

01190
7

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**CARACTERIZACIÓN DE ESPIGAS EPILÉPTICAS
PUNTIFORMES**

T E S I S
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORA EN INGENIERÍA**

PRESENTA

M. en C. JOSEFINA GUTIÉRREZ MARTÍNEZ

**DIRECTOR DE TESIS
DR. ROGELIO ALCÁNTARA SILVA**

CIUDAD UNIVERSITARIA

2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco sinceramente al Dr. Rogelio Alcántara Silva cuya paciencia inagotable me permitió llegar a la culminación.

A los miembros del Comité Doctoral por el tiempo dedicado.

Un especial agradecimiento a la Dra. Verónica Medina no sólo por sus acertados consejos sino por su presencia continua.

Por tu valiosa ayuda Oscar se logró llegar a la meta.

Al Dr. Pablo R. Hernández por apoyarme y encontrarme en el camino.

A los pacientes que sin ellos este trabajo no hubiera tenido sentido de ser.

Al Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía "Manuel Velasco Suárez" que no sólo me permitió utilizar la infraestructura sino por todo el tiempo que me acogió entre sus muros y me dejó crecer como Ingeniera Biomédica.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme cumplir un sueño.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo económico

COMITÉ DOCTORAL

PRESIDENTE	DR. FRANCISCO J. GARCÍA UGALDE
PRIMER VOCAL	DR. ROGELIO ALCÁNTARA SILVA
SEGUNDO VOCAL	DRA. VERÓNICA MEDINA BAÑUELOS
TERCER VOCAL	DR. BORIS ESCALANTE RAMÍREZ
SECRETARIO	DR. MIGUEL MOCTEZUMA FLORES
PRIMER SUPLENTE	DRA. LUCÍA MEDINA GÓMEZ
SEGUNDO SUPLENTE	DR. PABLO ROGELIO HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	5
1.1.1 Planteamiento y Análisis del Problema	11
1.2 Objetivos	13
1.2.1 Objetivos Generales	13
1.2.2 Objetivos Particulares	13
Capítulo 2. Sistema Nervioso Central y Epilepsia	
2.1 Anatomía Cerebral	14
2.1.1 Generalidades	15
2.2 Neurofisiología	17
2.2.1 Las Ondas Cerebrales y su Distribución Diferencial de Voltaje	18
2.2.2 Actividad Lenta en el EEG	20
2.3 Epilepsia	21
2.3.1 Definición	21
2.3.2 Importancia	25
Capítulo 3. Metodología	
3.1 Base de Datos	29
3.1.1 Señales Sintéticas	29
3.1.2 Registros Electroencefalográficos	31
3.1.3 Recursos Materiales	32
3.2 Algoritmo de Clasificación	32
3.2.1 Umbral	33
3.2.2 Criterios de Clasificación	36
3.3 Métodos de Análisis	37
3.3.1 Correlación Temporal	37
3.3.2 Modelos Paramétricos	38
3.3.3 Representaciones Tiempo Frecuencia	38
3.3.4 Representaciones Tiempo Escala	39
Capítulo 4. Análisis y Algoritmos Tiempo-Frecuencia	
4.1 Algoritmos de Procesamiento Clásicos	40
4.1.1 Nociones Generales	40
4.1.2 Limitaciones del Análisis Espectral Clásico de Fourier	41
4.1.3 Densidad Espectral de Potencia	45
4.1.4 Periodograma	46
4.1.5 Métodos Paramétricos	47
4.1.6 Método Rápido de Kalman	52

4.2 Distribuciones Tiempo Frecuencia	58
4.2.1 Localización Tiempo Frecuencia	58
4.2.2 Limitaciones de la localización Tiempo-Frecuencia	59
4.2.3 Propiedades	61
4.2.4 Transformada de Fourier de Tiempo Corto	63
4.2.4.1 Introducción	63
4.2.4.2 Principio de Incertidumbre	65
4.2.4.3 Espectrograma	65
4.2.5 Distribuciones de la Clase de Cohen	67
4.2.5.1 La Distribución Wigner-Ville	71
4.2.5.2 Distribución Choi-Williams	73
4.2.5.3 Distribución de Reducción de Interferencias	76
4.3. Evaluación, Comparación y Aplicaciones de las Distribuciones T-F	78
4.3.1 Señales Sintéticas	78
4.3.2 Señales Electroencefalográficas	88

Capítulo 5. Análisis Multi-resolución

5.1. Transformada Wavelet	95
5.1.1 Resolución en el Plano Tiempo-Frecuencia	95
5.1.2 Efectos de Desplazamiento, Modulación y Escalamiento	96
5.2 Teoría Wavelet	97
5.2.1 Transformada Continua Wavelet	99
5.2.2 Condición de Admisibilidad	100
5.2.3 Propiedades de la Transformada Wavelet	101
5.2.3.1 Wavelet Ortogonal	103
5.2.3.2 Wavelet Biortogonal	103
5.2.4 Transformada Discreta Wavelet	104
5.2.4.1 Discretización de la Escala y el Desplazamiento	105
5.2.4.2 Resolución Diádica	106
5.2.5 Transformada Rápida Wavelet	107
5.3 Descomposición Multi-resolución	112
5.3.1 Condiciones	113
5.3.3 Polinomio <i>Spline</i>	117
5.3.2 Banco de Filtros Dos-Canales	114
5.4 <i>Wavelet Packet</i>	118
5.4.1 Definición	118
5.4.2 Algoritmo <i>Wavelet Packet</i>	121

Capítulo 6. Caracterización de Eventos Epilépticos Puntiformes con *Wavelet Packet*

6.1 Función de Correlación	123
6.2 Distribuciones Tiempo-Frecuencia	124
6.3 Análisis Multi-resolución	129
6.3.1 Operador Producto	135
6.4 <i>Wavelet Packet</i>	137

Capítulo 7. Discusión y Conclusiones	
7.1 Validación	141
7.1.1 Distorsión de las señales	141
7.1.2 Umbral	142
7.1.3 Conjunto de Validación	143
7.2 Discusión	148
7.3 Perspectivas	150
Bibliografía	154
Anexo	160
Tablas y Figuras	162
Glosario	164

La detección y clasificación de espigas como eventos epilépticos puntiformes, por medio de inspección visual del electroencefalograma durante neurocirugías es prácticamente imposible debido a que es un procedimiento muy complejo que requiere de la presencia de un especialista en electroencefalografía en la sala quirúrgica.

El propósito de este trabajo de investigación es comparar algunos métodos modernos de procesamiento digital de señales para extraer características de la señal electrocorticográfica, con el fin de identificar formas de onda como espigas epilépticas puntiformes y proponer un algoritmo de clasificación. Se analizaron 140, espigas previamente clasificadas por expertos, correspondientes a 66 registros electrocorticográficos de 21 pacientes con epilepsia intratable sometidos a procedimientos neuroquirúrgicos, aplicando cuatro distribuciones tiempo frecuencia (Espectrograma, Wigner-Ville, Choi-Williams y Reducción de Interferencias) y el análisis multiresolución por medio de las funciones *wavelet* continua *Morlet*, la semiortogonal *Mexican Hat*, y las biortogonal *spline* cúbica de orden 3.1 y 6.8.

El espectrograma presenta muy pobre resolución para discriminar las espigas epilépticas hasta con un sesgo temporal de 0.25s y un 50% de falsas detecciones. Por otro lado, la representación Wigner-Ville debido a su alto número de interferencias no permite ningún tipo de interpretación. Las distribuciones Choi-Williams y Reducción de Interferencias ofrecen bajas interferencias con $\xi=0.1$, buena resolución temporal con un sesgo de solamente 31.2ms y resolución frecuencial hasta con un 0.7 de sensibilidad y 78% de verdaderos positivos; sin embargo, esto tiene un alto costo computacional, lo que no permite realizar un procesamiento en línea requerido para monitoreo transoperatorio.

Para encontrar nuevos hallazgos respecto a la calidad de extracción de características en los registros electrocorticográficos, la energía de los coeficientes hasta el 10° nivel de descomposición con la transformada *wavelet* se comparó con aquella que se obtiene hasta el 4° nivel y que representan 30 nodos de descomposición al aplicar el análisis *wavelet packet*.

Los mejores resultados se encontraron con la función *wavelet* biortogonal de orden 6.8, siendo el producto de la energía de los coeficientes *wavelet* de reconstrucción a los niveles 5, 6 y 7 altamente significativo hasta con un 0.92 de sensibilidad para clasificar los eventos epilépticos, considerando su incidencia y duración. Se encontró que las espigas epilépticas se clasificaron como verdaderas en un porcentaje de 63.88% y con sólo 5.5% de falsas detecciones debidas a eventos no epilépticos. Por otro lado, la energía de los coeficientes correspondientes a los nodos 4° y 9° del árbol *wavelet packet* contiene importante información para caracterizar el evento epiléptico, ofreciendo hasta un 0.94 de sensibilidad, que puede ser incrementada hasta un 0.98 con el operador producto aplicado a los coeficientes correspondientes a estos nodos. Los verdaderos positivos se incrementan hasta el 87.43% con un 12.57% de no detecciones y 8.52% de falsos positivos.

Con la técnica *wavelet packet* no existe sacrificio computacional ya que este análisis permite procesar 896 muestras en tan sólo 0.16s. Por lo anterior, con esta técnica es posible proponer métodos para localizar el foco epiléptico, así como la ruta de diseminación de la descarga epiléptica, requiriendo sólo 3.13s para procesar 16 canales de registro con 896 muestras cada uno y determinar la ruta de propagación por medio de un mapeo rectangular ECoG.

CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN

En la medicina, el análisis de la actividad eléctrica del organismo -señal biológica- ha sido de vital importancia para facilitar el estudio, diagnóstico e investigación del funcionamiento de órganos y sistemas del cuerpo, que coadyuven al conocimiento de mecanismos de control y condiciones patológicas, y que permitan reducir los índices de morbi-mortalidad cuando un paciente es sometido a un procedimiento clínico-quirúrgico.

Los métodos de registro intracerebral han permitido la implementación de técnicas en el campo de la neurocirugía estereotáctica y funcional, tales como el tratamiento de la epilepsia, movimientos anormales, dolor, psicocirugía, tumores cerebrales, potenciales evocados de profundidad durante estimulación eléctrica vía nervios periféricos, [UEM89]. Estas técnicas son muy valiosas para guiar las puntas, electrodos o agujas del equipo estereotáctico, especialmente para evitar trauma a los núcleos subtalámicos, la cápsula interna o los núcleos talámicos sensoriales, [AJM84].

La cirugía de epilepsia ha retomado nuevamente interés en los últimos años, debido a los siguientes factores, [SPE81]:

- a) Los avances tecnológicos en neuroimagen que han permitido la visualización de algunos focos epileptógenos que anteriormente no hubieran sido detectados;
- b) Los algoritmos de procesamiento, análisis espectral, mapeo funcional preoperatorio, transoperatorio y postoperatorio, han aumentado la capacidad para detectar y registrar las ondas epileptiformes;
- c) En ciertos pacientes, el control farmacológico de la epilepsia aún es inadecuado y en algunos casos bajo control medicamentoso existen efectos colaterales indeseables, principalmente en las funciones intelectuales;
- d) Los registros de profundidad que han facilitado la extirpación de lesiones o focos epileptógenos con mayor precisión.

En este punto la Electrocorticografía (ECoG), método para registrar la actividad eléctrica sobre la corteza cerebral, ha permitido determinar la localización y extensión del foco epileptico y así planear la extracción cortical con mayor precisión para aquellos pacientes que son sometidos a cirugía de epilepsia, por lo que estos procedimientos neuroquirúrgicos han dado lugar a la necesidad de aplicar técnicas de procesamiento para realizar análisis de electroencefalografía (EEG) y ECoG con mayor rapidez y sensibilidad, [TSP93, TSH93].

Bancaud y Talairach mostraron que la zona epileptogénica debe ser circunscrita por medio del registro de la actividad eléctrica epileptica, tal que la descarga ictal al inicio de la crisis pueda ser registrada y mapear la propagación de las descargas. El grupo encabezado por Spencer [GIL95], demostró que cuando la localización de un foco epileptógeno se realizaba únicamente con la ayuda de EEG de superficie, el éxito quirúrgico era de 67%; sin embargo, cuando al registro de superficie se le sumaban los datos aportados por registros invasivos como la estereoelectroencefalografía y la ECoG, la posibilidad de éxito quirúrgico se incrementa hasta 85% de los pacientes con epilepsia intratable intervenidos quirúrgicamente, de manera que alrededor de un 90% de los pacientes candidatos a cirugía de epilepsia son estudiados mediante registros invasivos de la actividad eléctrica cerebral como parte del protocolo de estudio.

preoperatorio, debido a que el tratamiento quirúrgico en un 73% de los casos puede ser alterado por la información aportada mediante estas técnicas de registro.

En el pasado, la interpretación del EEG se limitó a la inspección visual de los grandes volúmenes de registros electroencefalográficos y, a pesar de que el especialista está entrenado para analizar estas señales, siempre se depende de su interpretación subjetiva para el diagnóstico. El surgimiento y avance de los computadores y las tecnologías asociadas con ellas ha permitido la aplicación de algoritmos matemáticos para el análisis cuantitativo del EEG, [BRO95]. Las técnicas de análisis de las ondas epileptiformes en el EEG y/o ECoG [GOT90, WEB93], representan una herramienta novedosa y poderosa para estudiar los ritmos eléctricos cerebrales, la distribución cefálica que adoptan, su simetría y localización [DUF86, NUW88], permitiendo la detección automática de crisis epilépticas, tipo y clasificación de la descarga, así como los parámetros de la espiga, [GOT82, GOT92].

Aunque el análisis espectral clásico es potencialmente superior al análisis visual respecto a su habilidad para cuantificar y describir los patrones rítmicos del EEG, pierde sensibilidad cuando se trata de detectar y mostrar los cambios que ocurren rápidamente (transitorios). Esto se debe a que esta técnica presupone que la serie de tiempo a analizar es estacionaria, para lo cual se procesa la señal sobre un "largo" periodo, lo cual puede causar pérdida de información cuando ocurren cambios bruscos en la actividad eléctrica cerebral. En realidad, los procesos neuronales que generan el EEG son intrínsecamente dinámicos, y pueden considerarse cuasi-estacionarios sólo en periodos cortos (pocos segundos) y sólo bajo condiciones controladas (ojos abiertos, ojos cerrados), [KAW73]. En actividad espontánea, durante el sueño o como manifestación de un daño anatómico-funcional, el EEG es una señal no-estacionaria que puede cambiar drásticamente su contenido espectral en un lapso de tiempo muy corto (transitorio) y ocultarse, entre los patrones rítmicos, ciertas formas de onda que indiquen alguna respuesta funcional. En especial el EEG ictal puede mostrar una gran variedad de patrones, los cuales presentan cambios dinámicos en el tiempo, [HIL92]. Estos patrones pueden ser rítmicos (como las descargas sincronizadas de neuronas involucradas en la crisis) o arrítmicos (atenuación de actividad espontánea al iniciarse la crisis, ondas agudas o punta-onda irregulares).

Para el caso que nos interesa, la señal EEG durante los eventos ictales representa una señal aleatoria que cambia drásticamente su contenido espectral en un lapso de tiempo muy corto. Esos transitorios no son detectados por técnicas clásicas de procesamiento, por lo que aplicar técnicas para el análisis de señales no-estacionarias es más apropiado, [HAN87]. El problema con este tipo de técnicas es que el EEG contiene una serie de transitorios que no necesariamente son indicativos de eventos epilépticos, en ocasiones contienen dos o más componentes rítmicos superpuestos con diferentes frecuencias o en otros casos algún componente se encuentra "escondido" en otro de frecuencia similar pero que tiene mayor amplitud, [HIL92].

En la literatura se ha planteado una serie de métodos para analizar señales estocásticas, cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas dependiendo del proceso a investigar. Desde la época de los ochenta se han utilizado técnicas de procesamiento digital para el análisis de señales no-estacionarias, entre las que podemos mencionar se encuentran los métodos paramétricos, [KAY88]. Estos modelos y algoritmos de estimación de parámetros son una alternativa a la tradicional transformada de Fourier (TF) para la extracción del contenido frecuencial, sobre todo en situaciones en donde la resolución frecuencial es de suma importancia para extraer

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

adecuadamente las características de la señal. La característica más importante para usar los modelos paramétricos es su capacidad para estimar exactamente las frecuencias pico, detectar actividad cíclica que ocurre durante la época analizada, y no presentan dificultad al considerar señales estacionarias en el intervalo de análisis, [JAN81]. En el capítulo 6 secciones 6.2.2 y 6.2.3 se evalúa el desempeño del modelo autorregresivo y el algoritmo rápido de Kalman, para estimar la densidad espectral y las espigas epilépticas del EEG-Ictal.

Cuando se desea conocer los componentes frecuenciales y su intensidad relativa en señales cuyo contenido espectral está cambiando rápidamente en el tiempo, el análisis tiempo-frecuencia (tf) es la representación más adecuada. Los métodos de análisis tiempo-frecuencia son técnicas que describen en una distribución conjunta tf el contenido espectral de una señal como una función del tiempo permitiendo entre otros, cuantificar las no-estacionariedades que ocurren en una señal.

La distribución elegida debe "rastrear" tan exacta como sea posible la variación espectral de los componentes obtenidos a partir de la frecuencia instantánea. La representación tf debería mostrar la distribución de energía de la señal tanto en tiempo como en frecuencia, por lo que en el plano tf se debe mostrar la relación tf de cada componente de la señal, su extensión y amplitud haciendo de ese modo la estimación más fácil. Entre dichas representaciones podemos mencionar las representaciones lineales como la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT), y la transformada Wavelet, y dentro de las representaciones cuadráticas como el Espectrograma, la distribución Choi-Williams (CWD), la distribución reducción de interferencias (RID), la función de ambigüedad y la distribución Wigner-Ville (WVD).

El espectrograma es el método estándar para el estudio de señales que varían en el tiempo, [COH92] y se encuentra basado en la STFT analizando la señal por medio de ventanas que se deslizan en el tiempo, y mapeando así la señal de una dimensión (tiempo) a dos dimensiones (tiempo, frecuencia), [HLA92]. Sin embargo, como se verá en la sección 6.3.3 el espectrograma presenta varios problemas 1) Cumplir con el principio de incertidumbre "compromiso entre la resolución temporal y la frecuencial". Existen señales cuyo contenido espectral está cambiando tan rápidamente que encontrar un ancho de la ventana para el cual la señal sea más o menos estacionaria es un gran problema; 2) Asume que la señal es estacionaria en el intervalo analizado; esto tiene como desventaja que la longitud de la estacionariedad asumida determina la resolución frecuencial; 3) No cumple con los marginales, por lo tanto no se puede considerar una distribución energética propiamente dicha.

Para resolver los problemas encontrados en el espectrograma se han desarrollado una serie de representaciones tiempo-frecuencia (TFR) cuadráticas, entre ellas la WVD es considerada la base sobre la cual se desarrollan un conjunto de TFRs que cumplen con ciertas propiedades a las que se les denomina TFR que pertenecen a la Clase de Cohen. En el capítulo 6 sección 6.3.4 se discute la teoría y propiedades de las TFRs en general, examinando la estructura bilineal de las distribuciones tiempo frecuencia que pertenecen a la clase de Cohen.

La WVD tiene excelente resolución tf de señales monocomponentes no-estacionarias y no ambiguas como los chirps y las propiedades matemáticas que satisfacen la hacen una TFR de la Clase de Cohen muy atractiva. Sin embargo, su representación de señales multicomponentes no es muy útil ya que contiene interferencias-TI (términos cruzados) en diferentes regiones del plano tf. Estos términos cruzados son un obstáculo para la interpretación gráfica de las características

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

principales de la señal, [HLA92]. Aplicando técnicas de filtrado digital “suavizado”, se obtiene una versión “ventaneada”, la distribución pseudo Wigner-Ville, con mejor representación en el plano tf pero menor resolución ya que se alcanzan a esparcir los autotérminos, [HLA92]. En la sección 6.3.4.1 presentamos las desventajas de utilizar la WVD en señales EEG.

Choi y Williams [CHO89], propusieron un kernel exponencial, para superar las desventajas que presentan el espectrograma y la WVD, creando la distribución Choi-Williams cuyas características principales son la alta resolución y reducción de las interferencias, como lo indicamos en la sección 6.3.4.2.

En la sección 6.3.6 se comparan los resultados referentes a resolución en el plano tiempo-frecuencia que se obtienen al aplicar el espectrograma, la WVD, la CWD y la RID a señales sintéticas multicomponentes y señales EEG.

Para resolver las desventajas que muestran las técnicas tf estudiadas en la sección 6.3 del capítulo 6 se discute el análisis Multi-resolución basado en la transformada Wavelet, ésta es una representación tiempo-escala, que lleva a cabo sus cálculos a través de una serie de dilataciones y desplazamientos automatizados a partir de una función wavelet base, [RIO91]. La WT se enfoca a extraer características de la señal con mayor detalle, a través del espectro de las ventanas, es decir, es como un microscopio para las altas frecuencias y un telescopio para los componentes de baja frecuencia de la señal, [CHU92].

Schiff y cols. [SCH94], en 1994 publicaron que aplicaciones clínicas en línea para la detección de eventos en la señal EEG no habían sido posibles debido al exceso de cálculos computacionales, si se usaban métodos numéricos estándar. Estos investigadores compararon la calidad al extraer características en el EEG por medio de la transformada continua wavelet, una WT sobremuestreada y una WT críticamente muestreada. Los resultados obtenidos de este estudio fueron que es posible utilizar los algoritmos rápidos y el análisis Multi-resolución sin decremento de la calidad del procesamiento y con una alta reducción en el tiempo de cálculo.

El avance en los últimos años encaminado al desarrollo de métodos numéricos rápidos, como el algoritmo piramidal establecido por Mallat [DAU92,MAL89], ha permitido que el análisis Multi-resolución pueda ser utilizado en aplicaciones clínicas y con ello mejorar significativamente la eficiencia, rapidez y exactitud en la extracción de características, especialmente en señales EEG no-estacionarias con eventos epilépticos.

Hoy en día es posible encontrar una biblioteca de funciones wavelets [RIO91], que pueden ser aplicadas para extraer diferente tipo de información del EEG dependiendo del evento que se desea investigar. Por ejemplo, como ya hemos dicho para la reducción de datos en los registros EEG de larga duración [SIR99], la función *spline* ha mostrado buenos resultados, la *B-spline* cúbica en la detección del inicio de la crisis o la *Mexican Hat* y los polinomios de orden mayor en la identificación de patrones epilépticos, [DAT97]. En la sección 6.4 se propone estudiar el desempeño, para caracterizar las espigas epilépticas puntiformes, de las funciones *Morlet*, la semiortogonal *Mexican Hat*, la ortogonal *Daubechies*, y las funciones biortogonales *spline* cúbica de orden 3.1 y 6.8.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la sección 6.4.4 se considera el análisis *wavelet packet* para extraer información significativa que se encuentre en bandas de alta frecuencia ya que el análisis multi-resolución sólo considera la descomposición en el árbol jerárquico de los componentes de baja resolución, de forma similar a la establecida en la sección 6.4 con la descomposición wavelet y se estudiará la respuesta de este análisis en las señales ECoG.

En el capítulo 7 se evalúan y comparan las técnicas de análisis aquí planteadas para extraer de la señal ECoG características de identificación de eventos epilépticos puntiformes en base al algoritmo de clasificación propuesto en el capítulo 5.

Concluyendo en el capítulo 8 la técnica que ofrece importantes resultados de eficiencia y rapidez para la caracterización de la espiga epiléptica puntiforme y que nos conduzcan a plantear en un futuro sistemas de aplicación clínica para la localización del foco epiléptico, su ruta de propagación, la interrelación entre electrodos y el mapeo del área de lesión.

1.1 Antecedentes

Desde finales del siglo XIX, se planteó que los pacientes con crisis epilépticas de difícil control, es decir episodios convulsivos de alta frecuencia y severidad, pueden ser susceptibles a ser tratados quirúrgicamente de acuerdo a la identificación del foco epiléptico. Las experiencias de Hughlings Jackson [AJM84], pusieron de manifiesto la importancia que tiene el análisis del modo de inicio de la crisis y lo difícil que resulta la localización precisa de la zona de descarga. En esa época, resultaba congruente ante la falta de medicamentos, que se intentara la resección quirúrgica del área de descarga como modalidad única de tratamiento. En 1887, Victor Horsley [HOR87], utilizó la exploración cortical en el patrón clínico de las crisis convulsivas focales, llegando a reproducir el fenómeno epiléptico con estimulación eléctrica y demostró que la extirpación de esta región llegaba a suprimir las crisis. Este trabajo se continuó por, Jasper, Rasmussen, [PEN68] y en 1955 McNaughton revisa las indicaciones para cirugía de epilepsia. Las revisiones sobre las indicaciones de cirugía para los pacientes con epilepsia hechas por Falconer en 1973 [FAL73], McNaughton y Rasmussen en 1975 [MCN75], coinciden en que los criterios fundamentales son la falta de respuesta al tratamiento médico exhaustivo así como la posible localización del foco de epilepsia y que pueda ser extirpado con déficit neurológico mínimo. El primer paso, es la confirmación del diagnóstico de epilepsia de difícil control idealmente apoyado en el electroencefalograma (EEG)-video prolongado de superficie y cortical, así como en el monitoreo de los plasmáticos anticonvulsivos.

Diversos factores han influido para que la cirugía de la epilepsia resurgiera en los últimos años, se pueden mencionar los siguientes, [GIL95]: a) Los avances tecnológicos en neuroimagen que han permitido la visualización de algunos focos epileptógenos; b) El procesamiento digital electroencefalográfico pre-trans y postoperatorio, ha aumentado la capacidad para detectar y registrar las ondas epileptiformes; c) El control farmacológico inadecuado de las crisis epilépticas aunado a los efectos colaterales indeseables, principalmente en las funciones intelectuales y d) Los registros invasivos han facilitado la extirpación de lesiones o focos epileptógenos con mayor precisión. En este punto, la Electrocorticografía (ECoG) método para registrar la actividad eléctrica sobre la corteza cerebral, ha permitido determinar la localización y extensión del foco epiléptico y así planear la escisión cortical con mayor precisión para aquellos pacientes que son sometidos a cirugía de epilepsia por lo que estos procedimientos neuroquirúrgicos han dado



lugar a la necesidad de aplicar técnicas de procesamiento para realizar análisis EEG-ECoG con mayor rapidez y sensibilidad.

El EEG-ECoG ictal puede mostrar una gran variedad de patrones los cuales presentan cambios dinámicos en el tiempo, [HIL92]. Estos patrones pueden ser rítmicos (como las descargas sincronizadas de neuronas involucradas en la crisis) o arrítmicos (atenuación de actividad espontánea al iniciarse la crisis, ondas agudas o punta-onda irregulares). La morfología de un patrón rítmico ictal varía de complejas ondas punta, aguda, punta aguda, a actividad sinusoidal rápida o lenta. Un patrón puede estar envuelto en otro y varios pueden ocurrir simultáneamente en diferentes sitios, [GOT76].

El análisis electrofisiológico clínico tradicional emplea la inspección visual de los grandes volúmenes de registros EEG crudos en papel, en este primer nivel se extraen características, propiedades y patrones en forma cualitativa, la señal bioeléctrica es acondicionada por preprocesamiento analógico -sensado o transducción, filtrado, amplificación, acoplo de impedancias, aislamiento eléctrico- para su análisis visual. Aunado a esto la electrofisiología moderna tiende a intercorrelacionar las señales fisiológicas, para llevar a cabo diagnósticos y monitoreos más confiables.

El avance de las computadoras y las tecnologías asociadas con ellas, así como los algoritmos han permitido que el análisis matemático se aplique a la clínica aumentando la capacidad para detectar, registrar y cuantificar información que mejore el estudio de las señales bioeléctricas y para nuestro caso en especial el análisis cuantitativo de las ondas epileptiformes de la señal EEG-ECoG, [BRO95, GOT90, WEB93]. El procesamiento digital de señales aplicado a la clínica se ha llegado a convertir en una herramienta indispensable en los procedimientos médicos modernos, desde los métodos de preprocesamiento digital -métodos estadísticos, espectro de frecuencia, filtrado-suavizado, promediación, interpolación, extrapolación- pasando por técnicas de análisis -sistemas lineales invariantes en el tiempo, transformadas, modelos paramétricos- hasta llegar a procesamientos más avanzados.

Todas estas técnicas y muchas más han representado actualmente herramientas novedosas así como poderosas para estudiar los ritmos eléctricos cerebrales y la distribución cefálica que adoptan: simetría y localización [DUF86, NUW88], permitiendo detección automática de crisis epilépticas, tipo, clasificación de la descarga y parámetros de la espiga, [GOT82, GOT92].

En la literatura encontramos que desde las primeras aplicaciones de las técnicas de procesamiento a señales bioeléctricas se ha empleado la Transformada de Fourier(TF) para encontrar las características espectrales de la señal en estudio, como por ejemplo las bandas típicas de EEG ($\delta, \tau, \alpha, \beta$), [NUW88], los componentes de alta frecuencia del complejo QRS, y la variabilidad de la frecuencia cardíaca en el ECG [BRO95], entre otros, asumiendo que los datos observados son estacionarios en períodos cortos. Aunque el contenido espectral así obtenido ha ofrecido una base conveniente de análisis y comparación, esos métodos no son efectivos cuando las señales presentan no-estacionariedades o cuando deseamos correlaciones más complejas.

En realidad, los procesos neuronales que generan el EEG son intrínsecamente dinámicos, y pueden considerarse cuasi-estacionarios sólo en periodos cortos y bajo condiciones controladas, [KAW73], pero en actividad espontánea, o como manifestación de un daño anatómo-funcional,

cuando surgen transiciones rápidas y espontáneas como las espigas epilépticas, los husos durante el sueño [SUN96], o los cambios electroencefalográficos durante los procedimientos anestésicos, [AKR96], el EEG es una señal no-estacionaria que puede contener alta variabilidad espectral en un lapso de tiempo muy corto (transitorio) y ocultarse entre los patrones rítmicos ciertas formas de onda que representan alguna respuesta funcional importante para el fenómeno en estudio.

Existe una diversidad de métodos aplicados a la señal electroencefalográfica, desde los métodos clásicos de Fourier, como por ejemplo, los que utilizan la TF para la representación topográfica cerebral y la cuantificación de parámetros estadísticos, [JER89, NUW88, DUF86]. Los reportados por Sciabassi y cols, [SCL73], para estimar el espectro del EEG durante las etapas de sueño, o la aplicación de esta técnica del arreglo espectral compactado para el monitoreo transanestésico [BIC79] y la detección de profundidad anestésica, [NAY94]. Gath y cols, [GAT92], quienes han comparado las técnicas de estimación de la densidad espectral de potencia, así como, el autoespectro, coherencia, fase espectral y periodogramas calculados a partir de la FFT y del modelo AR para señales EEG de ratas de laboratorio. Sin embargo a pesar de la superioridad de la Estimación Espectral vía AR respecto a la TF, especialmente en aquellos casos cuando están presentes dos o más componentes rítmicos con frecuencias muy similares, es difícil determinar los parámetros del modelo si las ondas epileptiformes no son muy similares y además requiere de alta carga computacional para realizar el proceso en línea, [ALC98].

Kawabata [KAW73], empleó la potencia espectral instantánea definida por la FFT, para estudiar las variaciones dinámicas en el EEG durante el bloqueo alfa así como en la interpretación de tareas mentales. Debido a las desventajas que presenta la transformada de Fourier para caracterizar este tipo de señales, esta técnica se ha aplicado con ventanas trasladadas y traslapadas para determinar los cambios de velocidad y aceleración entre ventanas y que estos parámetros sean indicativos de transitorios en el EEG.

Alarcón y Faught [ALA95,FAU92], han presentado varios trabajos que consideran la variabilidad del poder espectral mediante la TF, para el análisis cuantitativo del EEG durante crisis epilépticas, el problema es que el EEG es una señal aleatoria que contiene una serie de transitorios que no necesariamente son indicativos de eventos epilépticos, por lo que con esta técnica no es posible determinar, si un grafoelemento EEG es epiléptico o no. Estos patrones pueden ser muy variados desde actividad rítmica (como las descargas sincronizadas de neuronas involucradas en la crisis), o arrítmica (atenuación de actividad espontánea al iniciarse la crisis) presentarse como ondas agudas o punta-onda irregulares y paroxismos o brotes, [HAN87].

En la literatura se han planteado una serie de métodos para analizar señales estocásticas, cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas dependiendo del proceso a investigar. Desde la época de los ochenta se han utilizado técnicas de procesamiento digital avanzado para el análisis de señales no-estacionarias. Entre las que podemos mencionar se encuentran los métodos paramétricos, [KAY88], estos modelos y algoritmos de estimación de parámetros son una alternativa a la tradicional TF para la extracción del contenido frecuencial sobre todo en situaciones en donde la resolución frecuencial es de suma importancia para extraer adecuadamente las características de la señal. La característica más importante para usar los modelos paramétricos es su capacidad para estimar exactamente las frecuencias pico y detectar actividad cíclica que ocurre durante la época analizada, [JAN81]. Los modelos paramétricos han mostrado [KAY88], muy buen funcionamiento en la estimación de la densidad espectral de procesos aleatorios siendo el modelo

autorregresivo (AR) un método de alta resolución espectral, y muy adecuado para la representación de componentes rápidos como los que ocurren en el EEG ictal. Hilfier y Egli, [HIL92], demostraron la ventaja que tiene el aplicar métodos paramétricos para identificar componentes rítmicos característicos en el EEG ictal (pico espectral validado),

Varios autores han utilizado el modelado, aplicando los métodos paramétricos, para identificar componentes rítmicos característicos en el EEG-Ictal como una alternativa para la estimación con la FFT de la potencia, fase y coherencia espectral. Hilfier y Egli [HIL92], han propuesto un modelado paramétrico autorregresivo del EEG multicanal, basado en el método de regresión-determinística usando una familia de funciones base, que permite resolver las no-estacionariedades presentes en la señal, sin embargo requiere una alta carga computacional.

Otras técnicas modernas como análisis espectral de orden mayor se han empleado para la caracterización de la respuesta eléctrica cerebral, como lo encontramos en el trabajo realizado por Muthuswamy y cols, [MUT99], quienes aplicaron el espectro de tercer orden para estimar los parámetros de un modelo EEG de dos canales después de un estado de hipoxia-asfisia provocado en ratas de laboratorio.

Desde 1976 Gotman y Gloor del Instituto Neurológico de Montreal [GOT82], han reportado técnicas de reconocimiento de patrones para la detección automática de cierto tipo de actividad paroxística, la espiga-onda de 3Hz, por medio de descomposición del EEG en ondas elementales "semi-ondas", que son caracterizadas por cierta duración y amplitud absoluta. Las características que Gabor y Seyal [GAB92], por su parte, establecieron para alimentar a una red neuronal fueron la magnitud, el promedio, y pendiente sobre un intervalo de tiempo. La transición al pico o agudeza, se calcula como la segunda derivada de la señal EEG original y es la diferencia de dos pendientes consecutivas. Las pendientes post-pre voltaje pico fueron reconocidas como unas de las características más confiables para identificar los transitorios epilépticos espigas y punta-onda. Dingle y cols [DIN93], también han trabajado con sistemas de detección de actividad epileptiforme estableciendo parámetros característicos como duración, amplitud y agudeza, así como umbrales de detección. Sin embargo, con estas técnicas las crisis que consisten de EEG irregular con frecuencias mezcladas no son detectadas debido a que no tienen un claro patrón epiléptico.

También en otros trabajos se ha utilizado el reconocimiento de patrones, como las comparaciones morfológicas presentadas por Rektor [REK95], o la morfología descriptiva por Walter y cols, [WAL98], pero la cantidad heurística involucrada para encontrar una representación simbólica descriptiva del fenómeno, las reglas gramaticales universales utilizadas así como la dificultad de implementar métodos sistemáticos computarizados para producir esas reglas han dificultado la aplicación de estos métodos en la práctica.

Nuevas técnicas de procesamiento modernas que han utilizado el análisis tiempo-frecuencia han demostrado tener ciertas ventajas sobre el análisis clásico de Fourier y han tomado gran importancia en el análisis de señales bioeléctricas especialmente cuando se desea describir analizar, cuantificar y sintetizar las no-estacionariedades típicas del EEG-Ictal.

Entre dichas representaciones podemos mencionar las lineales como la transformada de Fourier de tiempo-corto (STFT), y la transformada Wavelet (TW), y dentro de las cuadráticas como el

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Espectrograma, La distribución Wigner-Ville (WVD), la distribución Choi Williams, la distribución forma cónica, la distribución reducción de interferencias entre las que mejores resultados han dado en la aplicación clínica.

Hay algunos trabajos relacionados con la localización de áreas funcionales basados en el EEG de superficie. Sun y cols encontraron [SUN96], que la distribución tiempo-frecuencia cruzada y técnicas de síntesis para procesar los datos EEG multicanal ofrecen una herramienta muy importante para aislar los componentes de interés (husos del sueño) del ruido, especialmente cuando el ruido y la señal comparten la misma banda, como es el caso de los efectos endógenos. Ellos calculan una distribución Wigner-Ville promediada para identificar el contorno de la señal de interés. Sin embargo, encuentran que en caso de que la actividad eléctrica cerebral contenga ondas rápidas y aisladas esta representación puede tener dificultad en discriminar entre componentes de la señal y el ruido. En esos casos el espectro (variante en tiempo) puede dispersarse por el plano tiempo-frecuencia y no mostrar los patrones esperados. Recientemente han empleado el kernel bilineal cónico [SUN97], para el análisis de actividad de alta frecuencia en los registros EEG-ictal al inicio de la crisis, especialmente cuando la señal de interés es de baja amplitud y además se encuentra contaminada.

Blanco y cols. [BLA95], aplicaron distribuciones tiempo-frecuencia basadas en la transformada de Gabor para caracterizar la evolución del espectro EEG, extrayendo interesantes patrones, muy útiles en el estudio de la variación espectral durante las crisis epilépticas.

Williams y Zaveri [WIL95, ZAV92], reportaron la evaluación de tres distribuciones tiempo-frecuencia en términos de su eficiencia al representar no-estacionariedades epilépticas en el ECoG. (espectrograma, distribución Wigner-Ville (WVD), distribución exponencial (ED), y distribución reducción de interferencias (RID)). La ED representa una mejora considerable sobre el espectrograma en términos de resolución en el plano t_f y reducción de interferencia respecto a la WVD. La RID se considera una mejora a la ED en ambas características, tanto en la resolución como en la disminución de interferencias en el plano t_f .

Además de las técnicas de procesamiento $t-f$ se han desarrollado nuevos métodos tales como, las técnicas tiempo-escala y Multi-resolución [DAU92, MAL89], vía la transformada Wavelet, [COD92], éstas pueden mejorar significativamente la eficiencia, rapidez y la exactitud en la extracción de características del EEG mostrando especial utilidad en la detección de los patrones epileptiformes, [SCH94].

Estos métodos ofrecen ventajas en el análisis y síntesis de señales tales como EEG que contiene características que difieren significativamente en duración y frecuencia, comparado con los métodos tradicionales como la transformada de Fourier. Sin embargo Schiff y cols. en 1994 publicaron que aplicaciones clínicas en línea no habían sido posibles debido al exceso de cálculos computacionales.

Los coeficientes wavelet, a partir del polinomio *spline*, se han utilizado como entrada a sistemas de redes neuronales automáticas (ANN) en varios trabajos publicados por Sirne R.O. Isaacson SI. y D'Atellis [SIR99, DAT97], para la detección automática de espigas epilépticas, así como para la reducción de información inherente a los registros de larga duración del EEG. También en este contexto se deben mencionar los resultados publicados por Kalayci y Özdamar [KAL95], quienes

han utilizado las funciones wavelet Daubechies para desarrollar un sistema automático de detección de espigas EEG. Park y cols [PAR97], también han utilizado la transformada Wavelet (TW), el ANN y los sistemas expertos para describir algoritmos de detección de crisis epilépticas multicanal, mostrando que el preproceso wavelet aumenta la sensibilidad y selectividad del ANN para la detección de espigas epilépticas. Estos investigadores han utilizado la función daubechies-4, la cual les ha proporcionado información clínicamente importante en los coeficientes que se encuentran entre las escalas 2-5, que corresponden a la banda de frecuencia 4-64Hz. También podemos mencionar a Argoud y cols. [ARG98], quienes han utilizado la función wavelet Haar, para la detección y análisis de paroxismos epilépticos.

Existen muchas técnicas más que han sido empleadas con el fin de caracterizar, establecer grupos de patrones epilépticos que permitan la detección automática de los eventos epilépticos, entre ellas se encuentran los filtros de orden mayor, la lógica difusa, procedimientos geométricos y el modelado, entre otros.

Por ejemplo, Senhadji y cols. publicaron en 1995 [SEN95], una estructura multinivel donde se propone una detección de dos-etapas, basada en la representación tiempo-escala y en el mapeo 3D de eventos epilépticos interictales, basado en funciones wavelet no-ortogonales. En la primera etapa hubo 88% de detecciones correctas, 22% de falsas alarmas y 12% de artefactos fueron correctamente detectados. Para el segundo nivel encontraron los autores 86% de detecciones correctas, 68% de artefactos fueron rechazados y 2.5% de ondas útiles fueron clasificadas como artefactos.

Wahlberg y Lanz [WAH00], han trabajado con los algoritmos de categorización (clustering) para formar clases de espigas, esta etapa la llevan a cabo como procesamiento previo a una promediación. Estos investigadores emplean lógica difusa y técnicas geométricas (filtrado espacial pasa-bajos), mostrando esta última los mejores resultados en la categorización. Sin embargo esta técnica presentó discrepancias entre los bloques manuales y automáticos, por lo que este método requiere supervisión constante del especialista. Geva y Keren [GEV98], por su parte, también han usado el proceso dinámico de categorización por lógica difusa acompañado de la TW, calculando para cada escala valores estadísticos como la varianza y así extraer características de los grafoelementos epileptiformes donde los coeficientes wavelet se utilizan como entrada a un ANN y con ello "crear" un dispositivo de alerta a la presencia de transitorios epilépticos.

Roessgen y Boashash [ROE98], han presentado un modelo para clasificar al EEG no-estacionario en epileptiforme y no-epileptiforme. Los parámetros se estimaron maximizando una función de probabilidad-logarítmica conocida como aproximación Whittle y la clasificación se llevó a cabo creando tablas donde se establezcan umbrales respecto a la relación \hat{P}_s / \hat{P}_b , donde \hat{P}_s es la estimación espectral de la integración del EEG-ictal y \hat{P}_b es la estimación espectral de la integración del EEG-Fondo. Esta técnica tiene alto desempeño en la detección si el tipo de crisis presenta poca variabilidad.

En la literatura se ha encontrado que recientemente se ha probado la eficiencia del análisis *wavelet packet* utilizando las funciones Daubechies 6-10, Symlets 4-8 y coiflets 5, en algoritmos de compresión y codificación de señales EEG, con fines de transmisión [CAR01]. Sin embargo

en lo que respecta a la caracterización de los componentes epilépticos del EEG no se ha encontrado ninguna aplicación.

Por último mencionaremos que además de establecer las características de los patrones rítmicos y arrítmicos de la señal EEG-Ictal es primordial localizar el área donde se genera el foco epiléptico, dato que es muy importante para el tratamiento clínico/quirúrgico a seguir, para lo cual la resolución espacial (número de electrodos de registro) juega un papel muy importante, [NUW88]. Respecto a este punto hay pocos trabajos que han correlacionado el análisis de la señal EEG con la localización epiléptica donde se genera la misma, entre ellos podemos mencionar al grupo de Sherman, Mirski, Thakor y cols. [TSA98], quienes han trabajado en la identificación de zonas cerebrales importantes para la propagación de la descarga epiléptica aplicando la función de coherencia entre registros EEG de diferentes sitios y con ello reflejar el grado de correlación entre esas áreas cerebrales. A este respecto podemos mencionar el trabajo realizado por Ward y cols. [WAR00], quienes utilizaron un modelo esférico no-homogéneo de 3 capas aplicando un filtrado adaptable espacial 3-D para determinar la distribución potencial en la superficie del cuero cabelludo.

1.1.1 Planteamiento y Análisis del problema

Para aquellos pacientes diagnosticados con epilepsia intratable bajo control farmacológico, la cirugía neurofuncional, les ha permitido mejorar sus expectativas de vida. Debido a esto, la cirugía de epilepsia ha retomado interés en los últimos años apoyada especialmente en los avances tecnológicos en el área médica, [GIL95].

En la actualidad, está demostrada la importancia del estudio sistemático de la actividad eléctrica intracerebral para la localización precisa de la zona de descarga, partiendo de los registros de superficie (electroencefalograma-EEG), pasando por la exploración cortical (electrocorticograma-ECOG) y llegando hasta la actividad cerebral subcortical. Apoyando a estos registros, el monitoreo EEG/video de larga duración permite registrar EEG durante las crisis epilépticas (llamado EEG ictal), por lo que este monitoreo se ha convertido en un requisito internacional para clasificar a un paciente como candidato a cirugía de epilepsia, [AME85]. Los registros electrofisiológicos pre, trans y post-operatorios se han convertido en la herramienta fundamental para la delimitación precisa de la lesión facilitando la extirpación de lesiones o focos epiléptógenos.

Como consecuencia de lo anterior, la caracterización de patrones epileptiformes (espigas, ondas agudas, punta onda) involucra el análisis de los componentes frecuencial y temporal de la señal electroencefalográfica; clasificación de la descarga, parámetros de la espiga para la determinación del foco epiléptico, así como su intercorrelación y distribución espacial de la actividad cerebral, el mapeo adecuado de su localización y propagación requiere la mayor resolución espacial. La resolución espacial estará directamente relacionada con la cantidad de electrodos de registro disponibles.

De lo anterior vemos, que el electrofisiólogo tiene que hacer un análisis visual global -espacial, temporal y espectral- de la señal EEG para la localización de los focos epiléptógenos. Existen dos

desventajas principales como consecuencia de este análisis visual especialmente si se requiere interpretar esta señal durante los procedimientos neuro-quirúrgicos; la primera es la subjetividad y la segunda el tiempo requerido para su análisis. Desde hace ya varias décadas tanto las técnicas estadísticas tradicionales como los algoritmos de procesamiento digital básico (valores promedio, varianza, distribuciones de probabilidad empírica, filtros digitales, correlaciones, transformaciones, etc.) han sido utilizados para ayudar o complementar el análisis visual de la señal bioeléctrica. Sin embargo, y a pesar de los grandes avances tanto teóricos como tecnológicos de los últimos tiempos, en la actualidad no se dispone de ninguna técnica, método, herramienta o equipo universal que resuelva el problema de la interpretación exacta y precisa de los eventos epilépticos en la señal EEG.

Los procesos neuronales que generan el EEG son intrínsecamente dinámicos y aleatorios, y sólo se pueden considerar cuasi-estacionarios en periodos cortos o bajo condiciones controladas (sueño, ojos abiertos, ojos cerrados). El EEG ictal presenta patrones no-estacionarios muy complejos que en ocasiones son difíciles de clasificar visualmente y por lo tanto en línea. Las espigas constituyen uno de los elementos patológicos más significativos en la interpretación de actividad epileptiforme, su morfología varía de complejas ondas punta aguda a actividad sinusoidal rápida o lenta, un patrón puede estar envuelto en otro y varios pueden ocurrir simultáneamente en diferentes sitios, la correlación tiempo-espacial es una característica muy importante para su análisis, [FAU92].

La naturaleza aleatoria de las señales biológicas nos lleva a pensar que las técnicas de procesamiento "modernas" son herramientas de análisis más adecuadas para representar los eventos aleatorios presentes en las señales EEG o ECoG cuando se presentan crisis epilépticas, en comparación con los métodos clásicos.

Las distribuciones tiempo-frecuencia, las técnicas Multi-resolución, los métodos paramétricos han mostrado mejores resultados respecto a las representaciones de análisis espectral basadas en la transformada de Fourier como el mapeo cerebral, los espectros de potencia, el arreglo espectral compactado, los histogramas o los estimadores como el periodograma, ya que éstos sólo realizan un análisis promedio sobre la época seleccionada, causando pérdida de información cuando ocurren cambios rápidos en la actividad eléctrica cerebral, como en el caso de las espigas epileptiformes o los brotes-supresión durante la inducción anestésica .

Sin embargo, a pesar de las ventajas en el análisis y síntesis de señales biológicas comparado con los métodos tradicionales, las aplicaciones clínicas en línea no han sido posibles debido al exceso de cálculos computacionales, así como a la memoria requerida para su proceso. El análisis computarizado del Electroencefalograma-Ictal representa un caso crítico en el procesamiento de señales, ya que son señales caóticas y difíciles de interpretar. Normalmente son aleatorias, no-estacionarias, no-lineales, discontinuas, complejas y de origen indeterminado

El problema a resolver es analizar, implementar y evaluar un algoritmo basado en técnicas modernas de procesamiento que permita identificar, clasificar y caracterizar espigas epilépticas puntiformes en la señal electroencefalográfica.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.2 Objetivos

Construir una estructura de decisión sistematizada capaz de realzar y detectar transitorios epilépticos presentes en la señal ECoG-Ictal, proponiendo un esquema de detección basado en técnicas modernas de procesamiento digital que mejoren los resultados que actualmente se han obtenido con las técnicas visuales o de Fourier.

1.2.1 Objetivos Generales

Una vez estudiadas las diferentes técnicas de procesamiento que se han aplicado a las señales EEG se decidió comparar y estudiar aquellas basadas en el análisis tiempo-frecuencia y tiempo-escala encaminadas a la caracterización automática espacio-temporal de ondas epilépticas puntiformes (espigas y onda-punta), presentes en los registros electroencefalográficos, mostrando su presencia, frecuencia, amplitud y localización.

Incluir en la comparación los criterios de:

- 1) Especificidad
- 2) Sensibilidad
- 3) Rapidez: Razón (tiempo de registro / tiempo de análisis)

1.2.2 Objetivos Particulares

- Analizar y evaluar cuatro algoritmos tiempo frecuencia (Espectrograma, distribución Wigner-Ville, distribución Choi-Williams, y distribución Reducción de Interferencias), y dos tiempo-escala (transformada wavelet y *wavelet packet*) por sus propiedades para el análisis de señales cuyo contenido espectral varía respecto al tiempo, especialmente para la caracterización de transitorios.
- Evaluar el desempeño de los algoritmos y proponer un esquema original con mejores características de sensibilidad, especificidad, rapidez y robustez en la caracterización de espigas epilépticas.
- Desarrollar una herramienta clínica para indicar la localización del foco epiléptico y así disminuir los riesgos de morbi-mortalidad inherentes a la cirugía de epilepsia.



CAPITULO 2. SISTEMA NERVIOSO CENTRAL Y EPILEPSIA

En este capítulo se presenta una visión general de los mecanismos que originan la crisis convulsivas epilépticas las zonas anatómicas y la importancia que tiene su estudio, diagnóstico y tratamiento.

2.1 Anatomía Cerebral

El sistema nervioso es el conjunto de órganos, ganglios y fibras nerviosas que, diseminados por todo el cuerpo, tienen como finalidad regir el funcionamiento del resto del organismo. Desde el punto de vista anatómico se le considera dividido en central y periférico.

El sistema nervioso central se encuentra colocado en el interior de la cavidad craneana y del conducto raquídeo. La masa encefálica del adulto constituye uno de los órganos más voluminosos del cuerpo, con un peso promedio de 1.3Kg. Está constituido por el Tronco encefálico, el cerebelo, el cerebro propiamente dicho (telencéfalo), y el diencefalo, [TOR84]. El tronco encefálico consiste de la médula oblongada (bulbo raquídeo), el puente de Varolio (protuberancia anular) y el mesencéfalo (cerebro medio) en su extremo inferior se continúa con la médula espinal. Por arriba de él se encuentra el diencefalo compuesto principalmente por el tálamo y el hipotálamo. El cerebro -hemisferios cerebrales- cubre el diencefalo y constituye cerca de siete octavas partes del peso total de la masa encefálica y ocupa la mayor parte de la cavidad craneal. Por detrás de los hemisferios cerebrales y detrás del tronco encefálico se encuentra el cerebelo.

La masa encefálica está protegida por los huesos craneales y las meninges. Las meninges craneales rodean al encéfalo: la externa es llamada la duramadre; la intermedia la aracnoides y la interna la piamadre. Las dos primeras están íntimamente unidas entre sí y separadas a su vez de la piamadre por un espacio (subaracnoideo). El encéfalo posee otra protección adicional; el líquido cefalorraquídeo (cefalorraquídeo) que circula en el espacio subaracnoideo de la médula espinal y el encéfalo, y entre los ventrículos de este último.

Todos los órganos del sistema nervioso tienen en su constitución dos clases de sustancias en mayor o menor proporción: a) la sustancia gris, en la cual hay células nerviosas (neuronas) y fibras nerviosas, y b) la sustancia blanca constituida sólo por fibras nerviosas. La superficie del cerebro, compuesta por sustancia gris, tiene un grosor de 2 a 4mm y se le denomina corteza cerebral; incluye millones de neuronas dispuestas en seis capas. Por debajo de la corteza se encuentra la sustancia blanca del cerebro.

La sustancia gris recubre los hemisferios cerebrales a manera de corteza y la sustancia blanca está formada por fibras de diferentes tamaños según su recorrido y su función. Así hay fibras de asociación, que conectan distintas porciones en un mismo hemisferio; fibras comisurales, que unen entre sí ambos hemisferios; fibras de proyección, que unen la corteza cerebral con otras estructuras nerviosas inferiores del neuroeje, y fibras terminales que terminan en la corteza cerebral.

2.1.1 Generalidades

El cerebro es la porción más superior, anterior y voluminosa del encéfalo. Para su estudio ofrece tres caras: Una cara inferior o Base que descansa por atrás sobre la tienda del Cerebelo, que es un tabique de la duramadre. Por detrás se relaciona con las bóvedas del Frontal a los lados y la Apófisis Cristagalli en medio.

Durante el desarrollo embrionario, en el cual el encéfalo aumenta rápidamente de tamaño, la sustancia gris de la corteza crece con mayor rapidez que la sustancia blanca subyacente. Como resultado de ello, la región cortical se pliega sobre sí misma, esta cara superior presenta muchas entrantes, los pliegues más profundos reciben el nombre de fisuras, y los menos profundos se denominan los surcos o Cisuras Cerebrales las que a su vez limitan numerosas salientes denominadas Circunvoluciones. La Cisura longitudinal, la más grande y profunda, conocida como Cisura Interhemisférica, casi separa al cerebro en mitades simétricas derecha e izquierda, situadas a los lados de la línea media llamados hemisferios cerebrales y conectados internamente por un grueso haz de fibras transversas de sustancia blanca llamado Cuerpo Callosos.

Las cisuras más importantes por su profundidad así como su función para delimitar a cada hemisferio en regiones o Lóbulos Cerebrales, son: La cisura de Silvio que se observa en la base del cerebro y la divide en dos porciones, anterior y posterior; esta cisura se continúa hacia los lados y surca las caras laterales exteriores de los hemisferios. La cisura de Rolando se encuentra en la cara externa y divide al lóbulo frontal del parietal; es casi transversal a la de Silvio, aunque no llega a ella y termina en la cisura interhemisférica, un poco por detrás de la parte media. La cisura Perpendicular Externa, también llamada occipital, se inicia en la cisura interhemisférica y se dirige hacia abajo, terminando libremente un poco por arriba del borde que forman la cara externa y la base.

Los cuatro Lóbulos Cerebrales que delimitan los surcos ya descritos son: El Lóbulo Frontal, está limitado hacia atrás por la Cisura de Rolando y hacia abajo por la Cisura de Silvio. El Lóbulo Parietal que abajo linda con la Cisura de Silvio y en la parte anterior lo limita la Cisura de Rolando. El lóbulo Temporal tiene arriba a la Cisura de Silvio y atrás a la Perpendicular Externa. Finalmente el Lóbulo Occipital ocupa la porción más posterior del Cerebro y está limitado hacia adelante por la Cisura Perpendicular Externa. Las circunvoluciones son numerosas y se agrupan de acuerdo al lóbulo que corresponde. Así, se describen el lóbulo frontal, que cuenta con cuatro circunvoluciones, el lóbulo parietal, por detrás del anterior, con tres circunvoluciones; el temporal; limitado hacia arriba por la cisura de Silvio también con tres circunvoluciones, y el lóbulo occipital con tres circunvoluciones.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

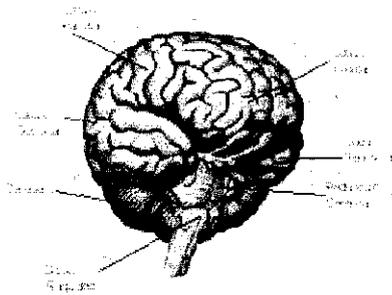


Figura 2.1.1. Relación anatómica de las estructuras del cerebro. (Esquema encontrado en www.biology.about.com/science/biology/library/organs/brain).

Entre otras estructuras anatómicas podemos mencionar el quiasma óptico, lugar de unión de los dos nervios ópticos. Atrás de esta estructura se encuentra el tuber cinereum, que es una formación de sustancia gris, de la cual nace el tallo pituitario y la glándula hipófisis o pituitaria, que se aloja en la silla turca.

Tanto la sustancia gris como la sustancia blanca que se encuentran en la corteza cerebral, están dispuestas en capas en número de seis, tres blancas y tres grises. El resto de la masa cerebral es en su mayoría sustancia blanca, con porciones irregulares de sustancia gris en su seno, que forman los distintos núcleos grises cerebrales. Existen tres cavidades en el interior del cerebro llamados ventrículos, dos de ellos son laterales, iguales y simétricos denominados ventrículos laterales; el otro es impar y situado en la línea media, por lo que se llama ventrículo medio o tercer ventrículo. Este tercer ventrículo está comunicado con los ventrículos laterales por un agujero para cada uno llamados agujeros de Monro.

