tabla 5.7. Errores relativos correspondiente al sistema con $T=0.5$, $\eta=5.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -61.71 | -60.52 | -4.96 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | -48.62 | -67.64 | -1.95 |
| Propuesto | -66.22 | -64.03 | 11.40 |

Tabla 5.8. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=1.0$, $\eta=1.5$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -30.94 | -29.41 | -9.86 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | -21.23 | -29.34 | -9.59 |
| Propuesto | -13.78 | -11.19 | 3.44 |

Tabla 5.9. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=1.0$, $\eta=4.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -25.36 | -23.12 | -8.95 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 45.67 | -16.87 | -3.79 |
| Propuesto | 8.00 | 13.23 | 16.90 |

Tabla 5.10. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=1.0$, $\eta=5.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -22.78 | -20.58 | -12.65 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 60.54 | -10.71 | -7.14 |
| Propuesto | 14.06 | 19.65 | 16.24 |

Tabla 5.11. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=2.1$, $\eta=1.5$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -10.51 | -11.10 | -10.12 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 11.70 | -9.64 | -8.77 |
| Propuesto | -1.04 | -1.72 | -4.21 |

Tabla 5.12. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=2.1$, $\eta=4.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -19.50 | -15.90 | -19.90 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 73.37 | -11.15 | -15.49 |
| Propuesto | 2.72 | 6.50 | -0.31 |

Tabla 5.13. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=2.1$, $\eta=5.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -20.72 | -16.22 | -22.45 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 69.11 | -11.47 | -17.81 |
| Propuesto | 1.29 | 6.52 | 0.36 |

Tabla 5.14. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=4.0$, $\eta=1.5$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -12.27 | -10.02 | -9.42 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 3.71 | -9.64 | -8.64 |
| Propuesto | -3.92 | -1.21 | -4.07 |

Tabla 5.15. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=4.0$, $\eta=4.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -20.27 | -12.23 | -18.53 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 60.80 | -10.75 | -14.45 |
| Propuesto | -8.22 | 0.86 | -1.48 |

Tabla 5.16. Errores relativos correspondientes al sistema con $T=4.0$, $\eta=5.0$

| Método | Errores relativos en el cálculo de: | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| | $\max[\sigma_x]$ | $\max[\sigma_y]$ | $\max[\sigma_z]$ |
| Gaussiano | -21.03 | -12.44 | -21.35 |
| Hurtado ($r = -0.5$) | 59.84 | -10.96 | -16.86 |
| Propuesto | -8.84 | 0.99 | -0.55 |

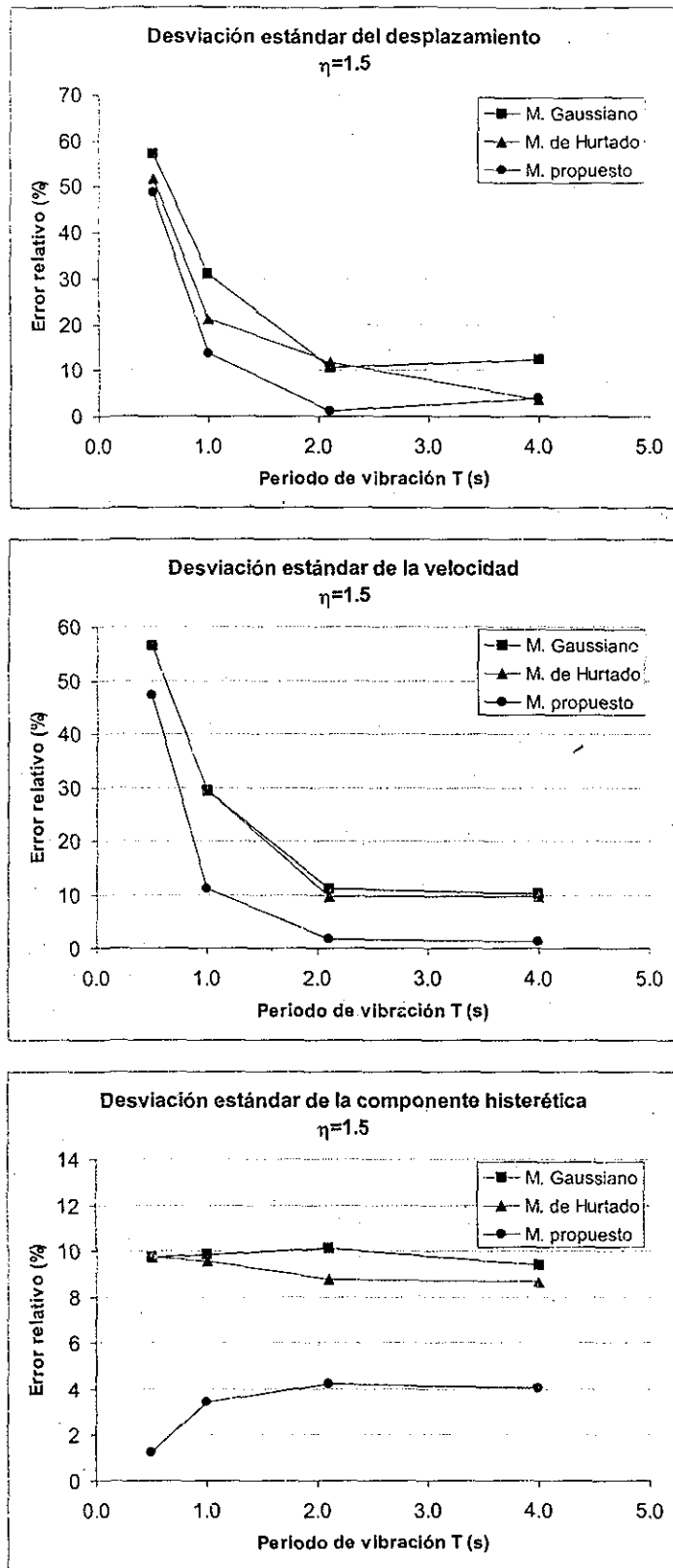


Figura 5.26 Errores relativos para el sistema con $\eta=1.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

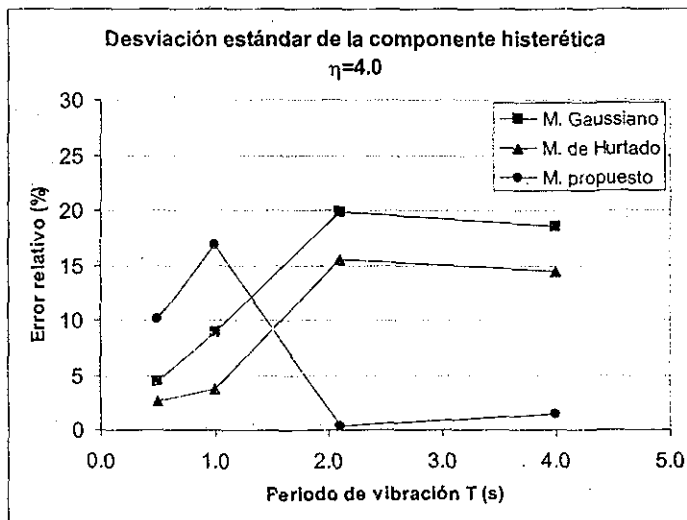
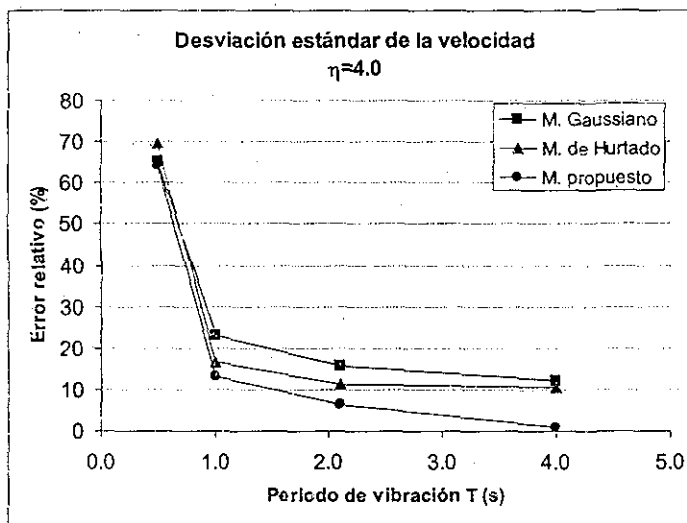
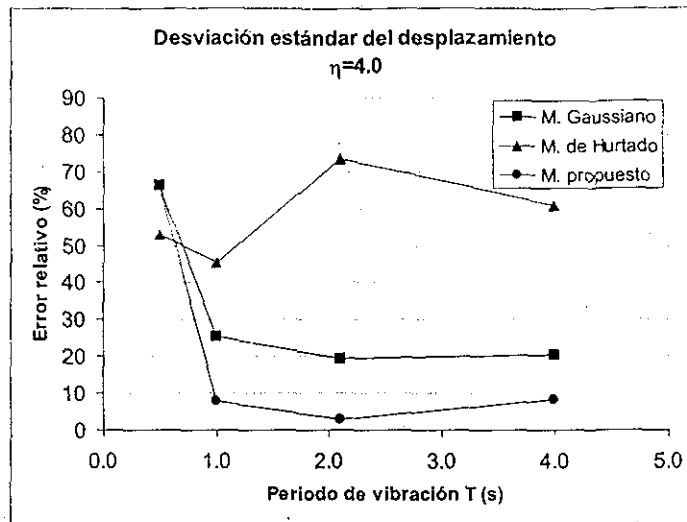


Figura 5.27 Errores relativos para el sistema con $\eta=4.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

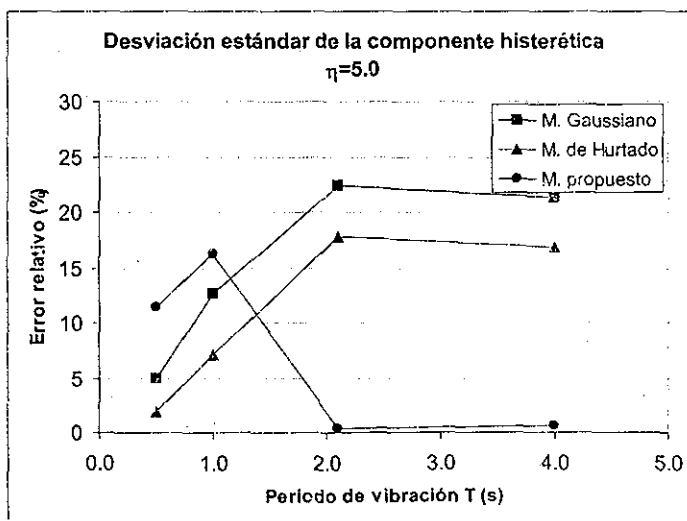
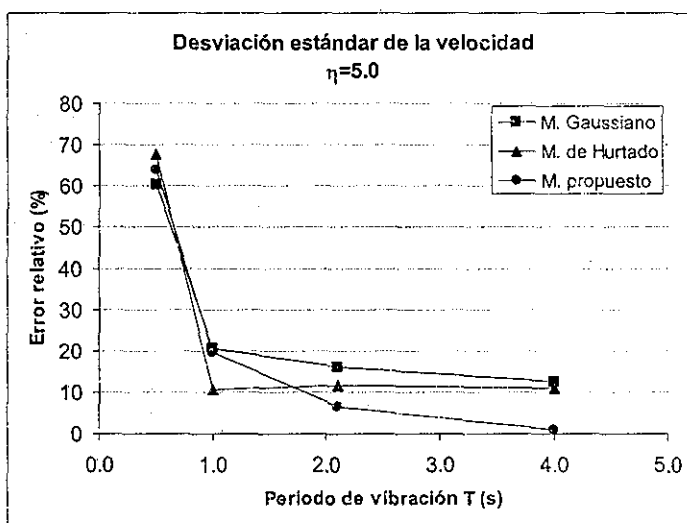
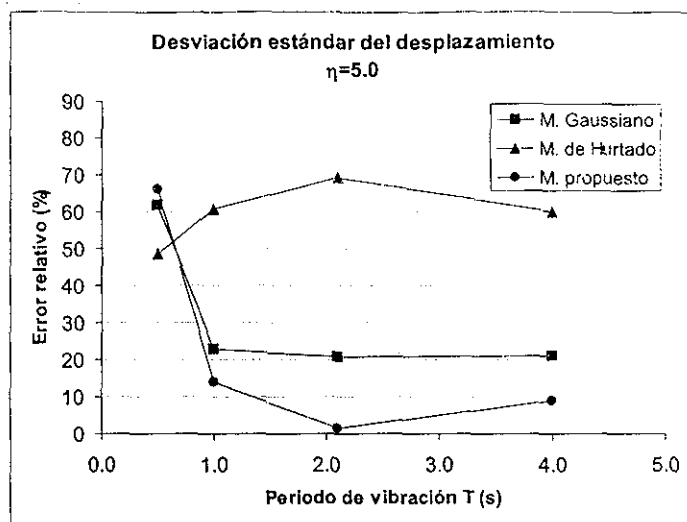


Figura 5.28 Errores relativos para el sistema con $\eta=5.0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Obsérvese que la técnica gaussiana subestima la respuesta de un sistema histerético. El método de Hurtado sobrestima en general σ_x , y subestima σ_x y σ_z . El método propuesto a veces sobrestima y otras subestima la respuesta, pero en general puede decirse que predice con mayor precisión el valor de σ_z . También, se observa que estima con bastante precisión (errores menores que 10%) la respuesta de sistemas histeréticos con periodos de vibración iguales o mayores que el dominante de la excitación ($T_0 = 2s$). Los errores relativos de la respuesta de sistemas con periodos de vibración menores que T_0 , son mayores que los asociados a sistemas de periodos de vibración mayores que T_0 ; sin embargo, en cualquier caso los errores obtenidos con la técnica propuesta no son mayores que los obtenidos con las otras dos técnicas de linealización, con excepción de algunos casos aislados.

Un aspecto que hay que destacar es que a diferencia del método de Hurtado, el método propuesto en este trabajo no predice la respuesta permanente que algunos sistemas histeréticos experimentan. Estudios de simulación de sistemas bilineales o sistemas con un valor muy pequeño de α_2 sujetos a niveles de excitación intermedios (Roberts, 1978) revelan que su proceso de respuesta es de banda ancha y además del movimiento natural cíclico de la respuesta existe un movimiento de baja frecuencia asociado a una vibración errática del sistema hacia un lado de su posición de equilibrio estático, fenómeno conocido como *drift* (en inglés). Esto significa que el "centro del ciclo de histéresis" se mueve aleatoriamente con una muy baja frecuencia. En esta situación el espectro de potencia de la respuesta tiene la forma esquematizada en la figura 5.29 (Iwan y Pappas 1988).

En los casos prácticos, los errores más altos del método de linealización estocástica ocurren para modelos de excitación con filtros que cortan frecuencias bajas y en sistemas con valores de α_2 muy pequeños. Las propiedades de los sistemas histeréticos y las características del modelo de la excitación usadas esta calibración son las más desfavorables. Se está usando un valor de α_2 muy pequeño igual a 0.015 y se utiliza además el filtro de Clough-Penzien con el fin de tener un modelo más realista de la excitación. Como se sabe, las ordenadas de este filtro tienden a cero cuando ω se aproxima a cero. Por estas dos razones ni el método gaussiano ni el método propuesto son capaces de detectar movimientos de baja frecuencia (*drift*) y por lo tanto no reproducen los desplazamientos permanentes que indican las curvas obtenidas con SMC.

