UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

DISEÑO DE FORMULAS PARA EVALUAR OPCIONES FINANCIERAS EN MERCADOS MEXICANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

MARIA ARACELI BERNABE ROCHA

DIRECTOR DE TESIS: DR. GILBERTO CALVILLO VIVES

MEXICO, D. F. JULIO DEL 2002

INDICE

INTRODUCCIÓN

Nunca se ha desconocido la relación existente entre las matemáticas y sus aplicaciones, sin embargo la vinculación entre disciplinas que podrían considerarse como "puras" y las "aplicadas" no se ha dado de manera natural. Reconocer que las matemáticas pueden ayudar a mejorar procesos que durante décadas se han realizado bajo un mismo esquema es una labor titánica que sólo algunos estaban dispuestos a enfrentar; afortunadamente esta percepción ha cambiado y hoy en día las matemáticas y sus aplicaciones se desarrollan en forma paralela. Así, las finanzas matemáticas son la base de una industria en auge y el origen de un sin número de temas de interés matemático, como es "*la determinación de una política de ejercicio para la opción Banxico*".

En un contrato convencional de una opción put sobre divisas el comprador paga una prima y a cambio adquiere el derecho, pero no la obligación, para vender un monto D de dólares en un tiempo determinado T (en caso de un ejercicio estilo europeo) o en cualquier tiempo anterior a T (en caso del ejercicio estilo americano). Este instrumento tiene la propiedad de transferir el riesgo entre los participantes del mercado ofreciéndoles diversas posibilidades de rendimiento además de permitirles crear una posición de cobertura contra el riesgo. (Arditti [1]).

En este trabajo se hace referencia a una forma alternativa y específica de contrato (la Opción Banxico) en el cual el comprador (un banco) tiene la facultad de vender al Banco de México en cualquier tiempo anterior a T un monto parcial o total k_i de D (así, $0 \leq k_i \leq D$ y $\sum_{i=1}^{T} k_i \leq D$) En este tipo de contrato se establece como tipo de cambio de ejercicio el observado el día de operación inmediato anterior a aquél en que se decida ejercerla.

Desde el punto de vista matemático y financiero, la opción Banxico tiene dos líneas de investigación importantes:

- La valuación y
- La determinación de una política de ejercicio

Conocer el valor de un instrumento es esencial en la toma de decisiones, una institución que conoce el valor de su cartera y su valor en riesgo puede determinar sus inversiones objetivamente. No obstante que la valuación de una opción no es sencilla, por que se requiere un modelo matemático que refleje las características operativas y las de su subyacente, es un tema que ha resultado fascinante para muchos investigadores. A partir de 1973, cuando Black y Scholes publicaron la fórmula para la valuación del precio de opciónes estándar, se han elaborado otros trabajos enfocados a la valuación de los diferentes tipo de opciones, entre los cuales se pueden señalar los de Geske [14], Selby y Hodges [26] para opciones compuestas, Davis [7] para opciones a vencimientos, Carr [5] para opciones exóticas y, Galán [12], Bigge y Hull [3] para opciones sobre divisas[1].

No obstante que las opciones en sus origenes estaban consideradas instrumentos de cobertura, en la actualidad su uso es más amplio. La opción Banxico fue diseñada como un mecanismo de la política económica con el objetivo de captar reservas internacionales, con una operación en el mercado OTC (over the counter) posee características que la hacen un instrumento único en el mercado y atractivo para su inversión[2]:

- un plazo de vigencia de un mes,
- el tipo de cambio de ejercicio flotante fix_i y
- un ejercicio parcial condicionado a que $fix_i > \frac{\sum_{j=1}^{20} fix_{i-j}}{20}$

Cada día i de operación el banco conoce el tipo de cambio de mercado tc_i y el de ejercicio $fix_i \approx tc_{i-1}$ y debe decidir si ejerce o no la opción. Convencionalmente se asume que el valor de la opción al tiempo de ejercicio es $\max\{(fix_{i-1} - fix_i), 0\}$, pensando en que la decisión de ejercicio debe sujetarse a que la relación $\frac{fix_{i-1}}{fix_i} > 1$ se cumpla, porque garantizará obtener un beneficio económico mayor vendiendo dólares mediante el ejercicio de la opción que realizando la venta directamente en el mercado. Así, siendo $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la sucesión de tipos de cambio observados durante el plazo de vigencia de la opción es factible que durante este periodo existan varios días en los cuales la relación $\frac{a_{i-1}}{a_i} > 1$ se cumpla y en donde el ejercicio de la opción sea factible.

Determinar cuándo y cómo ejercer una opción es un tema pocas veces analizado debido a que tradicionalemente las opciones no permitían un ejercicio parcial lo que hacía irrelevante obtener una política de ejercicio. Sin embargo, la opción Banxico abre una brecha que esperemos dé origen a nuevos temas de investigación.

La ganancia obtenida al ejercer la opción depende de la elección del o los días de ejercicio así como de los montos k_i a cambiar en cada operación, por lo tanto resulta de interés analizar el comportamiento histórico del tipo de cambio e intentar pronosticar a partir de esta información su comportamiento futuro. Por esta razón, el presente trabajo inicia con un resumen del comportamiento histórico del tipo de cambio, a partir de los últimos años del régimen cambiario de bandas y continuando con un seguimiento en los seis años subsecuentes a la implementación del régimen de libre flotación (1995-2000). Adicionalmente en el Apartado II se incluyen los resultados del análisis del tipo de cambio desde el punto de vista de series de tiempo en donde se muestra que su comportamiento no puede ser modelado mediante los modelos ARMA, ARIMA o ARCH.

[1] Los conceptos y tipos de opciones se encuentran desarrollados explícitamente en el Capítulo 2.
[2] Apartado I.Subasta de opciones de venta dse dólares en los E.E.U.U.A.

Por lo tanto, la construcción de un modelo para el ejercicio de la Opción Banxico no se pudo desarrollar en base a un modelo del comportamiento del tipo de cambio sino en las características del instrumento financiero. Sin embargo, la posibilidad de incluir u omitir las expectativas y experiencia de los bancos condujeron a la construcción de dos modelos y por consiguiente dos políticas de ejercicio.

- La primera emplea análisis competitivo[3]. Tomando como esencia los algoritmos en-línea, comúnmente empleados en la distribución de sistemas computacionales, se determina una estrategia de ejercicio X y se compara contra una estrategia óptima off-line Opt que tiene un conocimiento pleno del futuro. Como medida de eficiencia se trata de minimizar la razón de competitividad $r = \sup \frac{P_{Opt}(A)}{P_X(A)}$ donde Ω representa el conjunto de todas las sucesiones del tipo de cambio. Este tipo de análisis permite diseñar una política con un único supuesto, un intervalo $[m, M]$ entre el cual se espera fluctúe el tipo de cambio

Este enfoque, presentado por El Yaniv, Fiat y otros [11] en 1992, representa un inovación en cuanto a las técnicas y herramienta empleadas comúnmente en problemas financieros, su adaptación a las características de la opción y el análisis desarrollado permiten obtener una política óptima de ejercicio.

La política óptima de ejercicio para la opción Banxico obedece a una política de costos promedio por dólar (Siendo un dólar el monto a cambiar y n el número de días de operación, se cambiará $\frac{1}{n}$ dólares diariamente). Recomendando el empleo de una política mejorada al recalcular diariamente una razón de competitividad e iniciar cada día de operación pensando que ese es el primero y los días restantes el periodo de vigencia de la opción.

- La segunda política obtenida a partir de procesos estocásticos muestra nuevamente una modelación diferente a las frecuentemente empleadas en problemas financieros[4]. No obstante la volatilidad del tipo de cambio, los bancos tienen la necesidad de realizar proyecciones a futuro en base a su información, documentación y conocimiento del mercado; esta información es captada en un modelo probabilístico construido en dos partes, la primera omite la restricción de ejercicio de la opción y la segunda la incorpora.

Asumiendo que el tipo de cambio puede ser representado por un proceso de Markov, dado que su comportamiento futuro depende exclusivamente de su valor actual, se toma como medida de eficiencia para un algoritmo la maximización de la ganancia obtenida durante la vigencia de la opción.

En la primera parte, el proceso se representa en una multigráfica bipartita $G(A, V)$,

[3]Capítulo III Algoritmos en línea. Aplicación al problema de divisas.

[4]Capítulo 4. Máxima utilidad esperada

con ganancia constante en los vértices, donde las probabilidades de transición dependen de las proyecciones de cada banco. El problema se plantea como uno de programación lineal lo que facilita la obtención de un resultado.

La segunda parte, la cual considera que la opción Banxico es path-dependent considera la construcción de una nueva gráfica, el árbol de trayectorias $G_T(A_T, V_T)$ en donde cada vértice representa una posible trayectoria del tipo de cambio. Se muestra que $G_T(A_T, V_T)$ satisface representar un proceso de Markov con probabilidades de transición derivadas a partir del proceso original y una ganancia unitaria asociada a cada vértice. El análisis desarrollado, en dos partes, permite obtener el siguiente resultado.

Si se asume que el tipo de cambio tiene un comportamiento que satisface ser un proceso de Markov, la mejor estrategia de ejercicio para la opción Banxico se obtiene al cambiar en una sola operación el monto total a ejercer.

La determinación de momento exacto de ejercicio se puede determinar en base a las proyecciones realizadas y reflejadas en las probabilidades de transición de $G(A, V)$, mediante un proceso backward de programación dinámica.

Como se podrá observar en el desarrollo del trabajo, las dos políticas de ejercicio son completamente distintas. Siendo dos modelos desarrollados bajo niveles diferentes de conocimiento es razonable pensar que las políticas sean distintas, únicamente comparables en las ganancias obtenidas en su implementación, una comparación relativa porque las políticas dependen de información subjetiva por lo que si algún parámetro no es especificado correctamente entonces pueden obtener resultados erróneos.

Al final del trabajo se anexan dos apartados. En el primero se encuentra la circular Circular-Telefax 71/96, documento oficial mediante el cual se dieron a conocer las bases y condiciones de la venta de dólares a Banco de México, y que contiene definiciones y lineamientos operativos de la opción Banxico. En el segundo, se incluye los resultados del análisis del tipo de cambio desde el punto de vista de series de tiempo.

Capítulo 1

Política monetaria y cambiaria

Como primer paso hacia el análisis de la opción cambiaria de Banco de México que permita obtener una política óptima de ejercicio, se pondrá en contexto a la opción como una medida adoptada por el Gobierno Federal en 1996 para la acumulación de reservas internacionales.

La emisión de una opción con un objetivo económico sitúa a la opción Banxico en un ámbito distinto al financiero en donde el objetivo primordial es la cobertura. Por ello y por ser el tipo de cambio el subyacente de la opción es conveniente contemplar el papel que desempeña el régimen cambiario dentro de la política económica.

Por lo anterior, se presenta en este capítulo un resumen del comportamiento histórico del tipo de cambio, iniciando en los últimos años del régimen cambiario de bandas y continuando con un seguimiento en los seis años subsecuentes a la implementación del régimen de libre flotación (1995-2000).

1.1 La política económica

La política económica en un país tiene como principal objetivo elevar el nivel de bienestar de la población, la obtención de tasas de crecimiento económico acelerado y sostenido, de tal forma que se pueda lograr el desarrollo económico del país.

La política económica puesta en marcha por el Gobierno Federal obedece a determinadas metas en los principales indicadores económicos y dispone de algunos instrumentos específicos para su acción.

La Secretaría de Hacienda y Crédito Público conjuntamente con el Banco de México, el Banco Central, son los responsables en determinar los lineamientos y estrategia de la política económica a adoptar en México. En particular, son responsabilidad del Banco de México la política monetaria y la instrumentación de la política cambiaria[1], que tiene como objetivo prioritario "la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda nacional" y como principales instrumentos, el control de la tasa de inflación y el nivel del tipo de cambio

1.2 La política monetaria

La política monetaria de un país con Banco Central, es el principal instrumento de ese instituto para controlar el nivel general de precios. Por ejemplo, sí la oferta monetaria crece a tasas desproporcionadamente elevadas, el nivel de precios reaccionará en la misma dirección. Esto causa distorsiones en la economía que son fuente de pérdida de bienestar de los agentes económicos (por los efectos de la distorsión en los precios sobre la asignación de recursos, sobre los pagos a factores de la producción, etc.). Legalmente el encargado de instrumentar la política monetaria en nuestro país es el Banco de México, que al tener como meta principal el logro de niveles de inflación bajos y estables, provee los incentivos para lograr tasas de crecimiento del producto sostenidas, aún en el largo plazo.

La política monetaria aplicada por el Banco de México, antes del periodo de inestabilidad financiera en 1994, era congruente con el objetivo de lograr tasas de inflación reducidas. La política ofreció las condiciones para llegar, inclusive, a tasas de inflación menores al 10% para ese año. Sin embargo, la conjunción de diversos factores originaron la crisis financiera de finales de 1994; suceso que marcó el abandono del tipo de cambio de bandas y el inicio de un régimen de tipo de cambio flotante (Hernández [16]).

La política monetaria adoptada en esos momentos obtuvo buenos resultados, ya que sentó las condiciones para la reducción de la volatilidad en el tipo de cambio, lo que a su vez moderó las expectativas inflacionarias de los agentes, y favoreció la reducción de las tasas de interés nominales y reales.

Con el régimen de flotación de la moneda, vigente aún, la política monetaria del Banco de México puede ser aplicada con más libertad que aquella con un tipo de cambio fijo, ya que el régimen de flotación no implica mantener (y en su caso defender) cierto valor

[1] Ver 1.3 Política Cambiaria

de la moneda. En éste régimen se permite que el tipo de cambio varíe de acuerdo con la interacción natural entre la oferta y la demanda de divisas. No obstante, en escasas ocasiones la autoridad realiza intervenciones en el mercado, las cuales se justifican por el exceso de la volatilidad en el mercado de divisas.

Para poder desempeñar su función, el Banco Central cuenta con la facultad de manejar, de forma autónoma el crédito interno, esto es, la capacidad para determinar la política monetaria. La influencia del crédito interno se da por medio de la relación que guarda éste con las tasas de interés en el mercado. Una política de crédito expansiva implica en el corto plazo menores créditos, lo cual alienta una mayor demanda agregada. Sin embargo, tarde o temprano esta política desemboca en alzas sostenidas en los precios (incluyendo el precio de la moneda extranjera), y en consecuencia ajuste de las expectativas. Provocando que la tasa esperada de inflación tienda a crecer.

Por lo tanto, el hecho de que el Banco de México imponga un límite al crecimeinto en el crédito interno, ofrece algunas de las condiciones necesarias para el abatimiento de las expectativas de inflación de los agentes. Estás últimas, son las que a fin de cuentas, lograrán el éxito (o fracaso) del programa monetario.

Para la instrumentación del monto límite al crédito interno, el Banco de México ha tomado en cuenta el incremento anual esperado de la demanda de la base monetaria. Aunque, si la realización de ésta no es consistente con el objetivo de lograr disminuir la inflación, es de esperarse que se apliquen restricciones en la forma o términos en que se suministre el crédito interno.

A pesar de la facultad de manejar estos instrumentos, un banco central no puede controlar el nivel general de precios. Su influencia se limita solo al efecto de sus políticas sobre la demanda agregada, el tipo de cambio y las expectativas de los agentes. Sin embargo, hay otros elementos en la economía que también son influyentes, y que tienen que estar estrechamente coordinados. Entre ellos se encuentran la política fiscal, la fijación de precios y las tarifas de bienes públicos, etc. Por lo tanto, se puede establecer que una política monetaria es solamente una condición necesaria, más no suficiente para que se logre la estabiliad en el nivel de precios.

1.3 Política cambiaria

La determinación de la política cambiaria desde 1985 hasta el 31 de marzo de 1994, era facultad de la Comisión de Crédito y Cambios del Banco de México. A partir del 1o. de abril de 1994, de conformidad con el Artículo 21 de la Ley que rige al Instituto Central, es facultad de la Comisión de Cambios, la cual está integrada por el Secretario y el Subsecretario de Hacienda y Crédito Público, otro subsecretario de dicha Dependencia, el Gobernador del Banco y otros dos miembros de la Junta de Gobierno. Del estatuto de ambas comisiones se desprende que la definición de la política cambiaria depende, en última instancia, de las decisiones del Ejecutivo Federal a través de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

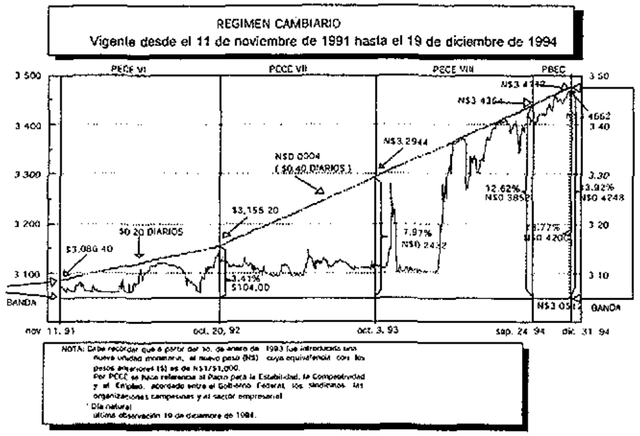
1.3.1 Régimen de bandas

En el mundo real, los regímenes cambiarios fijos no son estáticos, ya que el tipo de cambio fijo se puede ajustar mediante realineaciones discretas, a través de una devaluación o una apreciación, o se permite que el tipo de cambio fluctué dentro de una banda, alrededor de la paridad central. La existencia de una banda cambiaria significa por un lado, el otorgar cierta independencia monetaria al banco central, mediante el control de las tasas de interés domésticas; y por otro, el compromiso de las autoridades monetarias de evitar que las fluctuaciones del tipo de cambio salgan de un rango específico, banda de flotación del tipo de cambio.

El régimen cambiario adoptado desde noviembre de 1991, consistente en dejar que el tipo de cambio flote dentro de una banda que se ensancha diariamente, se mantuvo vigente hasta finales de 1994.

La existencia del régimen de bandas en México permitió al Banco de México cierta flexibilidad respecto al comportamiento del tipo de cambio, así como también proporcionaba flexibilidad en la aplicación de la política monetaria mediante el comportamiento de la tasa de interés, controlando de esta manera la tasa esperada de depreciación del tipo de cambio dentro de la banda de flotación. Ante este fenómeno, las tasas de interés podían ajustarse dependiendo de la situación económica, esto es, la aplicación de políticas contracíclicas, donde se aumenta el interés en las expansiones, y se reduce en las recesiones. Dentro de este esquema, el banco central, en teoría, sólo intervenía en el mercado cambiario cuando el tipo de cambio alcanzara cualquiera de los límites de la banda de flotación. Si alcanzaba el límite inferior, tenía que comprar dólares, mientras que si alcanzaba el límite superior, en un ataque especulativo, necesitaba vender dólares para defender la banda anunciada [27].

A partir del 20 de octubre de 1992, el límite superior de la banda de flotación del tipo de cambio se deslizaba a razón de .0004 nuevos pesos por día, mientras que el límite inferior permaneció inalterado al nivel de 3.0512 nuevos pesos por dólar durante toda la vigencia del régimen referido.



La creciente flexibilidad que el tipo de cambio adquiría con el transcurso del tiempo, hacía posible que éste coadyuvara más eficazmente al equilibrio de la balanza de pagos y, en consecuencia, sólo fuera necesario disminuir o incrementar las reservas internacionales cuando se alcanzara el techo o el piso de la banda, respectivamente. De esta manera, en caso de que se presentara alguna presión devaluatoria, no era necesario utilizar las reservas inmediatamente, lo que se hacía solamente, cuando el tipo de cambio alcanzara el límite superior de la banda. Lo contrario ocurría si el tipo de cambio alcanzaba el límite inferior. Así, las reservas se conservaban para evitar movimientos pronunciados del tipo de cambio.

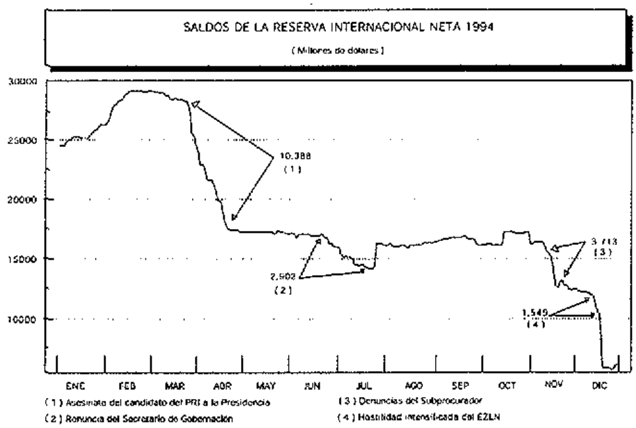
Al mismo tiempo, las fluctuaciones del tipo de cambio estaban acotadas por los límites de la banda. El límite superior servía para evitar elevaciones erráticas del tipo de cambio que hubiesen ocasionado transtornos innecesarios, en las expectativas inflacionarias de los agentes económicos y el límite inferior para impedir que el peso se revaluara en demasía, lo cual podía ser perjudicial para la competitividad internacional de la economía a través de una apreciación del tipo de cambio real.[2]

En 1994, el tipo de cambio del peso respecto a las demás divisas se vió influido por una gran variedad de perturbaciones de origen interno y externo, afectando la conducción de

[2]La ampliación de la diferencia máxima entre los tipos de cambio de venta y de compra tiene dos objetivos principales: a) lograr una mayor flexibilidad para que los costos de las transacciones cambiarias se reflejen en el precio de las divisas denominados en pesos, y b) promover un funcionamiento más eficiente del mercado cambiario con una menor intervención del banco central. En caso de ser necesaria una intervención, ésta respondería al propósito de mantener las cotizaciones de las instituciones de crédito para operaciones al contado dentro de la banda delimitada por los tipos de cambio máximo de venta y mínimo de compra correspondientes a cada día

la política monetaria y cambiaria. En febrero, se elevaron las tasas de interés en Estados Unidos, y surgieron acontecimientos de orden político y delictivo que impactaron de manera negativa a los mercados, lo que influyó a que el tipo de cambio se depreciara dentro de la banda de flotación alcanzando niveles cercanos al techo de la misma y que las tasas de interés sufrieran presiones alcistas, adicionales a las procedentes del exterior. Dichos ajustes, desde un punto general, equilibraron el mercado de divisas hasta el 23 de marzo, día del asesinato del candidato del PRI a la presidencia, cuando se elevaron las tasas de interés, el tipo de cambio se depreció y se observó una reducción importante en las reservas internacionales.

Desde finales de abril hasta el 11 de noviembre de 1994, las reservas internacionales se mantuvieron sustancialmente estables. Esto implica que en esos meses los flujos netos de capital hacia México fueron de monto similar al del déficit de la cuenta corriente en el mismo lapso. La balanza de pagos global se mantuvo en equilibrio.



Los logros obtenidos de finales de abril a mediados de noviembre en materia de estabilización de los mercados financieros nacionales, ayudaron a la reanudación del crecimiento económico con una inflación a la baja. Sin embargo, acontecimientos desfavorables a mediados de noviembre y a partir de la segunda decena de diciembre produjeron una situación muy difícil de resolver a finales de ésta, en vista de que: (a) se había agotado el espacio para que el tipo de cambio pudiera ajustarse al alza dentro de la banda de flotación; (b) se habían abatido las reservas internacionales de 16,221 millones de dólares al 11 de noviembre a 11,146 millones de dólares al 16 de diciembre; y (c) las tasas de interés reales se encontraban a niveles que implicaban graves dificultades a los intermediarios financieros y a los deudores, en general. Todos estos factores, aunados a una renovada volatilidad en los mercados financieros internacionales, a la percepción de algunos participantes en el mercado de la dificultad de financiar, en esas circunstancias, el déficit de la cuenta corriente previsto para 1995, y a la intensificación de la actitud hostil del EZLN el 19 de diciembre, provocaron un ataque en contra de la moneda nacional, el cual ya no pudo ser detenido mediante las medidas que hasta entonces habían sido eficaces. En consecuencia, el 19 de diciembre de 1994 la Comisión de Cambios acordó abandonar el régimen cambiario, y tomó la decisión de pasar a un régimen de flotación. Sin embargo, consideró conveniente intentar la estabilización del mercado cambiario mediante la elevación del techo de la banda, antes de ir a una flotación. Como es sabido, el intento no tuvo éxito, por lo que se acordó pasar al régimen de flotación con efectos a partir del 22 de diciembre de 1994.

1.3.2 La independencia monetaria

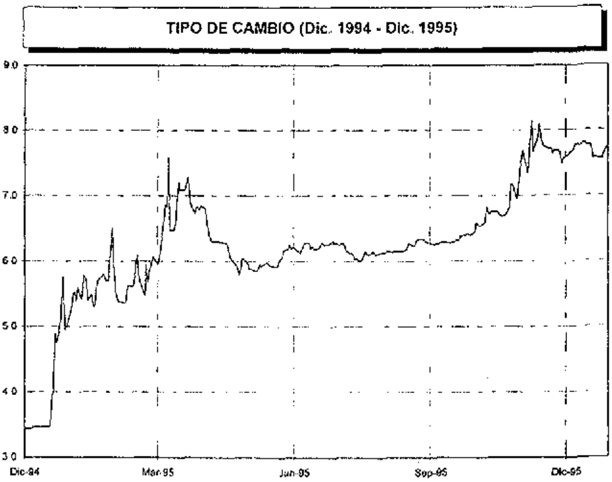
En teoría, en un régimen flotante, el tipo de cambio es determinado principalmente por los fundamentales económicos del mercado. En un contexto donde la economía de mercado asigna eficientemente los recursos e inhibe la oportunidad de que los especuladores obtengan beneficios a expensas del banco central.