En la porción más profunda de los Hemisferios Cerebrales y a cercana distancia del Tallo Cerebral, se encuentra una masa de sustancia gris que recibe el nombre de Núcleos Basales, éstos están formados por: Los Tálamos, El Cuerpo Estriado integrado por el Núcleo Lenticular y el Núcleo Caudado, El Hipotálamo, La Amígdala y el Clausuro, [TOR84].

2.2 NeuroFisiología

El sistema nervioso está integrado, como el resto de los aparatos y sistemas del organismo, por células. La célula nerviosa o neurona es la unidad del sistema nervioso. Difiere de las demás células del organismo, en que emiten prolongaciones protoplasmáticas que alcanzan en ocasiones longitudes de un metro. A estas prolongaciones, constituidas por el axón o cilindrojeje, se le

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

conoce como fibras nerviosas. Además de las características propias de la célula en general, las neuronas tienen propiedades especiales; éstas son la irritabilidad y la conductividad. La irritabilidad consiste en la respuesta invariable a los estímulos; la conductividad se refiere a la capacidad de conducir estímulos nerviosos a otras células, a manera de un cable conductor.

La corriente nerviosa sólo puede ser conducida en una dirección a través del cilindroje, de ahí que se tengan vías aferentes, las que llevan el impulso nervioso de la periferia al centro y eferentes, las que transmiten del centro a la periferia.

Las funciones del cerebro son muy numerosas y complejas. De manera muy general, se divide a la corteza según la función que lleve a cabo en: Áreas Motoras que gobiernan el movimiento de los músculos, las Sensitivas que se encargan de regular las sensaciones y las Áreas de Asociación que vinculan con los procesos emocionales e intelectuales, [ADA93].

Área Sensorial.- se localiza directamente por detrás del surco central del cerebro, en el giro postcentral; llega desde la fisura longitudinal, en la parte superior de la corteza hasta el surco cerebral lateral. A esta área llegan sensaciones provenientes de receptores cutáneos, musculares y viscerales de diversas partes del cuerpo. La función principal de esta área es la de localizar de manera precisa los sitios del cuerpo en donde se originan las sensaciones; el tálamo, por su parte, las localiza de una manera más general, es decir, recibe sensaciones de grandes áreas del cuerpo, pero no puede distinguir las áreas específicas en donde ocurrió la estimulación. Esta última capacidad está reservada al área sensorial de la corteza cerebral.

En el lóbulo occipital está el Centro Visual, mientras que en el Lóbulo Temporal de la corteza cerebral se localiza el Centro Auditivo donde se integran las sensaciones sonoras y al reconocerse e interpretarse se transforman en percepciones. Por detrás de la Cisura de Rolando, en el lóbulo parietal, se encuentra la Zona Táctil y Termoalgésica que son lugares de la corteza donde finalizan los cilindrojes que conducen los impulsos nerviosos de las sensaciones de temperatura, tacto y dolor, y en donde estas sensaciones se hacen concientes. Por último mencionemos que los centros de lenguaje se encuentran en los lóbulos frontal, parietal y temporal de la corteza motora.

Área de Asociación.- En el plano posterior al área sensorial está el área de asociación, esta área recibe información proveniente del tálamo, otros centros inferiores del encéfalo y el área sensorial; integra e interpreta las sensaciones. Es esta área la que permite que podamos identificar la forma y textura de un objeto o la orientación que tiene respecto a otro, sin verlo, o las posiciones relativas de dos partes del cuerpo. Otra función del área de asociación es el almacenamiento de recuerdos de experiencias sensoriales pasadas lo que permite compararlas con las actuales. Las áreas de asociación de la corteza ocupan la mayor parte de las superficies laterales de los lóbulos frontales por delante de las áreas motoras, las áreas de asociación se vinculan con memoria, emociones, razonamiento, voluntad, juicio, rasgos de la personalidad e inteligencia.

Como un ejemplo mencionaremos que al escuchar que alguien habla, los sonidos son transmitidos al área auditiva primaria de la corteza y de esta última al área de asociación auditiva, sitio donde se interpretan como palabras.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Área Motora.- el área motora primaria también llamada de Brodmann, consiste de zonas que controlan músculos específicos o grupos musculares; la estimulación del área motora primaria da por resultado la contracción del músculo correspondiente, por lo general en el otro lado del cuerpo. Esta área se encuentra por delante de la Cisura de Rolando. El área premotora guarda relación con las actividades motoras adquiridas, de cierta complejidad y de carácter secuencial. Genera impulsos que producen contracción de grupos específicos de músculos, es decir regula movimientos precisos.

Algunas estructuras del área motora que podemos mencionar son: El haz piramidal cruzado, en su ruta Zona Motora-Médula Espinal, pasa la cápsula interna, entre el Tálamo y el Cuerpo estriado y en su trayecto va dejando numerosas fibras para los Núcleos de los Nervios Craneales Motores y Mixtos. Al llegar al Bulbo espinal, la mayor parte de los cilindroejes se cruzan hacia el lado opuesto, y este manojito de axones va a terminar alrededor de las células motrices de las Astas anteriores de la Médula. Otros Hazes también motores son, el Fascículo Vestíbulo Espinal que produce impulsos tónicos sobre los músculos de las extremidades lo cual favorece el equilibrio. El Fascículo Rubroespinal, viene del Núcleo Rojo del Mesencéfalo, tiene como función mejorar la coordinación de los reflejos posturales.

2.2.1 Las Ondas Cerebrales y su Distribución Diferencial de Voltaje

El Electroencefalograma

Las células del encéfalo o neuronas generan la actividad eléctrica cerebral, como resultado de los potenciales eléctricos de los millones de neuronas, la suma de estos potenciales recibe el nombre de ondas cerebrales. La intensidad y la calidad de esta actividad eléctrica depende en gran parte de la excitación global del encéfalo resultante de funciones del sistema activador reticular.

La descarga de una neurona o fibra nerviosa única en el cerebro no puede registrarse desde el cuero cabelludo. En cambio para que un potencial eléctrico pueda registrarse desde la superficie del cráneo, es preciso que grandes cantidades de tejido nervioso produzcan simultáneamente corriente eléctrica.

Los potenciales cerebrales espontáneos transmitidos hasta la corteza cerebral y captados en el cuero cabelludo, son una combinación de la actividad de un número de pequeñas zonas corticales y sus amplitudes reflejan el grado de sincronización de la actividad cortical subyacente. Son especialmente potenciales postsinápticos de los somas de las células y de las dendritas de células piramidales orientadas verticalmente en las capas corticales. La estructura columnar de la corteza cerebral facilita la suma así como la cancelación mutua. Las señales son atenuadas por la intervención de capas de tejido de la duramadre, del cráneo y del cuero cabelludo. Sin embargo, no todo el registro sobre el cuerpo cabelludo de la actividad eléctrica cerebral es de origen cortical. Por ejemplo, ciertas estructuras subcorticales, pueden generar ondas eléctricas de gran amplitud.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Hans Berger en 1929 describió el ritmo alfa registrado en la región occipital de un sujeto despierto y en reposo por medio de un galvanómetro de cuerda, descartó que esta actividad fuera un artefacto muscular, movimientos oculares, pulso arterial o actividad electrocardiográfica. La actividad eléctrica del Sistema Nervioso Central, se propaga por todo el cerebro e inclusive el cráneo, puede captarse a través de electrodos colocados en la superficie del cuero cabelludo. Este método denominado electroencefalograma (EEG), permite registrar la actividad eléctrica normal de áreas restringidas del cerebro y detectar anomalías eléctricas presentes en las mismas. Como resultado de esto, se ha demostrado que los patrones de EEG se modifican a ciertas variables bioquímicas, metabólicas, circulatorias, hormonales, neuroeléctricas y conductuales, [BRO95].



Figura 2.2.1 Electroencefalograma con ondas alfa de un sujeto normal durante ojos cerrados

Las intensidades de las ondas cerebrales en la superficie del cuero cabelludo varían de $2\mu\text{V}$ a cerca de $300\mu\text{V}$, las características dependen estrechamente del grado de actividad de la corteza cerebral y las ondas difieren considerablemente en las personas sanas según haya vigilia o sueño, en estados patológicos pueden llegar hasta valores de 1mV .

La actividad rítmica del cerebro en el sujeto sano está caracterizada principalmente por cuatro tipos diferentes de actividades o ritmos:

- Onda Delta (δ), la frecuencia de estas ondas se encuentra entre $0\text{-}4\text{Hz}$, las ondas delta solo se presentan durante la fase III del sueño profundo en el adulto y en el lactante en estado de vigilia. Cuando se presentan en el adulto despierto indican lesión cerebral. Su voltaje es mayor a $50\mu\text{V}$. Las ondas δ pueden ocurrir exclusivamente en la corteza, independientemente de la actividad profunda del cerebro.
- Onda Theta (τ), el rango de frecuencia es $4\text{-}8\text{Hz}$ y suelen ocurrir en niños y en los adultos en la fase I y II de sueño fisiológico y cuando experimentan tensión emocional y fatiga. La amplitud es mayor a $40\mu\text{V}$ y cuando es menor a $15\mu\text{V}$ es anormal, pero si éste se encuentra acompañado de un ritmo alfa bien establecido se considera normal. La encontramos especialmente en las zonas temporales y parietales.
- Onda Alfa (α), estas ondas rítmicas ocurren con una frecuencia de $8\text{-}12\text{Hz}$ con una amplitud entre $20\text{-}60\mu\text{V}$, el cual varía con la edad, a mayor edad menor voltaje, la distancia interelectrodos, cambios en la densidad ósea y disminución con el aumento de la impedancia. Se observa en los sujetos sanos si están despiertos y en reposo se bloquea con la apertura ocular y concentración, desaparece por completo durante el sueño. Se le puede encontrar muy extendida por toda la corteza cerebral y especialmente en las partes posteriores de las regiones parieto-occipitales cuando el sujeto está relajado y con los ojos cerrados. Existe una variante el

Alfa rápido y el Alfa lento, Ritmo Mu de 8-10Hz, que no se bloquea con la apertura ocular, solo se bloquea unilateralmente con el movimiento de la extremidad contralateral y se localiza en regiones centroparientales.

- Onda Beta(β), la frecuencia de estas ondas varía de 12 a 60Hz y por lo general se presentan con la actividad intensa del sistema nervioso, es decir, durante los períodos de actividad sensorial y mental. Voltaje menor a $35\mu\text{V}$ que puede aumentar en la somnolencia. Se encuentran en las partes anteriores frontales y frontopolares. Su localización frontal se relaciona con funciones sensoriomotoras. Su asimetría se considera patológica.

Gradiente de voltaje postero-anterior; el voltaje es mayor en las partes posteriores que en las anteriores. La zona frontal cuenta con ritmo de baja amplitud ($\approx 25\mu\text{V}$) y en las áreas parieto-occipitales el rango es de $25\text{-}50\mu\text{V}$.

Las estimulaciones que recibe el organismo afectan los ritmos: La luz provoca que el alfa se interrumpa dando lugar a ritmos en el rango beta. Las estimulaciones propioceptivas (movimientos realizados por miembros del organismo) bloquean los ritmos beta y mu. Estimulaciones emocionales producen cambios en theta de las regiones temporales. El ritmo Alfa se bloquea a la apertura de los ojos. Cuando se pasa de la vigilia al adormecimiento, se generan bajas frecuencias en forma progresiva, el alfa se corre hacia las regiones anteriores y su frecuencia se hace menor. Estos y otros procesos de activación se utilizan como técnicas para el estudio de patologías.

2.2.2 Actividad Lenta en el EEG

La mayor utilidad del electroencefalograma estriba en el diagnóstico de distintos tipos de lesiones cerebrales como tumores, localización de focos y clasificación de trastornos eléctricos que originan la epilepsia. El análisis visual del EEG consiste en conocer los grafoelementos normales como los ritmos alfa y diferenciar los cambios anormales, [CHA74].

Entre los cambios anormales se pueden mencionar, ausencia o escaso ritmo alfa posterior así como, asimetría de los ritmos alfa y beta. Dentro de la actividad lenta anormal están la delta arrítmica, la delta arrítmica difusa y la delta rítmica intermitente. Patrones anormales muy comunes son, ondas agudas generalizadas pseudoperiódicas, descargas de ondas agudas y lentas sincrónicas bilaterales y pseudoperiódicas. Ondas trifásicas, Paroxismo-supresión y ondas lentas pseudoperiódicas temporales entre otras.

El fenómeno más comúnmente encontrado en el EEG que indica lesión estructural es la aparición de actividad lenta circunscrita. Se establece que cualquier lesión que involucre la sustancia blanca subcortical o sustancia gris subcortical resulta en ondas lentas focales. La amplitud, frecuencia, topografía, persistencia y reactividad de las alteraciones focales son indicadores del grado de alteraciones o disfunción.

La actividad lenta continua sugiere daño severo del tejido cerebral (efecto de masa e involucra el hemisferio profundo), mientras que la actividad lenta intermitente indica una pequeña lesión y ausencia de efecto de masa. Los pacientes con actividad lenta focal reactiva consistente tienen evidencia de menor daño cerebral en comparación con aquellos pacientes con actividad lenta no reactiva.

El tejido tumoral por sí mismo es eléctricamente inactivo y los cambios observados en el EEG en estas lesiones son registrados en tejido circunvecino al tumor.

Una desconexión cortical debido a daño en la materia blanca de alguna manera juega un rol en la aparición de la actividad delta periódica. La actividad delta periódica es de origen cortical debida a una interrupción de vías cortico-corticales y tálamo-corticales. Los complejos generalizados lentos monomórficos se consideran como una severa manifestación de daño cerebral, se sugiere que pueden ser generados en áreas subcorticales y pueden ser disparados por un cambio en la concentración de oxígeno en sangre.

La actividad lenta paroxística bilateral (ritmo lento intermitente con actividad lenta rítmica), es un ritmo que se ha atribuido a procesos patológicos que involucran la parte superior del tallo cerebral, diencéfalo y lesiones frontales mesiales. Se dice que éste es un ritmo proyectado o transmitido, [GUY75].

2.3 Epilepsia

Una de las principales aplicaciones del electroencefalograma estriba en el diagnóstico de distintos tipos de epilepsia, y en la búsqueda en el cerebro de los focos en donde se originan, para con ello determinar el mejor tratamiento clínico-quirúrgico.

2.3.1 Definición

La epilepsia es un trastorno caracterizado por ataques periódicos, recurrentes y breves de disfunción psicológica, sensorial o motora, o las tres al mismo tiempo. Los ataques epilépticos son resultado de descargas eléctricas anormales e irregulares de millones de neuronas encefálicas. Tales descargas estimulan gran parte de las neuronas, que envían impulsos por sus vías de conducción. Como resultado, la persona que sufre el ataque presenta contracción involuntaria de músculos esqueléticos. Por otra parte, el sujeto puede "percibir" luces, ruidos u olores sin que haya estimulación de los receptores correspondientes. Las descargas eléctricas también suelen inhibir algunos centros encefálicos, por ejemplo, el centro de vigilia y en este último caso la persona pierde la conciencia, [AME85].

Existen muy diversos ataques epilépticos. El tipo de ataque que se presente depende de que área del encéfalo recibe estimulación, y si ésta última se limita a un área pequeña o se disemina a todo el encéfalo. Fundamentalmente hay dos tipos de epilepsia: epilepsia generalizada y epilepsia parcial. La primera abarca prácticamente todo el cerebro al mismo tiempo, mientras que la segunda solo interesa una parte, a veces un punto muy pequeño. Los ataques generalizados

(ataques convulsivos) se inician como resultado de un gran número de descargas eléctricas que viajan por las áreas motoras y se diseminan a las áreas de la conciencia. La persona se desvanece, presenta movimientos espasmódicos de músculos voluntarios y, en ocasiones, no regula la micción y la defecación. También resultan afectadas, con frecuencia, las áreas sensoriales y las que participan en las funciones intelectuales, tienen alucinaciones luminosas u olfatorias, a esto se le llama aura. El estado de desvanecimiento y la actividad motora duran unos minutos y a continuación los músculos se relajan y la persona vuelve al estado de vigilia. Otro tipo son los ataques focalizados, la persona suele desvanecerse durante algunos segundos, pero no sufre la pérdida del control motor, tiene un aspecto de estar "soñando despierto", ocasiona una pérdida periódica de la atención, [TOR84].

Las causas de la epilepsia son muy diversas. Incluyen lesiones cefálicas, tumores y abscesos cefálicos e infecciones características de la niñez como parotiditis, tosferina y sarampión. En algunos casos la epilepsia es idiopática, es decir, de causa desconocida. Si la epilepsia se presenta con ataques graves, no controlables y altamente frecuentes pueden ocurrir lesiones cerebrales severas e irreversibles.

Es posible eliminar o aliviar en alguna medida los ataques epilépticos por medio de fármacos que inhiben la estimulación de las neuronas. Muchos de esos fármacos cambian la permeabilidad de la membrana celular de la neurona, de modo que limitan su despolarización

Electroencefalograma en Epilepsia

Los primeros investigadores que registraron en forma sistematizada los patrones electroencefalográficos críticos fueron Gibbs y sus colaboradores en 1935. Obviamente es difícil capturar el registro EEG de los pacientes con crisis, razón por la cual se han implementado métodos de inducción. La administración de medicamentos convulsionantes y la aplicación de electrochoques no son el procedimiento o sistema ideal para inducir crisis epilépticas, ya que el patrón clínico no es idéntico al de una crisis espontánea. Además la telemetría, el monitoreo continuo y la videograbación simultánea han permitido mejorar la observación de estos fenómenos y la información obtenida permite correlacionar y clasificar en forma más adecuada entre los eventos críticos y los fenómenos conductuales. La morfología de los registros es fundamental, dentro de análisis electroencefalográfico para decidir su significado.

Los grafocelmentos que sugieren actividad epileptiforme son: Punta, Punta onda lenta, Poliespiga, Onda aguda, onda aguda-onda lenta. De acuerdo con el comité en terminología de la Federación Internacional de Sociedades para Electroencefalografía y Neurofisiología Clínica, [AME85] una espiga epiléptica es un transitorio claramente distinguido de la actividad de fondo del EEG, con un pico puntiagudo y una duración de 50 -100ms, asimetría en su forma y configuración bi o trifásica. Las espigas pueden ocurrir aisladas pero es más frecuente que les siga una onda lenta de duración 150-350ms formando el complejo espiga-onda lenta y tienen tendencia a surgir de una actividad de fondo lenta e irregular.

Por otro lado en el EEG de pacientes con epilepsia, el complejo espiga-onda lenta bilateral sincrónica de 3 por segundo, dura de pocos a varios segundos y se asocia con manifestaciones clínicas de parpadeo, automatismos y alteraciones del estado de conciencia. Weir en 1965 describió la morfología de la espiga-onda, encontrando que la espiga es de carácter polifásico y las ondas rectas son transitorias, simples y monofásicas.

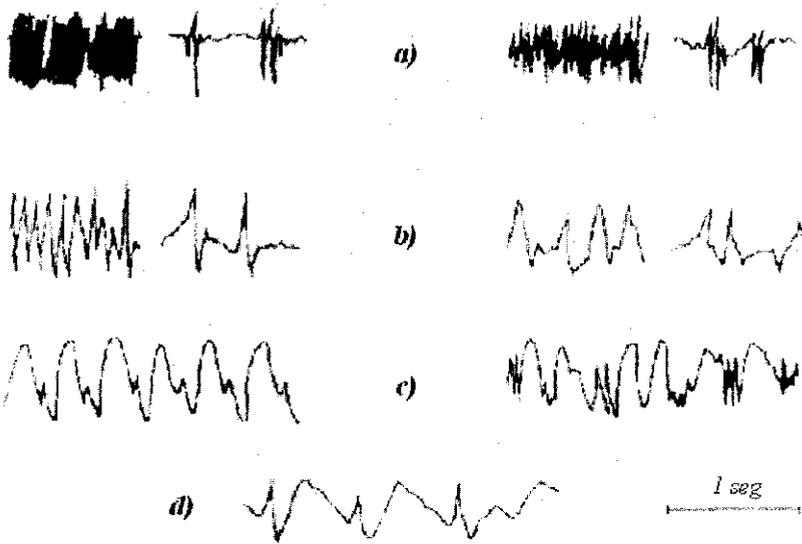


Figura 2.3.1 Comparación de diversos patrones electroencefalográficos. a) Espiga Puntiforme, b) Ondas Agudas, c) Izquierda Punta-Onda y Derecha Poliespiga-Onda Aguda, d) Onda Aguda-Onda Lenta, [BIC79].

- Espigas(puntas). Potenciales bifásicos cuya primera fase es por lo regular de polaridad negativa y con una duración menor a 80 milisegundos; las espigas generalmente son seguidas de una onda lenta de menor amplitud.
- Ondas agudas. Potenciales bifásicos o trifásicos, cuya fase principal es de polaridad negativa y con una duración de 80 a 200 milisegundos.
- Complejos espiga-onda. Combinación irregular de espigas múltiples que preceden a una onda.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Hallazgos Electroencefalográficos en diferentes crisis epilépticas

• CRISIS GENERALIZADAS

Crisis de ausencia: brotes generalizados de descargas de punta-onda lenta de 2.5 a 3.5Hz, los cuales inician y terminan en forma abrupta, el estatus es asociado con descargas de punta-onda lenta o poliespiga-onda lenta.

Crisis de ausencia atípica: brotes de descargas de punta-ondas de 1.5 a 2.5Hz, bilaterales o generalizados.

Crisis Mioclónicas: no están asociadas a hallazgos electroencefalográficos representativos, puede encontrarse aplanamiento súbito, puntas múltiples, ondas agudas polifásicas, punta-onda lenta o polipunta-onda lenta.

Crisis clónicas: durante el ictus se registra una actividad rápida generalizada mixta con punta-onda lenta o polipunta-onda lenta, en el periodo interictal se presentan punta-onda lenta o polipunta-onda lenta.

Crisis tónicas: durante las crisis tónicas el EEG muestra bajo voltaje, actividad rápida o actividad de 9 a 10Hz, los cuales disminuyen en frecuencia y aumentan en amplitud; en el registro interictal pueden verse ondas agudas y ondas lentas rítmicas.

Crisis Tónico-Clónicas: son asociadas con aplanamiento súbito de la actividad de fondo con pocos segundos de duración seguidos por una actividad rápida difusa de cerca de 10Hz la cual gradualmente incrementa en amplitud (reclutamiento) posteriormente el EEG gradualmente cambia de patrón de punta-onda lenta o polipunta-onda lenta a una disminución gradual de la frecuencia. El final de la crisis es señalada por la atenuación del voltaje durando pocos segundos, el cual es seguido por un retorno gradual de la amplitud y la aparición de bajas frecuencias de la actividad de fondo.

Crisis Atónicas: presenta varios patrones electroencefalográficos, como patrones generalizados de punta-onda lenta, poliespiga-onda lenta y actividad rápida de bajo voltaje.

• CRISIS PARCIALES

Crisis parciales simples: pueden ser asociadas con punta, ondas agudas, desincronización y actividad theta o delta.

Crisis parciales complejas: puntas y ondas agudas en regiones temporales con mayor frecuencia, menos comúnmente en otras regiones. La descarga epileptiforme en regiones temporales puede ser bilateral, bisincrónica o bilateral independiente.

Crisis Rolándicas o Silvianas: se caracterizan por puntas uni o bilaterales independientes en áreas centro temporales. La actividad de base es normal.

2.3.2 Importancia

Como hemos visto el Sistema Nervioso dirige y controla todo aquello que sentimos, hacemos o pensamos. Ningún órgano del cuerpo escapa a esta supervisión y gobierno, por lo que cuando, desafortunadamente para un ser humano, algún centro nervioso sufre alguna lesión o padecimiento, los efectos desfavorables repercuten inmediatamente en algunas de las esferas laborales del organismo.

La parálisis, la atrofia o disminución de tamaño de algún órgano, la anestesia o falta de sensibilidad de algún sitio corporal, la conducción o interrupción de impulsos eléctricos en forma desordenada, la epilepsia, son algunos ejemplos de los trastornos que pueden modificar la calidad de vida de un individuo.

La epilepsia es uno de los trastornos neurológicos más frecuentes, superado únicamente por el accidente vascular cerebral en su incidencia. El número de nuevos casos por año se ha estimado entre 70000 y 130000. El riesgo de que un individuo tenga epilepsia a los 60 años es de 1-3%, [HAU90].

Los reportes acerca de la prevalencia de síndromes epilépticos fluctúa entre 6.6 por 1000 habitantes en la Ciudad de Rochester (periodo 1935-1967) a 57 por 1000 en una comunidad tropical de Panamá. El Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía encontró una prevalencia de epilepsia en la delegación de Tlalpan (Ciudad de México) de 18.2 por 1000.

En el ser humano, en relación a la etiología de la epilepsia, en cerca del 60% de los pacientes ésta no es posible ser esclarecida, únicamente en alrededor de 4 de cada 6 pacientes es posible mediante la tecnología actual conocer la causa de origen de estos síndromes, [GAR86]. Dentro del grupo de lesiones que con mayor frecuencia son asociadas como factores causales de crisis epilépticas son : malformaciones vasculares, tumores intracraneales, neuroinfección, parasitosis y algunas alteraciones neurodegenerativas.

En 1983 Ward estimó que 360000 pacientes tienen crisis de difícil control y que por lo menos 54000 o 15% pudieran beneficiarse de tratamiento quirúrgico. Por ello se requiere del desarrollo de diferentes modelos de epilepsia que permitan la investigación de potenciales métodos de tratamiento.

Los modelos experimentales de epilepsia buscan semejanza con las crisis clínicas humanas, tratando de reproducir características tales como la manifestación de fenómenos paroxísticos espontáneos, recurrentes y crónicos [RUB86]. Entre la gran variedad de modelos de epilepsia se emplean modelos de actividad paroxística genéticos, inducidos farmacológica o eléctricamente.

La investigación en modelos experimentales de epilepsia incluyen al estudio electrofisiológico, mecanismos moleculares de la descarga epiléptica, así como estudios genéticos, [BRA86]. Estos estudios se han realizado tanto *in vitro* como *in situ* en animales (gallina, cepas DBA/2 y tottering de ratón, ratas Wistar, gerbi, mandril senegalés). En estos modelos realizados en animales de

experimentación, diversas formas de tratamiento farmacológico o quirúrgico han sido probadas especialmente en aquellos modelos de crisis generalizadas y focales, de tal manera que el conocimiento de los factores causales de las epilepsias en humanos descansa en su mayor parte en la inferencia del estudio a partir de esos modelos experimentales en animales sobre mecanismos neuroquímicos y fisiológicos. Sin embargo el estudio de focos epileptógenos humanos *in vitro* aun espera ser desarrollado, esto es debido en parte, a las dificultades técnicas inherentes a dicho estudio.

Un factor importante para catalogar a un paciente como posible candidato a cirugía de epilepsia es la determinación adecuada del sitio de origen de la descarga epiléptica interictal recurrente, en forma de espigas, ondas agudas y complejos espiga-onda. Sin embargo, la actividad interictal es un índice de epileptogenicidad poco confiable por sí solo. Por lo cual es necesario el registro de episodios ictales poniendo especial atención en el sitio de inicio de la descarga epiléptica. La evaluación electrofisiológica de larga duración en los candidatos a cirugía de epilepsia contribuye a la mejoría del diagnóstico ya que permite valorar el inicio de las crisis habituales de cada paciente. El objetivo principal del EEG preoperatorio en pacientes con crisis parciales simples o complejas es proporcionar información electrofisiológica de la localización de la génesis del paroxismo, [AME85]. La mejor manera de realizar esta tarea es por medio del análisis conjunto del video-EEG de larga duración de las crisis espontáneas del candidato a cirugía de epilepsia, [AJM84]. Este método proporciona información sobre el patrón clínico de la crisis, registro del inicio y propagación de la actividad epiléptica correlación de las manifestaciones conductuales, registro de las anomalías EEG interictales, posibilidad de realizar una valoración del déficit neuropsicológico postictal inmediato. La congruencia entre los resultados de esta técnica y las otras pruebas de déficit funcional focal, permiten identificar con un alto grado de confianza la topografía de la lesión epileptogénica. A pesar del avance en estas técnicas, la localización precisa de un foco epiléptico es discutible, se requiere de la implantación de electrodos electrofisiológicos e intracerebrales transoperatorios para evaluaciones crónicas y semicrónicas.

La cirugía estereotáctica funcional es una tecnología que permite alternativas terapéuticas de mínima invasión con un riesgo de morbilidad mínimo al ofrecer posibilidades de abordaje hacia estructuras anatómicas inaccesibles mediante otras técnicas neuroquirúrgicas. La cirugía estereotáctica se inició con los trabajos pioneros de Horsley y Clarke en 1908 [TSH93], y está basada en sistemas de coordenadas cartesianas para la localización de cualquier punto en el espacio. De este modo se han desarrollado sistemas altamente sofisticados que permiten una adecuada neuronavegación por medios de neuroimagen como la ventriculografía, tomografía computarizada, resonancia magnética en conjunto con la información neurofisiológica.

El estudio sistemático de la actividad eléctrica intracerebral, con técnicas de registro de electroencefalografía de profundidad (estereoencefalografía - EEEG), de actividad multiunitaria (AMU), de actividad unitaria (AU), ruido neuronal y registro de impedancias como parte rutinaria en la realización de procedimientos de cirugía estereotáctica en humanos y como complemento fundamental de las técnicas actuales de neuronavegación por imagen fueron desarrolladas inicialmente cuando algunos centros percibieron las fallas e imprecisiones inherentes en la neuronavegación por imagen y a los registros electroencefalográficos (EEG) de



superficie y de electrocorticografía (ECoG) para un diagnóstico más exacto y en la toma de decisiones quirúrgicas, [TSH93,TSP93].

Estos métodos de registro intracerebral han permitido la implementación de métodos más adecuados y confiables en el campo de la neurocirugía estereotáctica y funcional, tales como el tratamiento de la epilepsia, movimientos anormales, dolor, psicocirugía, Tumores cerebrales, además la estimulación eléctrica vía nervios periféricos [UEM89] y los potenciales evocados de profundidad han sido técnicas muy valiosas para guiar las puntas, electrodos o agujas del equipo estereotáctico, especialmente para evitar trauma a los núcleos subtalámicos, la cápsula interna o los núcleos talámicos sensoriales, [AJM84]. Bancaud y Talairach [TSH93], establecieron que la zona epileptogénica debía ser circunscrita por lo menos por medio de registros ECoG, tal que la descarga ictal al inicio de la crisis pueda ser registrada y mapear la propagación de las descargas. A esta técnica de múltiples registros de profundidad diseminados en la zona a mapear se le denominó EEEG. En el área de la EEEG, por ejemplo, el grupo encabezado por Spencer [GIL95], demostró que cuando la localización de un foco epileptógeno se realizaba únicamente con la ayuda de EEG de superficie, el éxito quirúrgico era de 67%; sin embargo, cuando al registro de superficie se le sumaban los datos aportados por la EEEG, la posibilidad de éxito quirúrgico se incrementaba al 85% de los pacientes con epilepsia intratable intervenidos quirúrgicamente, de manera que alrededor de un 90% de los pacientes candidatos a cirugía de epilepsia son estudiados mediante EEEG como parte del protocolo de estudio preoperatorio debido a que el tratamiento quirúrgico en un 73% de los casos puede ser alterado por la información aportada mediante estas técnicas de registro. Además de los registros transoperatorios, la implantación con técnicas estereotácticas de electrodos profundos para registros crónicos [SPE81], ha ofrecido un medio indudable para la localización de focos epilépticos sobre un 80% de los casos de epilepsia intratable.

El ECoG es el registro de la actividad eléctrica sobre la corteza cerebral expuesta a cirugía. Este registro ECoG es útil durante craneotomías, en las cuales biopsias y sección son planeadas en una región que visualmente no tiene obvia patología. El procedimiento más común es la cirugía de epilepsia en la cual los límites de resección pueden ser establecidos usando el ECoG. Técnicamente esto se lleva a cabo usando un arreglo de electrodos incrustados en plástico-silicón (silastic), típicamente disponibles en arreglos rectangulares espaciados a 1cm, esos electrodos necesitan sobrecargarse con cotonoides húmedos para mantener buen contacto entre el electrodo y la corteza, especialmente en los bordes de la malla. Electrodos de agujas o caimanes pueden sujetarse a la duramadre o músculo distante al registro para usarse como una referencia neutral.

La interpretación del ECoG está basada en la actividad lenta y rápida presente en el registro en varios sitios. Generalmente se espera mayor cantidad de actividad rápida de la región frontal y central, con muchos agentes anestésicos. Esta técnica también puede llevarse a cabo en pacientes despiertos durante la craneotomía, en tales casos se puede presentar ritmo alfa como en cualquier EEG típico. Las regiones dañadas generalmente muestran un decremento de la actividad rápida y un incremento de las ondas lentas.

Estimulación eléctrica sobre la corteza también es realizada durante un ECoG, para la detección de focos epilépticos. Generalmente se utiliza un electrodo de estimulación el cual contiene un par

de contactos eléctricos separados por algunos milímetros y sosteniéndolos sobre la corteza mientras se aplica un tren de estímulos de 2, 5, 10 o 50Hz y duración de 2-5seg o un pulso único de duración alrededor de 0.2ms. La amplitud de voltaje o corriente se incrementa gradualmente hasta un punto donde una reacción conductual aparece (“conducta pico”). El límite de corriente seguro se puede conseguir con el tipo de electrodo de estimulación, mínimo contacto con la corteza y un máximo de corriente permitido(12-15mA). Una conducta pico podría interferir con la capacidad de lenguaje, esto puede ser probado en pacientes despiertos. Si la capacidad del paciente para hablar, repetir o nombrar algo es interrumpida al tiempo del tren eléctrico entonces la región cortical es considerada una Región Activa para esa CONDUCTA. La estimulación eléctrica también puede interferir en la capacidad para usar la mano, lengua u otras partes motoras, por lo tanto es una forma en la que el neurocirujano puede identificar la corteza motora y así tener criterios para la toma de decisión.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Base de Datos

Se generó una base de datos para evaluar la eficiencia, rendimiento y resolución de los algoritmos empleados en este trabajo. Esta base está compuesta de señales sintéticas y señales reales de ECoG y EEG.

3.1.1 Señales Sintéticas

Para evaluar la resolución en tiempo y frecuencia de los métodos aquí empleados, se elaboró una serie de señales simuladas con características de frecuencia, amplitud y periodicidad bien definidas.

1^{er} Conjunto. Se efectúan simulaciones con señales mono y multicomponentes en frecuencia, como la sinusoidal de 600Hz que dura 16ms existiendo una pausa de 48ms y después surgiendo otra sinusoidal de 1800Hz durante otros 16ms (ver figura 3.1.1A). La siguiente simulación es una suma de sinusoidales como se ilustra en la figura 3.1.1B

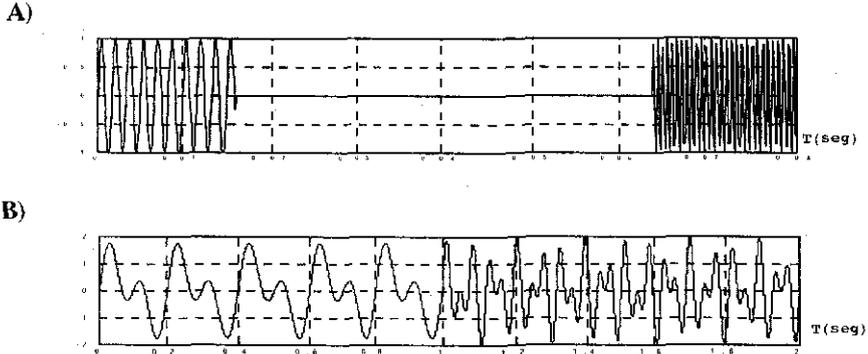
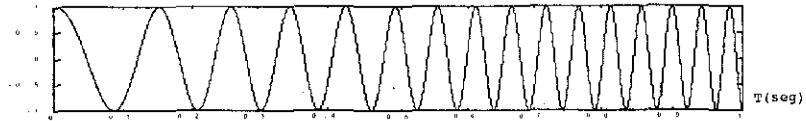


Figura 3.1.1 Sinusoidales simuladas, A) Dos sinusoidales de 600 y 1800Hz . B) Combinación de sinusoidales de 5 y 10Hz el primer segundo y suma de dos sinusoidales de 16 y 26Hz durante el siguiente segundo.

2^o Conjunto. Señales moduladas en frecuencia chirps lineales y cuadráticos; el primer chirp es una señal cuya frecuencia comienza en 5Hz y se va incrementado hasta 26Hz (figura 3.1.2A), el segundo es un chirp lineal cruzado que va desde 100Hz hasta 400Hz y viceversa, ver figura 3.1.2B, el último chirp es cuadrático cruzado de 100Hz a 400Hz, figura 3.1.2C.

TEXTO CON
FALLA DE ORIGEN

A)



B)



C)

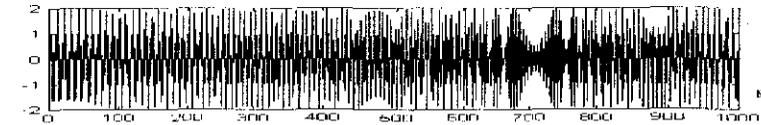


Figura 3.1.2 . Chirps simulados, A) Chirp de 5 a 26Hz, B) Chirp lineal cruzado que va desde 100Hz hasta 400Hz. C) Chirp cuadrático cruzado que va desde 100Hz hasta 400Hz.

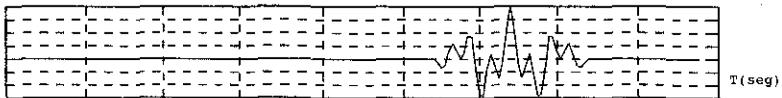
3^{er} Conjunto. Se implementan algunas funciones trascendentales, como las indicadas a continuación:

$$f_1(t) = 4\cos(2\pi(n/8) * (n/256)) + 4\cos(2\pi((512-n)/8 + 40) * (n/256)),$$

$$f_2(t) = 4\cos(2\pi(n/4) * (n/256)) + 4\cos(2\pi(n/8) * (n/256)),$$

$$f_3(t) = 4p(n)\cos(2\pi(20n/256)) + 4p(n)\cos(2\pi(50n/256)), \text{ con } p(n) = 1 - (n-128)^2/400$$

A)



B)

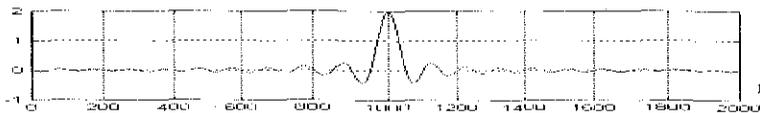


Figura 3.1.3. Funciones sintéticas A) Oscilación concentrada $f(t) = 4p(n)\cos(2\pi(20n/256)) + 4p(n)\cos(2\pi(50n/256))$. B) Función sinc $\text{sen}(x)/x$

3.1.2 Registros Electroencefalográficos

La evaluación comparativa de los diferentes métodos de procesamiento se llevo a cabo formando una base de datos compuesta de registros EEG y ECoG de pacientes con epilepsia intratable y sometidos a cirugía cerebral.

Las señales electroencefalográficas, se preprocesan primero analógicamente utilizando bioamplificadores diferenciales con una sensibilidad desde $50\mu\text{V/V}$ hasta $350\mu\text{V/V}$, filtrando a una banda de frecuencia de 0.53Hz - 70Hz ; la señal analógica se digitaliza con una tarjeta de Conversión Analógico/Digital de 16 canales de 12BITS, a una frecuencia de muestreo de 128Hz/canal .

Se analizan señales electrocorticográficas de 21 pacientes de ambos sexos sometidos a procedimientos neuroquirúrgicos electivos previamente diagnosticados con epilepsia intratable, de los cuales se eligieron 3200 minutos.

Se seleccionaron 66 segmentos con grafoelementos epilépticos clásicos(Espiga Puntiforme, Onda lenta Espicular y Poliespigas), como el Conjunto de Entrenamiento. El Conjunto de Validación se formó mediante registros EEG de superficie. Se eligieron épocas de siete segundos libres de artefactos, por canal que representan 896 muestras por época. Los algoritmos de procesamiento considerados en este trabajo se implementan en una computadora personal pentium III a 450Hz en MATLAB® Ver. 5.2.

Los registros EEG de superficie se obtienen colocando electrodos recubiertos con Ag/AgCl sobre el cuero cabelludo, ver figura 3.1.4. La colocación, posiciones y mediciones de estos electrodos se lleva a cabo según el Sistema Internacional 10-20, [NUW88]. Este sistema se basa en medidas que se hacen desde los puntos Nasión, Inión y preauriculares izquierdo A1-derecho A2, manteniendo impedancias interelectrodos menores a $5\text{K}\Omega$, como lo marca la norma de adquisición de la actividad eléctrica cerebral, [AME85].

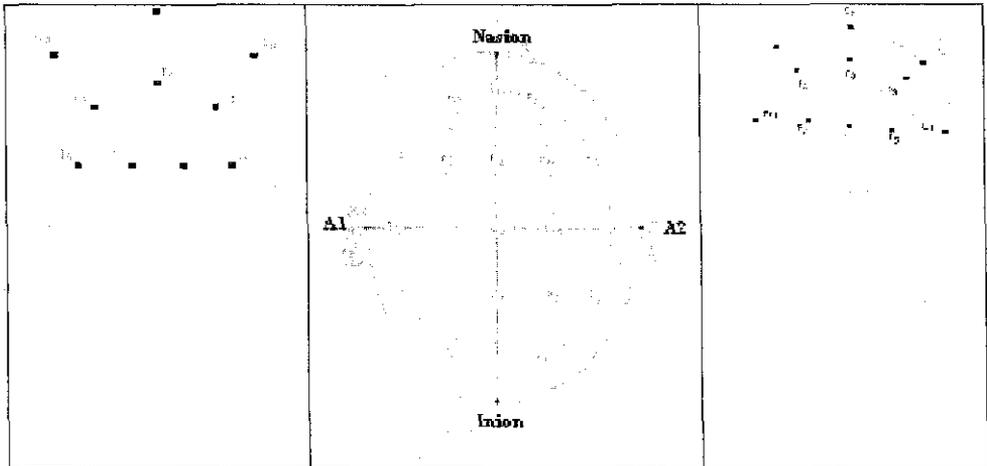


Figura 3.1.4. Relación interelectrodos de acuerdo al Sistema Internacional 10-20.

Por último, las señales ECoG ictales se obtuvieron de pacientes sometidos a cirugía de epilepsia, programados a EEG de larga duración. Durante el procedimiento neuroquirúrgico se coloca una malla subdural de 5x4 electrodos sobre la zona cortical expuesta, el lóbulo temporal izquierdo en la mayoría de los casos. En la figura 3.1.5 se muestra la colocación de esta malla sobre la corteza cerebral.



Figura 3.1.5. Malla de 5x4 electrodos multicontactos colocada sobre la corteza cerebral.

3.1.3 Recursos Materiales

En el Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía, INNN de la Ciudad de México, se obtuvieron las señales electroencefalográficas y electrocorticográficas, utilizando tanto los equipos de adquisición, electrodos, bioamplificadores, digitalizadores, así como los sistemas de cómputo para su análisis. Expertos electroencefalografistas del Instituto analizaron los registros, previo a su procesamiento, esta interpretación y clasificación se califica como tener el 100% de sensibilidad, y por lo tanto se toman como el estándar de oro para comparar los resultados obtenidos con los diferentes métodos que se aplican en este trabajo.

El INNN cuenta con las instalaciones necesarias para realizar las pruebas de campo tanto en sujetos sanos como en pacientes a los que se les ha diagnosticado de epilepsia. En el Departamento de Neuroimagen del Instituto se tienen los equipos para realizar los estudios de imagen, necesarios para la clasificación de los padecimientos en el Departamento de Electrofisiología. Y por último, los registros ECoG transoperatorios se obtienen en los quirófanos del Instituto durante los procedimientos neuroquirúrgicos durante las cirugías de epilepsia, llevada a cabo por el Neurocirujano especialista.

3.2 Algoritmo de Clasificación

Dos son los aspectos de la precisión de una prueba diagnóstica, el primero es la sensibilidad que se define como la habilidad que tiene una prueba para clasificar la presencia de un evento, y el segundo es la especificidad que indica hasta que punto es buena una prueba para identificar la ausencia del evento. La evaluación de una prueba diagnóstica involucra una variable de efecto y un estándar de oro. La variable de efecto define la presencia o ausencia de un evento dado y el

estándar de oro es un patrón de referencia que siempre es positivo cuando existe el evento y negativo cuando no hay presencia del evento [HUL93].

Al evaluar una prueba diagnóstica [DAW97, HUL93], como el algoritmo para la detección de espigas epilépticas puntiformes, un resultado es verdadero positivo VP si a partir del algoritmo de clasificación se determina que la señal a analizar contiene espigas epilépticas, un resultado es falso positivo FP cuando la prueba es positiva y la señal no contiene espigas epilépticas, por otro lado un resultado es falso negativo FN si el algoritmo no detecta espigas epilépticas y la señal ECoG si contiene espigas epilépticas, por último un resultado es verdadero negativo VN si la señal no contiene espigas epilépticas puntiformes y el algoritmo no las detecta.

El algoritmo para clasificar y caracterizar las señales propuesto en este trabajo, se resume en los siguientes pasos: a) Los eventos a estudiar son las espigas epilépticas puntiformes, b) La clasificación del especialista se considera tener el 100% de sensibilidad, siendo esta clasificación el estándar de oro c) Se seleccionaron 140 segmentos de ECoG que representan 3200 minutos y contienen 66 espigas, con el evento epiléptico bien localizado y libre de artefactos como señal muscular y cardíaca, d) Se aplicaron los métodos de procesamientos descritos en este trabajo, e) La caracterización se basa en los coeficientes de la técnica analizada, utilizándose para determinar los umbrales de amplitud y energía, f) se establecen los siguientes parámetros :

1.- Intervalo de Análisis, basado en la duración de la espiga puntiforme, 70-120ms. Se seleccionaron tres duraciones para el cálculo: 8ptos, 12ptos, y 16ptos que representan 125ms, 93.75ms y 31.25ms respectivamente.

2.- Detección de Amplitud Máxima M_j .

Como se ha mencionado la espiga espicular sobresale al resto de la señal ECoG siendo el parámetro fundamental en la determinación de la presencia de evento epiléptico. Por lo anterior el primer paso para la implementación de un sistema de caracterización es la detección de la espiga o transitorio sobresaliente en la señal ECoG $f[k]$. La detección se basa en la técnica del Umbral, se eligió este método por su fácil implementación, rapidez y buen funcionamiento.

Se establece que cuando la señal de entrada es mayor que un valor previamente preestablecido, el Umbral T , se considera que se ha encontrado un evento con amplitud máxima M_j .

3.- Cálculo de Energía E_j . Alrededor de M_j $E_j = \sum |C_{j,k}|^2$... 3.2.1

4.- Cálculo de la Sensibilidad Ω , definida como sigue, [DAW97]:
 $\Omega = VP / (VP + FN)$... 3.2.2

3.2.1 Umbral

Para determinar el umbral T , se procede a evaluar el desempeño del algoritmo aplicando métodos de detección. Partiendo de la prueba de la hipótesis binaria y asumiendo que una realización de la variable aleatoria en estudio tiene una densidad de probabilidad $N(\mu, \sigma^2)$ (PDF del inglés Probability Density Function), donde μ puede tomar sólo entre dos posibles resultados; H_0 referida como la hipótesis nula y H_1 como la hipótesis alterna, se puede considerar para nuestro caso particular que H_0 representa la no existencia de espiga epiléptica puntiforme y H_1 la presencia en el registro ECoG de espiga epiléptica.

El teorema de Neyman-Pearson y la minimización del Riesgo Bayes son dos de las aproximaciones clásicas utilizadas en la teoría de la prueba de hipótesis binaria, [KAY98]. Para el caso binario se sabe que tanto H_0 como H_1 pueden ser verdad y cuatro posibles resultados pueden suceder :

- 1.- Verdadero Positivo – VP
Elegir H_0 cuando es verdadero H_0 ; gobernada por la probabilidad $p(x, H_0 / H_0)$: Detección +
- 2.- Falso Positivo - FP
Elegir H_1 cuando es verdadero H_0 ; gobernada por la probabilidad $p(x, H_1 / H_0)$: Falsa Alarma donde, $p(x, H_1 / H_0)$ es referida como la probabilidad de la falsa alarma P_{FA}
- 3.- Verdadero Negativo - VN
Elegir H_1 cuando es verdadero H_1 ; gobernada por la probabilidad $p(x, H_1 / H_1)$: Detección -
- 4.- Falso Negativo - FN
Elegir H_0 cuando es verdadero H_1 ; gobernada por la probabilidad $p(x, H_0 / H_1)$: No Detección de aquí se deduce que, la probabilidad de detección P_D es referida como $1 - p(x, H_0 / H_1)$.

Una de las representaciones clásicas para interpretar pruebas de detección es el método de 2x2 el cual consiste en incluir los eventos ya clasificados por el experto, el estándar de oro, de acuerdo a los resultados obtenidos mediante la prueba o algoritmo de decisión. El lado izquierdo de la tabla 3.1 indica los resultados de la prueba, positiva **T+** superior y negativa **T-** en la parte inferior. Por otro lado, el lado central de la tabla indica como son realmente los eventos, **D+** si el evento está presente o **D-** cuando no hay evento.

Tabla 3.1 Relación entre Parámetros de Decisión

		Presentan Evento D+	No Presentan el Evento D-	
Resultado de la Prueba	T+	VP	FP	Decisiones Positivas VP+FP
	T-	FN	VN	Decisiones Negativas FN+VN
		Casos Positivos VP+FN	Casos Negativos FP+VN	

La regla de decisión se diseña de tal manera que los cuatro posibles resultados se incluyan en una expresión denominada el Riesgo ρ , asignándoles a cada uno de ellos un costo o peso C_{ij} , como se indica en la siguiente expresión, [VAN68]:

$$\rho = C_{00}P_0p(x, H_0 / H_0) + C_{10}P_0p(x, H_1 / H_0) + C_{11}P_1p(x, H_1 / H_1) + C_{01}P_1p(x, H_0 / H_1) \dots \quad 3.2.3$$

El detector que minimiza el Riesgo Bayes ρ , se basa en comparar la Razón de Verosimilitud (*LR* del inglés Likelihood Ratio) con un umbral η , de acuerdo con la siguiente relación:

$$LR = \frac{p(x, H_1 / H_1)}{p(x, H_0 / H_0)} > \eta \quad \dots \quad 3.2.4$$

Por otro lado, la aproximación típica de Neyman-Pearson en el diseño de un detector óptimo establece fijar un error de probabilidad, por ejemplo $p(x, H_1 / H_0)$ a un valor dado α , mientras se minimiza el otro error $p(x, H_0 / H_1)$. Es decir, este teorema establece maximizar $P_D = p(x, H_1 / H_1)$ supeditado a la restricción de una $P_{FA} = \alpha$, [VAN68]. Se decide H_1 y H_0 a partir de [KAY98]:

$$P_D = \int p(x, H_1 / H_1) dx \quad \dots \quad 3.2.5$$

$$P_{FA} = \int_{\{x: J(x) > \eta\}} p(x, H_1 / H_0) dx = \alpha \quad \dots \quad 3.2.6$$

De las ecuaciones 3.2.3 al 3.2.6, se puede observar que la detección depende de la función de densidad de probabilidad de las hipótesis planteadas H_1 y H_0 y del umbral η seleccionado. Las señales aleatorias, como es nuestro caso, tienen una descripción matemática basada en las propiedades estadísticas como; la función de densidad de probabilidad, la correlación, el promedio, la varianza, etc. En un problema práctico estas cantidades se deben estimar, usando las mediciones del conjunto finito de datos tomados de las observaciones del proceso aleatorio; conocido como la realización. Sin embargo, generalmente no es posible determinar exactamente la descripción matemática y en nuestro interés particular la PDF, del proceso aleatorio.

Una forma alternativa para determinar el umbral η más conveniente a partir de los datos observados $\{x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$ y conseguir los criterios establecidos por los teoremas de Bayes y de Neyman-Pearson, es representar gráficamente el compromiso entre sensibilidad y especificidad a partir de los VP, VN, FP y FN cuando se dispone de un conjunto $x[i]$, $i=0,1,2,\dots,N-1$ previamente clasificado, conocido como el estándar de oro, [HUL93].

Una manera eficaz para mostrar la relación entre sensibilidad y especificidad es el uso del análisis de la característica de operación receptora o curvas ROC (del inglés Receiver Operating Characteristic). Estas curvas tienen la finalidad de mostrar las razones o proporciones señal/ruido, P_D contra P_{FA} , es decir indica que tan buena es la variable de decisión elegida para discriminar la presencia del evento a detectar sin importar la forma real de la distribución para las hipótesis consideradas, [VAN68]. Si se piensa que los VP son la señal correcta (evento a detectar) y FP es el ruido, entonces el método consiste en obtener una gráfica del índice de los verdaderos positivos (VPf) definidos como la probabilidad de decisiones correctas ecuación 3.2.7, en comparación con el índice de los falsos positivos (FPf) que es la probabilidad de decisiones incorrectas cuando el evento no está presente ecuación 3.2.8, para diferentes umbrales μ_m donde $m=1,2,\dots,M$, cada punto en la curva corresponderá a una pareja (VPf, FPf)_m, [MET78].

$$VPf = VP / (VP + FN) \quad \dots \quad 3.2.7$$

$$FPf = FP / (FP + VN) \quad \dots \quad 3.2.8$$



3.2.2 Criterios de Clasificación

Los siguientes *Criterios de Clasificación* son propuestos en este trabajo para determinar si una onda es espiga epiléptica puntiforme :

1. Se encuentre en el rango del ancho seleccionado, 70 - 120ms
2. Su valor máximo M_j sea mayor a un umbral Γ determinado con el análisis ROC
3. Su energía E_j sea mayor a un umbral Ξ determinado con el análisis ROC
4. Se establezca un Índice de Clasificación, en base al operador producto entre los coeficientes C_j seleccionados en la técnica de procesamiento propuesta : $I_c = C_1 * C_2 * \dots * C_j$

En este trabajo se propone el operador producto I_c con el propósito de aumentar la sensibilidad de los resultados, la razón principal de esta propuesta se basa en la siguiente propiedad, [PRO70] :

El producto de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ estará determinado por la regla de los signos entre factores. Para nuestro interés en particular mencionaremos tres casos importantes: 1) Si ambas funciones son positivas o negativas en un intervalo (a,b) el producto será positivo y si cada uno de los factores crece conforme crece x también el producto crecerá aunque con mayor rapidez, 2) Si una de las funciones es positiva y la otra es negativa en el intervalo (a,b) , el producto será negativo, 3) Si alguna o ambas funciones es cero en el intervalo (a,b) , el producto será cero.

En la figura 3.2.1 se aprecia la densidad espectral de potencia correspondiente a una señal formada por las 140 espigas epilépticas puntiformes colocadas adyacentemente. En la parte inferior de la figura 3.2.2, se observa un segmento de esta señal que corresponde a 28 espigas epilépticas adyacentes.

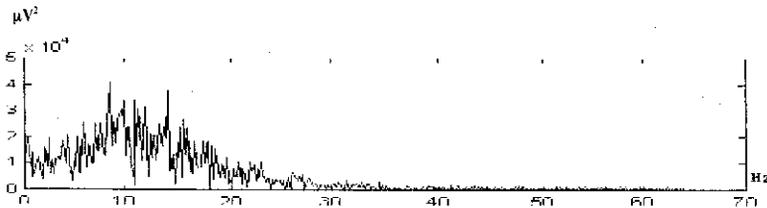


Figura 3.2.1 Densidad Espectral de Potencia de 140 Espigas Epilépticas Puntiformes

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

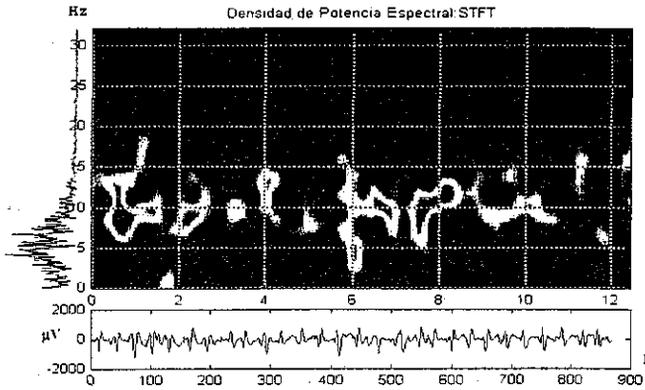


Figura 3.2.2 Espectrograma de 28 Espigas Epilépticas Puntiformes

Tanto en la figura 3.2.1 como en el espectrograma de la figura 3.2.2 se muestra que el contenido de frecuencia de las espigas epilépticas puntiformes se encuentra en el rango de 6 a 15Hz.

3.3 Métodos de Análisis

Existen varias técnicas de procesamiento que pueden utilizarse en la caracterización de espigas epilépticas puntiformes. Entre ellas consideraremos aquellas con las cuales podamos cumplir los objetivos de sensibilidad, rapidez y robustez.

3.3.1 Correlación Temporal

El primer método esta basado en la función de correlación, para lo cual primero se encuentra una espiga epiléptica patrón, denominada $r[k]$, la cual se obtiene promediando las 140 espigas clasificadas por el especialista como puntiformes. $r[k]$ es la plantilla de referencia en los cálculos de correlación y se calcula a partir de la siguiente relación:

$$r(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \text{espiga}_i[k] \quad \text{con } L=140 \quad \dots \quad 3.3.1$$

Cuando se ha calculado $r[k]$, el siguiente paso es comparar la señal ECoG $f[k]$ con la plantilla $r[k]$. Existen varios métodos que nos permiten realizar esta comparación pero sin lugar a duda la correlación es una muy buena medida de la dependencia entre señales aleatorias y con ello encontrar su similitud o diferencia. El coeficiente de correlación r entre las señales $f[k]$ y $r[k]$, deducido a partir del método de los mínimos cuadrados para minimizar los errores, está definido como, [YOU62]:

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

$$r_{r,f}[k] = \frac{L \sum_{i=0}^L r[i] f[i+k] - \sum_{i=0}^L r[i] \sum_{i=0}^L f[i+k]}{\sqrt{L \sum_{i=0}^L r^2[i] \left[\sum_{i=0}^L r[i] \right]^2} \sqrt{L \sum_{i=0}^L f^2[i+k] - \left[\sum_{i=0}^L f[i+k] \right]^2}} \quad \dots \quad 3.3.2$$

en la ocurrencia donde $f[k]$ es parecido al patrón $r[k]$, se obtiene un alto grado de correlación y el evento puede ser clasificado como epiléptico, el máximo valor de $r=1$ representa la mayor similitud entre $r[k]$ y $f[k]$. Por otro lado si el grado de correlación es bajo el evento se considera no epiléptico, $r=0$ significa ninguna correlación, [YOU62].

