

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

00382 9



POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS



posgrado en ciencias físicas  
UNAM

form  
un c  
la k  
pun  
Asir  
dan  
y la  
nun

el n  
con  
em  
aco  
tur  
los  
cer  
cuá  
Asi  
coi

ect  
car  
cál  
dir  
flu  
cio  
suj

de  
ect  
pa  
suj  
po  
de

TEORIA DE CAMPOS DE OBJETOS EXTENDIDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A :

JOSE ANTONIO SANTIAGO GARCIA

DIRECTORES: DR. JEMAL GUVEN.  
DR. CHRISTOPHER R. STEPHENS.

JULIO 2002



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fenomenología de Transiciones de Fase</b>	<b>7</b>
2.1	Escalamiento	10
2.2	Tamaño Finito	12
2.3	Una Ensalada Crítica	13
<b>3</b>	<b>Teorías Efectivas</b>	<b>14</b>
3.1	Membranas	15
3.2	El modelo $O(N)$	17
3.3	Polímeros	18
3.4	Teoría de Campos	20
3.5	Exponentes Efectivos	22
<b>4</b>	<b>Renormalización</b>	<b>22</b>
4.1	Grupo de Renormalización á la Kadanoff-Wilson	23
4.1.1	Campos No Lineales de Escalamiento	25
4.2	Renormalización Ambientalmente Amigable	25
4.2.1	Renormalización como Transformación de Coordenadas	26
<b>5</b>	<b>Ecuación de Estado para el Modelo <math>O(N)</math></b>	<b>29</b>
5.1	Relación entre Variables de Escalamiento Lineales y No-Lineales	30
5.2	Corrimiento de la Temperatura Crítica	33
5.3	Ecuación Universal de Estado	34
5.4	Ecuación de Estado a un Lazo	35
5.5	Expansión $\epsilon$ y Analiticidad de Griffiths	38
5.6	Entrecruzamiento entre Transiciones de Primero y de Segundo Orden	40
5.6.1	Entrecruzamiento al Punto Fijo de Acoplamiento Fuerte para $N = 1$	40
<b>6</b>	<b>El Modelo Sigma No-Lineal</b>	<b>43</b>
6.1	Renormalización	44
6.2	Resultados Explícitos	45
6.3	Corrimiento de la Temperatura Crítica	47
6.4	Exponentes Efectivos	48
6.5	Modelo de Interfases de Wallace-Zia	49
6.5.1	Expansión de Temperaturas Bajas	51
<b>7</b>	<b>Geometría de Superficies Encajadas</b>	<b>54</b>
7.1	Geometría de Hipersuperficies	54
7.2	Geometría de Superficies Encajadas	58
7.3	Geometría de Superficies Encajadas en un Espacio Riemanniano	59
<b>8</b>	<b>Deformaciones de la Geometría</b>	<b>60</b>
8.1	Deformaciones de Hipersuperficies	60
8.2	Variaciones de Primer Orden de Invariantes Geométricos	62
8.3	La Derivada de Euler-Lagrange del Hamiltoniano de Helfrich	64
8.4	Variaciones de Segundo Orden	64
8.5	Deformaciones en la Geometría de Superficies Encajadas	67
8.5.1	La Métrica y la Curvatura Extrínseca	67
8.5.2	Deformaciones de Escalares de Superficie	68
8.5.3	Euler-Lagrange para Codimensiones Mayores	70
8.6	Variación de Segundo Orden	70
8.6.1	Operador de Fluctuaciones	70

<b>9</b>	<b>Coeficientes Efectivos a un Lazo</b>	<b>72</b>
9.1	El Kernel de Calor . . . . .	72
9.2	Superficies Bidimensionales . . . . .	74
9.2.1	Codimensión Uno . . . . .	74
9.2.2	Codimensiones Mayores . . . . .	74
9.2.3	Funciones Beta . . . . .	75
<b>10</b>	<b>El Modelo 4-Dimensional</b>	<b>77</b>
10.1	Regularización . . . . .	80
10.2	Acoplamientos Efectivos . . . . .	81
10.3	Funciones Beta . . . . .	83
<b>11</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>12</b>	<b>Apéndice A: Identidades de Ward y Expansión en lazos</b>	<b>89</b>
12.1	Identidades de Ward . . . . .	89
12.2	Expansión en Lazos . . . . .	90
12.2.1	Un lazo . . . . .	91
<b>13</b>	<b>Apéndice B. Representación de Mongé-Ampère</b>	<b>92</b>
13.1	Aproximación Cuadrática . . . . .	94
13.2	Tensión Superficial Cero . . . . .	96
13.3	Longitud de Persistencia . . . . .	96
<b>14</b>	<b>Apéndice C: Deformaciones</b>	<b>97</b>



## TEORÍA DE CAMPOS DE OBJETOS EXTENDIDOS

### Resumen

Usando Renormalización Ambientalmente Amigable se encuentra una nueva forma para la ecuación de estado del modelo de Landau-Ginzburg-Wilson para un campo escalar de  $N$  componentes. Esta queda parametrizada en términos de la longitud de correlación transversal y describe el entrecruzamiento entre los puntos fijos de Wilson-Fisher y el de Bosones de Goldstone de manera uniforme. Asimismo, se determina la forma del corrimiento en la temperatura crítica y se dan expresiones perturbativas explícitas a orden de un lazo en el acoplamiento y la dimensión anómala del campo. Se hacen comparaciones con simulaciones numéricas recientes que muestran que la descripción es correcta.

Con el mismo formalismo, se captura el entrecruzamiento dimensional para el modelo Sigma-No Lineal, definido en una película de dimensión  $d$  y grosor  $L$  con condiciones de frontera periódicas. Trabajando a orden de un lazo, tenemos expresiones para la dimensión anómala del campo y para el flujo del acoplamiento, en este caso la temperatura. Cada una de estas funciones captura el entrecruzamiento entre los puntos fijos del modelo: un punto fijo para los sistemas de dimensión  $d$  y  $d-1$  respectivamente y uno más de temperatura cero. Las expresiones resultantes para los exponentes efectivos beta y delta, los cuales interpolan entre sus valores conocidos, confirman la validez del cálculo. Asimismo, el resultado obtenido para el corrimiento en la temperatura crítica coincide con el que resulta de utilizar argumentos de escalamiento.

Utilizando técnicas geométricas de la teoría de superficies, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para una membrana de Helfrich bidimensional, caracterizada por parámetros de tensión superficial y rigidez. Se generaliza el cálculo a una superficie de dimensión  $d$  encajada en un espacio euclidiano de dimensión  $d+D$  y se obtienen los operadores correspondientes para pequeñas fluctuaciones en la forma de estos objetos extendidos. Se obtienen las ecuaciones de flujo del Grupo de Renormalización a orden de un lazo para la tensión superficial y la rigidez en ambos casos.

Finalmente, estudiamos un objeto extendido de dimensión cuatro con términos de curvatura de orden cuatro. Obtenemos el operador de fluctuaciones y las ecuaciones de flujo correspondientes las cuales hemos resuelto numéricamente: para escalas de longitud suficientemente grandes domina el término de tensión superficial, no obstante, hay un régimen en que la rigidez del objeto es importante y la configuración más estable corresponde a un objeto muy rígido y dependiendo de la condición inicial puede estar en la fase de arrugado.

[The page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. The text is scattered across the page and cannot be transcribed accurately.]

# FIELD THEORY OF EXTENDED OBJECTS

## Abstract

Using Environmentally Friendly Renormalization we obtain a new formulation for the equation of state of the Landau-Ginzburg-Wilson model for a scalar field with  $N$  components. This is written in terms of the inverse of the transverse correlation length and describes the crossover between both, the Wilson-Fisher fixed point and the associate with the Goldstone Bosons in a uniform way. Also, the form of the shift in the critical temperature is determined and we give explicit perturbative expressions to one loop order in the coupling and the anomalous dimension of the field. Comparisons with recent numerical simulations show that our description is correct.

With the same formalism, the dimensional crossover for the Non-Linear Sigma model defined in a film of dimension  $d$  and thickness  $L$  with periodic boundary conditions, is captured. Working to one loop order, we obtain expressions for the anomalous dimension of the field and for the flow of the coupling, in this case the temperature. Each one of these functions captures the crossover between the fixed points of the model: a fixed point for the systems of dimension  $d$  and  $d-1$  respectively and one more of zero temperature. The resulting expressions for the effective exponents  $\beta$  and  $\delta$ , which interpolate between their known values, confirm the validity of the calculation. Also, the result obtained for the shift in the critical temperature agrees with which it turns out to use scaling arguments.

Using geometric technics of the theory of surfaces, we obtain the Euler-Lagrange equations for a Helfrich membrane, characterized by parameters of surface tension and rigidity. We generalize the calculation to a surface of dimension  $d$  embeded in a euclidian space of dimension  $d+D$  and we obtain the corresponding operators for small fluctuations in the shape of these extended objects. The renormalization group equations of the flow to one loop order for the surface tension and the rigidity are obtained in both cases. Finally, we studied an extended object of dimension four with terms of curvature of order four. We obtain the operator of fluctuations and the corresponding equations of flow which we have solved numerically: for sufficiently great scales of length, the term of surface tension is the most important, however, there is a regime in which the rigidity of the object is important and the dominant configuration corresponds to an object very rigid or depending of the initial conditions it can take a crumple phase.



Dedicado:

*A mis padres, Alejandra y Antonio.*

*A mis hermanos.*

*A Rocío y Claus.  
Por dejarme que los quiera tanto.*

*A la memoria de mi hermano Enrique Santiago, 1970 - 1971,  
y del pequeño José Carlos Piña, 1998.*



## Prólogo

Al escribir las primeras palabras de este prólogo me invade un cierto sentimiento de formalidad, como si estuviera vestido de etiqueta en medio de un discurso para gente bien. Pero que lejos estoy de esas maneras, del moño y el frack, ¿se escribe así?. De cualquier manera eso no importa, me es más necesario decir que me siento muy feliz de terminar esta tesis, de haber realizado un buen esfuerzo en estos últimos cinco años y de haberla concluído.

Aún recuerdo las primeras lecciones de parte del Dr. Stephens en las cuales la tarea primaria era el desarrollo perturbativo de las funciones de correlación para el modelo de Landau-Ginzburg. Los estudiantes que formabamos parte del equipo no entendíamos casi nada de lo que estábamos haciendo, tuvieron que pasar varios años antes de que las ideas suyas detras del Grupo de Renormalización fueran tomando forma en nuestros cerebros, en otras palabras, antes de que fuesen renormalizados.

Recuerdo las primeras reuniones que tuve con Jemal, cada semana me pedía resolver un problema, y en cada entrevista yo apenas estaba entendiendo lo que me había querido decir, pocas veces podía siquiera reproducir algunos cálculos al pizarrón.

Y es que todo ese lenguaje era nuevo a mis oídos, las funciones de vértice, los diagramas de Feynman, la masa desnuda, el tensor de curvatura, la métrica inducida. Y Chris repetía una y otra vez, de uno y otro modo, pero sus palabras entraban por un oído y salían por el otro y jamás regresaban, simplemente se iban por el pasillo.

Atrás quedó esa historia. Ahora, como siempre, nos gustaría compartir. Presentamos el producto de nuestro trabajo que esperamos pueda ser de utilidad para quién, como nosotros, esté interesado en los fenómenos críticos y en la geometría de superficies.

## Agradecimiento

Es difícil agradecer, en palabras, a todas las personas e instituciones que hicieron posible terminar este trabajo: a los Doctores Jemal Guven y Chris Stephens con quienes he tenido el placer de colaborar y sobre todo de aprender en estos últimos años. Y porque además de dirigirme ésta tesis, me han brindado su amistad. Estoy en deuda con el Dr. Denjoe O'Connor por su generosidad y su ayuda con discusiones en varios temas del trabajo.

A los amigos de estudio, para los cuales me faltaría una manera para recordarles, entre otras cosas, las formas que teníamos para construir sonrisas más que cualquier otra cosa, para luego dejarlas ahí nomás, en las paredes del primer entresuelo del viejo edificio del ICN. Tendríamos por ejemplo que sentarnos un rato o caminar por la biblioteca, o no, más bien tendríamos que escuchar primero *Only You* con Louis y luego a Marsalis para que los sonidos nos trasladasen a esa otra época de estudiantes de pedir prestado, de luego te los paso. En especial a Anti.

A los miembros de mi sínodo, a la Dra. Carmen Varea, a los Drs. Matías Moreno, Germinal Cocho, Riccardo Capovilla, Axel Weber, por sus comentarios a versiones preliminares de este trabajo. A la Dra. Lorena Zogaib por su interés, y por su lectura crítica de una parte de la tesis.

Al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, especialmente al Departamento de Gravitación y Campos por facilitarme el uso de sus instalaciones. Mención aparte para el apoyo económico, el cual me fué brindado mediante una beca de Doctorado por la DGEP-UNAM y por los proyectos CONACyT 304022 - E y DGAPA-UNAM IN119799, sin las cuales no me hubiese sido posible concluir este trabajo.



# 1 Introducción

Son varios los objetivos que nos hemos planteado al momento de empezar este trabajo. Para ello fué primero necesario el hacer una revisión, por un lado de las técnicas y por otro, del significado del Grupo de Renormalización (GR). El modelo de Ising para un ferromagneto es el más representativo para que uno pueda entender las principales ideas que hay detrás de los fenómenos críticos. Centraremos la discusión alrededor de este modelo. Se sabe que para dimensiones mayores que uno, el modelo presenta transición de fase. En su versión continua como una teoría de campo, la transición de fase ocurre para dimensiones mayores que dos. Una de las funciones de especial importancia que describe completamente al sistema es la ecuación de estado, que relaciona la magnetización, la temperatura y el campo externo y en principio, contiene la información de cualquier tipo de transición que se pueda presentar. Por esta razón, es de gran interés el poder determinarla. A fines de los 60s se pudo entender la forma asintótica de esta ecuación para temperatura alta [13]; al empezar los 70s se determinó su comportamiento alrededor de la temperatura crítica [3]. Casi al mismo tiempo se pudo determinar su comportamiento para temperaturas menores que la crítica en la región de coexistencia [11]. Sin embargo, no se había podido obtener una representación global de esta función que interpola entre estas regiones. Uno de los objetivos de esta tesis es resolver este problema, para ello hemos usado *Renormalización Ambientalmente Amigable* cuya eficiencia ha quedado probada, particularmente en los casos como este, donde se presenta algún tipo de entrecruzamiento [17, 21].

Una de las dificultades que se tuvieron para describir a este modelo por debajo de la temperatura crítica es la aparición de modos de Goldstone [14, 15, 16]. La descripción de estos modos para temperatura baja es lo que se conoce como modelo Sigma No-Lineal. A finales de la década de los 70s se descubrió un tipo de entrecruzamiento para este modelo entre un sistema que exhibe simetría  $O(N)$  a uno de simetría  $O(M)$  [24]. Asimismo, se describió el escalamiento de tamaño finito para el modelo Sigma No-Lineal definido en una caja o un cilindro [25]. No obstante, quedó abierto el problema de entrecruzamiento dimensional para el cual la descripción anterior no funciona. Un segundo objetivo de la tesis es estudiar este entrecruzamiento; como en el caso de la ecuación de estado, usamos las técnicas de *Renormalización Ambientalmente Amigable* para hacerlo.

En el régimen de temperatura baja, una configuración típica de éste tipo de sistemas involucra dos fases diferentes separadas por una pared interfacial o interfase. Este es un caso particular de un concepto más general: los objetos extendidos. En contraste con lo que conocemos como partículas puntuales, este tipo de objetos se definen porque se extienden en forma de *superficie* en un espacio dado. Defectos en la topología de cristales, la *hoja de mundo* de una cuerda en un espacio de Minkowski, las membranas de las que se componen nuestras células, etc. son algunos ejemplos de objetos extendidos. Como un concepto abstracto, estos han sido de interés para los matemáticos, que han desarrollado lo que se denomina *Teoría de Superficies* [38]. Otro de los problemas que abordamos en este trabajo es el encontrar sistemáticamente, ecuaciones que minimizen el Hamiltoniano asociado a este tipo de estructuras geométricas, aquí nos hemos concentrado en el Hamiltoniano de Helfrich [52], para una superficie de dimensión  $d$  encajada en  $R^{d+D}$  con  $D$  un entero positivo.

Otro problema de mucho interés es el de poder determinar la estabilidad de objetos extendidos debido a pequeñas fluctuaciones térmicas, en su forma. Como veremos al final del capítulo 6, para el caso de las interfases, los modos de Goldstone asociados al rompimiento de simetría por la presencia de la interfase, son fluctuaciones ortogonales de la pared interfacial [32]. Esto fué estudiado recientemente para el caso de una membrana de Helfrich bidimensional [49, 50, 51]. Sin embargo, se tiene el problema que el operador de fluctuaciones difiere en estos reportes. Como un problema adicional, nos hemos planteado aclarar el punto y determinar definitivamente la forma de este operador.

Con el fin de determinar el comportamiento de estos objetos con la escala de longitud, en la última parte de la tesis hemos aplicado el GR para encontrar el flujo en el espacio de parámetros, primero para una membrana de Helfrich encajada en  $R^{2+D}$  y segundo para un objeto extendido encajado en  $R^{d+1}$ .

Como el lector habrá notado, hay una idea que está en el corazón y las arterias de este trabajo: el GR. Para dar un primer sabor de lo que hace el GR, pensemos por ejemplo en el modelo de Ising definido en una red cuadrada bidimensional de longitud microscópica  $a$ , este es un modelo que describe muy bien a un ferromagneto. Los espines pueden apuntar en dos direcciones posibles, arriba o abajo. Este modelo toma en cuenta que hay interacciones de cada uno de los espines con sus vecinos más cercanos

con un acoplamiento que es inverso a la temperatura, pero claro, esto no significa que no interactúen indirectamente con los que se encuentran más alejados. De hecho, la distancia hasta la cual uno de los espines tiene influencia es lo que se conoce como longitud de correlación. Para distancias más allá de esta longitud, la influencia de uno de los espines será despreciable. Claro, como el lector puede adivinar, este modelo se puede generalizar al caso en que el espín pueda moverse en una esfera alrededor de su base y no sólo hacia arriba o abajo: un modelo invariante bajo rotaciones del espín.

Ahora bien, si la temperatura es suficientemente alta, los espines tendrán suficiente energía térmica disponible de manera que terminarán alineándose aleatoriamente, si la temperatura es grande entonces el acoplamiento será muy pequeño y los espines estarán poco correlacionados: el número promedio de espines que apuntan hacia arriba será el igual al número de los que apuntan hacia abajo, o en otras palabras la magnetización del sistema será nula. Si se disminuye lentamente la temperatura del sistema algunas cosas sorprendentes empezarán a ocurrir. El acoplamiento empezará a ser cada vez más grande y lo mismo sucederá con la longitud de correlación, se empezarán a formar pequeñas regiones en las cuales los espines apunten en una sola dirección. Visto en un área grande la magnetización seguirá siendo nula pero la forma de la red habrá cambiado drásticamente pues identificaremos regiones de alineamiento como las nuevas variables de espín: burbujas de magnetización positiva inmersas en otras de magnetización negativa y viceversa.

Si uno continúa bajando la temperatura alcanzaremos eventualmente un cierto valor especial conocido como Temperatura de Curie. Al estar muy cerca de esta temperatura la longitud de correlación aumentará rápidamente. Esto significa que un espín aquí estará correlacionado fuertemente con otro a una distancia muy grande, y claro, lo seguirá estando con sus vecinos. En este sentido, se vuelve un fenómeno en el que todas las escalas de longitud son importantes para su descripción. En el punto de Curie, la longitud de correlación se hace infinita y por lo mismo, el sistema es altamente susceptible, una perturbación sobre uno de los espines, por pequeña que sea, tendrá un efecto espectacular sobre todo el sistema.

Cuando bajamos la temperatura más allá pero cerca de su valor de Curie, persistirá la situación de magnetización cero del sistema con este conglomerado de burbujas anidadas. Pero si seguimos enfriando, los espines empezarán a tener menor energía térmica y el acoplamiento será cada vez más fuerte. Llegará un momento en que apunten en una dirección preferida, habrá una magnetización espontánea. A temperatura cero, la situación será completamente uniforme. En el caso más general que el espín pueda rotar sobre su base, deberemos distinguir entre la dirección de magnetización preferida por el sistema y aquella en el plano perpendicular a ésta. Habrá entonces dos longitudes de correlación, una a lo largo de este plano, transversal digamos, y una paralela o longitudinal a la dirección de magnetización.

El nacimiento de lo que se conoce como el GR, se gesta precisamente en la apropiada descripción del modelo de Ising. Si dividimos la red en bloques de por ejemplo nueve espines y aplicamos la regla de la mayoría para asociar un espín al bloque correspondiente, lo que tenemos al fin es un modelo de Ising pero con menos grados de libertad, definidos en una red distinta de la primera pues ahora la distancia entre espines habrá aumentado a  $3a$ . No obstante, si reescalamos las distancias tal que  $a \rightarrow a/3$  podremos tener una red del tamaño de la original. Esta claro que podemos iterar este proceso muchas veces más. Es de remarcar la idea que se ha implementado al aplicar la regla de la mayoría en este caso: absorber las fluctuaciones del espín para ese bloque. A la larga, quedarán promediadas las fluctuaciones de todas las escalas hasta la longitud de correlación. El sistema de espines resultante refleja sólo las propiedades de largo alcance del sistema de Ising original, con todas las fluctuaciones de escala menor, eliminadas.

Después de haber formado el primer sistema de bloques, lo que nos queda es un nuevo conjunto de espines. Como el lector habrá notado, una de las cosas principales será el de poder determinar la forma del acoplamiento para este nuevo sistema. Las reglas para determinar cómo este acoplamiento depende del original es una de las principales tareas del GR. No obstante, uno puede tener una primera aproximación con la siguiente idea, luego de haber formado el primer bloque de espines, queda un conjunto con una separación más grande entre ellos, es de esperar que el acoplamiento entre los nuevas entidades sea más débil, eso significa en otras palabras, que lo que tenemos es un sistema con una temperatura mayor que la original y aumentando en cada iteración del GR, hasta el límite de temperatura infinita y espines al azar. Pero claro, uno puede ver las iteraciones en sentido contrario; es decir, que en cada iteración el acoplamiento se haga más grande, tendiendo eventualmente a infinito, o lo que es lo mismo, que el sistema se acerque al punto de temperatura cero en el que todos los espines estén alineados. Cabe aclarar que esto no describe la evolución del sistema original para nada, sino que el comportamiento a gran escala de la

nueva red equivale al comportamiento que se observaría en la red original a una temperatura distinta. La estrategia de ir formando bloques y de hacer corresponder a los diferentes sistemas nos da la idea del GR como una reparametrización, es decir, como un cambio de coordenadas del sistema (los acoplamientos).

Regresando a la descripción del modelo de Ising, hemos encontrado dos puntos para la temperatura que son especialmente importantes, un punto de temperatura alta, donde los espines están todos al azar, y un punto de temperatura cero, donde los espines están congelados. Estos dos puntos, cero e infinito, son lo que se denominan puntos fijos del GR. Hay sin embargo, entre estos dos puntos fijos extremos uno diferente, mejor conocido como punto fijo de Wilson-Fisher y que corresponde al punto de Curie que hemos descrito.

A partir del modelo de Ising en una red, uno puede encontrar una teoría efectiva correspondiente tal que el espín sea mapeado a un campo sobre un dominio continuo: una teoría de campo con invariancia bajo el grupo de rotaciones conocido como  $O(N)$ . Al adaptar las ideas del GR a teorías de campo continuo algunas variaciones debemos llevar a cabo debido a la aparición de divergencias ultravioletas, pero el aspecto esencial del GR como una reparametrización de la teoría es el mismo que ya hemos explicado. Se sabe muy bien que estas divergencias para el modelo  $O(N)$ , son renormalizables en dimensión menor o igual a cuatro, es decir, que basta un número finito de cambios de coordenadas en el modelo para que estos infinitos queden completamente absorbidos [1]. Esta es además, la región no trivial como fenómeno crítico. Se ha implementado el GR para este modelo para temperaturas mayores a la crítica pero muy cerca de ella, donde las interacciones son muy fuertes y el sistema está fuertemente correlacionado. Cálculos a distintos ordenes en el parámetro perturbativo se han llevado a cabo, y se han mejorado las aproximaciones en los exponentes críticos respecto a sus valores experimentales.

Sin embargo, un detalle no menor aparece cuando se considera al sistema por debajo de la temperatura crítica. Aparecen dos escalas de correlación, una transversal y otra longitudinal a la dirección de magnetización. La primera de ellas diverge para las configuraciones de coexistencia, esta es la manifestación de un fenómeno muy general que se da en la teoría de campo que es la aparición de bosones de Goldstone asociados al rompimiento de la simetría interna del sistema. Una fluctuación longitudinal a la dirección de ordenamiento es una que provoca que cambie la magnitud de la magnetización, en contraste, una fluctuación transversal cambiará su dirección y para hacer esto último, se requiere un costo de energía muy pequeño. Estas fluctuaciones transversales se denominan modos de Goldstone.

Una cuestión de interés es describir cómo pasa el sistema de la región dominada por el punto crítico estándar o de Wilson-Fisher, a la región dominada por los bosones de Goldstone. Ya otras investigaciones tocaron el problema pero ninguna lo hace de manera sistemática. Para ello nos hemos concentrado en la ecuación de estado del modelo y hemos aplicado una variante del GR conocida como *Renormalización Ambientalmente Amigable*. Los resultados son excelentes, pues por un lado se reproducen los ya conocidos para el punto de Wilson-Fisher y por otro para la región de alta temperatura, conocida como condición de Griffiths. Los gráficos que tenemos, indican que la descripción que estamos haciendo del sistema es correcta.

Así como la teoría efectiva del modelo de tipo Ising alrededor del punto crítico da como resultado el modelo  $O(N)$ , la teoría efectiva correspondiente en presencia de modos de Goldstone, da como resultado el modelo Sigma No-Lineal. En este caso, uno está más bien interesado en el comportamiento del sistema para temperaturas bajas, por lo que no es conveniente absorber el parámetro de temperatura, como se hace para el caso  $O(N)$ , en los parámetros de acoplamiento. Por ello, se trabaja explícitamente con la temperatura  $T$  como el parámetro perturbativo.

Es un hecho conocido el que exista una *dimensión crítica baja*, en contraste a la dimensión crítica alta. Para el caso del modelo de Ising, por ejemplo, no es posible tener ordenamiento de los espines en dimensión uno. Para sistemas con simetría continua, el valor de la *dimensión crítica baja* es dos: por debajo y en esta dimensión un sistema con simetría continua no puede presentar una transición de fase.

Si pensamos que la dimensión del sistema, de tamaño infinito, es apenas un poco mayor que dos, tendremos como consecuencia un punto fijo de temperatura no trivial por debajo de la cual el sistema adquiere una cierta magnetización. Claro, uno puede pensar en la dimensión como un parámetro que puede ser continuado analíticamente a un valor arbitrario no necesariamente entero. Si hacemos esto y tomamos el límite en que la dimensión tienda a dos, lo que pasa con el punto fijo de temperatura no trivial es que va acercándose a cero, al hacer esto, las fluctuaciones son tan fuertes que desordenan el sistema.

Para resolver el problema de entrecruzamiento dimensional hemos estudiado este modelo en una

película de dimensión  $d$  y grosor  $L$  usando *Renormalización Ambientalmente Amigable*. Esto lo hacemos también a orden de un lazo, los resultados recuperan por un lado, los efectos del tamaño finito del sistema y por otro, los puntos fijos asociados a sistemas de dimensión  $d$  y  $d - 1$  [57].

Un aspecto de natural importancia para entender la física de sistemas con interfase, es el análisis de fluctuaciones en la pared interfacial. Como ha quedado bien establecido, la energía efectiva de la pared interfacial resulta ser, a primer orden, proporcional al área de la misma y a los siguientes ordenes involucra términos de curvatura [30]. Es interesante que, este mismo modelo para la pared interfacial describe el comportamiento de ciertas membranas biológicas dentro de células de seres vivos, conocidas como membranas amfifílicas [54]. No termina ahí la ubicuidad del modelo, este aparece como la acción asociada a cuerdas bosónicas donde se le reconoce como la acción de Nambu-Goto [48]. Su importancia es manifiesta.

Para entender este tipo de sistemas, es necesario describir geoméricamente a la membrana como un objeto encajado en un espacio mayor: como un objeto extendido. En esta descripción hay dos partes principales, la geometría intrínseca de la membrana, información codificada en la métrica  $\gamma_{ab}$  de la membrana y la geometría extrínseca de la misma, expresada en el tensor de curvatura extrínseca  $K_{ab}$ . Como veremos en el capítulo 7, hay relaciones íntimas entre estas. Una similitud con los ferromagnetos es la siguiente: la curvatura extrínseca es determinada por un término proporcional a cambios locales del vector normal  $\mathbf{n}$ , sobre la superficie. Esto significa que en primera aproximación lo podemos ver como un modelo con interacciones de primeros vecinos también. El caso de membranas bidimensionales ha sido bastante estudiado [54, 55]. El ordenamiento del campo vectorial de normales a la superficie representa el rompimiento de simetría del modelo. Si por ejemplo están ordenados todos hacia arriba lo interpretamos como una membrana muy rígida, pero el teorema de Mermin-Wagner-Coleman nos dice que no puede haber ordenamiento en dimensión dos para sistemas continuos [47]. Como resultado, estas membranas están en la fase de plegado o arrugado. Por encima de esta dimensión hay una transición entre la fase de rigidez y de arrugado.

Dada la similitud con los ferromagnetos, es natural preguntarse lo que pasa en dimensiones mayores, particularmente en dimensión cuatro. Como veremos, para que el modelo sea consistente en esta dimensión, necesitamos introducir términos de interacciones hacia terceros vecinos, estos en general son cantidades que penalizan los cambios de curvatura extrínseca de la superficie o son combinaciones entre las geometrías extrínseca e intrínseca de este objeto extendido. Utilizando el formalismo geométrico covariante para deformar estos objetos desarrollado recientemente [40, 41, 42], obtenemos, el operador de fluctuaciones del modelo. Asimismo, describimos el flujo del GR a un lazo para esta teoría.

El resto de la tesis la hemos estructurado en la siguiente forma, el capítulo dos es una revisión de la fenomenología de transiciones de fase, en la que hemos dado especial atención al concepto de escalamiento, que juega un rol de primera importancia en los fenómenos críticos. En el capítulo tres presentamos el modelo de Helfrich para membranas fluidas así como el modelo  $O(N)$  de Landau-Ginzburg-Wilson, como teorías efectivas de modelos más fundamentales. Basados en este último modelo, damos un pequeño resumen de las técnicas de la teoría de campo. Adicionalmente, incluimos la definición de los exponentes críticos.

Dado que una herramienta importante que usamos es la *Renormalización Ambientalmente Amigable*, proporcionamos una breve exposición de este formalismo en el capítulo cuatro, en el que además describimos brevemente el GR desarrollado por Kadanoff-Wilson. Los capítulos cinco y seis representan dos contribuciones originales de la tesis, en el primero estudiamos la ecuación de estado del modelo  $O(N)$ ; en el segundo, el modelo Sigma No-Lineal.

En el capítulo siete, damos una exposición novedosa de la teoría de superficies. En el ocho veremos deformaciones en la geometría y en particular encontramos las derivadas de Euler-Lagrange para el Hamiltoniano de Helfrich de una superficie bidimensional encajada en  $R^3$  y su generalización al caso en que se encuentre inmersa en  $R^{3+D}$ , esta es una aportación original de la tesis así como los resultados para los correspondientes operadores de fluctuaciones con los que finalizamos el capítulo.

En el capítulo nueve encontramos el flujo del GR para membranas de Helfrich bidimensionales. En el capítulo diez estudiamos el caso de un objeto extendido de dimensión cuatro que es la aportación final de este trabajo. En el capítulo once hemos escrito las conclusiones de la tesis.

## 2 Fenomenología de Transiciones de Fase

La comprensión de los fenómenos de transiciones de fase juegan un rol de primera importancia en la física dada su ubicuidad en la naturaleza. En el análisis de estos, el concepto de escalamiento juega un papel central [1, 2, 3, 4]. Problemas relacionados a una escala muy grande en la estructura del Universo, con las formas complicadas de objetos macroscópicos a nuestro alrededor, o el comportamiento de las interacciones entre los constituyentes fundamentales de la materia a distancias muy pequeñas tienen la característica común de tener un número muy grande de grados de libertad interaccionando unos con otros de una manera muy complicada. No obstante, es posible lograr algo de conocimiento de estos sistemas aislando algunas variables relevantes en cierta escala de longitud y tiempo y postulando simples relaciones de escalamiento entre ellas. Sabemos también que estos sistemas pueden cambiar abruptamente su comportamiento haciendo apenas un pequeño cambio en estas variables, i.e. el sistema puede tener una cierta transición de un estado a otro.

Una transición de fase es definida como una singularidad en la energía libre o alguna propiedad termodinámica de un sistema [2]. Un *sistema* es entendido en el sentido más general; es definido por un Hamiltoniano que puede estar sujeto a varias constricciones macroscópicas. Por ejemplo, un conjunto aislado de partículas define un sistema, pero también lo es si se intercambia calor o trabajo con los alrededores, o lo que es más, si intercambia partículas con el medio etc. De hecho, estas son las definiciones de un ensemble microcanónico, canónico y gran canónico respectivamente. Las transiciones de fase son clasificadas como de primero, segundo orden etc., o de primer orden y de tipo continuo. El comportamiento de un sistema cerca de una transición continua es muy diferente del comportamiento lejos de este punto. Al comportamiento peculiar de los sistemas cerca del punto de transición se le conoce como fenómeno crítico. Veamos.

Para fijar ideas consideremos por ejemplo agua en sus varias fases, sólido, líquido y gas, para ejemplificar con un sistema que nos es familiar. Un cambio de temperatura nos permite observar transiciones de una fase a otra. Hay algunos más que fascinantes aspectos en estas transiciones de fase, particularmente en los cambios cualitativos, un pequeño cambio en la temperatura o en algún otro parámetro es suficiente para provocar una alteración espectacular en el sistema. Mas aún, este pertenece a una familia muy amplia de sistemas que exhiben transiciones de fase. Hay transiciones de fase magnéticas, ferroeléctricas, de superfluidez, de superconductividad, transiciones orden-desorden en aleaciones, en cristales líquidos etc. Es muy sorprendente que los descubrimientos de nuevos fenómenos de transiciones de fase tengan un rol de primera importancia en la física de la materia condensada. Para introducir algunas ideas básicas consideremos el caso particular en que existen tres fases que el sistema puede exhibir. La figura 1 muestra un diagrama de presión contra temperatura mostrando los dominios en los que existen las diferentes fases. Notamos dos puntos especiales en este diagrama: el primero, llamado

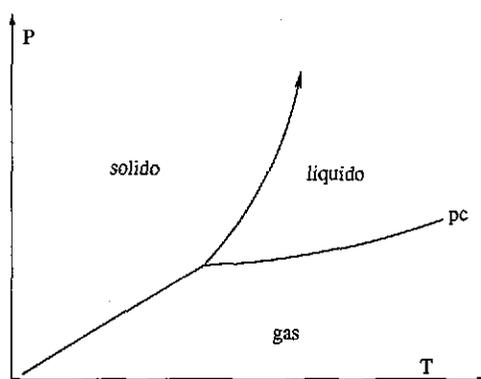


Figura 1: Diagrama de fase de un fluido.

un punto triple, en la intersección de los tres dominios; el segundo, conocido como punto crítico es el punto al final de la línea que divide las regiones de vapor y líquido. Rodeando el punto crítico uno puede pasar continuamente de la fase gaseosa a la fase líquida y viceversa, sin necesidad de una transición discontinua.

La figura 2 ilustra el segundo ejemplo, es un diagrama de campo magnético contra temperatura para un material sometido a una transición de tipo ferromagnético; esta exhibe una línea a lo largo del eje horizontal que termina en un punto conocido como punto crítico, como en el caso anterior. Si el campo magnético es nulo, a altas temperaturas se observa la fase desordenada conocida como fase paramagnética, con magnetización cero. Para temperaturas bajas una transición tiene lugar en el punto crítico  $T = T_c$ , y para  $T < T_c$  se observa una fase ordenada conocida como la fase ferromagnética, la cual está espontáneamente magnetizada. Hay una analogía entre los modelos anteriores: el campo magnético y la presión juegan un rol análogo. En la figura 2, al cruzar la línea  $H = 0$ ,  $T < T_c$ , la magnetización cambia discontinuamente; esta discontinuidad decrece conforme uno cruza la línea cada vez más cerca del punto crítico, donde la discontinuidad desaparece, en este sentido podemos hablar de una transición de primer orden muy fuerte para temperaturas muy bajas, y débil para temperaturas cercanas al punto crítico. En la vecindad de un punto de transición un sistema tiene dos diferentes fases estables, en dos regiones adjuntas respectivamente. Esto ocasiona la existencia de fluctuaciones, las cuales como regla general dominan el comportamiento del sistema cerca del punto de transición, un ejemplo es la opalescencia característica de las transiciones líquido-gas. Consideremos por ejemplo el ferromagneto de la figura 2.

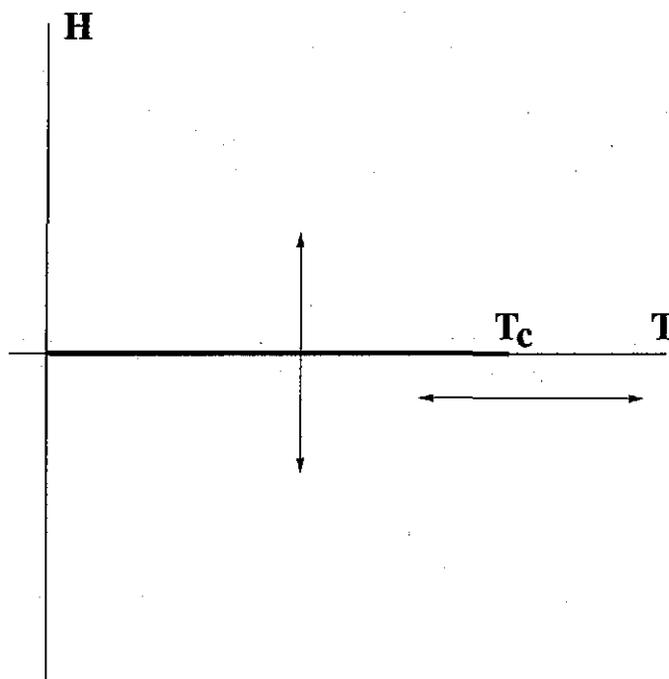


Figura 2: Campo magnético contra temperatura de un ferromagneto. La línea más oscura es la curva de coexistencia.

Para  $T > T_c$  la fase estable es la desordenada, pero si  $T$  es muy cercana a  $T_c$ , la fase ordenada es por muy poco menos estable que la desordenada y así, regiones pequeñas de fase ordenada persistirán por cierta cantidad de tiempo. Esto nos lleva a introducir casi de manera natural una longitud de correlación  $\xi$  para medir el tamaño medio de estas fluctuaciones, y una longitud temporal  $\tau$  que mida la extensión temporal o vida media de las mismas. La longitud  $\xi$  y el tiempo  $\tau$ , se incrementan conforme el sistema se aproxima al punto de transición, es decir, el fenómeno crítico asociado con estas fluctuaciones se vuelve muy importante. Queda claro que la longitud  $\xi$  nos describe la parte estática del fenómeno en tanto que  $\tau$  describe la parte dinámica. En esta tesis nos enfocaremos en estudiar la parte correspondiente a la longitud de correlación. Ahora bien, si como dijimos antes  $\xi(T) \rightarrow \infty$  con  $T \rightarrow T_c$ , esto significa que cerca del punto crítico las correlaciones entre cualesquiera dos puntos del sistema son muy grandes como lo muestra la opalescencia crítica del sistema, esto es lo que define una transición del segundo orden (no

discontinuidad en el parámetro de orden). La transición es de primer orden si en el punto de transición hay una discontinuidad en el parámetro de orden. En la figura 2 la flecha vertical es la dirección en la que se da una transición de primer orden para un ferromagneto, la horizontal representa una transición de segundo orden. Cerca de un punto crítico (i.e. a una transición de segundo orden) se observan cantidades

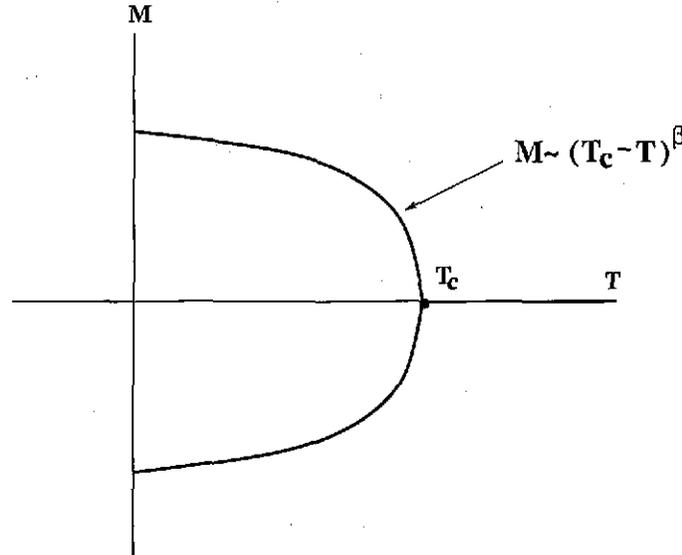


Figura 3: Magnetización contra temperatura para un ferromagneto. La línea más oscura es la curva de coexistencia donde el campo magnético es nulo,  $H = 0$ .

que obedecen leyes de potencias que no son números enteros, así, justo debajo de  $T_c$  el parámetro de orden tiende a cero proporcionalmente a  $(T_c - T)^\beta$  mientras que por encima de  $T_c$  el calor específico es proporcional a  $(T - T_c)^{-\alpha}$ , la longitud de correlación a  $(T - T_c)^{-\nu}$  y la susceptibilidad en el caso magnético a  $(T - T_c)^{-\gamma}$ . Los exponentes  $\alpha, \beta, \nu, \gamma$ , y otros como ellos son definidos en la vecindad de un punto crítico y muy naturalmente se les conoce como exponentes críticos. En las figuras 3 y 4 se definen los exponentes  $\beta, \delta$  y  $\gamma$  para un ferromagneto. Estas cantidades han sido medidas con mucha precisión experimental y no hay duda de que son números no enteros. En la siguiente tabla se muestran los valores encontrados experimentalmente para algunos de ellos para diferentes sistemas con  $d = 3$ , la mayoría de ellos publicados después de 1990.

	$\gamma$	$\nu$	$\eta$	$\alpha$	$\beta$
<i>lv</i>	1.233		.042	0.11	0.341
<i>bm</i>	1.09	0.64	.03	0.11	0.34
<i>ms</i>	1.47	0.64		0.11	0.34
<i>mi</i>	1.26	0.63	0.039		0.329

En ésta, *lv* denota la transición líquido-vapor, *bm* mezcla binaria, *ms* sistema magnético uniaxial, *mi* sistema miscelar [20]. De los números escritos en el cuadro, es de hacer notar la enorme coincidencia en los valores de los exponentes para tan diferentes sistemas. Esta manifestación es lo que se conoce como *universalidad*. Decimos que dos sistemas están en la misma clase de universalidad si estos arrojan los mismos valores (dentro del error experimental) para los exponentes críticos. Como veremos más adelante, esta no es la única manifestación de la universalidad de los sistemas.

El hecho de que los exponentes críticos tomen valores no enteros nos lleva a pensar en singularidades, puesto que un comportamiento así implica que las cantidades termodinámicas y la longitud de correlación dependen no analíticamente de sus variables, i.e. de la temperatura, la magnetización (o el conjugado del parámetro de orden) etc. En estas circunstancias los métodos usuales de teoría de perturbaciones son

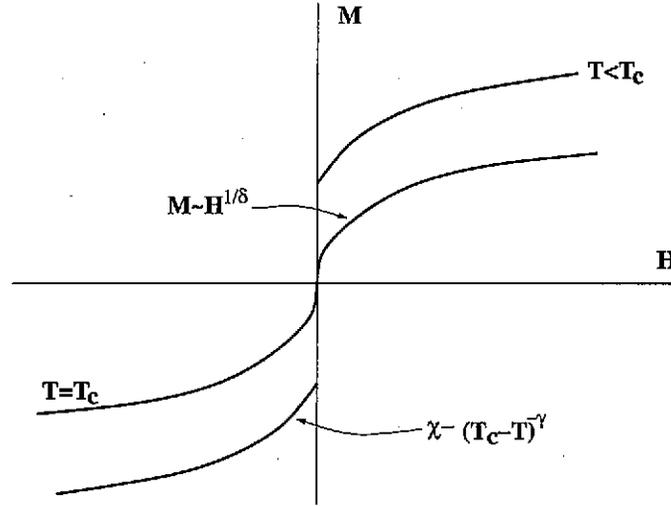


Figura 4: Magnetización contra campo magnético para un ferromagneto. La pendiente de la isoterma para  $T < T_c$  describe el comportamiento singular de la susceptibilidad  $\chi$ . El exponente  $\delta$  es definido sobre la isoterma crítica.

muy poco útiles. El comportamiento singular demanda una nueva forma de atacar el problema: como sabemos, hay un método poderoso para hacerlo conocido como el GR. Otro hecho más es de remarcar: resulta que los exponentes críticos no son independientes unos de otros sino que están relacionados entre sí. Estas relaciones se conocen como leyes de escalamiento, un ejemplo de una de ellas es dada por la ley de Rushbrooke  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ , que encontraremos en la próxima sección.

## 2.1 Escalamiento

Estas leyes de escalamiento se satisfacen automáticamente si se asume que la parte singular de la energía libre  $G(T - T_c, H)$  y la función de correlación  $\Gamma(T - T_c, \mathbf{r})$ , son funciones homogéneas de sus argumentos, aquí  $H$  es el campo conjugado al parámetro de orden [1, 2]. Entendemos por homogénea de grado  $\lambda$  una función que se puede escribir en la forma

$$f(x, y) = x^\lambda g\left(\frac{y}{x^\nu}\right). \quad (2.1)$$

La ecuación de estado por ejemplo, implica una ley de estados correspondientes relacionando el parámetro de orden  $M$ , su campo conjugado  $H$ , y la temperatura ( $t = \frac{T - T_c}{T_c}$ ) a través de una ecuación de la forma

$$\frac{H}{M^\delta} = f\left(\frac{t}{M^{1/\beta}}\right), \quad (2.2)$$

donde  $\beta$  y  $\delta$  son exponentes críticos. Experimentalmente se ha probado con muy alta precisión que una ley de escalamiento así se cumple cerca del punto crítico. Es una ley de estados correspondientes dado que establece una correspondencia entre estados diferentes del mismo sistema. De la expresión (2.2), parecería muy natural la combinación de variables que uno tendría que graficar. No obstante, si llevamos a cabo mediciones de temperatura, magnetización y campo magnético, no es trivial, a priori, el encontrar la combinación adecuada de esos parámetros para observar la homogeneidad. Cerca del punto crítico, la energía libre de Gibbs  $G(T, H)$  se puede descomponer en dos partes, una regular  $G_r$  y una singular  $G_s$ . La hipótesis de homogeneidad nos dice que podemos escribir  $G_s$  como una función homogénea, de grado  $2 - \alpha$ , de las variables  $H$  y  $t^\Delta$ , es decir

$$G_s \sim |t|^{2-\alpha} g^\pm\left(\frac{H}{|t|^\Delta}\right), \quad (2.3)$$

donde  $+$  ( $-$ ) corresponde a  $t > 0$  ( $t < 0$ ), y donde  $\Delta = \beta\delta$ , como veremos más abajo. La expresión anterior se satisface estrictamente hablando, solo cuando las variables  $t$  y  $H$  están muy cercanas a cero. Las funciones  $g^\pm(x)$ , definidas para  $0 < x < \infty$ , son analíticas en la vecindad de  $x = 0$  y obedecen leyes de potencias para  $x \rightarrow \infty$ . Derivadas sucesivas de  $G$  con respecto a  $H$ , se comportan asintóticamente de la misma forma, las primeras dos derivadas se definen como

$$M = -\frac{\partial G}{\partial H} \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} g_I^\pm \left( \frac{H}{|t|^\Delta} \right), \quad (2.4)$$

$$\chi = -\frac{\partial^2 G}{\partial H^2} \sim |t|^{2-\alpha-2\Delta} g_{II}^\pm \left( \frac{H}{|t|^\Delta} \right). \quad (2.5)$$

Veamos algunas de las implicaciones de este comportamiento. Consideremos primero un sistema con  $H = 0$  y con  $t \neq 0$  pero cerca del punto crítico. Las cantidades  $g^\pm(0)$ ,  $g_I^\pm(0)$ ,  $g_{II}^\pm(0)$ , deben ser finitas dado que la función de escalamiento  $f^\pm(x)$  es analítica en la vecindad de  $x = 0$ . El calor específico lo obtenemos de la siguiente manera

$$C \sim -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \sim t^{-\alpha} \quad (2.6)$$

De las expresiones (2.4) y (2.5) podemos identificar los exponentes  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente como

$$\begin{aligned} \beta &= 2 - \alpha - \Delta, \\ \gamma &= -2 + \alpha + 2\Delta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Eliminando  $\Delta$  de estas expresiones tenemos la relación de escalamiento de Rushbrooke

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (2.8)$$

Si consideramos la isoterma crítica,  $t = 0$ ,  $H \neq 0$ , entonces  $x = H/|t|^\Delta$  tiende a infinito y  $g_I^\pm(x)$  se debe comportar como  $x^{1/\delta}$ , para así satisfacer la relación  $H \sim M^\delta$ . Eliminando potencias de  $|t|$ , obtenemos  $\Delta = \beta\delta$ . Sustituyendo este valor en (2.7) y sumando tenemos

$$\gamma = \beta(\delta - 1), \quad (2.9)$$

que relaciona los exponentes  $\beta$  y  $\gamma$  definidos para  $T \neq T_c$  al exponente  $\delta$  definido en ese punto. Pero eso no es todo, de acuerdo a (2.4) y (2.7) la ecuación de estado, puede ahora escribirse en la forma homogénea

$$\frac{M}{|t|^\beta} = g_I^\pm \left( \frac{H}{|t|^{\beta\delta}} \right). \quad (2.10)$$

Es decir, la ecuación de estado se puede representar por dos curvas dadas por  $g_I^+$  y  $g_I^-$  para  $t > 0$  y  $t < 0$  respectivamente. Podemos ir todavía más lejos y generalizar a sistemas con más de un campo  $H$ , es decir, un sistema sujeto a más variables intensivas, aparte de la temperatura y del campo conjugado al parámetro de orden. Sean  $\mu_i$  estos campos y supongamos que para  $\mu_i = 0$  el comportamiento crítico obedece la hipótesis de escalamiento. En presencia de estos campos la hipótesis puede ser generalizada como

$$G_s(t, H, \mu_i) \sim |t|^{2-\alpha} g^\pm \left( \frac{H}{|t|^\Delta}, \frac{\mu_i}{|t|^{\psi_i}} \right), \quad (2.11)$$

Como antes, la expresión anterior tiene validez cuando  $|t|, H, \mu_i$  tienden todos a cero. Esta hipótesis más general da lugar a uno de los aspectos más importantes de los fenómenos críticos de los últimos años: el entrecruzamiento entre los diferentes puntos críticos del sistema [17].

Si por ejemplo el exponente  $\psi_i$  es negativo, conforme el sistema tiende al punto crítico la variable  $\bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{|t|^{\psi_i}}$  tiende a cero, lo que tenemos es un régimen en que el sistema se comporta como si el campo  $\mu_i$  fuera nulo. Pese a esto, al hacer una expansión de Taylor de la función de escalamiento  $f(x)$  alrededor de  $x = 0$ , vemos que como consecuencia habrá correcciones proporcionales a  $|t|^{2-\alpha-\psi_i}$  a la parte dominante de la función de escalamiento y por lo tanto a los exponentes críticos.

El caso en que  $\psi_i$  toma un valor positivo es más interesante ya que encontramos tres regiones distintas,  $|t|^{\psi_i} \gg \mu_i$ ,  $|t|^{\psi_i} \sim \mu_i$ ,  $|t|^{\psi_i} \ll \mu_i$ . En la primera región, lejos del punto crítico,  $\bar{\mu}_i$  es pequeño, es decir, es un régimen como si el campo  $\mu_i$  fuera nulo. En la segunda región, alrededor de  $|t^*| \sim \mu_i^{1/\psi_i}$  se puede decir que es la región donde las perturbaciones son muy importantes. Finalmente, en la tercera región, la teoría de perturbaciones deja de funcionar cerca del punto crítico. En otras palabras, estamos capturando un entrecruzamiento entre diferentes regiones. Es razonable suponer que exista una función de escalamiento que describa el cambio de un régimen a otro, esto implica que exista un corrimiento en la temperatura crítica  $t_c(\mu_i) = \frac{T_c - T_c(0)}{T_c(0)}$  proporcional a  $\mu_i^{|\psi_i|}$  [3]. Esto quedará mejor ilustrado en el siguiente párrafo. En el caso en el que el exponente  $\psi_i$  es nulo puede traer consigo consecuencias patológicas como correcciones logarítmicas a las leyes de los exponentes.