Desafortunadamente, los mercados raramente operan con eficiencia perfecta; en consecuencia, existe el riesgo de sobrepasar el objetivo, lo que resulta en que el tipo de cambio esté en un nivel no garantizado por los "fundamentales económicos", quizás por un periodo considerable

Un régimen alternativo al de libre flotación, es la flotación regulada, en donde el banco central interviene en el mercado cambiario (Latter [22]). Existen ocasiones en que, sin perturbar las condiciones fundamentales de la economía, la dinámica del mercado puede determinar situaciones particularmente desordenadas, en cuyo caso la intervención del banco central es útil para estabilizar la cotización de la moneda nacional. Intervenciones de este tipo deben ser esporádicas, y realizarse de preferencia en situaciones en las que con montos relativamente pequeños se pueda tener un impacto importante sobre el tipo de cambio.

El proceso de estabilización en el que se encontraba el país en 1995 hizo conveniente que el Banco de México estableciera, como parte de su programa monetario, un límite de crecimiento anual de crédito [28]. En un régimen cambiario de flotación, la base monetaria se modifica fundamentalmente por el manejo del crédito del instituto emisor, toda vez que el banco central no se ve en el caso de tener que inyectar o sustraer liquidez por una intervención obligada en el mercado de cambios. Es mediante el manejo de su crédito que el banco central puede influir sobre el nivel y la evolución de las tasas de interés. A través de éstas, incide sobre la trayectoria del tipo de cambio y de la demanda agregada, y, por ende, sobre el comportamiento del nivel general de los precios.

Durante el periodo del 31 de dic. de 1994 al 29 de dic. de 1995, el tipo de cambio sufrió una depreciación muy considerable. En particular, a partir de la segunda quincena de septiembre y hasta finales de 1995, el tipo de cambio se depreció aceleradamente o fluctuó de manera violenta. Toda vez que estos fenómenos no correspondían a la situación fundamental de la economía, la Comisión de Cambios resolvió que el Banco de México interviniera en el mercado de divisas. Durante noviembre lo hizo en dos jornadas, utilizando un reducido monto de reservas (300 m.d. en total) y durante diciembre, volvió a intervenir en otras dos ocasiones más, vendiendo un monto total de 205 m.d. Las citadas intervenciones frenaron la caída del peso y contribuyeron a ordenar el mercado de cambios



Durante 1996, el Banco de México expresó la posibilidad de incrementar las reservas internacionales a través de intervenciones en el mercado cambiario teniendo cuidado de no presionar el tipo de cambio y de no enviar señales que pudieran interpretarse en forma errónea por los agentes económicos. El Instituto Central estimó conveniente la mayor acumulación de sus reservas y advirtió la importancia de que se lograra mediante un esquema que favoreciera las compras de dólares cuando el mercado estuviera ofrecido y las inhibiera cuando estuviera demandado, de forma que se alterara lo menos posible el régimen cambiario de libre flotación [30].

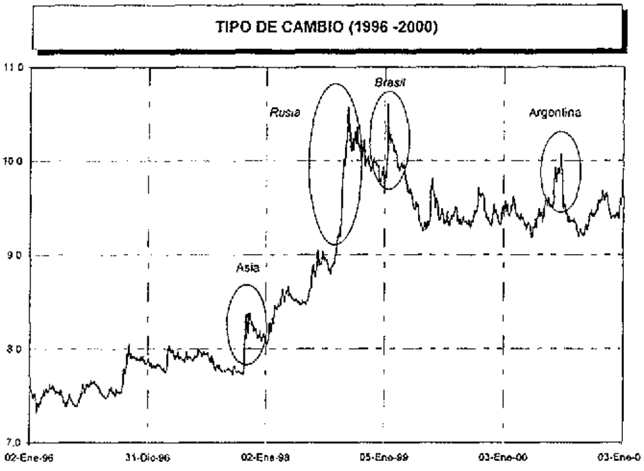
Durante 1997, la crisis financiera de Tailandia, que inició en julio, se extendió a una velocidad inusitada a otros países de Asia, contagiando hacia el final de año a Indonesia, Filipinas, Malasia, Singapur, Taiwán, Hong Kong y a Corea. Esta situación impacto de manera significativa a Japón y Brasil. Lamentablemente, la crisis asiática llegó a afectar la economía mexicana al reducir el crecimiento de las economías industrializadas, lo que dificultó el crecimiento de algunas de nuestras exportaciones. La crisis de Asia significó una apreciación sustancial de la moneda nacional con respecto a las divisas de países de dicho continente con los que competimos en el mercado de Estados Unidos, lo que dificultó el crecimiento de algunas de las exportaciones a ese país [31].

La inestabilidad de los mercados financieros internacionales, iniciada a mediados de 1997, se intensificó en agosto de 1998 con la decisión del gobierno ruso de devaluar su moneda y declarar una moratoria unilateral sobre el pago de sus obligaciones, internas y externas. El colapso de la economía rusa fue muy perjudicial para los mercados financieros internacionales. Al no habérsele extendido a Rusia un apoyo internacional efectivo, se rompió con una falsa sensación de seguridad que existía en cuanto a invertir en diversos países, en particular en los que intrínsecamente se encuentran débiles. Esta situación, junto con la imposición de controles de capital por parte de Malasia, provocó que los inversionistas internacionales mostraran una acentuada aversión respecto a los mercados de economías emergentes

Como consecuencia lógica de lo anterior, se desataron salidas de capital de las economías emergentes (principalmente en los meses de agosto septiembre de 1998), en particular de aquéllas con finanzas públicas desequilibradas, sistemas financieros débiles y regímenes de tipo de cambio predeterminados. El fenómeno afectó en lo particular a Latinoamérica: Ecuador, Colombia, Venezuela, Brasil y México. El peso mexicano se depreció sustancialmente a finales de agosto y septiembre, en particular debido a que nuestros mercados de cobertura cambiaria represento, a los ojos de muchos e importantes inversionistas extranjeros, un vehículo apropiado para cubrir los riesgos de una posible devaluación del real brasileño [32].

En enero de 1999 los mercados financieros nacionales se vieron afectados por la devaluación de la moneda brasileña y por el temor de que la inestabilidad financiera en ese país contagiara a otras economías emergentes, razón por la cual el peso mexicano sufrió una depreciación transitoria. En respuesta a esta situación, el mismo día en que las autoridades brasileñas iniciaron su transición a la flotación del real, momentos en que la cotización de la moneda nacional se elevó, alcanzando incluso un nivel de 11 4 pesos por dólar, la Junta de Gobierno del Banco de México decidió restringir la política monetaria, aumentando el corto de 130 a 160 millones de pesos [33] Ello, con el objeto de limitar la depreciación de la moneda , restablecer el orden en el mercado cambiario y preservar las posibilidades de alcanzar el objetivo de inflación de 13 por ciento en 1999. El tipo de cambio reaccionó favorablemente a la medida, estabilizándose temporalmente en alrededor de 10.50 pesos por dólar. Sin embargo, al determinarse la flotación del real un par de días después, la gran volatilidad en los mercados se reavivó. En este segundo episodio, la moneda nacional también se depreció considerablemente una vez que se conoció la noticia (superando momentáneamente el nivel de 11 pesos por dólar), pero más tarde en el día sobrevino una rápida corrección, terminando el peso incluso con una apreciación respecto al dólar (a 10 25 pesos por dólar).

En el transcurso del último trimestre de 2000 el tipo de cambio se mantuvo en un nivel promedio cercano a 9.50 pesos por dólar. Durante octubre el aumento de la incertidumbre causada por la situación en Argentina, influyó negativamente en el comportamiento del tipo de cambio. Sin embargo, en noviembre éste se apreció para situarse por debajo del nivel promedio prevaleciente a lo largo del año. Finalmente, durante diciembre la significativa caída experimentada por el precio del petróleo, a través de su efecto sobre el comportamiento esperado de las cuentas externas del país y sobre las finanzas públicas, provocó una depreciación del tipo de cambio. Con ello, éste se situó otra vez ligeramente por encima del promedio anual, pero aún por debajo del nivel esperado al inicio del trimestre.



1.3.3 Opción cambiaria, una estrategia para acumular reservas

Como se mencionó anteriormente, durante 1996, el Banco de México expresó la posibilidad de incrementar las reservas internacionales a través de intervenciones en el mercado cambiario teniendo cuidado de no presionar el tipo de cambio y de no enviar señales que pudieran interpretarse en forma errónea por los agentes económicos. El Instituto Central estimó conveniente la mayor acumulación de sus reservas y advertió la importancia de que se lograra mediante un esquema que favoreciera las compras de dólares cuando el mercado estuviera ofrecido y las inhibiera cuando estuviera demandado, de forma que se alterara lo menos posible el régimen cambiario de libre flotación.

Fué el 1o. de Agosto de 1996, cuando el Banco de México, mediante un comunicado dirigido a las instituciones de crédito del país, informó que subastaría mensualmente contratos por virtud de los cuales, mediante el pago de una prima en pesos, dichas instituciones podrán adquirir el derecho de vender una cantidad predeterminada de dólares contra pesos al instituto central.

La estrategia de acumulación de reservas implementado, ha permitido al Banco de México aumentar el nivel de sus reservas de divisas y, por consiguiente, mejorar las condiciones para la contratación de nuevos créditos.

1.4 Determinación de un modelo para el tipo de cambio

Como se pudo apreciar, las fluctuaciones del tipo de cambio no obedecen necesariamente a perturbaciones en los agentes económicos. Aún más, cuando éstas son originadas por situaciones económicas pueden ser de carácter nacional o internacional. Así, la posibilidad de realizar un pronóstico a corto plazo del tipo de cambio depende en gran medida de la posibilidad de conocer los factores políticos, macro y microeconómicos que pueden llegar a influir o hasta determinar su comportamiento.

No obstante, desde 1996 se estimó conveniente realizar un seguimiento del comportamiento del tipo de cambio esperando se abriera la posibilidad de establecer algún patrón de comportamiento y en consecuencia la determinación de un modelo.

Durante 1997, el tipo de cambio mostró poca volatilidad lo que hizo presumir la posibilidad de adaptar algún modelo teórico a la serie. Después de realizar el análisis, considerando varias muestras de datos e incluyendo las observaciones que día con día se iban obteniendo, se concluyó que era poco factible suponer un modelo para el tipo de cambio. Los resultados estadísticos nos hicieron rechazar la hipótesis de la existencia de un modelo que aproximara de forma óptima a los datos[3]

Para este momento, principios de 1998, la volatilidad del tipo de cambio empezó a incrementarse y permitió confirmar que cualquier modelo que se hubiera establecido resultaría inadecuado, por ser un modelo regresivo basado en información histórica y no considerar eventos extremos como lo fue la crisis asiática.

Antes de abandonar los intentos por determinar un modelo para el tipo de cambio consideramos la posibilidad de que la condición de equilibrio en el mercado cambiario internacional permitiera establecer algún patrón de comportamiento a corto plazo (Krugman [21])

Al suponer una economía pequeña y abierta, con libre movilidad de capitales, y donde se cumple la condición de equilibrio en el mercado cambiario internacional, esto es, que la tasa de interés doméstica de un instrumento con un cierto periodo de maduración τ, es igual a la suma de la tasa de interés extranjera con el mismo periodo de maduración, la tasa esperada de depreciación de la divisa doméstica durante el mismo periodo τ, y el premio por riesgo, lo que se puede expresar como:

$$i_t^{\tau} = i_t^{*\tau} + \frac{E_t\left(e_{t+\tau} - e_t\right)}{\tau}dt + r_t^{\tau}$$

[3]Ver Apartado II. La serie del tipo de cambio

donde i_t^{τ} e $i_t^{*\tau}$ representan la tasa de interés doméstica y extranjera, respectivamente, expresadas como el logaritmo natural de uno más la tasa de interés, en el tiempo t, con un periodo de maduración τ; E_t denota las expectativas condicionales a la información disponible en t; e_t es el tipo de cambio en t, expresado como el logaritmo natural del número de unidades de la divisa doméstica por una unidad de divisa extranjera; dt es la longitud del periodo de tiempo; y r_t^{τ} representa el premio por riesgo, en el mercado cambiario en t para un instrumento con periodo de maduración τ

Así, si se suprime un premio por riesgo, la ecuación de equilibrio en el mercado cambiario se puede reexpresar como:

$$i_t^{\tau} = i_t^{*\tau} + \frac{E_t\left(e_{t+\tau} - e_t\right)}{\tau} dt$$

Esto es, la tasa de interés doméstica es igual a la tasa de interés del extranjero más la tasa esperada de realineación durante el periodo τ. En consecuencia, el banco central tiene que permitir fluctuaciones en la tasa de interés y en el tipo de cambio, de tal forma que se cumpla la condición anterior. Si no se cumple y disminuye la tasa de interés, habrá una salida de capitales con la consecuente pérdida en reservas, por lo que el banco central tendrá que incrementar la tasa de interés. Por el contrario, si aumenta la tasa de interés, habrá una entrada de capitales y el incremento en las reservas aumentará la liquidez en la economía, lo que forzará las tasas de interés a la baja

Así, suponiendo que la tasa de interés puede ser aproximada (reflejada) por las variaciones de la inflación en un periodo de tiempo; para un plazo "largo" se debe cumplir que:

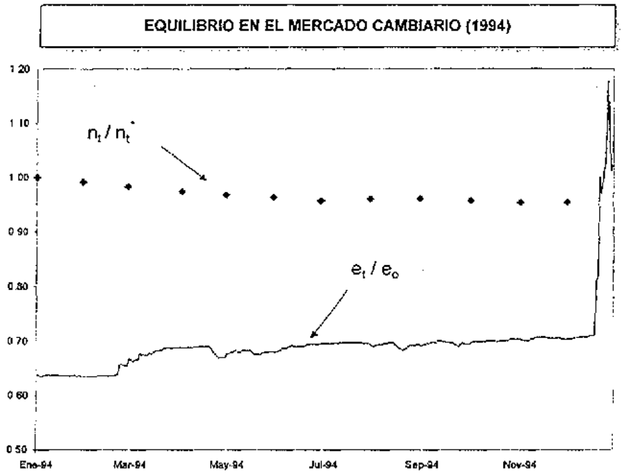
$$n_t \approx n_t^* \left(\frac{e_t}{e_0}\right)$$

donde n_t y n_t^* representan las variaciones en los indicadores inflacionarios de México y Estados Unidos, respectivamente, y e_t el tipo de cambio en el tiempo t ($t = 0$ corresponde al momento inicial del análisis).

Lo que equivalé a decir que para que exista un equilibrio en el mercado cambiario el tipo de cambio para cualquier tiempo t debe satisfacer la relación:

$$e_t \approx \left(\frac{n_t}{n_t^*}\right) e_0$$

Sin embargo, el análisis mostró que durante 1994 el mercado cambiario se mantuvo en un total desequilibrio, evidenciando la necesidad de una devaluación, no obstante el tipo de cambio se mantuvo con poca volatilidad hasta finales de año cuando el peso se depreció.



Un comportamiento distinto se pudo apreciar durante los dos primeros años del régimen de libre flotación (1995 y 1996), donde el mercado cambiario presentó un comportamiento de relativo equilibrio, debido a las intervenciones del Banco de México.

No obstante, para 1997 y 1998 el mercado cambiario nuevamente mantuvo una disparidad con el tipo de cambio. La poca volatilidad con la que se mantuvo el tipo de cambio durante 1997 no garantizaban la relación de equilibrio; sin embargo, la crisis asiática a finales de 1998 y la devaluación originada, no fueron suficientes para que el mercado cambiario se mantuviera en equilibrio aún después de la "estabilización" de los mercados.

El análisis anterior, resultaba importante si hubieramos deseado hacer un pronóstico a largo plazo, sin embargo resulta ineficiente en el caso de conocer las fluctuaciones del tipo cambio a corto plazo. Observamos que existían periodos largos en donde el tipo de cambio se mantiene sobrevaluado lo que hacia suponer la necesidad de una devaluación, pero este fenómeno no era indicativo de en qué momento se podía presentar. Las pequeñas fluctuaciones del tipo de cambio, importantes para nuestro análisis, no estan consideradas en los resultado por lo que resultaba ineficiente para pronósticar el óptimo ejercicio de la opción.

Capítulo 2

Bases de la teoría de derivados

Considerar a la opción Banxico un instrumento financiero habilita la posibilidad de su clasificación, de acuerdo a sus características, dentro de *los productos derivados*. Clasificación que ha sido relevante en la valuación, donde la metodología empleada obedece a las características de los instrumentos y de los subyacentes; por ejemplo, una *opción europea sobre divisas* se valúa en forma distinta a la de una *opción americana sobre trigo*.

Así, es de esperarse que la metodología necesaria para determinar una política óptima de ejercicio para la opción Banxico esté, en gran medida, basada en las características de la opción y no únicamente en el comportamiento del subyacente, el tipo de cambio.

A efecto de poder clasificar a la opción Banxico, iniciamos el capítulo con algunos conceptos básicos de la teoría de derivados; los instrumentos que conforman el mercado de derivados, sus diferencias operativas y algunas clasificaciones originadas a partir de las mismas. Continuamos con la descripción de las características operativas de las opciones en general y en particular de la opción Banxico, que la diferencían y distinguen entre los productos derivados mexicanos. Para concluir, se presenta uno de los trabajos realizados en cuanto al ejercicio óptimo de las opciones cambiarias subastadas por Banco de México.

2.1 Productos derivados

Una clase de instrumentos de inversión reciente, pero extremadamente importantes es la de los derivados. Un *producto derivado* o simplemente un *derivado* es un instrumento de inversión cuyo valor es determinado por "o derivado de" el precio de otros instrumentos, denominados subyacentes. En años recientes los productos derivados han incrementado su importancia en el campo financiero Los *Futuros,* los *Forwards* y las *Opciones,* forman parte de esta clase de derivados (Arditti [1], Hull, 1993 [19] y Jarrow [20]). Los *Forwards, los Swaps* y muchos otros derivados son regularmente comerciados fuera de la Bolsa por instituciones financieras y sus clientes corporativos en lo que se conoce como *mercados over-the-counter.*

La operación en una Bolsa de contratos de opciones estandarizadas comenzó en 1973, cuando The Chicago Board Options Exchange (CBOE) emitió *opciones call.* Inició con emisiones sobre 16 de las acciones más comunes e importantes, lo que le ha permitido convetirse en una de las mas grandes Bolsas en el mundo, en función del monto que opera. Estos contratos fueron un gran suceso, y en el mercado over-the-counter provocaron que se incrementara el comercio de opciones sobre acciones.

Hoy en día las opciones son comerciadas en varias Bolsas, además de la CBOE, existen otras tres Bolsas en los Estados Unidos que comercian *opciones* sobre acciones. Ellas son suscritas en acciones comunes, índices de acciones, divisas, productos agrícolas, metales preciosos y futuros de tasas de interés.

El crecimiento en el comercio de *opciones* no ha sido restringido geográficamente a los Estados Unidos, ni a acciones comunes las cuales pueden ser bienes subyacentes La European Options Exchange (EOE), situada en Amsterdam, Holanda, comercia *opciones* basadas en acciones comunes de 15 corporaciones de tres nacionalidades, oro y cuatro bonos gubernamentales holandeses. Existen otras Bolsas pequeñas pero prósperas en Londres, Sydney, Australia y otros muchos centros financieros alrededor del mundo.

2.2 Forwards

Un contrato Forward es un producto derivado particularmente simple. Es un acuerdo para comprar o vender un bien, o realizar una operación financiera en una fecha futura a un cierto precio determinado. El contrato es usualmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y sus clientes corporativos.

En un contrato forward una de las partes asume una *posición larga* y conviene en comprar el bien subyacente en una fecha futura específica a un precio determinado. La otra parte asume una *posición corta* y acuerda vender el bien en la misma fecha al precio estipulado. El precio especificado en el contrato forward es conocido como *precio de entrega*, y se determina de tal forma que al momento de celebrar el contrato ambas partes tengan la misma espectitiva sobre el valor futuro, esto significa que no existe costo alguno al tomar alguna de las dos posiciones, ya sea corta o larga, por que no se favorece a alguna de las partes.

Un contrato forward se consuma en la fecha de vencimiento, es decir, el poseedor de la posición corta entrega el bien al poseedor de la posición larga, el cual a su vez entrega el monto correspondiente al precio de entrega.

2.3 Futuros

Un contrato Futuro, así como el contrato Forward, es un acuerdo entre dos partes para realizar una operación financiera[1] o comprar o vender un bien a un cierto precio en un tiempo futuro. A diferencia del Forward, el Futuro es normalmente operado en una Bolsa o Mercados organizados. Para hacer posible la comercialización, la Bolsa especifica ciertos estándares de los contratos. Como las dos partes del contrato no necesariamente se conocen, la Bolsa también provee mecanismos para garantizar a las dos partes que el contrato sea honorable.

A diferencia de los Forward, en los Futuro y particularmente en los contratos a futuro sobre bienes, excluyendo los contratos financieros, no se especifica la fecha de vencimiento. El contrato es referido para su mes de vencimiento, y la Bolsa especifica el periodo durante el mes en el cual el vencimiento debe realizarse, aunque por comodidad el periodo de vencimiento es frecuentemente el mes completo. El poseedor de la posición corta tiene el derecho de escoger la fecha durante el periodo de vencimiento en el cual ella o él la ejecutará.

La Bolsa especifica la cantidad del bien que será vencido por contrato, así como el precio del futuro, y posiblemente, límites entre los cuales el precio del futuro puede variar de un día a otro. En el caso de una mercancía, la Bolsa también especifica las cualidades del producto y la localización del vencimiento. Como ejemplo se puede considerar el futuro de trigo, comúnmente operado en la CBOE. El tamaño del contrato es de 5000 arbusto. Los contratos para vencimiento a 5 meses (Marzo, Mayo, Julio, Septiembre y Diciembre)

[1] Futuros sobre indices o sobre instrumentos derivados implican la realización de una operación financiera y no necesariamente la entrega de un bien.

están disponibles a un año. La Bolsa especifica las cantidades de trigo que serán vencidos y los lugares donde la entrega será efectuada.

Diferencias entre Forwards y Futuros

Como se observa y de acuerdo a las definiciones dadas anteriormente de lo que es un forward y un futuro, las obligaciones entre estos dos instrumentos son las mismas, no obstante existen diferencias importantes entre ellos.

Un contrato forward especifica la entrega de un bien en alguna fecha futura. La entrega o el precio forward es determinado en el momento en que el contrato es pactado, de tal forma que el contrato no tiene un valor monetario inicial, es decir no existe un flujo de efectivo entre las partes. En un contrato Forward el comprador (posición larga) y el vendedor (posición corta) mantienen la flexibilidad para especificar la calidad y la cantidad de los bienes que serán entregados así como la fecha y el lugar de entrega.

Un contrato Futuro tiene la misma característica esencial que un contrato Foward, excepto que difiere en 4 aspectos que afectan las condiciones bajo las cuales son operados.

Primero, un futuro es altamente estandarizado. Las Bolsas en las que operan, y no las partes en la operación, establecen la fecha en la cual el contrato vencerá, el lugar de entrega y las cantidades y características del bien que serán entregados por cada contrato. Esto significa que el operador no puede negociar la cantidad, la calidad y la fecha de entrega. Esta estandarización permite y da liquidez al mercado.

Segundo, las Bolsas garantizan el cumplimiento de ambas firmas liquidadoras[2] involucradas en la operación es decir, actuan como contrapartes centrales. A su vez, cada firma liquidadora, garantiza el cumplimiento de las partes quienes realizan la operación. Lo que implica que una parte no necesita conocer la calidad crediticia de su contraparte en el contrato. Un factor adicional que aumenta la liquidez del mercado.

Tercero, la posibilidad de cerrar una posición larga (corta) en un contrato futuro. Para rescindir un contrato que ha sido comprado (vendido), simplemente se realiza un operación contraria vendiendo (comprando) un contrato idéntico al comprado (vendido) anteriormente. La compensación de ambas posiciones, la posición larga (corta) contra la posición corta (larga), se realiza en la Bolsa, generando una posición neta de cero, ante esta situación no se hace necesaria la entrega del bien, una práctica usual en un contrato forward. Aunque en los contratos forward cabe la posibilidad de instrumentar un neteo bilateral con cada contraparte, si así lo determinaran las mismas.

[2] Para poder operar en el mercado de Derivados es necesario contar con un firma liquidadora.

Cuatro, al final de cada día de operación se calculan las pérdidas y ganancias de las posiciones en los futuros. Si la posición obtiene una ganancia, la Bolsa paga el efectivo a la firma liquidadora que garantiza la posición del operador; si por el contrario, la operación tiene una pérdida sustancial, la firma liquidadora garantiza pagando a la Bolsa el monto de la pérdida del día o "variación de la liquidación", entendida como la valuación a mercado a través de pagos de efectivo

2.4 Opciones

Las opciones son fundamentalmente diferentes de los Forward y Futuros. Una opción da a su poseedor el derecho y no la obligación para hacer algo, dándole la posibilidad de no ejercer este derecho; contrario a lo establecido en un contrato futuro o forward, donde las dos partes están comprometidas a realizar algo.