3.3.2 Modelos Paramétricos

A pesar de que los métodos paramétricos son metodológicamente y computacionalmente más complejos que los no-paramétricos, representan una alternativa para estimar la densidad espectral de potencia de procesos aleatorios no-estacionarios que contienen eventos de corta duración, [HAY96].

El objetivo de los modelos paramétricos es estimar la $PSD_f(\omega)$ a partir de los parámetros de un modelo que se propone para describir la serie de tiempo bajo análisis. En la mayoría de los casos los modelos lineales caracterizados por la ecuación diferencial que relaciona la entrada con la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo describen apropiadamente un gran número de procesos. Por otro lado, la estimación paramétrica espectral puede dar mejores resultados que la FFT ya que ofrece mayor resolución y exactitud y así se mejora la estimación espectral del proceso.

El modelo autorregresivo (AR) es uno de los modelos más empleados ya que es un estimador de la $PSD_f(\omega)$ de alta resolución y nos permite la diferenciación de componentes espectral muy cercanos. En este trabajo se consideran dos técnicas para la estimación del modelo AR el primero es la recursión de Levison y el segundo es el algoritmo adaptable de Kalman.

3.3.3 Representaciones Tiempo Frecuencia

1) Espectrograma.

Primero se elige la duración, y traslape más adecuado para la ventana $h(t-\tau)$ de la STFT dentro de la cual se espera que la señal sea estacionaria. Por último, la ventana de análisis se mueve a lo largo de la señal para capturar y rastrear las variaciones de la frecuencia como una función del tiempo.



2) Distribución Wigner-Ville

Se aplica la WVD a las señales ECoG debido a su alta resolución de los autotérminos en el plano tiempo-frecuencia.

3) Distribución Choi-Williams

La CWD ofrece representaciones con alta resolución y reduce interferencias en el plano tiempo-frecuencia. El parámetro ζ del kernel $\varphi_{EW}(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \zeta}$ se varia sobre un rango de valores (0.1-10) para obtener diferentes compromisos entre la supresión de términos cruzados y aumentar la resolución de los auto-términos.

4) Distribución Reducción de Interferencias

Con esta distribución se pretende obtener alta resolución de autotérminos que ofrece el kernel exponencial e investigar si la reducción de interferencias es similar con la que ofrece la distribución Choi-Williams.

3.3.4 Representaciones Tiempo Escala

Se investiga si las propiedades de escala y desplazamiento de las funciones wavelet, permiten mejorar la caracterización de las espigas epileptiformes. Se estudian diferentes funciones wavelet y se elige la que mejor representa la espiga en el plano tiempo-escala. Las cualidades de los diferentes tipos de familias wavelets son más convenientes según la aplicación deseada. En este trabajo se consideran los siguientes criterios de selección: Soporte Compacto en Tiempo y Frecuencia (para obtener una adecuada resolución tiempo-frecuencia), Simetría (para evitar defasamiento), Ortogonalidad (algoritmos rápidos y ahorro de código) y Biorotogonalidad (propiedad de fase lineal para reconstrucción de señales).

1) Análisis Multi-resolución Wavelet.

Se aplican las funciones wavelet Daubechies, Morlet, Mexican Hat, y Biorotogonal hasta diez niveles de descomposición.

2) Análisis Multi-resolución Wavelet Packet

Se descompone el segmento de la señal a analizar hasta el cuarto nivel de descomposición y se comparan las señales reconstruidas en cada uno de los 30 nodos. El análisis Multi-resolución a partir de las funciones *wavelet packet*, mejora aun más la caracterización de la espiga epileptiforme.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 4. ANÁLISIS Y ALGORITMOS TIEMPO-FRECUENCIA

El procesamiento de señales involucra la representación, manipulación y transformación de señales así como la información que conllevan. Algunas de las técnicas de procesamiento más poderosas e importantes que se usan hoy en día tuvieron su origen en algoritmos numéricos propuestos hace siglos. Con el acelerado incremento en la velocidad, sofisticación de trabajo y poder computacional de los microprocesadores para el procesamiento digital de señales (DSP), y en conjunto con el desarrollo de eficientes algoritmos para llevar a cabo tareas complejas, el DSP ha cambiado radicalmente la forma de hacer procesamiento de señales conduciendo a realizar en forma rutinaria procesos tan complejos como son el modelado de señales, la optimización del filtrado, la estimación espectral, la eliminación de ruido, la clasificación de patrones, y la manipulación de imágenes entre otros.

Una señal puede ser clasificada en diferentes categorías dependiendo del tipo de información que lleva, como por ejemplo la señal determinística que se define como aquella que puede ser descrita por medio de una expresión matemática o que puede ser reproducida repetidamente; sin embargo, en los fenómenos reales no son muy frecuentes, por el contrario, es común encontrar el proceso aleatorio, el cual consiste de una unidad o colección de señales (realizaciones) que pertenecen a un grupo siendo diferentes cada una de ellas pero que contribuyen al efecto global. Las señales aleatorias o estocásticas, [STR89] poseen cierto grado de incertidumbre antes de que ocurran realmente; no pueden describirse completamente como una función del tiempo y sus propiedades deben ser modeladas mediante expresiones probabilísticas, [HAY96] los valores futuros de la señal no pueden ser predecibles ni aún después de la observación de valores pasados.

4.1 Algoritmos de Procesamiento Clásico

La eficiente representación de las señales es el objetivo principal de muchas aplicaciones de procesamiento y una vez que se obtiene una exacta representación entonces es posible llevar a cabo importantes tareas de procesamiento, tales como extrapolación e interpolación, clasificación de señales así como extracción de sus características, [OPP83]. Hay un gran número de modelos que pueden usarse para representar señales en tiempo discreto, que van desde una simple descomposición armónica hasta la representación fractal. Hay muchas formas de modelar a la señal y cada una de ellas puede conducir a soluciones con diferentes propiedades. Para la elección del modelado, también hay una infinidad de factores que se toman en cuenta, entre ellos podríamos mencionar el tipo de señal, la fidelidad deseada, etc. Es de igual importancia el desarrollo de Algoritmos Rápidos que han contribuido a incrementar la potencia y velocidad en los DSP para realizar tareas específicas como filtrado, recursión, predicción, interpolación, deconvolución, suavizado, estimación espectral, detección y clasificación de procesos.

4.1.1 Nociones Generales

Una señal es un suceso que sirve para representar, o por lo menos es capaz de indicar una acción, [STR89] es decir, una señal es una función $f(t)$, que conlleva información única para cada instante del tiempo, [HAY83]. Las señales se pueden representar en forma única en diferentes dominios

como el clásico dominio del tiempo que especifica la función en cada instante del tiempo. Otra representación tan importante como la anterior es la representación de información que conlleva una función en el dominio de la frecuencia, la cual especifica las amplitudes relativas de los componentes de frecuencia de la función.

En especial, algunos problemas de la física, biología, fisiología, etc., se logran estudiar mejor en un espacio transformado que en su espacio de coordenadas original. El objetivo principal para llevar a cabo dichas transformaciones, es la caracterización de la señal y la extracción de la información que ella contiene.

Existen diferentes métodos para realizar dichas transformaciones entre ellos podemos mencionar al método clásico basado en la Transformada de Fourier (TF), los modelos paramétricos, las técnicas modernas de procesamiento como las distribuciones tiempo-frecuencia, el análisis Multi-resolución o la Transformada Wavelet.

La selección del método se basa en el tipo de señal a procesar, la información que se desea extraer, el compromiso de gasto computacional. La característica del evento a analizar es esencial, es decir si la señal es periódica $f(t) = f(t+T)$, posiblemente el Espectro clásico de Fourier sea suficiente para extraer la información requerida.

Por otro lado si el análisis se realiza sobre señales aleatorias o estocásticas, éstas no pueden describirse completamente como una función del tiempo y deben ser modeladas mediante expresiones probabilísticas, donde los métodos paramétricos son una buena alternativa. Si las propiedades estadísticas de la señal no cambian (Estacionaria), o si cambian de alguna forma (No-Estacionaria), probablemente el interés son señales de muy corta duración (Transitorio.- "brote"), donde técnicas como las distribuciones tiempo-frecuencia pueden resolver el problema.

4.1.2 Limitaciones del Análisis Clásico de Fourier

El análisis clásico de Fourier permite descomponer una señal en sus componentes de frecuencia, así como obtener la intensidad de cada uno de ellos. Sin embargo, esta técnica exige que el contenido espectral de las señales no cambie respecto al tiempo, así como requiere un período considerablemente alto para estabilizar el espectro de la señal. Aunado a esto, podemos decir que ni el análisis temporal ni el análisis frecuencial describen, por sí solos, completamente la naturaleza de la señal, no dicen completamente lo que está ocurriendo, [COH95]. Por lo general, las señales biológicas son no-estacionarias y por lo tanto es conveniente hacer consideraciones más allá de los tradicionales procesamientos.

Consideremos las funciones $g(t)$ y $h(t)$ como a continuación se describen, $g(t) = 4p(t)\cos(2\pi(20t/256)) + 4p(t)\cos(2\pi(50t/256))$ y su espectro de Fourier $G(\omega)$ se muestran en las figuras 4.1.1A y 4.1.1B respectivamente donde: $p(t) = 1 - \frac{1}{400}(t - 128)^2$. De la misma manera en 4.1.2A se muestra la señal que representa a la función

$h(t) = \text{trian}(t) * [\text{Sen}(2\pi 40t) + \text{Sen}(2\pi 45t)\text{Sen}(2\pi 100t) + \text{Sen}(2\pi 105t)]$, donde $\text{trian}(t)$ se define como: $\text{trian}(t) = \begin{cases} 2t/T & 0 \leq t \leq T/2 \\ 2t/T + 2 & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$, y su espectro de Fourier $H(\omega)$ está en la figura 4.1.2B.

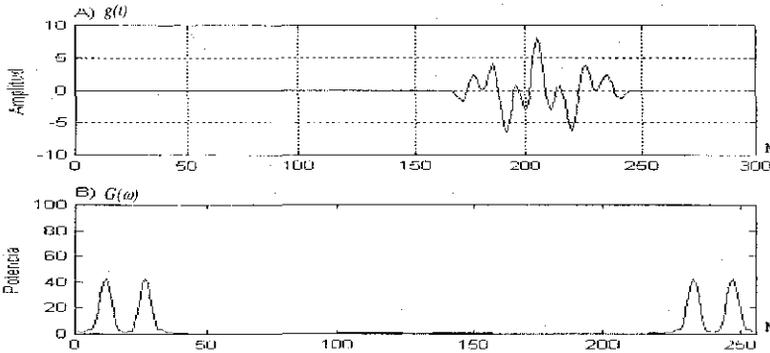


Figura 4.1.1. A) Señal con amplitud controlada $g(t) = 4p(t)\text{Cos}(2\pi(20t/256)) + 4p(t)\text{Cos}(2\pi(50t/256))$
 B) Espectro de Fourier $G(\omega)$.

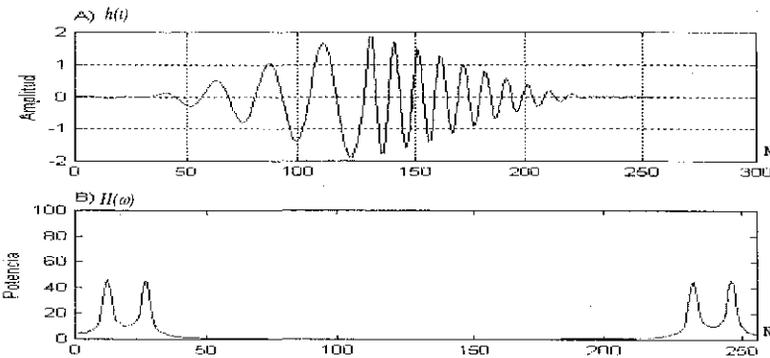


Figura 4.1.2. A) Señal con cuatro componentes de frecuencias ponderados con la función triangular $h(t) = \text{trian}(t) * [\text{Sen}(2\pi 40t) + \text{Sen}(2\pi 45t)\text{Sen}(2\pi 100t) + \text{Sen}(2\pi 105t)]$, B) Espectro de Fourier $H(\omega)$.

Si se aplica la Transformada Rápida de Fourier (FFT del inglés Fast Fourier Transform) a las funciones $g(t)$ y $h(t)$, el contenido espectral es casi idéntico como se observa en las figuras 4.1.1B y 4.1.2B, a pesar de que estas funciones $g(t)$ y $h(t)$ son diferentes en el tiempo. Es decir, la transformada de Fourier nos permite obtener su contenido espectral, pero no nos permite mostrar la ocurrencia espectral respecto al tiempo.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

¿Qué sucede ahora si se desea analizar la señal electroencefalográfica? Mediante el análisis visual del electroencefalograma (EEG), figura 4.1.3, se aprecia que es una señal casi estacionaria por tramos cuando se mantiene al sujeto en cierto estado “estable”, como sucede en la señal EEG de la zona occipital de sujetos sanos en dos procesos cuando se instruye al sujeto a mantener los ojos cerrados, lado izquierdo de la figura 4.1.3 y ojos abiertos lado derecho de la figura 4.1.3, durante periodos, [GUT98,KAW73], o como sucede con los registros EEG de pacientes con lesiones estructurales cerebrales, [GUT95], figura 4.1.5. Como consecuencia de lo anterior, el cálculo de la densidad espectral de potencia mediante la aplicación de los métodos clásicos de análisis espectral con la aplicación de la transformada de Fourier en los registros EEG es válida, y ofrece información adecuada para el diagnóstico clínico.

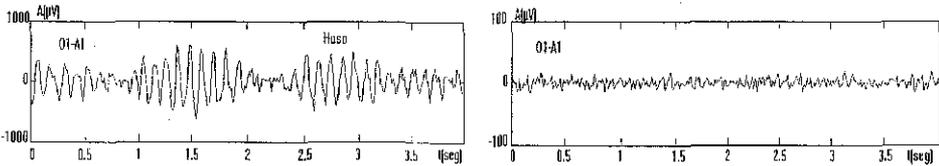


Figura 4.1.3 Reactividad al ritmo alfa, Lado Izquierdo: EEG durante los ojos cerrados. y Lado Derecho: EEG con los ojos abiertos.

En el electroencefalograma compactado de la figura 4.1.4 se observa la estacionariedad local, de los eventos ojos cerrados y la transición a ojos abiertos ya que el ritmo alfa es reactivo en estos dos estados, bloqueándose cuando se tienen los ojos abiertos e incrementándose cuando se mantienen cerrados,

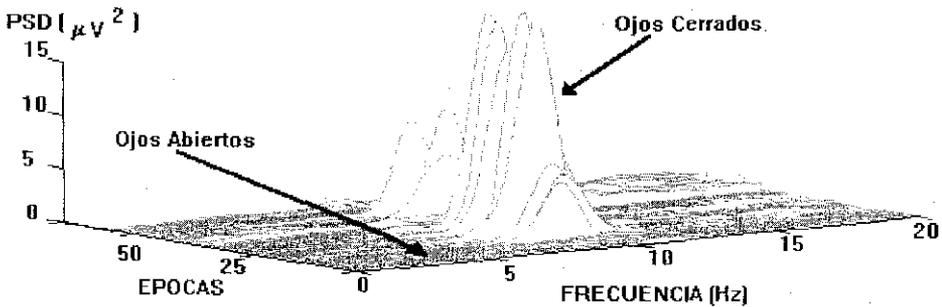


Figura 4.1.4. Electroencefalograma compactado, [GUT98].

Cuando los ojos se cierran hay un incremento significativo en la potencia espectral de la banda alfa, especialmente en la zona occipital, la cual se encuentra concentrada en una frecuencia central 9.366Hz, [GUT98]. Durante las épocas en que permanecen los ojos cerrados no existen cambios relevantes en la frecuencia predominante ($\sigma = \pm 0.26$ -FFT). Sin embargo, cuando se cierran los ojos (existe una transición de estado) se muestra que ya no se puede encontrar una

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

frecuencia predominante ($\sigma = \pm 3.5$ -FFT); la varianza presenta valores muy bajos durante los estados estacionarios (0.07-FFT) y muy altos en los estados variantes (12.37-FFT).

En la figura 4.1.5 se observa otro ejemplo, señal EEG indicativa de tumor cerebral, a lo largo del tiempo siempre se obtendrá el mismo contenido espectral-Banda Delta-Theta(0.5-5Hz), la FFT describirá adecuadamente el daño estructural.

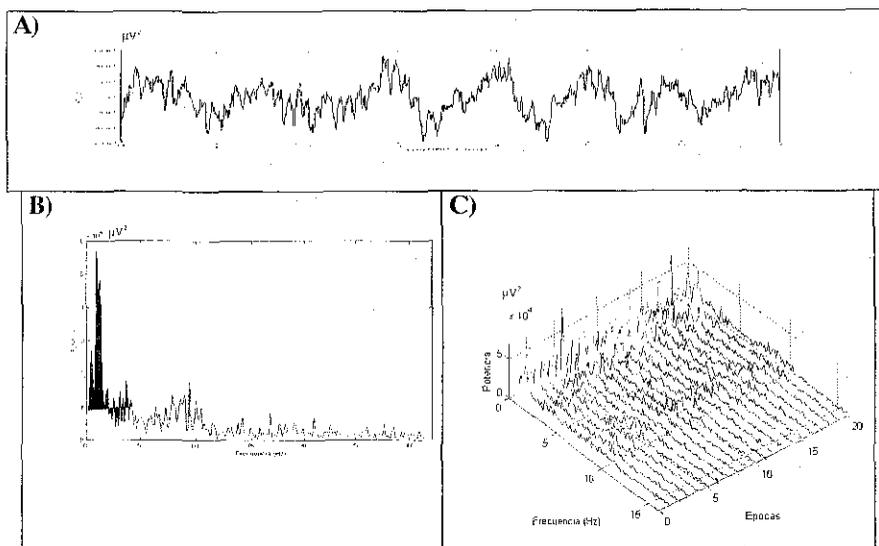


Figura 4.1.5 A) Señal EEG de un paciente con un tumor cerebral del lóbulo temporal izquierdo, B) su Potencia Espectral Promedio, C) Arreglo Espectral Compactado

A diferencia de la consideración arriba mencionada el proceso de inducción y profundidad anestésicos produce cambios constantes en la señal EEG. En la figura 4.1.6B se observan segmentos correspondientes a la basal antes de ser administrado el anestésico. La figura 4.1.6C muestra ondas lentas, y la figura 4.1.6D la actividad brote-supresión. Por último, en la figura 4.1.6.A se observa la gráfica del arreglo espectral compactado (AEC), que representa la evolución frecuencial del efecto de la droga anestésica durante 60 épocas/ cada una de cuatro segundos.

Esta gráfica es la primera aproximación a una representación de la evolución espectral respecto al tiempo, es muy útil, como en el caso mostrado aquí, si los cambios que se producen en la señal no son muy bruscos y existen tramos de señales que puedan ser considerados estacionarios. Sin embargo, en otras circunstancias cuando deseamos hacer un análisis de eventos no estacionarios, como los transitorios epilépticos el AEC, no nos brinda la información necesaria y tenemos que recurrir a otras técnicas de análisis.

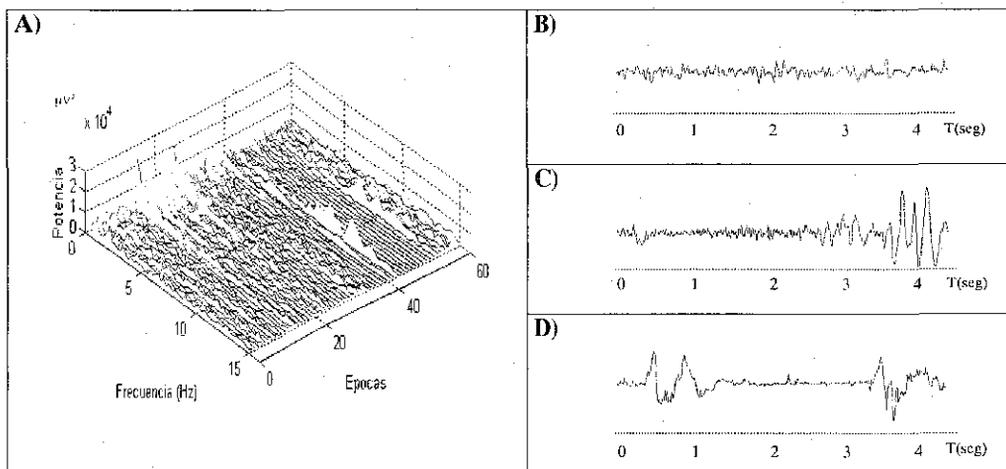


Figura 4.1.6. A) AEC durante el proceso de profundidad anestésica, B) EEG basal, en C) el inicio de la inducción y D) los brotes-supresión debidos al efecto del anestésico.

4.1.3 Densidad Espectral de Potencia

La densidad espectral de potencia (PSD del inglés Power Spectral Density), describe como la potencia (o varianza) de una serie de tiempo $ff[k]$ que representa a la señal continua $f(t)$, se distribuye respecto a la frecuencia. Matemáticamente, la definición más común, si $ff[k]$ es considerada determinística, es el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de la serie de tiempo escalado por un término constante apropiado. Sus unidades son de potencia por unidad de frecuencia, como por ejemplo, mmHg^2/Hz para la presión sanguínea, $(\text{beats}/\text{min})^2/\text{Hz}$ para la frecuencia cardíaca o $\mu\text{V}^2/\text{Hz}$ para la actividad eléctrica cerebral.

Cuando la serie $ff[k]$ representa un proceso estocástico determinístico o aleatorio estacionario de duración infinita $N=\infty$, la energía generalmente será infinita y por consiguiente no es posible calcularla. La restricción anterior conduce a definir la PSD a partir del parámetro de la potencia P definida como la energía por unidad de tiempo en un intervalo de la señal denotado por N .

$$P = \frac{E}{N\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f[k]|^2$$

Si $ff[k]$ es el k 'ésimo dato de la serie de tiempo de N muestras, con un periodo de muestreo Δt , la energía total E estará determinada por:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |f[k]|^2 \Delta t$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La PSD de un proceso discreto aleatorio estacionario en sentido amplio, es la Transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia de autocorrelación $R_f[k]$, [HAY96]:

$$PSD_f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_f[k] e^{-j2\pi nk}$$

por lo tanto determinar la densidad de potencia espectral para una señal estocástica es estimar la función de autocorrelación. Para un proceso ergódico, con una cantidad finita de datos, la secuencia de autocorrelación, puede en teoría ser determinada usando la promediación temporal

$$R_f[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-n} \sum_{k=-N}^{N-1} f[k] f[k+n]$$

Si la serie de tiempo $f[k]$, solo se considera para $k=1,2,3, \dots, N$ corrimientos, entonces la función de autocorrelación $R_f[n]$ estará definida por el estimador:

$$\hat{R}_f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} f[k] f[k+n]$$

Diferentes algoritmos se han utilizado para estimar la PSD dos de los más populares es el periodograma utilizando la FFT y el otro es la estimación de parámetros del modelo autorregresivo.

4.1.4 Periodograma

Calcular la FFT de la $\hat{R}_f[k]$ conduce a estimar la densidad de potencia espectral de una secuencia $f[k]$; este procedimiento es conocido como periodograma y es representado por la siguiente ecuación:

$$\hat{P}_{per}(e^{j2\pi n}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{R}_f[k] e^{-j2\pi nk}$$

En 1967 Welch propuso dos modificaciones al método de promediación tradicional o periodograma, [HAY96]. La primera es dividir la señal en K secuencias de longitud L traslapadas por D , y la segunda es aplicar alguna función ventana $w(t)$, los tramos se ajustan aumentando la cantidad de ceros necesarios para que tengan una longitud de potencia de dos (zero-padding). Por último sobre este tramo de señal se calcula su espectro de potencia por medio de la FFT. El promedio de los tramos procesados permiten reducir la varianza de la estimación. Para cubrir el total de la señal $f[k]$ se debe satisfacer $N=L+D(K-1)$

$$\hat{P}_{Welch}(e^{j2\pi n}) = \frac{1}{KL} \sum_{l=0}^{K-1} \left| \sum_{k=0}^{L-1} w[k] f[k+iD] e^{-j2\pi nk} \right|^2$$

En las figuras 4.1.7 y 4.1.8 se observa el resultado de obtener el periodograma usando el método de Welch, de la señales que se muestran en las figuras 4.1.1A y 4.1.2A respectivamente. Los parámetros utilizados son : función Hamming, longitud de la ventana de análisis de 16 puntos y un traslape del 50%.

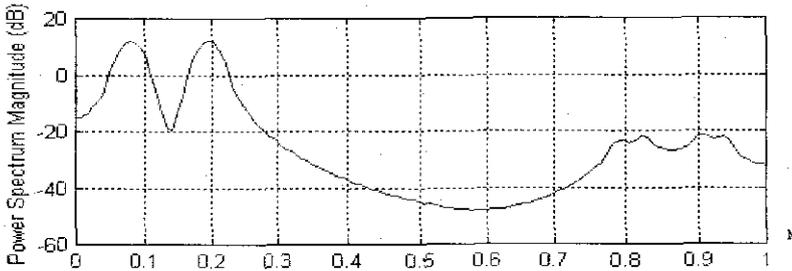


Figura 4.1.7. Periodograma-Welch de la señal que se muestra en la figura 4.1.1A

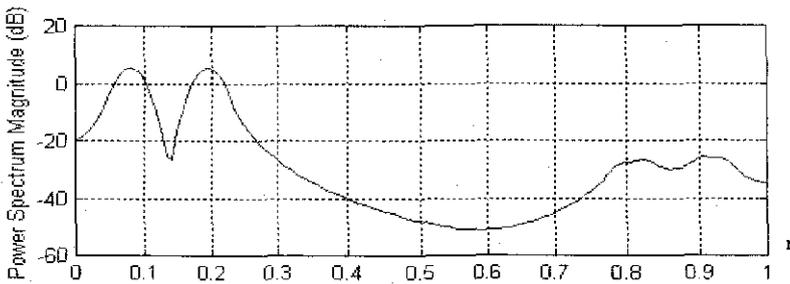


Figura 4.1.8. Periodograma-Welch de la señal que se muestra en la figura 4.1.2A

A pesar que los periodogramas de las figuras 4.1.7 y 4.1.8, describen mejor el espectro de frecuencia, esta técnica no permite representar la evolución espectrales respecto al tiempo, por lo que no es posible diferenciar la variación del contenido espectral entre las funciones $g(t)$ y $h(t)$.

4.1.5 Métodos Paramétricos

Introducción

Una de las limitaciones de los métodos no paramétricos clásicos para estimar la densidad espectral de potencia de procesos aleatorios es su incapacidad de describir los componentes de corta duración presentes en un fenómeno no-estacionario, razón por la cual es necesario recurrir a otros métodos de procesamiento, [HAY96].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En un proceso estocástico no es posible hablar de obtener la potencia espectral, ya que la caracterización de una variable aleatoria está dada estadísticamente en términos de una asignación de probabilidad a cada evento o realización del espacio muestra. Cuando estudiamos procesos estocásticos, sólo es posible hablar de la existencia de la densidad espectral de potencia cuando éstos son estacionarios ergódicos.

Una vez que se define la asignación de una probabilidad se procede a desarrollar la descripción probabilística que represente mejor al fenómeno mediante la selección de un modelo. Y por último se realiza la estimación de los parámetros del modelo y de la densidad espectral de potencia $PSD_f(\omega)$.

Los métodos paramétricos son metodológicamente y computacionalmente más complejos que los no-paramétricos, ya que se debe seleccionar a priori la estructura del modelo. La aproximación paramétrica requiere como primer paso la selección del modelo del proceso. Esta selección puede basarse en conocimientos previos de cómo el fenómeno se genera o de los resultados experimentales del mismo, así como en la aplicación de los criterios para evaluar el error y así determinar la confiabilidad del estimador.

El objetivo de los modelos paramétricos es estimar la $PSD_f(\omega)$ a partir de los parámetros de un modelo que se propone para describir la serie de tiempo bajo análisis. En la mayoría de los casos los modelos lineales caracterizados por la ecuación diferencial que relaciona la entrada con la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo describen apropiadamente un gran número de procesos. Por otro lado, la estimación paramétrica espectral puede dar mejores resultados que la FFT ya que ofrece mayor resolución y exactitud y así se mejora la estimación espectral del proceso.

Uno de los modelos más comúnmente empleados es el modelo autorregresivo (AR) que es un estimador de la $PSD_f(\omega)$ para señales aleatorias estacionarias que permite la descomposición espectral y el cálculo directo de la $PSD_f(\omega)$ a partir de la transformada de Fourier de la Función de Autocorrelación $R_f(\tau)$, como se indica en la siguiente expresión:

$$PSD_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathfrak{F} \{R_f(\tau)\} \quad \dots \quad 4.1.5.1$$

Muchos de los procesos o fenómenos físicos pueden ser modelados mediante sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) además estos sistemas pueden ser analizados con gran detalle. Una de las principales razones de la flexibilidad para analizar los sistemas LTI es que poseen la propiedad de superposición, por lo que, si es posible representar una entrada a un sistema LTI en términos de un conjunto de señales básicas, como el conjunto de procesos cerebrales que dan origen al EEG, entonces se puede utilizar la superposición para determinar la salida del sistema en términos de sus respuestas a esa señales básicas, [OPP83].

Si la entrada al LTI es una secuencia que representa un proceso estocástico $f[k]$ entonces la salida resultante $y[k]$ será otro proceso estocástico y se representará por la siguiente ecuación:

$$y[k] = \sum_{l=0}^q b[l]f[k-l] - \sum_{m=1}^p a[m]y[k-m] \quad \dots \quad 4.1.5.2$$

Vamos a suponer que el sistema LTI a modelar representa un sistema todo polo, es decir $q=0$, entonces la ecuación 4.1.5.2 queda:

$$y[k] = \sum_{l=0}^0 b[l]f[k-l] - \sum_{m=1}^p a[m]y[k-m] \quad \dots \quad 4.1.5.3$$

la ecuación 4.1.5.3 en forma vectorial y considerando la condición inicial $b_0=1$, tenemos:

$$y[k] = -A_p^T Y_p[k-1] + f[k] \quad \dots \quad 4.1.5.4$$

por otro lado, el vector de autocorrelación r_p está expresado a partir de la esperanza matemática de las muestras como se expresa a continuación:

$$r_p = E \{ y_p[k-1] y_p^*[k] \}$$

Aplicando la definición de r_p a la expresión 4.1.5.4, tenemos

$$r_p = -A_p E \{ Y_p[k-1] Y_p^*[k-1] \} \quad \dots \quad 4.1.5.5$$

la expresión 4.1.5.5 se llama la ecuación normal de Yule-Walker y la esperanza matemática de la expresión $\{ Y_p[k-1] Y_p^*[k-1] \}$ se conoce como la matriz de autocorrelación (R_p). Se despeja el vector A_p de la expresión 4.1.5.5 para encontrar los parámetros del modelo:

$$A_p = -R_p^{-1} r_p$$

R_p es una matriz Toeplitz simétrica cuyas diagonales tienen los mismos elementos. Esta matriz debe ser invertida para calcular A_p siendo la recursión Levinson-Durvin un método de inversión de matrices muy eficiente en tiempo y cálculo. Una vez calculada R_p^{-1} se obtiene A_p y se encuentran los parámetros a_g del modelo AR.

Como se ha mencionado arriba el cálculo de la $PSD_f(\omega)$ de un fenómeno aleatorio se determina a partir de un número infinito de observaciones de la función de autocorrelación $R_f(\tau)$, como se expresa mediante la ecuación 4.1.5.1. Lo anterior no es posible llevarlo a cabo en la práctica, por lo que se recomienda utilizar un estimador de la función de autocorrelación.

Podemos mencionar dos estimadores de la función de autocorrelación, a partir de N observaciones o muestras:

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1) Sesgado $R_f^b[l]$, varía respecto al verdadero valor de $R_f(\tau)$

$$R_f^b[l] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|l|-1} f[k]f^*[k+l] \quad \dots \quad 4.1.5.6$$

2) No Sesgado $R_f^n[l]$ también varía respecto al verdadero valor de $R_f(\tau)$ pero tiene mayor variancia que el anterior

$$R_f^n[l] = \frac{1}{N-|l|} \sum_{k=0}^{N-|l|-1} f[k]f^*[k+l] \quad \dots \quad 4.1.5.7$$

La variancia de ambos estimadores tiende a cero y son asintóticos, cuando N es muy grande tiene una distribución muy cercana a la distribución gaussiana y es indistinta la aplicación de ambos estimadores.

La densidad de potencia espectral estimada \hat{PSD}_{AR} de un proceso autorregresivo de orden p, contiene 2p polos, un cero localizado en $z=0$, [HAY96] y está dada por:

$$\hat{PSD}_{AR} = \sigma^2 \frac{|\hat{b}(0)|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k](e^{-j\omega k}) \right|^2} \quad \dots \quad 4.1.5.8$$

La exactitud de la \hat{PSD}_{AR} depende de la selección del orden del modelo, del valor inicial $\hat{b}(0)$ y de la exactitud de los parámetros estimados $\hat{a}_p[k]$ del modelo AR. Este método se aplica sobre una ventana de N datos, cuyo número de operaciones es p^2 , siendo p el orden del modelo.

Una de las características principales de la densidad espectral obtenida a partir del modelo AR es que es posible diferenciar entre picos muy cercanos que incluyen información más específica del proceso y como consecuencia el hacer suposiciones más reales del fenómeno, lo que nos conduce a mayor resolución espectral en comparación con las técnicas clásicas de Fourier. El método AR tiene variancia menor al método de Fourier y estima sólo para un número reducido de componentes de frecuencia lo que ofrece una buena reducción de cálculos y es posible distinguir cambios rápidos como los transitorios.

A continuación se presenta la $\hat{PSD}_{AR}(\omega)$ de señales sintéticas, utilizando el modelo autorregresivo calculado con el método Levinson y el estimador con sesgado $R_f^b[l]$, de la función de autocorrelación. El orden p del modelo, el segmento de análisis y el traslape de estos segmentos se varía para obtener la mejor descripción del fenómeno. En la figura 4.1.9 se muestra la señal temporal y su $PSD_f(\omega)$ de un chirp lineal que comienza en 100Hz hasta 400Hz.

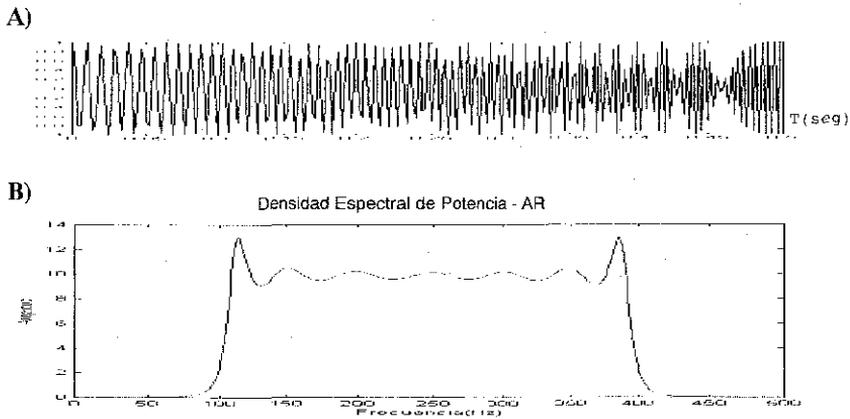


Figura 4.1.9. A) Chirp de 100Hz hasta 400Hz, B) $\hat{P}SD_{AR}$, orden=16.

A partir del resultado anterior, se aplica esta técnica para obtener una representación tiempo-frecuencia del chirp lineal 100-400Hz, con los parámetros: orden 16, ancho de análisis 16 puntos sin traslape. En las figuras 4.1.10 y 4.1.11 se aprecia el espectrograma paramétrico de un chirp lineal y dos chirp cruzados usando el modelo AR.

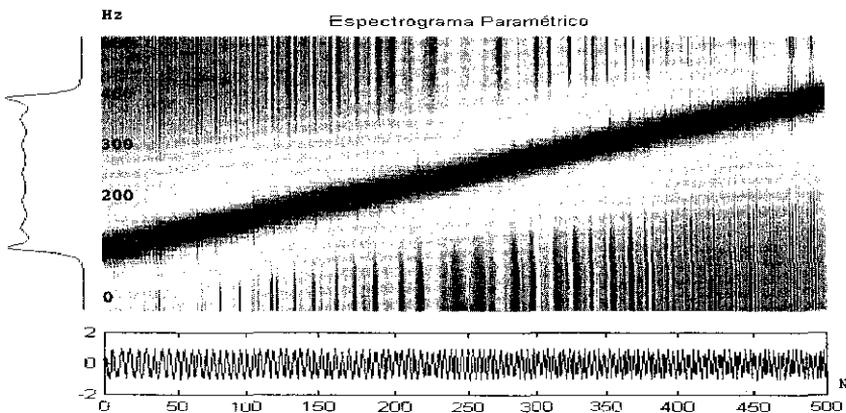


Figura 4.1.10. Espectrograma paramétrico, $\hat{P}SD_{AR}$, del chirp lineal de 100Hz a 400Hz.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

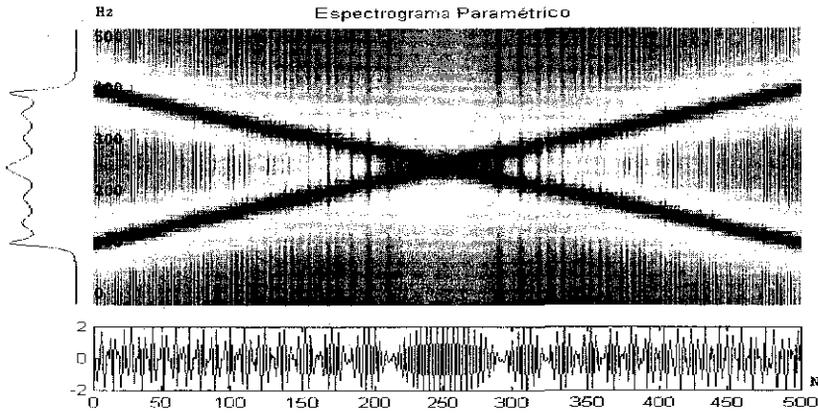


Figura 4.1.11. Espectrograma Paramétrico, \hat{PSD}_{AR} de dos chirp cruzados entre 100 a 400Hz

En ambas figuras 4.1.10 y 4.1.11 es posible apreciar que el espectrograma paramétrico aplicando el modelo autorregresivo ofrece una resolución en el plano tiempo-frecuencia similar al espectrograma de Fourier, pero con la desventaja de mayor consumo computacional.

4.1.6 Método Rápido de Kalman

El filtro adaptable de Kalman es una alternativa a mejorar la estimación paramétrica de la $PSD_f(\omega)$ de señales no-estacionarias y representa un proceso recursivo en el tiempo con respecto a los coeficientes del modelo AR, [HAY96]. Un filtro adaptable es capaz de seguir o ajustar su desempeño a los cambios de una señal que varía sus características con el tiempo.

En el filtrado adaptable las condiciones óptimas a buscar, involucran que la convergencia del error cuadrático sea lo más rápido y también que el número de operaciones por iteración sea mínima. A continuación se hace una breve descripción del filtro rápido de Kalman es un filtro adaptable iterativo que explota la redundancia en el algoritmo de mínimos cuadrados y que para su realización efectúa la estimación hacia delante y hacia atrás (*forward* y *backward*), para mayor detalle en el desarrollo y demostraciones referirse a [ALC86].

El algoritmo rápido de Kalman (ARK) hace una estimación sobre una ventana de datos de longitud N . Si se quiere estimar el valor de una señal $\hat{y}[k]$ a un tiempo k , partiendo de p muestras anteriores conocidas de y , entonces se tiene un error $e[k]$ de estimación al tiempo k dado por, [ESC97]:

$$e[k] = y[k] - \hat{y}[k]$$

Como el ARK involucra un predictor hacia adelante y uno hacia atrás, por lo que las consideraciones que a continuación se enuncian se trasladan al caso *forward*:

Caso *forward*: El error de estimación estará dado por:

$$e_p^f[k] = y[k] - \hat{y}[k] = y[k] + A_p^T[k]Y_p[k-1] \quad \dots \quad 4.1.6.1$$

donde: $e_p^f[k]$ es el error *forward*

$A_p[k]$ es el vector de los parámetros estimados

$Y_p[k-1]$ es el conjunto de muestras pasadas de la señal $y[k]$

Para minimizar el error $e_p^f[k]$ se aplica, por ejemplo, los mínimos cuadrados, y así se deriva la siguiente solución de la predicción *forward* al orden p :

$$R_p[k-1]A_p[k] = -r_p^f[k] \quad \dots \quad 4.1.6.2$$

donde $R_p[k-1]$ y $r_p^f[k]$ están definidas como:

$$R_p[k-1] = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-j} Y_p[j-1] Y_p^T[j-1] \quad \dots \quad 4.1.6.3$$

$$r_p^f[k] = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-j} Y_p[j-1] y[j] \quad \dots \quad 4.1.6.4$$

donde λ se conoce como factor de olvido, es un parámetro de calibración que tiene como función ponderar las muestras pasadas $y[k-p]$ en la ventana. Desarrollando la sumatoria de las ecuaciones 4.1.6.3 y 4.1.6.4, $R_p[k-1]$ y $r_p^f[k]$ pueden quedar en función de sus valores anteriores y si el factor de olvido se hace uno para simplificar, se tiene:

$$R_p[k] = R_p[k-1] + Y_p[k] Y_p^T[k] \quad \dots \quad 4.1.6.5$$

$$r_p^f[k] = r_p^f[k-1] + Y_p[k-1] y_p[k] \quad \dots \quad 4.1.6.6$$

sustituyendo 4.1.6.5 y 4.1.6.6 en 4.1.6.2, así como sustituyendo la definición de error de predicción *forward* $e_p^f[k]$ dado por la ecuación 4.1.6.1 y despejando, $A_p[k]$ queda:

$$A_p[k] = A_p[k-1] - R_p^{-1}[k-1] Y_p[k-1] e_p^f[k] \quad \dots \quad 4.1.6.7$$

donde $-R_p^{-1}[k-1] Y_p[k-1]$ se define como la ganancia de Kalman $K_p[k-1]$. Por lo anterior la ecuación anterior se puede expresar como:

$$A_p[k] = A_p[k-1] - K_p[k-1] e_p^f[k] \quad \dots \quad 4.1.6.8$$

Resumiendo, para estimar una señal a partir del algoritmo recursivo ARK se debe calcular el error de predicción *forward* $e_p^f[k]$ y los parámetros $A_p^T[k] = [a_1^p, a_2^p, \dots, a_p^p]$ a partir de la estimación de la ganancia de Kalman $K_p[k]$ al orden $p+1$ expresada por:

$$K_{p+1}[k] = -R_{p+1}^{-1}[k] \begin{bmatrix} y[k] \\ Y_p[k-1] \end{bmatrix} = -R_{p+1}^{-1}[k] \begin{bmatrix} Y_p[k] \\ y[k-p] \end{bmatrix} \quad \dots \quad 4.1.6.9$$

Donde la solución de la predicción *forward* $R_{p+1}[k]$ al orden $p+1$ será dada por:

$$R_{p+1}^{-1}[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_p^{-1}[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ A_p[k] \end{bmatrix} \alpha_p^f[k] \begin{bmatrix} 1 & A_p^T[k] \end{bmatrix} \quad \dots \quad 4.1.6.10$$

sustituyendo $R_{p+1}[k]$ en la ecuación 4.1.6.9 y definiendo $K_{p+1}[k]$ en función de $R_p[k]$, $A_p[k]$ y $e_p^f[k]$ de orden p se obtiene: $K_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ A_p[k] \end{bmatrix} \alpha_p^f[k] e_p^f[k]$

De manera similar a la derivación de la ecuación 4.1.6.10, para el predictor hacia atrás, se obtiene una expresión para la ganancia Kalman como sigue: $K_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} K_p[k] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_p[k] \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_p^b[k] e_p^b[k]$

donde α_p^f y α_p^b indican la inicialización de la energía *forward* y *backward*, cuyo valor determinará la rapidez para alcanzar la estabilidad. Por último la solución se encuentra a partir del cálculo recursivo del valor de la ganancia de Kalman $K_{p+1}[k]$ dado por los predictores hacia atrás y hacia delante, [ESC97]. En resumen este método es un algoritmo recursivo en tiempo que por cada iteración se requieren $8p$ operaciones aritméticas, siendo p el orden del modelo.

En la figura 4.1.12 se muestra un chirp lineal que comienza en 100Hz hasta 400 Hz y su \widehat{PSD}_K , cuyos parámetros se calculan a partir del filtro adaptable de Kalman. El modelo es de orden 16, con condiciones iniciales $\lambda=0.8$ y $\alpha=0.001$.

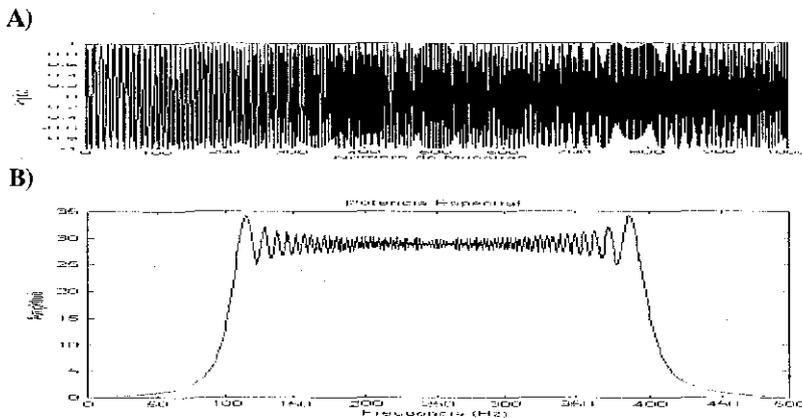


Figura 4.1.12. A) Chirp lineal de 100 a 400Hz, B) \widehat{PSD}_K .

Los coeficientes se resuelven entre la décima y vigésima iteración, calculándose en 0.61s y la obtención de la FFT de 500 segmentos se realiza en 55seg. Por lo tanto el cálculo total para obtener el espectrograma es de 55.61s.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Evaluación

Ahora utilizaremos esta técnica para obtener un espectrograma paramétrico Kalman con los coeficientes del caso anterior. El resultado de esta representación se muestra en la figura 4.1.13, si comparamos este resultado con el mostrado en la figura 4.1.10 a partir de los parámetros AR vemos que la resolución en el plano tiempo-frecuencia se mejora significativamente.

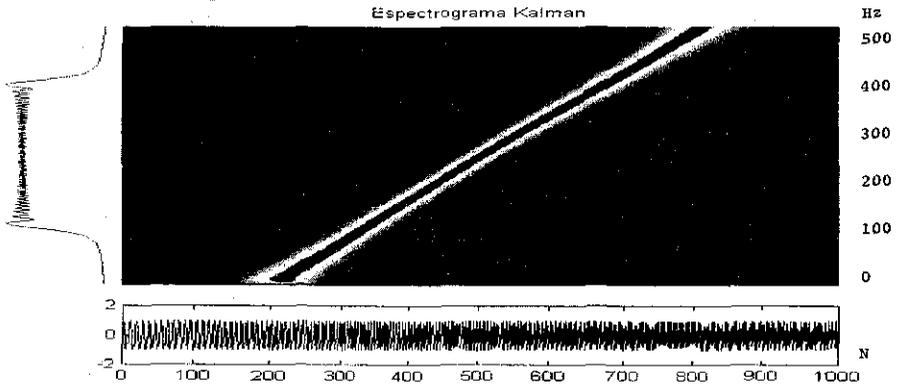


Figura 4.1.13. Espectrograma Kalman, del chirp lineal de 100Hz a 400Hz. Orden=4, $\lambda=0.97$ y $\alpha=0.001$

En la figura 4.1.14 se muestra el chirp cruzado, utilizando el filtro adaptable de Kalman. Con los parámetros del modelo; orden =4, $\lambda=0.97$ y $\alpha=0.001$. Nuevamente se aprecia su alta definición monocomponente en comparación al modelo AR mediante la técnica Levinson, sin embargo en la cercanía al cruce se pierde la resolución.

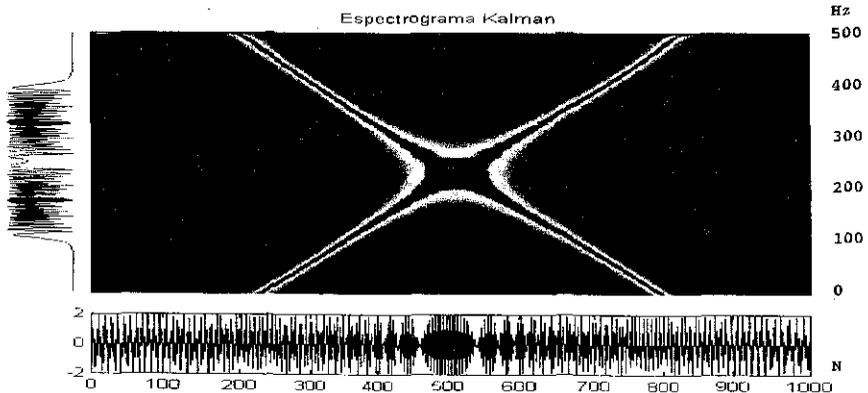


Figura 4.1.14. Espectrograma Kalman del chirp cruzado de 100 a 400Hz. Orden=4, $\lambda=0.97$, $\alpha=0.001$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sin embargo, y a pesar de la alta resolución que ofrece el filtro de Kalman en muchas ocasiones en la práctica no es posible darle una interpretación a los componentes frecuenciales que resuelve este método, como en el chirp cruzado, adicional a este inconveniente se encuentra el consumo computacional.

En las figuras 4.1.15 y 4.1.16 es posible apreciar los espectrogramas paramétricos de señales EEG reales, aplicando el modelo AR y el filtro Kalman respectivamente. Efectivamente el primero tiene más baja resolución en tiempo respecto al segundo, y muestra un atraso en el tiempo respecto a la señal original como efecto de la ventana de análisis,

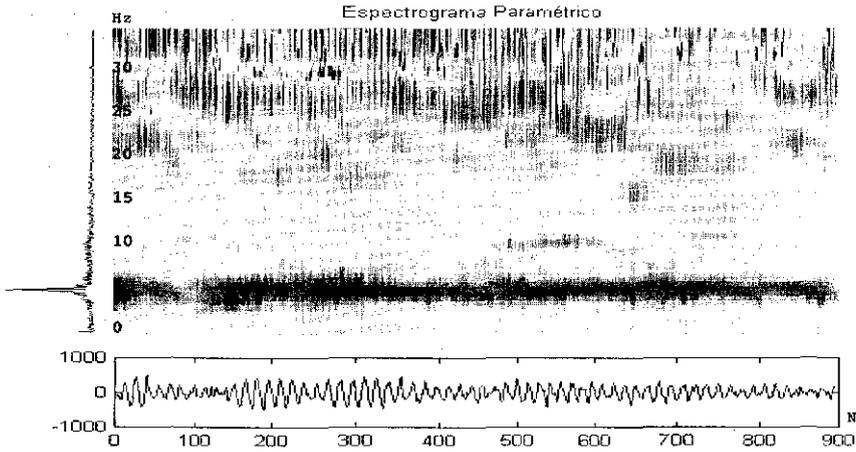


Figura 4.1.15 Espectrograma paramétrico AR de señal EEG. Orden 16 y ancho de análisis 32puntos.

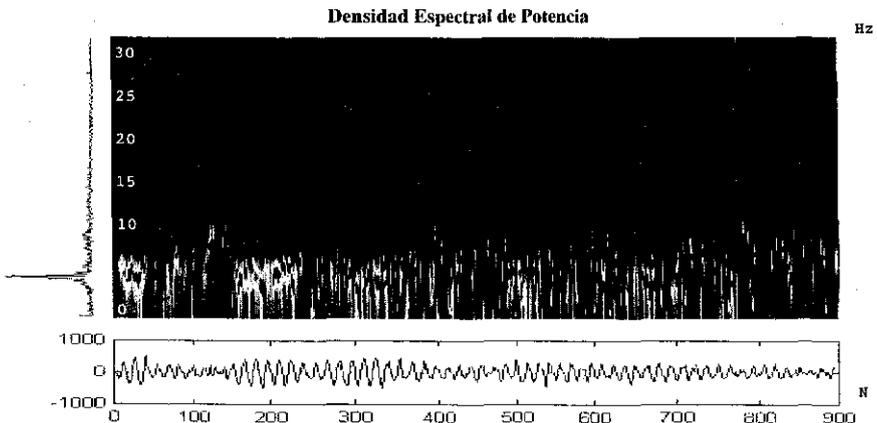


Figura 4.1.16 Espectrograma paramétrico Kalman de Señal EEG. Orden=16, $\lambda=0.8$, $\alpha=0.01$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Hasta aquí hemos visto que si la señal a analizar presenta cambios espectrales respecto al tiempo, pero éstos nos son bruscos en intervalos de tiempo, el espectrograma de *Kalman* sería una excelente opción para definir los componentes de frecuencia de la señal. Sin embargo debido a que éste es un algoritmo recursivo en tiempo, es decir hace estimación de los parámetros cada iteración requiere una cantidad excesiva de cálculos, $O(8p)$ por muestra sólo para el cálculo de los parámetros (para un modelo de orden $p=16$ y longitud $N=896$ muestras se requieren 114,688 operaciones).

Sin embargo, la mayoría de los estados patológicos cerebrales involucran actividad eléctrica con bruscos cambios de voltaje, como es el caso de crisis convulsivas, estado anestésico, fases durante el sueño, por lo que sus parámetros estadísticos son variantes en el tiempo, y no pueden considerarse estacionarios en cortos periodos. Los métodos tiempo-frecuencia son una de las soluciones planteadas al problema de representar las señales no-estacionarias y puede considerarse como una extensión al análisis clásico de Fourier, por lo que es más apropiado considerar el EEG como un proceso no-estacionario cuando éste se analiza sobre un largo periodo o cuando surgen transiciones rápidas y espontáneas como las espigas epilépticas.

En la siguiente sección trataremos el Análisis Tiempo Frecuencia como una alternativa a los métodos hasta ahora ya vistos, para extraer información del ECoG de los procesos transitorios que se presentan en las crisis epilépticas.

4.2 Distribuciones Tiempo Frecuencia

Como hemos dicho en la sección 4.1, la Transformada de Fourier y su inversa establecen una relación biunívoca entre el dominio del tiempo (señal $f(t)$) y el dominio de la frecuencia (espectro $F(\omega)$), estos dos dominios constituyen dos formas alternativas de analizar una señal.

El análisis clásico de Fourier nos permite descomponer una señal en sus componentes de frecuencia, así como obtener la intensidad de cada uno de ellos, sin embargo esta técnica exige que el contenido espectral de las señales no cambie respecto al tiempo, así como de un período considerablemente largo para estabilizar el espectro de la señal. Aunado a esto y aunque la FT permite pasar de un dominio al otro, no permite combinar ambos dominios, [HLA92]. Podemos decir que ni el análisis temporal ni el análisis frecuencial describen, por sí solos, completamente la naturaleza de la señal, no dicen completamente lo que está ocurriendo, [COH95].

Existen señales (no-estacionarias), como las biológicas, que no pueden ser modeladas como invariantes en el tiempo (estacionarias). El análisis espectral nos permite conocer cuales frecuencias están presentes en una señal, pero no nos dice nada acerca de cuando esas frecuencias existen, de aquí la necesidad de describir como el contenido espectral está cambiando respecto al tiempo, [COH95]. Resulta entonces necesario representar a este tipo de señales en un plano bidimensional tiempo-frecuencia (tf), en el cual se establezca en forma más evidente la localización temporal de los componentes espectrales de la señal.

Para determinar si el análisis que se requiere hacer a una señal debe ser en el plano tiempo-frecuencia se deben hacer varias consideraciones. Primero se debe partir de la estacionariedad de la señal, segundo tomar en cuenta si se trata de una señal monocomponente en caso contrario obtener sus componentes por medio de ventaneo en el plano tf, [BOA90]. Después, se debe "rastrear" tan exacto como sea posible la variación espectral de los componentes obtenidos a partir de la Frecuencia Instantánea $F_i(t)$. Posteriormente, la representación tf debería ser capaz de mostrar la distribución de energía de la señal tanto en tiempo como en frecuencia.

4.2.1 Localización Tiempo-Frecuencia

Las señales por naturaleza son reales, mientras este hecho facilita la implementación de muchos procesamientos de señales por otro lado, considerar una señal compleja que corresponda a la original ofrece ventajas; una de ellas es definir la frecuencia instantánea, [COH95]. Como se menciona en la sección 4.1.2 se observan dos señales distintas pero con espectro casi idéntico, la pregunta sería ¿cuál es la razón de tal discrepancia? Y la respuesta se encuentra en que el espectro de una señal real esta compuesto por la fase y la magnitud y por lo tanto la información que diferencia a esas dos señales está contenida en la fase espectral, es decir en este parámetro se encuentra la información necesaria para localizar los componentes de frecuencia en el tiempo o equivalentemente los componentes temporales en frecuencia.