## 2.2 Tamaño Finito

Formalmente las transiciones de fase se hacen presentes en el límite termodinámico, en el cual el volumen y el número de grados de libertad toman valores infinitos, con la densidad fija. Es sólo en este límite que aparecen singularidades en la energía libre. Por otro lado, aunque experimentalmente el volumen o el número de partículas no son infinitos, estos exhiben transiciones de fase. Más aún, en muchos de los casos, las singularidades observadas coinciden con las predicciones teóricas en las que se ha tomado el límite termodinámico. Esto significa que en muchos casos los efectos del tamaño quedan absorbidos dentro de la resolución experimental. Para ejemplificar el entrecruzamiento veamos el caso de un sistema con una longitud característica  $L$  [5]. En este tenemos que  $g = L^{-1}$  y  $\psi = \nu$ . Aquí el verdadero comportamiento crítico viene de tomar el límite termodinámico  $L \rightarrow \infty$ . En el régimen  $|t|^{-\nu} \ll L$  las propiedades del sistema son las de un sistema de tamaño infinito. Sin embargo, conforme  $|t|$  se aproxima a la temperatura de crossover  $|t^*| \sim L^{-1/\nu}$  tenemos que los efectos del tamaño son importantes. Veamos por ejemplo la susceptibilidad a campo  $H = 0$ , que tiene la forma

$$\chi(t, L^{-1}) \sim |t|^{-\gamma} h\left(\frac{1}{L|t|^\nu}\right). \quad (2.12)$$

Lo que pasa para valores pequeños de  $|t|/|t^*|$  ahora depende de la geometría pues la longitud de correlación no puede ser más grande que la longitud  $L$ . La expresión anterior se puede reescribir en la forma

$$\chi(t, L^{-1}) \sim L^{\gamma/\nu} \tilde{h}\left(|t|L^{1/\nu}\right). \quad (2.13)$$

Para un sistema de tamaño finito, la función  $\tilde{h}(x)$  debe ser analítica en sus argumentos pues no pueden aparecer singularidades. Debemos esperar que tenga un máximo, digamos en  $x_0$ , por lo que la temperatura "crítica del sistema" tiene un desplazamiento respecto a la verdadera  $T_c$ , desplazamiento proporcional a  $L^{-1/\nu}$ . El máximo de la función debe ser proporcional al coeficiente  $L^{\gamma/\nu}$ . Queda ilustrado en la figura 5. Puede darse el caso que el sistema de tamaño finito tenga una singularidad en  $T_c(L)$ , esto define el corrimiento en la temperatura crítica  $\Delta_L$  mediante

$$\Delta_L \equiv \Lambda^2 \frac{T_c - T_c(L)}{T_c(L)} \sim bL^{-\lambda}, \quad L \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

donde  $\lambda$  es el exponente del corrimiento y  $b$  una amplitud no universal,  $\Lambda$  es el inverso al tamaño microscópico de la red asociada al modelo. Pero claro, también podría ser que no hubiera tal singularidad, en ese caso, se acostumbra definir la temperatura crítica como el punto donde alguna función como el calor específico o la susceptibilidad alcanzan su valor máximo.

Otra cantidad de interés es el punto en la temperatura  $T^*(L)$ , denominado temperatura de redondeo, donde alguna propiedad, como podría ser la susceptibilidad, se empieza a separar del correspondiente comportamiento de bulto. Esto define otro corrimiento  $\Delta_r$

$$\Delta_r \equiv \Lambda^2 \frac{T^*(L) - T_c}{T^*(L)} \sim cL^{-\theta} \quad (2.15)$$

donde  $c$  es otra amplitud no universal y  $\theta$  el exponente de redondeo [6].

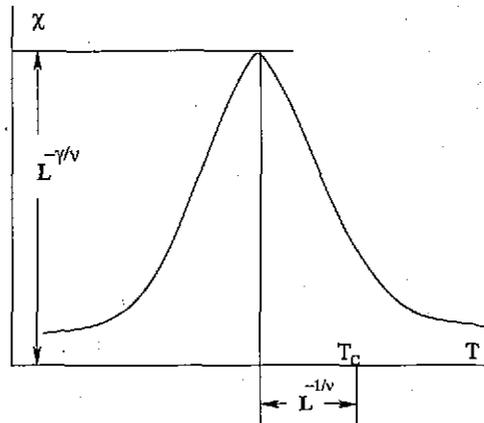


Figura 5: El efecto del tamaño es redondear la singularidad y desplazar la temperatura "crítica"

En esta sección hemos considerado el corrimiento debido al tamaño finito, no obstante podría darse el caso de otro tipo de corrimientos, como es el caso que veremos más adelante, para la ecuación de estado del modelo  $O(N)$ .

### 2.3 Una Ensalada Crítica

Hemos intentado describir en los párrafos anteriores la fenomenología de los fenómenos críticos de la forma más general posible. Sin embargo para mostrar la ubicuidad de los fenómenos críticos en la naturaleza, mencionemos algunos ejemplos concretos, es decir hagamos una ensalada con sabor de criticalidad.

En el primer caso se considera una cadena de polímeros en una red con los monómeros (las unidades básicas) situados en cada vértice de la red. Uno de los intereses es estudiar una cadena donde el número  $N$  de links es muy grande, este constituye un problema de caminante aleatorio y también modela las configuraciones de macromoléculas. En ausencia de interacciones entre los links, o en otras palabras, si la cadena puede cruzar un sitio de la red repetidamente sin ningún impedimento, se tiene el problema de una caminante aleatorio sin restricción, este es el caso del movimiento Browniano que juega el mismo papel que el modelo Gaussiano en las transiciones de fase. Un modelo más realista introduce interacciones repulsivas; en el caso de una repulsión local infinita lo que tenemos es un modelo de cadenas que se autoevitan. Si consideramos el número de cadenas (cada uno con  $N$  links), de extensión  $r$ , donde  $r$  es definida como la distancia entre los puntos inicial y final de la cadena, podemos definir una función  $\Gamma_N(r)$ , y su transformada de Fourier  $\Gamma_N(k)$ . Si introducimos una especie de potencial químico  $P$  mediante

$$\Gamma(P, k) = \sum_N e^{-NP} \Gamma_N(k), \quad (2.16)$$

lo que obtenemos es una formulación de analogía muy cercana a las funciones de correlación en la teoría de transiciones de fase. Existe un valor crítico  $P_c$  para el cual  $\Gamma(P_c, k=0)$  diverge. Como antes, se definen exponentes críticos asociados como por ejemplo  $\Gamma(P_c, k=0) \sim \left(\frac{1}{P-P_c}\right)^\gamma$  etc. En un párrafo subsecuente estudiamos la relación entre configuraciones de polímeros con el modelo  $O(N)$ .

Podemos considerar a las membranas como una extensión natural de las cadenas o polímeros, la naturaleza de estas es por supuesto más compleja debido a su estructura bidimensional: consideremos un sistema de partículas (átomos o monómeros) conectados entre sí formando un arreglo bidimensional inmerso en un espacio  $d$ -dimensional. La forma precisa de la red así formada (triangular, cuadrangular,

étc.) no tendrá mucha importancia, como tampoco la tendrá el tipo de potencial entre las partículas vecinas. Lo esencial será que las ligas entre los átomos o monómeros vecinos no puedan ser rotas. Estas son características de muchas estructuras poliméricas a temperaturas experimentalmente relevantes. Este tipo de membranas cuya característica principal es el de mantener las ligas entre sus monómeros se llaman cristalinas, poliméricas o *tethered*. Este tipo de membranas tienen al menos dos diferentes fases, *arrugadas* o *aplanadas*. Como veremos más adelante, estudiar fluctuaciones térmicas en este tipo de membranas tienen un análogo cercano a las de un ferromagneto, en este caso, el ordenamiento (que corresponde a los espines) es dado por vectores normales en cada punto de la membrana. Se da entonces lo que se conoce como transición de fase de arrugado: La función de correlación entre estos vectores normales decaen exponencialmente en la forma

$$\langle \mathbf{n}(0) \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle = e^{-r/\xi_p} \quad (2.17)$$

donde  $\xi_p$  es conocida como la *longitud de persistencia*, para longitudes mayores a esta, la membrana está en la fase de arrugado, para escalas menores es una membrana plana. Otro tipo de membranas las cuales tienen restricciones menos rígidas en cuanto a las ligas (o no las tienen) se conocen como membranas *fluidas* y exhiben fluctuaciones muy significativas en su forma que son controladas por un parámetro de rigidez.

La diferencia esencial se entiende de considerar un experimento simple: si intentamos doblar una superficie plana hacia una superficie esférica esto no será posible (por ejemplo con un pedazo de papel) a menos que el material permita el libre movimiento de las moléculas sobre la superficie (es decir, que permitamos a las ligas tener cierta dinámica). Membranas poliméricas o cristalinas existen en la naturaleza, lo que es más, existen conformando estructuras proteicas en membranas de células sanguíneas por mencionar un ejemplo. Las membranas *amphiphilicas* son la forma más común en que se nos presentan las membranas fluidas, el ejemplo típico es el de moléculas de fosfolípidos, este tipo de membrana tiene dos partes, una hidrofóbica y una hidrofílica que se sabe dan lugar a diferentes formas de bicapas en diferentes estructuras biológicas.

Si consideramos un fluido en un recipiente, con la fase líquida en la parte inferior y la fase de vapor en la parte superior, habrá una delgada región separando estas dos fases. Este es un tipo especial de membrana que consideramos más tarde en este trabajo: como veremos, la tensión superficial  $\sigma$  y el grosor  $w$  se comportan, cerca de la temperatura crítica en la forma

$$\sigma \sim (T_c - T)^\mu, \quad w \sim (T_c - T)^{-\nu}. \quad (2.18)$$

No podemos dejar de mencionar algún ejemplo de criticalidad que se da en la física de altas energías. Uno de los más importantes conceptos en la física moderna de partículas es el de rompimiento espontáneo de la simetría. De interés particular en cosmología es la especulación teórica de que las simetrías rotas pudieran ser restauradas a temperaturas suficientemente altas y que durante la evolución del Universo hubo transiciones de fase, tal vez muchas, asociadas con el rompimiento espontáneo de las simetrías de norma locales: configuraciones topológicas estables de campos de Higgs  $\phi$  y de norma existirían como dominios de paredes, cuerdas cósmicas y monopolos debido a estas transiciones. En el escenario cosmológico el Universo estaría inicialmente a una muy alta temperatura y dependiendo del potencial

$$V_{eff}(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2}M^4 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \frac{\lambda}{8}T^2\phi_c^2 - \frac{\pi^2}{90}T^4 + \dots \quad (2.19)$$

donde  $M^2(\phi_c) = -m^2 + 3\lambda\phi_c^2$ , este podría haber estado en la fase  $\bar{\phi}_c(T) = 0$ . A alguna temperatura crítica  $T_c$  este mínimo en el potencial sería metaestable y una transición de fase de primer o segundo grado pudo haber ocurrido, una referencia útil al respecto es dada por [7].

Estos son algunos ejemplos que nos muestran la importancia de los fenómenos críticos en la naturaleza.

### 3 Teorías Efectivas

Una forma de lograr avances relevantes en diversos problemas ha sido absorbiendo grados de libertad más fundamentales de la teoría correspondiente dentro de algunos otros parámetros que describen al sistema

étc.) no tendrá mucha importancia, como tampoco la tendrá el tipo de potencial entre las partículas vecinas. Lo esencial será que las ligas entre los átomos o monómeros vecinos no puedan ser rotas. Estas son características de muchas estructuras poliméricas a temperaturas experimentalmente relevantes. Este tipo de membranas cuya característica principal es el de mantener las ligas entre sus monómeros se llaman cristalinas, poliméricas o *tethered*. Este tipo de membranas tienen al menos dos diferentes fases, *arrugadas* o *aplanadas*. Como veremos más adelante, estudiar fluctuaciones térmicas en este tipo de membranas tienen un análogo cercano a las de un ferromagneto, en este caso, el ordenamiento (que corresponde a los espines) es dado por vectores normales en cada punto de la membrana. Se da entonces lo que se conoce como transición de fase de arrugado: La función de correlación entre estos vectores normales decaen exponencialmente en la forma

$$\langle \mathbf{n}(0) \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle = e^{-r/\xi_p} \quad (2.17)$$

donde  $\xi_p$  es conocida como la *longitud de persistencia*, para longitudes mayores a esta, la membrana está en la fase de arrugado, para escalas menores es una membrana plana. Otro tipo de membranas las cuales tienen restricciones menos rígidas en cuanto a las ligas (o no las tienen) se conocen como membranas *fluidas* y exhiben fluctuaciones muy significativas en su forma que son controladas por un parámetro de rigidez.

La diferencia esencial se entiende de considerar un experimento simple: si intentamos doblar una superficie plana hacia una superficie esférica esto no será posible (por ejemplo con un pedazo de papel) a menos que el material permita el libre movimiento de las moléculas sobre la superficie (es decir, que permitamos a las ligas tener cierta dinámica). Membranas poliméricas o cristalinas existen en la naturaleza, lo que es más, existen conformando estructuras proteicas en membranas de células sanguíneas por mencionar un ejemplo. Las membranas *amphiphilicas* son la forma más común en que se nos presentan las membranas fluidas, el ejemplo típico es el de moléculas de fosfolípidos, este tipo de membrana tiene dos partes, una hidrofóbica y una hidrofílica que se sabe dan lugar a diferentes formas de bicapas en diferentes estructuras biológicas.

Si consideramos un fluido en un recipiente, con la fase líquida en la parte inferior y la fase de vapor en la parte superior, habrá una delgada región separando estas dos fases. Este es un tipo especial de membrana que consideramos más tarde en este trabajo: como veremos, la tensión superficial  $\sigma$  y el grosor  $w$  se comportan, cerca de la temperatura crítica en la forma

$$\sigma \sim (T_c - T)^\mu, \quad w \sim (T_c - T)^{-\nu}. \quad (2.18)$$

No podemos dejar de mencionar algún ejemplo de criticalidad que se da en la física de altas energías. Uno de los más importantes conceptos en la física moderna de partículas es el de rompimiento espontáneo de la simetría. De interés particular en cosmología es la especulación teórica de que las simetrías rotas pudieran ser restauradas a temperaturas suficientemente altas y que durante la evolución del Universo hubo transiciones de fase, tal vez muchas, asociadas con el rompimiento espontáneo de las simetrías de norma locales: configuraciones topológicas estables de campos de Higgs  $\phi$  y de norma existirían como dominios de paredes, cuerdas cósmicas y monopolos debido a estas transiciones. En el escenario cosmológico el Universo estaría inicialmente a una muy alta temperatura y dependiendo del potencial

$$V_{eff}(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2}M^4 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \frac{\lambda}{8}T^2\phi_c^2 - \frac{\pi^2}{90}T^4 + \dots \quad (2.19)$$

donde  $M^2(\phi_c) = -m^2 + 3\lambda\phi_c^2$ , este podría haber estado en la fase  $\bar{\phi}_c(T) = 0$ . A alguna temperatura crítica  $T_c$  este mínimo en el potencial sería metaestable y una transición de fase de primer o segundo grado pudo haber ocurrido, una referencia útil al respecto es dada por [7].

Estos son algunos ejemplos que nos muestran la importancia de los fenómenos críticos en la naturaleza.

### 3 Teorías Efectivas

Una forma de lograr avances relevantes en diversos problemas ha sido absorbiendo grados de libertad más fundamentales de la teoría correspondiente dentro de algunos otros parámetros que describen al sistema

a la escala correspondiente. Por mencionar el ejemplo de los polímeros que describimos más abajo, lo que hacemos es tomar el límite en que el tamaño de las ligas que unen los monómeros es muy pequeño  $a \rightarrow 0$ . Para este caso, la teoría más fundamental debe tomar en cuenta las interacciones físico-químicas que se producen entre los monómeros, entre estos y las partículas que componen el solvente, etc. Esto parece una tarea muy compleja, sobre todo si a esto le añadimos que para cada tipo de solvente y de sustancia polimérica tendríamos en realidad una infinidad de grados de libertad interactuando unos con otros de manera muy complicada. Sin embargo, a una escala más allá del tamaño de las moléculas en el sistema, todas las interacciones microscópicas se manifiestan ya sea como atracción o bien como repulsión en el polímero. Esta observación ha hecho posible el hacer un mapeo a una teoría de campos continua (el modelo  $O(N)$ ,  $N \rightarrow 0$ ). No es que las interacciones más fundamentales hayan desaparecido, más bien podemos decir que estas se hacen presentes a través de grados de libertad y constantes de acoplamiento que resuman las interacciones más fundamentales. Para ilustrar con algunos ejemplos muy concretos de teorías efectivas, en ésta sección mencionaremos el caso de membranas fluidas, el de los polímeros y el caso del modelo de Ising.

### 3.1 Membranas

Hay en la naturaleza un tipo de moléculas con una característica muy particular, odiar y amar al agua al mismo tiempo: las moléculas amphiphílicas ( $\alpha\mu\phi\iota\phi\iota\lambda\iota\alpha$ ) [54]. Están compuestas de dos partes, una cabeza y una cola, la cabeza es la parte de la molécula que siente atracción con las moléculas de agua, es la parte hidrofílica, la cola o tallo es la parte hidrofóbica. Puestas en algún solvente, éstas moléculas tienden a formar diferentes tipos de estructuras, en la mayoría de ellas, las moléculas están alineadas formando bicapas con las cabezas de las moléculas viendo hacia fuera y los tallos en el interior de la bicapa. Este tipo de estructuras formadas de membranas amphiphílicas son una realización muy concreta pero muy importante de membrana fluida. Estas aparecen por ejemplo como membranas celulares. Como sabemos, las membranas celulares tienen como una de sus importantes funciones la de servir como filtro de sustancias que entran o salen de la célula.

Para describir de manera cuantitativa la energía asociada a una membrana amphiphílica, pensemos en una bicapa compuesta de  $2N$  moléculas amphiphílicas inmersas en agua. La energía de este sistema se puede escribir como

$$F = 2N\phi(a) = 2N[\phi_{atrac}(a) + \phi_{rep}(a) + \phi_{int}(a)], \quad (3.1)$$

donde  $a = A/N$  es el área por molécula. En esta expresión  $\phi(a)$  es el potencial químico de las moléculas de la bicapa. Es el trabajo que se requiere para añadir otra molécula a la membrana. Las otras partes representan una parte atractiva, una repulsiva y una es energía por la interacción interna en la bicapa.

De esta energía efectiva vemos que la tensión superficial de la membrana es igual a cero en la configuración de equilibrio, donde la membrana adopta un área  $a_0$  por molécula

$$\sigma(a_0) = \left. \frac{\partial F}{\partial A} \right|_{a_0} = 0, \quad (3.2)$$

tal vez este sea el argumento más sencillo para entender el por qué la tensión superficial de membranas amphiphílicas debe ser muy pequeña. Debemos hacer la distinción entre el área total  $A$  de la membrana, que es proporcional al número de moléculas que la componen, del área  $A_p$  proyectada por la misma en un plano coordenado.

Si dejamos fluctuar libremente a una de estas membranas en algún solvente y además suponemos que el grosor de la misma es pequeño en comparación con su tamaño nos damos cuenta que la descripción de las diferentes configuraciones que adopta la membrana dependerá fundamentalmente de las formas geométricas que va tomando.

Supongamos que la energía elástica por molécula en una configuración dada es simplemente la suma de las energías  $\epsilon_h$  de las cabezas y  $\epsilon_t$  de los tallos. Dado que en una primera aproximación podemos

pensar en éstas moléculas como pequeños resortes tenemos

$$\varepsilon_h = \frac{1}{2} k_h \left( \frac{a_h - a_{h_0}}{a_{h_0}} \right)^2, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} k_t \left( \frac{a_t - a_{t_0}}{a_{t_0}} \right)^2, \quad (3.4)$$

donde  $a_{h_0}$ ,  $a_{t_0}$  son los valores de equilibrio de la cabeza y el tallo respectivamente y  $k_h$ ,  $k_t$  son constantes elásticas. En la figura, la línea punteada es la posición de equilibrio de la molécula. Se representa también la deformación de la cabeza y el tallo. En términos de la curvatura de la membrana (ver capítulo 7)

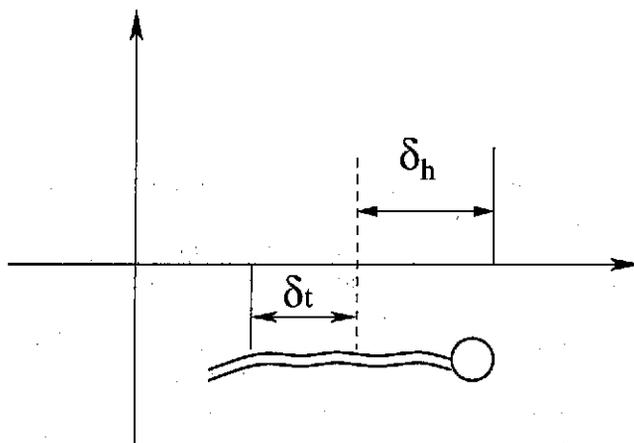


Figura 6: Deformación de una molécula amphiphílica.

tenemos,

$$a_h = a (1 + K\delta_h + \mathcal{R}\delta_h^2 + \dots) \quad (3.5)$$

$$a_t = a (1 - K\delta_t + \mathcal{R}\delta_t^2 + \dots) \quad (3.6)$$

En palabras, estas expresiones dicen como cambia el área ocupada por las cabezas y los tallos respectivamente, vemos que los términos en  $\delta_h$  y  $\delta_t$  están asociados con el hecho de *jalar* la membra de su posición de equilibrio, es decir, de doblarla. Con esto podemos escribir la energía total de la membrana por unidad de molécula como una suma, una parte correspondiendo a energía puramente elástica de la membrana y otra que se puede interpretar como una energía de doblado de la misma. Tenemos entonces lo que se conoce en la literatura como el Hamiltoniano de Helfrich [52]

$$F = \int dA \left[ \sigma + \frac{1}{2} \kappa K^2 + \bar{\kappa} \mathcal{R} \right], \quad (3.7)$$

donde, como podemos observar, en los coeficientes han quedado absorbidas las cantidades microscópicas que caracterizan a las capas de moléculas amphiphílicas.

En esta expresión para la energía de la membrana aparecen dos cantidades que caracterizan a una superficie, la curvatura extrínseca  $K$ , que describe la manera en que la superficie está *metida* en el espacio, y la curvatura intrínseca  $\mathcal{R}$  de la superficie. Notemos también que el modelo de Helfrich de membranas fluidas lleva intrínsecamente varias hipótesis, primero que estamos describiendo a éstas en escalas de

longitud donde no vemos más a las moléculas, donde las cabezas y tallos de las mismas han desaparecido en cierta forma (pero no obstante se expresan en los coeficientes) es decir, la descripción es a una escala en que vemos un continuo de membrana y segundo, que podemos describirla mediante funciones suaves que admitan ser por ejemplo diferenciables varias veces. Este es el tipo de modelo en el que se enfoca la segunda parte de este trabajo.

Hay, no obstante, otro tipo de membranas en la naturaleza, las llamadas membranas cristalinas o mejor conocidas como tethered. Una membrana cristalina es una estructura bidimensional con ligas que no se rompen, la conexión entre sus nodos está fija de alguna manera. Es sin embargo útil, describirlas como objetos  $d$ -dimensionales inmersos en un espacio  $D$ -dimensional. El Hamiltoniano asociado es dado por

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \kappa (\nabla_\alpha^2 \mathbf{r})^2 + \frac{t}{2} (\nabla_\alpha \mathbf{r})^2 + u (\nabla_\alpha \mathbf{r} \nabla_\beta \mathbf{r})^2 + v (\nabla_\alpha \mathbf{r} \nabla^\alpha \mathbf{r})^2 \right] + \frac{b}{2} \int d^d x d^d y \delta^d(\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}(y)), \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, \dots, x_d)$ , son las  $D$  funciones de encajamiento de la superficie que dependen de las  $d$  coordenadas intrínsecas de la misma. Los varios parámetros que aparecen en este Hamiltoniano son:  $\kappa$ , la rigidez de la membrana, que en palabras es el acoplamiento a la curvatura extrínseca de la misma;  $t, u, v$  son constantes elásticas de la membrana y están asociadas a propiedades de elasticidad interna;  $b$  es un coeficiente que acopla un potencial que no permite a la membrana intersectarse a sí misma.

Como vemos, la descripción matemática de una membrana fluida es diferente dado que el modelo no puede depender de grados de libertad internos de la membrana, i.e. no pueden haber términos de elasticidad como en el caso de las membranas cristalinas. Una revisión muy completa al respecto es dada en la referencia [56].

### 3.2 El modelo $O(N)$

El modelo de Ising describe un ferromagneto en una red. Los grados de libertad son variables de espín  $s_i$  en cada punto de una red  $d$ -dimensional. Estos espines interactúan por pares entre vecinos más cercanos, la función de partición se puede escribir como

$$Z[H_i] = \sum_{\{s_i\}} e^{\sum_{ij} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i} \quad (3.9)$$

donde hemos absorbido la temperatura en los coeficientes. El modelo de Heisenberg consiste también de variables de espín pero con un índice interno, es un vector tridimensional. Estos dos modelos han sido muy importantes en la historia de los fenómenos críticos: primero, la solución exacta del modelo de Ising bidimensional demostró la existencia de leyes de potencias con exponentes críticos no enteros diferentes de los clásicos y segundo, probando la universalidad de estos exponentes con respecto algunas características del sistema como la estructura de la red. En contraste, el modelo de Heisenberg difiere del de Ising en los exponentes críticos, lo cual muestra la importancia del número de componentes del parámetro de orden:  $N = 3$  para el modelo de Heisenberg,  $N = 1$  para el de Ising. Más aún, el valor de los exponentes para el caso bidimensional es diferente que para el caso tridimensional, mostrando la importancia también, de la dimensionalidad del espacio.

El modelo  $O(N)$  es una teoría de campos definidos no en una red sino de manera continua en un espacio  $d$ -dimensional que describiremos en detalle más abajo, baste decir por ahora que este modelo está en la misma clase de universalidad que el modelo de Ising al tomar  $N = 1$  y que el modelo de Heisenberg al hacer  $N = 3$ . Esto significa que en una escala en que el tamaño entre espines vecinos es infinitesimal, debemos poder obtener el modelo continuo a partir del discreto definido en una red. Es decir, debe ser posible obtener una teoría efectiva de campos cuyos parámetros absorban (como en el caso de membranas) las interacciones más fundamentales que se dan a nivel de la red. Una manera de hacer esto es llevando cabo una transformación de *Hubbard-Stratonovich* que relaciona formalmente variables discretas  $s_i$  con variables continuas  $x_i$  mediante una generalización de la integral Gaussiana

$$\int \prod d\varphi_i e^{-\frac{1}{4} \varphi_i V_{ij}^{-1} \varphi_j + s_i \varphi_i} = [\det(4\pi V_{ij})]^{1/2} e^{s_i V_{ij} s_j}. \quad (3.10)$$

Vemos que para el modelo de Ising tenemos  $K_{ij} = V_{ij} - A\delta_{ij}$ ,  $V_{ij}$  una matriz definida positiva y  $A$  una constante positiva, dado que  $K_{ij} \sim (\delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j})$ . Usando ec.(3.10) y el cambio  $\varphi_i \rightarrow \varphi_i - H_i$  obtenemos de la expresión (3.9), la siguiente

$$Z[H_i] = C \int \prod_i d\varphi_i e^{-\frac{1}{2}(\varphi_i - H_i)V_{ij}^{-1}(\varphi_j - H_j) + \sum_i \ln(\cosh \varphi_i)}, \quad (3.11)$$

donde  $C = 2^n e^{-nA} [\det(4\pi V_{ij})]^{-1/2}$ . Como podemos observar, el término *cinético* es no local. Esto lo podemos reacomodar si redefinimos los campos absorbiendo el factor  $V_{ij}^{-1}$ , tenemos

$$Z[H_i] = D \int \prod_i d\psi_i e^{-\psi_i V_{ij} \psi_j + \sum_i \ln(\cosh 2V_{ij} \psi_j)} \quad (3.12)$$

donde  $D = 2^n e^{-nA} [\det(2\pi)^{-1} V_{ij}]^{1/2}$ . Al tomar el límite continuo hacemos  $(\psi_{i+1} - \psi_i)/a \rightarrow \nabla_i \psi$ ,  $a^d \sum_i \rightarrow \int d^d x$ . Tenemos el resultado

$$Z[H_i] = D \int \prod d\psi(x) e^{-\frac{1}{2} \int d^d x (\nabla \psi)^2 + m^2 \psi^2 + \lambda \psi^4 + \dots} \quad (3.13)$$

donde los puntos significan que sólo hemos tomado los primeros términos en la expansión de la función  $\ln(\cosh x)$ . Los términos de más alto orden no son de relevancia en la descripción de criticalidad en dimensión menor o igual a cuatro.

Recapitulando, empezamos con un modelo discreto de grados de libertad definidos en cada punto de una red  $d$ -dimensional, mediante algunos trucos formales hemos llegado a un modelo en el que los grados de libertad están definidos de manera continua en un espacio  $d$ -dimensional y en el que las interacciones fundamentales han quedado absorbidas en los nuevos parámetros de la teoría. Hemos hecho lo anterior para el caso del modelo de Ising, no obstante, esto puede ser generalizado para el caso en que las componentes del espín es arbitrario, la teoría efectiva que resulta es el modelo  $O(N)$ .

### 3.3 Polímeros

Un polímero lineal se puede pensar como una larga cadena hecha de unidades simples llamadas monómeros. Puestas en algún solvente y dependiendo de la naturaleza de este, podría haber una atracción o repulsión entre las diferentes partes del polímero. Si la interacción es atractiva, las configuraciones del polímero tienden a compactarse, si es repulsiva el polímero tiende a extenderse dando lugar de paso a una transición entre ambos estados. Si el problema de polímeros largos es de cierta forma equivalente a una cierta clase de fenómeno crítico, esperamos que algunas cantidades importantes sean independientes de los detalles microscópicos, es decir, esperamos un cierto grado de universalidad. Esto significa que, en lo respecta a criticalidad, nos podemos olvidar de algunos detalles como por ejemplo de la naturaleza química entre los componentes del solvente y del polímero y que podemos ver a este como una cadena larga con puntos separados por una distancia  $a$ . En ausencia de interacciones, o en otras palabras, si la cadena puede cruzar un sitio de la red repetidamente sin ningún impedimento, se tiene el problema de una caminante aleatorio sin restricción, este es el caso del movimiento Browniano y juega el mismo papel que el modelo Gaussiano en las transiciones de fase.

Supongamos que a cada liga entre puntos en el polímero le asociamos un vector  $\rho_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $|\rho_i| = a$ . En ausencia de interacciones estas variables aleatorias son independientes y con una distribución uniforme. La longitud media cuadrada aleatoria de la cadena se puede escribir como

$$\langle R^2 \rangle = \left\langle \left( \sum_i \rho_i \right)^2 \right\rangle + \sum_{i \neq j} \langle \rho_i \cdot \rho_j \rangle = Na^2, \quad (3.14)$$

la segunda igualdad se sigue dado que el término cruzado es cero pues dos piezas del polímero no pueden estar en el mismo lugar al mismo tiempo. Así, el valor medio aleatorio de la longitud de la cadena se comporta como  $N^\nu$  con  $\nu = 1/2$ . Por otro lado el número de configuraciones de  $N$  ligas es proporcional a  $a^N$ . En general este número se comporta como  $N^{\gamma-1} a^N$  para  $N$  grande, esto define el exponente  $\gamma$  que como vemos es uno para el caminante aleatorio.

Si introducimos una distribución Gaussiana para los vectores  $\rho_i$ , es decir una distribución de probabilidad proporcional a  $e^{(-\rho_i^2/a^2)}$  y escribimos  $\rho_i = r_{i+1} - r_i$ , entonces la repulsión se puede modelar sumando el término

$$ua^d \sum_{ij} \delta^d(r_i - r_j) \quad (3.15)$$

al Hamiltoniano, donde  $u$  es una constante de acoplamiento. Como estamos interesados en escalas grandes respecto a la longitud  $a$  de la cadena, podemos tomar el límite  $a \rightarrow 0$ ,  $\sum_i \rightarrow \int d\tau/a^2$  para tener

$$\mathcal{H} = \int (dr/d\tau)^2 d\tau + ua^{d-4} \int \delta^d(r(\tau_1) - r(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.16)$$

donde el primer término es la energía lineal del polímero.

Como en el caso del modelo de Ising, resulta que este modelo tiene dos puntos fijos. Para  $d > 4$  las fluctuaciones alrededor del punto fijo gaussiano no son relevantes, dando los valores para los exponentes del caminante aleatorio. Para  $d < 4$  por analogía con el comportamiento crítico convencional esperamos un flujo hacia algún punto fijo no trivial. Una forma de verlo es reescalando por un factor  $b$  los parámetros  $a$  y  $r$  tal que  $a = a'b$ ,  $r = r'b^{-x}$  en el Hamiltoniano. Si elegimos  $x = (4-d)/(d+2)$  podemos ver que el Hamiltoniano se reescala en la forma  $\mathcal{H} = b^{-2x}\mathcal{H}'$ . Por otra parte, de la expresión (3.14) notamos que el comportamiento gaussiano de la longitud de la cadena se escala como  $\tau^{1/2}$  (ya que  $\tau$  juega el papel de la  $N$ ). Si suponemos que en presencia de las interacciones la longitud de la cadena se escala como  $\tau^{(1+x)/2}$ , podemos pensar en  $x$  como un cierto exponente *anómalo*, tal que si no hay interacciones, este desaparece y se recupera el comportamiento gaussiano. Es decir que el exponente  $\nu = (1+x)/2$  se puede identificar en presencia de estas interacciones como

$$\nu = \frac{3}{d-2} \quad (3.17)$$

este es un resultado derivado por Flory, tiene relevancia pues aporta un resultado exacto distinto al Gaussiano.

Otro resultado de gran trascendencia es el logrado por de Gennes, quién logró identificar el problema estadístico de polímeros con el límite  $N \rightarrow 0$  del modelo  $O(N)$ . Una forma de verlo es la siguiente: consideremos un modelo  $O(N)$  con  $n$  espines  $s_r$  en cada sitio de la red,

$$\mathcal{H} = -J \sum_{r,r'} s_r \cdot s_{r'}, \quad (3.18)$$

con el espín normalizado tal que  $Tr(s_r^a s_{r'}^b) = \delta_{rr'} \delta_{ab}$ . La función de partición es

$$Z = \sum_{\mathbf{s}} e^{\frac{J}{T} \sum_{r,r'} s_r \cdot s_{r'}} = \sum_{\mathbf{s}} \prod_{r,r'} e^{K s_r \cdot s_{r'}} \quad (3.19)$$

donde  $K = J/T$ . Esto lo podemos escribir en la forma equivalente

$$Z = (\cosh K)^{n-1} \sum_{\mathbf{s}} \prod_{r,r'} (1 + s_r \cdot s_{r'} \tanh K). \quad (3.20)$$

Para nuestro interés basta saber que esta función de partición tiene la forma

$$Z = Tr \prod_{r,r'} (1 + x s_r \cdot s_{r'}). \quad (3.21)$$

Si expandemos en potencias de  $x$  (para temperaturas suficientemente altas) podemos asociar una gráfica en la red con cada término. En la figura mostramos algunas de ellas. En estas gráficas, los espines están definidos en cada vértice, una liga entre vértices representa la interacción espín-espín.

Solo sobreviven las configuraciones en forma de lazo cerrado. El índice interno es forzado a ser el mismo así que por cada lazo tenemos un factor de  $N$ . Podemos decir que la función de partición es de la forma

$$Z \sim \sum_{\{\text{lazos cerrados}\}} N^{\#\text{lazos}} \quad (3.22)$$

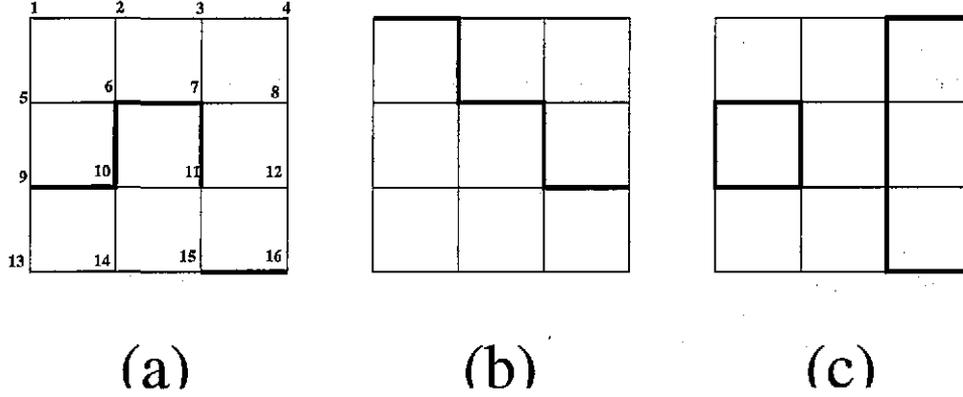


Figura 7: Algunos términos a los que se mapea la expansión de (3.21). Por ejemplo la trayectoria (b) representa el término  $s_1 \cdot s_2 s_2 \cdot s_6 s_6 \cdot s_7 s_7 \cdot s_{11} s_{11} \cdot s_{12}$ . Al tomar la traza, este término no contribuye pues aparece el factor  $\delta_{1,12}$ . Por la misma razón la gráfica (a) tampoco contribuye. Para la configuración (c) tenemos que multiplicar el cuadro, representado por el producto  $s_5 \cdot s_6 s_5 \cdot s_9 s_6 \cdot s_{10} s_9 \cdot s_{10}$ , por el rectángulo. Al tomar la traza, cada lazo cerrado contribuye con un factor  $N$ .

Así, vemos que aunque originalmente esta expresión es definida para  $N$  entero positivo, la función de partición anterior puede formalmente ser definida para cualquier valor de  $N$  y que en el límite  $N \rightarrow 0$ , solo tenemos configuraciones de un lazo, es decir, configuraciones de polímeros [8].

### 3.4 Teoría de Campos

En esta sección introducimos algunos elementos cuantitativos básicos de la teoría de campos. Un modelo genérico simple que nos ayuda en la comprensión de las ideas es el modelo de Landau-Ginzburg-Wilson con simetría interna  $O(N)$  y descrito por el Hamiltoniano que generaliza (3.13)

$$\mathcal{H}(\varphi) = \int_{\mathcal{M}} d^d x \left( \frac{1}{2} \nabla \varphi^a \nabla \varphi^a + \frac{1}{2} t \varphi^a \varphi^a + \frac{\lambda}{4!} (\varphi^a \varphi^a)^2 \right), \quad (3.23)$$

este modelo describe un campo escalar  $\varphi$ , en un espacio  $\mathcal{M}$  de dimensión  $d$ . El generador de funciones de correlación conectadas es definido mediante

$$W[t, \lambda, \mathbf{H}_a] = \ln \mathcal{Z}, \quad (3.24)$$

donde  $\mathcal{Z}$  es la función de partición dada por la integral funcional sobre el parámetro de orden  $\varphi^a$ , con el Hamiltoniano (3.23) y el campo externo aplicado  $\mathbf{H}_a(x)$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{H}] = \int [d\varphi] e^{-\mathcal{H}[\varphi] + \int_{\mathcal{M}} \mathbf{H}_a \varphi^a d^d x}. \quad (3.25)$$

Las funciones de correlación conectadas de la teoría, obtenidas por diferenciación funcional de  $W$  con respecto de  $t$  y  $\mathbf{H}_a$  en puntos distintos son

$$G_{(a_1, \dots, a_N)}^{(N, M)}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) = \langle \varphi^{a_1}(x_1), \dots, \varphi^{a_N}(x_N); \varphi^2(x_1), \dots, \varphi^2(x_M) \rangle. \quad (3.26)$$

De la misma manera, las funciones de vértice  $\Gamma_{(a_1, \dots, a_N)}^{(N, M)}$ , que dan lugar a diagramas conectados y sin líneas externas, se obtienen por diferenciación funcional de la acción efectiva  $\Gamma[t, \bar{\varphi}]$ , dada por la transformación de Legendre

$$\Gamma[t, \bar{\varphi}] = -W[t, \mathbf{H}] + \int_{\mathcal{M}} \mathbf{H}_a(x) \bar{\varphi}^a d^d x. \quad (3.27)$$

De hecho, estas funciones de correlación de vértice serán los objetos de interés central para nosotros. La densidad de energía libre del sistema físico es entonces  $F = -\frac{T}{V} \ln Z = F^b - \frac{T}{V} \ln Z$ , donde  $V$  es el volumen de  $\mathcal{M}$  y  $F^b$  es la densidad de energía libre de fondo que asumiremos como una función analítica de las variables termodinámicas. La densidad de energía interna es

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} \quad (3.28)$$

y el calor específico, siendo por definición igual a  $\partial U / \partial T$  se expresa como

$$C = -T^2 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}. \quad (3.29)$$

Si las fuentes  $t$  y  $\mathbf{H}_a$  son homogéneas, entonces para un sistema invariante ante traslaciones  $\bar{\varphi}^a$  es también homogéneo y en la dirección  $\mathbf{H}_a$ . En este caso la densidad de energía interna y el calor específico son dados por

$$U = U^b - T^2 \frac{\partial t}{\partial T} \Gamma^{(0,1)}, \quad (3.30)$$

$$C = C^b - \left( \frac{\partial}{\partial T} T^2 \frac{\partial t}{\partial T} \right) \Gamma^{(0,1)} - T^2 \left( \frac{\partial t}{\partial T} \right)^2 \Gamma^{(0,2)} \quad (3.31)$$

donde los vértices son evaluados a momento externo cero. Para el modelo  $O(N)$ , hay dos tipos de modos, aquellos a lo largo de la dirección definida por el campo  $\mathbf{H}_a$ , y aquellos perpendiculares a este. Si elegimos  $n^a$  en la dirección del campo externo, y definiendo los proyectores mediante

$$P_t^{ab} = n^a n^b \quad P_t^{ab} = \delta^{ab} - n^a n^b, \quad (3.32)$$

podemos descomponer una función de vértice general en forma de bloques diagonales. Denotamos  $\Gamma_{l \dots l t \dots t}^{(N, \mathcal{M})}$  a un vértice general, donde los subíndices  $l$  y  $t$  se refieren a un propagador longitudinal o transversal respectivamente. Si además no hay inserciones de  $\varphi^2$ , simplemente escribiremos  $\Gamma^{(N)}$ . Debido a las identidades de Ward (ver apéndice), cualquier función de vértice se puede expresar en términos de las funciones transversales, por ello, nos es suficiente con conocer éstas últimas. Así por ejemplo, de la ecuación de estado  $\Gamma_a^{(1)} = \mathbf{H}_a$ , tenemos  $\Gamma_t^{(1)} = 0$  y  $\Gamma_l^{(1)} = \mathbf{H}$ . De igual manera, usando la identidad de Ward  $\Gamma_l^{(1)} = \Gamma_t^{(2)} \bar{\varphi}$ , obtenemos

$$\Gamma_t^{(2)} \bar{\varphi} = \mathbf{H} \quad \Gamma_t^{(1)} = 0. \quad (3.33)$$

Asimismo, descomponiendo  $\Gamma_{ab}^{(2)}$  y usando una identidad de Ward tenemos

$$\Gamma_l^{(2)} = \Gamma_t^{(2)} + \frac{\Gamma_t^{(4)}}{3} \bar{\varphi}^2 \quad \text{y} \quad \Gamma_{tt}^{(2)} = 0. \quad (3.34)$$

Como podemos observar, el vértice  $\Gamma_t^{(2)}$  es el único que entra en la ecuación de estado (3.33). Este juega un rol central en determinar si hay o no una transición de fase en el modelo y sus ceros determinan la curva de coexistencia. Como podemos observar, si  $\mathbf{H} = 0$ , tenemos tres posibilidades: (i)  $\bar{\varphi} = 0$ , (ii)  $\Gamma_t^{(2)} = 0$ , o (iii)  $\bar{\varphi} = 0$  y  $\Gamma_t^{(2)} = 0$ . El primer caso es la situación mas común donde no hay magnetización (fase desordenada), el segundo caso corresponde a la existencia de una magnetización espontánea y así lo que tenemos es especificada la curva de coexistencia, y el tercer caso pasa en el punto crítico si este existe. Estas condiciones determinan si el modelo admite o no un punto crítico. Un punto importante aquí es que puede pasar que el modelo admita un punto crítico pero nunca una magnetización espontánea, es decir, se puede tener al caso de que haya fluctuaciones críticas pero no transición. Por supuesto, podemos tener transición sin que sean inducidas por fluctuaciones críticas, como pasa con las transiciones de primer orden. Finalmente, para el modelo  $O(N)$ , hay dos longitudes de correlación, la longitudinal y la transversal definidas como

$$\xi_l^{-2} = \frac{\Gamma_l^{(2)}}{\partial \Gamma_l^{(2)} / \partial p^2} \Big|_{p^2=0} \quad (3.35)$$

$$\xi_t^{-2} = \frac{\Gamma_t^{(2)}}{\partial \Gamma_t^{(2)} / \partial p^2} \Big|_{p^2=0} \quad (3.36)$$

como veremos posteriormente,  $\xi_t$  jugará un papel muy importante en la representación de la ecuación de estado.

### 3.5 Exponentes Efectivos

Para finalizar este capítulo definamos formalmente los exponentes críticos, pues estos son cantidades de un interés particular. En términos de un sistema magnético, estos se pueden definir en la forma

$$\nu_{eff} = - \frac{d \ln \xi}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad \gamma_{eff} = - \frac{d \ln \chi}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad (3.37)$$

$$\eta_{eff} = 2 - d - \frac{d \ln G(r)}{d \ln t} \Big|_{T=T_c}, \quad \alpha_{eff} = - \frac{d \ln C}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad (3.38)$$

si la temperatura es mayor a la crítica.

$$\delta_{eff} = \frac{d \ln H}{d \ln M} \Big|_{T=T_c}, \quad \nu'_{eff} = - \frac{d \ln \xi}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.39)$$

$$\gamma'_{eff} = - \frac{d \ln \chi}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad \alpha'_{eff} = - \frac{d \ln C}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.40)$$

$$\beta'_{eff} = \frac{d \ln M}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.41)$$

por debajo de  $T_c$ . En estas,  $\xi$  es la longitud de correlación,  $\chi$  la susceptibilidad,  $G(r)$  la función de correlación de dos puntos,  $C$  el calor específico y  $M$  la magnetización.

## 4 Renormalización

Todas las formas que hay de renormalización tienen en común la idea de expresar los parámetros que definen un problema en términos de algunos otros, tal vez un conjunto más simple. Esto puede ser a través de alguna forma de coarse graining de los grados de libertad para distancias cortas, como en los fenómenos críticos, donde la región de interés es en el infrarrojo. Estos métodos en general nos aportan ecuaciones que describen el flujo en algún espacio de parámetros en general complicado. Es el estudio de este flujo y lo que este significa en términos de la física del sistema lo que es la esencia del GR. Dejando un poco de lado las distintas variaciones que hay, baste mencionar que tenemos en general dos principales versiones. La primera de ellas se originó en el contexto de teoría de campos por Stueckelberg y Peterman, Gell-Mann y Low y por Bogoliubov y Shirkov en la década de los 50s [9]. El nacimiento se gesta debido a la aparición de las llamadas divergencias ultravioletas. La forma de eliminar estas divergencias es absorbiéndolas en parámetros nuevos (renormalizados), diferentes a los iniciales (desnudos). Esta es la idea de la reparametrización. Una versión moderna de esta forma de renormalización es la que desarrollamos en las próximas secciones.

La idea de la segunda versión del GR, está basada en la reducción sistemática de los grados de libertad. En los fenómenos críticos esto fué desarrollado en los años 60s, por Kadanoff, quien consideró una red de espines interactuando. Cerca del punto crítico, la longitud de correlación es mucho más grande que el espaciado  $a$  de la red, esto significa que el inverso de esta distancia entra como un corte para fluctuaciones de momentos grandes. Kadanoff propuso realizar los siguientes pasos: forme bloques de espines, considere los bloques las nuevas entidades básicas, calcule la interacción efectiva entre ellas y de

$$\xi_l^{-2} = \frac{\Gamma_l^{(2)}}{\partial \Gamma_l^{(2)} / \partial p^2} \Big|_{p^2=0} \quad (3.35)$$

$$\xi_t^{-2} = \frac{\Gamma_t^{(2)}}{\partial \Gamma_t^{(2)} / \partial p^2} \Big|_{p^2=0} \quad (3.36)$$

como veremos posteriormente,  $\xi_t$  jugará un papel muy importante en la representación de la ecuación de estado.

### 3.5 Exponentes Efectivos

Para finalizar este capítulo definamos formalmente los exponentes críticos, pues estos son cantidades de un interés particular. En términos de un sistema magnético, estos se pueden definir en la forma

$$\nu_{eff} = - \frac{d \ln \xi}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad \gamma_{eff} = - \frac{d \ln \chi}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad (3.37)$$

$$\eta_{eff} = 2 - d - \frac{d \ln G(r)}{d \ln t} \Big|_{T=T_c}, \quad \alpha_{eff} = - \frac{d \ln C}{d \ln t} \Big|_{H=0}, \quad (3.38)$$

si la temperatura es mayor a la crítica.

$$\delta_{eff} = \frac{d \ln H}{d \ln M} \Big|_{T=T_c}, \quad \nu'_{eff} = - \frac{d \ln \xi}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.39)$$

$$\gamma'_{eff} = - \frac{d \ln \chi}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad \alpha'_{eff} = - \frac{d \ln C}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.40)$$

$$\beta'_{eff} = \frac{d \ln M}{d \ln |t|} \Big|_{H=0}, \quad (3.41)$$

por debajo de  $T_c$ . En estas,  $\xi$  es la longitud de correlación,  $\chi$  la susceptibilidad,  $G(r)$  la función de correlación de dos puntos,  $C$  el calor específico y  $M$  la magnetización.

## 4 Renormalización

Todas las formas que hay de renormalización tienen en común la idea de expresar los parámetros que definen un problema en términos de algunos otros, tal vez un conjunto más simple. Esto puede ser a través de alguna forma de coarse graining de los grados de libertad para distancias cortas, como en los fenómenos críticos, donde la región de interés es en el infrarrojo. Estos métodos en general nos aportan ecuaciones que describen el flujo en algún espacio de parámetros en general complicado. Es el estudio de este flujo y lo que este significa en términos de la física del sistema lo que es la esencia del GR. Dejando un poco de lado las distintas variaciones que hay, baste mencionar que tenemos en general dos principales versiones. La primera de ellas se originó en el contexto de teoría de campos por Stueckelberg y Peterman, Gell-Mann y Low y por Bogoliubov y Shirkov en la década de los 50s [9]. El nacimiento se gesta debido a la aparición de las llamadas divergencias ultravioletas. La forma de eliminar estas divergencias es absorbiéndolas en parámetros nuevos (renormalizados), diferentes a los iniciales (desnudos). Esta es la idea de la reparametrización. Una versión moderna de esta forma de renormalización es la que desarrollamos en las próximas secciones.

La idea de la segunda versión del GR, está basada en la reducción sistemática de los grados de libertad. En los fenómenos críticos esto fué desarrollado en los años 60s, por Kadanoff, quien consideró una red de espines interactuando. Cerca del punto crítico, la longitud de correlación es mucho más grande que el espaciado  $a$  de la red, esto significa que el inverso de esta distancia entra como un corte para fluctuaciones de momentos grandes. Kadanoff propuso realizar los siguientes pasos: forme bloques de espines, considere los bloques las nuevas entidades básicas, calcule la interacción efectiva entre ellas y de

esta manera construya una familia de Hamiltonianos correspondientes. Queda claro que en el proceso se van eliminando fluctuaciones de corto alcance. Fué K. Wilson, quien dió una forma precisa a las ideas de Kadanoff, ideas que a su vez se han ido refinando un poco cada vez [10]. Esta forma de renormalización usaremos posteriormente para obtener el flujo en los parámetros de acoplamiento para una membrana fluida.

## 4.1 Grupo de Renormalización á la Kadanoff-Wilson

En esta forma de renormalización se establece una correspondencia entre sistemas con diferente longitud de correlación. Son tres los pasos básicos que se requieren para llevar adelante un programa de renormalización a la Kadanoff-Wilson:

- En el primer paso integramos fluctuaciones del parámetro de orden de longitud de onda cortas (o momentos grandes). El efecto de este primer paso es la reducción en el número de grados de libertad eliminando aquellos incluidos en el rango de integración  $\Lambda/b \leq k \leq \Lambda$ .
- En el segundo paso transformamos la escala de longitud, de tal manera de comparar problemas en la misma red. Contraemos todas las distancias por un factor  $b$  (lo que significa en otras palabras dilatar la unidad de longitud por el mismo factor)

$$x \rightarrow x' = x/b \quad (4.1)$$

$$k \rightarrow k' = bk \quad (4.2)$$

en particular, para la longitud de correlación,  $\xi \rightarrow \xi' = \xi/b$ .

- Renormalización de los coeficientes así como del parámetro de orden en el Hamiltoniano para regresar este a su forma original.