Mientras en un futuro o forward, tomar una posición no implica un costo (excepto los requerimientos de margen en el caso de los futuros), en una opción asumir una posición tiene implícito un costo (prima de la opción).

Del derecho otorgado al poseedor de una opción, se pueden distinguir dos tipos de opciones, Call y Put. Una *opción call* da al poseedor el derecho para comprar un bien por un precio específico denominado *precio de ejercicio* o *precio strike,* en una fecha especifica: Por ejemplo, una opción call de julio sobre acciones de IBM con precio de ejercicio de \$70 por título, da al poseedor la oportunidad de comprar acciones de IBM a \$70 en la fecha de expiración del contrato, Julio. El poseedor del call no está obligado a ejercer la opción, la ejercerá, i.e., comprará sólo cuando el valor del bien en el mercado exceda al precio de ejercicio, en caso contrario, será más conveniente *no* ejercer la opción y comprar el producto en el mercado. Si la opción no se ejerce en la fecha especificada, el contrato simplemente expira.

Una *opción put* da al poseedor el derecho de vender un bien subyacente en cierta fecha a un cierto precio determinado. Al igual que para una opción call, el precio del contrato es conocido como el *precio de ejercicio* o *precio strike* y la fecha de vencimiento del contrato como *fecha de vencimiento o fecha de ejercicio*. Para el caso de una opción put, el poseedor deberá vender sólo cuando el valor del bien en el mercado sea inferior al precio de ejercicio, en caso contrario sería mas conveniente vender el producto en el mercado y *no* ejercer la opción.

Por la fecha en la que una opción puede ser ejercida se hace una distinción entre una *Opción Americana* y una *Opción Europea*. Una *Opción America* es aquella que puede ser ejercida en cualquier fecha anterior a la fecha de vencimiento. Sin embargo, una *Opción*

Europea puede sólo ser ejercida en la fecha de su vencimiento. La mayoría de las opciones que se comercian en las Bolsas son americanas, a pesar de que las opciones europeas son generalmente más fáciles de analizar y algunas de las propiedades de una opción americana frecuentemente son deducidas de las europeas.

Existen cinco características que distingue a todas las opciones, call o put:

1. La identificación y cuantificación del subyacente de la opción,
2. El precio por unidad del subyacente,
3. La fecha de vencimiento de la opción,
4. Si la opción es americana o europea y,
5. La prima de la opción.

2.4.1 Posiciones en opciones

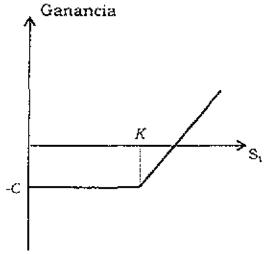
En cualquier opción que se opera, existen dos partes. Una parte es el inversionista quien asume la posición larga y la otra, el inversionista quien ha tomado la posición corta. El suscriptor de la opción recibe el dinero de la prima, C, pero posteriormente podrá tener una pérdida potencial, su ganancia (pérdida) será inversa a la obtenida por el comprador de la opción (Arditti, [1]).

Son cuatro las posiciones que un inversionista puede adoptar en una opción:

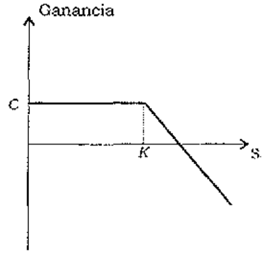
1. Posición larga en una opción call
2. Posición larga en una opción put
3. Posición corta en una opción call
4. Posición corta en una opción put

La variación de la ganancia (pérdida) obtenida al asumir una posición en una opción europea, puede ser representada gráficamente al considerar como referencia el precio del subyacente en la fecha de vencimiento S_T.

Ganancia de Posiciones en Opciones Call Europeas

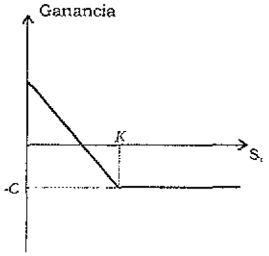


Posición larga

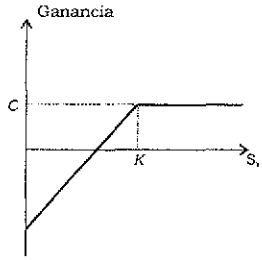


Posición corta

Ganancia de Posiciones en Opciones Put Europeas



Posición larga



Posición corta

Es frecuente caracterizar las posiciones en las opciones europeas en términos del valor terminal o ganancia obtenida por el inversionista al vencimiento. Por ejemplo, si el precio del subyacente en el mercado de una opción call, S, excede, es igual o es menor al precio de concertación, K, se dice que el call está "in the money", "at-the-money" o "out-of-the money" Existen algunas variaciones de estos términos, por ejemplo, si el precio del mercado se considera que excede en mucho al precio de concertación, el call se dice que está "deep-in-the-money" y si está muy por abajo "deep-out-of-the money".

2.4.2 Opciones exóticas y path-dependent

La creciente evolución de los mercado provocó que las necesidades de los participantes no pudieran ser cubiertas con los instrumentos estandarizados que operaban en el mercado.

Esta carencia dió origen a la creación de opciones con estructuras más complejas en sus ganancias, y enmarcándolas bajo el término de *opciones exóticas* (Hull 1998 [18])

Como se sugirió anteriormente, el término exótica es usado para denotar cualquier contrato fuera de lo ordinario e inusual (en el momento) de lo operado en una Bolsa de valores. Dichas opciones son usualmente operadas fuera de la Bolsa en lo que se conoce como mercado over-the-counter, entendiendo que los brokers que operan las opciones definen (conjuntamente con las partes del contrato) un producto que no existe dentro de los instrumentos operados en las Bolsas y que satisface las necesidades de ambas partes.

Una opción path-dependent, es una opción cuya ganancia al ejercerla o en la fecha que expira depende, en alguna forma no trivial, de la historia del precio del subyacente y del precio de mercado concurrente (en la fecha de valuación). Bajo esta definición se puede considerar a las opciones Americanas como un ejemplo de opciones path-dependent, en donde existe una probabilidad finita de que la opción sea ejercida antes de que expire y por consiguiente deje de existir; lo cual ocurre si el precio del bien subyacente entra en un rango en el cual es óptimo ejercerla.

Mientras un call estándar americana es una path-dependent, no es considerada exótica, dado que opera en una Bolsa, i.e. todas sus características están estandarizadas. Desde luego, no todas las opciones exóticas son path-dependent, por ejemplo una opción binaria europea no es path- dependent pero si es considerada exótica

Algunas de las opciones exóticas o path-dependent son:

1. Binarias (exóticas)
2. Compuestas (exóticas)
3. Elección (exóticas)
4. Con barreras (exóticas, path-dependent)
5. Asiáticas (exóticas, path-dependent)
6. Lookbacks (exóticas, path-dependent)

1. Binarias

Existen opciones cuya ganancia es más general y diferente que una opción estándar. Originalmente el término binaria describe una opción cuya ganancia depende de si el precio del subyacente es mayor o menor al precio de ejercicio del subyacente, independientemente de como llegó a ser menor o mayor. Actualmente, el término es usado para describir cualquier opción con una ganancia más general que la ganancia para un put o call.

2. Compuestas

Una opción compuesta puede describirse simplemente como una opción sobre una opción. Si consideramos únicamente el caso donde el subyacente de la opción es una opción estándar (call o put), la opción compuesta puede ser descrita como un put o call estándar sobre la opción subyacente.

Si recordamos, existen dos tipos de opciones estándar (call y put), lo que permite construirse cuatro diferentes clases de opciones compuestas básicas:

1. Call sobre un call
2. Call sobre un put
3. Put sobre un call
4. Put sobre un put

3. De elección

Las opciones de elección o "as- you-like- it" son únicamente opciones más complicadas que las opciones compuestas. Son estrictamente de palabra, es decir no existe contrato entre ellos ni institución que regule su cumplimiento.

Una opción de elección da al poseedor el derecho de elegir entre dos tipos de inversiones: 1) El derecho de comprar una cantidad E_1 del subyacente, en el tiempo T_1 o, 2) Adquirir un put o call con precio de strike E_2 y fecha de ejercicio T_2.

4. Con barreras

Otro caso simple de una opción exótica, es una opción con barreras, un término aplicado a cualquier opción en donde el derecho de ejercicio depende de que el valor del subyacente cruce un nivel predeterminado (barrera). Se pueden distinguir dos categorías de opciones con barreras: *in-barriers*, opciones que puede ser ejercidas si el valor del subyacente cruza una "barrera de entrada", y *out-barriers*, donde el derecho de ejercicio se extingue si el valor del subyacente cruza una"barrera de salida" y permanece así hasta su vencimiento.

Es posible que la barrera sea menor o mayor que el precio del subyacente al momento de la emisión. Por lo tanto, existe una clasificación adicional de las opciones con barreras en *up-and-in, down-and-in, up-and-out, y down-and out*; el primer sufijo indica si la barrera es mayor (up) o menor (down) al precio del subyacente y el último sufijo si se trata de una barrera de entrada o salida. Así, por ejemplo en una opción *down-and-out* el derecho de ejercicio se pierde si el precio el subyacente llega a ser menor que el nivel señalado como barrera.

Una barrera futura hace a una opción path-dependent. Si el precio del subyacente cruza una barrera de salida, la opción puede perder su valor y efectivamente dejar de existir. En el caso de una barrera de entrada, la opción tendrá su mayor pérdida durante el periodo en que el precio se mantenga sin cruzar la barrera ya que no podrá ser ejercida.

5. Asiáticas

Las opciones Asiáticas son las primeras opciones exóticas que pueden ser consideradas completamente path-dependent. Sus ganancias dependen de la historia del precio del subyacente a través de algún periodo. Una opción asiática es la conocida como "average strike call", cuya ganancia es la diferencia entre el precio del subyacente en la fecha de vencimiento y su promedio sobre algún periodo anterior al vencimiento si su diferencia es positiva y cero en otro caso.

La definición del promedio requiere la especificación de varios conceptos que en conjunto lo determinan.

a) *El periodo del promedio.* Sobre que rango de tiempo anterior a la fecha de vencimiento es tomado el promedio.

b) *Si el promedio es aritmético o geométrico.* El promedio puede ser definido como la media del precio del subyacente (el promedio aritmético) o la exponencial de la media del logaritmo del bien subyacente (promedio geométrico).

c) *Si el promedio es ponderado o no ponderado.* Por ejemplo, que las observaciones más recientes tienen mayor peso.

d) *Si la muestra considerada del precio del subyacente es discreta o continua.* Es más fácil obtener la media de un número pequeño de precios del subyacente que sobre todas las realizaciones del precio del subyacente. Por ejemplo, el promedio podría ser obtenido sobre los precios de cierre del día de operación o bien considerar todos los precios del día y durante todos los días del periodo

6. Lookback

Una opción lookback tiene una ganancia que depende no únicamente del precio del subyacente en la fecha de expiración, sino además del precio máximo o mínimo observado en un periodo de tiempo anterior a la fecha de expiración. Usualmente las ganancias son estructuralmente muy similares a las de una opción estándar. Por ejemplo, una opción put puede tener una ganancia definida por:

$$\max\{J - S, 0\}$$

donde J es un valor máximo observado y S el precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Al igual que para las opciones asiáticas, se puede distinguir entre discretas y continuas dependiento de la muestra del precio del subyacente considerada para obtener el máximo.

2.4.3 Momento óptimo de ejercicio

Las opciones como producto derivado pueden ser diferenciadas dependiendo del subyacente al que son referidas. Existen opciones sobre acciones, índices de acciones, activos que pagan dividendos y divisas, entre otros Las características de una opción, inherentes al subyacente, determinan en gran parte la metodología y el procedimiento empleado para su valuación es decir la determinación del precio del derivado en un momento t de su vigencia

Tratándose de opciones americanas, existe un problema de decisión implícito, ¿cuándo debe ser ejercida una opción americana?. No obstante que en la literatura se puede encontrar el análisis de la inconveniencia de ejercer una opción americana sobre activos que no pagan dividendos poco tiempo después de ser suscrita (ver Huyll 1993, [15]), es difícil encontrar estudios que permitan conocer el momento óptimo de ejercicio para una opción americana en general.

Con el propósito de mostrar la técnica empleada en la demostración del ejercicio temprano de una opción americana, incluimos la siguiente proposición.

Proposición 1 *Una opción americana sobre acciones que no paga dividendos nunca debe ser ejercida antes de su fecha de expiración.*

Demostración
Para presentar un argumento formal, consideremos los siguientes portafolios:

Portafolio A Una opción americana sobre una acción más una cantidad de efectivo igual a

$$X\exp(-r(T-t))$$

donde X es el precio de ejercicio, r la tasa libre de riesgo anualizada y T el periodo de vencimiento de la opción.

Portafolio B Una acción (subyacente de la opción).

El valor del efectivo del portafolio A en la fecha de expiración es X, dado que $(T-t)=0$. Sin embargo, en un ejercicio temprano, al tiempo τ, su valor será de $X\exp(-r(T-\tau))$.

Así, si la opción call es ejercida al tiempo τ, el valor del portafolio A será:

$$S - X + X\exp(-r(T-\tau))$$

donde $S - X$ representa el valor de la opción, con S el precio de la acción.

Esta cantidad es siempre menor que S si $\tau < T$ dado que $r > 0$ Por consiguiente, el portafolio A tendrá un valor menor al portafolio B, si se ejerce antes de la fecha de vencimiento de la opción Sin embargo, si la opción call se mantiene hasta su expiración, el valor del portafolio A al tiempo T, será:

$$\max\{S_T, X\}$$

Con el valor del portafolio B igual a S_T. Dado que existe la posibilidad de que $S_T < X$, entonces el valor del portafolio A es siempre menor que el valor del portafolio B. Lo que muestra que el ejercicio temprano de la opción no es óptimo para el poseedor de la opción y, lo más apropiado es esperar hasta la fecha de vencimiento de la opción.

Como se pudo observar, la decisión de ejercicio está basada en el beneficio económico que se puede obtener al ejercerla Como observamos con anterioridad, la ganancia generada por el ejercicio de una opción está determinada por no solo por el valor del subyacente sino además por las características propias de la opción que pueden limitar la ganancia generada y hasta extinguir el derecho de ejercicio. Es por ello que determinar una política óptima de ejercicio requiere el conocimiento de las características de la opción y del subyacente así como del empleo de técnicas de modelación que reflejen de forma adecuada la conjunción de todos los factores

2.4.4 Estrategias de cobertura

La cobertura de portafolios es un concepto que fué adoptado con gran aceptación a mediados de los 80's, por Sociedades de Inversión y Administradoras de Fondos de Pensiones, atraidos por una estrategia que les permitiera proteger las ganancias de capital obtenidas en años previos sin perder la oportunidad de obtener mayores ganancias. Las opciones, al poder ser usadas para crear una gran gama de funciones de ganancias diferentes, resultó la herramienta adecuada y más atractiva para construir estrategias de cobertura

Supóngase que un Administrador de un Fondo de Pensiones tiene 110 millones de dólares para invertir Si una operadora de fondos, le ofrece una estrategia de inversión que le garantiza que si a fin de año el mercado sube podrá continuar con su cartera de inversión y si por el contrario, el mercado baja, podrá liquidar su cartera total en 110 millones de dólares. Resulta para el administrador una estrategia atractiva al verse favorecido por incrementos en el valor de la cartera y, por otro lado, preservar en cualquier caso el principal del fondo (110 millones de dólares).

La manera en la cual esta meta puede ser alcanzada es tener un portafolio de 100 millones de dólares en acciones y, usar los 10 millones restantes en una opción put europea a un año sobre el portafolio total de inversión, con precio strike de 110 millones de dólares. Si a fin de año el valor del portafolio excede a los 110 millones, el portafolio se mantiene Sin embargo, si después de un año el valor del portafolio es menor que 110 millones, el put es ejercido y se reciben 110 millones por el portafolio.

El ejemplo anterior, aunque ilustrativo, resulta un modelo simple del problema complejo que puede resultar contruir la estrategia de cobertura adecuada No obstante lo interesante y útil que resulta construir estrategías de cobertura e inversión, el uso de las opciones no se ha restringido a estas dos actividades financieras.

Para el Banco de México la emisión de una opción put sobre dólares significó una estrategía de acumulación de reservas, que le dió la posibilidad de adquirir divisas en el mercado cambiario sin descuidar el no presionar el tipo de cambio y no enviar señales que pudieran interpretarse en forma errónea A la fecha la estrategía ha significado, para el Banco Central, una importante acumulación de reservas, que aunadas a las captadas por otros medios; han derivado en la implementación de un mecanismo de venta de dólares tendiente a moderar la volatilidad del tipo de cambio preservando a la vez el principio del régimen de flotación.

2.5 Opción cambiaria (Banxico)

Como se citó en el capítulo I, durante 1996 el Banco de México expresó la posibilidad de incrementar las reservas internacionales a través de intervenciones en el mercado cambiario teniendo cuidado de no presionar el tipo de cambio y de no enviar señales que pudieran interpretarse en forma errónea por los agentes económicos El Instituto Central estimó conveniente la mayor acumulación de sus reservas y advertió la importancia de que se lograra mediante un esquema que favoreciera las compras de dólares cuando el mercado estuviera ofrecido y las inhibiera cuando estuviera demandado, de forma que se alterara lo menos posible el régimen cambiario de libre flotación.

Así, el 1o. de Agosto de 1996 el Banco de México, mediante un comunicado dirigido a las instituciones de crédito del país, informó que subastaría mensualmente contratos por virtud de los cuales, mediante el pago de una prima en pesos, dichas instituciones podrán adquirir el derecho de vender una cantidad predeterminada de dólares contra pesos al instituto central.

La estrategia de acumulación de reservas implementado, ha permitido al Banco de México aumentar el nivel de sus reservas de divisas y, por consiguiente, mejorar las condiciones para la contratación de nuevos créditos.

2.5.1 Características de la opción Banxico

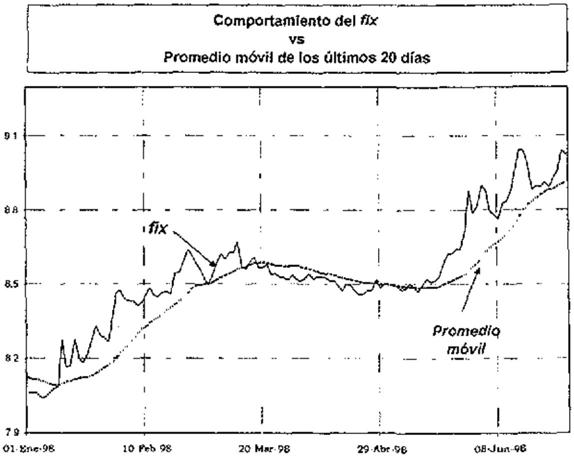
Al adquirir una institución de crédito la opción de venta de dólares (*opción put*), mediante el pago de una prima, obtiene el derecho de vender dólares al Banco de México, en cualquier día hábil bancario que éste elija dentro del plazo de vigencia de la opción.

A diferencia de una opción americana tradicional, el tipo de cambio de ejercicio no es fijo y el ejercicio de la opción puede ser parcial dentro del plazo de vigencia, hasta agotar el monto asignado a cada institución. En caso de ejercicio, la operación cambiaria se realizará al tipo de cambio para solventar obligaciones denominadas en moneda extranjera pagaderas en la República Mexicana"*fix*" publicado en el Diario Oficial de la Federación el día hábil anterior a la fecha de Ejercicio

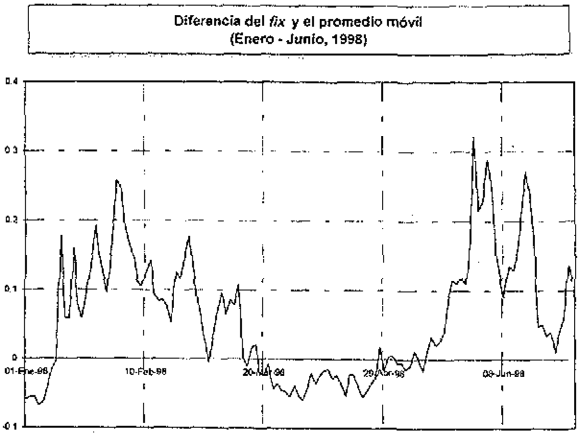
La acumulación de reservas mediante una opción put americana como la descrita anteriormente, generaría el riesgo de magnificar presiones devaluatorias sobre el peso, cuando el tipo de cambio mostrara una tendencia devaluatoria. Por ejemplo, si el tipo de cambio durante una tendencia devaluatoria se apreciara de un día a otro, el tenedor de la opción podría ejercerla en su totalidad y recuperar inmediatamente su posición en el mercado cambiario. El Banco de México estaría acumulando reservas a través de compras en el mercado en un momento en que se presenta un exceso de demanda de dólares, y posiblemente magnificaría las presiones devaluatoria sobre el peso.

La forma para disminuir este riesgo es condicionando el ejercicio de la opción a que el tipo de cambio quede por debajo de un nivel predeterminado, "barrera" A diferencia de una opción estándar con barreras , la barrera es móvil. La opción Banxico sólo puede ser ejercida cuando el tipo de cambio sea menor al promedio aritmético del tipo de cambio, *Fix*, de los últimos 20 días hábiles bancarios inmediatos anteriores a la fecha en que se pretende ejercer la opción.

Como se puede apreciar, en la siguiente gráfica, durante el periodo de vigencia de la opción la barrera se puede transformar de una barrera de entrada a una barrera de salida, dependiendo de la relación que guarde el promedio móvil con el precio de ejercicio. De allí que consideremos al promedio móvil una variante de una "barrera" estándar. Otra característica importante a rescatar es que el derecho de ejercicio no se extingue al cruzar la barrera sino que prevalece hasta el vencimiento de la opción.



Así que, durante el plazo de vigencia de la opción puedan existir varios periodos dentro de los cuales no puede ejercerse la opción. Por ejemplo, desde la segunda quincena de enero y hasta la primer quincena de marzo de 1998, la tasa de cambio se mantuvo por encima del promedio móvil, lo que impidió fuera ejercida en ese espacio de tiempo. No obstante, durante el mes de abril se observó el fenómeno contrario, la opción pudo haber sido ejercida en cualquier día del mes.



Por lo tanto, la ganancia generada por el ejercicio de la opción depende no sólo del tipo de cambio en la fecha de ejercicio, sino del comportamiento histórico del mismo al tener que considerar el promedio móvil del tipo de cambio *fix* de los últimos 20 días. Donde se asume que para una posición corta el beneficio económico obtenido al no poder ejercer la opción es nulo.

Así, la opción Banxico, una opción creada por y para las necesidades del mercado mexicano, puede ser clasificada, por sus características, como una opción put sobre divisas, americana, con barreras, path-dependent y donde su operación se realiza en el mercado *over-the-counter*.

Es precisamente la conjunción de todas estas características que hacen de la opción Banxico un instrumento financiero atractivo, no únicamente para su valuación (Galán 1997, [13]) sino para la determinación de una política óptima de su ejercicio.

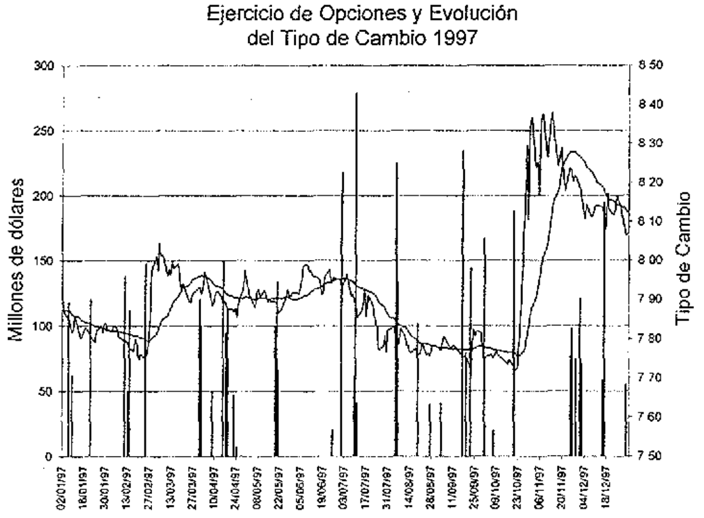
Diferentes motivaciones para encontrar una política óptima para su ejercicio han originado que éste sea un tema de interés entre algunos investigadores, tanto del sector financiero como del académico. Cada trabajo permite conocer el enfoque y aplicación de diferentes herramientas teóricas, como se puede apreciar en el trabajo del Dr. Manuel Galán; quien por su interés profesional, como funcionario del Banco de México y académico, ha seguido muy de cerca el comportamiento del ejercicio de la Opción Banxico. Referente a éste trabajo, el Dr. Galán amablemente nos facilitó el siguiente material.

2.5.2 Ejercicio Óptimo de las opciones cambiarias subastadas por Banco de México (Manuel Galán)[3]

El Banco de México desde la primer emisión de opciones, Agosto de 1996, hasta a Junio de 2001 realizó 62 subastas, colocando un monto total ofrecido de 16,330 mdd. Sin embargo, el ejercicio total observado fue de 12,245 mdd, efectuado en 132 operaciones y originando un beneficio económico de 418 mdp.