Frecuencia Instantánea

En la fase de una señal se encuentra la información necesaria para evaluar la localización temporal de los componentes espectrales de la señal; es decir la frecuencia que está presente en un instante de tiempo dado (frecuencia instantánea, $F_i(t)$). La $F_i(t)$ está definida como la derivada de la fase instantánea de la señal compleja $f(t)$

$$\text{Si } f(t) = A e^{j\varphi(t)} \text{ entonces } F_i(t) = \frac{d\{\varphi(t)\}}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Arg}\{f(t)\} \quad \dots \quad 4.2.1.1$$

Sin embargo, como la $F_i(t)$ es una función explícita del tiempo, determinará sólo un componente de frecuencia a cada instante de tiempo analizado, [HLA92]. Si la señal $f(t)$ es monocómpone, entonces $F_i(t)$ será un buen parámetro de análisis.

Retardo de Grupo

De la misma forma existe la cantidad dual en el plano de la frecuencia – retardo de grupo- el cual está definido como la derivada de la fase espectral

$$GD_i(t) = \frac{d\{\varphi(\omega)\}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \text{Arg}\{F(\omega)\} \quad \dots \quad 4.2.1.2$$

El $GD_i(t)$ asume implícitamente, al igual que la $F_i(t)$, que una frecuencia dada está concentrada alrededor de un sólo instante de tiempo, es decir el retardo de grupo define los componentes temporales respecto a la frecuencia, [HLA92].

4.2.2 Limitaciones de la localización tiempo-frecuencia con $F_i(t)$ y $GD_i(t)$

De las definiciones de $F_i(t)$ y $GD_i(t)$, se puede ver que éstas tienen varias restricciones tanto para la localización en tiempo como en frecuencia ya que casi ninguna señal real presenta la característica de sólo contener un componente de frecuencia en cada instante de tiempo en que ésta existe y se pueden obtener valores negativos que no tienen significado físico.

Las restricciones asociadas con la $F_i(t)$ y el $GD_i(t)$ se pueden resolver describiendo la estructura bidimensional tiempo-frecuencia de una señal. Matemáticamente esto corresponde a la “función conjunta” $P_f(t, \omega)$ que indica la Representación Tiempo-Frecuencia (TFR) de la señal. Las TFRs se han aplicado para analizar, modificar y sintetizar no-estacionariedades o señales variantes en el tiempo, [HLA92].

La Señal Analítica

En el apartado anterior hemos establecido la utilidad del análisis de la frecuencia instantánea, pero que por otro lado, la mayoría de las señales que nos interesa estudiar son reales. Esto nos conduce a distinguir la ventaja de encontrar la señal compleja, la cual nos permitirá establecer la fase y la amplitud de una señal no-ambigua y así encontrar una expresión para la frecuencia instantánea $F_i(t)$.

Debemos encontrar la señal compleja $z(t)$ de la señal $f(t)$, partiendo del hecho que a consecuencia de la naturaleza real de la señal ésta tiene un espectro simétrico así que sólo la mitad de ese espectro contiene información mientras que la otra mitad incrementa la redundancia, esta redundancia es eliminada usando la noción de la señal analítica cuya parte real sea la propia señal original $f(t)$, esto implica que la señal compleja tendrá un espectro idéntico de la señal original para frecuencias positivas y será cero para las frecuencias negativas, [CLA80].

$$z(t) = f_a(t) = f_i(t) + j \mathbb{H}(t) \quad \dots \quad 4.2.2.1$$

donde $f_i(t)$ representa la señal original

$\mathbb{H}(t)$ es la transformada de Hilbert de la señal original $f_i(t)$

Es importante obtener una interpretación como distribución de la energía de la señal en tiempo y frecuencia, para lo cual es necesario que la distribución propuesta posea ciertas propiedades. Por ejemplo, a corrimientos en tiempo o frecuencia de la señal debería reflejarse en los correspondientes corrimientos en el plano tiempo-frecuencia. También, la proyección de la distribución en el dominio del tiempo (o la frecuencia) debería ser igual a la potencia instantánea (o densidad espectral) de la señal. Además, el centroide temporal (frecuencial) de la distribución a cada frecuencia (o tiempo) debería ser igual al retardo de grupo (o frecuencia instantánea) de la señal.

La idea general es obtener una distribución conjunta en donde se pueda conocer que fracción de energía existe en un cierto rango de frecuencia y tiempo; cual es la frecuencia en un tiempo en particular o poder calcular la frecuencia media en un momento dado; o cual su densidad de energía o intensidad de la señal.

Si contamos con esa distribución, se puede obtener que fracción de energía se tiene en una cierta frecuencia y a un tiempo en particular.

$$\sum \text{Energía en Frecuencia} \Big|_{t=t_0} \Rightarrow \text{Energía Instantánea} \quad p(t) = \int P(t, \omega) d\omega = |f(t_0)|^2 \dots 4.2.2.2$$

$$\sum \text{Energía en Tiempo} \Big|_{\omega=\omega_0} \Rightarrow \text{Densidad Espectral de Energía} \quad P(\omega) = \int P(t, \omega) dt = |F(\omega_0)|^2 \dots 4.2.2.3$$

La energía total de una distribución tiempo-frecuencia estaría expresada como

$$E_T = \iint P(t, \omega) dt d\omega \quad \dots \quad 4.2.2.4$$

Estas son consideradas distribuciones de energía en el sentido de que al integrarlas en el plano tiempo-frecuencia obtenemos la energía total de la señal.

4.2.3 Propiedades

Dependiendo del tipo de distribución tf serán las propiedades que cumplan, sin embargo se mencionaran a continuación las propiedades más importantes de una TFR, [COH95]. Las mencionaremos según tres grupos, las generales, según su dependencia lineal y los marginales.

- **Generales**

1.- Desplazamiento Invariante en el Tiempo y en la Frecuencia

Tiempo: $f(t) \Rightarrow f(t - t_0)$
 $P_f(t, \omega) \Rightarrow P_f(t - t_0, \omega)$

Frecuencia: $F(\omega) \Rightarrow F(\omega - \omega_0)$
 $P_f(t, \omega) \Rightarrow P_f(t, \omega - \omega_0)$

Si $f(t)$ es una señal, entonces esta señal trasladada en tiempo por t_0 y trasladada en frecuencia por ω_0 , quedará expresada como:

$$f(t) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} f(t - t_0)$$

$$P_f(t, \omega) \Rightarrow P_f(t - t_0, \omega - \omega_0)$$

2.- Escalamiento Lineal

$$f(t) = f(at) \text{ y } F(\omega) = F(\omega/a)$$

$$\Downarrow$$

$$P_f(t, \omega) = P_f(at, \omega/a)$$

- **Dependencia Lineal y No lineal**

La propiedad fundamental de las TFRs corresponde a la manera en la cual depende de la señal $f(t)$, esta dependencia puede ser lineal y no lineal.

1. Representaciones Tiempo-Frecuencia Lineales

Todas la TFR lineales satisfacen el teorema de superposición o linealidad, [HLA92]

Si

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \\ P_f(t,f) &= C_1 P_{p_1}(t,f) + C_2 P_{p_2}(t,f) \end{aligned}$$

La linealidad es una propiedad muy deseable especialmente en aquellas aplicaciones que involucran señales multicomponentes.

2. Representaciones Tiempo-Frecuencia Cuadráticas

Aunque la linealidad es una propiedad deseable, la estructura cuadrática de una TFR es una característica conveniente cuando queremos interpretarla como una distribución de energía tf “potencial espectral instantáneo”, debido a la naturaleza cuadrática de la energía, [HLA92].

- **Marginales**

Una TFR busca plantear una función que describa los conceptos de potencia instantánea $p(t)$ y de densidad espectral de energía $P(\omega)$ simultáneamente, y que pueda usarse y manipularse como cualquier expresión de densidad, [COH95]. Esta “densidad conjunta” va a representar:

$P(t,\omega)$: La Intensidad al tiempo t y a la frecuencia ω

$P(t,\omega) \Delta t \Delta \omega$: Fracción de energía correspondiente a la celda tiempo-frecuencia $\Delta t \Delta \omega$
idealmente esta interpretación energética está dada por las propiedades marginales que se expresan a continuación:

Momentos Globales.- se encuentra integrando sobre todo el plano tf y son por lo tanto independientes de la frecuencia y del tiempo. La integración global tanto en tiempo como en frecuencia dará como resultado la energía total de la señal, E_T .

$$E_T = \iint P(t,\omega) dt d\omega = \int |f(t)|^2 dt = \int |F(\omega)|^2 d\omega$$

Momentos Locales.- se considera la TFR como una función del tiempo para una frecuencia fija f o como una función de frecuencia para un tiempo fijo t .

1^{er} Condicional **Marginal Temporal**, la cantidad que se obtiene al sumar para un tiempo dado la energía existente en las diferentes frecuencias a ese tiempo, da la Potencia Instantánea a ese tiempo, [COH95]

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_f(t,\omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad \dots \quad 4.2.3.1$$

2^a Condicional **Marginal Frecuencial**, asimismo, si para una frecuencia dada, se suma la energía existente para los diferentes valores de t se obtiene la energía a esa frecuencia ω , es decir la Densidad Espectral de Energía, [COH95].

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_f(t,\omega) dt = |F(\omega)|^2 \quad \dots \quad 4.2.3.2$$

Ahora se representa en el plano tiempo-frecuencia de la figura 4.2.1, los marginales de tiempo y frecuencia, así como la relación entre la densidad espectral de energía y la energía instantánea.

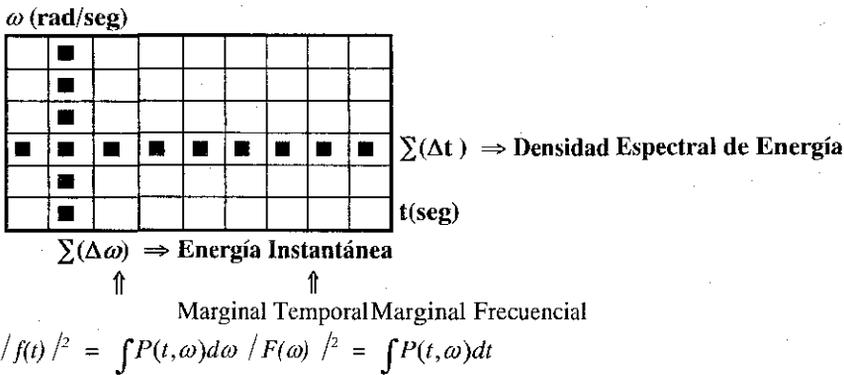


Figura 4.2.1 Representación de la resolución en tiempo y frecuencia

Así que el cuadrado del valor absoluto de la señal es la densidad temporal de energía y la magnitud al cuadrado de la Transformada de Fourier de la señal será la densidad de energía por unidad de frecuencia.

4.2.4 Transformada de Fourier de Tiempo Corto

4.2.4.1 Introducción

Como ya se ha dicho, existen diferentes grupos de representaciones tiempo-frecuencia, una de ellas son las deslizantes. Consiste en situarse dentro de una referencia de tiempo local deslizante restringiendo el tamaño de observación a una duración corta y centrada en dicho instante, sin embargo encontrar una ventana de "tiempo-corto" es un problema para ciertas señales, como el electroencefalograma, ya que no existe ningún intervalo para el cual la señal sea más o menos estacionaria, [COR96].

La Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT, del inglés Short Time Fourier Transform) es uno de las distribuciones tiempo-frecuencia más usadas para estudiar las señales no-estacionarias. La idea básica de la STFT es romper la señal en segmentos cortos de tiempo y analizar, mediante Fourier, cada uno de esos segmentos. La totalidad de cada espectro indica como ese espectro fue variando respecto al tiempo, [COH95].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para estudiar las propiedades frecuenciales de una señal $f(t)$ alrededor de un tiempo particular “ t ” se debe enfatizar la señal en ese tiempo y suprimirla en otros tiempos, esto se lleva a cabo multiplicando la señal por una función ventana $h(t)$ centrada en “ t ”, y así se cumplirá las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f_i(\tau) &\approx \begin{cases} f(\tau): & \text{para } \tau \text{ cercanos a "t"} \\ 0: & \text{para } \tau \text{ lejanos a "t"} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_i(\tau) \Rightarrow f(\tau) h(\tau - t)$$

donde t : Intervalo de tiempo del cual estamos interesados en analizar la señal
 τ : Longitud temporal de la ventana de análisis

La Transformada de Fourier de $f_i(\tau)$ reflejará la distribución de frecuencia en el tiempo “ τ ”. La STFT es simplemente un “espectro local” de la señal $f(t)$ en el tiempo de análisis centrado en la ventana $h(\tau - t)$, por lo que estará directamente influenciado por el tipo de ventana que se seleccione. [COH95].

$$P_{STFT}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \dots \quad 4.2.4.1$$

Siempre se debe de considerar que al utilizar la STFT las propiedades de la señal se encuentran mezcladas con las propiedades de la función ventana $h(\tau - t)$ empleada.

• **Propiedades**

Ventajas

- a) Tiene una teoría muy bien desarrollada
- b) Es una representación lineal
- c) Es positiva y real para todo el plano tiempo-frecuencia
- d) La Función de Ambigüedad de la ventana temporal empleada determina la distribución.
- e) La Función de Ambigüedad enfatiza los auto-términos.
- f) Si se integra tanto en frecuencia como en tiempo la cantidad resultante es equivalente a la energía total de la señal
- g) La densidad espectral de energía en el tiempo “ t ” está determinada por la siguiente expresión, [COH95]:

$$P_f(t, \omega) = |F_i(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(\tau - t) e^{-j2\pi\tau} d\tau \right|^2 \quad \dots \quad 4.2.4.2$$

Desventajas

- a) La señal se considera estacionaria en la ventana a procesar
- b) Se encuentra limitada en resolución, pobre resolución en tiempo o frecuencia

- c) Seleccionar un segmento de datos grande, para aumentar la resolución espectral, compromete la suposición de tramo estacionario.
- d) La inclusión de no-estacionariedades producirá inadecuada representación de la señal.
- e) Solo algunas ventanas son las apropiadas respecto a una señal en particular.
- f) Elección de la Ventana
- g) Compromiso de resolución tiempo-frecuencia, [HLA92]
 - no siempre es la representación más clara del suceso
 - tiene que cumplir con el principio de incertidumbre
 - no cumple con los marginales
 - no satisface la propiedad de soporte compacto en tiempo y frecuencia.

4.2.4.2 Principio de Incertidumbre

Concepto

Si se reduce significativamente la duración de la ventana, tal que se pudiera mejorar la localización de eventos en el tiempo, esto ocasionaría disminuir la resolución en frecuencia y viceversa aumentar la ventana de análisis se perdería la localización precisa temporal, [COH89]. Es decir, una señal temporal de corta duración le corresponde un espectro frecuencial ancho, y a su vez una señal temporal con mayor duración tiene un espectro estrecho, y ambos, tanto la señal temporal como el espectro frecuencial no pueden ser arbitrariamente pequeños, [COR96].

Si los intervalos de tiempo que se van a analizar se reducen considerablemente se producirán respuestas que no tienen sentido, es decir, los espectros obtenidos no mostrarán relación respecto al espectro de la señal original. La razón de esto es que la señal se ha dividido en segmentos tan pequeños que han modificado las propiedades respecto a la señal original, especialmente porque señales de muy corta duración tienen inherentemente ancho de banda grandes, [COH95]. Si se desea limitar mejor la información en tiempo (buena resolución temporal), se debe elegir una ventana muy estrecha alrededor del punto de interés, es decir, se tendrá pobre resolución en frecuencia : principio de incertidumbre, [COH95]

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

donde Δt y $\Delta \omega$ representan la duración y el ancho de banda de la señal respectivamente.

4.2.4.3 Espectrograma

Definición

El espectrograma es el método estándar para el estudio de señales que varían en el tiempo, [COH92] y se encuentra basado en la STFT, es decir, analiza a la señal a través de ventanas deslizantes en el tiempo, mapeando señales de una dimensión (tiempo) a dos dimensiones (tiempo, frecuencia), [HLA92]. Sin embargo, existen señales cuyo contenido espectral está

cambiando tan rápidamente que encontrar un ancho de la ventana para la cual la señal sea más o menos estacionaria se convierte en un problema, especialmente por el compromiso que se tiene de cumplir con el principio de incertidumbre. Una desventaja del espectrograma es su pobre concentración tiempo-frecuencia, es decir, ofrece baja resolución.

Como ya dijimos la transformada de Fourier de la señal $f(\tau)$ reflejará la distribución de frecuencia en el tiempo "t", según se expresa con la ecuación 4.2.4.1. Mientras que la función ventana $h(\tau-t)$ controlará los pesos relativos impuestos en diferentes partes de la señal. Por lo tanto la ventana se debe seleccionar tal que pondere una mayor cantidad al intervalo cercano del punto de observación.

La densidad espectral de energía al tiempo de interés "t" expresada por la ecuación 4.2.4.2 indica que para cada tiempo "t" de interés se obtiene un espectro diferente y la totalidad de esos espectros es la distribución tiempo-frecuencia $P_{STFT}(t, \omega)$. Cuando se calcula la magnitud cuadrática de la distribución dada por la expresión 4.3.3.3 se obtiene la representación denominada espectrograma $P_{SP}(t, \omega)$.

$$P_{SP}(t, \omega) = |P_{STFT}(t, \omega)|^2 \quad \dots \quad 4.2.4.3$$

El espectrograma indica la fracción de la energía total en el tiempo "t" y la frecuencia "ω", es decir, el espectrograma se puede usar para estimar cantidades locales. Las propiedades básicas y la efectividad del espectrograma para una señal en particular depende de la forma funcional de la ventana seleccionada, aunque es deseable que las propiedades estimables no sean demasiado sensibles a los detalles de la ventana. Para obtener la energía total de la distribución se sumaran todos los componentes de energía de las diferentes celdas tiempo-frecuencia.

Propiedades

El espectrograma es una distribución que satisface los requerimientos de energía total pero no satisface los marginales.

Como vemos de la expresión 4.2.4.4, el espectrograma ya no cumplirá la propiedad de linealidad de la STFT; es decir, el espectrograma de la suma de dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ no será simplemente la suma de los espectrogramas individuales $P_{STFT1}(t, \omega) + P_{STFT2}(t, \omega)$, por lo tanto la estructura lineal de la STFT se verá modificada a una estructura cuadrática para el espectrograma, [HLA92], satisfaciendo al principio de superposición cuadrática, el cual indica:

$$\text{Si } f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$$

entonces

$$P_{STFT}(t, \omega) = |C_1|^2 P_{STFT1}(t, \omega) + |C_2|^2 P_{STFT2}(t, \omega) + C_1 C_2^* P_{STFT12}(t, \omega) + C_2 C_1^* P_{STFT12}^*(t, \omega) \quad \dots \quad 4.2.4.4$$

donde: $P_{STFT1}(t, \omega)$: es la STFT de la señal $f_1(t)$
 $P_{STFT2}(t, \omega)$: es la STFT de la señal $f_2(t)$

$P_{SFT12}(t, \omega)$: es la STFT “cruzada” de las dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$
 $C_1 C_2^*$ y $C_2 C_1^*$: son artefactos o interferencias

Interferencias

Los términos de interferencia del espectrograma son estructuras oscilatorias las cuales están restringidas a las regiones del plano tiempo-frecuencia donde las correspondientes autorepresentaciones (términos de la señal) coinciden. De aquí que si dos componentes de la señal $f(t)$ están lo suficientemente apartados en el plano tf entonces sus representaciones cruzadas (términos de interferencia) serán esencialmente cero, [HLA92].

4.2.5 Distribuciones de la Clase de Cohen

Ya se ha visto que el espectrograma, basado en la STFT, presenta problema para encontrar anchos de ventana para los cuales la señal a analizar sea más o menos estacionaria, no siempre es la representación más clara del suceso y no cumple con los marginales por lo que no se puede considerar una distribución energética propiamente dicha.

Adicional a lo anterior el espectrograma asume que la señal es estacionaria en ese corto tiempo analizado por la ventana, esto tiene como desventaja que la longitud de la estacionariedad asumida determina la resolución de frecuencia, y para poder incrementarla se tendría que tomar un intervalo de medida (ventana) más largo lo cual significaría que las estacionariedades que ocurrieran durante ese intervalo estarían diseminadas tanto en tiempo como en frecuencia.

Para resolver los problemas encontrados en el espectrograma se han desarrollado una serie de Representaciones Tiempo-Frecuencia cuadráticas, entre ellas se encuentra la Distribución Wigner-Ville. Esta distribución es considerada la base sobre la cual se desarrollan un conjunto de TFRs que cumplen con ciertas propiedades. Las TFRs que forman parte de este grupo se les denomina las TFRs que pertenece a la Clase de Cohen.

En 1966 Cohen, [HLA92] empleó funciones características y teoría de operadores para derivar una clase general de representaciones tiempo-frecuencia denominada la clase de Cohen. Las distribuciones de la clase de Cohen utilizan una transformación bilineal que depende de la frecuencia y el tiempo. A Cada distribución que pertenezca a la clase de Cohen se le asocia una función llamada kernel. La expresión general de las distribuciones tiempo-frecuencia que pertenecen a la clase de Cohen es:

$$P_2(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu, \tau) z(u + \frac{1}{2}\tau) z^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\nu t - j\omega \tau + j\nu \tau} d\nu d\tau du \quad \dots \quad 4.2.5.1$$

donde: $g(\nu, \tau)$ es la Función Bidimensional llamada kernel, z es la señal analítica y z^* su complejo conjugado.

si se integra la expresión anterior respecto a la variable ν la ecuación 4.2.5.1 se puede escribir de la forma:

$$P_z(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(u-t, \tau) z(u + \frac{1}{2}\tau) z^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau} du d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.2$$

donde,
$$r(u, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu, \tau) e^{j2\pi\nu u} d\nu$$

La Función Kernel

Se encontró que se podrían caracterizar distribuciones tiempo-frecuencia por medio de una función auxiliar: la función kernel, [HLA92]. Las propiedades de la distribución se consiguen restringiendo o poniendo límites en el kernel, así que por inspección directa del kernel empleado se pueden deducir las propiedades de la distribución, es decir, el kernel determina la distribución y sus propiedades.

Propiedades Básicas Relacionadas con el Kernel

- Marginales
 - Energía global
 - Energía instantánea
 - Densidad espectral de energía
- Principio de incertidumbre
- Desplazamiento en tiempo y frecuencia, implica desplazamiento en el Kernel
- Invarianza a escalamiento
- Promedios globales
- Promedios locales

La forma general de Cohen es una representación muy útil para el estudio de las distribuciones ya que facilita su diseño y el estudio de sus propiedades con sólo modificar el kernel $g(\nu, \tau)$. Existen dos tipos de kernels, los no-separables : $g(\nu, \tau) = g(\nu)\tau$ y los separables, que son productos de funciones de ν y τ : $g(\nu, \tau) = g_1(\nu)g_2(\tau)$, [COH92]. Por ejemplo, si queremos que la distribución satisfaga a los marginales el kernel debe tener la propiedad $g(\theta, \tau) = g(\nu, \theta) = 1$. Por otro lado, para obtener una TFR con valores reales para todo el rango tiempo-frecuencia, el kernel debe satisfacer $g(\nu, \tau) = g^*(-\nu, -\tau)$.

Otras consideraciones importantes en el desarrollo de las TFRs es que el kernel que las describa no dependa explícitamente de las propiedades de la señal a procesar. También es importante que las distribuciones tf tengan la misma duración de la señal, o sea, que sea cero antes de que la señal comience y cero después de que la señal termine. En este caso se dice que la distribución tiene soporte finito, [COH92]. Esta característica no la cumplen todas las distribuciones, ya que al asegurar un soporte finito en tiempo, no necesariamente implica que la distribución sea cero

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

cada vez que la señal tenga un valor de cero. A este tipo de distribuciones se les clasifica como distribuciones con soporte débil, mientras que las representaciones que sí cumplen con la condición de ser cero cuando la señal es cero, se clasifican como distribuciones de soporte finito fuerte.

Función de Ambigüedad

El dominio de ambigüedad es la clave para estudiar y entender las relaciones y manipulaciones de las representaciones tiempo frecuencia que pertenecen a la clase de Cohen, [QIA96]. Consideremos al kernel $g(\nu, \tau) = 1$, entonces la forma general se expresa como:

$$P_z(t, \omega) = \int z(t + \frac{1}{2}\tau) z^*(t - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.3$$

si a la ecuación 4.2.5.3 se le hacen un cambio de variable, y se integra con respecto a t , obtenemos la expresión para la función de ambigüedad $AF_z(\nu, \tau)$,

$$AF_z(\nu, \tau) = \int z(t + \frac{1}{2}\tau) z^*(t - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\nu t} dt \quad \dots \quad 4.2.5.4$$

La porción de la Función de Ambigüedad que corresponde a los autotérminos está siempre conectada al origen del plano de ambigüedad, mientras que la parte de ambigüedad que está relacionada con los términos cruzados tiende a esparcirse por todas partes.

Si ahora consideramos la función de autocorrelación instantánea $R(t, \tau)$ en base a la función de ambigüedad tenemos:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int AF_z(\nu, \tau) g(\nu, \tau) e^{-j\nu t} d\nu \quad \dots \quad 4.2.5.5$$

A partir de las ecuaciones 4.2.5.3, 4.2.5.4 y 4.2.5.5, se concluye que la función de autocorrelación y la función de ambigüedad están relacionadas por la transformada inversa de Fourier, como se expresa mediante la siguiente ecuación

$$AF_z(\nu, \tau) = \mathcal{F}_t^{-1}\{R(t, \tau)\} \quad \dots \quad 4.2.5.6$$

y que cualquier representación tiempo-frecuencia que pertenezca a la clase de Cohen se puede calcular en base a la función de autocorrelación, por medio de la expresión siguiente:

$$P_z(t, \omega) = \iint g(\nu, \tau) AF_z(\nu, \tau) e^{-j(\nu + \omega\tau)} d\nu d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.7$$

La importancia del trabajo de Cohen es reducir el problema del diseño del espectro dependiente del tiempo, a la selección de la función kernel $g(\nu, \tau)$. Una de las principales motivaciones para estudiar la clase de Cohen es buscar un espectro dependiente del tiempo que no solo preserve todas las útiles propiedades sino también reduzca las interferencias de los términos cruzados.

Propiedades

Si se desea un análisis práctico y útil, entonces la TFR debería representar exactamente la distribución de energía de la señal y por lo tanto, cumplir con ciertas características. Las propiedades que debe cumplir una TFR que pertenezca a la clase de Cohen son:

1.- La TFR debe ser real para representar la variación en energía, y se espera que sea positiva.

2.- Momentos de la TFR. Para una señal específica se puede calcular su distribución energética y analizando esta función se puede tener una idea de como la energía de la señal está distribuida en tiempo y frecuencia, si está concentrada en cierto intervalo de tiempo o frecuencia, o si está extendida sobre todo el plano t , etc., [CLA80].

Es posible caracterizar esta distribución sin necesidad de obtener todos los valores del plano t , a partir de los Momentos de la TFR: Momentos Globales, Momentos Locales (Marginal Temporal y Marginal Frecuencial), así como de los Primeros Momentos: Frecuencia Instantánea $F_i(t)$ es

decir $F_i(t) = \frac{\int \omega P_2(t, \omega) d\omega}{\int P_2(t, \omega) d\omega}$ cuando se cumple : $g(t, \nu) = 1$, $\frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau, \nu)|_{\tau=0} = 0$ y Retraso de Grupo

$GD_i(\tau)$ expresado por $GD_i(\tau) = \frac{\int t P_2(t, \omega) dt}{P_2(t, \omega) dt}$ si se satisface $g(\tau, 0) = 1$, $\frac{\partial}{\partial \nu} g(\tau, \nu)|_{\nu=0} = 0$.

Las propiedades anteriores restringen las TFRs que pueden usarse para análisis práctico, entre ellas las que se han propuesto para el análisis de señales tiempo-frecuencia y que tienen todas las propiedades deseables antes mencionadas están la distribución Wigner Ville, la Distribución de Cohen, la distribución de Rihaczek, la Choi-Williams, y más recientemente la Distribución de Reducción de Interferencias.

Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas

Las Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas deben preservar las propiedades del caso continuo. El kernel discreto $g[n, p]$ también debe cumplir con ciertas condiciones, por ejemplo, para asegurar que tenga valor real para todo tiempo y frecuencia el kernel debe cumplir con, [BOA91]: $g[n, p] = g^*[-n, -p]$. Y si se desea que cumpla con las propiedades de los marginales el kernel debe tener las siguientes características :

$$g[n, 0] = \delta[n]$$

donde $\delta[n]$ es la función delta discreta

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n, p] = 1$$

Al discretizar los parámetros que representan la frecuencia y el tiempo en la ecuación general que define la clase de Cohen, expresión 4.2.5.1, se obtiene la expresión general de Cohen en su forma discreta, [BOA91]:

$$P_z[n, m] = \sum_k \sum_p g[p-n, k] z[n+k] z^*[n-k] e^{-j4\pi km} \quad \dots \quad 4.2.5.8$$

En general, para implementar alguna distribución perteneciente a la clase de Cohen los pasos a seguir para cada instante discreto n , son los siguientes, [CLB80]:

- a) Encontrar la versión compleja discreta $z[k]$, señal analítica, aplicando la Transformada de Hilbert a la señal discreta original $f[k]$.
- b) Calcular el producto del arreglo, $p[n, k] = z[n+k] z^*[n-k]$ de la expresión 4.2.5.8, para $k=0, 1, 2, \dots, N$. Para obtener una distribución real el producto debe tener simetría Hermítica es decir, $z^*[n, m] = z[n, -m]$, y por lo tanto solo valores para retrasos positivos se calculan.
- c) Efectuar la convolución discreta del arreglo $p[n, k]$ con la función o kernel discreto $g[n, p]$. Para el caso de la WVD, $g[n, p] = 1$, por lo que este paso es eliminado.
- d) Rescribir en un vector $p[k]$ de longitud NPF, número de puntos frecuenciales a calcular, $p[k] = \{z[0, 0], z[0, 1], z[0, 2], \dots, z[0, N], 0, \dots, 0, z^*[0, N], z^*[0, N-1], \dots, z^*[0, 1]\}$. Se añaden al arreglo $p[k]$ en la parte central tantos ceros (zero-padding) como sean necesarios para que su longitud sea de potencia dos.
- e) Calcular la FFT al vector $p[k]$.
- f) Repetir los pasos anteriores hasta recorrer en el tiempo n toda la señal.

4.2.5.1 La Distribución Wigner-Ville

La Distribución Wigner se introdujo para el estudio en la mecánica cuántica y posteriormente Ville propuso su aplicación en el análisis de señales discutiendo su aplicación y derivando un método basado en sus propiedades matemáticas, [COH95], razón por la cual se refiere como la Distribución Wigner-Ville (WVD). Esta distribución ha mostrado muy buenos resultados en diferentes campos de la ciencia como es el caso de bioingeniería, procesamiento de señales, análisis de sistemas variantes en el tiempo, para señales altamente no-estacionarias, en detección y estimación de señales, por mencionar algunas aplicaciones, [HLA92].

La WVD es el prototipo de las distribuciones que son cualitativamente diferentes del espectrograma y que pertenecen a la clase de Cohen. La WVD es una distribución cuadrática que ofrece alta resolución t_f a señales monocomponentes no-estacionarias y no ambiguas como los chirps, su representación de señales multicomponentes no es muy útil ya que contiene interferencias (términos cruzados) en diferentes regiones del plano t_f , estos términos cruzados son un obstáculo para la interpretación de la señal ya que cargan redundante información que puede oscurecer las características principales de la señal. Muy especialmente, tiene limitadas aplicaciones en el análisis de señales cerebrales, [ZAV92].

El kernel de la WVD es la unidad $g(\nu, \tau) = 1$, si este valor se aplica en la ecuación 4.2.5.7 para calcular la densidad espectral de energía entonces $P_{wv}(t, \omega)$, quedará expresado por:

$$P_{wv}(t, \omega) = \iint AF_z(\nu, \tau) e^{-j(\nu + \omega\tau)t} d\nu d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.9$$

y $P_{wv}(t, \omega)$ representará la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, como se indica a continuación

$$P_{wv}(t, \omega) = \mathfrak{F}_\tau \{R(t, \tau)\} \quad \dots \quad 4.2.5.10$$

La WVD es la transformada de Fourier con respecto a la cantidad $z^*(t - \frac{1}{2}\tau)z(t + \frac{1}{2}\tau)$, si se quiere enfatizar el punto cercano a cierto tiempo de interés t y suprimir los puntos lejanos, entonces debemos multiplicar dicho producto por una función ventana que sea muy estrecha alrededor de τ : $h(\tau)z^*(t - \frac{1}{2}\tau)z(t + \frac{1}{2}\tau)$, y tomar la transformada de Fourier para obtener la WVD suavizada $WP_{wv}(t, \omega)$, [CLA80].

$$WP_{wv}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)z(t + \frac{1}{2}\tau)z^*(t - \frac{1}{2}\tau)e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.11$$

Propiedades

- Los autotérminos siempre son valores reales
- Los corrimientos en tiempo y en frecuencia de la señal producen corrimientos de tiempo y frecuencia en la distribución,
- Satisface la propiedad de soporte en tiempo y frecuencia, debido a que su kernel es la unidad y la TF de éste es la función impulso, claramente establecida dentro de los límites de (ν, τ) .
- Satisface a los marginales
- La WVD puede presentar valores negativos en el plano tiempo-frecuencia
- Siempre aparecen interferencias sin considerar la distancia tiempo-frecuencia entre los componentes de la señal.
- El kernel unitario permite muchas propiedades deseables y convenientes, sin embargo no es necesario que sea unitario para todo ν y τ , es suficiente con asegurar que $\nu=0$ y $\tau=0$, y que el kernel sea tal que $g^*(\nu, \tau) = g(-\nu, -\tau)$.

Términos de Interferencia de WVD

Por ser una TFR cuadrática la WVD de la suma de dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ no sólo es la suma de la WVD de cada señal exclusivamente, sino además muestra la concentración de energía debida a los componentes en ω_1 y ω_2 como se esperaría, también aparecen en el plano tf un componente de energía en la frecuencia $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. A este componente de frecuencia extra se le denomina término cruzado o interferencia, que surge dependiente del tiempo y de la naturaleza oscilatoria

de la señal, [COH89]. Por lo que la $P_{WV}(t, \omega)$ de una señal $f(t)$ con dos componentes de frecuencia, ω_1 y ω_2 , se puede expresar como:

$$P_{WV}(t, \omega) = P_{WV11}(t, \omega) + P_{WV22}(t, \omega) + P_{WV12}(t, \omega) + P_{WV21}(t, \omega) \quad \dots \quad 4.2.5.12$$

donde $P_{WV12}(t, \omega)$ y $P_{WV21}(t, \omega)$, se denominan los términos cruzados de la WVD. Generalizando se tienen $\frac{1}{2}N(N-1)$ términos cruzados donde N es el número de componentes de frecuencia.

La WVD tiene excelente resolución tf y las propiedades matemáticas que satisface la hacen una TFR muy atractiva, sin embargo en aplicaciones prácticas las interferencias, como lo vemos en la expresión 4.2.5.12, son muy significativos y numerosos causando problemas en la interpretación gráfica y computacional de la distribución en señales multicomponentes. Este aspecto podríamos considerarlo como una gran desventaja de la WVD cuyos TIs estarán presentes aunque los componentes reales de la señal (auto-términos) se encuentren muy apartados, es decir aunque no estén traslapados, ocurren a la mitad entre cada par de componentes de la señal, [HLA92]. El sobre suavizado presente en la WVD suavizada, disminuye los TIs en comparación con la WVD sin embargo también causa un esparcimiento por todo el plano tf de los componentes de la señal, y se pierde la ventaja de alta resolución [CLA80].

Desafortunadamente la atenuación de los TIs conlleva una reducción o pérdida de concentración tf, ya que la naturaleza propia del suavizado generalmente causa un ensanchamiento en la resolución de los componentes de la señal. Las únicas propiedades con las que cumple esta distribución son que su valor es real para todo el plano tf, y que presenta invarianza a desplazamientos tiempo-frecuencia, [FLA93].

4.2.5.2 Distribución Choi-Williams

Como hemos visto, la WVD no es muy adecuada para la representación de señales multicomponentes de ancho de banda grande, ya que por cada par de frecuencias surgen términos cruzados o interferencias. Este hecho conduce a buscar nuevos kernels que permitan la reducción o supresión de las interferencias. Consideremos la señal multicomponente de la expresión 4.2.5.13, para la cual la distribución tiempo-frecuencia estará compuesta de las distribuciones de cada componente (auto-términos) y la interacción de cada par de diferentes componentes (términos cruzados):

$$z(\mu + \tau/2)z^*(\mu - \tau/2) = \sum_{i=1}^n z_i(\mu + \tau/2)z_i^*(\mu - \tau/2) + \sum_{i \neq m} \sum z_i(\mu + \tau/2)z_m^*(\mu - \tau/2) \quad \dots \quad 4.2.5.13$$

la cantidad y forma de los términos cruzados están determinados por las características de la función kernel $g(\nu, \tau)$. Esos términos cruzados causan redundancia en la información y podrían



oscurecer las distribución verdadera de energía tiempo-frecuencia, afectando seriamente procesos como el reconocimiento y clasificación de patrones, [HLA92].

Para suprimir la porción de la Función de Ambigüedad que está lejos del origen, y con ello disminuir los términos cruzados, los investigadores Choi y Williams introdujeron el Kernel exponencial- campana gaussiana- $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$ donde ζ es una constante, y así obtener la distribución exponencial $P_{CW}(t, \omega)$, mejor conocida como la distribución Choi-Williams (CWD). El parámetro de escala ζ se varía sobre un amplio rango de valores, con ello se consigue un efectivo desempeño en la supresión de interferencias y la preservación de alta resolución de los auto-términos, [CHO89].

La CWD es un miembro de la clase de Cohen. Si su kernel $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$ se sustituye en la expresión generalizada de la ecuación 4.2.5.1, se obtiene:

$$P_{CW}(t, \omega) = \int_{\tau} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{\mu} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2 / \zeta}} \exp\left(-\frac{(\mu - t)^2}{4\tau^2 / \zeta}\right) z\left(\mu + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) d\mu \right] d\tau \quad \dots \quad 4.2.5.14$$

Las propiedades que satisface el kernel exponencial son:

- a) Corrimiento en tiempo y frecuencia
- b) Distribución real $g^*(\nu, \tau) = g(-\nu, -\tau)$
- c) La integral de la $P_{CW}(t, \omega)$, sobre todo el intervalo de tiempo a una frecuencia dada ω será igual a la densidad espectral de la señal a esa frecuencia
- d) La integral de la $P_{CW}(t, \omega)$, sobre todas las frecuencia de un tiempo determinado, será la potencia instantánea
- e) La integral de la $P_{CW}(t, \omega)$, sobre todo el plano $t\omega$ es igual a la energía total de la señal
- f) El centroide temporal de $P_{CW}(t, \omega)$ en cada frecuencia es el retardo de grupo
- g) El centroide frecuencial de $P_{CW}(t, \omega)$ a cada instante es igual a la frecuencia instantánea
- h) La $P_{CW}(t, \omega)$ no es una distribución, no negativa ya que su kernel no es una forma de una combinación lineal de la función de ambigüedad.

Por otro lado, como la densidad espectral de energía, de las distribuciones tiempo-frecuencia que pertenecen a la clase de Cohen se calcula a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $P_2(t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau} \{R(t, \tau)\}$, entonces la expresión 4.2.5.14 puede tomar la forma:

$$P_{CW}(t, \tau) = \int_{\mu} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2 / \zeta}} z(\mu + \tau/2) z^*(\mu - \tau/2) e^{-(\mu - t)^2 / (4\tau^2 / \zeta)} d\mu \quad \dots \quad 4.2.5.15$$

Cada valor de la función de autocorrelación se obtiene de un conjunto de muestras vecinas con pesos selectivos, tal que $z(\mu + \tau/2) z^*(\mu - \tau/2)$ debe representar un gran peso cuando μ es cercano a

“ t ” y por el contrario un peso pequeño cuando μ está lejos de “ t ”. Además la cantidad de muestras vecinas estará controlada por la variable τ .

Cohen y Posh, [CHO89] propusieron examinar la estructura de la función de ambigüedad generalizada como un medio para identificar las características de las distribuciones tiempo-frecuencia. De lo anterior se parte para analizar la efectividad del kernel $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$ para disminuir el efecto de las interferencias, de las ecuaciones 4.2.5.5 y 4.2.5.6 que relacionan la función de ambigüedad $AF_z(\nu, \tau)$ con la densidad espectral de energía $P_z(t, \omega)$ para las distribuciones tf que pertenecen a la clase de Cohen, se obtiene la siguiente expresión:

$$AF_z(\nu, \tau) = \iint P_z(t, \omega) e^{j(\nu t + \omega \tau)} dt d\omega \quad \dots \quad 4.2.5.16$$

y la función de ambigüedad generalizada $A_z(\nu, \tau)$ presentará la siguiente estructura bilineal:

$$A_z(\nu, \tau) = g(\nu, \tau) \int e^{j\nu\mu} z(\mu + \tau/2) z^*(\mu - \tau/2) d\mu \quad \dots \quad 4.2.5.17$$

Si ahora se considera la señal multicomponente de la expresión 4.2.5.13, entonces la función de ambigüedad generalizada $A_z(\nu, \tau)$ estará formada por los auto-términos propios de la señal $A_{z_i z_i}(\nu, \tau)$ y los términos cruzados $A_{z_n z_m}(\nu, \tau)$ que se generan en las distribuciones cuadráticas, como se muestra en la ecuación siguiente, [CHO89]:

$$A_z(\nu, \tau) = \sum_{i=1}^n A_{z_i z_i}(\nu, \tau) + \sum_{n \neq m} \sum A_{z_n z_m}(\nu, \tau) \quad \dots \quad 4.2.5.18$$

Auto-Términos

$$A_{z_i z_i}(\nu, \tau) = g(\nu, \tau) \int_{\mu} e^{j\nu\mu} z_i(\mu + \tau/2) z_i^*(\mu - \tau/2) d\mu \quad \dots \quad 4.2.5.19$$

Términos Cruzados

$$A_{z_n z_m}(\nu, \tau) = g(\nu, \tau) \int_{\mu} e^{j\nu\mu} z_n(\mu + \tau/2) z_m^*(\mu - \tau/2) d\mu \quad \dots \quad 4.2.5.20$$

A partir de las expresiones 4.2.5.19 y 4.2.5.20, se establece que para enfatizar los auto-términos y desvanecer los términos cruzados del plano de tiempo-frecuencia, es conveniente asignar un “gran peso” cuando ν y τ están cercanos al origen del plano de ambigüedad y un “pequeño peso” cuando ν y τ están lejos del origen.

Esto exactamente es lo que propone el kernel exponencial. Los términos cruzados dados por la expresión $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$ son funciones de la variable τ , estos es, la magnitud máxima y la concentración de la morfología de los términos cruzados disminuye cuando τ aumenta. Cuando ζ tiende a ser grande, los términos cruzados se concentran alrededor del origen y los auto-términos tienen resolución aguda.



Por lo tanto, ζ grande (>1.0) es recomendado para señales cuya amplitud y frecuencia cambian relativamente rápido, y por otro lado valores pequeños de ζ (≤ 1) se elegirán, si la señal contiene razones de cambio bajos. Choi y Williams recomiendan utilizar ζ en el rango de 0.1-10, [CHO89].

La ED discreta mantiene algunas de las propiedades deseables de su versión continua como son: 1) es real tal que corrimientos en tiempo o frecuencia en la señal se ven reflejados en corrimientos en la distribución. 2) la suma de la ED sobre todo el tiempo n a cada frecuencia ω es igual a la densidad espectral de energía de la señal en esa frecuencia. 3) en estricto sentido la ED viola las propiedades de soporte de tiempo y frecuencia, aunque las satisface con un pequeño error. Es conveniente añadir una ventana que convolucione en el tiempo con una autocorrelación local, antes de aplicar la TF, esta propiedad asegura que la distribución no se extienda más allá del soporte de la señal en el tiempo o el soporte de su frecuencia.

4.2.5.3 Distribución de Reducción de Interferencias

A pesar que el kernel exponencial produce una distribución con alta resolución y considerable reducción de interferencias, no satisface completamente la propiedad de soporte en tiempo y frecuencia.

Para asegurarnos que el kernel mantenga la mayor parte de las propiedades deseable, es indispensable que $\nu=0, \tau=0; g^*(\nu, \tau)=g(-\nu, -\tau)$. La RID tiene la propiedad de soporte en tiempo y frecuencia, si se asegura que $\xi(t, \tau) = \int g(\nu, \tau) e^{-j2\pi\nu t} d\nu = 0$ cuando $|\tau| < 2|t|$, entonces se tendrá soporte en frecuencia y se formará una región "en forma de cono" alrededor del punto de interés. Asegura la reducción de interferencias debido a que el kernel exponencial $g(\nu, \tau)$ representa un filtro pasa-bajos 2D, tanto en ν como en τ , [CHO89, WIL92].

Propiedades

- a) Si ν o τ son igual a cero, entonces $g(\nu, 0)=1$ o $g(0, \tau)=1$ por lo que satisfacen a los marginales
- b) Marginal Temporal: $\int P_2(t, \omega) d\omega = z(t) \cdot z^*(t)$
- c) Marginal Frecuencial $\int P(t, \omega) d\omega = Z(\omega) \cdot Z^*(\omega)$
- d) Es real, es decir $g^*(-\nu, -\tau)=g(\nu, \tau)$.
- e) Es independiente del tiempo y la frecuencia por lo tanto satisface las propiedades de desplazamiento



- f) Si $z(t) = z(t-t_0)$ entonces $P_z(t, \omega) = P_z(t-t_0, \omega)$
- g) Si $z(t) = z(t)e^{j\omega_0 t}$ entonces $P_z(t, \omega) = P_z(t, \omega - \omega_0)$
- h) Soporte Finito $\int g(v, \tau) e^{-jv\tau} dv = \sqrt{\frac{\pi\zeta}{\tau^2}} e^{(-\zeta^2/4\tau^2)}$
- i) No satisface el soporte finito fuerte, aunque para σ suficientemente grande sí lo hace
- j) No posee la propiedad unitaria $|g(v, \tau)| = 1$
- k) Satisface las propiedades de frecuencia instantánea $F_i(t)$ y retraso de grupo $GD_i(\tau)$
- l) El RID disminuye los términos cruzados en comparación con la ED
- m) El kernel RID no es positivo
- n) La forma del kernel RID en $g(v, \tau)$ es cónica en tiempo y frecuencia asegurando el soporte en ambos dominios.

En estricto sentido esta distribución viola las propiedades de soporte en tiempo y frecuencia. Sin embargo esto no tiene implicaciones prácticas relevantes, ya que se puede aplicar una ventana cuando la forma $g(v, \tau)$ del kernel exponencial se convolucione con la autocorrelación local antes de aplicar la FT con respecto a τ para obtener la forma ED definitiva, [WIL92].

Mucho del trabajo que se ha llevado a cabo en los tópicos de ventaneo y filtros digitales pueden aplicarse en el diseño de kernels RID efectivos. El punto de partida para diseñar el kernel RID es considerar que la función primitiva $h(t)$ cumpla ciertas características, como 1) área unitaria, es decir $\int h(t) dt = 1$, 2) sea simétrica, $h(-t) = h(t)$, 3) limitada en tiempo, tal que $h(t) = 0$ para $|t| > 1/2$, 3) $H(f)$ la función de transferencia sea un filtro pasa bajos, entonces el kernel estará definido por: $g(v, \tau) = H(v\tau) \Rightarrow H(v\tau) = \mathcal{F}\{g(v, \tau)\}$ y que satisface los requisitos de RID.

Limitaciones de la RID

1. Presenta energía negativa, aunque lo hace en menor proporción a la WVD.
2. No elimina por completo los términos cruzados, ya que no siempre caen fuera del plano v, τ . Si se elige ζ para conseguir este propósito se puede correr el riesgo de eliminar algunas propiedades como los marginales.
3. Señales como los chirp, no son bien manejadas por la RID, por ejemplo si la función de ambigüedad del chirp cae en la diagonal de 35° , entonces no intersectará con el kernel RID $g(v, \tau)$.

En la siguiente sección se muestran algunas comparaciones, utilizando señales sintéticas y electroencefalográficas, entre las diferentes representaciones tiempo frecuencia discutidas en este capítulo indicando sus ventajas y desventajas, especialmente en la representación de las señales electroencefalográficas con espigas epilépticas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3 Evaluación, Comparación y Aplicaciones de las Distribuciones Tiempo-Frecuencia

En esta sección se presentan algunos resultados al aplicar varias técnicas tiempo frecuencia paramétricas, el modelo autoregresivo y el filtro adaptivo de Kalman y no paramétricas como el espectrograma de Fourier, la distribución Wigner-Ville, la representación Choi-Williams la distribución de reducción de interferencias y el escalograma, con el fin de evaluar el desempeño de las mismas tanto en simulaciones sintéticas como en señales reales biológicas.

4.3.1 Señales Sintéticas

Las simulaciones que se utilizan en esta sección comprenden señales bien definidas y caracterizadas como son, las señales senoidales con frecuencias y duraciones claramente determinadas. Chirps lineales y cuadráticos así como cruzados. Señales con contenido frecuencial concentrado en un período de tiempo establecido.

4.3.1.1 Iniciamos nuestra comparación entre el espectrograma y la distribución Wigner-Ville de una señal senoidal monocomponente, como se observa en la figura 4.3.1.

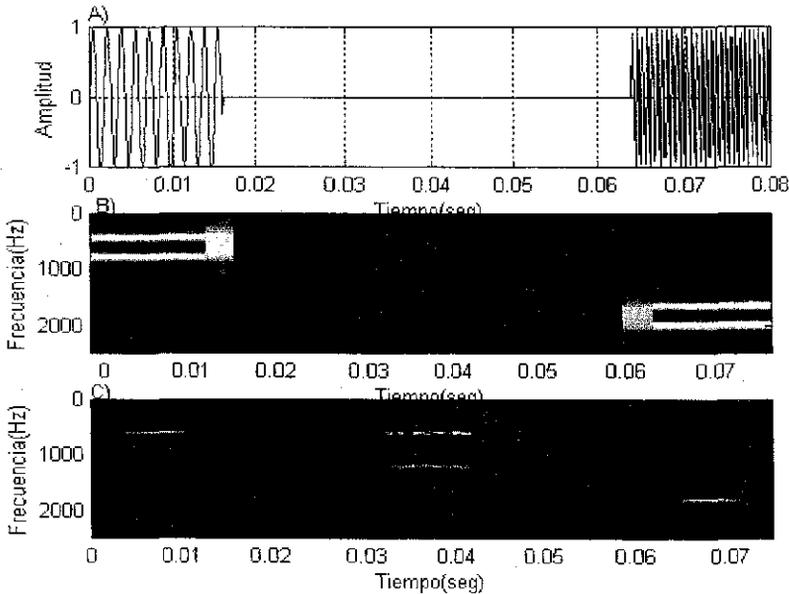


Figura 4.3.1. A) Señales de 600 y 1800Hz con pausa isoeletrica de 38ms, B)Espectrograma, C) WVD .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la figura 4.3.1 se puede apreciar la diferencia en resolución entre el espectrograma y la distribución Wigner-Ville. En 4.3.1A se muestra una señal real monocomponente cuyas características son: frecuencia constante de $f = 600\text{Hz}$ durante 16ms una pausa isoelectrica con duracion de 38ms y por último una senoidal con frecuencia de $f = 1800\text{Hz}$. En la figura 4.3.1C se aprecia como la WVD tiene mejor resolución a los componentes de frecuencia, sin embargo como ya se había indicado esta distribución muestra en el plano tf y a la mitad de las frecuencias de los autotérminos los componentes debido a los términos cruzados o interferencias $C_1 C_2^* W_{\mu\nu}(t, \omega) + C_2 C_1^* W_{\mu\nu}(t, \omega)$, en este caso en el intervalo 0.03 – 0.035seg. Por otro lado en la figura 4.3.1B se ve como el espectrograma ofrece resolución frecuencial menor a la WVD aunque su ventaja es que no presenta términos cruzados. Los resultados se obtuvieron aplicando una ventana Hamming de longitud de 32 puntos y un traslape de 16puntos.

Otra apreciación importante es que el espectrograma siempre permanece constante, mientras que el espectro de la WVD crece hasta llegar a un máximo en donde permanece constante. Otra diferencia es que, como se menciono en la sección 4.2.2 se utiliza la señal analítica para calcular la WVD y con ello mejorar su desempeño al eliminar la necesidad de doblar el número de punto a procesar y así evitar el problema de aliasing como ocurre con el espectrograma.

La siguiente simulación, figura 4.3.2A, es con un par de sumas de senoidales, el primer par con las frecuencias $f=5\text{Hz}$ y $f=10\text{Hz}$ y el otro par con las frecuencias $f=16\text{Hz}$ y $f=26\text{Hz}$, ambos con la misma duracion de 1s.

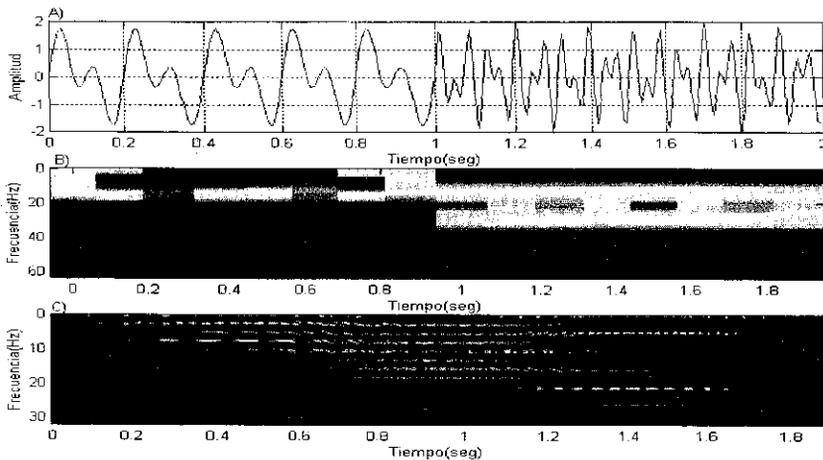


Figura 4.3.2. A) Señal cuyo primer tramo esta compuesto por la suma de dos senoidales de 5 y 10Hz, y el segundo tramo es la suma de 16 y 26Hz, B) Espectrograma, C) Distribución Wigner-Ville.

Ahora en la figura 4.3.2B vemos en el espectrograma, el efecto sobre la resolución en frecuencia al mantener el mismo ancho de la ventana de análisis, longitud 32 puntos con un traslape de 16 puntos. El primer tramo (primer segundo) muestra mejor resolución y contenido energético

respecto al segundo tramo. Por otro lado, tampoco detecta muy bien cuando existen cambios bruscos en la señal como se aprecia después del 1^{er} segundo donde el espectrograma no es capaz de diferenciar el cambio.

En la figura 4.3.2C, se observa que aunque la WVD detecta bien la localización de las señales, cuando la señal no es monocomponente y tiene frecuencias muy cercanas, las interferencias “ensucian” el plano $t-f$, no permitiendo una interpretación clara y confiable.

Otras simulaciones las vemos en las figuras 4.3.3 y 4.3.4 donde se muestran el espectrograma y la distribución Wigner-Ville de dos chirps lineales cruzados que van de 100Hz hasta 300Hz y viceversa.

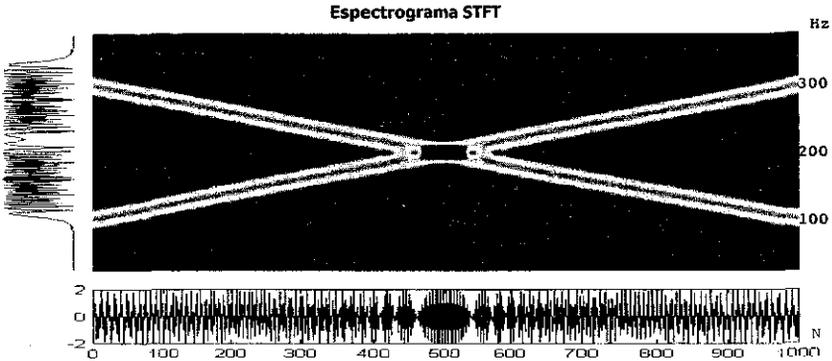


Figura 4.3.3. Espectrograma de Fourier de dos Chirps lineales cruzados, (100-300Hz), indicando en la parte inferior la señal en el dominio del tiempo y a la parte izquierda el contenido de la frecuencia.

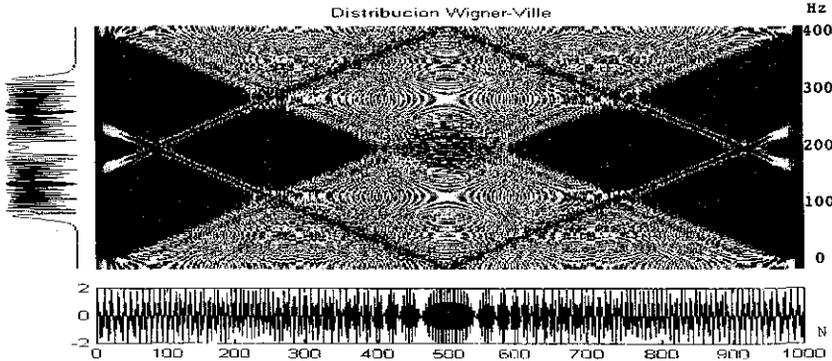


Figura 4.3.4. Distribución Wigner-Ville de dos Chirps lineales cruzados, (100-300Hz), indicando en la parte inferior la señal en el dominio del tiempo y en la parte izquierda el contenido de frecuencia.

En las simulaciones de las figuras 4.3.3 y 4.3.4 se aprecia mayor resolución y aumento de interferencias para WVD con respecto al espectrograma.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3.1.2 Comparación del desempeño de la representación Choi-Williams.

Si ahora aplicamos la distribución Choi-Williams al chirp lineal cruzado de las figuras 4.3.3 y 4.3.4, variando el valor ζ en el kernel exponencial $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$, tendremos los resultados que se muestran en las figuras 4.3.5 y 4.3.6.