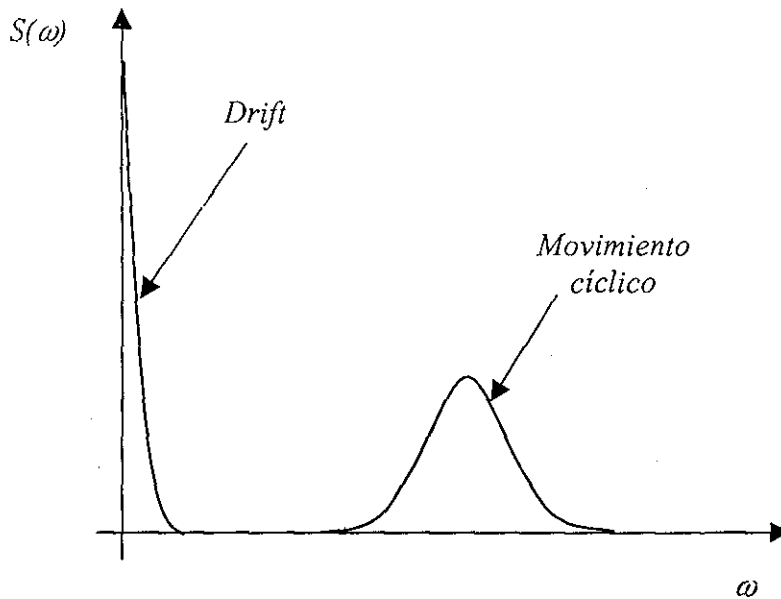


Figura 5.29-Espectro de potencia de un sistema bilineal o con un valor muy pequeño de α_2

Para sistemas sin deterioro de propiedades, si el valor de α_2 aumenta es de esperarse que los errores de la linealización equivalente disminuyan. Para probar esto se realizó el análisis de tres sistemas con periodo de vibración $T=0.5s$ y con diferentes valores de α_2 . Las propiedades de los sistemas se muestran en la Tabla 5.17.

Tabla 5.17. Propiedades de los sistemas de periodo $T=0.5s$ con diferentes valores de α_2 .

| $T=0.5s \Rightarrow k=0.2736 \text{ ton/cm}$ | | | | | | | |
|--|----------------|----------------|-------|----------------------------|-----|----------------|---------------|
| Sistema | f_y (ton) | α_2 | ξ | Masa m (ton 2 /cm) | n | $\beta=\gamma$ | z_u (cm) |
| I | 0.3530 | 0.2, 0.5 y 0.8 | 0.05 | 1.7329×10^{-3} | 1 | 0.3875 | 1.29 |
| II | 0.2427 | 0.2, 0.5 y 0.8 | 0.05 | 1.7329×10^{-3} | 1 | 0.5636 | 0.88 |
| III | 0.2348 | 0.2, 0.5 y 0.8 | 0.05 | 1.7329×10^{-3} | 1 | 0.5825 | 0.85 |

En las figuras 5.30 a 5.38 se muestran los resultados obtenidos mediante SMC, con la técnica de linealización equivalente gaussiana, con el método de Hurtado (con un valor del coeficiente empírico $r=-0.5$, véase Hurtado, 1998) y con el método propuesto en esta investigación. Obsérvese como disminuye el error al aumentar el valor de α_2 . En las figuras 5.39 a 5.41 se grafican los errores relativos (ecuación 5.23) relacionados con el cálculo de las respuestas mostradas en las figuras 5.30 a 5.38.

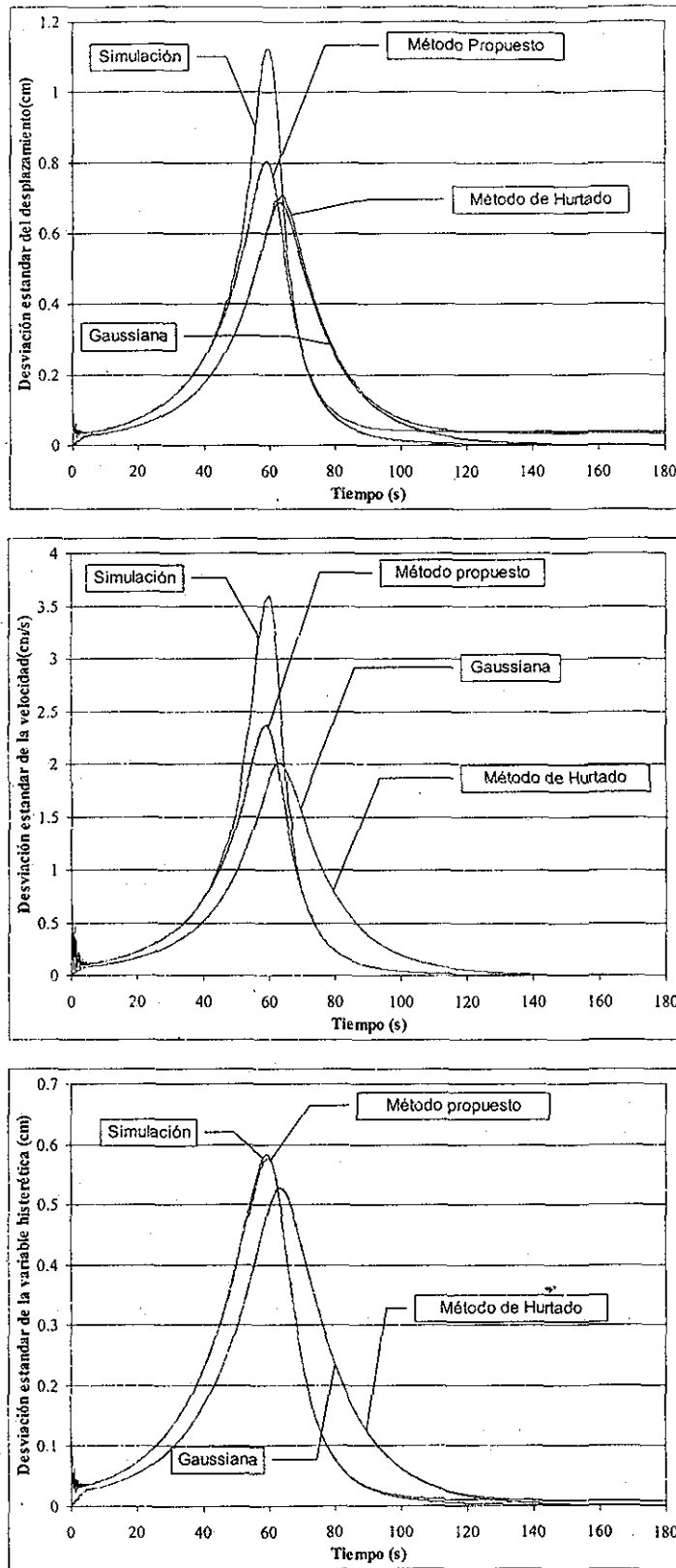


Figura 5.30. Respuesta del sistema I ($f_y=0.3530 \text{ ton}$) con $\alpha_2=0.2$

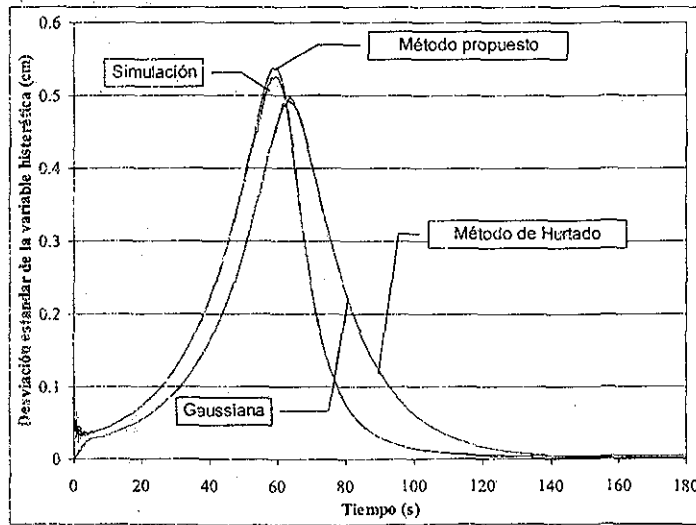
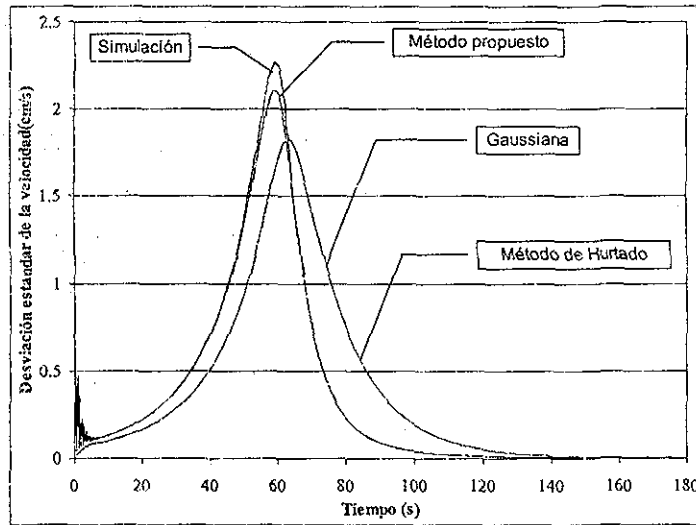
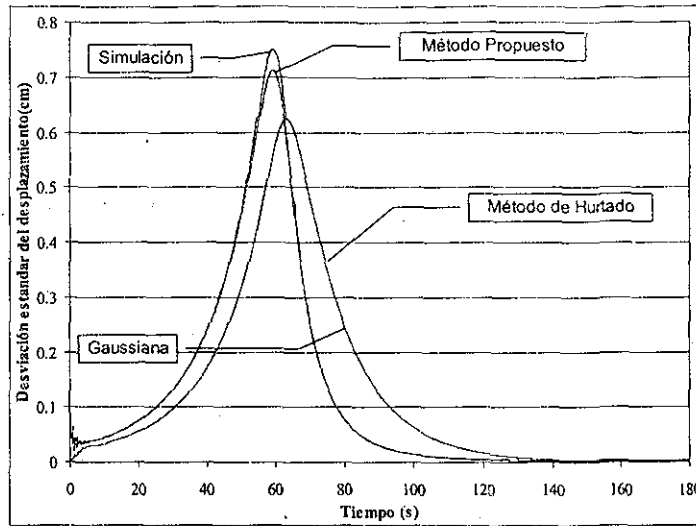


Figura 5.31. Respuesta del sistema I ($f_y=0.3530$.ton) con $\alpha_2=0.5$

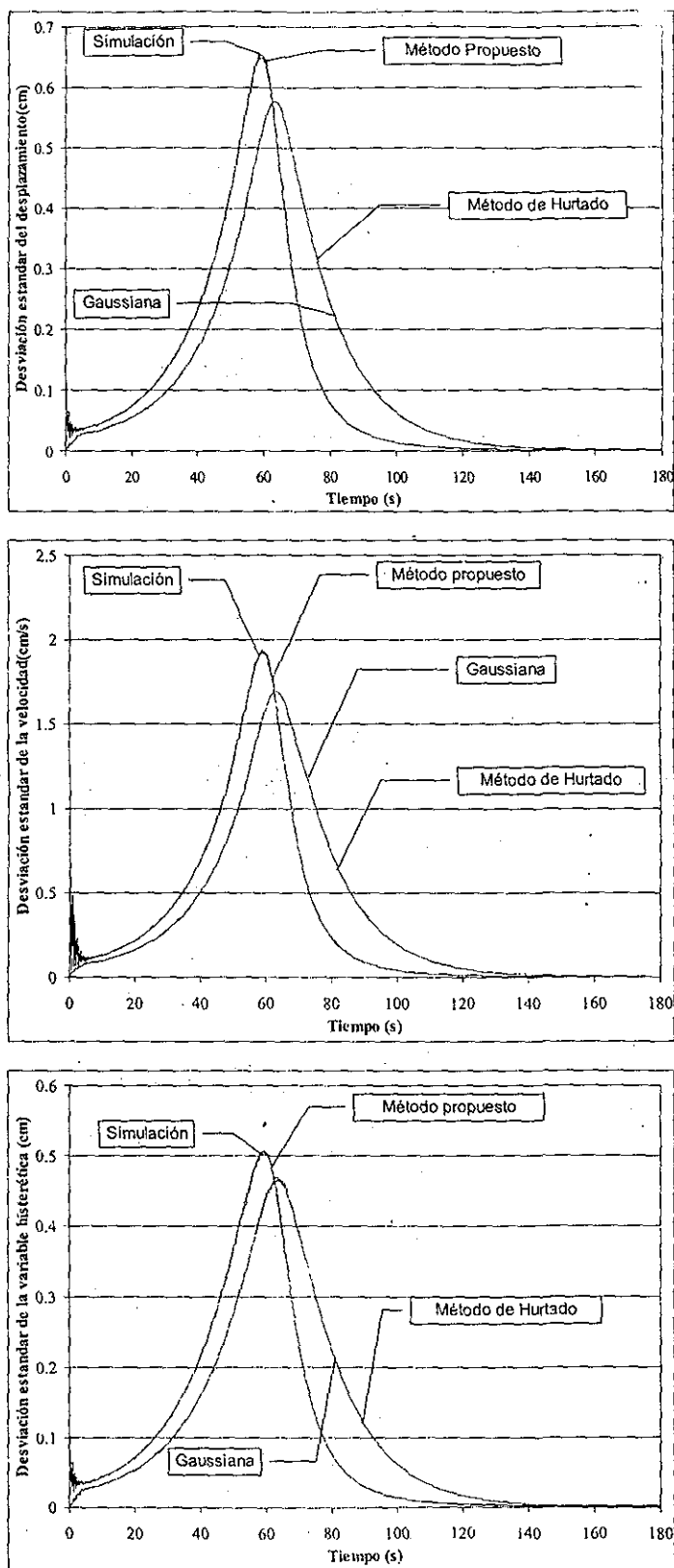


Figura 5.32. Respuesta del sistema I ($f_y = 0.3530 \text{ ton}$) con $\alpha_2 = 0.8$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