En general, el ejercicio de la opción ha presentado diversos comportamientos. Un reflejo de ésta situación se puede observar en la siguiente gráfica, en ella se muestra el comportamiento del tipo de cambio y su relación con el promedio móvil, así como los montos ejercidos en el transcurso del 1997.

[3]El material porporcionado por el Dr. Galán ha sido transcrito textualmente en la parte de modelación. Sin embargo, fue necesario modificar la logística de la presentación.



Tiempo de Ejercicio Óptimo.

Es claro que el tenedor de la opción enfrenta el problema de decidir el momento para ejercer la opción. A continuación se presenta una regla de decisión, derivada a partir de un problema de maximización, para el ejercicio óptimo de las opciones cambiarias subastadas por el Banco de México

Para la obtención de dicha regla se supondrá que el tenedor de la opción busca maximizar el valor esperado del beneficio económico de ejercer la opción

Para plantear el problema de maximización se definen las siguientes variables. Sea e_t el tipo de cambio fix determinado el día t. El beneficio económico por dólar ejercido estará dado por,

$$\frac{e_{t-1} - e_t}{e_t} \approx s_{t-1} - s_t$$

donde

$$s_t = \ln(e_t)$$

Escalando el cambio porcentual, en términos de la volatilidad diaria del tipo de cambio, se obtiene que,

$$s_{t-1} - s_t = \alpha \sigma_\varepsilon$$

Por otro lado se supondrá un modelo de caminata aleatoria para el comportamiento del tipo de cambio, que se caracteriza de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} s_t &= s_{t-1} - \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim \phi(\mu, \sigma_\varepsilon) \end{aligned}$$

donde $\phi(\mu, \sigma_\varepsilon)$ denota a la función de densidad probabilística de distribución normal.

Dada la especificación anterior, la probabilidad de observar una apreciación diaria del tipo de cambio, de una magnitud igual a $\alpha\sigma_\varepsilon$, estará dada por

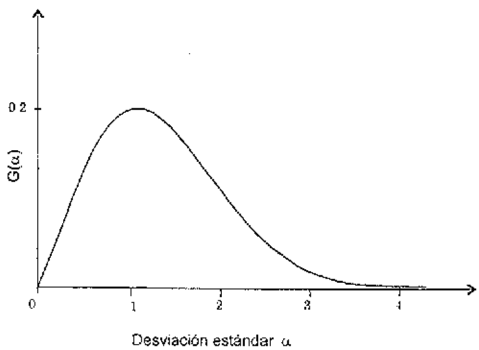
$$Prob\left(s_{t-1} - s_t = \alpha\sigma_\varepsilon\right) = Prob\left(\varepsilon_t = \alpha\sigma_\varepsilon\right) = \phi\left(x = \alpha\sigma_\varepsilon\right)$$

A partir de las expresiones anteriores, podemos definir el beneficio económico esperado que resultaría de ejercer la opción cambiaria en función del parámetro α Sea $G(\alpha)$ dicho beneficio

$$G(\alpha) = \alpha\sigma_\varepsilon \cdot \phi(\alpha, \sigma_\varepsilon)$$

y su representación gráfica mostrada a continuación:

Beneficio Económico Esperado: G(α)



El problema de maximización es el siguiente:

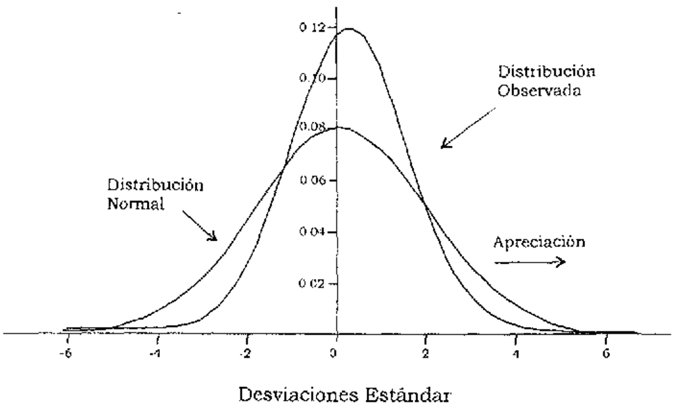
$$\max_{\alpha} \; \alpha\sigma_\varepsilon \cdot \phi(\alpha\sigma_\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{d\alpha}\alpha\sigma_\varepsilon \cdot \phi(\alpha\sigma_\varepsilon)\bigg|_{\alpha=\alpha^*} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha^{*} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mu = 0 \\ 1 + \dfrac{\mu}{2\sigma_{\varepsilon}} & \text{si} \quad \dfrac{\mu}{2\sigma_{\varepsilon}} << 1 \end{cases}$$

Como se puede apreciar, la función de densidad observada de los cambios porcentuales del tipo de cambio difiere de una función normal, por lo que es necesario ajustar otro tipo de distribución.

Función de densidad observada de los cambios porcentuales del tipo de cambio
(Ago. 1996 - Sept. 1998)



Ajustando la sección de apreciación observada del tipo de cambio, se puede reconstruir el beneficio económico esperado, en función del parámetro alfa, de la siguiente forma:

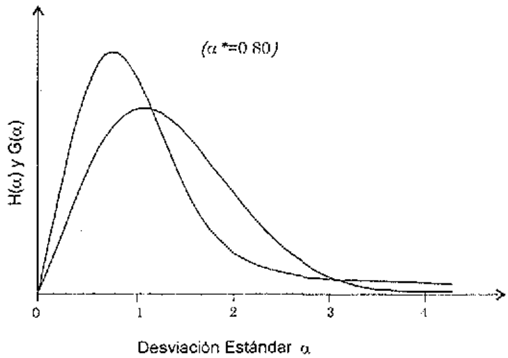
$$H(\alpha) = \alpha\sigma_{\varepsilon} \cdot \psi(\alpha\sigma_{\varepsilon})$$

donde

$$\psi(x) = e\left\{\sum_{j=0}^{5} a_j x^j\right\}$$

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del Beneficio económico empleando ambas función, $H(\alpha)$ y $G(\alpha)$.

Beneficio económico esperado: H(α) y G(α)



Al comparar los ejercicios óptimos determinados por la modelación anterior con los ejercicios realizados por las diferentes instituciones, se obtuvieron los resultados que se muestran a continuación.

Resumen con Ejercicios Óptimos y Observados

No. de subastas realizadas	62
No. de ejercicios óptimos	40 (versus 132 obs)
Monto Total Ofrecido	16,330 mdd
Monto Total Ejercido	12,245 mdd
Monto Potencial a ejercer en el Óptimo	10,080 mdd
Monto Ejercido en el Óptimo	4,233 mdd
Beneficio Observado en el Óptimo	223 mdp
Beneficio Potencial en el Óptimo	443 mdp (versus 418 mdp obs)

donde se muestra que los bancos hubieran obtenido un mayor beneficio económico de haber empleado la estrategia aquí obtenida.

Capítulo 3

Algoritmos en-línea. Aplicación al problema de divisas

La necesidad de determinar una política de ejercicio que no estuviera basada en el conocimiento del comportamiento del tipo de cambio pero que considerara las características propias de la opción nos condujo ante la alternativa de emplear un algoritmo en-línea.

Un algoritmo en-línea recibe y procesa las entradas en cantidades parciales. En un esquema típico, el algoritmo en-línea recibe una sucesión de demandas para que sean cubiertas y debe cubrir cada demanda antes de recibir la siguiente. Al cubrir cada demanda, el algoritmo debe escoger entre varias alternativas que tienen un costo asociado. La elección de una alternativa en cada paso puede influenciar el costo de alternativas para requerimientos futuros (Deng [9]). Ejemplos de estas situaciones se encuentran en estructuras de datos, localización de recursos en sistemas operativos, finanzas y distribución de computadoras.

La incertidumbre existente en la sucesión de demandas a recibir, puede ser considerada igual a la que un inversionista, con poca sensibilidad financiera, puede tener con respecto al comportamiento del tipo de cambio. Por ello, el primer modelo, basado en el artículo "*Competitive Analysis of Financial Games*" (El Yaniv, [11]), desarrollado para determinar la política óptima de ejercicio de la opción, tiene su motivación en los algoritmos en-línea

El capítulo se puede considerar compuesto de dos grandes partes. La primera, contiene el desarrollo del artículo "*Competitive Analysis of Financial Games*" para el cambio entre divisas (dólares a pesos) y la segunda, la aplicación y adaptación de los resultados obtenidos al caso particular de la opción Banxico, al incorporar sus características.

3.1 Juegos financieros

Muchas actividades financieras, tales como cambio de divisas o hipotecas financieras deben ser modeladas de una forma en-línea, ya que se tiene un conocimiento incierto de eventos futuros

Dado que se carece de conocimiento, los jugadores de estos juegos financieros emplean modelos basados en supuestos acerca del comportamiento futuro de cantidades relevantes tales como tipo de cambio o hipotecarias, con el objeto de obtener resultados promedios (es decir, obtener indicadores de conducta macro de sistemas con "dinámica compleja").

Un acercamiento alternativo bajo tal situación es emplear un análisis competitivo En este acercamiento, una estrategia en-línea es medida contra una estrategia óptima off-line que supone el conocimiento pleno de eventos futuros Como medida de costo o ganancia asociada al algoritmo, se trata de minimizar la peor razón entre el costo(ganancia) óptimo y el costo (ganancia) en-línea; si esta razón es acotada para todas las sucesiones de eventos, se determina que la estrategia en-línea es competitiva y se denomina al supremo de esta razón, *la razón de competitividad* de la estrategia. Una ventaja de medir de esta forma sobre las medidas tradicionales, en caso de promedios, es que para la mayoría de las actividades financieras no triviales es extremadamente difícil contar con un modelo probabilístico que refleje de forma eficiente el comportamiento de los mercados.

Para plantear una estrategia competitiva, el jugador en-línea no puede escapar de la necesidad de hacer algunos supuestos, o tener algún conocimiento acerca de los eventos futuros pero este conocimiento no será determinado por un modelo probabilístico Por ejemplo, en lugar de conocer una distribución de los futuros tipos de cambio una estrategia en-línea deberá ser basada sólo en el conocimiento de las cotas entre las cuales puede variar la tasa de cambio sobre el periodo en cuestión y se intuye que debe trabajar bien aún en la tasa de cambio que desafortunadamente varían de un día a otro.

Suponemos que otro investigador potencial ha sido disuadido por la creencia de que en problemas como lo es la inversión en el mercado de acciones el conocimiento acerca del futuro es tal que una ventaja abrumadora sería imposible para que un algoritmo en-línea alcance una razón competitiva acotada. Sin embargo, se puede mostrar que si las restricciones apropiadas son colocadas en la evolución futura de los precios o de los tipos de cambio, para intervalos de tiempo finitos lo suficientemente pequeños; la razón de competitividad puede ser alcanzado en situaciones realistas

El ejemplo principal es una conversión de divisas en *una dirección*, la cual distribuye el convertir dólares a pesos en un periodo de tiempo dado. Para este problema se muestra que una razón de competitividad pequeña puede ser lograda bajo supuestos muy moderados acerca del conocimiento que el jugador en-línea tiene con respecto a la tasa de cambio;

sólo se necesita conocer las cotas máxima y mínima de la tasa de cambio. Se investigarán diferentes versiones de este problema dando variantes del conocimiento del jugador en-línea.

3.1.1 Problema de conversión unidireccional

En el problema de conversión unidireccional, a un jugador en-línea le es proporcionada la herramienta para convertir dólares a pesos durante un periodo de tiempo. Esta es una conversión unidireccional por que el jugador en-línea solo puede convertir dólares a pesos. En cualquier tiempo existe una tasa de cambio que nos dice cuantos pesos recibimos por un dólar. El problema tiene una versión continua, en la cual el tipo de cambio fluctúa durante un periodo de tiempo continuo y el jugador puede hacer transacciones continuamente, y una versión discreta, en la cual la nueva tasa de cambio es anunciada en la mañana de cada día comercial, y se mantiene fija durante todo el día. Al final del periodo de transaccion el inversionista deber convertir todos los dólares que le sobren a la tasa que se encuentre en ese momento. El problema es designado como en-línea dado que el jugador debe designar sus transacciones sin conocer cuales será el tipo de cambio futuro.

Considérese primeramente la versión discreta.

Sea $\Omega = \{A \mid A \text{ es una sucesión del tipo de cambio}\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \Omega$. $P_X(A)$ denota la cantidad de pesos obtenidos por la estrategia de conversión en-línea X que inicia con D_o dólares (sin pérdida de generalidad supóngase $D_0 = 1$) y convierte dólares a pesos de acuerdo a A. Sea Opt la estrategia óptima off-line (i.e., la cual convierte todos los dólares a pesos cuando se alcanza la máxima tasa de cambio). Para cualquier algoritmo en-línea X, la razón de competitividad esta definida como:

$$r = \sup_{A \in \Omega} \frac{P_{Opt}(A)}{P_X(A)}$$

Obsérvese que $r \geq 1$,lo que implica que una razón de competitividad cercana a 1 equivale a que X puede ser una buena estrategia en comparación a Opt. El caso continuo es similar, excepto que la sucesión del tipo de cambio es reemplazada por una función del tipo de cambio $G(t)$ definida sobre un intervalo tiempo $[0, T]$, y las transacciones pueden hacerse continuamente durante este intervalo de tiempo.

3.1.2 Supuestos sobre la fluctuación del tipo de cambio

La información que el jugador en-línea tenga acerca de la sucesión del tipo de cambio o de una función de probabilidad define variantes particulares acerca del juego. Sea

$$\begin{aligned}
M &= \text{Cota superior para los valores del tipo de cambio} \\
m &= \text{Cota inferior para los valores del tipo de cambio} \\
a &= \text{Paridad inicial} \\
\phi &= \frac{M}{m} \text{ razón de fluctuación} \\
n &= \text{número de días durante los cuales se negocia.}
\end{aligned}$$

Distinguimos 2 variantes del problema de conversión unidireccional dependiendo del grado de conocimiento de las variables

Variante 1. Versión continua, con M, m y a conocidas por el jugador en-línea.

Variante 2 Versión discreta, con M, m y n conocidas por el jugador en-línea

Estrategia de conversión unidireccional óptima

La estrategia de conversión general que presenta el algoritmo óptimo para las 2 variantes del problema, consiste de 3 reglas. La ejecución de la estrategia requiere el conocimiento de la razón de competitividad que el algoritmo tratará de mantener. Después se verá como es posible alcanzar la razón de competitividad mínimo.

Regla 1) Al final del juego (en el último día) se convierten todos los dólares restantes.

Regla 2) Excepto en el final del juego, se opera solo cuando la paridad es la más alta que se ha observado.

Regla 3) Cuando la tasa alcanza un nuevo máximo se opera únicamente lo suficiente para asegurar que la razón de competitividad preestablecida se mantiene, pese a que un adversario provoque que la tasa de cambio baje a m y la mantenga así durante el resto del juego.

Para las 2 variantes que se están considerando, estas reglas determinan completamente el algoritmo en-línea. Nos referimos a este algoritmo como el algoritmo basado en el reto (the threat-based algorithm), dado que se convierten los dólares considerando que el adversario forzará a que la tasa baje a m y se mantenga así permanentemente.

3.1.3 Caso continuo con m, M y a conocidas.

En este caso, el algoritmo basado en el reto es formulado en términos de dos funciones $D(x)$ y $P(x)$, representando el número de dólares y el número de pesos, respectivamente, que el jugador posee después de que el tipo de cambio ha asumido el valor x por primera vez. Suponemos que el jugador en-línea está tratando de conseguir una razón de competitividad r

Como estamos considerando que el tipo tasa de cambio es una función continua $G(t)$, podemos suponer que es una función monótona creciente, dado que tanto el algoritmo off-line como el algoritmo basado en el reto realizan transacciones únicamente cuando el tipo de cambio alcanza un nuevo máximo

El supuesto anterior se fundamenta con el siguiente análisis.

Sea $f(t)$ el tipo de cambio real observado y $G(t)$ el tipo de cambio que el algoritmo basado en el reto tomará como referencia.

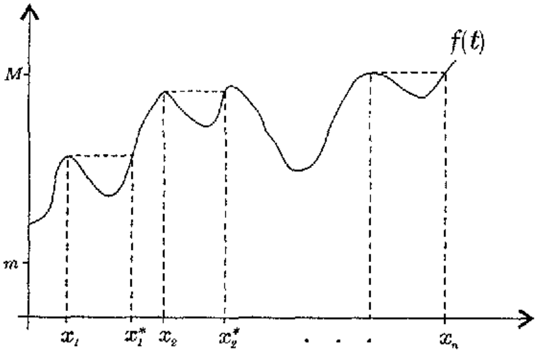
Considerando a $f(t)$, y a la sucesión de puntos $\{x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots, x_n\}$ que satisface:

$x_0 = 0$

$x_i =$ máximo local de $f(t)$ en el intervalo $(0,T] \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

$x_i^* = \inf\,\{x \in (x_i, T) \mid f(x) = f(x_i)\} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1$

donde n representa el número de máximos locales



Determinación de los puntos x_i y x_i

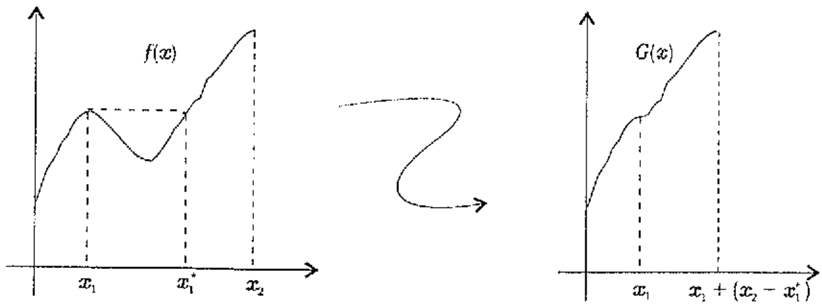
Se puede definir, una función $G(\cdot)$, continua y monótona creciente, de la siguiente forma:

Sea $y_o = 0,$

$$y_i = x_1 + (x_2 - x_1^*) + \cdots + (x_i - x_{i-1}^*) \qquad i = 1, \ldots, n$$

y

$$G(t)=\begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0\le t<y_1 \\ f(x_1^*+t-y_1) & \text{si} \quad y_1\le t<y_2 \\ f(x_2^*+t-y_2) & \text{si} \quad y_2\le t<y_3 \\ \vdots & \\ f\left(x_{n-1}^*+t-y_{n-1}\right) & \text{si} \quad y_{n-1}\le t<y_n \end{cases}$$



Construcción de G(x) a partir de $f(x)$

La continuidad de $G(\cdot)$ se desprende de la continuidad de $f(\cdot)$.

Si $t\in(y_i,y_{i+1})$

$$G(t)=f(x_i^*+t-y_i)$$

y por ser $f(\cdot)$ continua en el intervalo $(0,T]$ y $x_i^*+t-y_i$ pertenecer al interalo $(0,T]$, se tiene que $G(\cdot)$ es continua en el intervalo (y_i,y_{i+1}).

Por consiguiente, los únicos puntos de posible discontinuidad son los y_i's. Sin embargo para cualquier punto y_i

$$G(y_i)=f(x_i^*+y_i-y_i)=f(x_i^*)$$

y al calcular

$$\lim_{t\to y_i} G(t)$$

se obtiene que:

$$\lim_{t\to y_i^+} G(t) = \lim_{t\to y_i^+} f(x_i^* + t - y_i) = f(x_i^* + y_i - y_i) = f(x_i^*)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to y_i^-} G(t) &= \lim_{t\to y_i^-} f\left(x_{i-1}^* + t - y_{i-1}\right) = f\left(x_{i-1}^* + y_i - y_{i-1}\right) == f\left(x_i^* + x_i - x_{i-1}^*\right)\\ &= f(x_i)\end{aligned}$$

Y como $f(x_i) = f(x_i^*)$, por definición de x_i^*, se tiene que:

$$\lim_{t\to y_i} G(t) = f(x_i) = E(y_i)$$

lo que muestra que $G(\cdot)$ es continua en y_i. Por lo tanto, $G(\,)$ es continua en todo punto de su dominio y monótona creciente por definición.

Así, es factible suponer que el tipo de cambio es una función continua y creciente con mínimo m y máximo M

De las reglas (1), (2) y (3) se deduce que la función $D(\,)$ y $P(\cdot)$ satisfacen las siguientes condiciones:

Condición (i). $D(x) = 1$ y $P(x) = 0$ cuando $x \leq rm$, dado que la regla (3) nos indica que no se debe realizar ningún cambio hasta que la tasa alcance el valor rm.

Condición (ii). $mD(x) + P(x) = x/r$ para toda $x \in [rm, M]$; donde x representa el número de pesos que el algoritmo off-line obtendría si el tipo de cambio alcanzara su valor máximo en x, y $mD(x) + P(x)$ es la cantidad de pesos que el algoritmo basado en el retro lograría al suponer que el tipo de cambio baja de x hasta m y que la cantidad remanente en dólares es cambiada a la tasa m.

Condición (iii). Para todo $x \in [rm, M]$, $xD'(x) = -P'(x)$ dado que por cada dólar cambiado a la tasa x representa x pesos (Obsérvese que un decremento en el monto implica un incremento en el monto en pesos).

Estas condiciones determinan a las funciones $D(\cdot)$ y $P(\cdot)$ de forma única, y es así que la política adoptada alcanza la razón de competitividad r si y sólo si $D(M) \geq 0$; i.e., si y sólo si las condiciones anteriores pueden ser satisfechas sin invertir mas dinero que el monto inicial de dólares con el que se cuenta, aún cuando el adversario incrementara el tipo de cambio de una forma continua de a a M.

Las condiciones bajo las cuales la razón de competitividad, r, puede ser obtenida dependen del tipo de cambio inicial y la cota inferior para las posibles paridades.

Caso 1: $a \leq rm$

En este caso $D(x) = 1$ y $P(x) = 0$ para $x \in [a, rm]$, como lo indica la condición (i) y, para $x \in [rm, M]$ se puede diferenciar la ecuación $mD(x) + P(x) = x/r$ y obtener $mD'(x) + P'(x) = \frac{1}{r}$. Combinando la igualdad anterior con la ecuación $xD'(x) = -P'(x)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} mD'(x) + P'(x) &= 1/r \\ mD'(x) - xD'(x) &= 1/r \\ D'(x)(m - x) &= 1/r \\ D'(x) &= -\frac{1}{r(x-m)} \end{aligned}$$

La cantidad de dólares que se obtendrá al final, cuando la paridad alcanza su máximo valor, será igual a la cantidad de dólares obtenidos en el momento en que la paridad alcanza el valor rm, más los dólares acumulados desde ese momento hasta que la paridad alcanza su máximo valor, M; es decir:

$$D(M) = D(rm) + \int_{rm}^{M} D'(x)\,dx = 1 - \frac{1}{r} ln \frac{M-m}{rm-m}$$

La relación anterior permite concluir que la razón de competitividad r se logra si y sólo si $\frac{1}{r} ln \frac{M-m}{rm-m} \leq 1$, recordemos que el monto inicial es 1 dólar y no puede realizarse una inversión mayor. Resulta de interés el caso cuando el tipo de cambio inicial es desconocido en el algoritmo en-línea, así se debe suponer $a = m$, aunque sea muy pesimista. En este caso, la razón de competitividad optimo r^* es la única raíz de la ecuación $r = ln \frac{M-m}{rm-m}$

Caso 2 $a > rm$

En este caso $mD(a) + P(a) = a/r$ y la cantidad de pesos después de la primera transacción satisface $P(a) = a(1 - D(a))$

Por consiguiente, la cantidad de dólares después de la primera transacción está determinada por $D(a) = \frac{a - a/r}{a - m}$.

La cantidad remanente en dólares después de que la tasa alcanza su máximo valor es

$$D(M) = \frac{a - a/r}{a - m} - \int_a^M \frac{1}{r(x-m)} dx = \frac{a - a/r}{a - m} - \frac{1}{r} ln \frac{M-m}{a-m}$$

Por lo que una condición para que se obtenga la razón de competitividad es que la cantidad $D(M)$ sea no negativa.

De los resultados anteriores se puede determinar la razón de competitividad óptima que puede obtenerse en cada caso. Como primer lugar, se determina cuando la razón de competitividad es igual a $\frac{a}{m}$, lo cual se logrará si y sólo si $1-\frac{m}{a}ln\frac{M-m}{a-m}\geq 0$. Por otro lado, si la razón es mayor que $\frac{a}{m}$ (caso 1), la razón de competitividad óptimo será r^*. Pero si por el contrario, se presume menor a $\frac{a}{m}$ (caso 2), la razón de competitividad óptimo será la única raíz de $\frac{a-a/r}{a-m}-\frac{1}{r}ln\frac{M-m}{a-m}=0$, a saber $r=1+\frac{a-m}{a}ln\frac{M-m}{a-m}$

3.1.4 Caso discreto con n, M, m conocidas.

Este caso es similar a la variante 1 (con $a=m$), pero con la siguiente complicación adicional. En la variante 1 es suficiente considerar a un adversario que incrementa el tipo de cambio continuamente hasta llegar a un valor máximo y que es capaz de bajarla a m permanentemente. Aquí tenemos que considerar una clase de adversarios más complejos, que corresponde a todos aquellos que escogen una sucesión del tipo de cambio creciente $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ para todo $k \leq n$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que la cota inferior del tipo de cambio m es igual a 1 y por ello $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ La cota superior M es entonces igual a la razón de fluctuación ϕ. Sea, como en la variante 1, P_i y D_i el número de pesos y dólares obtenidos después de la compra i, respectivamente.