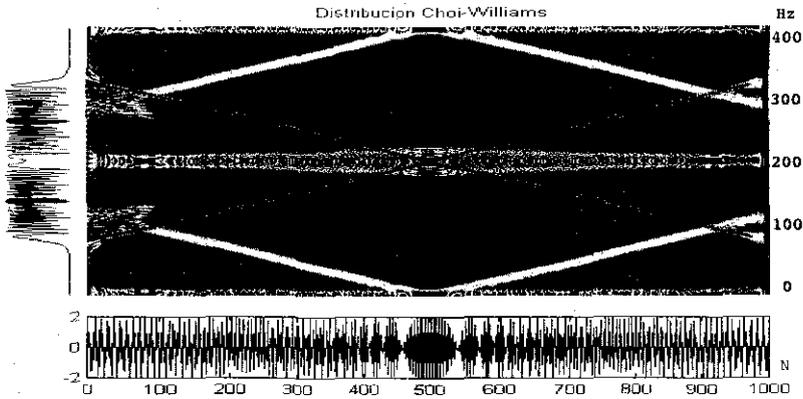


Figura 4.3.5. Distribución Choi-Williams de dos Chirps cruzados (100-300Hz), con $\zeta=100$, indicando en la parte inferior la señal en el dominio del tiempo y en la parte izquierda el contenido de frecuencia.

En la figura 4.3.5 vemos que cuando $\zeta=100$, como habíamos de esperar, la distribución Choi-Williams muestra muchas interferencias porque el valor del kernel exponencial $g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \zeta}$ tiende a la unidad y por lo tanto se acerca a la WVD.

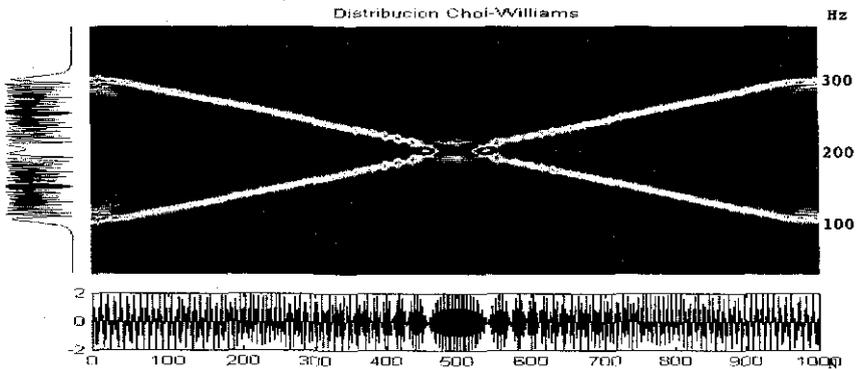


Figura 4.3.6. Distribución Choi-Williams de dos Chirps lineales cruzados (100-300Hz), con $\zeta=1$, indicando en la parte inferior la señal en el dominio del tiempo y en la parte izquierda el contenido de frecuencia.

Conforme ζ se reduce el tamaño de los términos cruzados disminuye para valores tan pequeños como $\zeta=1$ y $\zeta=0.1$, como se observa en la figura 4.3.6. Las pequeñas "protuberancias" entre los auto términos podrían parcialmente ser debidos a sumas de las "colas" de los propios auto-términos. Por otro lado, al disminuir ζ el ancho de los auto-términos se esparce y la resolución se empobrece, sin embargo, parece ser que es muy leve la pérdida de resolución.

Estos experimentos muestran claramente la efectividad del kernel exponencial ED para el análisis de señales multicomponentes. El kernel exponencial controla el efecto de los términos cruzados mientras que preserva una relativa resolución aguda de los auto-términos. Además con el control del parámetro ζ , es posible ajustar la resolución de los auto-términos y los efectos de los términos cruzados de acuerdo a las características de la señal a analizar.

Antes de comparar las cuatro representaciones tiempo frecuencia contempladas en este trabajo, vamos a mostrar en las figuras 4.3.7 y 4.3.8 dos ejemplos que consideran las Distribuciones Choi-Williams y la Reducción de Interferencias utilizando en esta última la ventana Hamming como filtro pasa bajas, para dos chirp con un rango de frecuencia de 100Hz a 300Hz y viceversa tanto lineal, primer caso, como cuadrático para el segundo caso.

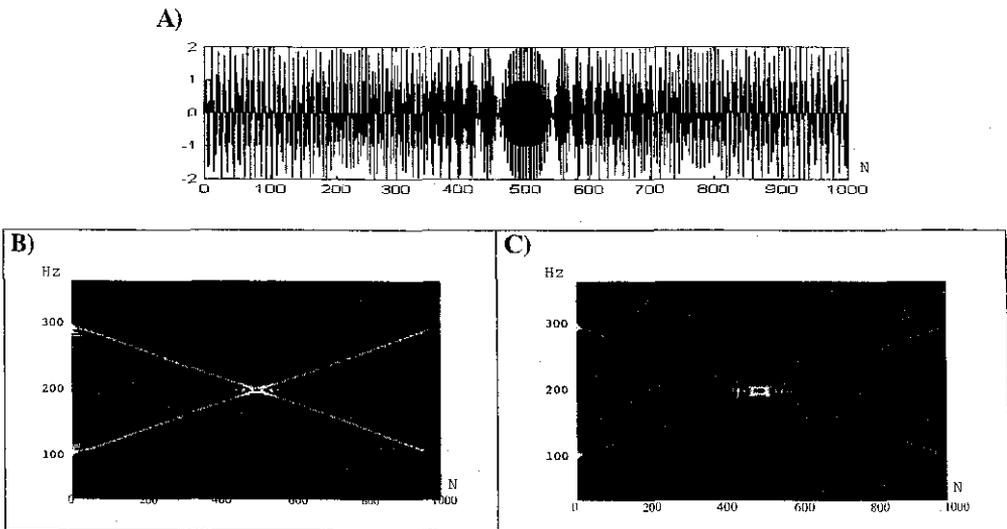


Figura 4.3.7. A) Señal Chirp lineal cruzado, B) CWD utilizando $\zeta=1$, C) RID con ventana de análisis Hamming.

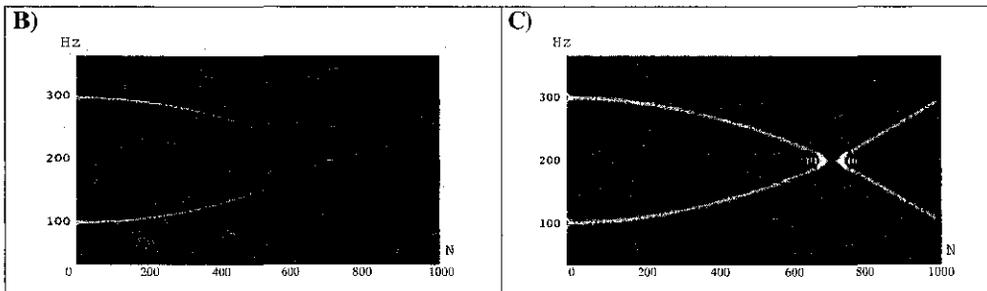
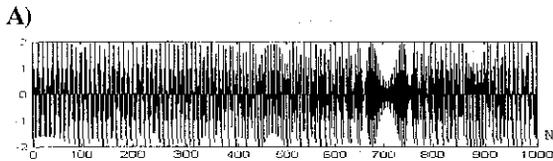


Figura 4.3.8. A) Señal Chirp cuadrático cruzado, B) CWD utilizando $\zeta=1$, C) RID con ventana de análisis Hamming

4.3.1.3 Nuestra siguiente comparación incluye las cuatro distribuciones tiempo frecuencia consideradas en este trabajo: el espectrograma, las representaciones Wigner-Ville, Choi-Williams y la Representación Reducción de Interferencias. Para investigar el rendimiento en cada representación con respecto a señales compuestas multicomponentes se generaron tres señales sintéticas, 1° el chirp lineal dado por $f_1(t) = 3\cos(2\pi(n/8) * (n/256)) + 3\cos(2\pi((512-n)/8 + 30) * (n/256))$, contiene dos frecuencia la primera se incrementa respecto al tiempo y la frecuencia del otro componente se decrementa con el tiempo, esta señal se muestra en la figura 4.3.9A. La siguiente señal también es un chirp lineal $f_2(t) = 3\cos(2\pi(n/3) * (n/254)) + 3\cos(2\pi(n/8) * (n/254))$ con dos frecuencias que se incrementan respecto al tiempo, pero a razón de cambio diferente como se observa en la figura 4.3.10A. Y por último en la figura 4.3.11A se muestra la función $f_3(t) = 3p(n)\cos(2\pi(20n/256)) + 3p(n)\cos(2\pi(50n/256))$ cuya amplitud está controlada por la ventana hiperbólica $p(n) = 1 - 1/100(n-128)^2$ originando una señal con una oscilación concentrada.

Para cada una de las señales generadas por $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ se calcula el espectrograma, la WVD, la CWD y la RID como observamos en las figuras 4.3.9, 4.3.10 y 4.3.11.

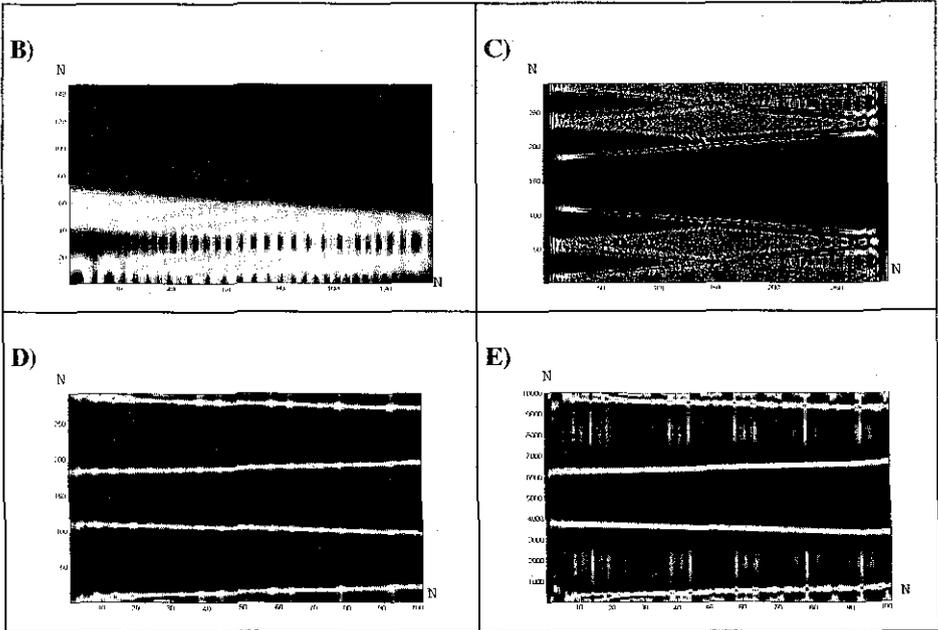
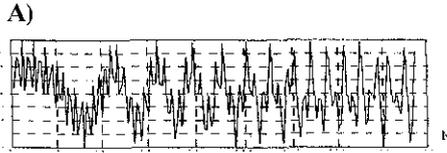
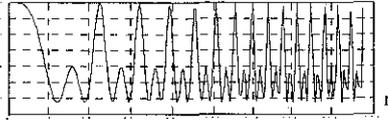


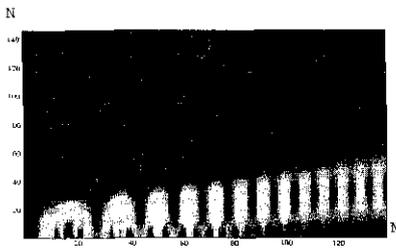
Figura 4.3.9. A) Chirp $f_c(t) = 3\cos(2\pi(n/8)*(n/256)) + 3\cos(2\pi(512-n)/8+30)*(n/256)$ con dos frecuencias, la frecuencia de un componente se incrementa con el tiempo y la frecuencia del otro componente se decrementa con el tiempo, B) Espectrograma con ventana Hamming traslapada, C) WD, D) ED, E) RID utilizando $\xi=1$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

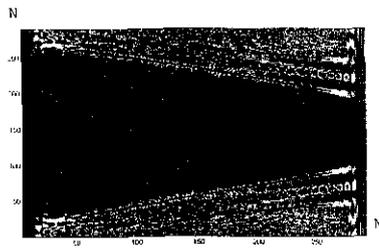
A)



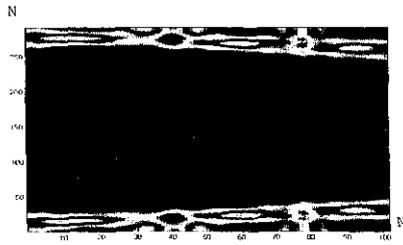
B)



C)



D)



E)

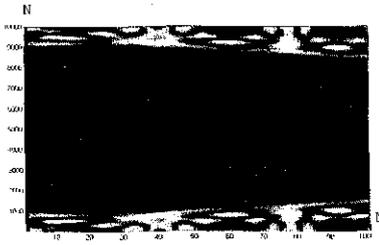


Figura 4.3.10. A) Chirp $f_2(t) = 3\cos(2\pi(n/3) * (n/254)) + 3\cos(2\pi(n/8) * (n/254))$ tiene dos frecuencias las cuales se incrementan respecto al tiempo, pero a razón de cambio diferente, B) Espectrograma con ventana Hamming traslapada, C) WD, D) ED, E) RID utilizando $\zeta=1$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

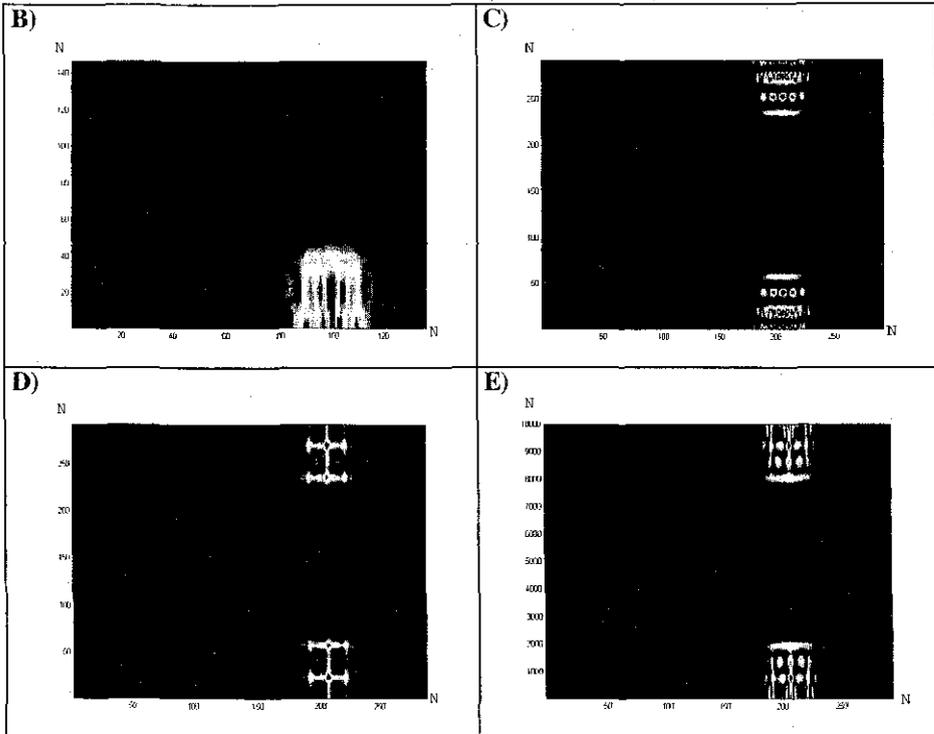
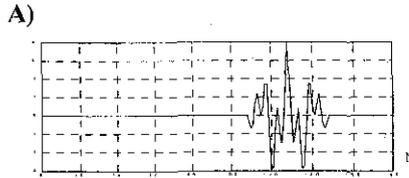


Figura 4.3.11. A) Señal concentrada $f_1(t)=3p(n)\text{Cos}(2\pi(20n/256))+3p(n)\text{Cos}(2\pi(50n/256))$ cuya amplitud está controlada por la ventana hiperbólica $p(n)=1-1/100(n-128)^2$ y tienen dos grupos de componentes de frecuencias. B)Espectrograma con ventana Hamming traslapada, C)WD, D)ED, E)RID utilizando $\zeta=1$.

Los incisos D) de cada figura 4.3.9, 4.3.10, y 4.3.11 muestran la ED de las señales sintéticas $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ respectivamente. Comparando 4.3.9D con 4.3.10D se notan los términos cruzados son menores para 4.3.9D. Esto es, porque conforme la razón de diferencia entre las dos frecuencias, ω_1 y ω_2 , llega a ser mayor la magnitud de las interferencias aumenta y viceversa. También en 4.3.11D se muestra como la energía se concentra alrededor de los auto-términos. Comparando

estas gráficas con sus versiones respectivas de la WVD se puede observar claramente, como había de esperarse, la presencia de las interferencias 4.3.9C, 4.3.10C, y 4.3.11C respectivamente.

4.3.1.4 Por último se comparan los espectrogramas paramétricos entre el modelo autorregresivo y el filtro Kalman.

En las figuras 4.3.12, y 4.3.13 se muestran, de dos chirps lineales cruzados de 100 a 300Hz, los espectrogramas paramétricos utilizando del modelo AR, con orden 3 y longitud de análisis de 63 puntos, y el filtro adaptable de Kalman de orden 3, ganancia 0.9 y traslape 1.

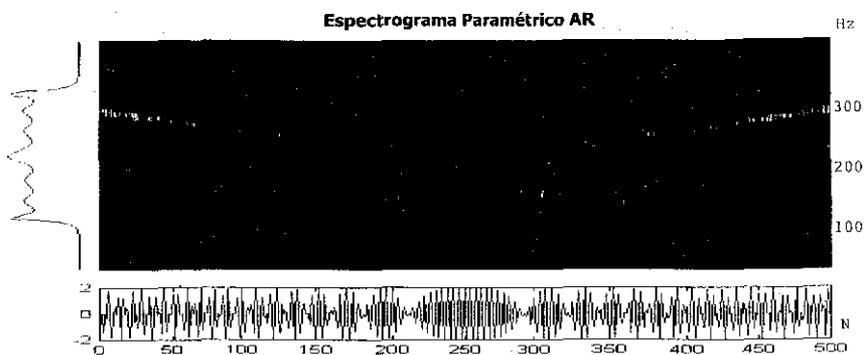


Figura 4.3.12. Espectrograma Paramétrico AR de dos Chirps cruzados (100-300Hz) de orden 3.

Es muy evidente en la figura 4.3.12 que la resolución tiempo-frecuencia obtenida mediante el modelo autorregresivo es muy similar, a la representación que ofrece el espectrograma de Fourier, figura 4.3.3, con el mismo ancho de la ventana de análisis. Aunque una de las diferencias es el tiempo de cálculo, el espectrograma requiere $\#ventanas \cdot (N \log_2 N)$ y el MAR requiere $\#ventanas \cdot O(p^2) \cdot (N \log_2 N)$, si N es potencia de dos y p es el orden del modelo AR.

De la misma manera como en el caso no paramétrico, existen técnicas paramétricas que ofrecen mejor resolución como lo vemos en la figura 4.3.13 donde se ilustra un espectrograma paramétrico aplicando el filtro adaptable de Kalman.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

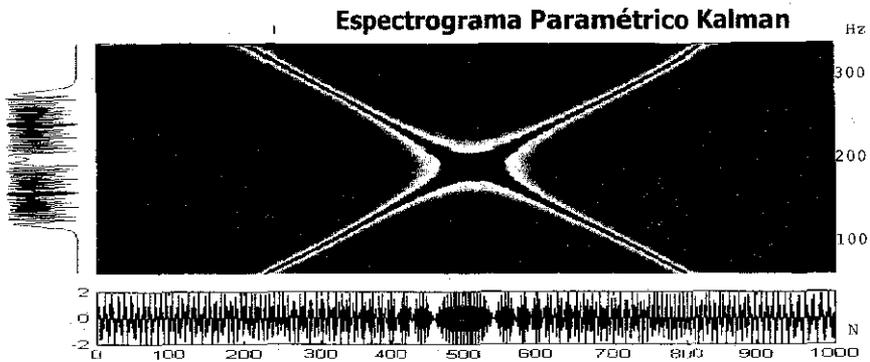


Figura 4.3.13. Espectrograma Paramétrico Kalman, ganancia 0.9, a dos Chirps cruzados (100-300Hz).

Se nota claramente en la figura 4.3.13 que el espectrograma de Kalman define mejor los componentes frecuenciales que el espectrograma AR. La solución la lleva a cabo cuando mucho en la décima iteración. Sin embargo para conseguir esta resolución el método Kalman requiere para cada muestra calcular los parámetros, así que se requieren $N \cdot O(8p) \cdot (N \log_2 N)$ operaciones para N potencia de dos y p el orden del modelo AR.

4.3.2 Señales Electroencefalográficas

En la sección anterior se han comparado los resultados al utilizar las diferentes técnicas tiempo-frecuencia estudiadas en este trabajo. En esta sección aplicaremos el mismo criterio pero para señales biológicas reales.

Como ya hemos mencionado con anterioridad, existen estados conductuales en el cerebro, como la reactividad del ritmo alfa, donde el EEG puede considerarse casi-estacionario en ciertos intervalos de tiempo. En las figuras 4.3.14, 4.3.15, 4.3.16, y 4.3.17 se muestran como en la sección anterior, las diferentes representaciones tiempo-frecuencia de registros electroencefalográficos de sujetos sanos durante la reactividad del ritmo alfa. En el lado izquierdo de cada una estas figuras, se presenta la densidad espectral de potencia donde se muestra la predominancia de la frecuencia de 10Hz en este tipo de estados funcionales.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

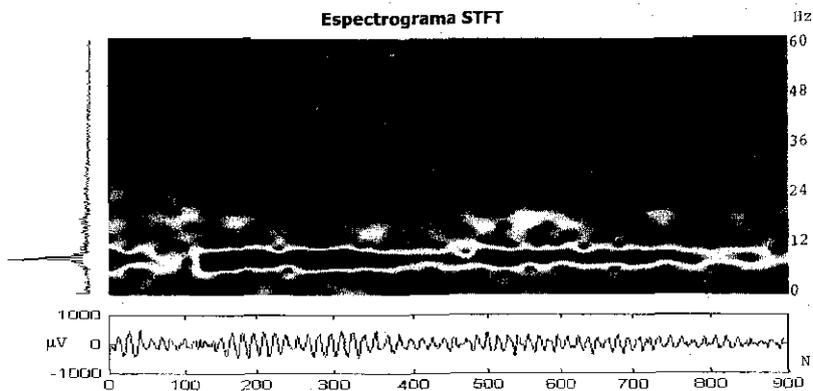


Figura 4.3.14. Espectrograma de Fourier de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa

En la figura 4.3.14 se muestra la pobre resolución tiempo-frecuencia que ofrece el espectrograma de Fourier, con una ventana de longitud de 32 puntos y traslape de 30 puntos. Sin embargo sigue muy bien las variaciones de la frecuencia en el tiempo, pero no es capaz de discriminar cuando se tienen cambios rápidos como lo vemos alrededor del punto 100.

En la figura 4.3.15 se muestra la representación de la misma señal EEG mediante la aplicación del modelo AR con ventanas de análisis con una longitud de 32 puntos y orden 16.

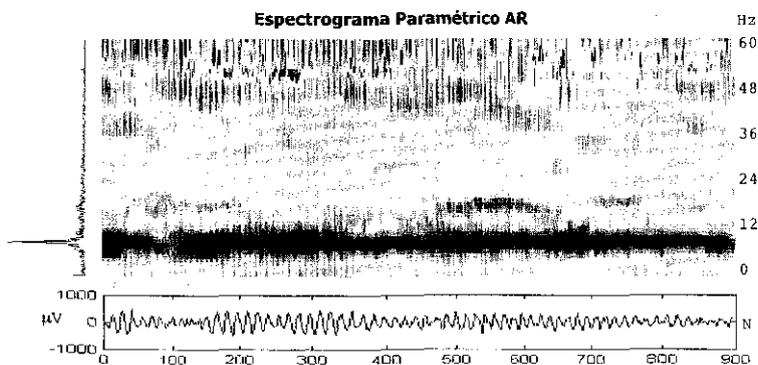


Figura 4.3.15. Espectrograma Paramétrico AR, orden 16, de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa

Vemos que el espectrograma paramétrico obtenido a partir del modelo autorregresivo, orden 16, define más precisamente la señal EEG a comparación con el espectrograma de Fourier, sin embargo también muestra muchos más componentes, que no son de la señal original.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

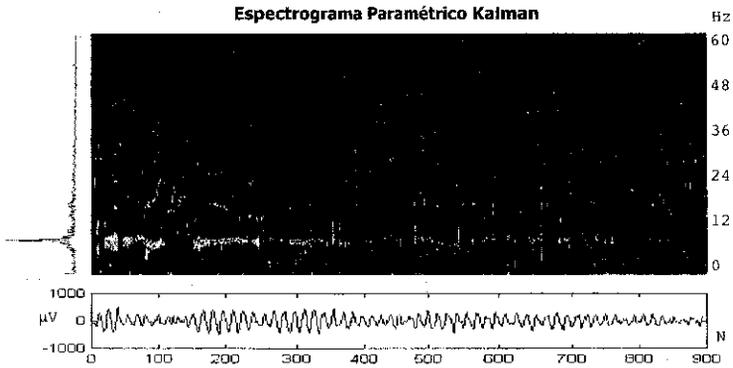


Figura 4.3.16. Espectrograma Paramétrico Kalman de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa.

En la figura 4.3.16 se ilustra la distribución tiempo-frecuencia, cuando se utiliza el filtro kalman con una ganancia de 0.78 y un traslape de punto apunto. Es posible apreciar la alta resolución de frecuencia, sin embargo el inconveniente que presenta esta técnica es su alto consumo de tiempo de procesamiento.

En la próxima figura 4.3.17, se observa la distribución Wigner-Ville de la misma señal EEG de los casos anteriores. Nuevamente como lo visto en las señales sintéticas de la sección anterior, la WVD muestra buena resolución de frecuencia aunque no sigue con alta precisión en el tiempo a la señal. En esta figura 4.3.17 se muestra muy claramente su bajo soporte en tiempo de esta distribución para señales estacionarias sólo en intervalos cortos.

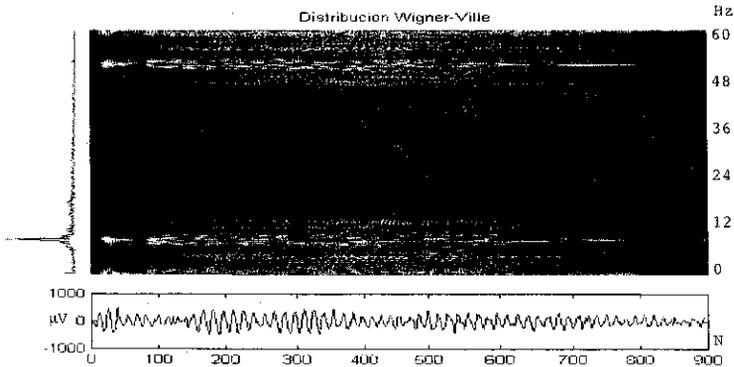


Figura 4.3.17. Distribución Wigner-Ville de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa

Por el contrario al caso anterior, en la figura 4.3.18, se ve que la distribución Choi-Williams de la señal EEG con $\zeta=0.1$, sigue muy cercanamente los componentes y los muestra con alta

resolución. Sin embargo, como sucede con el espectrograma paramétrico del filtro de Kalman, la CWD requiere un alto tiempo de procesamiento.

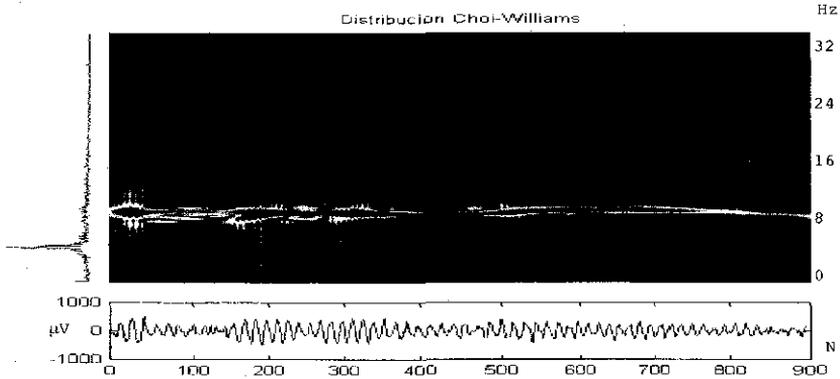


Figura 4.3.18. Distribución Choi-Williams de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa

Por último en esta sección, vamos a presentar otros casos típicos de señal electroencefalográfica que se presentan ocasionados por la administración de fármacos como sucede durante la inducción anestésica.

En este tipo de señales cuyo contenido de frecuencia cambia bruscamente, es más evidente la diferencia de definición para resolver los componentes de frecuencia de cada una de las distribuciones tiempo-frecuencia. Como por ejemplo, en las figuras 4.3.15 y 4.3.19 se observa la baja resolución del espectrograma de Fourier aunque sigue muy claramente la señal, por supuesto podemos remarcar como se puede observar en el lado izquierdo de esta figura como la densidad espectral de potencia, sólo muestra el contenido pero no podemos determinar la aparición de los eventos como se observan en la parte inferior de la misma figura.

A diferencia de lo que sucedió con las señales sintéticas o el ritmo alfa, en el caso de la figura 6.3.20 del espectrograma paramétrico con el modelo autorregresivo, orden 16, longitud de la ventana 32, no nos permitió definir los componentes ni en tiempo ni en frecuencia como lo apreciamos, en la figura 4.3.19, es decir no fue posible encontrar el orden y longitud de análisis adecuados para determinar la no-estacionariedad del EEG en este estado.

Sin embargo, como ya se ha dicho, para mejorar la apreciación de la evolución de los eventos es necesario aplicar las otras distribuciones tiempo-frecuencia ya vistas en este capítulo. En las figuras 4.3.21, 4.3.22, y 4.3.23 podemos nuevamente apreciar las representaciones Kalman, Wigner-Ville y Choi-Williams como en los casos anteriores.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

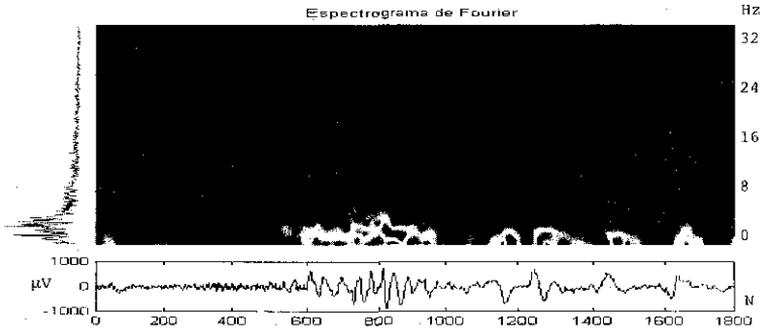


Figura 4.3.19. Espectrograma de Señal EEG durante inducción anestésica.

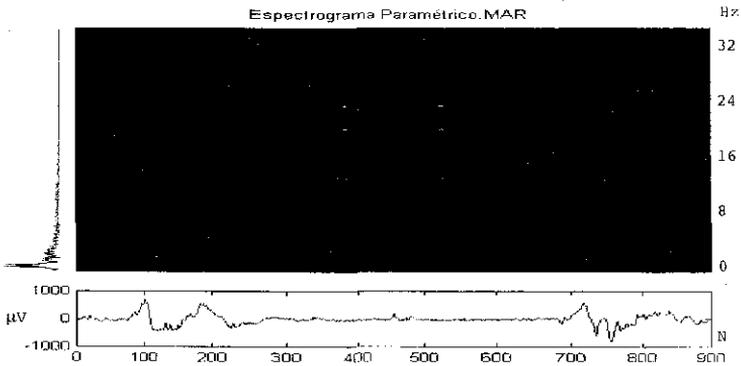


Figura 4.3.20. Espectrograma Paramétrico AR, de Señal EEG durante inducción anestésica.

Como había de esperarse, el espectrograma paramétrico, figura 4.3.21, mediante el filtro de Kalman de orden 16, sí nos sigue la evolución en el tiempo y en frecuencia como en los casos ya vistos, sin embargo como ya se esperaba la WVD tiene alta resolución pero muestra muchas interferencias que dificultan la interpretación en el plano t_f , ver figura 4.3.22.

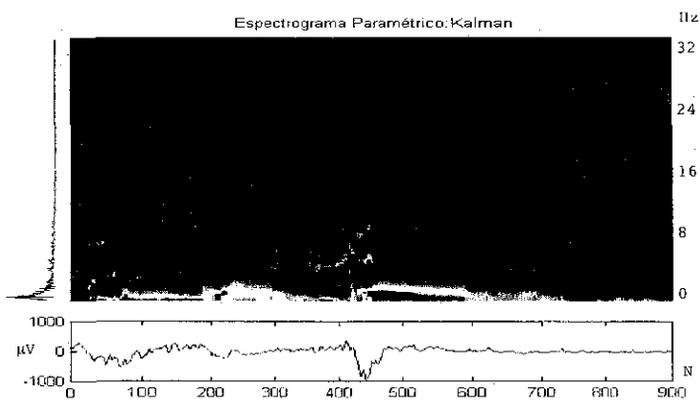


Figura 4.3.21. Espectrograma Paramétrico Kalman de la Señal EEG durante inducción anestésica.

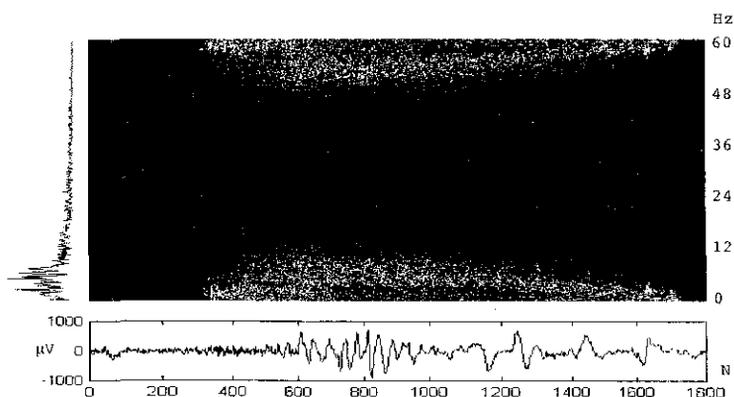


Figura 4.3.22. Distribución Wigner-Ville de la Señal EEG durante inducción anestésica.

Por último mostramos en la figura 4.3.23, la distribución Choi-Williams de la señal EEG, con un $\zeta=0.1$. Nuevamente esta representación ofrece los mejores resultados ya que muestra la variación espectral en el tiempo dando buena resolución en tiempo y frecuencia.

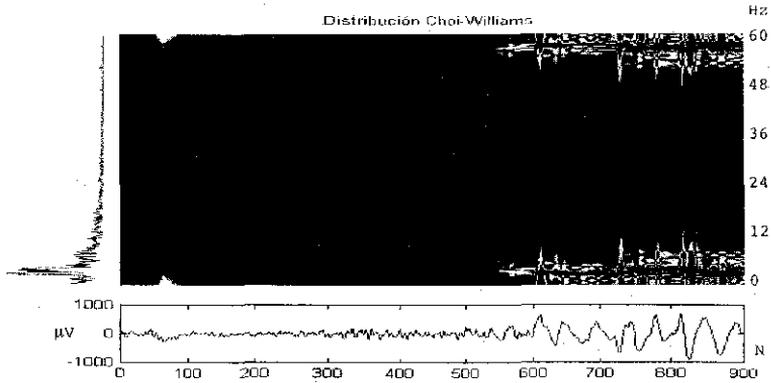


Figura 4.3.23. Distribución Choi-Williams de la Señal EEG durante inducción anestésica.

Por último, trataremos en el siguiente capítulo otra representación tiempo frecuencia lineal basada en la Transformada *wavelet*, método basado en el procesamiento de la señal a través de ventanas de análisis variables, con el propósito de extraer información de la señal de interés, a lo largo del tiempo a diferentes escalas, como si se tratará de un microscopio matemático que permite ver diferentes partes de la señal con sólo ajustar el foco.

CAPITULO 5. ANÁLISIS MULTI-RESOLUCIÓN

Aunque la idea de analizar una señal a diferentes escalas o resoluciones ha existido desde hace un siglo, el análisis multi-resolución se ha consolidado recientemente con los trabajos de los geofísicos Jean Morlet y Grossman quienes propusieron un método, usando la transformada wavelet, para modelar el proceso de las ondas sonoras que viajan a través de la corteza terrestre, [AKA95]. Posteriormente, el matemático Yves Meyer estableció que esta técnica era parte del campo del análisis armónico y planteó una serie de *wavelets* más eficientes para modelar fenómenos complejos. A este campo se unieron Stephane Mallat e Ingrid Daubechies, quienes han aportado con sus investigaciones al mejoramiento de este método de análisis.

5.1 Transformada Wavelet

La transformada *wavelet* (TW) plantea utilizar funciones base, llamadas “*wavelets*”, de longitud finita y diferentes de cero sobre un período corto, especialmente para el análisis de señales no periódicas, no estacionarias, con transitorios significativos contenidos en la señal a analizar, como una alternativa para evitar los inconvenientes de la teoría de Fourier o de otras técnicas tiempo-frecuencia. Este método está basado en el procesamiento de la señal con ventanas de análisis variable; siendo de corta duración para las altas frecuencias y larga duración para las bajas frecuencias. Se puede interpretar este método tiempo-escala como un microscopio matemático a través del cual se pueden ver diferentes partes de la señal ajustando el “foco” por medio de la escala

5.1.1 Resolución en el Plano Tiempo-Frecuencia:

Comparación entre la Transformada de Fourier de Tiempo Corto y la Transformada Wavelet

Por otro lado, ya se ha señalado que la FT establece una relación biunívoca para una señal $f(t)$ entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia por medio de la función exponencial. Las funciones exponenciales son impulsos en el dominio de la frecuencia, es decir, es posible localizar la frecuencia exactamente, sin embargo los efectos locales se reflejan sobre grandes regiones, no permitiendo detectar cambios bruscos en el tiempo, fenómenos típicos en las señales no estacionarias, [COH89].

Una de las propuestas, para localizar el componente frecuencial como lo hemos visto es la Transformada de Fourier de Tiempo Corto usando bases ortonormales exponenciales locales mediante la aplicación del producto interno entre la función ventana $h(t)$ y la señal $f(t)$, así que la ecuación 5.3.3.1 se puede expresar de manera general como:

$$P_{STFT}(\omega, \tau) = \langle h(t - \tau)e^{j\omega t}, f(t) \rangle \quad \dots \quad 5.1.1$$

La ecuación 5.1.1 nos indica que cada función utilizada en la expansión tiene la misma resolución tiempo-frecuencia y sólo difiere en su localización temporal en el plano tf. Así que la STFT discreta se representa en un enrejado rectangular $(n\tau_o, m\omega_o)$, que siempre utiliza la misma función envolvente $h(t)$ (con el mismo ancho y oscilaciones) y traslación temporal dando como resultado un muestreo (resolución) en el plano tiempo-frecuencia constante rectangular.



Cuando se calcula la expansión lineal de una señal, de la forma anteriormente descrita, un punto importante a considerar es la resolución tiempo-frecuencia que resultará con la función base utilizada. Así que la resolución estará determinada por la extensión de la función respecto al tiempo y a la frecuencia, [VET96].

Con la STFT es posible llevar a cabo localización en frecuencia y en tiempo, sin embargo, esta última no es muy buena porque las funciones base son senoidales “rectangularmente ventaneadas” y por lo tanto discontinuas, su transformada de Fourier decae a sólo $1/\omega$, es decir, la expansión converge lentamente a la función. En otras palabras, si se desea aproximar una señal mediante series truncadas, la calidad de la aproximación dependerá de la selección de la duración de la ventana. La convergencia a los puntos de discontinuidad es pobre debido al fenómeno de Gibbs. Además, el corrimiento de la señal podría conducir a una transformada completamente diferente por lo que se pierde la invarianza en el tiempo.

5.1.2 Efectos de Desplazamiento, Modulación y Escalamiento entre las funciones exponenciales y las funciones *wavelet*.

Por otro lado, es posible definir los intervalos I_t e I_ω , llamados “región-tf” como se muestra en la figura 5.1.2, los cuales contienen el 90% de la energía en tiempo-frecuencia y considerar algunas operaciones elementales de la función base exponencial y sus efectos sobre la región-tf, encontramos que, [VET96]:

- 1) Desplazamientos τ en tiempo originan corrimientos de la región-tf por τ
- 2) Modulación por $e^{j\omega_0 t}$ desplazará la región-tf por ω_0 en el eje de la frecuencia

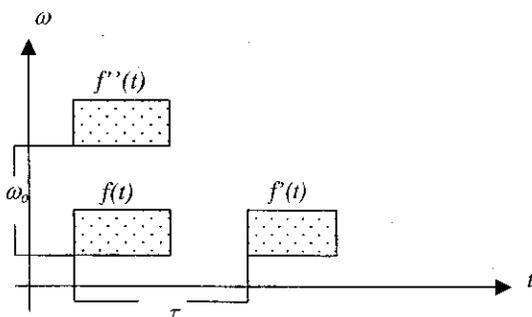


Figura 5.1.1 Efectos del desplazamiento τ y modulación $e^{j\omega_0 t}$ en el plano tiempo-frecuencia

- 3) Cambios de Escala, a representa la dilatación, en la función base ocasionarán modificaciones en los intervalos de tiempo I_t y frecuencia I_ω por $(1/a)I_t$ y aI_ω respectivamente, como

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

resultado de la propiedad de escala de la FT: Cambio de Escala en el dominio de tiempo causará la inversión en la escala de frecuencia

Esto quiere decir que tanto la forma como la localización de la región- tf han sufrido modificaciones, aunque la superficie si se conserva, como se observa en la figura 5.1.2.

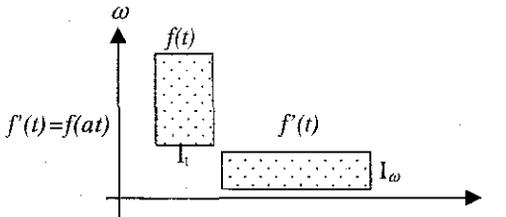


Figura 5.1.2 Efectos del escalamiento en el plano tiempo-frecuencia

La escala nos lleva al hecho de que la resolución en tiempo y la resolución en frecuencia manejan un compromiso mutuo y excluyente. En otras palabras, análisis temporal preciso-puntual (τ muy pequeña en función del tiempo de muestreo) y análisis frecuencial preciso-puntual no pueden llevarse a cabo simultáneamente, [VET96].

La TW actúa como un microscopio sobre todo el dominio de la señal $f(t)$. El cálculo *wavelet* se basa en dos ecuaciones fundamentales: 1) La función escala $\phi(t)$, también llamada “ecuación básica de dilatación” o “recursión fundamental” $\phi(t) = \sum a_k \phi(2t-k)$, y 2) La función base $\psi(t)$, $\psi(t) = \sum (-I^k) a_{k+1} \phi(2t+k)$, donde a_k son los coeficientes *wavelets*. El conjunto de funciones base formado por $\psi(t)$ y $\phi(t)$, escaladas y trasladadas, constituyen “el sistema *wavelet*”. Este sistema enfoca fenómenos de tiempo corto cuando la escala es pequeña y permite una percepción global cuando la escala tiende a mayor valor. Con lo cual podemos encontrar que la transformada *wavelet* nos permite “acercamiento” de los fenómenos de corta-duración, como los transitorios en la señales (singularidades). La propiedad de escalamiento de las funciones base usadas en la TW va cambiando los anchos temporales en relación a la frecuencia de la función base, lo que conduce a un muestreo hiperbólico, [VET96].

5.2 Teoría Wavelet

Como la frecuencia de una señal es inversamente proporcional a la longitud de su ciclo, entonces el intervalo de tiempo de análisis debe ser una ventana tiempo-frecuencia variable que automáticamente se estreche a altas frecuencias y se expanda a bajas frecuencias, propiedad que posee la transformada *wavelet*. Es decir, la función *wavelet* base y su transformada de Fourier deben decaer respecto al tiempo y a la frecuencia respectivamente, lo suficientemente rápido como para que se puedan utilizarse como funciones ventana.

De lo anterior se puede decir que, una *wavelet* debe ser una onda de duración limitada en tiempo, frecuencia y valor promedio igual a cero, es decir, que tenga la propiedad de Soporte Compacto tanto en tiempo como en frecuencia; con una conducta similar a un filtro pasa-banda, y tienda a ser irregular y asimétrica. El sistema *wavelet* puede tener o no soporte compacto, sin embargo es indispensable para obtener resultados óptimos de una aplicación en particular, como es el caso del análisis de transitorios epilépticos en el EEG donde es necesario el soporte compacto en ambos dominios, [CHU92].

Hay diferentes tipos de familias *wavelets* cuyas características varían de acuerdo a los siguientes criterios :

1. El soporte de las funciones ϕ y ψ : cuantifica las localizaciones tanto en tiempo como en frecuencia y se basa en la velocidad de convergencia desde el infinito a cero de esas funciones cuando el tiempo o la frecuencia va al infinito.
2. La simetría, la cual es útil para evitar defasamiento en el procesamiento de imágenes
3. La regularidad, la cual es útil para obtener características deseables como suavizar la reconstrucción de señales o imágenes
4. La existencia de la función escala ϕ y el análisis ortogonal o biortogonal, propiedades que permiten algoritmo rápido y código que ahorra espacio.
5. La familia biortogonal, tiene la propiedad de fase lineal, necesaria para la reconstrucción de señales

Varias estructuras matemáticas se han empleado para crear los sistemas *wavelet*, entre las que podemos mencionar las *spline* cúbicas, las exponenciales complejas y la construcción de espacio de parámetros. La estructura de la descomposición a partir de un sistema *wavelet* se debe poder expresar como una suma directa de espacios vectoriales W_j en $L^2(\mathbb{R})$ como sigue, [CHU92]:

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \dots + W_{-1} + W_0 + W_1 + \dots \quad \dots \quad 5.2.1$$

donde W_j es el subespacio generado por $\langle \psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle$.

Cada $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tendrá una descomposición única, como se indica en la expresión 5.1.3

$$f(t) = \dots + \psi_{-1}(t) + \psi_0(t) + \psi_1(t) + \dots \quad \text{donde } \psi_j \in W_j \quad \dots \quad 5.2.2$$

5.2.1 Transformada Continua Wavelet

La Transformada Continua Wavelet (CWT) está definida, [DAU92], como el producto interno entre la señal $f(t)$ y versiones desplazadas y escaladas de una función base $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ denominada la *wavelet* madre,

$$CWT_f(\text{escala, posición}) = \langle f(t) ; \psi_{(\text{escala, posición})}(t) \rangle \quad \dots \quad 5.2.1.1$$

de la expresión anterior se puede decir que la CWT es la convolución con respecto a la dilatación de la reflexión de la función $\psi(t)$ que cumplen dos simples operaciones: Dilatación Binaria y Traslación de la Integral de convolución

Si se elige a =escala y b =posición, donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces la función $\psi_{a,b}(t)$ se define con la siguiente expresión:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \dots \quad 5.2.1.2$$

donde todas las $\psi_{a,b}(t)$ son la misma función $\psi(t)$ trasladada y comprimida o expandida, [DAU92]. Entonces la CWT para una señal $f(t)$, se define de la siguiente manera:

$$CWT_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t) \psi_{a,b}(t) dt \quad \dots \quad 5.2.1.3$$

Donde la función base *wavelet* $\psi(t)$ es un filtro pasa-banda, es importante remarcar que el "escalamiento" es una operación fundamental en el análisis *wavelet*, así valores grandes de a ($a \gg 1$) corresponden funciones base grandes y en consecuencia escala a pequeña ($0 < a < 1$) conduce a funciones base estrechas, que corresponde a alta frecuencia.

Por último el análisis *wavelet* tiene la importante propiedad de recuperar la señal $f(t)$, una vez descompuesta, a partir de la expresión de reconstrucción llamada Resolución de Identidad: Dada una $CWT_f(a,b)$ de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, [CHU92]:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db \quad \dots \quad 5.2.1.4$$

donde C_ψ estará definida por la condición de admisibilidad, ecuación 5.2.2.1, en la siguiente sección.

En esencia la transformada *wavelet* lleva a cabo un análisis de correlación tal que su salida será máxima cuando la señal de entrada coincida con la función *wavelet* empleada, [UNS96].

5.2.2 Condición de Admisibilidad

Para que una función $\psi(t)$ pueda ser considerada una función base *wavelet* debe en primer lugar satisfacer la condición de admisibilidad, [CHU92] que establece:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad \dots \quad 5.2.2.1$$

donde $\Psi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. Esta condición se cumple sólo si el promedio de $\psi(t)$ es cero, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ y el espectro en el origen es cero, es decir $\Psi(0)=0$.

Las condiciones anteriores representan las características de soporte compacto de la función *wavelet*, es decir, son señales bien localizadas en tiempo y frecuencia y su espectro representa un filtro pasa-banda, como se observar en la figura 5.2.1

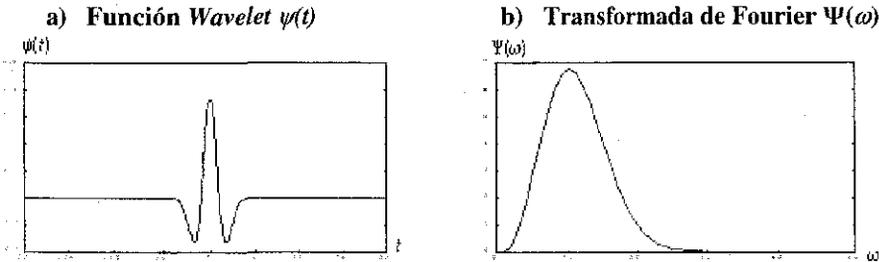


Figura 5.2.1 Gráfica que representa el soporte compacto en a) el tiempo y en b) la frecuencia.

Correspondencia Escalas - Frecuencia

El parámetro de escala a y la frecuencia ω se encuentran relacionados por una correspondencia inversa, esto se debe a que funciones base extendidas muestrean a grandes pasos (análisis de las bajas frecuencias) y funciones base estrechas permiten muestrear más frecuentemente (análisis de alta frecuencia), cambiando el plano tiempo-frecuencia de muestreo constante rectangular de la STFT por un muestreo hiperbólico. Además de la característica anterior, al cambiar el parámetro de traslación “ b ” nos permite mover el centro de la localización temporal sobre todo el dominio de la señal $f(t)$.

De lo mencionado arriba vemos que para $|a| \ll 1$ la *wavelet* $\psi_{a,b}(t)$ es una versión altamente concentrada de la *wavelet* base $\psi(t)$ con un contenido de frecuencia principalmente en el rango de alta frecuencia, lado derecho de la figura 5.2.2. Inversamente para $|a| \gg 1$ la *wavelet* $\psi_{a,b}(t)$ es mucho más extensa y tiene en su mayor parte contenido de baja frecuencia como se observa en el lado izquierdo de la figura 5.2.2, [DAU90].

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

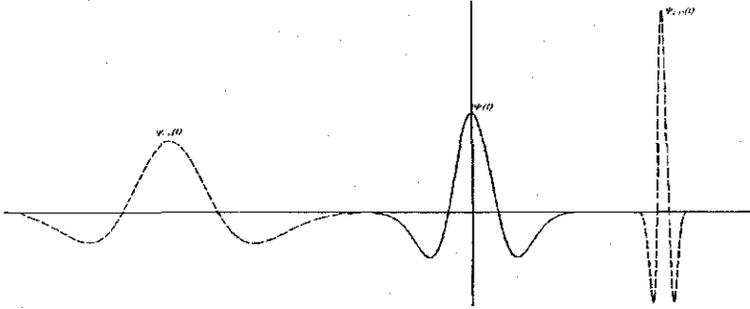


Figura 5.2.2 Wavelet base típica $\psi(t)$ con versiones escaladas $\psi_{a,b}(t)$. En este caso

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2}, \quad a_0=2, \quad b_0=1. \quad [\text{DAU90}]$$

5.2.3 Propiedades de la Transformada Wavelet

La transformada *wavelet* continua posee algunas propiedades similares a la transformada de Fourier, entre ellas podemos mencionar [VET97]:

a) Linealidad

$$CWT[A * f(t) + B * g(t)] = A * CWT_f[f(t)] + B * CWT_g[g(t)]$$

Esta propiedad es una consecuencia de la linealidad del producto interno

b) Invarianza al desplazamiento en el tiempo

- i. Si $f(t) \Rightarrow CWT_f(a,b)$
- ii. Entonces $f(t-\tau) \Rightarrow CWT_f(a, b-\tau)$

c) Preservación de la Escala

- i. Si $f(t) \Rightarrow CWT_f(a,b)$
- ii. Entonces $\frac{1}{\sqrt{s}} f(t/s) \Rightarrow CWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$

d) Conservación de Energía

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{1}{a^2} da db$$

Una generalización de la fórmula de conservación de la energía involucra el producto interno de dos funciones en el dominio del tiempo y en el dominio *wavelet*, entonces la expresión anterior se puede expresar como, [VET97]:

$$\int f'(t) \cdot g(t) dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f^*(a,b) \cdot CWT_g(a,b) \frac{1}{a^2} da db$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

esto es, el producto interno de las funciones en el dominio del tiempo es igual al producto interno de sus transformadas *wavelet* multiplicado por una constante que considera la condición de admisibilidad.

e) Muestreo Diádico -plano tiempo-frecuencia

El muestreo diádico en tiempo considera potencias de dos para la escala a , que considera periodos de 2^a por lo que, $\psi_{a,b}(t) = \psi_{a,0}(t-2^a b)$. Lo anterior nos conduce a lo siguiente: si la *wavelet* está centrada alrededor de ω_0 entonces $\Psi_{a,b}(\omega)$ estará centrada alrededor de $\omega_0/2^a$.

La transformada *wavelet* continua tiene algunas propiedades de localización, en particular localización precisa en el tiempo a altas frecuencias (pequeña escala dependiendo de la frecuencia de muestreo), distinguiéndola significativamente de la transformada de Fourier.

f) Localización en el Tiempo

Si consideramos un impulso determinado por la delta de Dirac al tiempo t_0 , $\delta(t-t_0)$, la CWT_δ , para un factor de escala a , será igual a la *wavelet* base $\psi(t)$ escalada y localizada en t_0 :

$$CWT_\delta(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)$$

g) Localización en la Frecuencia

Si se considera que una *wavelet* $\psi(t)$ no existe fuera de la región $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ en el dominio de Fourier, entonces el soporte de $\Psi(\omega)$, a la escala a considerando muestreo diádico, estará dado por $[\omega_{min}/2^a, \omega_{max}/2^a]$. Por lo tanto, un componente de frecuencia ω_0 intervendrá en la serie *wavelet* a la escala a si se cumple:

$$\frac{\omega_{min}}{2^a} \leq \omega_0 \leq \frac{\omega_{max}}{2^a}$$

h) Caracterización de Regularidades

La transformada *wavelet*, permite caracterizar la regularidad local de una señal observando el declive de los coeficientes de la transformada, debido al hecho de que las funciones base de alta frecuencia llegan a ser súbitas en el tiempo, lo que permite observar regularidades en un instante particular, propiedad de acercamiento, y aislar así discontinuidades en la función. Este comportamiento de la transformada *wavelet* permite caracterizar la vecindad de la discontinuidad del resto de la función.

i) Caracterización Simple

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

5.2.3.1 Wavelet Ortogonal

En el análisis de las series de bases en un espacio de Hilbert, la base ortogonal juega un papel importante en el análisis de señales, [CHU92]. La descomposición de la función $f(t)$ en partes de funciones *wavelet* ortogonales con soporte compacto y simetría, permite conseguir una de las propiedades más importantes, la simetría, y evitar la distorsión en los datos analizados.

Se define la siguiente condición para la base ortogonal *wavelet*:

Condición Ortogonal: $\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j,k, l,m \in \mathbb{Z} \dots 5.2.1$

Así que cada $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ se puede escribir como:

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

donde $C_{j,k}$ son los coeficientes de la serie *wavelet*, y es posible interpretarlos en forma análoga a los coeficientes de la serie de Fourier, es decir,

$$C_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

Si se elige a $\psi(t)$ sea una *wavelet* ortogonal, entonces los subespacios W_j de $L^2(\mathbb{R})$ de la ecuación 5.2.1 serán ortogonales cuando se cumple:

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = 0, \quad k \neq l \quad \text{donde: } \psi_k(t) \in W_k, \quad \psi_l(t) \in W_l$$

entonces: $W_k \perp W_l, \quad k \neq l$

La primera y más simple base *wavelet* ortogonal fue la función Haar $\psi_H(t)$, permite el corrimiento en tiempo, “escalamiento” en lugar de la modulación para obtener la base ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$ y además de esta propiedad es posible implementarla con la teoría de filtros para lo cual existen eficientes algoritmos para calcular los coeficientes *wavelet*.

5.2.3.2 Wavelet Biortogonal

Existen aplicaciones donde es indispensable llevar a cabo análisis-síntesis de un proceso, las bases ortogonales con soporte compacto por ser esencialmente asimétricas presentan algunos inconvenientes, especialmente en la reconstrucción. Es bien conocido en el campo de filtrado por bandas que la simetría y la exacta reconstrucción son incompatibles si se utilizan los mismos filtros FIR tanto para la descomposición como para la reconstrucción, es por ello que se planteó la familia biortogonal, cuando se requiere la implementación de filtros simétricos, [DAU92].

Los filtros simétricos frecuentemente se conocen como filtros de fase lineal, para que pertenezcan a esta clase la fase de la función $a(\xi) = \sum_n a_n e^{-jn\xi}$ deberá ser lineal respecto a ξ , y a_n serán los coeficientes del filtro, [DAU92].