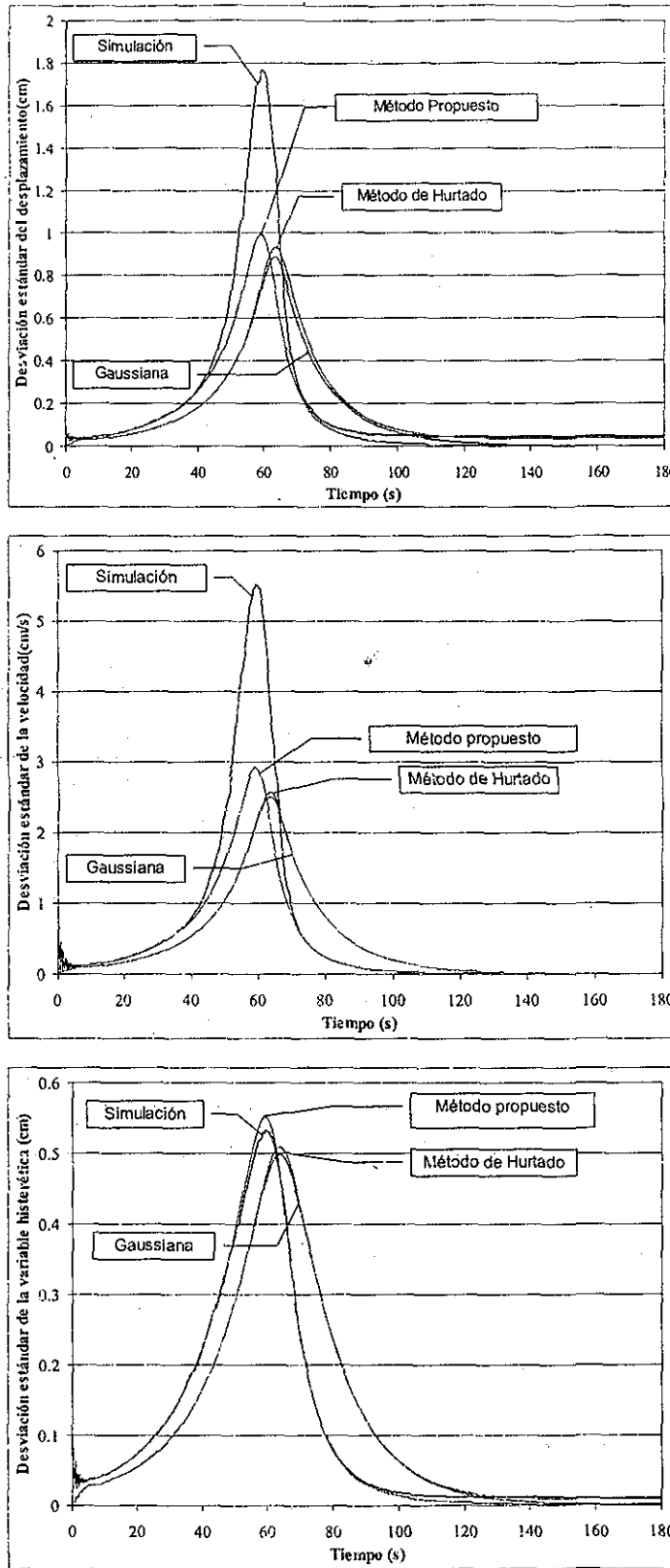


Figura 5.33. Respuesta del sistema II ($f_y=0.2427$ ton) con $\alpha_2=0.2$

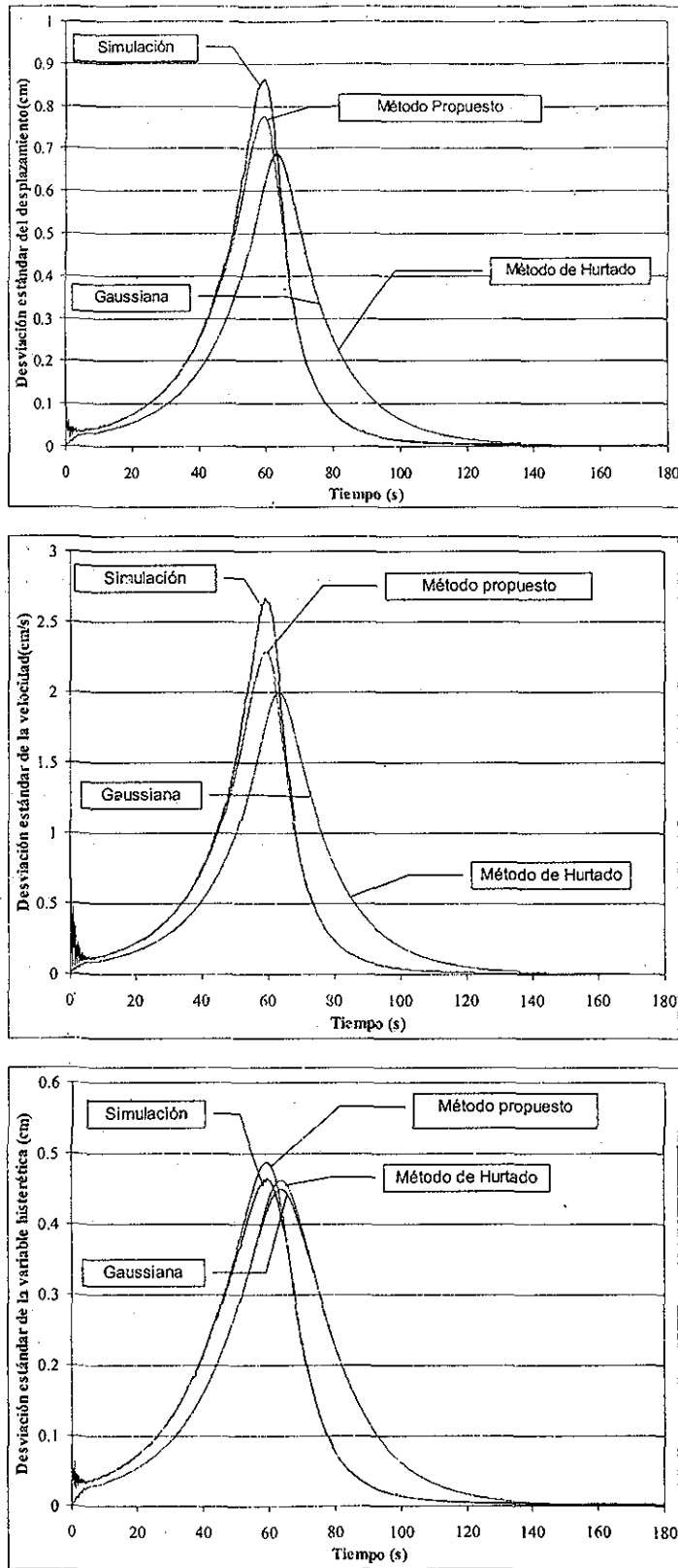


Figura 5.34. Respuesta del sistema II ($f_y=0.2427$ ton) con $\alpha_2=0.5$

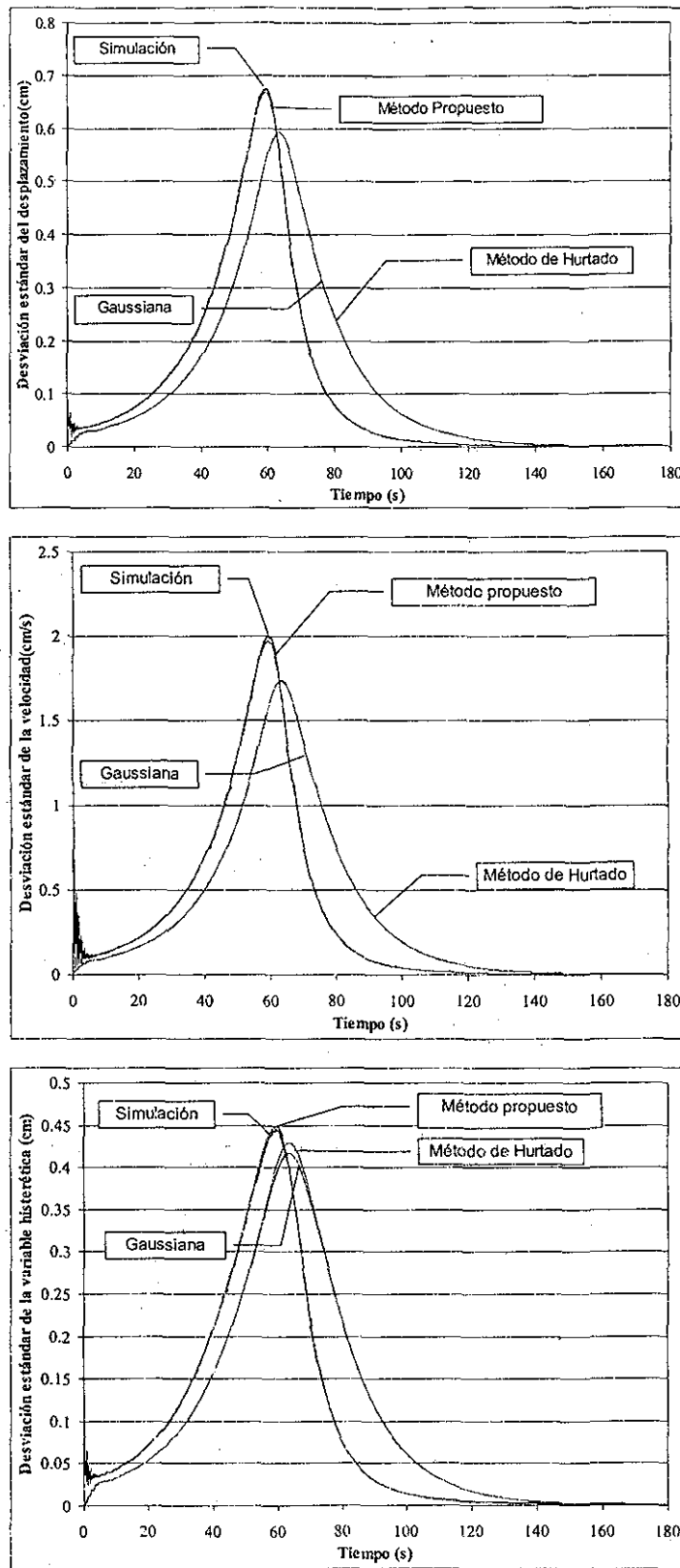


Figura 5.35. Respuesta del sistema II ($f_y=0.2427$ ton) con $\alpha_2=0.8$

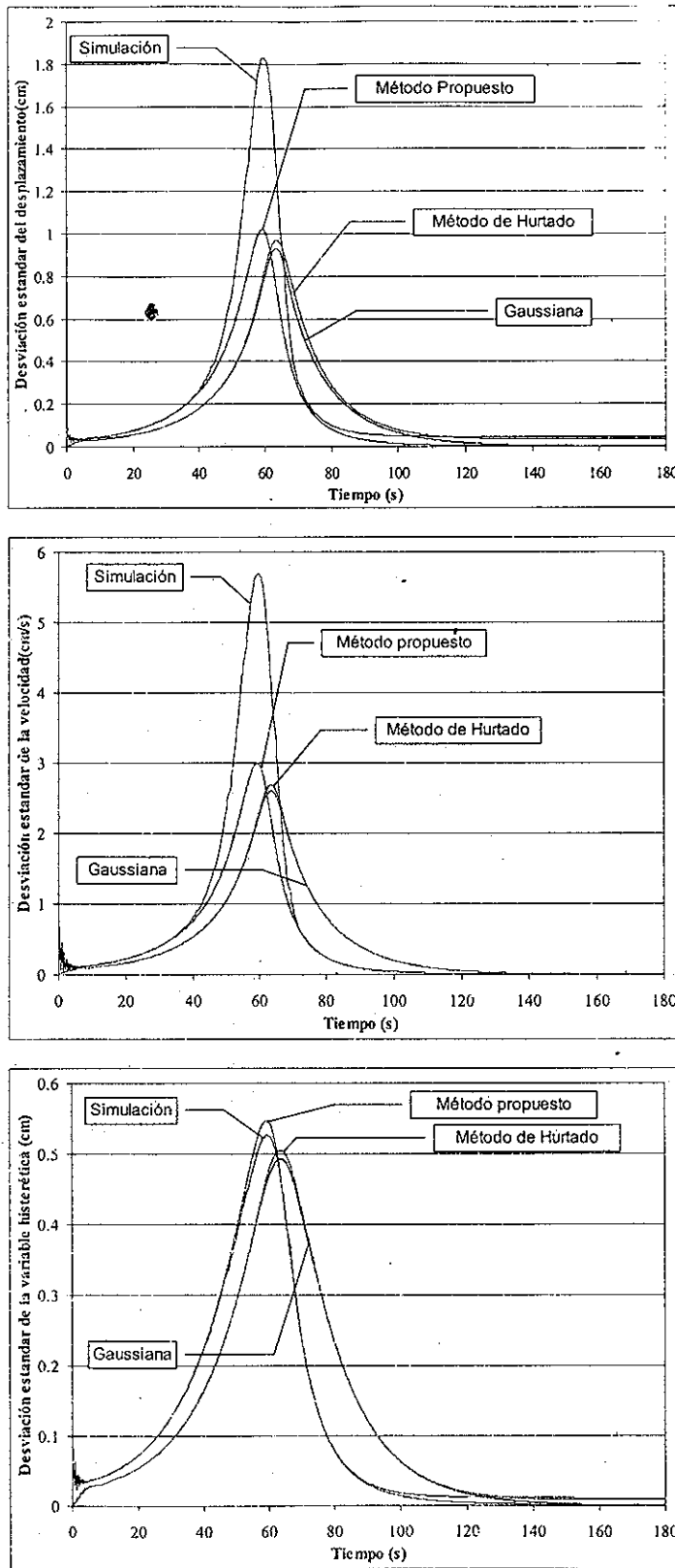


Figura 5.36. Respuesta del sistema III ($f_y=0.2348$ ton) con $\alpha_2=0.2$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

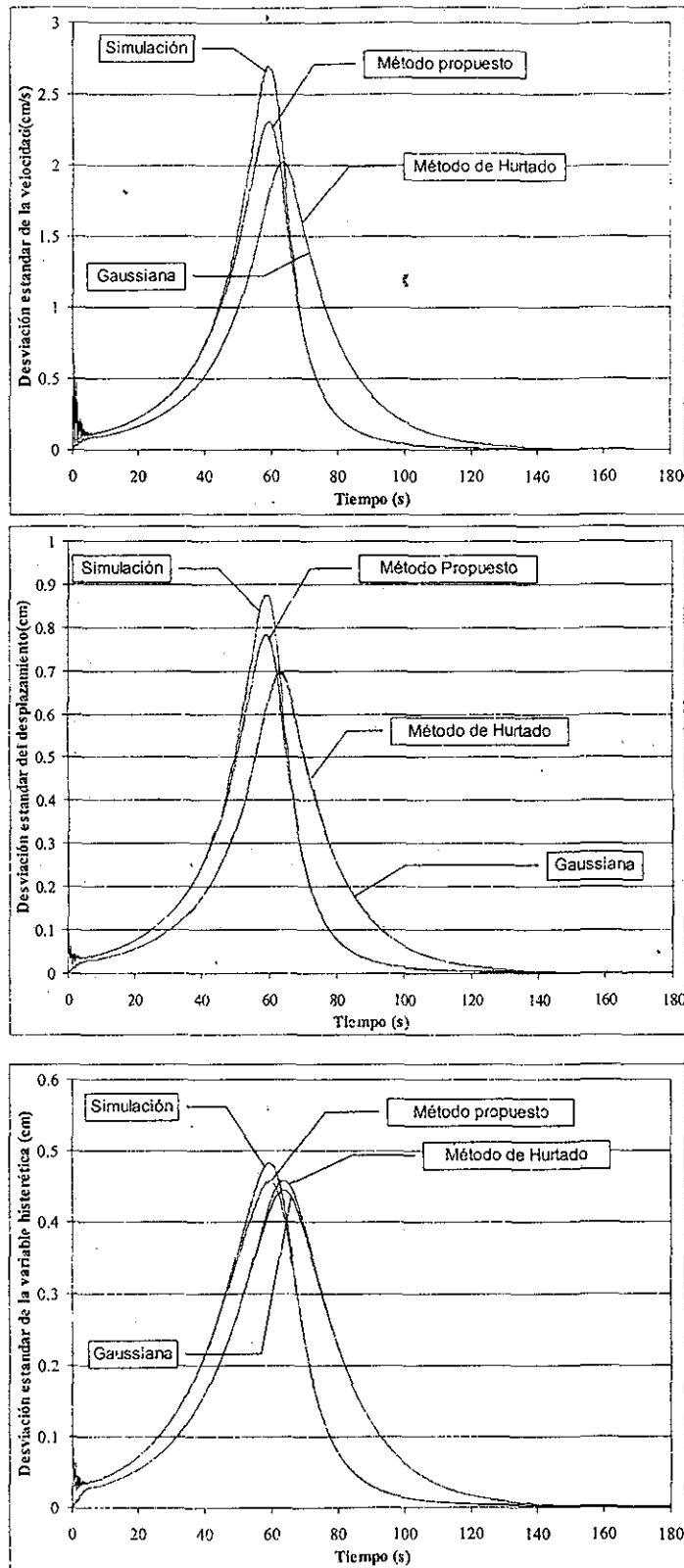


Figura 5.37. Respuesta del sistema III ($f_y=0.2348$ ton) con $\alpha_2=0.5$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