Por la regla 3, el monto total de pesos obtenidos después de cada transacción debe asegurar obtener la razón de competitividad, es decir:

$$D_i + P_i = \frac{a_i}{r}$$

y si recordamos que s_i representa la cantidad de dólares invertidos en la transacción i, entonces

$$s_i = D_{i-1} - D_i$$

Por consiguiente, la cantidad de pesos obtenidos después de la transacción i queda representada por:

$$a_i s_i = P_i - P_{i-1}$$

Ahora bien, consideremos las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} D_{i-1} + P_{i-1} &= \frac{a_{i-1}}{r} \\ D_i + P_i &= \frac{a_i}{r} \end{aligned}$$

restándolas, y aplicando la definición de s_i, se obtiene:

$$\begin{aligned} D_{i-1} - D_i + P_{i-1} - P_i &= \frac{a_{i-1} - a_i}{r} \\ s_i - a_i s_i &= \frac{a_{i-1} - a_i}{r} \\ s_i (1 - a_i) &= \frac{a_{i-1} - a_i}{r} \end{aligned}$$

lo que permite representar a s_i como función del tipo de cambio y la razón de competitividad.

$$s_i = \frac{a_{i-1} - a_i}{r (a_i - 1)} \qquad i = 2, \ldots, n$$

Sin embargo para, $i = 1$, el primer día de inversión

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - D_1 \\ D_1 &= 1 - s_1 \\ P_1 &= a_1 s_1 \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned} D_1 + P_1 &= \frac{a_1}{r} \\ 1 - s_1 + a_1 s_1 &= \frac{a_1}{r} \\ r - r s_1 + r a_1 s_1 &= a_1 \\ r s_1 (a_1 - 1) &= a_1 - r \\ r s_1 &= \frac{a_1 - r}{a_1 - 1} \end{aligned}$$

y

$$s_1 = \frac{1}{r} \frac{a_1 - r}{a_1 - 1}$$

Concluyendo lógicamente que la cantidad de dólares invertida el primer día, depende únicamente del tipo de cambio observada y la razón de competitividad.

Para una sucesión de tipos de cambio creciente $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, la razón de competitividad r será alcanzada si y sólo si la inversión total sobre todo el periodo es menor o igual al monto inicial de inversión, i.e., la sucesión $\{a_i\}$ cumple que $\sum_{i=1}^{k} s_i \leq 1$. La mejor razón de competitividad que el algoritmo basado en el reto puede lograr es la r para la cual $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$. En este caso se hace necesario expresar $\sum s_i$ de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = \frac{1}{r}\frac{a_1 - r}{a_1 - 1} + \sum_{i=2}^{k} s_i$$

Para el caso en que $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$ se tiene la siguiente relación:

$$\frac{1}{r}\frac{a_1 - r}{a_1 - 1} + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i - a_{i-1}}{r(a_i - 1)} = 1$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_1 - r}{a_1 - 1} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i - a_{i-1}}{r(a_i - 1)} \\ \frac{(a_1 - 1)r - r}{a_1 - 1} &= \frac{a_1}{a_1 - 1} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - 1} \\ \frac{a_1 r}{a_1 - 1} &= \frac{a_1}{a_1 - 1} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - 1} \end{aligned}$$

$$r = 1 + \frac{a_1 - 1}{a_1}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - 1} \tag{3.1}$$

Así, para determinar la mínima razón de competitividad obtenida por el algoritmo basado en el reto en un juego de n días, maximizamos r en (3.1) sobre todos los posibles $k \leq n$ y $a_1, a_2, \ldots a_k$ tales que $1 \leq a_1$ y $a_k \leq M$.

Mostraremos cual es el máximo valor de r para un valor fijo a_1. Como se observa, el segundo sumando en r tendrá un valor mayor para $k = n$, $a_n = M$ y todas las razones $\frac{a_i - 1}{a_{i-1} - 1}$ iguales, con $i = 2, 3, \ldots, n$.

Así, si todas las razones fueran iguales podemos decir,

$$\frac{a_1-1}{a_2-1}=\frac{a_2-1}{a_3-1}=\frac{a_3-1}{a_4-1}=\cdots=\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-1}-1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_n-1}$$

lo cual implica de la primera igualdad que:

$$\begin{aligned}(a_2-1)^2 &= (a_1-1)(a_3-1)\\ a_2-1 &= (a_1-1)^{\frac{1}{2}}(a_3-1)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

y de la segunda igualdad,

$$\begin{aligned}(a_3-1)^2 &= (a_2-1)(a_4-1)\\ &= (a_1-1)^{\frac{1}{2}}(a_3-1)^{\frac{1}{2}}(a_4-1)\\ a_3-1 &= (a_1-1)^{\frac{1}{3}}(a_4-1)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

de forma similar

$$\begin{aligned}(a_4-1)^2 &= (a_3-1)(a_5-1)\\ &= (a_1-1)^{\frac{1}{3}}(a_4-1)^{\frac{2}{3}}(a_5-1)\\ a_4-1 &= (a_1-1)^{\frac{1}{4}}(a_5-1)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

Un análisis inductivo muestra que para el caso $n-1$,

$$\begin{aligned}(a_{n-1}-1)^2 &= (a_{n-2}-1)(a_n-1)\\ &= (a_1-1)^{\frac{1}{n-2}}(a_4-1)^{\frac{n-3}{n-2}}(a_n-1)\\ a_{n-1}-1 &= (a_1-1)^{\frac{1}{n-1}}(a_n-1)^{\frac{n-2}{n-1}}\end{aligned}$$

lo que permite determinar que:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n-1}-1}{a_n-1} &= \frac{(a_1-1)^{\frac{1}{n-1}}(a_n-1)^{\frac{n-2}{n-1}}}{a_n-1}\\ &= \frac{(a_1-1)^{\frac{1}{n-1}}}{(a_n-1)^{\frac{1}{n-1}}}\\ &= \left(\frac{a_1-1}{a_n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

Sustituyendo la igualdad anterior en (3.1) y recordando que $a_n = M$, se puede expresar a r como:

$$r = 1 + \frac{a_1 - 1}{a_1}(n-1)\left(1 - \left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) \tag{3.2}$$

Permitiendo considerar a r como una función de a_1 y facilitando el cálculo del máximo valor de r, al considerarla función de a_1

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{da_1} &= \frac{1}{a_1^2}(n-1)\left(1 - \left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) + \\
&\quad + \frac{a_1-1}{a_1}(n-1)\left(-\frac{1}{n-1}\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}-1}\right)\left(\frac{1}{M-1}\right) \\
&= \frac{1}{a_1^2}(n-1)\left(1 - \left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) - \frac{1}{a_1}\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \frac{1}{a_1^2}(n-1) - \frac{1}{a_1}\left(\frac{n-1}{a_1} + 1\right)\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Los puntos críticos deben satisfacer $\dfrac{dr}{da_1} = 0$, o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{1/n-1} &= \frac{\frac{1}{a_1}(n-1)}{\frac{n-1}{a_1}+1} \\
&= \frac{n-1}{(n-1)+a_1}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dada la igualdad anterior,

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} &= 1 - \frac{n-1}{(n-1)+a_1} \\
&= \frac{(n-1)+a_1-(n-1)}{(n-1)a_1} \\
&= \frac{a_1}{(n-1)+a_1}
\end{aligned}$$

Si consideramos la ecuación (3.2) y reemplazamos el resultado anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} r &= 1+\frac{a_1-1}{a_1}(n-1)\left(\frac{a_1}{(n-1)a_1}\right) \\ &= 1+\frac{(a_1-1)(n-1)}{n-1+a_1} \\ &= \frac{a_1 n}{n-1+a_1} \end{aligned}$$

Una relación que permite obtener el valor de a_1 en términos de r

$$\begin{aligned} r(n-1+a_1) &= a_1 n \\ a_1(n-r) &= (n-1)r \\ a_1 &= \frac{r(n-1)}{n-r} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Con esta relación y un poco de algebra se obtiene que:

$$\begin{aligned} a_1-1 &= \frac{r(n-1)}{n-r}-1 \\ &= \frac{r(n-1)-(n-r)}{n-r} \\ &= \frac{n(r-1)}{n-r} \end{aligned} \tag{3.5}$$

y por consiguiente

$$\frac{a_1-1}{a_1} = \frac{\dfrac{n(r-1)}{n-r}}{\dfrac{r(n-1)}{n-r}} = \frac{n(r-1)}{r(n-1)}$$

Partiendo de la igualdad (3.5) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{\dfrac{n(r-1)}{n-r}}{M-1}\right)^{\dfrac{1}{n-1}} = \left(\frac{n}{n-r}\right)^{\dfrac{1}{n-1}}\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\dfrac{1}{n-1}} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-r} &= \frac{a_1-1}{n(r-1)} \\ \frac{n}{n-r} &= \frac{a_1-1}{r-1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Retomando la ecuación (3.3) deducimos que

$$(a_1 - 1)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{n-1}{a_1 + (n-1)}\right) \tag{3.8}$$

y por lo tanto, la ecuación (3.7) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\frac{1}{n-1}} &= \left(\frac{1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{n-1}{a_1 + (n-1)}\right) \left(\frac{1}{r-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{n-1}{a_1 + (n-1)}\right)
\end{aligned}$$

Recordando el valor de a_1 como función de r, (3 4), entonces,

$$\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{n-r}{n}\right)$$

deduciendo que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n-r} &= \left(\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n}}
\end{aligned}$$

así que,

$$\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n(n-1)}}$$

La igualdad anterior y la ecuación (3.5) permiten obtener la última relación entre el radio de competitividad y el tipo de cambio inicial.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} &= \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{-1}{n(n-1)}} \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones obtenidas con anterioridad, permiten calcular el máximo valor que r puede alcanzar.

$$
\begin{aligned}
1-\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} &= 1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}} \\
\frac{a_1-1}{a_1}(n-1)\left(1-\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) &= \frac{n(r-1)(n-1)}{r(n-1)}\left(1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \frac{n(r-1)}{r}\left(1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

Si recordamos que

$$
r = 1+\frac{a_1}{a_1-1}(n-1)\left(1-\left(\frac{a_1-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)
$$

podemos reescribir la ecuacion como.

$$
r = 1+\frac{n(r-1)}{r}\left(1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)
$$

o equivalentemente

$$
r-1 = \frac{n(r-1)}{r}\left(1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)
$$

Así, el máximo valor que puede alcanzar r, denotado por r_n, es

$$
r_n = n\left(1-\left(\frac{r-1}{M-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \qquad \text{para } n \geq 2
$$

Por consiguiente, la cantidad r_n es la razón de competitividad del algoritmo basado en el reto En la siguiente sección se demostrará que ningún otro algoritmo en-línea puede alcanzar una razón de competitividad menor.

Para finalizar, concluimos que dada la elección óptima de las a_i's, la mejor inversión es obtenida al convertir diariamente $\frac{1}{n}$ dólares. Tal conclusión se obtiene al recordar que

$$a_1 = \frac{r(n-1)}{n-r}$$

y que el monto de inversión el primer día de transacción está determinado por:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{r}\frac{a_1 - r}{a_1 - 1} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\frac{r(n-1)}{n-r} - r}{\frac{r(n-1)}{n-r} - 1} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por otra parte, observamos que dadas las condiciones bajo las cuales se logra alcanzar la razón de competitividad menor, conducen a invertir todos los días cantidades iguales de dólares. Recordemos que

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{r}\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - 1} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a_{i-1} - 1}{a_i - 1}\right) \\ &= s_j \qquad \forall\ i, j \end{aligned}$$

dado que todas las razones $\frac{a_i - 1}{a_{i-1} - 1}$ son iguales para $i = 2, \ldots, n$

Resta verificar que $s_i = \frac{1}{n}$ para todo i Como inicialmente anotamos, el monto total de inversión debe satisfacer, $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$, partiendo de ello:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=2}^{n} s_i + s_1 \\ &= \sum_{i=2}^{n} s_i + \frac{1}{n} \\ &= (n-1)\, s_i + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$s_i = \frac{1 - \frac{1}{n}}{(n-1)} = \frac{1}{n}$$

Así, contra un adversario óptimo el algoritmo basado en el reto obedece a la decisión de invertir empleando una estrategia de costo promedio por dólar, en la cual cada día se invierte un número igual de dólares.

3.1.5 Cota mínima

Proposición 2 *Ningún algoritmo en-línea puede obtener una razón de competitividad menor a la lograda por el algoritmo basado en el reto*

Demostración

La demostración se realiza bajo los supuestos de la variante 2 (Caso discreto: n, M, y m conocidas).

Iniciemos denotando por $P_{S^*}(a)$ el monto en pesos obtenido por la estrategia S^* al aplicar el algoritmo basado en el reto a la sucesión de tipos de cambio a, y sea a^* la sucesión del tipo de cambio que hace que la estrategia S^* alcance la razón de competitividad r^* En otras palabras,

$$r^* = \frac{P_{Opt}(a^*)}{P_{S^*}(a^*)} = \sup_{a \in \Omega} \frac{P_{Opt}(a)}{P_{S^*}(a)}$$

donde $P_{Opt}(a^*)$ y $P_{Opt}(a)$ denotan el monto en pesos obtenido al aplicar la estrategia óptima off-line Opt a las sucesiones a^* y a respectivamente.

La demostración se basa en mostrar que ningún otro algoritmo determinístico logra alcanzar una razón de competitividad menor a r^*. Es decir, que dada cualquier estrategia de conversión determinística S existe una sucesión de tipos de cambio a^0 para la cual

$$\frac{P_{Opt}(a^*)}{P_{S^*}(a^*)} \leq \frac{P_{Opt}(a^0)}{P_S(a^0)}$$

y por lo tanto

$$r^* = \sup_{a \in \Omega} \frac{P_{Opt}(a)}{P_{S^*}(a)} \leq \sup_{a \in \Omega} \frac{P_{Opt}(a)}{P_S(a)}$$

Para iniciar con la demostración considérese un argumento de adversario simple, en donde la estrategia del adversario es independiente de los resultados obtenidos por la estretegia del jugador.

Sea $a^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ la sucesión bajo la cual S^* alcanza la razón de competitividad r^* vendiendo $\frac{1}{n}$ dólares diariamente

Para cualquier estrategia alternativa S se tienen las siguientes posibilidades

a) Si el primer día i que S no vende la misma cantidad que S^* vende algo menor; el adversario detiene el juego, forzando a convertir los dólares remanentes a la tasa más baja posible m De esta manera S bajo la sucesión $a^0 = \{a_1, \ldots, a_i, m, \ldots m\}$ obtendrá una razón mayor a r^*.

Para observar lo anterior recordemos que el algoritmo basado en el reto asegura obtener la razón r^* en cualquier día de inversión, i. e., satisface la ecuación

$$m\left(D\left(i\right) - s\left(i\right)\right) + s\left(i\right) a_i = \frac{a_i}{r^*}$$

para $i = 1, \ldots, n$

Si el algoritmo S el día i invierte s_o dólares con $s_o < s\left(i\right)$, se cumple que

$$m\left(D\left(i\right) - s_o\right) + s_o a_i < m\left(D\left(i\right) - s_i\right) + s_i a_i = \frac{a_i}{r^*}$$

mientras que el adversario al aplicar un algoritmo off-line obtendrá a_i pesos, por ser a_i la tasa más alta observada. Por lo tanto se tiene que

$$r* = \frac{a_i}{a_i/r^*} < \frac{a_i}{P_S\left(a^0\right)}$$

y por consiguiente

$$r^* \leq \sup_{a\in\Omega} \frac{P_{Opt}\left(a\right)}{P_S\left(a\right)}$$

b) Si el primer día i que S no vende la misma cantidad que S^* vende un poco más, el adversario continua el juego y lo termina el primer día j después de que el total ρ_j vendido por S es menor o igual a nuestro total $\frac{j}{n}$ Ante tal situación, se puede diseñar una estrategía S' que convierte la misma cantidad ρ_j de dólares al final del día j pero obtiene más pesos que S, y aún no obtiene la razón r^*.

La estrategia S' obedece a la siguiente regla: convertir la misma cantidad que la estrategia S^* en los primeros $j-1$ días ($\frac{j-1}{n}$ en total), $\rho_j - \frac{j-1}{n}$ el día j y después continúa con S.

Obsérvese que $\rho_j - \frac{j-1}{n} \leq s(j)$ ya que $s(j) = \frac{1}{n}$ por lo que dada la construcción de S', $P_{S'}(a^0)$ con $a^0 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_j\}$ satisface la desigualdad

$$P_S(a^0) \;<\; P_{S'}(a^0) \;<\; \frac{a_j}{r^*}$$

y por lo tanto

$$r* \;<\; \frac{P_{Opt}(a^0)}{P_{S'}(a^0)} \;<\; \frac{P_{Opt}(a^0)}{P_S(a^0)}$$

consecuentemente

$$r^* \;\leq\; \sup_{a \in \Omega} \frac{P_{Opt}(a)}{P_S(a)}$$

Lo cual muestra que ningún algoritmo determinístico S logra una razón de competitividad mejor que la lograda por el algoritmo basado en el reto.

3.1.6 Algunos resultados prácticos

Errores en los supuestos acerca de la sucesión del tipo de cambio.

¿Qué pasa si los supuestos acerca de la sucesión de tipos de cambio es incorrecta? Consideremos por ejemplo, el caso en el cual la cota superior en los posibles tipos de cambio es subestimada. Es decir, $M' = cM$ es la verdera tasa máxima, donde $c > 1$. El jugador en-línea puede jugar con $r = r_n$. En el peor de los casos con respecto a la sucesión de tipos de cambio $a_{n-1} = M$ y $a_n = M'$ la estrategia en-línea cambiará todos los dólares de que dispone antes del último día, por lo tanto adquirirá al menos $\frac{M}{r_n}$ pesos. En la misma sucesión, OPT adquirirá M' pesos. La razón obtenida será:

$$\frac{M'}{M/r_n} = cr_n,$$

c veces la razón que el jugador deseaba.

Estrategia mejorada contra un adversario torpe

La estrategia de conversión simple es una actitud pesimista dado que r es fijada en el momento en que la primera transacción (operación de ejercicio) es realizada y basándose en el supuesto de que la sucesión del tipo de cambio es la peor que puede ocurrir y la cual no cambia en lo sucesivo. Sin embargo, cuando las tasas varían de la peor sucesión, se puede recalcular r modificando la razón entre los algoritmos off-line y en-línea. Al iniciar cada día de operación, el jugador en-línea tiene un número D de dólares y alguna cantidad P de pesos. El jugador conoce el número de días restantes $n\prime$ y una paridad actual a. El jugador actúa como si el día actual fuera el primer día de operación y los $n\prime$ días fueran el periodo en el cual se realizará la conversión. Por argumentos similares a los empleados anteriormente, se determina una expresión para r la cual es maximizada sobre los tipos de cambio restantes. La cantidad s de dólares que se cambian, está dada por:

$$s = \frac{a - r\,(P + D)}{r\,(a-1)}$$

donde

$$r = \frac{a + (a-1)\,(n\prime - 1)\left(1 - \left(\dfrac{a-1}{M-1}\right)^{\dfrac{1}{n\prime - 1}}\right)}{aD + P}$$

3.2 Aplicación a la opción Banxico.

La atención en esta segunda parte del capítulo, se centrará en emplear los resultados obtenidos anteriormente en la aplicación al ejercicio de la Opción Banxico. Para tales efectos, iniciaremos considerando a una institución de crédito, un Banco, al cual, mediante la subasta de opciones de venta de dólares le ha sido asignado un monto D de dólares.

Una institución en general, adquiere un instrumento financiero pensando en satisfacer un objetivo en particular. Así, podemos pensar que un Banco adopta una posición larga en la opción Banxico, pensando en:

i) Cambiar una cantidad D de dólares a pesos, garantizándose obtener la mejor paridad posible, o bien

ii) Comprar dólares en el mercado y venderlos al Banco de México a una paridad mayor.

Sea cual sea la postura que se asuma, lo importante es que la dos alternativas se realizan mediante operaciones de mercado distintas. Así, para determinar una política óptima de ejercicio se requiere abordar los dos casos por separado.

3.2.1 Caso 1. Garantizar la mejor paridad

Una característica importante de la opción Banxico es, sin duda alguna, la posibilidad de un ejercicio parcial durante el plazo de vigencia, siempre que el tipo de cambio de ejercicio no sea mayor al tipo de cambio de venta máximo[1].

La relación que debe guardar el tipo de cambio de ejercicio con respecto al de venta máximo, en un día determinado, para un posible ejercicio, no representa un grado de incertidumbre mayor al existente en el comportamiento del tipo de cambio fix. Para el algoritmo en-línea, lo relevante es conocer, día con día, el tipo de cambio de ejercicio y el de venta máximo y así poder determinar si el tipo de cambio de ejercicio puede ser considerado *factible,* es decir, si se puede realizar una conversión de dólares a pesos, mediante el ejercicio de la opción.

Así, el algoritmo en-línea, versión discreta, tiene su aplicación sobre $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$, la sucesión de tipos de cambio factibles y no sobre la sucesión de tipos de cambio observados $\{fix_i\}$. La redefinición de A no representa modificaciones en los supuestos del algoritmo basado en el reto; la dinámica operativa es la misma, lo que garantiza que los resultados obtenidos tienen una aplicación directa al ejercicio de la opción Banxico

Por consiguiente, la política óptima[2] de ejercicio para la opción Banxico empleando un algoritmo en-línea obedece a una estrategia de costos promedio por dólar, en la cual cada día se invierte un número igual de dólares.

Adicionalmente, se pueden modificar la regla 1, del algoritmo basado en el reto, y pedir que al final del juego (el último día de vigencia de la opción) solo se cambie el remanente cuando el ejercicio de la opción sea adecuado (el fix del día sea mayor al tipo de cambio del mercado); ya que podría ser preferible no ejercer la opción y realizar la venta de dólares en el mercado.

Además, es recomendable no asumir una posición pesimista y emplear la estrategia mejorada[3], considerando la sucesión de tipos de cambio factibles y recalculando diariamente

[1] Parte I. Subastas de opciones de venta de dólares de los EE.UU.A

[2] Óptima en el sentido de que ningún otro algoritmo en-línea obtiene una razón de competitividad menor.

[3] 3.1.7 Algunos resultados prácticos. Estrategia mejorada contra un adversario torpe.

la razón de competitividad r; e iniciar cada día *pensando que el día actual es el primer día* de operación y los n' días restantes, el periodo en el cual se realizará la conversión.

3.2.2 Caso 2. Compra de dólares en el mercado y ejercicio de la opción.

En este caso, consideramos a un Banco que inicialmente posee pesos, pero que cuenta con el mecanismo para cambiarlos a dólares y así, poder venderlos al Banco de México através del ejercicio de la opción.

Es importante hacer notar que en estricto sentido, éste no es el problema de conversión bidireccional, en el cual la conversión de dólares a pesos y de pesos a dólares, son operaciones independientes. Se realiza la conversión de pesos a dólares cuando el tipo de cambio es "bajo" y la de dólares a pesos cuando el tipo de cambio es "alto".

En nuestro caso, la compra de dólares se determina por la posibilidad de obtener una ganancia, adquiriendo dólares a una paridad menor a la que serán vendidos a Banxico Por lo tanto, la compra de dólares siempre se realiza seguida del ejercicio de la opción, por el monto de dólares adquiridos en la primera operación.

Por esta razón, es necesario establecer la relación que debe existir entre el tipo de cambio de compra, tasa spot tc, y el tipo de cambio de ejercicio, fix; para determinar un posible ejercicio. Sin perder generalidad y por la definición misma del fix, se puede suponer que para un día de operación i, el tipo de cambio de ejercicio fix_i es aproximadamente la tasa spot del día anterior, tc_{i-1}.

Así, garantizar una ganancia en un día de operación i mediante la compra-venta de dólares, significa garantizar que el tipo de cambio de compra $tc_i \approx fix_{i+1}$ es menor al tipo de cambio de ejercicio fix_i. Si al inicio de un día de operación i, el banco posee P_i pesos y compra dólares en el mercado podrá adquirir $\frac{P_i}{fix_{i+1}}$ dólares; los que posteriormente venderá a Banxico a un tipo de cambio fix_i, garantizándose una ganancia neta de:

$$\frac{P_i}{fix_{i+1}} fix_i - P_i = P_i \left(\frac{fix_i}{fix_{i+1}} - 1 \right)$$

que bajo la premisa de $fix_i > fix_{i+1}$, resulta ser positiva.

De ahí se desprende que el análisis central se realice sobre la sucesión $\left\{ \frac{fix_i}{fix_{i+1}} \right\}$ y no sobre la sucesión $\{fix_i\}$, como en el caso general.

Como es suponerse, se pueden presentar distintas situaciones durante el periodo de vigencia de la opción, como son:

i) Que nunca se observe que la relación $\frac{fix_i}{fix_{i+1}} > 1$ se satisfaga, para $i = 1, \ldots, 20$

ii) Que la relación $\frac{fix_i}{fix_{i+1}} > 1$ se satisfaga al menos un día de operación.

Bajo la circunstancia *i*), el ejercicio de la opción no se realiza y se asume que la ganancia asociada es cero. Sin embargo, para la circunstanica *ii*) es necesario emplear un algoritmo en-línea para determinar la política óptima de ejercicio.