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

La familia *wavelet* biortogonal tiene varias características que la hacen muy útil en las aplicaciones de señales no-estacionarias, [DAU92] entre las que podemos mencionar: 1) sólo involucra la solución de ecuaciones lineales. 2) es posible mantener el soporte compacto tanto en el análisis como en la síntesis. 3) Los coeficientes de sus filtros son racionales diádicos, característica muy atractiva para la implementación de algoritmos rápidos. La función $\psi(t)$ se conoce exacta y explícitamente para todo el intervalo.

Por otro lado también se establece que para tener un sistema *wavelet* biortogonal $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, como el ya descrito, debe existir una función $\psi' \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $\{\psi_{j,k}\}$ y $\{\psi'_{j,k}\}$ sean bases duales de $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto ψ' es única y se conoce como la *wavelet* dual de ψ , [CHU92].

La característica principal de la familia *wavelet* biortogonal es que la función *wavelet* $\psi_{m,n}(t)$ utilizada para el análisis es diferente que para la síntesis $\psi'_{k,l}(t)$, [DAU92]. Esta familia de funciones *wavelet* $\psi'_{k,l}(t)$, por ser dual de $\psi_{m,n}(t)$, también debe formar una base con funciones linealmente independientes, asociarse a una estructura multi-resolución, y por lo tanto debe satisfacer la propiedad de ortogonalidad $\langle \psi_{m,n}(t), \psi'_{k,l}(t) \rangle = \delta[m-k] \delta[n-l]$.

Si además la familia $\psi'_{k,l}(t)$ es completa en un espacio $L^2(\mathbb{R})$, entonces cualquier función $f(t)$ de ese espacio puede escribirse como, [VET97]:

$$f(t) = \sum_m \sum_n \langle \psi_{m,n}, f \rangle \psi'_{m,n}(t) = \sum_m \sum_n \langle \psi'_{m,n}, f \rangle \psi_{m,n}(t) \quad \dots \quad 5.2.3.2$$

5.2.4 Transformada Discreta *Wavelet*

Una secuencia discreta $f[k] \in \ell_2(\mathbb{Z})$ de una señal real, puede ser expandida a través de versiones discretas de funciones *wavelet*, [SCH93]. Parecería una contradicción pero una transformación *wavelet* de una señal $f[k]$ puede llevarse a cabo en tiempo "continuo", se llama así porque la *CWT* implementada, puede operar a todas las escalas y desplazamientos sobre \mathbb{R} recorriendo todo el dominio de la función analizada para un análisis muy detallado es decir, la representación $CWT_f(a,b)$ es altamente redundante, y el grado de redundancia sólo dependerá del sistema computacional empleado.

Sin embargo, calcular los coeficientes *wavelets* a cada escala a y desplazamiento b en \mathbb{R} , llegar a representar un alto costo computacional, dependiendo de la selección de a y b . Gracias a la característica redundante de la $CWT_f(a,b)$ es posible discretizar los parámetros de escala a y posición b sobre \mathbb{Z}^+ sin perder información, obteniéndose así la versión discreta de los coeficientes *wavelets*, $DWT_f[m,n]$ la Transformada Discreta *wavelet*, [VET97].

La discretización de la CWT está relacionada a la teoría de "frames". Un conjunto infinito de vectores (elementos del Espacio Hilbert- \mathbb{H}) distintos de zeros $\{\psi_{m,n}\}$ será un *frame*, si existen dos escalares positivos $A > 0$ y $B < \infty$ a los que se les denomina las cotas del *frame*; tal que para todo vector $f \in \mathbb{H}$, se cumpla [DAU92]:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle \psi_{m,n}, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad \dots \quad 5.2.4.1$$

El *frame*, [DAU92] es un conjunto completo por lo que la combinación lineal de los $\{\psi_{m,n}\}$ es un conjunto denso en todas partes, esto representa una expansión completa. De la misma forma que el caso continuo, cualquier función $f[k]$ de $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ se puede escribir como una superposición de funciones *wavelet* -productos internos de la señal $f[k]$ con $\psi_{m,n}$ - la expansión así obtenida no se hace necesariamente en una base ortonormal, y la función base $\psi[n]$ convendrá que se elija de soporte compacto en tiempo y frecuencia.

5.2.4.1 Discretización de los parámetros de Escala y Desplazamiento en $\psi_{a,b}(t)$

La DWT se obtiene discretizando los parámetros de dilatación (escala) a y de desplazamiento b . En primer lugar, consideremos sólo potencias enteras positivas para un parámetro de dilatación fijo $a_0 > 1$ tal que se relacione con el parámetro de escala a de la forma, [RIO91]:

$$a = a_0^m \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } a_0 > 1 \quad \dots \quad 5.2.4.2$$

Si ahora se analiza el conjunto de *wavelets* que corresponden a diferentes valores de m y sin considerar ningún desplazamiento es decir $b=0$, ver en la figura 5.2.2 las contracciones y expansiones que sufre la *wavelet* madre. Al sustituir la ecuación 5.2.4.2 en la expresión 5.2.1.2 vemos que la versión discreta estará dada por la expresión:

$$\psi_{a_0,0}[n] = \sqrt{\frac{1}{a_0^m}} \psi\left(\frac{n}{a_0^m}\right) \quad \dots \quad 5.2.4.3$$

Ahora analicemos la discretización del parámetro de desplazamiento b , si partimos también de valores enteros y múltiplos de un valor fijo $b_0 > 0$, donde b_0 se debe elegir tal que $\psi(t - nb_0)$ cubra todo el eje discreto del tiempo de la señal $f[k]$. De lo anterior, vemos que el factor de desplazamiento dependerá del ancho de la *wavelet*, es decir, del parámetro m , [VET97]. El ancho de una función *wavelet* $\psi_{a_0^m,0}[n]$ es a_0^m veces el ancho de la *wavelet* madre $\psi[n]$, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\Delta_n(\psi_{a_0^m,0}[n]) = a_0^m \Delta_n(\psi[n])$$

entonces para que $\psi_{a_0^m,0}[n]$ cubra todo el eje de desplazamiento n a la escala $a = a_0^m$, el factor de desplazamiento se debe elegir en función del ancho de la *wavelet* para esa escala, es decir en función de a_0^m , tal que :

$$b = n b_0 a_0^m \quad \text{para } a_0 > 1, b_0 > 0, m, n, \in \mathbb{Z} \quad \dots \quad 5.2.4.4$$



Si partimos de la definición de la *wavelet* continua dada por la ecuación 5.2.1.2, y sustituimos en ella las expresiones 5.2.4.2 y 5.2.4.3 para a y b respectivamente, considerando como siempre n el tiempo discreto, tenemos que

$$\psi_{m,n}[k] = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{k - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right)$$

y la familia *wavelet* discreta $\psi_{m,n}[k]$ quedará definida mediante la expresión siguiente:

$$\psi_{m,n}[k] = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} k - nb_0) \quad \dots \quad 5.2.4.5$$

Con una adecuada selección de ψ , a_0 y b_0 , $\psi_{m,n}$ constituirá una base ortonormal para $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$. Para que esto se cumpla se debe establecer que

- Todas las $\psi_{m,n}$ sean ortonormales
- Cualquier función $f[k] \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^+)$ pueda aproximarse por una combinación lineal finita de las $\psi_{m,n}$

5.2.4.2 Resolución Diádica

Desde el punto de vista de eficiencia computacional es conveniente seleccionar el conjunto de escalas m y posiciones n basado en potencias de dos, por lo que si se eligen $a_0=2$ y $b_0=1$ en la ecuación 5.2.4.5 se obtiene la transformada *wavelet* discreta diádica, para la cual es bien conocido que existen bases ortonormales, permite la reconstrucción a partir de los coeficientes transformados, [VET97] y disminuye el número de operaciones hasta MN donde M son los niveles de descomposición ($a=2^j$; $j=1,2,3, \dots, M$) y N el número de muestras de la señal $f[k]$, [SCH92].

En particular se define la familia *wavelet* ortogonal discreta en la resolución diádica como: una familia $\{\psi_{j,k}\}$ tal que será una base ortogonal en $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z}^+)$, si cumple con la condición de ortogonalidad dada por 5.2.3.1, su escala estará regida por $a=2^j$, su traslación por $b=p\Delta t$ ($\Delta t=1$, y $p=1,2,3, \dots, K$), y está definida por las ecuaciones para la escala y la *wavelet*, [DAU92]:

$$\psi_{j,p}[n] = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} n - p) \quad \dots \quad 5.2.4.6$$

$$\phi_{j,p}[n] = 2^{-j/2} \phi(2^{-j} n - p) \quad \dots \quad 5.2.4.7$$

donde:

- j : controla la dilatación o compresión diádica, por lo que representará a m
- p : controla la traslación diádica en tiempo, por lo que representará a n

En un plano de resolución hiperbólico o rejilla diádica, el eje de frecuencia se particiona en bandas de frecuencia (octavas) binarias. La escala a se divide en una dilatación binaria 2^j y la traslación diádica estará dada por $p/2$, [COD92].

En la tabla 5.1, se aprecia la relación entre la escala $a=2^j$ y la resolución $1/a=1/2^j$ respecto a diferentes niveles j que implican distintos anchos de la familia *wavelet* $\psi_{j,p}$. se puede ver que entre mayor sea la resolución más pequeños y finos son los detalles que se pueden detectar, es decir, se combina el análisis local –a \approx escala pequeña- con el análisis global –a \approx escala grande- esto conduce al análisis multi-resolución.

Tabla 5.1 Relación entre Escala y Resolución

Nivel $m=j$	Escala $a=a_0^m=2^j$	Ancho $a_0^m \Delta=2^j$	Traslación $b=na_0^m b_0=p/2^j$	Resolución $1/a=1/2^j$
0	1	1Δ	p (0,1,2,3,3,5,6,...)	1
1	2	2Δ	$2p$ (0,2,3,6,8,10,...)	0.5
2	4	4Δ	$3p$ (0,3,8,12,16,...)	0.25
3	8	8Δ	$8p$ (0,8,16,23,...)	0.125

Resumiendo, la expansión de una señal discreta $f[k]$ en $\ell_2(\mathbb{Z})$ a partir de la transformada *wavelet* discreta y respecto a una resolución binaria es decir, con potencias de 2, hasta el nivel J se obtiene por la descomposición en proyecciones sobre una familia de funciones *frame* en una rejilla de muestreo diádica y se expresa como, [AKA95]:

$$f[k] = \sum_{j=1}^J \sum_{p \in \mathbb{Z}} d_j[p] \psi_{2^j, p}[k - 2^j p] + \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_j[p] \phi_{2^j, p}[k - 2^j p] \quad \dots \quad 5.2.4.8$$

donde $d_j[p]$ son los coeficientes *wavelet* es decir los detalles de la señal a la escala 2^j , mientras que $a_j[p]$ representan los coeficientes de la escala o la aproximación de la señal.

Una de las características fundamentales de una expansión tipo *wavelet* es que es una serie con suma doble, una indica el corrimiento en p , y la segunda la escala en j . Otra conclusión muy importante de la expresión 5.2.4.8, es que la expansión representada puede ser implementada por medio de un algoritmo recursivo rápido denominado, la Transformada Rápida *Wavelet*.

5.2.5 Transformada Rápida *Wavelet*

Ingrid Daubechies, [DAU92], demostró que es posible implementar un algoritmo rápido para calcular el análisis multi-resolución a partir de las *wavelet* ortonormales con soporte compacto por medio de una serie de filtros digitales, conduciendo así a la Transformada Rápida *Wavelet*.

Por otro lado, en 1988 Mallat produjo un algoritmo para la descomposición y reconstrucción *wavelet* “rápida”, [MAL89]. El algoritmo de Mallat denominado piramidal para la transformada discreta *wavelet* es de hecho, un esquema clásico que en el área del procesamiento de señales se conoce como un codificador sub-banda de dos canales usando una secuencia de filtros iterativos, filtros FIR conjugados de cuadratura o filtros espejo de cuadratura (QMF del inglés Quadrature Mirror Filters), [VET96].

Sistema Ortogonal Discreto

La expansión ortogonal de la señal discreta $f[k] \in \ell_2(\mathbb{Z})$ en términos de sus funciones escala $\phi[n]$ y base diádica $\psi_{j,p}[n]$ se puede expresar como, [COD92]:

$$f[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c[l] \phi_l[k] + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} d[j,p] \psi_{j,p}[k] \quad \dots \quad 5.2.5.1$$

donde $c[l]$ y $d[j,p]$ son los coeficientes de la expansión calculados a partir del producto interno entre la secuencia $f[k]$ y las funciones $\phi(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$, como lo indican las siguientes expresiones:

$$c[l] = \langle \phi_l, f \rangle = \int f(t) \phi_l(t) dt \quad \dots \quad 5.2.5.2$$

$$y[k] = d[j,p] = \langle \psi_{j,p}, f \rangle = \int f(t) \psi_{j,p}(t) dt \quad \dots \quad 5.2.5.3$$

donde la función *wavelet* $\psi_{j,k}(t)$ y la función escala $\phi(t)$ deben satisfacer la condición ortogonal $\langle \psi[l], \psi[m] \rangle = \delta[l-m]$, $\langle \phi[l], \phi[m] \rangle = \delta[l-m]$, respectivamente [CHU92].

La ecuación de expansión 5.2.5.1 conduce a un algoritmo recursivo donde los coeficientes $c[l]$ y $d[j,p]$ describen completa y únicamente a la señal original $f[k]$. Los coeficientes de expansión $c[l]$ representan la aproximación de la señal original $f(t)$ con una resolución de un punto por cada 2^l muestras de la señal original y los coeficientes de expansión $d[j,p]$ representan los detalles de la señal original a diferentes niveles de resolución, [COD92].

A semejanza del caso continuo, expresión 5.2.5.3, $y[k]$ se representa a partir del producto interno y la función *wavelet* base $\psi[k]$ definida en el tiempo discreto como sigue:

$$y[k] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \psi[j], f[j] \rangle \psi[k] \quad \dots \quad 5.2.5.4$$

Las transformadas de la secuencia $y[k]$, según sus índices pares e impares, se pueden expresar respectivamente con las siguientes expresiones:

$$Y[2k] = \langle \psi_{2k}, y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (y[2k] + y[2k+1]) \quad k=0,1,2,\dots$$

$$Y[2k+1] = \langle \psi_{2k+1}, y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (y[2k] - y[2k+1]) \quad k=0,1,2,\dots$$

donde $Y[2k]$ representa el promedio de la secuencia discreta mientras que $Y[2k+1]$ calcula la diferencia entre muestras sucesivas.

Si consideramos dos filtros no-causales $h_0[n]$ y $h_1[n]$ para representar a $Y[2k]$ y $Y[2k+1]$ respectivamente, podemos implementar las expansiones anteriores usando convolución y conducir así a un banco de filtros digitales de dos-canales:

$$h_0[n] * y[n] \Big|_{n=2k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_0[2k-l] y[l] = \frac{1}{\sqrt{2}} y[2k] + \frac{1}{\sqrt{2}} y[2k+1] \quad \dots \quad 5.2.5.5$$

$$h_1[n] * y[n] \Big|_{n=2k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_1[2k-l] y[l] = \frac{1}{\sqrt{2}} y[2k] - \frac{1}{\sqrt{2}} y[2k+1] \quad \dots \quad 5.2.5.6$$

podemos ver que evaluar una convolución con respecto a los índices pares corresponde a un filtro seguido por un submuestreo por dos, [VET96].

Donde la expresión 5.2.5.5 representa el promedio o versión “burda” de la secuencia discreta $y[n]$ y la expresión 5.2.5.6 será la diferencia, o los “detalles” necesarios para representar completamente a $y[n]$, los dos subespacios generados por $\{\psi_{2k}\}$ y $\{\psi_{2k+1}\}$ son ortogonales y la suma de las dos proyecciones recupera completamente a $y[n]$. Con esto no se obtienen los mejores filtros pasa-baja y pasa-alta posibles, si se consigue buena localización temporal

$Y[2k]$ y $Y[2k+1]$, que representan y_0 y y_1 en la figura 5.2.3, se pueden obtener a partir del banco de filtros de cuadratura QMF $h_0(n)$ y $h_1(n)$ seguidos por un submuestreo por dos.

Todos los filtros usados en la transformada discreta *wavelet* están íntimamente ligados a la secuencia $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Claramente, si ϕ tiene soporte compacto, la secuencia (ω_n) es finita y puede ser vista como un filtro. El filtro W , se llama el filtro escala y debe ser:

1. Filtro de Respuesta al Impulso Finita (FIR)
2. Longitud $2N$
3. Suma unitaria, $\sum_{n=1}^N C_n = 1$, donde C_n son los coeficientes del filtro.
4. Norma $\|\omega\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
5. Filtro pasa-bajos

En forma similar es posible representar la síntesis o reconstrucción de la señal mediante el banco de filtros QMF, a partir de las señales descompuestas y_0 y y_1 . Partiendo de dos filtros FIR-QMF $g_0[n]$ y $g_1[n]$ con respuesta al impulso igual a la función base $\psi[k]$, la reconstrucción de la señal $\hat{y}[n]$ se puede expresar a partir de los filtros $g_0[n]$ y $g_1[n]$ como sigue:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_0[k]g_0[n - 2k] + \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_1[k]g_1[n - 2k] \quad \dots \quad 5.2.5.7$$

La expresión 5.2.5.4, significa que cada muestra de $y_i[k]$ proporciona una copia de la respuesta al impulso de $g_i[n]$ corrida o desplazada en $2k$. Esto puede ser implementado por un sobremuestreo por 2, insertando un cero entre cada dos muestras de $y_i[k]$, seguido por una convolución con $g_i[n]$. En la figura 5.2.4 se esquematiza la relación entre los filtros QMF de análisis $h_0(n)$ y $h_1(n)$ y los de síntesis $g_0[n]$ y $g_1[n]$

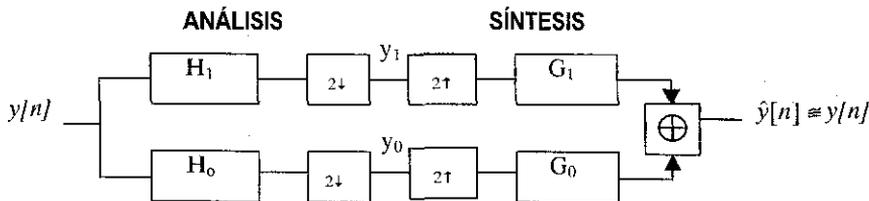


Figura. 5.2.3. Diagrama del Par de Filtros de Cuadratura para el análisis y síntesis de una señal $y[n]$

Este algoritmo permite incrementar la velocidad del algoritmo ya que la cantidad de operaciones en cada iteración se reduce geométricamente, lleva a cabo sólo la mitad de operaciones respecto a su antecesor. Así que, para calcular la transformada *wavelet* de una señal de n muestras, se requiere sólo Cn ciclos de CPU, donde C es una constante que depende de la *wavelet* empleada. Si C es pequeña (<10) entonces el cálculo de la TW requiere casi el mismo esfuerzo como tareas tan triviales como copiar o reescalar una señal. El valor de C depende en parte por cuantos términos tiene una *wavelet* en sus filtros lineales. De lo anterior se ve que el cálculo de la TW es mucho más rápido que el cálculo de otras transformadas empleadas en ingeniería que requieren cantidades como n^2 CPU ciclos para la TF o $n \log n$ CPU ciclos si se trata de la FFT, [COD92].

Sistema Biortogonal Discreto

Como lo vimos en la sección 5.2.3.2, el sistema *wavelet* biortogonal involucra dos bases $\{\psi_{m,n}\}$ y $\{\psi_{k,l}\}$ tal que ambas sean duales de $L^2(\mathbb{R})$ y cumplan con la propiedad de ortogonalidad. Por lo que, para el caso biortogonal discreto de análisis y síntesis se debe considerar un par de funciones escalas $\phi[n] - \phi'[n]$ y un par de funciones *wavelet* $\psi[n] - \psi'[n]$. Entonces en una familia biortogonal las siguientes relaciones se satisfacen:

<p>Sistema Wavelet</p> $\phi[n] = m_0\left(\frac{n}{2}\right)\phi\left(\frac{n}{2}\right)$ $\psi[n] = m_1\left(\frac{n}{2}\right)\psi\left(\frac{n}{2}\right)$	<p>Sistema Wavelet Dual</p> $\phi'[n] = m'_0\left(\frac{n}{2}\right)\phi'\left(\frac{n}{2}\right)$ $\psi'[n] = m'_1\left(\frac{n}{2}\right)\psi'\left(\frac{n}{2}\right)$	<p>... 5.2.5.8</p> <p>... 5.2.5.9</p>
--	---	---------------------------------------

donde los parámetros m_0, m'_0, m_1 y m'_1 representan los filtros FIR-QMF, y corresponden a el par de bases biortogonales $\{\psi_{j,k}\}$ y su dual $\{\psi'_{j,k}\}$. Estos parámetros se pueden elegir de tal forma que sean simétricos y que con ellos se establezcan los límites de las funciones escala y *wavelet* para el análisis/síntesis biortogonal.

De manera similar al caso ortogonal discreto, el análisis/síntesis biortogonal discreto debe considerar dos pares de filtros FIR-QMF $h_0(z)-h_1(z)$ y $g_0(z)-g_1(z)$.

Para una reconstrucción perfecta deben cumplirse las siguientes condiciones, [VER96]:

$$\begin{aligned} g_0(z)h_0(z) + g_0(-z)h_0(-z) &= 2 \\ h_1(z) &= -z^{2k+1}g_0(-z) \\ g_1(z) &= z^{-2k-1}h_0(-z) \end{aligned}$$

La respuesta al impulso de los filtros de análisis/síntesis no son solamente una versión de tiempo-reversa uno con respecto al otro, como en el caso ortogonal, sino que dependen de $h_0(z)$ y $g_0(z)$. Lo anterior conduce a definir los filtros pasa-bajos iterativos $h_0^{(i)}(z)$ y $g_0^{(i)}(z)$, para el caso biortogonal tenemos, [VET97]:

$$h_0^{(i)}(z) = \prod_{k=0}^{i-1} h_0(z^{2^k}) \quad \dots \quad 5.2.5.10$$

$$g_0^{(i)}(z) = \prod_{k=0}^{i-1} g_0(z^{2^k}) \quad \dots \quad 5.2.5.11$$

es necesario que tanto $h_0(z)$ como $g_0(z)$ tengan un cero en $z = -1$ para que las funciones asociadas a ellos converjan, por lo tanto se establece que :

$$g_0(1)h_0(1) = \left(\sum_n g_0(n) \right) \left(\sum_n h_0(n) \right) = 2$$

lo que conduce a que los filtros se pueden normalizar tal que,

$$\sum_n g_0(n) = \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$$

Una vez establecidas las condiciones que deben cumplir los filtros, ahora se definirán los parámetros $m_0[n]$, $m_0'[n]$, $m_1[n]$ y $m_1'[n]$ en función de esos filtros $h[k]$ - $h'[k]$ y $g[k]$ - $g'[k]$ como a continuación se expresa, [VET97] :

Sistema Wavelet

$$m_0[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h(k) e^{-ikn}$$

$$m_1[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g(k) e^{-ikn}$$

Sistema Wavelet Dual

$$m_0'[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h'(k) e^{-ikn} \quad \dots \quad 5.2.5.12$$

$$m_1'[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g'(k) e^{-ikn} \quad \dots \quad 5.2.5.13$$

La transformada de Fourier de las relaciones 5.2.5.8 y 5.2.5.9, pueden expresarse como sigue:

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} M_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \Phi'(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} M_0'\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \dots \quad 5.2.5.14$$

$$\Psi(\omega) = M_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} M_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \Psi'(\omega) = M_1'\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{M}_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \dots \quad 5.2.5.15$$

donde $M_0(\omega)$, $M_0'(\omega)$, $M_1(\omega)$ y $M_1'(\omega)$ se definen en función de la respuesta en frecuencia de los filtros de la familia biortogonal a partir de las definiciones 5.2.5.12 y 5.2.5.13, como sigue:

$$M_0(\omega) = \frac{g_0(e^{j\omega})}{\sqrt{2}}$$

$$M_1(\omega) = \frac{g_1(e^{j\omega})}{\sqrt{2}}$$

$$M_0'(\omega) = \frac{h_0(e^{j\omega})}{\sqrt{2}}$$

$$M_1'(\omega) = \frac{h_1(e^{j\omega})}{\sqrt{2}}$$

y las relaciones 5.2.5.14 y 5.2.5.15 son las funciones escala y *wavelet* para el análisis y la síntesis del sistema biortogonal.

En la siguiente sección vemos la aplicación de las funciones *wavelets* ortogonales y biortogonales en la descomposición *wavelet* multi-resolución

5.3 Descomposición Multi-Resolución

La naturaleza de soporte compacto en tiempo y frecuencia, así como su posibilidad de escalamiento y desplazamiento de las funciones base que se usan en la transformada *wavelet* han permitido plantear para cualquier señal $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ una descomposición multi-resolución.

El análisis multi-resolución de una secuencia discreta $f[k] \in \ell_2(\mathbb{Z})$, se origina a partir de las propiedades de la transformada *wavelet* y consiste de una secuencia de subespacios cerrados V_j y sus complementos en W_j , que originan la descomposición completa de la secuencia discreta en un conjunto jerárquico de aproximaciones **A** que representan el contenido de baja frecuencia (PB) y detalles **D** que son el contenido espectral de alta frecuencia (PA), ocasionando una expansión redundante piramidal multi-resolución discreta, conceptualmente está íntimamente relacionada a sub-bandas y descomposiciones *wavelets*.

La idea básica de esta descomposición son las aproximaciones sucesivas, una señal se describe como una aproximación burda, obtenida a partir de los subespacios V_j (típicamente pasa-bajas, versión submuestreada) más un predictor de error basado en los detalles que se obtienen de los subespacios W_j . El Esquema puede ser iterativo en cada versión "burda" o aproximación A_j , como se esquematiza a continuación en la figura 5.3.1.

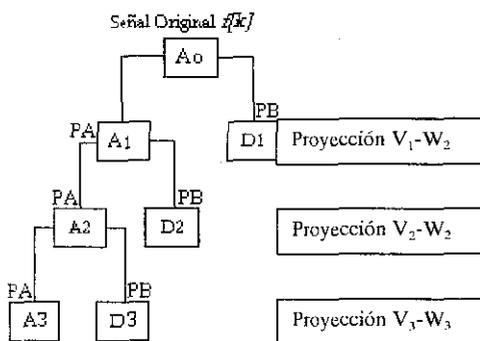


Figura 5.3.1. Árbol Wavelet Multi-resolución

En 1983 Burt y Adelson, [VER95], establecieron la estructura piramidal, un algoritmo rápido que se usa para calcular la transformada *wavelet* y que involucra una serie de operaciones con filtros lineales en combinación con un submuestreo por 2 de la salida para construir una señal desde su resolución más baja además de una secuencia de detalles. De hecho una de las primeras ligas entre la teoría *wavelet* y el procesamiento de señales fue establecida por Daubechies y Mallat, [VER95], quienes encontraron que el esquema establecido por Burt y Adelson estaba relacionado con un análisis multi-resolución y que además un banco de filtros podía usarse para el cálculo de la descomposición *wavelet* y así aprovechar el desarrollo en este campo de los algoritmos rápidos.

5.3.1 Condiciones

Mallat y Meyer formularon en 1985, [AKA92], que el análisis multi-resolución se puede implementar mediante un algoritmo eficiente para resolver la DWT basado en filtros digitales, conocido como codificador sub-banda de dos canales, que utiliza filtros conjugados en cuadratura o filtros en cuadratura espejo (QMF).

La descomposición multi-resolución, [DAU92], está basada en la existencia y propiedades de una función *wavelet* $\psi(t)$ y consiste de una secuencia de subespacios cerrados V_j y su complemento W_j que deben cumplir con las siguientes condiciones, [CHU92, DAU92]:

1- Todos los subespacios V_j son versiones escaladas de un subespacio central V_0 , que pertenece a la familia de espacios de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \quad \dots \quad \text{5.3.1.1}$$

tal que:

$$\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}) \quad \dots \quad \text{5.3.1.2}$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad \dots \quad \text{5.3.1.3}$$

2- Traslación invariante de V_0 .

$$f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t - n) \in V_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

3.- Invarianza en Escala

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_0 \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}$$

4.- Existencia de la Base Ortogonal

Existe $\phi(t) \in V_0$, tal que $\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortogonal en V_0 .

5.- De 3 y 4 se deriva que el conjunto $\{2^{j/2} \phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j .

5.- Existencia del Complemento Ortogonal

a) Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se define W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1}

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \dots + W_{-1} + W_0 + W_1 + \dots$$

$$V_j = \dots + W_{j-2} + W_{j-1}$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

tal que:

$$W_j \perp W_j \quad \text{if } j \neq j' \quad \dots \quad \text{5.3.1.4}$$

$$V_0 = \langle \phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle \quad \dots \quad \text{5.3.1.4}$$

$$W_j = \langle \psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \rangle \quad \dots \quad \text{5.3.1.5}$$

V_0 y W_0 deben ser subespacios cerrados en $L^2(\mathbb{R})$ generados por las funciones ϕ y ψ .

b) La observación anterior condujo a una técnica para construir la *wavelet* ψ y su correspondiente dual ψ' : la existencia y estructura de una función, "la función escala" $\phi \in V_0$, tal que $\{\phi_{0,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ debe ser una base ortogonal en V_0 .

En forma global ϕ genera un análisis multi-resolución (MRA) $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Como consecuencia de la propuesta anterior, debe existir también una base *wavelet* ortogonal $\{\psi_{j,k}, j,k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que genere los espacios $W_j, j \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

donde P_j es la proyección ortogonal sobre V_j . Esquemáticamente la siguiente figura 5.3.2 representa este concepto:

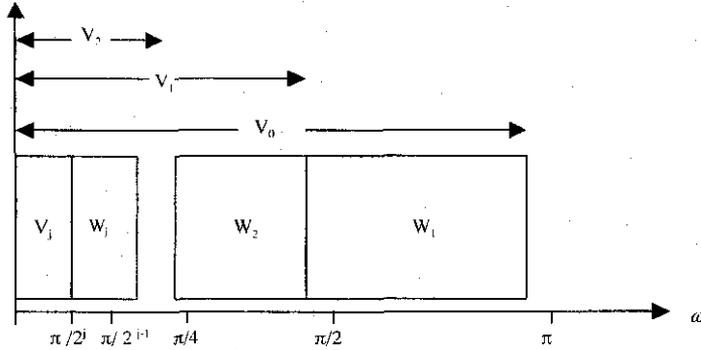


Figura 5.3.2. División ideal del espectro simétrico V_j , espacios, donde $V_i \subset V_{i+1}$, y sus subespacios W_i , contenidos, a partir de la transformada *wavelet* discreta usando filtros, [VET95].

Es posible construir la *wavelet* ψ y su dual ψ' tal que cumplan ciertas características, específicamente para nuestro caso, de la aplicación del procesamiento de señales:

- Descomposición del espacio $L^2(\mathbb{R})$ como una suma ortogonal de los subespacios W_j
- Bases ortogonales de $L^2(\mathbb{R})$ generadas por ψ
- Reconstrucción y descomposición finita como resultado del soporte compacto de ψ y ψ'
- Simetría de ψ y ψ'

Para una *wavelet* ortogonal, en el espacio multi-resolución, se empieza con la función escala ϕ y la función *wavelet* ψ . Una de las relaciones fundamentales es la relación “dos-escalas”

(ecuación de dilatación) $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}t\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \phi(t-n)$.

5.3.2 Banco de Filtros Dos-Canales

De lo anterior vemos que el análisis multi-resolución, a partir de la transformada *wavelet*, está basado en dos funciones, [AKA95], la primera para obtener los coeficientes que representaran un filtro pasa-bajo, es la función de Escala o Dilatación $\phi(t)$ que debe satisfacer la condición:

$\int \phi(t)dt = 1$, y la segunda es la función base *wavelet* $\psi(t)$ que representará los coeficientes de un

filtro pasa-alto y debe satisfacer las propiedades ya descritas en la sección 5.3.1, y las condiciones: 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)| = 0$, y 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Estas condiciones garantizan que la función *wavelet* sea bien localizada y oscile como una “onda”, [BRU95].

Ambas funciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$, son prototipo de la *wavelet* base y están relacionadas por las siguientes expresiones, [AKA95, CHU92]:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) \quad \dots \quad 5.3.2.1$$

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad \dots \quad 5.3.2.2$$

Ambas funciones $\psi(t)$ y $\phi(t)$, son ecuaciones en diferencia a dos-escalas, que constituyen el prototipo de una clase de funciones base ortonormales.

Battle y Lemarie, [AKA95] propusieron la transformada *wavelet spline* ortogonal y posteriormente fue implementada por Mallat para analizar el contenido de señales e imágenes. Mallat y Daubechies en 1985, [AKA95] mostraron que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ se pueden expresar en función de un par de filtros FIR-QMF; $h[k]$ filtro paso-bajas y $g[k]$ filtro paso-altos, que cumplan las condiciones de ortogonalidad o biortogonalidad.

Para el caso ortonormal, las funciones *wavelet* $\psi(t)$ y escala $\phi(t)$ pueden ser estimadas a partir de los filtros $h[k]$ y $g[k]$ en resolución diádica, como sigue, [AKA95]:

$$\text{Función Wavelet} \quad \psi[n] = \sum_k h[k] \phi[2n - k] \quad \dots \quad 5.3.2.3$$

$$\text{Función Escala} \quad \phi[n] = \sum_k g[k] \phi[2n - k] \quad \dots \quad 5.3.2.4$$

La expansión de una función $f^{(0)}[n] \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ con proyecciones en V_1 y W_1 , a través de un banco de filtros de dos-canales, tiene la propiedad de descomponer la señal en dos versiones de más baja resolución respecto a la original. Es decir, como se ilustra en la figura 5.4.1, es posible conformar la secuencia $f^{(0)}[n] = f[k]$ por componentes a los que se les denomina la aproximación a la señal $A_{2^j}[n]$ y los componentes llamados detalles o diferencias en información $D_{2^j}[n]$, como se muestra a continuación para el primer nivel de descomposición, donde la señal original $f^{(0)}[n]$ se expresa en función de la aproximación al nivel cero $A_{2^0}[n]$:

$$f^{(0)}[n] = A_{2^0}[n] = A_{2^1}[n] + D_{2^1}[n] \quad \dots \quad 5.3.2.5$$

los $A_{2^j}[n]$ sucesivos tienen versiones de resolución más y más baja respecto a $A_{2^0}[n]$ conforme j aumenta, derivando un algoritmo recursivo, [AKA95].

La aproximación de la señal $A_{2^j}[n]$ al nivel $j=1$ de proyección sobre V_1 , se estima en términos de los coeficientes del filtro $g[n]$ que están asociados con la función escala y el submuestreo por 2 de la señal $A_{2^0}[n]$, como se indica con la siguiente expresión :

$$A_{2^l}[n] = \sum_k a_{2^l}[k] \phi_{2^l}[n - 2^l k] \quad \dots \quad 5.3.2.6$$

Las secuencia $a_{2^l}[k]$ se puede expresar en término de la convolución de los coeficientes del filtro $g[k]$, asociados con la función escala $\phi_{2^l}[k]$, con la señal $f[k] = a_{2^0}[k]$ como se indica con la siguiente expresión, [AKA95]:

$$a_{2^l}[n] = \sum_k g[k - 2^l n] A_{2^0}[k] = g[k] * A_{2^0}[n] \quad \dots \quad 5.3.2.7$$

Ahora para calcular la proyección sobre W_{1^l} , se parte en forma similar al caso anterior, los detalles $D_{2^l}[n]$ se estiman en términos de los coeficientes del filtro $h[n]$ que están asociados con la función escala y el submuestreo por 2 de la señal $A_{2^0}[n]$, como se indica con la siguiente expresión:

$$D_{2^l}[n] = \sum_k d_{2^l}[k] \psi_{2^l}[n - 2^l k] \quad \dots \quad 5.3.2.8$$

La secuencia $d_{2^l}[k]$ se puede expresar en término de la convolución de los coeficientes del filtro $h[k]$, asociados con la función *wavelet* $\psi_{2^l}[k]$, con la señal $f[k] = a_{2^0}[k]$ como se indica con la siguiente expresión, [AKA95]:

$$d_{2^l}[n] = \sum_k h[k - 2n] A_{2^0}[k] = h[k] * A_{2^0}[n] \quad \dots \quad 5.3.2.9$$

Este método es iterativo, es decir, proyecciones sobre V_2 y W_2 se pueden obtener en forma similar filtrando $f^{(l)}$ y submuestreando por 2. Este procedimiento se describe en el diagrama 5.3.3.

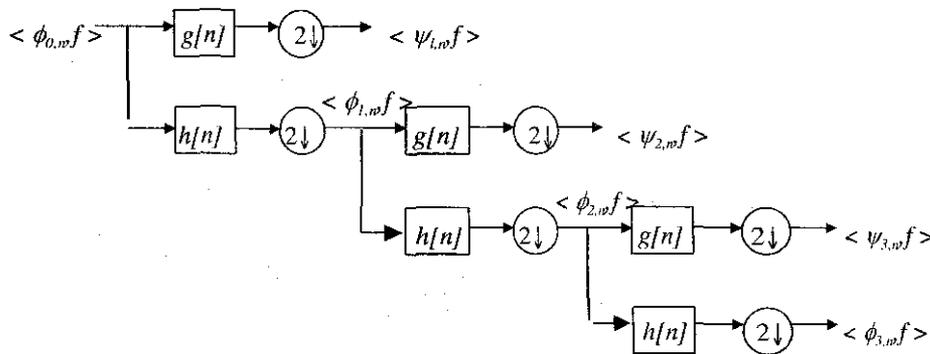


Figura 5.3.3. Descomposición iterativa basada en bancos de filtros discretos

donde $d_{2^l}[k]$ son los coeficientes *wavelet* o detalles de la señal a la escala 2^l , y $a_{2^l}[k]$ son los coeficientes escala o aproximaciones de la señal a la misma escala 2^l .

Como hemos dicho anteriormente los coeficientes del filtro $h[k]$ se consideran un operador diferencia, es decir un filtro paso alta, mientras que los coeficientes del filtro $g[k]$ son un operador promedio, filtro paso baja.

El procedimiento arriba mencionado es iterativo hasta $j=\log_2 N$ donde N es la longitud de la secuencia $f[k]$, [AKA95]:

$$A_{2^{j+1}}[n] = A_{2^j}[n] + D_{2^j}[n] = \sum_k d_{2^j}[n] \psi_{2^j}[n - 2^j k] + \sum_p a_{2^j}[n] \phi_{2^j}[n - 2^j k] \quad \dots \quad 5.3.2.10$$

5.3.3 Polinomio Spline

Un método muy conveniente para implementar tanto la transformada *wavelet* continua como la TW diádica es el uso del polinomio *spline*, [SCH94]. Mencionaremos algunas de las propiedades de las funciones *spline* más destacadas en el ámbito del análisis de señales:

- 1) Los polinomios *spline* son suaves y se definen como sigue: $s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k)$, donde $c(k)$ son los coeficientes y la función *spline* β^n es un polinomio de grado n
- 2) Tanto las funciones base *spline* como las *wavelet* tienen una forma analítica explícita y simple en los dominios tiempo y frecuencia
- 3) El polinomio *spline* es suficientemente flexible para aproximar virtualmente cualquier forma *wavelet* deseada
- 4) Debido a su forma analítica simple, las *spline* son fáciles de manipular
- 5) Es posible desarrollar algoritmos rápidos
- 6) En comparación con otras funciones *wavelet* como la Haar, Daubechies o la *Mexican Hat*, la función *wavelet spline* tiene más oscilaciones como se observa en la figura 5.3.4, característica muy útil en la localización frecuencial.

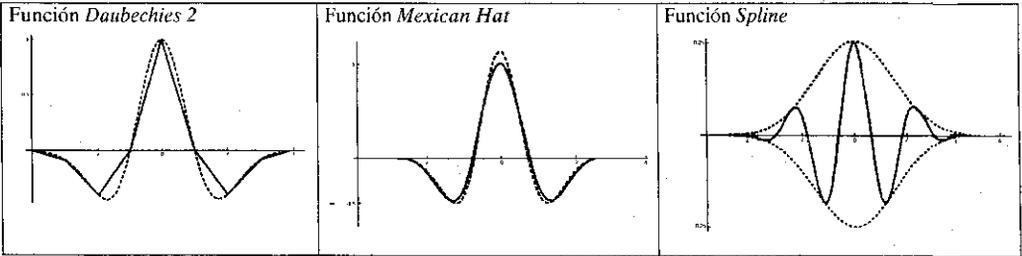


Figura 5.3.4 Comparación entre tres tipos de funciones *wavelet*, [SCH94]

- 7) Hay una infinidad de formas de onda que se pueden usar, con el fin de investigar diferentes eventos en una señal.

- 8) Los polinomios *spline* constituyen un framework muy conveniente para realizar muchas transformaciones en la señales continuas, como convoluciones y dilataciones.
- 9) La transformada continua con la técnica *spline* no daña la extracción de características en el análisis o detección de determinados eventos.
- 10) La estructura multi-resolución de las funciones *spline* las hace particularmente atractivas. La razón se debe a que la forma analítica de la *spline* permite la dilatación por un factor en forma natural, representando a las funciones escala ϕ y wavelet ψ como se muestra a continuación :

$$\phi(t) = \beta^n(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \beta^n(x-k)$$

$$\psi(t) = \psi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \beta^n(x-k)$$

5.4 Wavelet Packets

5.4.1 Definición

El análisis multi-resolución, empleando *wavelet packets*, es un análisis más complejo y flexible para mejorar la localización tiempo-frecuencia en comparación con las funciones *wavelet*, debido a que tanto para los detalles como para las aproximaciones se establece una descomposición jerárquica, como se muestra a continuación en la figura 5.4.1, [CHU92]:

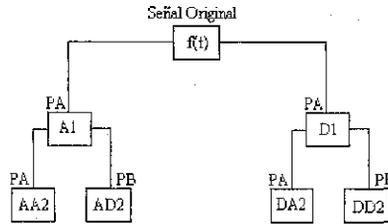


Figura 5.4.1. Descomposición Wavelets.

Para generar la descomposición multi-resolución es indispensable la existencia de la función $\phi(t)$ que genere los espacios V_n , así como la función *wavelet* $\psi(t)$ que debe generar los espacios W_j . En particular, la colección de funciones $\phi(t-n)$, $n \in \mathbb{Z}$ forma una base Riez de V_0 , de aquí se dice que $\phi(t)$ genera un análisis multi-resolución $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Como $\phi \in V_0 \subset V_1$, existe una secuencia única $\{p_k\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ que relaciona $\phi(t)$ con las funciones $\phi(2t-n)$ donde la estructura de ϕ está gobernada por la secuencia "dos-escalas" $\{p_k\}$.

Mientras la secuencia dos-escalas $\{p_k\}$ de una función ortogonal ϕ contiene toda la información referente a las aproximaciones de la descomposición multi-resolución, la secuencia $\{q_k\}$ definida por

$$q_k = (-1)^k p_{-k+1}$$

caracteriza completamente su complemento *wavelet* ortogonal ψ , es decir los detalles. De aquí que las relaciones dos-escalas de la función escala ϕ y su correspondiente función *wavelet* ψ están dadas por :

$$\phi(t) = \sum p_k \phi(2t - k) \quad \dots \quad 5.4.1.1$$

$$\psi(t) = \sum q_k \psi(2t - k) \quad \dots \quad 5.4.1.2$$

De lo anterior vemos que el análisis multi-resolución al que previamente se ha hecho referencia en la sección 5.3, se modifica para hacer una división especial completa del árbol, como se muestra en la figura 5.4.1, la cual producirá una división lineal del espectro similar a la STFT y el árbol de bandas por octavas llevará a cabo una expansión en series *wavelet* de dos etapas. Tal estructura de árbol se introdujo como una familia de funciones base ortogonal conocidas como *wavelet packets*, [BRU95]. El potencial de las *wavelet packets* radica en su capacidad de ofrecer una amplia gama de bases ortonormales, y con ello dar la posibilidad de elegir la "mejor" para el criterio y aplicación de la que se trate, [BRU95].

En el amplio rango de las transformadas, la transformada de Fourier se encuentra en un extremo y la transformada *wavelet* en el otro. Entre esos dos extremos se encuentran las *wavelet packets*, las cuales fueron descubiertas en los trabajos realizados por Coifman en la Universidad de Yale, Meyer en la Universidad de Paris y Víctor Wickerhauser de la Universidad de Washington; [BRU95].

Las *wavelet packets*, tienen una oscilación mayor a la *wavelet* tradicional sin embargo aun permiten la localización en el tiempo de la señal con alta resolución, [BRU95]. Para describirlo en otras palabras, las *wavelet packets* tienen una localización y duración similar a las *wavelet*, así como frecuencia u oscilación similar a las senoidales. Por esta razón las *wavelet packets* se consideran ser formas de onda tiempo-frecuencia. Y las señales solo requieren de las *wavelet packets* para su representación.

Coifman y col., [DAH97], introdujeron el concepto de *wavelet packets* como una generalización de las bases *wavelets*. La construcción de las bases *wavelet packets* parte de las propiedades ya vistas en la sección 5.4.1 para la descomposición multi-resolución y del concepto recursivo para calcularla.

Como se menciona en la sección 5.3.1, $\{\sqrt{2^j} \phi(2^j n - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_1 es una base ortogonal en la cual se basa la descomposición multi-resolución diádica. En esta sección se describe que el análisis multi-resolución mediante la *wavelet packet* involucra la descomposición no sólo de las proyecciones de V_j , sino también de las proyecciones de W_j .

Por lo tanto, las propiedades determinadas por 5.4.1.1 y 5.4.1.2 de las funciones base $\phi(t)$ y $\psi(t)$, conducen a la definición recursiva de otras dos funciones base $w_{2^j}[n]$ y $w_{2^{j+1}}[n]$, para la descomposición multi-resolución tanto en la proyección sobre V_j como en W_j , como se indica a continuación, [DAH97]:

$$w_{2^j}[n] = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \phi_j[2^j n - k] \quad \dots \quad 5.4.1.3$$

$$w_{2^{j+1}}[n] = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] \phi_j[2^j n - k] \quad \dots \quad 5.4.1.4$$

Estas funciones son linealmente independientes y satisfacen a:

$$W_j = \langle (w_j[2n - k])_{k \in \mathbb{Z}} \rangle$$

$$W_j = \langle (w_{2^j}[n - k], w_{2^{j+1}}[n - k])_{k \in \mathbb{Z}} \rangle$$

Cualquier conjunto $\left\{ w_m^{j,k}[n] = 2^{j/2} w_m(2^j n - k) \right\}$, es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, si y sólo si se cumplen las dos siguientes relaciones, [DAH97]:

- 1) Para seleccionar todas las posibles bases, se asocia a cada pareja (n, j) de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, un intervalo $I_{n,j} = [2^j n, 2^j(n+1))$, que cumple con la siguiente condición:

$$\bigcup_{(n,j) \in \mathbb{Z}} I_{n,j} = \mathbb{R}^+$$

- 2) $I_{n,i} \cap I_{n',j} = \emptyset$ si $(n, j) \neq (n', j')$

Tomando las transformadas de Fourier de 5.4.1.1 y 5.4.1.2 respectivamente, se obtiene:

$$\Omega_{2^m}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \Omega_m\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{donde} \quad m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-iak} \quad \dots \quad 5.4.1.5$$

$$\Omega_{2^{m+1}}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \Omega_m\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{donde} \quad m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] e^{-iak} \quad \dots \quad 5.4.1.6$$

por inducción, las ecuaciones 5.4.1.5 y 5.4.1.6 conducen a la expresión generalizada, [DAH97]:

$$\Omega_m(\omega) = m_{i_0}\left(\frac{\omega}{2}\right) m_{i_1}\left(\frac{\omega}{2^2}\right) \dots m_{i_{p-1}}\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \prod_{k=0}^{p-1} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \quad \dots \quad 5.4.1.7$$



donde la secuencia $(\epsilon_i)_{i=0,p-1}$ está definida por la descomposición diádica del entero n , como se indica a continuación:

$$n = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \dots + 2^{p-1}\epsilon_{p-1}, \quad \epsilon_i \in \{0,1\}$$

5.4.2 Algoritmo Wavelet Packet

Wickerhauser, [DAH97] describió un eficiente algoritmo para calcular los coeficientes *wavelet packets* de una función $f^j[n]$ en V_j . Los datos para esta función consisten en los coeficientes de $f[n]$ en la base $\{\omega_0^{j,k}, k = 0, \dots, 2^j - 1\}$, como se muestra a continuación:

$$f^j[n] = \sum_{k=0}^{2^j-1} f_0^{j,k}[n] w_0^{j,k}[n] \quad \dots \quad 5.4.2.1$$

Al considerar funciones base periódicas es posible derivar para las ecuaciones 5.4.1.1 y 5.4.1.2, las siguientes expresiones

$$w_{2^m}^{j,0}[n] = \sum_{k=0}^{2^j-1} h^j[k] w_m^{j,k}[n] \quad \dots \quad 5.4.2.2$$

$$w_{2^{m+1}}^{j,0}[n] = \sum_{k=0}^{2^j-1} g^j[k] w_m^{j,k}[n] \quad \dots \quad 5.4.2.3$$

donde $h^j[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[k + 2^j l]$ y $g^j[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[k + 2^j l]$ son filtros periódicos.

Ahora detallamos cómo se determinan los coeficientes *wavelet packets* $f^j[n]$, para cada nivel j , por convolución con la función *wavelet packet* correspondiente, como se indica:

$$f^{j,k}[n] = \langle f, w^{j,k}[n] \rangle \quad \dots \quad 5.4.2.4$$

Las fórmulas recursivas 5.4.2.2 y 5.4.2.3 conduce a las relaciones entre los coeficientes,

$$f_{2^m}^{j-1,k}[n] = \sum_{l=0}^{2^j-1} h^j[l - 2k] f^{j,l}[n] \quad \dots \quad 5.4.2.5$$

$$f_{2^{m+1}}^{j-1,k}[n] = \sum_{l=0}^{2^j-1} h^j[l - 2k] f^{j,l}[n] \quad \dots \quad 5.4.2.6$$

Las convoluciones expresadas por las ecuaciones 5.4.2.5 y 5.4.2.6, indican que es posible calcularlas por medio de la FFT en una estructura de árbol de J niveles y cada uno de ellos compuesto por $2J-j$ caminos. En la figura 5.4.2 se examina una de esas rutas:

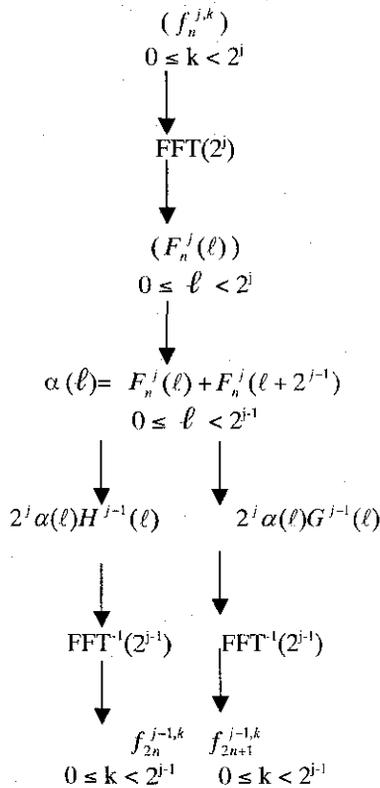


Figura 5.4.2 Esquema que ilustra un camino de descomposición Wavelets Packets, [DAH97].

El cálculo de todos los coeficientes $f^{j,k}[n]$ para $j=0, \dots, J-1$, $k=0, \dots, 2^j-1$ y $n=0, \dots, 2^{j-1}-1$ requieren de 2^{j-1} FFT de orden 2^{j-1} a cada nivel j , tal que el cálculo global del algoritmo de análisis mediante wavelet packets conduce a $J2^j(N \log_2 N)$ operaciones.

***CAPITULO 6. CARACTERIZACIÓN DE EVENTOS EPILÉPTICOS
PUNIFORMES CON WAVELET PACKET***

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En este capítulo se evalúan y comparan los métodos de distribución tiempo-frecuencia y análisis multi-resolución como técnicas para caracterizar los eventos epilépticos puntiformes con confiabilidad y rapidez y obtener aplicaciones en línea.

6.1 Función de Correlación

Como se indicó en la metodología en la sección 3.3.1, inicialmente se aplicó la función de correlación a la señal ECoG $f[k]$, debido a su simplicidad en los cálculos e implementación. Primero se obtuvo una espiga epiléptica puntiforme patrón $r[k]$ en base al promedio de las 140 espigas previamente clasificadas según la ecuación 3.3.1. En la figura 6.1.1 se observa el resultado al calcular la correlación cruzada entre la señal ECoG $f[k]$ y el patrón $r[k]$.

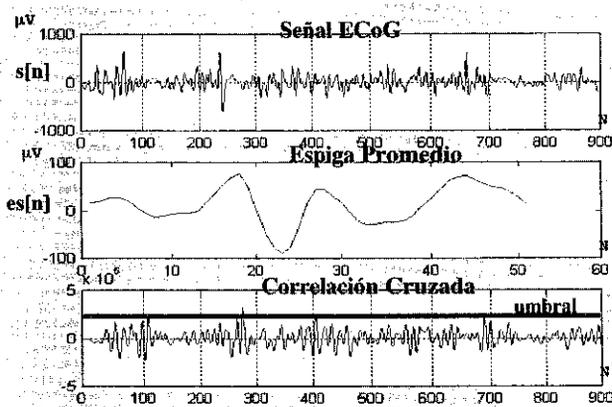


Figure 6.1.1 Correlación Cruzada entre la señal ECoG y la Espiga Patrón.

Este método ofrece muy malos resultados $r \approx 0$ para discriminar entre las espigas epilépticas y no-epilépticas especialmente por su alta varianza con pequeñas diferencias entre la señal ECoG $f[k]$ y el patrón $r[k]$, como lo vemos en la Tabla 6.1 hasta con un 111.11% de falsos positivos. Por otro lado, esta técnica desplaza las detecciones hasta por 31s como se ilustra en la figura 6.1.2.

Tabla 6.1 Resultados con la Correlación Cruzada

Defase Temporal	0.31s
Verdaderos Positivos	72.22%
Falsos Negativos	27.77%
Falsos Positivos	111.11%

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

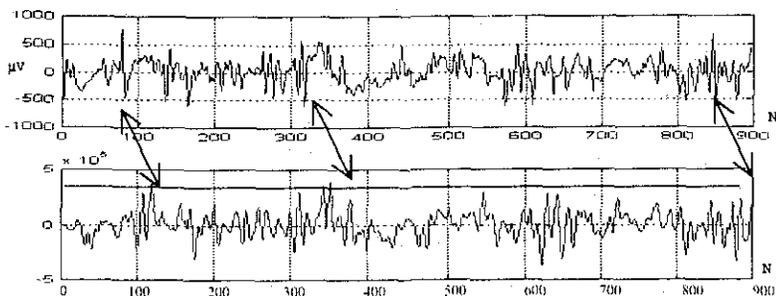


Figure 6.1.2 Desplazamiento Temporal al aplicar la Correlación Cruzada.

6.2 Distribuciones Tiempo-Frecuencia

Posteriormente como se menciona en el capítulo 3, se compararon algunas técnicas de procesamiento relacionadas con la representación tiempo-frecuencia. En la figura 6.2.1 se presentan diferentes representaciones de una señal ECoG que contiene espiga epiléptica.

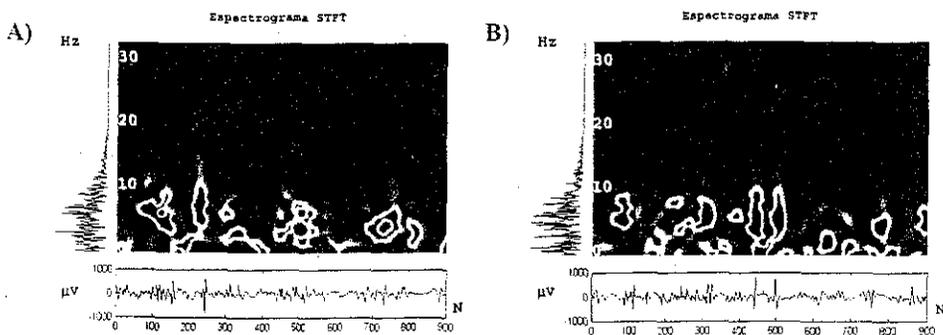


Figure 6.2.1 Espectrogramas de Señales ECoG

El espectrograma se calculó con una ventana Hamming con $L=64$ puntos, para tener la mejor resolución frecuencial, y un traslape entre ventanas de $L-1$ puntos para tener la mejor resolución temporal. Al aplicar el algoritmo de detección mencionado en la sección 3.2 con la STFT, obtenemos que el espectrograma nos muestra los eventos con un desplazamiento en la resolución temporal de 0.25s respecto a la ocurrencia original y el espectro más significativo se encuentra entre el rango de 8 a 20Hz. Sólo se obtiene un 50% de verdaderos positivos, 25% de falsos positivos y un 25% de falsos negativos. Como ya se había indicado en las secciones 4.3.1 y 4.3.2 del capítulo 4, el espectrograma ofrece baja resolución tiempo frecuencia lo que origina para nuestro estudio un desempeño muy pobre en la caracterización de las espigas epilépticas, como se aprecia en la figura 6.2.1.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Como mencionamos en la sección 4.1 del capítulo 4, el modelo paramétricos AR se utiliza con el fin de mejorar la localización frecuencial en el tiempo debido a que estos métodos tienen mejor resolución que el espectrograma como ya se ha visto en la sección 4.1.5 del capítulo 4. En las secciones 4.3.1.4 y 4.3.2 vimos que el modelo AR utilizando el método de Levinson-Durbin nos ofrece resultados respecto a la resolución tiempo-frecuencia muy similares al espectrograma como se observó en la figura 4.3.15, pero con mayor gasto computacional.