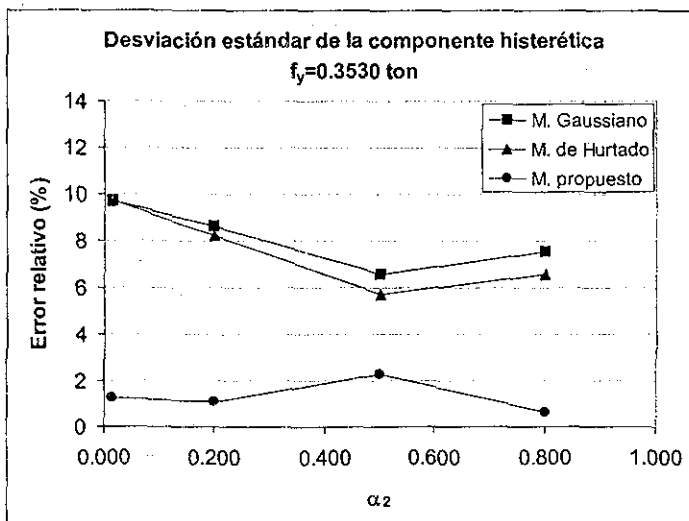
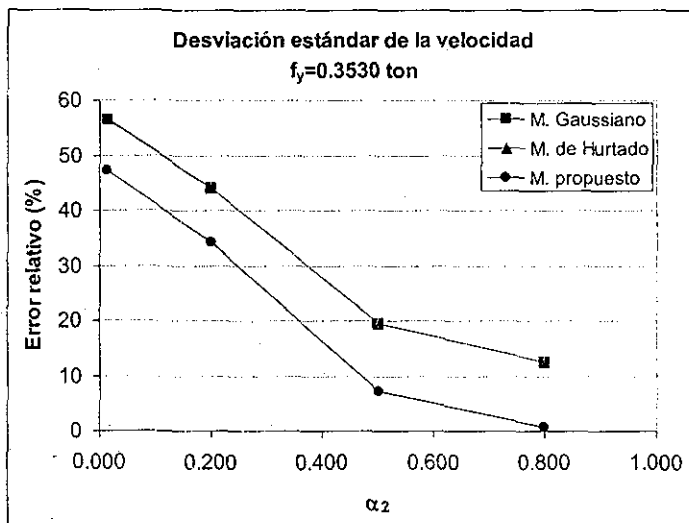
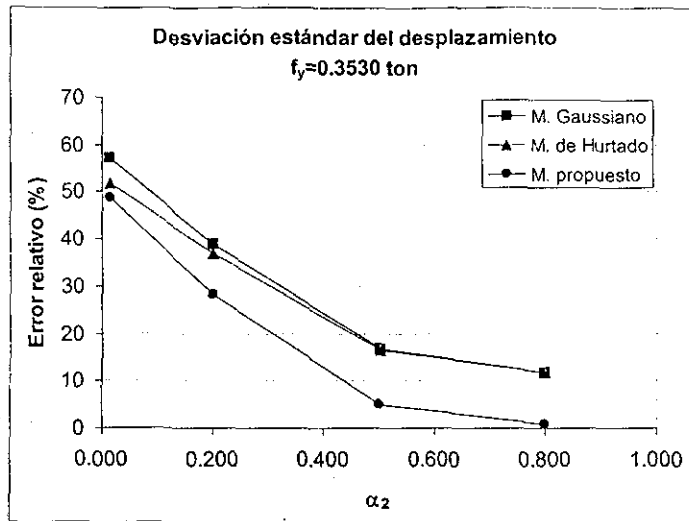


Figura 5.39 Errores relativos de la respuesta del sistema I ($f_y=0.3530$ ton)

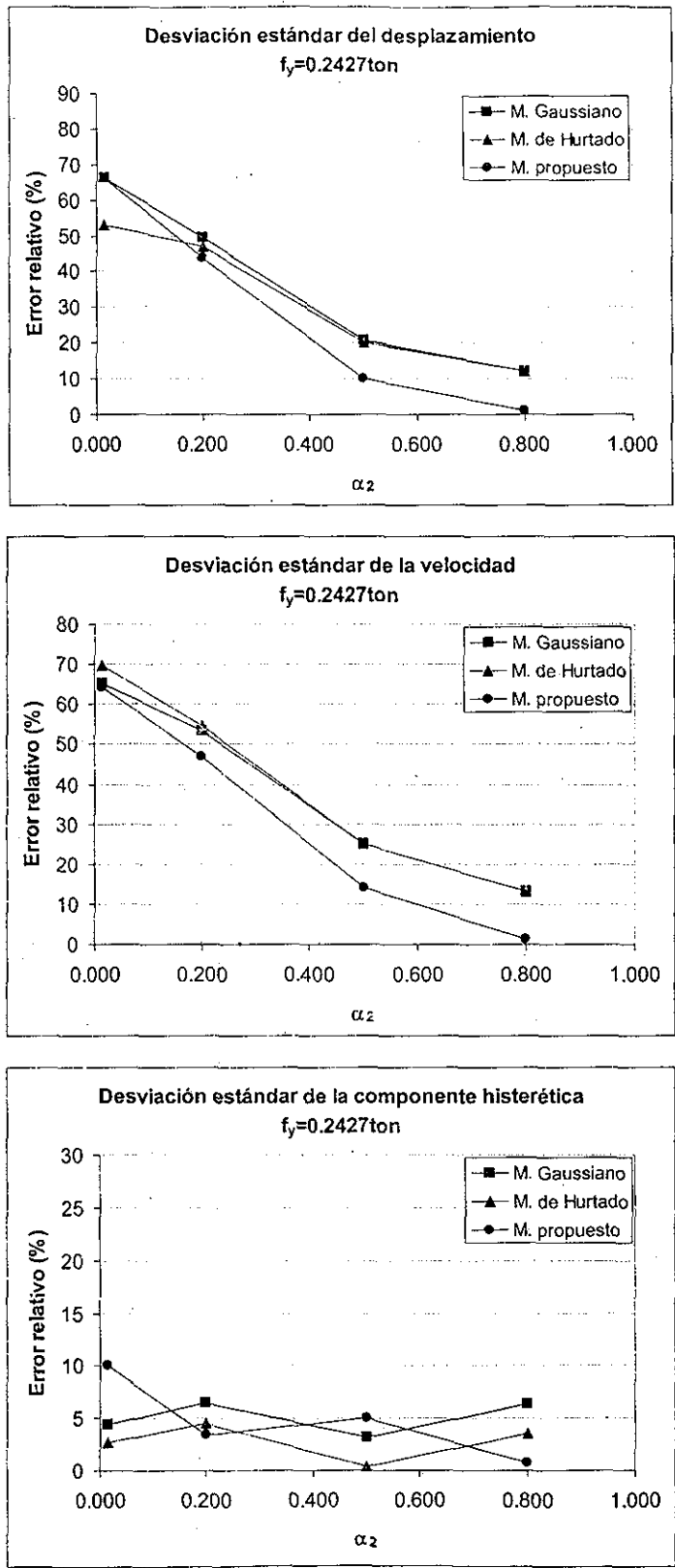


Figura 5.40 Errores relativos de la respuesta del sistema II ($f_y=0.2427\text{ ton}$)

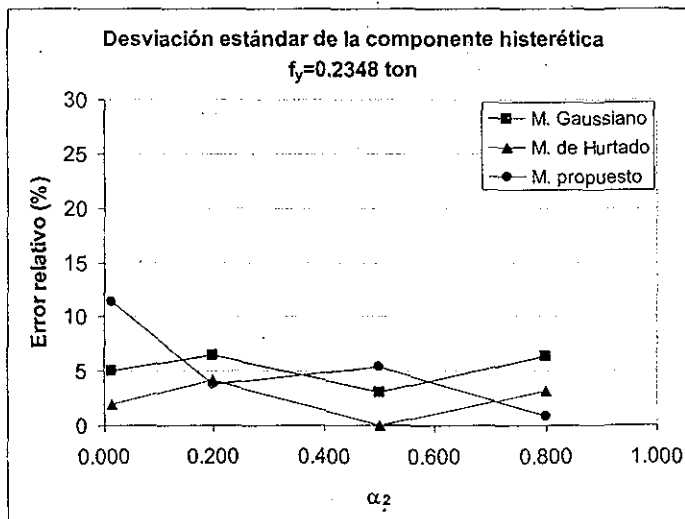
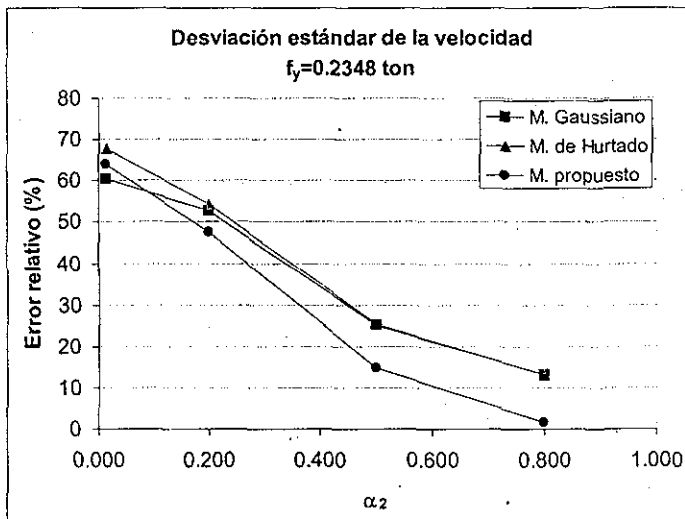
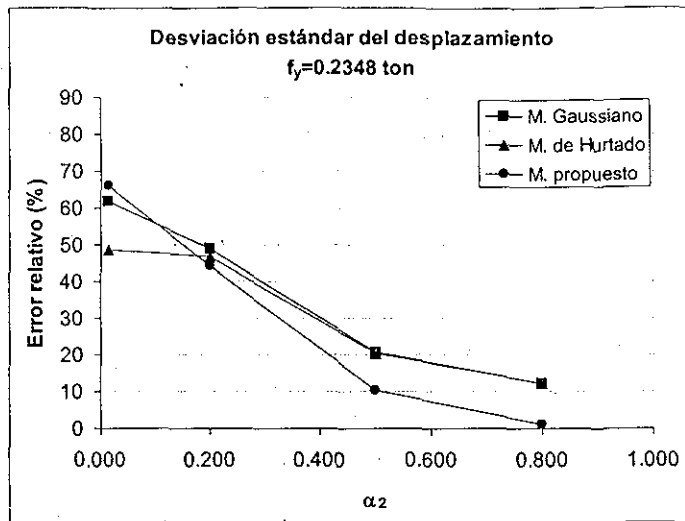


Figura 5.41 Errores relativos de la respuesta del sistema III ($f_y=0.2348$ ton)

Obsérvese en las figuras 5.39 a 5.41 que el comportamiento de las curvas de error asociadas a cada una de las técnicas de linealización equivalente tienen un comportamiento similar. Esto indica que este tipo de error es inherente del método de linealización equivalente.

Sobre el comportamiento de los coeficientes linealizadores usados en cualquiera de las tres técnicas empleadas en esta calibración, en función de la intensidad de la excitación puede establecerse lo siguiente: En general el valor de los coeficientes s_e y k_e es cercano a cero cuando la intensidad de la excitación es débil. Si la excitación es intensa el valor de estos coeficientes disminuye tomando valores negativos. El coeficiente c_e tiene valores cercanos a uno cuando la intensidad de la excitación es débil. Si la excitación es intensa el valor de este coeficiente disminuye.

En cuanto al efecto del nivel de ductilidad esperada η en el comportamiento de los coeficientes linealizadores se puede decir lo siguiente: en general el valor absoluto del coeficiente s_e ($|s_e|$) disminuye conforme η aumenta, $|c_e|$ disminuye conforme η aumenta y $|k_e|$ aumenta conforme η aumenta. Los coeficientes del método propuesto y del método gaussiano se caracterizan por tener una variación suave en el tiempo. Los coeficientes de Hurtado tienen una variación suave hasta el momento en que se inicia la parte intensa de la excitación. En este instante s_e aumenta muy rápidamente, c_e experimenta varias transiciones en su rapidez de cambio provocando que éste tenga dos valores mínimos locales y k_e también experimenta varias transiciones en su rapidez de cambio provocando que éste tenga un valor máximo y dos valores mínimos locales.

CAPÍTULO



CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y ESTUDIOS FUTUROS

6.1 CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un criterio de linealización equivalente estocástica orientado al análisis de la respuesta de estructuras histeréticas sin deterioro sujetas a sismos de banda angosta. El criterio se desarrolló para ser aplicado tanto a sistemas de un grado de libertad como a estructuras de múltiples grados de libertad. De esta manera el análisis de la respuesta de estructuras histeréticas sujetas a sismos puede efectuarse de las siguientes dos formas:

1. A través del análisis de un modelo de masa-amortiguador-resorte asociado a la estructura a analizar, empleando los métodos que en esta tesis se han descrito.

2. A través del análisis de un sistema de un grado de libertad equivalente al de múltiples grados de libertad, cuyas propiedades pueden determinarse por ejemplo con los criterios desarrollados por Collins, Wen y Foutch (1995)

El criterio planteado se aplica a estructuras excitadas por sismos. Debido a la naturaleza aleatoria de los temblores fue necesario utilizar modelos estocásticos para este tipo de excitación. En el estudio de registros sísmicos se ha visto que los temblores tienen características evolutivas, es decir, tanto su amplitud como su contenido de frecuencias cambian en el tiempo. Este comportamiento se debe a la diferencia de velocidades y de energía que llevan consigo las ondas sísmicas que componen el movimiento y a sus múltiples reflexiones, refracciones y difracciones. En esta tesis la excitación sísmica se ha modelado como un proceso aleatorio gaussiano no estacionario. El modelo utilizado es el propuesto por Yeh y Wen (1989) el cual se basa en el concepto de *espectro instantáneo*. En dicho modelo se introducen filtros y funciones moduladoras de amplitud y de frecuencia. En particular la excitación se genera con un ruido blanco que excita filtros lineales de segundo orden (modelo de Clough y Penzien, 1975) cuya respuesta se modula en amplitud y frecuencia. Cuando se usan filtros con el fin de dar el contenido de frecuencia deseado a la excitación, debe tenerse especial cuidado en evitar que la respuesta transitoria de los filtros afecte la respuesta del sistema estructural (véase sección 3.2). La desventaja de usar el filtro de Clough-Penzien es que dicho modelo atenúa frecuencias bajas lo cual provoca que el método de la linealización estocástica sea incapaz de detectar el movimiento de baja frecuencia asociado a una vibración errática que exhiben ciertos sistemas hacia un lado de su posición de equilibrio estático (*drift*). En los casos prácticos, los errores más altos del método de linealización estocástica ocurren para modelos de excitación con filtros que cortan frecuencias bajas y en sistemas elastoplásticos o con valores de rigidez de postfluencia (representada por el parámetro α_2) muy pequeña.

A partir de estudios de simulación de Monte Carlo se ha hecho ver que la densidad de probabilidad conjunta de la respuesta de un sistema histerético no es gaussiana. Es razonable suponer que el desplazamiento y la velocidad están normalmente distribuidas, sin embargo la parte histerética del desplazamiento (z) es una variable no gaussiana. Se propuso un modelo para la función de densidad de probabilidad de z que coincide razonablemente con los resultados obtenidos mediante simulación de Monte Carlo. La densidad de probabilidad conjunta del

desplazamiento, de la velocidad y de la variable histerética se calcula a partir de la función de densidad de probabilidad condicional del desplazamiento y velocidad la cual se determina suponiendo que ésta es conjuntamente normal para cada valor de z , que sus medias condicionales son funciones lineales de z y que sus varianzas condicionales son independientes de z . Además, se considera que la media del proceso de respuesta es cero. El modelo mencionado es evolutivo, es decir, reproduce la variación de la densidad de probabilidad conjunta de la respuesta en el tiempo. Depende de cuatro parámetros los cuales pueden calcularse en términos del valor máximo de z (valor que depende de las propiedades del sistema) y del valor instantáneo de la desviación estándar de z . Las ventajas principales de este modelo son las siguientes:

1. Sus parámetros no dependen de resultados de simulación de Monte Carlo.
2. Es un modelo que permite calcular de forma cerrada los coeficientes linealizadores que sirven para establecer el modelo lineal equivalente del sistema histerético.