Pensemos en las constantes de acoplamiento de un Hamiltoniano dado, como las componentes de un vector de componentes  $K_a$ . Esto facilita la imagen que tenemos de lo que hace el GR: actuar sobre los puntos de este espacio de acoplamientos en la forma

$$\{K'\} = \mathcal{R}\{K\}, \quad (4.3)$$

donde  $\mathcal{R}$  es una función que describe la forma en que cambian los acoplamientos cuando variamos el factor de escala al llevar a cabo el segundo paso, es una función analítica de  $K_a$  y en particular depende de  $b$ . Si suponemos la existencia de un punto fijo en el sistema en  $K^*$  y que  $\mathcal{R}$  es diferenciable ahí, entonces podemos expandir alrededor de ese punto mediante

$$K'_a - K_a^* \sim \sum_b T_{ab} (K_b - K_b^*), \quad (4.4)$$

donde los  $T_{ab} = \partial K'_a / \partial K_b$  son evaluados en el punto fijo. Denotemos los eigenvalores de  $T_{ab}$  con  $\lambda^i$ , y sus eigenvectores por  $\{\phi_i\}$ , tal que

$$\sum_a \phi_a^i T_{ab} = \lambda^i \phi_b^i, \quad (4.5)$$

como la matriz  $T_{ab}$  no necesariamente es simétrica, los eigenvectores por la izquierda no necesariamente son iguales a los eigenvectores por la derecha. Definamos las variables de escalamiento  $u_i = \sum_a \phi_a^i (K_a - K_a^*)$ , combinaciones lineales de las desviaciones en el espacio de parámetros respecto al punto fijo, estas variables transforman como

$$\begin{aligned} u'_i &= \sum_a \phi_a^i (K'_a - K_a^*) \\ &= \sum_{a,b} \phi_a^i T_{ab} (K_b - K_b^*) \\ &= \sum_b \lambda^i \phi_b^i (K_b - K_b^*) \\ &= \lambda^i u_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

es conveniente definir aquí las cantidades  $\lambda_i = b^{y_i}$  donde  $b$  es el parámetro de reescalamiento. Vemos que pueden presentarse tres casos: Si  $y_i > 0$ , iteraciones repetidas del GR llevan a la variable  $u_i$  lejos del punto fijo,  $u_i$  se dice que es *relevante*. Si  $y_i < 0$ , la variable  $u_i$  tiende a cero con las iteraciones, es *irrelevante*. Si  $y_i = 0$ , no tenemos información a este orden, sobre el flujo, es una variable *marginal*.

Cerca del punto fijo hay un espacio lineal generado por los eigenvectores irrelevantes, la *superficie crítica*. Por continuidad esperamos que esta región exista en alguna región finita alrededor del punto fijo, donde la longitud de correlación diverge. Para ilustrar el significado de los campos irrelevantes, supongamos el caso que mostramos en figura 8, que muestra el flujo en un espacio parametrizado por  $\{K_1, K_2\}$ ;  $K_1$  podría ser por ejemplo el acoplamiento a los vecinos más cercanos y  $K_2$  el acoplamiento a terceros vecinos en el modelo de Ising.

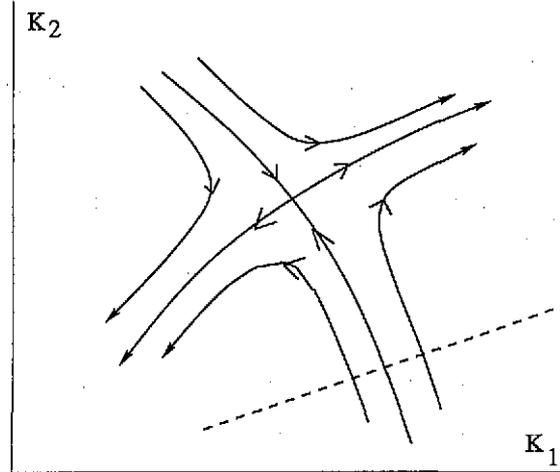


Figura 8: El flujo del GR. El punto de intersección es el punto fijo del GR. La línea con flechas entrando a este punto es la superficie crítica correspondiente.

De la figura vemos que la superficie crítica de este ejemplo actúa como una separatriz que divide el espacio en dos partes, una en la cual el flujo es hacia la región de  $K_a$  muy pequeña, y otra donde el flujo es hacia la región de  $K_a$  muy grande. Si por ejemplo lo que tenemos es un sistema con solo interacciones de vecinos cercanos ( $K_2 = 0$ ), el punto donde esta línea intersecciona la superficie crítica define el valor crítico del acoplamiento  $K_{1c}$ , ya que los puntos a la izquierda fluyen hacia  $K_1 = 0$  y los puntos a la derecha lo hacen hacia  $K_1 = \infty$ . En  $K_{1c}$  el flujo es hacia el punto fijo lo cual muestra que en el infrarrojo el punto crítico del sistema es dominado por ese punto.

No obstante, podemos tener un sistema con interacciones entre terceros vecinos también, como se ve en la línea punteada. Como antes, la intersección de ésta línea con la separatriz define el punto crítico del sistema. El comportamiento en el infrarrojo, otra vez es dominado por el mismo punto fijo como en el caso de interacciones con primeros vecinos. Este argumento puede ser generalizado para cualquier número de parámetros y lo que acabamos de decir, es que dos sistemas están en la misma clase de universalidad si su comportamiento en el infrarrojo está dominado por el mismo punto fijo. Por supuesto, este formalismo nos permite calcular diversas cantidades universales como los exponentes críticos y razones de amplitud. Así también, es posible estudiar modelos que exhiban más de un punto fijo, donde diferentes regiones son dominadas por distintos puntos fijos.

Es útil considerar una transformación infinitesimal, es decir, considerar el caso en que  $b = 1 + \delta s$ , con  $\delta s \ll 1$ . En este caso, las constantes de acoplamiento se transforman infinitesimalmente en la forma

$$\begin{aligned} K_a &\rightarrow K_a + \left(\frac{dK_a}{ds}\right) \delta s + \dots \\ &= K_a - \beta_a(K) \delta s + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

escrita en esta manera, los puntos fijos ahora corresponden a los ceros de las derivadas de los acoplamientos; estas definen las funciones beta  $\beta_a = -dK_a/ds$ . La matriz  $T_{ab}$  se transforma ante este cambio infinitesimal

como

$$T_{ab} = \delta_{ab} - \frac{\partial \beta_a}{\partial K_b} \delta s, \quad (4.8)$$

con eigenvalores  $(1 + \delta s)^{y_i} \sim 1 + y_i \delta s$ . Es decir,  $y_i$  son los eigenvalores de la matriz  $-\partial \beta_a / \partial K_b$ , evaluada en los ceros de la función beta.

#### 4.1.1 Campos No Lineales de Escalamiento

Como hemos visto, la linearización del GR alrededor de uno o más puntos fijos facilita en parte el cálculo de los exponentes críticos asociados con cada uno de ellos. Este mecanismo, sin embargo, no nos aporta mucha información respecto al entrecruzamiento en el flujo del GR entre los diversos puntos fijos. Para tratar de codificar esta información apropiadamente uno puede definir campos de escalamiento no lineales.

En el caso de un sistema magnético, en la vecindad de un punto fijo donde  $T = T^*$  y  $H = H^*$ , con  $t = T - T^*$  y  $h = H - H^*$ , la linearización del GR alrededor del punto fijo es dada mediante  $\mathcal{R}(T, H) \equiv (t', h') \sim (b^{y^t} t, b^{y^h} h)$ . Las variables  $t$  y  $h$  se conocen como campos de escalamiento lineales dado que satisfacen una relación de escalamiento lineal con  $y^t$  y  $y^h$  como las dimensiones de escalamiento correspondientes. Campos de escalamiento no-lineales  $g_t(t, h)$  y  $g_h(t, h)$  se definen tal que la relación

$$R(g_t, g_h) = (b^{y^t} g_t, b^{y^h} g_h), \quad (4.9)$$

se satisface exactamente. En la vecindad del punto fijo los campos de escalamiento no-lineales se reducen a los lineales, es decir  $g_t(t, h) = t + O(t^2, th, h^2)$  y  $g_h(t, h) = h + O(t^2, th, h^2)$ .

## 4.2 Renormalización Ambientalmente Amigable

La idea fundamental que hay detrás de la teoría moderna de fenómenos críticos tiene que ver con las diferentes descripciones de la naturaleza cuando la observamos a diferentes escalas, entendiendo por escala cualquier magnitud que caracterice al sistema. La descripción del sistema en una escala dada es formulada en términos de ciertos grados de libertad muy diferentes de aquellos que describen al sistema a una escala distinta de la primera. Este hecho, conocido en la literatura como entrecruzamiento, da lugar a diferentes regiones asintóticas en el sistema, regiones donde el mismo tiene diferentes formas de escalamiento. En este sentido, la teoría de campos nos ofrece las técnicas necesarias para tomar en cuenta de manera cuantitativa los aspectos más importantes de sistemas que exhiben grados de libertad radicalmente diferentes en escalas distintas. En términos del GR, la invariancia de escala de un sistema está asociada con la existencia de puntos fijos de las ecuaciones de flujo del GR. Una linearización alrededor de un punto fijo determina propiedades universales del sistema de interés, tales como exponentes críticos y razones de amplitud, estas propiedades de los sistemas son independientes a los detalles microscópicos, dependiendo solamente de algunos parámetros globales característicos del sistema como la dimensión o la simetría del parámetro de orden. Para el análisis de un sistema que presenta entrecruzamiento debemos tomar en cuenta que existe más de un punto fijo, así que habrá, como regla general, más de un conjunto de exponentes críticos y razones de amplitud, razón por la cual la linearización alrededor de un punto fijo no será de mucha utilidad. No obstante, el análisis de escalamiento indica que los diferentes conjuntos de exponentes y razones de amplitud deben de poderse ajustar a una función de escalamiento que interpole entre estos diferentes puntos fijos, es decir, debe ser posible encontrar una función de entrecruzamiento que capture estas diferentes propiedades universales del sistema.

Por supuesto, la más fundamental de estas funciones de escalamiento que uno desearía encontrar es la ecuación de estado, aunque de particular interés también son los exponentes "efectivos" como funciones de flujo que capturen los exponentes críticos del sistema de interés.

Queda claro el papel central que juega el GR en la óptima descripción de fenómenos de entrecruzamiento. Por ello es importante el preguntarnos lo que significa renormalizar y por qué tendríamos que hacerlo, de hecho la respuesta de ésta última pregunta tiene que ver con la idea mencionada más arriba, uno empieza por ejemplo con un modelo efectivo en el que han quedado absorbidos los grados de libertad microscópicos más fundamentales, es decir, un modelo a una escala suficientemente grande respecto de grados de libertad microscópicos. Un ejemplo ya clásico que ilustra muy bien las ideas en

este sentido es el modelo de Landau-Ginzburg-Wilson  $\lambda\varphi^4$  para describir un ferromagneto. En este caso el Hamiltoniano de inicio (o desnudo, como se dice en fenómenos críticos) ofrece una buena descripción del sistema a escalas  $\kappa \sim \Lambda$ , siendo  $\Lambda$  el corte ultravioleta (inverso al tamaño de la red). Sin embargo, a escalas  $\kappa \ll \Lambda$ , la descripción del sistema deja de ser útil, uno debe hacer entonces un cambio en los parámetros del sistema, de desnudos a renormalizados (o vestidos). La diferencia entre un conjunto y otro de parámetros es debido a las fluctuaciones, podemos decir que las fluctuaciones *visten* a los parámetros desnudos.

Un punto importante aquí es el de darnos cuenta qué tipo de fluctuaciones están siendo absorbidas en la redefinición de los parámetros, si la renormalización que hacemos es independiente del parámetro de interacción  $\lambda$ , entonces las fluctuaciones que están siendo apagadas no serán suficientes para darnos funciones de correlación finitas, pues con la renormalización elegida únicamente hemos controlado fluctuaciones gaussianas con las que los parámetros desnudos quedan prácticamente los mismos. Está claro que una buena renormalización debe depender del parámetro de interacción  $\lambda$  pues son precisamente las interacciones las que inducen el cambio de parámetros. Tal vez este sea, el ejemplo más simple de un sistema en el que podemos decir con claridad que una buena renormalización es aquella que toma en cuenta el *ambiente*, que en este caso es representado por el parámetro de interacciones  $\lambda$  [21].

Otro ejemplo que ilustra muy bien las ideas mencionadas es el de una teoría de campos con interacciones definida en una caja de tamaño  $L$ . Si uno considera la física a escalas  $\kappa \sim L^{-1}$ , encontramos que la teoría de perturbaciones está mal definida si implementamos el GR sin tomar en cuenta el tamaño del sistema, como antes, el error está en no tomar en cuenta el hecho de que los grados de libertad efectivos del sistema dependen precisamente del tamaño  $L$ . En este caso, este parámetro de la teoría es el responsable del entrecruzamiento en los grados de libertad efectivos. En general, una buena renormalización deberá de tomar en cuenta el hecho de que los grados de libertad efectivos son sensibles al ambiente. Los GR que toman esto en cuenta, son los que en la literatura se llaman *ambientalmente amigables*. Si un GR independiente del ambiente (es decir, no amigable) es implementado, tendrá como consecuencia divergencias no absorbidas, y por lo tanto la teoría de perturbaciones no tendrá ninguna validez.

Una de las principales motivaciones de este trabajo es mostrar al lector con algunos ejemplos muy concretos cómo es que una renormalización adecuada, una *renormalización ambientalmente amigable* [21], da lugar a funciones de escalamiento consistentes y completas en el sentido arriba descrito. Un entrecruzamiento muy interesante y el cual consideramos en éste trabajo con detalle se presenta en la ecuación de estado para el modelo  $O(N)$ . Este problema ya ha sido abordado a principios de los años 70, donde fué usada una expansión en el parámetro  $\epsilon$ , dando buenos resultados para  $x = t/M^{1/\beta}$  con valores pequeños, sin embargo el límite de  $x$  grande no está bien definido. Se implementó entonces una expansión en términos de  $z = Mt^{-\beta}$ , para poder acceder a tal región pero quedó el problema de no tener una aproximación uniforme entre ambos regímenes. Con una expansión en  $\epsilon$ , fué posible abordar el problema pero el caso  $N > 1$ , resulta muy problemático debido a la presencia de bosones de Goldstone. Se han realizado cálculos de más alto orden para una dimensión fija pero otra vez aparece para  $N = 1$ , el problema de tener dos escalas de longitud, una transversal y otra longitudinal. Este método tiene además el problema de que utiliza la longitud de correlación en la fase desordenada para investigar la física de la fase ordenada.

#### 4.2.1 Renormalización como Transformación de Coordenadas

Consideremos ahora la noción de reparametrización como renormalización. Supondremos que la función de partición depende de un conjunto de parámetros  $\{\mu_i\}$ . En el modelo de Ising tenemos por ejemplo  $\mu_1 = T - T^*$  y  $\mu_2 = H - H^*$ . Consideramos un conjunto uniparamétrico de reparametrizaciones que dependen de una escala arbitraria  $\kappa$

$$\mu_i = Z_i(\kappa, \{\mu_i(\kappa)\}) \mu_i(\kappa) \quad (4.10)$$

donde  $\{\mu_i(\kappa)\}$  son los parámetros renormalizados. Notemos que para algunos parámetros uno podría tener  $Z = 1$ , es decir, podría haber parámetros que no se renormalizan. Bajo esta reparametrización de las coordenadas  $\{\mu_i\}$  las funciones de vértice se transforman como

$$\Gamma_B^{(N,M)}(\{\mu_i\}) = Z_\varphi^{-\frac{N}{2}}(\kappa, \{\mu_i(\kappa)\}) Z_{\varphi^2}^{-M}(\kappa, \{\mu_i(\kappa)\}) \Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa)\}) \quad (4.11)$$

donde el subíndice B se refiere a cantidades desnudas. Podemos pensar en esta relación como un postulado, no obstante, su *validez* ha sido probada formalmente de manera perturbativa, *validez* significa en este contexto que mediante este cambio de coordenadas se absorben las divergencias de la teoría. Puesto que la física, representada por las funciones de correlación desnudas debe ser invariante ante transformaciones de coordenadas, tenemos

$$\kappa \frac{d\Gamma_B^{(N,M)}(\{\mu_i\})}{d\kappa} = 0 \quad (4.12)$$

que al ser implementada resulta en la ecuación diferencial para las funciones de vértice, las ecuaciones del GR,

$$\kappa \frac{d\Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa)\})}{d\kappa} = \left( \frac{N}{2} \gamma_\varphi(\kappa, \{\mu_i(\kappa)\}) - M \gamma_{\varphi^2}(\kappa, \{\mu_i(\kappa)\}) \right) \Gamma^{(N,M)}_{\mu_i}(\kappa) \quad (4.13)$$

donde  $\gamma_\varphi = \frac{d \ln Z_\varphi}{d \ln \kappa}$  y  $\gamma_{\varphi^2} = -\frac{d \ln Z_{\varphi^2}}{d \ln \kappa}$  son las funciones de Wilson que en un punto dado corresponden a las dimensiones anómalas de los operadores  $\varphi$  y  $\varphi^2$  respectivamente: en la derivación de estas funciones los parámetros desnudos permanecen constantes.

El generador infinitesimal del GR,  $\kappa \frac{d}{d\kappa}$  se puede expandir en términos de la base coordenada  $\{\partial_\kappa, \partial_{\mu_i}\}$  mediante

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} = \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial \mu_i} \quad (4.14)$$

donde las funciones beta son definidas como  $\beta_i = \kappa \frac{\partial \mu_i}{\partial \kappa}$  y están relacionadas con las correspondientes funciones de Wilson mediante  $\frac{\beta_i}{\mu_i} = \gamma_i$ . Las ecuaciones para las coordenadas  $\mu_i(\kappa)$  se resuelven formalmente como

$$\mu_i(\kappa) = \mu_i(\kappa_0) e^{\int_{\kappa_0}^{\kappa} \gamma_i \frac{d\kappa}{\kappa}} \quad (4.15)$$

lo cual es una exponenciación del resultado perturbativo para  $\gamma_i$ .

De igual manera, la ecuación del GR puede ser integrada, al hacerlo tenemos

$$\Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa_0)\}) = e^{-\frac{N}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa} \gamma_\varphi(x, \{\mu_i(x)\}) \frac{dx}{x}} e^{M \int_{\kappa_0}^{\kappa} \gamma_{\varphi^2}(x, \{\mu_i(x)\}) \frac{dx}{x}} \Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa)\}) \quad (4.16)$$

En el régimen donde la teoría es super-renormalizable, la escala  $\kappa_0$  puede ser elegida tal que las funciones de vértice en ese punto corresponden a las desnudas, es decir a las funciones de interés físico. Notemos que la ec.(4.16) no relaciona funciones de correlación de un sistema físico a otro, más bien, es una reescritura de funciones de correlación de un sistema físico en términos de coordenadas asociadas a otro sistema (el cual puede o no estar relacionado estrechamente con el sistema de interés). Una vez que elegimos una "norma" para  $\kappa$ , digamos  $\kappa = \kappa_m$ , entonces la ec.(4.16) es

$$\Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa_0)\}) = e^{-\frac{N}{2} \int_{\kappa_0}^{\kappa_m} \gamma_\varphi(x, \{\mu_i(x)\}) \frac{dx}{x}} e^{M \int_{\kappa_0}^{\kappa_m} \gamma_{\varphi^2}(x, \{\mu_i(x)\}) \frac{dx}{x}} \Gamma^{(N,M)}(\{\mu_i(\kappa_m)\}) \quad (4.17)$$

Donde ahora sí, las funciones de correlación en ambos lados de la ecuación representan dos sistemas físicos diferentes como en la aproximación de Kadanoff-Wilson. Si tenemos una teoría de campos parametrizada por un conjunto de coordenadas  $X = \{g^i\}$ , que asocia un punto en el espacio  $\mathfrak{R}$  de estas coordenadas, puede pasar que diferentes subconjuntos de estas coordenadas sean relevantes para describir la teoría a diferentes escalas. Si la renormalización depende solamente de un subconjunto  $\mathfrak{S}$  de coordenadas en  $\mathfrak{R}$ , entonces el flujo de tal GR, estará restringido a solo una región y por lo tanto perderíamos la información respecto a por ejemplo otros puntos fijos. La enseñanza es que en un contexto de teoría de campos, la forma de elegir la renormalización puede resultar crucial. Esto significa que existen GR que son suficientes por sí mismos para describir un sistema pero que también significa que hay GR que por sí mismos no lo pueden hacer y que por tanto deben ser complementados con información extra. Queda aún la cuestión de cómo podemos fijar formalmente un sistema de coordenadas.

Para fijar las ideas consideremos el caso concreto de  $\lambda\varphi^4$ . Hagamos una transformación de coordenadas de desnudas a renormalizadas. El GR transforma los parámetros del siguiente modo

$$t(m, \kappa) = Z_{\varphi^2}^{-1}(\kappa) t_B(m) \quad (4.18)$$

$$\lambda(\kappa) = Z_\lambda(\kappa) \lambda_B \quad (4.19)$$

$$\bar{\varphi}(\kappa) = Z_\varphi^{-\frac{1}{2}}(\kappa) \bar{\varphi}_B \quad (4.20)$$

donde  $\kappa$  es una escala arbitraria. La transformación de coordenadas (4.18, 4.19, 4.20), implica un cambio en las funciones de vértice dado por

$$\Gamma^{(N,M)}(\kappa) = Z_\varphi^{\frac{N}{2}}(\kappa) Z_{\varphi^2}^M(\kappa) \Gamma_B^{(N,M)} \quad (4.21)$$

la cual obedece la ecuación del GR

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \Gamma^{(N,M)} + \left( M \gamma_{\varphi^2} - \frac{N}{2} \gamma_\varphi \right) \Gamma^{(N,M)} = 0 \quad (4.22)$$

esta se resuelve en la forma

$$\Gamma^{(N,M)}(t(m, \kappa), \bar{\varphi}(\kappa), \lambda(\kappa), \kappa) = e^{\int_{\kappa_0}^{\kappa} \left( \frac{N}{2} \gamma_\varphi - M \gamma_{\varphi^2} \right) \frac{d\kappa}{\kappa}} \Gamma^{(N,M)}(t(m, \kappa_0), \bar{\varphi}_0, \lambda_0, \kappa_0) \quad (4.23)$$

donde  $\bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}(\kappa_0)$  y  $\lambda_0 = \lambda(\kappa_0)$ . Los parámetros renormalizados satisfacen las ecuaciones

$$\kappa \frac{dt(\kappa)}{d\kappa} = \gamma_{\varphi^2}(\kappa) t(\kappa) \quad (4.24)$$

$$\kappa \frac{d\lambda(\kappa)}{d\kappa} = \gamma_\lambda(\kappa) \lambda(\kappa) \quad (4.25)$$

$$\kappa \frac{d\bar{\varphi}(\kappa)}{d\kappa} = -\frac{1}{2} \gamma_\varphi(\kappa) \bar{\varphi}(\kappa) \quad (4.26)$$

las funciones de Wilson  $\gamma_{\varphi^2}(\kappa)$ ,  $\gamma_\lambda(\kappa)$  y  $\gamma_\varphi(\kappa)$  que entran en las expresiones anteriores son los bloques constructores de la teoría. La información perturbativa de estas funciones nos permiten construir, en principio, cualquier función de escalamiento en la que estemos interesados. Para especificar una transformación particular de coordenadas sólo nos falta fijar las funciones de transformación  $Z_{\varphi^2}(\kappa)$ ,  $Z_\lambda(\kappa)$ ,  $Z_\varphi(\kappa)$ , para esto utilizamos condiciones de normalización tal que las funciones de correlación coincidan con aquellas a nivel de campo promedio. Por dar un ejemplo, tomemos el caso en el que nos encontramos en la fase ordenada, para ello, recordemos que, como consecuencia de las identidades de Ward, cualquier función de correlación se puede escribir en términos de las funciones de correlación transversales. Como resultado, será suficiente con renormalizar estas últimas e imponer las siguientes condiciones de normalización

$$\partial_{p^2} \Gamma_t^{(2)}(p, t(\kappa, \kappa), \lambda(\kappa), \bar{\varphi}(\kappa), \kappa) |_{p^2=0} = 1 \quad (4.27)$$

$$\Gamma_t^{(2,1)}(0, t(\kappa, \kappa), \lambda(\kappa), \bar{\varphi}(\kappa), \kappa) = 1 \quad (4.28)$$

$$\Gamma_t^{(4)}(0, t(\kappa, \kappa), \lambda(\kappa), \bar{\varphi}(\kappa), \kappa) = \lambda \quad (4.29)$$

estas tres condiciones sirven para fijar las constantes de renormalización  $Z_{\varphi^2}$ ,  $Z_\lambda$ ,  $Z_\varphi$ , y por lo tanto son condiciones que fijan cómo debe ser la transformación de las coordenadas  $t$ ,  $\lambda$ , y  $\bar{\varphi}$ . La condición dada por

$$\Gamma_t^{(2)}(0, t(\kappa, \kappa), \lambda(\kappa), \bar{\varphi}(\kappa), \kappa) = \kappa^2 \quad (4.30)$$

sirve para fijar la relación entre la hasta ahora escala arbitraria  $\kappa$  y la temperatura  $t$ . Con estas condiciones de normalización encontramos explícitamente las siguientes expresiones

$$Z_\varphi^{-1} = \partial_{p^2} \Gamma_{t_B}^{(2)}(p, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B) |_{p^2=0} \quad (4.31)$$

$$Z_\varphi^{-1} Z_{\varphi^2}^{-1} = \Gamma_{t_B}^{(2,1)}(0, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B) \quad (4.32)$$

$$Z_\varphi^{-2} Z_\lambda = \frac{\Gamma_{t_B}^{(4)}(0, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B)}{\lambda_B} \quad (4.33)$$

y donde la relación entre  $t_B$  y  $\kappa$  es dada por

$$\kappa^2 = \frac{\Gamma_{t_B}^{(2)}(0, t_B(\kappa), \lambda_B, \bar{\varphi}_B)}{\partial_{p^2} \Gamma_{t_B}^{(2)}(p, t_B(\kappa), \lambda_B, \bar{\varphi}_B) |_{p^2=0}} \quad (4.34)$$

Estas son las herramientas formales que necesitamos para el análisis de funciones de escalamiento.

## 5 Ecuación de Estado para el Modelo $O(N)$

El análisis de la ecuación de estado de este modelo se torna complicado para el caso en que las componentes del parámetro de orden es mayor que uno. Su descripción es difícil debido a la aparición de dos escalas de longitud, una transversal  $\xi_T$  a la dirección de magnetización espontánea y otra en dirección paralela a ella  $\xi_L$ , ambas escalas divergen cerca de la línea de coexistencia. En éste caso, un buen GR debe capturar el entrecruzamiento entre dos regímenes diferentes, uno de ellos dominado por el punto fijo de Wilson-Fisher y el otro dominado por la curva de coexistencia. En la región crítica la ecuación de estado tiene la forma homogénea dada por la expresión (2.2). Mencionemos algunas características de la función universal  $f(x)$  [11]. Primero que nada, ésta función es normalizada por las siguientes dos condiciones: por debajo del punto crítico y campo  $H = 0$ ,  $M \sim (-t)^\beta$ ; sobre la isoterma crítica  $H \sim M^\delta$ . Así, la variable  $x$  está definida en el intervalo  $-1 < x < \infty$ , y la curva  $y = f(x)$  pasa por los puntos  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ . Las ramas  $x < 0$  y  $x > 0$  corresponden respectivamente a las fases de baja y de alta temperatura. En la vecindad de la isoterma crítica  $x = 0$ , la función  $f(x)$  es analítica y regular. En el límite  $x \rightarrow \infty$ , que corresponde a  $T > T_c$  con  $H \rightarrow 0$ , el comportamiento esperado es dado por la condición de analiticidad de Griffiths [13]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\gamma-2(n-1)\beta} \quad (5.1)$$

de acuerdo con esto, el comportamiento para  $x$  grande va como  $x^\gamma$ . Cerca de la línea de coexistencia  $x = -1$ , el comportamiento es dado por [15]

$$f(x) \sim (1+x)^{2/(d-2)} \quad (5.2)$$

lo cual implica que en este régimen, la susceptibilidad longitudinal tiene una divergencia con el campo magnético tendiendo a cero, es decir

$$\chi_L^{-1} \sim H^{(4-d)/2} \quad (5.3)$$

Como una expansión en  $\epsilon$ , la función  $f(x)$  ha sido calculada para  $x \sim -1$  como [11]

$$x + 1 = c_1 y + c_2 y^{d/2-1} + d_1 y^2 + d_2 y^{d/2} + d_3 y^{d-2} + \dots \quad (5.4)$$

donde  $y = H/M^\delta$ . Por supuesto, distintas técnicas se han usado para intentar describir el entrecruzamiento [14, 15, 16]. Desafortunadamente, de una u otra forma los resultados encontrados en éstas referencias no son sistemáticos y no dan lugar para comparaciones con simulaciones numéricas, las cuales en todos los casos han tenido que ajustar dos curvas, una usando la expansión para  $x$  grande (5.1) y la otra para  $x$  pequeña (5.4).

La ecuación de estado es particularmente interesante desde un punto de vista experimental. Una de las maneras para obtener representaciones aproximadas, es introduciendo representaciones paramétricas:

$$Z_\varphi^{-1} = \partial_{p^2} \Gamma_{t_B}^{(2)}(p, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B) |_{p^2=0} \quad (4.31)$$

$$Z_\varphi^{-1} Z_{\varphi^2}^{-1} = \Gamma_{t_B}^{(2,1)}(0, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B) \quad (4.32)$$

$$Z_\varphi^{-2} Z_\lambda = \frac{\Gamma_{t_B}^{(4)}(0, t_B, \lambda_B, \bar{\varphi}_B)}{\lambda_B} \quad (4.33)$$

y donde la relación entre  $t_B$  y  $\kappa$  es dada por

$$\kappa^2 = \frac{\Gamma_{t_B}^{(2)}(0, t_B(\kappa), \lambda_B, \bar{\varphi}_B)}{\partial_{p^2} \Gamma_{t_B}^{(2)}(p, t_B(\kappa), \lambda_B, \bar{\varphi}_B) |_{p^2=0}} \quad (4.34)$$

Estas son las herramientas formales que necesitamos para el análisis de funciones de escalamiento.

## 5 Ecuación de Estado para el Modelo $O(N)$

El análisis de la ecuación de estado de este modelo se torna complicado para el caso en que las componentes del parámetro de orden es mayor que uno. Su descripción es difícil debido a la aparición de dos escalas de longitud, una transversal  $\xi_T$  a la dirección de magnetización espontánea y otra en dirección paralela a ella  $\xi_L$ , ambas escalas divergen cerca de la línea de coexistencia. En éste caso, un buen GR debe capturar el entrecruzamiento entre dos regímenes diferentes, uno de ellos dominado por el punto fijo de Wilson-Fisher y el otro dominado por la curva de coexistencia. En la región crítica la ecuación de estado tiene la forma homogénea dada por la expresión (2.2). Mencionemos algunas características de la función universal  $f(x)$  [11]. Primero que nada, ésta función es normalizada por las siguientes dos condiciones: por debajo del punto crítico y campo  $H = 0$ ,  $M \sim (-t)^\beta$ ; sobre la isoterma crítica  $H \sim M^\delta$ . Así, la variable  $x$  está definida en el intervalo  $-1 < x < \infty$ , y la curva  $y = f(x)$  pasa por los puntos  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ . Las ramas  $x < 0$  y  $x > 0$  corresponden respectivamente a las fases de baja y de alta temperatura. En la vecindad de la isoterma crítica  $x = 0$ , la función  $f(x)$  es analítica y regular. En el límite  $x \rightarrow \infty$ , que corresponde a  $T > T_c$  con  $H \rightarrow 0$ , el comportamiento esperado es dado por la condición de analiticidad de Griffiths [13]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\gamma-2(n-1)\beta} \quad (5.1)$$

de acuerdo con esto, el comportamiento para  $x$  grande va como  $x^\gamma$ . Cerca de la línea de coexistencia  $x = -1$ , el comportamiento es dado por [15]

$$f(x) \sim (1+x)^{2/(d-2)} \quad (5.2)$$

lo cual implica que en este régimen, la susceptibilidad longitudinal tiene una divergencia con el campo magnético tendiendo a cero, es decir

$$\chi_L^{-1} \sim H^{(4-d)/2} \quad (5.3)$$

Como una expansión en  $\epsilon$ , la función  $f(x)$  ha sido calculada para  $x \sim -1$  como [11]

$$x + 1 = c_1 y + c_2 y^{d/2-1} + d_1 y^2 + d_2 y^{d/2} + d_3 y^{d-2} + \dots \quad (5.4)$$

donde  $y = H/M^\delta$ . Por supuesto, distintas técnicas se han usado para intentar describir el entrecruzamiento [14, 15, 16]. Desafortunadamente, de una u otra forma los resultados encontrados en éstas referencias no son sistemáticos y no dan lugar para comparaciones con simulaciones numéricas, las cuales en todos los casos han tenido que ajustar dos curvas, una usando la expansión para  $x$  grande (5.1) y la otra para  $x$  pequeña (5.4).

La ecuación de estado es particularmente interesante desde un punto de vista experimental. Una de las maneras para obtener representaciones aproximadas, es introduciendo representaciones paramétricas:

uno puede parametrizar la magnetización  $M$  y la temperatura  $t$  en términos de dos nuevas variable  $R$  y  $\vartheta$  de acuerdo a

$$|M| = m_0 R^\beta m(\vartheta), \quad (5.5)$$

$$t = R(1 - \vartheta^2), \quad (5.6)$$

$$|H| = h_0 R^{\beta\delta} h(\vartheta), \quad (5.7)$$

donde  $h_0$  y  $m_0$  son constantes de normalización [12]. La variable  $R$  es no negativa y mide la distancia desde el punto crítico en el plano  $(t, H)$ ; el comportamiento crítico se obtiene para  $R \rightarrow 0$ . La variable  $\vartheta$  parametriza los desplazamientos a lo largo de curvas de  $R$  constantes. La línea  $\vartheta = 0$  corresponde a la fase de alta temperatura  $t > 0$  y  $H = 0$ . La línea  $\vartheta = 1$  a la isoterma crítica  $t = 0$ . La línea  $\vartheta = \vartheta_0$ , (con  $\vartheta_0$  el cero positivo más pequeño de  $h(\vartheta)$ ) a la curva de coexistencia  $T < T_c$  y  $H \rightarrow 0$ . Las funciones  $m(\vartheta)$  y  $h(\vartheta)$  deben ser analíticas en el intervalo  $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$  para satisfacer la analiticidad de Griffiths.

La función de escalamiento  $f(x)$  se obtiene mediante

$$x = \frac{1 - \vartheta^2}{\vartheta_0^2 - 1} \left[ \frac{m(\vartheta_0)}{m(\vartheta)} \right]^{1/\beta}, \quad (5.8)$$

$$f(x) = \left[ \frac{m(\vartheta)}{m(1)} \right]^{-\delta} \frac{h(\vartheta)}{h(1)}. \quad (5.9)$$

Para obtener una aproximación de la ecuación de estado se elige alguna parametrización de  $h(\vartheta)$  y  $m(\vartheta)$  que dependen de  $k$  parámetros tales que estas son funciones impares de su argumento y  $h(\vartheta) = \vartheta + O(\vartheta^3)$  y  $m(\vartheta) = \vartheta + O(\vartheta^3)$  para  $\vartheta \rightarrow 0$ . Lo que se hace aquí es ajustar algunos de estos  $k$  parámetros con resultados de alguna simulación numérica, o con análisis de baja o alta temperatura o directamente de resultados experimentales. De hecho, hemos llevado a cabo algunas comparaciones con la ecuación de estado que se obtiene de ajustar coeficientes de series de alta y baja temperatura con simulaciones de Monte-Carlo. La ventaja de la aproximación que hemos obtenido en este trabajo es que proporciona una parametrización continua en todo el espacio fase que por supuesto satisface todas las propiedades requeridas.

### 5.1 Relación entre Variables de Escalamiento Lineales y No-Lineales

A partir de la elección que hicimos de la masa transversal  $m_t$  como la escala del GR, esta aparece muy naturalmente como una de las funciones de escalamiento no lineales para describir el modelo. Dado que tenemos dos campos lineales de escalamiento  $t$  y  $\bar{\varphi}$ , debemos determinar los correspondientes campos de escalamiento no-lineales. El otro campo de escalamiento no-lineal, digamos  $m_\varphi$ , debe venir de la anisotropía de las masas transversal y longitudinal que aparece por ejemplo en la función de Wilson  $\gamma_\varphi(m_t, \bar{\varphi})$ . De la expresión (3.34), vemos que esta anisotropía es dada por

$$m_\varphi^2 = \frac{1}{3} \frac{\Gamma_t^{(4)} \bar{\varphi}^2}{\partial_{p^2} \Gamma_t^{(2)}|_{p^2=0}} \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la transformación de coordenadas de interés es entre las variables  $(t, \bar{\varphi})$  y  $(m_t, m_\varphi)$ . Con esto, tenemos dos posibilidades para correr el GR. Podemos correr  $m_t$  dejando fija la variable  $m_\varphi$ , o bien uno puede dejar fija la magnetización  $\bar{\varphi}$  y correr  $m_t$ . Estas dos posibilidades conducen a dos diferentes GRs. Las funciones de Wilson asociadas son

$$\gamma_i = \kappa \frac{d}{d\kappa} \ln Z_i|_{m_\varphi} \quad (5.11)$$

para  $m_\varphi$  constante y

$$\bar{\gamma}_i = \kappa \frac{d}{d\kappa} \ln Z_i|_{\bar{\varphi}} \quad (5.12)$$

para  $\bar{\varphi}$  constante. La relación entre los generadores infinitesimales de estos dos GRs es

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \Big|_{\bar{\varphi}} = \kappa \frac{d}{d\kappa} \Big|_{m_\varphi} + \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_\lambda - \bar{\gamma}_{\varphi^2}) m_\varphi \frac{d}{dm_\varphi} \Big|_{\kappa} \quad (5.13)$$

Las ecuaciones de flujo relevantes para el caso  $m_\varphi$  constante son

$$\kappa \frac{dm_\varphi^2}{d\kappa} = 0 \quad (5.14)$$

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}}{d\kappa} = -(4-d)\bar{\lambda} + \gamma_\lambda(\kappa, m_\varphi, \bar{\lambda})\bar{\lambda}. \quad (5.15)$$

Solo el flujo para el acoplamiento es no trivial. En el caso donde la magnetización  $\bar{\varphi}$  es constante tenemos dos ecuaciones de flujo no triviales

$$\kappa \frac{dm_\varphi^2}{d\kappa} = (\bar{\gamma}_\lambda(\kappa, m_\varphi, \bar{\lambda}) - \bar{\gamma}_\varphi(\kappa, m_\varphi, \bar{\lambda})) m_\varphi^2, \quad (5.16)$$

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}}{d\kappa} = -(4-d)\bar{\lambda} + \bar{\gamma}_\lambda(\kappa, m_\varphi, \bar{\lambda})\bar{\lambda}. \quad (5.17)$$

De la definición de  $m_\varphi$ , ec.(5.10) y corriendo el GR, tenemos

$$m_\varphi^2 = \frac{\lambda(\kappa_0) \bar{\varphi}^2(\kappa_0)}{3} e^{\int_{\kappa_0}^{\kappa} (\gamma_\lambda(x, m_\varphi) - \gamma_\varphi(x, m_\varphi)) \frac{dx}{x}} \quad (5.18)$$

donde  $\bar{\varphi}(\kappa_0)$  es la magnetización física renormalizada a la escala  $\kappa_0$ . Las funciones de Wilson que aparecen en esta expresión son integradas a lo largo de contornos de anisotropía  $m_\varphi$  constante. Con (5.18) vemos que  $\bar{\varphi}$  satisface una relación constitutiva de la forma  $\bar{\varphi} = f(m_t, m_\varphi)$ . En el caso de  $\bar{\varphi}$  constante, la solución de (5.16) toma la forma

$$m_\varphi^2(\kappa) = m_\varphi^2(\kappa_0) e^{\int_{\kappa_0}^{\kappa} (\bar{\gamma}_\lambda(x, \bar{\varphi}) - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) \frac{dx}{x}} \quad (5.19)$$

aquí, las funciones de Wilson se integran en contornos de  $\bar{\varphi}$  constantes tal que  $m_\varphi$  esta cambiando. Por consistencia, requerimos que  $m_\varphi(\kappa_0) = \lambda(\kappa_0) \bar{\varphi}^2(\kappa_0) / 3$ . Más aún, cuando elegimos la norma de la escala  $\kappa$  como la masa  $m_t$  encontramos que la relación entre  $m_\varphi$  y  $\bar{\varphi}$  es

$$m_\varphi^2(\kappa) = \frac{\lambda(\kappa_0) \bar{\varphi}^2(\kappa_0)}{3} e^{\int_{\kappa_0}^{\kappa} (\bar{\gamma}_\lambda(x, \bar{\varphi}) - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) \frac{dx}{x}} \quad (5.20)$$

En ambos casos, las expresiones (5.18) y (5.20) nos dan la relación constitutiva entre las variables  $m_\varphi$  y  $\bar{\varphi}$ . La relación con la temperatura la encontramos de la función de dos puntos transversal, empezando con la identidad diferencial

$$\begin{aligned} d\Gamma_t^{(2)}(t, \bar{\varphi}) &= \frac{\partial \Gamma_t^{(2)}}{\partial t} dt + \frac{\partial \Gamma_t^{(2)}}{\partial \bar{\varphi}} d\bar{\varphi} \\ &= \Gamma_t^{(2,1)} dt + \frac{\Gamma_t^{(4)}}{6} d\bar{\varphi}^2, \end{aligned} \quad (5.21)$$

en la segunda línea hemos usado una identidad de Ward. A lo largo de curvas de campo  $\bar{\varphi}$  constante tenemos la expresión

$$dt = \frac{d\Gamma_t^{(2)}}{\Gamma_t^{(2,1)}}, \quad (5.22)$$

si en esta corremos el GR a lo largo de contornos de  $\bar{\varphi}$  constante tenemos

$$t_{\bar{\varphi}} = \int_0^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_\varphi^2(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} dx \quad (5.23)$$

donde  $t_{\bar{\varphi}} = Z_{\varphi^2}^{-1} \Lambda^2 (T - T_c(\bar{\varphi})) / T$  es una medida de la desviación de la temperatura desde la curva de coexistencia, donde  $m_t = 0$ ;  $\Lambda$  es el corte en el ultravioleta (inverso al tamaño de la red del modelo microscópico asociado). Si elegimos  $t = Z_{\varphi^2}^{-1} \Lambda^2 (T - T_c(0)) / T$  entonces tendremos

$$t = \int_{m_t(0, \bar{\varphi})}^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_\varphi^2(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} dx \quad (5.24)$$

esta expresión nos dice la forma en que  $m_t(t, \bar{\varphi})$  depende de la temperatura  $t$ , de la magnetización  $\bar{\varphi}$  así como de  $m_t(0, \bar{\varphi})$ , el inverso de la longitud de correlación transversal en la isoterma crítica. La relación entre  $t$  y  $t_{\bar{\varphi}}$  es vía un corrimiento  $t_{\bar{\varphi}} = t + \Delta_{\bar{\varphi}}$ , donde  $\Delta_{\bar{\varphi}} = Z_{\bar{\varphi}}^{-1} \Lambda^2 (T_c(0) - T_c(\bar{\varphi})) / T_c(\bar{\varphi})$  mide la desviación de la temperatura desde un punto en la curva de coexistencia al punto crítico. De (5.23) y (5.24) podemos derivar una expresión para el corrimiento

$$\Delta_{\bar{\varphi}} = \int_0^{m_t(0, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_{\varphi}(x, m_{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x}} dx. \quad (5.25)$$

Regresando a la representación de  $m_{\varphi}$  constante tenemos

$$t_{\bar{\varphi}} = \int_0^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}(x, m_{\varphi}(x))) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', m_{\varphi}(x')) \frac{dx'}{x}} dx \quad (5.26)$$

donde  $\bar{\gamma}_{\varphi^2}(x, m_{\varphi})$  es una función más que complicada de  $\bar{\gamma}_{\varphi}$  y  $\bar{\gamma}_{\lambda}$ , esto es debido a la dependencia de ésta función en  $m_{\varphi}$ , que depende a su vez de  $\bar{\gamma}_{\lambda}$  y  $\bar{\gamma}_{\varphi}$ . En esta última integración sobre la variable  $x$ , la anisotropía  $m_{\varphi}$  está corriendo pues la integración es a lo largo de curvas de  $\bar{\varphi}$  constante. Es útil introducir la variable  $z$  definida como la razón de los campos de escalamiento no-lineales  $z = m_t/m_{\varphi}$ . Usando esta variable, así como la expresión (5.20) obtenemos la relación

$$z^2 = \frac{1}{y} m_t^{d-2+\eta} e^{-\int_{\infty}^{m_t} (\Delta \bar{\gamma}_{\lambda}(x, y) - \Delta \bar{\gamma}_{\varphi}(x, y)) \frac{dx}{x}} \quad (5.27)$$

donde hemos identificado  $\eta = \gamma_{\varphi}^*$  y

$$y = \frac{\bar{\lambda}^*}{3} \kappa_0^{\eta} \bar{\varphi}^2(\kappa_0) \quad (5.28)$$

el límite inferior en la integración aparece debido a que hemos tomado el límite universal en las funciones de Wilson. En este régimen estas funciones se evalúan en la solución separatriz de la ecuación (5.17) para el acoplamiento  $\bar{\lambda}$ , solución que asintóticamente tiende al valor fijo  $\bar{\lambda}^*$ . En el integrando hemos escrito  $\Delta \bar{\gamma}_i(x, y) = \bar{\gamma}_i(x, y) - \bar{\gamma}_i^*$ , donde el asterisco significa el valor que toman en el punto fijo. Del mismo modo tenemos

$$t_{\bar{\varphi}} = \kappa_0^{\eta_{\varphi^2}} \int_0^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_{\varphi}(x, y)) e^{-\int_{\infty}^x \Delta \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', y) \frac{dx'}{x}} x^{1/\nu} \frac{dx}{x} \quad (5.29)$$

donde ahora  $\nu = 1/(2 - \eta_{\varphi^2})$  y  $\eta_{\varphi^2} = \gamma_{\varphi^2}^*$ . En estos términos, el corrimiento (5.25) se puede expresar como

$$\lim_{\kappa_0 \rightarrow \infty} \kappa_0^{-\eta_{\varphi^2}} \Delta_{\bar{\varphi}} = \mathcal{F}^{\Delta}(y) \quad (5.30)$$

donde aparece la función de escalamiento universal

$$\mathcal{F}^{\Delta}(y) = \int_0^{\zeta(y)} (2 - \bar{\gamma}_{\varphi}(x, y)) e^{-\int_{\infty}^x \Delta \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', y) \frac{dx'}{x}} x^{1/\nu} \frac{dx}{x} \quad (5.31)$$

en la que por ahora hemos dejado indicada una cierta función  $\zeta(y)$  en el límite superior de la integración. Como  $t_{\bar{\varphi}} = t + \Delta_{\bar{\varphi}}$ , de (5.29) concluimos que  $m_t$  tiene la forma de escalamiento

$$m_t = \chi(w, y) \quad (5.32)$$

con  $w = \kappa_0^{-\eta_{\varphi^2}} t$ . El cero de la función de escalamiento  $\chi(w, y)$  se localiza en  $w_0 = -\mathcal{F}^{\Delta}$ . Hasta este punto, todas nuestras funciones de escalamiento han sido parametrizadas en términos de  $m_t(0, \bar{\varphi})$ , una expresión para esta función se puede determinar integrando la relación (5.21) a lo largo de la isoterma crítica

$$\Gamma_t^{(2)}(0, \bar{\varphi}) = \int_0^{\bar{\varphi}^2} \frac{\Gamma_t^{(4)}(x)}{6} dx. \quad (5.33)$$

Si elegimos condiciones de normalización sobre la isoterma crítica tal que la longitud de correlación transversal es  $\kappa^{-1}$ , podemos expresar  $\Gamma_t^{(4)}$  en la forma

$$\Gamma_t^{(4)} = \lambda(\kappa_0) e^{\int_{\kappa_0}^{m_t(0, \bar{\varphi})} (\tilde{\gamma}_\lambda(x, \bar{\varphi}) - 2\tilde{\gamma}_{\varphi^2}(x, \bar{\varphi})) \frac{dx}{x}}, \quad (5.34)$$

donde las funciones con tilde son las funciones de Wilson resultado de esta prescripción. Si invertimos (5.33) obtenemos

$$\bar{\varphi}^2 = \frac{6}{\lambda(\kappa_0)} \int_0^{m_t(0, \bar{\varphi})} (2 - \tilde{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x (\tilde{\gamma}_\lambda(x', \bar{\varphi}) - \tilde{\gamma}_\varphi(x', \bar{\varphi})) \frac{dx'}{x'}} dx \quad (5.35)$$

la cual se puede resolver para  $m_t(0, \bar{\varphi})$  como función de  $\bar{\varphi}$  y subsecuentemente sustituida en (5.24) y (5.25).

## 5.2 Corrimiento de la Temperatura Crítica

Si integramos (5.21) sobre un contorno de magnetización constante  $\bar{\varphi} \neq 0$  tenemos

$$t + \Delta_{\bar{\varphi}} = \int_0^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} dx \quad (5.36)$$

en esta integración el límite inferior es cero debido a que hemos evaluado la masa transversal correspondiente sobre la línea de coexistencia (donde se anula). Una expresión para  $t$  la obtenemos si evaluamos (5.24) a lo largo de  $\bar{\varphi} = 0$ . Tenemos

$$\Delta_{\bar{\varphi}} = \int_0^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} dx - \int_0^{m_t(t, 0)} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, 0)) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', 0) \frac{dx'}{x'}} dx. \quad (5.37)$$

Dado que por definición, el corrimiento  $\Delta_{\bar{\varphi}}$  es independiente de la temperatura, la expresión anterior puede ser evaluada para cualquier  $t$ . En particular, para valores muy grandes,  $t \rightarrow \infty$ , el comportamiento asintótico de la masa transversal es  $m_t^2(t, \bar{\varphi}) \rightarrow t + \lambda\bar{\varphi}^2/6$ , en esta región las funciones de Wilson no tienen contribución, podemos hacer

$$\int_0^{t + \lambda\bar{\varphi}^2/6} (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} \frac{dx^2}{2} = \int_0^\infty (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} \frac{dx^2}{2} \quad (5.38)$$

$$+ \lambda\bar{\varphi}^2/6 \quad (5.39)$$

Por lo tanto

$$\Delta_{\bar{\varphi}} = \frac{\lambda(\kappa_0)\bar{\varphi}^2(\kappa_0)}{6} + \int_0^\infty \left[ (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi})) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', \bar{\varphi}) \frac{dx'}{x'}} - (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, 0)) e^{-\int_{\kappa_0}^x \bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', 0) \frac{dx'}{x'}} \right] dx. \quad (5.40)$$

Si  $\kappa_0 \rightarrow \infty$  el primer término es muy pequeño respecto a los demás. Evaluando en la separatriz podemos escribir la forma (5.30) identificando explícitamente

$$\mathcal{F}^\Delta(y) = \int_0^\infty \left[ (2 - \bar{\gamma}_\varphi(x, y)) e^{-\int_{\kappa_0}^x \Delta\bar{\gamma}_{\varphi^2}(x', y) \frac{dx'}{x'}} - (2 - \eta) \right] x^{1/\nu} \frac{dx}{x}. \quad (5.41)$$

La ecuación para la curva de coexistencia,  $t + \Delta_{\bar{\varphi}} = 0$  tiene ahora la forma

$$w + \mathcal{F}^\Delta(y) = 0 \quad (5.42)$$

que se puede escribir en una forma estándar si dividimos por  $y^{1/2\beta}$  para tener

$$x + \mathcal{F}^\Delta(y)/y^{1/2\beta} = 0 \quad (5.43)$$

con  $x$  definida mediante

$$x = \kappa_0^{-\eta_{\varphi^2}} \left( \frac{3}{\kappa_0^\eta \lambda^*} \right)^{1/2\beta} \frac{t}{\bar{\varphi}^{1/\beta}}. \quad (5.44)$$

### 5.3 Ecuación Universal de Estado

Empezando por la forma básica de la ecuación de estado y corriendo el GR obtenemos

$$H/\bar{\varphi} = m_t^2 e^{-\int_{\kappa_0}^{m_t} \bar{\gamma}_\varphi(x, \bar{\varphi}) \frac{dx}{x}} \quad (5.45)$$

Si extraemos la parte universal tenemos

$$H/\bar{\varphi} = \kappa_0^\eta m_t^{2-\eta} e^{-\int_{\kappa_0}^{m_t} \Delta \bar{\gamma}_\varphi(x, y) \frac{dx}{x}}, \quad (5.46)$$

esta es una representación paramétrica en términos de  $m_t$  cuya relación con las variables físicas es dada por (5.32). Multiplicando por  $y^{(1-\delta)/2}$  obtenemos la relación

$$C_2(\kappa_0) \frac{H}{|\bar{\varphi}|^\delta} = f(x, y) \quad (5.47)$$

donde hemos definido el factor métrico

$$C_2(\kappa_0) = \kappa_0^{-\eta} \left( \frac{\kappa_0^\eta \bar{\lambda}^*}{3} \right)^{(1-\delta)/2}, \quad (5.48)$$

y la función de escalamiento universal

$$f(x, y) = y^{(1-\delta)/2} m_t^{2-\eta} e^{-\int_{\kappa_0}^{m_t} \Delta \bar{\gamma}_\varphi \frac{dx}{x}} \quad (5.49)$$

que se puede expresar en términos de  $\chi$  mediante (5.32).