Mediante la aplicación de la variante 2 del algoritmo basado en el reto[4] es suficiente considerar adversarios que escogen una sucesión de tipos de cambio creciente $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ para todo $k \leq n$. Sin embargo para nuestro caso, es necesario considerar todas las sucesiones de tipo de cambio *factibles*, durante un plazo de vigencia de la opción, 20 días.

Sea $\{a\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{20}\}$ una sucesión de tipos de cambios y $\{b\} = \left\{\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right\}$ la sucesión de cocientes de estas paridades. Como se hizo notar anteriormente, el ejercicio de la opción queda determinado por el cumplimiento de la desigualdad $\frac{x_{i-1}}{x_i} > 1$; es decir, únicamente se consideran los días en que el ejercicio es *factible* y óptimo. Por tanto, para aplicar el algoritmo basado en el reto es necesario tomar la sucesión $\{c\}$, subsucesión creciente de $\{b\}$, tal que:

$$\{c\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \text{ con } y_i > 1 \qquad \text{para toda } i = 1, \ldots, s-1$$

Además, se requiere considerar los valores extremos (máximo y mínimo) que pueden tomar las variaciones $\frac{x_{i-1}}{x_i}$. Así, sean:

d_M la máxima variación que se espera observar durante la vigencia de la opción

d_m la mínima variación que se puede obtener durante la vigencia de la opción.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que el Banco inicia con una cantidad $R_0 = 1$ de pesos. Sea H_i la cantidad de pesos acumulada (ganancia acumulada) y R_i el remanente, en pesos, por ejercer de la opción; obtenidos después de realizar la operación de compra-venta

[4] 3.1.4 Caso discreto con n, M, m conocidas

i (es decir, después de comprar a la tasa x_i y vender a x_{i-1}). Entonces, si y_i es la máxima variación observada hasta ese momento, por la regla 3 del algoritmo basado en el reto,

$$\frac{y_i - 1}{H_i + R_i d_m - 1} = r$$

Y, si s_i representa la cantidad de pesos invertidos en la compra de dólares en la operación i, entonces se tiene que el remanente anterior menos el monto invertido determinan el remanente actual, es decir: $s_i = R_{i-1} - R_i$. La ganancia bruta obtenida esta determinada por el monto invertido a la variación y_i es decir, $y_i s_i$. Y por lo tanto, la ganancia bruta acumulada H_i satisface:

$$\begin{aligned} H_i &= H_{i-1} + y_i s_i \\ y_i s_i &= H_i - H_{i-1} \end{aligned}$$

En general, para cualquier día i

$$(H_{i-1} + R_{i-1} d_m) - 1 = \frac{y_{i-1} - 1}{r}$$

y en particular para el día $i+1$

$$(H_i + R_i d_m) - 1 = \frac{y_i - 1}{r}$$

Restando las dos ecuaciones anteriores y empleando las relaciones existentes con el monto invertido s_i, obtenemos que:

$$s_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{(y_i - d_m) r}$$

y para $i = 1$,

$$s_1 = \frac{y_1 - r d_m + (r-1)}{(y_1 - d_m) r}$$

Nuevamente observamos que la cantidad de dólares invertida el primer día, depende únicamente de las observaciones del tipo de cambio, de la razón de competitividad y de la mínima variación esperada.

Para una sucesión de variaciones creciente $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$, la razón de competitividad r será alcanzada si y sólo si la inversión total sobre todo el periodo es menor o igual al monto inicial de inversión, i.e., la sucesión $\{y_i\}$ satisface que $\sum_{i=1}^{k} s_i \leq 1$. La mejor razón de competitividad que el algoritmo basado en el reto puede lograr es la r para la cual $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$. Un cálculo similar al desarrollado en el modelo general, muestra que r, la razón de competitividad del algoritmo basado en el reto se define mediante la ecuación implícita

$$r = 20\left(1 - \left(\frac{r-1}{(d_m - 1)(d_M - d_m)}\right)\right)^{\frac{1}{20}}$$

Al realizar un poco de algebra después de haber obtenido el valor de r, concluimos que la bajo la elección óptima de las y_i´s, la mejor inversión nuevamente es obtenida al convertir diariamente $\frac{1}{n}$ dólares, lo cual puede ser enunciado en el siguiente teorema

Teorema 3 *La política óptima de ejercicio para la opción Banxico obedece a una estrategia de costos promedio por dólar.*

Se recomienda adicionalmente el empleo de una estrategia mejorada, tomando a la sucesión de cocientes de tipos de cambio factibles y recalculando diariamente la razón de competitividad r; e iniciar cada día pensando que el día actual es el primer día de operación y los $n\prime$ días restantes, el periodo de vigencia de la opción.

Capítulo 4

Máxima utilidad esperada

En el capítulo anterior se empleó una técnica frecuentemente usada en la modelación, suponer el mínimo conocimiento del comportamiento del tipo de cambio Pero, ¿qué tan cierto es?, cuando se piensa en las instituciones de crédito y en la infraestructura con la que cuentan es imposible evitar incluir la información que generan, en cuando al comportamiento del tipo de cambio, en un modelo alternativo. Este modelo no sólo incorpora la información propia de cada institución de crédito, además, rescata y modela una característica importante de la opción cambiaria, ser path-dependent.

Pensar en que una institución de crédito, al igual que cualquier otro inversionista, tiene como objetivo obtener la máxima ganancia posible en sus inversiones, permite establecer como criterio de decisión: Obtener una política para el ejercicio de la opción que permita generar la máxima ganancia posible.

Un banco, a través de sus áreas de análisis, estima para diversos propósitos el valor del tipo de cambio a corto y/o largo plazo. Una estimación que requiere del análisis de factores micro y macroeconómicos, de mercado, políticos, sociales, etc ; y que bien puede ser empleada para asignar una función de probabilidad a las fluctuaciones de la paridad.

Para iniciar la construcción del modelo es necesario introducir cierta notación. Sea M_1 el monto total de la opción asignado a una institución de crédito (en dólares) el primer día de vigencia de la opción Así, para el inicio de cualquier día i, M_i denota el remanente en dólares a ejercer y fix_i el tipo de cambio fix vigente (precio de ejercicio) y publicado ese día en el Diario Oficial Por consiguiente, se tiene que el remanente en pesos está determinado por $M_i fix_i$.

Ahora bien, si suponemos que el día i el banco realiza una transacción para comprar dólares en el mercado por un monto equivalente a k_i pesos, a una tasa de cambio tc_i pesos por dólar, entonces $\frac{k_i}{tc_i}$ representa la cantidad de dólares comprados en el mercado y vendidos a Banco de México. De tal forma que al final de esta transacción se habrá generado una ganancia expresada en pesos, igual a:

$$\frac{k_i}{tc_i} fix_i - k_i = \left(\frac{fix_i}{tc_i} - 1 \right) k_i$$

Si la opción tiene un plazo de vigencia de n días y el banco diariamente realiza una inversión de k_i pesos, entonces la ganancia generada al vencimiento de la opción será la suma de las ganancias obtenidas en cada inversión. El objetivo de determinar una política que garantice obtener la máxima ganancia al vencimiento de la opción, se puede expresar en términos matemáticos como:

$$\max_{k_o, \ldots, k_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{fix_i}{tc_i} - 1 \right) k_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{tc_i} \leq M_1$$

$$k_i \geq 0$$

$$tc_i \text{ es una v. a.}$$

Para resolver este problema con un enfoque de programación lineal, es conveniente introducir alguna herramienta teórica que nos servirá como marco para la construcción del primer modelo y el primer resultado estructural. Se empleará la representación de un proceso estocástico como una *"gráfica multipartita acíclica con ganancias constantes en los vértices"*(para conceptos de Teoría de gráficas consultar Bondy [2] y Chartrand [4]). Es conveniente mencionar que este primer modelo no considera las restricciones de ejercicio de la opción, las cuáles serán incluídas en un modelo posterior.

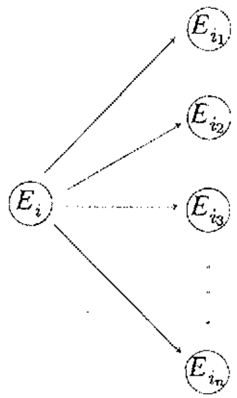
4.1 Procesos estocásticos representados por gráficas

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico, donde $E = \{E_1, E_2, \ldots\}$ denota el conjunto de todos los posibles estados del sistema.

Si suponemos que E es un conjunto finito, se puede generar una representación gráfica del proceso para todo tiempo t, definida por $G = (V, A)$ donde V (los vértices) es el conjunto de estados del sistema y A (las aristas) representa el conjunto de transiciones posibles entre los estados, es decir:

$$(E_i, E_j) \in A \quad \text{Si el proceso al tiempo } t \text{ puede entrar en el estado } E_i \text{ y pasar al estado } E_j \text{ al tiempo } t+1$$

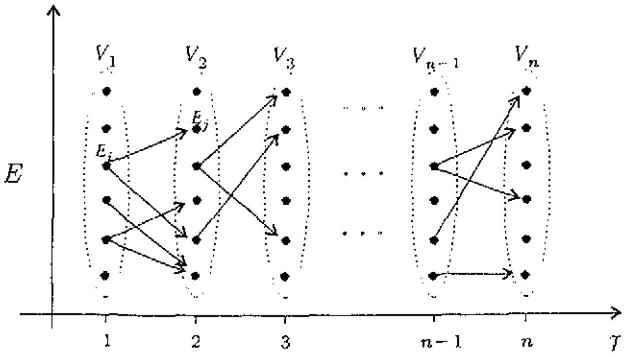
Lo cual significa que si el proceso estando en el estado E_i al tiempo t, puede pasar a los estados $E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}$ en el tiempo $t+1$, entonces las aristas (E_i, E_{i_j}) con $j = 1, \ldots, n$; serán todas adyacentes en el vértice E_i



Al considerar el producto cartesiano entre el conjunto de estados E y el tiempo, $T = \{1, 2, \ldots, n\}$, se generará una *gráfica multipartita acíclica*[1] del proceso, definida por:

$$G' = (A', V_1, V_2, \ldots V_n) \quad \text{donde } V_i \text{ son copias de } V \quad \text{para } i = 1, \ldots, n; \text{ y}$$
$$A' = \{(E_i, E_j) \mid E_i \in V_i,\ E_j \in V_j \text{ y } (E_i, E_j) \in A\}$$

[1] Obsérvese que como el proceso varía en el tiempo, por definición, no existe $(E_{i_1}, E_{i_2}) \in A$ con $E_{i_1}, E_{i_2} \in V_i$, para toda i.



Como se puede asignar una función de probabilidad a las posibles transiciones de pasar de un estado E_i a un estado E_j (*probabilidad de transición*), se distinguen por lo tanto dos tipos de procesos: a) Los procesos homogeneos, donde la probabilidad de transición es constante en el tiempo, es decir no depende del tiempo t en el que el proceso alcance el estado E_i y, b) los procesos no-homogeneos donde la probabilidad de transición varía y depende del tiempo en el cual el proceso alcanza el estado E_i.

La representación gráfica de procesos estocásticos permite trabajar procesos aún más generales admitiendo por ejemplo, variaciones entre el conjunto de los estados posibles en cada tiempo. Aún más, se puede extender a procesos con un número infinito de estados usando para ello gráficas infinitas.

Para propósitos de nuestro análisis es conveniente restringirnos a procesos de "*Markov finitos y no-homogeneos*". Como veremos a continuación, las características propias de estos procesos permiten una adaptación adecuada al comportamiento de la paridad peso/dólar y por consiguiente, proveen de la herramienta necesaria para obtener un resultado.

Definición *Un Proceso estocástico $\{X_t;\, t \in T\}$ es llamado un Proceso de Markov, si, para todo $E_i \in E$,*

$$P\left\{X_t = E_t \mid X_{t-1} = E_{t-1}, \ldots, X_o = E_o\right\} = P\left\{X_t = E_t \mid X_{t-1} = E_{t-1}\right\}$$

En otras palabras, son procesos que no tienen memoria y en los cuales la probabilidad condicional de transición de un estado a otro depende exclusivamente de los estados. Por tanto, la probabilidad condicional de transición de E_j a E_k, en el tiempo t, $p_{jk}(t)$, se define como.

$$p_{ij}(t) = P\left\{X_t = E_k \mid X_{t-1} = E_j\right\}$$

Gráficamente, a cada arista (E_j, E_k) de G se le puede asociar la probabilidad condicional p_{jk} correspondiente

$$E_j \xrightarrow{p_{jk}} E_k$$

Nótese, que $p_{jk}(t)$, puede tener valores distintos, dependiendo del tiempo en el cual el proceso llegue al estado E_j, i.e., $p_{jk}(1)$ puede, y de hecho lo es, distinto a $p_{jk}(5)$. Sin embargo, por simplicidad en la notación, en lo subsecuente denotaremos a $p_{jk}(t)$ únicamente por p_{jk}; recordando que en la representación gráfica existe una relación biunívoca entre las aristas y las $p_{jk}(t)$

Adicionalmente a las p_{jk}, consideremos como a_k la probabilidad de que el proceso inicie en el estado E_k; es decir, consideremos la probabilidad de iniciar en cada uno de los estados posibles

La probabilidad de transición

$$P\{X_{t+n} = E_k \mid X_t = E_j\}$$

es la probabilidad de pasar del estado E_j al estado E_k en n pasos o periodos de tiempo. También conocida como la probabilidad de transición de n-pasos, es denotada por

$$p_{jk}^{(n)} = P\{X_{t+n} = E_k \mid X_t = E_j\}$$

Así,

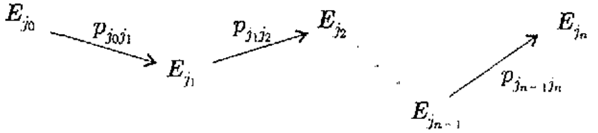
$$p_{jk}^{(1)} = p_{jk}$$

Para ampliar la definición para $n \geq 0$, definimos

$$p_{jk}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}$$

Si $E_{j_0}E_{j_1}E_{j_2}\cdots E_{j_n}$ representa una sucesión muestral (gráficamente una trayectoria), la probabilidad de la trayectoria, equivale a la probabilidad, a_{j_0}, de iniciar en el estado E_{j_0} multiplicada por la probabilidad de pasar del estado E_{j_k} al estado $E_{j_{k+1}}$; con $k = 0, \ldots, n$ Es decir,

$$P\left(E_{j_0}E_{j_1}E_{j_2}\cdots E_{j_n}\right) = a_{j_0}p_{j_0j_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j_n}$$

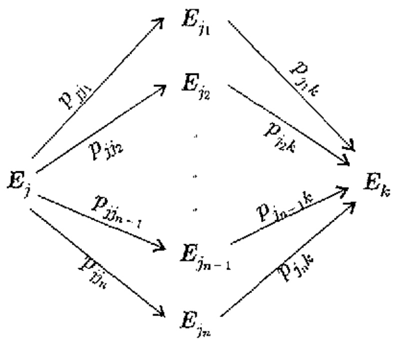


Si todas las trayectorias inician en un estado fijo E_0, entonces $a_0 = 1$, y la probabilidad de una trayectoria del estado E_0 a E_k queda expresado por:

$$P\left(E_0 E_{0_1} \ldots E_{0_{n-1}} E_k\right) = p_{00_1} p_{0_1 0_2} \cdots p_{0_{n-1}k}$$

Ahora bien, como existen más de una trayectoria entre un par de estados, definimos la probabilidad de transición de E_j a E_k en n pasos, dado el estado inicial E_j, como la suma de las probabilidades de todas las trayectorias posibles $E_j E_{j_1} \ldots E_{j_{n-1}} E_k$, de longitud n, que empieza en E_j y terminan en E_k. En particular

$$\begin{aligned} p_{jk}^{(1)} &= p_{jk} \\ p_{jk}^{(2)} &= \sum_v p_{jv} p_{vk}^{(1)} \qquad \forall j, k \end{aligned}$$



Por un método inductivo se puede obtener la fórmula general de recursión

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_v p_{jv} p_{vk}^{(n)}$$

Una nueva inducción sobre m nos conduce a la identidad básica

$$p_{jk}^{(m+n)} = \sum_v p_{jv}^{(m)} p_{vk}^{(n)}$$

En donde se refleja el hecho de que los primeros m pasos conducen desde E_j hasta algún estado intermedio E_v, y que las probabilidades de un paso posterior de E_v a E_k no dependen de la forma en que se haya alcanzado E_v

Así, consideremos que el proceso inicia en un estado fijo E_0, con una probabilidad de entrar a E_k en el n-ésimo paso de $p_{0k}^{(n)}$

Una observación importante es que en todo tiempo t el proceso debe encontrarse en algún estado. Esta observación se encuentra demostrada en la siguiente proposición.

Proposición 4 *La suma de las probabilidades sobre todos los posibles estados del sistema, para todo tiempo t es 1.*

Demostración
Se desea demostrar que $\sum_k p_{ok}^{(t)} = 1$ para todo t.
Realizando inducción sobre t.
Si $t = 0$

$$\sum_k p_{0k}^{(0)} = p_{00} + \sum_{k \neq 0} p_{0k}^{(0)} = 1 + 0 = 1$$

Si $t = 1$

$$\sum_k p_{0k}^{(1)} = \sum_k p_{0k} = 1$$

Dado que la suma se realiza sobre todos los posibles estados del sistema en el tiempo $t = 1$ y ninguno queda excento.

Nótese además que $\sum_k p_{jk} = 1$ para todo j.

Ahora bien, supóngase cierto que $\sum_k p_{0k}^{(n)} = 1$ y demostremos que:

$$\sum_k p_{0k}^{(n+1)} = 1$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_k p_{0k}^{(n+1)} &= \sum_k \sum_v p_{0v}^{(n)} p_{vk}^{(1)} = \\
&= \sum_v p_{0v}^{(n)} \sum_k p_{vk}^{(1)} = \\
&= \sum_v p_{0v}^{(n)} \sum_k p_{vk} = \\
&= \sum_v p_{0v}^{(n)} = 1
\end{aligned}$$

La afirmación queda probada para cualquier tiempo t.

La notación establecida y los conceptos definidos anteriormente, nos proporcionan la herramienta necesaria para conceptualizar al tipo de cambio como un proceso estocástico de Markov. La representación gráfica del proceso constituye la base para la construcción del primer modelo y la formulación del problema de optimización del cual se desprende el primer resultado estructural

4.2 Modelo 1. Digráficas acíclicas con ganancias "constantes" asociadas a los vértices.

Recordemos que la ganancia generada al ejercer la opción un día i, está determinada por el valor de la paridad, tc_i, el precio de ejercicio, fix_i, y el monto ejercido, k_i.

Como el fix para el día $i+1$ es derivado del valor del tipo de cambio en el día i, es conveniente considerar a fix_{i+1} como una buena aproximación para tc_i. Así, se puede *construir una función unitaria de utilidad en términos del fix*, definida por:

$$\left(\frac{fix_{i-1}}{fix_i} - 1\right) \tag{4.1}$$

Si $X\{t\}$ representa el proceso estocástico que sigue el fix, se puede observar que $X\{t\}$ tiene como características ser de Markov, finito y no-homogeneo. Los estados re- presentan los posibles valores que puede tomar el fix y, la probabilidad de transición de un valor a otro no depende de su comportamiento histórico sino de las condiciones económicas, políticas o sociales que determinan el valor actual y la posible variación para el día de mañana. Por otra parte, aunque la paridad en dos periodos distintos puede tener el mismo valor, las condiciones del sistema financiero mexicano en ambos periodos son diferentes y en consecuencia, las probabilidades asociadas a las posibles fluctuaciones en los dos periodos deben ser distintas, lo que lo hace un proceso no-homogeneo.

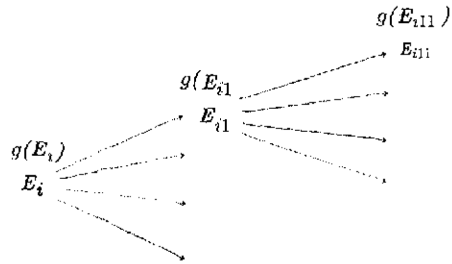
Al ser $X\{t\}$ markoviano, finito y no homogeneo; puede ser representado por medio de una digráfica acíclica[2], donde cada vértice representa un posible valor del fix y al cual se

[2] 4.1 Procesos estocásticos representados por gráficas

le puede asociar la ganancia unitaria definida por 4.1 (dependiente del estado actual y del precedente)

En forma general, consideremos un horizonte finito con t días donde cada vértice representa un valor real positivo. Asociemos a cada estado posible del sistema, E_i, una ganancia unitaria $g(E_i)$, con

$$g(E_i) = c_i \geq 0$$



La ganancia esperada unitaria asociada al estado E_i que puede ser alcanzado en el periodo t, desde el estado inicial E_0, es igual a la ganancia unitaria asociada al estado E_i multiplicada por la probabilidad de transición de E_0 a E_i, i. e.,

$$g(E_i)^{(t)} = p_{0i}^{(t)} g(E_i)$$

Ahora bien, si el día i se decide invertir una cantidad k_i, entonces la ganancia esperada para ese día se obtiene al sumar las ganancias esperadas de todos los estados posibles en los que el sistema puede entrar cuando ha iniciado en el estado E_0, multiplicada por la cantidad invertida, es decir:

$$k_i \sum_v g(E_v)^{(t)}$$

Establecer como objetivo el determinar el monto a invertir diariamente, k_i, durante un periodo de n días de tal forma que se maximice la ganancia esperada equivalente a maximizar la suma de las ganancias esperadas obtenidas diariamente, durante n días, es decir:

$$k_0 g(E_0) + k_1 \sum_v g(E_v)^{(1)} + k_2 \sum_v g(E_v)^{(2)} + \cdots + k_n \sum_v g(E_v)^{(n)}$$

Por otro lado, observemos que $\sum_v g(E_v)^{(t)}$, para $t = 1, \ldots, n$; son valores conocidos y constantes (dentro de la modelación) una vez que se han asignado las probabilidades de transición. En consecuencia, maximizar la ganancia esperada se puede expresar como un problema tradicional de programación lineal

$$\max_{k_o, \ldots, k_n} \quad c_o k_o + c_1 k_1 + \ldots + c_n k_n$$

sujeto a

$$\sum_i^n k_i = K$$

$$k_i \geq 0$$

$$c_i \geq 0$$

donde el valor óptimo se localiza en uno de los vértices, es decir, haciendo alguna $k_i = K$ y las demás $k_j = 0$ para toda j distinta de i (Bazarra [2]).

El análisis anterior permite formular el siguiente resultado estructual.

Teorema 5 *Si se desea invertir una cantidad M durante un periodo de n días de forma tal que la ganancia esperada obtenida sea máxima, donde la ganancia en cada transacción depende de una variable aleatoria $X\{t\}$ con un comportamiento estocástico definido por un proceso de Markov finito y no homogeneo, entonces la decisión óptima es invertir el capital total en un sólo día.*

Demostración

Si para cada día i, de los n días de inversión, se invierten k_i pesos. La ganancia esperada para el final del periodo está definida como,

$$k_0 g(E_0) + k_1 \sum_v g(E_v)^{(1)} + k_2 \sum_v g(E_v)^{(2)} + \cdots + k_n \sum_v g(E_v)^{(n)}$$

donde $\sum_v g(E_v)^{(i)}$ es conocida, constante y no depende de k_i, $0 \leq i \leq n$. Por lo que maximizar la ganancia esperada implica,

$$\begin{aligned} \max_{k_o, \ldots, k_n} \quad c_o k_o + c_1 k_1 + \ldots + c_n k_n & \\ \sum_i k_i &= M \\ k_i &\geq 0 \end{aligned}$$

con $c_i = \sum_v g(E_v)^{(i)}$ para toda $i = 0, ..., n$ y $k_o, .., k_n$ las variables de decisión.

Por tanto, el valor óptimo se obtiene haciendo alguna $k_i = M$ y las demás $k_j = 0$ para toda j distinta de i. Así, significa que la decisión óptima es invertir el monto total en un único día.

El resultado anterior da solución al problema planteado inicialmente, más sin embargo no permite una aplicación directa al ejercicio de la opción.

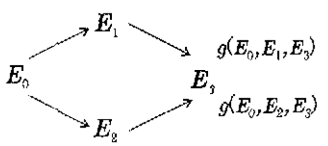
Revisemos cuál es el problema. Recordemos que la ganancia al ejercer la opción, depende del valor actual del fix y de su valor el anterior y aún más de la conveniencia y posibilidad de realizar una operación, ya que la factibilidad de ejercicio está condicionada a que el precio de ejercicio sea menor que el promedio del fix de los últimos 20 días. Por lo tanto, si cada vértice de la gráfica G representa un posible valor del fix entonces no se le puede asociar a cada vértice una ganancia unitaria porque la ganancia no depende únicamente del valor actual del fix sino de la trayectoria recorrida para llegar a él. Es decir, $g(\ )$, la función de utilidad está definida por,

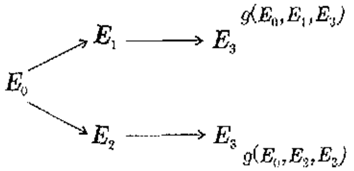
$$g(fix_i, fix_{i-1}, .., fix_{i-20}) = \begin{cases} \left(\dfrac{fix_{i-1}}{fix_i} - 1\right) & \text{si } \dfrac{fix_{i-1}}{fix_i} > 1 \text{ y } fix_i < \dfrac{1}{20}\sum\limits_{j=1}^{20} fix_{i-j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La reflexión anterior sirve como preámbulo a la construcción de un modelo más completo en donde se incluirán las consideraciones anteriores y permitirá obtener la política óptima de ejercicio para la Opción Banxico.

4.3 Modelo 2. Digráficas acíclicas con ganancias dependientes de las trayectorias

La necesidad de resolver la dependencia entre la ganancia y la trayectoria recorrida, nos enfrenta ante dos alternativas La primera, duplicar en la gráfica cada vértice tantas veces como sea necesario para tener obtener la ganancia definida de forma única en cada vértice.

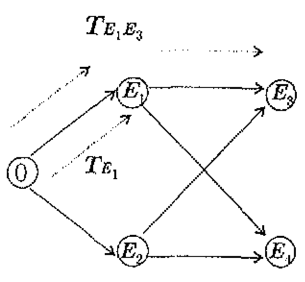


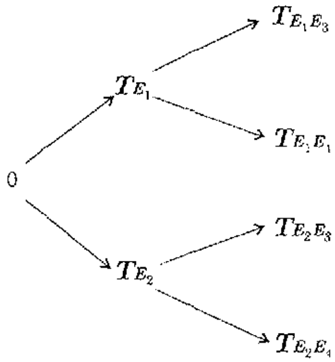


Esta alternativa, aunque resuelve el problema de la dependencia del valor del fix, no resuelve la dependencia del promedio móvil. Lo que nos lleva a considerar una segunda alternativa, *el árbol de trayectorias*

En forma general, considérese una gráfica $G(V, A)$ conexa y acíclica. Constrúyase a partir de ella una nueva gráfica $G_T(V_T, A_T)$, el árbol de trayectorias. Donde

V_T denota el conjunto de todas las trayectorias en G que inician en un vértice inicial E_0, es decir,
$V_T = \{T_{Eu} \mid T_{Eu}$ es una trayectoria en G que inicia en E_0 y termina en $E_u \in V\}$
y,
$A_T = \{(T_{Eu}, T_{Ev}) \mid T_{Eu} \subset T_{Ev}$ y $|T_{Eu}|$ (longitud de T_{Eu}) es igual a $|T_{Ev}| - 1\}$





Antes de proseguir y dada la definición anterior, demostraremos que G_T es efectivamente un árbol.

Proposición 6 *Si $G(V,A)$ es un árbol, entonces $G_T(V_T,A_T)$ es un árbol.*

Demostración

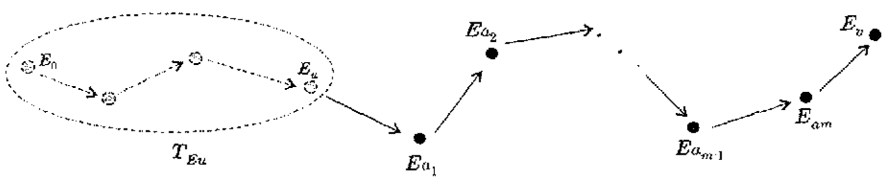
a) Primero demostremos que G_T es conexa.

Sean T_{Eu} y T_{Ev} dos vértices cualesquiera de G_T. Construyamos una $T_{Eu}T_{Ev}$-trayectoria denotada por $\Upsilon(T_{Eu},T_{Ev})$. Como T_{Eu} y T_{Ev} representan a su vez trayectorias en G, se tienen los siguientes casos:

i) Si $T_{Eu} \subset T_{Ev}$ entonces $|T_{Eu}| < |T_{Ev}|$

Como $T_{Eu} \subset T_{Ev}$, se puede escribir a $T_{Ev} = T_{Eu}E_{a_1}E_{a_2} \cdots E_{a_m}E_v$ con $a_i \in V$ y $i = 1, \ldots, m$

Trayectoria Tv



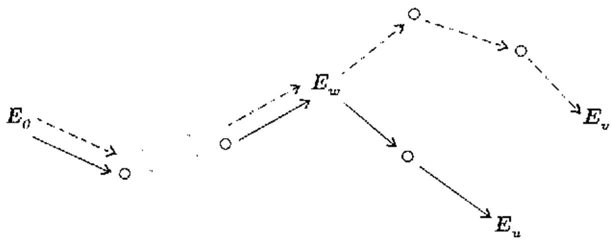
Dado que $T_{Eu} \in V_T$, $T_{Eu}E_{a_1} = T_{Ea_1}$ es una trayectoria en G y por tanto $T_{Ea_1} \in V_T$ con $|T_{Ea_1}| = |T_{Eu}| + 1$ por lo que $(T_{Eu}, T_{Ea_1}) \in A_T$

Un razonamiento análogo permite observar que $T_{Ea_i} \in V_T$ y $\left(T_{Ea_i}, T_{Ea_{i+1}}\right) \in A_T$, para $i = 1, \ldots, m$, al igual que (T_{Ea_m}, T_{Ev}). Por lo tanto,

existen $T_{Ea_1}, T_{Ea_2}, \cdots T_{Ea_m}, T_{Ev} \in V_T$ y $\Upsilon(T_{Eu},T_{Ev}) = T_{Eu}T_{Ea_1}T_{Ea_2}, \cdots T_{Ea_m}T_{Ev}$ es una trayectoria que une a T_{Eu} con T_{Ev} en G_T.

ii) Si $T_{Eu} \not\subseteq T_{Ev}$, sabemos que $T_{Eu} \cap T_{Ev} \neq \emptyset$ ya que todas las trayectorias inician en E_0 y al menos $E_0 \in T_{Eu} \cap T_{Ev}$

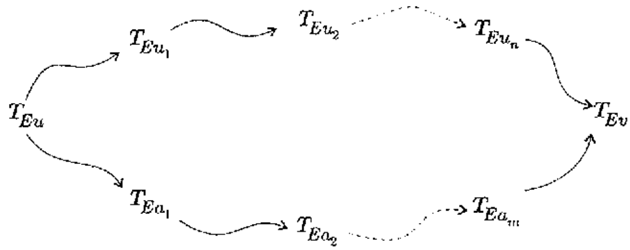
Sea $E_w \in T_{Eu} \cap T_{Ev}$ por lo tanto $T_{Ew} \in T_{Eu}$ y $T_{Ew} \in T_{Ev}$ (E_w puede ser E_0)



Como $T_{Ew} \subset T_{Eu}$, aplicando i), existe una $T_{Ew}T_{Ev}$-trayectoria, $\Upsilon\,(T_{Ew}, T_{Eu})$, en G_T; y como $T_{Ew} \subset T_{Ev}$, entonces también existe $\Upsilon\,(T_{Ew}, T_{Ev})$ en G_T Uniendo estas dos trayectorias, $\Upsilon\,(T_{Eu}, T_{Ew})\,\Upsilon\,(T_{Ew}, T_{Ev})$, se obtiene una $T_{Eu}T_{Ev}$-trayectoria en G_T, demostrando así que G_T es conexa.

b) Resta demostrar que G_T es acíclica. (Por contradicción)

Supóngase que G_T no es acíclica, entonces debe existir un ciclo C en G_T Es decir, existen dos trayectorias disjuntas, Υ_1 y Υ_2, que unen a dos vértices de G_T, sean estos vértices T_{Eu} y T_{Ev}.



Si $\Upsilon_1\,(T_{Eu}, T_{Ev}) = T_{Eu}T_{Eu_1}T_{Eu_2} \cdots T_{Eu_n}T_{Ev}$ es una de las trayectorias que unen a T_{Eu} con T_{Ev}, entonces $T_{Eu}\,E_{u_1}E_{u_2} \cdots E_{u_n}\,E_v = T_{Ev}$ es una trayectoria en G. De igual manera, si $\Upsilon_2\,(T_{Eu}, T_{Ev}) = T_{Eu}T_{Ea_1}T_{Ea_2} \cdots T_{Ea_m}T_{Ev}$ se tiene que $T_{Eu}E_{a_1}E_{a_2} \cdots E_{a_m}E_v = T_{Ev}$ es una trayectoria en G.

Ahora bien, como G es acíclica se tiene que $T_{Eu}E_{u_1}E_{u_2} \cdots E_{u_n}\,E_v$ debe ser igual a $T_{Eu}E_{a_1}E_{a_2} \cdots E_{a_m}E_v$ ya que en caso contrario serían dos $T_{E0}T_{Ev}$-trayectorias distintas en G, por lo tanto $Eu_i = Ea_i$ (para toda i) y además $n = m$ Por lo tanto $\Upsilon_1 = \Upsilon_2$ y se puede concluir que G_T es acíclica.

Del inciso *a)* y *b)* concluimos que la gráfica de trayectorias G_T es un árbol. Al que denominaremos "el árbol de trayectorias de G".

4.3.1 Aplicación del modelo 1

El árbol de trayectorias, visto como un caso particular de las gráficas multipartitas, permite la aplicación inmediata del resultado obtenido en la sección anterior. Basta garantizar que el árbol de trayectorias obtenido a partir de G satisface ser la representación gráfica de un proceso de Markov $\{Y_t\}$ de tiempo finito y no-homogeneo.

Por lo cual, es necesario definir la probabilidad de transición entre dos vértices de G_T

Definición Sean T_{Eu} y $T_{Ev} \in G_T$, la probabilidad condicional de transición de T_{Eu} a T_{Ev}, $p(T_{Eu}, T_{Ev})$, se define como la probabilidad entre los vértices terminales de las trayectorias T_{Eu} y T_{Ev}, i.e

$$p(T_{Eu}, T_{Ev}) = p_{EuEv} = P\{X_t = Ev \mid X_{t-1} = Eu\}$$

donde p_{EuEv} es la probabilidad entre E_u y $E_v \in G$

La definición anterior se deduce fácilmente al observar que si $(T_{Eu}, T_{Ev}) \in G_T$ entonces $T_{Eu} \subset T_{Ev}$, $|T_{Eu}| = |T_{Ev}| - 1$ y por lo tanto $P(T_{Eu}, T_{Ev}) \neq 0$. Así, si el proceso $\{Y_t\}$, representado en G_T, en el tiempo t se encuentra en el estado T_{Eu} y en el tiempo $t+1$ entra al estado T_{Ev}; significa que en G, el proceso $\{X_t\}$ al tiempo $t+1$ recorrió la trayectoria $T_{Ev} = T_{Eu}Ev$. De manera que si $T_{Eu} = E_0 E_{a_1} E_{a_2} \cdots E_{a_{t-1}} E_u$, entonces

$$\begin{aligned} p(T_{Eu}, T_{Ev}) &= p\{Y_{t+1} = T_{Ev} \mid Y_t = T_{Eu}\} \\ &= p\left\{X_{t+1} = E_v \mid X_t = E_u, X_{t-1} = E_{a_{t-1}}, \ldots, X_0 = E_0\right\} \\ &= p\{X_{t+1} = E_v \mid X_t = E_u\} \\ &= p_{EuEv} \end{aligned}$$

dado que G representa una cadena de Markov.

Proposición 7 *El árbol de trayectorias, G_T, asociado a la representación gráfica, G, de un proceso de markov $\{X_t\}$ finito y no-homogeneo, representa a su vez un proceso de Markov $\{Y_t\}$ finito y no-homogeneo*

Demostración

Es necesario mostrar primeramente que el proceso $\{Y_t\}$ es un proceso de Markov.

Manteniendo en mente la relación existente entre los vértices de G y los de G_T y que las probabilidades condicionales de transición del proceso $\{Y_t\}$, por definición, dependen del estado en el cual se encuentra el proceso en el tiempo, se tiene que:

$$p\left\{Y_t = T_{Eu} \mid Y_{t-1} = T_{E_{a-1}}, Y_{E_{a-2}} = T_{E_{a-3}}, \ldots, Y_0 = E_0\right\} =$$

$$= p\{X_t = E_u \mid X_{t-1} = E_{a-1}, X_{t-2} = E_{a-2}, \ldots, X_0 = E_0\}$$

Pero como por hipótesis $\{X_t\}$ es un proceso de Markov,

$$p\{X_t = E_u \mid X_{t-1} = E_{a-1}, X_{t-2} = E_{a-2}, \ldots, X_0 = E_0\} =$$

$$= p\{X_t = E_u \mid X_{t-1} = E_{a-1}\}$$

que, por definición, corresponde a su vez a la probabilidad condicional de transición en G_T, es decir,

$$p\{Y_t = T_{Eu} \mid Y_{t-1} = T_{a-1}, Y_{a-2} = T_{a-2}, \quad , Y_0 = 0\} =$$

$$= p\{Y_t = T_{Eu} \mid Y_{t-1} = T_{a-1}\}$$

lo que muestra que efectivamente G_T representa a un proceso de Markov.

Por otra parte, al depender las probabilidades de transición de $\{Y_t\}$, de las probabilidades de transición de $\{X_t\}$, se deduce que G_T representa a un proceso no-homogeneo.

Para concluir, resta mostrar que el proceso $\{Y_t\}$ es finito

En general, si y_t es un posible estado del proceso $\{Y_t\}$ al tiempo t, representa una trayectoria que el proceso $\{X_t\}$ recorre desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, i.e.,

$$y_t \in \{T_{Eu} \mid T_{Eu} \text{ es una trayectoria de longitud } t \text{ en } G\}$$

Por otra parte, si G representa un proceso de tiempo finito n, deducimos que la máxima longitud que puede tener una trayectoria es n, y por consiguiente el proceso $\{Y_t\}$ está definido para $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Así, $\{Y_t\}$ es un proceso de tiempo finito.

En conclusión, el árbol de trayectorias, G_T, representa un proceso de Markov finito, no-homogeneo.

La trascendencia de la proposición anterior radica en la posibilidad de extender el resultado del Teorema 9 a procesos más generales Lo cual queda enunciado en el siguiente teorema sin demostración, al ser un resultado de la aplicación del Teorema al árbol de trayectorias, G_T

Teorema 8 *Si se desea invertir una cantidad M durante un periodo de n días de forma tal que la ganancia esperada obtenida sea máxima, donde la ganancia en cada transacción depende del comportamiento histórico de una variable aleatoria $\{X_t\}$ con un comportamiento estocástico definido por un proceso de Markov finito y no homogeneo, entonces la decisión óptima es invertir el capital total en un sólo día*

Política óptima para el ejercicio de opciones americanas path-dependent

Antes de concluir con la determinación de la política de ejercicio para la Opción Banxico, es conveniente hacer notar que el resultado anterior se puede aplicar en general a instrumentos financieros cuya utilidad dependa de su comportamiento histórico. En *particular, para las opciones americanas path-dependent se puede establecer el siguiente* resultado,

> "La política óptima de ejercicio para una opción americana path-dependent, no obstante que sea factible un ejercicio parcial, es ejercerla en un solo día"

4.3.2 Ejercicio de la opción Banxico

El haber observado con anterioridad que el fix puede ser considerado un proceso de Markov, finito y no-homogeneo, aunado a que la ganancia asociada al ejercicio de la opción depende del comportamiento histórico de los últimos 20 días del fix, permite concluir, sustentado en los resultados obtenidos, que la política óptima de ejercicio para la opción cambiaria es ejercerla en un único día

Determinar la política óptima de ejercicio es un avance importante para realizar el ejercicio óptimo Sin embargo en términos prácticos aún no ha sido resuelto el problema, falta determinar el día en el cual debe ejercerse

En realidad este no es un contratiempo, la posibilidad de tener una representación gráfica del proceso permite emplear técnicas de programación dinámica para darle solución (Denardo [8]).

Así, si consideramos un periodo de vigencia de n días, entonces expresaremos el problema como un modelo de programación dinámica con un número finito de pasos (. En donde cada día se debe tomar la decisión de ejercer o no ejercer, con el objetivo de obtener la máxima ganancia esperada al final del periodo

Partiendo del árbol de trayectorias, adoptemos la siguiente notación:

Sea d_t la variable dicotómica que representa las dos decisiones posibles que se pueden realizar en cada periodo de tiempo t

$$d_t = \begin{cases} 0 & \text{no invertir} \\ 1 & \text{invertir} \end{cases}$$

y, $f_t(T_{fixi}, d_t)$ la ganancia obtenida al tomar la decisión d_t dado que el tipo de cambio fix toma el valor fix_i al tiempo t.

Como sabemos, la ganancia unitaria en cada estado, se define mediante una función $g(\cdot)$ que depende del valor concurrente del tipo de cambio fix_i, y en general, del pasado del mismo, T_{fixi}, entonces,

$$f_t(T_{fixi}, d_t) == \begin{cases} 0 & \text{si } d_t = 0 \\ g(fix_i, fix_{i-1}, \ldots, fix_{i-20}) & \text{si } d_t = 1 \end{cases}$$

Por otra parte, sea

> $U_t(T_{fixi})$ la ganancia óptima esperada en los días $t, t+1, \ldots, n$; considerando que al inicio del día t, el tipo de cambio es fix_i.

Realizando un análisis backward de programación dinámica (Howard [13] y Nemhauser [20]), para cualquier punto en la gráfica; la ecuación recursiva que relaciona a U_t y a U_{t+1} puede ser escrita como

$$U_t(T_{fixi}) = \max_{d_t} f_t(T_{fixi}, d_t) + (1 - d_t) \sum_{T_{fixj}} p(T_{fixi}, T_{fixj}) U_{t+1}(T_{fixj}) \qquad t=0,1,2,3,\ldots,n$$

donde $U_{n+1}(T_{fixj}) \equiv 0$ para todo T_{fixj}.

Por consiguiente, la ecuación recursiva de Programación Dinámica (PD) que determina cuando realizar el ejercicio $(d_t = 1)$ y cual es la ganancia obtenida al final de n días $U_0(T_{fix_0})$, está definida por:

$$U_n(T_{fixi}) = \max_{d_t} f_n(T_{fixi}, d_n)$$

$$U_t(T_{fixi}) = \max_{d_t} f_t(T_{fix_i}, d_t) + (1 - d_t) \sum_{T_{fixj}} p(T_{fix_i}, T_{fixj}) U_{t+1}\left(T_{fix_j}\right) \qquad t=0,1,2,3,\ldots,n\text{-}1$$

Los resultados obtenidos pueden ser aplicados en general a procesos estocásticos de Markov, no-homogeneos y de tiempo finito. Por ello, incluimos el algoritmo que determina el momento óptimo de ejercicio para un proceso con estas características.

4.3.3 Algoritmo

Paso 1. Identificar la variable aleatoria, $\{X_t\}$, de la cual depende el proceso.

Paso 2. Verificar que $\{X_t\}$ satisfaga tener un comportamiento estocástico definido por un proceso de Markov de tiempo finito n y no homogeneo; comprobando que

$$P\{X_t = E_t \mid X_{t-1} = E_{t-1}, \ldots, X_o = E_o\} = P\{X_t = E_t \mid X_{t-1} = E_{t-1}\}$$

donde E_t $(i = 0, \ldots, t)$ pertenece al conjunto de posibles estados del sistema.

Paso 3. Construir la representación gráfica G del proceso; en base a los posibles estados del sistema, probabilidades de transición y ganancias.

Paso 4. Si la ganancia depende de la trayectoria continuar, sino sea $G = G_T$ y pasar al paso 6.

Paso 5 Construir el árbol de trayectorias G_T asignando probabilidades de transición y ganancias.

Paso 6. En G_T utilizar un análisis backward para valuar la decisión óptima en el día 0 y tomando a *periodo* $= n$.

Paso 7. Si la decisión óptima en el día 0 es no invertir $(k = 0)$ continuar. Si por el contrario, la decisión es invertir $(k = 1)$ o *periodo* $= 0$ pasar al paso 11.

Paso 8. Observar el valor del proceso en el día 1, E_0

Paso 9. A partir de G_T construir un nuevo árbol, G^*, tomando como vértice inicial a E_0 y suprimiendo todos los vértices no factibles e ingresando algunos, ahora ya, factibles; así como hacer las modificaciones correspondientes a las probabilidades, al considerar un horizonte de *periodo* $=$ *periodo* $- 1$.

Paso 10. Hacer $G_T = G^*$ e ir al paso 6.

Paso 11. Si $k = 1$, realizar ejercer la opción

Paso 12 *Terminar*.

CONCLUSIONES

Resulta indiscutible la importancia que las matemáticas han tenido en la industria financiera, en el desarrollo de nuevas técnicas para cuantificar rendimientos de inversión o bien en medidas adicionales que influyen en la toma decisiones. Diseñar modelos aplicables a problemas prácticos requiere de un gran disposición para adentrarse en un mundo en el que el lenguaje, los conceptos y las motivaciones pueden ser considerablemente distintas a las que un matemático tiene.

El presente trabajo se desarrolló como la inquietud de proponer nuevas herramientas matemáticas (algoritmos en-línea y la representación gráfica de los procesos de Markov), a las comúnmente empleas en el ámbito financiero. La intención no era generar nuevos conceptos matemáticos, de no ser necesario, sino por el contrario tomar partir de un problema real con todas sus características e intentar, mediante metodos matemáticos, encontrar una solución.

La opción Banxico por ser un instrumento único en el mercado mexicano representó el escenario idóneo para desarrollar este tema de investigación. Diseñar una fórmula que determinara la política óptima de ejercicio de la opción, no fue una tarea sencilla debido a la inestabilidad del mercado mexicano y la incertidumbre del comportamiento del tipo de cambio. No obstante, la posibilidad de emplear matemáticas discretas en un ámbito en donde los modelos continuos prevalecen contribuyó a que se obtuvieran resultados interesantes.

Las dos políticas de ejercicio obtenidas a lo largo de este trabajo tiene como característica estar basadas en un número mínimo de supuestos, únicamente considerando para tal caso argumentos lógicos acerca del conocimiento del tipo de cambio

La primer política desarrollada en base a los algoritmos en-línea y bajo un escenario pesimista, con un conocimiento casi nulo acerca del comportamiento del tipo de cambio, establece que la decisión óptima es cambiar dólares en cada día factible de ejercicio: El monto de cada operación garantiza que al final del periodo de inversión se obtendrá una ganancia mínima preestablecida (la razón de competitividad).

Por otra parte, la segunda política establece que ningún inversionista es completamente *ignorante ante el comportamiento del tipo de cambio y más tratándose de los bancos.* Bajo este supuesto se considera un conocimiento apriori del comportamiento futuro del tipo de cambio, reflejado en las probabilidades de transición de un proceso de Markov y representado como una digráfica acíclica con ganancia constante en los nodos, que permite plantear el problema de decisión como uno de programación lineal con una solución inmediata

La segunda estrategia desarrollada al amparo de los procesos estocásticos, la teoría de gráficas y la programación linea, establece que la decisión de inversión óptima es realizar una única operación por el total de la inversión.

Como un resultado adicional señalaremos la relevancia que puede tener la posibilidad de representar el comportamiento de las opciones path-dependent en un árbol de trayectorias, un concepto que hasta donde se tiene conocimiento no ha sido explorado.

Para concluir señalaremos que durante la revisión del presente trabajo se tuvo la posibilidad de evaluar el comportamiento de las estrategias desarrolladas y compararlas con el comportamiento real observado en el mercado. Se pudo apreciar que la primer estrategia generaba resultados en promedio ligeramente menores a los observados en el mercado Basados en estos resultados se observó que afortunadamente el comportamiento del mercado regularmente se mantiene alejado del peor de los escenarios, por lo cual sólo en algunos la primer la estrategia obtenía resultados mejores
Con referencia a los resultados del segundo modelo señalaremos que debido a que el resultado depende de las probabilidades de transición subjetivas, hubo periodos en los se pudieron encontrar probabilidades de transición adecuadas de forma que se obtenían resultados significativamente mayores a los observados, por lo tanto determinar la eficiencia de la estrategia basada en información subjetiva es inadecuado.

Es importante recordar que las estrategias están basadas en modelos que permiten la continuación de modificaciones e incorporación de otras herramientas y patrones de comportamiento del tipo de cambio para así poder determinar una estrategia más eficiente.

La importancia de este trabajo no es únicamente determinar la fórmula para obtener el máximo beneficio de un instrumento financiero, sino establecer que existen metodologías distintas e igual de eficientes a las comúnmente empleadas que pueden ayudar solucionar problemas no "estándar", como lo es en este caso el ejercicio de la opción Banxico.

Parte I

Subastas de opciones de venta de dólares de los EE.UU.A.