Ya que se ha supuesto que la media de la respuesta es cero, la solución de interés es únicamente la matriz de covarianza (\mathcal{Z}). Como el modelo del proceso de excitación es no estacionario la covarianza de la respuesta se obtiene al integrar numéricamente, en intervalos de tiempo suficientemente pequeños, un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden (ecuación 3.19). Las ecuaciones son no lineales ya que los coeficientes linealizadores dependen también de la respuesta. La solución implica el uso repetido de las ecuaciones (3.19) y (3.32). El eje del tiempo se divide en un número finito de intervalos Δt igualmente espaciados en los que los elementos de las matrices M_e , C_e y K_e se consideran constantes. Al inicio M_e , C_e y K_e son conocidas (solución lineal) por lo que \mathcal{Z} en el instante $t = \Delta t$ puede encontrarse por medio de la integración numérica de la ecuación (3.19). Sustituyendo los elementos apropiados de la matriz \mathcal{Z} en la ecuación (3.32) se obtienen los nuevos valores de M_e , C_e y K_e para el siguiente intervalo, y así sucesivamente. La matriz H de la ecuación (3.19) se actualiza en cada paso para incluir los cambios que toman lugar en el sistema. En la calibración, la ecuación (3.32) se simplifica en la ecuación (5.18), así que el sistema de ecuaciones que se resuelve de manera simultánea es el formado por la ecuación (3.19) y la (5.18).

Las respuestas que se estudian en este trabajo son la desviación estándar del desplazamiento σ_x , de la velocidad σ_v y de la parte histerética del desplazamiento σ_z . Estas cantidades se obtienen utilizando cuatro métodos: la linealización equivalente estocástica gaussiana, la linealización equivalente estocástica no gaussiana propuesta por Hurtado (1998), la linealización equivalente estocástica no gaussiana propuesta en esta investigación, y la simulación de Monte Carlo. Este último sirve para juzgar la precisión de los métodos antes mencionados.

En la calibración efectuada en el capítulo 5, se estudiaron sistemas de un grado de libertad excitados por un ruido blanco filtrado y modulado en amplitud cuyas características se determinaron a partir del acelerograma de la componente este-oeste del movimiento registrado en la Secretaria de Comunicaciones y Transportes provocado por el sismo del 19 de septiembre de 1985. El periodo dominante de la excitación es de $T_0=2.0s$. El filtro utilizado es el de Clough-Penzien y la función moduladora es la propuesta por Yeh y Wen (1989).

Los sistemas analizados tienen periodos de vibración $T=0.5s$, $T=1.0s$, $T=2.1s$ y $T=4.0s$, cada uno con tres diferentes niveles de demanda de ductilidad esperada. Las fuerzas de fluencia asociadas a las demandas de ductilidad esperada se calcularon utilizando linealización equivalente a través de un esquema iterativo. El valor de α_2 considerado fue igual a 0.015. Se eligió este valor con el fin de calibrar el método propuesto para las condiciones más críticas ya que los errores más altos del método de linealización estocástica ocurren para modelos de excitación con filtros que cortan frecuencias bajas y en sistemas elastoplásticos o con valores de α_2 muy pequeños. Al modelo de histéresis se le asignó un valor de $n=1$. Esto significa que los sistemas analizados tienen una transición suave entre el comportamiento elástico y el inelástico.

Los resultados de la calibración del método propuesto en esta tesis son los siguientes:

- Predice con bastante precisión la evolución de σ_x , σ_v y σ_z . Las formas de las curvas obtenidas mediante simulación y con el método propuesto son idénticas al principio de la excitación, sin embargo, el método propuesto no detecta la respuesta permanente que exhiben ciertos sistemas. Este tipo de error se presenta cuando los sistemas tienen valores pequeños de

- α_2 . El error también se puede atribuir al filtro de Clough-Penzien utilizado, como se explicó en el capítulo 5.
- De las tres desviaciones estándar calculadas (σ_x , σ_t , y σ_z) el método propuesto estima con mayor precisión el valor de σ_z .
 - Los errores relativos en el cálculo del valor máximo de σ_x , σ_t , y σ_z son menores que 10%, excepto para sistemas con periodo corto. Al parecer, en sistemas con periodo corto el efecto que introduce el valor pequeño de α_2 y el tipo de filtro usado en el modelo de la excitación, es mucho más crítico. Los errores en el cálculo de la respuesta de dichos sistemas llegan a ser del orden de 66% en la estimación de σ_x , 64% en el cálculo de σ_t , y de 17% en el cálculo de σ_z . Entonces, puede decirse que los errores relativos son también función de la relación entre el periodo de vibración del sistema estructural y el periodo dominante de la excitación. Obsérvese que los errores relativos más pequeños corresponden a sistemas histeréticos con periodos de vibración iguales o mayores que el dominante de la excitación ($T_0=2.0s$).
 - A pesar de que para algunos sistemas se tienen errores grandes, la técnica propuesta es más precisa que las otras dos técnicas de linealización utilizadas en este trabajo. Esto significa que los errores obtenidos con linealización gaussiana y con la técnica de Hurtado asociados a sistemas de periodo corto son también grandes y en general mayores que los obtenidos con la técnica propuesta. Esto reafirma que los errores altos obtenidos en la calibración no dependen de la técnica de linealización sino de otras fuentes de error, entre ellas, del modelo de la excitación.
 - El método es aplicable al estudio de estructuras histeréticas sujetas a sismos, que sean susceptibles de ser reducidas a sistemas equivalentes no lineales de un grado de libertad. Para analizar directamente modelos de múltiples grados de libertad es recomendable efectuar una calibración del método con el fin de determinar su precisión en el cálculo de la respuesta de ese tipo de sistemas.

- El método propuesto se recomienda para análisis en los que la relación entre el periodo de la estructura y el periodo dominante de la excitación sea mayor que 0.5.
- Si la excitación se modela con un ruido blanco filtrado con el modelo de Clough-Penzien, el método de linealización propuesto da resultados adecuados para valores de α_2 mayores que 0.3.

En resumen:

1. El método propuesto proporciona resultados aceptables. El error relativo obtenido es mucho menor al obtenido con otros métodos propuestos en la literatura. Además debido a la versatilidad de la técnica propuesta, ésta claramente puede sustituir a cualquiera de las demás técnicas de linealización mencionadas en esta tesis.
2. Con el método propuesto se obtienen expresiones cerradas para el cálculo de los coeficientes linealizadores.
3. Los parámetros de la función de densidad de probabilidad conjunta que modela la respuesta pueden aproximarse de manera simple sin tener que recurrir a la simulación de Monte Carlo.
4. El criterio propuesto es versátil y sigue preservando la eficiencia computacional del método gaussiano convencional. En una computadora Pentium III - 1.0 GHz, el análisis mediante simulación de Monte Carlo de un sistema de un grado de libertad ante 50,000 acelerogramas sintéticos (cantidad necesaria para definir de manera adecuada las funciones de densidad de probabilidad de la respuesta estructural) tiene una duración del orden de 6 horas; sin embargo, usando la técnica de linealización equivalente propuesta, el cálculo de la estadística del mismo sistema se logra en menos de un minuto.

6.2 RECOMENDACIONES Y ESTUDIOS FUTUROS

Con el fin de aplicar el método a casos más generales, se recomienda realizar una calibración más detallada. Se sugiere:

- Calibrar el método para sistemas con otro tipo de transición entre el comportamiento elástico y el inelástico. El modelo de histéresis (ecuación 3.37) de los sistemas analizados en este trabajo tiene una transición suave entre el comportamiento elástico y el inelástico, comportamiento logrado al asignar el valor de uno al exponente n . Se sugiere realizar una calibración para otros valores del exponente n .
- Calibración de la técnica con diferentes formas del ciclo de histéresis, por ejemplo, las que consideran degradación de rigidez y resistencia, asimetría en fluencia, ciclos histeréticos con adelgazamiento ("pinching"), sistemas suaves o con endurecimiento, etc. En el capítulo 5 se analizaron sistemas suaves, es decir sistemas en los que los parámetros β y γ cumplen con $\beta + \gamma > 0$.
- Para analizar directamente modelos de múltiples grados de libertad es recomendable efectuar una calibración del método con el fin de determinar su precisión en el cálculo de la respuesta de ese tipo de sistemas.
- Se recomienda calibrar la técnica para otros tipos de excitación.

Un método aproximado de vibración aleatoria como lo es la técnica de linealización equivalente propuesta debe ser preciso, motivar credibilidad y ser eficiente, es decir los esfuerzos computacionales requeridos para obtener la estadística de la respuesta mediante la linealización equivalente deben ser aceptablemente bajos; por ejemplo deben ser considerablemente menores que los requeridos en los procesos de simulación de Monte Carlo. Como ya se mencionó la técnica propuesta es muy eficiente y además inspira credibilidad. Como se ha descrito con anterioridad, la técnica propuesta proporciona resultados aceptables en la mayoría de los sistemas estudiados en la calibración efectuada en el capítulo 5, sin embargo existen algunos casos en los que los errores relativos siguen siendo altos. Por lo tanto la precisión, es la característica que más

influiría en la decisión para aplicar o no el método propuesto. La precisión puede mejorarse de dos maneras:

1. Mediante factores correctivos para la respuesta calculada con el método propuesto con sus limitaciones actuales.
2. Afinando los modelos que se usan en el planteamiento del método, por ejemplo el modelo de la excitación, el de histéresis, etc.

6.2.1. Factores correctivos

Pueden emplearse factores correctivos con el fin de usar tal cual el método propuesto. Enseguida se describen dos alternativas:

En la primera, los factores mencionados pueden obtenerse a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 5 y además de una calibración más detallada en la que se involucren más parámetros que afecten la precisión del método. De esta manera podría considerarse que el error relativo es la suma de distintos tipos de errores, por ejemplo:

1. El error causado por el modelo usado para representar la densidad de probabilidad conjunta de la respuesta.
2. El ocasionado por la acumulación de deformación plástica permanente que exhiben sistemas con baja relación de postfluencia ("drift").
3. El originado por el modelo de la excitación.
4. El producido por el grado de no-linealidad de la respuesta.
5. El provocado por la demanda de ductilidad del sistema.
6. El ocasionado por la forma del ciclo de histéresis (degradación de rigidez y resistencia, sistemas suaves y con endurecimiento, etc.)

Entonces la respuesta "exacta" podría calcularse multiplicando el resultado obtenido mediante la linealización equivalente por un factor correctivo que sería función de las fuentes de error mencionadas con anterioridad. Por ejemplo, utilizando las fuentes de error α_2 , T y η consideradas

en la calibración hecha en el capítulo 5, la respuesta “exacta” (y) se calcularía con la siguiente expresión

$$y = \lambda(y, \alpha_2, T, \mu) \hat{y} \quad (6.1)$$

donde \hat{y} es la respuesta calculada con el método de linealización propuesto y λ es el factor correctivo que valdría

$$\lambda(y, \alpha_2, T, \mu) = 1 + \varepsilon_1(y, \mu) + \varepsilon_2(y, T) + \varepsilon_3(y, \alpha_2) = 1 + \varepsilon(y, \mu, T, \alpha_2) \quad (6.2)$$

En las expresiones anteriores, el factor correctivo se hace depender de la magnitud de la respuesta con el fin de considerar la evolución que muestra el error relativo en la mayoría de los sistemas analizados. Es necesario efectuar un ajuste por mínimos cuadrados para determinar un modelo matemático que defina el comportamiento de los errores relativos y por lo tanto del factor correctivo.

La segunda técnica se basa en la introducción de una función de peso $w(y)$ dentro de la función objetivo (ecuación 3.28) de la linealización equivalente. Al igual que en la primer técnica, se trata de determinar la función de peso $w(y)$ a partir de resultados de simulación de Monte Carlo para un conjunto dado de propiedades del sistema. En este caso la linealización equivalente podría proporcionar resultados más precisos sin tener que modificarlos *a posteriori*.

6.2.2. Refinamiento del método

En vez de usar factores correctivos como manera empírica para mejorar la precisión de la linealización, pueden llevarse a cabo un refinamiento del método. A partir de las fuentes de error detectadas en esta tesis se recomienda realizar los siguientes estudios:

- Utilizar otro modelo para el proceso de excitación. La ecuación (3.9) puede simplificarse aún más ya que sus dos últimos términos pueden evaluarse usando la solución general de la ecuación (3.3):

$$Z(t) = \text{Exp}[At]Z(0) + \int_0^t \text{Exp}[A(t-\tau)]F(\tau)d\tau \quad (6.3)$$

Considerando además que las condiciones iniciales $Z(0)$ son deterministas o bien que no tienen correlación con el proceso aleatorio de excitación, se obtiene:

$$E[ZF^T] = \int_0^t \text{Exp}[A(t-\tau)]\Sigma_F(t,\tau)d\tau \quad ; \quad E[FZ^T] = \int_0^t \text{Exp}[A(t-\tau)]\Sigma_F^T(t,\tau)d\tau \quad (6.4)$$

donde Σ_F es la matriz de covarianza de la excitación. Sustituyendo las ecuaciones (6.4) en la ecuación (3.9) se obtiene

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = A\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T + \int_0^t \text{Exp}[A(t-\tau)]\{\Sigma_F(t-\tau) + \Sigma_F^T(t-\tau)\}d\tau \quad (6.5)$$

Flores (2002) propone utilizar el método de simulación sísmica de Ordaz *et al* (1995) que consiste en construir un sismo de determinada magnitud mediante el método de la función de Green empírica. A diferencia de la técnica utilizada en esta tesis en la que el proceso de excitación se modela como un ruido blanco filtrado y modulado, Flores (2002) propone calcular el último término de la ecuación (6.5) utilizando la función de correlación del proceso de excitación generado por la función de Green empírica. Puesto que en el método de Flores (2002) no se utiliza ningún tipo de filtro quizás la incorporación de este método en la técnica propuesta en la presente tesis ayude a mejorar la precisión.

- Considerar que la media de la respuesta es diferente a cero. Aún cuando la excitación sea un proceso aleatorio con media cero, se ha visto que la respuesta de un sistema histerético puede tener media diferente a cero. Esto lleva a la necesidad de realizar un planteamiento general de las ecuaciones mostradas en los capítulos 3 y 4 en el que se considere que la media de cualquier variable de respuesta es diferente a cero. Dentro de este planteamiento es deseable considerar un modelo de histéresis asimétrico que permita obtener expresiones cerradas para los coeficientes linealizadores. En Hernández y Silva (2001), Hernández y Silva (2002), y Hernández (2002) se realiza el planteamiento general para determinar el vector de respuesta media y la matriz de covarianza de un sistema histerético con asimetría en fluencia y se

realizan modificaciones al modelo de Bouc-Wen para establecer un modelo de histéresis asimétrico. Además muestra el cálculo de los coeficientes linealizadores adoptando como hipótesis el teorema de Kazakov (1965). Hernández (2002) marca la pauta para establecer un método de linealización equivalente no gaussiana para sistemas con asimetría en fluencia.

6.2.3 Aspectos a desarrollar para promover el uso del método propuesto en aplicaciones prácticas.

Para que la técnica planteada resulte atractiva para los investigadores e ingenieros de la práctica deben cumplirse primero los siguientes dos objetivos:

- Con el fin de lograr diseños más racionales deben desarrollarse códigos de diseño basados en probabilidad.
- Promover en la práctica de la ingeniería el uso de herramientas más precisas y análisis más sofisticados y que el ingeniero de la práctica esté por lo menos familiarizado con los conceptos relacionados.

Para simplificar el uso del método, éste debe programarse en computadora para que el usuario proporcione información muy básica, por ejemplo uno o varios acelerogramas representativos del proceso de excitación y las propiedades geométricas y mecánicas de la estructura. Con estos datos el programa proporcionará valores probables de la respuesta máxima, probabilidades de falla y cualquier otra respuesta de interés del sistema estructural.

Para que el uso del método pueda extenderse a diversos tipos de análisis, se recomienda:

- Generar diferentes leyes constitutivas para diferentes tipos de elementos estructurales. Incluir la interacción con otros elementos estructurales tales como los muros, diafragmas de piso, dispositivos de control sísmico pasivo como aisladores de base, disipadores de energía tipo fricción, de fluencia, viscosos, etc.
- Establecer la metodología para realizar análisis tridimensionales de estructuras simétricas y asimétricas en planta, sujetas a movimientos multidireccionales del terreno. Después de

calibrar la técnica en el estudio de sistemas masa-amortiguador-resorte donde existe un grado de libertad por piso, podría después extenderse al estudio de edificios donde el comportamiento no lineal se concentre en articulaciones plásticas (Baber y Wen, 1982, Casciati y Faravelli, 1988) y luego al análisis con elemento finito (Emam, 2000).