Si absorbemos los factores métricos en redefiniciones de los parámetros tal que

$$\tau = t \kappa_0^{-\eta \varphi^2}, \quad M^2 = \frac{\kappa_0^\eta \bar{\lambda}^*}{3} \bar{\varphi}^2, \quad h^2 = \frac{\kappa_0^{-\eta} \bar{\lambda}^*}{3} H^2, \quad (5.50)$$

entonces la ecuación de estado toma la forma estándar

$$\frac{h}{|M|^\delta} = f\left(\frac{\tau}{|M|^{1/\beta}}\right). \quad (5.51)$$

Como hemos mencionado antes, la ecuación de estado (5.51), tiene un cero sobre la curva de coexistencia. Por supuesto que podemos cambiar de variable en la integración, de hecho es más natural usar  $z = m_t/m_\varphi$  en vez de  $m_t$ . Para ello necesitamos

$$\frac{dm_t}{m_t} = J \frac{dz}{z} \quad (5.52)$$

donde el jacobiano de la transformación es

$$J = \frac{2}{2 - \bar{\gamma}_\lambda(z, \bar{\lambda}) + \bar{\gamma}_\varphi(z, \bar{\lambda})}. \quad (5.53)$$

En términos de ésta variable, la representación paramétrica de la ecuación de estado se puede escribir como

$$\frac{h}{|M|^\delta} = \mathcal{G}(z) = z^{\delta-1} e^{(\delta-1)/2 \int_\infty^z J(x) (\Delta \bar{\gamma}_\lambda - \Delta \bar{\gamma}_\varphi) \frac{dx}{x}} \quad (5.54)$$

donde  $z$  es dada por

$$z = \mathcal{M}^{-1}(x - x_0), \quad (5.55)$$

$x_0$  se expresa mediante

$$x_0 = - \int_0^\infty J(x) \left[ (2 - \bar{\gamma}_\varphi) e^{-\int_\infty^x J(x') \Delta \bar{\gamma}_\varphi \frac{dx'}{x'}} - (2 - \eta) \right] \\ \times e^{1/2\beta \int_\infty^x J(x') (\Delta \bar{\gamma}_\lambda - \Delta \bar{\gamma}_\varphi) \frac{dx'}{x'}} x^{1/\beta} \frac{dx}{x} \quad (5.56)$$

y hemos definido la función de escalamiento  $\mathcal{M}(z)$  mediante

$$\mathcal{M}(z) = \int_0^z J(x) (2 - \bar{\gamma}_\varphi) e^{-\int_\infty^x J(x')} \frac{2\beta\Delta\bar{\gamma}_\varphi^2 - \Delta\bar{\gamma}_\lambda + \Delta\bar{\gamma}_\varphi}{2\beta} \frac{dx'}{x} x^{1/\beta} \frac{dx}{x}. \quad (5.57)$$

De este modo, hemos derivado la ecuación de estado

$$\frac{h}{|\mathcal{M}|^\delta} = f(x) \quad (5.58)$$

donde  $x = \tau/|M|^{1/\beta}$  y la función de escalamiento  $f$  es dada parametricamente como  $f(x) = \mathcal{G}(\mathcal{M}^{-1}(x))$  con  $\mathcal{M}^{-1}$  la inversa de la función  $\mathcal{M}$ .<sup>1</sup>

#### 5.4 Ecuación de Estado a un Lazo

A orden de un lazo podemos escribir los siguientes resultados para las funciones de vértice (ver apéndice)

$$\Gamma_{tB}^{(2)} = p^2 + t_B + \frac{\lambda_B}{6} \bar{\varphi}_B^2 + \frac{\lambda_B}{2} \mathcal{O}_l + \frac{\lambda_B}{6} (N-1) \mathcal{O}_t \quad (5.59)$$

$$\Gamma_{tB}^{(4)} = \lambda_B - \frac{3}{2} \lambda_B^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9} \mathcal{O}_t \right) \quad (5.60)$$

$$\Gamma_{tB}^{(2,1)} = 1 - \frac{\lambda_B}{2} \mathcal{O}_l - \frac{\lambda_B}{6} (N-1) \mathcal{O}_t. \quad (5.61)$$

Las ecuaciones correspondientes para las constantes de renormalización a este orden, se obtienen usando las ecuaciones (4.31, 4.32, 4.33). A este orden tenemos

$$Z_\varphi = 1, \quad (5.62)$$

$$Z_{\varphi^2}^{-1} = 1 - \frac{\lambda_B}{2} \mathcal{O}_l - \frac{\lambda_B}{6} (N-1) \mathcal{O}_t, \quad (5.63)$$

$$Z_\lambda = 1 - \frac{3}{2} \lambda_B \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9} \mathcal{O}_t \right), \quad (5.64)$$

a partir de las cuales podemos encontrar las funciones de Wilson correspondientes

$$\bar{\gamma}_\varphi = 0 \quad (5.65)$$

$$\bar{\gamma}_{\varphi^2} = -\frac{\lambda\kappa}{6} \left( 3 \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_l + (N-1) \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_t \right) \quad (5.66)$$

$$\bar{\gamma}_\lambda = -\frac{3}{2} \lambda\kappa \left( \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9} \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_t \right) \quad (5.67)$$

Así, la ecuación para el acoplamiento adimensional  $\bar{\lambda}$  se puede escribir en la forma

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}}{d\kappa} = -\bar{\lambda}\epsilon - \frac{3}{2} \lambda^2 \kappa^{1-\epsilon} \left( \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9} \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_t \right) \quad (5.68)$$

Para valores de anisotropía  $m_\varphi^2 = \lambda\bar{\varphi}^2/3$  fija tenemos

$$\frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_l = -\epsilon\kappa c_d \left( \kappa^2 + \frac{\lambda}{3} \bar{\varphi}^2 \right)^{-(6-d)/2}, \quad \frac{d}{d\kappa} \mathcal{O}_t = -\epsilon\kappa c_d \kappa^{d-6}, \quad (5.69)$$

<sup>1</sup>Notemos la correspondencia de variables entre las expresiones (5.58) y (2.2):  $H \rightarrow h$  y  $t \rightarrow \tau$ .

donde  $c_d = \Gamma(2 - d/2) / (4\pi)^{d/2}$ . De tal manera que las expresiones finales a considerar son

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}}{d\kappa} = -\bar{\lambda}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon\bar{\lambda}^{-2}c_d \left( \left(1 + \frac{m_\varphi^2}{\kappa^2}\right)^{(d-6)/2} + \frac{(N-1)}{9} \right) \quad (5.70)$$

$$\bar{\gamma}_{\varphi^2} = \frac{\epsilon}{2}c_d\bar{\lambda} \left( \left(1 + \frac{m_\varphi^2}{\kappa^2}\right)^{(d-6)/2} + \frac{1}{3}(N-1) \right) \quad (5.71)$$

$$\bar{\gamma}_\lambda = \frac{3}{2}\epsilon c_d\bar{\lambda} \left( \left(1 + \frac{m_\varphi^2}{\kappa^2}\right)^{(d-6)/2} + \frac{(N-1)}{9} \right) \quad (5.72)$$

Para  $N > 1$ , hay tres puntos fijos asociados: (i) el punto fijo trivial  $\bar{\lambda}^* = 0$ ; (ii) el punto fijo de Wilson-Fisher en el límite  $z (= m_t/m_\varphi) \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\lambda}^* = 6/(N+8)c_d$ ; y (iii) un punto fijo de acoplamiento fuerte  $\bar{\lambda}^* = 6/(N-1)c_d$  en el límite  $z \rightarrow 0$ . Es de remarcar este resultado, como sabemos, la expansión en  $\epsilon$  estándar es alrededor del punto fijo de Wilson-Fisher, este hecho hace imposible capturar el entrecruzamiento al punto fijo de los bosones de Goldstone [14].

Si para  $d < 4$  tomamos el límite universal  $\kappa_0 \rightarrow \infty$  como condición inicial tal que  $\bar{\lambda}\kappa_0^\epsilon \rightarrow \infty$ , obtenemos la solución separatriz para el acoplamiento

$$\bar{\lambda}(z) = \left( \frac{3}{2}c_d \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^{-\epsilon/2} + \frac{(N-1)}{9} \right)^{-1} \quad (5.73)$$

Es posible obtener soluciones para el acoplamiento con diferentes condiciones iniciales. En la figura 9 se pueden observar algunas: la primera de ellas muestra el comportamiento universal del acoplamiento  $\bar{\lambda}$  para  $d = 3$  y  $N = 1, 2, 3, 4$ , como función de la variable  $z$ ; es manifiesta la presencia del entrecruzamiento del punto fijo de Wilson-Fisher al punto de acoplamiento fuerte o de bosones de Goldstone excepto el caso  $N = 1$ . La segunda nos muestra además el entrecruzamiento al punto fijo Gaussiano o de campo promedio para valores grandes de  $z$ ; para  $N = 1$  hay entrecruza de campo promedio al punto fijo de Wilson-Fisher. En la tercera hemos tomado condiciones iniciales tales que provocan un crecimiento del acoplamiento para  $z$  suficientemente grande. No obstante, se puede observar la universalidad de la función.

Al evaluar la función de Wilson  $\bar{\gamma}_\lambda$  en la separatriz obtenemos el valor

$$\bar{\gamma}_\lambda^* = \epsilon. \quad (5.74)$$

La expresión para  $\bar{\gamma}_{\varphi^2}$  dada por (5.72) se muestra en la figura 10, en la primera de ellas hemos evaluado esta función en la separatriz para  $d = 3$  como función de la variable  $z$ , en la segunda lo hemos hecho con el entrecruzamiento a campo medio. Se puede observar la universalidad de esta función que entrecruza asintóticamente entre los valores

- $\bar{\gamma}_{\varphi^2} = 0$
- $\bar{\gamma}_{\varphi^2} = \frac{N+2}{N+8}\epsilon$
- $\bar{\gamma}_{\varphi^2} = \epsilon$

Es notable la diferencia del caso  $N = 1$ , como podemos observar, sobre la curva de coexistencia el efecto es de apagar las fluctuaciones en el infrarrojo  $\bar{\gamma}_{\varphi^2} \rightarrow 0$ , es un comportamiento de tipo campo promedio. Evaluada en la separatriz, toma la forma analítica dada por

$$\bar{\gamma}_{\varphi^2}^* = \epsilon \frac{\left(1 + \frac{m_\varphi^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{d-6}{2}} + \frac{N-1}{3}}{3 \left(1 + \frac{m_\varphi^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{d-4}{2}} + \frac{N-1}{3}} \quad (5.75)$$

Hemos construído paso por paso a nivel de una lazo los bloques constructores que necesitamos para

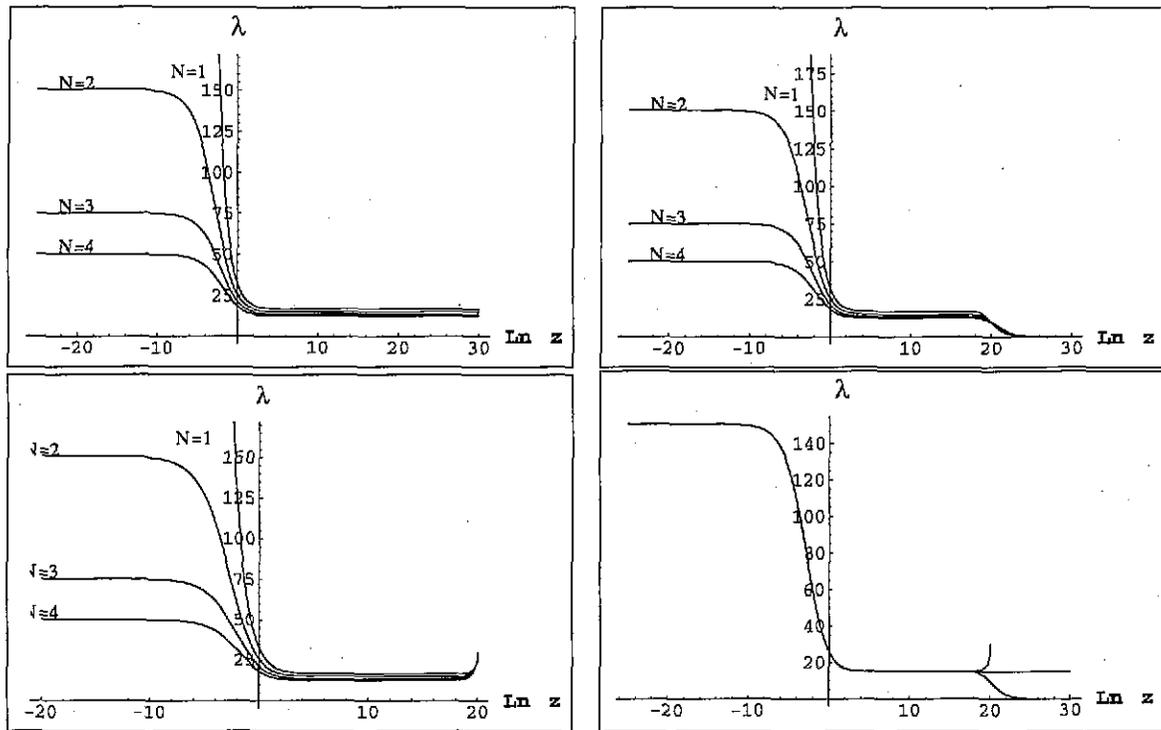


Figura 9: El acoplamiento como función de la escala  $z$  con diferentes condiciones iniciales, arriba a la izquierda la separatriz, a la derecha se ve el cambio a campo promedio. Abajo a la izquierda con desviación de campo promedio, a la derecha se muestra el acoplamiento para  $N = 2$  con las tres condiciones iniciales distintas.

la apropiada descripción de la ecuación de estado. Sustituyendo estos resultados en la expresión (5.57) uno obtiene  $\mathcal{M}$ , la ecuación de escalamiento universal que puede ser invertida y sustituida en (5.54). El resultado es la ecuación de escalamiento universal  $f(x)$ . En la figura 11 mostramos el comportamiento de esta función para  $N = 2$  en dimensión tres. La primera de ellas muestra el resultado a un lazo y la compara con el resultado de Monte Carlo obtenido en [19]: nuestra representación es válida para valores pequeños pero también para valores grandes de la variable  $x = \tau/M^{1/\beta}$ . La segunda muestra la misma función de escalamiento a un lazo también, para esta hemos llevado a cabo un pequeño ajuste, es decir, hemos tomado la ecuación de flujo para el acoplamiento  $\bar{\lambda}$  en el límite  $z \rightarrow \infty$  e introducido una constante  $a$  en la forma

$$\kappa \frac{d\bar{\lambda}}{d\kappa} = -\bar{\lambda}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon\bar{\lambda}^{-2}c_d \left( a + \frac{(N-1)}{9} \right) \quad (5.76)$$

al hacerlo así obtenemos un punto fijo no trivial que depende de esta constante, punto fijo que a su vez provoca un valor  $\bar{\gamma}_{\varphi^2}^*(a)$  que tiene el efecto de dar un exponente  $\nu(a)$ . Hemos ajustado este número al usado por los autores para  $d = 3$  y  $N = 2$  en [19]. La mejora del resultado es evidente. Vale la pena reproducir el cálculo a dos lazos, este es un trabajo que estamos preparando a futuro. La figura 12 muestra el  $\ln f(x)$  contra  $\ln(1+x)$ , en la primera usando los datos crudos a un lazo, en la segunda hemos usado el ajuste. Para este caso no tenemos comparación. Es también de utilidad comparar nuestro resultado con la ecuación de estado en la forma de escalamiento  $M/h^{1/\delta} = F_G(\tau/h^{1/\delta\beta})$ . Las gráficas que obtenemos se muestran en la figura 13. La primera de ellas muestra el resultado a un lazo comparativamente con el resultado de Monte Carlo de los mismos autores, en la segunda hemos usado los datos en donde hemos ajustado los exponentes. Finalmente, hemos encontrado curvas de campo magnético constante, las curvas correspondientes en el espacio de fase se muestran en la figura 14, en esta podemos observar como los puntos finales de cada una de las líneas van formando la curva de coexistencia. Para ello hemos usado los datos crudos a un lazo.

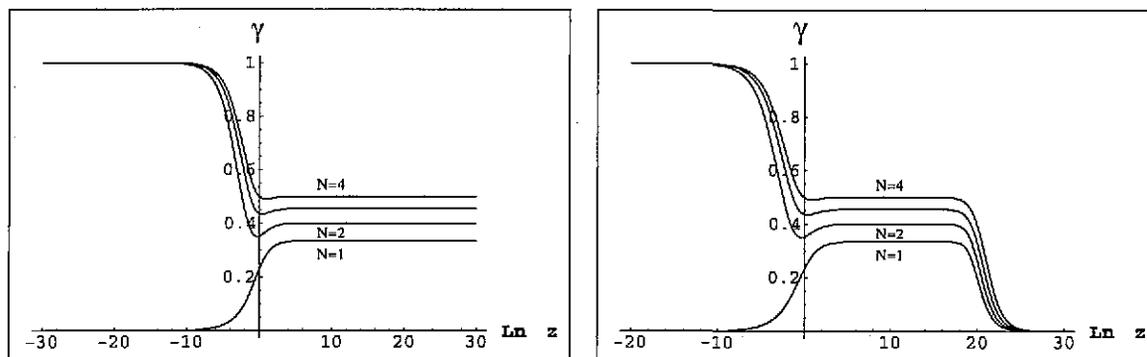


Figura 10:  $\gamma_{\phi^2}$  para diferentes valores de  $N$  como función de la escala  $z = m_t/m_\phi$ . A la izquierda evaluada en la separatriz y a la derecha con cruza a campo promedio.

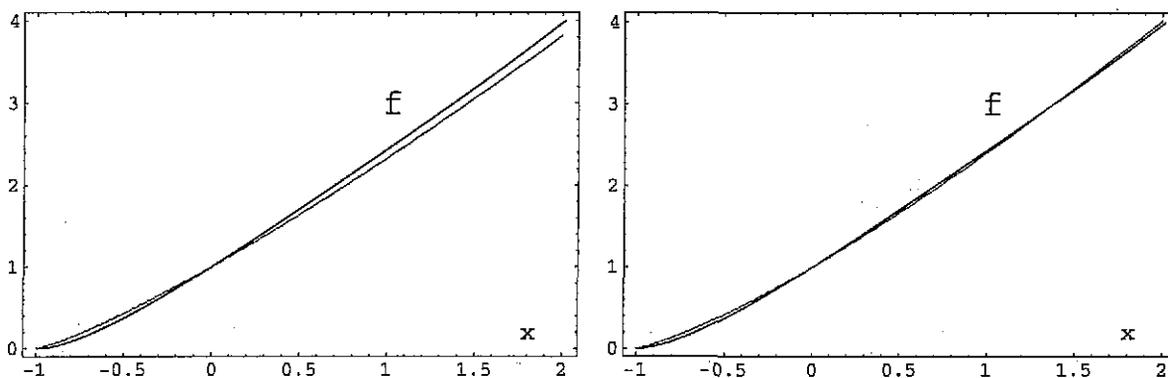


Figura 11: Ecuación de estado  $f = h/|M|^\delta$  como función de  $x = \tau/|M|^{1/2}$  a un lazo para  $N = 2$  para  $d = 3$ , sin ajustar y ajustando los exponentes, la línea más oscura es el resultado de monte-carlo de [19].

### 5.5 Expansión $\epsilon$ y Analiticidad de Griffiths

Como una forma de checar nuestros resultados para la ecuación de estado, veamos lo que obtenemos si llevamos a cabo una expansión en  $\epsilon$ . De la expresión (5.71) tenemos a este orden

$$\Delta\gamma_{\phi^2} = \frac{3\epsilon}{N+8} \frac{1}{1+z^{-2}} - \epsilon \frac{8N+19}{N+8} \quad (5.77)$$

de tal manera que la integración queda como

$$\int_{\infty}^z J(x) \Delta\gamma_{\phi^2}(x) \frac{dx}{x} = \frac{3\epsilon}{2(N+8)} \ln(1+z^2) - \frac{\epsilon}{2} \frac{8N+19}{N+8} \ln z^2 \quad (5.78)$$

expresión que al ser exponentiada se transforma en

$$e^{-\int_{\infty}^z J \Delta\gamma_{\phi^2} \frac{dx}{x}} = 1 - \frac{3\epsilon}{2(N+8)} \ln(1+z^2) + \frac{\epsilon}{2} \frac{8N+19}{N+8} \ln z^2, \quad (5.79)$$

con este resultado obtenemos  $\mathcal{M}$  de (5.57); a este orden basta escribir el exponente  $\beta = 1/2$  para tener

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(z) &= \frac{1}{2} \int_0^{z^2} \left( 1 - \frac{3\epsilon}{2(N+8)} \ln(1+x^2) + \frac{\epsilon}{2} \frac{8N+19}{N+8} \ln x^2 \right) dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ z^2 - 4\epsilon \frac{(N+2)}{(N+8)} z^2 - \frac{3\epsilon}{2(N+8)} (1+z^2) \ln(1+z^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.80)$$



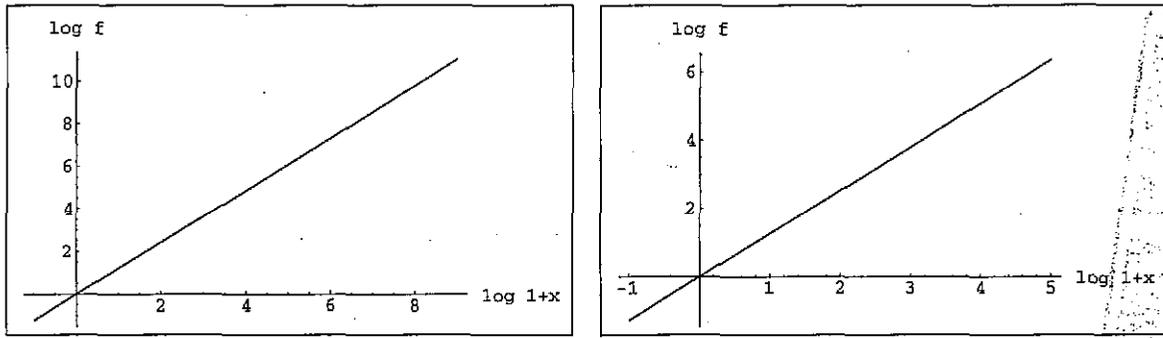


Figura 12: El logaritmo de la función de escalamiento, la segunda a la derecha ha sido ajustada.

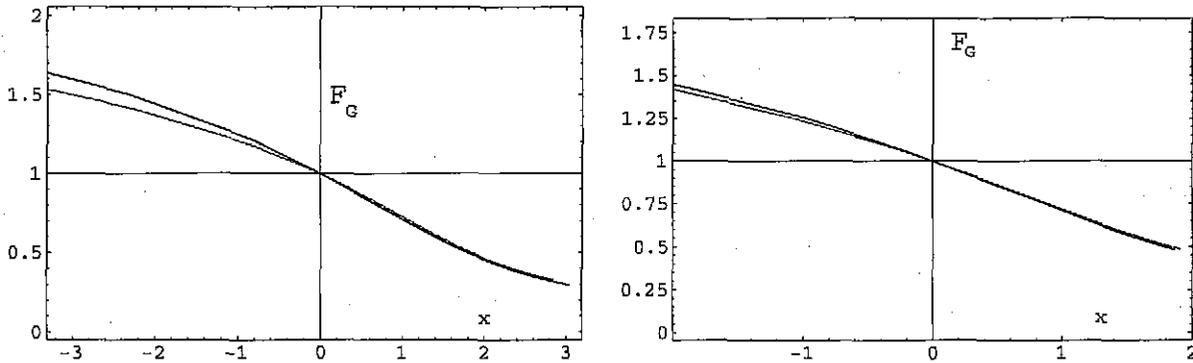


Figura 13: La función de escalamiento  $F_G = M/h^{1/\delta}$  como función de la variable  $x = \tau/h^{1/\delta\beta}$  para  $N = 2$  en dimensión  $d = 3$ . La gráfica de la izquierda es el resultado crudo a un lazo. A la derecha hemos ajustado los valores de los exponentes críticos. El resultado de monte-carlo es la más oscura.

Por otra parte de la expresión (5.54) podemos identificar a este orden

$$\frac{h}{|M|^\delta} = z^2 \tag{5.81}$$

de manera que estas dos últimas expresiones nos dan la relación

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \left[ z^2 - 4\epsilon \frac{(N+2)}{(N+8)} z^2 - \frac{3\epsilon}{2(N+8)} (1+z^2) \ln(1+z^2) \right]. \tag{5.82}$$

Redefiniendo las variables podemos escribir

$$\frac{h}{|M|^\delta} = x' - x'_0 + \frac{3\epsilon}{2(N+8)} (2+x'-x'_0) \ln(2+x-x'_0) - \frac{3\epsilon}{2(N+8)} (2+x'-x'_0) \ln 2 \tag{5.83}$$

si además imponemos la condición  $f(0) = 1$  obtenemos

$$x'_0 = -1 + \frac{9\epsilon}{2(N+8)} \ln\left(\frac{3}{2}\right), \tag{5.84}$$

y por lo tanto

$$\frac{h}{|M|^\delta} = 1 + x' + \frac{3\epsilon}{2(N+8)} (3+x') \ln(3+x'). \tag{5.85}$$

Este resultado está de acuerdo con los primeros términos del resultado que se obtiene por métodos de expansión en el parámetro  $\epsilon$  [11]. Para  $x \rightarrow \infty$  dividimos el rango de integración en la expresión (5.57),

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

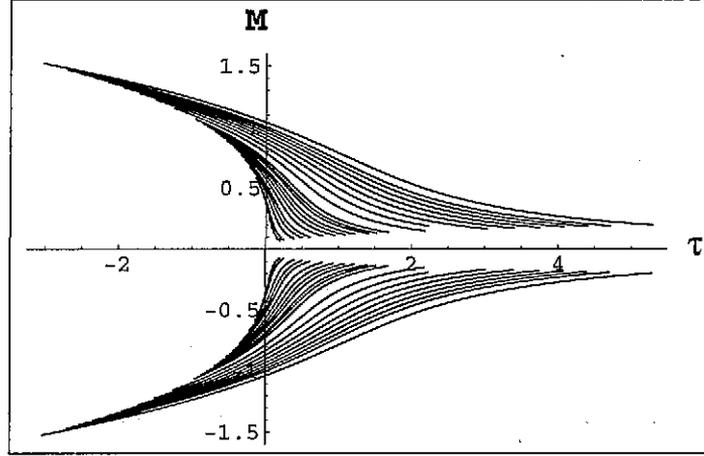


Figura 14: Contornos de campo magnético constante. Podemos observar la línea de coexistencia.

introduciendo un punto  $B \gg 1$  tal que  $t$  es suficientemente grande, de modo que  $\Delta\gamma_{\varphi^2}$  y  $\Delta\gamma_{\varphi} \rightarrow 0$ . Podemos escribir

$$C(1+x) \rightarrow Dz^{1/\beta} + E \quad (5.86)$$

donde  $C$ ,  $D$  y  $E$  son constantes. Si usamos (5.54) en la misma región, tenemos

$$\frac{h}{|M|^\delta} \rightarrow z^{\delta-1} \quad (5.87)$$

dada la relación  $\delta - 1 = \gamma/\beta$  podemos escribir, para  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{h}{|M|^\delta} \rightarrow Kx^\gamma, \quad (5.88)$$

como lo requiere la condición de analiticidad de Griffiths [13].

## 5.6 Entrecruzamiento entre Transiciones de Primero y de Segundo Orden

En las secciones anteriores hemos considerado la ecuación de estado. Esta ecuación exhibe ambos tipos de transiciones para  $N = 1$  y por lo tanto debe ser posible estudiarlas en el contexto de la teoría de campos y de renormalización ambientalmente amigable. Las técnicas de la teoría de campos han sido de gran ayuda para entender las transiciones de segundo orden, en contraste con las transiciones de fase de primer orden. Según los resultados obtenidos usando la descripción a la Wilson del GR [18], una transición de primer orden es controlada por un punto fijo de acoplamiento fuerte, es difícil tener acceso a este puntos utilizando aproximaciones estándar. Si uno hace análisis de escalamiento para tales transiciones, se encuentra que, los exponentes asociados con este punto fijo de acoplamiento fuerte son dados por:  $\delta = \infty$ ,  $\eta = 2 - d$ ,  $\nu = 1/d$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\beta = 0$ . Estos valores ciertamente son muy distintos de aquellos asociados con el punto crítico, y por lo tanto es de interés preguntarse si hay funciones de escalamiento, exponentes efectivos que interpolen entre estos valores, de tal manera que capturen el entrecruzamiento entre transiciones de primero y de segundo orden.

### 5.6.1 Entrecruzamiento al Punto Fijo de Acoplamiento Fuerte para $N = 1$

Los exponentes asociados con el punto fijo de acoplamiento fuerte parecen inaccesible desde el punto de vista de la teoría de campos. Por ejemplo, estamos acostumbrados a pensar en el exponente  $\eta$  como proporcional a  $e^2$ , pues no hay contribución de un lazo. En este sentido el punto fijo que lleva a este valor

del exponente se puede pensar como asociado con el acoplamiento fuerte. En el formalismo de la teoría de campos es la presencia de fluctuaciones grandes lo que hace problemático el cálculo sin una herramienta como el GR. Sin embargo, cuando vamos por debajo de la curva de coexistencia la masa efectiva (que depende de  $\bar{\varphi}$ ) de las fluctuaciones es muy grande, suprimiendo las divergencias inefarrojadas. En este sentido, en el formalismo de la teoría de campos debería ser más fácil describir el régimen de acoplamiento fuerte que el régimen crítico. Estos puntos aparentemente contradictorios pueden ser reconciliados si pensamos en el significado físico de los exponentes de acoplamiento fuerte. El más problemático de ellos es  $\eta = 2 - d$ . El significado canónico de  $\eta$  es que es una medida del decaimiento de las correlaciones en el punto crítico, es decir, de la función de correlación conectada,  $G_c^{(2)}(r) \sim 1/r^{d-2+\eta}$ . Así, uno define muy naturalmente este exponente mediante

$$\eta_{eff} = 2 - d - \left[ \frac{d \ln G_c^{(2)}(r)}{d \ln r} \right]_{T=T_c} \quad (5.89)$$

que se puede ver como una generalización a una función de escalamiento que puede interpolar entre los puntos fijos correspondientes. La función de Green conectada está relacionada con la función de Green desconectada  $G^{(2)}(x, x')$  vía

$$G_c^{(2)}(x, x') = G^{(2)}(x, x') - \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(x') \quad (5.90)$$

Una importante distinción entre estas dos funciones de Green es que la función conectada no puede distinguir si los puntos que toma están o no en la misma fase; en cambio la función de Green desconectada puede hacerlo y es por lo tanto una cantidad más apropiada para estudiar sistemas con más de una fase coexistiendo. De manera muy natural, uno define un exponente efectivo  $\eta'_{eff}$  asociado con  $G^{(2)}(x, x')$  mediante

$$\frac{d \ln G^{(2)}(\mathbf{r})}{d \ln r} = -(d - 2 + \eta'_{eff}) \quad (5.91)$$

el cual está relacionado a  $\eta_{eff}$  mediante

$$\eta'_{eff} = \frac{(2 - d)\bar{\varphi}(\mathbf{r})\bar{\varphi}(0) + \eta_{eff}G_c^{(2)}(\mathbf{r}) - \bar{\varphi}(\mathbf{r})\bar{\varphi}(0)\frac{d \ln \bar{\varphi}(\mathbf{r})}{d \ln r}}{G_c^{(2)}(\mathbf{r}) + \bar{\varphi}(\mathbf{r})\bar{\varphi}(0)} \quad (5.92)$$

La función de escalamiento  $\eta'_{eff}$  exhibe un entrecruzamiento: si  $\bar{\varphi} \rightarrow 0$

$$\eta'_{eff} \rightarrow \eta_{eff} \quad (5.93)$$

mientras que, asintóticamente, conforme  $r \rightarrow \infty$  tenemos  $\bar{\varphi} \rightarrow \text{cst.}$  y  $G_c^{(2)} \rightarrow 0$ . En este límite

$$\eta'_{eff} \rightarrow 2 - d \quad (5.94)$$

Uno puede escribir, de la definición del exponente  $\delta$ , la siguiente expresión alternativa, la cual al mismo tiempo funciona como una generalización del mismo, dado que definido de esta manera se puede ver como una función de escalamiento interpolando entre sus valores conocidos en los puntos fijos correspondientes

$$\delta_{eff}(t) = \left[ \frac{d \ln H}{d \ln \bar{\varphi}} \right]_t. \quad (5.95)$$

Observemos que esta definición se extiende además para cualquier isoterma, incluyendo la crítica  $t = 0$ . En particular sobre esta última podemos correr el GR como lo hicimos en la expresión (5.35) que nos relaciona  $\bar{\varphi}$  con la masa transversal sobre  $t = 0$ . Si corremos este GR en la ecuación de estado tenemos

$$\frac{H}{\bar{\varphi}} = \kappa_0^2 e^{\int_{\kappa_0}^{m_t(0, \bar{\varphi})} (2 - \tilde{\gamma}_\varphi) \frac{dm}{m}} \quad (5.96)$$

de modo que

$$\delta_{eff}(0) = 1 + (2 - \tilde{\gamma}_\varphi) \frac{d \ln m_t(0, \bar{\varphi})}{d \ln \bar{\varphi}}. \quad (5.97)$$

Si usamos (5.35) obtenemos la derivada logarítmica en el segundo término. Finalmente tenemos

$$\delta_{eff}(0) = 1 + \frac{2 \int_{\kappa_0}^{m_t(0, \bar{\varphi})} (2 - \tilde{\gamma}_\varphi) e^{-\int_{\kappa_0}^{m_t(0, \bar{\varphi})} (\tilde{\gamma}_\lambda - \tilde{\gamma}_\varphi) \frac{dx}{x}}}{m_t^2(0, \bar{\varphi}) e^{-\int_{\kappa_0}^{m_t(0, \bar{\varphi})} (\tilde{\gamma}_\lambda - \tilde{\gamma}_\varphi) \frac{dx}{x}}}. \quad (5.98)$$

Si tomamos los valores en el punto fijo donde las funciones de Wilson toman los valores  $\gamma_\varphi^*$ , obtenemos el valor conocido

$$\delta = \frac{d - 2 - \gamma_\varphi^*}{d - 2 + \gamma_\varphi^*}. \quad (5.99)$$

Por supuesto que podemos calcular el valor de esta función de escalamiento para cualquier isoterma dado que en principio, esta información está contenida en la ecuación de estado. Para ello necesitamos la expresión (5.54) así como la relación inversa de (5.55). Si procedemos como en el caso anterior, obtenemos

$$\delta_{eff}(t) = \delta + (1 + J(z) (\Delta\tilde{\gamma}_\lambda - \Delta\tilde{\gamma}_\varphi)) \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{t}{\bar{\varphi}^{1/\beta}} \frac{1}{z^{1/\beta} J(z)} e^{\int_{\kappa_0}^z J(x') \frac{2\beta\Delta\tilde{\gamma}_\varphi z - \Delta\tilde{\gamma}_\lambda + \Delta\tilde{\gamma}_\varphi}{2\beta} \frac{dx'}{x'}} \quad (5.100)$$

de esta observamos que sobre la isoterma crítica  $\delta_{eff} \rightarrow \delta$ ; sobre cualquier otra isoterma con  $z \rightarrow 0$ , es decir, acercándose a la curva de coexistencia tenemos  $\delta_{eff} \rightarrow \infty$ . Notemos que de esta expresión es posible obtener gráficos de  $\delta_{eff}(t)$  en términos del campo magnético  $h$  vía (5.54). Otra interesante cantidad es definida mediante

$$\nu_{eff}^H = \left[ \frac{d \ln m_t}{d \ln H} \right]_t \quad (5.101)$$

para ver lo que esto significa corremos el GR sobre una isoterma

$$\frac{H}{\bar{\varphi}} = \kappa_0^2 e^{\int_{\kappa_0}^{m_t(t, \bar{\varphi})} (2 - \tilde{\gamma}_\varphi) \frac{dx}{x}} \quad (5.102)$$

Por lo que, derivando logarítmicamente con  $t$  constante y usando la definición (5.95) obtenemos

$$\nu_{eff}^H = \left( \frac{1 - \delta_{eff}^{-1}(t)}{2 - \gamma_\varphi} \right) \quad (5.103)$$

Conforme nos acercamos a la curva de coexistencia  $\delta_{eff}(t) \rightarrow \infty$  por lo que  $\nu_{eff}^H \rightarrow (2 - \gamma_\varphi)^{-1}$ . Si asumimos que  $\gamma_\varphi = \eta$  y que  $\eta \rightarrow 2 - d$  entonces  $\nu_{eff}^H \rightarrow 1/d$ , que es una característica fundamental del punto fijo fuerte asociado, como ha sido encontrado en la referencia [18].

## 6 El Modelo Sigma No-Lineal

Previamente, se ha considerado el comportamiento de entrecruzamiento para un modelo  $O(N)$ , en el contexto de la representación de Landau-Ginzburg-Wilson para el modelo basado en la teoría  $\lambda\varphi^4$ . Dado que para un cambio dimensional los métodos de expansión en  $\epsilon$  no son de utilidad, se usa una expansión alrededor de dimensión fija para poder tener acceso a este cambio dimensional. Se utiliza para ello una expansión alrededor del punto fijo Gaussiano. Como es bien conocido, cuando una simetría de  $O(N)$  es rota espontáneamente, modos de Goldstone sin masa dan lugar a singularidades para distancias grandes para cualquier valor de la temperatura.

La termodinámica de estas ondas de espín en el límite de distancias grandes para un Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson se conoce como modelo Sigma ( $\sigma$ ) no lineal [22]. El parámetro de expansión apropiado es en este caso la temperatura  $T$ , y por lo tanto la teoría de perturbaciones corresponde a una expansión de baja temperatura.

El comportamiento de entrecruzamiento en el contexto del modelo  $\sigma$  no lineal ya ha sido considerado previamente. En particular, Amit y Goldschmidt extendieron su tratamiento original de sistemas bicríticos por arriba de la temperatura crítica usando Sustracción Mínima Generalizada [23], al caso por debajo de la misma [24], describiendo así el entrecruzamiento entre un sistema que exhibe simetría  $O(N)$ , a uno de simetría  $O(M)$ . En este caso la expansión  $\epsilon$  ha funcionado perfectamente debido al hecho que la dimensión crítica superior de los dos puntos fijos es la misma. En el contexto de escalamiento de tamaño finito Brézin y Zinn-Justin describieron entrecruzamiento en el modelo  $\sigma$  no lineal en el contexto de una caja o un cilindro [25], tratando el problema de los modos infrarrojos más bajos del sistema de manera no perturbativa en tanto los otros modos los trataron de una manera perturbativa en expansión  $\epsilon$ . Sin embargo este método no funciona en el contexto de entrecruzamiento dimensional tal como en una película delgada donde la dimensión reducida del sistema también exhibe un punto fijo no trivial.

Más recientemente, la versión cuántica del modelo  $\sigma$  no lineal [26] ha llamado mucho la atención dado que éste describe el comportamiento de longitud de onda grande y de bajas temperaturas de un ferromagneto de Heisenberg bidimensional el cual se ha propuesto como un modelo de superconductor de alta temperatura. Dada la analogía entre una película de dimensión  $(d+1)$  con condiciones de frontera periódicas con un sistema cuántico de dimensión  $d$ , es ciertamente de interés hacer investigaciones sobre el cambio dimensional en el contexto del modelo  $\sigma$  no lineal.

En esta sección consideramos el cambio dimensional de un ferromagneto con simetría  $O(N)$  en la fase de simetría rota usando como punto de partida el modelo  $\sigma$  no lineal y utilizando las técnicas de renormalización *ambientalmente amigable* para tener acceso al comportamiento universal del entrecruzamiento. Uno de los beneficios de hacerlo así es un mejor entendimiento de cómo este tipo de renormalización funciona en el contexto de expansiones de baja temperatura en oposición a una expansión alrededor de un punto crítico, es decir, en un análisis de la dimensión crítica baja en contraste con el realizado para dimensión crítica alta.

Empezamos con el Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson para un modelo de Heisenberg con simetría  $O(N)$  en el límite del modelo  $\sigma$  sobre una película  $d$ -dimensional ( $d < 4$ ) de grosor  $L$

$$\mathcal{H}[\varphi_B] = \frac{1}{T_B} \int_0^L \int d^d x \left( \frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi_B^i \nabla_\mu \varphi_B^i - H_B^i(x) \varphi_B^i \right). \quad (6.1)$$

donde  $i \in [1, N]$ ,  $\mu \in [1, d]$ .  $T_B$  es proporcional a la temperatura del sistema y  $\varphi_B^i$  satisfacen la restricción

$$\varphi_B^i \varphi_B^i = 1 \quad (6.2)$$

restringiremos la atención aquí al caso de condiciones de frontera periódicas.

La función de partición  $Z$  es obtenida mediante la integral de camino sobre el parámetro de orden, (los campos  $\varphi_B^i$ ), con el Hamiltoniano (6.1) sujeto a la restricción (6.2). Eligiendo el rompimiento de simetría a lo largo de la componente  $N$  definimos  $\varphi^N = \sigma$  y  $\varphi^i = \pi^i$ , ( $i \neq N$ ). La restricción implica que  $\sigma(x) = \pm(1 - \pi^2)^{\frac{1}{2}}$ . Así que la función de partición viene siendo

$$Z[H, J] = \int \left[ \frac{d\pi_B}{(1 - \pi_B^2)^{\frac{1}{2}}} \right] e^{-\frac{1}{T_B} \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\nabla \pi_B^i)^2 + \frac{1}{2} (\nabla(1 - \pi_B^2))^{\frac{1}{2}} - J_B^i \pi_B^i - H_B(1 - \pi_B^2)^{\frac{1}{2}} \right)} \quad (6.3)$$

Por supuesto, esta teoría es altamente no-polinomial. El término de medida no-trivial, el cual asegura la invarianza  $O(N)$  de la teoría, puede ser exponenciada y expandida en potencias de  $\pi^2$ . Estos términos son necesarios para cancelar términos no invariantes  $O(N)$  que aparecen en teoría de perturbaciones. Rotaciones son implementadas linealmente en el subespacio  $\pi^i$  de dimensión  $(N-1)$  y no linealmente en las  $\pi^i - \sigma$  direcciones. Una rotación infinitesimal  $\omega^i$  induce los cambios

$$\delta\pi^i(x) = (1 - \pi^{i2}(x))^{\frac{1}{2}}\omega^i \quad (6.4)$$

$$\delta(1 - \pi^{i2}(x))^{\frac{1}{2}} = -\omega^i\pi^i(x) \quad (6.5)$$

En la región  $|\pi^i| < 1$  la simetría permanecerá rota. Conforme  $T \rightarrow 0$ ,  $\sigma(x) \rightarrow 1$ .

Por la manera en la cual aparece  $T$  en (6.3) podemos ver que una expansión en términos de la temperatura es equivalente a una expansión en el número de lazos, siendo la única sutileza el hecho de que el término de medida es lineal en  $T$  y por lo tanto contribuye a un más alto orden en  $T$  que los otros dos términos. El propagador libre para el campo  $\pi$  en la ausencia de un campo magnético es

$$G_{\pi\pi}(k) = \frac{T_B}{k^2}. \quad (6.6)$$

El campo magnético acoplado al campo  $\sigma$  actúa como un corte infrarrojo. Esto puede verse de expandir el término  $H_B(1 - \pi_B^2)^{\frac{1}{2}}$  en potencias de  $\pi$ . La función de vértice de dos puntos resulta ser

$$\Gamma_{\pi}^{(2)}(k) = \frac{k^2 + H_B}{T_B} \quad (6.7)$$

De la forma del Hamiltoniano, en términos de una expansión en  $\pi$ , vemos que existen interacciones de orden arbitrario. No obstante, las interacciones con más de cuatro potencias de  $\pi$  contribuyen a ordenes más allá de un lazo, i.e. más potencias del "pequeño" acoplamiento  $T$ . Consecuentemente, a primer orden en  $T$ , i.e. a un lazo, únicamente necesitamos considerar la interacción de cuatro puntos

$$\frac{1}{8T_B} \sum_{k_1 k_2 k} (k^2 + H_B)\pi_B^i(k_1)\pi_B^i(k - k_1)\pi_B^j(-k_2)\pi_B^j(k_2 - k) \quad (6.8)$$

Dado que restringimos nuestra atención a resultados de  $O(T)$ , las interacciones de más alto orden no serán consideradas en lo que sigue.

## 6.1 Renormalización

A pesar del hecho de que la teoría es no polinomial, este es renormalizable usando sólo dos constantes de renormalization  $Z_T$  y  $Z_{\pi}$  asociadas con la temperatura y el campo respectivamente [22]. La relación entre los parámetros desnudos y renormalizados es dada por

$$T_B = Z_T T \quad \pi_B^i = Z_{\pi}^{-\frac{1}{2}} \pi \quad (6.9)$$

Para preservar la invariancia rotacional de la constricción renormalizada, el campo  $\sigma$  debe renormalizarse de la misma manera como el campo  $\pi$ . Invarianza del término  $\frac{H_B\sigma_B}{T_B}$  nos da la renormalización del campo magnético  $H$

$$H_B = Z_T Z_{\pi}^{-\frac{1}{2}} H \quad (6.10)$$

Las funciones de vértice desnudas y renormalizadas están relacionadas vía

$$\Gamma_{\pi}^{(N)}(k_i, T, H, L, \kappa) = Z_{\pi}^{\frac{N}{2}} \Gamma_{\pi_B}^{(N)}(k_i, T_B, H_B, L, \Lambda) \quad (6.11)$$

donde  $\kappa$  es una escala arbitraria de renormalización y  $\Lambda$  un corte ultravioleta. La ecuación del GR, la cual es una consecuencia de la  $\kappa$  invarianza de la teoría desnuda, se sigue inmediatamente al diferenciar (6.11) con respecto a  $\kappa$

$$\left( \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta_t \frac{\partial}{\partial t} + \beta_H \frac{\partial}{\partial H} - \frac{N}{2} \gamma_{\pi} \right) \Gamma_{\pi}^{(N)}(k_i, T, H, L, \kappa) = 0 \quad (6.12)$$

donde hemos introducido una temperatura sin dimensiones  $t = T\kappa^{d-2}$  y  $\gamma_\pi = \frac{d \ln Z_\pi}{d \ln \kappa}$  es la dimensión anómala del campo. Las dos funciones  $\beta$  son

$$\beta_t = (d-2)t - t \frac{d \ln Z_T}{d \ln \kappa} \quad (6.13)$$

$$\beta_H = \frac{d \ln Z_\pi}{d \ln \kappa} - \frac{d \ln Z_T}{d \ln \kappa} \quad (6.14)$$

Las dos constantes de renormalización se deben fijar mediante condiciones de normalización. La esencia de una renormalización ambientalmente amigable es de que, para obtener una descripción perturbativamente bien definida del entrecruzamiento el procedimiento de renormalización debe depender explícitamente del parámetro  $L$ . Las condiciones de normalización que usaremos son

$$T\Gamma_\pi^{(2)}(k=0, t(\kappa, L\kappa), H(\kappa, L\kappa) = \kappa^2, L, \kappa) = \kappa^2 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} T\Gamma_\pi^{(2)}(k, t(\kappa, L\kappa), H(\kappa, L\kappa) = \kappa^2, L, \kappa)|_{k=0} = 1 \quad (6.16)$$

Note que  $T\Gamma^{(2)}$  es justamente el inverso de la susceptibilidad asociada con el campo  $\pi$ .

## 6.2 Resultados Explícitos

Procedamos ahora a examinar el entrecruzamiento perturbativamente. A un lazo

$$\Gamma_{\pi B}^{(2)}(k=0) = \frac{H_B}{T_B} + \frac{(N-1)H_B}{2} \frac{H_B}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{p^2 + H_B + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}} \quad (6.17)$$

Usando las condiciones de normalización (6.15) y (6.16) encontramos

$$Z_\pi = 1 - \frac{(N-1)}{2L\kappa} t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2}} \quad (6.18)$$

y

$$Z_T = 1 - \frac{(N-2)}{2L\kappa} t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2}} \quad (6.19)$$

La función  $\beta_t$  es dada por

$$\beta_t(t, L\kappa) = (d-2)t - \frac{2(N-2)}{L\kappa} t^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2})^2} \quad (6.20)$$

Hay tres diferentes puntos fijos asociados con (6.20), un punto fijo ultravioleta  $d$ -dimensional en el límite  $L\kappa \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$ ; un punto fijo ultravioleta  $(d-1)$ -dimensional en el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$ ; y finalmente, un punto fijo infrarrojo de temperatura cero en el límite  $\kappa \rightarrow 0$ . Sin embargo, para alcanzar el punto  $t = 0$  depende si consideramos  $\kappa \rightarrow 0$  para  $L$  fija, o bien  $L\kappa \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow 0$ .

En términos del acoplamiento flotante  $h$ , definido tal que el coeficiente de  $h^2$  en la función  $\beta$  sea uno, obtenemos

$$\kappa \frac{dh}{d\kappa} = \epsilon(L\kappa)h - h^2 \quad (6.21)$$

donde

$$\epsilon(L\kappa) = d - 3 + 4 \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2}}{(y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2})^3}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2})^2}} \quad (6.22)$$

La cantidad  $d_{\text{eff}} = 2 + \epsilon(L\kappa)$  puede ser interpretada como una medida de la dimensión efectiva del sistema interpolando entre  $d$  y  $d-1$  en los límites  $L\kappa \rightarrow \infty$  y  $L\kappa \rightarrow 0$  respectivamente, donde en ambos casos

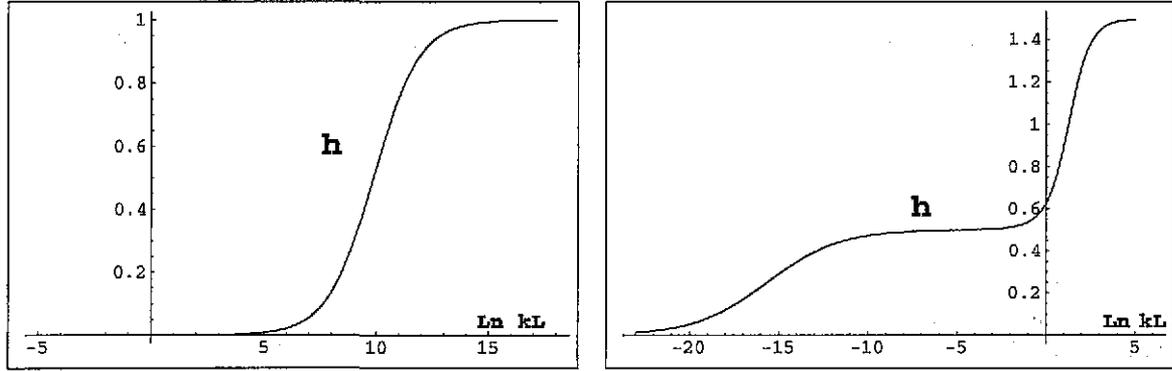


Figura 15: Acoplamiento flotante  $h$  para dimensión 3 y 3.5 respectivamente.

estamos considerando  $\kappa \rightarrow \infty$ , i.e. el comportamiento cerca del punto crítico. Los correspondientes puntos fijos para  $h$  son:  $d-2$ ,  $d-3$  y 0. En la figura (15) vemos una gráfica de  $h$  como una función de  $\ln \kappa L$  para  $d=3$ . En este caso, como la teoría es asintóticamente libre en dimensión dos, el acoplamiento tiende a cero en el límite de dimensión reducida, i.e. el punto fijo ultravioleta  $(d-1)$ -dimensional y el punto fijo infrarrojo trivial coinciden. Este cambio dimensional en el acoplamiento es controlable en la expansión de baja temperatura. Es en efecto la solución a (6.21) que hemos usado como el parámetro “pequeño” en la expansión perturbativa. Es el hecho de que  $h$  captura el cambio entre los diferentes puntos fijos el que nos da un parámetro de expansión uniforme y por lo tanto nos da un control perturbativo del entrecruzamiento. Por supuesto cuando  $d-2$  no es pequeño necesitamos trabajar a más altos ordenes e intentar algún método de resumación. Es claro sin embargo, que no hay impedimento en continuar este cálculo a un orden arbitrario en la expansión en lazos.

En la figura (15) vemos el correspondiente resultado para  $d=3.5$ . Aquí, el “doble” entrecruzamiento entre los diferentes puntos fijos es manifiesto. Asintóticamente en el ultravioleta hay un punto fijo en  $h=1.5$  que corresponde al punto fijo 3.5-dimensional. En la región intermedia  $h$  tiende al punto crítico del sistema 2.5-dimensional mientras que, finalmente, en el infrarrojo  $h \rightarrow 0$  corresponde al comportamiento controlado por el punto fijo de temperatura cero que controla la curva de coexistencia. Regresando ahora a la dimensión anómala del campo,  $\gamma_\pi$ , obtenemos

$$\gamma_\pi = \frac{2(N-1)}{L\kappa} t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}y}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(y^2 + 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2 \kappa^2})^2} \quad (6.23)$$

o en términos del acoplamiento flotante

$$\gamma_\pi = \left( \frac{N-1}{N-2} \right) h \quad (6.24)$$

La dimensión anómala también exhibe un cambio dimensional como se puede apreciar en la figura (16), para el caso  $d=3$ ,  $N=3, 4, 5$ , interpolando entre los valores  $\left(\frac{N-1}{N-2}\right)(d-2)$  y  $\left(\frac{N-1}{N-2}\right)(d-3)$  en los límites  $L\kappa \rightarrow \infty$  y  $L\kappa \rightarrow 0$  respectivamente, donde una vez más estamos considerando el comportamiento cerca del punto crítico. Nótese que en contraste al caso de una expansión alrededor del punto crítico usando un Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson,  $\gamma_\pi$  no es simplemente el exponente crítico  $\eta$ . Esto es debido al hecho que la dimensión canónica de los campos  $\pi$  y  $\sigma$  son cero. El valor de bulto,  $L \rightarrow \infty$ , de  $\gamma_\pi$  es  $\gamma_\pi(\infty) = (d-2 + \eta)$  donde el exponente crítico  $\eta = (d-2)/(N-2)$ . En el límite  $L\kappa \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$  podemos ver que  $\gamma_\pi \rightarrow (d'-2 + \eta')$  donde  $d' = d-1$  y  $\eta' = (d'-2)/(N-2)$  es el exponente crítico del sistema reducido dimensionalmente. En el límite de  $N$  grande,  $N \rightarrow \infty$ , notemos que  $\gamma_\pi \rightarrow h = d_{\text{eff}}^e$ , donde  $d_{\text{eff}}^e$  es la dimensión efectiva que ha sido encontrada al considerar el cambio dimensional en el límite de  $N$  grande para una teoría de  $\lambda\phi^4$  [27].

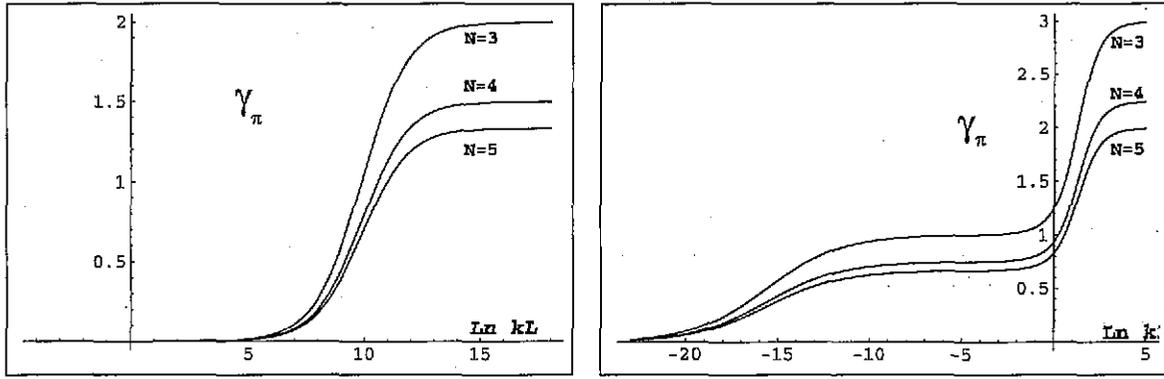


Figura 16: Dimensión anómala para  $d = 3$  y  $3.5$  respectivamente.

### 6.3 Corrimiento de la Temperatura Crítica

La ecuación para la función  $\beta$  puede ser integrada para tener

$$t\left(\frac{\kappa}{\kappa_i}, L\kappa\right) = \frac{1}{t_i^{-1} \left(\frac{\kappa_i}{\kappa}\right)^{d-2} + \int_{\kappa_i}^{\kappa} f(L\kappa') \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^{d-2} \frac{d\kappa'}{\kappa'}} \quad (6.25)$$

donde  $\kappa_i$  y  $t_i$  son la escala y temperatura inicial arbitrarias. La función  $f$  es

$$f(L\kappa) = \frac{2(N-2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{d-2}{2}}} e^{-s} e^{-\frac{n^2 L^2 \kappa^2}{4s}} \quad (6.26)$$

En el límite  $L \rightarrow \infty$  la ecuación (6.25) viene a ser

$$t\left(\frac{\kappa}{\kappa_i}, \infty\right) = \frac{1}{t_i^{-1} \left(\frac{\kappa_i}{\kappa}\right)^{d-2} + \int_{\kappa_i}^{\kappa} f(\infty) \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^{d-2} \frac{d\kappa'}{\kappa'}} \quad (6.27)$$

donde  $f(\infty)$  simplemente toma el término  $n = 0$  en la suma involucrada en  $f(L\kappa)$ . Eligiendo la temperatura y la escala inicial a tener al mismo valor en (6.25) y (6.27) obtenemos

$$\left(\frac{1}{T(L)} - \frac{1}{T(\infty)}\right) = \int_{\kappa_i}^{\kappa} (f(L\kappa') - f(\infty)) \kappa'^{d-2} \frac{d\kappa'}{\kappa'} \quad (6.28)$$

donde un factor de  $\kappa^{2-d}$  ha sido absorbido en la temperatura sin dimensión. La interpretación de la ecuación (6.28) es que dada una particular escala de renormalization  $\kappa$  en dos sistemas de tamaño  $L$  y de tamaño infinito entonces las correspondientes temperaturas en los dos sistemas están relacionadas por esta expresión. Dado que el límite  $\kappa \rightarrow \infty$  corresponde a aproximarse al punto crítico, podemos tomar éste límite en (6.28) para obtener

$$\left(\frac{1}{T_c(L)} - \frac{1}{T_c(\infty)}\right) = \frac{1}{2} (f(L\kappa_i) - f(\infty)) \quad (6.29)$$

Tomar el límite  $\kappa_i \rightarrow 0$  corresponde a elegir la temperatura inicial sin dimensiones igual a cero. El corrimiento es entonces dado por

$$\left(\frac{1}{T_c(L)} - \frac{1}{T_c(\infty)}\right) = \frac{b_d}{L^{d-2}} \quad (6.30)$$

donde la constante  $b_d$ , dependiente de la dimensión, es dada por

$$b_d = \frac{(N-2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \zeta(d-2) \quad (6.31)$$

El resultado (6.30) está de acuerdo con lo que se espera para escalamiento de tamaño finito [28], con el exponente  $\nu = 1/(d-2)$ . En el límite  $d \rightarrow 3$ ,  $b_d \rightarrow \infty$  aparece una divergencia en la función  $\zeta$ . Esto corresponde al hecho de que el corrimiento está mal definido debido a la no existencia de un punto crítico en dimensión dos como ha sido discutido por Barber and Fisher [29].

## 6.4 Exponentes Efectivos

Un conjunto muy útil de funciones de escalamiento universales es definido por los exponentes críticos efectivos que interpolan entre aquellos que son característicos de los puntos finales en el entrecruzamiento de interés. Aquí, dado que el modelo  $\sigma$  no lineal está restringido a la región de fase rota, nos concentraremos en los dos exponentes efectivos  $\beta_{\text{eff}}$  y  $\delta_{\text{eff}}$  definidos como

$$\delta_{\text{eff}}^{-1} = \left. \frac{d \ln \sigma}{d \ln H} \right|_{t_c(L)} \quad \beta_{\text{eff}} = \left. \frac{d \ln \sigma}{d \ln(t_c(L) - t)} \right|_{H=0} \quad (6.32)$$

donde  $\delta_{\text{eff}}$  es definido a lo largo de la isoterma crítica del sistema de tamaño finito y  $\beta_{\text{eff}}$  sobre la curva de coexistencia del sistema de tamaño finito. Para derivar  $\beta_{\text{eff}}$  resolvemos la ecuación del GR para la magnetización  $\bar{\varphi}$  con condición inicial  $\bar{\varphi}(\kappa = 0) = 1$ . Luego sustituimos la dimensión anómala (6.24) y consideramos el límite  $L\kappa \rightarrow \infty$  para tener

$$\beta_{\text{eff}} = \beta - (t_c(L) - t) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^\infty \Delta \gamma_\pi(x, t) \frac{dx}{x} \right) \quad (6.33)$$

donde  $\beta = \nu(d-2+\eta)/2$  es el exponente de bulto y  $\Delta \gamma_\pi = \gamma_\pi - (d-2+\eta)$ .

En el límite  $(t_c(L) - t) \rightarrow 0$ ,  $L^{d-2}(t_c(L) - t) \rightarrow \infty$  encontramos que  $\beta_{\text{eff}} \rightarrow \nu(d-2+\eta)/2$ , mientras que en el límite  $(t_c(L) - t) \rightarrow 0$ ,  $L^{d-2}(t_c(L) - t) \rightarrow 0$  obtenemos  $\beta_{\text{eff}} \rightarrow \nu'(d'-2+\eta')/2$ . A orden de un lazo, usando la ecuación (6.24),  $\beta_{\text{eff}}$  interpola entre los valores asintóticos escritos arriba, donde ahora tenemos  $\nu = 1/(d-2)$ ,  $\eta = (d-2)/(N-2)$ ,  $\nu' = 1/(d'-2)$ ,  $\eta' = (d'-2)/(N-2)$  y  $d' = d-1$ .

Similarmente, encontramos para  $\delta_{\text{eff}}$

$$\delta_{\text{eff}}^{-1} = \frac{\gamma_\pi}{(2d - \gamma_\pi - 2\gamma_t)} \quad (6.34)$$

donde  $\gamma_t \equiv (\beta_t/t)$ . En el límite  $(t_c(L) - t) \rightarrow 0$ ,  $L^{1/\nu}(t_c(L) - t) \rightarrow \infty$  tenemos  $\gamma_\pi \rightarrow (d-2+\eta)$  y  $\gamma_t \rightarrow 0$ . Por lo tanto, vemos que  $\delta_{\text{eff}} \rightarrow (d+2-\eta)/(d-2+\eta)$ . En el límite  $(t_c(L) - t) \rightarrow 0$ ,  $L^{1/\nu}(t_c(L) - t) \rightarrow 0$  encontramos que  $\gamma_\pi \rightarrow (d'-2+\eta')$  y  $\gamma_t \rightarrow 1$ . Así, en éste límite  $\delta_{\text{eff}} \rightarrow (d'+2-\eta')/(d'-2+\eta')$ , donde  $d'$  y  $\eta'$  son dados arriba. A nivel de un lazo  $\gamma_\pi$  es dado como (6.24) y  $\gamma_t = \epsilon(L\kappa) - h$ . En la figura (17) tenemos una gráfica de  $\delta_{\text{eff}}^{-1}$  como una función de  $\ln L\kappa$  para  $d = 3$ ,  $d = 3.5$  y  $N = 3, 4, 5$  donde el crossover completo es evidente.

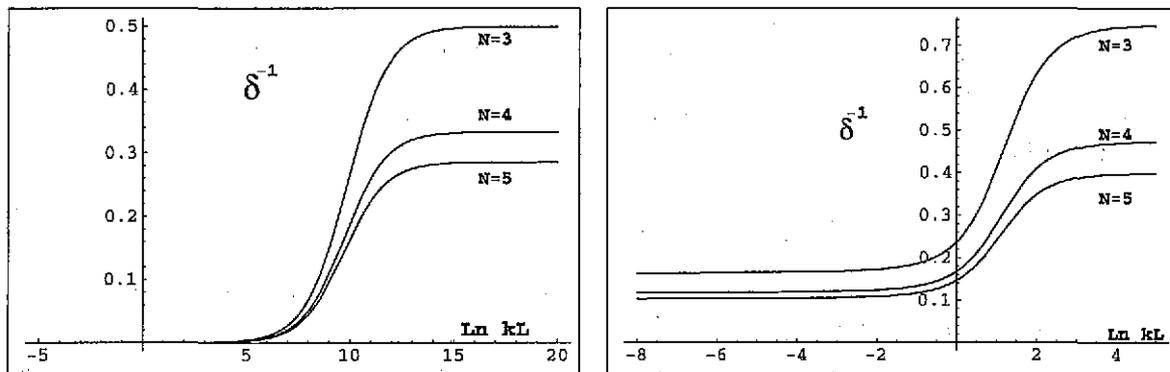


Figura 17: El exponente efectivo  $\delta_{\text{eff}}^{-1}$  para  $d = 3$ , y  $3.5$ .

## 6.5 Modelo de Interfases de Wallace-Zia.

Uno de los campos en los que el GR ha sido aplicado solo recientemente es en la investigación de fenómenos críticos en sistemas inhomogeneos. Uno de los aspectos que han llamado la atención es el comportamiento de las interfases cerca de un punto crítico, esta región separa diferentes fases de una sustancia. En esta sección hemos intentado hacer un breve resumen de esta teoría desarrollada por Wallace y Zia principalmente [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

Podemos pensar en dos fases termodinámicas separadas por una relativamente delgada zona de transición, la región interfacial. En esta región, las propiedades del material deben cambiar, pasando de las características de una de las fases (vapor, por ejemplo) a las características de la otra fase (líquido). Las propiedades de esta región interfacial han llamado la atención de la gente por mucho tiempo, como lo muestra por ejemplo el análisis de Van der Waals a finales del siglo diecinueve. Investigaciones más recientes demuestran que el ancho de la región interfacial diverge conforme uno se acerca al punto crítico desde abajo de la temperatura crítica a lo largo de la línea de coexistencia (de la curva presión-vapor, en el caso de un fluido). Por su parte, la energía libre interfacial por unidad de área, i.e. la tensión superficial tiende a cero conforme uno se acerca al punto crítico. Estas propiedades se pueden caracterizar con los exponentes críticos dados por

$$\sigma \sim (T_c - T)^\mu, \quad T \rightarrow T_c^- \quad (6.35)$$

para la tensión superficial y

$$w \sim (T_c - T)^{-\nu}, \quad T \rightarrow T_c^- \quad (6.36)$$

para el ancho interfacial. Un argumento simple resulta de considerar el exceso de energía libre asociada con una interface de área  $A$ ,  $\Delta F = A\sigma$ . Si la pared interfacial tiene un ancho del orden de la longitud de correlación  $\xi$ , uno puede asociar un exceso de energía libre por unidad de volumen  $\Delta \mathcal{F} = (\sigma A)/(A\xi) = \sigma \xi^{-1}$  de la región interfacial. Si suponemos que ésta densidad de energía varía con la temperatura en la misma forma que la parte singular de la energía libre de bulto ec.(2.3), tenemos  $\sigma \xi^{-1} \sim G_s \sim t^{2-\alpha}$ . De esta forma

$$\sigma \sim \xi t^{2-\alpha} \sim t^{2-\alpha-\nu}. \quad (6.37)$$

De tal manera que

$$\mu = 2\beta + \gamma - \nu \quad (6.38)$$

$$= (d-1)\nu \quad (6.39)$$

en éstas relaciones de escalamiento,  $\nu$  es el exponente para la divergencia de la longitud de correlación de bulto,  $\beta$  y  $\gamma$  son los exponentes estándar para el parámetro de orden y la susceptibilidad,  $d$  es la dimensión espacial del sistema. La aproximación de campo medio da un primer sabor del fenómeno observado: Conforme nos acercamos al punto crítico, la interfase se vuelve más y más difusa. El ancho de la interfase es proporcional a la longitud de correlación de bulto.

Esta teoría es desarrollada empezando por un Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson, que es invariante bajo de traslaciones y rotaciones del parámetro de orden. Está claro que la presencia de la interfase rompe esta simetría. Como veremos más abajo, los modos de Goldstone asociados a este rompimiento son dados por los modos traslacionales de la interfase. Como sabemos, en dimensiones bajas, estas ondas de espín, con longitud de onda grandes, destruyen cualquier intento de ordenamiento del sistema. En este caso, estas ondas se interpretan como excitaciones capilares de la interfase y dan a lugar a inestabilidades sin control en el infrarrojo, tal que en dimensiones menores no tiene sentido hablar de ella.

Si en la energía potencial del Hamiltoniano de Landau-Ginzburg-Wilson (3.23) con  $N = 1$  nos restringimos al regimen por debajo de la temperatura crítica  $t < 0$ , notamos que la función

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}t\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \quad (6.40)$$

tiene dos mínimos de energía potencial igualmente probables de magnetización. Significa que el modelo contiene configuraciones que involucran por ejemplo regiones de una fase anidadas en regiones de la otra fase etc.

En la presencia de un campo magnético externo la situación es un tanto distinta, la configuración homogénea de mínima energía depende del signo del campo magnético. Es decir, estamos describiendo una transición de fase de primer orden. Estas configuraciones  $\varphi_c$  de equilibrio del sistema corresponden a los mínimos del Hamiltoniano (3.23), que satisfacen

$$-\nabla^2 \varphi_c + V'(\varphi_c) = 0 \quad (6.41)$$

donde la prima indica diferenciación respecto al campo  $\varphi$ . Una configuración homogénea es dada por

$$\varphi_{\pm}^2 = -\frac{6t}{\lambda} \quad (6.42)$$

en tanto que una solución no trivial que describe una configuración con interfase centrada en  $z_0$  se puede expresar en la forma

$$\varphi_c(z) = \varphi_+ \tanh \sqrt{\frac{|t|}{2}} (z - z_0) \quad (6.43)$$

conocida en otros contextos como la solución de *kink*, en ésta solución la coordenada  $z$  es perpendicular a la interfase. Como podemos ver, esta solución es independiente de las  $d-1$  coordenadas transversales.

Por otro lado, si perturbamos el sistema alrededor de una solución  $\varphi_c(z)$ , y despreciamos los términos de fluctuaciones obtenemos que la energía relativa a la fase homogénea es dada por

$$\mathcal{H}(\varphi_c) - \mathcal{H}(\varphi_+) = \sigma \int d^{d-1}x \quad (6.44)$$

donde el coeficiente  $\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dz (\varphi_c'(z))^2$  es la tensión superficial de la interfase. En ésta aproximación, el valor medio del campo  $\varphi$ , es dado por la solución  $\varphi_c$ , es decir  $\bar{\varphi} = \varphi_c(z)$ . La solución (6.43) representa una configuración con interfase cuyo ancho es proporcional a la longitud de correlación (3.35): aún a este nivel ya tenemos una descripción del grosor de la interfase,  $w \sim \xi$ .

Si expandemos en el Hamiltoniano alrededor de una solución  $\varphi_c$ ,  $\varphi = \varphi_c + \hat{\varphi}$  tenemos

$$\mathcal{H}(\varphi) = \mathcal{H}(\varphi_c) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \hat{\varphi}(x) \hat{D}(x, y) \hat{\varphi}(y) + \dots \quad (6.45)$$

donde el operador de fluctuaciones se puede escribir como

$$\hat{D}(x, y) = (-\nabla_x^2 + V''(\varphi_c)) \delta^d(x - y). \quad (6.46)$$

Este operador tiene un modo cero

$$\hat{D} \partial_{z_0} \varphi_c(z) = 0 \quad (6.47)$$

que corresponde a una traslación rígida de la configuración  $\varphi_c(z)$  a lo largo de coordenada  $z$ . Con este modo cero se pueden generar otras funciones propias del operador con la combinación  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \partial_{z_0} \varphi_c(z)$  donde  $\mathbf{x}$  es un vector transversal a la interfase. Una superposición de estos modos describe la configuración

$$\varphi \simeq \varphi_c(z - f(\mathbf{x})) \quad (6.48)$$

donde hemos definido la función  $f(\mathbf{x}) = \sum_q a_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ . La expresión (6.48) corresponde a una configuración que es una traslación "local" de la interfase plana por la cantidad  $f(\mathbf{x})$ , por ello, estos modos se conocen como ondas capilares sobre la pared interfacial. Estos modos no son los únicos, no obstante, aunque otros puedan aparecer, estos tendrán un ancho del orden  $\xi^{-2}$ , es decir tendrán asociadas longitudes de onda muy pequeñas respecto al grosor de la interfase. En una primera aproximación estos pueden no ser tomados en cuenta. Considerando estos puntos, encontramos la energía efectiva para desplazamientos grandes respecto al grosor de la interfase  $\sim \xi$

$$\mathcal{H}(\varphi) - \mathcal{H}(\varphi_+) = \sigma \int d^{d-1}x \left[ 1 + \frac{1}{2} (\nabla f)^2 + \dots \right] \quad (6.49)$$

donde, como en (6.44),  $\sigma$  es la tensión superficial de la interfase. Debemos remarcar que por lo dicho en el párrafo anterior, la expresión (6.49) tiene un rango de validez para longitudes grandes respecto a la longitud de correlación, es decir, podemos usar ésta en la región para la cual  $q < \xi^{-1}$ .

El efecto de estas fluctuaciones capilares puede describirse de una manera cuantitativa por  $\overline{f^2}$ , a primer orden obtenemos

$$\overline{f^2} = \sigma^{-1} \int^{\xi^{-1}} \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{q^2} + \dots \quad (6.50)$$

el corte superior de la integral viene del argumento esgrimido más arriba. Sin embargo para  $d \leq 3$ , la integral es divergente en el infrarrojo y por lo tanto el efecto de estas fluctuaciones es no acotado.

### 6.5.1 Expansión de Temperaturas Bajas.

Para estudiar este modelo de interfases, Wallace y Zia introducen el modelo llamado drumhead cuyo hamiltoniano efectivo se puede escribir como

$$H_D = T^{-1} \left[ \int \left[ 1 + (\nabla f)^2 \right]^{1/2} dA + \frac{1}{2} m^2 \int f^2 dA \right] \quad (6.51)$$

el primer término es el área superficial de la interfase, el segundo es una contribución debido a un efecto gravitatorio: la energía gravitacional de una partícula de masa  $m$  a una altura  $f$  es  $mgh$ , para un medio continuo uno debe integrar sobre la densidad de partículas por unidad de área

$$\int_0^f \rho_0 g z dz = \rho_0 g \frac{f^2}{2}. \quad (6.52)$$

Como hemos visto, este término es necesario para controlar las ondas capilares en el infrarrojo. Las propiedades en el infrarrojo y el ultravioleta del modelo son controladas por la dimensión del acoplamiento  $T$ . Dado que el Hamiltoniano debe ser adimensional, el acoplamiento debe tener dimensión  $[T] = \kappa^{-(d-1)}$  donde  $\kappa$  es inverso de longitud (o momento). De esta forma, esperamos que para  $d > 1$ , los lazos que van multiplicando al acoplamiento no cambien el comportamiento en el infrarrojo, es decir, la teoría de perturbaciones es válida en este régimen. Para  $d > 1$ , sin embargo, todavía tenemos divergencias ultravioletas que deben ser controladas. Wallace y Zia encontraron que esto se puede hacer usando renormalización estándar. El único punto de cuidado es en la forma de regularizar las integrales, dado que un corte ultravioleta en ellas provocaría que la simetría euclidiana del modelo se perdiera. El esquema de regularización dimensional salva este punto, y las divergencias aparecen como polos en  $\varepsilon = d - 1$ .

Lo más lógico, es expandir en términos del gradiente de la función  $f$ . El propagador del Hamiltoniano es dado entonces por

$$G_0(q) = \frac{T_B}{(q^2 + m^2)} \quad (6.53)$$

Si cortamos la expansión hasta el término  $(\nabla f)^4$ , uno puede encontrar a un lazo<sup>2</sup>

$$\overline{f_q f_{-q}} = G_0(q) + \frac{1}{2} T^{-1} G_0^2(q) I(q) \quad (6.54)$$

donde

$$I(q) = q^2 \left( 1 + \frac{2}{d-1} \right) \int G_0(k) k^2 \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \quad (6.55)$$

En términos del vértice de dos puntos tenemos

$$\Gamma_B^{(2)}(q) = \frac{q^2 + m_B^2}{T_B} + \frac{1}{2} q^2 \left( 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) \int \frac{k^2}{k^2 + m_B^2} \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \quad (6.56)$$

el punto importante aquí es el de identificar el vértice en los diagramas, en este caso lo que tenemos es que si cuatro líneas con momentos  $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4\}$  entran en uno de ellos, debemos multiplicar por el término

<sup>2</sup>Como ha sido probado en [34], para renormalizar las funciones de correlación de los términos  $(\nabla f)^{2n}$  para  $n > 1$  sólo es necesaria una constante de renormalización  $Z_T$ , que aquí reproducimos a orden  $\varepsilon$ .

$$(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) \quad (6.57)$$

Para encontrar las ecuaciones del GR podemos elegir la normalización

$$T\Gamma^{(2)}(q=0, m=\kappa) = \kappa^2 \quad (6.58)$$

$$T\partial_{q^2}\Gamma^{(2)}|_{q^2=0} = 1 \quad (6.59)$$

Con ayuda de estas expresiones encontramos que no hay renormalización del campo  $f$  a este orden. El acoplamiento se renormaliza mediante  $T_B = Z_T T$  donde la constante de renormalización es dada por

$$Z_T = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\right) T_B \int \frac{k^2}{k^2 + \kappa^2} \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \quad (6.60)$$

La función beta para el acoplamiento adimensional  $\bar{T} = T\kappa^\varepsilon$ , se puede escribir como

$$\beta(\bar{T}) = \varepsilon\bar{T} - \bar{T} \frac{d \ln Z_T}{d \ln \kappa} \quad (6.61)$$

si hacemos la integral por regularización dimensional (después de tomar la derivada logarítmica) y expandemos en  $\varepsilon$ , reproducimos el resultado de Wallace y Zia

$$\beta(\bar{T}) = \varepsilon\bar{T} - \bar{T}^2 \quad (6.62)$$

Este resultado queda ilustrado en la figura (18). Además del punto fijo de temperatura cero (estable en

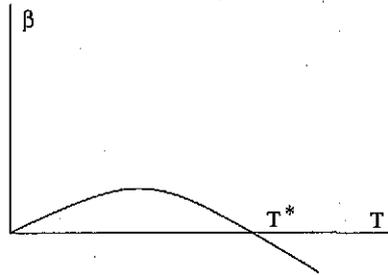


Figura 18: La función de beta para el acoplamiento

el infrarrojo), observamos el punto fijo no trivial  $T^* = \varepsilon$ , estable en el ultravioleta para  $d > 1$ . Wallace y Zia identificaron a este, como el punto crítico de la transición de fase del bulto, es decir, la transición de fase de la teoría original: el modelo de Landau-Ginzburg-Wilson. Se introduce una escala de longitud física  $\xi(\kappa, \bar{T})$  invariante del GR

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(\bar{T}) \frac{\partial}{\partial \bar{T}}\right) \xi = 0 \quad (6.63)$$

cuya solución se puede escribir en la forma

$$\xi = \kappa^{-1} e^{-\int^{\bar{T}(\kappa)} \frac{d\bar{T}}{\beta(\bar{T})}}, \quad (6.64)$$

si expandemos la función  $\beta$  alrededor del punto fijo obtenemos

$$\xi \sim \frac{1}{(\bar{T} - T_c)^{1/\varepsilon}} \quad (6.65)$$

Si  $\varepsilon > 0$  y  $\bar{T} \rightarrow \bar{T}_c$  la escala  $\xi$  diverge como lo hace la longitud de correlación de bulbo con  $\nu = 1/\varepsilon$ . Como podemos ver, este modelo para la interfase da una primera aproximación más allá de campo promedio, para nuestro entendimiento de ondas capilares. En este sentido, uno quisiera extender el análisis para el caso (por ejemplo), en que la interfase tenga grados de libertad que impliquen una cierta rigidez de la misma además de la tensión superficial. Este es precisamente el objetivo que nos hemos planteado discutir en la segunda parte de la tesis.

## 7 Geometría de Superficies Encajadas

Como veremos en las próximas secciones, la física de las perturbaciones en membranas es en realidad un modelo de campos definidos continuamente en la membrana. Para una membrana fluida, las únicas perturbaciones que tienen sentido físico son aquellas perpendiculares a la misma. Estas fluctuaciones sin embargo, están definidas en un espacio que es no trivial, ya que en principio, soluciones de equilibrio del Hamiltoniano no tendrían porque ser superficies planas. ¿Cómo podemos regularizar fluctuaciones en un espacio curvo?. Por fortuna, aunque en un contexto un tanto diferente, ésta pregunta ya ha sido respondida por Schwinger y B. DeWitt en la técnica más conocida como kernel de calor [43]. Esta es precisamente la que usaremos aquí para encontrar las ecuaciones del GR para los parámetros de tensión superficial, rigidez, etc, de las membranas. El costo de hacerlo así, es el de desarrollar con mucho detalle la estructura geométrica de superficies y sus deformaciones. En el camino nos hemos encontrado, sin embargo, con agradables sorpresas. Baste mencionar dos ejemplos: primero, dado un objeto determinado por sus invariantes geométricos tenemos una forma sistemática de encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange del modelo y tenemos una manera de tratar membranas con frontera [58], segundo, deformando una segunda vez podemos extraer las ecuaciones para las perturbaciones. Los resultados que obtenemos para el caso bidimensional a un lazo, coinciden con los ya encontrados en la literatura por otras investigaciones. En cierta forma, nuestros resultados generalizan aquellos, pues los primeros son obtenidos para membranas bidimensionales planas utilizando un marco de referencia euclidiano conocido como la representación de Mongé-Ampère (ver apéndice). Esto nos da la señal de lo robusto de nuestro formalismo y así nos motiva para atacar primero, el caso en que la membrana está encajada en un espacio de codimensión mayor a uno y segundo el problema de un objeto de dimensión cuatro que estudiamos posteriormente. En esta sección nos concentramos en la descripción geométrica de superficies. A pesar de que parte del material presentado aquí se expone en diferentes libros de texto [38], quisieramos proporcionar una presentación un tanto novedosa de la teoría clásica de superficies que pensamos es de mucha utilidad para atacar problemas muy generales que involucran geometría. A nuestro entender, esto es algo de mucha utilidad práctica dados por ejemplo el reciente interés en la teoría de cuerdas donde la hoja de mundo de la cuerda es una membranas bidimensional inmersa en un espacio más grande, o por mencionar otro ejemplo, para estudiar la forma y estabilidad de membranas biológicas que hay en diferentes estructuras de seres vivos, etc. Finalmente, hemos apuntado nuestras baterías en la dirección que aquí nos concierne: la física de las membranas fluidas que analizamos en secciones posteriores. Para ello hemos dividido esta sección en tres partes, la primera de ellas describe superficies inmersas en un espacio euclídeo de una dimensión mayor: hipersuperficies. La segunda parte generaliza los resultados a superficies embebidas en un espacio euclídeo de dimensiones mayores, y finalmente damos una muy breve exposición de superficies que están inmersas en un espacio curvo Riemanniano.

### 7.1 Geometría de Hipersuperficies

Revisemos brevemente algunas características relevantes de la geometría de hipersuperficies encajadas en  $R^{d+1}$ . Consideremos para ello una hipersuperficie orientable  $\Sigma$  encajada en  $R^{d+1}$ . Esta superficie queda especificada localmente en forma paramétrica por las funciones de encajamiento,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a). \quad (7.1)$$

Notación:  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{d+1})$  son coordenadas cartesianas para  $R^{d+1}$ , y  $\xi^a$  son coordenadas en la hipersuperficie  $\Sigma$ ,  $a = 1, \dots, d$ .

La métrica euclidiana en  $R^{d+1}$  induce la métrica  $\gamma_{ab}$  sobre  $\Sigma$  definida por,

$$\gamma_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b, \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X}$  ( $\partial_a := \partial/\partial \xi^a$ ). Los índices latinos se bajan y suben con  $\gamma_{ab}$ , y con su inversa  $\gamma^{ab}$ , respectivamente. La métrica  $\gamma_{ab}$  determina la geometría intrínseca de la superficie  $\Sigma$ . Esta define la (única) derivada covariante sin torsión  $\nabla_a$  compatible, i.e. que satisface  $\nabla_a \gamma_{bc} = 0$  y  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)f(\xi) = 0$  para alguna función sobre la superficie  $f(\xi)$ . La curvatura intrínseca de Riemann  $\mathcal{R}^a{}_{bcd}$  de  $\nabla_a$  es definida por

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) V^c = \mathcal{R}^c{}_{dab} V^d. \quad (7.3)$$

El tensor de Ricci es definido por contracción,  $\mathcal{R}_{ab} := \mathcal{R}^c{}_{acb}$ ; la curvatura escalar  $\mathcal{R}$  se define como  $\mathcal{R} := \gamma^{ab} \mathcal{R}_{ab}$ .

Cuando la superficie  $\Sigma$  es bidimensional, la curvatura de Riemann queda completamente determinada por el escalar de curvatura:

$$\mathcal{R}_{abcd} = \frac{\mathcal{R}}{2} (\gamma_{ac} \gamma_{bd} - \gamma_{ad} \gamma_{bc}). \quad (7.4)$$

Note que, como consecuencia de la ec. (7.4), tenemos

$$\mathcal{G}_{ab} := \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \gamma_{ab} = 0. \quad (7.5)$$

El escalar de curvatura de una superficie bidimensional coincide también con la curvatura Gaussiana de la superficie, y es muy común denotar a ésta con el símbolo  $K$ . Estamos interesados en cantidades geométricas que son invariantes bajo reparametrizaciones de la superficie. El más simple de tales invariantes que uno puede construir a partir de la geometría intrínseca de  $\Sigma$  es el área,

$$A := \int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} d^d \xi \sqrt{\gamma}, \quad (7.6)$$

donde  $\gamma$  denota el determinante de la métrica  $\gamma_{ab}$ . Será conveniente que usemos la notación  $\langle f \rangle = \int dA f$ . En particular,  $A = \langle 1 \rangle$ .

Al siguiente orden, invariantes dependiendo sólo de la geometría intrínseca de la superficie es el promedio del escalar de curvatura sobre la superficie. Si la superficie es bidimensional y  $\Sigma$  no tiene frontera, debido al teorema de Gauss-Bonnet, este no es sólo invariante bajo de reparametrizaciones, es también un invariante topológico, con

$$\langle \mathcal{R} \rangle = 4\pi(2 - g). \quad (7.7)$$

Para una superficie de dimensión cuatro el invariante topológico es

$$\langle \mathcal{R}^{abcd} \mathcal{R}_{abcd} - 4\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}^2 \rangle \quad (7.8)$$

Examinemos ahora la geometría extrínseca de  $\Sigma$ , es decir, cómo  $\Sigma$  está embebida en  $R^{d+1}$ . El vector unitario normal  $n^\mu(\xi)$  a  $\Sigma$  en  $R^{d+1}$  queda definido en forma implícita por,

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7.9)$$

y normalizado,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (7.10)$$

Note que estas ecuaciones determinan  $\mathbf{n}$  hasta un signo: el normal puede apuntar hacia adentro o hacia afuera. Dado que estamos suponiendo que la superficie es orientable, podemos elegir el signo consistentemente, tomaremos el normal apuntando hacia afuera. Este vector unitario normal se puede escribir explícitamente como

$$n_\mu = \pm \frac{1}{d! \sqrt{\gamma}} \varepsilon_{\mu\rho_1 \dots \rho_d} \varepsilon^{a_1 \dots a_{d-1}} (\partial_{a_1} X^{\rho_1}) \dots (\partial_{a_{d-1}} X^{\rho_{d-1}}), \quad (7.11)$$

donde  $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$  y  $\varepsilon^{a_1 \dots a_{d-1}}$  son el totalmente antisimétrico Levi-Civita para  $R^{d+1}$  y  $\Sigma$ , respectivamente ( $\varepsilon_{1 \dots d} = +1$ ). El factor de  $\sqrt{\gamma}$  es necesario para hacer de  $\mathbf{n}$  un escalar bajo de reparametrizaciones.

Cuando  $\Sigma$  es una superficie cerrada, el volumen total encerrado por la superficie  $\Sigma$  en  $R^{d+1}$  es un invariante. El normal a  $\Sigma$  nos provee una definición alternativa del volumen ocupado por el interior de  $\Sigma$  como la integral de superficie

$$V = \frac{1}{d+1} \int_{\Sigma} dA \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{d+1} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} \rangle. \quad (7.12)$$

Esta expresión se puede checar usando la expresión para el vector normal dado por la ec. (7.11).

El conjunto de vectores  $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}_a\}$  forma una base adaptada a la superficie. Sus gradientes a lo largo de la superficie son vectores por sí mismos y pueden ser descompuestos con respecto a esta base. Esta descomposición constituye las ya clásicas ecuaciones de Gauss-Weingarten,

$$\partial_a \mathbf{e}_b = \gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c - K_{ab} \mathbf{n}, \quad (7.13)$$

$$\partial_a \mathbf{n} = K_{ab} \gamma^{bc} \mathbf{e}_c. \quad (7.14)$$

Aquí,  $\gamma_{ab}^c$  es el símbolo de Christoffel asociado con la derivada covariante de la superficie  $\nabla_a$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}^c &= \gamma^{cd} \mathbf{e}_d \cdot \partial_a \mathbf{e}_b \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{cd} (\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

En términos del símbolo de Christoffel, la curvatura de Riemann es dada por

$$\mathcal{R}^a{}_{bcd} = \partial_c \gamma_{db}^a - \partial_d \gamma_{cb}^a + \gamma_{ce}^a \gamma_{db}^e - \gamma_{de}^a \gamma_{cb}^e. \quad (7.16)$$

La curvatura extrínseca de  $\Sigma$  es dada por el tensor simétrico de rango dos sobre  $\Sigma$ ,

$$K_{ab} := -\mathbf{n} \cdot \partial_a \mathbf{e}_b = K_{ba}. \quad (7.17)$$

Notemos que muchos autores difieren por el signo de esta definición. Definimos también su traza con respecto a la métrica intrínseca,

$$K := \gamma^{ab} K_{ab}. \quad (7.18)$$

$K$  representa la curvatura extrínseca media de la superficie.

La geometría intrínseca y extrínseca de  $\Sigma$ , determinada respectivamente por  $\gamma_{ab}$  y por  $K_{ab}$ , no se pueden especificar independientemente. Ellas están relacionadas por las condiciones de integrabilidad de Gauss, y Codazzi-Mainardi, dadas respectivamente por,

$$\mathcal{R}_{abcd} - K_{ac} K_{bd} + K_{ad} K_{bc} = 0, \quad (7.19)$$

$$\nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac} = 0. \quad (7.20)$$

Estas ecuaciones se obtienen como condiciones de integrabilidad al tomar el gradiente a lo largo de la superficie de las ecuaciones de Gauss-Weingarten ecs. (7.50), (7.51), y luego tomando apropiadamente la parte antisimétrica. Tenemos para las ecuaciones de Gauss y Weingarten respectivamente,

$$0 = [\partial_a, \partial_b] \mathbf{e}_c = (\mathcal{R}_{abcd} - K_{ac} K_{bd} + K_{ad} K_{bc}) \mathbf{e}^d + (\nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac}) \mathbf{n} \quad (7.21)$$

$$0 = [\partial_a, \partial_b] \mathbf{n} = (\nabla_a K_{bc} - \nabla_b K_{ac}) \gamma^{ab} \mathbf{e}^c. \quad (7.22)$$

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi aparecen como la proyección tangencial en la primera expresión; las ecuaciones de Codazzi-Mainardi son las proyecciones ortogonales. No hay nueva información que sea dada por la segunda de las expresiones. Las proyecciones tangenciales reproducen las ecuaciones de Codazzi-Mainardi. Las correspondientes proyecciones normales son vacías.

El teorema fundamental para superficies establece que, dados  $\gamma_{ab}$  y  $K_{ab}$  estas ecuaciones son no solo necesarias sino también suficientes para la existencia de un embedding con estas cantidades como la métrica intrínseca y la curvatura extrínseca. Más aún, el embedding es único, hasta movimientos rígidos en el espacio ambiente.

Contracción de las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi con la métrica intrínseca contravariante  $\gamma^{ab}$  resulta en

$$\mathcal{R}_{ab} - K K_{ab} + K_{ac} K_b{}^c = 0, \quad (7.23)$$

$$\mathcal{R} - K^2 + K_{ab} K^{ab} = 0, \quad (7.24)$$

$$\nabla_a K_b{}^a - \nabla_b K = 0 \quad (7.25)$$

donde hemos usado ec.(7.5) en la primera expresión. Notemos que en dimensión dos, las ecuaciones contraídas, ec.(7.24) y (7.25) poseen la misma información que las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi, (7.19) (7.25).

El invariante geométrico de orden más bajo que involucra la geometría extrínseca de la superficie es la curvatura extrínseca media integrada sobre la superficie,  $\langle K \rangle$ . Este invariante, lineal en  $\mathbf{n}$ , depende de la orientación de la superficie.

Al siguiente orden, los invariantes bajo reparametrizaciones son cuadráticos en la curvatura extrínseca,

$$\langle K^2 \rangle, \quad \langle K^{ab} K_{ab} \rangle, \quad (7.26)$$

así como el término de Einstein-Hilbert,  $\langle \mathcal{R} \rangle$ . En general, estos no son independientes, como podemos ver de la ecuación contraída de Gauss, ec. (7.24). Más aún, en dimensión dos,  $\langle \mathcal{R} \rangle$  es el invariante topológico de Gauss-Bonnet. Hay sólo un escalar local independiente asociado con el embedding a este orden.

Una teoría consistente de superficies bidimensionales se puede construir usando únicamente estos invariantes. Podemos escribir como Hamiltoniano efectivo,

$$H = \alpha \langle K^2 \rangle + \beta \langle K \rangle + \lambda \langle 1 \rangle + \frac{P}{d+1} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} \rangle. \quad (7.27)$$

Los gradientes de la curvatura extrínseca  $\nabla_a K_{ab}$  que aparecen en las ecuaciones de Codazzi-Mainardi no aparecen en este Hamiltoniano. El costo diferencial puede ser ignorado.

Esto no es posible cuando  $d = 4$ . Construyamos explícitamente los términos geoméricamente independientes para este caso. Notemos que  $\dim [K] = L^{-1}$ ,  $[\mathcal{R}] = L^{-2}$ . En general, a orden tres, tenemos tres escalares independientes. Del conjunto,  $K^3$ ,  $KK^{ab}K_{ab}$ ,  $K^{ab}K_{bc}K^c{}_a$ ,  $K\mathcal{R}$ , y  $K_{ab}\mathcal{G}^{ab}$ , podemos explotar las ecuaciones de Gauss-Codazzi para producir las tres que son independientes

$$\langle K^3 \rangle, \langle K\mathcal{R} \rangle, \quad \text{y} \quad \langle K^{ab}\mathcal{G}_{ab} \rangle. \quad (7.28)$$

Este último se anula idénticamente en dimensión dos. Al siguiente orden, entran términos en los gradientes de la geometría extrínseca.

Consideremos primero términos contruídos usando sólo  $K_{ab}$  y  $\mathcal{R}_{abcd}$ . Tenemos los tres términos obvios,  $K^4$ ,  $\mathcal{R}^2$ , y  $\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab}$ . Podemos explotar el teorema de Gauss-Bonnet para eliminar el término de la forma  $\mathcal{R}^{abcd}\mathcal{R}_{abcd}$  en favor de las curvaturas contraídas. De cualquier modo,  $K^{ab}K_{bc}$  aparece, usando ahora la ecuación contraída de Gauss-Codazzi (7.23) podemos expresar en términos de  $K_{ab}K$  and  $\mathcal{R}_{ab}$ . Es ahora simple checar que las únicas posibilidades restantes son  $KK^{ab}\mathcal{G}_{ab}$  y  $K^2\mathcal{R}$ . En particular, el término  $K^{ac}K^{bd}\mathcal{R}_{abcd}$  es simplemente la curvatura cuadrática. No obstante, si usamos Gauss-Bonnet, notamos que el término  $KK^{ab}\mathcal{R}_{ab}$  no es independiente.

Podemos reducir todos los términos cuadráticos  $\nabla_a K_{bc}$  a la forma  $\nabla_a K \nabla^a K$  más términos que ya hemos considerado. Por ejemplo, notemos que podemos explotar la condición de integrabilidad no contraída de Codazzi-Mainardi para escribir

$$\langle (\nabla_a K_{ab})^2 \rangle = \int_{\Sigma} dA (\nabla_a K_{bc})^2 = \int_{\Sigma} dA (\nabla_a K_{bc})(\nabla_b K_{ac}) \quad (7.29)$$

$$= - \int_{\Sigma} dA K_{bc} \nabla_a \nabla_b K^{ac}. \quad (7.30)$$

y ahora observamos que

$$[\nabla_a, \nabla_b]K^{ac} = \mathcal{R}^a{}_{dab}K^{dc} + \mathcal{R}^c{}_{dab}K^{ad}, \quad (7.31)$$

así que

$$\langle (\nabla_a K_{ab})^2 \rangle = - \int_{\Sigma} dA K_{bc} (\nabla_b \nabla_a K^{ac} + \mathcal{R}^a{}_{dab}K^{dc} + \mathcal{R}^c{}_{dab}K^{ad}) \quad (7.32)$$

$$= \int_{\Sigma} dA ((\nabla^b K)^2 + \mathcal{R}K^2) \text{ terms.} \quad (7.33)$$

En dimensión dos ésta teoría asume la forma de una teoría escalar  $K^4$  no-minimamente acoplada a la gravedad. Por supuesto, el campo escalar es un campo compuesto construído del embedding  $\mathbf{X}$  el cual también induce campo gravitacional. Esta teoría es por lo tanto interesante en sí misma como una teoría clásica de campos.

## 7.2 Geometría de Superficies Encajadas

Sobre la base que hemos construído en la sección anterior, analizamos enseguida objetos de dimensión  $d$  embebidos en un espacio euclidiano de dimensión más alta, digamos  $R^{d+D}$ .

Una superficie orientable  $d$ -dimensional,  $\Sigma$ , embebida en  $R^{d+D}$  queda especificada localmente por las funciones de encajamiento,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a), \quad (7.34)$$

donde las  $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^{d+D})$  son  $d+D$  funciones de  $d$  variables. La métrica  $\gamma_{ab}$  inducida sobre  $\Sigma$  es dada por una expresión idéntica a la ec.(7.2) con el producto interno en  $R^{d+D}$ . Definimos la geometría intrínseca exactamente como antes.

Examinemos ahora la geometría extrínseca de  $\Sigma$ . Los  $D$  vectores unitarios  $\mathbf{n}_i(\xi)$ , normales a  $\Sigma$  en  $R^{d+D}$  se definen implícitamente por,

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{n}^i = 0, \quad (7.35)$$

y quedan normalizados por,

$$\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^j = \delta^{ij}. \quad (7.36)$$

Notemos que estas ecuaciones determinan los  $\mathbf{n}^i$  hasta una rotación. La definición es invariante bajo rotaciones

$$\mathbf{n}^i \rightarrow O^i_j(\xi^a) \mathbf{n}^j. \quad (7.37)$$

El conjunto de vectores  $\{\mathbf{n}^i, \mathbf{e}_a\}$  forma una base adaptada a la superficie. Sus gradientes a lo largo de la superficie se decompone, como antes, con respecto a la base como (Gauss-Weingarten),

$$\partial_a \mathbf{e}_b = \gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c - K_{ab}^i \mathbf{n}_i, \quad (7.38)$$

$$\partial_a \mathbf{n}_i = K_{abi} \gamma^{bc} \mathbf{e}_c + \omega_{ij a} \mathbf{n}^j. \quad (7.39)$$

Las curvaturas extrínsecas de  $\Sigma$  son dadas por los  $D$  tensores simétricos de segundo rango sobre  $\Sigma$ ,  $K_{abi} := -\mathbf{n}_i \cdot \partial_a \mathbf{e}_b = K_{ba i}$ . Definimos también la traza con respecto a la métrica intrínseca,

$$K_i := \gamma^{ab} K_{abi}. \quad (7.40)$$

Las geometrías intrínseca y extrínseca de  $\Sigma$ , determinada respectivamente por  $\gamma_{ab}$  y por  $K_{abi}$  y  $\omega_{ij a}$ , como antes, no se pueden especificar independientemente. Estas son relacionadas por condiciones de integrabilidad, la generalización de las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi, así como por un nuevo objeto de codimensión mayor el cual fija la curvatura  $\Omega_{abij}$  asociada con la  $SO(D)$  conexión  $\omega_{ij a}$  en términos de  $K_{ab}^i$ :

$$\mathcal{R}_{abcd} - K_{aci} K_{bd}^i + K_{adi} K_{bc}^i = 0, \quad (7.41)$$

$$\tilde{\nabla}_a K_{bc}^i - \tilde{\nabla}_b K_{ac}^i = 0 \quad (7.42)$$

$$\Omega_{ij ab} + K_{aci} K_{bj}^c - K_{acj} K_{bi}^c = 0. \quad (7.43)$$

Notemos que  $\tilde{\nabla}_a$  es la  $SO(D)$  derivada (de norma) covariante definida por

$$\tilde{\nabla}_a \phi_i = \nabla_a \phi_i - \omega_{ij a} \phi^j. \quad (7.44)$$

Las ecuaciones de Ricci aparecen como las proyecciones normales de las condiciones de integrabilidad asociadas con las ecuaciones de Weingarten. Notemos también que no hay contracciones (no vacías) de las ecuaciones de Ricci. Si  $D > 1$ , no hay invariante lineal en  $K^i$  o en alguna potencia impar de  $K_{ab}^i$ . Los invariantes de orden menor en la curvatura extrínseca son los cuadráticos

$$\langle K^i K_i \rangle, \quad \langle K_i^{ab} K_{ab}^i \rangle, \quad (7.45)$$

y el término de Einstein Hilbert,  $\langle \mathcal{R} \rangle$ . También, cuando  $d = 2$  y  $D = 2$ , hay el invariante topológico  $\langle \Omega \rangle$ . Como antes, los primeros tres invariantes no son independientes, como se sigue de la ecuación de Gauss contraída, ec.(7.24). Más aún, en dimensión dos,  $\langle \mathcal{R} \rangle$  es el invariante topológico de Gauss-Bonnet. Hay únicamente un escalar local independiente asociado con el embedding a este orden.

A cuarto orden, además de los términos análogos a  $\langle K^4 \rangle$ ,  $\langle \mathcal{R}^2 \rangle$ , y  $\langle (\nabla K)^2 \rangle$ , discutidos en la sección anterior, hay el término cuadrático en  $\Omega$ .

### 7.3 Geometría de Superficies Encajadas en un Espacio Riemanniano

Por completez, consideremos brevemente superficies de dimensión  $d$  embebidas en un espacio de Riemann de dimensión  $d + D$  descrito por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

Una superficie  $d$ -dimensional,  $\Sigma$ , queda especificada por las funciones de embedding

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a), \quad (7.46)$$

donde  $x^\mu$  son coordenadas locales para  $M$ , y  $\xi^a$  son coordenadas sobre la superficie  $\Sigma$  ( $\mu, \nu, \dots = 1, \dots, d + D$ , y  $a, b, \dots = 1, \dots, d$ ).

La métrica  $\gamma_{ab}$  inducida sobre  $\Sigma$  es dada por

$$\gamma_{ab} = (e_a, e_b), \quad (7.47)$$

donde  $e_a^\mu := \partial_a X^\mu$ , y con  $(\cdot, \cdot)$  nos referimos al producto interno con respecto a  $g_{\mu\nu}$ :  $(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ . La geometría intrínseca queda definida como antes.

Los  $D$  vectores normales unitarios  $n_i^\mu(\xi)$  a  $\Sigma$  en  $R^{d+D}$  se definen como,

$$(e_a, n_i) = 0, \quad (7.48)$$

y son normalizados,

$$(n_i, n_j) = \eta^{ij}. \quad (7.49)$$

El conjunto de vectores  $\{n_i^\mu, e_a^\mu\}$  forma una base adaptada a la superficie. Las derivadas covariantes a lo largo de la superficie, se puede descomponer como en los casos anteriores (las ecuaciones de Gauss-Weingarten),

$$D_a e_b^\mu = \gamma_{ab}^c e_c^\mu - K_{ab}^i n_i^\mu, \quad (7.50)$$

$$D_a n_i^\mu = K_{ab}^i \gamma^{bc} e_c^\mu + \omega_{ij}^a n^{\mu j}, \quad (7.51)$$

donde  $D_a = e_a^\mu D_\mu$  y  $D_\mu$  es la derivada covariante compatible con  $M$ . Las curvaturas extrínsecas de  $\Sigma$  son dadas por los  $D$  tensores simétricos sobre  $\Sigma$ ,

$$K_{abi} := -(n_i, D_a e_b) = K_{bai}. \quad (7.52)$$

Las condiciones de integrabilidad son naturalmente generalizaciones de las ecuaciones de Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi y Ricci:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\alpha e_d^\beta = \mathcal{R}_{abcd} - K_{ac}^i K_{bd}^i + K_{ad}^i K_{bc}^i, \quad (7.53)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} n_i^\mu e_b^\nu e_c^\alpha e_d^\beta = \tilde{\nabla}_a K_{bc}^i - \tilde{\nabla}_b K_{ac}^i, \quad (7.54)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} n_i^\mu n_j^\nu e_c^\alpha e_d^\beta = \Omega_{ijab} + K_{ac}^i K_{bj}^c - K_{acj} K_{bi}^c. \quad (7.55)$$

## 8 Deformaciones de la Geometría

Siguiendo con el programa que nos hemos planteado en la sección anterior, en ésta nos concentramos en deformaciones en la geometría de superficies. Dado un Hamiltoniano construido de invariantes geométricos es natural el encontrar las ecuaciones de equilibrio. Para hacerlo, aplicamos el principio de mínima acción al Hamiltoniano y para ello debemos deformarlo infinitesimalmente. Para los casos que nos interesan, una pequeña deformación en la superficie significa perturbar las funciones que definen el embedding, a su vez, esta perturbación induce deformaciones en las geometrías tanto intrínseca como extrínseca ya que éstas están definidas directamente con las funciones de embedding. Por ello no parece apropiado desarrollar primero la tecnología de deformaciones de los objetos geométricos que aparecen en los modelos que estudiamos posteriormente.

### 8.1 Deformaciones de Hipersuperficies

Una deformación uniparamétrica de la hipersuperficie es descrita por funciones  $\mathbf{X}(\xi^a, u)$ . Un cambio infinitesimal de las funciones de embedding

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}(\xi) + \delta\mathbf{X}(\xi), \quad (8.1)$$

está caracterizado por el vector infinitesimal  $\delta\mathbf{X}(\xi) = \partial_u \mathbf{X}(\xi^a, u)|_{u=0} \delta u$ . Este vector se puede descomponer en sus partes normal y tangencial a la superficie  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{X} &= \delta_{\perp} \mathbf{X} + \delta_{\parallel} \mathbf{X} \\ &= \Phi \mathbf{n} + \Phi^a \mathbf{e}_a. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Notemos que las funciones  $\Phi$  de proyección, tienen dimensión de longitud.

Determinemos primero cómo cambia la base  $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{n}\}$  bajo la deformación. La observación clave es que  $\partial_u$  y  $\partial_a$  conmutan. Así, el cambio en los vectores tangentes es dado por

$$\delta \mathbf{e}_a = \partial_a (\delta \mathbf{X}). \quad (8.3)$$

Si descomponemos  $\delta\mathbf{X}$  en su parte tangencial y normal de acuerdo a ec.(8.2) tenemos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{e}_a &= \partial_a (\Phi^b \mathbf{e}_b + \Phi \mathbf{n}) \\ &= (\nabla_a \Phi^b) \mathbf{e}_b - K_{ab} \Phi^b \mathbf{n} + (\nabla_a \Phi) \mathbf{n} + \Phi K_{ab} \gamma^{bc} \mathbf{e}_c. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Donde hemos usado las ecuaciones de Gauss-Weingarten ec.(7.50) y ec.(7.51) en la segunda línea. Tenemos entonces las deformaciones inducidas por  $\delta\mathbf{X}_{\parallel}$  y  $\delta\mathbf{X}_{\perp}$  respectivamente

$$\delta_{\parallel} \mathbf{e}_a = (\nabla_a \Phi^b) \mathbf{e}_b - K_{ab} \Phi^b \mathbf{n}, \quad (8.5)$$

y

$$\delta_{\perp} \mathbf{e}_a = (\nabla_a \Phi) \mathbf{n} + \Phi K_{ab} \gamma^{bc} \mathbf{e}_c. \quad (8.6)$$

De la primera tenemos para la deformación de la métrica inducida

$$\delta_{\parallel} \gamma_{ab} = \nabla_a \Phi_b + \nabla_b \Phi_a, \quad (8.7)$$

que es justamente la derivada de Lie  $d$ -dimensional a lo largo del campo vectorial de la superficie  $\Phi^a$ . Similarmente, el cambio en la métrica  $\gamma_{ab}$  bajo una deformación normal se sigue de ec.(7.2):

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} \gamma_{ab} &= (\delta_{\perp} \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_a \cdot (\delta_{\perp} \mathbf{e}_b) \\ &= 2K_{ab} \Phi. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Esta expresión da la interpretación geométrica de la curvatura extrínseca: es un medio de la derivada de Lie  $d$ -dimensional de la métrica intrínseca a lo largo del vector normal.

Notemos que para el inverso de la métrica tenemos que  $\delta_{\perp}\gamma^{ab} = -2K^{ab}\Phi$ . De estas relaciones, se sigue que la deformación normal de primer orden del elemento de área infinitesimal es simplemente proporcional a la traza de la curvatura extrínseca,

$$\delta_{\perp}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ab}\delta_{\perp}\gamma_{ab} = \sqrt{\gamma}K\Phi. \quad (8.9)$$

ec.(8.9) codifica el contenido geométrico de la curvatura media como el cambio relativo del área por unidad de deformación. La variación del vector normal,

$$\delta_{\parallel}\mathbf{n} = K^{ab}\Phi_a\mathbf{e}_b, \quad (8.10)$$

y

$$\delta_{\perp}\mathbf{n} = -(\nabla_a\Phi)\gamma^{ab}\mathbf{e}_b, \quad (8.11)$$

se siguen de las relaciones que lo definen, Eqs. (7.35) y (7.36).

Es posible evaluar la deformación normal de primer orden de la curvatura escalar  $\mathcal{R}$  ya sea intrínseca o extrínsecamente (usando la ecuación de Gauss-Codazzi). Consideremos ésta última forma. Usando la definición del tensor de Riemann dada por ec.(7.16), tenemos que la variación normal de éste objeto es

$$\delta_{\perp}\mathcal{R}^a{}_{bcd} = \nabla_c(\delta_{\perp}\gamma_{db}{}^a) - \nabla_d(\delta_{\perp}\gamma_{cb}{}^a), \quad (8.12)$$

lo cual implica

$$\delta_{\perp}\mathcal{R}_{ab} = \nabla_c(\delta_{\perp}\gamma_{ab}{}^c) - \nabla_b(\delta_{\perp}\gamma_{ca}{}^c). \quad (8.13)$$

Para la curvatura escalar tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}\mathcal{R} &= (\delta_{\perp}\gamma^{ab})\mathcal{R}_{ab} + \gamma^{ab}(\delta_{\perp}\mathcal{R}_{ab}) \\ &= -2\mathcal{R}_{ab}K^{ab}\Phi + \nabla_c(\gamma^{ab}\delta_{\perp}\gamma_{ab}{}^c) - \nabla^a(\delta_{\perp}\gamma_{ca}{}^c). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Ahora bien, una variación arbitraria de la métrica induce una variación

$$\delta\gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2}\gamma^{cd}(\nabla_b\delta\gamma_{ad} + \nabla_a\delta\gamma_{bd} - \nabla_d\delta\gamma_{ab}) \quad (8.15)$$

en los símbolos de Christoffel, por lo que, usando las ecuaciones de Codazzi-Mainardi tenemos que la variación normal de los símbolos de Christoffel es

$$\delta_{\perp}\gamma_{ab}{}^c = K_a{}^c\nabla_b\Phi + K_b{}^c\nabla_a\Phi - K_{ab}\nabla^c\Phi + (\nabla_a K_b{}^c)\Phi. \quad (8.16)$$

Con esto determinamos que la curvatura escalar se transforma como

$$\delta_{\perp}\mathcal{R} = -2\mathcal{R}_{ab}K^{ab}\Phi + \nabla_a V_1^a(\mathcal{R}), \quad (8.17)$$

donde el vector de superficie  $V_1^a(\mathcal{R})$  es definido por

$$V_1^a(\mathcal{R}) := 2(K^{ab} - \gamma^{ab}K)\nabla_b\Phi. \quad (8.18)$$

(Con el uso de la ecuación contraída de Codazzi-Mainardi, ec.(7.20), la divergencia pasa a través de la combinación lineal,  $K^{ab} - \gamma^{ab}K$ ). Notemos que para la densidad de curvatura escalar tenemos

$$\delta_{\perp}\sqrt{\gamma}\mathcal{R} = \sqrt{\gamma}(-2\mathcal{G}_{ab}K^{ab} + 2\nabla_a[(K^{ab} - \gamma^{ab}K)\nabla_b\Phi]). \quad (8.19)$$

Esta expresión ha de ser comparada con el resultado bien conocido en la teoría de la gravitación. Tenemos

$$\delta_{\perp}\langle\mathcal{R}\rangle = -2\langle\mathcal{G}_{ab}K^{ab}\rangle + \langle\nabla_c V_1^c\rangle. \quad (8.20)$$

De este resultado se sigue que la variación de la curvatura escalar integrada es una divergencia en dimensiones. Si la superficie no tiene frontera, la variación se anula idénticamente como debe ser, ya que es el invariante topológico de Gauss-Bonnet.

Consideremos ahora las deformaciones de primer orden de la geometría extrínseca. Para la deformación normal tenemos

$$\begin{aligned}
\delta_{\perp} K_{ab} &= -(\delta_{\perp} \mathbf{n}) \cdot \partial_a \mathbf{e}_b - \mathbf{n} \cdot \partial_a (\delta_{\perp} \mathbf{e}_b) \\
&= (\partial_c \Phi) \mathbf{e}^c \cdot \partial_a \mathbf{e}_b - \mathbf{n} \cdot \partial_a [(\partial_b \Phi) \mathbf{n} + \Phi K_{bc} \mathbf{e}^c] \\
&= \gamma_{ab}{}^c \partial_c \Phi - \partial_a \partial_b \Phi + K_{ac} K^c{}_b \Phi \\
&= -\nabla_a \nabla_b \Phi + K_{ac} K^c{}_b \Phi.
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Usando la ec.(7.23) podemos escribir esta expresión en la forma,

$$\delta_{\perp} K_{ab} = -\nabla_a \nabla_b \Phi + (K K_{ab} - \mathcal{R}_{ab}) \Phi. \tag{8.22}$$

Note que  $\delta_{\perp}$  es manifiestamente simétrico.

Para la curvatura media extrínseca obtenemos,

$$\begin{aligned}
\delta_{\perp} K &= (\delta_{\perp} \gamma^{ab}) K_{ab} + \gamma^{ab} (\delta_{\perp} K_{ab}) \\
&= -\Delta \Phi - K_{ab} K^{ab} \Phi \\
&= -\Delta \Phi + (\mathcal{R} - K^2) \Phi,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

donde hemos usado la ecuación de Gauss contraída, ec.(7.24), en la última línea. Como un chequeo de consistencia de estas expresiones uno puede verificar que estas implican, como debe ser, que la deformación de primer orden de la ecuación de Gauss contraída se anula idénticamente, *i.e.*

$$\delta_{\perp} (\mathcal{R} - K^2 + K_{ab} K^{ab}) = 0. \tag{8.24}$$

## 8.2 Variaciones de Primer Orden de Invariantes Geométricos

En esta sección aplicamos el marco cinemático que hemos desarrollado para la determinación sistemática de las derivadas de Euler-Lagrange de los invariantes geométricos que aparecen en el Hamiltoniano.

Comentemos primero sobre la deformación tangencial. Para el elemento de área tenemos

$$\delta_{\parallel} \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma} \nabla_a \Phi^a. \tag{8.25}$$

También, cualquier escalar de superficie satisface

$$\delta_{\parallel} f(X) = \Phi^a \partial_a f(X). \tag{8.26}$$

Luego, cualquier invariante funcional de la forma

$$F[X] = \int_{\Sigma} dA f(X), \tag{8.27}$$

se deforma tangencialmente como

$$\begin{aligned}
\delta_{\parallel} F[X] &= \int_{\Sigma} d^d \xi [(\delta_{\parallel} \sqrt{\gamma}) f(X) + \sqrt{\gamma} (\delta_{\parallel} f(X))] \\
&= \int_{\Sigma} dA \nabla_a [\Phi^a f(X)].
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Usando el teorema de Stokes esto se convierte en

$$\delta_{\parallel} F[X] = \int_{\partial \Sigma} dS \eta_a \Phi^a f(X), \tag{8.29}$$

donde la integración va sobre la frontera de  $\Sigma$  y  $\eta^a$  denota el vector unitario normal a la frontera de y hacia el interior de  $\Sigma$ . Por supuesto, si esta frontera es vacía, la integral se anula idénticamente. Es de enfatizar que en el caso de una superficie con frontera, esta integral en general es no cero, y no será

válido por lo tanto desprestigiar las variaciones tangenciales de la superficie. En efecto, la anulación de tales términos determinará las condiciones a ser impuestas sobre la frontera.

Si la superficie no tiene frontera, la parte tangencial de la variación se puede asociar con una reparametrización. Dado que, por ahora estamos interesados en cantidades que son invariantes bajo reparametrizaciones de la superficie, olvidaremos esta contribución en lo que sigue y nos concentraremos en las deformaciones normales de la geometría intrínseca y extrínseca de  $\Sigma$  [40, 41, 42]. Escribimos

$$\delta_{\perp}\langle f \rangle = \langle \mathcal{E}[f]\Phi \rangle + \langle \nabla_a V_1[f] \rangle. \quad (8.30)$$

La divergencia aparece cuando integramos por partes para remover todas las derivadas de  $\Phi$ . Empezamos con la variación de primer orden normal de  $A$  y  $V$ .

Para la variación normal del área total usamos ec.(8.9)

$$\delta_{\perp}A = \langle K\Phi \rangle. \quad (8.31)$$

Tenemos  $\mathcal{E}[1] = K$ . Notemos que la diferencia en área entre dos superficies separadas por una distancia infinitesimal normal  $\Phi$  es proporcional a la curvatura media integrada. El área de la superficie es extremal para deformaciones normales arbitrarias:  $\delta_{\perp}A = 0$ , cuando  $K = 0$  en cada punto de la superficie.

Una manera de determinar la deformación normal del volumen encerrado por la superficie, es explotando la definición dada en la ec.(7.12). Tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}V &= \frac{1}{d+1} \int_{\Sigma} d^d \xi [(\delta_{\perp}\sqrt{\gamma})\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} + \sqrt{\gamma}\mathbf{n} \cdot \delta_{\perp}\mathbf{X}] \\ &= \frac{1}{d+1} \int_{\Sigma} dA [\Phi K \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - (\partial_a \Phi) \gamma^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{X} + \Phi]. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Integrando por partes el segundo término y eliminando una divergencia total tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}V &= \frac{1}{d+1} \int_{\Sigma} dA [\Phi K \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} + \Phi \gamma^{ab} \partial_a \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{X} + \Phi \gamma^{ab} \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_a + \Phi] \\ &= \frac{1}{d+1} \int_{\Sigma} dA [\Phi K \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - \Phi K \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} + d\Phi + \Phi] \\ &= \int_{\Sigma} dA \Phi = \langle \Phi \rangle, \end{aligned} \quad (8.33)$$

donde hemos usado las ecuaciones de Gauss-Wingarten en la segunda línea. Esta expresión final no es de sorprender. El cambio infinitesimal en el volumen es simplemente proporcional al área de la frontera por el desplazamiento normal.

Examinemos ahora potencias de la curvatura extrínseca media. La deformación de la densidad  $\sqrt{\gamma}K$  es

$$\delta_{\perp}\sqrt{\gamma}K = -\Delta\Phi + \mathcal{R}\Phi. \quad (8.34)$$

y obtenemos para la curvatura media total,

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}\langle K \rangle &= -\langle \Delta\Phi \rangle + \langle \mathcal{R}\Phi \rangle \\ &= \langle \mathcal{R}\Phi \rangle + \langle \nabla_a V_1^a(K) \rangle, \end{aligned} \quad (8.35)$$

donde  $V_1^a(K) = -\nabla^a\Phi$ . El subíndice se refiere al orden de la variación. Es interesante observar que ésta expresión depende únicamente de la geometría intrínseca de la superficie. Para una superficie cerrada,  $\delta_{\perp}\langle K \rangle = \langle \mathcal{R}\Phi \rangle$ . La correspondiente derivada de Euler-Lagrange es

$$\mathcal{E}[K] = \mathcal{R}. \quad (8.36)$$

Si la curvatura escalar es nula, también lo es  $\delta_{\perp}\langle K \rangle$ . Esto es lo que se espera para una superficie bidimensional donde  $\mathcal{R} = 0$  implica que esta es plana. Esto es, sin embargo, un punto no trivial para dimensiones mayores. Si  $\Phi$  es una constante, y la superficie es bidimensional entonces

$$\delta_{\perp}\langle K \rangle = 4\pi(1-g)\Phi. \quad (8.37)$$

Para la variación del cuadrado de la curvatura extrínseca tenemos (el funcional de Helfrich)

$$\delta_{\perp}\langle K^2 \rangle = \int_{\Sigma} dAK[-2\Delta\Phi + (2\mathcal{R} - K^2)\Phi]; \quad (8.38)$$

Si integramos dos veces por partes tenemos:

$$\delta_{\perp}\langle K^2 \rangle = \langle \Phi \{-2\Delta K + (2\mathcal{R} - K^2)K\} \rangle + \langle \nabla_a V_1^a(K^2) \rangle, \quad (8.39)$$

donde  $V_1^a(K^2) = 2\Phi\nabla^a K - 2K\nabla^a\Phi$ . La derivada de Euler-Lagrange es

$$\mathcal{E}[K^2] = -2\Delta K + (2\mathcal{R} - K^2)K. \quad (8.40)$$

Esta involucra cuatro derivadas de las funciones de embedding.

### 8.3 La Derivada de Euler-Lagrange del Hamiltoniano de Helfrich

La expresión general a considerar es

$$F[X] = \alpha\langle K^2 \rangle + \beta\langle K \rangle + \lambda A + \sigma V, \quad (8.41)$$

donde  $\alpha, \beta, \lambda$  y  $\sigma$  son constantes. Utilizando las expresiones obtenidas en la sección previa tenemos

$$\mathcal{E} = -2\alpha\Delta K + (2\alpha K + \beta)\mathcal{R} - \alpha K^3 + \lambda K + \sigma. \quad (8.42)$$

### 8.4 Variaciones de Segundo Orden

Para tener la aproximación de un lazo de la energía libre, necesitamos desarrollar la teoría de perturbaciones a segundo orden. Antes de proceder, notemos que debido a que debemos tomar una siguiente variación sobre  $\delta X$  tenemos

$$\delta_{\perp}\Phi \neq 0, \quad (8.43)$$

a segundo orden y similarmente para las otras tres posibilidades,  $\delta_{\perp}\Phi^a$ ,  $\delta_{\parallel}\Phi$  and  $\delta_{\parallel}\Phi^a$ . Sin embargo, es sencillo checar que no hay error al tomar  $\delta_{\perp}\Phi = 0$  en lo que sigue. Esto porque los términos adicionales pueden todos ser agrupados en una divergencia que involucra  $\Phi^a$ . A primer orden tenemos,

$$\delta F = \int d^d\xi (\delta_{\parallel}(\sqrt{\gamma}f) + \delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}f)). \quad (8.44)$$

y así

$$\delta^2 F = \int d^d\xi \left[ \delta_{\parallel}^2(\sqrt{\gamma}f) + \delta_{\parallel}\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}f) + \delta_{\perp}\delta_{\parallel}(\sqrt{\gamma}f) + \delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}f) \right]. \quad (8.45)$$

Sin embargo,  $\delta_{\parallel}(\sqrt{\gamma}f) = \nabla_a(\sqrt{\gamma}\Phi^a f)$ . Además, la divergencia de una densidad vectorial es independiente de la conexión afín de la superficie  $\gamma_{ab}^c$ , así que la variación de la divergencia de una densidad vectorial  $\mathcal{V}^a$  es igual a la divergencia de la variación,

$$\delta_{\perp}(\nabla_a[\mathcal{V}^a]) = \nabla_a(\delta_{\perp}\mathcal{V}^a). \quad (8.46)$$

Así

$$\delta^2 F = \int d^d\xi \left[ \nabla_a (\Phi^a (\nabla_b (\Phi^b \sqrt{\gamma}f) + 2\Phi^a \delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}f)) + \delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}f) \right]. \quad (8.47)$$

Esto es, módulo una divergencia, podemos siempre ignorar el hecho que  $\delta_{\perp}\Phi \neq 0$ . Una variación de segundo orden también se puede ver como una deformación diferente  $X^\mu \rightarrow X^\mu(\xi) + \Phi^a \mathbf{n}$  aplicada a la

variación de primer orden, y luego haciendo  $\Phi' = \Phi$ . Desde un punto de vista práctico, esto es equivalente a una aplicación repetida del operador deformación normal  $\delta_\perp$ .

En el cálculo de variaciones más altas, un ingrediente esencial es el conmutador del operador de deformación y la derivada covariante sobre  $\Sigma$ . Este conmutador nos permite expresar deformaciones de la derivada covariante de cualquier cantidad geométrica de interés, en términos de la derivada covariante de la variación de tal cantidad. Por ejemplo, cuando actúa sobre un tensor de segundo rango arbitrario  $A_a{}^b$  en  $\Sigma$ , este es dado por [40, 41, 42]

$$[\delta_\perp, \nabla_a] A_b{}^c = k_{ab}{}^d A_d{}^c - k_{ad}{}^c A_b{}^d, \quad (8.48)$$

donde

$$k_{ab}{}^c := K_{ab} \nabla^c \Phi - 2K_{(a}{}^c \nabla_{b)} \Phi - (\nabla_a K_b{}^c) \Phi. \quad (8.49)$$

Esta ecuación se sigue de ec.(8.16). Como consecuencia de las ecuaciones de Codazzi-Mainardi, el (aparentemente no simétrico) tercer término del lado derecho es, en efecto, simétrico bajo el intercambio de índices tangenciales. También para este caso, es útil checar la validez de estas expresiones, verificando que la variación de primer orden de las ecuaciones de Codazzi-Mainardi, ec.(7.20), el cual involucra tal conmutador, se anula idénticamente, es decir

$$2\delta_\perp(\nabla_{[a} K_{b]c}) = 2[\delta_\perp, \nabla_{[a} K_{b]c}] + \nabla_{[a} (k_{c[a}{}^d K_{b]d}) + \nabla_{[a} (\delta_\perp K_{b]c}) = 0. \quad (8.50)$$

Una útil expresión es el conmutador de la deformación con el Laplaciano, actuando sobre una función arbitraria  $f$ , es dado por

$$\begin{aligned} [\delta_\perp, \Delta] f &= +(\delta_\perp \gamma^{ab}) \nabla_a \nabla_b f + k_b{}^{bc} \nabla_c f \\ &= -2K^{ab} \Phi \nabla_a \nabla_b f - 2K^{ab} \nabla_a f \nabla_b \Phi \\ &+ K \nabla^a f \nabla_a \Phi - (\nabla_a K) (\nabla^a f) \Phi. \end{aligned} \quad (8.51)$$

La variación de segundo orden del Hamiltoniano se puede escribir como

$$\delta^2 F[X] = \int dA \Phi \mathcal{L} \Phi = \langle \Phi \mathcal{L} \Phi \rangle, \quad (8.52)$$

para algún operador diferencial local  $\mathcal{L}$ .

Para la variación de segundo orden del volumen encerrado, no se requiere mayor trabajo, ya que está simplemente relacionado a la primera variación del área mediante

$$\begin{aligned} \delta^2 V &= \delta \langle \Phi \rangle \\ &= \int_\Sigma d^d \xi \Phi \delta_\perp \sqrt{\gamma} \\ &= \langle K \Phi^2 \rangle. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Para encontrar la segunda variación del área, varias estrategias son posibles. En una de ellas uno simplemente calcula la segunda variación de la métrica. Usando la ec.(8.22) obtenemos,

$$\begin{aligned} \delta_\perp^2 \gamma_{ab} &= 2(\delta_\perp K_{ab}) \Phi \\ &= -2\Phi [\nabla_a \nabla_b \Phi - K_a{}^c K_{cb}] \Phi, \end{aligned} \quad (8.54)$$

por lo que, para el elemento de área tenemos

$$\delta_\perp^2 \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma} (-\Phi \Delta \Phi + \mathcal{R} \Phi^2), \quad (8.55)$$

y la segunda variación del área es dada por la expresión

$$\delta^2 A = \langle \Phi \{-\Delta + \mathcal{R}\} \Phi \rangle, \quad (8.56)$$

sin término de frontera. Tenemos

$$\mathcal{L}(1) = -\Delta + \mathcal{R}. \quad (8.57)$$

Notemos que si  $\Phi$  es constante, esta ecuación implica que la segunda variación del área es proporcional a la variación de primer orden de la curvatura media integrada y proporcional al invariante topológico de Gauss-Bonnet. Más aún, esta expresión depende sólo de la geometría intrínseca de la superficie.

Hay una ruta alternativa para la segunda variación del área, que es muy útil cuando consideramos variaciones de más alto orden. La idea es explotar la jerarquía natural en las variaciones ilustrada por las relaciones

$$\delta_{\perp}\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}K\Phi \quad (8.58)$$

$$\delta_{\perp}^2\sqrt{\gamma} = \delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K)\Phi. \quad (8.59)$$

Esto da directamente la ec.(8.55). La utilidad de esta idea es manifiesta: la  $n$  variación del elemento de volumen se puede expresar en términos de la  $(n-1)$  variación de la densidad de la curvatura extrínseca media.

Motivados por esta observación, consideremos la segunda variación de la densidad de la curvatura extrínseca media. Reescribimos la ec.(8.35) como

$$\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K) = \sqrt{\gamma}\mathcal{R}\Phi + \nabla_a\tilde{V}_{(1)}^a, \quad (8.60)$$

donde hemos definido la densidad vectorial  $\tilde{V}_{(1)}^a := \sqrt{\gamma}V_{(1)}^a$ , y  $V_{(1)}^a$  es definida más abajo ec.(8.35). Para evaluar

$$\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K) = \delta_{\perp}[\sqrt{\gamma}\mathcal{R}\Phi + \nabla_a\tilde{V}_{(1)}^a], \quad (8.61)$$

notemos el hecho crucial mencionado antes

$$\delta_{\perp}(\nabla_a\tilde{V}_{(1)}^a) = \nabla_a(\delta_{\perp}\tilde{V}_{(1)}^a). \quad (8.62)$$

Por lo tanto, la ec.(8.61) da

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K) &= \Phi\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}) + \nabla_a\tilde{V}_{(2)}^a \\ &= 2\sqrt{\gamma}\Phi(K^{ab} - K\gamma^{ab})\nabla_a\nabla_b\Phi - 2\sqrt{\gamma}\mathcal{G}_{ab}K^{ab}\Phi^2 + \nabla_a\tilde{V}_{(2)}^a(K), \end{aligned} \quad (8.63)$$

donde hemos usado la Eqs. (8.19), y definido la densidad vectorial

$$\tilde{V}_{(2)}^a(K) = \delta_{\perp}\tilde{V}_{(1)}^a(K). \quad (8.64)$$

Tenemos

$$\delta^2(K) = 2\langle\Phi(K^{ab} - K\gamma^{ab})\nabla_a\nabla_b\Phi\rangle - 2\langle\mathcal{G}_{ab}K^{ab}\Phi^2\rangle + \langle\nabla_a\tilde{V}_{(2)}^a(K)\rangle. \quad (8.65)$$

por lo que podemos identificar

$$\mathcal{L}(K) = 2(K^{ab} - K\gamma^{ab})\nabla_a\nabla_b - 2\mathcal{G}_{ab}K^{ab}. \quad (8.66)$$

Notemos que si la superficie es plana entonces la variación de segundo orden, así como la primera, se anula. Así, en una aproximación gaussiana alrededor de una geometría de fondo plana este término es intrascendente.

Vamos a requerir una forma explícita para  $\tilde{V}_{(2)}^a$ . Esta es

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{(2)}^a(K) &= -(\delta_{\perp}\sqrt{\gamma})\nabla^a\Phi - \sqrt{\gamma}(\delta_{\perp}\gamma^{ab})\nabla_b\Phi \\ &= \sqrt{\gamma}\Phi(2K^{ab} - \gamma^{ab}K)\nabla_b\Phi. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Finalmente, terminamos esta sección calculando la segunda variación de la densidad de la curvatura media cuadrada. Desafortunadamente, esta cantidad no está dentro de la jeraquía de variaciones que

hemos explotado. Podemos directamente tomar la variación en la ec.(8.40) o proceder calculando directamente la segunda variación de  $K$ .

Por otro lado, podemos utilizar la relativamente simple expresión para la variación de la densidad de la curvatura media y usar la identidad

$$\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K^2) = 2K\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K) + 2[\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K)]^2\gamma^{-1/2} - 5K^2\Phi\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K) + 2\sqrt{\gamma}K^4\Phi^2. \quad (8.68)$$

Un pequeño cálculo da

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K^2) = \sqrt{\gamma} [ & 2(\Delta\Phi)^2 + 4\Phi KK^{ab}\nabla_a\nabla_b\Phi + (K^2 - 4\mathcal{R})\Phi\Delta\Phi \\ & + (2\mathcal{R}^2 + 2K^4 - 5\mathcal{R}K^2 - 4\mathcal{G}_{ab}K^{ab}K)\Phi^2] + 2K\nabla_a\tilde{V}_{(2)}^a(K). \end{aligned} \quad (8.69)$$

Si aislamos una divergencia total en el último término usando

$$2K\nabla_a\tilde{V}_{(2)}^a(K) = 2\nabla_a(K\tilde{V}_{(2)}^a(K)) - 2(\nabla_a K)\tilde{V}_{(2)}^a(K), \quad (8.70)$$

obtenemos

$$\delta^2\langle K^2 \rangle = \langle \Phi\mathcal{L}(K^2)\Phi \rangle + \langle \nabla_a V_{(2)}^a(K^2) \rangle, \quad (8.71)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(K^2) = & 2(-\Delta)^2 + 4KK^{ab}\nabla_a\nabla_b + (K^2 - 4\mathcal{R})\Delta \\ & - 2(\nabla_a K)(2K^{ab} - \gamma^{ab}K)\nabla_b \\ & + 2\mathcal{R}^2 + 2K^4 - 5\mathcal{R}K^2 - 4\mathcal{G}_{ab}K^{ab}K, \end{aligned} \quad (8.72)$$

y

$$V_{(2)}^a(K^2) = 2(\Delta\Phi\nabla^a\Phi - \Phi\nabla^a(\Delta\Phi)) + 2\Phi(2K^{ab} - K\gamma^{ab})\nabla^a\Phi. \quad (8.73)$$

Estamos en posición de escribir el operador que aparece en la variación de segundo orden del Hamiltoniano de Helfrich:

$$\mathcal{L} = 2\alpha(-\Delta)^2 + 2A^{ab}\nabla_a\nabla_b + 2B^a\nabla_a + 2C, \quad (8.74)$$

donde

$$\begin{aligned} 2A^{ab} = & \alpha(4KK^{ab} + \gamma^{ab}(K^2 - 4\mathcal{R})) + 2\beta(K^{ab} - \gamma^{ab}K) - \lambda\gamma^{ab} \\ 2B^b = & -2\alpha(\nabla_a K)(2K^{ab} - \gamma^{ab}K) \\ 2C = & \alpha(2\mathcal{R}^2 + 2K^4 - 5\mathcal{R}K^2 - 4\mathcal{G}_{ab}K^{ab}K) - 2\beta\mathcal{G}_{ab}K^{ab} + \lambda R + \sigma K \end{aligned} \quad (8.75)$$

Notamos que  $A^{ab}$  es simétrico. Sin embargo, el operador  $\mathcal{L}$  es no autoadjunto en general y  $\delta^2V$  sólo contribuye al coeficiente  $C$ .

## 8.5 Deformaciones en la Geometría de Superficies Encajadas

### 8.5.1 La Métrica y la Curvatura Extrínseca

Si generalizamos al caso de superficies embebidas en espacios con dimensiones mayores, algunos cambios importantes ocurren. Tenemos definido un tensor de curvatura extrínseca por cada vector normal a la superficie. Además de esto, aparece una forma normal o conexión para tomar en cuenta la invariancia de la geometría bajo rotaciones locales de los vectores normales.

Si procedemos como en el caso de hipersuperficies, proyectamos la deformación en sus partes normal y tangencial en la forma

$$\delta\mathbf{X} = \Phi^i\mathbf{n}_i + \Phi^a\mathbf{e}_a. \quad (8.76)$$

Por el momento supondremos que la superficie no tiene frontera así que la deformación tangencial puede ser asociada con una reparametrización. Las únicas deformaciones físicas son las normales a la superficie.

Examinemos cómo se deforma la base adaptada  $\{e_a, n^i\}$  bajo estas deformaciones normales. Tenemos

$$\delta_{\perp} e_a = (\tilde{\nabla}_a \Phi^i) n_i + \Phi^i K_{ia}{}^c e_c, \quad (8.77)$$

y

$$\tilde{\delta}_{\perp} n^i = -(\tilde{\nabla}^a \Phi^i) e_a, \quad (8.78)$$

donde hemos explotado la derivada covariante  $\tilde{\nabla}$  definida en la ec.(7.44). El tilde sobre el operador de deformación hace manifiesta la libertad de norma por rotar localmente los vectores normales ec.(7.44). Usando la ec.(8.77), es sencillo demostrar que la deformación de la métrica inducida es dada por

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} \gamma_{ab} &= (\delta_{\perp} e_a) \cdot e_b + e_a \cdot (\delta_{\perp} e_b) \\ &= 2K_{iab} \Phi^i. \end{aligned} \quad (8.79)$$

que es una generalización muy natural del resultado que encontramos para una hipersuperficie. Consideremos ahora la deformación de primer orden de la curvatura extrínseca. Tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{\perp} K_{ab}^i &= -(\tilde{\delta}_{\perp} n^i) \partial_a e_b - n^i \partial_a \delta_{\perp} e_b \\ &= -\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Phi^i + K_{ac}{}^i K^c{}_{bj} \Phi^j. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Como resultado, la deformación de la curvatura media es

$$\tilde{\delta}_{\perp} K^i = -\tilde{\Delta} \Phi^i - K_{ab}^i K^{ab}{}_j \Phi^j. \quad (8.81)$$

Contrario al caso correspondiente a hipersuperficies, aquí no es posible explotar las ecuaciones de Gauss-Codazzi para simplificar el término cuadrático. Para poder obtener perturbaciones de orden mayor, necesitamos determinar cómo es que el operador deformación  $\tilde{\delta}_{\perp}$  pasa a través de la derivada covariante de superficie  $\tilde{\nabla}_a$ , es decir, necesitamos una generalización del conmutador que encontramos en la sección anterior ec.(8.48). Tenemos

$$[\tilde{\delta}_{\perp}, \tilde{\nabla}_a] A_{bi} = -(\tilde{\delta}_{\perp} \gamma_{ab}^c) A_{ci} - (\delta_{\perp} \omega_{ai}{}^j) A_{bj}, \quad (8.82)$$

donde

$$\tilde{\delta}_{\perp} \omega_a^{ij} = K_{ab}^j \tilde{\nabla}^b \Phi^i - K_{ab}^i \tilde{\nabla}^b \Phi^j. \quad (8.83)$$

Para una densidad de superficie de la forma  $\sqrt{\gamma} A_{bi}$ , la variación del símbolo de Christoffel es cancelada y así tenemos el resultado

$$[\tilde{\delta}_{\perp}, \tilde{\nabla}_a] (\sqrt{\gamma} A_{bi}) = -\sqrt{\gamma} \delta_{\perp} (\omega_{ai}{}^j) A_{bj}. \quad (8.84)$$

que nos será de utilidad en la próxima sección.

### 8.5.2 Deformaciones de Escalares de Superficie

En la sección 7.2 mencionamos que uno de los invariantes de orden menor en la curvatura es cuadrático en  $K$ . No obstante, aún para codimensiones mayores es posible asociar un término de área a la membrana. Empecemos con este último. La deformación del determinante de la métrica es dado por

$$\tilde{\delta}_{\perp} \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma} K^i \Phi_i. \quad (8.85)$$

Como resultado tenemos

$$\tilde{\delta}_{\perp} A = \langle K^i \Phi_i \rangle. \quad (8.86)$$

A segundo orden, encontramos

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_\perp^2 \sqrt{\gamma} &= \bar{\delta}_\perp (\sqrt{\gamma} K^i) \Phi_i \\ &= \sqrt{\gamma} \left( -\Phi_i \bar{\Delta} \Phi^i + R^{ij} \Phi_i \Phi_j \right).\end{aligned}\quad (8.87)$$

donde hemos introducido la notación

$$R^{ij} = K^i K^j - K_{ab}^i K^{abj} \quad (8.88)$$

Notemos que la deformación de la densidad de curvatura media involucra  $R_{ij}$ :

$$\bar{\delta}_\perp (\sqrt{\gamma} K^i) = \sqrt{\gamma} \left( -\bar{\Delta} \Phi^i + R^{ij} \Phi_j \right), \quad (8.89)$$

y por lo tanto

$$\bar{\delta}_\perp^2 A = \left\langle \Phi_i \left\{ -\bar{\Delta}^{ij} + R^{ij} \right\} \Phi_j \right\rangle. \quad (8.90)$$

Consideremos ahora las variaciones de la curvatura media cuadrada. Como un paso intermedio, evaluamos la segunda variación de la densidad de curvatura media tomando una segunda variación en ec.(8.89)

$$\begin{aligned}\bar{\delta}^2 (\sqrt{\gamma} K^i) &= -\bar{\nabla}_a \bar{\delta}_\perp \left( \sqrt{\gamma} \bar{\nabla}^a \Phi^i \right) + \sqrt{\gamma} \left( K^l R^{ij} \Phi_l + \bar{\delta}_\perp R^{ij} \right) \Phi_j \\ &+ \sqrt{\gamma} \left( K_{ab}^j \bar{\nabla}^b \Phi^i - K_{ab}^i \bar{\nabla}^b \Phi^j \right) \bar{\nabla}^a \Phi_j.\end{aligned}\quad (8.91)$$

Aquí, hemos usado el conmutador (8.84) para pasar  $\bar{\delta}_\perp$  a través de la derivada que actúa  $\bar{\Delta} \Phi^i$ . Para completar el cálculo necesitamos la deformación de  $R^{ij}$ , este es dado por

$$\bar{\delta}_\perp R^{ij} = K_{ab}^i \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \Phi^j - K^i \bar{\Delta} \Phi^j + K_{bc}^i K^j_{ac} K_l^{ab} \Phi^l - K^i K_{ab}^l K_l^{ab} \Phi^j + (i \leftrightarrow j). \quad (8.92)$$

adicionalmente, con este resultado podemos obtener la variación de primer orden de la curvatura escalar de la superficie

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \mathcal{R} &= -2\mathcal{R}_{ab} K^{iab} \Phi_i + 2 \left( K_l K^{iab} - K^i K_l^{ab} \right) K_{ab}^l \Phi_i \\ &+ 2\bar{\nabla}^a \left( K_{ab}^i \bar{\nabla}^b \Phi_i - K^i \bar{\nabla}_a \Phi_i \right).\end{aligned}\quad (8.93)$$

ec.(8.93) es una generalización natural del resultado (8.17) derivado en la sección anterior. Para evaluar la deformación de  $\langle K^i K_i \rangle$ , explotamos la estratagema:

$$\bar{\delta}_\perp (\sqrt{\gamma} K^i K_i) = 2K^i \bar{\delta}_\perp (\sqrt{\gamma} K_i) - \sqrt{\gamma} K^i K_i K^j \Phi_j. \quad (8.94)$$

Tenemos

$$\bar{\delta}_\perp \langle K^i K_i \rangle = \left\langle -2K^j \bar{\Delta} \Phi_j + K_i (2R^{ij} - K^i K^j) \Phi_j \right\rangle \quad (8.95)$$

una expresión que coincide, como debe ser, con el resultado ec.(8.40), en el caso de hipersuperficies. Integrando por partes dos veces obtenemos

$$\bar{\delta}_\perp \langle K^i K_i \rangle = \left\langle \Phi_j \left( -2\bar{\Delta} K^j + (2R^{ij} - K^i K^j) \right) K_i \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_a V_1^a \right\rangle \quad (8.96)$$

donde  $V_1^a = 2\Phi_i \bar{\nabla}^a K^i - 2K_i \bar{\nabla}^a \Phi^i$ . Esta vez, tenemos  $D$  derivadas de Euler-Lagrange

$$\mathcal{E}^j [K^2] = -2\bar{\Delta} K^j + (2R^{ij} - K^i K^j) K_i \quad (8.97)$$

### 8.5.3 Euler-Lagrange para Codimensiones Mayores

El resultado de la sección anterior se puede expresar en la siguiente forma: dado el Hamiltoniano

$$H_2[X] = \alpha \langle K^i K_i \rangle + \lambda A \quad (8.98)$$

las derivadas de Euler-Lagrange correspondientes son

$$\mathcal{E}^j = -2\alpha \tilde{\Delta} K^j + \alpha (2R^{ij} - K^i K^j) K_i + \lambda K^j \quad (8.99)$$

## 8.6 Variacion de Segundo Orden

Ya hemos visto que para el termino de área, el cálculo de la segunda variación no ha tenido mayores complicaciones ec.(8.90), sin embargo, como a continuación veremos, la variación segunda del término cuadrático en la curvatura extrínseca requiere mayor trabajo.

A segundo orden podemos expresar el resultado en términos de las deformaciones que ya hemos calculado. Aplicando una segunda deformación en la ec.(8.94) tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} K^i K_i) &= 2K^i \delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} K_i) - \tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} K_i) K^i K_j \Phi^j \\ &\quad + (2\tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} K_i) - 2\sqrt{\gamma} K_i K^j \Phi_j) \tilde{\delta}_{\perp} K^i \\ &= \frac{2}{\sqrt{\gamma}} [\tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} K^i)]^2 + 2K^i \delta^2 (\sqrt{\gamma} K^i) - 4K^i K^j \Phi_j \tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} K^i) \\ &\quad - K^i K_i \Phi_j \tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} K^j) + 2\sqrt{\gamma} K^i K_i K^j K^l \Phi_j \Phi_l \end{aligned} \quad (8.100)$$

donde hemos empleado la notación  $(\tilde{\delta}_{\perp} f^i)^2 = (\tilde{\delta}_{\perp} f^i)(\tilde{\delta}_{\perp} f_i)$ . Si escribimos aquí los resultados dados por la ec.(8.89) y ec.(8.91) tenemos la expresión dada por

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} K^i K_i) &= -2K^i \{-\sqrt{\gamma} \tilde{\Delta} \Phi^i - \sqrt{\gamma} (K_{ab}^j \tilde{\nabla}^a \Phi_j \tilde{\nabla}^b \Phi^i - K_{ab}^i \tilde{\nabla}^a \Phi_j \tilde{\nabla}^b \Phi^j) \\ &\quad - \sqrt{\gamma} \Phi_j \tilde{\delta} R^{ij} - \sqrt{\gamma} K^l R^{ij} \Phi_l \Phi_j\} \\ &\quad + 2\sqrt{\gamma} (\tilde{\Delta} \Phi^i)^2 - 4\sqrt{\gamma} R^{il} \Phi_l \tilde{\Delta} \Phi_i - 2\sqrt{\gamma} R^{ij} R^{il} \Phi_j \Phi_l \\ &\quad + 4\sqrt{\gamma} K_i K^j \Phi_j (\tilde{\Delta} \Phi^i - R^{il} \Phi_l) \\ &\quad + \sqrt{\gamma} K_i K^i \Phi_j (\tilde{\Delta} \Phi^j - R^{jk} \Phi_k) + 2\sqrt{\gamma} K^i K_i K^j K^l \Phi_j \Phi_l \end{aligned} \quad (8.101)$$

y por lo tanto, substituyendo aquí la ec.(8.92) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} K^i K_i) &= \sqrt{\gamma} \{2 (\tilde{\Delta} \Phi^i)^2 + (4K_{ab}^i K_{ab}^j - 2K^i K^j) \Phi^j \tilde{\Delta} \Phi^i - K^i K_i \Phi_j \tilde{\Delta} \Phi^j \\ &\quad + 2K_i K_{ab}^i (\Phi_j \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b \Phi^j - \tilde{\nabla}^a \Phi^j \tilde{\nabla}^b \Phi^j) + 2K_i K_{ab}^j (\Phi_j \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b \Phi^i + \tilde{\nabla}^a \Phi^j \tilde{\nabla}^b \Phi^i) \\ &\quad + (K^i K_i K^j K^l - 4K^i K^l K_{iab} K^{jab} - K^i K_i K_{ab}^j K_l^{ab} + 2K_{ab}^i K_{cd}^i K^{jab} K^{lcd} \\ &\quad + 6K_i K_{ab}^i K^{acl} K_c^{jb} - 2K^{jab} K_b^{cl} K_{ac}^i K_i) \Phi_j \Phi_l\} \\ &\quad - 2K^i \tilde{\nabla}_a (\tilde{\delta}_{\perp} (\sqrt{\gamma} \tilde{\nabla}^a \Phi_i)) \end{aligned} \quad (8.102)$$

Este es el resultado crudo para la segunda variación del término cuadrático en la curvatura extrínseca.

### 8.6.1 Operador de Fluctuaciones

Para aislar una divergencia total, todavía nos falta un poco de trabajo, especialmente con el último término de la ec.(8.102). Empezamos desarrollando el término dentro del gradiente

$$\tilde{\delta}_\perp \left( \sqrt{\gamma} \tilde{\nabla}^a \Phi_i \right) = \left( \tilde{\delta}_\perp \sqrt{\gamma} \right) \tilde{\nabla}^a \Phi_i + \sqrt{\gamma} \left( \tilde{\delta}_\perp \gamma^{ab} \right) \tilde{\nabla}_b \Phi_i - \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \left( \tilde{\delta}_\perp \omega_{ai}{}^j \right) \Phi_j \quad (8.103)$$

donde hemos usado el conmutador ec.(8.84). Si ahora utilizamos la variación de la métrica y de la conexión ec.(8.83) podemos escribir

$$-K^i \tilde{\nabla}_a \left( \tilde{\delta}_\perp \left( \sqrt{\gamma} \tilde{\nabla}^a \Phi_i \right) \right) = \Phi_j C^{jk} \Phi_k + \tilde{\nabla}_b B^b \quad (8.104)$$

donde hemos identificado

$$C^{jk} = \left( \tilde{\nabla}_a K_i \right) \left( 2K^j \tilde{\nabla}^{aik} - 6K^{jab} \tilde{\nabla}_b^{ik} + 2K_c^{ai} \tilde{\nabla}^{cjk} \right) \quad (8.105)$$

$$B^b = -2K^i \tilde{\delta}_\perp \left( \sqrt{\gamma} \tilde{\nabla}^b \Phi_i \right) \quad (8.106)$$

en estas, hemos escrito explícitamente en los gradientes los subíndices normales de la conexión asociada ec.(7.44). Con este resultado, podemos integrar la ec.(8.102), si lo hacemos obtenemos

$$\delta_\perp^2 \langle K^i K_i \rangle = \langle \Phi_j H^{(2)jk} \Phi_k \rangle + \langle \tilde{\nabla}_a W^a \rangle \quad (8.107)$$

donde el operador de fluctuaciones que obtenemos es dado por

$$\begin{aligned} H^{(2)jk} &= 2 \left( \tilde{\Delta}^{jk} \right)^2 + (4K_{ab}^i K^{jab} - 2K^i K^j) \tilde{\Delta}^{ik} - K_i K^i \tilde{\Delta}^{jk} \\ &+ 4K_i K^{iab} \tilde{\nabla}_a{}^j \tilde{\nabla}_b^{lk} + 2\tilde{\nabla}^a (K^i K_{ab}^i) \tilde{\nabla}^{bjk} - 2\tilde{\nabla}^a (K^i K_{ab}^j) \tilde{\nabla}^{bik} \\ &+ 2 \left( \tilde{\nabla}_a K^i \right) K^j \tilde{\nabla}^{aik} - 6 \left( \tilde{\nabla}_a K^i \right) K^{abj} \tilde{\nabla}_b^{ik} + 2 \left( \tilde{\nabla}_a K^i \right) K_c^{ai} \tilde{\nabla}^{cjk} \\ &+ \left( K^i K_i K^j K^k - 4K^i K^k K_{iab} K^{jab} - K^i K_i K_{ab}^j K_k^{ab} + 2K_{ab}^i K_{cd}^j K^{jab} K^{kcd} \right. \\ &\left. + 6K_i K_{ab}^i K^{ack} K_c^{jb} - 2K^{jab} K_b^{ck} K_{ac}^i K_i \right) \end{aligned} \quad (8.108)$$

El rostro de este objeto se ve mejor si usamos las definiciones

$$R_{abcd}^{ij} = K_{ac}^i K_{bd}^j - K_{ad}^i K_{bc}^j \quad (8.109)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^{ij} = R_{ab}^{ij} - \frac{\gamma^{ab}}{2} R^{ij} \quad (8.110)$$

con lo que podemos escribir el operador en la forma

$$H^{(2)jk} (K^2) = 2 \left( \tilde{\Delta}^{jk} \right)^2 + A_i^j \tilde{\Delta}^{ik} + B^{ab} \tilde{\nabla}_a{}^j \tilde{\nabla}_b^{lk} + C^{bij} \tilde{\nabla}_b^{ik} + D^{jk} \quad (8.111)$$

donde los coeficientes son dados por ( $K^2 = K_i K^i$ )

$$\begin{aligned} A^{ij} &= 2K^i K^j - K^2 \delta^{ij} - 4R^{ij} \\ B^{ab} &= 4K_i K^{iab} \\ C^{bij} &= \left( 4(\tilde{\nabla}^a K^l) K_{ab}^l + 2(\tilde{\nabla}^b K^l) K_l \right) \delta^{ij} - 8K_{ab}^j (\tilde{\nabla}^a K^i) \\ &\quad - 2K^i (\tilde{\nabla}_b K^j) + 2K^j (\tilde{\nabla}^b K^i) \\ D^{jk} &= 2K^2 K^j K^k - K^2 R^{jk} - 4K^i K^j R^{ik} + 2R^{ij} R_i^k - 4\mathcal{G}^{bjk} K_i K^{iab} \end{aligned} \quad (8.112)$$

es fácil checar que este resultado coincide con aquél que encontramos para el caso de superficies. Por si mismo, el resultado expresado por vez primera en (8.111), es un logro que robustece la técnica que hemos usado. Finalmente, a pesar de que por ahora no estamos interesados en los términos de frontera, será útil

escribir explícitamente estos para cálculos posteriores. Se obtiene el siguiente resultado para  $W^a$  en la ec.(8.107)

$$\begin{aligned} W^a = & 2K^i (2K^{jab} - \gamma^{ab}K^j) \Phi_j \tilde{\nabla}_b \Phi_i + 2 (\tilde{\nabla}^a \Phi^i) \tilde{\Delta} \Phi_i - 2\Phi^i \tilde{\nabla}^a \tilde{\Delta} \Phi_i \\ & + 4K_b^{ja} (K^i \Phi_j - K_j \Phi^i) \tilde{\nabla}^b \Phi_i \end{aligned} \quad (8.113)$$

Sin duda, es útil comparar este resultado con el caso de codimensión uno ec.(8.73). Recapitulando esta sección podemos decir que el operador de fluctuaciones para un Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2} \langle K^i K_i \rangle + \lambda A \quad (8.114)$$

se puede escribir en la forma compacta

$$\mathcal{L}^{jk} = \frac{\alpha}{2} H^{(2)jk} + \lambda (-\tilde{\Delta}^{jk} + R^{jk}) \quad (8.115)$$

donde los objetos  $H^{(2)jk}$  y  $R^{jk}$  están definidos por las ecuaciones (8.111) y (8.88) respectivamente.

## 9 Coeficientes Efectivos a un Lazo

Como hemos visto en las primeras secciones de este trabajo, el objeto básico de la teoría de campos es la acción efectiva ya que a partir de esta es posible obtener en principio cualquier información física del modelo encapsulada en las funciones de correlación. Para evaluarla es necesario primero que nada, una expresión para la función de Green. Schwinger aplicó el método de tiempo-propio al cálculo de la acción efectiva a un lazo, De Witt reformuló este método en un lenguaje geométrico y lo aplicó al caso del campo gravitacional. Este es un método explícitamente covariante que resulta de mucha utilidad para regularizar términos divergentes [43, 44, 45, 46]. Veamos.

### 9.1 El Kernel de Calor

El kernel de calor para el operador  $\tilde{\Delta}$  satisface

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{\Delta} \right) K_{ij}(\xi, \xi', s) = 0, \quad (9.1)$$

sujeto a la condición inicial

$$K_{ij}(\xi, \xi', 0) = \gamma^{-1/2} \delta(\xi, \xi') \delta_{ij}. \quad (9.2)$$

La solución de ésta ecuación se puede escribir en la forma

$$K^{ij}(\xi, \xi', s) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-\frac{\sigma(\xi, \xi')}{2s}} \Omega^{ij}(\xi, \xi', s) \mathcal{D}^{1/2}(\xi, \xi') \quad (9.3)$$

donde  $\sigma(\xi, \xi')$  es la función de mundo, igual a un medio del cuadrado de la distancia entre los puntos  $\xi$  y  $\xi'$ ;  $\mathcal{D}(\xi, \xi')$  es el determinante de Van Vleck-Morette. En el límite  $s \rightarrow 0$ , la exponencial, normalizada por  $1/(4\pi s)^{d/2}$ , se reduce a una función delta. La función  $\Omega$  es regular en sus argumentos y se puede expandir como una serie de potencias en la forma

$$\Omega(\xi, \xi', s)^{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} s^l a_l^{ij}(\xi, \xi') \quad (9.4)$$

En el límite de coincidencia  $\xi \rightarrow \xi'$ , los primeros coeficientes  $a_l^{ij}$  son dados por

$$a_0^{ij} = \delta^{ij} \quad a_1^{ij} = \frac{\mathcal{R}}{6} \delta^{ij} \quad a_2^{ij} = \left( \frac{1}{180} (\mathcal{R}_{abcd}^2 - \mathcal{R}_{ab}^2) + \frac{\mathcal{R}^2}{72} + \frac{1}{30} \Delta \mathcal{R} \right) \delta^{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{abk}^i \Omega^{abkj} \quad (9.5)$$

escribir explícitamente estos para cálculos posteriores. Se obtiene el siguiente resultado para  $W^a$  en la ec.(8.107)

$$\begin{aligned} W^a = & 2K^i (2K^{jab} - \gamma^{ab}K^j) \Phi_j \tilde{\nabla}_b \Phi_i + 2 (\tilde{\nabla}^a \Phi^i) \tilde{\Delta} \Phi_i - 2\Phi^i \tilde{\nabla}^a \tilde{\Delta} \Phi_i \\ & + 4K_b^{ja} (K^i \Phi_j - K_j \Phi^i) \tilde{\nabla}^b \Phi_i \end{aligned} \quad (8.113)$$

Sin duda, es útil comparar este resultado con el caso de codimensión uno ec.(8.73). Recapitulando esta sección podemos decir que el operador de fluctuaciones para un Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2} \langle K^i K_i \rangle + \lambda A \quad (8.114)$$

se puede escribir en la forma compacta

$$\mathcal{L}^{jk} = \frac{\alpha}{2} H^{(2)jk} + \lambda (-\tilde{\Delta}^{jk} + R^{jk}) \quad (8.115)$$

donde los objetos  $H^{(2)jk}$  y  $R^{jk}$  están definidos por las ecuaciones (8.111) y (8.88) respectivamente.

## 9 Coeficientes Efectivos a un Lazo

Como hemos visto en las primeras secciones de este trabajo, el objeto básico de la teoría de campos es la acción efectiva ya que a partir de esta es posible obtener en principio cualquier información física del modelo encapsulada en las funciones de correlación. Para evaluarla es necesario primero que nada, una expresión para la función de Green. Schwinger aplicó el método de tiempo-propio al cálculo de la acción efectiva a un lazo, De Witt reformuló este método en un lenguaje geométrico y lo aplicó al caso del campo gravitacional. Este es un método explícitamente covariante que resulta de mucha utilidad para regularizar términos divergentes [43, 44, 45, 46]. Veamos.

### 9.1 El Kernel de Calor

El kernel de calor para el operador  $\tilde{\Delta}$  satisface

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{\Delta} \right) K_{ij}(\xi, \xi', s) = 0, \quad (9.1)$$

sujeto a la condición inicial

$$K_{ij}(\xi, \xi', 0) = \gamma^{-1/2} \delta(\xi, \xi') \delta_{ij}. \quad (9.2)$$

La solución de ésta ecuación se puede escribir en la forma

$$K^{ij}(\xi, \xi', s) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-\frac{\sigma(\xi, \xi')}{2s}} \Omega^{ij}(\xi, \xi', s) \mathcal{D}^{1/2}(\xi, \xi') \quad (9.3)$$

donde  $\sigma(\xi, \xi')$  es la función de mundo, igual a un medio del cuadrado de la distancia entre los puntos  $\xi$  y  $\xi'$ ;  $\mathcal{D}(\xi, \xi')$  es el determinante de Van Vleck-Morette. En el límite  $s \rightarrow 0$ , la exponencial, normalizada por  $1/(4\pi s)^{d/2}$ , se reduce a una función delta. La función  $\Omega$  es regular en sus argumentos y se puede expandir como una serie de potencias en la forma

$$\Omega(\xi, \xi', s)^{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} s^l a_l^{ij}(\xi, \xi') \quad (9.4)$$

En el límite de coincidencia  $\xi \rightarrow \xi'$ , los primeros coeficientes  $a_l^{ij}$  son dados por

$$a_0^{ij} = \delta^{ij} \quad a_1^{ij} = \frac{\mathcal{R}}{6} \delta^{ij} \quad a_2^{ij} = \left( \frac{1}{180} (\mathcal{R}_{abcd}^2 - \mathcal{R}_{ab}^2) + \frac{\mathcal{R}^2}{72} + \frac{1}{30} \Delta \mathcal{R} \right) \delta^{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{abk}^i \Omega^{abkj} \quad (9.5)$$

La correspondiente función de Green asociada con el Laplaciano puede entonces expandirse como

$$\hat{\Delta}^{-1}(\xi, \xi')^{ij} = - \int ds \langle \xi | e^{s\hat{\Delta}} | \xi' \rangle^{ij} \quad (9.6)$$

$$= - \int \frac{ds}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-\frac{\sigma(\xi, \xi')}{2s}} \sum_{l=0}^{\infty} s^l a_l^{ij}(\xi, \xi') \quad (9.7)$$

como hemos mencionado, podemos usar el kernel de calor para regularizar la traza que aparece en nuestro problema, procediendo como lo hacen Barvinsky y Vilkovisky [45]. Sea

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\Delta}^2 + \hat{\mathcal{A}}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b + \hat{\mathcal{B}}^a \hat{\nabla}_a + \hat{\mathcal{C}}, \quad (9.8)$$

el operador por regularizar, donde el gorro en estos objetos denotan índices normales para simplificar la notación. Por ahora dejaremos los coeficientes de ésta forma para luego identificarlos con el problema que estamos resolviendo. Este operador asume la forma genérica ec.(2.55) examinada en la sección (2.4) de [45]. Si expandemos el logaritmo obtenemos

$$\text{Tr} \log \mathcal{L} = 2\text{Tr} \log(-\hat{\Delta}) + \text{Tr} \hat{\mathcal{A}}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b (\hat{\Delta})^{-2} + \text{Tr} \hat{\mathcal{B}}^a \hat{\nabla}_a (\hat{\Delta})^{-2} + \dots \quad (9.9)$$

Para calcular explícitamente los términos que aparecen en ésta expresión notamos la identidad

$$\frac{1}{-\hat{\Delta} + m^2} = - \int_0^{\infty} ds e^{-s(-\hat{\Delta} + m^2)}, \quad (9.10)$$

por lo que, integrando respecto a  $m^2$  obtenemos y tomando  $m^2 = 0$  tenemos

$$\log(-\hat{\Delta}) = - \int \frac{ds}{s} e^{s\hat{\Delta}}. \quad (9.11)$$

Notemos que la traza sobre fluctuaciones en el rango entre  $k_{\min}, k_{\max}$  es implementada mediante la integración en la variable  $s$  en el rango  $k_{\max}^{-2}, k_{\min}^{-2}$ . Podemos escribir

$$\text{Tr} \log(-\hat{\Delta}) = - \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{ds}{(4\pi s)^{\frac{d}{2}}} s^{l-1} \langle [a_l^{ii}] \rangle, \quad (9.12)$$

donde hemos tomado el límite  $\xi \rightarrow \xi'$ , (las cantidades entre corchetes están evaluadas en el mismo punto) y los índices normales repetidos también suman. Para el siguiente término notemos que

$$\hat{\Delta}^{-2}(\xi, \xi') = \int \frac{ds}{(4\pi s)^{d/2}} s \exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right) \sum_{l=0}^{\infty} s^l \hat{a}_l(\xi, \xi'). \quad (9.13)$$

Por lo que podemos expresar la traza en el segundo término en la ec.(9.9) como

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{A}}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \hat{\Delta}^{-2} = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{ds s^{l+1}}{(4\pi s)^{d/2}} \langle [\hat{\mathcal{A}}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \{ \hat{a}_l \exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right) \}] \rangle \quad (9.14)$$

En el lado derecho de esta expresión debemos tomar en cuenta el hecho de que únicamente sobreviven los términos con dos derivadas en  $\sigma$ . Tenemos

$$[\hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b (\hat{a}_l \exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right))] = [\hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \hat{a}_l] - \frac{\gamma_{ab}}{2s} [\hat{a}_l]. \quad (9.15)$$

por lo que

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{A}}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \hat{\Delta}^{-2} = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{ds s^{l+1}}{(4\pi s)^{d/2}} \langle [\hat{\mathcal{A}}^{ab} (\hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \hat{a}_l - \frac{\gamma_{ab}}{2s} [\hat{a}_l])] \rangle \quad (9.16)$$

Al actuar una sola derivada en el tercer término de la ec.(9.9), no tendrá contribución a la acción efectiva.

## 9.2 Superficies Bidimensionales

### 9.2.1 Codimensión Uno

Estamos finalmente en posición de escribir los coeficientes renormalizados para superficies bidimensionales, tanto para codimensiones mayores a uno como para el caso en que el fondo es tridimensional. Veamos primero este último. Las expresiones por evaluar son la ec.(9.12) y (9.16). En dimensión dos los términos divergentes son dados por

$$\text{Tr} \log \left( -\widehat{\Delta} \right)_{div} = -\frac{A}{4\pi} \int \frac{ds}{s^2} - \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{\mathcal{R}}{6} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \quad (9.17)$$

donde  $A$  y  $\mathcal{R}$  son el área y la curvatura escalar de la superficie. También

$$\text{Tr} \left( \widehat{A}^{ab} \widehat{\nabla}_a \widehat{\nabla}_b \widehat{\Delta}^{-2} \right)_{div} = -\frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{A_a^a}{2} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \quad (9.18)$$

donde  $A_a^a$  es la traza del coeficiente del gradiente cuadrado en el operador de fluctuaciones, a saber

$$A_a^a = 6\alpha K^2 - 2\beta K - 8\alpha\mathcal{R} - 2\lambda \quad (9.19)$$

Un punto importante por decir, es que podemos escoger al parámetro de rigidez  $\alpha/T$  como aquél en el que estamos expandiendo, en este sentido, juega el papel de  $\hbar^{-1}$  de la mecánica cuántica. Por otro lado y con un fin de comparar nuestros resultados con aquellos encontrados en la literatura haremos en lo que sigue la identificación  $\alpha \rightarrow \alpha/2$ . Entonces, dado el Hamiltoniano de Helfrich

$$F = \frac{\alpha}{2} \langle K^2 \rangle + \beta \langle K \rangle + \lambda A + r \langle \mathcal{R} \rangle \quad (9.20)$$

a un lazo tenemos el resultado

$$F_{eff} = F + \frac{T}{2} \left( -\frac{A}{2\pi} \int \frac{ds}{s^2} - \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{\mathcal{R}}{6} \right\rangle \int \frac{ds}{s} - \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{3}{2} K^2 - \frac{\beta}{\alpha} K - \frac{\lambda}{\alpha} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \right) \quad (9.21)$$

$$+ \frac{T}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{R} \rangle \int \frac{ds}{s} \right) \quad (9.22)$$

y por lo tanto podemos identificar los parámetros efectivos:

$$\alpha_{eff} = \alpha - \frac{3T}{8\pi} \int_{\Lambda^{-2}}^{b^2/\Lambda^2} \frac{ds}{s} \quad (9.23)$$

$$\beta_{eff} = \beta + \frac{T}{8\pi} \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{ds}{s} \quad (9.24)$$

$$\lambda_{eff} = \lambda + \frac{T}{8\pi} \frac{\lambda}{\alpha} \int \frac{ds}{s} - \frac{T}{4\pi} \int \frac{ds}{s^2} \quad (9.25)$$

$$r_{eff} = r + \frac{T}{2} \frac{11}{24\pi} \int \frac{ds}{s} \quad (9.26)$$

### 9.2.2 Codimensiones Mayores

Para el caso de codimensiones mayores a uno, es decir, de superficies bidimensionales encajadas en  $R^{2+D}$  procedemos de idéntica manera, para este obtenemos

$$\text{Tr} \log \left( -\widehat{\Delta} \right)_{div} = -D \frac{A}{4\pi} \int \frac{ds}{s^2} - \frac{D}{4\pi} \left\langle \frac{\mathcal{R}}{6} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \quad (9.27)$$

y también

$$\text{Tr} \left( \widehat{A}^{ab} \widehat{\nabla}_a \widehat{\nabla}_b \widehat{\Delta}^{-2} \right)_{div} = -\frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{A_a^{aa}}{2} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \quad (9.28)$$

donde el objeto  $\widehat{A}^{ab}$  es un poco más complicado pues involucra índices normales, de las dos primeras expresiones en la ec.(8.112) tenemos

$$\mathcal{A}^{abij} = \alpha (\gamma^{ab} A^{ij} + 4K_l K^{lab} \delta^{ij}) - \lambda \gamma^{ab} \delta^{ij} \quad (9.29)$$

donde  $A^{ij}$  es dado por la primera expresión en ec.(8.112) y por lo tanto  $A^{ii} = (2-D)K^2 - 4\mathcal{R}$ . Otra vez, haciendo el cambio  $\alpha \rightarrow \alpha/2$  y tomando la misma constante de expansión que antes obtenemos

$$\text{Tr} \left( \widehat{A}^{ab} \widehat{\nabla}_a \widehat{\nabla}_b \widehat{\Delta}^{-2} \right)_{div} = -\frac{1}{4\pi} \left\langle (D+2)K^2 - \frac{\lambda}{\alpha} D - 4\mathcal{R} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \quad (9.30)$$

es decir, si el Hamiltoniano es de la forma

$$F = \frac{\alpha}{2} \langle K^i K_i \rangle + \lambda A + r \langle \mathcal{R} \rangle \quad (9.31)$$

a un lazo tenemos

$$F_{eff} = F + \frac{T}{2} \left( -D \frac{A}{2\pi} \int \frac{ds}{s^2} - \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{D+2}{2} K^2 - D \frac{\lambda}{\alpha} \right\rangle \int \frac{ds}{s} \right) \quad (9.32)$$

$$+ \frac{T}{2} \left( -\frac{D}{4\pi} \left\langle \frac{\mathcal{R}}{6} \right\rangle \int \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{R} \rangle \int \frac{ds}{s} \right) \quad (9.33)$$

y por lo tanto los coeficientes son

$$\alpha_{eff} = \alpha - \frac{(D+2)T}{8\pi} \int \frac{ds}{s} \quad (9.34)$$

$$\lambda_{eff} = \lambda + T \frac{D}{8\pi} \frac{\lambda}{\alpha} \int \frac{ds}{s} - T \frac{D}{4\pi} \int \frac{ds}{s^2} \quad (9.35)$$

$$r_{eff} = r - \frac{T(D-12)}{2 \cdot 24\pi} \int \frac{ds}{s} \quad (9.36)$$

que generalizan los anteriores resultados, que se obtienen al tomar  $D = 1$ . Estos resultados son de remarcar, es la primera vez que se obtienen sin hacer uso de variable auxiliares [48]. El coeficiente de la curvatura escalar tiene sentido solo en el caso en que hay cambios en la topología de la membrana, que no vamos a tomar en cuenta pero que sin embargo puede ser un resultado útil posteriormente.

### 9.2.3 Funciones Beta

Luego del trabajo realizado en estas secciones, tenemos los resultados que nos son necesarios para llevar a cabo la aplicación del GR a la Wilson-Kadanoff. Un breve resumen de este método lo hemos hecho en la sección (4.1). Veamos.

Dado que la dimensión de la rigidez de la membrana  $d$ -dimensional es  $L^{2-d}$ , con el resultado de la sección anterior podemos escribir para la rigidez

$$\alpha(b) = \alpha_0 - \frac{3T}{4\pi} \ln b - \varepsilon \alpha_0 \ln b \quad (9.37)$$

donde  $\varepsilon = 2 - d$ . Para la tensión superficial tenemos

$$\begin{aligned} \lambda(b) = & \lambda_0 - \frac{T}{4\pi} \left( \Lambda^2 - \frac{\Lambda^2}{b^2} \right) + \frac{T\lambda_0}{4\pi\kappa} \ln b + (2 - \varepsilon) \lambda_0 \ln b \\ & - (2 - \varepsilon) \frac{T}{4\pi} \left( \Lambda^2 - \frac{\Lambda^2}{b^2} \right) \ln b \end{aligned} \quad (9.38)$$

luego, para un cambio infinitesimal la función beta de la rigidez es

$$\frac{d\alpha(b)}{d \ln b} = -\frac{3T}{4\pi} - \varepsilon \alpha \quad (9.39)$$

y para la tensión superficial se encuentra

$$\frac{d\lambda(b)}{d \ln b} = 2\lambda + \frac{T}{4\pi} \frac{\lambda}{\alpha} \quad (9.40)$$

que coinciden con por ejemplo, los resultado en las referencia [54]. Un punto es de remarcar acerca de estas expresiones: dado que el cálculo es a orden de un lazo, estas son válidas solamente si los términos de orden  $T$  son pequeños. Es decir, la descripción es en la región que  $\alpha > T$  y  $\lambda > T\Lambda^2$ . El corte ultravioleta  $\Lambda$ , entra como una cantidad física microscópica que es inversamente proporcional al tamaño molecular. Soluciones de estas ecuaciones se muestran en las siguientes gráficas.

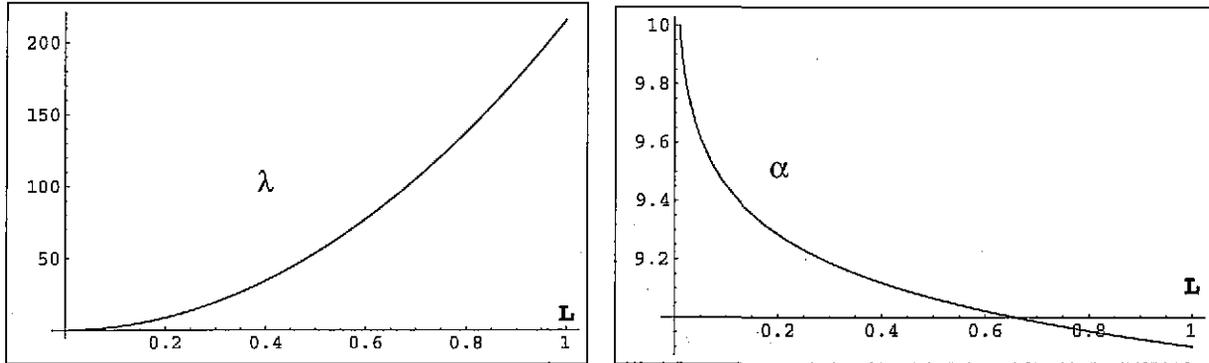


Figura 19: La gráfica a la izquierda muestra como para escalas grandes de longitud, la tensión superficial crece y domina. A la derecha observamos el comportamiento de la rigidez con la escala de longitud.

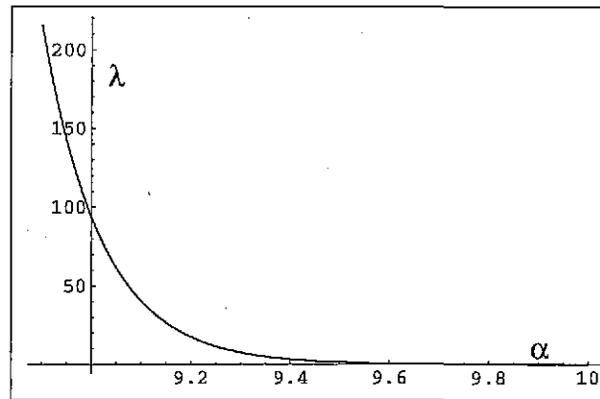


Figura 20: La gráfica muestra como para escalas grandes de longitud, la tensión superficial  $\lambda$  domina a la rigidez  $\alpha$ .

En dimensión dos el punto fijo es dado por  $\alpha^{-1} = 0$  estable en el ultravioleta, esto significa que en esta dimensión, no existe el régimen de rigidez total para escalas grandes de longitud: membranas bidimensionales están siempre en la fase de arrugado, para este caso podemos resolver la ecuación de flujo para la rigidez como

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{3T}{4\pi} \ln \frac{b}{b_0} \quad (9.41)$$

esta expresión relaciona un sistema de rigidez  $\alpha_0$  con otro sistema de rigidez  $\alpha$ . Las fluctuaciones térmicas en la forma de la membrana reducen la rigidez de la misma. En particular podemos ver que hay un sistema para el cual  $\alpha = 0$ , esto pasa a la escala  $b_c$  dada por

$$b_c = b_0 e^{\frac{4\pi\alpha_0}{3T}} \quad (9.42)$$

a esta escala no hay correlación alguna entre vectores normales vecinos en la membrana. No hay rigidez.

## 10 El Modelo 4-Dimensional

Uno de los resultados más importantes de la teoría de campos y en particular de los fenómenos críticos es el teorema de Mermin-Wagner-Coleman [47]. Conforme la dimensionalidad del espacio es menor, las fluctuaciones del parámetro de orden son más pronunciadas. Estas fluctuaciones actúan desordenando el sistema y por lo tanto provocan un corrimiento en la temperatura crítica del sistema, llevándola eventualmente a cero. Para el modelo de Ising, la dimensión en la que esto pasa es como sabemos  $d_c = 1$ . Para sistemas con simetría continua el efecto de las fluctuaciones es todavía más severo ya que el parámetro de orden puede cambiar su dirección con un costo muy pequeño en la energía interna. El resultado es que la dimensión crítica es mayor:  $d_c = 2$ . No puede haber un rompimiento espontáneo de una simetría continua para  $d \leq 2$ . (No obstante, el modelo XY en dimensión dos, presenta otro tipo de transición muy interesante debido a Kosterlitz-Thouless).

Este mismo tipo de argumento se puede aplicar a la física de membranas. En efecto, como hemos visto, por arriba de dimensión dos la membrana tiene dos posibilidades, o está en la fase de membrana plana muy rígida o lo está en la de arrugado total, esta última se puede interpretar como una fase en que la membrana de hecho ha dejado de serlo, para llenar el espacio en que vive. Esto significa que existe un punto fijo no trivial del GR que es inestable en el infarrojo. Por debajo y en dimensión dos no hay transición, solo existe la fase de arrugado y no hay correlación entre vectores normales vecinos de la membrana o en otras palabras, no hay ordenamiento de los mismos. Es decir, se satisface el teorema de Mermin-Wagner. Dadas estas observaciones, es válido preguntarse qué está pasando para membranas de dimensiones mayores. ¿Qué pasa -por ejemplo- para una membrana de dimensión cuatro?, en este caso el teorema no prohíbe en principio, que el modelo tenga un punto fijo no trivial. En dimensión cuatro el Hamiltoniano más general que podemos construir a partir de invariantes geométricos bajo reparametrizaciones (sección 8.1) tiene la siguiente estructura

$$H_{4d} = \sigma A + \kappa \langle K^2 \rangle + r \langle \mathcal{R} \rangle + \frac{\alpha_1}{2} \langle (\nabla K)^2 \rangle + \alpha_2 \langle K^4 \rangle \\ + \alpha_3 \langle \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} \rangle + \alpha_4 \langle \mathcal{R} K^2 \rangle + \alpha_5 \langle \mathcal{R}^2 \rangle \quad (10.1)$$

En este Hamiltoniano  $\sigma$  es el análogo de la tensión superficial, o puede verse como un término cosmológico de una teoría relativista,  $\kappa$  es el análogo de la rigidez de la membrana,  $r$  es el acoplamiento al escalar de curvatura. De los otros acoplamientos,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se pueden ver también como acoplamientos a terceros vecinos entre los normales a la superficie,  $\alpha_3$  y  $\alpha_5$  acoplan términos de curvatura intrínseca y  $\alpha_4$  acopla la geometría intrínseca con la extrínseca. Para estudiar la mecánica estadística de este modelo a orden de un lazo, primero necesitamos calcular el operador de fluctuaciones, esta es la parte larga del cálculo. Procedamos por partes para evitar cualquier fuente de confusión.

$$\bullet \delta_{\perp}^2 \langle (\nabla K)^2 \rangle$$

Empezamos tomando una primera variación

$$\delta_{\perp} (\sqrt{\gamma} (\nabla K)^2) = \sqrt{\gamma} \delta_{\perp} (\nabla K)^2 + (\delta_{\perp} \sqrt{\gamma}) (\nabla K)^2 \quad (10.2)$$

luego, al tomar una segunda deformación obtenemos

$$\delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} (\nabla K)^2) = 2(\delta_{\perp} \sqrt{\gamma}) \delta_{\perp} (\nabla K)^2 + (\delta_{\perp}^2 \sqrt{\gamma}) (\nabla K)^2 + \sqrt{\gamma} \delta_{\perp}^2 (\nabla K)^2 \quad (10.3)$$

necesitamos, en el primer término de la anterior

$$\delta_{\perp} (\nabla K)^2 = 2(\nabla^a K) \delta_{\perp} (\nabla_a K) \\ = 2(\nabla^a K) (-\nabla_a \Delta \Phi + (\mathcal{R} - K^2) \nabla_a \Phi + \nabla_a (\mathcal{R} - K^2) \Phi) \quad (10.4)$$

así como la segunda deformación  $\delta_{\perp}^2 (\nabla K)^2$ . Esta es directa si usamos el resultado

$$\delta_{\perp} \Delta \Phi = -2\Phi K^{ab} \nabla_a \nabla_b \Phi - 2K^{ab} (\nabla_a \Phi) (\nabla_b \Phi) - (\nabla^a K) \Phi (\nabla_a \Phi) + K (\nabla^a \Phi) (\nabla_a \Phi) \quad (10.5)$$

sustituyendo y luego de realizar varias integraciones por partes podemos escribir

$$\begin{aligned} & - 2\Delta^3 + 4(\mathcal{R} - K^2)\Delta^2 - (2K\Delta K + 2(\mathcal{R} - K^2)^2 + (\nabla K)^2) \Delta \\ & - (4K^{ab}(\Delta K) - 2(\nabla^a K)(\nabla^b K)) \nabla_a \nabla_b + 2(4K^{ac} \nabla_c K - \nabla_a K^2) \nabla^a \Delta \end{aligned} \quad (10.6)$$

como el operador de fluctuaciones correspondiente.

- $\delta_{\perp}^2 \langle K^4 \rangle$

Para este término podemos escribir la primera variación en la forma

$$\delta_{\perp} (\sqrt{\gamma} K^4) = \sqrt{\gamma} \delta_{\perp} K^4 + \delta_{\perp} \sqrt{\gamma} K^4 \quad (10.7)$$

al tomar una segunda variación nos queda

$$\delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} K^4) = \sqrt{\gamma} \delta_{\perp}^2 K^4 + 2\delta_{\perp} \sqrt{\gamma} \delta_{\perp} K^4 + K^4 \delta_{\perp}^2 \sqrt{\gamma} \quad (10.8)$$

en la que necesitamos calcular el término  $\delta_{\perp} K^4$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} K^4 &= 4K^3 \delta_{\perp} K \\ &= 4K^3 (-\Delta \Phi + (\mathcal{R} - K^2) \Phi) \end{aligned} \quad (10.9)$$

la expresión para  $\delta_{\perp}^2 K^4$  la calculamos en el apéndice. El operador de fluctuaciones para este caso resulta en

$$12K^2 \Delta^2 + (12(\Delta K^2) - 24K^2 \mathcal{R} + 19K^4) \Delta + 24(\nabla_a K^2) \nabla^a \Delta + 8K^3 K^{ab} \nabla_a \nabla_b \quad (10.10)$$

- $\delta_{\perp}^2 \langle \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} \rangle$

Tenemos

$$\delta_{\perp} (\sqrt{\gamma} \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) = \sqrt{\gamma} \delta_{\perp} (\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) + \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} \delta_{\perp} \sqrt{\gamma} \quad (10.11)$$

luego

$$\delta_{\perp}^2 (\sqrt{\gamma} \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) = \sqrt{\gamma} \delta_{\perp}^2 (\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) + 2\delta_{\perp} (\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) \delta_{\perp} \sqrt{\gamma} + (\delta_{\perp}^2 \sqrt{\gamma}) \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} \quad (10.12)$$

por lo tanto, debemos calcular una expresión para  $\delta_{\perp}^2 \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}$ . Otra vez, el cálculo es bastante largo pero sin mayor dificultad. Esta vez, el operador es dado por

$$\begin{aligned} & 2(K^2 - \mathcal{R}) \Delta^2 + (2\Delta(K^2 - \mathcal{R}) + 6K K_{ab} \mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} - 4\mathcal{R} K^2 + 4\mathcal{R}^2) \Delta \\ & + 2K^2 \nabla^b \Delta \nabla_b + (20\mathcal{R}^{bc} - 4K K^{bc}) \nabla_b \Delta \nabla_c + 4\nabla_a (K^2 - \mathcal{R}) \nabla^a \Delta \\ & + (8\nabla_c (\mathcal{R}^{ab} - K K^{ab}) + \nabla_a (20\mathcal{R}^{bc} - 4K K^{bc}) + 8\nabla_d (K^{db} K^{ac})) \nabla_c \nabla_a \nabla_b \\ & + (4\nabla^a K^2 + \nabla_b (20\mathcal{R}^{ab} - 4K K^{ab})) \Delta \nabla_a \\ & + (4\Delta (\mathcal{R}^{ab} - K K^{ab}) + \nabla_c \nabla_a (20\mathcal{R}^{cb} - 4K K^{cb}) + \nabla_d \nabla_c (K^{ac} K^{db}) + 2\nabla^b \nabla^a K^2) \nabla_a \nabla_b \\ & + (4K \mathcal{R} K^{ab} - 10\mathcal{R} \mathcal{R}^{ab} - 4K K_c^a \mathcal{R}^{cb} - 6K K^{cb} \mathcal{R}_c^a - 20K_c^a K^{db} \mathcal{R}_d^c - 2K^2 \mathcal{R}^{ab} \\ & + 4K^{cd} \mathcal{R}_{cd} K^{ab} + 4\mathcal{R}^{ac} \mathcal{R}_c^b) \nabla_a \nabla_b \\ & + 4(\mathcal{R}^{ab} - K K^{ab}) \Delta \nabla_a \nabla_b + 4K_c^a K^{bd} \nabla_b \nabla_a \nabla^c \nabla_d \end{aligned} \quad (10.13)$$

- $\delta_{\perp}^2 \langle \mathcal{R} K^2 \rangle$

Tenemos

$$\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}K^2) = \delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K^2)\mathcal{R} + \sqrt{\gamma}K^2\delta_{\perp}\mathcal{R} \quad (10.14)$$

y para la segunda deformación podemos escribir

$$\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}K^2) = \sqrt{\gamma}K^2\delta_{\perp}^2\mathcal{R} + 2\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}K^2)\delta_{\perp}\mathcal{R} + \mathcal{R}\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}K^2) \quad (10.15)$$

de esta manera, todo lo que necesitamos es tomar una segunda variación del escalar de curvatura

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2\mathcal{R} &= 2(\delta_{\perp}K^{ab})\nabla_a\nabla_b\Phi + 2K^{ab}\delta_{\perp}\nabla_a\nabla_b\Phi - 2(\delta_{\perp}K)\Delta\Phi - 2K\delta_{\perp}\Delta\Phi \\ &\quad - 2\delta_{\perp}(K_{ab}\mathcal{R}^{ab})\Phi \end{aligned} \quad (10.16)$$

y sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} & (10K^2 + 2\mathcal{R})\Delta^2 + (\Delta(10K^2 + 2\mathcal{R}) + 8K^4 - 9K^2\mathcal{R} + 8KK_{ab}\mathcal{R}^{ab} - 4\mathcal{R}^2)\Delta \\ & + (12K\mathcal{R}K^{ab} - 8K^3K^{ab} + 8K^2\mathcal{R}^{ab} - 8\Delta(KK^{ab}) - 2\nabla^b\nabla^aK^2)\nabla_a\nabla_b \\ & + 2\nabla_a(2\mathcal{R} + 10K^2)\nabla^a\Delta - 4\nabla^aK^2\Delta\nabla_a - 16\nabla_c(KK^{ab})\nabla^c\nabla_a\nabla_b \\ & - 8KK^{ab}\Delta\nabla_a\nabla_b - 2K^2\nabla^b\Delta\nabla_b \end{aligned} \quad (10.17)$$

•  $\delta_{\perp}^2(\mathcal{R}^2)$

Para este término cuadrático en la curvatura escalar tenemos

$$\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}^2) = \sqrt{\gamma}\delta_{\perp}\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2\delta_{\perp}\sqrt{\gamma} \quad (10.18)$$

para la primera variación. La segunda se da por

$$\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}^2) = \sqrt{\gamma}\delta_{\perp}^2\mathcal{R}^2 + 2(\delta_{\perp}\sqrt{\gamma})\delta_{\perp}\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2\delta_{\perp}^2\sqrt{\gamma} \quad (10.19)$$

de modo que el operador correspondiente se puede escribir como

$$\begin{aligned} & (4\mathcal{R} + 8K^2)\Delta^2 + (\Delta(4\mathcal{R} + 8K^2) + 16KK_{ab}\mathcal{R}^{ab} - 5\mathcal{R}^2)\Delta \\ & + (16\mathcal{R}\mathcal{R}^{ab} - 16K^{ab}K^{cd}\mathcal{R}_{cd} - 16\Delta(KK^{ab}) - 4\nabla^b\nabla^a\mathcal{R} + 8\nabla_c\nabla_d(K^{cd}K^{ab}))\nabla_a\nabla_b \\ & + 2\nabla_a(4\mathcal{R} + 8K^2)\nabla^a\Delta - 8\nabla^a\mathcal{R}\Delta\nabla_a - 16\nabla_a(K^{ab}K^{cd})\nabla_b\nabla_c\nabla_d - 16KK^{ab}\Delta\nabla_a\nabla_b \\ & - 4\mathcal{R}\nabla^b\Delta\nabla_b + 8K^{ab}K^{cd}\nabla_b\nabla_a\nabla_c\nabla_d \end{aligned} \quad (10.20)$$

•  $\delta_{\perp}^2(\mathcal{R})$

Para el término lineal en la curvatura escalar tenemos

$$\delta_{\perp}(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}) = \sqrt{\gamma}\delta_{\perp}\mathcal{R} + (\delta_{\perp}\sqrt{\gamma})\mathcal{R} \quad (10.21)$$

y para la segunda variación podemos escribir

$$\delta_{\perp}^2(\sqrt{\gamma}\mathcal{R}) = \sqrt{\gamma}\delta_{\perp}^2\mathcal{R} + 2(\delta_{\perp}\sqrt{\gamma})\delta_{\perp}\mathcal{R} + \mathcal{R}\delta_{\perp}^2\sqrt{\gamma} \quad (10.22)$$

utilizando

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2\mathcal{R} &= 2(\Delta\Phi)^2 - 4(\mathcal{R} - K^2)\Phi\Delta\Phi + (12\mathcal{R}^{ab} - 4KK^{ab})\Phi\nabla_a\nabla_b\Phi \\ &\quad - 2\mathcal{R}(\nabla^c\Phi)(\nabla_c\Phi) + 4\mathcal{R}^{bc}(\nabla_b\Phi)(\nabla_c\Phi) - 2(\nabla^a\nabla^b\Phi)(\nabla_a\nabla_b\Phi) \end{aligned} \quad (10.23)$$

obtenemos

$$2\Delta^2 - 3\mathcal{R}\Delta + 8\mathcal{R}^{ab}\nabla_a\nabla_b - 2\nabla^a\Delta\nabla_a + (\mathcal{R}^2 - 4KK^{ab}R_{ab}) \quad (10.24)$$

• Tensión Superficial y Rigidez

Para complementar el cálculo, reescribamos el operador para el término de área

$$\delta_{\perp}^2\langle 1 \rangle = -\Delta + \mathcal{R} \quad (10.25)$$

y para la rigidez  $\delta_{\perp}^2\langle K^2 \rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} & 2\Delta^2 + ((K^2 - 4\mathcal{R})\gamma^{ab} + 4KK^{ab})\nabla_a\nabla_b - 2(\nabla_aK)(2K^{ab} - \gamma^{ab}K)\nabla_b \\ & + (2\mathcal{R}^2 + 2K^4 - 5\mathcal{R}K^2 - 4\mathcal{G}_{ab}K^{ab}K) \end{aligned} \quad (10.26)$$

### 10.1 Regularización

De los resultados de la sección anterior es posible observar que el modelo 4-dimensional arroja un operador de segundo orden que tiene la forma genérica dada por

$$\mathcal{L} = 2(-\Delta)^3 + A^{abcd}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d + B^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c + C^{ab}\nabla_a\nabla_b + \dots, \quad (10.27)$$

Como hicimos en la sección 10.1 para el caso bidimensional, si expandemos el logaritmo natural obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr log } \mathcal{L} &= 3\text{Tr log}(-\Delta) + \text{Tr } A^{abcd}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d(-\Delta)^{-3} + \text{Tr } B^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c(-\Delta)^{-3} \\ &\quad + \text{Tr } C^{ab}\nabla_a\nabla_b(-\Delta)^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (10.28)$$

El primer término en ésta expresión es dado por

$$\begin{aligned} \text{Tr log}(-\Delta) &= -\int \frac{ds}{s} \text{Tr } e^{s\Delta} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{ds}{s^3} \sum_{l=0}^{\infty} \langle [a_l] \rangle \\ &= -\sum_{l=0}^{\infty} J_{3-l} \langle [a_l] \rangle, \end{aligned} \quad (10.29)$$

donde hemos definido las integrales

$$J_n = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\frac{1}{k_{\text{max}}^2}}^{\frac{1}{k_{\text{min}}^2}} \frac{ds}{s^n}. \quad (10.30)$$

De esta manera, uno puede escribir la parte divergente en la forma

$$\text{Tr log}(-\Delta)_{div} = -\langle [a_0] \rangle J_3 - \langle [a_1] \rangle J_2 - \langle [a_2] \rangle J_1. \quad (10.31)$$

Por otra parte notemos que

$$(-\Delta)^{-3} = -\frac{1}{2} \int ds s^2 e^{\Delta s}, \quad (10.32)$$

o mejor aún, en términos de las coordenadas  $\xi$

$$(-\Delta)^{-3}(\xi, \xi') = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int ds \exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right) \sum_{l=0}^{\infty} s^l a_l(\xi, \xi'). \quad (10.33)$$

Con esta, podemos calcular los términos que contienen gradientes. Veamos primero el término con dos derivadas

$$\text{Tr}(C^{ab}\nabla_a\nabla_b(-\Delta)^{-3}) = -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \int ds s^l \langle [C^{ab}\nabla_a\nabla_b \{a_l \exp(-\frac{\sigma}{2s})\}] \rangle, \quad (10.34)$$

tenemos

$$\exp\left(\frac{\sigma}{2s}\right) \nabla_a\nabla_b \left\{ a_l \exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right) \right\} = -\frac{1}{2s} \sigma_{ab} a_l + \frac{1}{(2s)^2} \sigma_a \sigma_b a_l - \frac{1}{2s} (\sigma_a \nabla_b a_l + \sigma_b \nabla_a a_l) + \nabla_a \nabla_b a_l, \quad (10.35)$$

por lo que, al tomar el límite de puntos iguales

$$[\nabla_a \nabla_b \{a_l \exp(-\frac{\sigma}{2s})\}] = -\frac{1}{2s} \gamma_{ab} [a_l] + [\nabla_a \nabla_b a_l]. \quad (10.36)$$

Así la parte divergente se puede expresar simplemente como

$$\text{Tr}(C^{ab}\nabla_a\nabla_b(-\Delta)^{-3})_{div} = \frac{1}{4} C^a_a J_1. \quad (10.37)$$

Enseguida tenemos

$$\text{Tr}(B^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c(-\Delta)^{-3}) = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(4\pi)^2}\int ds s^l\langle [B^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\{a_l\exp(-\frac{\sigma}{2s})\}]\rangle. \quad (10.38)$$

por lo que, luego de diferenciar tres veces obtenemos

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\sigma}{2s}\right)\nabla_a\nabla_b\nabla_c\{a_l\exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right)\} &= -\frac{1}{2s}\sigma_{abc}a_l + \frac{1}{(2s)^2}(\sigma_{ac}\sigma_b + \dots)a_l \\ &\quad -\frac{1}{(2s)^3}\sigma_a\sigma_b\sigma_c a_l - \frac{1}{2s}(\sigma_{ab}\nabla_c a_l + \dots) + \frac{1}{(2s)^2}(\sigma_a\sigma_b\nabla_c a_l + \dots) \\ &\quad -\frac{1}{2s}(\sigma_a\nabla_b\nabla_c a_l + \dots) + \nabla_a\nabla_b\nabla_c a_l, \end{aligned} \quad (10.39)$$

y usando el resultado  $[\sigma_{abc}] = 0$ , obtenemos, en el mismo límite

$$[\nabla_a\nabla_b\nabla_c\{a_l\exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right)\}] = [\nabla_a\nabla_b\nabla_c a_l]. \quad (10.40)$$

De esta manera, términos con tres derivadas no contribuyen a la acción efectiva

$$\text{Tr}(B^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c(-\Delta)^{-3})_{div} = 0. \quad (10.41)$$

Finalmente, para el término con cuatro derivadas tenemos

$$\text{Tr}A^{abcd}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d\Delta^{-3} = -\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(4\pi)^2}\int ds s^l\langle [A^{abcd}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d\{a_l\exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right)\}]\rangle. \quad (10.42)$$

Dado que sobreviven solo términos con derivadas pares en la función  $\sigma$  obtenemos

$$\begin{aligned} [\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d\{a_l\exp\left(-\frac{\sigma}{2s}\right)\}] &= -\frac{1}{2s}[\sigma_{abcd}][a_l] + \left(\frac{1}{2s}\right)^2(\gamma_{ab}\gamma_{cd} + \gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc})[a_l] \\ &\quad -\frac{1}{2s}(\gamma_{ab}\nabla_c\nabla_d a_l + \dots) + [\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d a_l], \end{aligned} \quad (10.43)$$

adicionalmente, podemos ver que

$$[\sigma_{abcd}] = -\frac{1}{3}(\mathcal{R}_{abcd} + \mathcal{R}_{adbc}) \equiv S_{abcd}, \quad (10.44)$$

Así, uno puede escribir la parte divergente de éste término en la forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}A^{abcd}\nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d\Delta^{-3}|_{div} &= \frac{1}{4}\langle A^{abcd}S_{abcd}\rangle J_1 - \frac{1}{8}\langle A^{abcd}(\gamma_{ab}\gamma_{cd} + \gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc})\rangle (J_2 + [a_1]J_1) \\ &\quad -\frac{1}{4}\langle A^{abcd}(\gamma_{ab}[\nabla_c\nabla_d a_0] + \gamma_{cb}[\nabla_a\nabla_d a_0] + \dots)\rangle J_1. \end{aligned} \quad (10.45)$$

## 10.2 Acoplamiento Efectivos

A un lazo, podemos escribir la acción efectiva como

$$H_{eff} = H_{4d} + \frac{1}{2}\text{Tr}\log H^{(2)} \quad (10.46)$$

donde  $H_{4d}$  es dado por la ec.(10.1) y  $H^{(2)}$  es el operador de fluctuaciones de la teoría. Necesitamos primeramente la expresión para  $\text{Tr}\log(-\Delta)$  dada por la ec.(10.1), donde aparecen los coeficientes ec.(9.5). Sin embargo, la ecuación para  $[a_2]$  no es de utilidad escrita de esta forma, si usamos la identidad ec.(7.19) tenemos

$$\mathcal{R}^{abcd}\mathcal{R}_{abcd} = 2\mathcal{R}^2 - 2K^2\mathcal{R} + 4KK^{ab}\mathcal{R}_{ab} - 2\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab}, \quad (10.47)$$

y por lo tanto, podemos expresar a este orden (módulo una divergencia total dada por el invariante topológico (7.8), la siguiente forma para el coeficiente  $a_2$

$$[a_2] = \frac{\mathcal{R}^2}{120} + \frac{\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab}}{60}. \quad (10.48)$$

Con este resultado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{Tr}\log H^{(2)} &= -\frac{1}{16}\frac{2\kappa}{\alpha_1}(2d^2 + 4d)AJ_2 + \frac{1}{8}\frac{\kappa}{\alpha_1}(4+d)\langle K^2 \rangle J_1 - \frac{1}{8}\frac{\sigma}{\alpha_1}dAJ_1 \\ &- \frac{3}{2}AJ_3 - \frac{3}{2}\frac{1}{120}\langle \mathcal{R}^2 \rangle J_1 - \frac{3}{2}\frac{1}{60}\langle \mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab} \rangle J_1 \\ &+ \frac{1}{8}\langle A^{abcd}S_{abcd} \rangle J_1 - \frac{1}{16}\langle A^{abcd}(\gamma_{ab}\gamma_{cd} + \gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc}) \rangle J_2 \\ &- \frac{1}{16}\langle A^{abcd}(\gamma_{ab}\gamma_{cd} + \gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc})[a_1] \rangle J_1 - \frac{1}{8}\langle A^{abcd}(\gamma_{ab}[\nabla_c\nabla_d a_0] + \dots) \rangle J_1 \\ &+ \frac{1}{8}\langle C^{ab}\gamma_{ab} \rangle J_1, \end{aligned} \quad (10.49)$$

donde

$$[\nabla_c\nabla_d a_0] = \frac{\mathcal{R}_{cd}}{6}, \quad (10.50)$$

es la contribución debido al determinante de Van Vleck-Morette. Los otros objetos que necesitamos son la contracción del coeficiente en el término de dos gradientes

$$\begin{aligned} C_a^a &= -\sigma d + (8 - 3d)r\mathcal{R} + \kappa(4 + d)K^2 \\ &+ (6 + d)\alpha_1(\nabla K)^2 + \left(-2\alpha_1 d + \alpha_3(4d - 10) - 4\alpha_4 d + (16 - 5d)\alpha_5\right)\mathcal{R}^2 \\ &+ \left(4\alpha_1 d - 24\alpha_2 d - \alpha_3 4d + \alpha_4(20 - 9d)\right)\mathcal{R}K^2 \\ &+ \left(-2\alpha_1 d + (8 + 19d)\alpha_2 + \alpha_4(8d - 8)\right)K^4 \\ &+ \left(\frac{3}{2}(6d - 26)\alpha_3 + \frac{3}{2}d\alpha_4 + \frac{3}{16}(6d - 16)\alpha_5\right)\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab} \end{aligned} \quad (10.51)$$

y también el coeficiente de cuatro índices dado por

$$\begin{aligned} A^{abcd} &= 2\kappa\gamma^{ab}\gamma^{cd} + 2r(\gamma^{ab}\gamma^{cd} - \gamma^{ad}\gamma^{bc}) \\ &+ \left((4\alpha_1 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5)\gamma^{ab}\gamma^{cd} - 4\alpha_5\gamma^{ad}\gamma^{bc}\right)\mathcal{R} \\ &+ \left((-4\alpha_1 + 12\alpha_2 + 2\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5)\gamma^{ab}\gamma^{cd} + (2\alpha_3 - 2\alpha_4)\gamma^{ad}\gamma^{bc}\right)K^2 \\ &+ \left((-4\alpha_3 - 8\alpha_4 - 16\alpha_5)KK^{cd} + (4\alpha_3)\mathcal{R}^{cd}\right)\gamma^{ab} \\ &+ \alpha_3(20\mathcal{R}^{ad} - 4KK^{ad})\gamma^{bc} + 4\alpha_3K^{ad}K^{bc} + 8\alpha_5K^{ab}K^{cd} \end{aligned} \quad (10.52)$$

Insertando estos resultados podemos escribir finalmente la acción efectiva a un lazo en la forma

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \sigma_{eff}A + \kappa_{eff}\langle K^2 \rangle + r_{eff}\langle \mathcal{R} \rangle + \frac{\alpha_1^{eff}}{2}\langle (\nabla K)^2 \rangle + \alpha_2^{eff}\langle K^4 \rangle \\ &+ \alpha_3^{eff}\langle \mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} \rangle + \alpha_4^{eff}\langle \mathcal{R}K^2 \rangle + \alpha_5^{eff}\langle \mathcal{R}^2 \rangle \end{aligned} \quad (10.53)$$

donde los coeficientes efectivos a un lazo son dados por

$$\sigma_{eff} = \sigma - \frac{6\kappa}{\alpha_1} J_2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\alpha_1} J_1 - \frac{3}{2} J_3 \quad (10.54)$$

$$\kappa_{eff} = \kappa + \frac{\kappa}{\alpha_1} J_1 + 6J_2 - \frac{1}{16} \left( 288 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 60 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + 144 \frac{\alpha_4}{\alpha_1} + 120 \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) J_2 \quad (10.55)$$

$$r_{eff} = r + \frac{5}{2} \frac{r}{\alpha_1} J_1 - \frac{1}{16} \left( 96 + 88 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + 48 \frac{\alpha_4}{\alpha_1} - 16 \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) J_2 \quad (10.56)$$

$$\alpha_1^{eff} = \alpha_1 + \frac{5}{2} J_1 \quad (10.57)$$

$$\alpha_2^{eff} = \alpha_2 + \left( -1 + \frac{21}{2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 3 \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \right) J_1 \quad (10.58)$$

$$\alpha_3^{eff} = \alpha_3 + \left( \frac{1}{40} + \frac{119}{24} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{3}{4} \frac{\alpha_4}{\alpha_1} + \frac{29}{3} \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) J_1 \quad (10.59)$$

$$\alpha_4^{eff} = \alpha_4 + \left( -\frac{1}{3} - 16 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{37}{12} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{3}{4} \frac{\alpha_4}{\alpha_1} - \frac{29}{3} \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) J_1 \quad (10.60)$$

$$\alpha_5^{eff} = \alpha_5 + \left( -\frac{201}{80} + \frac{19}{24} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{143}{24} \frac{\alpha_4}{\alpha_1} - \frac{11}{12} \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) J_1 \quad (10.61)$$

estos resultados se presentan por vez primera para este modelo.

### 10.3 Funciones Beta

Encontremos las ecuaciones  $\beta$  o de flujo para los acoplamientos. Empecemos con la tensión superficial. Dado que la dimensión es dada por  $[\sigma] = L^{-d}$  tenemos, en términos del parámetro  $b$  de reescalamiento la relación  $\sigma(b) = b^d \sigma_{eff}$ . Sustituyendo en esta el resultado para la tensión efectiva a un lazo que encontramos y tomando un cambio infinitesimal en  $b$  tenemos la ecuación de flujo para  $\sigma$

$$\frac{d\sigma}{d \ln b} = 4\sigma - 12T \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \frac{\kappa}{\alpha_1} - \frac{T}{16\pi^2} \frac{\sigma}{\alpha_1} \quad (10.62)$$

Para el coeficiente de rigidez tenemos  $[\kappa] = L^{2-d}$  de modo que  $\kappa(b) = b^{d-2} \kappa_{eff}$ , tenemos que el flujo es dado por

$$\frac{d\kappa}{d \ln b} = 2\kappa + \frac{T}{8\pi^2} \frac{\kappa}{\alpha_1} - \frac{\Lambda^2}{8} \frac{T}{16\pi^2} \left( 288 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 60 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + 144 \frac{\alpha_4}{\alpha_1} + 20 \frac{\alpha_5}{\alpha_1} \right) \quad (10.63)$$

Para los coeficientes  $\alpha_i$  tenemos  $[\alpha_i] = L^{d-4} \alpha_{eff}$ . En particular para  $\alpha_1$  el flujo es dado por la ecuación

$$\frac{d\alpha_1}{d \ln b} = \frac{5T}{16\pi^2} \quad (10.64)$$

Para el resto de los acoplamientos, las ecuaciones de flujo están dadas por

$$\frac{dr}{d \ln b} = 2r + \frac{5T}{16\pi^2} \frac{r}{\alpha_1} - \frac{T\Lambda^2}{8} \frac{1}{16\pi^2} (96 + 88\alpha_3 + 48\alpha_4 - 16\alpha_5) \frac{1}{\alpha_1} \quad (10.65)$$

$$\frac{d\alpha_2}{d \ln b} = -\frac{T}{8\pi^2} + \frac{T}{8\pi^2} \left( \frac{21}{2} \alpha_2 + 3\alpha_4 \right) \frac{1}{\alpha_1} \quad (10.66)$$

$$\frac{d\alpha_3}{d \ln b} = \frac{1}{20} \frac{T}{16\pi^2} + \frac{T}{8\pi^2} \left( \frac{119}{24} \alpha_3 + \frac{3}{4} \alpha_4 + \frac{29}{3} \alpha_5 \right) \frac{1}{\alpha_1} \quad (10.67)$$

$$\frac{d\alpha_4}{d \ln b} = \frac{1}{3} \frac{T}{8\pi^2} - \frac{T}{8\pi^2} \left( 16\alpha_2 + \frac{37}{12} \alpha_3 + \frac{3}{4} \alpha_4 + \frac{29}{3} \alpha_5 \right) \frac{1}{\alpha_1} \quad (10.68)$$

$$\frac{d\alpha_5}{d \ln b} = -\frac{201}{40} \frac{T}{16\pi^2} + \frac{T}{8\pi^2} \left( \frac{19}{24} \alpha_3 - \frac{143}{24} \alpha_4 - \frac{11}{12} \alpha_5 \right) \frac{1}{\alpha_1} \quad (10.69)$$

Una región interesante es aquella en la que el coeficiente  $\alpha_1$  es mucho más grande que los coeficientes  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  y que  $\alpha_5$ . Para escalas de longitud grandes el término de tensión superficial es el dominante. Para escalas suficientemente pequeñas, la rigidez empieza a ser importante. Aquí hay los siguientes posibles escenarios. Sea la escala inicial suficientemente pequeña, digamos  $l_0 \sim .001$ :

- Si  $\kappa^o \ll l_0$ ,  $\alpha_2^o \ll l_0$  la rigidez crece con valores positivos, por su parte  $\alpha_2$  se mantiene cuasiconstante aunque con un valor negativo.
- Si  $\kappa^o \gg l_0$ ,  $\alpha_2^o \gg l_0$  la rigidez crece con valores positivos y  $\alpha_2$  se mantiene cuasiconstante pero con un valor positivo.
- Si  $\kappa^o \gg l_0$ ,  $\alpha_2^o \ll l_0$  la rigidez crece con números positivos mientras que  $\alpha_2$  es una cuasiconstante negativa.
- Si  $\kappa^o \ll l_0$ ,  $\alpha_2^o \gg l_0$  la rigidez crece pero ahora negativamente mientras que  $\alpha_2$  se mantiene casi constante (positiva).

Es de llamar la atención el comportamiento negativo de la rigidez en el último de los casos. Dado que el cálculo es a orden de un alzo, son el segundo y el último casos los que son físicamente posibles dado que el valor inicial de los acoplamientos, debe ser mucho mayor que uno, o en otras, a este orden se debe satisfacer el que  $\alpha_i > T$ . Los términos de orden de  $T$  deben ser pequeños.

En el segundo caso, los que tenemos es una membrana que a escalas de longitud pequeñas es rígida, conforme esta escala es más grande esta rigidez se va perdiendo hasta que llegamos a una configuración de rigidez despreciable, donde la membrana llena el espacio en que vive. En el último lo que tenemos es una membrana que a escalas suficientemente pequeñas se ve con muchos pliegues, para escalas mayores domina el término de tensión superficial.

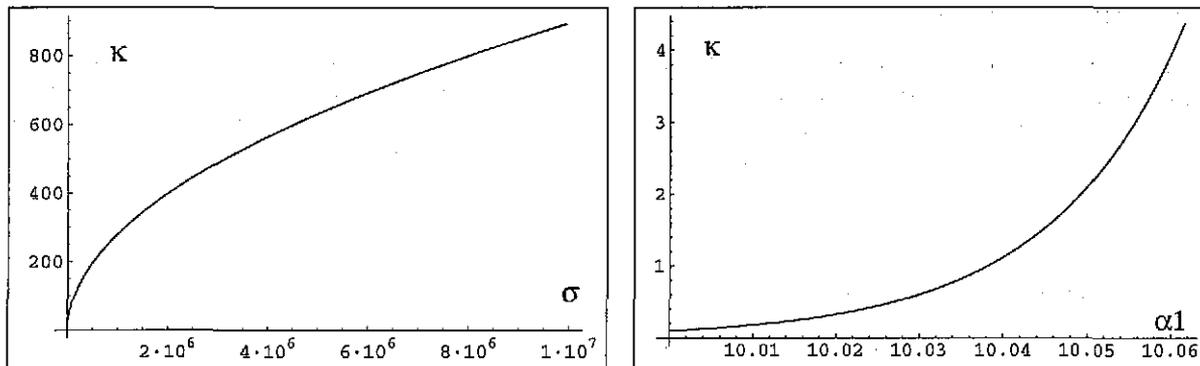


Figura 21: La figura de la izquierda muestra que para escalas suficientemente grandes, la tensión superficial domina sobre la rigidez, no obstante, si la escala de longitud es pequeña se puede observar una región en que la rigidez toma importancia. A la derecha se muestra como es que en la región donde la rigidez es importante, el coeficiente  $\alpha_1$  permanece con un valor prácticamente constante.

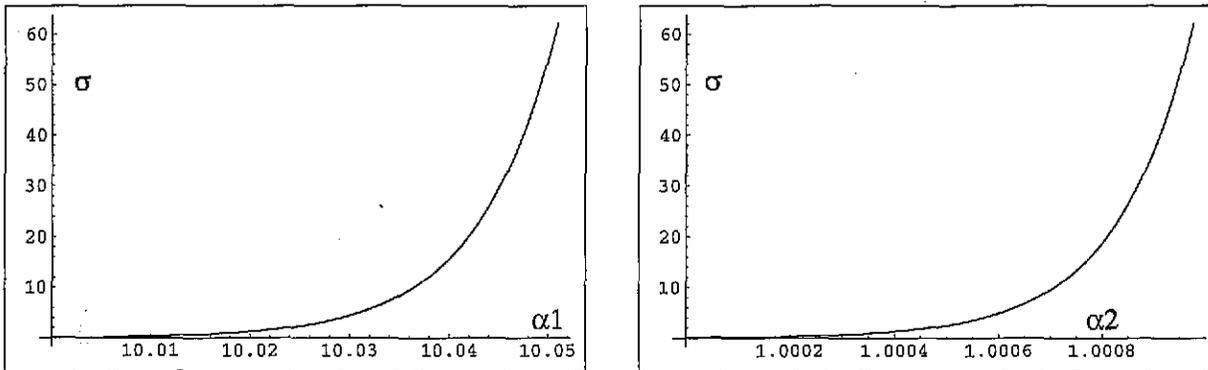


Figura 22: Las gráficas muestran que mientras los acoplamientos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  permanecen en un valor constante, la tensión superficial crece y domina.

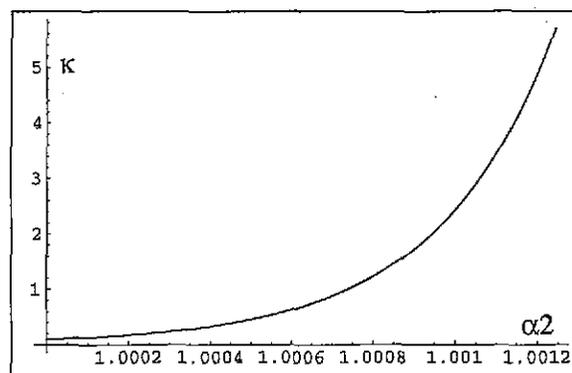


Figura 23: En la región en que la rigidez es importante el coeficiente  $\alpha_2$  es cuasiconstante.



## 11 Conclusiones

A continuación se enumeran los principales resultados que se presentan en este trabajo. Hasta donde nosotros sabemos, cada uno de ellos representa una aportación original.

- Usando el *Grupo de Renormalización Ambientalmente Amigable* hemos analizado la ecuación de estado para el modelo  $O(N)$ . Esto lo hacemos mediante la integración a lo largo de curvas de magnetización constante  $\bar{\varphi}$  en el espacio de fase. La ecuación de estado resultante queda parametrizada en términos del inverso de la longitud de correlación transversal que está bien definida en este espacio. Sobre la curva de coexistencia, esta cantidad se anula, lo que conduce naturalmente a determinar el corrimiento de la temperatura crítica  $\Delta_{\bar{\varphi}}$ . Nuestra representación es válida, para valores grandes y pequeños de las variables de escalamiento. Con esto hemos logrado capturar el entrecruzamiento entre los puntos fijos de Wilson-Fisher y de acoplamiento fuerte asociado con los bosones de Goldstone. Damos expresiones explícitas a un lazo para el acoplamiento y las funciones de Wilson, en todas ellas se muestra el entrecruzamiento de manera uniforme. En el límite de alta temperatura nuestra expresión para la ecuación de estado cumple la condición de analiticidad de Griffiths. Haciendo expansión en  $\epsilon$ , se reproducen los resultados estándar conocidos. Mostramos gráficas para el acoplamiento, las funciones de Wilson y la ecuación de estado a un lazo. Estos resultados muestran que la descripción que estamos haciendo es correcta.
- Utilizando el mismo formalismo nos ha sido posible capturar a orden de un lazo el entrecruzamiento dimensional para el modelo Sigma no-lineal sobre una película de dimensión  $d$  y grosor  $L$ , con condiciones de frontera periódicas. Utilizando una renormalización explícitamente dependiente de  $L$  hemos derivado, a orden de un lazo, fórmulas para la dimensión anómala del campo de Goldstone así como para la función  $\beta$  que describe el flujo de la temperatura como función de la escala. Hemos encontrado la existencia de tres puntos fijos: un punto crítico para el sistema de dimensión  $d$ , otro para el sistema de dimensión  $d - 1$  y un punto fijo de temperatura cero, estable en el infrarrojo. Cuando integrada, esta función de  $\beta$  describe el flujo global entre estos tres puntos fijos. El corrimiento de la temperatura crítica es de particular interés, y nos ha sido posible obtenerlo a orden de un lazo, un resultado que coincide usando argumentos de escalamiento. Finalmente, hemos derivado a orden de un lazo, expresiones para los exponentes efectivos  $\beta_{eff}$  y  $\delta_{eff}$  donde se muestra cómo estos interpolan entre los correspondientes valores críticos del sistema de dimensión  $d$  y el de dimensión  $d - 1$ .
- En la última parte de la tesis hemos estudiado la física de las membranas fluidas. En primer lugar hemos obtenido las ecuaciones de Euler-Lagrange para una membrana de Helfrich bidimensional, hemos generalizado este cálculo para al caso de un objeto extendido de dimensión  $d$  inmerso en un espacio de dimensión  $d + D$ . En segundo lugar hemos encontrado el operador de pequeñas fluctuaciones para una membrana de Helfrich bidimensional. Hemos calculado también este operador para el caso de una membrana fluida de dimensión  $d$  inmersa en un espacio de dimensión  $d + D$ , generalizando el primer caso. En tercer lugar, presentamos el operador correspondiente a una membrana de dimensión cuatro. Este cálculo involucra términos de mayor orden en la curvatura de la membrana, como son  $(\nabla K)^2$ ,  $K^4$ ,  $\mathcal{R}K^2$ ,  $\mathcal{R}^2$ ,  $\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{ab}$ . En principio cada uno de estos es necesario dado que, segundas deformaciones de cada uno de ellos generan a los otros términos.
- Hemos encontrado los acoplamientos efectivos a orden de un lazo debido a fluctuaciones térmicas en la forma de la membrana. Primero hemos reproducido el caso de la membrana bidimensional, que ya ha sido estudiado por diferentes personas [48, 49, 50, 51]. Siguiendo el mismo camino, tenemos las funciones de flujo a orden de un lazo para los coeficientes de acoplamiento, para un objeto extendido de cuatro dimensiones. Este resulta en un conjunto de 8 ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Una región de interés en el espacio de parámetros es aquella en la que el término del gradiente en la curvatura extrínseca  $\alpha_1$  es dominante sobre los otros términos de cuarto orden. Para este sector hemos resuelto las ecuaciones en forma numérica. El término de tensión superficial domina para escalas grandes de longitud. Conforme esta escala es menor, el término de rigidez  $\kappa$  empieza a ser más importante y así entramos en un sector en que este

coeficiente es el dominante. Hemos encontrado dos diferentes trayectorias para la rigidez en estas escalas dependiendo de las condiciones iniciales  $\alpha_1^o$  y  $\kappa^o$ . Si  $\kappa^o \gg l_o (\sim .001)$  la rigidez efectiva crece positivamente conforme la longitud aumenta. Si empezamos con rigidez negativa, esta crece pero ahora lo hace con valores negativos. El coeficiente  $\alpha_1$  permanece cuasiconstante en ambos casos. Basados en el hecho de que un término proporcional a la rigidez significa que tanto los vectores normales a la superficie están ordenados, este resultado se interpreta de la siguiente manera para escalas de longitud suficientemente cortas: si empezamos con un objeto de rigidez positiva, la configuración más estable a escalas mayores corresponde a un objeto muy rígida, para escalas mayores esta rigidez se hace prácticamente cero. Por el contrario, si la rigidez inicial es negativa, entonces la configuración más estable es con muchos pliegues. Otra vez, para escalas mayores este coeficiente se anula y domina la tensión superficial.

De cara al futuro son varios los proyectos de investigación por llevar a cabo. En lo inmediato, debemos extender a orden de dos lazos el cálculo que se tiene de la ecuación de estado. A este mismo orden deberemos calcular en particular, expresiones para los exponentes efectivos. Un punto que ha quedado pendiente y que es factible de llevar a cabo en el corto plazo es el cálculo, a orden de un lazo, de los exponentes efectivos característicos de una transición de fase de primer orden.

Para el caso de objetos extendidos deberemos explotar la herramienta matemática desarrollada, para estudiar por ejemplo al caso de membranas de tamaño finito, asimismo es una tarea empezar a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Hamiltoniano de Helfrich. La física asociada a fenómenos con presencia de superficies está llamando mucho la atención en los años recientes dada su conexión con, por ejemplo, distintos aspectos biológicos, como son las formas geométricas del ADN. Este es un aspecto más de largo plazo: implementar las técnicas geométricas descritas en ésta tesis en diferentes aspectos de biofísica.

## 12 Apéndice A: Identidades de Ward y Expansión en lazos

### 12.1 Identidades de Ward

Si en la densidad Hamiltoniana para el modelo  $O(N)$  acoplamos una fuente externa  $H$ , la invariancia respecto a rotaciones en el espacio interno del campo  $\varphi_i$  es rota. No obstante, esta se recupera si rotamos el campo  $H$ . A nivel de la energía libre, esto significa

$$\delta F = 0 \quad (12.1)$$

bajo deformaciones  $\delta H_i = \omega_{ij} H_j$  donde  $\omega_{ij}$  es una rotación infinitesimal  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ . De aquí tenemos

$$\frac{\delta F}{\delta H_i} \delta H_i = \bar{\varphi}_i \omega_{ij} H_j \quad (12.2)$$

$$= \bar{\varphi}_i \omega_{ij} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_j} \quad (12.3)$$

$$= 0 \quad (12.4)$$

esto significa que la matriz que multiplica a  $\omega_{ij}$  debe ser simétrica necesariamente, es decir

$$\bar{\varphi}_i \Gamma_j^{(1)} = \bar{\varphi}_j \Gamma_i^{(1)} \quad (12.5)$$

esta identidad nos proporciona relaciones entre los vértices directamente. Tomando una segunda derivada en esta, obtenemos la siguiente relación

$$\bar{\varphi}_i \Gamma_{jk}^{(2)} + \delta_{ik} \Gamma_j^{(1)} = \bar{\varphi}_j \Gamma_{ik}^{(2)} + \delta_{jk} \Gamma_i^{(1)} \quad (12.6)$$

proyectando en la dirección transversal tenemos

$$\bar{\varphi}^2 \Gamma_t^{(2)} = \Gamma_t^{(1)} \bar{\varphi}^t \quad (12.7)$$

$$= H \bar{\varphi} \quad (12.8)$$

y si lo hacemos en dirección mezclada nos da la identidad

$$\bar{\varphi}^2 \Gamma_{tt}^{(2)} + \Gamma_t^{(1)} = 0 \quad (12.9)$$

es de hacer notar que la identidad (12.6) no aporta información sobre la función de vértice longitudinal. Derivando una vez más en (12.6) y proyectando tenemos

$$\bar{\varphi} \Gamma_t^{(3)} = 2 \Gamma_{tt}^{(2)} \quad (12.10)$$

$$\bar{\varphi}^2 \Gamma_{tll}^{(3)} + 2 \bar{\varphi} \Gamma_{tl}^{(2)} = 0 \quad (12.11)$$

$$\bar{\varphi} \Gamma_{tt}^{(3)} + \Gamma_t^{(2)} = \Gamma_t^{(2)} \quad (12.12)$$

como antes, esta identidad no aporta información sobre la función de tres puntos puramente longitudinal. Derivando una tercera vez (12.6) y proyectando como en los casos anteriores obtenemos

$$\bar{\varphi} \Gamma_t^{(4)} = 3 \Gamma_{tll}^{(3)} \quad (12.13)$$

$$\bar{\varphi} \Gamma_{tll}^{(4)} + 2 \Gamma_{tll}^{(3)} = \Gamma_t^{(3)} \quad (12.14)$$

$$\bar{\varphi} \Gamma_{tll}^{(4)} + \Gamma_t^{(3)} = 2 \Gamma_{tll}^{(3)} \quad (12.15)$$

$$\bar{\varphi} \Gamma_{tll}^{(4)} + 3 \Gamma_{tll}^{(3)} = 0 \quad (12.16)$$

estas expresiones son exactas por lo que se deben satisfacer orden por orden perturbativamente.

## 12.2 Expansión en Lazos

Dado el Hamiltoniano para el modelo  $O(N)$ , la configuración de equilibrio se alcanza en el mínimo funcional  $\varphi_c$  que satisface la ecuación de energía mínima

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_j}(\varphi_c) = 0 \quad (12.17)$$

de aquí obtenemos

$$(-\nabla^2 + t) \varphi_c^j + \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^2 \varphi_c^j = H^j \quad (12.18)$$

El punto clave en la expansión en lazos es expandir alrededor de la solución  $\varphi_c$  en la forma  $\varphi_c \rightarrow \varphi_c + \tilde{\varphi}$ . Sustituyendo en el Hamiltoniano tenemos la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi_c + \tilde{\varphi}) &= \mathcal{H}(\varphi_c) + \int d^d y d^d x \tilde{\varphi}^i(x) A^{ij}(x, y) \tilde{\varphi}^j(y) \\ &+ \int d^d x \left[ \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^j(x) \tilde{\varphi}_j(x) \tilde{\varphi}^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \tilde{\varphi}^2(x) \right] \end{aligned} \quad (12.19)$$

donde el operador de fluctuaciones  $A^{ij}(x, y)$  es definido como

$$A^{ij}(x, y) = \left[ \left( -\nabla^2 + t + \frac{\lambda}{6} \varphi_c^j(x) \varphi_c^j(y) \right) \delta_{ij} + \frac{\lambda}{3} \varphi_c^i(x) \varphi_c^j(y) \right] \delta(x - y) \quad (12.20)$$

El objetivo es introducir esta expansión en la función de partición  $Z[H]$ . Con esto podremos obtener en forma perturbativa la energía libre de Helmholtz  $F$  mediante su definición

$$Z[H] = e^{\hbar F[H]} \quad (12.21)$$

en la forma

$$F[H] = F_0 + \hbar F_1 + \dots \quad (12.22)$$

donde los primeros términos son

$$F_0 = \mathcal{H}(\varphi_c) \quad (12.23)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(A) \quad (12.24)$$

con estas expresiones podemos también encontrar en forma perturbativa, una expresión para la energía libre de Gibbs

$$\Gamma = \Gamma_0 + \hbar \Gamma_1 + \hbar^2 \Gamma_2 + \dots \quad (12.25)$$

de donde podemos observar también una expresión perturbativa para la magnetización

$$\bar{\varphi} = \varphi_c + \hbar \varphi_1 + \hbar^2 \varphi_2 + \dots \quad (12.26)$$

como vemos, a primer orden encontramos que el valor medio de la magnetización es dada por la configuración que minimiza el Hamiltoniano. Los primeros términos en la expansión de la energía libre de Gibbs (12.25) son

$$\Gamma_0 = -\mathcal{H}[\bar{\varphi}] \quad (12.27)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A^{ij}(\bar{\varphi}) \quad (12.28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= -\frac{\lambda}{4!} \int d^d x [3G_t^2(x, x) + 2(n-1)G_t(x, x)G_t(x, x) + (n^2-1)G_t^2(x, x)] \\ &+ \frac{\lambda^2}{36} \int d^d x d^d y \bar{\varphi}(x) [3G_t^3(x, y) + (n-1)G_t(x, y)G_t^2(x, y)] \bar{\varphi}(y) \end{aligned} \quad (12.29)$$

donde hemos definido las funciones de correlación longitudinal y transversal en la forma

$$G_l(x, y) = \int \frac{e^{-iq(x-y)} d^d q}{q^2 + t + \frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^2} (2\pi)^d \quad (12.30)$$

$$G_t(x, y) = \int \frac{e^{-iq(x-y)} d^d q}{q^2 + t + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2} (2\pi)^d \quad (12.31)$$

como mencionamos más arriba, el funcional (12.25) genera, por diferenciación funcional respecto a la magnetización, las funciones de vértice, es decir, funciones de correlación conectadas y sin líneas externas.

### 12.2.1 Un lazo

Empezamos con el resultado para la función de vértice  $\Gamma_i^{(1)} := \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_i}$  el resultado a un lazo es dado por la expresión

$$\Gamma_i^{(1)} = \left( p^2 + t + \frac{\lambda}{6} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \circ_l + (N-1) \frac{\lambda}{6} \circ_t \right) \varphi_i \quad (12.32)$$

donde hemos introducido la notación

$$\circ_l = \int \frac{1}{q^2 + t + \frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^2} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \quad \circ_t = \int \frac{1}{q^2 + t + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \quad (12.33)$$

Tomando una segunda derivada obtenemos la función de vértice de dos puntos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{(2)} &= \left( p^2 + t + \frac{\lambda}{6} \varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \circ_l + (N-1) \frac{\lambda}{6} \circ_t \right) \delta_{ij} \\ &+ \left( \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2} \circ_l - (N-1) \frac{\lambda^2}{18} \circ_t \right) \varphi_i \varphi_j \end{aligned} \quad (12.34)$$

y asimismo con la función de vértice de tres puntos, esta queda como

$$\Gamma_{ijk}^{(3)} = C \delta_{ijkl} \varphi^l + D \varphi_i \varphi_j \varphi_k \quad (12.35)$$

donde los coeficientes están dados por

$$C = \lambda \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda \circ_l - (N-1) \frac{\lambda}{6} \circ_t \right) \quad (12.36)$$

$$D = \lambda^3 \left( \circ_l + \frac{(N-1)}{27} \circ_t \right) \quad (12.37)$$

diferenciando por cuarta vez obtenemos la función de cuatro puntos a orden de un lazo

$$\Gamma_{ijkl}^{(4)} = E S_{ijkl} + F S^{ijka} \varphi^a \varphi^l + G (\delta_{il} \varphi_j \varphi_k + \delta_{jl} \varphi_i \varphi_k + \delta_{kl} \varphi_i \varphi_j) + H \varphi_i \varphi_j \varphi_k \varphi_l \quad (12.38)$$

donde los coeficientes son

$$E = \lambda \left( 1 - \frac{3}{2} \lambda \circ_l - (N-1) \frac{\lambda}{6} \circ_t \right) \quad (12.39)$$

$$F = 3\lambda^3 \left( \circ_l + \frac{(N-1)}{27} \circ_t \right) \quad (12.40)$$

$$G = \frac{F}{3} \quad (12.41)$$

$$H = -3\lambda^4 \left( \circ_l + \frac{(N-1)}{81} \circ_t \right) \quad (12.42)$$

Si proyectamos estas funciones en el espacio interno, a lo largo de la dirección de magnetización espontánea o de simetría rota, y perpendicular a ella, obtenemos precisamente las componentes longitudinal y transversal de las mismas. La función de dos puntos transversal y longitudinal son dadas por

$$\Gamma_t^{(2)} = p^2 + t + \frac{\lambda}{6}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{O}_l + (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t \quad (12.43)$$

$$\Gamma_l^{(2)} = p^2 + t + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{O}_l + (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t - \frac{\lambda^2\varphi^2}{2}\mathcal{O}_l - (N-1)\frac{\lambda^2\varphi^2}{18}\mathcal{O}_t \quad (12.44)$$

Para la función de tres puntos obtenemos

$$\Gamma_{ijk}^{(3)} = (C + D\varphi^3) P_{ij}^l n_k + \frac{C}{3}\varphi P_{ij}^t n_k + \frac{C}{3}\varphi P_{ik}^t n_j + \frac{C}{3}\varphi P_{jk}^t n_i \quad (12.45)$$

Con este resultado podemos escribir la parte longitudinal de la función de tres puntos en la forma

$$\Gamma_l^{(3)} = \lambda\varphi \left( 1 - \frac{3}{2}\lambda\mathcal{O}_l - (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t \right) + \lambda^3\varphi^3 \left( \mathcal{O}_l + \frac{(N-1)}{27}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.46)$$

y para la proyección mezclada obtenemos

$$\Gamma_{ttl}^{(3)} = \lambda\frac{\varphi^2}{3} - \frac{\lambda^2\varphi}{2} \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.47)$$

Desarrollando en términos de los proyectores obtenemos la siguiente expresión para el vértice de cuatro puntos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl}^{(4)} &= (E + F\varphi^2 + 3G\varphi^2 + H\varphi^4) P_{ij}^l P_{kl}^l + EP_{ij}^t P_{kl}^t \\ &+ \left( \frac{E}{3} + G\varphi^2 \right) (P_{ij}^l P_{kl}^t + Perm.) \end{aligned} \quad (12.48)$$

que nos permite identificar la función de cuatro puntos a lo largo de la dirección longitudinal como

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{(4)} &= \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) + 6\lambda^3\varphi^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{27}\mathcal{O}_t \right) \\ &- 3\lambda^4\varphi^4 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{81}\mathcal{O}_t \right) \end{aligned} \quad (12.49)$$

así como la proyección transversal, la cual se puede escribir como

$$\Gamma_t^{(4)} = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{(N-1)}{9}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.50)$$

y la proyección mezclada

$$\Gamma_{ttl}^{(4)} = \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2} \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) + \lambda^3\varphi^3 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{27}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.51)$$

las demás componentes son todas igual a cero, un hecho que se confirma de las identidades de Ward.

### 13 Apéndice B. Representación de Mongé-Ampère

Para simplificar las ideas pensemos en un sistema físico consistente de una membrana plana y supongamos que esta coincide con el plano  $x-y$  en un sistema de coordenadas rectangular. Esta es una representación

Si proyectamos estas funciones en el espacio interno, a lo largo de la dirección de magnetización espontánea o de simetría rota, y perpendicular a ella, obtenemos precisamente las componentes longitudinal y transversal de las mismas. La función de dos puntos transversal y longitudinal son dadas por

$$\Gamma_t^{(2)} = p^2 + t + \frac{\lambda}{6}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{O}_l + (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t \quad (12.43)$$

$$\Gamma_l^{(2)} = p^2 + t + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{O}_l + (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t - \frac{\lambda^2\varphi^2}{2}\mathcal{O}_l - (N-1)\frac{\lambda^2\varphi^2}{18}\mathcal{O}_t \quad (12.44)$$

Para la función de tres puntos obtenemos

$$\Gamma_{ijk}^{(3)} = (C + D\varphi^3) P_{ij}^l n_k + \frac{C}{3}\varphi P_{ij}^t n_k + \frac{C}{3}\varphi P_{ik}^t n_j + \frac{C}{3}\varphi P_{jk}^t n_i \quad (12.45)$$

Con este resultado podemos escribir la parte longitudinal de la función de tres puntos en la forma

$$\Gamma_l^{(3)} = \lambda\varphi \left( 1 - \frac{3}{2}\lambda\mathcal{O}_l - (N-1)\frac{\lambda}{6}\mathcal{O}_t \right) + \lambda^3\varphi^3 \left( \mathcal{O}_l + \frac{(N-1)}{27}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.46)$$

y para la proyección mezclada obtenemos

$$\Gamma_{ttl}^{(3)} = \lambda\frac{\varphi^2}{3} - \frac{\lambda^2\varphi}{2} \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.47)$$

Desarrollando en términos de los proyectores obtenemos la siguiente expresión para el vértice de cuatro puntos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl}^{(4)} &= (E + F\varphi^2 + 3G\varphi^2 + H\varphi^4) P_{ij}^l P_{kl}^l + EP_{ij}^t P_{kl}^t \\ &+ \left( \frac{E}{3} + G\varphi^2 \right) (P_{ij}^l P_{kl}^t + Perm.) \end{aligned} \quad (12.48)$$

que nos permite identificar la función de cuatro puntos a lo largo de la dirección longitudinal como

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{(4)} &= \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) + 6\lambda^3\varphi^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{27}\mathcal{O}_t \right) \\ &- 3\lambda^4\varphi^4 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{81}\mathcal{O}_t \right) \end{aligned} \quad (12.49)$$

así como la proyección transversal, la cual se puede escribir como

$$\Gamma_t^{(4)} = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 \left( \mathcal{O}_l + \frac{(N-1)}{9}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.50)$$

y la proyección mezclada

$$\Gamma_{ttl}^{(4)} = \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2} \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{9}\mathcal{O}_t \right) + \lambda^3\varphi^3 \left( \mathcal{O}_l + \frac{N-1}{27}\mathcal{O}_t \right) \quad (12.51)$$

las demás componentes son todas igual a cero, un hecho que se confirma de las identidades de Ward.

### 13 Apéndice B. Representación de Mongé-Ampère

Para simplificar las ideas pensemos en un sistema físico consistente de una membrana plana y supongamos que esta coincide con el plano  $x-y$  en un sistema de coordenadas rectangular. Esta es una representación

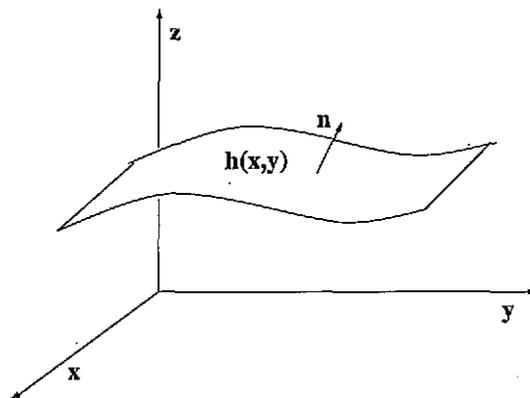


Figura 24: Representación de Mongé-Ampère de superficies.

muy usual en la investigación de membranas y es conocida como la representación de Mongé-Ampère [39]. La figura muestra los elementos básicos.

Esta representación es muy útil para describir configuraciones en  $R^{d+1}$ . La superficie  $\Sigma$  queda descrita mediante

$$z = h(\xi^a) \quad (13.1)$$

Podemos ver la altura  $h$  como un campo escalar sobre el plano  $d$ -dimensional,  $z = 0^3$ . La métrica inducida sobre la superficie es

$$\gamma_{ab} = \delta_{ab} + \nabla_a h \nabla_b h. \quad (13.2)$$

Es también de utilidad escribir la inversa de esta matriz

$$\gamma^{ab} = \delta^{ab} - \frac{\nabla_a h \nabla_b h}{1 + (\nabla h)^2}, \quad (13.3)$$

donde  $(\nabla h)^2 := \nabla h \cdot \nabla h$  con respecto a la métrica plana de  $R^d$ . El determinante de la métrica inducida es

$$\gamma = \det \gamma_{ab} = (1 + (\nabla h)^2) \quad (13.4)$$

de tal manera que el área de la superficie total de la membrana es

$$A = \int d^d \xi (1 + (\nabla h)^2) \quad (13.5)$$

Derivando funcionalmente respecto a  $h$  encontramos la derivada de Euler-Lagrange  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \frac{\delta A}{\delta h} = \nabla_a \left( \frac{\nabla^a h}{(1 + (\nabla h)^2)^{1/2}} \right) \quad (13.6)$$

y usando la inversa de la métrica (13.3) se puede reescribir como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(1 + (\nabla h)^2)^{1/2}} \gamma^{ab} \nabla_a \nabla_b h \quad (13.7)$$

<sup>3</sup>No deben confundirse las coordenadas  $\xi^a$  sobre la superficie con la longitud de correlación.

La ecuación de Mongé-Ampère es la que describe superficies extremales del área  $A$ , es decir, la ecuación de Euler-Lagrange

$$\left(1 + (\nabla h)^2\right) \Delta h - \nabla^a h \nabla^b h \nabla_a \nabla_b h = 0 \quad (13.8)$$

donde hemos definido  $\Delta = \nabla_a \nabla^a$ . Examinemos en estos términos la geometría estrínseca de la superficie. Si el vector normal a la misma apunta hacia arriba (en dirección de  $z > 0$ )

$$\mathbf{n} = \frac{(-\nabla_a h, 1)}{\left(1 + (\nabla h)^2\right)^{1/2}} \quad (13.9)$$

y la curvatura extrínseca es

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -(n, \nabla_a e_b) \\ &= -\frac{\nabla_a \nabla_b h}{\left(1 + (\nabla h)^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (13.10)$$

también, podemos escribir

$$K^{ab} K_{ab} = \frac{\gamma^{ac} \gamma^{bd} \nabla_a \nabla_b h \nabla_c \nabla_d h}{1 + (\nabla h)^2}. \quad (13.11)$$

### 13.1 Aproximación Cuadrática

A orden cuadrático en  $h$  tenemos

$$A = A_0 + \frac{1}{2} \int d^d \xi (\nabla h)^2 \quad (13.12)$$

vemos que no hay término lineal. De la expresión de  $K = \gamma^{ab} K_{ab}$  obtenemos

$$K = -\nabla^2 h + \nabla_a h \nabla_b h \nabla_a \nabla_b h + \frac{1}{2} (\nabla h)^2 \Delta h + \mathcal{O}(h^5) \quad (13.13)$$

que no tiene términos cuadráticos. Esto implica en particular, que la integral de  $K$  no tiene parte cuadrática tampoco

$$\int d^d \xi \sqrt{\gamma} K = - \int dS_{d-1} \mathbf{m} \cdot \nabla h + \mathcal{O}(h^3) \quad (13.14)$$

como consecuencia, en la aproximación gaussiana, términos lineales en  $K$  no tendrán contribución alguna. El término en  $K^2$  si contiene términos cuadráticos

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2} \int d^d \xi \sqrt{\gamma} K^2 \\ &= \frac{1}{2} \int d^d \xi (\Delta h)^2 + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (13.15)$$

notamos también que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^d \xi \sqrt{\gamma} K^{ab} K_{ab} &= \frac{1}{2} \int d^d \xi (\Delta h)^2 - \int dS_{d-1} [\mathbf{m} \cdot \nabla h \Delta h - h \mathbf{m} \cdot \nabla \Delta h] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (13.16)$$

por lo tanto, a orden cuadrático en  $h$ , la combinación  $\mathcal{R} = K^2 - K^{ab} K_{ab}$  es pura divergencia para toda  $D$ , no sólo para  $D = 2$  donde es una divergencia a todos los ordenes.

Consideremos el Hamiltoniano de Helfrich (3.7) con tensión superficial  $\sigma$  y rigidez  $\kappa$ . A orden cuadrático en  $h$  y definido en una región de tamaño  $L$  por lado tenemos

$$H = \sigma A_0 + \frac{1}{2} \int d^d \xi \left[ \sigma (\nabla h)^2 + \kappa (\Delta h)^2 \right] \quad (13.17)$$

es útil tener una representación en el espacio de momentos, para ello necesitamos

$$h(\xi^a) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{iq \cdot \xi} h(q) \quad (13.18)$$

por lo que

$$H = \sigma A_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (\sigma q^2 + \kappa q^4) |h(q)|^2 \quad (13.19)$$

será el Hamiltoniano de interés a este orden. Si la membrana es puesta en contacto con un baño térmico, podremos observar el efecto de fluctuaciones térmicas en la misma. En particular, si el Hamiltoniano es cuadrático como es el caso de (13.19) podemos aplicar el teorema de equipartición para tener

$$\langle |h(q)|^2 \rangle = \frac{T}{\sigma q^2 + \kappa q^4} \quad (13.20)$$

Si  $\sigma > 0$ , el comportamiento de la tensión superficial determina el régimen de longitud de onda grande y el término de rigidez puede ser despreciado, en este caso tenemos

$$\langle h(\xi)^2 \rangle = \frac{T}{\sigma} \int_{L/L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2}, \quad (13.21)$$

podemos observar que esta cantidad no depende del punto  $\xi$ , esto es debido a la simetría bajo traslaciones en la membrana. Asimismo, en este límite tenemos para el caso  $d = 1$ ,  $d = 2$  respectivamente

$$\langle h(\xi)^2 \rangle = \frac{T}{2\pi\sigma} L; \quad \ln \frac{L}{a} \quad (13.22)$$

donde  $a$  es una escala microscópica. Notemos que para objetos de dimensiones mayores, esta cantidad permanece finita en el infrarrojo. Veamos también la diferencia en altura de la membrana debido a la fluctuación

$$\langle (h(\xi) - h(0))^2 \rangle = \frac{2T}{\sigma} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} (1 - e^{iq \cdot \xi}) \quad (13.23)$$

Para puntos suficientemente alejados, la integración de la exponencial oscila alrededor de cero en  $d = 1$ ,  $d = 2$ :

$$\langle (h(\xi) - h(0))^2 \rangle = \frac{T}{\pi\sigma} L; \quad \ln \frac{L}{a} \quad (13.24)$$

Estas dos estadísticas muestran que la posición de la membrana es menos y menos definida conforme su tamaño se incrementa. La membrana está arrugada. Veamos cómo es la correlación entre los vectores normales. Primero, a orden cuadrático en  $h$  tenemos

$$\mathbf{n} = \left( -\nabla_a h, 1 - \frac{1}{2} (\nabla h)^2 \right) \quad (13.25)$$

con esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) &= 1 - \frac{1}{2} \left( (\nabla h(0))^2 + (\nabla h(\xi))^2 \right) + (\nabla h(\xi))^2 + \nabla h(0) \cdot \nabla h(\xi) \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\nabla h(\xi) - \nabla h(0))^2 \end{aligned} \quad (13.26)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) \rangle &= 1 - 2T \int \frac{d^D q}{(2\pi)^d} (e^{iq \cdot \xi} - 1) (e^{-iq \cdot \xi} - 1) q^2 \langle |h(q)|^2 \rangle \\ &= 1 - 2T \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \sin^2 \left( \frac{q \cdot \xi}{2} \right) \frac{1}{\sigma + \kappa q^2} \end{aligned} \quad (13.27)$$

como antes, despreciando el término de rigidez tenemos

$$\langle \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) \rangle = 1 - \frac{T}{\sigma} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} 2 \sin^2 \left( \frac{\mathbf{q} \cdot \xi}{2} \right) \quad (13.28)$$

de tal manera que, para puntos suficientemente alejados tenemos

$$\langle \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) \rangle = 1 - \frac{T}{\sigma} a^{-D} \quad (13.29)$$

el segundo término entra únicamente como regulador en el ultravioleta. Es decir, los normales permanecen térmicamente descorrelacionados a distancias grandes.

### 13.2 Tensión Superficial Cero

Supongamos ahora que la membrana tiene tensión superficial cero  $\sigma = 0$ . En este caso tenemos

$$\langle h(\xi)^2 \rangle = \frac{T}{\kappa} \int_{1/L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^4} \quad (13.30)$$

en particular, para dimension  $d = 1$ ,  $d = 2$  tenemos

$$\langle h(\xi)^2 \rangle = \frac{T}{2\pi\kappa} L^3; \quad L^2 \quad (13.31)$$

que muestra una divergencia más violenta respecto de (13.22). Notemos también que para una membrana tridimensional la divergencia es logarítmica, y para una de dimensión cuatro, esta cantidad es finita si hay un corte en el infrarrojo.

### 13.3 Longitud de Persistencia

Si la tensión superficial es nula, la correlación en los vectores normales (13.27) para puntos muy alejados, se puede expresar como

$$\langle \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) \rangle = 1 - \frac{2T}{\kappa} \int_{1/L} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \quad (13.32)$$

Por lo tanto podemos escribir, en  $d = 1$  y  $d = 2$

$$\langle \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(\xi) \rangle = 1 - \frac{T}{2\pi\kappa} L, \quad \ln \frac{L}{a} \quad (13.33)$$

La longitud de persistencia se define como la distancia  $\xi_p$  a la que esta correlación es despreciable vía fluctuaciones térmicas: es la longitud a partir de la cual la membrana está en la fase de arrugado o plegado, en dimensión dos es dada por

$$\xi_p = a e^{\frac{2\pi\kappa}{T}}. \quad (13.34)$$

## 14 Apéndice C: Deformaciones

En estos cálculos usamos los siguientes resultados

$$\delta_{\perp}\gamma_{ab} = 2\Phi K_{ab} \quad (14.1)$$

$$\delta_{\perp}\gamma^{ab} = -2\Phi K^{ab} \quad (14.2)$$

$$\delta_{\perp}\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}K\Phi \quad (14.3)$$

$$\delta_{\perp}^2\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}(-\Phi\Delta\Phi + \mathcal{R}\Phi) \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}\mathcal{R}_{ab} &= -K_{ab}\Delta\Phi - K\nabla_a\nabla_b\Phi + K_{ac}\nabla^c\nabla_b\Phi + K_b^c\nabla_a\nabla_c\Phi \\ &\quad + (\mathcal{R}K_{ab} - K\mathcal{R}_{ab} + K_{ac}\mathcal{R}_b^c - K_b^c\mathcal{R}^{ac})\Phi \end{aligned} \quad (14.5)$$

$$\delta_{\perp}\mathcal{R} = -2\Phi K^{ab}\mathcal{R}_{ab} - 2K\Delta\Phi + 2K^{ab}\nabla_a\nabla_b\Phi \quad (14.6)$$

$$\delta_{\perp}K_{ab} = -\nabla_a\nabla_b\Phi + (KK_{ab} - \mathcal{R}_{ab})\Phi \quad (14.7)$$

$$\delta_{\perp}K = -\Delta\Phi + (\mathcal{R} - K^2)\Phi \quad (14.8)$$

• Requerimos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}(\nabla K)^2 &= 2\delta_{\perp}(\nabla_a K)\nabla^a K + (\nabla_a K)(\delta_{\perp}\gamma^{ab})\nabla_b K \\ &= 2\delta_{\perp}(\nabla_a K)\nabla^a K - 2\Phi K^{ab}(\nabla_a K)\nabla_b K \end{aligned} \quad (14.9)$$

tomando una segunda variación obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2(\nabla K)^2 &= 2\delta_{\perp}(\nabla_a K)\delta_{\perp}\nabla^a K + 2\delta_{\perp}^2(\nabla_a K)\nabla^a K \\ &\quad - 2\Phi(\nabla_a K)(\nabla_b K)\delta_{\perp}K^{ab} - 4\Phi K^{ab}(\nabla_a K)\delta_{\perp}\nabla_b K \end{aligned} \quad (14.10)$$

en esta necesitamos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}(\nabla_a K) &= \nabla_a(\delta_{\perp}K) \\ &= \nabla_a(-\Delta\Phi + (\mathcal{R} - K^2)\Phi) \end{aligned} \quad (14.11)$$

y

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}(\nabla^a K) &= \delta_{\perp}(\gamma^{ac}\nabla_c K) \\ &= -2\Phi K^{ac}\nabla_c K + \gamma^{ac}\delta_{\perp}\nabla_c K \end{aligned} \quad (14.12)$$

por lo tanto, substituyendo obtenemos

$$\delta_{\perp}^2(\nabla_a K) = -\nabla_a\delta_{\perp}\Delta\Phi + \Phi\nabla_a\delta_{\perp}(\mathcal{R} - K^2) + \delta_{\perp}(\mathcal{R} - K^2)\nabla_a\Phi \quad (14.13)$$

donde podemos usar el resultado

$$\delta_{\perp}(\mathcal{R} - K^2) = 2K^{ab}\nabla_a\nabla_b\Phi - 2(K^{ab}\mathcal{R}_{ab} + K\mathcal{R} - K^3)\Phi \quad (14.14)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2(\nabla K)^2 &= 4K^{ac}(\nabla_c K)\Phi\nabla_a\Delta\Phi + 2(\nabla\Delta\Phi)^2 - 4\nabla^a(\mathcal{R} - K^2)\Phi\nabla_a\Delta\Phi \\ &\quad - 4(\mathcal{R} - K^2)(\nabla^a\Phi)\nabla_a\Delta\Phi + 2(\mathcal{R} - K^2)^2(\nabla\Phi)^2 - 2(\nabla^a K)\nabla_a(\delta_{\perp}\Delta\Phi) \\ &\quad + 4(\nabla^a K)\nabla_a K^{cd}\Phi\nabla_c\nabla_d\Phi + 4K^{cd}(\nabla^a K)\Phi\nabla_a\nabla_c\nabla_d\Phi + (4K^{cd}\nabla_c\nabla_d\Phi)(\nabla^a K)\nabla_a\Phi \\ &\quad + 2\Phi(\nabla_a K)(\nabla_b K)\nabla^a\nabla^b\Phi + 4K^{ab}(\nabla_a K)\Phi\nabla_b\Delta\Phi \end{aligned} \quad (14.15)$$

• Necesitamos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 K^4 &= -4(\delta_{\perp}K^3)\Delta\Phi - 4K^3\delta_{\perp}\Delta\Phi + 4(\delta_{\perp}K^3)(\mathcal{R} - K^2)\Phi + 4K^3\delta_{\perp}(\mathcal{R} - K^2)\Phi \\ &= -4(3K^2\delta_{\perp}K)\Delta\Phi - 4K^3\delta_{\perp}\Delta\Phi + 4(\delta_{\perp}K^3)(\mathcal{R} - K^2)\Phi + 4K^3\delta_{\perp}(\mathcal{R} - K^2)\Phi \end{aligned} \quad (14.16)$$

de esta expresión y haciendo algunas integraciones obtenemos el operador del texto.

• Tenemos

$$\mathcal{R}_{ab} = KK_{ab} - K_{ac}K_b^c \quad (14.17)$$

usando

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} K_b^c &= \delta_{\perp} (\gamma^{cd} K_{db}) \\ &= (\delta_{\perp} \gamma^{cd}) K_{db} + \gamma^{cd} \delta_{\perp} K_{db} \\ &= -\nabla^c \nabla_b + \mathcal{R}_b^c \Phi - K_b^c K \Phi \end{aligned} \quad (14.18)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} \mathcal{R}_{ab} &= -K_{ab} \Delta \Phi - K \nabla_a \nabla_b \Phi + K_{ac} \nabla^c \nabla_b \Phi + K_b^c \nabla_a \nabla_c \Phi \\ &+ (\mathcal{R} K_{ab} - K \mathcal{R}_{ab} + K_{ac} \mathcal{R}_b^c - K_b^c \mathcal{R}_{ac}) \Phi \end{aligned} \quad (14.19)$$

y por lo tanto tenemos  $\delta_{\perp} (K^{ab} \mathcal{R}_{ab})$  como el expresado en el texto. Para la segunda variación necesitamos la expresión

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} (\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) &= -2\mathcal{R}^{ab} K_{ab} \Delta \Phi + (4K_c^a \mathcal{R}_{cb} - 2K \mathcal{R}^{ab}) \nabla_a \nabla_b \Phi \\ &+ (2\mathcal{R} K^{ab} \mathcal{R}_{ab} - 4K_{ac} \mathcal{R}_b^c \mathcal{R}^{ab}) \Phi \end{aligned} \quad (14.20)$$

luego

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 (R_{ab} K^{ab}) &= 4K^{ab} (\Delta \Phi) \nabla_a \nabla_b \Phi + (4K^3 - 4K_{ab} \mathcal{R}^{ab} - 4\mathcal{R} K) \Phi \Delta \Phi \\ &+ (4K^2 K^{ab} - 8\mathcal{R} K^{ab} - 12K \mathcal{R}^{ab} + 24K_c^a \mathcal{R}^{cb}) \Phi \nabla_a \nabla_b \Phi - 3K^{ab} \mathcal{R}_{ab} (\nabla^c \Phi) (\nabla_c \Phi) \\ &+ (2K \mathcal{R}^{ab} + 6\mathcal{R}^{cb} K_c^a - 2\mathcal{R} K^{ab}) (\nabla_a \Phi) (\nabla_b \Phi) + 3K (\nabla^a \nabla^b \Phi) (\nabla_a \nabla_b \Phi) \\ &- 6K_c^a (\nabla^c \nabla^b \Phi) (\nabla_a \nabla_b \Phi) + ((K^2 - \mathcal{R}) \nabla^c K - (K K^{ab} - 3\mathcal{R}^{ab}) (\nabla_a K_b^c)) \Phi \nabla_b \Phi \end{aligned} \quad (14.21)$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} \nabla_a \nabla_b \Phi &= \nabla_a (\delta_{\perp} \nabla_b \Phi) - \nabla_c \Phi \delta_{\perp} \gamma_{ab}^c \\ &= -\nabla_c \Phi (K_a^c \nabla_b \Phi + K_b^c \nabla_a \Phi - K_{ab} \nabla^c \Phi + (\nabla_a K_b^c) \Phi) \end{aligned} \quad (14.22)$$

• Tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{\perp}^2 (\mathcal{R}^{ab} \mathcal{R}_{ab}) &= 2(K^2 - \mathcal{R}) (\Delta \Phi)^2 + (4\mathcal{R}^{ab} - 4K K^{ab}) (\Delta \Phi) \nabla_a \nabla_b \Phi \\ &- 2(2\mathcal{R} K^2 - 6K K^{ab} \mathcal{R}_{ab} - 2\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab}) \Phi \Delta \Phi \\ &+ (8\mathcal{R}^{cd} K_{cd} K^{ab} + 4\mathcal{R} K K^{ab} - 10\mathcal{R} \mathcal{R}^{ab} - 6K K_c^a \mathcal{R}^{cb} + 12\mathcal{R}^{cb} \mathcal{R}_c^a \\ &- 20K_c^a K^{db} \mathcal{R}_d^c + 2K^2 \mathcal{R}^{ab} + 2K K^{cb} \mathcal{R}_c^a) \Phi \nabla_a \nabla_b \Phi \\ &+ (4\mathcal{R}^{ab} K_{ab} K^{cd} - 4K K_b^d \mathcal{R}^{cb} + 8\mathcal{R}_b^d \mathcal{R}^{cb}) (\nabla_c \Phi) (\nabla_d \Phi) \\ &+ (2K K_{ab} \mathcal{R}^{ab} - 4\mathcal{R}^{ab} \mathcal{R}_{ab}) (\nabla^c \Phi) (\nabla_c \Phi) + (20\mathcal{R}_c^b - 4K K_c^b) (\nabla^c \nabla^a \Phi) (\nabla_a \nabla_b \Phi) \\ &+ 4K_c^a K^{db} (\nabla^c \nabla_d \Phi) (\nabla_a \nabla_b \Phi) + 2K^2 (\nabla^a \nabla^b \Phi) (\nabla_a \nabla_b \Phi) \end{aligned} \quad (14.23)$$

haciendo algunas integraciones llegamos al resultado.

## Referencias

- [1] D.J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*. McGraw-Hill, (1978).
- [2] P. Pfeuty and G. Toulouse, *Introduction to the Renormalization Group and Critical Phenomena*. Wiley, (1977).
- [3] M.E. Fisher, *The Renormalization Group in the Theory of Critical Phenomena*. Rev. Mod. Phys., **46**, 597, (1974). *Scaling, Universality and the Renormalization Group Theory*. Lectures Notes in Physics, Vol. 186, *Critical Phenomena*, edited by F.J.W. Hahne, Springer, Berlin, 1-139, (1983). *Renormalization Group Theory: Its Basis and Formulation in Statistical Physics*. Rev. Mod. Phys., **70**, 653, (1998).
- [4] Shang-keng Ma, *Introduction to the Renormalization Group*. Rev. Mod. Phys., **45**, 589, (1973).
- [5] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge U. Press, (1996).
- [6] M.N. Barber, *Finite Size Scaling*, in Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 8, C. Domb and J. Lebowitz eds. (Academic Press) (1983).
- [7] Edward W. Kolb and Michael S. Turner, *The Early Universe*. (Addison Wesley) (1990).
- [8] P.G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*. (Cornell University Press) (1980).
- [9] E.C.G. Stueckelberg, A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26**, 499 (1953); M. Gell-Mann, E. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954); N. Bogoliubov, D. Shirkov, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **103**, 203 (1955).
- [10] L. Kadanoff, *Physica* **2**, 263 (1966); K. Wilson, J. Kogut, *Phys. Rep.* **C12**, 75 (1974).
- [11] E. Brezin, D.J. Wallace and K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **B7**, 232, (1973).
- [12] P. Schofield, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 606 (1969).
- [13] R.B. Griffiths, *Physical Review* **158**, 176 (1967).
- [14] L. Schäfer and H. Horner, *Z. Phys.*, **B29**, 251 (1978).
- [15] I.D. Lawrie, *J. Phys.*, **A14**, 2489 (1981).
- [16] H. O. Heuer, *J. Phys.*, **A25**, 47 (1992).
- [17] D. O'Connor and C.R. Stephens, *Phys. Rep.* **363**, 425 (2002).
- [18] M.E. Fisher and N. Berker, *Phys. Rev.* **B26**, 2507 (1982).
- [19] J. Engels, S. Holtman, T. Mendes and T. Schulze, *Phys. Lett.* **B492**, 219, (2000); *Phys. Lett.* **B514**, 299, (2001).
- [20] Andrea Pelisseto and Ettore Vicari, *Critical Phenomena and Renormalization-Group Theory*, cond-mat/0012164 (2001).
- [21] D. O'Connor and C.R. Stephens, *Nucl. Phys.* **B260**, 297 (1991); *Phys. Rev. Lett.* **72**, 506 (1994); *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 2805 (1994).
- [22] A.A. Migdal, *Ah. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 810 (1975); A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B59**, 79 (1975); E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 691 (1976).
- [23] D.J. Amit and Y.Y. Goldschmidt, *Ann. Phys.* **114**, 356 (1978).
- [24] D.J. Amit, Y.Y. Goldschmidt and L. Peliti, *Ann. Phys.* **116**, 1 (1978).
- [25] E. Brézin and J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B257**[FS14], 867 (1985).

- [26] S. Chakravarty, B.I. Halperin and D.R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057 (1988); *Phys. Rev.* **B39**, 2344 (1989).
- [27] D. O'Connor, C.R. Stephens and A.J. Bray, *J. Stat. Phys.* **87**, 273 (1997).
- [28] M.E. Fisher and M.N. Barber, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1516 (1972).
- [29] M. Barber and M.E. Fisher, *Ann. Phys.* **77**, 1 (1973).
- [30] D.J. Wallace, *Perturbative Approach to Surface Fluctuations*. J.B. Zuber and R. Stora, eds. Les Houches Summer School, (Elsevier Science) (1984).
- [31] D. Jasnow, *Renormalization Group Theory of Interfaces*. C. Domb and J.L. Lebowitz, eds. Vol. 10. (Academic Press) (1986).
- [32] D.J. Wallace and R.K.P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 808, (1979).
- [33] H.W. Diehl, D.M Kroll and H. Wagner, *Z. Physik* **B36**, 329, (1980).
- [34] Dieter Forster and Aldona Gabriunas, *Phys. Rev.* **A24**, 598, (1981).
- [35] S.C. Lin and M.J. Lowe, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 347, (1983).
- [36] José G. Segovia-López and Víctor Romero-Rochín, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2369, (2001).
- [37] E.S. Wu and W.W. Webb, *Phys. Rev.* **A8**, 2065 (1973).
- [38] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, (Publish or Perish Inc. Boston), (1970).
- [39] Samuel A. Safran, *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).
- [40] J. Guven, *Phys. Rev.* **D48**, 4604, (1993); *Phys. Rev.* **D48**, 5562, (1993).
- [41] R. Capovilla and J. Guven, *Phys. Rev.* **D51**, 6736 (1995).
- [42] R. Capovilla and J. Guven *Phys. Rev.* **D57**, 5158 (1998); *Phys. Rev.* **D55**, 2388 (1997).
- [43] B.S. De Witt, *Gauge Invariant Effective Action*, en *Quantum Gravity II*, Second Oxford Symp. 1980. C.J. Isham, R. Penrose and W. Sciama , eds. (Oxford Univ. Press.) (1981).
- [44] S. M. Christensen, *Phys. Rev.* **D14**, 2490, (1976).
- [45] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Phys. Rep.* **119**, 1, (1985).
- [46] N.D. Birrel and P.C. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge Univ. Press.) (1982).
- [47] N. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966); S. Coleman, *Comm. Math. Phys.* **31**, 259 (1973).
- [48] A.M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B286**, 406 (1986).
- [49] L. Peliti and S. Leibler, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1690 (1985).
- [50] D. Forster *Phys. Lett.* **114A**, 115 (1986).
- [51] H. Kleinert *Phys. Lett.* **114A**, 263 (1986).
- [52] W. Helfrich, *J. Phys. France* **46**, 1263 (1985); *J. Phys. France* **47**, 321 (1986).
- [53] F. David and S. Leibler, *J. Phys. II France* **1**, 959 (1991).

- [54] L. Peliti, in *Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory*. F. David, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, eds. Les Houches Summer School, (Elsevier Science) (1994).
- [55] F. David, in *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces*. D. Nelson, T. Piran, and S. Weinberg, eds. (World Scientific, Singapore) (1989).
- [56] M. Bowick and A. Travesset, *Phys. Rep.* **344**, 255-308, (2001).
- [57] Denjoe O'Connor, C.R. Stephens, J.A. Santiago, *Dimensional Crossover in the Non-Linear Sigma Model*, *Rev. Mex. Fis.* por aparecer (2002), *cond-mat/0202209*.
- [58] R. Capovilla, J. Guven, J.A. Santiago, *A Fluid Membrane with an Edge*. Aceptado en *Phys. Rev. E* (2002), *cond-mat/0203335*.
- [59] J. Capovilla, J. Guven, J.A. Santiago. En preparación.
- [60] J. Guven, J.A. Santiago. En preparación.