Por otro lado, vimos en la sección 4.1.6 que es posible obtener un modelo AR mediante técnicas adaptables como el algoritmo rápido de Kalman y que éste mejora la representación tiempo-frecuencia de una señal, este resultado se aprecia especialmente en la señal ECoG de la figura 4.3.16. Este resultado nos llevó a considerar el modelo adaptable de Kalman para evaluar su desempeño en la caracterización de espigas epilépticas puntiformes. En la figura 6.2.2 se muestra el espectrograma paramétrico Kalman de la señal ECoG de la figura 6.2.2A, donde es posible apreciar con bastante claridad la espiga epiléptica que ocurre en el tiempo 1.8s. Las condiciones iniciales se eligieron de acuerdo a la experimentación llegando a los valores de calibración $\lambda=0.8$ y $\Delta=0.001$. Sin embargo, como se mencionó en la sección 4.1.6 se requieren $N \cdot O(8p) \cdot N \log_2 N$ operaciones representando un obstáculo para realizar el proceso en línea. Por ejemplo, para procesar la señal ECoG de la figura 6.2.2, es decir 896 muestras que representan 7segundos con el modelo AR-Kalman de orden 16, se necesitan realizar 114,688 operaciones sólo para calcular los parámetros del modelo más el cálculo de la densidad espectral de potencia ya sea por la función de transferencia definida por la ecuación 4.1.5.8 o la FFT, el proceso total en nuestro sistema de cómputo toma aproximadamente 1.28 minutos.

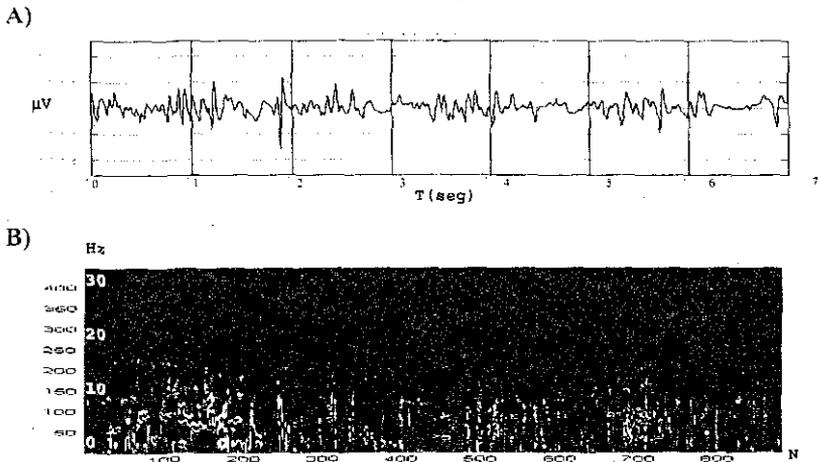


Figura 6.2.2 A) Señal ECoG con tres espigas en 1.2, 1.8 y 5.8s., B) espectrograma paramétrico de Kalman con $\lambda=0.8$ y $\Delta=0.001$.

Después del análisis de la señal ECoG mediante el espectrograma de Fourier y Kalman, investigamos el comportamiento de la WVD en la caracterización de la espiga epiléptica

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

puntiforme. Esta distribución se selecciona por su propiedad de alta resolución frecuencial para la localización exacta de eventos transitorios.

A pesar de esta propiedad tan deseable vemos en la figura 6.2.3, que es prácticamente imposible la interpretación visual y la determinación de los umbrales de amplitud y potencia para aplicar el algoritmo de detección, debido a que la señal ECoG esta compuesta por ondas de no interés para nuestro caso, y que no son posibles de separarlos de los eventos epilépticos ocasionando que el plano tf quede totalmente cubierto de interferencias ya que como se menciona en la sección 4.2.5.1 las señales multicomponente generan términos cruzados o interferencias. Se tendrá un término cruzado a la mitad de dos frecuencias, ver figura 4.3.1, por lo que para N componentes de frecuencia se tendrán $\frac{1}{2}N(N-1)$ interferencias [COH89].

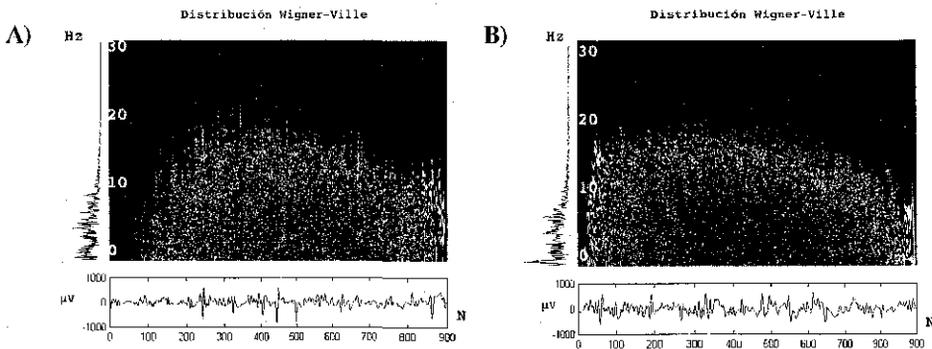


Figura 6.2.3 Distribuciones Wigner-Ville de Señales ECoG.

Debido a los resultados encontrados hasta ahora de pobre resolución temporal aplicando el espectrograma y la imposibilidad práctica de interpretación con la WVD, se procedió a aplicar la distribución Choi-Williams en la señal ECoG-Ictal ya que ésta tiene alta resolución a señales multicomponentes y bajas interferencias con una adecuada selección de ζ . Como ya se mencionó en la sección 4.2.5.2, se utilizó un rango $0.1 < \zeta < 10$ y los mejores resultados de resolución y baja interferencia en el plano tf al aplicar la CWD a la señal ECoG se obtuvieron con $\zeta=0.1$.

En la figura 6.2.4. se observa la alta resolución que la CWD permite obtener para representar las espigas epilépticas y ahora estamos en la posibilidad de establecer los umbrales de amplitud y potencia y con ello aplicar el algoritmo de detección, propuesto en este trabajo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

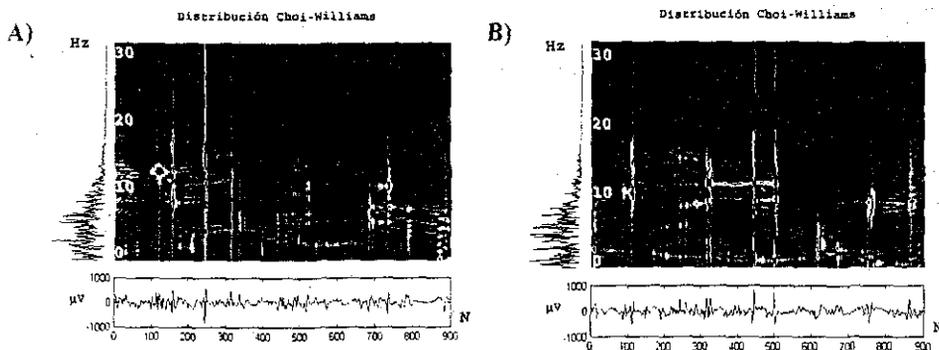


Figura 6.2.4 Distribuciones Choi-Williams de Señales ECoG, con $\zeta=0.1$

Al extraer los parámetros específicos para la CWD de los criterios de clasificación que se establecieron en el algoritmo descrito en el capítulo 5, se tienen los resultados mostrados en la Tabla 6.2. bajas interferencias con $\zeta=0.1$, buena resolución temporal con un sesgo sólo de 31.2ms, mala resolución frecuencial ya que se encuentra la magnitud más alta así como el contenido de energía mayor, primer criterio a considerar para clasificar una onda como evento epiléptico en el rango más significativo 16-24Hz, sin embargo en el rango de frecuencia correspondiente a la espiga epiléptica sólo se obtuvo entre 0.56 y 0.7 de sensibilidad.

Tabla 6.2 Parámetros Específicos usando la CWD

Rango Frecuencia (j)	Magnitud M_j	Energía E_j	Sensibilidad Ω_j
0-4Hz	2.8E+05	6.4E+05	0.25
4-8Hz	3.3E+05	6.6E+05	0.48
8-12Hz	4.0E+05	9.2E+05	0.7
12-16Hz	5.2E+05	10.8E+05	0.56
16-20Hz	6.5E+05	15E+05	0.8
20-24Hz	7.6E+05	16.3E+05	0.78

La RID como alternativa de disminución de interferencias se aplicó en la señal ECoG, en las representaciones tf de la figura 6.2.5 observamos en espigas aisladas muy claramente delimitada su aparición y difícil de resolver las ondas de baja frecuencia.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

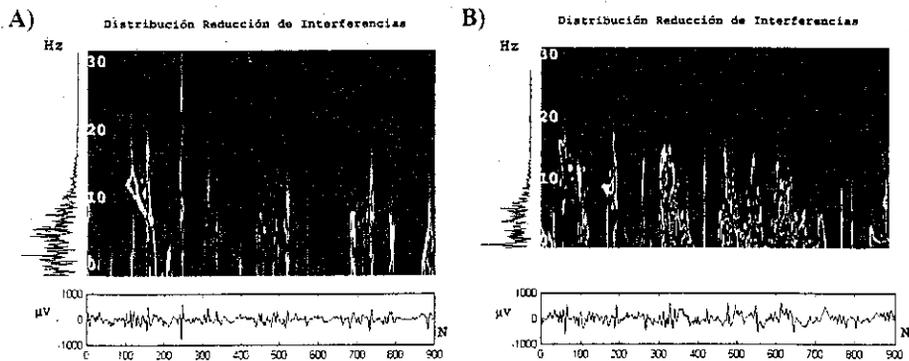


Figura 6.2.5. Distribución Reducción de Interferencias de Señales ECoG

La resolución temporal que se obtiene con la RID es muy buena ya que sólo presenta un sesgo de 23.4ms, en comparación con la desviación de 0.25s que ofrece el espectrograma. El rango de frecuencia más significativo, hasta un 0.8 de sensibilidad, de la RID se encontró entre 16-24Hz y sólo 0.6 de sensibilidad en el rango de la espiga epiléptica, 8-12Hz. En la tabla 6.3 se muestran los parámetros específicos al utilizar la RID en la señal ECoG.

Tabla 6.3 Parámetros Específicos usando la RID

Rango Frecuencia (j)	Magnitud M_j	Energía E_j	Sensibilidad Ω_j
0-4Hz	1.28E+05	4.4E+05	0.35
4-8Hz	4.3E+05	7.6E+05	0.38
8-12Hz	4.3E+05	10.2E+05	0.6
12-16Hz	5.2E+05	10.7E+05	0.65
16-20Hz	8.25E+05	17.3E+05	0.72
20-24Hz	7.8E+05	16.3E+05	0.8

En el cuadro comparativos de la tabla 6.4 se muestran los parámetros y el número de operaciones involucradas en el cálculo, así como la eficiencia computacional que ofrecen los cuatro métodos utilizados hasta el momento en este trabajo para procesar los segmentos ECoG de 4s.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 6.4 Comparación del Desempeño de las Distribuciones Tiempo-Frecuencia

Método	Parámetros	Número de Operaciones Tiempo de Cómputo	Principal Característica
Espectrograma	Ventana Hamming Ancho L=64 Traslape L-1	$(\#ventanas) * \{(N \log_2 N) \text{sumas} + \{(N \log_2 N) / 2\} \text{multiplicaciones}\}$ 0.27 seg/1.77E06	No permite Soporte Temporal-Frecuencial, Pobre Resolución
Espectrograma Filtro Kalman	$\lambda=0.8, \Delta=0.001$ $\rho=4$	$N^2 * \rho * \{(N \log_2 N) \text{sumas} + (N \log_2 N) / 2 \text{multiplicaciones}\}$ 15.6seg/4.52E10	Alta Resolución. Sin restricción en la Estacionariedad
Distribución Wigner-Ville	Segmento 512 muestras	$N^2 * \{(N \log_2 N) \text{sumas} + (N \log_2 N) / 2 \text{multiplicaciones}\}$ 0.72 seg/1.81E09	Imposible Interpretación por alto número de artefactos $\frac{1}{2} N(N-1)$. No es Local
Distribución Choi-Williams	$\xi = 0.1$, Filtro g(51) Filtro h(128)	$N^2 * M * K * \{(N \log_2 N) \text{sumas} + (N \log_2 N) / 2 \text{multiplicaciones}\}$ 19.17seg/11.82E12	Enfatiza autotérminos con alta resolución
Distribución Reducción de Interferencias	Filtro g(31) Filtro h(63)	$N^2 * M * K * \{(N \log_2 N) \text{sumas} + N \log_2 N\} / 2 \text{multiplicaciones}$ 9.84 seg/3.53 E12	Enfatiza autotérminos con buena resolución

Se ve en la tabla 6.4 que los dos métodos que muestran la definición más alta de las técnicas hasta ahora estudiadas son el espectrograma paramétrico Kalman y la distribución Choi-Williams con una sensibilidad de 0.7. También son los que requieren el mayor gasto computacional de procesamiento, 50.6s y 19.17s respectivamente. Esta característica hace prácticamente imposible aplicar estas técnicas para su uso en el monitoreo clínico en línea, es por ello que en la siguiente sección, vamos a explorar lo que nos puede ofrecer el análisis multi-resolución a través de la transformada *wavelet*, en los atributos de resolución, definición de los eventos de interés y tiempo de procesamiento.

6.3 Análisis Multi-Resolución

La alternativa a la representación Choi-Williams para analizar la señal ECoG epiléptica en línea, propuesta en este trabajo como lo indicamos en la sección 3.3 de la metodología, es el análisis multi-resolución basado en la transformada *wavelet*.

Se obtuvo la representación multi-resolución tiempo-escala empleando varias *wavelet* como funciones base comparando las ventajas que tiene cada una de ellas para representar las espigas epilépticas puntiformes. La transformada continua redundante con la función *Morlet*

$$\psi_M(t) = e^{-t^2/2} \cos(5t), \text{ el análisis ortogonal mediante las funciones Haar}$$

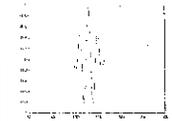
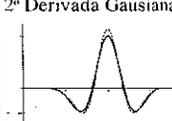
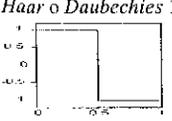
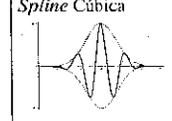
$$\psi(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq k < 1, \text{ Daubechies } \psi_{j,k}(t) \text{ N:2-4-10 } \psi_{j,k}(n) = 2^{-j/2} (2^j n - k), \text{ Mexican Hat} \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

$\psi_{MI}(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$ y la descomposición biortogonales $\psi_n(t)$, a través de la función *spline* con diferentes combinaciones de orden de los filtros análisis/síntesis (1.5,2.4,3.5,6.8), [DAU92].

La razón de la selección se fundamenta en los reportes encontrados en la literatura, [AKA95, DAT97, DAU92, GEV98, GUT99, HAZ97, KAL95, PAR97] acerca de las características que ofrece cada función wavelet y en las pruebas experimentales que a continuación se detallan.

La tabla 6.5 es un cuadro comparativo de las características principales de las funciones wavelet $\psi_M(t)$, $\psi_D(t)$, $\psi_{MI}(t)$, $\psi_B(t)$ empleadas en este trabajo.

Tabla 6.5 Comparación de las Características de Funciones Wavelet [SCH94, DAU92, MIS97]

PROPIEDADES	FUNCION MORLET	FUNCION MEXICAN HAT	FUNCION DAUBECHIES	FUNCION SPLINE
Soporte Compacto	No	Descomposición	Descomposición	Descomposición Reconstrucción
Ortogonalidad	No-Ortogonal	Semi-Ortogonal	Ortogonal	Bi-ortogonal
Simetría	Ninguna	Ninguna	Difícil de alcanzar en algunas funciones	Simetría
Regularidad	No	No	Sí	Sí
Existencia de ϕ	No	No	Sí	Sí
Reconstrucción Exacta	No	No	Sólo en algunas funciones	Sí
Transformada Continua	Sí	Sí	Sí	Sí
Transformada Discreta	No	No	Sí	Sí
Algoritmo Rápido	No	No	Sí	Sí
Expresión Explícita	Sí $\psi_M(t) = e^{-t^2/2} \cos(5t)$	Sí $\psi_{MI}(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$	Sólo para Haar $\psi(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq k < 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$	Sí $\psi(t) = \beta^n(t-k)$
Forma Analítica			Fórmula Compleja	Simple tanto en tiempo como en frecuencia
Característica de la Función	Altamente Oscilatoria	Oscilación Trifásica	Poco Oscilatoria	Más Lóbulos. Útil en la localización tf
Forma de Onda		2ª Derivada Gaussiana 	Haar o Daubechies 1 	Spline Cúbica 

Para cada nivel j de resolución y respecto a cada *wavelet*, se calcula 1) la Amplitud Máxima del Coeficiente *Wavelet* $M_j = \max(C_{j,i})$, tramo) donde $C_{j,i}$ representa los coeficientes *wavelet* al nivel j . 2) la Energía $E_{j,wavelet} = \sum_{i=1}^{ancho} c_{j,i}^2$, considerándose tres duraciones alrededor de M_j : 8puntos,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

12 puntos y 16 puntos que representan 125ms, 93.75ms y 31.25ms respectivamente, el rango de la espiga epileptógena típica.

A continuación en la figura 6.3.2 se muestran las descomposiciones y escalogramas que representan a la señal ECoG de la figura. 6.3.1 y que contiene tres eventos epileptiformes en los tiempos .

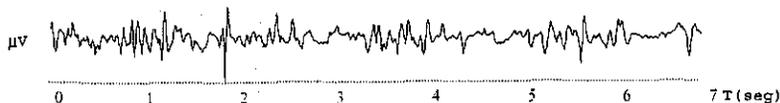
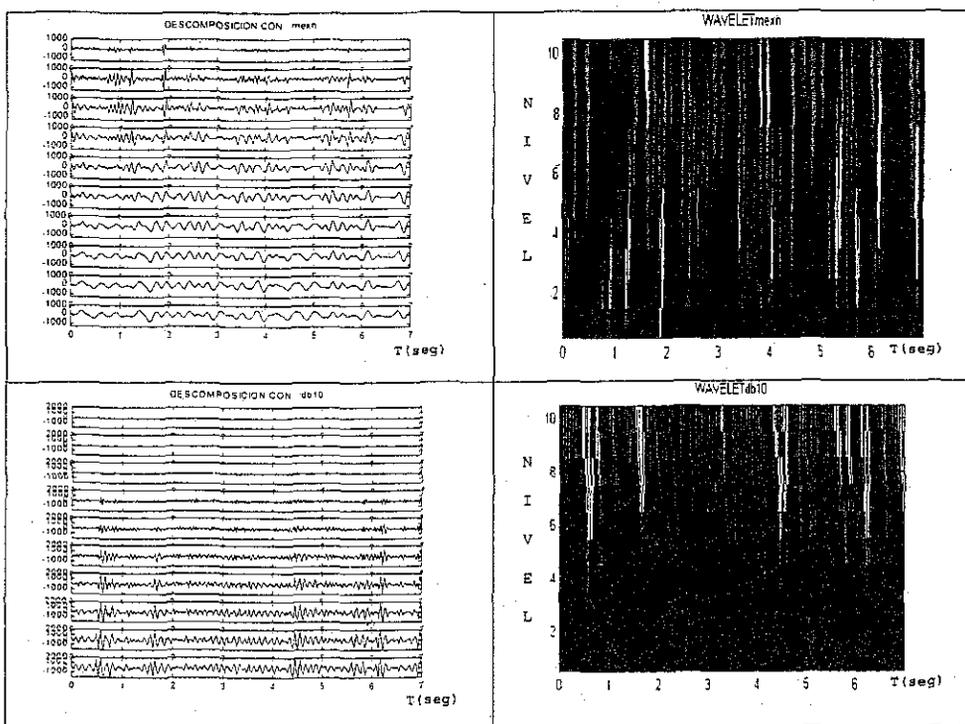


Figura 6.3.1 Señal ECoG con tres espigas epilépticas en 1.2s, 1.8s y 5.6s



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

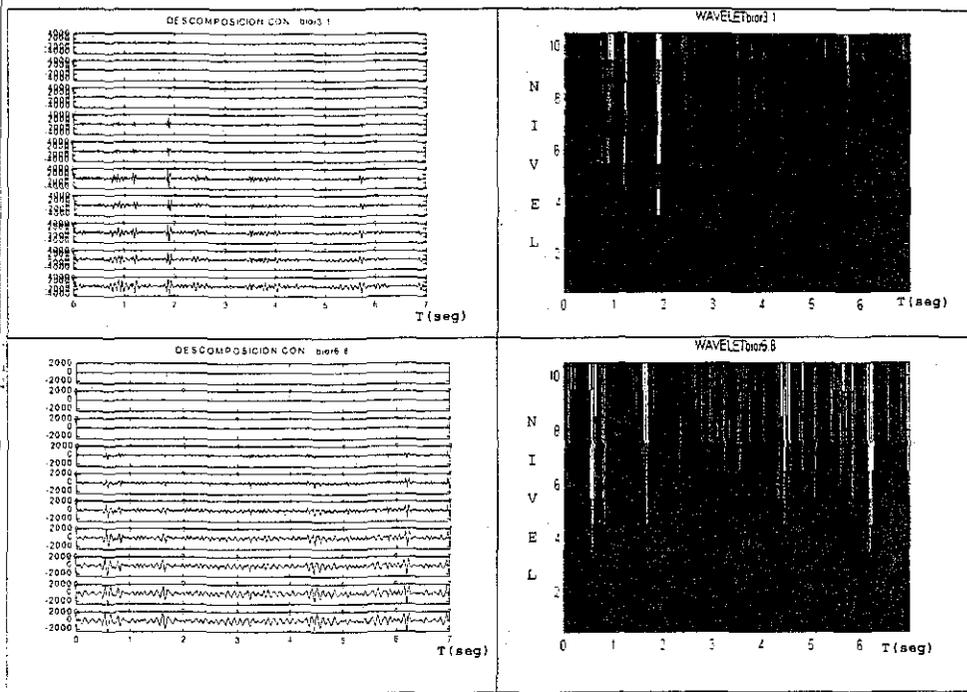


Figura 6.3.2 Lado Izquierdo) Descomposición Multi-Resolución empleando las wavelet Mexican Hat, Daub10, Biortogonal 3.1 y Biortogonal 6.8 para la señal ECoG de la figura 6.3.1. Lado Derecho) muestra el escalograma para cada una de las descomposiciones.

En las Tablas 6.6 y 6.7 se muestra el promedio de la Energía $E_j : E_j = \sum_{n_{medio}} E_{j,n_{medio}}$, la desviación estándar σ_j^2 de la Energía $\sigma^2(E_{j,n_{medio}})$ alrededor de la magnitud máxima M_j encontrada. Estos valores se utilizan en el algoritmo de clasificación como parámetros para la clasificación de espiga epiléptica puntiforme al aplicar las funciones *wavelet Mexican Hat*, *Daubechies 10* y *Biortogonal 3.1-6.8* sobre 140 segmentos de ECoG que representan 3200 minutos y contienen 66 espigas, descomponiendo las señales ECoG hasta 10 niveles.

La duración de 12 puntos (93.75ms) es el ancho que mejor representa las espigas, en la tabla 6.6 se muestran los resultados del cálculo de la energía E_j alrededor de la magnitud M_j considerando esta duración. En la tabla 6.7 se resaltan con gris los niveles que dan la información más significativa según la función *wavelet*.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

**Tabla 6.6 Energía E_j y amplitud máxima M_j hasta 10 niveles de descomposición
Con las funciones *Wavelet Mexican Hat* y *Daubechies10***

A) MEXICAN HAT

NIVEL (j)	M_j	σ_j^2	E_j
1	2.06E+03	1.38E+03	4.63E+03
2	5.18E+03	3.00E+03	9.76E+03
3	5.36E+03	2.86E+03	1.01E+04
4	4.94E+03	2.42E+03	9.11E+03
5	4.56E+03	2.21E+03	8.15E+03
6	4.29E+03	2.29E+03	8.84E+03
7	4.27E+03	2.43E+03	9.96E+03
8	4.72E+03	2.99E+03	1.11E+04
9	4.88E+03	3.44E+03	1.17E+04
10	5.66E+03	3.46E+03	1.27E+04

B) DAUBECHIES 10

NIVEL (j)	M_j	σ_j^2	E_j
1	3.64E+02	2.09E+02	7.59E+02
2	2.12E+02	1.29E+02	5.20E+02
3	1.02E+03	7.70E+02	2.92E+03
4	2.78E+03	1.79E+03	6.11E+03
5	4.02E+03	2.78E+03	9.28E+03
6	5.05E+03	3.00E+03	1.04E+04
7	5.55E+03	3.07E+03	1.14E+04
8	5.23E+03	3.15E+03	1.18E+04
9	5.36E+03	2.56E+03	1.04E+04
10	5.43E+03	2.66E+03	9.97E+03

Como se ve en la tabla 6.6A, la descomposición que usa la función *Mexican Hat* muestra componentes tanto de alta (2-4 niveles) como de baja de frecuencia (8-9niveles), muy adecuada para caracterizar los complejos espiga-onda lenta. Por otro lado, se muestra en las tablas 6.6B y 6.7 que *Daubechies-10* y *Biortogonal 3.1-6.8* permiten limitar la mayor parte de la energía correspondiente a la espiga puntiforme en los niveles 5-7 que corresponden al rango de frecuencia 4-16Hz.

**Tabla 6.7 Energía E_j y amplitud máxima M_j hasta 10 niveles de descomposición
Con las funciones *Biortogonal 3.1* y *6.8***

A) BIORTOGONAL 3.1

NIVEL (j)	M_j	σ_j^2	E_j
1	2.65E+03	1.50E+03	4.91E+03
2	5.84E+02	4.00E+02	1.86E+03
3	1.69E+03	7.46E+02	2.72E+03
4	4.18E+03	2.58E+02	9.96E+03
5	4.62E+03	3.65E+03	1.29E+04
6	1.14E+04	7.91E+03	2.58E+04
7	1.03E+04	7.58E+03	2.21E+04
8	1.37E+04	9.38E+03	2.75E+04
9	1.29E+04	7.77E+03	2.38E+04
10	1.73E+04	9.63E+03	3.11E+04

B) BIORTOGONAL 6.8

NIVEL (j)	M_j	σ_j^2	E_j
1	19.48	19.48	39.65
2	15.75	15.75	57.85
3	81.19	81.19	2.23E+02
4	2.90E+02	2.9E+02	4.62E+02
5	6.70E+02	6.70E+2	7.48E+2
6	1.0E+03	1.0E+03	9.83E+2
7	1.07E+03	1.07E+3	1.24E+3
8	1.05E+03	1.05E+3	1.23E+3
9	9.39E+02	9.39E+2	1.28E+3
10	9.87E+02	9.87E+2	1.28E+3

Por otro lado, al aplicar la función *Morlet* a la señal ECoG se encuentra que los coeficientes de las escalas 6 y 7 de la descomposición *wavelet*, que corresponden al rango de frecuencia 4 a 16Hz, mostraron ser altamente significativos para representar los eventos epilépticos, [GUT99], como los que observamos en la señal ECoG de la figura 6.3.3 que muestra dos espigas



epilépticas puntiforme en los tiempo 0.48s y 2.86s, además de actividad poliespigas entre 2-2.5s y 2.65—5.25s.

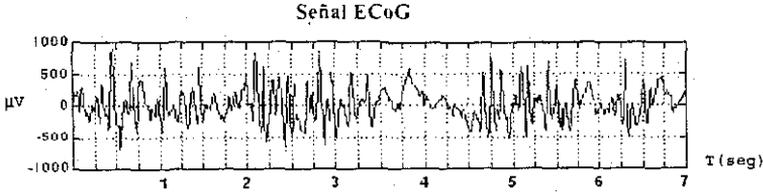


Figura 6.3.3 Señal ECoG con actividad epileptiforme.

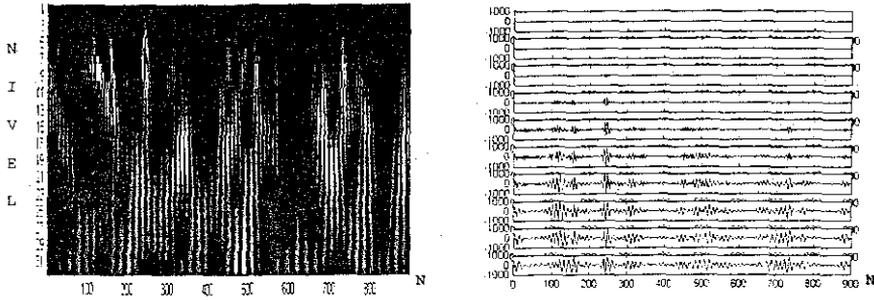


Figura 6.3.4 Derecha) Descomposición Multi-Resolución empleando la wavelet Morlet para la señal que se muestra en la figura 6.3.3. Izquierda) Escalograma.

Una vez que se determinan los niveles que mejor caracterizan los eventos epilépticos para cada función *wavelet*, se calcula la sensibilidad, ver tabla 6.8. Este valor corresponde al número de eventos epilépticos detectados por el algoritmo dividido entre el número total marcado por el especialista.

Tabla 6.8 Comparación de la sensibilidad de las funciones *wavelet* para los niveles que dieron mejor clasificación

WAVELET	NIVEL	FRECUENCIA	SENSIBILIDAD
<i>Daubechies</i> 10	6-8	1 - 4 Hz	0.64
<i>Mexican Hat</i>	2-3	16 - 32 Hz	0.83
Biorotogonal 3.1	5-7	4 - 12 Hz	0.7
Biorotogonal 6.8	5-7	4 - 12 Hz	0.88
<i>Morlet</i>	3-4	12 - 4 Hz	0.87

Según resultados, para la clasificación de espigas, la *wavelet* ortogonal *Daubechies*-10 dio el peor resultado con 0.64 de sensibilidad comparado con la *wavelet* no-ortogonal *Mexican Hat*, *Morlet* y las biorotogonales 3.1 y 6.8.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tanto la descomposición multi-resolución a partir de la función *Morlet* y la biortogonal 6.8 (6° orden de reconstrucción y 8° orden de descomposición) ofrecen la mejor sensibilidad 0.88 y 0.87 respectivamente así como muestran muy buena resolución temporal, con un sesgo de sólo 23ms, como se observa en los escalogramas de la figura 6.3.5.

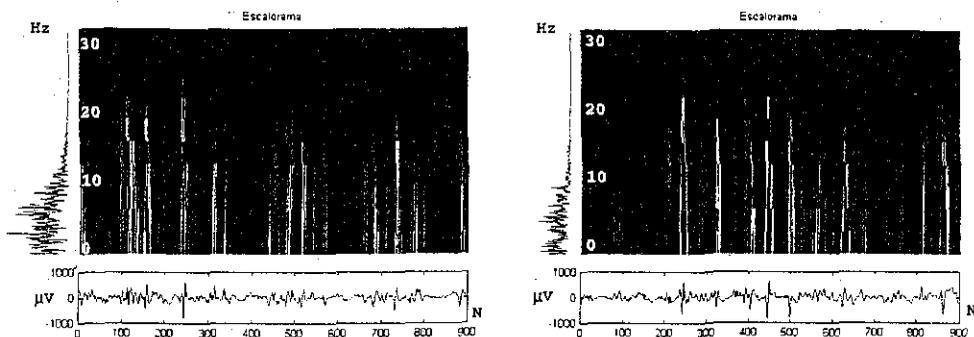


Figura 6.3.5 Escalogramas de registros ECoG utilizando la wavelet biortogonal 6.8

Hasta el momento podemos plantear algunas conclusiones preliminares. Primero la función *wavelet* biortogonal 6.8 ofrece el mejor desempeño para caracterizar la espiga epiléptica puntiforme, segundo la propiedad de alta-oscilación de la función *spline* biortogonal ofrece la mejor localización tiempo-frecuencia y sesgo menor a 25ms, tercero la selección de los niveles 5-7, que corresponden a una frecuencia de 4-12Hz, permiten eliminar gran parte de la señal no epileptiforme, y cuarto esta función presentó la más alta sensibilidad 0.88.

6.3.1 Operador Producto

Para aumentar la sensibilidad de los resultados obtenidos hasta ahora, aplicamos el operador producto entre los coeficientes *wavelet* que mostraron la energía más significativa. Como ya se indicó en la sección 3.2, se propuso el operador producto debido a que éste tiene la propiedad de resaltar las similitudes de amplitud entre dos funciones y disminuyendo sus diferencias, por lo tanto con este operador se consigue la contribución de energía de los niveles significativos mostrados en la tabla 6.7 y que determinaran con mayor sensibilidad el evento epiléptico.

Primeramente este operador se utilizó con la función *Morlet* y se reportó que el algoritmo de detección era más sensible a las variaciones de la señal respecto al tiempo, [GUT99], a incrementos o decrementos en la amplitud y mejoraba la clasificación de las ondas. En la figura 6.3.6 se observa el producto de coeficientes *wavelet* aplicando la función *Morlet* a la descomposición multi-resolución de la señal ECoG de la figura 6.3.3.

TESTIS CON
FALLA DE ORIGEN

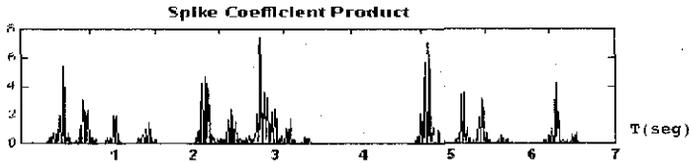


Figura 6.3.6 Producto de Coeficientes wavelet Morlet, de la señal ECoG de la figura 6.3.3.

De los resultados arriba mencionados, el Índice de Clasificación propuesto en la sección 3.2 de la metodología y aplicado en cada una de las funciones *wavelet* I_w , queda definido como:

$$I_w = C_{niveles1}(t,s) * C_{niveles2}(t,s)$$

donde : $C_{niveles}(t,s)$ son los coeficientes de descomposición *wavelet* del plano tiempo – escala de los niveles seleccionados según se indica en la tabla 6.8.

Se concluye hasta el momento, que la mejor representación de las espigas puntiformes se encuentra al cuantificar los coeficientes *wavelet* con una ventana de 93.75ms de duración. El transitorio fue mejor clasificado como Espiga Epiléptica con la *wavelet* Biorotogonal 6.8 con un 63.88% de Verdaderos Positivos, (número de espigas epilépticas en las que la prueba de detección es positiva), 36.12% de Falsos Negativos, 30.62% de Falsos Positivos (número de ondas no epilépticas en las que la prueba de detección es positiva) de los cuales sólo el 5.5% de esas ondas no corresponden a eventos epilépticos tales como, ondas lentas y poliespigas.

En la Tabla 6.9 se indica que la sensibilidad para representar las espigas epilépticas aumenta al utilizar el índice I_w para cada una de las funciones *wavelet*, exceptuando la *Mexican Hat*. En la figura 6.3.7 se muestra la gráfica de detección para la señal ECoG al utilizar los parámetros descritos en el párrafo anterior.

Tabla 6.9 Comparación de la sensibilidad de la funciones *wavelet* con el indicador producto.

WAVELET	NIVELES	SENSIBILIDAD Sin Operador Producto	SENSIBILIDAD Con Operador Producto
<i>Daubechies</i> 10	6-8	0.64	0.74
<i>Mexican Hat</i>	2-3	0.83	0.83
Biorotogonal 3.1	5-7	0.7	0.75
Biorotogonal 6.8	5-7	0.88	0.93
<i>Morlet</i>	3-4	0.87	0.87

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

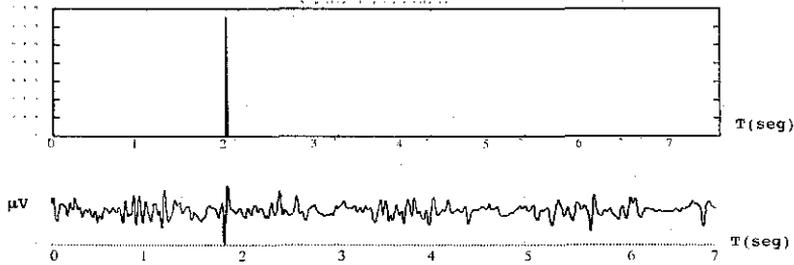


Figura 6.3.7 Detección de la Espiga puntiforme que ocurre en 1.8s

6.4 Wavelet Packet

El análisis *wavelet packet* es una alternativa para mejorar los resultados que se obtienen al aplicar el análisis multi-resolución en la detección y caracterización de eventos epileptiformes. Para este caso se aplica el mismo algoritmo de detección anteriormente propuesto. Se calcula la energía E_j alrededor del valor máximo M_j para cada nodo del árbol binario propio del análisis *wavelet packet*.

En la figura 6.4.1 se observa la descomposición *wavelet packet* de la señal ECoG, al descomponer el árbol binario hasta el nivel 4º y obtener los coeficientes de energía de 30 nodos.

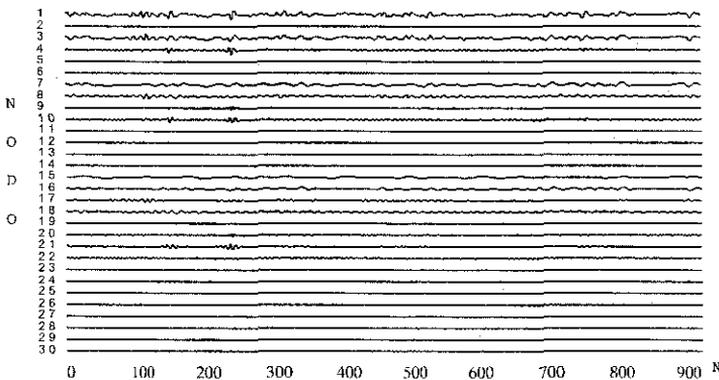


Figura 6.4.1 Descomposición Multi-Resolución, hasta el 4º nivel, de la señal ECoG.

El árbol binario de la figura 6.4.2 muestra la estructura de aproximaciones y detalles hasta el 4º nivel de descomposición *wavelet packet* con la función *wavelet* biortogonal 6.8 donde se indica la mejor ruta de clasificación, flechas oscuras y claras.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

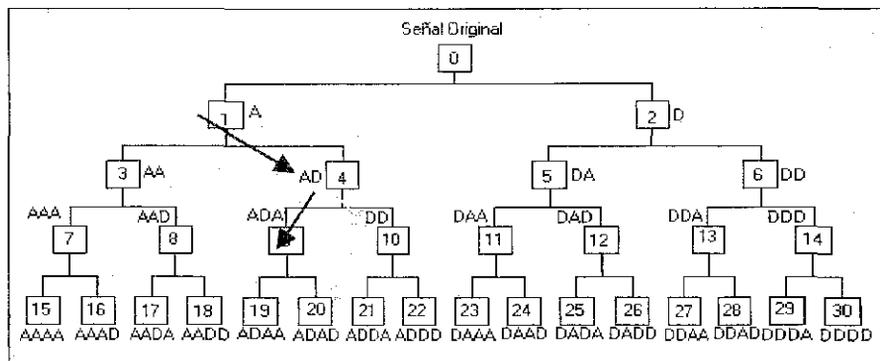


Figura 6.4.2. Estructura Binaria de la descomposición a partir de los coeficientes wavelet packet

Como vemos en la estructura del árbol binario de la figura 6.4.2, la mejor ruta se encuentra en el nodo 4 del 2º nivel y en los nodos 9 y 10 del 4º nivel. Es decir, los componentes más significativos son de alta frecuencia de las aproximaciones de la señal. A continuación en la figura 6.4.3 se muestra la reconstrucción a partir de los coeficientes de los nodos 1, 4 y 9.

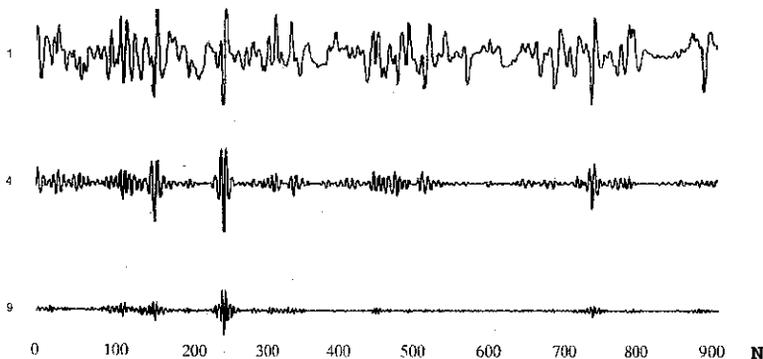


Figura 6.4.3 Reconstrucción a partir de los coeficientes de los nodos 1, 4 y 9

En la tabla 6.10 se indican, al igual que el caso multi-resolución wavelet, los valores encontrados de energía E_j , magnitud máxima M_j , sensibilidad y frecuencia. La sensibilidad más alta 0.93 y 0.94 representa componentes de baja frecuencia –aproximaciones del 1º nivel- de este contenido el más significativo es una parte de alta frecuencia –detalles de 2º nivel nodo 4, 16Hz- y por último también es posible diferenciar que de esta parte la que concierne con las aproximaciones- nodo 9, 3º nivel, 8Hz- contribuye más significativamente a caracterizar la espiga epiléptica.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 6.10 Relación de frecuencia y duración de la función *wavelet packet*, para los nodos encontrados como significativos en la clasificación de eventos epilépticos

NODO	NIVEL (j)	FRECUENCIA (Hz)	ANCHO (msec)	M_j	σ_j^2	E_j	SENSIBILIDAD Ω_j
1(A)	1	32	31.3	2.06E+03	1.38E+03	4.63E+03	0.76
4(AD)	2	16	62.5	5.18E+03	3.07E+03	9.76E+03	0.93
9(ADA)	3	8	12.5	5.36E+03	2.86E+03	1.01E+04	0.94
10(ADD)	3	8	12.5	4.94E+03	2.42E+03	9.11E+03	0.75
21(ADDA)	4	4	6.25	4.56E+03	2.20E+03	8.15E+03	0.7

De la misma manera como se procedió en el análisis *wavelet*, ahora aplicaremos el operador producto en los nodos identificados como significativos 4 y 9, para mejorar la sensibilidad de detección. El índice de clasificación I_{wp} estará determinado por:

$$I_{wp} = C_{\text{nivel1,nodo1}}(t,s) * C_{\text{nivel2,nodo2}}(t,s)$$

donde: $C_{\text{nivel,nodo}}$ son los coeficientes de descomposición para el nodo seleccionado.

El Índice *wavelet packet* I_{wp} se estableció a partir de los criterios de clasificación indicados en el capítulo 3 sección 3.2, así como del cálculo de la contribución de energía de los coeficientes de descomposición en cada nodo seleccionado, es decir los nodos cuatro y nueve. Se evaluó la energía absoluta E_j respecto al intervalo de tiempo que establecimos como relacionado con la espiga epiléptica (70-120ms), y los coeficientes de reconstrucción $d_{k,j}$ que sobrepasaban un umbral M_j fueron preclasificados como "coeficientes epilépticos".

El indicador *packet* mostró el mejor desempeño en la clasificación de espigas epileptiformes a través del nodo 4 del 2º nivel y los coeficientes del nodo 9 del 3º nivel.

$$I_{wp} = C_{2,4}(t,s) * C_{3,9}(t,s)$$

La característica de este índice para resaltar las similitudes y diferencias en las funciones nos ayuda para incrementar la sensibilidad y con ello aumentar la discriminación entre componentes epilépticos y los que no lo son en la señal ECoG. En la tabla 6.11 se muestra este incremento de sensibilidad al utilizar el operador producto.

Tabla 6.11 Comparación de la sensibilidad *wavelet packet* con el indicador producto

NODO	NIVEL	SENSIBILIDAD
1	1	0.76
4	2	0.93
9	3	0.94
Operador Producto Con los Nodos 4 y 9	2-3	0.987

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

En la figura 6.4.4 se muestra el efecto del índice I_{wp} para distinguir espigas epilépticas puntiformes que con el análisis *wavelet packet* "normal" no es posible detectar, así las tres espigas que se encuentran en el segmento de la señal ECoG y que ocurren en $N=150$, 240 y 740 , son detectadas.

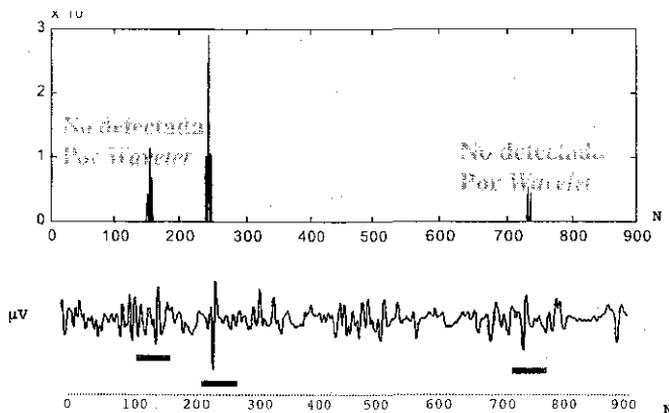


Figure 6.4.4. Detección de espigas puntiformes al aplicar la biortogonal 6.8 *wavelet packet* y el operador producto

Los parámetros de referencia con base al análisis retrospectivo de las señales reales ECoG del conjunto de entrenamiento que mejores resultados ofrecieron son análisis *wavelet packet* usando la función biortogonal 6.8, umbrales de amplitud $\Gamma=5.36E+03$ y Energía $\Xi=1.01E+04$, sobre un intervalo de análisis de 93.75ms. Los nodos más significativos 4 y 9 de los niveles de descomposición 2 y 3 respectivamente y que corresponden a la banda de frecuencia 8-16Hz. Los verdaderos positivos se incrementaron hasta el 87.43% con un 12.57% de no detecciones y 8.52% de falsos positivos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

7.1 Validación

En la presente sección se describen tres propuestas para la validación de los resultados presentados, aplicando el algoritmo de detección en conjunto con la técnica de descomposición *wavelet*. La primera de ellas es la evaluación de la distorsión que pueden sufrir las señales originales ECoG al descomponerlas mediante las *wavelet* esto se lleva a cabo mediante la síntesis y el cálculo del porcentaje de distorsión residual, la siguiente evaluación basada en el análisis ROC permitirá validar la selección del umbral seleccionado en la discriminación de espiga epiléptica puntiforme y por último se seleccionó un conjunto de señales EEG para verificar el desempeño del algoritmo propuesto en la caracterización de la espiga epiléptica.

7.1.1 Distorsión de las señales

Para validar los resultados obtenidos en esta investigación, se llevo a cabo como primer paso la síntesis de los 66 registros ECoG y las 140 espigas epilépticas puntiformes utilizando las funciones *wavelet Daubechies 10*, *Morlet* y *Biorotogonal 3.1* y *6.8*. El porcentaje de distorsión

residual se define mediante la siguiente expresión, [PRA94]:
$$DR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [s(i) - r(i)]^2}{\sum_{i=1}^N s(i)^2}} \times 100\%$$

donde $s(i)$ representa la señal original y $r(i)$ es la señal reconstruida. En la tabla 7.1 es muestra la distorsión promedio que se obtiene al realizar la síntesis con cada una de las funciones *wavelet* propuestas.

Tabla 7.1 Comparación de la sensibilidad *wavelet packet* con el indicador producto

<i>Wavelet</i>	DR Señal ECoG	DR Espiga Patrón
<i>Daubechies 10</i>	1.27E-11±0.056%	1.37E-11±0.041%
<i>Morlet</i>	2.25E-12±0.054%	2.51E-12±0.026%
Biorotogonal 3.1	7.39E-13±0.076%	8.09E-13±0.052%
Biorotogonal 6.8	1.03E-15±0.063%	9.38E-16±0.049%

Como se observa en las figuras 7.1.1 y 7.1.2 la síntesis tanto de la señal ECoG como del patrón epiléptico con las funciones *wavelet* seleccionadas es casi idéntica a la original con una distorsión residual casi despreciable. Sin embargo, se corrobora que la DR más pequeña se obtuvo con la biorotogonal 6.8 1.03E-15 para la señal ECoG y 9.38E-16 para el patrón epiléptico.

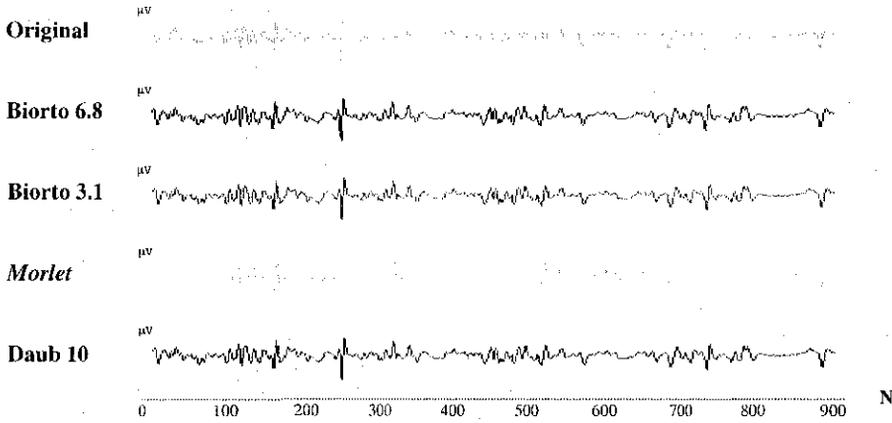


Figura 7.1.1. Síntesis de la señal ECoG

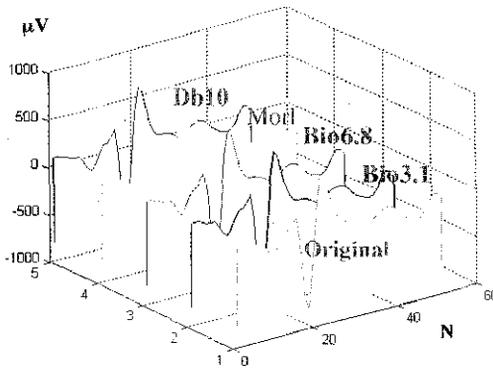


Figura 7.1.2. Síntesis de la señal espiga patrón

7.1.2 Umbral

Según se indicó en la sección 3.2.1, la curva ROC nos permite mostrar el compromiso entre la sensibilidad y la especificidad y con ello es posible determinar el umbral de energía óptimo para obtener un detector con el mejor desempeño posible. En las tablas 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5 y en la figura 7.1.3 se muestran los resultados al aplicar las relaciones 3.2.7 y 3.2.8 para los casos de *wavelet packet* producto, *wavelet packet*, *wavelet* producto y *wavelet* respectivamente.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Tabla 7.2 Parámetros considerando la Wavelet Packet Producto

Umbral Energía	Detección+	No-Detección	Falsa Alarma	P_{FA}	P_D	C_M/C_F	LR
$\times 10^4$	Verdadero Positivo	Falso Negativo	Falso Positivo	Indice Falsos +	Indice Verdaderos+	P_{FA}/P_M	
2	121	19	6	0.1	0.86	0.7	8.64
1.5	125	15	11	0.18	0.89	1.6	4.87
1	131	9	14	0.23	0.94	3.8	4.01
0.5	134	6	12	0.2	0.96	5	4.78
0.1	137	3	18	0.3	0.98	15	3.26

Tabla 7.3 Parámetros considerando la Wavelet Packet

Umbral Energía	Detección+	No-Detección	Falsa Alarma	P_{FA}	P_D	C_M/C_F	LR
$\times 10^3$	Verdadero Positivo	Falso Negativo	Falso Positivo	Indice Falsos +	Indice Verdaderos+	P_{FA}/P_M	
6	62	78	7	0.12	0.44	0.2	3.79
5	75	65	13	0.22	0.54	0.47	2.47
4	98	42	11	0.18	0.7	0.6	3.81
3	115	25	15	0.25	0.82	1.38	3.28
2	123	17	12	0.2	0.88	1.66	4.39

Tabla 7.4 Parámetros considerando la Wavelet Producto

Umbral Energía	Detección+	No-Detección	Falsa Alarma	P_{FA}	P_D	C_M/C_F	LR
$\times 10^4$	Verdadero Positivo	Falso Negativo	Falso Positivo	Indice Falsos +	Indice Verdaderos+	P_{FA}/P_M	
1.2	39	101	12	0.2	0.28	0.27	1.39
1.0	56	84	17	0.28	0.4	0.46	1.41
0.8	78	62	22	0.37	0.56	0.84	1.52
0.6	101	39	25	0.42	0.72	1.5	1.73
0.4	126	14	19	0.32	0.9	3.2	2.84

Tabla 7.5 Parámetros considerando la Wavelet

Umbral Energía	Detección+	No-Detección	Falsa Alarma	P_{FA}	P_D	C_M/C_F	LR
$\times 10^3$	Verdadero Positivo	Falso Negativo	Falso Positivo	Indice Falsos +	Indice Verdaderos+	P_{FA}/P_M	
1.2	50	90	10	0.17	0.36	0.26	2.14
1.0	71	69	12	0.2	0.51	0.41	2.53
0.8	99	41	35	0.58	0.71	2	1.21
0.6	116	24	24	0.4	0.83	2.35	2.07
0.4	120	20	39	0.65	0.86	4.64	1.32

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Como mencionamos arriba la curva ROC con mejor desempeño se obtuvo mediante la técnica wp^* . En la figura 7.1.4 se muestra esta curva ROC- wp^* intersectada en cada umbral η_m con las rectas de pendiente negativa.

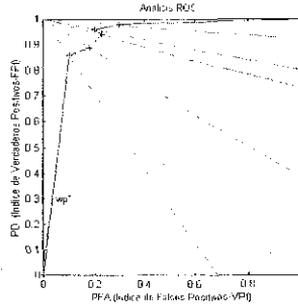


Figura 7.1.4. Determinación del punto de operación mínima mediante el Análisis ROC

Una razón C_M/C_{FA} mayor a uno satisface adecuadamente el desempeño de un detector, por lo tanto, el lugar de operación óptimo para trabajar respecto a la curva ROC- wp^* de acuerdo a esta restricción y al mínimo de falsas alarmas que pretendemos tolerar con nuestro algoritmo de detección serán dos umbrales $\eta_3=1.0E+04$ y $\eta_4=0.5E+04$ de energía que representan $C_M/C_{FA}=3.8$ (FA=14) y $C_M/C_{FA}=5$ (FA=12) respectivamente.

7.1.3 Conjunto de Validación

Por último se validaron los parámetros discutidos en el capítulo anterior tanto para el análisis multi-resolución como para el *wavelet packet*.

Estos parámetros se aplicaron a un conjunto de validación formado por 30 espigas epilépticas puntiformes de señales EEG, ésta tiene una relación señal ruido más pequeña a la del ECoG. En la figura 7.1.5 se muestran algunas detecciones de espiga epiléptica puntiforme al aplicar el procedimiento descrito en este trabajo en señales EEG del conjunto de validación.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

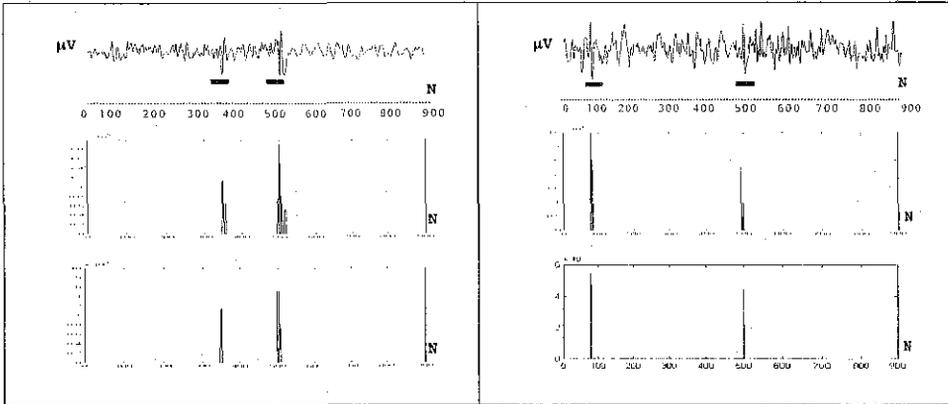


Figura 7.1.5 Detecciones de Espigas Epilépticas Puntiformes

En las tablas 7.6 y 7.7 se comparan los resultados al aplicar el algoritmo de detección de espiga epiléptica con el análisis multi-resolución y las *wavelet packet* tanto a los conjuntos de entrenamiento y validación.

Se aprecia para ambos casos que el algoritmo es capaz de obtener un alto porcentaje de detecciones 83.67% análisis multi-resolución y 90.33% con las *wavelet packet*. Hubo un incremento significativo en los falsos positivos debidos a eventos no epilépticos de 30.62% para el primer caso y 18.52% para el segundo caso.

Tabla 7.6 Comparación entre los Conjuntos de Entrenamiento y Validación
Análisis Multi-Resolución

	140 Espigas ECoG Conjunto de Entrenamiento	30 Espigas EEG Conjunto de Validación
Función <i>Wavelet</i>	Biortogonal 6.8	Biortogonal 6.8
Verdaderos Positivos	63.88% (89)	83.67% (25)
Falsos Positivos Epilépticos	27.76% (38)	2.5% (1)
Falsos Positivos No Epilépticos	5.5% (7)	30.62% (9)
Falsos Negativos Espiga Puntiforme	36.12% (51)	16.33% (5)
Sensibilidad de Espiga Puntiforme	0.63Op*	0.83Op*
Sensibilidad de Eventos Epilépticos	0.92Op*	0.86Op*
Niveles Significativos	5 - 7	5 - 7
Banda de Frecuencia	4 - 12Hz	4 - 12Hz
Umbral de Amplitud I	9.65E+02	9.65E+02
Umbral de Energía Ξ	1.15E+03	1.15E+03
Intervalo de Análisis	93.75ms	93.75ms

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

**Tabla 7.7 Comparación entre los Conjuntos de Entrenamiento y Validación
Wavelet Packet**

	140 Espigas ECoG Conjunto de Entrenamiento	30 Espigas EEG Conjunto de Validación
Función <i>Wavelet</i>	Biorotogonal 6.8	Biorotogonal 6.8
Verdaderos Positivos	87.43% (125)	90.33% (27)
Falsos Positivos Epilépticos	11.25% (14)	5.56% (2)
Falsos Positivos No Epilépticos	6.25% (9)	18.52% (6)
Falsos Negativos Espiga Puntiforme	6.66% (9)	9.67% (3)
Sensibilidad de Espiga Puntiforme	0.87Op*	0.90Op*
Sensibilidad de Eventos Epilépticos	0.987Op*	0.95Op*
Niveles Significativos	2 y 3	2 y 3
Nodos	4 y 9	4 y 9
Banda de Frecuencia	8-16Hz	8-16Hz
Umbral de Amplitud Γ	5.36E+03	5.36E+03
Umbral de Energía Ξ	1.01E+04	1.01E+04
Intervalo de Análisis	93.75ms	93.75ms

7.2 Discusión

El propósito de este trabajo fue estudiar diferentes técnicas de procesamiento para el análisis de señales no-estacionarias y con ello proponer la mejor técnica que nos permita clasificar espigas epilépticas de forma confiable y rápida para proponer parámetros de análisis en línea.

En este estudio hemos visto que las distribuciones tiempo-frecuencia ofrecen información con la cual es posible distinguir las espigas epilépticas en la señal EEG. La Distribución Choi-Williams con su parámetro $\zeta=0.1$ es una de las TRFs que mejor evidencia estos transitorios sin embargo, como ya vimos en la sección 6.2, a causa de su gasto computacional como se indica en la tabla 6.4 no es recomendable para un análisis en línea.

Como se mencionó en la sección 5.2 la transformada *wavelet* se utilizó para extraer varias características del ECoG, ya que esta técnica es en esencia un método de correlación. El análisis multiresolución *wavelet* mostró los mejores resultados respecto a su exactitud y rapidez, en comparación con las distribuciones tiempo-frecuencia, según el algoritmo de clasificación de ondas epilépticas definido en la sección 3.2. Se comparó el funcionamiento de varias *wavelets* en una descomposición multi-resolución de la señal ECoG hasta el 10º nivel, siendo la biortogonal 6.8 la que mejor coincide en forma y característica frecuencial a la espiga.

El análisis multi-resolución a través de la transformada *wavelet* y la función biortogonal mostró alto potencial para caracterizar las espigas epileptiformes en línea ya que la función *spline* base utilizada tiene una forma analítica explícita y simple tanto en tiempo como en frecuencia, el polinomio *spline* es lo suficientemente flexible para aproximar una *wavelet* a cualquier forma deseada, su forma simple permite manipularla fácilmente, la característica de alta oscilación de la *wavelet B-spline* cúbica es una propiedad muy adecuada para localizar eventos bien específicos en tiempo y bien determinados en frecuencia, es posible su implementación numérica con algoritmos rápidos como el piramidal que sólo requiere $2N$ operaciones.

Al aplicar el algoritmo descrito en la metodología con la técnica de análisis multi-resolución se encontró 63.88% de verdaderos positivos y del 33.26% de los falsos positivos sólo el 5.5% se debe principalmente a eventos no epilépticos, tales como ruido en las bandas theta y alfa.

El operador producto propuesto en este trabajo en conjunto con la energía de los coeficientes *wavelet* de los niveles seleccionados, efectivamente aumento la sensibilidad de 0.63 a 0.87 al aplicarlo entre los coeficientes *wavelet* de los niveles $j=5,6,7$ demostrando ser altamente significativo para los eventos epilépticos considerando su incidencia y duración.

Por otro lado, el porcentaje de verdaderos positivos se incremento hasta 87.43% al evaluar el algoritmo propuesto con la técnica *wavelet packet* y la selectividad y sensibilidad se aumentaron con sólo 6.25% de falsos positivos y 6.66% de no detecciones de espiga puntiforme. Se encontró que los nodos más significativos de la estructura de árbol adaptable del análisis *wavelet packet*, son el 4º y 10º del 2º y 3º nivel respectivamente del árbol y que correspondían a las bandas de frecuencia de la espiga epiléptica puntiforme y con ello al aplicar el operador producto la sensibilidad aumento hasta 0.98

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como resultado de este trabajo, encontramos muy conveniente fusionar información proveniente de diferentes factores para establecer un algoritmo de detección de espigas epilépticas con mayor sensibilidad a las variaciones de la señal ECoG: 1) análisis multi-resolución con la *wavelet packet* como mejor representación, 2) selección de un intervalo de medición de amplitud y energía, 3) índice o producto de los coeficientes de *wavelet packet* para incrementar las similitudes y disminuir las diferencias entre los coeficientes a multiplicar, 4) establecer el umbral de energía.

La técnica *wavelet packet* permite simular en tiempo real, el análisis que el electroencefalografista lleva a cabo para determinar si una espiga presente en la señal ECoG es posible clasificarla como espiga epiléptica puntiforme al considerar el intervalo de análisis, eliminación o filtrado de las ondas no significativas y correlacionando los eventos importantes entre los canales adyacentes.

La mayoría de los falsos positivos (17.5%) se deben a grafocientos epiléptiformes tales como, poliespigas y complejos punta-onda.

Los resultados presentados en este trabajo sugieren la capacidad de la función de energía en el análisis *wavelet* multi-resolución para la localización temporal de fenómenos no estacionarios en la señal EEG. Los principales hechos del análisis son:

- 1) Diferentes tipos de eventos epileptógenos tienen diferente localización frecuencial, y corresponden a diferentes niveles en el esquema multi-resolución.
- 2) La información completa contenida en la señal ECoG se puede encontrar en ocho niveles de resolución mediante la transformada *wavelet*, de hecho, de esos niveles se obtiene la perfecta reconstrucción. Este hecho demuestra que no hay pérdida de información y con un adecuado análisis de esta información es posible detectar los transitorios epilépticos.
- 3) El tratamiento de energía explicado en "Algoritmo de Detección" permite la detección de características de eventos epilépticos puntiformes.
- 4) Un importante problema a ser tratado en cada caso es establecer el umbral de amplitud Γ .

Los ejemplos de registros EEG epilépticos, conjunto de validación, dados en el presente trabajo, muestran que el procedimiento de análisis basado en las *wavelet packet* descrito arriba dan información cuantitativa relacionada con los cambios dinámicos lo cual ocurre antes y durante la crisis. Descripciones como mecanismos patológicos, involucrados en la propagación de crisis focales, encontradas con técnicas de estimación espectral FFT tendrán que ser reevaluadas, debido al "esparcimiento" que sufren los cambios dinámicos de los componentes epilépticos.

Las consideraciones anteriormente planteadas sugieren que el algoritmo basado en el procesamiento *wavelet packet* y el operador producto aplicado a los coeficientes de los niveles de energía seleccionados puede ser incorporado en el análisis cuantitativo automático de la señal ECoG para abordar el problema de extraer características que contienen información relevante de las crisis epilépticas y ayudar en la detección del foco epiléptico y su ruta de propagación durante las cirugías de epilepsia y con ello ayudar a mejorar las condiciones en la calidad de vida del paciente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

7.3 Perspectivas

Como lo mencionamos al inicio de este trabajo, uno de los principales objetivos para localizar eventos epileptiformes en las señales EEG y ECoG es su aplicación en la clínica médica en especial en el neuromonitoreo de aquellos pacientes que son sometidos a procedimientos neuroquirúrgicos o registros EEG/ECoG de larga duración.

Como se observa en la figura 7.3.1 durante el procedimiento neuroquirúrgico de epilepsia, el cirujano requerirá un sistema que le permita: 1) observar el lugar sobre la zona cerebral donde se coloca la malla de electrodos subdurales, 2) adquirir y mostrar la señal ECoG, y 3) el procesamiento visual en línea.

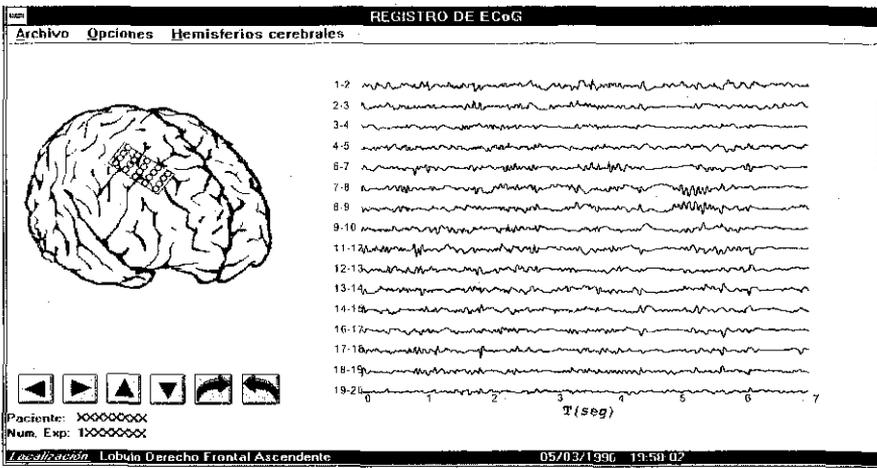


Figura 7.3.1 Señal ECoG y su localización sobre la corteza cerebral

Ahora respecto al punto 3) aplicamos el algoritmo descrito en este trabajo y el análisis *wavelet packet* nos permite encontrar el foco epileptico con una sensibilidad del 0.98 y tiempo de análisis de 3.13seg para 16 canales, si con la información así procesada elaboramos un mapa de energía entonces se logra esquematizar la ruta de propagación del foco epileptico.

El lado derecho de la figura 7.3.2 muestra una Mapa Rectangular ECoG el cual esquematiza claramente la ocurrencia de la espiga epileptica, indicada por la flecha del lado izquierdo de la figura, a la derecha esta espiga se representa claramente por la zona roja (zona más oscura) que corresponde a los electrodos 17-18 y su propagación hacia los electrodos 14-15.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

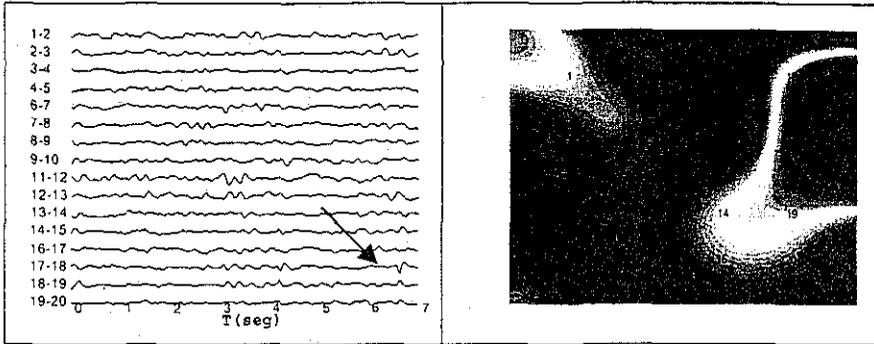


Figura 7.3.2. La señal ECoG, izquierda, muestra una espiga epiléptica puntiforme en los electrodos 17-18. Derecha, Mapeo Rectangular ECoG.

Una vez que el electrofisiólogo detecta visualmente espigas epilépticas, observa si éstas aparecen en canales adyacentes, como se muestra en la figura 7.3.3 la aparición de espigas en tres épocas consecutivas correspondientes a los electrodos 17-18 del canal 14. Esta condición permite al especialista determinar que la espiga corresponde a un evento epiléptico.

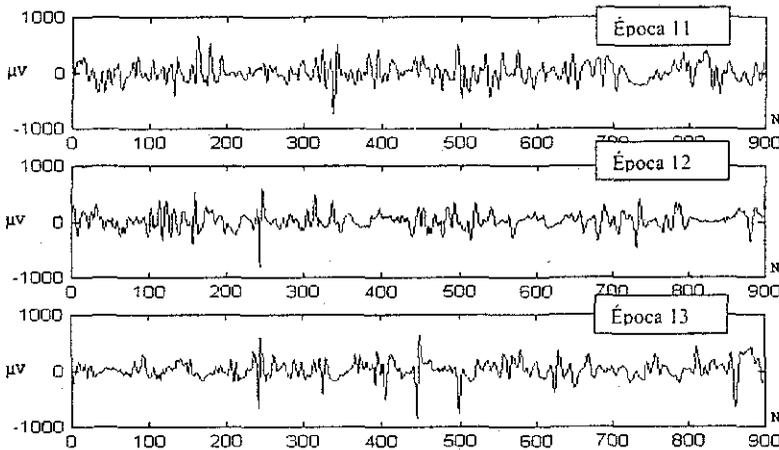


Figura 7.3.3. Señales ECoG de tres épocas consecutivas con Espigas epilépticas puntiforme.

Si ahora aplicamos nuestro algoritmo de detección al caso mencionado arriba obtenemos la grafica de detección de espigas epilépticas de la figura 7.3.4 donde se presentan las espigas epilépticas puntiformes correspondientes al mismo canal de tres épocas consecutivas. La espiga azul ($n=300$) corresponde a la época 11, las espigas rojas ($n=130,240,710$) corresponden a la época 12 y las espigas verdes ($n=240,430$) corresponden a la época 13.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

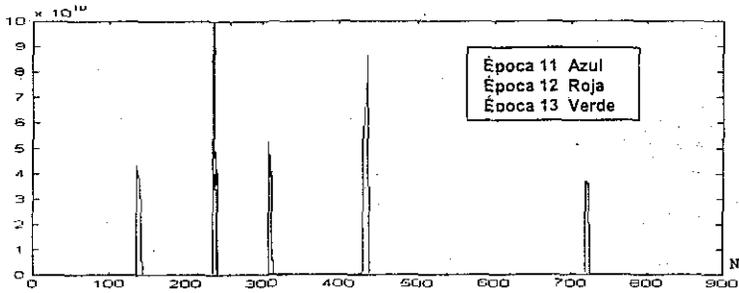


Figura 7.3.4. Detección de Espigas epilépticas puntiforme.

Por último mencionaremos que otra de las condiciones que tiene el electrofisiólogo en el análisis EEG, es determinar si las espigas detectadas se correlacionan entre los canales adyacentes. Por ejemplo en la parte superior de la figura 7.3.5 se muestran dos canales adyacentes correspondientes a la misma época. Si ahora correlacionamos los resultados que se obtienen al aplicar el algoritmo *wavelet packet* a cada canal independiente se obtiene la gráfica de correlación entre canales que se muestra en la parte inferior de la figura 7.3.5.

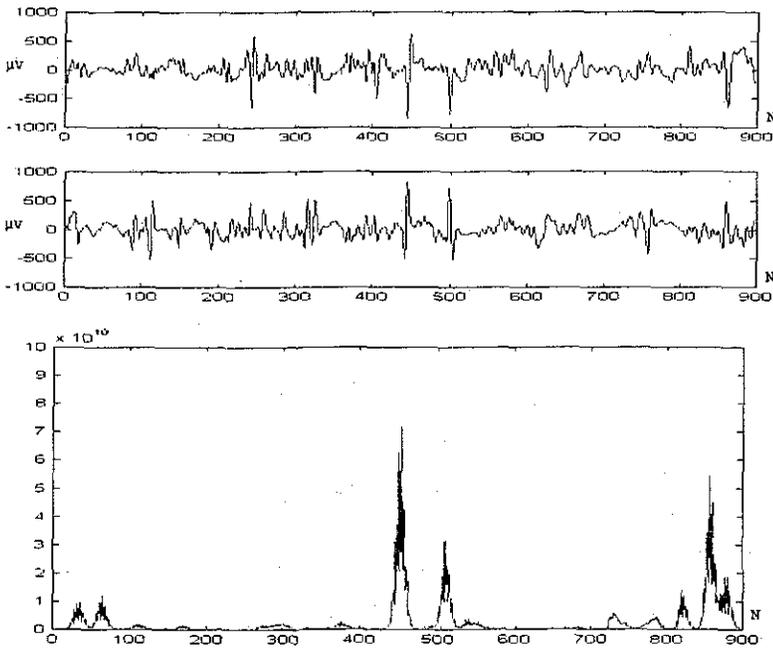


Figura 7.3.5. Arriba) Señales ECoG de dos canales consecutivos. Abajo) Correlación

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Finalmente, el algoritmo *wavelet packet* en conjunto con el producto de la energía de los niveles significativos presentado en este trabajo ofrece importantes resultados de eficiencia y rapidez para ofrecer al neurocirujano una herramienta de aplicación clínica confiable que le permita tomar decisiones quirúrgicas durante el transoperatorio. Asimismo, vemos en esta última sección que este algoritmo también se puede aplicar en el mapeo del foco epiléptico, la detección de inversión de espigas y la selección con alta sensibilidad 0.98 de segmentos ECoG con eventos epilépticos.

1. [ADA93] Adams R, Victor M. Principles of Neurology. Mc Graw-Hill, 1993.
2. [AJM84] Ajmone-Marsan C. Electroencephalographic studies in seizure disorders: Additional considerations. *J Clin Neurophysiol.* 1984, 1:143-157.
3. [AKA95] Akay M. Wavelets in Biomedical Engineering. *Annals of Biomedical Engineering.* 1995, vol. 23:531-542.
4. [AKR96] Akrawi W, Drummond J, y cols. "A Comparison of the Electrophysiologic Characteristics of EEG Burst-Suppression as Produced by Isoflurane, Thiopental, Etomidate, and Propofol" *J Neurosurgical Anesth,* 1996 Vol. 8, No. 1, pp.40-46.
5. [ALA95] Alarcon G, Binnie CD, Elwers RD, Polkey CE. Power spectrum and intracranial EEG patterns at seizure onset in partial epilepsy. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol.* 1995, 94(5):326:237.
6. [ALC98] Alcántara R, Gutiérrez J, Alvarez L, Igartua L. Métodos Paramétricos para la Caracterización de Patrones Epilépticos. *Memorias 1º Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica,* 1998.
7. [ALP86] Alcántara R, Prado J, Gueguen C. Fixed-Point Implementation of the Fast Kalman Algorithm. Using a TMS32010 microprocessor. *Signal Processing III: Theories and Applications I.T,* Young et al. Editors. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland) S.24 EURASIP, september 1986, pp. 1335-1338.
8. [AME85] American Electroencephalographic Society. Guidelines for long-term neurodiagnostic monitoring in epilepsy. *J Clin Neurophysiol.* 1985; 2:419-452.
9. [APA01] Aparicio G, Casacuberta F. Application of Artificial Neural Networks to Detection of Epilepsy in Rats. Abstracts of Fifth Conference of the European Society for Engineering and Medicine. 1999, pp. 167-168.
10. [ARG98] Argoud F, Azevedo F, Neto M. SIDAPE: Uma Proposta para detecção e classificação de padrões epileptiformes em EEG. *Memorias del I Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica,* 1998, PDS17 pp. 155-158.
11. [BAS92] Basseville M, Flandrin P, Martin N. Méthodes temps-fréquence. *Traitement du signal.* 1992, 9:79-112.
12. [BIC79] Bickford RG, y Berger L. Automation of clinical electroencephalography. Raven Press, New York, 1979 pp. 55-64.
13. [BLA95] Blanco S, Quiroga Q, et al. Time frequency analysis of electroencephalogram series. *Phys. Rev E.* 1995 vol. 51 no 3 pp. 2624-2631.
14. [BOA87] Boashash B, Black P. An efficient real-time implementation of the Wigner-Ville distribution. In *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing,* 1987 vol. ASSP 35, pp.1611-1618.
15. [BOA90] Boashash B. Time-Frequency Signal Analysis, Methods and Applications. Longman Cheshire, 1990 Cap. 3 pp. 75-97, Cap.19 pp. 418-517.
16. [BR174] Brigham E. The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall, Inc, 1974.
17. [BRO95] Brozino J. Principles of Electroencephalography. En: *The Biomedical Engineering Handbook.* IEEE PRESS. 1995, Cap 15:201-212.
18. [BRU96] Bruce A, Donoho D, and Gao H. Wavelet analysis. *IEEE Spectrum.* October 1996, pp. 26-35.

19. [CAR01] Cárdenas J, Lorenzo J, Rodríguez E. Algoritmo basado en *wavelet packets* para la compresión de señales electroencefalográficas. Memorias del II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica. 2001.
20. [CCT89] Commission on Classification and Terminology of the International League Against Epilepsy. Proposal for Revised Classification of Epilepsies and Epileptic Syndromes. *Epilepsy*. 1989, 30(4):389-399.
21. [CHA74] Chatrian E, Bergamini L, y cols. A glosary of terms most commonly used by clinical electroencephalographs. *Electroenceph Clin Neurophysiol*. 1974, 37:538-549.
22. [CHO89] Choi H. y Williams W. Improved Timé-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1989, vol. 37, no., 6, pp. 862-871.
23. [CHU92] Chui C. *An Introduction Wavelets*. Academic Press, 1992.
24. [CLA80] Claasen T, Mecklenbrauker W. The Wigner Distribution – A tool for Time-Frequency Signal Analysis –Part I : Continuos Time Signals. *Philips J. Res* 1980, (35):217-250.
25. [CLB80] Claasen T, Mecklenbrauker W. The Wigner Distribution – A tool for Time-Frequency Signal Analysis –Part II : Discrete Time Signals. *Philips J. Res* 1980, (35):276-300.
26. [COD92] Cody M. The Fast Wavelet Transform, *Dr. Dobb's Journal*. 1992, pp.16-101.
27. [COH89] Cohen L. Time-Frequency Distribution – A Review. *Proceedings of the IEEE*, July 1989 vol. 77(7):941-981.
28. [COH95] Cohen L. *Time Frequency Analysis*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995 pp. 93-110.
29. [COR96] Corlay M. Estudio Comparativo e Implementación de Métodos Tiempo-Frecuencia. Tesis de Maestría. DEPEFI-UNAM, México 1996.
30. [COU87] Couch II L. *Digital and Analog Communication Systems*. Macmillan Publishing Company, 1987.
31. [DAH97] Dahmen W, Kurdila A, Oswald P. *Multiscale Wavelet Methods*. Academic Press, 1997.
32. [DAT97] D'Attellis C, Isaacson S, Sirne R. Detection of Epileptic Events in Electroencephalograms Using Wavelet Análisis. *Annals of Biomedical Engineering*, 1997, 25:286-293.
33. [DAU90] Daubechies I. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Análisis. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1990, 36(5):961-1005.
34. [DAU92] Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia PA. 1992.
35. [DAW97] Dawson-Saunders B y Trapp RG. *Bioestadística Médica*, Ed. Manual Moderno, 2ª edición, 1997.
36. [DIN93] Dingle A, Jones R, Carrol GJ, Frigh R. A Multistage System to Detect Epileptiform Activity in the EEG. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1993 40:1260-1267.
37. [DUF86] Duffy F. "Topographic mapping of brain electrical activity". Butterworths, Boston y London 1986.
38. [ELL80] Elliot D. Rammamohan Rao. *Fast Transform: Algorithms, Analyses, Applications*. Academic Press, 1980.
39. [ESC97] Escobar L. Algoritmos de Filtrado Adaptable: Implementación, Evaluación, Comparación y Aplicaciones en Telecomunicaciones. Tesis de Maestría UNAM, 1997.
40. [FAL73] Falconer, M. A. Reversibility by temporal lobe resection of the behavioral abnormalities of temporal-lobe epilepsy. *New Engl. J. Med.* 289:451-455.

41. [FAU92] Faught E, Kuzniecky R, Hurst D. "Ictal EEG wave forms from epidural electrodes predictive of seizure control after temporal lobectomy. *Electroenceph Clin Neurophysiol.* 1992, 83:229-235.
42. [FLA93] Flandrin P. *Temps-Fréquence.* Hermès, Paris, 1993.
43. [FRA58] Franklin P. *An introduction to Fourier Methods and the Laplace Transformation.* Dover Publications, Inc. 1958.
44. [GAB92] Gabor AJ, y Seyal M. Automated interictal EEG spike detection using artificial neural networks. *Electroenceph and Clin Neurophysiol.* 1992; (83):271-280.
45. [GAT92] Gath I, Feuerstein C, y cols. On the tracking of Rapid Dynamic Changes in Seizure EEG. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering.* 1992, 39(9):952-958.
46. [GEV98] Geva A, Kerem D. Forecasting Generalized Epileptic Seizures from the EEG Signal by Wavelet Analysis and Dynamic Unsupervised Fuzzy Clustering. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 1998, 45(10):1205-1216.
47. [GIL95] Gildenberg P. *Neurosurgery clinics of North America: Functional Neurosurgery.* Philadelphia: W.B. Saunders Company. 1995. vol. 6 No. 1
48. [GOT82] Gotman J. Automatic recognition of epileptic seizures in the EEG. *Electroenceph Clin Neurophysiol.* 1982, 54:530-540.
49. [GOT85] Gotman J. Automatic recognition of interictal spikes. En: *Long-Term Monitoring in Epilepsy.* *Electroenceph Clin Neurophysiol.* Amsterdam Elsevier Science Publisher 1985; 37:530-540.
50. [GOT90] Gotman J. Automatic seizure detection: improvements and evaluation *Electroenceph Clin Neurophysiol.* 1990, 76:317-324.
51. [GOT92] Gotman J, Wang L. State dependent spike detection: validation. *Electroenceph Clin Neurophysiol.* Amsterdam Elsevier Science Publisher 1992; 83:12-18.
52. [GUY75] Guyton A. *Tratado de Fisiología Médica.* Interamericana. 1975 4ª Edición.
53. [GUT95] Gutiérrez J, Igartua L, Medina V, Valdez R. Advantages of 3D over 2D Brain Mapping in the detection of Central Nervous System Tumors. 17th Annual International Conference IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Septiembre 1995, CD-IEEE 2.1.6.3.
54. [GUT98] Gutiérrez J. Caracterización del Ritmo Alfa, Coloquio de Investigación de la Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. 1998.
55. [GUA98] Gutiérrez J, Igartua L, Alcántara R. Caracterización de la Señal EEG por Métodos Paramétricos. *Archivos de Neurociencias INNN* 1998, en prensa.
56. [GUI98] Gutiérrez J, Igartua L, Alcántara R. Métodos Tiempo-Frecuencia para la Representación de Señales Electroencefalográficas. *Archivos de Neurociencias INNN* 1998, en prensa.
57. [GUT99] Gutiérrez J, Alcántara R. Spikes Characterization on EEG Signal by Wavelet Coefficients. Abstracts of Fifth Conference of the European Society for Engineering and Medicine. 1999, pp. 159-160.
58. [GUT00] Gutiérrez J. La Transformada Wavelet, Técnica para clasificar los eventos epilépticos. *Archivos de Neurociencias INNN* 2000, en prensa.
59. [GUT01] Gutiérrez J. Detección del Foco Epiléptico y su Ruta de Propagación. *Memorias II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica,* 2001.
60. [HAN87] Hansen R, Niedermeyer E. "Electroencephalography and Intensive Care Medicine en: *Intensive Care and Monitoring of the Neurosurgical Patient*" *Prog Neurol Surg,* 1987 Vol. 12, pp.105-145.
61. [HAR78] Harris F. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. *Proceedings of the IEEE,* 1978 vol. (66):51-83.
62. [HAY83] Haykin S. *Communication Systems.* John Wiley & Sons, 1983.



63. [HAY96] Haykin S, Racine R, Chapman A. Monitoring Neuronal Oscillations and Signal Transmission between Cortical Regions using Time-Frequency Analysis of Electroencefalographic Activity. Proc. IEEE. September 1996; 84(9):1295-1301.
64. [HAZ97] Hazarika N, Zhu J, Chung A, y Sergejew A. Classification of EEG signals using the wavelet transform. Signal Processing. 1997, (59):61-72.
65. [HIL92] Hilfiker P, Egli M. Detection and evolution of rhythmic components in ictal EEG using short segment spectra and discriminate analysis. Electroenceph Clin Neurophysiol. 1992; 82:255-265.
66. [HLA92] Hlawatsch F, Boudreaux-Bartels G. Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations. IEEE SP Magazine, Abril 1992; 21-66.
67. [HOR87] Horsley, V. Remarks on ten consecutive cases of operations upon the brain and cranial cavity to illustrate the details and safety of the method employed. Br. Med. J. 1887; 1:863-865.
68. [HSU73] Hwei P. Hsu. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano, 1973.
69. [HUL93] Hulley S y Cummings S. Diseño de la Investigación Clínica. Un enfoque Epidemiológico. Ediciones Doyma. 1993.
70. [HYM96] Hayes M. Statistical Digital Signal Processing and Modeling. John Wiley & Sons, Inc. 1996.
71. [IVE78] Ives R, Gloor P. Update: Chronic sphenoidal electrodes. Electroenceph Clin Neurophysiol. 1978; 44:789-790.
72. [JAN81] Jansen B, Bourne J, Ward J. "Autoregressive Estimation of Short Segment Spectra for Computerized EEG Analysis" IEEE Trans Biomed Eng. 1981; Vol. BME-28, No. 9 pp.630-637.
73. [JAS58] Jasper HH. The ten-twenty electrode system of the international Federation. Electroencephalogr Clin Neurophysiol. 1958, 10:371-375.
74. [JEN61] Jennison R. Fourier Transforms and Convolutions for the experimentalist. Pergamon Press, 1961.
75. [JEO92] Jeong J, Williams W. Kernel Design for Reduced Interference Distributions. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, vol. 40, No. 2 pp. 402-412.
76. [JER89] Jervis BW, Coelho, Morgan GW. Spectral Analysis of EEG responses. Med and Biol Eng and Comput 1989 vol. 27 pp. 230-238.
77. [KAL95] Kalayci T, Özdamar Ö. Wavelet Preprocessing for Automated Neural Network Detection of EEG Spikes. IEEE Engineering in Medicine and Biology. 1995, 160-166.
78. [KAY88] Kay S. Modern Spectral Estimation: Theory and Application. Prentice Hall, 1988.
79. [KAY98] Kay S. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol. II. Prentice Hall, 1998.
80. [KAW73] Kawabata N. "A Nonstationary Analysis of the Electroencephalogram", IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1973 Vol. BME-20, No. 6, pp. 444-452.
81. [LAT85] Lathi. Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación. LIMUSA, 1985.
82. [LIU76] Liu CL, Liu J. Linear Systems Analysis. Mc Graw-Hill, 1976.
83. [MAL89] Mallat G. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process. 1989; 11:674-693.
84. [MCN75] McNaughton, F. L. y Rasmussen, T. Criteria for selection of patients for neurosurgical treatment. En: Advances in Neurology, Vol. 8. (D. P. Purpura, J. K. Penry, R. D. Walter, Eds.) New York, Raven Press, New York. 1975; pp 37-48.
85. [MET78] Metz Ch. Basic Principles of ROC Análisis. Seminars in Nuclear Medicine. 1978, VIII(4):283-298.



86. [MIS97] Misiti M, Misiti Y, Oppenheim G. y Poggi JM. Wavelet Toolbox User's Guide The Math Work Inc. 1997.
87. [MUT99] J. Muthuswamy. Higher-Order Spectral Analysis of Burst Patterns, IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1999, 46(1):92-98.
88. [NAY94] Nayak A, Roy R, Sharma A. Time-Frequency spectral representation of EEG as an aid in the detection of depth of anesthesia. Ann Biomed Engineering, 1994 vol. 22 pp.501-513.
89. [NUW88] Nuwer M. "Quantitative EEG I Techniques and problems of frequency analysis and topographic mapping" J Clin Neurophysiol. 1988; 5:1-44.
90. [OPP82] Oppenheim A, Schaffer R. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall, Inc. 1982.
91. [OPP83] Oppenheim A. y Willsky A. Señales y Sistemas. Prentice-Hall, 1983.
92. [OZD96] Ozdamar Ö. Kalayci T. Design and analysis of an artificial neural network for spike detection using raw EEG. IEEE EMBS Conference Proceedings, 1996, 1022-1023.
93. [PAR97] Park HS, Lee YH, Lee DS, Kim SI. Detection of epileptiform activity using wavelet and neural network. IEEE EMBS Conference Proceedings. 1997, 1194-1197.
94. [PAU92] Pauri F, Pierelli F, Chatrian G. Long-term EEG-video-audio monitoring: computer detection of focal EEG seizure patterns. Electroenceph Clin Neurophysiol. 1992, 82:1-9.
95. [PEN68] Penfield W. y Rasmussen T. The Cerebral Cortex of Man.. Hafner Publishing Company. New York. 1968; pp 20-64.
96. [PRO70] Protter M. y Morrey Ch. Cálculo y Geometría Analítica, Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1970.
97. [QIA96] Qian S. Joint Time-Frequency Analysis: Methods and Applications. Prentice-Hall PTR, 1996.
98. [REK95] Rector I, Svejdoř M. Spatiotemporal analysis of interictal epileptic spikes. A stereoelectroencephalographic study. Neurophysiol Clin. 1995, 25(1):12-18.
99. [RIO91] Rioul O, Vetterli M. Wavelets and Signal Processing. IEEE SP MAGAZINE. 1991; 14-35.
100. [ROE98] M. Roessgen, B. Boashash. Seizure Detection of Newborn EEG Using a Model-Based Approach. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 1998, 45(6):673-685.
101. [SCH94] Schiff S, Aldroubi A, Unser M, Sato S. Fast wavelet transformation of EEG. Electroenceph Clin Neurophysiol. 1994; 91:442-455.
102. [SCL73] Scwabasi RJ. y Harper RM. Laboratory computers in neurophysiology Procc IEEE 1973 vol, PROC-61 pp 1602-1614.
103. [SEN95] Senhadji L, Dillenseger JL, Wendling F, Rocha C, Kinic A. Wavelet Analysis of EEG for Three-Dimensional Mapping of Epileptic Events. Annals of Biomedical Engineering. 1995, 23:543-552.
104. [SIR99] Sirne RO, Isaacson SI. y D'Attellis CE. A Data-Reduction Process for Long-Term EEGs. IEEE Engineering in Medicine and Biology. 1999 (18):56-61
105. [SPE81] Spencer S. Depth electroencephalography in selection of refractory epilepsy for surgery. Ann Neurol. 1981; 9:207-214.
106. [STR89] Stremler F. Sistemas de Comunicación. Fondo Educativo Interamericano, 1989.
107. [SUN96] Sun M, Qian S, y cols. "Localizing Functional Activity in Brain Through Time-Frequency Analysis and Synthesis of the EEG". Proceedings of the IEEE, 1996 vol. 84 No 9 pp 1302-1311.

108. [SUN97] Sun M, Qian S. y col. Time-Frequency Analysis of High-Frequency activity at the start of epileptic seizures" Proceedings-19th International Conference-IEEE/EMBS. 1997; 1184-1187.
109. [TOR84] Principios de Anatomía y Fisiología. Harla. 1984 3ª Edición.
110. [TSA98] Tsai YC, Sherman DL, Rosell LA, Mirski, Thakor NV. Identification of Seizure Pathways by Spectral Analysis of EEG. *Epilepsy*, 1998
111. [TSP93] Tsai M, Chatrian G, Pauri F, Ojeman G. Electrocorcography in patients with medically intractable temporal lobe seizures. I. Quantification of epileptiform discharges prior to resective surgery. *Electroenceph Clin Neurophysiol*. 1993, 87:10-24.
112. [TSH93] Tsai M, Chatrian G, Holubkov A, Ojeman G. Electrocorcography in patients with medically intractable temporal lobe seizures. II. Quantification of epileptiform discharges following successive stages of resective surgery. *Electroenceph Clin Neurophysiol*. 1993; 87:25-37.
113. [UEM89] Uematsu S, Tolo V. Electrophysiological recording during spinal surgery. *Stereotact Funct Neurosurg*. 1989; 52:145-156.
114. [UNS93] Unser M, Aldroubi A, Eden M. A family of polynomial spline wavelet transforms. *Signal Processing Elsevier*. 1993, 30:141-162.
115. [UNS96] Unser M y Aldroubi A. A Review of Wavelets in Biomedical Applications. *Proceedings of the IEEE*. 1996, 84(4):626-638.
116. [VAN68] Van Tree H. *Detection, Estimation and Modulation Theory. Part I*. Wiley Interscience.
117. [VET97] Vetterli M. *Wavelets and Subband Coding*. AT&T Bell Laboratories Prentice Hall PTR, 1997.
118. [WAH00] Wahlberg P, Lantz G. Methods for Robust Clustering of Epileptic EEG Spikes. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2000, 47(7):857-868.
119. [WAL74] Walker E. Surgery for epilepsy. En: *Handbook of Neurology*, Vol. 15 Cap 38. (P. Vinken, G. W. Bruyn, Eds.) North Holland, Amstrdam. 1974.
120. [WAL89] Walter R, Principe J, Park SH. Spike Detection Using Syntactic Pattern Recognition Approach. *IEEE Engineering in Medicine & Biology Society 11th Annual International Conference*, 1989, 1810-1811.
121. [WAR99] Ward DM, Jones R, Carroll G. Enhancement of Deep Epileptiform Activity in the EEG via 3-D Adaptive Spatial Filtering, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 1999, 46(6):707-715
122. [WEB93] Webber W, Litt B, Lesser R, Fisher R, Bankman I. "Automatic EEG spike detection: what should the computer imitate?" *Electroenceph Clin Neurophysiol*. 1993; 87:364-373.
123. [WIL92] Williams W. y Jeongs J. *Reduced Interference Time Frequency Distributions en: Time-Frequency Signal Analysis Methods and Applications*, ed. Boualem Boashash. Longman Cheshire, Wiley Halsted Press. 1992, pp. 75-97.
124. [WIL95] Williams W, Zaveri H, y Sackellares C. Time-Frequency Analysis of Electrophysiology Signals in Epilepsy. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 1995 pp. 133-143.
125. [WIL96] Williams W. *Reduced Interference Distributions: Biological Applications and Interpretations*. *Proceedings of the IEEE*, 1996; 84(9):1264-1280.
126. [YOU62] Young H. *Statistical Treatment of Experimental Data*. McGraw-Hillk Book Company. 1962.
127. [ZAV92] Zaveri H, Williams W y cols. Time-Frequency Representation of Electrocorcograms in Temporal Lobe Epilepsy. *IEEE Transactions of Biomedical Engineering*, 1992; 38(5):502-508.

En este anexo se encuentra la referencia de los artículos que se han presentado en diversos congresos y el trabajo publicado en la Revista Medical Engineering & Physics, England. En estos trabajos se han considerado técnicas tiempo-frecuencia y tiempo-escala, se aplican algoritmos rápidos para evaluar el análisis en línea de los registros electroencefalográficos.

Inicialmente se estudió la variabilidad espectral de los registros electroencefalográficos, [1], de sujetos sanos en la reactividad del ritmo alfa con la apertura y cierre de ojos. Mostrando que en eventos bien controlados es posible que la señal EEG sea considerada estacionaria y que métodos clásicos de Fourier mediante el arreglo espectral compactado ofrecen información cuantitativa y cualitativa para la valoración clínica. Sin embargo como nuestro interés es la caracterización de espigas epilépticas, y el procesamiento clásico de Fourier no es capaz de determinar los transitorios que ocurren durante estos eventos, comenzamos a estudiar métodos paramétricos, [2] ya que éstos no requieren hacer consideraciones de estacionariedad de la señal. Así que se aplicó el modelo autorregresivo a la señal EEG-Ictal, esta técnica es un estimador de alta resolución espectral, sin embargo es difícil encontrar el orden más adecuado del modelo y requiere mucha carga computacional.

En los siguientes trabajos, [3,4] se presentaron los resultados al aplicar las distribuciones tiempo-frecuencia, espectrograma, Wigner-Ville y Choi-Williams, en los registros EEG-Ictal concluyendo que la mejor representación respecto a su resolución en el plano tiempo-frecuencia es la distribución Choi-Williams, sin embargo como en el caso paramétrico su gasto computacional la hacen imposible de utilizar en aplicaciones clínicas en línea.

Aprovechando las propiedades de escala y desplazamiento que presentan las funciones wavelet, éstas fueron utilizadas en el análisis Multi-Resolución de las señales EEG-Ictal, [5,4,7]. Se investigó cuales niveles representan mejor los transitorios epileptiformes, y a partir de los coeficientes wavelet se utilizó un algoritmo de detección para determinar la ruta de propagación del foco epiléptico, [8].

Por último, viendo las ventajas de resolución y tiempo de cálculo, se investigó si las wavelet packet mejoran la caracterización de las espigas puntiformes. En el artículo presentado a la revista, [9] se indican las mejoras al aplicar esta técnica.

TRABAJOS PUBLICADOS RELACIONADOS CON LA TESIS DOCTORAL

1. Gutiérrez J, Alcántara R, Igartua L. Caracterización del ritmo alfa con distribuciones tiempo-frecuencia. Coloquio: La investigación en la Facultad de Ingeniería, UNAM. 1998.

2. Gutiérrez J, Igartua L, Alcántara R. Caracterización de la Señal EEG por Métodos Paramétricos. Archivos de Neurociencias INNN 1998, en prensa.
3. Gutiérrez J, Igartua L, Alcántara R. Métodos Tiempo-Frecuencia para la Representación de Señales Electroencefalográficas. Archivos de Neurociencias INNN 1998, en prensa.
4. Alcántara R, Gutiérrez J, Alvarez L, Igartua L. Métodos Paramétricos y Tiempo Frecuencia en la Representación del Electroencefalograma. Memorias Primer Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica. Nov 1998, CD-PDS31, pp. 159-162
5. Gutiérrez J, Alcántara R. Spikes Characterization on EEG Signal by Wavelet Coefficients. Abstracts of Fifth Conference of the European Society for Engineering and Medicine. 1999, pp. 159-160.
6. Gutiérrez J. La Transformada Wavelet, Técnica para clasificar los eventos epilépticos. Archivos de Neurociencias INNN 2000, vol 5, pp. 40.
7. Gutiérrez J, Alcántara R. Characterization of spikes in the ECoG using wavelets. Abstract of IASTED International Conference Signal Processing and Communications. September 2000, Marbella Spain.
8. Gutiérrez J. Detección del foco epiléptico y su ruta de propagación. Memorias de II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica. Mayo 2001, La Habana Cuba.
9. Gutiérrez J, Alcántara R, Medina V. Analysis and Localization of Epileptic Events using Wavelet Packets Medical Engineering & Physics. 2001, Vol 23 No. 9 pp. 623-631

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Tablas y Figuras

Capítulo	Página	Figura
2	16	2.1.1 Relación anatómica de las estructuras del cerebro.
	19	2.2.1 Electroencefalograma con ondas alfa de un sujeto normal durante ojos cerrados
	23	2.3.1 Comparación de diversos patrones electroencefalográficos
3	29	3.1.1 Senoidales simuladas
	30	3.1.2 Chirps simulados
	30	3.1.3 Funciones sintéticas
	31	3.1.4 Relación interelectrodos de acuerdo al Sistema Internacional 10-20
	32	3.1.5 Malla de 5x4 electrodos multicontactos colocada sobre la corteza cerebral
	33	3.2.1 Densidad Espectral de Potencia de 140 Espigas Epilépticas Puntiformes
	33	3.2.2 Espectrograma de 140 Espigas Epilépticas Puntiformes
4	38	4.1.1 A) Señal con amplitud controlada, B) Espectro de Fourier
	38	4.1.2 A) Señal ponderada con la función triangular, B) Espectro de Fourier
	39	4.1.3 Reactividad al ritmo alfa
	39	4.1.4. Electroencefalograma compactado
	40	4.1.5 A) EEG, B) Potencia Espectral Promedio, C) AEC
	41	4.1.6. A) AEC B) EEG basal, C) Inicio de la inducción y D) los brotes-supresión
	43	4.1.7 Periodograma-Welch de la señal que se muestra en la figura 4.1.1A
	43	4.1.8 Periodograma-Welch de la señal que se muestra en la figura 4.1.2A
	47	4.1.9 A) Chirp de 100Hz hasta 400Hz, B) PSD a partir del modelo AR orden=16
	47	4.1.10 Chirp de 100 a 400Hz, Espectro y Espectrograma con el modelo AR
	48	4.1.11 Chirp Cruzado de 100 a 400Hz, Espectro y Espectrograma con el modelo AR
	49	4.1.12 A) Chirp lineal de 100 a 400Hz, B) Potencial Espectral con el filtro adaptable de Kalman
	50	4.1.13 Espectrograma con el filtro adaptivo de Kalman, del chirp lineal de 100 a 400Hz
	50	4.1.14 Espectrograma Kalman, Chirp cruzado de 100 a 400Hz. Orden=4, $\lambda=0.97$, $\delta=0.001$
	51	4.1.15 Espectrograma paramétrico AR de Señal EEG, Orden=16, Ancho de análisis=32puntos
	51	4.1.16 Espectrograma paramétrico Kalman de Señal EEG, Orden=16, $\lambda=0.8$, $\delta=0.01$
	57	4.2.1 Representación de la resolución en tiempo y frecuencia
	73	4.3.1 A) Señal Sintética, B) Espectrograma, C) WVD
	74	4.3.2 A) Señal Sintética, B) Espectrograma, C) WVD
	75	4.3.3 Espectrograma de dos Chirps lineales cruzados, (100-300Hz)
	75	4.3.4 WVD de dos Chirps lineales cruzados, (100-300Hz)
	76	4.3.5 CWD de dos Chirps cruzados (100-300Hz), con $\sigma=100$
	77	4.3.7 A)Chirp lineal cruzado , B)CWD , $\sigma=1$, C)RID con ventana de análisis Hamming
	78	4.3.8 A) Chirp cuadrático cruzado , B)CWD , $\sigma=1$, C)RID con ventana de análisis Hamming
	79	4.3.9 A)Chirp Compuesto, B)Espectrograma, C)WD, D)ED, E)RID, $\sigma=1$
	79	4.3.10 A) Chirp Compuesto, B)Espectrograma, C)WD, D)ED, E)RID, $\sigma=1$.
	80	4.3.11 A) Señal Concentrada, B)Espectrograma, C)WD, D)ED, E)RID, $\sigma=1$
	81	4.3.12 Espectrograma Paramétrico-AR de 2 Chirps cruzados (100-300Hz)
	81	4.3.13 Espectrograma Paramétrico Kalman, ganancia 0.9, a dos Chirps cruzados (100-300Hz)
	82	4.3.14 Espectrograma de Fourier de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa
	83	4.3.15 Espectrograma Paramétrico AR, Orden 16. Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa
	83	4.3.16 Espectrograma Paramétrico Kalman, Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa
84	4.3.17 Distribución Wigner-Ville de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa	
84	4.3.18 Distribución Choi-Williams de la Señal EEG durante reactividad al ritmo alfa	
85	4.3.19 Espectrograma de la Señal EEG durante inducción anestésica	
85	4.3.20 Espectrograma Paramétrico AR. Señal EEG durante inducción anestésica	
86	4.3.21 Espectrograma Paramétrico Kalman de la Señal EEG durante inducción anestésica.	
86	4.3.22 Distribución Wigner-Ville de la Señal EEG durante inducción anestésica	
87	4.3.23 Distribución Choi-Williams de la Señal EEG durante inducción anestésica	

5	89 90 93 98 102 102 105 107 109 110 114	<p>5.1.1 Efectos del desplazamiento τ y modulación $e^{j\omega t}$ en el plano tiempo-frecuencia</p> <p>5.1.2 Efectos del escalamiento en el plano tiempo-frecuencia</p> <p>5.2.1 Gráfica que representa el soporte compacto en a) el tiempo y en b) la frecuencia</p> <p>5.2.2 Wavelet Madre centrada en el origen a diferentes anchos, $m=0.1,2$</p> <p>5.2.3 Respuesta en frecuencia de los Filtros QMF</p> <p>5.2.4 Diagrama del Par de Filtros de Cuadratura para el análisis y síntesis de una señal $y[n]$</p> <p>5.3.1 Árbol Wavelet multiresolución</p> <p>5.3.2 Espectro ideal simétrico V_i espacios, donde $V_i \subset V_{i-1}$, y sus subespacios W_i, contenidos</p> <p>5.3.3 Descomposición iterativa basada en bancos de filtros discretos</p> <p>5.4.1 Descomposición Wavelets</p> <p>5.4.2 Esquema que ilustra un camino de descomposición Wavelets Packets</p>
6	115 116 116 117 117 118 119 121 122 124 124 125 126 127 127 128 128 130	<p>6.1.1 Correlación Cruzada entre la señal ECoG y la Espiga Patrón</p> <p>6.1.2 Desplazamiento Temporal al aplicar la Correlación Cruzada</p> <p>6.2.1 Espectrogramas de Señales ECoG</p> <p>6.2.2 A) ECoG B) Espectrograma, B) Espectrograma Kalman con $\lambda=0.8$ y $\delta=0.001$,</p> <p>6.2.3 Distribuciones Wigner-Ville de Señales ECoG</p> <p>6.2.4 Distribuciones Choi-Williams de Señales ECoG, con $\sigma=0.1$</p> <p>6.2.5 Distribución Reducción de Interferencias de Señales ECoG</p> <p>6.3.1 Señal ECoG con tres espigas epilépticas en 1.12s, 1.8s y 5.6s</p> <p>6.3.2 Descomposición multiresolución y Escalogramas M-Hat, Daub10, Biorotogonal 3.1 y 6.8</p> <p>6.3.3 Señal ECoG con actividad epileptiforme</p> <p>6.3.4 Descomposición multiresolución y Escalograma con la función Morlet</p> <p>6.3.5 Escalogramas de registros ECoG utilizando la wavelet biorotogonal 6.8</p> <p>6.3.6 Producto de Coeficientes wavelet Morlet, de la señal ECoG de la figura 6.3.3</p> <p>6.3.7 Detección de la Espiga puntiforme que ocurre en 1.8s</p> <p>6.4.1 Descomposición Multiresolución, hasta el 4° nivel, de la señal ECoG</p> <p>6.4.2 Estructura Binaria de la descomposición a partir de los coeficientes wavelet packet</p> <p>6.4.3 Reconstrucción a partir de los coeficientes de los nodos 1, 4 y 9</p> <p>6.4.4 Detección de espigas puntiformes con wavelet packet y el operador producto</p>
7	131 132 132 136 136 137 137 138	<p>7.1.1 Síntesis de señal ECoG</p> <p>7.1.2 Síntesis de señal espiga patrón</p> <p>7.1.3 Detecciones de Espigas Epilépticas Puntiformes</p> <p>7.3.1 Señal ECoG y su localización sobre la corteza cerebral</p> <p>7.3.2 ECoG, izquierda, con espiga epiléptica puntiforme y Mapeo Rectangular ECoG</p> <p>7.3.3 Señales ECoG de tres épocas consecutivas con Espigas epilépticas puntiforme</p> <p>7.3.4 Detección de Espigas epilépticas puntiforme</p> <p>7.3.5 Señales ECoG de dos canales consecutivos y Correlación</p>

Capítulo	Página	Tabla
5	99	5.1 Relación entre la escala y la resolución para diferentes niveles j
6	115 118 119 120 123 123 124 126 129 129	<p>6.1 Resultados con la Correlación Cruzada</p> <p>6.2 Parámetros Específicos usando la CWD</p> <p>6.3 Parámetros Específicos usando la RID</p> <p>6.4 Parámetros Específicos usando la RID</p> <p>6.5 Energía y Amplitud Máxima con las funciones Mex-Hat y Daub-10</p> <p>6.6 Energía y Amplitud Máxima con las funciones Biorotogonal 3.1 y 6.8</p> <p>6.7 Sensibilidad de la funciones wavelet para los niveles con mejor clasificación</p> <p>6.8 Comparación de la sensibilidad de la funciones wavelet con el indicador producto</p> <p>6.9 Relación de Frecuencia y Duración para los nodos significativos con wavelet packet</p> <p>6.10 Comparación de la sensibilidad wavelet packet con el indicador producto</p>
7	131 133 133	<p>7.1 Comparación de la sensibilidad wavelet packet con el indicador producto</p> <p>7.2 Comparación entre los Conjuntos de Entrenamiento y Validación Análisis Multiresolución</p> <p>7.3 Comparación entre los Conjuntos de Entrenamiento y Validación Wavelet Packet</p>

ACTIVIDAD DE FONDO O BASAL.- Aquella que es más o menos continua, persistente y generalizada, en contraste con la actividad paroxística generalizada o focal. La actividad de fondo se utiliza para hacer referencia a otra actividad distinta de la que se detalla.

ALGORITMO RAPIDO.- Es el mecanismo de implementar un procedimiento matemático y que utiliza menor número de cálculos a lo que habitualmente se usan, y por lo tanto resulta en una típica aproximación.

ANTERIOR.- Posición anatómica que indica enfrente de enfrente.

ARREGLO ESPECTRAL COMPACTADO (AEC).- Es un formato gráfico que condensa la información EEG, de un alto potencial clínico cuando la dinámica espectral de la actividad cerebral es más importante que los patrones estáticos. Permite cuantificar los datos, disminuir subjetividad, mostrar las tendencias, alerta oportuna y facilita su interpretación.

CAUDAL.- Posición anatómica que indica hacia atrás, hacia el extremo.

CHIRP.- Señal sinusoidal que presenta incrementos o decrementos de frecuencia respecto al tiempo

CODIGO SUBBANDA.- Un campo de la ingeniería estrechamente ligado a las wavelets y enfocado principalmente a la aplicación de la compresión de datos.

DISTAL.- Posición anatómica que indica lejos de o más allá del origen.

DORSAL.- Posición anatómica que indica cerca de la superficie superior, hacia atrás.

ELECTROCORTICOGRAFIA (ECoG).- Registro de la actividad eléctrica cerebral capturada sobre la corteza cerebral mediante electrodos subdurales. Permite localizaciones más precisas de las zonas afectadas así como la identificación de áreas elocuentes.

ELECTRODO SUBDURAL.- Arreglo de electrodos incrustados en silastic, plástico-silicón, disponibles en arreglos lineales o rectangulares y que se colocan debajo de la membrana cerebral duramadre.

ELECTROENCEFALOGRAMA (EEG).- es un registro que representa el estado funcional del cerebro debido a que detecta con alto grado de sensibilidad cambios eléctricos debidos a la oxigenación y/o perfusión cerebral, la presencia de actividad paroxística cortical y la acción de anestésicos y otras drogas.

EPOCA.- Nombre común en el área de electroencefalografía, a un segmento de señal y que representa un lapso de tiempo.

EPOCA.- Nombre común en el área de electroencefalografía, a un segmento de señal y que representa un lapso de tiempo.

ESPIGAS. Ondas en punta que constituyen uno de los elementos patológicos que significan epilepsia en el electroencefalograma.

ESTANDAR DE ORO.- Patrón de referencia totalmente libre de error.

FALSOS NEGATIVOS.- El evento es una espiga epiléptica y el algoritmo no lo clasifica como espiga epiléptica.

FALSOS POSITIVOS.- El evento no es una espiga epiléptica y el algoritmo lo clasifica como espiga epiléptica.

FUNCION DE AUTOCORRELACION.- Es una medida de dependencia de una secuencia de valores de una función $f(t)$ a un instante de tiempo, respecto a otra secuencia de valores de la misma función $f(t)$ respecto a otro instante de tiempo.

INFERIOR.- Posición anatómica que indica abajo, bajo.

INDICE DE VERDADEROS POSITIVOS.- Representa la fracción de los casos positivos que son decididos correctamente.

INDICE DE FALSOS POSITIVOS.- Representa la fracción de los casos negativos que son decididos incorrectamente.

LATERAL.- Posición anatómica que indica hacia el lado, lejos de la línea media.

MAPEO CEREBRAL.- Representación de la información espacio-temporal de la actividad eléctrica cerebral que permite cuantificar la información y la interpretación en menor tiempo. Mejora la localización anatomo-funcional, al mostrar lesiones estructurales, tales como tumores, edema en forma más precisa.

MAPEO RECTANGULAR.- Aplica técnicas de topografía y análisis espectral al ECoG para sintetizar el contenido y definir en forma mas rápida y sencilla las relaciones temporales-espaciales-espectrales.

MEDIAL.- Posición anatómica que indica hacia la línea media, a la mitad, lejos de la lateral.

MONOCOMPONENTE.- Señal que contiene energía a un sólo valor de frecuencia para cada instante dado como una señal periódica pura o un chirp lineal.

NEUROMONITOREO.- Es la observación continua o intermitente de ciertas funciones del sistema nervioso para detectar cambios espontáneos o inducidos en las condiciones del paciente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

PAROXISMOS O BROTES.- Es un grupo de ondas de aparición y desaparición abrupta, claramente distinguible de la actividad de fondo por su diferente frecuencia, morfología o amplitud.

PROXIMAL.- Posición anatómica que indica cerca, más cerca hacia el origen.

RAZON DE VEROSIMILITUD.- Indica para cada valor x de una población, la probabilidad de mapearlo a la hipótesis nula H_0 contra la probabilidad de mapearlo a la hipótesis complementaria H_1 ,

ROC.- Análisis gráfico para determinar la cualidad de la variable de decisión para discriminar la presencia del evento.

ROSTRAL.- Posición anatómica que indica hacia el frente.

SENSIBILIDAD.- Probabilidad de obtener un resultado positivo en la detección de espigas epilépticas puntiformes

SOBREMUESTREO.- recuperar una señal a partir de sus datos comprimidos, generalmente al doblar los datos cada iteración al insertar un valor entre cada dato. El sobremuestreo es una operación fundamental en la operación del algoritmo piramidal de regreso usado en la reconstrucción de la señal original.

SUBMUESTREO.- Conservar solo una parte de la señal digital de entrada durante el cálculo, en general por medio de desechar algunas muestras de la misma. El submuestreo es una técnica fundamental en la operación del algoritmo piramidal usado en el cálculo de la transformada wavelet.

SUPERIOR.- Posición anatómica que indica arriba, sobre.

TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER (FFT).- Método computacional para calcular eficientemente la transformada discreta de Fourier.

VERDADEROS NEGATIVOS.- El evento no es una espiga epiléptica y el algoritmo no lo clasifica como espiga epiléptica.

VERDADEROS POSITIVOS.- El evento es una espiga epiléptica y el algoritmo lo clasifica como una espiga epiléptica.

WAVETET.- Función que tiene la propiedad de escalamiento y desplazamiento con soporte compacto en tiempo y frecuencia.

ZERO-PADDING.- El segmento de análisis de una señal discreta, se ajusta aumentando la cantidad de ceros necesarios para que tenga una longitud en potencia de dos.