- Tomar en cuenta la incertidumbre en las propiedades geométricas y mecánicas del sistema estructural.
- Consideración de fallas provocadas por fatiga.

6.2.4 Modelos matemáticos para la estimación de parámetros estadísticos de las respuestas máximas para fines de diseño sísmico basado en confiabilidad

En los métodos convencionales de diseño sísmico se determinan resistencias de miembros estructurales a partir de análisis de respuesta lineal para espectros reducidos por comportamiento no lineal. Recientemente se han desarrollado criterios de diseño basados en niveles de desempeño donde es necesario estimar deformaciones de sistemas no lineales de múltiples grados de libertad. Para aplicar estos nuevos criterios de diseño es conveniente contar con métodos eficientes y confiables para estimar amplitudes máximas de las respuestas sísmicas de sistemas estructurales complejos de comportamiento no lineal.

Uno de los indicadores de desempeño que se utiliza para el diseño sísmico de edificios, es el valor esperado de la distorsión lateral máxima de entrepiso. El método comúnmente usado para estimar esta cantidad es la simulación de Monte Carlo usando análisis dinámicos no lineales paso a paso. Como el esfuerzo de cálculo para aplicar este método es excesivo, se ha optado por determinar las distorsiones laterales máximas de entrepiso a través de la distorsión lateral de un sistema no lineal equivalente de un grado de libertad. Sin embargo, las respuestas obtenidas a través del sistema equivalente son solamente valores aproximados ya que existen algunas hipótesis que no siempre se satisfacen, por ejemplo el edificio debe ser regular en rigidez y resistencia, las distorsiones de entrepiso deben ser proporcionales a la distorsión global del sistema de un grado de libertad, dominar en la respuesta el primer modo de vibración, etc.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Otra alternativa es la de usar un método preciso y más eficiente, en vez de simplificar la estructura. El método propuesto es una opción adecuada. Enseguida se plantean muy someramente los modelos matemáticos para estimar la confiabilidad del sistema basados en el indicador mencionado en el párrafo anterior. Se entiende por *estimar la confiabilidad* como evaluar la probabilidad de un sistema estructural de no exceder un nivel de respuesta considerado como crítico para su desempeño. A partir del método propuesto se obtiene información de primero y segundo orden (media y covarianza de la respuesta), por lo que la confiabilidad para sistemas no lineales con respuesta no gaussiana puede estimarse solamente en forma aproximada.

En la teoría de vibración aleatoria se han propuesto muchos métodos para estimar la confiabilidad (ver por ejemplo Soong y Grigoriu, 1993). El método que se presenta en lo que sigue es el desarrollado por Yang y Liu (1981) y este constituye una base sólida para estimar el desempeño y la confiabilidad de sistemas estructurales lineales y no lineales sujetos a cargas aleatorias no estacionarias.

Sean y_m el valor máximo del índice de desempeño y considerado como una variable aleatoria. Yang y Liu proponen la siguiente función de distribución de probabilidad tipo Gumbel para la ocurrencia de un máximo entre los instantes t_1 y t_2 :

$$F(y_m, t_1, t_2) = \exp \left[- \exp \left(- K^{\theta-1} \left(\frac{y_m}{\varepsilon} - K \right) \right) \right] \quad (6.6)$$

donde los parámetros θ y ε dependen de los instantes t_1 y t_2 y de los primeros dos momentos de los máximos que ocurren en este intervalo, dados por:

$$\begin{aligned} \mu_p(t_1, t_2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_Y(t) dt \\ \sigma_p^2(t_1, t_2) &= \frac{\sqrt{2}}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_Y^2(t) dt \end{aligned} \quad (6.7)$$

θ y ε pueden obtenerse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\frac{\sigma_P(t_1, t_2)}{\mu_P(t_1, t_2)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) \right]^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)} \quad (6.8)$$

$$\mu_P(t_1, t_2) = \varepsilon \theta^{1/\theta} \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)$$

donde $\Gamma()$ es la función Gamma. El valor de K se expresa en términos de la tasa media con la que el proceso cruza el eje del tiempo con pendiente positiva $\lambda^\uparrow(t)$:

$$K = \left[\theta \text{Ln} \int_{t_1}^{t_2} 2\lambda^\uparrow(t) dt \right]^{1/\theta} \quad (6.9)$$

La tasa media de cruces con pendiente positiva de procesos gaussianos esta dada por la siguiente expresión:

$$\lambda^\uparrow(t) = \frac{\sigma_Y(t) \sqrt{1 - \rho_{YY}^2(t)}}{2 \pi \sigma_Y(t)} \quad (6.10)$$

Puesto que la distribución del máximo es tipo Gumbel, la media y desviación estándar del máximo Y_m son:

$$\begin{aligned} \mu_{Y_m}(t) &= (K + 0.577 K^{1-\theta}) \varepsilon \\ \sigma_{Y_m}(t) &= \frac{\pi \varepsilon}{\sqrt{6} K^{1-\theta}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

En las expresiones (6.7) y (6.10) $\sigma_Y(t)$, $\sigma_{\dot{Y}}(t)$ y $\rho_{Y\dot{Y}}(t)$ son las historias de la desviación estándar del índice de desempeño Y , de su derivada respecto al tiempo \dot{Y} y del coeficiente de correlación entre Y y \dot{Y} . Estas cantidades se pueden calcular a partir de los resultados que proporciona el método de linealización equivalente no gaussiana propuesto.

Como se mencionó al principio el uso de las expresiones anteriores, las cuales están basadas en información probabilista de segundo orden, permite calcular de forma aproximada la confiabilidad de sistemas no lineales cuya respuesta es no gaussiana.

R E F E R E N C I A S

- Amin, M. y Ang, A. (1966) *A nonstationary stochastic model for strong motion earthquake* Structural Research Series, 306, University of Illinois, Department of Civil Engineering.
- Atalik, T. S. y Utku, S., (1976), "Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Non-Linear Systems." *Earthquake Engr. and Struct. Dynam.*, Vol. 4, pp. 411-420.
- Baber, T. T. y Wen, Y. K. (1981), "Random Vibration of Hysteretic, Degrading Systems." *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 107, no. EM6, pp.1069-1087.
- Baber, T. T. y Wen, Y. K. (1982), "Stochastic Response of Multistorey Yielding Frames." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, no. 3, pp. 403-416.
- Bard, Y. (1974), *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York and London.
- Beaman, J. J. (1980), "Accuracy of Statistical Linearization" en *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, editado por P. J. Holmes, SIAM, Philadelphia, PA, 195-207.
- Beck, J. L. y Papadimitrou (1993) "Moving resonance in nonlinear response to fully nonstationary stochastic ground motion" *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 8, pp. 157-167.
- Bouc, R. (1967): "Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis." *Proc. 4th Int. Conf. Nonlinear Oscillations*, Praga, Rep. Checa.
- Branstetter, L. J., Jeong, G. D., Yao, J. T., Wen, Y. K. y Lin, Y. K. (1988), "Mathematical Modelling of Structural Behaviour During Earthquakes." *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, no. 3, pp. 130-145.
- Carli, F. (1992) "Nonstationary models of earthquake accelerograms" *Earthquake Engineering Proceedings of the Tenth World Conference on Madrid 1992*, Vol. 2, pp. 829-834.
- Carli, F. (1995) "Smooth frequency modulating function for strong ground motion" en *Proceedings of the Tenth European Conference on Earthquake Engineering, Vienna 1994*, Vol. 1, pp. 155-160.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1985), "Methods of Non-Linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility." *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 90, pp. 341-356.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1988) "Stochastic Equivalent Linearization for 3-D Frames" *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 114, pp. 1760-1771.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1991). *Fragility Analysis of Complex Structural Systems*. Research Studies Press Ltd., Taunton.
- Clough, R. W. y Penzien, J. (1975), *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York.

- Collins Y. K., Wen Y. K., y Foutch D. A. (1995) *Investigation of Alternative Seismic Design Procedures for Standard Buildings*. Civil Engineering Studies, Structural Research Series, no. 600, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana Champaign Urbana, Illinois, mayo.
- Eliopoulos, D. y Wen, Y. K. (1991) *Method of Seismic Reliability Evaluation for Moment Resisting Frames* Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 562, University of Illinois, Urbana, IL.
- Emam, H. H., Pradlwarter, H. J. y Schuëller, G. I. (2000), "A Computational Procedure for the Implementation of Equivalent Linearization in Finite Element Analysis" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, 1-17.
- Fan, F. y Ahmadi, G. (1988), *Loss of Accuracy and Nonuniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization and Cumulant-Neglected Methods*. Informe N° MIE-168, Department of Mechanical and Industrial Engineering, Clarkson University, Potsdam, N.Y.
- Fan, F. y Ahmadi, G. (1990) "Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquakes" *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 5, pp. 171-181.
- Faravelli, L. (1988) "Source-to-site seismic models in structural dynamics" en *Proceedings of the 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, 1988, 1021-1032.
- Flores E. (2002). Comunicación Personal.
- Grigoriu, M. (1991) "A Consistent Closure Method for Non-Linear Random Vibration" *International Journal Non-Linear Mechanics*, Vol. 26, No 6, pp.857-866.
- Grigoriu, M., Ruiz, S. E. y Rosenblueth, E. (1988), "The Mexico Earthquake of September 19, 1985, Nonstationary Models of Seismic Ground Acceleration", *Earthquake Spectra*, Vol. 4, pp 551-568.
- Hernández, D. y Silva, F. L. (2001) "Coeficientes Linealizadores para Obtener la Respuesta Probabilista de Sistemas con Asimetría en Fluencia" *Memorias del XIII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica* celebrado de octubre 31 al 3 de Noviembre del 2001, en la Cd. de Guadalajara, Jalisco.
- Hernández, D. y Silva, F. L. (2002) "Análisis de la Respuesta No Lineal de Edificios Inclinados Utilizando Linealización Equivalente Estocástica" *Memorias de II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas* celebrado en la ciudad de Guanajuato, Gto. México del 17 al 19 de enero del 2002.
- Hernández, D. (2002) *Criterio de Linealización Equivalente Estocástica Aplicado a Sistemas con Asimetría en Fluencia*. Tesis presentada en la DEPMI, UNAM como requisito para obtener el grado de Maestro en Ingeniería.
- Hurtado, J. E. (1998). *Stochastic Dynamics of Hysteretic Structures*. Monograph Series in Earthquake Engineering, Edited by A.H. Barbat, International Center for Numerical Methods in Engineering. Barcelona, España.

| |
|--------------------------------------|
| TESIS CON FALLA DE ORIGEN |
|--------------------------------------|

- Iwan, W. D. y Pappas, L. G. (1988). "The stochastic response of strongly yielding systems", *Probabilistic Engrg. Mech.*, Vol.3, no.2, 75-82.
- Johnson, N. L., Kotz, S. y Balakrishnan, N. (1994) *Continuous Univariate Distributions*, 2ª Edición. John Wiley and Sons, New York.
- Kameda, H. y Nojima, N. (1988) "Simulation of Risk-Consistent Earthquake Motion" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 1007-1019.
- Kanai, K. (1957), *Semi-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground*, Univ. Tokyo Bull. Earthquake Res. Inst., Vol. 35, pp. 309-325.
- Kazakov, I. E. (1965), "Generalization of the Method of Statistical Linearization to Multidimensional Systems." *Auto. Remote Control*, Vol. 26, pp. 1201-1206.
- Kimura, K., Yasumuro, H. y Sakata, M. (1994), "NonGaussian Equivalent Linearization for Non-Stationary Random Vibration of Hysteretic System." *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.9, 15-22.
- Lin, Y. K. (1967), *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill.
- Lin, Y. K. y Cai, G-Q. (1995), *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, N.Y.
- Lin, Y. K., Kozin, F., Wen, Y.K., Casciatti, F., Schüeller, G.I., Der Kiureghian, A., Ditlevsen, O. y Vanmarcke, E.H. (1986), "Methods of Stochastic Structural Dynamics", *Structural Safety*, Vol. 3, pp. 167-194.
- Liu, P. y A. Der Kiureghian (1986) "Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances" *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 1, pp. 105-112.
- Ordaz, M., Arboleda, J., y Singh, S. K. (1995). "A scheme of Random Summations of an Empirical Green's Function to Estimate Ground Motions from Future Large Earthquakes" *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85, Vol. 6, pp. 1635-1647.
- Park, Y. J. (1992), "Equivalent Linearization for Seismic Responses. I: Formulation and Error Analysis." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, no. 11, pp. 2207-2226.
- Parzen, E.(1962) *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco.
- Pradlwarter, H. J. y Schuëller, G. I. (1991), "The Method of Statistical Equivalent Linearization" en: *Structural Dynamics. Recent Advances*, editado por G.I.Schuëller, Springer-Verlag, Berlin.
- Priestley, M. B. (1981) *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London
- Roberts, J. B. (1978). The Energy Envelope of a Randomly Excited Non-Linear Oscillator, *J. Sound Vib.*, Vol. 60, pp. 177-185.

- Roberts, J. B. (1981), "Response of Nonlinear Mechanical System to Random Excitation. Part 2: Equivalent Linearization and other Methods." *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, no.5, pp. 15-29.
- Roberts, J. B. y Spanos, P. D. (1990). *Random Vibration and Statistical Linearization*. John Wiley & Sons.
- Schuëller, G. I., Pandey, M. D. y Pradlwarter, H. J. (1994), "Equivalent Linearization (EQL) in Engineering Practice for Aseismic Design." *Probabilistic Eng. Mechanics*, Vol. 9, pp. 95-102.
- Schuëller, G. I., Pradlwarter, H. J. y Bucher, C. G. (1991), "Efficient Computational Procedures for Reliability Estimates of MDOF-Systems." *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 26, no. 6, pp.961-974.
- Shinozuka, M. (1987) "Stochastic fields and their digital simulation" in *Stochastic Methods in Structural Dynamics*, editado por G.I. Schuëller y M. Shinozuka. Martinus Nijhoff Publishers.
- Shinozuka, M. y Sato, Y. (1967) "Simulation of nonstationary random processes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 93, pp. 11-40.
- Silva F. L. (1998) *Calibración del Método de Linealización Equivalente Estocástica para Sistemas Histeréticos Simples*. Tesis presentada en la DEPFI, UNAM como requisito para obtener el grado de Maestro en Ingeniería.
- Silva, F. L. (2002) "Linealización Equivalente No Gaussiana para el Análisis Sísmico de Sistemas Histeréticos" *Memorias de II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Guanajuato, Gto. México del 17 al 19 de enero del 2002.
- Silva, F. L. y Ruiz, S. E. (2000) "Calibration of the Linearization Gaussian Approach Applied to Simple Hysteretic Systems Subjected to Narrow Band Seismic Motions", *Structural Safety*, Vol. 22, pp. 211-231.
- Silva, F. L., Rivera, J. L., Ruiz, S. E. y Hurtado, J. E. (2001) "Influence of the Mathematical Modeling of the Seismic Input on the Non-Gaussian Response of Non-Linear Systems" *Proceedings of ICOSSAR 2001* (International Conference on Structural Safety and Reliability) Newport Beach, California, USA, del 17 al 22 de junio del 2001.
- Soong, T. T. y Grigoriu, M. (1993), *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. PTR Prentice Hall.
- Spanos, P. D. (1981), "Stochastic Linearization in Structural Dynamics." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 34, no. 1, pp. 1-8.
- Spanos, P. D., Tein, W. Y. y Ghanem R. (1992) "Spectral Estimation of Bivariate Non-Stationary Processes" *Earthquake Engineering. Proceedings of the Tenth World Conference*, Madrid 1992, Vol. 2, pp. 839-844.