88

Circular-Telefax 71/96

México, Distrito Federal, a 1 de agosto de 1996

A LAS INSTITUCIONES DE CREDITO DEL PAIS:

ASUNTO:SUBASTA DE OPCIONES DE VENTA DE DOLARES DE LOS EE.UU.A

La Comisión de Cambios determinó la conveniencia de que, sin alterar el actual régimen cambiario, el Banco de México aumente el nivel de sus reservas de divisas, lo cual contribuye a mejorar las condiciones de contratación de nuevos créditos En consecuencia, el Banco de México, con fundamento en los artículos 7o., fracción X, 8o., 14 y 24 de su Ley, llevará a cabo subastas mediante las cuales esas instituciones podrán vender dólares de los EE UU.A. al propio Banco, de conformidad con lo siguiente:

1. DEFINICIONES

Dólar(es)	a la moneda de curso legal de los Estados de América
Días Hábiles Bancarios	aquellos en que las instituciones de crédito y los bancos del exterior se encuentren abiertos para realizar operaciones en las Ciudades de México, Distrito Federal y de Nueva York, Nueva York, EE.UU A.
Fecha de Ejercicio	a cualquier día hábil bancario en la Ciudad de México Distrito Federal, en el que se ejerza el derecho derivado de una Opción de Venta durante el Plazo de Vigencia.
Fecha de Liquidación	el segundo Día Hábil Bancario siguiente a la fecha de Ejercicio

Monto de Referencia	a la cantidad de ciento treinta millones de Dólares, que las instituciones de crédito en su conjunto podrán venderle al Banco de México.
Opción de Venta	al contrato por virtud del cual, mediante el pago de una Prima, una institución de crédito adquiere el derecho de vender Dólares al Banco de México, contra moneda nacional, durante el Plazo de Vigencia, al Tipo de Cambio de Ejercicio
Plazo de Vigencia	al periodo que comprende al totalidad de días hábiles bancarios en la Ciudad de México, Distrito Federal, entre el día hábil inmediato siguiente a la fecha de una subasta y el último día hábil del mes inmediato siguiente en que se haya celebrado tal subasta, durante el cual podrán ejercerse los derechos derivados de la Opción de Venta que se asigne en dicha subasta.
Prima	a la cantidad en moneda nacional, que las instituciones estén dispuestas a pagar al Banco de México por celebrar una Opción de Venta.
Tipo de Cambio de Ejercicio	al tipo de cambio para solventar obligaciones denominadas en moneda extranjera pagaderas en la República Mexicana, que el Banco de México publique en el Diario Oficial de la Federación, el día hábil bancario en el que se ejerza el derecho derivado de una Opción de Venta.
Tipo de Cambio de Venta Máximo	al promedio aritmético de los tipos de cambio que el Banco de México haya determinado, en términos de las Disposiciones Aplicables a la Determinación del Tipo de Cambio para Solventar Obligaciones Denominadas en Moneda Extranjera Pagaderas en la República Mexicana, los 20 días hábiles bancarios inmediatos anteriores a la fecha en la que se pretenda ejercer el derecho derivado de una Opción de Venta Dichos tipos de cambio los publica el Banco de México en el Diario Oficial de la Federación el día hábil siguiente al de su determinación.

2. FECHA DE CELEBRACION DE LAS SUBASTAS

El Banco de México subastará Opciones de Venta el último día hábil bancario de cada mes.

3. PRESENTACION DE LAS POSTURAS

Las instituciones interesadas deberán presentar sus posturas, por conducto del Módulo de Subastas de Opciones del Sistema de Atención a Cuentahabientes del Banco de México (OPCIBAN) o a través de cualquier otro medio electrónico de cómputo o telecomunicación autorizado al efecto por el Banco de México, entre las 14:00 y las 14:30 horas del día en que se realice la subasta respectiva. Las claves de acceso, de identificación y, en su caso, de operación establecidas para el uso de medios electrónicos, de cómputo o telecomunicación sustituirán a la firma autógrafa por una de carácter electrónico, por lo que las constancias documentales o técnicas en donde aparezcan, producirán los mismos efectos que las leyes otorgan a los documentos suscritos por las partes y, en consecuencia tendrán igual valor probatorio.

Cada postor podrá presentar una o más posturas por subasta El monto de cada postura deberá ser por un millón de Dólares o múltiplos.

Al presentar las posturas, las instituciones de crédito deberán indicar el monto de la Prima expresado por cada mil Dólares. Las Primas deberán ser siempre positivas.

El Banco de México se reserva el derecho de rechazar total o parcialmente las posturas que no se ajusten a lo dispuesto en la presente Circular-Telefax, se encuentren incompletas o de alguna manera incorrectas. Asimismo, cuando determine que las operaciones de alguna o algunas instituciones de crédito no se ajusten a las sanas prácticas del mercado, podrá limitar la participación de la o las instituciones de que se trate.

4. EFECTOS DE LAS POSTURAS

Las posturas presentadas al Banco de México surtirán los efectos más amplios que en derecho correspondan e implicarán la aceptación del postor de todas y cada una de las presentes disposiciones.

Toda postura tendrá carácter obligatorio para el postor que la presente y será irrevocable.

Por el solo hecho de presentar posturas, las instituciones autorizan irrevocablemente al Banco de México para que, en el evento de que tales posturas reciban asignación les cargue el día hábil bancario inmediato siguiente a la fecha de la correspondiente asignación, su Cuenta Unica en Moneda Nacional hasta por el monto que corresponda a la Prima respectiva.

5. ASIGNACION

La asignación se efectuará conforme al orden descendente de las Primas correspondientes a las posturas de que se trate, sin exceder el Monto de Referencia. En caso de que el valor del total de las posturas exceda dicho Monto de referencia, sólo se aceptarán posturas por un valor acumulado igual al Monto de Referencia. Si hay varias posturas empatadas en el lugar en que se alcance el Monto de Referencia causando que tal monto sea excedido, la asignación se hará a prorrata del monto solicitado en las posturas empatadas.

El Banco de México se reserva el derecho de declarar total o parcialmente desierta la subasta, cuando a su juicio considere que la postura o posturas no representen adecuadamente las condiciones del mercado o pudieren llegar a producir efectos inconvenientes en el mismo; o detecte colusión entre las instituciones participantes.

6. RESULTADOS DE LAS SUBASTAS

Los resultados de las subastas estarán disponibles a través del OPCIBAN, dentro de los sesenta minutos posteriores al vencimiento del plazo para la presentación de las posturas en cada subasta.

7. EJERCICIO DE LAS OPCIONES DE VENTA

La institución de crédito que haya recibido asignación, podrá vender Dólares al Banco de México dentro del Plazo de Vigencia, hasta agotar dicho monto. Al efecto, deberá indicar al Banco de México, entre las 9:00 y las 13:00 horas de la Fecha de Ejercicio, el monto de Dólares que deseé vender, siempre y cuando el Tipo de Cambio de Ejercicio no sea mayor que el Tipo de Cambio de Venta Máximo.

El Banco de México a través de los medios electrónicos, de cómputo o telecomunicación que al efecto indique, comunicará diariamente a las instituciones de crédito el Tipo de Cambio de Venta Máximo.

A fin de ejercer el derecho derivado de una Opción de Venta, las instituciones deberán comunicarse con la Subgerencia de Cambios Nacionales del Banco de México telefónicamente, por escrito, telefax o a través de cualquier otro medio electrónico, de cómputo o telecomunicación aceptado expresamente por el Banco de México. Lo anterior, en el entendido de que las instituciones que ejerzan el derecho derivado de una Opción de Venta telefónicamente, deberán confirmar el mismo día la operación a dicha Subgerencia ya sea por escrito, telefax, telex o a través de cualquier otro medio que deje constancia escrita.

Las instituciones que ejerzan el derecho derivado de una Opción de Venta deberán efectuar en la Fecha de Liquidación correspondiente, el abono de los Dólares materia de la operación en la cuenta que al efecto les indique el Banco de México. Asimismo, en la Fecha de Liquidación de que se trate y siempre que las instituciones realicen el mencionado abono de los Dólares respectivos el Banco de México abonará el importe del contravalor de dichos Dólares en la Cuenta Única en Moneda Nacional que les lleva

8. DISPOSICIONES GENERALES

8.1 En el evento de que por caso fortuito o fuerza mayor no pudieren presentarse posturas por conducto del OPCIBAN de conformidad con la presente Circular-Telefax, el Banco de México dará a conocer a las instituciones el procedimiento aplicable para la presentación de tales posturas.

8.2 Las Opciones de Venta a que se refiere la presente Circular-Telefax, en tanto no se ejerzan, no computarán para determinar las posiciones de riesgo cambiario de las instituciones de banca múltiple y de desarrollo, previstas en M.61. de la Circular 2019/95 y en la Circular Telefax 34/95, respectivamente. Sin perjuicio de lo anterior, las ventas de divisas que esas instituciones celebren con motivo de tales contratos, deberán ajustarse a lo dispuesto en las referidad disposiciones.

TRANSITORIOS

PRIMERO.- La presente Circular-Telefax entrará en vigor el 2 de agosto de 1996.

SEGUNDO.- La primer subasta que se realice conforme a las reglas previstas en esta Circular-Telefax, se llevará a cabo el 7 de agosto de 1996

Atentamente

BANCO DE MEXICO

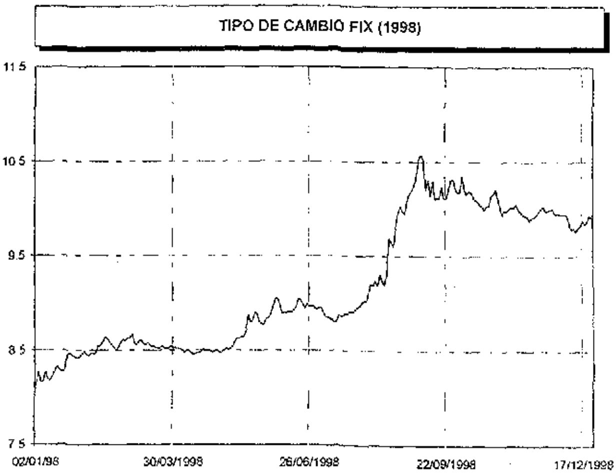
Parte II

La serie del tipo de cambio

Especificar el proceso estocástico que sigue el tipo de cambio, teoría de fractales, teorías económica y análisis estadístico, entre otros, han sido los enfoques y teorías empleadas para intentar explicar el comportamiento del tipo de cambio, todas ellas sin ningún resultado convincente.

Una herramienta empleada comúnmente cuando se analizan series económicas, como el tipo de cambio, son las "series de tiempo". Las series de tiempo, consideradas como una sucesión de observaciones generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice se toma en relación del tiempo, intenta determinar un modelo para el proceso estocástico que generó los datos. El modelo debe representar de forma adecuada el comportamiento de los datos observados y además su elección debe ser sugerida por los datos mismo (Guerrero [15]).

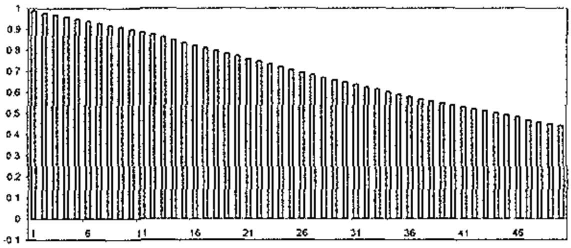
A continuación se presenta el análisis realizado al intentar modelar el comportamiento del tipo de cambio visto como el proceso estocástico $\{FIX_t\}$ generador de las observaciones correspondientes al periodo del 01 de Enero de 1998 al 31 de Diciembre del mismo año (260 observaciones).



Un análisis gráfico de la información y de la función de autocorrelación muestral (ACF), permiten establecer una característica de la serie, es *no estacionaria*[3]. Como se puede observar, el tipo de cambio durante los primeros 9 meses del año mostró una tendencia positiva, alcanzando un valor máximo en el año de $10 6 por dólar; por lo que el proceso no representaba tener una media constante.

[3] Un proceso se dice estacionarioa, si tiene media constante y varianza finita.

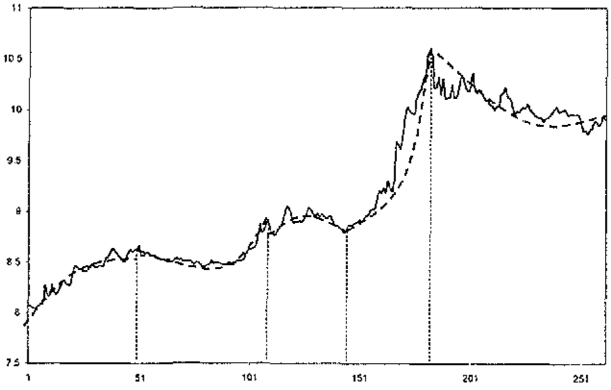
FAC para la serie { FIX_t}



Nota. La función de autocorrelación tiende a cero de manera bastante lenta lo cual es un fenómeno típico de las series de tiempo n estacionarias

Un análisis gráfico más detallado permite aseverar que la no-estacionariedad de la serie es homogenea, presumiendo que podría existir alguna tendencia polinomial adaptativa de orden 2.

Tendencia polinomial adaptiva de { FIX_t}

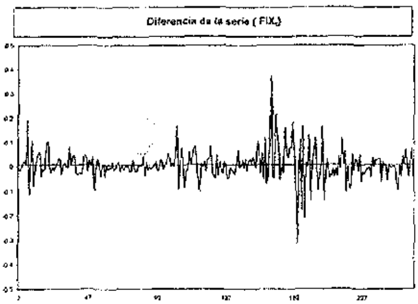


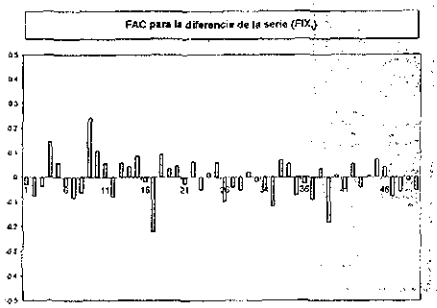
Descrita como:

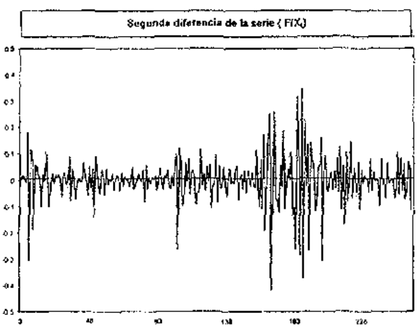
$$\begin{array}{ll} Fix_t = \alpha_o + \beta_o t + \gamma_o t^2 + a_t & t = 1, \ldots, 50 \\ Fix_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + a_t & t = 51, \ldots, 109 \\ Fix_t = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2 + a_t & t = 110, \ldots, 145 \\ Fix_t = \alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2 + a_t & t = 146, \ldots, 180 \\ Fix_t = \alpha_4 + \beta_4 t + \gamma_4 t^2 + a_t & t = 181, \ldots, 260 \end{array}$$

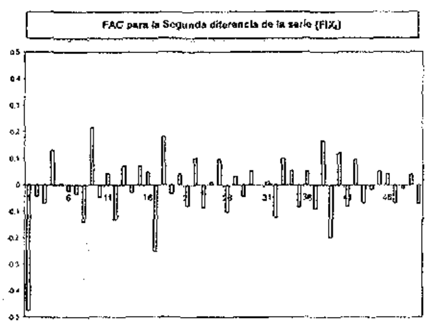
en donde $\{a_t\}$ es ruido blanco[4], α_i, β_i, γ_i $(i = 0, \ldots, 4)$ son parámetros no todos necesariamente distintos de cero

Lo cual indicaría que una posible transformación para cancelar dicha tendencia podría obtenerse al aplicar el operador diferencia[5] (∇) dos veces, obteniendo que la serie aproximadamente estacionaria con la cual se debería trabajar es $\{\nabla^2 Fix_t\}$. Las gráficas de las series $\{\nabla Fix_t\}$ y $\{\nabla^2 Fix_t\}$, así como de sus correspondientes funciones de autocorrelación muestral aparecen a continuación.







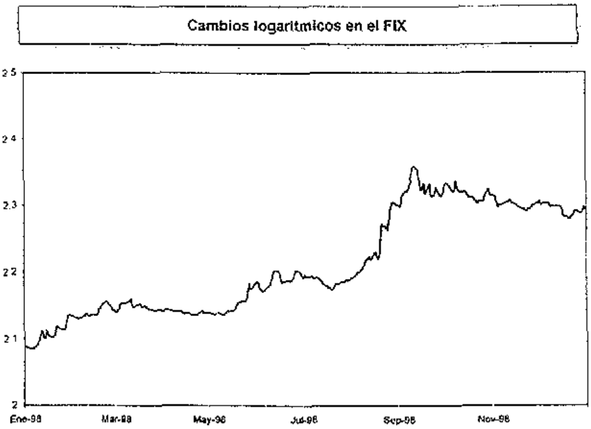


[4] Un proceso fomado por variables aleatorias idénticamente distribuidas con media cero y varianza constante de tal manera que $E(a_i, a_k) = 0$, $i \neq k$

[5] El operador diferencia se define como: $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$, para toda t.

Ambas series, $\{\nabla Fix_t\}$ y $\{\nabla^2 Fix_t\}$ muestran comportamientos similares, con medias que parecen constantes. Sin embargo, la varianza presenta cierto patrón de crecimiento en función del tiempo.

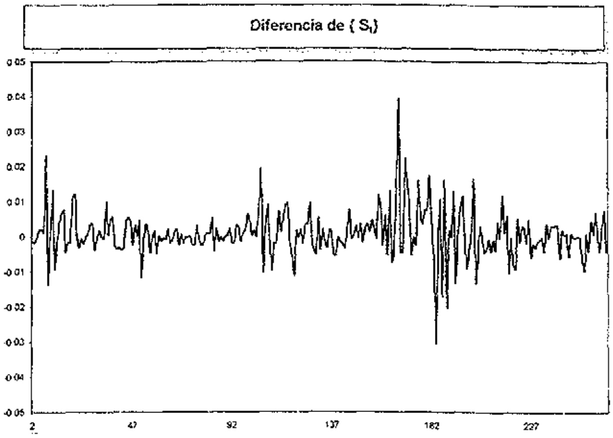
Como un intento por reducir la volatilidad mostrada por el Fix en los periodos de Junio-Julio y Sept.-Oct., correspondientes a la mostrada por las series $\{\nabla Fix_t\}$ y $\{\nabla^2 Fix_t\}$, se procedió a generar una serie alternativa $\{S_t\}$ definida como el logaritmo del fix (el logaritmo de la tasa spot).



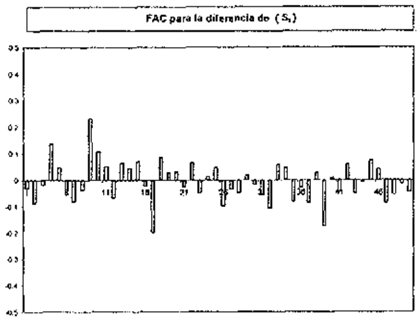
Un análisis similar al realizado con la serie $\{Fix_t\}$, conduce a considerar más conveniente[6] trabajar con la serie $\{\nabla S_t\}$ sobre la serie $\{\nabla^2 S_t\}$, dado que ambas tienen comportamientos similares, pero $\{\nabla S_t\}$ tiene una desviación estándar menor a la mostrada por $\{\nabla^2 S_t\}$

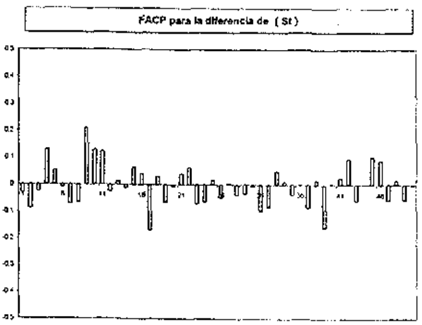
Serie	Media	Desv. Std.
$\{S_t\}$	2.1861	0.077687
$\{\nabla S_t\}$	0.000	0.006814
$\{\nabla^2 S_t\}$	0.002	0.009797

[6] "La mayoría de las series que se observan son no-estacionarias; al tomar diferencias sucesivas de la serie para volverla estacionaria, su varianza se altera de tal manera que decrece hasta que la serie es estacionaria y comienza a crecer con la sobre diferenciación."



Con el objetivo de identificar el modelo tentativo que deseamos estimar, se compararon las funciones de autocorrelaciones muestrales (FAC) y correlaciones parciales (FACP) con las FAC y FACP correspondientes a los modelos teóricos (Eders [10]).





Se puede apreciar la FAC (gráfica de la izquierda), gráficamente no presenta una convergencia a cero, el comportamiento es volatil. Los valores absolutos para las autocorrelaciones en los retrazos 4, 9, 10, 17, 32 y 39; resultan ser mayores a 0.1 por lo que se consideró conveniente verificar la no-significancia estadística de las autocorrelaciones, utilizando para ello el estadístico (Eders [10])

$$E=2\sqrt{\frac{1}{N-d}\left(1+2\sum_{j=1}^{q} r_j^2\right)} \quad \text{para } k > q$$

donde N representa el tamaño de la muestra y si $|r_k| > E$ entonces se presume que la autocorrelación r_k es significativamente distinto de cero

Los resultados obteniendo a este respecto no permitieron aceptar que las autocorrelaciones residuales eran cero, en particular para las autocorrelaciones 4, 9 17 y 32, el estadístico resultaba ser mayor al valor de la autocorrelación.

Un comportamiento similar al mostrado por la FAC, fue apreciado al analizar la gráfica de la FACP. Los resultados anteriores, fueron suficientes para rechazar toda posibilidad de modelar el Logaritmo del Fix, como módelo autorregresivo y/o promedios móviles, ya fuera AR(q), MA(q) o ARMA(p,q).

BIBLIOGRAFIA

[1] Arditti, Fred (1996)
"Derivatives"
Harvard Business School Press, Boston Massachusetts.

[2] Bazaraa, Mokhtar; Jarvis, John and Sherali, Hanif
"Linear Programming and Network flows"
Wiley, 2a. edición.

[3] Bigger, N. and Hull, J. (1983)
"The valuation of currency options"
Financial Management 12, pp. 24-28

[4] Bondy, J. A. and Murty, U. S.
"Graph Theory with applications"
Department of Combinatories and Optimization,
University of Waterloo, Ontario Canada.

[5] Carr, P, Ellis, K and Gup, V. (1998)
"Static Hedging of Exotic Options"
The Journal of Derivatives, Vol. 6, No. 3, pp. 1165-1190.

[6] Chartrand,Gary and Lesniak, Linda. (1986)
"Graphs and Digraphs"
Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series

[7] Davis, Mark H. A.(2001)
"Installmente options and static Hedging"
Department of Mathematics, Imperial College.

[8] Denardo, E. (1982),
"Dynamic Programming Theory and Applications"
Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J.

[9] Deng, Xiaotie y Mahajan, Sanjeev
"Infinite Games: Randomization, Computability, and Applications to Online Problems"
School of Computing Science, Simon Fraser University, pp. 289-298

[10] Eders, Walter (1995)
"Applied Econometrics Time Series"
John Wiley and Sons Inc.

[11] El Yaniv, Fiat A. et. al. (1992)
"Competitive Analysis of Financial Games"
33 Simposium de la Fundación de Ciencias de la Computación.
Pittsburgh, Pensylvania, pp. 327-333.

[12] Galan, Manuel (1994)
"Fluctuaciones del tipo de cambio y opciones sobre divisas"
Inversión y Finanzas, Bolsa Mexicana de Valores, 2., pp. 121-139

[13] Galan, Manuel y Duclaud Javier. (1997)
"Una estrategia de acumulación de reservas mediante opciones de venta" de dólares. El caso de Banco de México"
Artículo, Banco de México

[14] Geske, R (1979)
"The valuation of compound options"
Journal of Financial Economics, Vol. 7, pp 63-81

[15] Guerrero, Víctor M.(1991)
"Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas"
Universidad Autónoma Metropolitana

[16] Hernández, Alfredo (1995)
"La dinámica del tipo de cambio en el régimen de bandas en México"
Tesis Instituto Tecnológico Autónomo de México.

[17] Howard, Ronald (1966)
"Dynamic programming and Markov processes"
Massachusetts Institute of Technology,
Cambridge, Massachusetts.

[18] Hull, John (1998)
"Futures and Options Markets"
University of Toronto, Printice Hall.

[19] Hull, John (1993)
"Options, Futures and Other Derivatives"
University of Toronto, Printice Hall

[20] Jarrow, Robert y Rudd, Andrew (1983)
"Option pricing"
Dow Jones & Company, Inc.

[21] Krugman, Paul y Miller Marcus (1991)
"Exchange rate targets and currency bonds"
Centre for Economic Policy Research,
Cambridge University Press, pp. 9-34

[22] Latter, Tony (1996)
"La elección del régimen de tipo de cambio"
Ensayos 57. Centro de Estudios de Banca Central,
Banco de Inglaterra, Londres.

[23] Motwani Rajeev y Raghava, Prabhakar
"Randomized Algorithms"
Cambridge University Press, pp. 368-387.

[24] Nemhauser, George L. (1967)
"Introduction of Dynamic Programming"
Department of Operations Research and Industrial Engineering
John Wilet and Sons, Inc.

[25] Robbins, Herbert (1970)
"Optimal Stopping"
American- Mathematical Montly, 77.
Columbia University, pp. 333-343.

[26] Selby, M. J. P. and Hodges, S. D.(1987)
"On the evaluation of compound options"
Management Science, Vol. 33, pp. 347-355

[27]
"Exposición sobre la política monetaria para el lapso 1ºde Enero de1995 al 31 de Diciembre de 1995"
Documento Oficial, Banco de México, pp 27-48.

[28]
"Exposición sobre la política monetaria para 1996"
Documento Oficial, Banco de México

[29]
"Programa de política monetaria para el ejercicio 1° de Enero al 31 de Diciembre de 1996"
Documento Oficial, Banco de México, pp.27-48.

[30]
"Exposición sobre la política monetaria para 1997"
Documento Oficial, Banco de México.

[31]
"Exposición sobre la política monetaria para 1998"
Documento Oficial, Banco de México.

[32]
"Política monetaria, programa para 1999"
Documento Oficial, Banco de México, pp.27-48

[33]
"Informe sobre la inflación, Octubre - Diciembre 2000 Programa Monetario para 2001"
Documento Oficial, Banco de México.

[34]
"Política monetaria, Programa para 2000"
Documento Oficial, Banco de México