- Tajimi, H. (1960), "A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake.", *Proc. 2nd. World Conf. Earthquake Eng.* Tokio y Kyoto, Vol. II, pp. 781-798.
- To, W. S. (1984), *The Response of Nonlinear Structures to Random Excitation*. Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, D.C., Vol. 16, no. 4, pp. 13-33.
- Trifunac, M. D. y Lee, V. W. (1989) "Empirical Models for Scaling Fourier Amplitude Spectra of Strong Earthquake Accelerations in Terms of Magnitud, Source to Station Distance, Site Intensity and Recording Site Conditions" *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 8, No. 3.
- Vanmarcke, E. (1983) *Random Fields*. Cambridge, Massachusetts, Londres, Inglaterra.
- Vanmarcke, E. H. y Lai, S. P. (1980), "Strong-Motion Duration and RMS Amplitude of Earthquake Records." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 70, no. 4, pp. 1293-1307.
- Wen, Y. K. (1980), "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation" *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 150-154.
- Wen, Y. K. y Yeh, C. H. (1989), "Biaxial and Torsional Response of Inelastic Structures under Random Excitation". *Structural Safety*, Vol. 6, 137-152.
- Yang, J. N. y Liu, S. C. (1981) "Distribution of Maximum and Statistical Response Spectra" *Journal of Engineering Mechanics División*, Vol. 107, pp. 1089-1102.
- Yeh, C. H. y Wen, Y. K. (1989) "Modeling of Nonstationary Ground Motion and Analysis of Inelastic Structural Response" *J. Structural Safety*, Vol. 8, 281-298.

APÉNDICE



UN MODELO PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA HISTERÉTICO

Sean X , V y Z tres variables aleatorias con función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta $f_{xvz}(x,v,z)$ y densidades marginales $f_x(x)$, $f_v(v)$ y $f_z(z)$. Sean los eventos $A = \{X=x\}$, $B = \{V=v\}$ y $C = \{Z=z\}$, entonces:

$$P(A \cap B \cap C) = P(X = x, V = v, Z = z) = f_{xvz}(x, v, z) \quad (\text{A.1})$$

Además,

$$P(C) = P(Z = z) = f_z(z) \quad (\text{A.2})$$

Así la probabilidad condicional del evento $A \cap B$ dado que ocurre el evento C es:

$$P(A \cap B | C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{f_{XVZ}(x, v, z)}{f_z(z)} \quad (\text{A.3})$$

entonces la fdp condicional de $X=x, V=v$ dado que $Z=z$ es:

$$h(x, v | z) = \frac{f_{XVZ}(x, v, z)}{f_z(z)} \quad (\text{A.4})$$

Luego:

$$f_{XVZ}(x, v, z) = h(x, v | z) f_z(z) \quad (\text{A.5})$$

Ahora consideremos que son válidas las siguientes tres hipótesis sobre la fdp condicional de $X=x, V=v$ dado que $Z=z$:

1. Es conjuntamente normal para cada valor real $Z=z$
2. Sus medias condicionales $E[x|z]$ y $E[v|z]$ son funciones lineales de z
3. Su varianzas condicionales $\sigma_{x|z}^2$ y $\sigma_{v|z}^2$ son constantes, es decir, no dependen de ningún valor de z .

Además considérese que $E[x] = E[v] = E[z] = 0$. La hipótesis 2 implica que:

$$E[x|z] = \rho_{xz} \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \quad (\text{A.6})$$

$$E[v|z] = \rho_{vz} \frac{\sigma_v}{\sigma_z} \quad (\text{A.7})$$

La hipótesis 3 implica que:

$$\sigma_{x|z}^2 = \sigma_x^2(1 - \rho_{xz}^2) \tag{A.8}$$

$$\sigma_{v|z}^2 = \sigma_v^2(1 - \rho_{vz}^2) \tag{A.9}$$

Además la covarianza condicional de x y v dado z es:

$$C_{x,v|z} = \sigma_x \sigma_v (\rho_{xv} - \rho_{xz} \rho_{vz}) \tag{A.10}$$

Sea

$$\rho_{x,v|z} = \frac{C_{x,v|z}}{\sigma_{x|z} \sigma_{v|z}} = \frac{(\rho_{xv} - \rho_{xz} \rho_{vz})}{(1 - \rho_{xz}^2)^{1/2} (1 - \rho_{vz}^2)^{1/2}} \tag{A.11}$$

De acuerdo a la hipótesis 1, la fdp condicional de x y v dado z es:

$$h(x, v|z) = \frac{1}{2\pi \sigma_{x|z} \sigma_{v|z} \sqrt{1 - \rho_{x,v|z}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1 - \rho_{x,v|z}^2)} \left(\frac{(x - E[x|z])^2}{\sigma_{x|z}^2} - 2\rho_{x,v|z} \frac{(x - E[x|z])(v - E[v|z])}{\sigma_{x|z} \sigma_{v|z}} + \frac{(v - E[v|z])^2}{\sigma_{v|z}^2} \right) \right] \tag{A.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.6) a (A.11) en la (A.12) y simplificando se obtiene:

$$h(x, v|z) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_v K^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2K} \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} \left\{ \rho_{xz}^2 + \rho_{vz}^2 - 2\rho_{xv} \rho_{xz} \rho_{vz} \right\} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} \left\{ 1 - \rho_{vz}^2 \right\} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \left\{ 1 - \rho_{xz}^2 \right\} - 2 \frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} \left\{ \rho_{xz} - \rho_{xv} \rho_{vz} \right\} - 2 \frac{vz}{\sigma_v \sigma_z} \left\{ \rho_{vz} - \rho_{xv} \rho_{xz} \right\} - 2 \frac{xv}{\sigma_x \sigma_v} \left\{ \rho_{xv} - \rho_{xz} \rho_{vz} \right\} \right) \right] \tag{A.13}$$

donde $\kappa = 1 - \rho_{xz}^2 - \rho_{vz}^2 - \rho_{xv}^2 + 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz}$. Ahora supongamos que la variable z tiene la siguiente fdp (ver ecuación 4.7)

$$f_z(z) = \frac{(1-2p)}{\sqrt{2\pi}\sigma_{za}} \text{Exp}\left(-\frac{z^2}{2\sigma_{za}^2}\right) + \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_{zb}} \text{Exp}\left(-\frac{(z-z_z)^2}{2\sigma_{zb}^2}\right) + \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_{zb}} \text{Exp}\left(-\frac{(z+z_z)^2}{2\sigma_{zb}^2}\right) \quad (\text{A.14})$$

donde p es un factor de peso. Sustituyendo las ecuaciones (A.13) y (A.14) en la ecuación (A.5) y simplificando se obtiene:

$$f_{xvz}(x, v, z) =$$

$$\frac{1-2p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_v \sigma_{za} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{z^2}{\sigma_{za}^2} (1 - \rho_{xv}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{vz}^2 - 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz}) \right) \right. \right. \\ & + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1 - \rho_{vz}^2) + \frac{v^2}{\sigma_v^2} (1 - \rho_{xz}^2) - 2 \frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xv}\rho_{vz}) \\ & \left. \left. - 2 \frac{vz}{\sigma_v \sigma_z} (\rho_{vz} - \rho_{xv}\rho_{xz}) - 2 \frac{xv}{\sigma_v \sigma_x} (\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) \right] \right] +$$

$$\frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_v \sigma_{zb} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} (1 - \rho_{xv}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{vz}^2 - 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz}) \right) \right. \right. \\ & + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1 - \rho_{vz}^2) + \frac{v^2}{\sigma_v^2} (1 - \rho_{xz}^2) - 2 \frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xv}\rho_{vz}) \\ & \left. \left. - 2 \frac{vz}{\sigma_v \sigma_z} (\rho_{vz} - \rho_{xv}\rho_{xz}) - 2 \frac{xv}{\sigma_v \sigma_x} (\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) \right] \right] +$$

$$\frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_v \sigma_{zb} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} (1 - \rho_{xv}^2) + \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{vz}^2 - 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz}) \right) \right. \right. \\ & + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1 - \rho_{vz}^2) + \frac{v^2}{\sigma_v^2} (1 - \rho_{xz}^2) - 2 \frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{xv}\rho_{vz}) \\ & \left. \left. - 2 \frac{vz}{\sigma_v \sigma_z} (\rho_{vz} - \rho_{xv}\rho_{xz}) - 2 \frac{xv}{\sigma_v \sigma_x} (\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) \right] \right] \quad (\text{A.15})$$

La ecuación (A.15) resulta un modelo adecuado para la fdp conjunta de la respuesta de un sistema histerético. Permite además calcular de forma cerrada los coeficientes linealizadores del método de linealización equivalente estocástica. Para realizar dicho cálculo es necesario determinar las densidades de probabilidad conjunta entre un par de variables, así como las densidades de probabilidad marginal.

A partir de la ecuación (A.15) se obtienen las siguientes densidades de probabilidad:

*Función de densidad de probabilidad conjunta de las variables V y Z:

$$\begin{aligned}
 f_{vz}(v, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xvz}(x, v, z) dx = \\
 &\frac{1-2p}{2\pi\sigma_v\sigma_{za}\sqrt{1-\rho_{vz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{vz}^2)} \left(\frac{v^2}{\sigma_v^2} - 2\rho_{vz} \frac{vz}{\sigma_v\sigma_z} + \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} + \rho_{vz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) \right) \right] + \\
 &\frac{p}{2\pi\sigma_v\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{vz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{vz}^2)} \left(\frac{v^2}{\sigma_v^2} - 2\rho_{vz} \frac{vz}{\sigma_v\sigma_z} + \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{vz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right] + \\
 &\frac{p}{2\pi\sigma_v\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{vz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{vz}^2)} \left(\frac{v^2}{\sigma_v^2} - 2\rho_{vz} \frac{vz}{\sigma_v\sigma_z} + \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{vz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

*Función de densidad de probabilidad conjunta de las variables X y Z:

$$\begin{aligned}
 f_{xz}(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xvz}(x, v, z) dv = \\
 &\frac{1-2p}{2\pi\sigma_x\sigma_{za}\sqrt{1-\rho_{xz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xz}^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xz} \frac{xz}{\sigma_x\sigma_z} + \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} + \rho_{xz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) \right) \right] + \\
 &\frac{p}{2\pi\sigma_x\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{xz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xz}^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xz} \frac{xz}{\sigma_x\sigma_z} + \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{xz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right] + \\
 &\frac{p}{2\pi\sigma_x\sigma_{zb}\sqrt{1-\rho_{xz}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xz}^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xz} \frac{xz}{\sigma_x\sigma_z} + \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} + \rho_{xz}^2 \left(\frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{zb}^2} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

*Función de densidad de probabilidad conjunta de las variables X y V:

$$\begin{aligned}
 f_{XV}(x, v) = & \int_{-\infty}^{\infty} f_{XVZ}(x, v, z) dz = \\
 & \frac{(1-2\rho)\sigma_z}{2\pi\sigma_x\sigma_v\sqrt{\kappa_a}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa_a} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{vz}^2) + \sigma_{za}^2\rho_{vz}^2 \right\} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{xz}^2) + \sigma_{za}^2\rho_{xz}^2 \right\} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{2xv}{\sigma_x\sigma_v} \left\{ \sigma_z^2(\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) + \rho_{vz}\rho_{xz}\sigma_{za}^2 \right\} \right] + \\
 & \frac{\rho\sigma_z}{2\pi\sigma_x\sigma_v\sqrt{\kappa_b}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa_b} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{vz}^2) + \sigma_{zb}^2\rho_{vz}^2 \right\} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{xz}^2) + \sigma_{zb}^2\rho_{xz}^2 \right\} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{2xv}{\sigma_x\sigma_v} \left\{ \sigma_z^2(\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) + \rho_{vz}\rho_{xz}\sigma_{zb}^2 \right\} - \frac{2xz\sigma_z}{\sigma_x} (\rho_{xz} - \rho_{vz}\rho_{xv}) \right. \\
 & \left. - \frac{2vz\sigma_z}{\sigma_v} (\rho_{vz} - \rho_{xv}\rho_{xz}) + z^2(\rho_{vz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{vz}\rho_{xv}\rho_{xz}) \right] + \\
 & \frac{\rho\sigma_z}{2\pi\sigma_x\sigma_v\sqrt{\kappa_b}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2\kappa_b} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{vz}^2) + \sigma_{zb}^2\rho_{vz}^2 \right\} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} \left\{ \sigma_z^2(1-\rho_{xz}^2) + \sigma_{zb}^2\rho_{xz}^2 \right\} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{2xv}{\sigma_x\sigma_v} \left\{ \sigma_z^2(\rho_{xv} - \rho_{vz}\rho_{xz}) + \rho_{vz}\rho_{xz}\sigma_{zb}^2 \right\} + \frac{2xz\sigma_z}{\sigma_x} (\rho_{xz} - \rho_{vz}\rho_{xv}) \right. \\
 & \left. + \frac{2vz\sigma_z}{\sigma_v} (\rho_{vz} - \rho_{xv}\rho_{xz}) + z^2(\rho_{vz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{vz}\rho_{xv}\rho_{xz}) \right] \quad (A.18)
 \end{aligned}$$

donde

$$\kappa_a = (1-\rho_{xv}^2)\sigma_z^2 + (\rho_{vz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz})(\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2) \quad (A.19)$$

$$\kappa_b = (1-\rho_{xv}^2)\sigma_z^2 + (\rho_{vz}^2 + \rho_{xz}^2 - 2\rho_{xv}\rho_{xz}\rho_{vz})(\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) \quad (A.20)$$

*Función de densidad de probabilidad marginal de la variable X:

$$\begin{aligned}
 f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xvz}(x, v, z) dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xz}(x, z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xv}(x, v) dv = \\
 & \frac{(1-2p) \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{x \sigma_z}{2\sigma_x \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2 \right\}} \right] + \\
 & \frac{p \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2 \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2 \right\}} \left(\frac{x \sigma_z - z_z \sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_x} \right)^2 \right] + \\
 & \frac{p \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2 \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2 \right\}} \left(\frac{x \sigma_z + z_z \sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_x} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

*Función de densidad de probabilidad marginal de la variable V:

$$\begin{aligned}
 f_v(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xvz}(x, v, z) dx dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{vz}(v, z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xv}(x, v) dx = \\
 & \frac{(1-2p) \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_v \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{za}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{v \sigma_z}{2\sigma_v \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{za}^2 \right\}} \right] + \\
 & \frac{p \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_v \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{zb}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2 \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{zb}^2 \right\}} \left(\frac{v \sigma_z - z_z \sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_v} \right)^2 \right] + \\
 & \frac{p \sigma_z}{\sqrt{2\pi} \sigma_v \sqrt{\sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{zb}^2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2 \left\{ \sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{zb}^2 \right\}} \left(\frac{v \sigma_z + z_z \sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_v} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

*Función de densidad de probabilidad marginal de la variable Z:

$$\begin{aligned}
 f_z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xvz}(x, v, z) dx dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{vz}(v, z) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xz}(x, z) dx = \\
 & \frac{(1-2p)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{za}} \text{Exp} \left(-\frac{z^2}{2\sigma_{za}^2} \right) + \frac{p}{\sqrt{2\pi} \sigma_{zb}} \text{Exp} \left(-\frac{(z-z_z)^2}{2\sigma_{zb}^2} \right) + \frac{p}{\sqrt{2\pi} \sigma_{zb}} \text{Exp} \left(-\frac{(z+z_z)^2}{2\sigma_{zb}^2} \right)
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Obsérvese que la fdp de la ecuación (A.23) es idéntica a la de la ecuación (A.14).

También es necesario determinar los momentos de primero y segundo orden con el fin de simplificar los resultados que se obtienen en el proceso del cálculo de los coeficientes linealizadores.

Utilizando las fdp de las ecuaciones (A.15) a (A.23), se obtiene:

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz \\ &= (1-2p)\sigma_{za}^2 + 2p(z_z^2 + \sigma_{zb}^2) = \sigma_z^2 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= (1-2p) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} [\sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2] + 2p \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} [\sigma_z^2 (1-\rho_{xz}^2) + \rho_{xz}^2 (z_z^2 + \sigma_{zb}^2)] \end{aligned}$$

Simplificando y reordenando términos:

$$E[X^2] = \sigma_x^2 (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \rho_{xz}^2 [(1-2p)\sigma_{za}^2 + 2p(z_z^2 + \sigma_{zb}^2)]$$

Sustituyendo la ecuación (A.24) en la anterior se obtiene:

$$E[X^2] = \sigma_x^2 (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \rho_{xz}^2 [\sigma_z^2] \Rightarrow E[X^2] = \sigma_x^2 \tag{A.25}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 E[V^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_V(v) dv \\
 &= (1-2p) \frac{\sigma_v^2}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 \sigma_{za}^2 \right] + 2p \frac{\sigma_v^2}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (1-\rho_{vz}^2) + \rho_{vz}^2 (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right] \\
 &= \sigma_v^2 (1-\rho_{vz}^2) + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_z^2} \rho_{vz}^2 \left[(1-2p) \sigma_{za}^2 + 2p (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (A.24) en la anterior se obtiene:

$$E[V^2] = \sigma_v^2 (1-\rho_{vz}^2) + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_z^2} \rho_{vz}^2 \left[\sigma_z^2 \right] \quad \Rightarrow \quad E[V^2] = \sigma_v^2 \quad (\text{A.26})$$

Los momentos de segundo orden son:

$$\begin{aligned}
 E[XV] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xv f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xv f_{XV}(x, v) dx dv \\
 &= (1-2p) \frac{\sigma_x \sigma_v}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (\rho_{xv} - \rho_{vz} \rho_{xz}) + \rho_{vz} \rho_{xz} \sigma_{za}^2 \right] + \\
 &\quad 2p \frac{\sigma_x \sigma_v}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (\rho_{xv} - \rho_{vz} \rho_{xz}) + \rho_{vz} \rho_{xz} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right] \\
 &= \sigma_x \sigma_v (\rho_{xv} - \rho_{vz} \rho_{xz}) + \frac{\sigma_x \sigma_v}{\sigma_z^2} \rho_{vz} \rho_{xz} \left[(1-2p) \sigma_{za}^2 + 2p (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right].
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (A.24) en la anterior se obtiene:

$$E[XV] = \sigma_x \sigma_v (\rho_{xv} - \rho_{vz} \rho_{xz}) + \frac{\sigma_x \sigma_v}{\sigma_z^2} \rho_{vz} \rho_{xz} \left[\sigma_z^2 \right], \quad \Rightarrow \quad E[XV] = \rho_{xv} \sigma_x \sigma_v \quad (\text{A.27})$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 E[XZ] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xz f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xz f_{XZ}(x, z) dx dz \\
 &= (1-2p) \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_z} \sigma_{za}^2 + 2p \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_z} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \\
 &= \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_z} \left[(1-2p) \sigma_{za}^2 + 2p (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (A.24) en la anterior se obtiene:

$$E[XZ] = \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_z} [\sigma_z^2] \quad \Rightarrow \quad E[XZ] = \rho_{xz} \sigma_x \sigma_z \quad (\text{A.28})$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 E[VZ] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v z f_{XVZ}(x, v, z) dx dv dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v z f_{VZ}(v, z) dv dz \\
 &= (1-2p) \frac{\sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_z} \sigma_{za}^2 + 2p \frac{\sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_z} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \\
 &= \frac{\sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_z} \left[(1-2p) \sigma_{za}^2 + 2p (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (A.24) en la anterior se obtiene:

$$E[VZ] = \frac{\sigma_v \rho_{vz}}{\sigma_z} [\sigma_z^2] \quad \Rightarrow \quad E[VZ] = \rho_{vz} \sigma_v \sigma_z \quad (\text{A.29})$$

A P É N D I C E



COEFICIENTES LINEALIZADORES NO GAUSSIANOS

Los coeficientes linealizadores, involucrados en el método de la Linealización Equivalente Estocástica, de un sistema de n grados de libertad se calculan mediante la siguiente expresión:

$$E[\phi_i \dot{Q}] = E[QQ^T] \begin{bmatrix} m_{ei}^T \\ c_{ei}^T \\ k_{ei}^T \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

donde m_{ei} , c_{ei} y k_{ei} son los i -ésimos renglones de las matrices de coeficientes linealizadores M_e , C_e y K_e respectivamente, ϕ_i , $i=1, 2, \dots, n$ son funciones no lineales del vector de respuestas generales q de $n \times 1$, y $Q = [\dot{q}, \dot{q}, \dot{q}]^T$. Un punto indica derivada respecto al tiempo. Véase sección 3.3 para más detalles.

A partir de la ecuación (B.1) se obtiene la expresión para determinar los coeficientes linealizadores para el sistema de un grado de libertad estudiado en la sección 5.2:

$$H_e = \begin{bmatrix} s_e \\ c_e \\ k_e \end{bmatrix} = \{E[QQ^T]\}^{-1} E[hQ] \tag{B.2}$$

donde $E[QQ^T]$ es la matriz de covarianza del vector de respuestas $Q = [x \quad \dot{x} \quad z]^T$ y $h(\dot{x}, z)$ es la ecuación diferencial no lineal propuesta por Bouc-Wen (Wen, 1980) para modelar los ciclos de histéresis de un sistema histerético:

$$h(\dot{x}, z) = A\dot{x} - \beta |z| |\dot{x}| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x} |z|^n \tag{B.3}$$

donde \dot{x} es la velocidad y z la parte histerética del desplazamiento de la masa. A, β, γ y n son parámetros que definen el tamaño y la forma de los ciclos histeréticos (véase sección 3.4.1).

Se puede demostrar que el primer factor de la ecuación (B.2) (la inversa de la matriz de covarianza $\Sigma_Q = E[QQ^T]$) está dado por:

$$\Sigma_Q^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 \sigma_z^2 \kappa} \begin{bmatrix} (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_x^2 \sigma_z^2 & (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xx}) \sigma_x \sigma_x \sigma_z^2 & (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xz}) \sigma_x^2 \sigma_x \sigma_z \\ (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xx}) \sigma_x \sigma_x \sigma_z^2 & (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_x^2 \sigma_z^2 & (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xz}) \sigma_x \sigma_x \sigma_z \\ (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xz}) \sigma_x^2 \sigma_x \sigma_z & (\rho_{xz} \rho_{xz} - \rho_{xz}) \sigma_x \sigma_x \sigma_z & (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_x^2 \sigma_z^2 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

donde $\kappa = 1 - \rho_{xz}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{xx}^2 + 2\rho_{xz}\rho_{xz}\rho_{xz}$.

Al sustituir la ecuación (B.3) en el segundo factor de la ecuación (B.2) (la matriz $E[hQ]$) resulta:

$$E[hQ] = \begin{bmatrix} E[x h(\dot{x}, z)] \\ E[\dot{x} h(\dot{x}, z)] \\ E[z h(\dot{x}, z)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AF_1 - \beta F_2 - \gamma F_3 \\ AF_4 - \beta F_5 - \gamma F_6 \\ AF_7 - \beta F_8 - \gamma F_9 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$



donde:

$$F_1 = E[x \dot{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \dot{x} f_{x\dot{x}} dx d\dot{x} \quad (\text{B.6})$$

$$F_2 = E[x z |\dot{x}| |z|^{n-1}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x z |\dot{x}| |z|^{n-1} f_{x\dot{x}z} dx d\dot{x} dz \quad (\text{B.7})$$

$$F_3 = E[x \dot{x} |z|^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \dot{x} |z|^n f_{x\dot{x}z} dx d\dot{x} dz \quad (\text{B.8})$$

$$F_4 = E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}^2 f_{\dot{x}} d\dot{x} \quad (\text{B.9})$$

$$F_5 = E[\dot{x} z |\dot{x}| |z|^{n-1}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} z |\dot{x}| |z|^{n-1} f_{\dot{x}z} d\dot{x} dz \quad (\text{B.10})$$

$$F_6 = E[\dot{x}^2 |z|^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}^2 |z|^n f_{\dot{x}z} d\dot{x} dz \quad (\text{B.11})$$

$$F_7 = E[z \dot{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z \dot{x} f_{\dot{x}z} d\dot{x} dz \quad (\text{B.12})$$

$$F_8 = E[z^2 |\dot{x}| |z|^{n-1}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 |\dot{x}| |z|^{n-1} f_{\dot{x}z} d\dot{x} dz \quad (\text{B.13})$$

$$F_9 = E[z \dot{x} |z|^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z \dot{x} |z|^n f_{\dot{x}z} d\dot{x} dz \quad (\text{B.14})$$

donde $f_{x\dot{x}z}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta del desplazamiento (x), de la velocidad (\dot{x}) y de la componente histerética del desplazamiento (z), $f_{\dot{x}z}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de la velocidad y de la componente histerética del desplazamiento, $f_{x\dot{x}}$ es la función de densidad de probabilidad conjunta del desplazamiento y de la velocidad; y $f_{\dot{x}}$ es la función de densidad de probabilidad marginal de la velocidad. Considerando que $f_{x\dot{x}z}$ está dada por la expresión (4.10), $f_{\dot{x}z}$ por la expresión (4.12), $f_{x\dot{x}}$ por la ecuación (A.18) y $f_{\dot{x}}$ por la ecuación (A.22); las integrales múltiples de las ecuaciones (B.6) a (B.14) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$F_1 = (1-2p) F_{1a} + 2p F_{1b} \quad (\text{B.15})$$

$$F_2 = (1-2p) F_{2a} + 2p F_{2b} \quad (\text{B.16})$$

$$F_3 = (1-2p) F_{3a} + 2p F_{3b} \quad (\text{B.17})$$

$$F_4 = (1-2\rho) F_{4a} + 2\rho F_{4b} \quad (\text{B.18})$$

$$F_5 = (1-2\rho) F_{5a} + 2\rho F_{5b} \quad (\text{B.19})$$

$$F_6 = (1-2\rho) F_{6a} + 2\rho F_{6b} \quad (\text{B.20})$$

$$F_7 = (1-2\rho) F_{7a} + 2\rho F_{7b} \quad (\text{B.21})$$

$$F_8 = (1-2\rho) F_{8a} + 2\rho F_{8b} \quad (\text{B.22})$$

$$F_9 = (1-2\rho) F_{9a} + 2\rho F_{9b} \quad (\text{B.23})$$

En el caso en el que el exponente n de la ecuación (B.3) es igual a uno, las funciones F_{1a} a F_{9b} resultan:

$$F_{1a} = \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} \sigma_{za}^2 \right] \quad (\text{B.24})$$

$$F_{1b} = \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \right] \quad (\text{B.25})$$

$$F_{2a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{za}^2}{\sigma_z^2 \sqrt{\varepsilon_a}} \left[\rho_{xz} \varepsilon_a + \rho_{xz} \left\{ \sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} \sigma_{za}^2 \right\} \right] \quad (\text{B.26})$$

$$F_{2b} = \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_z^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_b}} \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right] \left\{ \rho_{xz} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \varepsilon_b + \sigma_{zb}^2 \rho_{xz} \left(\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} \sigma_{zb}^2 \right) \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi} z_z \left(\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2) \right) \text{Erf} \left[\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right] \right] \quad (\text{B.27})$$

$$F_{3a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{za}}{\sigma_z^2} \left[\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + 2\rho_{xz} \rho_{xz} \sigma_{za}^2 \right] \quad (\text{B.28})$$

$$F_{3b} = \frac{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_z^2} \left[2\sigma_{zb} \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right] \left[\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2) \right] \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi} z_z \text{Erf} \left[\frac{z_z}{\sqrt{2}\sigma_{zb}} \right] \left[\sigma_z^2 (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{xz} \rho_{xz}) + \rho_{xz} \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2) \right] \right] \quad (\text{B.29})$$

$$F_{4a} = \frac{\sigma_{\dot{x}}^2}{\sigma_z^2} \varepsilon_a \quad (\text{B.30})$$

$$F_{4b} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} (\varepsilon_b + \rho_{xz}^2 z_z^2) \quad (\text{B.31})$$

$$F_{5a} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sigma_x^2 \sigma_{za}^2}{\sigma_z^2} \rho_{xz} \sqrt{\varepsilon_a} \quad (\text{B.32})$$

$$F_{5b} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_z^2} \left[\begin{aligned} & 2 \rho_{xz} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2) \sqrt{\varepsilon_b} \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right] \\ & + \sqrt{2\pi} z_z \{ \varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2) \} \text{Erf} \left[\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{B.33})$$

$$F_{6a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_x^2 \sigma_{za}^2}{\sigma_z^2} (\varepsilon_a + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2) \quad (\text{B.34})$$

$$F_{6b} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_z^2} \left[\begin{aligned} & 2 \sigma_{zb} \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right] \{ \varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \} \\ & + \sqrt{2\pi} z_z \{ \varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2) \} \text{Erf} \left[\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}^2}} \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{B.35})$$

$$F_{7a} = \frac{\sigma_x \rho_{xz} \sigma_{za}^2}{\sigma_z} \quad (\text{B.36})$$

$$F_{7b} = \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sigma_z} (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) \quad (\text{B.37})$$

$$F_{8a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_x \sigma_{za}^2}{\sigma_z} (\varepsilon_a + \sigma_{za}^2 \rho_{xz}^2) \quad (\text{B.38})$$

$$F_{8b} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \left[\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_b}} \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right] \{ \varepsilon_b (z_z^2 + \sigma_{zb}^2) + \sigma_{zb}^4 \rho_{xz}^2 \} \\ & + \sqrt{2\pi} z_z \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2) \text{Erf} \left[\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{B.39})$$

$$F_{9a} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sigma_x \sigma_{za}^3 \rho_{xz}}{\sigma_z} \quad (\text{B.40})$$

$$F_{9b} = \frac{\sigma_x \rho_{xz}}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \left[2 \sigma_{zb} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2) \text{Exp} \left[-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right] + \sqrt{2\pi} z_z (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2) \text{Erf} \left[\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}^2}} \right] \right] \quad (\text{B.41})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde $\varepsilon_a = (1 - \rho_{xz}^2)\sigma_z^2 + \rho_{xz}^2\sigma_{za}^2$, $\varepsilon_b = (1 - \rho_{xz}^2)\sigma_z^2 + \rho_{xz}^2\sigma_{zb}^2$, $Exp[\]$ es la función exponencial y $Erf[\]$ es la función error definida por:

$$Erf[u] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u Exp[-t^2] dt \quad (B.42)$$

Las funciones F_1 a F_9 para $n=1$ se obtienen al sustituir las expresiones B.24 a B.41 en las ecuaciones (B.15) a (B.23). Dichas funciones se sustituyen en la ecuación (B.5) para obtener la matriz $E[h Q]$ para $n=1$. Esta matriz junto con la inversa de la matriz de covarianza (ecuación B.4) se sustituyen en la ecuación (B.2) y al simplificar el resultado se obtienen los coeficientes linealizadores para $n=1$:

$$s_e = 0$$

$$c_e = (1 - 2p) \left[A - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\rho_{xz} \sigma_{za}^2}{\sqrt{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \sigma_{za} \right] +$$

$$2p \left[A - \beta \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_{xz} \sigma_{zb}^2}{\sqrt{\varepsilon_b}} Exp\left(-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b}\right) + z_z Erf\left(\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}}\right) \right\} - \gamma \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{zb} Exp\left(-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2}\right) + z_z Erf\left(\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}}}\right) \right\} \right]$$

$$k_e = (1 - 2p) \left[A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\sigma_x \sigma_{za}^2 (\varepsilon_a + \rho_{xz}^2 (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2))}{\sigma_z^3 \sqrt{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x \sigma_{za} (2\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} \right] +$$

$$2p \left[\begin{array}{l} A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (z_z^2 + \sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} Exp\left(-\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b}\right) \frac{z_z^2 \varepsilon_b + \sigma_{zb}^2 (\varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2))}{\sqrt{\varepsilon_b}} + \right. \\ \left. z_z \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) Erf\left(\frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}}\right) \right\} \\ \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} Exp\left(-\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2}\right) \sigma_{zb} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) + z_z (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) Erf\left(\frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}}}\right) \right\} \end{array} \right] \quad (B.43)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN