

1 01180



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

“TRANSPORTE DE ENERGIA RADIATIVA  
A TRAVES DE FIBRAS OPTICAS:  
TEORIA Y EXPERIMENTACION”

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERIA  
(MECANICA)

OSCAR ALFREDO JARAMILLO SALGADO

DIRECTORES DE TESIS:

DR. JESUS ANTONIO DEL RIO PORTILLA  
Y DRA. GUADALUPE HUELSZ LESBROS



TEMIXCO, MORELOS

2002

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo muy especialmente a mi esposa Paty, el amor de mi vida, quien me ha brindado siempre su apoyo con amor y comprensión. A mis padres Lázaro y María, ya que sin su ayuda nunca hubiera sido posible realizar esta tesis. A mi hermano Carlos Alberto por su comprensión y el gran cariño que le tengo, sin olvidar desde luego a su esposa Lupita y mis dos queridos sobrinos Jair y Jasser.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Agradezco profundamente a mis directores de tesis, el Dr. Jesús Antonio del Río Portilla y la Dra. Guadalupe Huelsz Lesbros, la paciencia, la dedicación, la asesoría y sobre todo la amistad que me brindaron en el desarrollo de esta tesis. También agradezco la contribución que me brindaron los miembros del comité doctoral, Dr. José Luis Fernández Zayas, Dr. Rosalío Rodríguez Zepeda, Dr. Jorge Antonio Rojas Menéndez, Dr. Jaime Cervantes de Gortari y Dr. Sergio Cuevas García, quienes con sus comentarios y observaciones sobre la investigación doctoral enriquecieron el contenido de esta tesis. Quiero agradecer también a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM por la beca otorgada para la realización de mis estudios doctorales.

Un cariñoso agradecimiento a todas aquellas personas del Centro de Investigación en Energía de la UNAM que me apoyaron durante mi investigación doctoral. Con especial atención al Dr. Mariano López de Haro con quien tuve la oportunidad de estudiar termodinámica irreversible y poder iniciar así algunas investigaciones en este campo del conocimiento. Mi más sincero cariño a mis amigos, Dr. Luis Gerardo Arriaga Hurtado y su esposa Magali Popoca Rea, Dr. Arturo Fernández Madrigal y su esposa Eréndira Degante, Dr. Ramón Tovar, M. en C. María Elena Larraga, M.E.S. Roberto Acosta, Ing. Gabriela Hernández, I.S.C. Héctor Daniel Cortes, I.S.C. Alfredo Quiroz, quienes me alentaron y auxiliaron en mi investigación doctoral.

Actualmente me encuentro colaborando en el Instituto de Investigaciones Eléctricas en la investigación y el desarrollo de centrales eoloeléctricas en México. Esto fue posible al apoyo y confianza que me han entregado el Dr. Jorge M. Huacuz Villamar, Gerente de Energías No Convencionales, y el Ing. Marco Antonio Roberto Borja Díaz, Jefe de Proyecto, por lo que les agradezco profundamente. Deseo expresar también mi gratitud a mis colegas y compañeros de trabajo, Ing. Ricardo Saldaña Flores, Fis. Ubaldo Miranda Miranda, L.C.A. María Flor Morales Reyes, Ing. Raúl González Galarza, Ing. José Luis Arvisu Fernández, Ing. Patricia González Alemán, Ing. Fortino Mejía Neri, Ing. Carlos Ramos Berumen, Ing. Jaime Agredano Díaz, Ing. Javier Lagunas Mendoza, M. en C. Consolación Medrano Vaca, I. S. C. Esmeralda Pita Jiménez, por sus atenciones y apoyo.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>21</b>
<b>Abstract</b>	<b>23</b>
<b>Introducción</b>	<b>25</b>
<b>1 Antecedentes</b>	<b>29</b>
1.1 Introducción . . . . .	29
1.2 Energía solar transportada a través de guías de onda y fibras ópticas . . . . .	30
<b>2 Análisis de la respuesta no lineal a la intensidad radiativa</b>	<b>45</b>
2.1 Introducción . . . . .	45
2.2 Dependencia del índice de refracción con la intensidad (Efecto Kerr) . . . . .	46
2.3 Desarrollo de las ecuaciones de Maxwell para un medio con respuesta no lineal . . . . .	48
2.4 Coeficiente de absorción no lineal . . . . .	55
2.5 Modelo para la dispersión óptica (un oscilador no lineal) . . . . .	59
2.6 Resultados y conclusiones . . . . .	68
<b>3 Estudio teórico de la transferencia de calor en fibras ópticas</b>	<b>77</b>
3.1 Introducción . . . . .	77

3.2	Ecuación de transferencia radiativa . . . . .	77
3.3	Modelo unidimensional . . . . .	81
3.4	Solución analítica del modelo unidimensional . . . . .	84
3.5	Eficiencia de transmisión . . . . .	95
3.6	Resultados y conclusiones . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Estudio experimental de la transferencia de calor en fibras ópticas</b>	<b>99</b>
4.1	Introducción . . . . .	99
4.2	Variables experimentales . . . . .	100
4.3	Elementos del dispositivo experimental . . . . .	100
4.4	Diseño del dispositivo experimental . . . . .	104
4.5	Implementación e instrumentación del dispositivo experimental . . . . .	111
4.6	Metodología experimental . . . . .	112
4.6.1	Mediciones para la estimación del coeficiente de absorción lineal . . . . .	113
4.6.2	Mediciones de temperatura como función de la posición y el tiempo . . . . .	119
4.7	Resultados y conclusiones . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Fibras ópticas para un sistema miniplato parabólico/máquina Stirling: una posible aplicación</b>	<b>129</b>
5.1	Introducción . . . . .	129
5.2	Ciclo Stirling: análisis termodinámico de tiempo finito . . . . .	130
5.3	Fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada . . . . .	139
5.4	Generación de entropía en el absorbedor/calentador . . . . .	148
5.5	Resultados y conclusiones . . . . .	150

	3
<b>Conclusiones</b>	<b>155</b>
<b>A Programa para implementar la solución analítica del modelo unidimensional</b>	<b>159</b>
<b>B Calibración del radiómetro</b>	<b>163</b>
<b>C Medición de la temperatura en la superficie de la fibra óptica</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

4

## Lista de figuras

1.1	Esquema del dispositivo experimental usado por Cariou <i>et al.</i> (Tomado de Cariou <i>et al.</i> , 1982) . . . . .	31
1.2	Esquema del horno solar usado por Cariou <i>et al.</i> (Tomado de Cariou <i>et al.</i> , 1985). . . . .	32
1.3	Los dos tipos de CPCs utilizados por Khatri <i>et al.</i> acoplados a la entrada de las fibras ópticas. a) CPC de configuración simple, b) CPC de configuración compuesta. (Tomado de Kathri <i>et al.</i> , 1993). . . . .	33
1.4	Diseño propuesto por Liang <i>et al.</i> El manojó de 19 fibras es agrupado sin espacios gracias a su acabado hexagonal. (Tomado de Liang <i>et al.</i> , 1997). . . . .	34
1.5	Esquema del reactor prototipo desarrollado por Peill y Hoffann. (Tomado de Peill y Hoffann, 1997). . . . .	35
1.6	Reactor para la producción de hidrógeno activado por fotocatalisis. Jaramillo <i>et al.</i> , 1998). . . . .	36
1.7	Esquema del sistema propuesto por Feueremann y Gordon. a) sección transversal para un solo módulo plato-fibra óptica, b) vista superior y c) sección transversal de los módulos solares, d) campo de módulos solares. (Tomado de Feueremann y Gordon, 1999). . . . .	38

1.8	Los tres sistemas analizados por Zik, Karni y Kribus, a) TTFOS, b) SCOT y c) TROF. (Tomado de Zik et al., 1999) . . . . .	40
1.9	Sistema plato concentrador-fibra óptica que utiliza un hiperboloide como segundo concentrador. (Tomado de Kribus et al., 2000). . . . .	41
1.10	Diseño del fotobiorreactor para desulfuración del H <sub>2</sub> S desarrollado por Young y Woo. (Tomado de Young y Woo, 2000). . . . .	42
1.11	Acoplamiento entre una fibra óptica y un concentrador parabólico (Tomado de Jaramillo et al. 1999). . . . .	43
1.12	Emulación térmica de una fibra óptica de SiO <sub>2</sub> (Tomado de Jaramillo et al. 1999). . . . .	43
2.1	Celda unitaria y el tetraedro de SiO <sub>2</sub> . . . . .	50
2.2	Eje de simetría para la molécula de SiO <sub>2</sub> . . . . .	51
2.3	Ejes coordenados para la fibra óptica. . . . .	54
2.4	Distorsión de la nube electrónica en respuesta a un campo eléctrico E aplicado . . . . .	60
2.5	Índice de refracción ordinario $n_o$ para el SiO <sub>2</sub> en función de la frecuencia $\omega$ en el espectro solar. . . . .	69
2.6	Atenuación de la fibra óptica de SiO <sub>2</sub> en función de la longitud de onda $\lambda$ en el espectro solar. . . . .	70
2.7	Coefficiente de extinción lineal $k_o$ del SiO <sub>2</sub> como función de la frecuencia $\omega$ en el espectro solar. . . . .	70
2.8	Pesos de los osciladores $f_1$ y $f_2$ en función de la frecuencia $\omega$ . . . . .	72
2.9	Valores del coeficiente de amortiguamiento $\gamma_1$ y $\gamma_2$ para el espectro solar. . . . .	72
2.10	Constante de proporcionalidad para el anarmonismo $\xi$ en función de la frecuencia $\omega$ en el espectro solar. . . . .	74

2.11	Coefficiente de extinción no lineal $k_2$ para $\text{SiO}_2$ como función de la frecuencia $\omega$ en el espectro solar. . . . .	74
3.1	Haz de rayos a través de un medio semitransparente. . . . .	78
3.2	Volumen de control para el flujo radiativo. . . . .	80
3.3	Esquema de la fibra óptica para el balance de energía. . . . .	82
3.4	Emulación térmica de la fibra óptica . . . . .	97
4.1	Esquema de la fibra óptica. ( <i>Adaptado de Hecht y Zajac 1976</i> ) . . . . .	102
4.2	Esquema de la sonda termopila. ( <i>Adaptado de Oriel, 1999</i> ) . . . . .	104
4.3	Esquema del dispositivo experimental. . . . .	106
4.4	Esquema del juego de lentes como sistema auxiliar de concentración. . . . .	107
4.5	Esquema de la lente. ( <i>Adaptado de Oriel, 1999</i> ) . . . . .	110
4.6	Medición de la intensidad radiativa mediante la termopila. . . . .	112
4.7	Mediciones de temperatura para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada. . . . .	121
4.8	Mediciones de temperatura para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada. . . . .	121
4.9	Mediciones de temperatura para la fibra óptica de Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada. . . . .	122

4.10	Mediciones de temperatura para la fibra óptica de Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada. . . . .	122
4.11	Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V). . . . .	124
4.12	Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V). . . . .	124
4.13	Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V). . . . .	125
4.14	Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V). . . . .	125
5.1	Esquema de la máquina Stirling, ( <i>Adaptado de West, 1986</i> ). . . . .	131
5.2	Diagrama temperatura-entropía para el ciclo Stirling ( <i>Adaptado de West, 1986</i> ). . . . .	132
5.3	Esquema de la configuración de la máquina térmica solar. . . . .	133
5.4	Acoplamiento entre el manajo de fibras ópticas y el espejo parabólico para el transporte de energía solar concentrada. . . . .	139
5.5	Sección de entrada del mazo de fibras ópticas ( <i>Adaptado de Liang, (1997)</i> ). . . . .	140
5.6	Valores para $g(\theta_{\max})$ como función del ángulo de admisión $\theta_{\max}$ . . . . .	142
5.7	Esquema del confinamiento donde se coloca el extremo de las fibras ópticas. . . . .	143
5.8	Valores de $F_s$ como función de $\theta_{\max}$ . . . . .	146
5.9	Temperatura óptima de operación $T_{AH,opt}$ para la máquina térmica solar como función de la temperatura de estancamiento máxima $T_{AH,max,max}$ y valores arbitrarios de $A$ . . . . .	151
B.1	Curva de calibración del radiómetro. . . . .	164

C.1 Colocación de los termopares en el vaso de precipitado. Los de tipo A se encuentran incrustados en la superficie mientras que los tipo B sólo descansan sobre ésta. . . . . 166



# Lista de tablas

- 3.1 Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica. . . . . 97
- 4.1 Características de la lámpara . . . . . 101
- 4.2 Características de las dos fibras ópticas usadas. . . . . 103
- 4.3 Características principales del medidor de potencia radiativa. . . . . 103
- 4.4 Características principales de la sonda termoplia. . . . . 104
- 4.5 Características de los termopares. . . . . 105
- 4.6 Características principales del HP 34970A. . . . . 105
- 4.7 Características principales de la tarjeta HP 34901A. . . . . 106
- 4.8 Dimensiones de la lente plano-convexa  $L_1$ . . . . . 109
- 4.9 Dimensiones de la lente plano-convexa  $L_2$ . . . . . 109
- 4.10 Dimensiones de la lente biconvexa  $L_3$ . . . . . 109
- 4.11 Parámetros físicos en el juego de lentes . . . . . 110
- 4.12 Valores promedio de voltaje suministrado la lámpara y la potencia a la entrada de las  
dos fibras ópticas. . . . . 114
- 4.13 Largos de la fibras ópticas. . . . . 114
- 4.14 Valores promedio del voltaje suministrado a la lámpara y de la potencia a la salida de  
la fibra óptica de la marca Lumonics. . . . . 114

4.15	Valores promedio del voltaje suministrado a la lámpara y de la potencia a la salida de la fibra óptica de la marca Oriel . . . . .	115
4.16	Potencia de entrada y de salida para la fibra óptica de la marca Lumonics, para las tres longitudes estudiadas y los voltajes suministrados a la lámpara. . . . .	115
4.17	Potencia de entrada y de salida para la fibra óptica de la marca Oriel, para las tres longitudes estudiadas y los voltajes suministrados a la lámpara. . . . .	116
4.18	Potencias por unidad de área a la entrada y a la salida para la fibra óptica de la marca Lumonics. . . . .	116
4.19	Potencias por unidad de área a la entrada y a la salida para la fibra óptica de la marca Oriel. . . . .	117
4.20	Coefficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para la fibra óptica de la marca Lumonics. . . . .	118
4.21	Coefficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para la fibra óptica de la marca Oriel. . . . .	118
4.22	Coefficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para las dos fibras ópticas. . . . .	118
4.23	Longitudes de las fibras ópticas utilizadas en el estudio del comportamiento térmico . . . . .	119
4.24	Espaciamiento de los termopares para cada una de las fibras ópticas. . . . .	119
4.25	Potencias radiativas de entrada. . . . .	119
4.26	Eficiencia de transmisión y eficiencia óptica de transmisión para la fibra óptica de la marca Lumonics. . . . .	120
4.27	Eficiencia de transmisión y eficiencia óptica de transmisión para la fibra óptica de la marca Oriel. . . . .	123
4.28	Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica Lumonics. . . . .	126
4.29	Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica Oriel. . . . .	126

5.1	Valores de temperatura considerados para el cálculo de la eficiencia . . . . .	152
5.2	Valores para estimar $a_4$ . . . . .	152
5.3	Cálculo de la eficiencia global del sistema. . . . .	153
C.1	Propiedades del cemento CC High Temperature Cement - Omega (datos tomados de « <a href="http://www.britishelectricals.com/">http://www.britishelectricals.com/</a> ») . . . . .	165
C.2	Diferencia de temperatura entre termopares tipo A y tipo B . . . . .	166

14

## Lista de símbolos

En la siguiente lista se escriben los símbolos usados en esta tesis. Si bien cada símbolo ha sido definido localmente, la siguiente lista permite una referencia rápida sobre su significado. Se han incluido las unidades relacionadas a cada símbolo en el Sistema Internacional, así como los valores numéricos de las constantes utilizadas.

$A$	área [ $m^2$ ]
$B$	vector de inducción magnética [ $T$ ]
$C$	capacitancia de calor [ $WK^{-1}$ ]
$C$	velocidad de la luz a través de un medio [ $ms^{-1}$ ]
$C_{max}$	concentración geométrica máxima [-]
$C_p$	capacidad calorífica a presión constante [ $Jkg^{-1}K^{-1}$ ]
$C_v$	capacidad calorífica a volumen constante [ $Jmol^{-1}K^{-1}$ ]
$c$	velocidad de la luz en el vacío $2.9979 \times 10^8 ms^{-1}$
$D$	vector de desplazamiento eléctrico [ $Cm^{-2}$ ]
$D$	desplazamiento eléctrico [ $Cm^{-2}$ ]
$D$	diámetro [ $m$ ]
$DFB$	distancia focal desde el borde [ $m$ ]
$DMLT$	media logarítmica de la diferencia de temperatura [ $K$ ]
$D_a$	diámetro de apertura [ $m$ ]
$D_r$	diámetro del receptor [ $m$ ]
$D_{of}$	diámetro efectivo del manojo de fibras ópticas [ $m$ ]
$d$	distancia entre la lente $L_2$ y $L_3$ [ $m$ ]
$dB_{per}$	decibeles por unidad de longitud [ $dBm^{-1}$ ]
$E$	vector de campo eléctrico [ $Vm^{-1}$ ]
$E$	campo eléctrico [ $Vm^{-1}$ ]
$E$	potencia emisiva [ $Wm^{-2}$ ]
$E_m$	campo eléctrico a nivel molecular [ $Vm^{-1}$ ]
$E_o$	amplitud del campo eléctrico [ $Vm^{-1}$ ]
$E_1$	amplitud del campo eléctrico a nivel molecular [ $Vm^{-1}$ ]
$e$	carga del electrón, $= 1.6022 \times 10^8 C$
$F$	vector de fuerza [ $N$ ]
$F$	factor de forma para la transferencia radiativa [-]
$F$	constante de resistencia o freno [ $kg s^{-1}$ ]
$F_r$	fuerza de retención [ $N$ ]

$F_E$	fuerza ejercida sobre el electrón por efecto del campo eléctrico $[N]$
$F_F$	fuerza de resistencia o freno $[N]$
$f$	distancia focal $[m]$
$f$	intensidad de los osciladores $[-]$
$f_v$	fuerza volumétrica de energía $[Wm^{-3}]$
$f/\#$	número- $f$ $[-]$
$G$	radiación incidente $[Wm^{-2}]$
$G_0$	radiación incidente a la entrada de la fibra óptica $[Wm^{-2}]$
$G_L$	radiación incidente a la salida de la fibra óptica $[Wm^{-2}]$
$G_S$	radiación solar directa $[Wm^{-2}]$
$H$	vector de campo magnético $[Am^{-1}]$
$H$	razón $(h/k)$ $[m^{-1}]$
$H_o$	radiación sobre la superficie $[Wm^{-2}]$
$h$	coeficiente de transferencia $[Wm^{-2}K^{-1}]$
$I$	intensidad radiativa $[Wm^{-2}]$
$J$	densidad de corriente $[Am^{-2}]$
$K$	conductancia térmica total de la máquina Stirling $[WK^{-1}]$
$K$	constante elástica $[kgs^{-2}]$
$k$	conductividad térmica $[Wm^{-1}K^{-1}]$
$k_o$	coeficiente de extinción lineal $[-]$
$k_1$	conductividad térmica del revestimiento de la fibra óptica $[Wm^{-1}K^{-1}]$
$k_2$	coeficiente de extinción no lineal $[m^2V^{-2}]$
$k_2$	conductividad térmica de la cubierta protectora de la fibra óptica $[Wm^{-1}K^{-1}]$
$L$	lente
$L$	largo $[m]$
$L$	distancia entre la fuente y la lente $L_1$ $[m]$
$M$	vector de momento dipolar magnético por unidad de volumen (magnetización) $[T]$
$m$	masa del electrón, $= 9.1094 \times 10^{-31} kg$
$N$	número de cargas por unidad de volumen $[m^{-3}]$
$N$	número de unidades de calor transferido $[-]$
$N$	número de superficies de intercambio radiativo $[-]$
$NA$	apertura numérica $[-]$
$N_2$	índice de refracción no lineal dependiente de la radiación incidente, $\sim 6 \times 10^{-20} m^2 W^{-1}$
$n$	número de moles $[mol]$
$n_o$	índice de refracción ordinario $[-]$
$n_1$	índice de refracción del núcleo de la fibra $[-]$
$n_2$	coeficiente de Kerr para $SiO_2$ , $= 10^{-22} m^2 V^{-2}$
$n_2$	índice de refracción del revestimiento de la fibra $[-]$
$\hat{n}$	índice de refracción complejo $[-]$
$P$	vector de momento dipolar eléctrico por unidad de volumen (polarización) $[Cm^{-2}]$
$P$	polarización eléctrica $[Cm^{-2}]$
$P$	potencia mecánica $[W]$
$P_f$	punto focal $[-]$
$p$	momento dipolar eléctrico $[Cm]$
$p$	perímetro $[m]$
$p$	presión $[Nm^2]$
$\dot{Q}$	flujo de calor $[W]$

$Q$	calor [J]
$Q_c$	calor durante la compresión [J]
$Q_e$	calor durante la expansión [J]
$q$	vector de flujo de calor [ $Wm^{-2}$ ]
$q$	carga eléctrica [C]
$q$	flujo de calor [ $Wm^{-2}$ ]
$R_e$	radio del electrón = $2.81 \times 10^{-15}m$
$R_i$	resistencia térmica interna [ $KJ^{-1}$ ]
$R_n$	radio del núcleo de la fibra óptica [m]
$R_o$	radio del átomo [m]
$R_{ter}$	resistencia térmica [ $m^2KW^{-1}$ ]
$R_1$	radio del revestimiento de la fibra óptica [m]
$R_2$	radio de la cubierta protectora de la fibra óptica [m]
$r$	vector de posición que depende del sistema coordenado [m]
$r$	coordenada radial [m]
$r$	desplazamiento [m]
$r$	radio [m]
$r_f$	fracción de la energía incidente reflejada de tipo Fresnel [-]
$\dot{S}$	entropía [ $WK^{-1}$ ]
$S_{o1}$	distancia entre las lentes $L_1$ y $L_2$ [m]
$S_{i2}$	distancia entre la lente $L_3$ y la imagen formada [m]
$SiO_2$	dióxido de silicio, material del núcleo de la fibra óptica
$\hat{s}$	vector unitario en una dirección establecida [-]
$s$	longitud [m]
$T$	temperatura [ $^{\circ}C$ ]
$T_c$	espesor del centro [m]
$T_c$	temperatura en el cilindro de compresión de la máquina Stirling [K]
$T_c$	espesor del borde [m]
$T_c$	temperatura en el cilindro de expansión de la máquina Stirling [K]
$T_0$	temperatura del sumidero de calor [K]
$T_s$	temperatura aparente del Sol, = 5762K
$t$	tiempo [s]
$t$	tiempo característico de regeneración [s]
$U$	coeficiente global de pérdidas [ $Wm^2K^{-1}$ ]
$U$	energía potencial [ $kgm^2s^{-2}$ ]
$V_1$	volumen del gas de trabajo en el calentador [ $m^3$ ]
$V_2$	volumen del gas de trabajo en el enfriador [ $m^3$ ]
$v$	velocidad [ $ms^{-1}$ ]
$W$	trabajo [J]
$x$	fracción de la conductancia térmica [-]
$x, y, z$	coordenada cartesiana [m]
$Y_i$	diámetro de la imagen formada [m]
<b>Griegos</b>	
$\alpha$	absortividad [-]
$\alpha$	difusividad térmica [ $m^2s^{-1}$ ]
$\alpha$	polarizabilidad [ $CV^{-1}m^{-1}$ ]
$\alpha_a$	absortividad [-]

$\alpha_0$	polarizabilidad lineal [ $CV^{-1}m^{-1}$ ]
$\alpha_2$	polarizabilidad no lineal [ $CmV^{-3}$ ]
$\beta$	coeficiente de atenuación [ $m^{-1}$ ]
$\beta_n$	valores característicos [ $m^{-1}$ ]
$\Gamma$	ecuación 2.133
$\gamma$	constante de amortiguamiento [ $s^{-1}$ ]
$\epsilon$	efectividad del intercambiador de calor [-]
$\epsilon$	emisividad [-]
$\epsilon^*$	función dieléctrica [ $Fm^{-1}$ ]
$\epsilon_0$	permitividad en el vacío, = $8.85419 \times 10^{-12} Fm^{-1}$
$\epsilon_p$	espesor de la cubierta protectora de la fibra óptica [ $m$ ]
$\epsilon_r$	permitividad relativa [-]
$\epsilon_r$	espesor del revestimiento de la fibra óptica [ $m$ ]
$\eta_c$	eficiencia del colector [-]
$\eta_o$	eficiencia de óptica del colector [-]
$\eta_r$	eficiencia de transmisión [-]
$\eta_{ro}$	eficiencia óptica de transmisión (incluye pérdidas por reflexión) [-]
$\theta$	ángulo polar [ $^\circ$ ]
$\theta$	temperatura [ $^\circ C$ ]
$\theta_{max}$	ángulo máximo de admisión en la fibra óptica [ $^\circ$ ]
$\kappa$	vector de propagación [ $m^{-1}$ ]
$\kappa$	magnitud del vector de propagación [ $m^{-1}$ ]
$\kappa_L$	coeficiente de absorción lineal [ $m^{-1}$ ]
$\kappa_{NL}$	coeficiente de absorción no lineal [ $m^{-1}$ ]
$\kappa_T$	coeficiente de absorción total [ $m^{-1}$ ]
$\lambda$	longitud de onda [ $m$ ]
$\mu$	permeabilidad [ $Hm^{-1}$ ]
$\mu_0$	permeabilidad en el vacío, = $1.25664 \times 10^{-6} Hm^{-1}$
$\mu_r$	permeabilidad relativa [-]
$\xi$	constante de anarmonismo [ $m^{-2}s^{-2}$ ]
$\pi$	pi, = 3.1415927...
$\rho$	densidad [ $kgm^{-3}$ ]
$\rho_c$	densidad de carga [ $Cm^{-3}$ ]
$\rho_m$	reflectancia del espejo parabólico [-]
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzman, = $5.67051 \times 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$
$\sigma_s$	constante de dispersión [ $m^{-1}$ ]
$\phi_n$	diámetro del núcleo de la fibra [ $m$ ]
$\phi$	constante de universal de los gases, = $8.31451 [Jmol^{-1}K^{-1}]$
$\chi_L$	susceptibilidad eléctrica lineal [-]
$\chi_{NL}$	susceptibilidad eléctrica no lineal [ $m^2V^{-2}$ ]
$\chi_m$	susceptibilidad magnética [-]
$\psi$	función de dispersión [ $m^{-1}$ ]
$\Omega$	ángulo sólido [ $sr$ ]
$\omega$	frecuencia [ $s^{-1}$ ]
$\omega_0$	frecuencia natural de oscilación [ $s^{-1}$ ]
$\omega_p$	frecuencia de plasma [ $s^{-1}$ ]

## Subíndices

<i>A</i>	de la marca Lumonics
<i>HA</i>	absorbedor/calentador
<i>amb</i>	ambiente
<i>B</i>	de la marca Oriel
<i>b</i>	cuerpo negro
<i>c</i>	complejo
<i>D</i>	domo
<i>e</i>	equivalente
<i>ent</i>	entrada
<i>fo</i>	fibra óptica
<i>fue</i>	fuente
<i>g</i>	general
<i>gen</i>	generada
<i>H</i>	fuelle de calor, calentador
<i>h</i>	homogénea
<i>j</i>	j-ésima especie de carga
<i>L</i>	a la salida de la fibra óptica
<i>L</i>	sumidero de calor, enfriador
<i>p</i>	particular
<i>per</i>	pérdidas
<i>of</i>	manejo de fibras ópticas
<i>R</i>	en la superficie lateral de la fibra óptica
<i>s</i>	permanente
<i>sal</i>	salida
$\lambda$	por unidad de longitud de onda
<i>0</i>	a la entrada de la fibra óptica
<i>*</i>	complejo conjugado
<i>-</i>	valor medio

### Superíndices

<i>c</i>	por conducción
<i>r</i>	por radiación
<i>'</i>	parte real
<i>"</i>	parte imaginaria



## Resumen

En este trabajo se estudia teórica y experimentalmente el comportamiento térmico de fibras ópticas con núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza durante la transmisión de energía radiativa.

Se reporta el estado del arte del uso de fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada.

Se presenta un análisis teórico de la respuesta no lineal del núcleo de la fibra a la intensidad radiativa. Además se muestra la dependencia del índice de refracción con la intensidad. Mediante las ecuaciones de Maxwell se desarrolla una ecuación que gobierna la interacción de una onda electromagnética que se propaga a través de una fibra óptica con el material de la fibra, considerando a éste un medio con respuesta no lineal e isotrópico. Se determina el coeficiente de absorción no lineal, el cual depende la amplitud del campo eléctrico. Con base en la teoría de Drude-Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se estima el comportamiento del coeficiente de extinción y del coeficiente de absorción de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  como función de la frecuencia, en el rango del espectro solar. Se muestra que en una fibra de  $\text{SiO}_2$  el coeficiente de extinción no lineal presenta un valor despreciable cuando la energía solar transmitida es colectada y concentrada por un concentrador circular. Se concluye que el coeficiente de extinción lineal resulta una buena aproximación para el cálculo de la absorción durante la transmisión de energía radiativa y no se requiere del coeficiente de extinción de segundo orden para modelar el comportamiento de una fibra de  $\text{SiO}_2$  cuando ésta transmite energía solar concentrada.

Como parte del estudio teórico de esta investigación, se desarrolla un modelo unidimensional que emula el comportamiento térmico de una fibra óptica de  $\text{SiO}_2$  durante la transmisión de energía radiativa concentrada. En dicho modelo se toma en cuenta la ganancia de energía radiativa absorbida, la conducción de calor y las pérdidas convectivas hacia los alrededores. El modelo desarrollado se resuelve de manera analítica.

En el estudio experimental de la investigación, se desarrolla una metodología sencilla para determinar el coeficiente lineal de absorción. Se realizaron mediciones de temperatura a lo largo de las fibras ópticas para determinar la distribución temporal y espacial de la temperatura como función de la radiación de entrada. Con los resultados experimentales obtenidos y parámetros físicos reportados en la literatura, se implementa el modelo teórico propuesto para llevar a cabo la emulación de una fibra óptica de  $\text{SiO}_2$  cuando ésta transmite energía radiativa concentrada. Al comparar los resultados de la emulación térmica y los resultados experimentales se observa que los resultados obtenidos del modelo teórico difieren ligeramente de los resultados experimentales en el estado transitorio, sin embargo el modelo reproduce satisfactoriamente el comportamiento térmico en estado permanente. No obstante que el modelo teórico desarrollado es un modelo sencillo y simplificado, reproduce apropiadamente la física involucrada en la transmisión de energía radiativa a través de fibras ópticas.

Como parte complementaria de esta investigación, se examina una posible aplicación de las fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada. Con base en el modelo propuesto por Curzon y Alhorn, se analiza desde el punto de vista de la primera y la segunda leyes de la termodinámica, un sistema de conversión de energía solar. Este sistema cuenta con un colector solar de concentración, un manojo de fibras ópticas para la transmisión del flujo solar concentrado y una máquina térmica de ciclo Stirling activada por la energía solar proveniente de las fibras. Se diseña el absorbedor/calentador del sistema de conversión donde se toman en cuenta las irreversibilidades internas y externas del sistema de conversión. Se presenta el valor óptimo de la temperatura en el absorbedor/calentador al tomar en cuenta que la máquina térmica solar se encuentra entre los límites de reversibilidad termodinámica y la potencia de operación máxima.

# Abstract

In this work, the thermal behavior of optical fibers with high purity  $\text{SiO}_2$  core during the transmission of radiative energy is studied theoretically and experimentally.

The state of the art of the use of optical fibers for the transport of concentrated solar energy is reported.

In order to determine the maximum solar energy than can be transported using  $\text{SiO}_2$  optical fibres, the analysis of non-linear absorption is required. We propose a model based on Maxwell's equations and the Drude Lorentz theory to determine the non-linear absorption for the maximum possible concentration ratio for circular concentrators. The relation between the electric susceptibility and the refractive index with microscopic parameters is provided.

To solve the non-linear model for absorption experimental parameters are used. Our results estimate that the average value over the solar spectrum for the non-linear extinction coefficient for  $\text{SiO}_2$  is  $k_2 = 10^{-29} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$ . With this result we conclude that the non-linear part of the absorption coefficient of  $\text{SiO}_2$  optical fibres during the transport of concentrated solar energy achieved by a circular concentrator is negligible.

A theoretical unidimensional model for the simultaneous transport of heat by conduction and radiation in optical fibers is developed. This model simulates the behavior of an optical fiber of  $\text{SiO}_2$  during the transmission of concentrated radiative energy. It is solved analytically and experimental information is considered for its implementation.

The thermal behavior of the optical fibers is also studied experimentally. An experimental design to determine the linear coefficient of absorption and the temporary and spatial distribution of the temperature is presented. Through the experimental results the theoretical model is validated.

A possible application of the optical fibers to the transport of concentrated solar energy is analyzed. A thermodynamic optimization of irreversible solar mini-dish/Stirling system is studied. The solar collector heat losses by convection and radiation are diminished by using optical fibers to transport concentrated solar energy. We analyze using the First and the Second law, an absorber-heater for the solar heat engine to ensure reducing the heat losses. Taking into account internal and external irreversibilities for the solar heat engine, the optimal operating temperature and the overall efficiency of the system is established.



## Introducción

En los últimos veinte años las fibras ópticas han mantenido un auge importante en el ámbito de las telecomunicaciones. Algunas de las investigaciones desarrolladas en este campo se han dirigido a reducir la absorción de la luz por los materiales que componen las fibras ópticas. Tales investigaciones han creado fibras ópticas con niveles de atenuación particulares, así las fibras ópticas son usadas en aplicaciones diversas dependiendo de sus características de absorción y de los materiales que las conforman. De esta manera, la aplicación de las fibras ópticas se abre camino en otros campos, por ejemplo: en medicina, donde la luz láser de alto nivel es conducida por este medio para cirugía; para iluminación en paneles de control o ambientación; o en sistemas de medición, que al usar luz para el registro de datos, se encuentran libres de ruido electromagnético. Entre las distintas aplicaciones, la que no ha presentado un desarrollo importante es la transmisión de energía solar, que puede ser transformada en calor útil, o bien en energía eléctrica, entre otros.

La investigación en materiales ha permitido recientemente que la producción de fibras ópticas de sílica altamente transparente sea fácil y sus costos de producción accesibles. Este tipo de fibras ópticas cuentan con niveles de atenuación bajos que se traducen en la posibilidad de transportar potencias altas durante periodos largos de operación.

Si consideramos que la energía irradiada por el Sol que llega a la superficie de la tierra se encuentra mayormente contenida en el espectro entre  $0.3$  y  $3.0\mu m$ , y consideramos que las fibras ópticas de  $SiO_2$  de alta pureza permiten transportar un espectro entre  $0.3$  y  $2.5\mu m$  con una atenuación pequeña cuando ésto se lleva a cabo para unos cuantos metros de transmisión, inferimos que este tipo de fibras ópticas puede ser usado para el transporte del flujo radiativo solar.

Así, retomamos la idea de transportar luz, y por tanto energía a través de fibras ópticas. Mediante un concentrador de enfoque en cuyo receptor se coloca una o varias fibras ópticas, se puede transportar el flujo radiativo solar colectado a unos cuantos metros hasta donde se localiza el sistema de conversión de energía. De tal manera que la energía solar colectada y concentrada es transmitida a través de las fibras ópticas aprovechando el fenómeno de reflexión interna total.

La idea básica en esta investigación es estudiar el uso de fibras ópticas aplicadas a la transmisión de energía solar concentrada. Esta forma alternativa de transporte permite disminuir las pérdidas de calor hacia los alrededores, incrementar la eficiencia del sistema de conversión y evitar la complejidad en el diseño estructural de soporte y seguimiento solar.

Es importante mencionar que durante el proceso de transmisión, la atenuación del flujo radiativo se debe principalmente a la energía absorbida por el material de la fibra óptica. Este fenómeno provoca el calentamiento de los componentes de las fibras ópticas, hecho relevante ya que el comportamiento óptico, para la adecuada transmisión, depende de la temperatura. Al ser excedida cierta temperatura se puede provocar el deterioro permanente de las propiedades físicas de la fibra óptica, principalmente sus propiedades ópticas. Por tanto, es importante estudiar el comportamiento térmico de la fibra

óptica durante la transmisión del flujo radiativo.

El presente trabajo tiene por objetivo estudiar de manera teórica y experimental la transferencia de calor por conducción y por radiación en las fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza. Si bien, en un intento por pronosticar el comportamiento térmico de las fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  construimos dos modelos teóricos cuyas soluciones numéricas permiten inferir la evolución de la temperatura cuando se transporta flujo radiativo solar concentrado (*Jaramillo y del Río J.A., 1997, Jaramillo y del Río, 1998 y Jaramillo et al. 1999<sup>1</sup>*), estos modelos limitan su estudio a un coeficiente de absorción lineal para la intensidad de radiación. En estos modelos usamos las curvas de atenuación reportadas en la transmisión de intensidades nominales para opto-telecomunicaciones, que corresponde a niveles bajos de intensidad de radiación. Situación muy comprometida para asegurar que los modelos desarrollados son adecuados. Así, por ejemplo, una intensidad de radiación de alto nivel puede cambiar el índice de refracción del medio a través del cual pasa y deben tomarse en cuenta entonces los efectos no lineales en el coeficiente de absorción. Es por esta razón que por inicio en este trabajo, estudiamos teóricamente la respuesta no lineal a la intensidad radiativa de una fibra óptica de  $\text{SiO}_2$ . Demostramos que el coeficiente de absorción no lineal es despreciable cuando se trata del transporte de energía solar concentrada a través de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  y es suficiente considerar la parte lineal del coeficiente de absorción al modelar el comportamiento térmico de dicha fibra óptica.

Más adelante, estudiamos teórica y experimentalmente su comportamiento térmico. Cabe mencionar que en el desarrollo teórico de este trabajo, proponemos un modelo unidimensional el cual resolvemos de manera analítica, facilitando su implementación en comparación con los modelos anteriormente propuestos que se resuelven de manera numérica mediante diferencias finitas.

En la parte final de este trabajo presentamos además una posible aplicación de las fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada. Estudiamos desde el punto de vista de la termodinámica la aplicación de las fibras ópticas que transportan energía solar concentrada para activar una máquina Stirling y llevar a cabo la conversión de energía térmica a energía mecánica.

A continuación describimos de manera breve el contenido de esta tesis.

Comenzamos por una búsqueda bibliográfica del estado del arte sobre la transmisión de energía solar por guías de onda y fibra ópticas. Así, en el capítulo 1 resumimos los aspectos sobresalientes de las investigaciones reportadas en la literatura relacionadas con este tema.

En el capítulo 2 estudiamos de manera teórica la respuesta no lineal del material de la fibra a la intensidad radiativa. Analizamos la propagación de una onda electromagnética a través del núcleo de la fibra óptica de  $\text{SiO}_2$  al suponer un medio con respuesta no lineal e isotrópico. Con base en la teoría electromagnética clásica estudiamos el comportamiento macroscópico del material con la interacción del campo eléctrico y con fundamento en la teoría de dispersión óptica, hacemos lo propio desde un punto de vista microscópico. Al apoyarnos en las ecuaciones de Maxwell y la teoría de Drude-Lorentz determinamos el comportamiento del coeficiente de extinción y por ende el coeficiente de absorción no lineal durante la transmisión de energía solar concentrada. Mostramos que el coeficiente de absorción no lineal es despreciable al considerar flujo radiativo solar concentrado. Por esta razón en el análisis del comportamiento térmico de la fibra óptica en estudio no consideramos los efectos no lineales.

En el capítulo 3 desarrollamos un modelo teórico para la transferencia simultánea de calor por conducción y por radiación en fibras ópticas. Proponemos un modelo matemático unidimensional con valores de frontera cuya solución la obtenemos de manera analítica. La implementación de la solución la llevamos a cabo considerando datos experimentales de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza. El modelo propuesto nos permite entonces emular el comportamiento térmico de una fibra

<sup>1</sup> Este trabajo fue desarrollado como parte de las actividades de la estancia doctoral. Con base en los resultados obtenidos durante la realización de la tesis de maestría se llevaron a cabo algunas modificaciones a los modelos propuestos previamente. Cabe indicar que este trabajo vincula la investigación iniciada en la maestría y la investigación realizada en el doctorado.

óptica de  $\text{SiO}_2$  durante la transmisión de energía radiativa.

En el capítulo 4 reportamos la investigación experimental del comportamiento térmico de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza cuando éstas transportan flujo radiativo. Presentamos los aspectos más importantes en el diseño, construcción y caracterización del dispositivo experimental. Reportamos las mediciones de la evolución de temperatura sobre la superficie de dos fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  durante la transmisión de energía radiativa. Presentamos además los valores obtenidos para el coeficiente de absorción de dichas fibras.

En el capítulo 5 presentamos una posible aplicación de las fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada. Con base en la primera y en la segunda leyes de la termodinámica analizamos una máquina térmica de ciclo Stirling activada por energía solar transportada por fibras ópticas. Diseñamos la parte correspondiente al absorbedor/calentador de la máquina térmica solar y obtenemos, con base en la eficiencia global del sistema, la temperatura de operación óptima. Esto lo llevamos a cabo con base en el modelo de Curzon-Ahlborn donde se considera las irreversibilidades internas y externas de la máquina térmica solar de ciclo Stirling.

Si bien, en cada capítulo presentamos de manera específica los resultados y las conclusiones de los puntos más sobresalientes desarrollados, al final de este trabajo incluimos las conclusiones globales que resaltan las contribuciones de nuestra investigación.



# Capítulo 1

## Antecedentes

### 1.1 Introducción

Es predecible que las fuentes energéticas basadas en petróleo, gas natural y carbón se agoten en un futuro próximo. Ni aún la estimación más optimista de reservas adicionales justifica un consumo ilimitado. Por otra parte, es claro que el desarrollo industrial y socioeconómico de un país depende fuertemente de la solución de su problemática energética. Por esta razón, varias alternativas en energías renovables han comenzado a surgir, pretendiendo responder a la demanda de energía.

Una de las vías hacia el uso de la energía renovable es el aprovechamiento de la energía solar. El empleo de dicha energía no es una idea novedosa, ya que la humanidad la ha empleado desde hace siglos. Sin embargo, es hasta la década de 1970 que se ha incrementado la investigación y desarrollo en esta alternativa buscando aumentar la eficiencia y una idealizada convivencia con la naturaleza en un desarrollo sustentable.

Si bien este tipo de energía es abundante, universal y con un impacto ambiental bajo, la ingeniería ha encontrado grandes limitantes en su utilización, como es el hecho de su carácter oscilante e intermitente, su dispersión, su baja intensidad, las bajas eficiencias de conversión asociadas a los actuales dispositivos y su complicado almacenamiento.

El esfuerzo por lograr un manejo conveniente y un adecuado uso de la energía proveniente del Sol que permita satisfacer los requerimientos de demanda energética, ha impulsado durante los últimos años importantes proyectos de desarrollo científico-técnico.

Las vertientes fundamentales para la utilización del recurso solar son: la conversión fototérmica, la conversión fotovoltaica y en recientes fechas, la conversión fotoquímica.

La conversión fototérmica se encarga de hacer uso del recurso solar para obtener energía calorífica. En estos sistemas de conversión se busca captar la energía necesaria para una disponibilidad termodinámica satisfactoria la cual depende de la temperatura de operación del sistema y de su transformación en calor útil. En este tipo de conversión se usa de manera directa la energía solar. por ejemplo, en hornos solares que trabajan con alta concentración, destilación de agua, generación eléctrica mediante efecto termoiónico y otros, o bien de manera indirecta a través del calentamiento de fluidos de trabajo para distintos usos; calefacción, refrigeración, secado, generación eléctrica mediante ciclos termodinámicos, etc. (*Duffie y Beckman, 1991*).

La conversión fotovoltaica genera energía eléctrica de manera directa mediante el uso de celdas construidas de materiales semiconductores que permiten la conversión de la energía solar (Chopra y Das, 1981). Estos sistemas son usados generalmente en motores eléctricos y en iluminación. son auxiliados principalmente por bancos de baterías que almacenan la energía eléctrica producida durante el día.

La conversión fotoquímica es una rama de investigación que ha comenzado a tener un crecimiento muy significativo y se vislumbra como una alternativa más, junto con las dos mencionadas. En la conversión fotoquímica se usa la energía radiante del Sol para generar reacciones fisico-químicas (Grätzel, 1983), teniendo por ejemplos la producción de hidrógeno por fotocatalisis (Serpone y Pelizzetti, 1989) y la degradación de sustancias orgánicas utilizando la radiación ultravioleta (Grätzel, 1983).

Algunos de los sistemas de conversión de energía solar utilizan concentradores que permiten incrementar la densidad de energía solar por unidad de área con la finalidad de lograr una adecuada disponibilidad termodinámica e incrementar la eficiencia de conversión (Duffie y Beckman, 1991). Cabe aclarar que los sistemas de concentración son sistemas auxiliares, constituidos por una gran superficie o varios pequeños paneles reflejantes o refractantes en donde se capta la energía solar para ser concentrada (Braun y Mitchell, 1983).

Dentro de estos sistemas de concentración se encuentra el concentrador de enfoque, el cual debe orientarse continuamente con gran exactitud para seguir al Sol y dirigir de manera precisa la radiación directa hacia el receptor, que incluye al absorbedor (Duffie y Beckman, 1991 y Rabl, 1976 y 1985). En estos sistemas de concentración frecuentemente se acopla el sistema de conversión en el receptor, disminuyendo las pérdidas por transporte; sin embargo, esto implica que el sistema de conversión se encuentre a la intemperie disminuyendo su vida útil e involucre el diseño de complejas estructuras de seguimiento y soporte.

Aún cuando las pérdidas de calor en un concentrador se reducen con la disminución del área del absorbedor con respecto a la del sistema óptico, otras pérdidas se hacen más importantes, como son: las pérdidas ópticas inherentes al sistema óptico-receptor y pérdidas de calor hacia los alrededores en el transporte de energía (Rabl, 1976 y 1985). Estas últimas son debidas a que algunos sistemas de concentración requieren utilizar un fluido de trabajo que remueva el calor ganado por el absorbedor para transportarlo hasta el sistema de conversión.

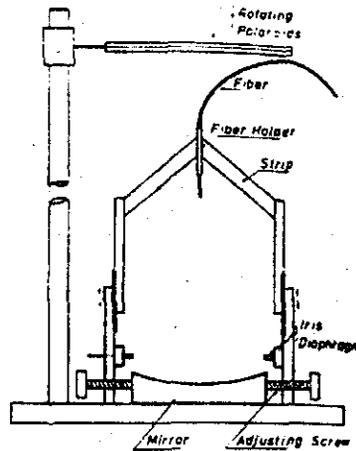
Por tanto, indentificamos dos problemas principales en los sistemas de concentración. Por un lado, la transformación de manera directa en el absorbedor de la energía solar en calor útil implica el uso de estructuras complejas de soporte y seguimiento. Por otro lado, cuando la conversión de la energía solar se lleva acabo de manera indirecta, esto es, cuando se usa un fluido de trabajo para transportar la energía del receptor hasta el sistema de conversión, la eficiencia del sistema disminuye debido a las pérdidas de calor hacia los alrededores.

## 1.2 Energía solar transportada a través de guías de onda y fibras ópticas

Para dar solución a las dos problemáticas principales en los sistemas de concentración que mencionamos, en 1975, Robieux (Robieux, 1975) es el primero en proponer el uso de grandes espejos parabólicos asociados a guías de luz rígidas para transportar la energía solar concentrada a un punto de conversión. Así, los conductores de luz ofrecerían una interesante solución a la problemática antes

mencionada al utilizar el fenómeno de reflexión interna total asociado a los dos índices de refracción diferentes entre el material de la gufa de onda y el medio ambiente. La propuesta hecha por Robieux resultó muy interesante en su momento, puesto que las guías de luz transportarían la energía solar concentrada desde el punto de colección hasta el sistema de conversión disminuyendo las pérdidas de transporte. Sin embargo esta tecnología no llegó a su aplicación pues el sistema de seguimiento para la captación de la energía solar presentó problemas prácticos, debido a la rigidez propia de las guías de onda la cual resultó poco maniobrable.

A finales de 1975, Kato y Nakamura (*Kato y Nakamura, 1976*) estudiaron la capacidad teórica de la transmisión de radiación solar por fibras ópticas, las cuales presentan una rigidez menor debido a sus diámetros pequeños. Determinaron que mediante el uso de sílica fundida era posible obtener una atenuación promedio de  $25\text{dB km}^{-1}$ , correspondiente a 6 por ciento en pérdidas para 10 metros de transmisión. El estudio de Kato y Nakamura se basó en la absorción por longitud de onda del espectro solar al ser transmitido mediante fibras ópticas. De tal forma que establecieron valores promedio de transmisión para las diferentes componentes espectrales de la irradiancia solar.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.1: Esquema del dispositivo experimental usado por Cariou *et al.* (Tomado de Cariou *et al.*, 1982)

En 1981 Cariou *et al.* (*Cariou et al., 1982*) sugirieron que el transporte de energía solar a una distancia de unos cuantos metros puede llevarse a cabo eficientemente por medio del uso de fibras ópticas asociadas a concentradores parabólicos pequeños. Mostraron que un arreglo de varias fibras ópticas, debido a sus secciones circulares, deja espacios vacíos lo que repercute en una disminución de la eficiencia de captación-transmisión del dispositivo. Estudiaron de manera teórico-experimental el acoplamiento de una sola fibra óptica y un espejo parabólico para transporte de energía solar concentrada. Analizaron dos tipos diferentes de fibras de  $\text{SiO}_2$ , una con  $20^\circ$  de apertura y otra con  $30^\circ$  de apertura, ambas con  $1\text{mm}$  de diámetro y 10 metros de longitud. Cada una de estas fibras fue asociada a un espejo parabólico de plata o aluminio como superficie reflejante con un diámetro entre 4 y  $7\text{cm}$ . Reportaron eficiencias de transmisión superiores al 70 por ciento, conduciendo 2 watts a través de 10 metros de fibra óptica con una concentración geométrica cercana a 3000. Además, propusieron, para reducir el diseño estructural de los sistemas de concentración, el montaje de varios módulos

NOO BIEN  
MEDIO AL ALAR

fibra-concentrador en un solo sistema de seguimiento. Vislumbraron algunas aplicaciones potenciales para esta tecnología; hornos solares, tratamiento para materiales, producción de hidrógeno mediante descomposición térmica del agua (pirólisis del agua) y enfatizaron los beneficios del transporte de luz hasta el recinto de laboratorio. En la figura 1.1, se muestra el esquema del dispositivo usado por Cariou *et al.*

En 1984, Patel (*Patel, 1984*) estudió teóricamente la construcción y operación de un dispositivo que usa un manojo de fibras ópticas cuyo extremo es cortado y alineado para formar un receptor plano. Analizó mediante las ecuaciones de Maxwell el comportamiento de las fibras ópticas durante la transmisión de energía solar. Sugirió un dispositivo de conversión donde las pérdidas radiativas hacia la atmósfera son minimizadas incrementando así la eficiencia de conversión. Este dispositivo lo propuso como una cavidad receptora con paredes aisladas térmicamente en su exterior y con paredes interiores negras donde la energía transportada por las fibras ópticas es confinada. Evaluó numéricamente la eficiencia de conversión de la energía solar para diferentes temperaturas de operación del dispositivo de conversión. Reportó una eficiencia teórica próxima a 30 por ciento y calculó una temperatura cercana a  $1000^{\circ}\text{C}$ . Sugirió, además, el uso de concentradores solares para incrementar la eficiencia y la temperatura de operación del dispositivo de conversión fototérmica.

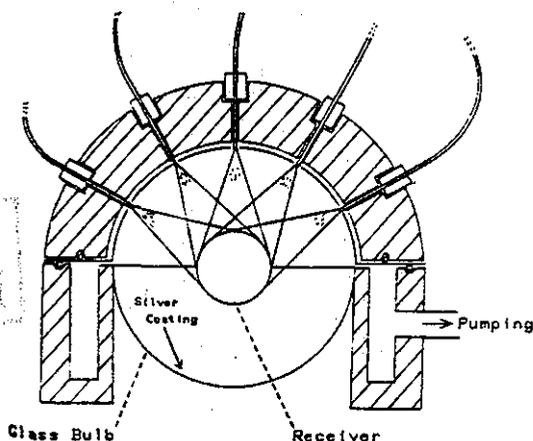


Figura 1.2: Esquema del horno solar usado por Cariou *et al.* (Tomado de Cariou *et al.*, 1985).

Tomando en cuenta las posibilidades que ofrecen las fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada, a finales de 1984 Cariou *et al.* (*Cariou et al.*, 1985) estudiaron de manera teórica-experimental las posibilidades de un horno solar alimentado por este conducto. Mostraron que, en un caso ideal, si un receptor esférico o cilíndrico está completamente rodeado por un recinto bajo vacío constituido por los extremos de las fibras, puede ser llevado a temperaturas muy elevadas. A través de un análisis con base en la primera ley de la termodinámica, reportaron para el caso ideal de un horno con simetría esférica, temperaturas superiores a los  $4700^{\circ}\text{C}$ . Diseñaron, en el caso práctico, un horno solar prototipo alimentado mediante un número limitado de fibras ópticas donde el receptor se encuentra completamente rodeado por una envolvente con superficie de alta reflectancia y está al vacío. Para este último, reportaron temperaturas superiores a los  $1700^{\circ}\text{C}$  para un periodo de

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

operación de 30 minutos con una eficiencia superior al 40 por ciento. En la figura 1.2 se presenta el esquema del horno solar ensayado por Cariou *et al.* (Cariou *et al.*, 1985).

La flexibilidad de las fibras ópticas, que les proveen sus diámetros pequeños, logró resolver la problemática en el sistema de seguimiento que presentaban las guías rígidas. Sin embargo, son estos diámetros pequeños los que restringen la capacidad de colección de la energía solar concentrada, ya que sólo se puede transportar pequeñas cantidades de energía. Surge además otra limitante, el sistema de seguimiento requiere una alta precisión para enfocar la radiación colectada y concentrada hacia el extremo de entrada de la fibra.

Con la idea de mejorar la eficiencia para el acoplamiento de una fibra óptica con el sistema de concentración e incrementar el transporte de energía, en 1989 Cutolo y Rendina (Cutolo y Rendina, 1989) propusieron el uso de fibras ópticas con secciones cónicas a la entrada. Esta particularidad de la fibra provee una área mayor de colección que se traduce en un incremento de la capacidad de transporte de energía solar concentrada y a su vez, en una tolerancia más grande para el enfoque del sistema de concentración. Diseñaron la sección cónica de entrada a la fibra mediante el análisis de trazado de rayos. Estudiaron teóricamente las pérdidas por reflexión, absorción y radiación. Mostraron que fibras ópticas con secciones cónicas a la entrada y ángulos de admisión mayores a  $50^\circ$  pueden transportar energía 10 veces superior al de las fibras sin este tipo de arreglo. Las eficiencias de transmisión reportadas son superiores al 70 por ciento.

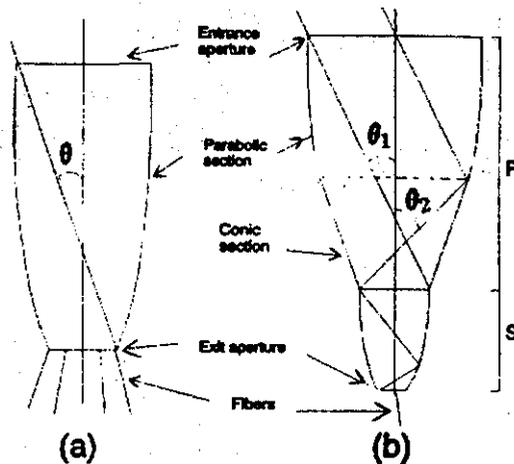


Figura 1.3: Los dos tipos de CPCs utilizados por Khatri *et al.* acoplados a la entrada de las fibras ópticas. a) CPC de configuración simple. b) CPC de configuración compuesta. (Tomado de Khatri *et al.*, 1993).

En 1993, Khatri *et al.* (Khatri *et al.*, 1993) sugirieron el uso de un concentrador parabólico compuesto (CPC) acoplado a un manojó de fibras ópticas. De esta manera el sistema concentrador de enfoque es sustituido por el CPC el cual no requiere de seguimiento solar ya que su configuración geométrica utiliza múltiples reflexiones para concentrar la luz solar (Rabl, 1976). Estudiaron teóricamente la geometría y el acoplamiento del sistema y reportaron eficiencias cercanas al 70 por ciento para este dispositivo cuando se usan superficies con reflectancia de 0.9. En la figura 1.3 se muestran

los dos tipos de CPCs utilizados por Khatri *et al.*

Para evitar los espacios vacíos que ocurren en un arreglo de varias fibras ópticas debido a sus secciones circulares, en 1997 Liang *et al.* (Liang *et al.*, 1997 y 1998) sugirieron pulir la sección de entrada de cada fibra de forma hexagonal para formar una sola columna, de tal suerte que se aumenta el área de sección transversal y se evitan los espacios vacíos. Estudiaron experimentalmente un sistema de dos espejos parabólicos con borde hexagonal acoplado a un manojo de fibras previamente pulidas. Dichos espejos estaban montados en un sistema de seguimiento solar de dos ejes y cada uno de los manojos consistía de 19 fibras ópticas de 1.5mm de diámetro y 3 metros de largo. Reportaron que con una radiación incidente de  $650Wm^{-2}$  cada espejo capturaba 143W de energía solar y la concentraba en un foco con forma hexagonal que empataba el área de entrada del manojo de fibras ópticas. La energía transmitida por cada manojo de fibras era de 100W y presentaba una eficiencia de transporte de 70 por ciento. En la figura 1.4 se muestra el arreglo de las 19 fibras ópticas propuesto por Liang *et al.*

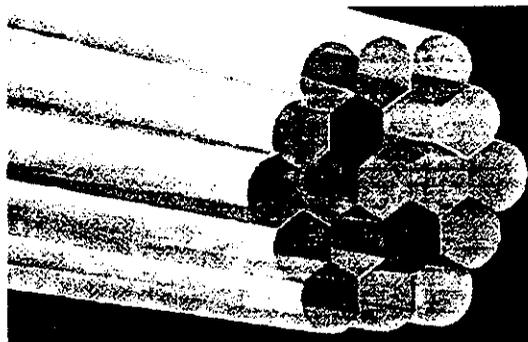


Figura 1.4: Diseño propuesto por Liang *et al.* El manojo de 19 fibras es agrupado sin espacios gracias a su acabado hexagonal. (Tomado de Liang *et al.*, 1997).

La producción de guías de onda de sílica altamente transparente fue hace algunos años difícil y complicada, y si bien éstas ideas resultaron atractivas, su aplicación no tuvo un auge significativo debido a que las guías de luz y las fibras ópticas contaban con niveles altos de atenuación que se traducían sólo en la posibilidad de transportar potencias bajas durante períodos cortos de operación.

En años recientes se ha presentado un aumento significativo en la aplicación de fibras ópticas para la transmisión de energía solar concentrada. Esto se debe principalmente al desarrollo que en la última década han tenido las fibras ópticas en su aplicación en el ámbito de las opto-telecomunicaciones y para iluminación. Este desarrollo tecnológico de nuevas sílicas ha logrado obtener materiales que presentan niveles menores de atenuación, mejorando así la eficiencia de transmisión y permitiendo, por tanto, el transporte de flujos radiativos concentrados con niveles más altos y durante períodos mayores.

Entre 1995 y 1997, Peill y Hoffann (Peill y Hoffann, 1997) diseñaron y probaron un reactor prototipo para la degradación por fotocatalisis de contaminantes orgánicos en medio acuoso. Este dispositivo concentra luz solar mediante un paraboloide de revolución con superficie reflectiva de plata usado como concentrador primario y una lente convexa usada como concentrador secundario. De esta manera, se hace incidir la energía solar colectada y concentrada en un extremo de cable de fibras ópticas. A la parte final del cable se le retira su revestimiento y es sustituido por un depósito

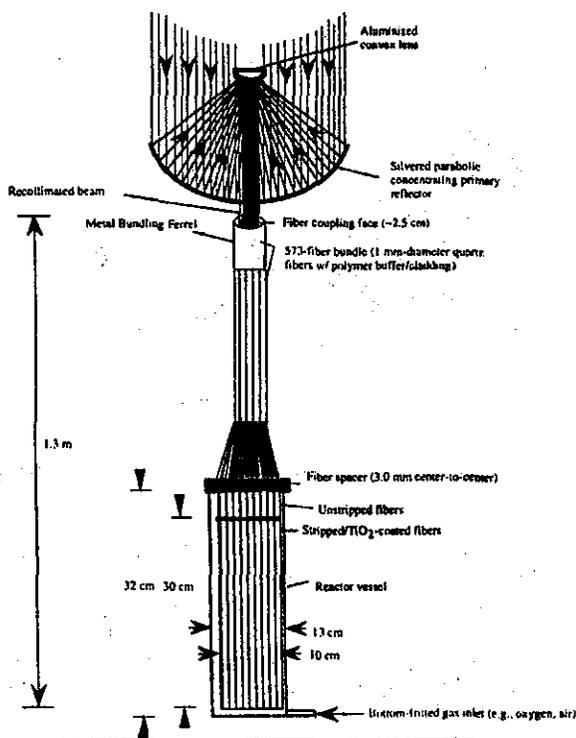


Figura 1.5: Esquema del reactor prototipo desarrollado por Peill y Hoffann. (Tomado de Peill y Hoffann, 1997).

de  $\text{TiO}_2$ . Esta parte del cable se encuentra inmersa en la solución de reacción, de tal suerte que la componente de luz ultravioleta transmitida a través de la fibra activa al fotocatalizador para llevar a cabo la reacción fotocatalítica para la reducción de materiales orgánicos. Las fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  presentan una importante absorción en el rango ultravioleta, lo que implica una eficiencia baja del dispositivo, sin embargo el depósito del  $\text{TiO}_2$  sobre la fibra óptica es su principal ventaja, pues el  $\text{TiO}_2$  no tiene que ser recuperado por métodos fisicoquímicos posteriores. En la figura 1.5 se presenta el esquema del reactor diseñado por Peill y Hoffann.

En 1998 se propone el uso de fibras ópticas para la producción de hidrógeno mediante fotoelectrólisis (Jaramillo et al., 1998). La energía solar transportada a través de las fibras activa un fotoánodo del cual se desprenden electrones que circulan mediante un circuito externo hasta el cátodo. La diferencia de potencial generada en la transformación de energía radiativa permite la disociación de agua (usada como electrolito) en oxígeno e hidrógeno gaseosos. La difusión de estos dos gases se lleva a cabo a través de una membrana permeable, así es posible almacenar el hidrógeno producido. En este estudio teórico se sugiere el uso de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza para la transmisión de energía solar y se estima, a través de un estudio por primera ley de la termodinámica, un aprovechamiento en

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

la conversión de energía del fotoelectrodo en alrededor del 40 por ciento. En la figura 1.6 se presenta el esquema del reactor para la producción de hidrógeno activado por fotocatalisis.

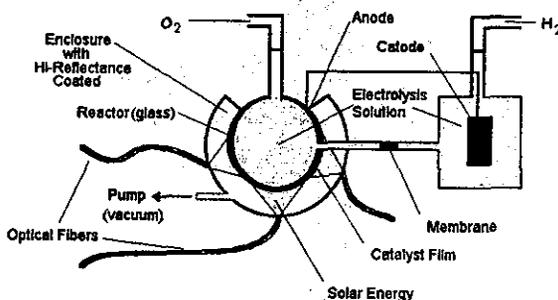


Figura 1.6: Reactor para la producción de hidrógeno activado por fotocatalisis. *Jaramillo et al., 1998*.

En 1999, Feueremmann y Gordon (*Feueremmann y Gordon, 1999*) propusieron un nuevo arreglo para la captación y concentración de energía solar que mejora la capacidad de transmisión de fibras ópticas con diámetros pequeños. Estudiaron el uso de espejos parabólicos pequeños con diámetros de 20cm en cuyo punto focal se coloca un espejo plano como concentrador auxiliar. De esta manera, la energía solar es concentrada por el espejo parabólico y ésta sufre un segundo redireccionamiento debido a la reflexión del espejo plano. De tal manera que la energía solar concentrada apunta hacia la entrada de una sola fibra óptica con 1mm de diámetro. Feueremmann y Gordon analizaron experimentalmente tres tipos diferentes de fibras ópticas de SiO<sub>2</sub> (con aperturas de 20, 40 y 60°) y discos parabólicos con distintas distancias focales y distintos diámetros. Los módulos de concentración fueron agrupados y montados en un solo seguidor solar. Para este sistema, reportaron eficiencias de colección cercanas al 80 por ciento y flujos radiativos del orden de 30,000 soles.

Feueremmann y Gordon, utilizaron este concepto nuevo en el ámbito médico. Analizaron teórica y experimentalmente la sustitución de luz láser de alta potencia usada en cirugía por energía solar concentrada transmitida por fibras ópticas (*Feueremmann y Gordon, 1998*). De tal suerte que un arreglo de concentración de dos etapas (espejo parabólico y espejo plano) y el uso de una fibra de SiO<sub>2</sub> de muy baja atenuación permiten conducir la energía solar concentrada hasta la sala de operación. Con un espejo parabólico con 20cm de diámetro y una fibra óptica de 1mm de diámetro el sistema prototipo es capaz de entregar densidades de flujo de  $7,000Wcm^{-2}$  para cirugía de contacto, es decir aplicada directamente sobre el tejido celular a ser intervenido y  $3,000Wcm^{-2}$  para cirugía sin contacto donde se irradia una zona más amplia de tejido.

Por otra parte, Gordon en colaboración con Choon (*Gordon y Choon, 2000*), estudiaron teóricamente la manera de aumentar el coeficiente de operación (COP) en los sistemas de refrigeración activados por energía solar. Así, mediante la aplicación de un sistema de concentración de dos etapas y el uso de fibras ópticas para transmitir la energía solar concentrada, sugirieron la modificación del esquema convencional para refrigeración por un esquema termodinámico en cascada. Este sistema incrementa de manera importante la entrada de calor como fuente de alta temperatura. Muestran además que el sistema de miniplatos propuesto para la captación de energía abre la posibilidad para sistema de refrigeración solar a pequeña escala con un muy alto desempeño ya que el sistema ofrece módulos compactos de manejo sencillo. Con el arreglo propuesto estimaron que es posible obtener

COPs superiores a 1.4. Es decir que  $1kW$  de radiación solar incidente conduce a  $1.4kW$  o más de potencia de enfriamiento<sup>1</sup>. En la figura 1.7 se muestra el arreglo sugerido por Feueremann y Gordon (Feueremann y Gordon, 1999).

A principios de 1999, con base en la capacidad de las fibras ópticas para transmitir energía solar concentrada, Hernández *et al.* (Hernández *et al.*, 1999) desarrollaron teórica y experimentalmente un reflectómetro. Este dispositivo de medición acopla un concentrador parabólico y un par de fibras ópticas para determinar la reflectividad y absorptividad solar para materiales opacos y difusos que se encuentran a alta temperatura. De tal suerte que en este dispositivo la energía solar concentrada, proveniente del concentrador parabólico y transportada por una fibra óptica, ilumina de manera perpendicular una muestra de material con  $3mm$  de espesor y  $25mm$  de diámetro, mientras una segunda fibra colecta el flujo reflejado por la muestra en un barrido de  $0$  a  $80^\circ$  a intervalos regulares de  $10$  grados. Esta segunda fibra es conectada a una fotopila con respuesta espectral plana. Los valores de lectura de la fotopila son registrados por un sistema de adquisición de datos y almacenados por una computadora personal. El sistema, enfriado por agua, puede operar a  $1400Wcm^{-2}$  y lograr en las muestras temperaturas de operación cercanas a  $2500^\circ C$ .

Una de las principales razones por la que no se ha integrado el uso de las fibras ópticas dentro de los sistemas de energía solar es el alto costo de producción para fibras con diámetros y ángulos de admisión grandes. Por ejemplo, la producción masiva para una fibra óptica con núcleo de  $SiO_2$  de alta pureza y  $125\mu m$  de diámetro tiene un costo aproximado de  $\$0.10$  dolar por metro, mientras que una fibra óptica del mismo material con  $1mm$  de diámetro, que no cuenta con una producción intensa, tiene un costo por encima de  $\$65.00$  dolares por metro (Polymicro Technologies, 1999).

A mediados de 1999, Zik *et al.* (Zik *et al.*, 1999), llevaron a cabo un análisis de costos en el uso de fibras ópticas relacionando los niveles de atenuación, la capacidad de transmisión (debido a la apertura numérica) y la facilidad del acoplamiento con el sistema de concentración solar para el transporte de energía. Este estudio de costos se dirigió a la comparación de tres sistemas propuestos para la producción de energía eléctrica a gran escala. Diseñaron un captador solar que transmite la energía colectada a través de fibras ópticas hasta el receptor. Compararon un sistema de concentración de torre SCOT (de sus siglas en inglés *Solar Concentration of Tower*) desprovisto de fibras ópticas, con dos sistemas que acoplan fibras ópticas para el transporte y manejo de la luz solar concentrada, el TTFOF (de sus siglas en inglés *Tower-Top Fiber-Optic System*) y el TROF (de sus siglas en inglés *Tower Reflector with Optical Fibers*). Los tres sistemas cuentan con un campo de helióstatos que colectan la energía solar y apuntan hacia la parte alta de una torre central. Los sistemas SCOT y TROF a su vez cuentan con un reflector hiperboloide situado en la parte alta de la torre lo que les permite concentrar la radiación solar en un plano focal situado próximo a la base. Así, el sistema SCOT tiene un receptor convencional mientras que el TROF cuenta con un receptor con fibras ópticas. El sistema TTFOF no cuenta con el reflector hiperboloide y la energía colectada por los helióstatos se apunta de manera directa hacia el captador solar provisto con las fibras ópticas. Zik *et al.* muestran que el TTFOF presenta una eficiencia mayor que el SCOT debido principalmente a las pérdidas por reflexión que involucra este último. Analizaron tres tipos de fibras (dos comerciales y una hipotética) y mostraron que los sistemas TTFOF y TROF presentan una efi-

<sup>1</sup> El coeficiente de desempeño o COP (por sus siglas en inglés *coefficient of performance*), para un ciclo termodinámico de refrigeración, se define como la potencia de enfriamiento entregada  $Q_L$  dividida por la potencia de entrada  $W$  (la potencia de entrada puede ser eléctrica, térmica, solar o cualquier otra)

$$COP = \frac{Q_L}{W}$$

Los recientes avances en el uso de la energía solar y en los sistemas de refrigeración, hacen factible convertir la energía solar en potencia de enfriamiento con coeficientes de desempeño superiores a 100% (Bejan, 1993).

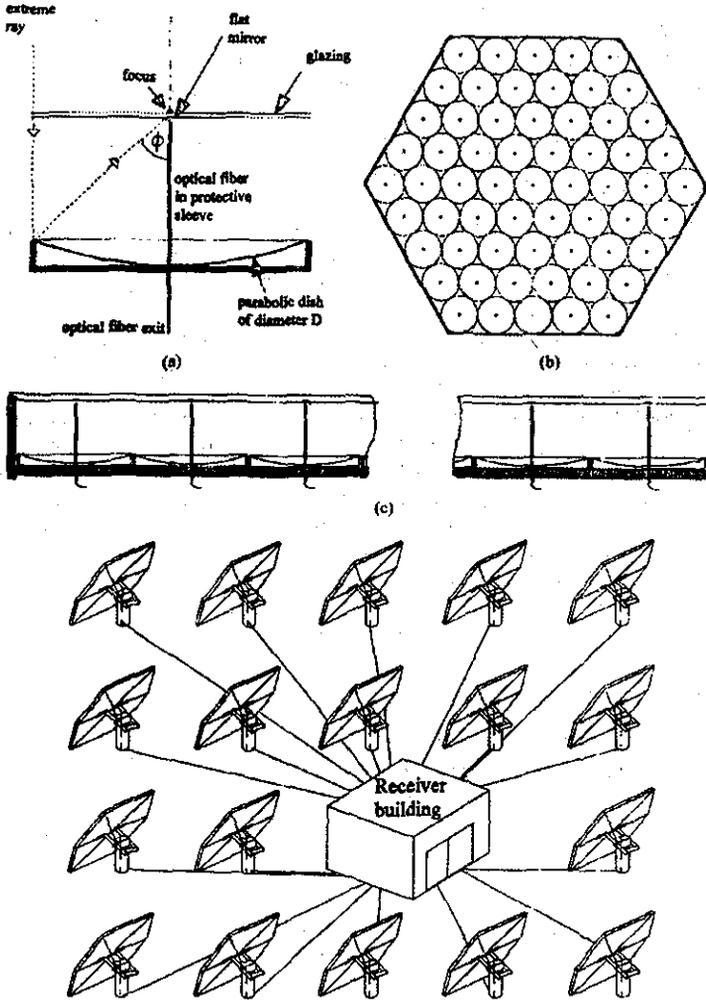


Figura 1.7: Esquema del sistema propuesto por Feueremann y Gordon. a) sección transversal para un solo módulo plato-fibra óptica, b) vista superior y c) sección transversal de los módulos solares. d) campo de módulos solares. (Tomado de Feueremann y Gordon, 1999).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ciencia de 23% y 18%, respectivamente. Tales eficiencias resultan mayores que la del sistema SCOT que tiene sólo 16%. Mediante un análisis de costos compararon los tres sistemas y mostraron que el sistema TTFOS incrementa su costo en un 22% y el sistema TROF en un 11% en comparación con el sistema SCOT. Cabe aclarar que el tratamiento de costos asociados se llevó a cabo bajo la suposición de una producción en masa para fibras con 1mm de diámetro con un costo de \$0.50 de dolar por metro. En la figura 1.8 se muestran los tres sistemas, TTFOS, SCOT y TROF.

Al inicio de 2000, Kribus *et al.* (Kribus *et al.*, 2000), incluyen siete nuevos sistemas al análisis previo de costos (Zik *et al.*, 1999) para la producción de energía eléctrica. El primer sistema propuesto se trata de un campo de colectores solares compuestos cada uno de éstos por platos parabólicos pequeños asociados a una sola fibra óptica como se muestra en la figura 1.7 (Feuermann y Gordon, 1999). Así, la luz colectada por el campo de colectores es guiada por las fibras ópticas varias decenas de metros hasta un ciclo Brayton para la generación de electricidad. En otros dos sistemas sugirieron acoplar un solo colector solar a un ciclo Brayton o un ciclo Stirling para la producción de electricidad permitiendo que la luz sea guiada por las fibras ópticas unos cuantos metros. Propusieron entonces, para estos dos casos, tres vías diferentes para acoplar las fibras ópticas al colector solar para el transporte de la luz solar hasta el ciclo termodinámico. De tal suerte que se cuentan seis distintos sistemas. Así, una vía es colocar un manojo de fibras en el punto focal de un plato parabólico; otra es utilizar un concentrador parabólico en cuyo plano focal es colocado un espejo hiperboloide lo que permite situar la entrada del manojo de fibras en la parte posterior del hiperboloide y por último usar pequeños platos parabólicos asociados a una sola fibra óptica donde es colocado un espejo plano en el foco del plato parabólico. Kribus *et al.* muestran, a través del análisis de costos, que el sistema de un solo colector que usa el ciclo Stirling y utiliza un hiperboloide como segundo concentrador presenta el menor costo, seguido por el TROF y el caso con mayor costo asociado es el campo de colectores compuesto por espejos pequeños ya que demanda una cantidad grande de fibras ópticas para su implementación. En la figura 1.9 se muestra el sistema de un solo colector acoplado al ciclo Stirling. Este sistema utiliza un hiperboloide como segundo concentrador para dirigir el haz de energía solar hacia la entrada de la fibra.

Por otro lado, una de las más novedosas aplicaciones de las fibras ópticas en el transporte de energía solar está en el ámbito de la biotecnología. Esto se debe principalmente a que las intensidades de radiación solar requeridas son pequeñas comparadas con otros sistemas. Los fotobiorreactores activados por luz solar guiada por fibras ópticas ofrecen ventajas sobre métodos físico-químicos convencionales debido a que no producen, en la mayoría de los casos, contaminantes secundarios y a su costo bajo de operación.

En 1999, Ogbonna *et al.* (Ogbonna *et al.*, 1999) reportaron el diseño y construcción de un fotobiorreactor para el cultivo de células fotosintéticas que producen sustancias *metaboloideas*. El dispositivo colecta y concentra luz solar mediante lentes de Fresnel equipados con un sistema de seguimiento solar. Este dispositivo de seguimiento permite a las lentes rotar en dirección de la posición del Sol para asegurar una adecuada captación de energía radiativa. Entonces, mediante fibras ópticas la energía solar colectada es transportada y distribuida dentro del reactor que cuenta con hábitat adecuado para llevar a cabo el cultivo de las células fotosintéticas. Para evitar las pérdidas de biomasa durante la noche o en días nublados, se acopla una fuente de luz artificial al dispositivo de colección. El monitoreo de la intensidad de la luz solar activa o desactiva la fuente auxiliar de luz artificial. Así, el continuo suministro de luz hacia el reactor incrementa la productividad y se disminuye el costo de operación al utilizar energía solar como fuente primaria de energía radiativa.

A principios de 2000 Young y Woo (Young y Woo, 2000), diseñaron y construyeron un fotobiorreactor activado por energía solar transportada por fibras ópticas. Estudiaron la desulfuración del  $H_2S$  para reformarlo en sulfuros o sulfatos mediante la bacteria fotosintética *Chlorobium thiosulfatophilum*. Esta desulfuración biológica presenta importantes ventajas sobre los métodos físico-químicos conven-

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

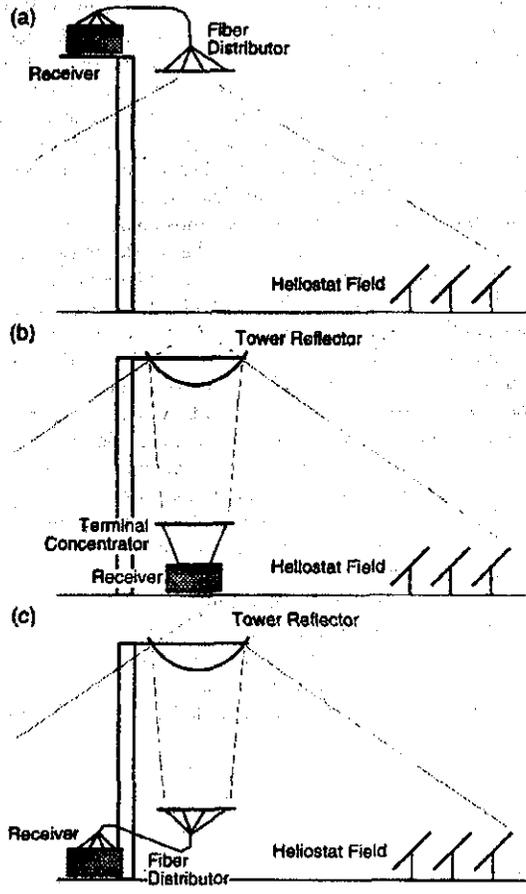
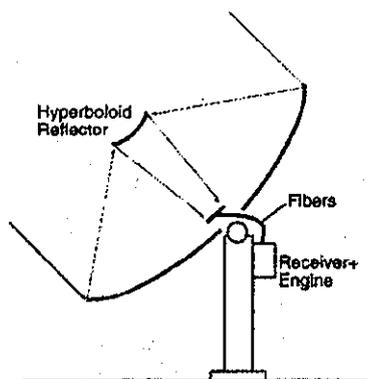


Figura 1.8: Los tres sistemas analizados por Zik, Karni y Kribus, a) TTFOF, b) SCOT y c) TROF. (Tomado de Zik et al., 1999)



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.9: Sistema plato concentrador-fibra óptica que utiliza un hiperboloide como segundo concentrador. (Tomado de Kribus et al., 2000).

cionales debido a su bajo costo y bajo impacto ambiental. En este prototipo se utilizan lentes esféricas para coleccionar y concentrar la energía solar. La aberración cromática de las lentes esféricas elimina la mayor parte de la componente de UV del espectro solar permitiendo así el desarrollo del cultivo bacteriano. Además, para el adecuado desempeño del fotobiorreactor se requiere que la biomasa sea iluminada por una fuente de luz difusa. Para lograr esto, una vez que las fibras ópticas son despojadas de su revestimiento, los núcleos son rayados permitiendo que la luz escape de la guía de onda en todas direcciones. Tales extremos son entonces insertados en tubos de vidrio pyrex para evitar un contacto directo con la biomasa. El fotobiorreactor aplica la luz solar como fuente principal de energía para la desulfuración biológica y usa una fuente de luz artificial durante la noche como sistema auxiliar. Así, el dispositivo opera ininterrumpidamente lo que incrementa su productividad. En la figura 1.10 se muestra el fotobiorreactor para la desulfuración diseñado por Young y Woo.

El uso de fibras ópticas para la transmisión de energía solar concentrada ofrece una alternativa que permite disminuir las pérdidas de calor en el transporte de energía, incrementar la eficiencia del sistema de conversión y evitar la complejidad en el diseño estructural de soporte y de seguimiento solar, sin olvidar que el dispositivo de conversión puede situarse en condiciones favorables de operación.

Las investigaciones antes mencionadas han sido prometedoras para la aplicación de las fibras ópticas en el transporte de energía solar. Sin embargo, en estas investigaciones no se han realizado estudios de la transferencia de calor por conducción y radiación que permitan pronosticar el comportamiento térmico y asegurar la máxima transmisión de energía solar a través de este tipo de guías de onda. Es importante mencionar que durante el proceso de transmisión, el flujo radiativo es absorbido por el material semitransparente del núcleo de la fibra óptica, provocando el calentamiento de sus componentes. Este hecho es relevante, ya que el comportamiento óptico para la adecuada transmisión depende de la temperatura. Al ser excedida cierta temperatura se puede provocar el deterioro permanente de las propiedades físicas de la guía de onda (*Polymicro Technologies, 1999*).

Al final de 1998 y al inicio de 1999, en un intento por pronosticar el comportamiento térmico de una fibra óptica construimos un par de modelos teóricos que vinculan la transferencia simultánea de calor por conducción y por radiación, los que permiten inferir el tiempo en el cual la temperatura alcanza su valor crítico (*Jaramillo y del Río, 1997, Jaramillo y del Río, 1998 y Jaramillo et al. 1999*).

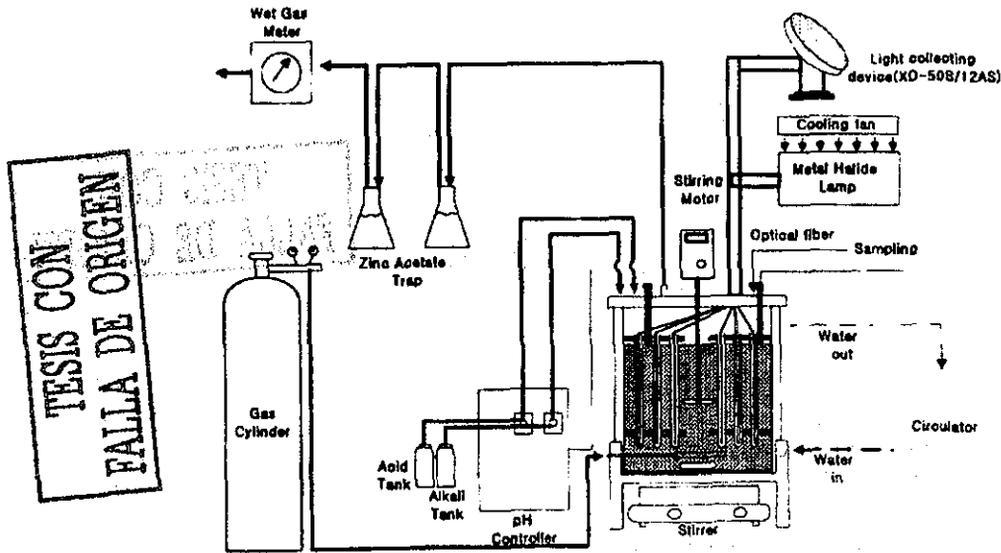


Figura 1.10: Diseño del fotobiorreactor para desulfuración del  $H_2S$  desarrollado por Young y Woo. (Tomado de Young y Woo, 2000).

En el trabajo *Jaramillo y del Río, 1997* presentamos un modelo unidimensional donde consideramos que la fibra óptica no presenta transferencia de calor hacia los alrededores en su parte longitudinal y sólo tomamos en cuenta las pérdidas convectivas en los extremos inicial y final de la fibra. En el trabajo *Jaramillo y del Río, 1998*, desarrollamos un modelo bidimensional donde incluimos, además de las pérdidas de calor en los extremos de la fibra, las pérdidas de calor por convección en la parte longitudinal de la fibra y consideramos una distribución espacial del flujo radiativo a la entrada.

En el trabajo *Jaramillo et al. 1999* modificamos las condiciones a la frontera del modelo bidimensional anteriormente propuesto, en dicho trabajo consideramos, además de las pérdidas por convección, la transferencia radiativa hacia los alrededores. Tales modelos fueron resueltos de manera numérica mediante diferencias finitas. Cabe mencionar que en dichos trabajos reportamos el estudio del acoplamiento entre un concentrador parabólico y una fibra óptica. Con base en el diámetro de la fibra óptica y su ángulo de admisión se determinaron los parámetros involucrados en el diseño del paraboloide de revolución (diámetro, distancia focal y ángulo de borde) para una máxima captación y concentración de energía solar. En la figura 1.11 se presenta el esquema del acoplamiento entre una fibra óptica y un concentrador parabólico.

En los modelos desarrollados para la emulación del comportamiento térmico consideramos un coeficiente de absorción lineal dependiente de la longitud de onda. Además estudiamos el comportamiento térmico para una fibra de  $SiO_2$  cuando se usa plata o aluminio como superficie reflejante en el concentrador parabólico.

Al suponer el uso de una fibra con 2.5cm de diámetro se estima una concentración solar cercana a 1900 y una potencia a la salida de 26W para 10 metros de transmisión con una eficiencia de 88%.

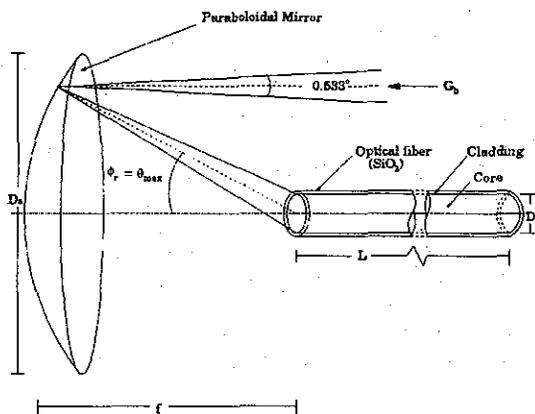
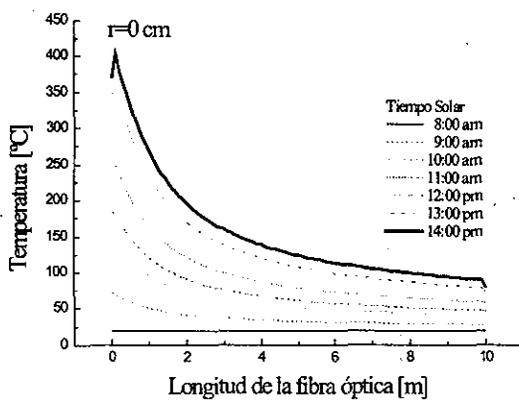


Figura 1.11: Acoplamiento entre una fibra óptica y un concentrador parabólico (Tomado de Jaramillo et al. 1999).



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura 1.12: Emulación térmica de una fibra óptica de SiO<sub>2</sub> (Tomado de Jaramillo et al. 1999).

Los resultados predicen que se puede operar el sistema en condiciones de máxima concentración entre 4 y 6 horas. En la figura se presenta una muestra de las emulaciones realizadas en *Jaramillo et al. 1999*.

Como mencionamos, en los trabajos *Jaramillo y del Río 1997*, *Jaramillo y del Río 1998* y *Jaramillo et al. 1999* limitamos el caso de estudio a un coeficiente de absorción lineal para la intensidad de radiación. En estos modelos teóricos usamos las curvas de atenuación reportadas en la transmisión de intensidades nominales para opto-telecomunicaciones, que corresponden a niveles bajos de intensidad de radiación. Situación muy comprometida para asegurar que los modelos desarrollados son adecuados, ya que una intensidad de radiación con un nivel alto puede cambiar el índice de refracción del medio a través del cual pasa y deben tomarse en cuenta entonces efectos no lineales en el coeficiente de absorción (*Bladwin, 1969, Loudon 1986*).

En el siguiente capítulo estudiamos los efectos no lineales del coeficiente de absorción. Analizamos con base en las ecuaciones de Maxwell, un modelo macroscópico para determinar los efectos no lineales producto de los niveles de radiación que se encuentra viajando a través de una fibra óptica de  $\text{SiO}_2$ . En seguida, desarrollamos un modelo basado en la teoría de Drude-Lorentz y estudiamos desde el punto microscópico el carácter no lineal del material de la fibra óptica. Al vincular ambos modelos y usando datos experimentales reportados en la literatura, estimamos el valor del coeficiente de extinción, el cual está estrechamente relacionado con la parte no lineal del coeficiente de absorción (*Jaramillo et al. 2000*).



## Capítulo 2

# Análisis de la respuesta no lineal a la intensidad radiativa

### 2.1 Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, el uso de las fibras ópticas para la transmisión de energía solar concentrada es una excelente posibilidad para facilitar y hacer más eficiente el uso de este recurso energético renovable. Sin embargo, existe un máximo de energía solar concentrada a ser transportada mediante estas guías de onda. Esto es básicamente debido a que la absorción de energía radiativa por el material del núcleo de la fibra está ligada con su comportamiento térmico y al superar cierta temperatura crítica las propiedades ópticas y físicas cambian (*Polymicro Technologies, 1999*).

El comportamiento térmico resulta entonces muy importante para asegurar una adecuada transmisión de energía solar concentrada. En trabajos previos (*Jaramillo y del Río, 1997, Jaramillo y del Río, 1998 y Jaramillo et al. 1999*) analizamos teóricamente el calentamiento de una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza cuando ésta transmite energía solar concentrada. Obtuvimos una ecuación de energía tomando en cuenta la transferencia de calor por conducción y la energía radiativa absorbida. En estos trabajos consideramos un coeficiente de absorción constante que desprecia la contribución no lineal que depende de la intensidad de la energía transportada.

No obstante, la respuesta no lineal del material de la fibra a la intensidad radiativa debe analizarse ya que en las fibras ópticas el origen de la carga de polarización eléctrica inducida es producto del campo eléctrico de la onda electromagnética viajera. Así, esta respuesta no lineal resulta en una dependencia del índice de refracción del material del núcleo con la intensidad de la onda electromagnética durante la transmisión de energía solar concentrada.

Si bien en la literatura existen varios estudios sobre los efectos no lineales durante la propagación de luz a través de fibras ópticas (*i.e. Artiglia et al., 1996 y Gurwich, 1997*), estos estudios son realizados en su mayoría en el campo de los sistemas de telecomunicación donde la luz transportada por las fibras es un pulso monocromático con una longitud de onda fija (*i.e.  $\lambda=0.532\mu\text{m}$ ,  $\lambda=1.550\mu\text{m}$* ) y muy baja energía ( $< 3\text{Wcm}^{-2}$ ) y están dirigidos particularmente a establecer la dispersión, propagación y forma del pulso de luz.

Por otro lado, la energía solar que es transportada por las fibras ópticas es varios ordenes de magnitud más intensa que la luz usada en telecomunicaciones y presenta un rango espectral continuo (de  $0.25$  a  $2.5\mu\text{m}$ ). Debido a este hecho, es necesario analizar la interacción entre la energía solar concentrada y la fibra óptica.

En este capítulo, modelamos la interacción de la radiación con una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza para determinar la dependencia del coeficiente de absorción con la intensidad radiativa

en el espectro solar. Analizamos la propagación de una onda electromagnética al suponer un medio con respuesta no lineal e isotrópico. Primero, desde el punto de vista de la teoría electromagnética clásica estudiamos el comportamiento macroscópico del material debido a su interacción con el campo eléctrico. Más tarde, con fundamento en la teoría de dispersión óptica, analizamos el comportamiento microscópico también debido a la interacción con el campo eléctrico. De tal suerte que al apoyarnos en las ecuaciones de Maxwell y la teoría de Drude-Lorentz es posible determinar el comportamiento del coeficiente de extinción y por ende el coeficiente de absorción no lineal durante la transmisión de energía solar concentrada.

En el apartado de resultados y conclusiones de este capítulo demostramos que el coeficiente de absorción no lineal es depreciable cuando se trata del transporte de energía solar concentrada a través de fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$ . Así, basta considerar la parte lineal de dicho coeficiente para obtener resultados con buena aproximación en el modelado del comportamiento térmico como se verá en los capítulos posteriores.

## 2.2 Dependencia del índice de refracción con la intensidad (Efecto Kerr)

El campo electromagnético de una onda de luz que se propaga a través de un medio ejerce fuerzas en los electrones exteriores del átomo. El tratamiento clásico usual supone una relación lineal entre el campo electromagnético de la luz y el sistema atómico del medio (*Reitz et al., 1980*). Pero al igual que un dispositivo oscilatorio mecánico (por ejemplo, un resorte y una pesa) se puede sobreimpulsar hasta obtener una respuesta no lineal. La aplicación de una fuerza electromagnética lo suficientemente grande provocará efectos no lineales en el material. Por lo que podemos anticipar que un haz de luz lo suficientemente intenso podrá generar efectos ópticos no lineales apreciables en la respuesta del material.

La óptica no lineal considera los fenómenos que ocurren si las intensidades de los campos eléctrico y magnético son de segundo orden o mayores y si estos campos juegan un papel dominante en la interacción con el material al que son aplicados. Así, por ejemplo, el efecto Kerr<sup>1</sup> que es una variación a segundo orden en el índice de refracción con respecto al campo eléctrico se estudia en el campo de la óptica no lineal.

La no linealidad en las fibras ópticas se origina en el efecto de la polarización eléctrica inducida por el campo eléctrico. Este efecto resulta en una dependencia del índice de refracción con la intensidad de la forma (*Remoissents, 1994*):

$$n(\omega, \mathbf{E}) = n_o(\omega) + n_2 |\mathbf{E}|^2 + \mathcal{O}, \quad (2.1)$$

donde  $n(\omega, \mathbf{E}) [-]$  es el índice de refracción no lineal dependiente de la frecuencia  $\omega [s^{-1}]$  y de la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E} [Vm^{-1}]$ ,  $n_o [-]$  es la primera aproximación,  $n_2 [m^2V^{-2}]$  es llamado el coeficiente de Kerr. Precisamente el término de Kerr es el que da el carácter no lineal a la relación (2.1) y el símbolo  $\mathcal{O}$  indica ordenes superiores.

Para el caso del  $\text{SiO}_2$  de alta pureza, material que constituye el núcleo de la fibra óptica en estudio, el coeficiente de Kerr tiene un valor muy pequeño del orden de  $n_2 \sim 10^{-22} m^2V^{-2}$  (*Remoissents, 1994*). La adición del coeficiente no lineal  $n_2$  al índice de refracción ordinario  $n_o$  es necesaria cuando se transmiten grandes potencias radiativas a través de las fibras ópticas. Generalmente se ignora la dependencia con la frecuencia del coeficiente de Kerr, ya que éste presenta cambios menores que 5%

<sup>1</sup> En 1875, el físico escocés John Kerr (1824-1907) descubrió el primer efecto electro-óptico. Kerr encontró que una sustancia transparente e isotrópica se hace birrefringente cuando se coloca en un campo eléctrico intenso.

en el rango de frecuencias ópticas las cuales corresponden al espectro entre 0.15 y  $20\mu\text{m}$  (Remoissents, 1994). Cabe mencionar que la mayor cantidad de energía radiada por el Sol se comprende entre los 0.25 y  $3.0\mu\text{m}$  y se denomina espectro solar. Por tanto, el espectro solar forma parte del espectro óptico.

Cuando hablamos de la radiación incidente  $G[Wm^{-2}]$  que se encuentra pasando a través del núcleo de la fibra y que se define como (Modest, 1993)

$$G \equiv \int_{4\pi} I(\hat{s}) d\Omega, \quad (2.2)$$

donde  $I[Wm^{-2}]$  es la intensidad radiativa por ángulo sólido  $\Omega[sr]$  en una dirección establecida  $\hat{s}[-]$  (Modest, 1993), la ecuación (2.1) se puede escribir como:

$$n(\omega, G) = n_o(\omega) + N_2G + \mathcal{O}, \quad (2.3)$$

donde  $N_2[m^2W^{-1}]$  es el índice de refracción dependiente de la radiación incidente. En la ecuación (2.3),  $N_2$  presenta un valor comprendido entre  $3 \times 10^{-20}m^2W^{-1}$  y  $6 \times 10^{-20}m^2W^{-1}$  para fibras con núcleo de  $\text{SiO}_2$  (Stolen y Bjorkolm, 1982).

Al considerar el coeficiente de extinción en la ecuación (2.1), la expresamos ahora como un número complejo  $\hat{n}$  de la forma:

$$\hat{n}(\omega, \mathbf{E}) = (n_o + ik_o) + (n_2 + ik_2) |\mathbf{E}|^2 + \mathcal{O}, \quad (2.4)$$

donde  $k_o[-]$  es el orden cero del coeficiente de extinción<sup>2</sup> y  $k_2[m^2V^{-2}]$  es la contribución de segundo orden del coeficiente de extinción y el cual denominamos coeficiente de extinción no lineal. Como veremos más adelante, el coeficiente de absorción está vinculado con el coeficiente de extinción.

Por tanto, la ecuación (2.4) la escribimos como:

$$\hat{n}(\omega, \mathbf{E}) = \hat{n}_o + \hat{n}_2 |\mathbf{E}|^2 + \mathcal{O}, \quad (2.5)$$

o bien en términos de la radiación incidente:

$$\hat{n}(\omega, G) = \hat{n}_o + \hat{N}_2G + \mathcal{O}. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.4) contiene cuatro coeficientes, de los cuales los valores de  $n_o$ ,  $k_o$  y  $n_2$  son conocidos de las referencias Bansal y Doremus, 1986, Polymicro Technologies, 1999 y Remoissents, 1994, respectivamente. Por lo que esta parte de nuestra investigación se enfoca en determinar el coeficiente de extinción no lineal  $k_2$ .

El parámetro  $k_2$  permite determinar el coeficiente de absorción no lineal en función del campo eléctrico de la onda electromagnética que pasa a través de núcleo de la fibra.

Así, el estimar el coeficiente de extinción  $k_2$ , permitirá tener una precisión más alta en el coeficiente de absorción en función de campos eléctricos intensos.

<sup>2</sup> No deberá confundirse con el coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$ . Estos se encuentran relacionados por:

$$\kappa_L = \frac{2\omega}{c} k_o = \frac{4\pi}{\lambda_o} k_o,$$

donde  $\lambda_o$  es la longitud de onda  $[m]$  en el vacío.

Por otra parte, la atenuación de la fibra óptica  $dB_{per}$   $[dB/m]$  está relacionada al coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  mediante:

$$\kappa_L = \frac{dB_{per}}{10} \ln 10.$$

Antes de considerar la naturaleza de la dispersión óptica que ocurre en el núcleo de la fibra óptica durante la transmisión de energía solar concentrada, es conveniente resumir los resultados relevantes de la teoría electromagnética necesarios para esta investigación. En la siguiente sección se presenta, a partir de las ecuaciones de Maxwell, la ecuación que gobierna para la propagación de una onda a través de un medio cuando ésta induce una respuesta no lineal en dicho medio.

### 2.3 Desarrollo de las ecuaciones de Maxwell para un medio con respuesta no lineal

Las ecuaciones de Maxwell que gobiernan la propagación de una onda electromagnética a través de un medio son (Reitz et al., 1980):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)[Vm^{-1}]$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)[Am^{-1}]$  es el campo magnético,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)[Am^{-2}]$  es la densidad de corriente,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)[Cm^{-2}]$  es desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)[Cm^{-2}]$  es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen (polarización),  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)[T]$  es el momento dipolar magnético por unidad de volumen (polarización magnética, magnetización),  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)[T]$  es la inducción magnética,  $\rho_c[Cm^{-3}]$  es la densidad de carga,  $\epsilon_0$  la permitividad en el vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío,  $\mathbf{r}[m]$  el vector de posición que depende del sistema coordenado y  $t$  el tiempo.

Cuando una onda electromagnética se propaga a través de un medio induce efectos de polarización y magnetización. Los campos eléctrico y magnético inducen una fuerza total  $\mathbf{F}[N]$  dada por,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_m \quad (2.13)$$

conocida como la fuerza de Lorentz, donde la fuerza de Coulomb  $\mathbf{F}_E$  que actúa sobre una carga  $q[C]$  localizada a una distancia  $\mathbf{r}$  de una carga  $q_1[C]$ , ésta se expresa como,

$$\mathbf{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.14)$$

y la fuerza magnética  $\mathbf{F}_m$  se expresa por

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.15)$$

donde la inducción magnética es (Reitz et al., 1980),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.16)$$

tal que las cargas  $q$  y  $q_1$  se mueven uniformemente con velocidades  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_1$  respectivamente.

En nuestro estudio nos concretamos en los efectos del campo eléctrico únicamente, puesto que el efecto del campo magnético se puede despreciar ya que el  $\text{SiO}_2$  es un medio dieléctrico no conductivo y no magnético. Esto se deduce a continuación.

Si consideremos las relaciones 2.15 y 2.16 la fuerza magnética la escribimos como:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (2.17)$$

donde se considera la relación  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  ( $c = 2.9979 \times 10^8$  [ms<sup>-1</sup>]).

Al considerar de manera escalar la relación entre  $F_E$  y  $F_M$  para un par de partículas, la relación entre las magnitudes de la fuerza magnética y la fuerza eléctrica es:

$$\frac{F_M}{F_E} \leq \frac{v v_1}{c^2}, \quad (2.18)$$

entonces, si las velocidades de las partículas son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la interacción magnética es mucho menor que la interacción eléctrica (Reitz et al., 1980).

En resumen, notamos que los campos producidos por el movimiento de la carga  $q_1$  están relacionados por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}, \quad (2.19)$$

o bien de manera escalar,

$$cB \leq \frac{v_1}{c} E, \quad (2.20)$$

por lo que la interacción magnética sólo se considera para electrones muy rápidos, pues resulta esta  $v/c$  veces menor que la interacción eléctrica. Por lo tanto, escribimos con buena aproximación para el caso de la molécula de  $\text{SiO}_2$  que la fuerza de Lorentz es predominantemente eléctrica y no magnética, así

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Resulta importante señalar que al usar las relaciones lineales

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.23)$$

donde  $\chi_m$  [-] es la susceptibilidad magnética (para materiales paramagnéticos y diamagnéticos  $\chi_m \ll 1$  (Reitz et al., 1980)) y  $\mu$  la permeabilidad del medio, relacionadas a través de la ecuación (2.11), se obtiene la permeabilidad relativa (Reitz et al., 1980),

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (2.24)$$

la cual difiere muy poco de la unidad.

Por otra parte, al tomar el rotacional ( $\nabla \times$ ) a ambos lados de la ecuación (2.10) y sustituir la ecuación constitutiva para  $\mathbf{B}$  (2.11) tenemos que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (2.25)$$

o bien:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{M}, \quad (2.26)$$

donde hemos utilizado la identidad vectorial  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ .

Al sustituir la ecuación (2.7) en la ecuación (2.26) y tomando en cuenta que para un medio dieléctrico isótropo no conductivo y no magnético se tiene  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , nos conduce a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (2.27)$$

La inducción eléctrica  $\mathbf{D}$  en un medio dieléctrico isótropo no lineal para un cierto campo eléctrico  $\mathbf{E}$  depende de la carga de polarización inducida de la forma (Bladwin, 1969):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t), \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t)$  corresponde a la parte lineal y  $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$  a la parte no lineal<sup>3</sup> (Hecht y Zajac, 1976).

En la molécula  $\text{SiO}_2$  el enlace covalente requiere que los átomos de silicio tengan cuatro átomos de oxígeno como vecinos próximos creando una estructura tetraédrica como se muestra en la figura 2.1.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

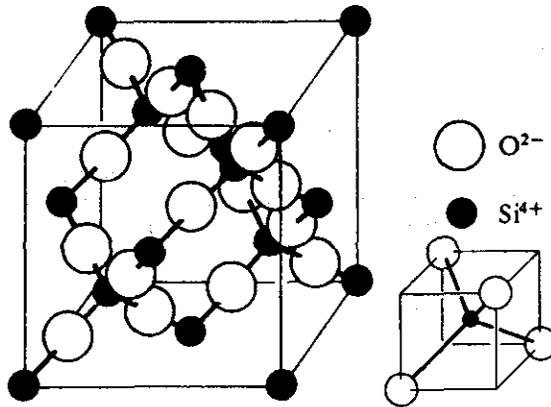


Figura 2.1: Celda unitaria y el tetraedro de  $\text{SiO}_2$ .

Estos tetraedros de silicio-oxígeno son las unidades fundamentales para crear la estructura del material del núcleo de la fibra óptica. El ordenamiento que presentan dichos tetraedros con respecto a un eje denominando eje óptico, provee un centro de simetría como se muestra en la figura 2.2. Por lo que el campo  $\mathbf{E}$  de una onda electromagnética viajera, paralelo al eje óptico, impulsa entonces las cargas hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la longitud de la molécula de  $\text{SiO}_2$ , produciendo así una carga de polarización  $\mathbf{P}$  variable en el tiempo y paralela al eje.

<sup>3</sup> En nuestro estudio, por simplicidad, hemos considerado la polarización en un plano (polarización lineal), es decir, suponemos que la dirección de la oscilación transversal se mantiene en un plano.

Si bien, son posibles otros tipos más complicados de polarización de la onda transversal, en los cuales la oscilación del vector, a pesar de mantenerse en un plano perpendicular a la dirección de propagación, éste describe una elipse (polarización elíptica) o una circunferencia (polarización circular), se pueden representar estas polarizaciones como una superposición de la polarización lineal.

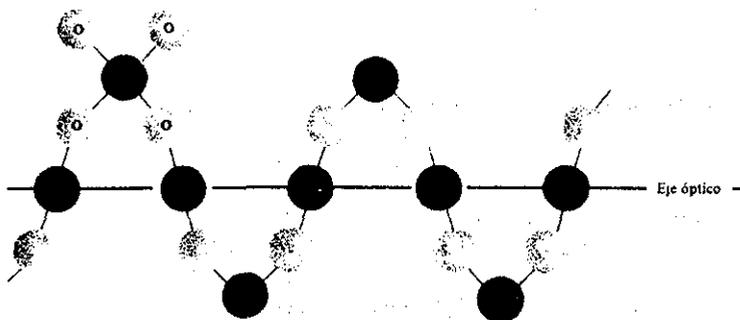


Figura 2.2: Eje de simetría para la molécula de  $\text{SiO}_2$ .

Al considerar el material de la fibra óptica como un medio isótropo, la parte lineal de la polarización eléctrica resultante es paralela y directamente proporcional al campo aplicado tal que (Landsberg, 1984),

$$\mathbf{P}_L = \epsilon_0 \chi_L \mathbf{E}, \quad (2.29)$$

donde  $\chi_L[-]$  es una constante sin dimensiones conocida como la parte lineal de la susceptibilidad eléctrica, la gráfica de  $P$  como función de  $E$  es una línea recta.

En campos eléctricos intensos se presenta saturación en la polarización  $P$  y ésta no aumenta linealmente con  $E$ . Entonces se puede anticipar un aumento gradual de la polarización inducida cuando  $E$  aumenta. Puesto que las direcciones de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$  coinciden en el caso de un medio isótropo, se puede expresar la polarización no lineal como (Bladwin, 1969),

$$\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi_{NL} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

donde  $\chi_{NL}[m^2V^{-2}]$  es la parte no lineal de la susceptibilidad eléctrica.

Cabe aclarar que en la ecuación (2.30) no aparecen los efectos no lineales de segundo orden de la susceptibilidad, ya que estos se presentan sólo para un medio que carece de simetría donde la carga de polarización no es paralela al eje óptico. Para el caso de la molécula de  $\text{SiO}_2$ , la cual presenta simetría axial como se observa en la figura 2.2, los efectos no lineales de tercer orden de la susceptibilidad son los efectos no lineales de menor orden (Remoissents, 1994).

En las ecuaciones (2.29) y (2.30) debemos tener en mente que, tanto  $\chi_L$  como  $\chi_{NL}$ , dependen de la frecuencia  $\omega$ .

Así la ecuación (2.28) la escribimos como:

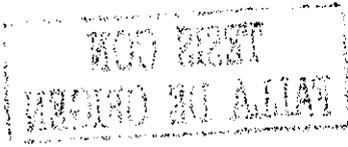
$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi_L + \chi_{NL} |\mathbf{E}|^2) \mathbf{E}, \quad (2.31)$$

tal que al tomar en cuenta  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  (ecuación (2.8)), escribimos el desplazamiento como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_L + \chi_{NL} |\mathbf{E}|^2) \mathbf{E}, \quad (2.32)$$

o simplemente,

$$\mathbf{D} = \epsilon^* \mathbf{E}, \quad (2.33)$$



donde  $\epsilon^*$  es la función dieléctrica del material,

$$\epsilon^* = \epsilon_0 (1 + \chi_L + \chi_{NL} |\mathbf{E}|^2). \quad (2.34)$$

Resulta importante señalar que el índice de refracción está relacionado mediante (Hecht y Zajac, 1976),

$$\tilde{n}^2 = \epsilon_r = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0}, \quad (2.35)$$

donde  $\epsilon_r$  es la función dieléctrica relativa.

Por tanto, al sustituir la ecuación (2.33) en la ecuación (2.27) obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon^* \mathbf{E}, \quad (2.36)$$

o bien al considerar

$$\epsilon^* \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.37)$$

escribimos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}. \quad (2.38)$$

Por otra parte, si suponemos que el material del núcleo de la fibra esta libre de cargas eléctricas, es decir, su densidad de carga  $\rho_c = 0$ , la ecuación (2.9) es entonces  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , por lo que:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon^* \mathbf{E}) = \epsilon^* (\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \epsilon^*) \cdot \mathbf{E} = 0,$$

y al suponer que no hay dependencia espacial para  $\epsilon^*$  (medio isótropo) conduce a  $\nabla \epsilon^* = 0$ . Por tanto escribimos,

$$\epsilon^* (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (2.39)$$

donde  $\epsilon^* \neq 0$ , de esta manera la divergencia del campo eléctrico es:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.40)$$

Al sustituir la ecuación (2.40) en la ecuación (2.38) encontramos la ecuación que gobierna la propagación del campo eléctrico en un medio con respuesta no lineal:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}, \quad (2.41)$$

o bien, tomando en cuenta la relación (2.31) reescribimos la ecuación (2.41) como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi_L) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi_{NL} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}. \quad (2.42)$$

El tratamiento más sencillo para obtener la solución de la ecuación (2.41) es considerar una onda plana (Arfken, 1970). Aunque las soluciones de onda plana están restringidas a solamente una clase de las soluciones para las ecuaciones de Maxwell, éstas son muy importantes ya que son la base de una vasta clase de soluciones. Una combinación lineal de soluciones (superposición de ondas planas) es también una solución. Por lo que construimos la solución tomando la suma de ondas planas para todo el campo  $\mathbf{E}$  dentro del medio de propagación. Así, la solución de la ecuación (2.42) es de la forma (Bladwin, 1969 y Reitz et al., 1980),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathbf{E}_0(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j) \cos(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t) \quad (2.43)$$

o bien, si consideramos la notación de Euler para números complejos, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \sum_j 2(\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j) \cos(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (2\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j) \cos(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t) + i \sin(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t) - i \sin(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j) \exp(i(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) + \mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j) \exp(-i(\boldsymbol{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t))), \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde cada coeficiente  $\mathbf{E}_o$  depende del vector de propagación  $\boldsymbol{\kappa}_j$  y de la frecuencia  $\omega_j$ . Esta superposición de ondas planas tiene la forma de una serie de Fourier compleja por lo que se puede representar cualquier solución periódica (no necesariamente senoidal). Para una solución que no es periódica, la suma en la ecuación (2.44) puede convertirse en una integral de Fourier  $\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$  con una función continua de  $\boldsymbol{\kappa}$  y  $\omega$ . En este último caso, la función  $\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$  es llamada la transformada de Fourier de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Para simplificar el problema de la no linealidad en la transmisión de energía solar concentrada a través de fibras ópticas, analizamos una onda plana monocromática de la forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_o \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.45)$$

o bien, en términos de la notación de Euler,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_o \exp(i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) + \mathbf{E}_o \exp(-i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t))), \quad (2.46)$$

y suponemos que la dirección de propagación ocurre en dirección del eje  $z$ , es decir, la propagación apunta en dirección del eje longitudinal de la fibra como se observa en la figura 2.3. Así, en este punto, no consideramos la dependencia transversal  $(x, y)$  del campo  $\mathbf{E}$ . Por tanto, el vector de propagación  $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \hat{\mathbf{s}}$  (donde  $\hat{\mathbf{s}}$  es el vector unitario de la dirección de propagación) apunta sólo en dirección del eje  $z$ , es decir,  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} = z$ , de tal manera que  $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} = \kappa z$ .

Al tomar en cuenta que  $|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = (E(z, t))^2$ , escribimos la ecuación (2.42) de manera escalar como,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z, t) - \mu_o \epsilon_o (1 + \chi_L) \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(z, t) = \mu_o \epsilon_o \chi_{NL} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(z, t))^3. \quad (2.47)$$

cuya solución es una onda plana monocromática con frecuencia  $\omega$  y con dirección de propagación apuntando a lo largo del eje  $z$  (Bladwin, 1969), que en términos de la notación de Euler escribimos como,

$$E(z, t) = \frac{1}{2} (E_o \exp(i(\kappa z - \omega t)) + E_o \exp(-i(\kappa z - \omega t))), \quad (2.48)$$

donde  $E_o$  es la amplitud del campo eléctrico dentro del medio.

Al insertar la ecuación (2.48) en la ecuación (2.47) obtenemos

$$\begin{aligned} & -\kappa^2 E(z, t) + \mu_o \epsilon_o \omega^2 (1 + \chi_L) (E(z, t)) \\ &= -3\mu_o \epsilon_o \omega^2 \chi_{NL} \frac{E_o^3}{8} \left( 3 \frac{e^{3i\kappa z}}{e^{3i\omega t}} + \frac{e^{i\kappa z}}{e^{i\omega t}} + \frac{e^{-i\kappa z}}{e^{-i\omega t}} + 3 \frac{e^{-3i\kappa z}}{e^{-3i\omega t}} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

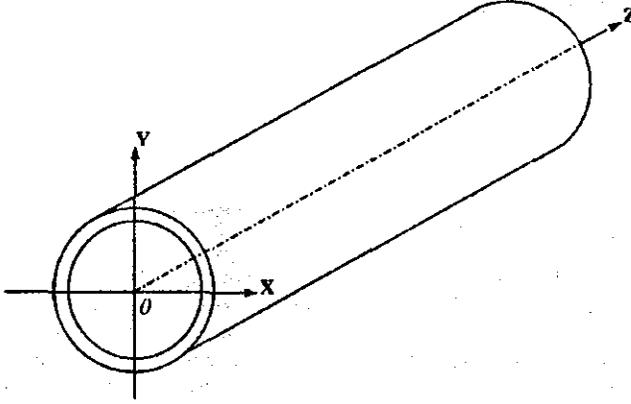


Figura 2.3: Ejes coordenados para la fibra óptica.

donde al despreciar los términos de tercer armónico  $\left(3\frac{e^{3ikz}}{e^{3i\omega t}}\right)$  y  $\left(3\frac{e^{-3ikz}}{e^{-3i\omega t}}\right)$  podemos escribir como una aproximación

$$-\kappa^2 E(z, t) + \mu_o \epsilon_o \omega^2 (1 + \chi_L) E(z, t) = -3\mu_o \epsilon_o \omega^2 \chi_{NL} (E(z, t))^3. \quad (2.50)$$

Así, a partir de la ecuación (2.50) obtenemos la relación de dispersión no lineal

$$\frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2} = 1 + \chi_L + 3\chi_{NL} E^2 = \hat{n}^2 \quad (2.51)$$

donde  $c^2 \kappa^2 / \omega^2$  es el índice de refracción al cuadrado  $\hat{n}^2$ .  $c$  es la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el vacío ( $c = (1/\sqrt{\epsilon_o \mu_o}) = 2.9979 \times 10^8 [ms^{-1}]$ ),  $\omega$  es la frecuencia y  $\kappa$  es la magnitud del vector de propagación  $\kappa$ , tal que  $\kappa = 2\pi/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda.

A través de las ecuaciones (2.8) y (2.33) escribimos de manera escalar la relación para el índice de refracción

$$\hat{n}^2 = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_o} = 1 + \frac{P}{\epsilon_o E} \quad (2.52)$$

y con base en las relaciones (2.50) y (2.51) identificamos fácilmente la forma escalar de la carga de polarización de manera aproximada,

$$P = \epsilon_o (\chi_L + 3\chi_{NL} E^2) E. \quad (2.53)$$

Las susceptibilidades  $\chi_L$  y  $\chi_{NL}$  son cantidades complejas (Loudon, 1986), así la ecuación (2.51) se puede escribir como:

$$\hat{n}^2 = 1 + \chi'_L + 3\chi'_{NL} E^2 + i(\chi''_L + 3\chi''_{NL} E^2), \quad (2.54)$$

donde (') y (") indican la parte real y la parte imaginaria, respectivamente.

Por otro lado, la ecuación (2.4) la escribimos de manera escalar como,

$$n(\omega, E) = (n_o + ik_o) + (n_2 + ik_2) E^2, \quad (2.55)$$

y al elevar al cuadro y despreciar los términos de cuarto orden obtenemos

$$\hat{n}^2 = n_o^2 - k_o^2 + 2(n_o n_2 - k_o k_2) E^2 + i(2n_o k_o + 2(n_o k_2 - k_o n_2) E^2). \quad (2.56)$$

donde hemos agrupado los términos reales y los términos imaginarios que nos permiten comparar fácilmente las ecuaciones (2.54) y (2.56). De esta manera obtenemos las siguientes relaciones al igualar términos semejantes:

$$n_o^2 - k_o^2 = 1 + \chi'_L, \quad (2.57)$$

$$2n_o k_o = \chi''_L, \quad (2.58)$$

$$2(n_o n_2 - k_o k_2) = 3\chi'_{NL} \quad (2.59)$$

$$2(n_o k_2 - k_o n_2) = 3\chi''_{NL}; \quad (2.60)$$

estableciéndose así la relación entre los coeficientes del índice de refracción y las susceptibilidades.

Con base en lo anterior escribimos de manera escalar la polarización como

$$P = P_L + P_{NL} \quad (2.61)$$

donde  $P_L$  es la polarización con comportamiento lineal y  $P_{NL}$  es la polarización con comportamiento no lineal. Con base en la relación (2.53) identificamos fácilmente

$$P_L = \epsilon_o \chi_L E \quad (2.62)$$

y

$$P_{NL} = \epsilon_o 3\chi_{NL} E^3, \quad (2.63)$$

donde la susceptibilidad no lineal  $\chi_{NL}$  se puede estimar mediante su componente real y su componente imaginaria,

$$(\chi'_{NL} + i\chi''_{NL}) = \frac{2}{3}(n_o n_2 - k_o k_2) + i\frac{2}{3}(n_o k_2 - k_o n_2). \quad (2.64)$$

En la ecuación (2.64), con la excepción del parámetro  $k_2$  y de la susceptibilidad no lineal  $\chi_{NL}$ , los demás parámetros  $n_o$ ,  $k_o$  y  $n_2$  son conocidos de datos experimentales para el  $\text{SiO}_2$  y como mencionamos, se reportan en las referencias (*Bansal y Doremus, 1986, Polymicro Technologies, 1999 y Remoissents, 1994*), respectivamente<sup>4</sup>.

En la siguiente sección, discutimos la relación entre el coeficiente de extinción no lineal  $k_2$  y el coeficiente de absorción no lineal  $\kappa_{NL}$ . Este último permite determinar la absorción de energía radiativa en función del campo eléctrico de la onda electromagnética que pasa a través de un medio semitransparente que en nuestro caso es con el núcleo de la fibra.

## 2.4 Coeficiente de absorción no lineal

Comencemos por escribir la forma equivalente de la ecuación (2.45) para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y del mismo modo para el campo magnético  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_o \exp(-i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \}, \quad (2.65)$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{H}_o \exp(-i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \}, \quad (2.66)$$

<sup>4</sup> La susceptibilidad lineal  $\chi_L$  se puede estimar a través de las relaciones (2.57) y (2.58).

o bien:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_c \} \quad (2.67)$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{H}_c \}, \quad (2.68)$$

donde el símbolo  $\Re$  representa la parte real del vector complejo denotado por el subíndice  $c$ .

Es claro que el comportamiento no lineal del núcleo de la fibra óptica durante la transmisión de energía solar concentrada está relacionado al índice de refracción (ecuación (2.51))

$$\frac{c\kappa}{\omega} = \hat{n}. \quad (2.69)$$

Al escribir la ecuación (2.55) de la forma,

$$\hat{n} = (n_o + n_2 E^2) + i(k_o + k_2 E^2) = n' + ik'', \quad (2.70)$$

nos conduce a,

$$\kappa \equiv \kappa' + i\kappa'' = \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} k'', \quad (2.71)$$

donde el vector de propagación, como una cantidad compleja, es de la forma:

$$\kappa = \kappa' + i\kappa'', \quad (2.72)$$

tal que  $\kappa''$  es el vector de atenuación.

De esta manera, al emplear la ecuación (2.72) y las ecuaciones (2.65) y (2.66) escribimos:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o \exp(-\kappa'' \cdot \mathbf{r}) \exp(-i(\kappa' \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (2.73)$$

y

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_o \exp(-\kappa'' \cdot \mathbf{r}) \exp(-i(\kappa' \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (2.74)$$

donde el campo eléctrico y magnético complejo presentan un vector de amplitud local  $\mathbf{E}_o \exp(-\kappa'' \cdot \mathbf{r})$  y  $\mathbf{H}_o \exp(-\kappa'' \cdot \mathbf{r})$ , respectivamente, y una parte oscilatoria  $\exp\{-i(\kappa' \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}$ , cuyo ángulo de fase es  $\phi = \kappa' \cdot \mathbf{r} - \omega t$ .

Si suponemos una onda homogénea viajando en un medio isótropo, es decir  $\kappa'$  y  $\kappa''$  tienen la misma dirección, el vector de onda lo podemos escribir como

$$\kappa = (\kappa' + i\kappa'') \hat{\mathbf{s}} = \kappa' \hat{\mathbf{s}} + i\kappa'' \hat{\mathbf{s}} \quad (2.75)$$

así, las ecuaciones (2.73) y (2.74) las escribimos como:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o \exp(-\kappa'' \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i(\kappa' \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (2.76)$$

y

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_o \exp(-\kappa'' \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}) \exp(-i(\kappa' \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (2.77)$$

dado que suponemos la dirección de propagación a lo largo del eje  $z$ , tenemos que  $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} = z$ , y al sustituir la relación (2.71) llegamos a:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_o \exp\left(-\frac{\omega}{c} k'' z\right) \exp\left(-i\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right)\right), \quad (2.78)$$

y

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_o \exp\left(-\frac{\omega}{c} k'' z\right) \exp\left(-i\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right)\right). \quad (2.79)$$

A partir de las ecuaciones (2.78) y (2.79) calculamos la intensidad instantánea  $\mathbf{I}$  mediante el vector de Poynting (*Modest, 1993*),

$$\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \Re \{ \mathbf{E}_c \} \times \Re \{ \mathbf{H}_c \}, \quad (2.80)$$

donde la intensidad instantánea es la energía por unidad de tiempo y unidad de área que se transporta por la onda electromagnética y que varía rápidamente en función del tiempo y la trayectoria que ha viajado dentro del medio.

Resulta de gran utilidad el valor promedio temporal del vector de Poynting o intensidad radiativa para estimar la potencia por unidad de área que se encuentra pasando a través de la sección transversal del material semitransparente (*Modest, 1993*),

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^* \}, \quad (2.81)$$

donde  $\mathbf{H}_c^*$  denota el complejo conjugado de  $\mathbf{H}_c$ .

A partir de las relaciones (2.10) y (2.11) y considerando que se trata de un medio dieléctrico no magnético ( $\mathbf{M} = 0$ ), escribimos

$$\nabla \times \mathbf{E}_c = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial t}, \quad (2.82)$$

tal que  $\mathbf{E}_c$  y  $\mathbf{H}_c$  son los campos complejos eléctrico y magnético respectivamente. De esta manera la ecuación (2.82) puede reescribirse como,

$$(-i\kappa) \times \mathbf{E}_c = -\mu_o (i\omega) \mathbf{H}_c, \quad (2.83)$$

donde usamos las relaciones para los operadores  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$  y  $\nabla = -i\kappa$  (*Reitz et al., 1980*), por lo que tenemos la relación

$$\kappa \times \mathbf{E}_c = \mu_o \omega \mathbf{H}_c. \quad (2.84)$$

Así, al utilizar la ecuación (2.84) y la identidad vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

la ecuación (2.81) la expresamos como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}} &= \frac{1}{2\omega\mu_o} \Re \{ \mathbf{E}_c \times (\kappa^* \times \mathbf{E}_c^*) \} = \frac{1}{2\omega\mu_o} \Re \{ \kappa^* (\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c^*) - \mathbf{E}_c^* (\mathbf{E}_c \cdot \kappa^*) \}, \\ \bar{\mathbf{I}} &= \frac{1}{2\omega\mu_o} \Re \{ \kappa^* (\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c^*) \} \end{aligned} \quad (2.85)$$

dónde  $\mathbf{E}_c^* (\mathbf{E}_c \cdot \kappa^*) = 0$ , ya que  $\mathbf{E}_c$  es perpendicular a  $\kappa^*$ .

Al sustituir las relaciones (2.71) y (2.78) en la ecuación (2.85) obtenemos

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2\omega\mu_o} \Re \left\{ (\kappa' - i\kappa'') \left[ \begin{array}{l} \mathbf{E}_o \exp \left( -\frac{\omega}{c} k'' z - i \left( \frac{\omega}{c} n' z - \omega t \right) \right) \\ \cdot \mathbf{E}_o \exp \left( -\frac{\omega}{c} k'' z + i \left( \frac{\omega}{c} n' z - \omega t \right) \right) \end{array} \right] \right\} \hat{\mathbf{s}},$$

o bien

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2\omega\mu_o} \Re \left\{ \left( \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} k'' \right) \left( \exp \left( -2 \frac{\omega}{c} k'' z \right) \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_o \right) \right\} \hat{\mathbf{s}},$$

y finalmente al considerar sólo la parte real obtenemos

$$\bar{I} = \frac{n'}{2c\mu_o} |E_o|^2 \exp\left(-2\frac{\omega}{c} k'' z\right) \hat{s}. \quad (2.86)$$

Mediante la sustitución de la ecuación (2.70) en la ecuación (2.86) escribimos

$$\bar{I} = \frac{(n_o + n_2 \overline{E^2})}{2c\mu_o} |E_o|^2 \exp\left(-2\frac{\omega}{c} (k_o + k_2 \overline{E^2}) z\right) \hat{s}, \quad (2.87)$$

donde el valor promedio temporal de  $\overline{E^2}$  es,

$$\overline{E^2} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} E_o^2 \cos^2(\kappa z - \omega t) dt = \frac{E_o^2}{2}.$$

Así, al tomar en cuenta  $|E_o|^2 = \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_o = E_o^2$ , la magnitud del vector de Poynting (ecuación (2.87)) es ahora

$$\bar{I}(z, E) = \frac{1}{2c\mu_o} \left( n_o E_o^2 + \frac{n_2 E_o^4}{2} \right) \exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda n_o} \left( k_o + \frac{k_2 E_o^2}{2} \right) z\right), \quad (2.88)$$

donde consideramos la longitud de onda  $\lambda = 2\pi c/n_o \omega$  de las relaciones  $\omega/c = 2\pi/\lambda_o$  y  $\lambda_o = n_o \lambda$ .

La ecuación (2.88) indica que la energía radiativa que está pasando a través del medio se atenúa de manera exponencial. Dicha ecuación establece entonces la energía por unidad de tiempo y unidad de área dentro del medio en un punto  $z$  desde el origen donde la intensidad radiativa entra.

En la ecuación (2.88), el término

$$\kappa_L = \frac{4\pi}{\lambda n_o} k_o, \quad (2.89)$$

corresponde al coeficiente de absorción lineal, y el término

$$\kappa_{NL} = \frac{2\pi}{\lambda n_o} k_2 E_o^2. \quad (2.90)$$

representa el coeficiente de absorción no lineal el cual depende la amplitud del campo eléctrico.

Si definimos el coeficiente de absorción total  $\kappa_T$  como:

$$\kappa_T \equiv \kappa_L + \kappa_{NL}, \quad (2.91)$$

la ecuación (2.88) es ahora:

$$\bar{I}(z, E) = \frac{n_o + n_2 E_o^2}{2c\mu_o} E_o^2 \exp(-\kappa_T z). \quad (2.92)$$

Por otro lado consideramos la intensidad radiativa en  $z = 0$ , tal que,

$$\bar{I}(0, E) = \frac{n_o + n_2 E_o^2}{2c\mu_o} E_o^2, \quad (2.93)$$

y reescribimos la ecuación (2.92) como:

$$\bar{I}(z, E) = \bar{I}(0, E) \exp(-z\kappa_T). \quad (2.94)$$

Al definir la absorptividad  $\alpha_a$  para un medio semitransparente como (Modest, 1993),

$$\alpha_a \equiv \frac{\bar{I}(0, E) - \bar{I}(z, E)}{\bar{I}(0, E)}, \quad (2.95)$$

y sustituyendo la ecuación (2.94) en la ecuación (2.95) tenemos la expresión para la absorptividad,

$$\alpha_a = 1 - \exp(-z\kappa_T). \quad (2.96)$$

Como hemos visto, en un material los coeficientes  $n_o$  y  $k_o$  determinan como se propaga en primera aproximación una onda electromagnética.

Así también, cuando hablamos de campos intensos, establecimos la corrección para la propagación de una onda electromagnética a través de un medio, mediante los coeficientes  $n_2$  y  $k_2$ . Sin embargo, el coeficiente  $k_2$ , que corresponde a la parte imaginaria en el efecto Kerr, no está reportado en la literatura.

Para estimar el valor del coeficiente  $k_2$ , en la siguiente sección, analizamos desde el punto de vista molecular la interacción de la onda electromagnética en el material de la fibra óptica. Tomando en cuenta que el papel principal en la respuesta óptica del átomo lo desempeña el electrón, ya que al pasar una onda electromagnética a través de un medio semitransparente provoca el desplazamiento de dichas cargas eléctricas.

De esta manera, con base en la teoría de dispersión óptica de Drude-Lorentz analizamos el índice de refracción  $\hat{n}(\omega, E)$  en función de los parámetros microscópicos. Esto se lleva a cabo al vincular las relaciones obtenidas de la teoría de Drude-Lorentz con la teoría macroscópica de las relaciones de Maxwell. Al final obtenemos un modelo que nos permite calcular  $k_2$  y por lo tanto podemos estimar el comportamiento del coeficiente de absorción total  $\kappa_T$ .

## 2.5 Modelo para la dispersión óptica (un oscilador no lineal)

La teoría de Drude-Lorentz considera a las moléculas o a los átomos como un sistema y analiza de manera microscópica como las cargas que constituyen el medio se desplazan de la posición de equilibrio durante la propagación de una onda electromagnética. Así, la teoría de Drude-Lorentz estudia el desplazamiento de las partículas cargadas al suponer que éstas presentan un comportamiento de osciladores armónicos clásicos (Reitz et al., 1980).

En esta parte de la investigación, con base en la teoría de Drude-Lorentz, presentamos un modelo para estimar el valor del coeficiente de extinción no lineal  $k_2$  al suponer a las partículas cargadas que constituyen al material del núcleo de la fibra óptica como un sistema de osciladores *anarmónicos* forzados. Estos osciladores anarmónicos son activados por la acción de un campo eléctrico intenso presente en la onda electromagnética que se encuentra pasando a través del medio.

Así, al vincular la teoría macroscópica de Maxwell con la teoría microscópica de Drude-Lorentz se puede determinar el índice de refracción en dependencia de las constantes del átomo y la frecuencia del campo exterior (Reitz et al., 1980). Es decir, damos un soporte microscópico a la teoría macroscópica expuesta en las secciones previas y examinamos la variación del índice de refracción  $\hat{n}$  en función de las constantes de la molécula de  $\text{SiO}_2$  y la frecuencia de la onda luminosa transmitida.

De acuerdo con la teoría clásica de los electrones, bajo la influencia del campo eléctrico, estas cargas se desplazan de la posición de equilibrio una distancia  $r[m]$ , transformando de esta manera al átomo en un sistema eléctrico con el valor del momento dipolar  $p[Cm]$ , tal que (Hecht y Zajac, 1976),

$$p = er, \quad (2.97)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde  $e$  es la carga del electrón y  $r$  es el desplazamiento dirigido a lo largo del campo eléctrico  $E$  (ver figura 2.4).

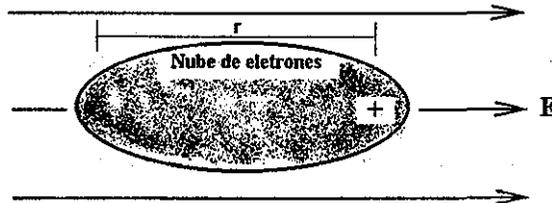


Figura 2.4: Distorsión de la nube electrónica en respuesta a un campo eléctrico  $E$  aplicado .

Si hay  $N[m^{-3}]$  cargas contribuyendo por unidad de volumen, la polarización eléctrica, o densidad de momentos dipolares es (Landsberg, 1984)

$$P = Np = Ner. \quad (2.98)$$

En el caso donde en el medio existen diferentes especies de átomos y cada uno de ellos contribuye a la polarización, entonces escribimos,

$$P = \sum_{j=1}^j f_j N_j e_j r_j, \quad (2.99)$$

donde el subíndice  $j$  se refiere a la  $j$ -ésima especie de cargas y  $f_j$  son los factores de peso conocidos como la *intensidad de los osciladores*. Al ser estos últimos, una medida de la probabilidad de ocurrencia de una transición atómica dada, las  $f_j$  se conocen también como *probabilidades de transición* (Landsberg, 1984). Los factores de peso satisfacen el requisito

$$\sum_{j=1}^j f_j = 1, \quad (2.100)$$

Una vez que conocemos la polarización eléctrica del medio  $P$  (ecuación (2.99)) y a través de la relación (2.52) escribimos

$$\hat{n}^2 = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}, \quad (2.101)$$

donde el índice de refracción al cuadrado  $\hat{n}^2$  en función de las  $j$ -ésimas especies de cargas está dado por

$$\hat{n}^2 = 1 + \frac{1}{\epsilon_0 E} \sum_{j=1}^j f_j N_j e_j r_j. \quad (2.102)$$

Por tanto, para estimar el índice de refracción  $\hat{n}$  debemos estimar los desplazamientos  $r_j$  de las cargas producto de la acción del campo eléctrico  $E$ .

Para estimar los desplazamientos  $r_j$ , desarrollamos un modelo que representa el problema de las oscilaciones anarmónicas forzadas amortiguadas de las cargas cuyas frecuencias naturales de oscilación  $\omega_0$  tienen el mismo orden de magnitud que la frecuencia de la onda luminosa  $\omega$ . Cabe

mencionar que las cargas analizadas son los electrones que experimentan un desplazamiento importante y por eso participan en los procesos que aquí examinamos. Tales electrones reciben el nombre de electrones ópticos (*Landsberg, 1984*).

El modelo desarrollado en esta sección, nos permite deducir una expresión analítica para  $\hat{n}^2(\omega, E)$  en función de lo que ocurre dentro del medio a nivel atómico. Para llevar a cabo esto, consideramos un tratamiento con base en las herramientas de la mecánica clásica (*Reitz et al., 1980*) donde suponemos que el comportamiento a nivel molecular es análogo con un sistema mecánico compuesto por resortes y amortiguadores.

El modelo propuesto para determinar el desplazamiento del electrón es un oscilador anarmónico amortiguado forzado en una dimensión<sup>5</sup>, cuya representación matemática la establecemos como,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_E + F_r + F_F \quad (2.103)$$

donde  $m$  es la masa del electrón,  $F_E$  es la fuerza ejercida sobre el electrón por efecto del campo eléctrico,  $F_r$  es la fuerza retención o restauradora, y  $F_F$  es la fuerza de la resistencia o freno.

Comencemos por especificar cada uno de los términos de la ecuación (2.103).

El término de la izquierda es el cambio en el momento del electrón, que por la segunda ley de Newton, es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el electrón.

El término  $F_E$  corresponde a la fuerza que experimenta el electrón por el campo eléctrico de una onda de frecuencia  $\omega$ , es decir

$$F_E = eE_m \quad (2.104)$$

(ver ecuación (2.21)) donde  $E_m$  es el campo eléctrico a nivel molecular.

La fuerza de restauradora

$$F_r \propto -r, \quad (2.105)$$

es la que mantiene al electrón en posición de equilibrio, la cual se trata como una fuerza elástica. El carácter elástico de la fuerza de retorno significa que la energía potencial del electrón  $U$  depende de un modo parabólico de su desplazamiento de la posición de equilibrio, de esta manera (*Landsberg, 1984*),

$$U(r) = 1/2Kr^2 \quad (2.106)$$

donde  $K$  es la constante de proporcionalidad para la relación elástica.

La relación de la energía potencial (2.106) puede considerarse como una primera aproximación y para analizar el fenómeno óptico no lineal es necesario complementarla con el sumando de una potencia más elevada del desplazamiento de  $r$ . Esta corrección puede considerarse relativamente pequeña y de la siguiente forma (*Landsberg, 1984*),

$$U(r) = 1/2Kr^2 - 1/4m\xi r^4, \quad (2.107)$$

con la particularidad de que esta ley debe cumplirse para cualesquiera valores de  $r$  donde  $\xi$  es la constante de proporcionalidad para el anarmonismo del oscilador. Cabe mencionar que la ecuación (2.107) supone que es imposible arrancar un electrón de la molécula de  $\text{SiO}_2$ , sin embargo existe un valor finito de energía de ionización para dicha molécula del orden  $E \cong 5 \times 10^{11} \text{Vm}^{-1}$  (*Reitz et al., 1980*). Los valores del campo aquí estudiados son del orden  $E \cong 1 \times 10^4 \text{Vm}^{-1}$ , por lo que la relación (2.107) resulta una buena aproximación ya que el orden de magnitud de la intensidad de campo eléctrico en estudio no infringe la integridad de la molécula pues su intensidad no logra desprender electrones de la molécula de  $\text{SiO}_2$ .

<sup>5</sup> Se considera de manera unidimensional el problema puesto que suponemos un medio isótropo.



La fuerza de retención o restauradora la escribimos a partir de la relación (2.107) como:

$$F_r = -\partial U/\partial r = -Kr + m\xi r^3 \quad (2.108)$$

Por último la fuerza de frenado

$$F_F = -F \frac{dr}{dt}, \quad (2.109)$$

que al igual que muchos problemas de la mecánica clásica, la fuerza de rozamiento puede considerarse proporcional a la velocidad de la partícula (Landsberg, 1984) y por tanto se supone proporcional a la velocidad de desplazamiento del electrón  $dr/dt$ , donde  $F$  es la constante de proporcionalidad para la resistencia o freno. Esta fuerza corresponde a la transmisión paulatina de energía del electrón a la red de átomos durante la oscilación. Así, las oscilaciones serán amortiguadas y la energía absorbida por el átomo pasa a otras formas de energía. Una de los mecanismos de transferencia de energía es el calor por conducción el cual provoca el incremento de la energía cinética de los átomos del medio y al existir almacenamiento incrementa la temperatura del medio.

Con base en lo anterior establecemos la ecuación diferencial ordinaria no homogénea para el desplazamiento  $r$  para las distintas especies  $j$ ,

$$m \frac{d^2 r_j}{dt^2} = eE_m - K_j r_j + m\xi r_j^3 - F_j \frac{dr_j}{dt}, \quad (2.110)$$

donde  $F_j$  es la constante de proporcionalidad para la resistencia o freno de la  $j$ -ésima especie,  $K_j$  es la constante de proporcionalidad para la relación elástica de la  $j$ -ésima especie y  $\xi$  es la constante de proporcionalidad para el anarmonismo presente en el oscilador.

Agrupando algunos términos en coeficientes característicos, la ecuación (2.110) la escribimos de nueva cuenta como,

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} + \gamma_j \frac{dr_j}{dt} + \omega_{oj}^2 r_j - \xi r_j^3 = \frac{eE_m}{m}, \quad (2.111)$$

donde  $\gamma_j[s]$  es la constante de amortiguamiento ( $\gamma_j = F_j/m$  tiene dimensiones de frecuencia),  $\omega_{oj}[s]$  es la frecuencia natural de oscilación ( $\omega_{oj}^2 = K/m$ ) y ésta puede ser calculada mediante (Reitz et al., 1980),

$$\omega_{oj}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R_{oj}^3}, \quad (2.112)$$

donde  $R_{oj}$  es el radio del átomo de la especie  $j$ .

El parámetro  $\gamma_j$  se puede estimar (Reitz et al., 1980) de la relación,

$$\gamma_j = \frac{4\pi R_e}{3 \lambda'_{oj}} \omega_{oj}, \quad (2.113)$$

donde:

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = 2.81 \times 10^{-15} m, \quad (2.114)$$

$\lambda'_{oj} = 2\pi c/\omega_{oj}$  es la longitud de onda correspondiente a  $\omega_{oj}$  y  $R_e$  es denominado clásicamente como el radio del electrón. Sin embargo, los parámetros  $\gamma_j$  pueden presentar una ligera dependencia con la frecuencia  $\omega$  como veremos más adelante y la relación (2.113) resulta muy útil para estimar el orden de magnitud de los coeficientes de amortiguamiento.

Por otro lado, si bien el campo a nivel molecular depende de la posición y del tiempo en la forma (Reitz et al., 1980),

$$E_m = E_1 \exp(-i(\omega t - \kappa \cdot r)), \quad (2.115)$$

en nuestro estudio la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/\kappa$ , es mucho más grande que el tamaño de la región donde la partícula se mueve, por ejemplo, el radio de lo átomo es del orden  $1 \text{ \AA}$  y para la región del espectro solar  $\lambda \cong [2500, 25000] \text{ \AA}$ , por lo que la variación espacial de  $E_m$  es despreciable a lo largo de la partícula, o en otras palabras  $\kappa \rightarrow 0$ , y el campo es uniforme en esta región pequeña del espacio, por tanto escribimos,

$$E_m = E_1 \exp(-i\omega t), \quad (2.116)$$

y de esta manera la ecuación (2.111) es ahora,

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} + \gamma_j \frac{dr_j}{dt} + \omega_o^2 r_j - \xi r_j^3 = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t), \quad (2.117)$$

Para dar solución a la ecuación (2.117), utilizamos el método de aproximaciones sucesivas. En este método se resuelve primero la ecuación homogénea sin el término anarmónico (Betz, 1984) y en seguida se resuelve la ecuación del oscilador amortiguado forzado (Arfken, 1970). Más adelante, siguiendo el tratamiento de Dufing, sustituimos en el término anarmónico la solución obtenida del oscilador amortiguado forzado (Hagdorn, 1988 y Kapitaniak, 1991). Así, finalmente obtenemos la solución para la ecuación (2.117), la cual es el comportamiento del desplazamiento de la carga eléctrica.

Comencemos por establecer la ecuación homogénea sin el término anarmónico para una sola especie  $j$ , es decir

$$\frac{d^2 r_h}{dt^2} + \gamma \frac{dr_h}{dt} + \omega_o^2 r_h = 0, \quad (2.118)$$

tal que su ecuación característica es

$$\delta^2 + 2b\delta + \omega_o^2 = 0, \quad (2.119)$$

donde  $2b = \gamma$  y las raíces  $\delta_1$  y  $\delta_2$  de la ecuación (2.119) son,

$$\delta_1, \delta_2 = -b \pm (b^2 - \omega_o^2)^{1/2},$$

y al analizar el discriminante,

$$b^2 - \omega_o^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{K}{m} = \frac{F^2 - 4Km}{4m^2},$$

donde  $F = m\gamma$  y el amortiguamiento crítico está dado por  $F_{cr} = \sqrt{4Km}$ . En este punto se pueden presentar tres casos;  $F > F_{cr}$  caso sobreamortiguado,  $F = F_{cr}$  caso críticamente amortiguado y  $F < F_{cr}$  caso subamortiguado. Tomando en cuenta que  $\gamma \ll K$ , observamos que  $F^2 < 4Km$ , lo que indica que se trata de un movimiento subamortiguado y por tanto la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas (Edwards y Penney, 1985),

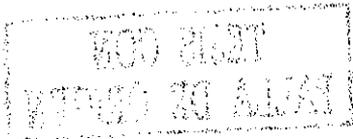
$$\delta_1, \delta_2 = -b \pm i(\omega_o^2 - b^2)^{1/2}$$

y la solución es de la forma (Edwards y Penney, 1985),

$$r_h = \exp(-bt) (C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), \quad (2.120)$$

donde  $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4}\gamma^2} \approx \omega_o$  ya que  $\frac{1}{4}\gamma^2 \ll \omega_o^2$ . De esta manera la solución homogénea de la ecuación (2.117) es,

$$r_h = C \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) (\cos \omega_o t - \varrho), \quad (2.121)$$



donde  $C = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$  y  $\tan \varrho = (C_2/C_1)$ , (Edwards y Penney, 1985).

Por otro lado, para dar solución a la ecuación del oscilador forzado amortiguado para una sola especie  $j$ ,

$$\frac{d^2 r_p}{dt^2} + \gamma \frac{dr_p}{dt} + \omega_0^2 r_p = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t), \quad (2.122)$$

se sabe que la solución tiene la forma (Edwards y Penney, 1985),

$$r_p = A_1 \cos \omega t - i B_1 \sin \omega t, \quad (2.123)$$

que al ser sustituida en la ecuación (2.121) conduce al sistema de ecuaciones:

$$A_1 (\omega_0^2 - \omega^2) - i B_1 \gamma \omega = \frac{e E_1}{m}, \quad (2.124)$$

$$-A_1 \gamma \omega - i B_1 (\omega_0^2 - \omega^2) = -i \frac{e E_1}{m}, \quad (2.125)$$

el cual se resuelve de manera sencilla para  $A$  y  $B$ , donde:

$$A_1 = B_1 = \frac{e E_1}{m} \left( \frac{-i (\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma \omega}{-i ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2)} \right). \quad (2.126)$$

Al sustituir dichos valores en la ecuación (2.123) y una vez simplificada la ecuación obtenemos,

$$r_p = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (2.127)$$

La solución general para el oscilador armónico amortiguado la construimos de la forma

$$r_g = r_h + r_p, \quad (2.128)$$

por lo que al sustituir las ecuaciones (2.120) y (2.127) en la ecuación (2.128) obtenemos la solución general para el caso lineal,

$$r_g = C \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) (\cos \omega_0 t - \varrho) + \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (2.129)$$

donde la solución de la ecuación homogénea  $r_h$  representa la parte transitoria. Sin embargo, en nuestro caso de estudio, el  $\text{SiO}_2$  tiene una respuesta de tiempo con respecto a la interacción del campo eléctrico del orden de  $10^{-15}$  s y la respuesta transitoria desaparece rápidamente (Remoissents, 1994). Por lo tanto en el estado permanente tenemos que el desplazamiento de los electrones está dado por,

$$r_g = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (2.130)$$

Por último, para dar solución a la ecuación (2.117), utilizamos el metodo de Dufing en aproximaciones sucesivas (Kapitaniak, 1991 y Landsberg, 1984). De tal suerte que al considerar la ecuación auxiliar para una sola especie  $j$ ,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \gamma \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) + \xi r^3, \quad (2.131)$$

donde  $r_j$  esta dado por la ecuación (2.130). Así escribimos:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \gamma \frac{dr}{dt} + \omega_j^2 r = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) + \xi \left( \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \Gamma \right)^3, \quad (2.132)$$

donde:

$$\Gamma = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (2.133)$$

De las referencias (Hagdorn, 1988 y Kapitaniak, 1991) conocemos la solución, que es de la forma,

$$r = A_2 \cos \omega t - i B_2 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - i D_2 \sin \omega t, \quad (2.134)$$

y al ser sustituida en la ecuación (2.132) conduce al sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas,

$$A_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - i B_2 \gamma \omega = \frac{e E_1}{m}, \quad (2.135)$$

$$-A_2 \gamma \omega - i B_2 (\omega_0^2 - \omega^2) = -i \frac{e E_1}{m}, \quad (2.136)$$

$$C_2 (\omega_0^2 - 9\omega^2) - i 3 D_2 \gamma \omega = \xi \left( \frac{e E_1}{m} \Gamma \right)^3, \quad (2.137)$$

$$-3 C_2 \gamma \omega - i D_2 (\omega_0^2 - 3\omega^2) = -i \xi \left( \frac{e E_1}{m} \Gamma \right)^3, \quad (2.138)$$

donde  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  y  $D_2$  son fácilmente encontradas,

$$A_2 = B_2 = \frac{e E_1}{m} \frac{-i (\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma \omega}{-i ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2)}, \quad (2.139)$$

$$C_2 = D_2 = \xi \left( \frac{e E_1}{m} \Gamma \right)^3 \frac{-i (\omega_0^2 - 9\omega^2) + 3\gamma \omega}{-i ((\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma \omega)^2)}. \quad (2.140)$$

Las ecuaciones (2.139) y (2.140) se sustituyen en la ecuación (2.134) para obtener el desplazamiento  $r$  en función de la frecuencia  $\omega$ . Una vez que ésta es simplificada obtenemos:

$$r = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \Gamma + \xi \left( \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \Gamma \right)^3 \frac{(\omega_0^2 - 9\omega^2) + 3i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma\omega)^2}, \quad (2.141)$$

así, la solución del desplazamiento  $r$  para las distintas especies  $j$  la ecuación (2.141) la escribimos como,

$$r_j = \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \Gamma_j + \xi \left( \frac{e}{m} E_1 \exp(-i\omega t) \Gamma_j \right)^3 \frac{(\omega_{0j}^2 - 9\omega^2) + 3i\gamma_j\omega}{(\omega_{0j}^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma_j\omega)^2}, \quad (2.142)$$

donde

$$\Gamma_j = \frac{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) + i\gamma_j\omega}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j\omega)^2}. \quad (2.143)$$

La ecuación (2.142) es la solución analítica de la ecuación (2.117) y tenemos así el desplazamiento  $r$  de la carga  $j$  en función del campo  $E_m = E_1 \exp(-i\omega t)$  y de los parámetros microscópicos.

Una vez establecido el desplazamiento  $r_j$  de la carga se puede determinar la polarización  $P$  mediante las ecuaciones (2.99) y la ecuación (2.142),

$$P = \frac{Ne^2}{m} E_m \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j + \xi \frac{Ne^4}{m^3} E_m^3 \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j^3 \frac{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) + 3i\gamma_j \omega}{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma_j \omega)^2}, \quad (2.144)$$

donde consideramos que en la molécula de  $\text{SiO}_2$  se comparten electrones debido a su enlace covalente, por lo que tomamos en cuenta  $N$  moléculas por unidad de volumen y la carga de electrón  $e$  para las especies  $N_j$  y  $e_j$ , respectivamente.

Una vez establecida la polarización  $P$ , sustituimos la ecuación (2.144) en la ecuación (2.101) para obtener el índice de refracción al cuadrado en función de los parámetros microscópicos,

$$\hat{n}^2(\omega, E) = 1 + \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j + \xi \frac{e^2}{m^2} E^2 \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j^3 \frac{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) + 3i\gamma_j \omega}{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma_j \omega)^2}, \quad (2.145)$$

donde

$$\omega_p = \left( \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}, \quad (2.146)$$

es conocida como la frecuencia de plasma.

Cabe aclarar que en nuestros cálculos (ecuación (2.145)) suponemos

$$E_m \approx E, \quad (2.147)$$

y no tomamos en cuenta la ley de Clausius-Mosotti (*Reitz et al., 1980*). Esta ley se traduce en una ligera corrección entre la intensidad del campo eléctrico aplicado y el campo molecular de la forma.

$$E_m = E + \frac{\nu}{\epsilon_0} P. \quad (2.148)$$

Debido al hecho de que el campo eléctrico externo  $E$  que consideramos en nuestro estudio es mucho más intenso que la carga de polarización  $P$ , es decir  $E \gg \nu/\epsilon_0 P$ , (donde  $\nu = 1/3$  para un medio dieléctrico), en nuestro análisis para el índice de refracción dependiente de la frecuencia despreciamos la corrección local del campo.

Por otro lado, la magnitud del momento eléctrico  $P$  por unidad de volumen que adquiere el medio bajo la influencia del campo externo  $E$ , puede representarse mediante (*Reitz et al., 1980*)

$$P = \alpha E, \quad (2.149)$$

donde  $\alpha$  [ $\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$ ] es la polarizabilidad o polarización macroscópica tal que,

$$\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_2 E^2. \quad (2.150)$$

Así, mediante la ecuación (2.53)

$$P = \epsilon_0 (\chi_L + 3\chi_{NL} E^2) E, \quad (2.151)$$

y a través de las ecuaciones (2.144) y (2.147) relacionamos la susceptibilidad y la polarizabilidad del medio,

$$\alpha_o = \epsilon_o \chi_L = \epsilon_o \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j \quad (2.152)$$

y

$$\alpha_2 = \epsilon_o 3\chi_{NL} = \epsilon_o \xi \frac{e^2}{m^2} \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \Gamma_j^3 \left[ \frac{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) + 3i\gamma_j \omega}{(\omega_{oj}^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma_j \omega)^2} \right] \quad (2.153)$$

donde  $\alpha_o [CV^{-1}m^{-1}]$  en la relación (2.152) es la parte lineal de la polarizabilidad y  $\alpha_2 [CmV^{-3}]$  en la relación (2.153) representa la parte no lineal de la polarizabilidad. Cabe señalar que las susceptibilidades  $\chi_L$  y  $\chi_{NL}$  son cantidades complejas y dependen de la frecuencia (London, 1986).

Así, al decomponer las relaciones (2.152) y (2.153) en la parte real y la parte imaginaria escribimos

$$\chi'_L = \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \frac{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)}{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2} \quad (2.154)$$

$$\chi''_L = \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \frac{\gamma_j \omega}{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2}, \quad (2.155)$$

$$3\chi'_{NL} = \xi \frac{e^2}{m^2} \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \frac{\Theta_j}{\Lambda_j}, \quad (2.156)$$

$$3\chi''_{NL} = \xi \frac{e^2}{m^2} \omega_p^2 \sum_{j=1}^j f_j \frac{\Psi_j}{\Lambda_j}, \quad (2.157)$$

donde las expresiones explícitas para  $\Theta_j$ ,  $\Psi_j$  y  $\Lambda_j$  son

$$\Theta_j = (\omega_{oj}^2 - \omega^2)^3 (\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) - 9(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 (\gamma_j \omega)^2 - 3(\omega_{oj}^2 - \omega^2) (\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) (\gamma_j \omega)^2 + 3(\gamma_j \omega)^4, \quad (2.158)$$

$$\Psi_j = 3(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^3 (\gamma_j \omega) + 3(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 (\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) (\gamma_j \omega) - 9(\omega_{oj}^2 - \omega^2) (\gamma_j \omega)^3 - (\omega_{oj}^2 - 9\omega^2) (\gamma_j \omega)^3, \quad (2.159)$$

y

$$\Lambda_j = \left( (\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2 \right)^3 \left( (\omega_{oj}^2 - 9\omega^2)^2 + (3\gamma_j \omega)^2 \right). \quad (2.160)$$

Es importante mencionar que  $\xi$ ,  $f_j$  y  $\gamma_j$  no son conocidos. Estos coeficientes microscópicos no son fáciles de evaluar y demandan un tratamiento experimental complicado y con costo elevado.

En la siguiente sección, a partir de los resultados de la teoría electromagnética clásica y los fundamentos de la teoría de dispersión óptica, presentamos un camino alternativo para estimar el valor de los coeficientes microscópicos  $\xi$ ,  $f_j$  y  $\gamma_j$  y el coeficiente de extinción no lineal  $k_2$ .

## 2.6 Resultados y conclusiones

Para estimar los coeficientes microscópicos  $\xi$ ,  $f_j$  y  $\gamma_j$  y el coeficiente de extinción no lineal  $k_2$  acoplamos los resultados del tratamiento macroscópico (ecuaciones (2.57)-(2.60)) con los resultados del tratamiento microscópico (ecuaciones (2.154)-(2.157)). Puesto que nuestro estudio se limita al análisis de una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza, en las ecuaciones (2.161)-(2.164) usamos el subíndice  $j = 1$  para referirnos al átomo de oxígeno y el subíndice  $j = 2$  para el átomo de silicio. Así, escribimos

$$n_o^2 - k_o^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_{j=1}^2 f_j \frac{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)}{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2}, \quad (2.161)$$

$$2n_o k_o = \omega_p^2 \sum_{j=1}^2 f_j \frac{\gamma_j \omega}{(\omega_{oj}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2}, \quad (2.162)$$

$$2(n_o n_2 - k_o k_2) = \xi \frac{e^2}{m^2} \omega_p^2 \sum_{j=1}^2 f_j \frac{\Theta_j}{\Lambda_j}, \quad (2.163)$$

$$2(n_o k_2 - k_o n_2) = \xi \frac{e^2}{m^2} \omega_p^2 \sum_{j=1}^2 f_j \frac{\Psi_j}{\Lambda_j}, \quad (2.164)$$

donde las expresiones explícitas para  $\Theta_j$ ,  $\Psi_j$  y  $\Lambda_j$  están dadas por las relaciones (2.158)-(2.160) y se deben tomar también en cuenta  $j = 1$  para el átomo de oxígeno y  $j = 2$  para el átomo de silicio.

En esta parte de la investigación, nuestro principal objetivo es estimar el valor del coeficiente de extinción no lineal  $k_2$ . De tal suerte que las ecuaciones (2.161)-(2.164) conforman un sistema no lineal de ecuaciones donde las incógnitas son los coeficientes microscópicos  $\xi$ ,  $f_{1,2}$  y  $\gamma_{1,2}$  y el coeficiente de extinción no lineal  $k_2$ . Cabe señalar que es necesario incluir la ecuación auxiliar (ver ecuación (2.100))

$$f_1 + f_2 = 1, \quad (2.165)$$

que permite conocer la intensidad de los osciladores.

Es importante aclarar que los valores  $f_{1,2}$  pueden ser distintos uno del otro, es decir, los osciladores electrónicos para los dos tipos de átomos mencionados participan en el fenómeno de dispersión con distinta eficacia. También resulta importante mencionar que los valores  $f_j$  y los valores  $\gamma_j$ , pueden presentar una dependencia con la frecuencia  $\omega$ .

En las ecuaciones (2.161)-(2.164) los coeficientes  $n_o$ ,  $k_o$  y  $k_2$  son conocidos para el  $\text{SiO}_2$  de alta pureza mediante datos experimentales reportados en la literatura y también resultan conocidos los coeficientes microscópicos  $\omega_p$  y  $\omega_{1,2}$  a través de cálculos estimados reportados en la literatura. Los coeficientes macroscópicos  $n_o$ ,  $k_o$  y  $k_2$ , y los microscópicos  $\omega_p$  y  $\omega_{1,2}$ , son presentados a continuación.

Comencemos por el índice de refracción ordinario  $n_o$ . En la figura 2.5 se presenta el índice de refracción ordinario  $n_o$  en función de la frecuencia  $\omega$  en el rango del espectro solar. Estos datos son tomados de la referencia *Bansal y Doremus (1986)*.

Para obtener el coeficiente de extinción  $k_o$  utilizamos la curva de atenuación en decibeles por metro, reportada en la referencia *Polymicro Technologies (1999)*, la cual se presenta en la figura 2.6. En la construcción de esta curva se usan los decibeles de pérdidas para cada longitud de onda  $\lambda$  los cuales se estiman mediante la relación (*Hecht y Zajac, 1976*),

$$dB_{\text{per}\lambda} = -\frac{10}{L_{f\lambda}} \log \left( \frac{Q_{\text{sal}\lambda}}{Q_{\text{ent}\lambda}} \right), \quad (2.166)$$

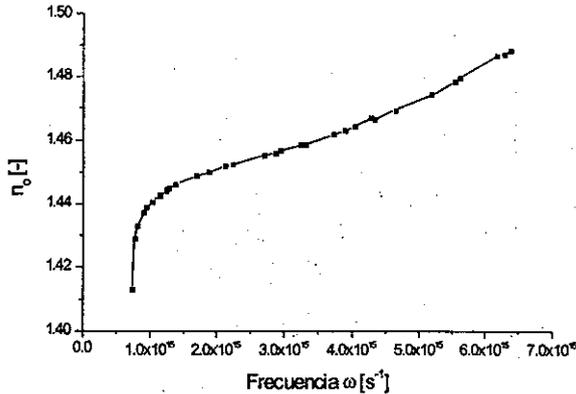


Figura 2.5: Índice de refracción ordinario  $n_o$  para el  $SiO_2$  en función de la frecuencia  $\omega$  en el espectro solar.

donde  $Q_{sal\lambda}$  y  $Q_{ent\lambda}$  son las energías radiativas por unidad de tiempo a la entrada y a la salida de la fibra óptica, respectivamente y  $L_{fo}$  es la longitud de la fibra. El subíndice  $\lambda$  denota por cada longitud de onda.

Así, mediante la definición del coeficiente de absorción lineal (Modest, 1993),

$$\kappa_{L\lambda} = -\frac{1}{L_{fo}} \ln \left( \frac{Q_{sal\lambda}}{Q_{ent\lambda}} \right) \quad (2.167)$$

y la relación (2.166) obtenemos

$$\kappa_{L\lambda} = \frac{\ln(10)}{10} dB_{per\lambda} \quad (2.168)$$

donde finalmente a través de la expresión (2.89) escribimos para el coeficiente de extinción  $k_{o\lambda}$  para cada longitud de onda,

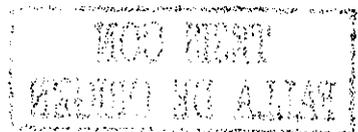
$$k_{o\lambda} = \frac{\lambda n_{o\lambda}}{4\pi} \frac{\ln(10)}{10} dB_{per\lambda} \quad (2.169)$$

En la figura 2.7 presentamos el coeficiente de extinción  $k_o$  en función de la frecuencia  $\omega$  para el rango del espectro solar.

Como mencionamos al principio del capítulo, el coeficiente de Kerr para  $SiO_2$  de alta pureza presenta un valor (Remoissents, 1994)

$$n_2 \simeq 10^{-22} m^2 V^{-2}, \quad (2.170)$$

y generalmente se ignora la dependencia con las frecuencias ópticas ya que no presenta variaciones significativas (Remoissents, 1994).



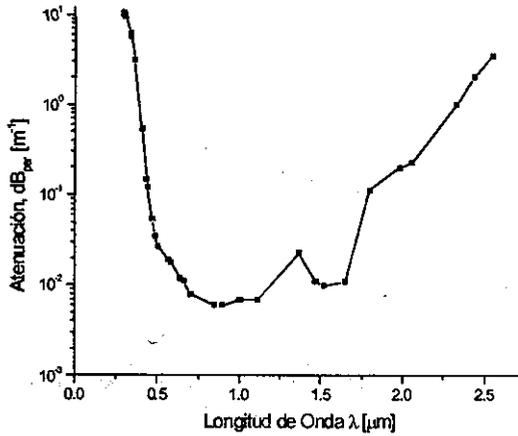
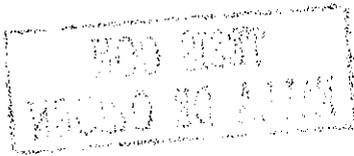


Figura 2.6: Atenuación de la fibra óptica de  $\text{SiO}_2$  en función de la longitud de onda  $\lambda$  en el espectro solar.

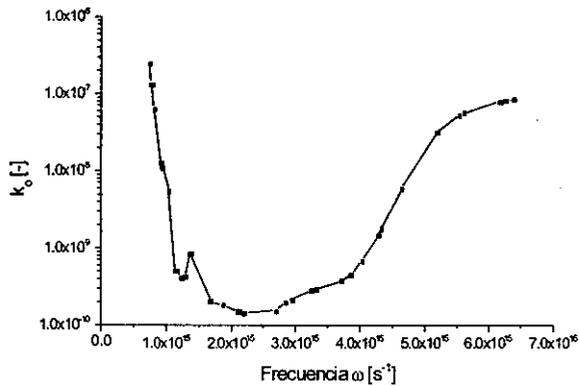
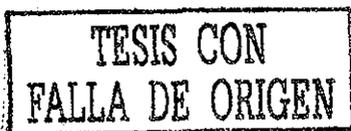


Figura 2.7: Coeficiente de extinción lineal  $k_0$  del  $\text{SiO}_2$  como función de la frecuencia  $\omega$  en el espectro solar.



Por último, para los coeficientes microscópicos  $\omega_p$  y  $\omega_{1,2}$ , de la ecuación (2.146) la frecuencia de plasma es

$$\omega_p^2 = 2.925 \times 10^{32} s^{-2} \quad (2.171)$$

y de la ecuación (2.112) obtenemos los valores para la frecuencia natural del átomo de oxígeno

$$\omega_{o1} = 3.238 \times 10^{16} s^{-1}, \quad (2.172)$$

y para el átomo de silicio

$$\omega_{o2} = 1.196 \times 10^{16} s^{-1}. \quad (2.173)$$

Para estimar los valores de  $f_1(\omega)$  del átomo de oxígeno y  $f_2(\omega)$  del átomo de silicio, usamos la ecuación (2.161) y la relación (2.165). En este punto, despreciamos los parámetros del amortiguamiento, es decir  $\gamma_{1,2} = 0$  donde suponemos que no hay fuerza de frenado. Esta suposición se basa en el hecho que  $k_o(\omega) \ll n_o(\omega)$ , la cual obliga a la siguiente restricción del modelo microscópico

$$(\omega_{oj}^2 - \omega^2) \gg (\gamma_j \omega) \quad (2.174)$$

así, tomamos en cuenta que  $k_o(\omega) \simeq 0$  y construimos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma,

$$1 + f_1 \frac{\omega_p^2}{(\omega_{o1}^2 - \omega^2)} + f_2 \frac{\omega_p^2}{(\omega_{o2}^2 - \omega^2)} = n_o^2 \quad (2.175)$$

$$f_1 + f_2 = 1 \quad (2.176)$$

donde la solución para  $f_1$  es,

$$f_1 = \frac{(\omega_{o1}^2 - \omega^2) ((n_o^2 - 1)(\omega_{o2}^2 - \omega^2) - \omega_p^2)}{\omega_p^2 (\omega_{o2}^2 - \omega_{o1}^2)} \quad (2.177)$$

y la solución para  $f_2$  es,

$$f_2 = 1 - f_1 \quad (2.178)$$

En la figura 2.8 presentamos los valores de  $f_1(\omega)$  y  $f_2(\omega)$  como función de la frecuencia.

Una vez obtenidos los valores de  $f_1(\omega)$  y  $f_2(\omega)$ , combinamos las ecuaciones (2.161) y (2.162) para obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite calcular los valores de  $\gamma_1(\omega)$  y  $\gamma_2(\omega)$ . Los valores del amortiguamiento para el átomo de oxígeno  $\gamma_1(\omega)$  y para el átomo de silicio  $\gamma_2(\omega)$  como función de la frecuencia son calculados numéricamente y se presentan en la figura 2.9.

Al comparar las figuras 2.7 y 2.9 es claro que el comportamiento del amortiguamiento para  $\gamma_1(\omega)$  y  $\gamma_2(\omega)$  está en concordancia con el comportamiento del coeficiente de extinción no lineal  $k_2$ . En la figura 2.7 para el coeficiente  $k_2$  aparece un pico de absorción de energía radiativa a una frecuencia  $\omega = 1.4 \times 10^{15} s^{-1}$  que corresponde a la interacción electromagnética con la nube de electrones del átomo de oxígeno como lo muestra la figura 2.9.

Es muy importante señalar que los valores calculados de  $f_1(\omega)$ ,  $f_2(\omega)$ ,  $\gamma_1(\omega)$  y  $\gamma_2(\omega)$  reproducen satisfactoriamente el comportamiento de  $n_o$  y  $k_o$  (figuras 2.5 y 2.7) para el comportamiento lineal del índice de refracción  $\hat{n}$ .

Con los resultados obtenidos del comportamiento lineal, proseguimos con la componente no lineal del índice de refracción  $\hat{n}$ . De las ecuaciones (2.163) y (2.164) establecemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para estimar el valor de la constante de proporcionalidad para el anarmonismo  $\xi(\omega)$  y el coeficiente de extinción no lineal  $k_2(\omega)$ .

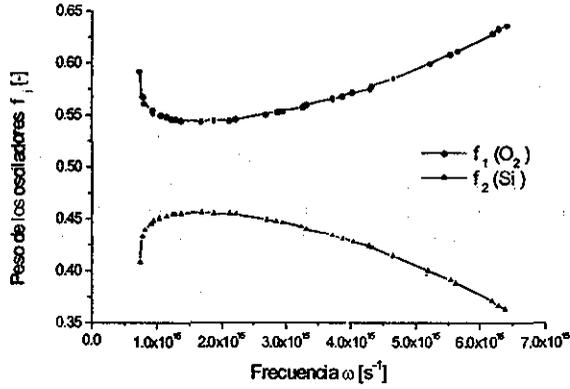


Figura 2.8: Pesos de los osciladores  $f_1$  y  $f_2$  en función de la frecuencia  $\omega$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

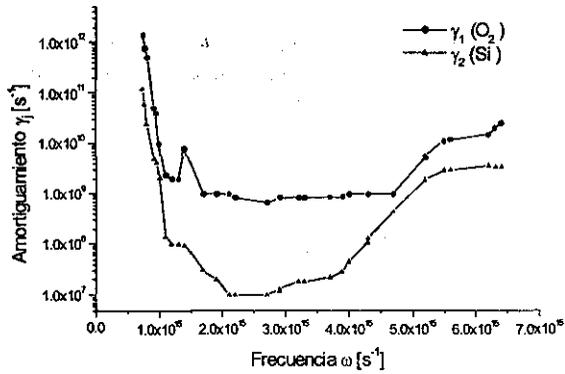


Figura 2.9: Valores del coeficiente de amortiguamiento  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para el espectro solar.

En las figuras 2.10 y 2.11 se presentan los valores de  $\xi(\omega)$  y  $k_2(\omega)$ , respectivamente.

En la figura 2.10 el coeficiente  $\xi(\omega)$  varía en el rango del espectro solar desde  $3.6 \times 10^{52}$  a  $5.7 \times 10^{50} m^{-2} s^{-2}$  y su valor promedio sobre dicho espectro es

$$\xi = 2.0 \times 10^{52} m^{-2} s^{-2}. \quad (2.179)$$

En la figura 2.11 el coeficiente  $k_2(\omega)$  varía en el rango del espectro solar desde  $3.9 \times 10^{-28}$  a  $1.1 \times 10^{-31} m^2 V^{-2}$  y su valor promedio sobre dicho espectro es

$$k_2 = 3.0 \times 10^{-29} m^2 V^{-2}. \quad (2.180)$$

Nuestro interés es el uso de fibras ópticas de  $SiO_2$  para la transmisión de energía solar concentrada. Así, al usar un concentrador circular para coleccionar y concentrar energía solar donde la máxima concentración lograda es  $C_g = 45,000$  (Duffie y Beckman, 1991) y al asumir una radiación solar directa  $I_{sc} = 1,000 W m^{-2}$  (Duffie y Beckman, 1991), la energía máxima por unidad de tiempo y unidad de área en el punto focal donde uno de los extremos de la fibra es colocado es entonces  $I_m = 45 \times 10^6 W m^{-2}$ .

Por otro lado, la intensidad del campo eléctrico  $E_o$  como función de la intensidad radiativa es (Hecht y Zajac, 1976)

$$E_o = 2.44 \left( \frac{I}{n_o} \right)^{1/2}, \quad (2.181)$$

al considerar la máxima intensidad de radiación  $I = I_m$  y el valor promedio del índice de refracción sobre el espectro solar  $n_o = 1.56$ , calculamos una amplitud del campo eléctrico

$$E_o = 1.36 \times 10^4 V m^{-1}. \quad (2.182)$$

Substituyendo este valor en la ecuación (2.90) y considerando el valor promedio de  $k_2$  (relación (2.180)), estimamos que el coeficiente de absorción no lineal presenta una magnitud del orden de

$$\kappa_{NL} = 10^{-14} m^{-1}, \quad (2.183)$$

el cual resulta despreciable para el coeficiente de absorción total (ecuación (2.91)) ya que el orden de magnitud del coeficiente de absorción lineal es

$$\kappa_L = 10^{-1} m^{-1}. \quad (2.184)$$

Es claro que el coeficiente de atenuación

$$\alpha_a = 1 - \exp \{-z\kappa_L\}. \quad (2.185)$$

es una buena aproximación para el comportamiento de fibras ópticas de  $SiO_2$  cuando éstas transmiten energía solar concentrada proveniente de concentradores circulares, ya que coeficiente de absorción total  $\kappa_T$  tiene el mismo orden de magnitud que el coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$ ,

$$\kappa_T \cong \kappa_L. \quad (2.186)$$

De esta manera formulamos un modelo que estima el valor del coeficiente de extinción no lineal  $k_2(\omega)$  para fibras ópticas con núcleo de  $SiO_2$  de alta pureza y concluimos que la parte no lineal  $\kappa_L$  del coeficiente de absorción total  $\kappa_T(\omega)$  durante el transporte de energía solar concentrada proveniente de concentradores circulares resulta despreciable.

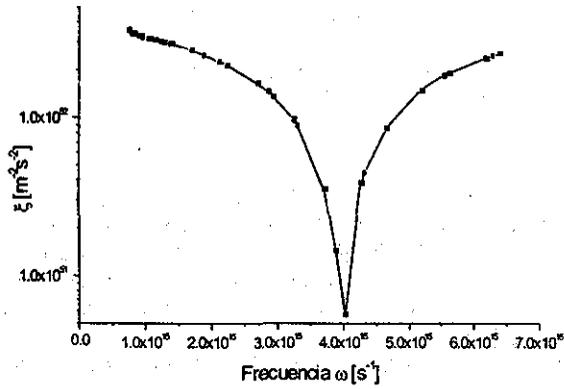


Figura 2.10: Constante de proporcionalidad para el anarmonismo  $\xi$  en función de la frecuencia  $\omega$  en el espectro solar.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

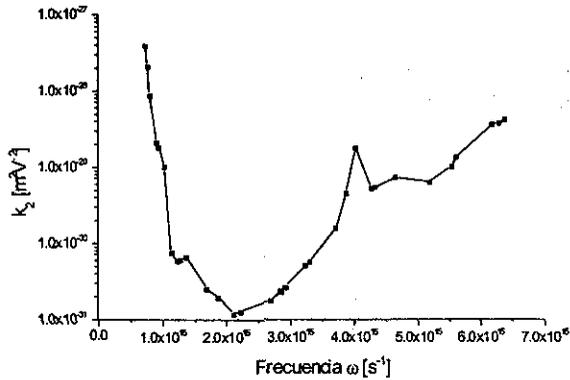


Figura 2.11: Coeficiente de extinción no lineal  $k_2$  para  $SiO_2$  como función de la frecuencia  $\omega$  en el espectro solar.

Es muy importante mencionar que este capítulo se incluyó para demostrar que el coeficiente de absorción no lineal resulta irrelevante en los cálculos del comportamiento térmico de una fibra óptica de  $\text{SiO}_2$  cuando ésta transporta flujo radiativo solar concentrado. Por esta razón en la siguiente parte de este trabajo no incluimos en nuestro análisis los efectos no lineales que se atañen en el transporte de energía radiativa a través de tales fibras ópticas.

En el siguiente capítulo presentamos un modelo para la transferencia de calor por conducción y por radiación que ocurre durante la transmisión de energía radiativa a través del núcleo de la fibra.

En el modelo propuesto consideramos al núcleo de la fibra como un medio participante donde la radiación absorbida incrementa la temperatura de los materiales que conforman la fibra óptica. Dicho modelo se basa en un análisis de un sistema unidimensional cilíndrico donde la superficie extendida es de sección circular constante y mantiene intercambio de calor con los alrededores.

Si bien el modelo presentado en el siguiente capítulo constituye un sistema unidimensional que sólo considera los cambios en la temperatura en la dirección de propagación de la energía radiativa transmitida, éste resulta un modelo simplificado de fácil manejo y con resultados aproximados aceptables, como mostraremos más adelante.

76



## Capítulo 3

# Estudio teórico de la transferencia de calor en fibras ópticas

### 3.1 Introducción

En este capítulo establecemos un modelo unidimensional para estudiar el comportamiento térmico de la fibra óptica durante la transmisión de energía radiativa. Este modelo considera únicamente la parte lineal del coeficiente de absorción, ya que como se mostró en el capítulo anterior los efectos no lineales son despreciables. En nuestro modelo tomamos en cuenta la transferencia de calor por conducción, la absorción de energía radiativa y las pérdidas de calor hacia los alrededores en el núcleo de una fibra óptica.

Por principio, analizamos el flujo de calor radiativo que pasa a través de un medio ligeramente absorbente e isotrópico. La idea es establecer las bases de la ecuación que gobierna la transferencia radiativa en un medio participante. De esta manera, una vez establecido el mecanismo de la transferencia radiativa se está en condición de plantear la ecuación gobernante de transferencia de calor donde se considera la conducción, la energía radiativa absorbida, la convección hacia los alrededores y la energía almacenada.

Con base en la ecuación que gobierna la transferencia de calor propuesta establecemos un modelo unidimensional para inferir el comportamiento térmico de la fibra. El modelo desarrollado lo resolvemos de manera analítica. Una vez obtenida la solución a dicho modelo, llevamos a cabo su evaluación usando parámetros conocidos de datos experimentales. De esta manera, tenemos la posibilidad de estimar la evolución de la distribución de temperaturas en la fibra óptica durante el transporte de energía radiativa.

Es importante recordar que la temperatura de operación de la fibra óptica durante el proceso de transmisión no deberá superar cierta temperatura máxima, ya que en caso contrario, la fibra puede sufrir degradación permanente en sus propiedades físicas y ópticas.

El límite de esta temperatura para fibras con núcleo de  $\text{SiO}_2$  es de alrededor de los  $400^\circ\text{C}$  según datos del fabricante (*Polymicro Technologies, 1999*).

### 3.2 Ecuación de transferencia radiativa

Comencemos por hacer un balance de energía en un diferencial de volumen de un medio semitransparente por donde se propaga energía radiativa viajando en la dirección  $\hat{s}$  tal como se indica en la figura (3.1)

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

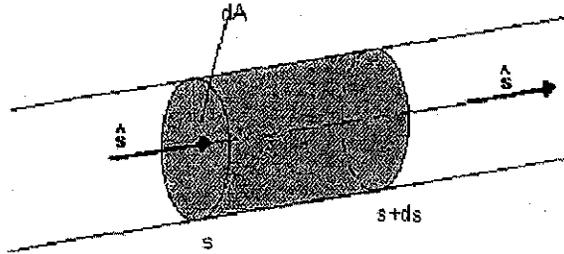


Figura 3.1: Haz de rayos a través de un medio semitransparente.

El cambio en la intensidad se encuentra mediante la suma de las contribuciones de emisión, absorción y dispersión por unidad de longitud de onda  $\lambda$  dentro de la dirección de propagación, de esta manera (Modest, 1993)

$$I_{\lambda}(s+ds, t+dt, \hat{s}) - I_{\lambda}(s, t, \hat{s}) = \kappa_{L\lambda} I_{b\lambda}(s, t) ds - \kappa_{L\lambda} I_{\lambda}(s, t, \hat{s}) ds - \sigma_{s\lambda} I_{\lambda}(s, t, \hat{s}) ds + \sigma_{s\lambda} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\hat{s}) \Psi_{\lambda}(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \right) ds \quad (3.1)$$

donde  $I_{b\lambda} [Wm^{-2}]$  es la intensidad radiativa emitida como cuerpo negro,  $I_{\lambda} [Wm^{-2}]$  es la intensidad radiativa que está pasando a través de le medio y es absorbida,  $\kappa_{L\lambda}$  es el coeficiente de absorción lineal y es el mismo coeficiente para la emisión<sup>1</sup> como para la absorción. Los dos términos al final del lado derecho de la ecuación (3.1) representan la dispersión. La componente  $\sigma_{s\lambda} I_{\lambda}(s, t, \hat{s}) ds$  establece que una parte de la intensidad que se encuentra pasando a través del medio es removida de la dirección de propagación  $\hat{s}$ , es decir, la intensidad es simplemente redireccionada e incrementa la intensidad a lo largo de otra dirección, mientras que el término

$$\sigma_{s\lambda} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\hat{s}) \Psi_{\lambda}(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \right) ds$$

representa la intensidad radiativa dispersa proveniente de todas las direcciones de incidencia  $\hat{s}_i$  en un ángulo sólido  $d\Omega_i$ , y que se incorpora a la dirección de propagación  $\hat{s}$ , así  $\Psi_{\lambda}$  expresa la cantidad de energía proveniente de todas direcciones (Modest, 1993).

La intensidad de salida, al ser desarrollada en una serie de Taylor truncada, la escribimos como:

$$I_{\lambda}(s+ds, t+dt, \hat{s}) = I_{\lambda}(s, t, \hat{s}) + dt \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial t} + ds \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial s} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> La intensidad emitida a lo largo de cualquier trayectoria es proporcional a la distancia de la trayectoria y a la energía local contenida en el medio. En equilibrio termodinámico local, la intensidad puede ser considerada igual a la intensidad de cuerpo negro y la cantidad absorbida es igual a la emitida (Modest, 1993).

Se debe tomar en cuenta además que la emisión de un elemento de volumen es proporcional a la magnitud del propio volumen. Así, la intensidad emitida ocurre en todas direcciones y por tanto no depende de la dirección de incidencia  $\hat{s}$

$$dI_{\lambda} = \kappa_{L\lambda} I_{b\lambda}(s, t) ds$$

y la ecuación 3.1 se se simplifica a

$$\frac{1}{C_r} \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} = \kappa_{L\lambda} I_{b\lambda} - \kappa_{L\lambda} I_\lambda - \sigma_{s\lambda} I_\lambda + \sigma_{s\lambda} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) \Psi_\lambda(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \quad (3.3)$$

donde  $C_r = ds/dt$  es la velocidad con la cual la intensidad de radiación se propaga dentro del medio.

En la ecuación (3.3) se puede despreciar el término transitorio ( $C_r^{-1} \partial I_\lambda / \partial t$ ), pues la velocidad de propagación de la radiación en el medio es cercana a la velocidad de la luz, y suponer un proceso cuasi-estacionario<sup>2</sup>. Así, la ecuación (3.3) la reescribimos como,

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial s} = \hat{s} \cdot \nabla I_\lambda = \kappa_{L\lambda} I_{b\lambda} - \beta_\lambda I_\lambda + \sigma_{s\lambda} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) \Psi_\lambda(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \quad (3.4)$$

donde agrupamos

$$\beta_\lambda = \kappa_{L\lambda} + \sigma_{s\lambda} \quad (3.5)$$

que se denomina coeficiente de atenuación<sup>3</sup>.

Dentro del estudio de transferencia de calor es común interesarse por el flujo de calor radiativo en las fronteras físicas donde éste actúa, por otra parte, dentro de un medio, se requiere saber que tanta energía radiativa neta es depositada o retirada de cada elemento de volumen. Al hacer un balance de energía radiativa en un elemento de volumen  $dV$ , como el de la figura (3.2), escribimos en coordenadas cilíndricas la divergencia del flujo de calor radiativo dentro del medio semitransparente

$$-\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) \right) r dr d\theta dz = -\nabla \cdot q dV \quad (3.6)$$

Por otro lado, al integrar la ecuación (3.4) sobre el ángulo sólido  $d\Omega$ ,

$$\nabla \cdot \int_{4\pi} I_\lambda \hat{s} d\Omega = \kappa_{L\lambda} \int_{4\pi} I_{b\lambda} d\Omega - \beta_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda d\Omega + \sigma_{s\lambda} \int_{4\pi} \left( I_\lambda(\hat{s}) \left( \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi_\lambda(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i \right) \right) d\Omega \quad (3.7)$$

donde en la parte izquierda identificamos el vector de flujo de calor radiativo espectral (Modest, 1993),

$$\mathbf{q}_\lambda \equiv \int_{4\pi} I_\lambda \hat{s} d\Omega \quad (3.8)$$

<sup>2</sup> La velocidad de la luz en un medio se estima mediante

$$C = \frac{c}{n}$$

donde  $c$  es la velocidad de luz en el vacío y  $n$  es el índice de refracción. Para el caso de  $\text{SiO}_2$  el índice de refracción es cercano 1.5 en el espectro solar ( $0.35 \mu\text{m} - 3.5 \mu\text{m}$ ), por lo que la velocidad de propagación se reduce 1.5 veces al pasar a través de dicho medio. Aún así, esta velocidad es muy alta  $1.9986 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$  y un frente de onda traspasaría 10 m de espesor de  $\text{SiO}_2$  en aproximadamente  $5 \times 10^{-8} \text{s}$ .

<sup>3</sup> Debido a que el  $\text{SiO}_2$  de alta pureza, material del núcleo de las fibras ópticas estudiadas, es un medio ligeramente dispersivo, el coeficiente de atenuación  $\beta [\text{m}^{-1}]$  está estrechamente ligado con la atenuación expresada en decibeles por unidad de longitud  $[dB\text{m}^{-1}]$ . Así, si se desprecia el coeficiente de dispersión  $\sigma_{s\lambda}$ , entonces

$$\beta_\lambda = \kappa_{L\lambda}$$

de esta manera se tiene

$$\beta_\lambda = \frac{\ln(10)}{10} dB_{\text{per}\lambda}$$

como se muestra en la ecuación (2.168) del capítulo anterior.

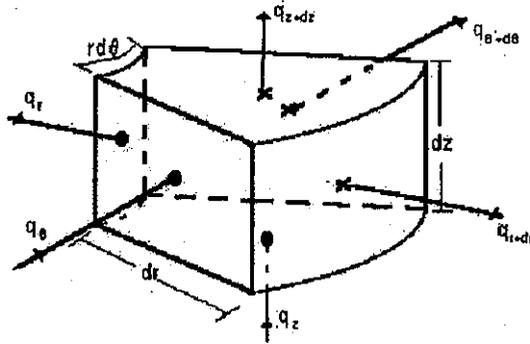


Figura 3.2: Volumen de control para el flujo radiativo.

y al suponer dispersión isotrópica, es decir que la energía se dispersa igual en todas direcciones

$$\left( \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi_\lambda(\hat{s}_i, \hat{s}) d\Omega_i = 1, \quad (3.9)$$

la ecuación (3.7) la escribimos como

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\lambda = 4\pi\kappa_{L\lambda}I_{b\lambda} - \beta_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) d\Omega + \sigma_{s\lambda} \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) d\Omega_i. \quad (3.10)$$

Ya que  $\Omega$  y  $\Omega_i$  son variables arbitrarias en el argumento de integración sobre todos los ángulos sólidos, los dos últimos términos podemos asociarlos y al considerar la relación (3.5)  $\kappa_{L\lambda} = \beta_\lambda - \sigma_{s\lambda}$ , la ecuación (3.10) la escribimos ahora como

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\lambda = 4\pi\kappa_{L\lambda}I_{b\lambda} - \kappa_{L\lambda} \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) d\Omega, \quad (3.11)$$

donde identificamos la radiación incidente, la cual se define mediante la intensidad como (Modest, 1993),

$$G_\lambda \equiv \int_{4\pi} I_\lambda(\hat{s}) d\Omega. \quad (3.12)$$

y resulta en la intensidad en una dirección dada integrada por ángulo sólido  $\Omega$ .

La ecuación (3.11) establece que físicamente las pérdidas netas de energía radiativa en el volumen de control son iguales a la energía emitida menos la irradiación absorbida de la radiación incidente. Esta ecuación no contiene el coeficiente dispersivo, ya que la dispersión sólo redirecciona el flujo de fotones y no afecta la energía contenida en el volumen de control (Modest, 1993).

Al sustituir la ecuación (3.12) en la ecuación (3.11) obtenemos la divergencia del flujo de calor total y una vez integrado sobre todo el espectro lo escribimos como,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \int_0^\infty \mathbf{q}_\lambda d\lambda = 4\pi \int_0^\infty \kappa_{L\lambda}I_{b\lambda} d\lambda - \int_0^\infty \kappa_{L\lambda}G_\lambda d\lambda, \quad (3.13)$$

así, tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \kappa_L (4n^2\sigma T^4 - G). \quad (3.14)$$

donde sustituimos la intensidad de cuerpo negro por la ley de Stefan-Boltzman  $I_b = \sigma T^4/\pi$  (Modest, 1993),  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzman  $5.67051 \times 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$  y  $G$  es la radiación incidente dentro del medio.

Por tanto, si consideramos que la potencia emisiva es despreciable en comparación con la radiación incidente, es decir suponemos que la radiación incidente  $G \gg 4\sigma T^4$  pues la temperatura de la fuente  $T_G \gg T$  donde  $T$  es la temperatura que alcanza el material de la fibra óptica. De esta manera tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\kappa_L G. \quad (3.15)$$

Con base en las ecuaciones (3.12) y (3.8) escribimos

$$\nabla \cdot G \hat{\mathbf{e}}_z = -\kappa_L G, \quad (3.16)$$

donde suponemos que la propagación del flujo radiativo ocurre de manera dominante en la dirección del eje  $z$ , por lo que suponemos únicamente la dirección de propagación en dirección y sentido del vector unitario  $\hat{\mathbf{e}}_z$ .

De esta manera, la ecuación (3.16) es ahora

$$\frac{dG}{dz} = -\kappa_L G, \quad (3.17)$$

y al integrar sobre la longitud  $z$  obtenemos

$$G = G_0 \exp(-\kappa_L z), \quad (3.18)$$

donde  $G_0$  es la radiación incidente a la entrada.

Por tanto, el vector de flujo de calor radiativo  $\mathbf{q}^r$  lo escribimos como,

$$\mathbf{q}^r = G_0 \exp(-\kappa_L z) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.19)$$

El flujo de calor radiativo es sólo un modo de transferencia de calor presente en el núcleo de la fibra óptica, y se debe considerar además la transferencia de calor por conducción y las pérdidas de calor hacia los alrededores. En la siguiente sección se presenta un balance de conservación de energía para establecer la ecuación que gobierna la transferencia de calor en un medio participante.

### 3.3 Modelo unidimensional

La forma general para la ecuación de conservación de energía para la participación simultánea de transferencia de calor por conducción y por radiación en un medio participante está dada por (Özisik, 1994),

$$-\nabla \cdot (\mathbf{q}^c + \mathbf{q}^r) + f_v = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{q}^c [Wm^{-2}]$  y  $\mathbf{q}^r [Wm^{-2}]$  son los vectores de flujo de calor de conducción y de radiación, respectivamente,  $f_v [Wm^{-3}]$  es la fuente volumétrica de energía por unidad de volumen y unidad de tiempo,  $\rho [kgm^{-3}]$  y  $C_p [Jkg^{-1}K^{-1}]$  son la densidad y la capacidad calorífica a presión constante del material semitransparente, respectivamente, y  $T$  es la temperatura.

El flujo de calor por conducción está dado por la ley de Fourier (Özisik, 1993),

$$\mathbf{q}^c = -k \nabla T, \quad (3.21)$$

donde  $k [Wm^{-1}K^{-1}]$  es la conductividad térmica del material.

El vector de flujo radiativo se establece por la ecuación (3.19)

$$\mathbf{q}^r = G_0 \exp(-\kappa_L z) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.22)$$

donde  $G_0 [Wm^{-2}]$  es el flujo de calor radiativo a la entrada del material semitransparente,  $\kappa_L [m^{-1}]$  es el coeficiente de absorción lineal y  $\hat{\mathbf{e}}_z$  es el vector unitario apuntando en dirección del eje ordenado  $z$ .

Con base en la ecuación (3.20), para simplificar el problema del comportamiento térmico de la fibra óptica al paso del flujo radiativo, consideramos un modelo unidimensional donde suponemos  $k$  y  $G_0$  como constantes y no existe fuente volumétrica  $f_v$ . En el balance de energía que llevamos a cabo, consideramos un disco de espesor  $\Delta z$  y área  $A$  como se muestra en la figura 3.3. Así, tomamos en cuenta la conducción de calor en la dirección  $z$ , la ganancia de energía por la radiación absorbida y las pérdidas convectivas perpendiculares al eje  $z$ . De esta manera, el balance de energía lo escribimos como,

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Conducción} \\ \text{en} \\ \text{dirección } z \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{radiativa} \\ \text{absorbida} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Convección} \\ \text{en la} \\ \text{superficie} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{almacenada} \end{array} \right]$$

De esta manera escribimos

$$\begin{aligned} & k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} T(z, t) A \Delta z - \frac{d}{dz} G_0 \exp\{-\kappa_L z\} A \Delta z - h_R [T(z, t) - T_{amb}] p \Delta z \\ & = \rho C_p A \Delta z \frac{\partial}{\partial t} T(z, t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde,  $T_{amb} [^\circ C]$  es la temperatura ambiente,  $h_R [Wm^{-2}K^{-1}]$  es el coeficiente de transferencia en la superficie lateral de la fibra óptica,  $A [m^{-2}]$  y  $p [m]$  son el área y el perímetro de la sección transversal de la fibra óptica, respectivamente (ver figura 3.3).

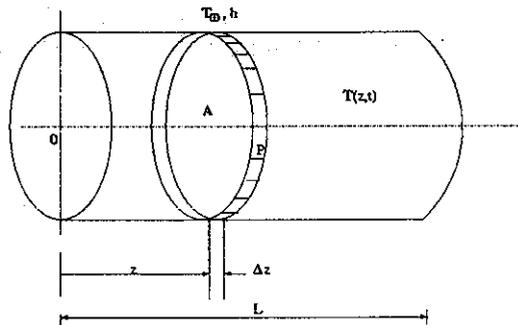


Figura 3.3: Esquema de la fibra óptica para el balance de energía.

En nuestros cálculos es importante considerar la reflexión de tipo Fresnel (Hecht y Zajac, 1976). Este fenómeno ocurre cuando la luz pasa de un medio a otro con índices de refracción distintos y una

porción del haz luminoso es reflejado. Por tanto tenemos que considerar las pérdidas de flujo radiativo a la entrada de la fibra, ya que la luz pasa del aire con índice de refracción  $n \simeq 1$  al material del núcleo de la fibra con índice de refracción  $n \simeq 1.46$ . Así,  $r_f[-]$  es la fracción de la energía incidente que es reflejada en la superficie de entrada de la fibra óptica, es decir,  $r_f G_0$  representa las pérdidas del flujo radiativo por reflexión en la superficie de entrada.

Así, al tomar en cuenta en la ecuación (3.23) la reflexión de tipo Fresnel en la superficie de entrada de la fibra óptica,

$$k \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(z, t) + \kappa_L (1 - r_f) G_0 \exp\{-\kappa_L z\} - h_R (T(z, t) - T_{amb}) \frac{p}{A} = \rho C_p \frac{\partial}{\partial t} T(z, t). \quad (3.24)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T(z, t) + S \exp\{-\kappa_L z\} - C^2 (T(z, t) - T_{amb}) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T(z, t), \quad (3.25)$$

donde

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}, \quad (3.26)$$

$\alpha [m^2 s^{-1}]$  es la difusividad térmica y las constantes  $C^2 [m^{-2}]$  y  $S [Km^{-2}]$  agrupan los términos.

$$C^2 = \frac{p h_R}{A k} = \frac{2 h_R}{R_n k}, \quad (3.27)$$

$$S = \frac{\kappa_L}{k} (1 - r_f) G_0. \quad (3.28)$$

De la relación (3.27) cabe mencionar que  $p/A = 2\pi R_n / \pi R_n^2 = 2/R_n$ , donde  $R_n$  es el radio del núcleo de la fibra.

Por otra parte, consideramos la resistencia térmica  $R_{ter} [m^2 KW^{-1}]$  en la parte longitudinal de la fibra óptica. Esta resistencia térmica se debe al revestimiento, a la protección exterior y al coeficiente de transferencia  $h_R$  y para cilindros concéntricos se escribe como (Cervantes, 1999),

$$R_{ter} = \left( \left( \frac{R_2}{k_1} \right) \ln \left( \frac{R_1}{R_n} \right) + \left( \frac{R_2}{k_2} \right) \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h_R} \right) \quad (3.29)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios del revestimiento y la cubierta protectora respectivamente, y  $k_1$  es la conductividad térmica del revestimiento y  $k_2$  la conductividad térmica de la cubierta.

De esta manera la ecuación (3.25) la escribimos ahora como,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T(z, t) + S \exp\{-\kappa_L z\} - B^2 (T(z, t) - T_{amb}) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} T(z, t), \quad (3.30)$$

en  $0 < z < L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

definida en  $0 < z < L_{fo}$ , y  $t > 0$ , donde  $L_{fo} [m]$  es la longitud de la fibra óptica y la constante  $B^2 [m^{-2}]$  esta dada por

$$B^2 = \frac{2}{R_n k R_{ter}}. \quad (3.31)$$

Para resolver la ecuación (3.30) consideramos las siguientes condiciones a la frontera,

$$-k \frac{\partial}{\partial z} T(z, t) = h_0 (T_{amb} - T(z, t)), \quad (3.32)$$

en  $z = 0$  y  $t > 0$ ,

$$k \frac{\partial}{\partial z} T(z, t) = h_L (T_{amb} - T(z, t)), \quad (3.33)$$

en  $z = L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

y la condición inicial

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_{amb}, \\ \text{en } t &= 0 \text{ y } 0 \leq z \leq L_{fo}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde  $h_0$  y  $h_L$  son los coeficientes de transferencia de calor en  $z = 0$  y  $z = L_{fo}$ , respectivamente.

En la siguiente sección, obtenemos la solución de manera analítica del modelo unidimensional propuesto. Esto lo llevamos a cabo a través de separar el problema original en problemas más sencillos cuyas soluciones se encuentran reportadas en la literatura. Así, la solución general se obtiene al acoplar las soluciones particulares encontradas.

### 3.4 Solución analítica del modelo unidimensional

Para tener un tratamiento matemático más sencillo para la obtención de la solución de la ecuación (3.30) sujeta a las condiciones presentadas en las relaciones (3.32)-(3.34) proponemos el siguiente cambio de variable

$$\Theta(z, t) = T(z, t) - T_{amb}, \quad (3.35)$$

de esta manera escribimos la ecuación (3.27),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta(z, t) + S \exp\{-\kappa_L z\} - B^2 \Theta(z, t) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Theta(z, t), \\ \text{en } 0 < z < L_{fo} \text{ y } t > 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

y las condiciones (3.32)-(3.34),

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \Theta(z, t) + H_0 \Theta(z, t) &= 0, \\ \text{en } z &= 0 \text{ y } t > 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Theta(z, t) + H_L \Theta(z, t) &= 0, \\ \text{en } z &= L_{fo} \text{ y } t > 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \Theta(z, t) &= 0, \\ \text{en } t &= 0 \text{ y } 0 \leq z \leq L_{fo}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde

$$H_0 = \frac{h_0}{k}, \quad (3.40)$$

y

$$H_L = \frac{h_L}{k}, \quad (3.41)$$

$H_0$  y  $H_L$  tienen unidades  $\{m^{-1}\}$ .

Es importante aclarar que el problema de transferencia de calor representado matemáticamente por el conjunto de ecuaciones (3.36)-(3.39) es un problema no homogéneo. Si bien las relaciones (3.37) y (3.38) son claramente condiciones a la frontera homogéneas de tercera clase que representan transferencia por convección a un medio con temperatura cero, lo que da el carácter de no homogéneo al conjunto de ecuaciones (3.36)-(3.39) es la ecuación diferencial (3.36) (Özisik, 1993). Para poder resolver el problema presentado por tales ecuaciones lo descompondremos en problemas más simples que pueden ser resueltos por métodos conocidos.

Consideramos ahora,

$$\Theta(z, t) = \Theta_s(z) + \Theta_h(z, t), \quad (3.42)$$

donde separamos  $\Theta(z, t)$  en la suma de dos variables,  $\Theta_s(z)$  que representa el estado permanente, por lo que no depende el tiempo y  $\Theta_h(z, t)$  que representa el estado dependiente del tiempo.

Así, al sustituir la ecuación (3.42) en el conjunto de ecuaciones (3.36)-(3.39) obtenemos,

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} \Theta_s + S \exp \{-\kappa_L z\} - B^2 \Theta_s \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta_h - B^2 \Theta_h - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Theta_h \right) = 0, \quad (3.43)$$

en  $0 < z < L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

y las condiciones a la frontera e inicial,

$$\left( -\frac{d}{dz} \Theta_s + H_0 \Theta_s \right) + \left( -\frac{\partial}{\partial z} \Theta_h + H_0 \Theta_h \right) = 0, \quad (3.44)$$

en  $z = 0$  y  $t > 0$ ,

$$\left( \frac{d}{dz} \Theta_s + H_L \Theta_s \right) + \left( \frac{\partial}{\partial z} \Theta_h + H_L \Theta_h \right) = 0, \quad (3.45)$$

en  $z = L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

$$\Theta_s + \Theta_h = 0, \quad (3.46)$$

en  $t = 0$  y  $0 \leq z \leq L_{fo}$ .

Del conjunto de ecuaciones (3.43)-(3.46) consideramos la componente que describe el estado permanente del comportamiento térmico de la fibra óptica y que sólo depende de la posición,

$$\frac{d^2}{dz^2} \Theta_s - B^2 \Theta_s = -S \exp \{-\kappa_L z\}, \quad (3.47)$$

en  $0 < z < L_{fo}$ ,

y las condiciones a la frontera asociadas,

$$-\frac{d}{dz} \Theta_s + H_0 \Theta_s = 0, \quad (3.48)$$

en  $z = 0$ ,

$$\frac{d}{dz} \Theta_s + H_L \Theta_s = 0, \quad (3.49)$$

en  $z = L_{fo}$ .

De esta manera, el conjunto de ecuaciones (3.47)-(3.49) representa un problema de valores de frontera para una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea que es fácilmente resuelta por el método de coeficientes indeterminados (*Derrick y Grossman, 1981*).

Para obtener la solución explícita del sistema de ecuaciones (3.47)-(3.49), proponemos la separación de  $\Theta_s(z)$  como

$$\Theta_s = \Theta_{s,h} + \Theta_{s,p} \quad (3.50)$$

donde  $\Theta_{s,h}$  es la solución de la ecuación homogénea de la forma,

$$\frac{d^2}{dz^2} \Theta_{s,h} - B^2 \Theta_{s,h} = 0, \quad (3.51)$$

o bien

$$(D^2 - B^2) \Theta_{s,h} = 0 \quad (3.52)$$

donde  $D^2$  es el operador que indica segunda derivada con respecto a  $z$ .

Las raíces  $r_1$  y  $r_2$  de la ecuación auxiliar (3.52) son

$$(D - B)(D + B) = 0, \\ r_{1,2} = \pm B, \quad (3.53)$$

y la solución para la función complementaria  $\Theta_{s,h}$  es entonces (Derrick y Grossman, 1981),

$$\Theta_{s,h} = C_1 \exp\{-Bz\} + C_2 \exp\{Bz\}. \quad (3.54)$$

Por otro lado, si tomamos en consideración la parte derecha de la ecuación (3.47) como una función de  $z$  tal que,

$$f(z) = -S \exp\{-\kappa_L z\} \quad (3.55)$$

donde la relación (3.55) la identificamos como una solución particular de la ecuación diferencial lineal homogénea con raíz  $r_3$

$$r_3 = -\kappa_L, \quad (3.56)$$

es decir,

$$(D + \kappa_L)f(z) = 0. \quad (3.57)$$

y al aplicar el operador *aniquilador*  $(D + \kappa_L)$  a ambos lados de la ecuación (3.47) escribimos

$$(D + \kappa_L)(D - B)(D + B)\Theta_s = 0, \quad (3.58)$$

cuya solución general para  $\Theta_s$  es de la forma (Derrick y Grossman, 1981),

$$\Theta_s = C_3 \exp\{-\kappa_L z\} + C_2 \exp\{Bz\} + C_1 \exp\{-Bz\}, \quad (3.59)$$

donde la relación (3.54) es la solución complementaria de la parte homogénea y la ecuación

$$\Theta_{s,p} = C_3 \exp\{-\kappa_L z\}, \quad (3.60)$$

es la solución particular.

Para determinar el valor de  $C_3$ , sustituimos la solución obtenida en la ecuación (3.59) en la ecuación (3.47), donde determinamos,

$$C_3 = \frac{S}{B^2 - \kappa_L^2}. \quad (3.61)$$

Para obtener los valores de  $C_1$  y  $C_2$ , una vez determinado el valor de la constante  $C_3$ , consideramos la relación (3.59) y las condiciones a la frontera (3.48) y (3.49). De esta forma escribimos el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas, el cual es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma

$$C_1(H_0 + B) + C_2(H_0 - B) = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2}(H_0 + \kappa_L), \quad (3.62)$$

$$C_1(H_L - B)e^{-BLf_0} + C_2(H_L + B)e^{BLf_0} = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2}(H_L - \kappa_L)e^{-\kappa_L Lf_0}, \quad (3.63)$$

que se resuelve fácilmente. Las soluciones para las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son,

$$C_1 = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \left( \frac{(H_0 + \kappa_L)(H_L + B)e^{BLf_0} - (H_0 - B)(H_L - \kappa_L)e^{-\kappa_L Lf_0}}{(H_0 + B)(H_L + B)e^{BLf_0} - (H_0 - B)(H_L - B)e^{-BLf_0}} \right), \quad (3.64)$$

$$C_2 = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \left( \frac{(H_0 + B)(H_L - \kappa_L)e^{-\kappa_L Lf_0} - (H_0 + \kappa_L)(H_L - B)e^{-BLf_0}}{(H_0 + B)(H_L + B)e^{BLf_0} - (H_0 - B)(H_L - B)e^{-BLf_0}} \right). \quad (3.65)$$

Por lo anterior, la solución al conjunto de ecuaciones (3.47)-(3.49) es de la forma,

$$\Theta_s = C_3 \exp \{-\kappa_L z\} + C_2 \exp \{Bz\} + C_1 \exp \{-Bz\}, \quad (3.66)$$

donde la constante  $C_3$  está dada por la relación (3.61) y las constantes  $C_1$  y  $C_2$  están dadas por las relaciones (3.64) y (3.65), respectivamente.

En seguida, continuamos con la descomposición del problema planteado por las ecuaciones (3.43)-(3.46) que corresponde a la parte transitoria del comportamiento térmico de la fibra óptica.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta_h - B^2 \Theta_h = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Theta_h, \quad (3.67)$$

en  $0 < z < L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

y las condiciones a la frontera e inicial,

$$-\frac{\partial}{\partial z} \Theta_h + H_0 \Theta_h = 0, \quad (3.68)$$

en  $z = 0$  y  $t > 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} \Theta_h + H_L \Theta_h = 0, \quad (3.69)$$

en  $z = L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

$$\Theta_h = -\Theta_s, \quad (3.70)$$

en  $t = 0$  y  $0 \leq z \leq L_{fo}$ ,

cabe aclarar que la expresión (3.70), señala la condición inicial involucrada como la solución del estado permanente  $\Theta_s$ , considerada en la ecuación (3.46).

Para transformar el conjunto de ecuaciones (3.67)-(3.70) en un problema homogéneo que acepta el método de separación de variables, consideramos ahora para  $\Theta_h(z, t)$  el siguiente cambio de variable

$$\Theta_h(z, t) = \exp \{-B^2 \alpha t\} \Theta_{h1}(z, t); \quad (3.71)$$

que al ser aplicado al conjunto de ecuaciones (3.67)-(3.70) conduce a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta_{h1} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Theta_{h1}, \quad (3.72)$$

en  $0 < z < L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

y las condiciones a la frontera e inicial,

$$-\frac{\partial}{\partial z} \Theta_{h1} + H_0 \Theta_{h1} = 0, \quad (3.73)$$

en  $z = 0$  y  $t > 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial z} \Theta_{h1} + H_L \Theta_{h1} = 0, \quad (3.74)$$

en  $z = L_{fo}$  y  $t > 0$ ,

$$\Theta_{h1} = \frac{-\Theta_s}{[\exp \{-B^2 \alpha t\}]_{t=0}} = -\Theta_s, \quad (3.75)$$

en  $t = 0$  y  $0 \leq z \leq L_{fo}$ ,

por tanto, obtenemos un problema homogéneo que acepta el método de separación de variables (Derrick y Grossman, 1981).

Así, para resolver el problema presentado en las ecuaciones (3.72)-(3.75) consideramos la separación de la variable  $\Theta_{h1}(z, t)$  en la forma,

$$\Theta_{h1}(z, t) = Z(z) \Upsilon(t), \quad (3.76)$$

de tal suerte que escribimos ahora la ecuación (3.48) como

$$\Upsilon(t) \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \frac{1}{\alpha} Z(z) \frac{d}{dt} \Upsilon(t), \quad (3.77)$$

en  $0 < z < L_{fo}$  y  $t > 0$

lo que resulta en

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = \frac{1}{\alpha \Upsilon(t)} \frac{d}{dt} \Upsilon(t). \quad (3.78)$$

En la ecuación (3.78) la parte izquierda y la parte derecha son iguales a una constante<sup>4</sup>, a saber

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -\beta^2 = \frac{1}{\alpha \Upsilon(t)} \frac{d}{dt} \Upsilon(t). \quad (3.79)$$

lo que nos conduce a obtener la ecuación,

$$\frac{d^2}{dz^2} Z + \beta^2 Z = 0, \quad (3.80)$$

en  $0 < z < L_{fo}$ ,

con condiciones a la frontera

$$-\frac{d}{dz} Z + H_0 Z = 0, \quad (3.81)$$

en  $z = 0$ ,

$$\frac{d}{dz} Z + H_L Z = 0, \quad (3.82)$$

en  $z = L_{fo}$ ,

y la ecuación

$$\frac{d}{dt} \Upsilon + \beta^2 \alpha \Upsilon = 0, \quad (3.83)$$

en  $t > 0$ ,

con condición inicial

$$Z(z) \Upsilon(t) = -\Theta_s, \quad (3.84)$$

en  $t = 0$  y  $0 \leq z \leq L_{fo}$ .

El conjunto de ecuaciones (3.80)-(3.84) se resuelve fácilmente por métodos conocidos (Özisik, 1993).

<sup>4</sup> En esta ecuación, la parte izquierda es una función de la variable espacial  $z$  únicamente, mientras que la parte derecha es sólo función de la variable temporal  $t$ . La manera de mantener la igualdad en la ecuación es si ambos lados son iguales a una misma constante, digamos  $-\beta^2$ .

El signo negativo se escoge para asegurar que la solución de  $\Upsilon(t)$  se aproxima a cero cuando el tiempo se incrementa indefinidamente porque, como se observa en la ecuación (3.86), tanto  $\alpha$  como  $t$  son cantidades positivas definidas.

La solución de la ecuación (3.80) tiene la forma (Özsisik, 1993),

$$Z(z) = C_4 \cos \beta z + C_5 \sin \beta z, \quad (3.85)$$

y la solución para la ecuación (3.83), tiene la forma (Özsisik, 1993),

$$Y(t) = C_6 \exp \{-\beta^2 \alpha t\}, \quad (3.86)$$

por lo que la construcción de la solución  $\Theta_{h1}(z, t)$  para el conjunto de ecuaciones (3.72)-(3.75), es de la forma

$$\Theta_{h1}(z, t) = C_6 \exp \{-\beta^2 \alpha t\} (C_4 \cos \beta z + C_5 \sin \beta z), \quad (3.87)$$

Al considerar la relación (3.87) y las condiciones a la frontera (3.73) y (3.74) escribimos las relaciones siguientes,

$$C_4 H_0 - C_5 \beta = 0, \quad (3.88)$$

o bien,

$$\frac{H_0}{\beta} = \frac{C_5}{C_4} \quad (3.89)$$

y además,

$$C_4 (H_L \cos \beta L_{f_0} - \beta \sin \beta L_{f_0}) + C_5 (\beta \cos \beta L_{f_0} + H_L \sin \beta L_{f_0}) = 0. \quad (3.90)$$

Al tomar en cuenta la relación (3.89) y sustituirla en la relación (3.90) escribimos,

$$(H_L \cos \beta L_{f_0} - \beta \sin \beta L_{f_0}) + \frac{H_0}{\beta} (\beta \cos \beta L_{f_0} + H_L \sin \beta L_{f_0}) = 0, \quad (3.91)$$

así, si multiplicamos la relación (3.91) por  $1/(\cos \beta L_{f_0})$  obtenemos

$$H_L - \beta \tan \beta L_{f_0} + H_0 + \frac{H_0 H_L}{\beta} \tan \beta L_{f_0} = 0; \quad (3.92)$$

o bien,

$$\tan \beta_n L_{f_0} = \beta_n \left( \frac{H_0 + H_L}{\beta_n^2 - H_0 H_L} \right), \quad (3.93)$$

donde la ecuación (3.93) define un conjunto de valores característicos  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$  tal que  $n = 0, 1, 2, \dots$  y son conocidos como los *eigenvalores* o valores característicos de la ecuación transcendental (3.93) (Özsisik, 1993).

La solución de la ecuación (3.72) la escribimos como (Özsisik, 1993),

$$\Theta_{h1}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp \{-\beta_n^2 \alpha t\} \left( \cos \beta_n z + \frac{H_0}{\beta_n} \sin \beta_n z \right), \quad (3.94)$$

donde para completar la solución del problema, es necesario determinar los coeficientes  $A_n$ . Dichos coeficientes serán obtenidos posteriormente.

Para verificar que el espacio nulo está vacío, esto es, en la suma  $n \neq 0$ , consideramos

$$\beta_0 = 0, \quad (3.95)$$

y sustituimos la relación (3.95) en las ecuaciones (3.80),

$$\frac{d^2}{dz^2} Z = 0, \quad (3.96)$$

y (3.83),

$$\frac{d}{dt}\Upsilon = 0, \quad (3.97)$$

respectivamente.

De tal suerte que la solución de la ecuación (3.96) es de la forma

$$Z(z) = C_7 z + C_8, \quad (3.98)$$

y la solución de la ecuación (3.97) es,

$$\Upsilon = C_6. \quad (3.99)$$

Así, construimos la solución

$$\Theta_{h1} = C_6 (C_7 z + C_8) = C_9 z + C_{10}, \quad (3.100)$$

y al aplicar las condiciones a la frontera (3.73) y (3.74) obtenemos

$$-C_9 + H_0 C_{10} = 0, \quad (3.101)$$

$$C_9 (1 + H_L L_{fo}) + H_L C_{10} = 0, \quad (3.102)$$

al considerar  $C_9 = H_0 C_{10}$  de la relación (3.101) y sustituirla en la relación (3.102), tenemos

$$C_{10} (H_0 + H_0 H_L + H_L L_{fo}) = 0, \quad (3.103)$$

donde notamos que el término entre paréntesis es diferente de cero, por lo que se deduce que

$$C_{10} = 0, \quad (3.104)$$

y por lo tanto en la ecuación (3.101)

$$C_9 = 0. \quad (3.105)$$

De esta manera mostramos que el espacio nulo está vacío, por lo que reescribimos la ecuación (3.94) como,

$$\Theta_{h1}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\{-\beta_n^2 \alpha t\} Z(\beta_n, z), \quad (3.106)$$

donde el resultado presentado por la ecuación (3.106) está definido en  $0 < z < L_{fo}$  y depende de los *eigenvalores* (ecuación (3.93)) (*Özisik, 1989*),

$$Z(\beta_n, z) = \cos \beta_n z + \frac{H_0}{\beta_n} \sin \beta_n z. \quad (3.107)$$

Para determinar los coeficientes  $A_n$  de la relación (3.106), consideramos la condición inicial para  $t = 0$  (3.75), así

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z(\beta_n, z) = -\Theta_s, \quad (3.108)$$

donde  $\Theta_s$  está definido por la ecuación (3.66).

Los coeficientes  $A_n$  en la relación (3.108) pueden ser determinados a partir de la propiedad ortogonal de las *eigenfunciones*, (*Özisik, 1998*), tal que,

$$\int_0^{L_{fo}} Z(\beta_m, z) Z(\beta_n, z) dz = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N(\beta_n), & m = n \end{cases} \quad (3.109)$$

donde  $N(\beta_n)$  es la integral normalizada definida por (Özsisik, 1989),

$$N(\beta_n) = \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z)^2 dz. \quad (3.110)$$

Comencemos por multiplicar ambos lados de la ecuación (3.108) por  $Z(\beta_n, z)$  e integrar con respecto a  $z$  en el intervalo  $0 < z < L_{f_0}$ ,

$$A_n \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) Z(\beta_n, z) dz = \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) (-\Theta_s) dz, \quad (3.111)$$

y al considerar la propiedad ortogonal (3.109) obtenemos

$$A_n = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) (-\Theta_s) dz \quad (3.112)$$

Para obtener una expresión explícita de la integral normalizada  $N(\beta_n)$ , consideramos la ecuación diferencial (3.80), tal que al multiplicar por  $Z(\beta_n, z)$  e integrar con respecto a  $z$  en el intervalo  $0 < z < L_{f_0}$ , obtenemos,

$$\int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) \frac{d^2}{dz^2} Z(\beta_n, z) dz + \beta_n^2 \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z)^2 dz = 0, \quad (3.113)$$

o bien

$$\int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z)^2 dz = -\frac{1}{\beta_n^2} \int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) \frac{d^2}{dz^2} Z(\beta_n, z) dz, \quad (3.114)$$

donde al integrar por partes el término de la derecha de la ecuación (3.114), ésta se expresa como

$$\int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z)^2 dz = -\frac{1}{\beta_n^2} \left[ Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right]_0^{L_{f_0}} + \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^{L_{f_0}} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 dz. \quad (3.115)$$

Por otra parte, derivando la ecuación (3.107) tenemos que

$$\frac{1}{\beta_n} \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) = -\sin \beta_n z + \frac{H_0}{\beta_n} \cos \beta_n z, \quad (3.116)$$

de tal suerte que al sumar los cuadrados de las ecuaciones (3.107) y (3.116) escribimos

$$Z(\beta_n, z)^2 + \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 = 1 + \left( \frac{H_0}{\beta_n} \right)^2, \quad (3.117)$$

y al integrar con respecto a  $z$  en el intervalo  $0 < z < L_{f_0}$ , obtenemos,

$$\int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z)^2 dz = \left( 1 + \left( \frac{H_0}{\beta_n} \right)^2 \right) \int_0^{L_{f_0}} dz - \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^{L_{f_0}} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 dz. \quad (3.118)$$

Así, al sumar las ecuaciones (3.115) y (3.118), y sustituir la ecuación (3.110), escribimos la integral normalizada como

$$2N = \left( \frac{\beta_n^2 + H_0^2}{\beta_n^2} \right) L_{f_0} - \frac{1}{\beta_n^2} \left[ Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right]_0^{L_{f_0}}. \quad (3.119)$$

Para determinar el segundo término de la derecha de la ecuación (3.119) utilizamos las condiciones a la frontera (3.81) y (3.82), de esta manera

$$\left[ \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 \right]_{z=0} = \left( \frac{H_0}{\beta_n} \right)^2 [Z(\beta_n, z)^2]_{z=0}, \quad (3.120)$$

$$\left[ \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 \right]_{z=L_{f_0}} = \left( \frac{H_L}{\beta_n} \right)^2 [Z(\beta_n, z)^2]_{z=L_{f_0}}, \quad (3.121)$$

donde elevamos al cuadrado y multiplicamos por  $1/\beta_n^2$  en ambas ecuaciones.

Al evaluar la relación (3.117) en  $z = 0$  y en  $z = L_{f_0}$ , tenemos

$$\left[ \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 \right]_{z=0} = \left( \frac{H_0}{\beta_n} \right)^2, \quad (3.122)$$

y

$$\left[ \frac{1}{\beta_n^2} \left( \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right)^2 \right]_{z=L_{f_0}} = 1 + \left( \frac{H_0}{\beta_n} \right)^2 - [Z(\beta_n, z)^2]_{z=L_{f_0}}. \quad (3.123)$$

Al sustituir la relación (3.120) en la relación (3.122) y sustituir la relación (3.123) en la relación (3.121) obtenemos,

$$[Z(\beta_n, z)^2]_{z=0} = 1 \quad (3.124)$$

y

$$[Z(\beta_n, z)^2]_{z=L_{f_0}} = \frac{1 + (H_0/\beta_n)^2}{1 + (H_L/\beta_n)^2}. \quad (3.125)$$

Por otro lado, al mutiplicar por  $Z(\beta_n, z)$  ambos lados de las condiciones a la frontera (3.81) y (3.82), escribimos,

$$Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) = H_0 Z(\beta_n, z)^2, \quad (3.126)$$

en  $z = 0$ ,

$$Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) = -H_L Z(\beta_n, z)^2, \quad (3.127)$$

en  $z = L_{f_0}$ ,

de tal suerte que al combinar las ecuaciones (3.126) y (3.127) en una relación única, obtenemos,

$$\left[ Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right]_0^{L_{f_0}} = -H_L [Z(\beta_n, z)^2]_{z=L_{f_0}} - H_0 [Z(\beta_n, z)^2]_{z=0}, \quad (3.128)$$

y al sustituir las relaciones (3.124) y (3.125) en la ecuación (3.128) tenemos ahora,

$$\left[ Z(\beta_n, z) \frac{d}{dz} Z(\beta_n, z) \right]_0^{L_{f_0}} = -H_L \frac{1 + (H_0/\beta_n)^2}{1 + (H_L/\beta_n)^2} - H_0. \quad (3.129)$$

Por último, sustituimos la relación (3.129) en la relación (3.119), y por lo tanto la integral normalizada  $N(\beta_n)$  es (Özisik, 1989 y 1993),

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_n^2 + H_0^2}{\beta_n^2} \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + \frac{H_0}{\beta_n^2} \right). \quad (3.130)$$

entonces podemos escribir la ecuación (3.112) como,

$$A_n = \frac{\int_0^{L_{f_0}} Z(\beta_n, z) (-\Theta_s) dz}{\frac{1}{2} \left( \frac{\beta_n^2 + H_0^2}{\beta_n^2} \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + \frac{H_0}{\beta_n^2} \right)} \quad (3.131)$$

Si definimos  $K(\beta_n, z)$  como (Özsisik, 1989),

$$K(\beta_n, z) = \frac{Z(\beta_n, z)}{\sqrt{N}} \quad (3.132)$$

y sustituimos las ecuaciones (3.107) y (3.130), obtenemos

$$K(\beta_n, z) = \frac{\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\beta_n^2 + H_0^2) \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + H_0 \right)^{1/2}} \quad (3.133)$$

donde factorizamos el valor de  $\beta_n$ , tanto en el numerador como en el denominador de la parte derecha de la ecuación. De esta manera la solución de la ecuación (3.106),  $\Theta_{h1}(z, t)$  es ahora;

$$\Theta_{h1} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \{-\beta_n^2 \alpha t\} K(\beta_n, z) \int_0^{L_{f_0}} K(\beta_n, z) (-\Theta_s) dz. \quad (3.134)$$

o bien

$$\Theta_{h1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \{-\beta_n^2 \alpha t\} \frac{(\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\beta_n^2 + H_0^2) \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + H_0 \right)^{1/2}} \times \frac{\int_0^{L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z) (-C_3 e^{-\kappa_L z} - C_2 e^{Bz} - C_1 e^{-Bz}) dz}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\beta_n^2 + H_0^2) \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + H_0 \right)^{1/2}} \right] \quad (3.135)$$

dónde sustituimos las expresiones explícitas de  $Z(\beta_n, z)$  y  $\Theta_s(z)$ , de las ecuaciones (3.107) y (3.66), respectivamente.

Por lo anterior, la solución al problema original de transferencia de calor en la fibra óptica y que es representado matemáticamente por el conjunto de ecuaciones (3.30)-(3.34) es

$$T(z, t) = T_{amb} + \Theta_s(z) + \exp \{-B^2 \alpha t\} \Theta_{h1}(z, t). \quad (3.136)$$

o bien

$$T(z, t) = T_{amb} + C_3 e^{-\kappa_L z} + C_2 e^{Bz} + C_1 e^{-Bz} + \exp \{-B^2 \alpha t\} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \{-\beta_n^2 \alpha t\} \frac{(\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z)}{\frac{1}{2} \left[ (\beta_n^2 + H_0^2) \left( L_{f_0} + \frac{H_L}{\beta_n^2 + H_L^2} \right) + H_0 \right]} \times \int_0^{L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z) (-C_3 e^{-\kappa_L z} - C_2 e^{Bz} - C_1 e^{-Bz}) dz \right] \quad (3.137)$$

donde consideramos las relaciones (3.66) y (3.135)

Sin embargo, notamos que en la suma existe una integral que aún no hemos evaluado. Esta integral es,

$$\int_0^{L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z) (-C_3 e^{-\kappa_L z} - C_2 e^{Bz} - C_1 e^{-Bz}) dz, \quad (3.138)$$

donde identificamos fácilmente la suma de integrales de la forma (Bois, 1961),

$$\int (e^{az} \cos bz) dz = e^{az} \frac{a \cos bz + b \sin bz}{a^2 + b^2}, \quad (3.139)$$

y

$$\int (e^{az} \sin bz) dz = e^{az} \frac{a \sin bz - b \cos bz}{a^2 + b^2}. \quad (3.140)$$

En resumen, la solución al modelo unidimensional propuesto para describir el comportamiento térmico de la fibra óptica cuando existe transferencia de calor por conducción, absorción de energía radiativa y pérdidas hacia los alrededores la escribimos como,

$$\begin{aligned} T(z, t) = & T_{amb} + C_3 e^{-\kappa_L z} + C_2 e^{Bz} + C_1 e^{-Bz} + \\ & e^{-B^2 \alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \{-\beta_n^2 \alpha t\} \frac{(\beta_n \cos \beta_n z + H_0 \sin \beta_n z)}{\frac{1}{2} [(\beta_n^2 + H_0^2) (L_{f_0} + \frac{H_0}{\beta_n^2 + H_0^2}) + H_0]} \times \right. \\ & \left. (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n + \mathfrak{C}_n + \mathfrak{D}_n + \mathfrak{E}_n + \mathfrak{F}_n) \right] \end{aligned} \quad (3.141)$$

donde las soluciones de las integrales involucradas  $\mathfrak{A}_n$ ,  $\mathfrak{B}_n$ ,  $\mathfrak{C}_n$ ,  $\mathfrak{D}_n$ ,  $\mathfrak{E}_n$  y  $\mathfrak{F}_n$  son establecidas por,

$$\mathfrak{A}_n = -C_3 \beta_n \int_0^{L_{f_0}} e^{-\kappa_L z} \cos(\beta_n z) dz = C_3 \beta_n \frac{e^{-\kappa_L L_{f_0}} (\kappa_L \cos \beta_n L_{f_0} - \beta_n \sin \beta_n L_{f_0}) - \kappa_L}{\kappa_L^2 + \beta_n^2}, \quad (3.142)$$

$$\mathfrak{B}_n = -C_3 H_0 \int_0^{L_{f_0}} e^{-\kappa_L z} \sin(\beta_n z) dz = C_3 H_0 \frac{e^{-\kappa_L L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n L_{f_0} + \kappa_L \sin \beta_n L_{f_0}) - \beta_n}{\kappa_L^2 + \beta_n^2}, \quad (3.143)$$

$$\mathfrak{C}_n = -C_2 \beta_n \int_0^{L_{f_0}} e^{Bz} \cos(\beta_n z) dz = -C_2 \beta_n \frac{e^{B L_{f_0}} (B \cos \beta_n L_{f_0} + \beta_n \sin \beta_n L_{f_0}) - B}{B^2 + \beta_n^2}, \quad (3.144)$$

$$\mathfrak{D}_n = -C_2 H_0 \int_0^{L_{f_0}} e^{Bz} \sin(\beta_n z) dz = C_2 H_0 \frac{e^{B L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n L_{f_0} - B \sin \beta_n L_{f_0}) - \beta_n}{B^2 + \beta_n^2}, \quad (3.145)$$

$$\mathfrak{E}_n = -C_1 \beta_n \int_0^{L_{f_0}} e^{-Bz} \cos(\beta_n z) dz = C_1 \beta_n \frac{e^{-B L_{f_0}} (B \cos \beta_n L_{f_0} - \beta_n \sin \beta_n L_{f_0}) - B}{B^2 + \beta_n^2}, \quad (3.146)$$

$$\mathfrak{F}_n = -C_1 H_0 \int_0^{L_{f_0}} e^{-Bz} \sin(\beta_n z) dz = C_1 H_0 \frac{e^{-B L_{f_0}} (\beta_n \cos \beta_n L_{f_0} + B \sin \beta_n L_{f_0}) - \beta_n}{B^2 + \beta_n^2}, \quad (3.147)$$

y las literales utilizadas a lo largo del desarrollo son

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}, \quad (3.148)$$

$$B^2 = \frac{2}{R_n k R_{ter}}, \quad (3.149)$$

$$S = \frac{\kappa_L}{k} (1 - r_f) G_0, \quad (3.150)$$

$$H_0 = \frac{h_0}{k}, \quad (3.151)$$

$$H_L = \frac{h_L}{k}, \quad (3.152)$$

$$R_{ter} = \left( \left( \frac{R_2}{k_1} \right) \ln \left( \frac{R_1}{R_n} \right) + \left( \frac{R_2}{k_2} \right) \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h_R} \right), \quad (3.153)$$

$$C_1 = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \left( \frac{(H_0 + \kappa_L)(H_L + B) e^{BL_{fo}} - (H_0 - B)(H_L - \kappa_L) e^{-\kappa_L L_{fo}}}{(H_0 + B)(H_L + B) e^{BL_{fo}} - (H_0 - B)(H_L - B) e^{-BL_{fo}}} \right), \quad (3.154)$$

$$C_2 = \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \left( \frac{(H_0 + B)(H_L - \kappa_L) e^{-\kappa_L L_{fo}} - (H_0 + \kappa_L)(H_L - B) e^{-BL_{fo}}}{(H_0 + B)(H_L + B) e^{BL_{fo}} - (H_0 - B)(H_L - B) e^{-BL_{fo}}} \right), \quad (3.155)$$

$$C_3 = \frac{S}{B^2 - \kappa_L^2}, \quad (3.156)$$

sin olvidar desde luego que los *eigenvalores*  $\beta_n$ , tomados de la ecuación transcendental,

$$\tan \beta_n L_{fo} = \beta_n \left( \frac{H_0 + H_L}{\beta_n^2 - H_0 H_L} \right). \quad (3.157)$$

A continuación analizamos desde el punto de vista de la termodinámica clásica la generación de entropía como consecuencia del paso de la energía radiativa a través del medio participante. Este análisis lo desarrollamos en estado permanente y consideramos que el flujo radiativo proviene de un cuerpo negro. Obtenemos además la eficiencia de transmisión para la fibra óptica.

### 3.5 Eficiencia de transmisión

Comencemos por determinar los flujos radiativos a la entrada y a la salida de la fibra óptica. Con base en la ecuaciones (3.22) escribimos la siguiente relación

$$\frac{dq_\lambda}{dz} = -\kappa_{L\lambda} (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} \exp(-\kappa_{L\lambda} z), \quad (3.158)$$

donde consideramos que el flujo de calor apunta en dirección  $z$ , tomamos en cuenta la dependencia con la longitud de onda  $\lambda$  y además incluimos el fenómeno de reflexión tipo Fresnel a la entrada de la fibra óptica.

Al integrar la ecuación (3.158) sobre la longitud de la fibra óptica, escribimos

$$\int_{q_{ent}}^{q_{sal}} dq_\lambda = (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} \int_0^{L_{fo}} (-\kappa_{L\lambda} \exp(-\kappa_{L\lambda} z)) dz, \quad (3.159)$$

y de esta manera obtenemos

$$q_{ent\lambda} - q_{sal\lambda} = (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} - (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} e^{-\kappa_{L\lambda} L_{fo}} \quad (3.160)$$

donde  $q_{ent\lambda} [Wm^{-2}]$  y  $q_{sal\lambda} [Wm^{-2}]$  son los flujos radiativos espectrales por unidad de área a la entrada y a la salida, respectivamente,  $G_{0\lambda} [Wm^{-2}]$  es la radiación incidente espectral a la entrada,  $L_{fo} [m]$  es la longitud de la fibra óptica y  $\kappa_L [m^{-1}]$  es el coeficiente de absorción lineal espectral.

En la relación (3.160) identificamos el flujo radiativo a la entrada

$$q_{ent\lambda} = (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} \quad (3.161)$$

y el flujo radiativo a la salida

$$q_{sal\lambda} = (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} e^{-\kappa_L \lambda L_{f_0}}. \quad (3.162)$$

Al integrar sobre el área y sobre todas las longitudes de onda, tenemos la potencia radiativa a la entrada  $\dot{Q}_{ent}$  [W]

$$\dot{Q}_{ent} = \int_0^A \int_0^\infty (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} d\lambda dA = (1 - r_f) G_0 A \quad (3.163)$$

y la potencia radiativa a la salida  $\dot{Q}_{sal}$  [W]

$$\dot{Q}_{sal} = \int_0^A \int_0^\infty (1 - r_{f\lambda}) G_{0\lambda} e^{-\kappa_L \lambda L_{f_0}} d\lambda dA = (1 - r_f) G_0 e^{-\kappa_L L_{f_0}} A. \quad (3.164)$$

Una vez que determinamos  $\dot{Q}_{ent}$  y  $\dot{Q}_{sal}$  mediante las relaciones (3.163) y (3.164), escribimos la eficiencia de transmisión  $\eta_\tau$  [-] como

$$\eta_\tau \equiv \frac{\dot{Q}_{sal}}{\dot{Q}_{ent}} = \frac{(1 - r_f) G_0 A}{(1 - r_f) G_0 e^{-\kappa_L L_{f_0}} A} = \exp(-\kappa_L L_{f_0}) \quad (3.165)$$

y con base en la relación (2.166) obtenemos la relación entre los decibels de pérdidas y la eficiencia de transmisión,

$$dB_{per} = -\frac{10}{L_{f_0}} \log(\eta_\tau). \quad (3.166)$$

En la siguiente sección discutimos los parámetros físicos involucrados en el modelo unidimensional propuesto. Llevamos a cabo la evaluación de la solución del modelo formulado y analizamos teóricamente el comportamiento térmico de la fibra óptica.

### 3.6 Resultados y conclusiones

Para llevar a cabo la emulación del comportamiento térmico de una fibra óptica cuando ésta transmite potencia radiativa, implementamos en un programa de cómputo el conjunto de ecuaciones (3.141)-(3.157) y evaluamos la solución analítica del modelo unidimensional propuesto. En el apéndice A presentamos el listado del programa de cómputo implementado en *Mathematica 3.0*.

Los parámetros físicos presentados en la tabla 3.1 son considerados para implementar el programa de cómputo. Los parámetros  $G_0$ ,  $\kappa_L$ ,  $r_f$  y  $L_{f_0}$  de la tabla 3.1 fueron obtenidos durante la investigación experimental y se reportan en el siguiente capítulo. Los demás parámetros son las propiedades físicas de una fibra óptica SiO<sub>2</sub> de alta pureza de la marca Lumonics (*Lumonics, 1999*) y son obtenidos de datos reportados en la literatura. Así por ejemplo, el coeficiente de transferencia por convección natural para los materiales de la fibra y aire seco a temperatura ambiente se reporta en el rango,  $5 \leq h \leq 15$  [Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>] (*Bejan, 1993* y *Özisik, 1993*). La conductividad térmica, la densidad y la capacidad del SiO<sub>2</sub>, se pueden consultar en las referencias *Bejan, 1993*, *Özisik 1993*, *Crystran, 1999* y *Vloc, 1999*. También es importante mencionar que consideramos una fibra óptica de la marca Lumonics SAA/1000/1100/1200, donde el material del núcleo es SiO<sub>2</sub> de alta pureza mientras que el revestimiento y la cubierta protectora son fabricados en SiO<sub>2</sub> con impurezas (*Lumonics, 1999*).

$G_0 = 7710.0 [Wm^{-2}]$	$k = 1.7 [Wm^{-1}K^{-1}]$
$\kappa_L = 0.252 [m^{-1}]$	$k_1 = 1.4 [Wm^{-1}K^{-1}]$
$r_f = 0.12 [-]$	$k_2 = 1.4 [Wm^{-1}K^{-1}]$
$L_{fo} = 1.578 [m]$	$R_n = 0.00050 [m]$
$h_0 = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$	$R_1 = 0.00055 [m]$
$h_L = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$	$R_2 = 0.00060 [m]$
$h_R = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$	$\rho = 2500 [kgm^{-3}]$
$T_{amb} = 25 [^{\circ}C]$	$C_p = 1800 [Jkg^{-1}K^{-1}]$

Tabla 3.1: Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica.

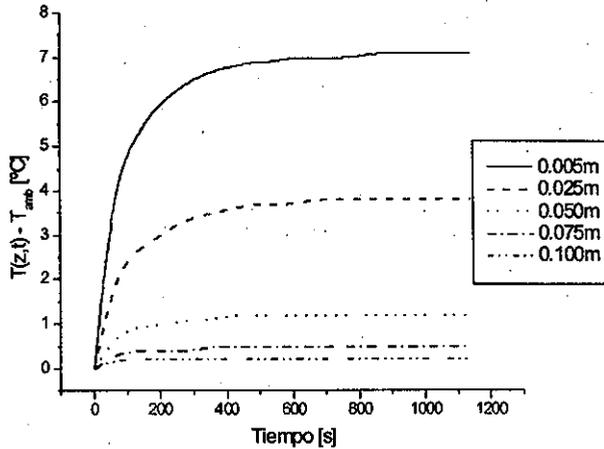


Figura 3.4: Emulación térmica de la fibra óptica

En la figura 3.4 presentamos la emulación del comportamiento térmico de la fibra óptica. En esta figura graficamos la distribución espacial y temporal de la temperatura obtenida mediante la emulación del comportamiento térmico. En este punto consideramos la diferencia de temperatura  $T(z, t)$  con respecto a la temperatura ambiente  $T_{amb}$ , esto es

$$\Delta T = T(z, t) - T_{amb}, \quad (3.167)$$

es decir, sólo tomamos en cuenta el incremento de temperatura que sufre la fibra óptica debido a la absorción de la radiación. Además, en este caso sólo reportamos el comportamiento térmico para los primeros 10 centímetros a la entrada de la fibra, pues la variación de la temperatura en el resto de la fibra es despreciable.

Cabe aclarar que en la figura 3.4 reportamos únicamente cinco posiciones sobre la parte longitudinal de la fibra, ya que estas posiciones coinciden con la implementación experimental, de tal suerte que nos facilitará la comparación entre los resultados teóricos y los resultados experimentales, como veremos en el siguiente capítulo.

Observamos en la figura 3.4 que el aumento mayor de temperatura ocurre cerca de la entrada de la fibra óptica. Esto se explica fácilmente; pues a la entrada de la fibra óptica el flujo radiativo sufre una absorción mayor en sus componentes espectrales que presentan atenuación mayor. Esta situación provoca una absorción de energía que resulta en un incremento de temperatura en los materiales de la fibra. Por otro lado, la fibra óptica no incrementa su temperatura lejos de la entrada, pues la radiación ha sido previamente filtrada y las componentes espectrales con absorción menor pasan más libremente a través de la fibra óptica. Además observamos que la fibra óptica alcanza el estado permanente a 900 segundos (15 minutos).

En el siguiente capítulo desarrollamos un estudio experimental de la transferencia de calor para dos tipos diferentes de fibras ópticas. Los resultados experimentales obtenidos del siguiente capítulo nos permiten validar el modelo teórico propuesto para la transferencia de calor en una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$ .

## Capítulo 4

# Estudio experimental de la transferencia de calor en fibras ópticas

### 4.1 Introducción

Una de las principales problemáticas para el transporte de energía solar concentrada a través de fibras ópticas es el incremento de su temperatura debido a la absorción de la energía radiativa en el material semitransparente del núcleo de la fibra. Como mencionamos anteriormente, existe una temperatura crítica que al ser excedida puede provocar el deterioro permanente de las propiedades ópticas y físicas de la guía de onda.

En el capítulo 2 analizamos teóricamente la respuesta no lineal para el coeficiente de absorción de una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza durante el transporte de energía solar concentrada. En dicho estudio mostramos que los efectos no lineales presentes, aún para la máxima concentración lograda por un concentrador solar circular ( $45 \times 10^3$  Soles), son despreciables.

En el capítulo anterior estudiamos teóricamente, para el mismo tipo de fibra óptica, el comportamiento térmico de una fibra óptica tomando en cuenta la conducción de calor, la ganancia de energía radiativa absorbida y las pérdidas convectivas. El modelo matemático desarrollado nos permite pronosticar el comportamiento térmico de la fibra óptica durante la transmisión de energía radiativa.

El modelo matemático desarrollado para el estudio del comportamiento térmico de la fibra óptica requiere ser corroborado mediante resultados experimentales. Sin embargo, en la literatura no se reporta de manera experimental el comportamiento térmico de una fibra óptica mientras ésta transmite energía radiativa concentrada. Por tal razón, en este capítulo presentamos el estudio experimental que permita corroborar el modelo teórico anteriormente propuesto. Por consiguiente, nuestra investigación experimental se centra principalmente en determinar el comportamiento térmico de una fibra óptica durante la transmisión de energía radiativa concentrada y comparar los resultados experimentales con los resultados teóricos obtenidos. Fue necesario, además, desarrollar una metodología para la medición del coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$ .

En las siguientes secciones describimos: el dispositivo experimental, la instrumentación de la fibra óptica para medir el aumento de temperatura debido a la absorción de energía radiativa y en particular el desarrollo para la medición del coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  (presentado en la ecuación (2.89) del capítulo 2). Presentamos además los resultados experimentales de la medición de temperatura sobre la superficie de la fibra. Al final de este capítulo comparamos los resultados experimentales con los resultados obtenidos del modelo teórico desarrollado.

## 4.2 Variables experimentales

Como ya mencionamos, lo que provoca el aumento de temperatura es la absorción de una porción de la energía radiativa que se encuentra pasando a través de la fibra óptica. Es decir, la intensidad radiativa a lo largo de la fibra óptica y la temperatura de la fibra están vinculadas por el fenómeno de absorción. Debe resultar claro que si la energía radiativa es absorbida durante su transmisión a través de la guía de onda, la energía a la salida presenta una cierta atenuación con respecto a la energía radiativa de entrada.

Con estas ideas en mente, nuestro diseño experimental se basa en la medición de la intensidad radiativa, a la entrada y a la salida de la fibra óptica, y la medición de la temperatura sobre la superficie de la misma. Por tanto, identificamos fácilmente las variables de estudio de nuestra investigación experimental. Tales variables experimentales son:

- Intensidad de energía radiativa a la entrada de la fibra óptica (*variable independiente*).
- Intensidad de energía radiativa a la salida de la fibra óptica (*variable dependiente*).
- Evolución de la distribución de temperatura sobre la superficie de la fibra óptica (*variable dependiente*).

Cabe mencionar que las variables experimentales propuestas presentan valores cuantitativos. Además, también es importante aclarar que la medición de la temperatura sobre la superficie de la fibra óptica se debe a que resulta prácticamente imposible medir la intensidad de la energía radiativa y la temperatura al interior de la fibra sin alterar las condiciones de propagación de la intensidad radiativa.

El comportamiento térmico de la fibra óptica durante la transmisión de energía radiativa está estrechamente relacionado con el coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$ , ya que éste se vincula con la absorptividad  $\alpha_a$  (ecuación (2.185)). Así, la medición de  $\kappa_L$  es muy importante pues resulta fundamental para comparar los resultados experimentales del comportamiento térmico de la fibra óptica con las predicciones teóricas.

## 4.3 Elementos del dispositivo experimental

Las partes fundamentales del dispositivo experimental son la fuente de luz para suministrar la energía radiativa y la fibra óptica a analizar, así como los sistemas que permiten la medición de las variables experimentales: instrumentación para la medición de intensidad de energía radiativa a la entrada y a la salida de la fibra óptica e instrumentación para la medición de temperatura sobre la superficie de la fibra óptica. Además se cuenta con un sistema auxiliar de concentración y con un sistema de adquisición de datos.

En nuestro diseño experimental seleccionamos los componentes o elementos que conforman el dispositivo experimental. Dichos elementos en conjunto nos permiten equipar el dispositivo para llevar a buen término las mediciones de temperatura y radiación.

A continuación presentamos los distintos componentes del dispositivo experimental y sus principales requerimientos. En este punto, es importante indicar que los requerimientos de los componentes que conforman el dispositivo experimental se dirigen a emular el comportamiento de una fibra óptica con transmisión de energía solar concentrada. Así, para cada uno de los elementos indicamos los requerimientos que debe cumplir y presentamos el componente que escogimos para satisfacer dichos requerimientos mencionando sus principales características.

- Fuente de luz para suministrar la energía radiativa. Este elemento debe cumplir con las características siguientes:

- Espectro continuo comprendido entre las longitudes de onda  $\lambda$  0.25 y 2.5  $\mu\text{m}$ .
- Periodo de operación por lo menos de 4 horas.
- Preferentemente una distribución espectral semejante a la distribución solar.

En este punto, escogimos como fuente luminosa una lámpara incandescente cuyo filamento es de wolframio circundado por una atmósfera de gas halógeno. Sus características principales son presentadas en la tabla 4.1,

Lámpara de halógeno	Photo Optic Lamp Osram
Potencia	300W (máxima)
Voltaje de operación	0 - 127V
Tamaño del bulbo del filamento	0.07m $\pm$ 1.5%
Diámetro del lámpara	0.04 m $\pm$ 1.5%
Vida útil	$\sim$ 30,000 h
Emisión a 127V	$\sim$ 3000 K

Tabla 4.1: Características de la lámpara

Si bien esta lámpara difiere de la distribución solar, pues se trata de una fuente a 3000K en lugar de ser una fuente a 5762K y por tanto su espectro se encuentra principalmente en la región del visible y no contiene componente de UV, ésta resulta una buena opción como fuente luminosa por dos razones principalmente. La primera, se debe a su costo bajo en comparación a un simulador solar y la segunda se debe a que presenta una operación sencilla. Es importante aclarar que la medición de la potencia de entrada y la medición de potencia a la salida durante el desarrollo experimental es llevada a cabo como una cantidad integrada sobre el espectro de la lámpara y para fines prácticos nos permite emular parte de la componente solar<sup>1</sup>.

- Fibra óptica para transmitir la energía radiativa proveniente de la fuente de luz. Sus requerimientos principales son:

- Número de apertura ( $NA$ ) preferentemente grande ( $NA \geq 0.2$ ).
- Nivel de atenuación bajo (menor que 1  $\text{dBm}^{-1}$ ) para el espectro entre los 0.25 y 2.5  $\mu\text{m}$ .
- Núcleo con diámetro grande (mayor o igual que 1mm).
- Longitud: tres diferentes valores (para la medición de  $\kappa_L$  y mayor que 1m (para la medición de temperatura).

Para este elemento del dispositivo experimental escogimos dos fibras ópticas diferentes, una de ellas de la marca Lumonics (*Lumonics, 1999*) y la otra de la marca Oriol (*Oriol, 1999*). Si bien ambas fibras cuentan con un núcleo de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza, las cubiertas protectoras de éstas son diferentes. La fibra óptica marca Lumonics presenta una cubierta protectora de  $\text{SiO}_2$  (con baja impureza), mientras que la fibra de la marca Oriol presenta una cubierta plástica de tefzel<sup>2</sup>. Las características de estas fibras son presentadas en la tabla 4.2, y en la figura 4.1 presentamos un esquema de la fibra óptica donde se representa la propagación de un rayo debido a la reflexión interna total.

<sup>1</sup> Es importante recordar que el  $\text{SiO}_2$ , material del núcleo de la fibra, presenta una baja transmisión para la componente espectral ultravioleta. Debido a que existe absorción de UV por la fibra óptica es entonces recomendable, para aplicaciones solares, eliminar dicha componente durante la colección de energía solar. Así al eliminar la componente UV del espectro solar la temperatura alcanzada por la fibra es menor (*Jaramillo, 1998*). Por lo tanto se puede utilizar esta fuente de luz para emular la radiación de entrada a la fibra.

<sup>2</sup> Tefzel es un material desarrollado bajo la marca registrada de Dupont (<http://www.dupont.com/>). Presenta características similares al Teflón de Dupont.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

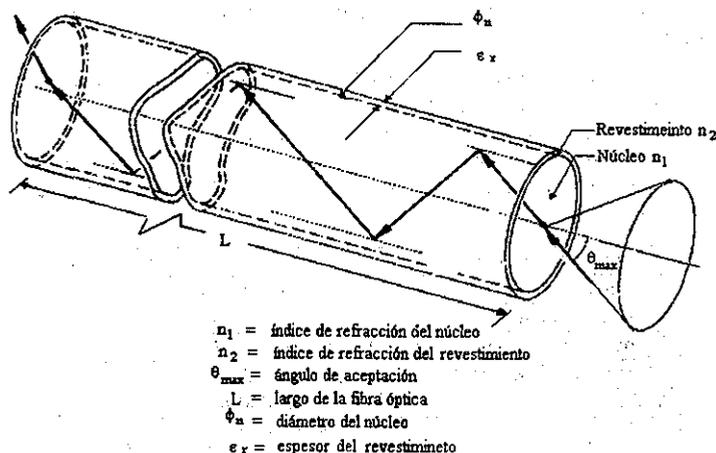


Figura 4.1: Esquema de la fibra óptica. (Adaptado de Hecht y Zajac 1976)

- Sistema auxiliar de concentración para permitir concentrar el flujo radiativo proveniente de la fuente luminosa en la entrada del núcleo de la fibra óptica. El requerimiento principal del sistema auxiliar de concentración es:

- Enfocar la energía radiativa a la entrada de la fibra óptica al formar una imagen reducida de la fuente luminosa.

En la sección 4.4, desarrollamos en detalle el acoplamiento del sistema auxiliar de concentración con la fuente luminosa y la fibra óptica. Además presentamos las características principales de los componentes del sistema auxiliar de concentración.

- Dispositivo para medir la intensidad de energía radiativa (a la entrada  $Q_{ent}[W]$  y a la salida  $Q_{sal}[W]$  de la fibra óptica). Sus requerimientos principales son:

- Capacidad de obtener mediciones de energía por unidad de tiempo y unidad de área.
- Rango espectral de medición de 0.25 a 2.5  $\mu m$ .

Con base en los requerimientos anteriores escogimos para la medición de la potencia un medidor de potencia y de energía radiantes marca Oriel (Oriel, 1999) modelo 70260 combinado con una sonda de termopila marca Oriel modelo 70263 (ver figura 4.2), constituyendo así lo que denominamos en lo ulterior radiómetro.

- Instrumentación para medir la temperatura (que sólo se lleva a cabo sobre la superficie de la fibra óptica). Los requerimientos principales son

- Capacidad de medir temperaturas entre 15 y 400  $^{\circ}C$ .
- Mínima dimensión, capacidad de medir temperatura de pared.

Fibra óptica SiO <sub>2</sub> con bajo contenido de <sup>-</sup> OH	Lumonics <sub>A</sub> SAA/1000/1100/1200	Oriel <sub>B</sub> VIS-NIR 77519
Longitud de la fibra óptica $L_{fo}$	$L_{fo1A} = 1.578m$ $L_{fo2A} = 0.159m$ $L_{fo3A} = 0.094m$	$L_{fo1B} = 1.662m$ $L_{fo2B} = 0.165m$ $L_{fo3B} = 0.127m$
Diámetro del núcleo $\phi_n$	0.001 m ± 1.5%	0.001 m ± 2.0%
Espesor del revestimiento $\varepsilon_r$	0.0005 m ± 1.5%	0.0005 m ± 2.0%
Espesor de la cubierta protectora $\varepsilon_p$	0.0005 m ± 1.5%	0.0005 m ± 2.0%
Apertura numérica $NA$	0.22 ± 0.02	0.22 ± 0.02
$f/\#$	2.3	2.3
$2\theta_{max}$	25°	25°
Umbral de daño permanente	No reportado	100 $kWcm^{-2}$
Material del núcleo	SiO <sub>2</sub> de alta pureza	SiO <sub>2</sub> de alta pureza
Material del revestimiento	SiO <sub>2</sub> con impurezas	SiO <sub>2</sub> con impurezas
Material de la cubierta protectora	SiO <sub>2</sub> con impurezas	Tefzel
Índice de refracción $n_1$	1.458 a 0.589 $\mu m$	1.458 a 0.589 $\mu m$

Tabla 4.2: Características de las dos fibras ópticas usadas.

Rango de potencias	<100pW a 150W
Rango de energías	5 $\mu J$ a 200 J
Salida digital/análogica	0-1V escala de 3W (resolución 11bits, 0.05%)
Calibración	Automática usando una memoria PROM

Tabla 4.3: Características principales del medidor de potencia radiativa.

Para satisfacer estos requerimientos utilizamos termopares delgados. Estos termopares propuestos son de cobre-constantán conocidos como tipo T y sus características principales son

Los termopares fueron pegados sobre la superficie de ambas fibras ópticas. Para pegar los termopares utilizamos cemento *CC High Temperature Cement*<sup>3</sup> de la marca Omega. Este cemento se recomienda para fijar termopares para la medición de temperatura de superficie. Presenta una baja conductividad eléctrica y una alta conductividad térmica.

Más adelante se describe el espaciamiento entre termopares para medir la temperatura.

- Sistema de adquisición de datos. Los requerimientos principales para este elemento son

- Conversión analógico-digital.
- Almacenamiento de datos experimentales
- Mediciones de voltaje y temperatura de manera directa.
- Varios canales para llevar a cabo la adquisición.

Así, para el sistema de adquisición de datos seleccionamos un equipo Hewlett Packard (*Hewlett-Packard, 1999*), compuesto por una unidad de adquisición de datos e interruptor modelo HP 34970A (tabla 4.6), una tarjeta multiplexora de propósito general de 20 canales modelo HP 34901A (tabla 4.7) y una tarjeta interfaz HP-IB soportada bajo ambiente Windows 95 modelo HP 82341D.

Es importante destacar que la tarjeta multiplexora cuenta con 20 canales para la medición de temperatura a través de termopares sin la necesidad de una punta fría de referencia. La tarjeta HP

<sup>3</sup> Para obtener las propiedades físicas de este cemento se puede consultar la siguiente dirección electrónica <http://www.britishelectricals.com/cement.htm>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

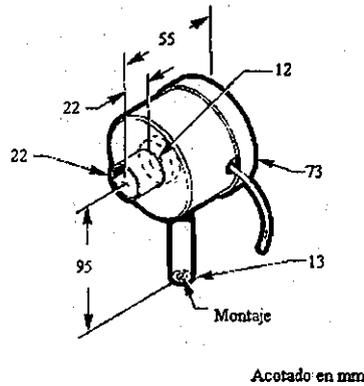


Figura 4.2: Esquema de la sonda termopila. (Adaptado de Oriel, 1999)

Rango espectral	0.19-6 $\mu\text{m}$
Diámetro del sensor	12 mm
Rango de medición	Potencia 50 $\mu\text{W}$ –3 W $\pm 3\%$ Energía 1 mJ–12 J $\pm 5\%$
Máxima densidad de potencia	$0.5 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$
Máxima densidad de energía	$3 \times 10^3 \text{ J m}^{-2}$ a $< 10^{-8} \text{ s}$ , $5 \times 10^3 \text{ J m}^{-2}$ a $1 \mu\text{s}$
Precisión de calibración	$\pm 2\%$
Constante de tiempo	2.5s

Tabla 4.4: Características principales de la sonda termopila.

823241D para interfaz HP-IB permite vincular el sistema de adquisición de datos Hewlett Packard y una computadora personal. Esta tarjeta utiliza una especificación *Plug-and-Play* de Intel y al ser conectada en una ranura ISA/EISA en una computadora personal (PC) permite el acceso, control de instrumentos y registro de datos. En nuestro caso facilita el almacenamiento de datos experimentales en el disco duro de la PC una vez que han sido registrados por el adquisidor HP 34970A y su tarjeta HP 34901A.

Una vez que que determinamos los componentes del dispositivo, en la figura 4.3 presentamos un esquema general del dispositivo experimental. En este esquema se bosquejan los principales elementos del dispositivo experimental.

En la siguiente sección se describe la integración de estos elementos, en particular del acoplamiento entre la fuente luminosa y la fibra óptica a través del sistema auxiliar de concentración.

#### 4.4 Diseño del dispositivo experimental

Como definimos, la intensidad radiativa a la entrada de la fibra corresponde a la variable independiente de nuestro diseño experimental y las variables dependientes son la intensidad radiativa a la

Termopar	Tipo T (Cobre-Constantán)
Precisión	$\pm 1.0^{\circ}C$
Rango de operación	$-300^{\circ}C + 500^{\circ}C$
Rango de operación sugerido	$-100^{\circ}C + 400^{\circ}C$
Calibre	36

Tabla 4.5: Características de los termopares.

Multímetro digital	VCD 0.0004%
Resolución	$6\frac{1}{2}$ dígitos (22 bits)
Velocidad máxima de registro	250 canales/s
Mediciones	Voltaje CA/CD, Corriente CA/CD Frecuencia Temperatura
Memoria no volátil	50,000 lecturas

Tabla 4.6: Características principales del HP 34970A.

salida de la fibra y la temperatura.

Para manipular la variable independiente del dispositivo experimental, controlamos la diferencia de potencial que activa la lámpara mediante un dispositivo que permite variar el voltaje eléctrico (Variac). Ya que se trata de una lámpara incandescente de corriente alterna, la diferencia de potencial que llega a la lámpara es directamente proporcional a la temperatura que alcanza su filamento de wolframio. Así, tomando en cuenta que el filamento se comporta como un cuerpo negro emitiendo a cierta temperatura es posible variar la intensidad (y la distribución) de energía de la fuente luminosa mediante el suministro del voltaje.

Una vez que fijamos la diferencia de potencial que se suministra a la lámpara, la intensidad de energía radiativa a la entrada de la fibra la consideramos constante.

Por otro lado, para acoplar la fibra óptica con la fuente luminosa requerimos de un sistema auxiliar de concentración como mencionamos anteriormente. Este sistema de concentración permite enfocar la energía radiativa en el núcleo de la fibra óptica. Cabe recordar que nuestro interés principal es el uso de fibras ópticas para transmitir energía radiativa concentrada y por lo tanto, debemos considerar que se desea tener la menor área de focalización con la mayor cantidad de energía por unidad de tiempo y unidad de área a la entrada de la fibra.

Por lo anterior, consideramos un juego de lentes que nos permiten concentrar la energía radiativa proveniente de la fuente luminosa. Es importante mencionar que se requiere de un juego de lentes, ya que si se usara una sola lente, ésta tendría que estar alejada de la fuente para obtener una imagen pequeña. Esto último se debe al tamaño y forma de la fuente luminosa, la cual emite como si se tratara de una fuente puntual. En otras palabras, una sola lente formará imágenes más pequeñas en cuanto más alejada se encuentre de la fuente de luz lo que implica que la densidad de energía por unidad de área es menor.

Debemos considerar para el juego de lentes del sistema auxiliar de concentración: el tamaño de la fuente, el tamaño de la imagen que se desea formar y la densidad de energía por unidad de área que se forma en la imagen. Desde luego no debemos olvidar la dependencia con los ángulos del arreglo completo.

Como se muestra en la figura 4.4, para que la energía radiativa converja pese a que la fuente luminosa es prácticamente puntual y por tanto emite radialmente, la distancia  $L[m]$  debe ser mayor

Canales para muestreo	20 + 2
Velocidad máxima de muestreo	60 canales/s
Referencia para termopar	incorporada
Medición de corriente CA/CD	1 A

Tabla 4.7: Características principales de la tarjeta HP 34901A.

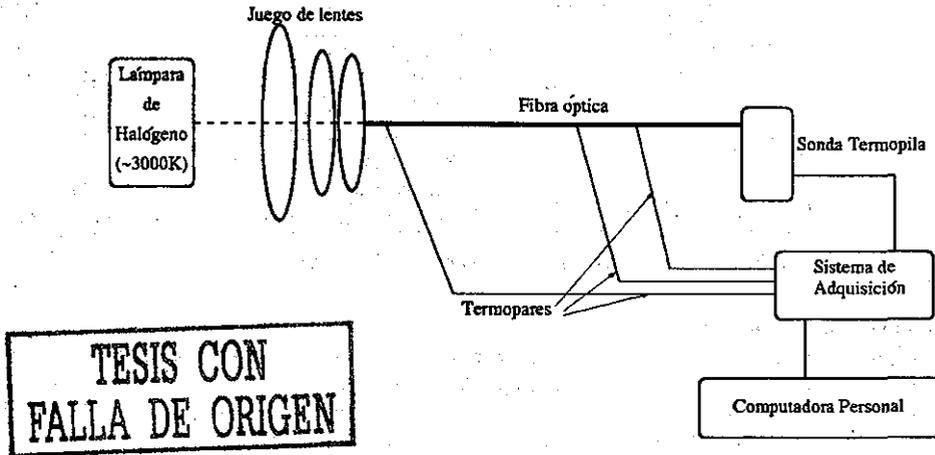


Figura 4.3: Esquema del dispositivo experimental.

que la distancia focal  $f_1[m]$  de la lente  $L_1$

$$L > f_1, \quad (4.1)$$

donde  $L$  es la distancia entre la lente convergente  $L_1$  y el punto de emisión de la fuente luminosa y  $f_1$  es la distancia focal de la lente  $L_1$ .

Para reducir el tamaño de la imagen que se forma con este arreglo, es necesario aumentar la distancia  $L$ , con lo cual disminuye la energía que incide en la lente y por tanto la energía sobre la imagen formada a la salida. Ya que se desea tener la máxima potencia radiativa concentrada en la menor área, es necesario incluir una segunda lente convergente que nos permite reducir el tamaño de la imagen para un valor dado de  $L$ .

La distancia focal efectiva  $f_e[m]$  para el juego de lentes compuesto por  $L_1$  y  $L_2$  (ver figura 4.4), las cuales se consideran como dos lentes delgadas, la determinamos mediante (Hecht y Zajac, 1976)

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{S_{o1}}{f_1 f_2}, \quad (4.2)$$

donde  $f_2[m]$  es la distancia focal de la lente  $L_2$  y  $S_{o1}[m]$  es la distancia que separa una lente de otra.

Agregar la lente convergente  $L_3$  auxilia a formar una imagen de menor tamaño y por tanto con mayor energía por unidad de área. Así, al considerar la distancia focal efectiva (relación 4.2), la distancia  $S_{i2}[m]$  a la cual se forma la imagen medida a partir de  $L_3$  (como se muestra en la figura 4.4)

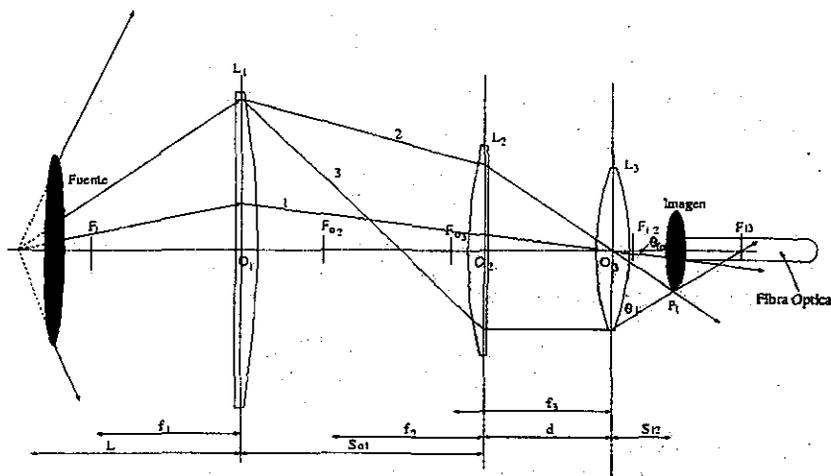


Figura 4.4: Esquema del juego de lentes como sistema auxiliar de concentración.

(Hecht y Zajac, 1976), se expresa como

$$S_{i2} = \frac{f_3 d - \frac{f_3 S_{o1} f_e}{S_{o1} - f_e}}{d - f_3 - \frac{S_{o1} f_e}{S_{o1} - f_e}} \quad (4.3)$$

Mientras que el aumento  $M$  de la imagen formada está dado por

$$M = \frac{f_e S_{i2}}{d(S_{o1} - f_e) - S_{o1} f_e} \quad (4.4)$$

donde  $d[m]$  es la distancia entre las lentes  $L_2$  y  $L_3$ .

Por otra parte el ángulo  $\theta_L$  (ver figura 4.4) está formado por el haz de luz en el borde de la lente  $L_3$  y la imagen formada en  $P_1$ , y se determina mediante

$$\tan \theta_L = \frac{2S_{i2}}{D_3 - Y_i} \quad (4.5)$$

donde  $D_3[m]$  es el diámetro de la lente  $L_{31}$  y  $Y_i[m]$  es el diámetro de la imagen formada.

Lo que deseamos entonces es una imagen formada en  $P_1$  cuyo diámetro  $Y_i$  y ángulo  $\theta_L$  sean iguales al diámetro del núcleo  $\phi_n$  de la fibra óptica y a su ángulo máximo de admisión  $\theta_{max}$ ; de esta manera

$$Y_i = \phi_n \quad (4.6)$$

y

$$\theta_L = \theta_{max} \quad (4.7)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Así, mediante la relación (4.5) escribimos

$$S_{i2} = \frac{(D_3 - \phi_n)(\text{Tan}\theta_{\max})}{2} \quad (4.8)$$

Si consideramos ahora un valor establecido para el aumento  $M$ , a partir de la relación (4.4) podemos obtener la distancia  $d$  mediante

$$d = f_e \frac{S_{i2} + MS_{o1}}{M(S_{o1} - f_e)} \quad (4.9)$$

Una vez hecho esto, sustituimos la relación (4.8) en la ecuación (4.3) para obtener la distancia focal  $f_3$  como función de la distancia  $S_{o1}$  y el distancia focal equivalente  $f_e$  establecidas previamente por las lentes  $L_1$  y  $L_2$ , de esta manera escribimos,

$$f_3 = \frac{\left(d - \frac{S_{o1}f_e}{S_{o1} - f_e}\right) \left(\frac{(D_3 - \phi_n)(\text{Tan}\theta_m)}{2}\right)}{\left(d - \frac{S_{o1}f_e}{S_{o1} - f_e} + \frac{(D_3 - \phi_n)(\text{Tan}\theta_m)}{2}\right)} \quad (4.10)$$

donde  $d$  se obtiene de la relación (4.9).

El desarrollo de las ecuaciones previas permiten calcular los parámetros físicos de las lentes para obtener una imagen deseada a la entrada de la fibra óptica.

Sin embargo, es importante señalar que la implementación del sistema auxiliar de concentración lo construimos usando dos lentes plano-convexas  $L_1$  y  $L_2$  y una lente biconvexa  $L_3$  que forman parte del material de Laboratorio de Transferencia de Calor del Centro de Investigación en Energía de la UNAM y las ecuaciones desarrolladas nos auxiliaron a determinar las distancias más adecuadas a nuestro diseño previo.

Las lentes usadas en el desarrollo experimental están hechas de sílica fundida ( $\text{SiO}_2$ ) de alta pureza. Este material permite una buena transmisión para las longitudes de onda entre los  $0.19\mu\text{m}$  y  $2.5\mu\text{m}$ , además presenta un bajo coeficiente de expansión que ayuda a prevenir rotura y distorsión por aumento de temperatura. En la figura 4.5 se presenta un esquema donde se observan las características de las lentes.

En las tablas 4.8, 4.9 y 4.10 se presentan las dimensiones de las lentes  $L_1, L_2$  y  $L_3$ , respectivamente (ver figura 4.4).

Si bien en las lentes usadas existe una variación de la distancia focal debido a una ligera aberración esférica y a la dispersión por el índice de refracción para las distintas longitudes de onda (Hecht y Zajac, 1976), esta variación se considera despreciable.

Es importante mencionar que la razón  $D/f$  entre el diámetro  $D$  [m] y la distancia focal  $f$  [m] de una lente se conoce como la abertura relativa de la lente, mientras que su inverso se denomina como el número- $f$  o simplemente  $f/\#_L$  y se define como (Hecht y Zajac, 1976),

$$f/\#_L = \frac{1}{2NA_L} \quad (4.11)$$

donde  $NA_L$  es la apertura numérica de la lente, definida como,

$$NA_L = \sin \theta_{L\max} \quad (4.12)$$

donde  $\theta_{L\max} [^\circ]$  es el ángulo formado desde el borde de la lente y el punto focal  $F_f$ , éste también se puede obtener a través de

$$\tan \theta_{L\max} = \frac{D/2}{DFB} \quad (4.13)$$

Diámetro $D$	$0.1016\text{ m} +0.000\text{ m}; -0.00025\text{m}$
Distancia focal $f$	$0.2500\text{ m a } 0.589\mu\text{m} \pm 2\%$
Distancia focal sobre el borde $DFB$	$0.2397\text{ m} \pm 0.00025\text{ m}$
Espesor del centro $T_c$	$0.0149\text{ m}$
Espesor del borde $T_e$	$0.0030\text{ m}$
Apertura numérica de la lente $NA_L$	$0.20 \pm 2\%$
$f/\#_L$	2.5

Tabla 4.8: Dimensiones de la lente plano-convexa  $L_1$ .

Diámetro $D$	$0.0762\text{ m} +0.000\text{ m}; -0.00025\text{m}$
Distancia focal $f$	$0.0570\text{ m a } 0.589\mu\text{m} \pm 2\%$
Distancia focal sobre el borde $DFB$	$0.4941\text{ m a } 0.589\mu\text{m} \pm 0.00025\text{ m}$
Espesor del centro $T_c$	$0.0085\text{ m}$
Espesor del borde $T_e$	$0.0053\text{ m}$
Apertura numérica de la lente $NA_L$	$0.66 \pm 2\%$
$f/\#_L$	0.75

Tabla 4.9: Dimensiones de la lente plano-convexa  $L_2$ .

Diámetro $D$	$0.0508\text{ m} +0.000\text{ m}; -0.00025\text{m}$
Distancia focal $f$	$0.076\text{ m a } 0.589\mu\text{m} \pm 2\%$
Distancia focal sobre el borde $DFB$	$0.0718\text{ m a } 0.589\mu\text{m} \pm 0.00025\text{ m}$
Espesor del centro $T_c$	$0.0118\text{ m}$
Espesor del borde $T_e$	$0.0020\text{ m}$
Apertura numérica de la lente $NA_L$	$0.5 \pm 2\%$
$f/\#_L$	1.6

Tabla 4.10: Dimensiones de la lente biconvexa  $L_3$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

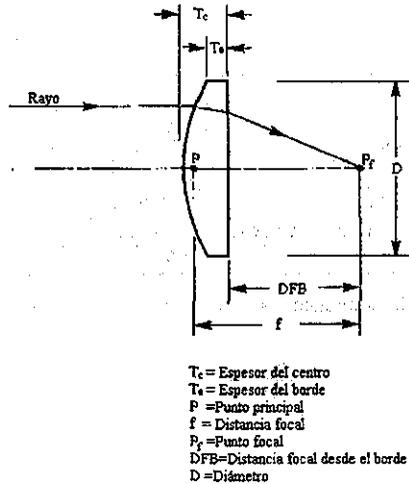


Figura 4.5: Esquema de la lente. (Adaptado de Oriol, 1999)

$f_e$	$0.078m \pm 0.0015m$
$S_{o1}$	$0.013m \pm 0.0018m$
$S_{i2}$	$0.050m \pm 0.0014m$
$d$	$0.065m \pm 0.0019m$
$M_T$	$-0.57 \pm 0.046$
$L$	$0.071m \pm 0.0021m$
$\theta_L$	$66.7^\circ \pm 4.65^\circ$

Tabla 4.11: Parámetros físicos en el juego de lentes

donde  $DFB$  es la distancia focal sobre el borde (ver figura 4.5).

A partir de las lentes empleadas y las ecuaciones previas obtenemos los siguientes parámetros físicos del juego de lentes (ver figura 4.4). En este punto tomamos en cuenta formar una imagen reducida con una cantidad de energía radiativa lo más alta posible.

Mediante la relación (4.5), los parámetros físicos de la lente  $L_3$  y los parámetros físicos de la tabla 4.11 nos permiten estimar el diámetro de la imagen formada donde la fibra óptica es colocada, de esta manera estimamos

$$Y_i = 0.007m \pm 0.0016m,$$

es claro que el tamaño de la imagen formada  $Y_i$  es mucho mayor que el diámetro de la fibra óptica que es sólo  $1mm$ , sin embargo ha sido nuestra mejor opción debido a las restricciones físicas de las lentes empleadas.

En la siguiente sección describimos la manera en que se realiza la instrumentación del dispositivo para la medición de las variables experimentales.

## 4.5 Implementación e instrumentación del dispositivo experimental

Una vez que determinamos los parámetros del sistema auxiliar de concentración y los demás componentes, procedemos a ensamblar el dispositivo experimental.

Por principio, colocamos la fuente de luz, el juego de lentes y la fibra óptica sobre un riel óptico con sus respectivas monturas.

Se debe asegurar entonces que la luz que proviene de la lámpara, una vez que es concentrada, es transmitida a través de la fibra óptica. Esto se logra al alinear la fuente de luz y el sistema de concentración sobre un mismo eje óptico.

La alineación de la fuente de luz y las lentes la llevamos a cabo mediante un láser de baja potencia, ya que el haz de luz que provee el láser permite colocar los centros de las lentes y el centro de la lámpara en una misma línea recta. Es importante señalar que nos auxiliamos de monturas que facilitan la alineación de los elementos y aseguran que éstos mantengan fija su posición.

Para la medición de radiación utilizamos el radiómetro y el sistema de adquisición de datos. El radiómetro mide la potencia luminosa y transforma la medición a una salida de voltaje, la curva de calibración para el voltaje de salida del radiómetro es

$$Q [W] = (3.0 \pm 0.02) V + (0.00 \pm 0.002), \quad (4.14)$$

donde  $V$  es voltaje de salida en el radiómetro en *volts* y  $Q$  es la potencia radiativa en *watts* detectada por la termopila. (En el apéndice B presentamos el análisis para determinación de la curva de calibración del radiómetro).

Para medir la potencia por unidad de área a la entrada de la fibra óptica,  $G_0 [Wm^{-2}]$ , hacemos coincidir el cono de luz de la imagen formada a la salida de la lente  $L_3$  con el área de entrada de la termopila como se muestra en la figura 4.6.

Es importante señalar que  $Q_{ent} [W]$  es la potencia a la entrada de la fibra, es decir la energía radiativa que se encuentra en la mancha que se forma a la salida de la lente  $L_3$  (ver figura 4.4), mientras que  $G_0 [Wm^{-2}]$  es la potencia a la entrada por unidad de área. De esta manera escribimos para la potencia por unidad de área a la entrada de la fibra

$$G_0 = \frac{Q_{ent}}{A_{imagen}}, \quad (4.15)$$

donde  $A_{imagen} [m^{-2}]$  es el área de la imagen, la cual corresponde a

$$A_{imagen} = \frac{\pi}{4} Y_i^2. \quad (4.16)$$

En este punto, suponemos una distribución uniforme de energía por unidad de área en la imagen formada a la entrada de la fibra óptica.

Para obtener la potencia por unidad de área a la salida de la fibra óptica se lleva a cabo el mismo procedimiento, sólo que ahora consideramos como la imagen formada la salida en la fibra óptica,

$$G_L = \frac{Q_{sal}}{A_{fo}}, \quad (4.17)$$

donde  $G_L [Wm^{-2}]$  es la potencia a la salida por unidad de área,  $Q_{sal} [W]$  es la potencia a la salida de la fibra y  $A_{fo}$  es el área de la fibra óptica.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Figura 4.6: Medición de la intensidad radiativa mediante la termopila.

Por otro lado, para la medición de temperatura como función de la posición y del tiempo los termopares son distribuidos sobre la superficie de la fibra óptica en operación con un número mayor de ellos a la entrada de la fibra. Esto último debido a que de acuerdo a las predicciones teóricas, la mayor absorción del flujo radiativo por el material de la fibra óptica se lleva a cabo en los primeros diez centímetros próximos a la entrada y en consecuencia provoca un aumento en la temperatura mayor que en las partes más alejadas de la entrada donde el flujo radiativo sufre menor absorción, pues éste ha sido filtrado previamente.

Para evaluar la evolución y distribución de las temperaturas consideramos dos casos. Instrumentamos dos fibras ópticas, la primera de la marca Lumonics con longitud  $L_{fo1A} = 1.578m$  y otra de la marca Oriel con longitud  $L_{fo1B} = 1.662m$  (ver tabla 4.24). En cada una de estas fibras colocamos 16 termopares. De tal manera que en ambas fibras se registra la temperatura en los primeros  $0.125m$  con 6 termopares espaciados  $0.025m$ , en los siguientes  $0.480m$  con 6 termopares espaciados  $0.080m$  y 4 termopares espaciados  $0.016m$ . Es importante aclarar que el termopar más cercano a la entrada se coloca a  $0.5cm$  adelante de ésta, para asegurar que la entrada de la fibra no se obstruya. También resulta importante mencionar que el extremo final de las fibras ópticas no se instrumentó, ya que observamos en pruebas preliminares de operación que no ocurre una variación de temperatura significativa.

Tanto los datos de temperatura como los datos de intensidad radiativa son registrados a través del sistema de adquisición de datos.

## 4.6 Metodología experimental

A través de nuestro diseño experimental obtenemos los valores de las variables experimentales las cuales son: la intensidad de energía radiativa a la entrada y a la salida de la fibra óptica, y la evolución de la distribución de temperatura sobre la superficie de la fibra óptica.

El análisis de los datos experimentales lo realizamos en dos partes. La primer parte la dedicamos al análisis de la intensidad de energía radiativa a la entrada y a la salida de la fibra óptica para tres diferentes longitudes de fibra, que nos conduce a calcular el coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  presentado en capítulos anteriores. En seguida, realizamos el análisis de datos sobre la evolución y

distribución de temperatura sobre la fibra óptica.

#### 4.6.1 Mediciones para la estimación del coeficiente de absorción lineal

Para determinar el coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  de las dos fibras ópticas estudiadas consideramos la expresión (3.18) de manera espectral,

$$\kappa_{L\lambda}z = -\ln\left(\frac{G_\lambda(z)}{G_{0\lambda}}\right), \quad (4.18)$$

y al evaluar en  $z = L_{fo}$  obtenemos

$$\kappa_L = \int_0^\infty \kappa_{L\lambda}d\lambda = -\frac{1}{L_{fo}} \int_0^\infty \ln\left(\frac{G_{L\lambda}}{G_{0\lambda}}\right) d\lambda, \quad (4.19)$$

donde  $G_{0\lambda}$  y  $G_{L\lambda}$  son las potencias de entrada y de salida por unidad de área y unidad de longitud de onda  $\lambda$ , respectivamente y  $L_{fo}$  es el largo de la fibra óptica. Al integrar para todo el espectro tenemos que

$$\kappa_L = -\frac{1}{L_{fo}} \ln\left(\frac{G_L}{G_0}\right), \quad (4.20)$$

donde  $\kappa_L$  es una constante que indica la trayectoria media libre para un fotón hasta que éste es absorbido por el material del medio participante (*Modest, 1993*).

Al sustituir las ecuaciones (4.15) y (4.17) en la ecuación (4.20) tenemos,

$$\kappa_L = -\frac{1}{L_{fo}} \ln\left(\frac{\frac{Q_{sal}}{A_{fo}}}{\frac{Q_{ent}}{A_{imagen}}}\right), \quad (4.21)$$

que nos permite estimar el valor de  $\kappa_L$  para las dos fibras ópticas propuestas.

Para obtener los valores  $Q_{ent}$  y  $Q_{sal}$ , se suministran dos voltajes diferentes a la lámpara, los cuales corresponden a 115 y 100 *volts*. Así, mediante estos valores de voltaje, obtenemos distintas intensidades (y distribuciones espectrales) de potencia radiativa a la entrada de las fibras que corresponde a  $Q_{ent}$  y una vez que la potencia radiativa es transmitida por las fibras a través de su longitud característica  $L_{fo}$  obtenemos  $Q_{sal}$ . Ambas potencias radiativas son medidas por el radiómetro y registradas por el sistema de adquisición de datos.

Así, para medir la potencia de entrada  $Q_{ent}$  y de salida  $Q_{sal}$  mantenemos fijo el suministro de voltaje a la lámpara, ya sea 115 o 100 *volts*, y realizamos 300 lecturas de la potencia luminosa durante 7.5min, es decir, a razón de 1.5s cada una.

Con la finalidad de asegurar repetitividad en el experimento, la adquisición de datos experimentales, siguiendo el procedimiento antes descrito, lo llevamos a cabo en tres ocasiones distintas donde el equipo experimental es montado y desmontado en cada evento.

En la tabla 4.12 presentamos los valores promedio correspondientes a los dos voltajes suministrados a la lámpara y las potencias radiativas correspondientes.

Cabe aclarar que consideramos la misma potencia radiativa a la entrada  $Q_{ent}$  para ambas fibras ópticas. En otras palabras, ya que ambas fibras ópticas son colocadas en el mismo sitio donde la imagen es formada por el sistema auxiliar de concentración, consideramos que éstas presentan la misma potencia a la entrada.

Voltaje [V]	$Q_{ent}$ [W]
$115.3 \pm 0.53$	$0.2965 \pm 0.0010$
$100.1 \pm 0.14$	$0.2253 \pm 0.0026$

Tabla 4.12: Valores promedio de voltaje suministrado la lámpara y la potencia a la entrada de las dos fibras ópticas.

Para medir la potencia a la salida  $Q_{sal}$  de la fibra óptica tomamos en cuenta también 300 lecturas durante 7.5 min y en este caso consideramos tres longitudes diferentes de fibra para las dos fibras propuestas. En la tabla 4.13 presentamos las longitudes de cada fibra óptica

Lumonics	Oriel
$L_{fo1A} = 1.578 \pm 0.0005m$	$L_{fo1B} = 1.662 \pm 0.0005m$
$L_{fo2A} = 0.159 \pm 0.0005m$	$L_{fo2B} = 0.165 \pm 0.0005m$
$L_{fo3A} = 0.094 \pm 0.0005m$	$L_{fo3B} = 0.127 \pm 0.0005m$

Tabla 4.13: Largos de la fibras ópticas.

En las tablas 4.14 y 4.15 reportamos los valores promedio del voltaje suministrado a la lámpara y de la potencia a la salida de la fibra óptica de la marca Lumonics y de la fibra óptica de la marca Oriel, respectivamente.

Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo1A}$
$115.6 \pm 0.14$	$0.00361 \pm 0.00022$
$100.3 \pm 0.21$	$0.00257 \pm 0.00018$
Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo2A}$
$115.1 \pm 0.30$	$0.00513 \pm 0.00014$
$100.2 \pm 0.21$	$0.00393 \pm 0.00038$
Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo3A}$
$115.4 \pm 0.29$	$0.00520 \pm 0.00010$
$100.2 \pm 0.30$	$0.00399 \pm 0.00038$

Tabla 4.14: Valores promedio del voltaje suministrado a la lámpara y de la potencia a la salida de la fibra óptica de la marca Lumonics.

Con base en los datos experimentales y mediante una regresión lineal obtenemos los valores de la potencia de entrada  $Q_{ent}$  y de las potencias de salida  $Q_{sal}$  correspondientes a los suministros de voltaje a la lámpara de 115V y 100V. En las tablas 4.16, 4.17 presentamos dichos resultados.

Debemos señalar que las potencias reportadas en las tablas 4.16 y 4.17 son las potencias radiativas medidas por el radiómetro. Es por esto que la potencia  $Q_{ent}$  presenta un valor mucho mayor que  $Q_{sal}$ .

Por otro lado, la potencia por unidad de área a la entrada de la fibra la calculamos mediante

$$G_0 = \frac{Q_{ent}}{A_{imagen}}, \quad (4.22)$$

Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo1B}$
$115.4 \pm 0.21$	$0.00357 \pm 0.00039$
$100.2 \pm 0.10$	$0.00250 \pm 0.00025$
Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo2B}$
$115.1 \pm 0.12$	$0.00505 \pm 0.00014$
$100.1 \pm 0.10$	$0.00381 \pm 0.00003$
Voltaje [V]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo3B}$
$115.1 \pm 0.05$	$0.00511 \pm 0.00025$
$100.3 \pm 0.32$	$0.00386 \pm 0.00022$

Tabla 4.15: Valores promedio del voltaje suministrado a la lámpara y de la potencia a la salida de la fibra óptica de la marca Oriel.

Voltaje [V]	$Q_{ent}$ [W]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo1A} = 1.578m$	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo2A} = 0.159m$	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo3A} = 0.094m$
115	$0.296 \pm 0.0023$	$0.00369 \pm 0.00036$	$0.00510 \pm 0.00026$	$0.00518 \pm 0.00022$
100	$0.225 \pm 0.0071$	$0.00257 \pm 0.00032$	$0.00389 \pm 0.00035$	$0.00399 \pm 0.00029$

Tabla 4.16: Potencia de entrada y de salida para la fibra óptica de la marca Lumonics, para las tres longitudes estudiadas y los voltajes suministrados a la lámpara.

donde

$$A_{imagen} = 3.85 \times 10^{-5} \pm 5.5 \times 10^{-7} m^2$$

y la incertidumbre  $w_{G_0}$  [ $W m^{-2}$ ] para el valor calculado  $G_0$  la obtenemos a través de la ecuación (4.23) (Holman, 1984)

$$w_{G_0} = \left[ \left( \frac{\partial G_0}{\partial Q_{ent}} w_{Q_{ent}} \right)^2 + \left( \frac{\partial G_0}{\partial A_{imagen}} w_{A_{imagen}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.23)$$

o bien, sustituyendo las derivadas parciales correspondientes tenemos,

$$w_{G_0} = \left[ \left( \frac{1}{A_{imagen}} w_{Q_{ent}} \right)^2 + \left( -\frac{Q_{ent}}{(A_{imagen})^2} w_{A_{imagen}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

donde  $w_{Q_{ent}}$  [W] y  $w_{A_{imagen}}$  [ $m^{-2}$ ] son los valores de las incertidumbres para  $Q_{ent}$  y  $A_{imagen}$ , respectivamente.

Análogamente para el cálculo de la potencia por unidad de área a la salida de la fibra tenemos

$$G_L = \frac{Q_{sal}}{A_{fo}}, \quad (4.25)$$

donde

$$A_{fo} = 7.9 \times 10^{-7} \pm 2.4 \times 10^{-8} m^{-2}, \quad (4.26)$$

Voltaje [V]	$Q_{ent}$ [W]	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo1B} = 1.662m$	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo2B} = 0.165m$	$Q_{sal}$ [W] $L_{fo3B} = 0.127m$
115	$0.296 \pm 0.0023$	$0.00357 \pm 0.00035$	$0.00505 \pm 0.00024$	$0.00511 \pm 0.00019$
100	$0.225 \pm 0.0071$	$0.00249 \pm 0.00033$	$0.00381 \pm 0.00012$	$0.00385 \pm 0.00028$

Tabla 4.17: Potencia de entrada y de salida para la fibra óptica de la marca Oriel, para las tres longitudes estudiadas y los voltajes suministrados a la lámpara.

Voltaje[V]	$G_0$ [ $Wm^{-2}$ ]	$G_{L1A}$ [ $Wm^{-2}$ ] $L_{fo1A} = 1.578m$	$G_{L2A}$ [ $Wm^{-2}$ ] $L_{fo2A} = 0.159m$	$G_{L3A}$ [ $Wm^{-2}$ ] $L_{fo3A} = 0.094m$
115	$7710 \pm 106.6$	$4570 \pm 368.7$	$6530 \pm 291.2$	$6650 \pm 258.9$
100	$5780 \pm 117.0$	$3270 \pm 161.3$	$4990 \pm 503.8$	$5100 \pm 492.9$

Tabla 4.18: Potencias por unidad de área a la entrada y a la salida para la fibra óptica de la marca Lumonics.

y la incertidumbre  $w_{G_L}$  [ $Wm^{-2}$ ] para el valor calculado  $G_L$  la obtenemos a través de la ecuación (Holman, 1984)

$$w_{G_0} = \left[ \left( \frac{1}{A_{fo}} w_{Q_{sal}} \right)^2 + \left( -\frac{Q_{sal}}{(A_{fo})^2} w_{A_{fo}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.27)$$

donde  $w_{Q_{sal}}$  [W] y  $w_{A_{fo}}$  [ $m^{-2}$ ] son los valores de las incertidumbres para  $Q_{sal}$  y  $A_{fo}$ , respectivamente.

Con base en las relaciones (4.22) y (4.25) obtenemos los valores de las potencias por unidad de área a la entrada y salida para ambas fibras ópticas. En la tabla 4.18 reportamos los resultados para la fibra óptica de la marca Lumonics y en la tabla 4.19 hacemos lo propio para la fibra de la marca Oriel.

Por otra parte, a partir de la ecuación (4.21) y considerando ahora las pérdidas por reflexión a la entrada de la fibra óptica, construimos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permite estimar el valor del coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  y el coeficiente de reflexión de tipo Fresnel  $r_f$  en la superficie de entrada de la fibra óptica, de esta manera

$$G_{Lj} = (1 - r_f) G_0 \exp \{-\kappa_L L_{foj}\}, \quad (4.28)$$

$$G_{Lk} = (1 - r_f) G_0 \exp \{-\kappa_L L_{fok}\}, \quad (4.29)$$

donde los subíndices  $k$  y  $j$  indican las longitudes que se están considerando para cada tipo de fibra óptica. Es importante señalar que en el sistema de ecuaciones (4.28) y (4.29) tomamos longitudes distintas de fibra óptica de la misma marca, de esta manera en el sistema de ecuaciones  $j \neq k$ . Por tanto, se presentan entonces tres casos para cada voltaje y cada fibra, ésto nos permite calcular tres valores de  $r_f$  y  $\kappa_L$  para el voltaje de 100V y tres valores para el voltaje de 115V para cada una de las fibras.

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.28) y (4.29) usamos el método de igualación y sustitución, de esta manera escribimos de la ecuación (4.29)

$$r_f = 1 - \frac{G_{Lk}}{G_0 \exp \{-\kappa_L L_{fok}\}}, \quad (4.30)$$

Voltaje[V]	$G_0[Wm^{-2}]$	$G_{L1B}[Wm^{-2}]$ $L_{fo1B} = 1.662m$	$G_{L2B}[Wm^{-2}]$ $L_{fo2B} = 0.165m$	$G_{L3B}[Wm^{-2}]$ $L_{fo3B} = 0.127m$
115	$7710 \pm 106.6$	$4499 \pm 325.8$	$6375 \pm 254.3$	$6460 \pm 299.2$
100	$5780 \pm 117.0$	$3145 \pm 121.2$	$4820 \pm 389.4$	$4882 \pm 402.9$

Tabla 4.19: Potencias por unidad de área a la entrada y a la salida para la fibra óptica de la marca Oriel.

y al sustituir la relación (4.30) en la ecuación (4.28), obtenemos

$$\kappa_L = \frac{\ln\left(\frac{G_{Lj}}{G_{Lk}}\right)}{L_{foj} - L_{fok}} \quad (4.31)$$

El cálculo de la incertidumbre para la ecuación (4.31) es (Holman, 1984)

$$w_{\kappa_L} = \left[ \left( \frac{\partial \kappa_L}{\partial G_{Lj}} w_{G_{Lj}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \kappa_L}{\partial G_{Lk}} w_{G_{Lk}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \kappa_L}{\partial L_{foj}} w_{L_{foj}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \kappa_L}{\partial L_{fok}} w_{L_{fok}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.32)$$

y para la ecuación (4.30) es (Holman, 1984),

$$w_{r_f} = \left[ \left( \frac{\partial r_f}{\partial G_{Lk}} w_{G_{Lk}} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_f}{\partial G_0} w_{G_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_f}{\partial \kappa_L} w_{\kappa_L} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_f}{\partial L_{fok}} w_{L_{fok}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.33)$$

donde  $w_{\kappa_L}$  y  $w_{r_f}$  son las incertidumbres del coeficiente de absorción lineal  $\kappa_L$  y del coeficiente de reflexión a la entrada de la fibra  $r_f$ , respectivamente.

Así, de la ecuación (4.32) obtenemos

$$w_{\kappa_L} = \left[ \left( \frac{1}{G_{Lj}(L_{foj} - L_{fok})} w_{G_{Lj}} \right)^2 + \left( \frac{-1}{G_{Lk}(L_{foj} - L_{fok})} w_{G_{Lk}} \right)^2 + \left( \frac{-\ln\left(\frac{G_{Lj}}{G_{Lk}}\right)}{(L_{foj} - L_{fok})^2} w_{L_{foj}} \right)^2 + \left( \frac{\ln\left(\frac{G_{Lj}}{G_{Lk}}\right)}{(L_{foj} - L_{fok})^2} w_{L_{fok}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.34)$$

y de la ecuación (4.33)

$$w_{r_f} = \left[ \left( -\frac{e^{\kappa_L L_{fok}}}{G_0} w_{G_{Lk}} \right)^2 + \left( \frac{G_{Lk} e^{\kappa_L L_{fok}}}{G_0^2} w_{G_0} \right)^2 + \left( -L_{fok} \frac{G_{Lk} e^{\kappa_L L_{fok}}}{G_0} w_{\kappa_L} \right)^2 + \left( -\kappa_L \frac{G_{Lk} e^{\kappa_L L_{fok}}}{G_0} w_{L_{fok}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.35)$$

En las tablas 4.20 y 4.21 presentamos los valores obtenidos de los coeficientes de absorción lineal  $\kappa_L$  y del coeficiente de reflexión  $r_f$  para las combinaciones de dos longitudes de fibra óptica por cada marca de fibra y sus respectivos voltajes de suministro a la lámpara.

De tal suerte que podemos estimar el valor promedio del coeficiente de absorción lineal y valor promedio del coeficiente de reflexión para los dos voltajes suministrados a la lámpara y para cada una de las dos marcas de fibras, como se muestra en la tabla 4.22.

Voltaje[V]	$L_{foj}$ $L_{fok}$	$\kappa_L [m^{-1}]$	$r_f [-]$
115.	$L_{fo1A}$ $L_{fo2A}$	$0.253 \pm 0.0215$	$0.116 \pm 0.0085$
	$L_{fo1A}$ $L_{fo3A}$	$0.254 \pm 0.0225$	$0.117 \pm 0.0091$
	$L_{fo2A}$ $L_{fo3A}$	$0.248 \pm 0.0132$	$0.120 \pm 0.0050$
100	$L_{fo1A}$ $L_{fo2A}$	$0.299 \pm 0.0327$	$0.092 \pm 0.0089$
	$L_{fo1A}$ $L_{fo3A}$	$0.298 \pm 0.0297$	$0.093 \pm 0.0081$
	$L_{fo2A}$ $L_{fo3A}$	$0.296 \pm 0.0330$	$0.093 \pm 0.0092$

Tabla 4.20: Coeficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para la fibra óptica de la marca Lumonics.

Voltaje[V]	$L_{foj}$ $L_{fok}$	$\kappa_L [m^{-1}]$	$r_f [-]$
115	$L_{fo1B}$ $L_{fo2B}$	$0.245 \pm 0.0182$	$0.139 \pm 0.0073$
	$L_{fo1B}$ $L_{fo3B}$	$0.242 \pm 0.0203$	$0.136 \pm 0.0086$
	$L_{fo2B}$ $L_{fo3B}$	$0.241 \pm 0.0174$	$0.136 \pm 0.0095$
100	$L_{fo1B}$ $L_{fo2B}$	$0.296 \pm 0.0289$	$0.125 \pm 0.0056$
	$L_{fo1B}$ $L_{fo3B}$	$0.292 \pm 0.0275$	$0.123 \pm 0.0096$
	$L_{fo2B}$ $L_{fo3B}$	$0.291 \pm 0.0321$	$0.124 \pm 0.0087$

Tabla 4.21: Coeficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para la fibra óptica de la marca Oriel.

Es importante mencionar que el coeficiente de reflexión  $r_f$  y el coeficiente de absorción  $\kappa_L$  son distintos para cada fibra ya que el núcleo de las fibras es manufacturado por fabricantes diferentes lo que resulta en distintos grados de pureza para el  $\text{SiO}_2$ . También resulta importante aclarar que se presentan dos coeficientes de absorción  $\kappa_L$  para cada fibra. Esto se debe a que el coeficiente de absorción depende de la distribución espectral de la fuente luminosa,

$$\kappa_L = -\frac{1}{L_{fo}} \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{G_{L\lambda}}{G_{0\lambda}}\right) d\lambda. \quad (4.36)$$

y en este caso la fuente luminosa es una lámpara incandescente de corriente alterna por lo que al cambiar el voltaje suministrado implica cambiar también la distribución espectral.

Por último, la eficiencia óptica de transmisión  $\eta_{ro}[-]$  de la fibra óptica contempla la eficiencia de transmisión (relación (3.165))

$$\eta_r = \exp(-\kappa_L L_{fo}) \quad (4.37)$$

y la fracción de la reflexión a la entrada

$$(1 - r_f), \quad (4.38)$$

de tal suerte que se tiene (Snyder y Love, 1983),

Voltaje[V]	$\kappa_L [m^{-1}]$	$r_f [-]$
115	$\kappa_{LA} = 0.252 \pm 0.0112$	$r_{fA} = 0.118 \pm 0.0045$
	$\kappa_{LB} = 0.243 \pm 0.0125$	$r_{fB} = 0.137 \pm 0.0047$
100	$\kappa_{LA} = 0.298 \pm 0.0184$	$r_{fA} = 0.093 \pm 0.0051$
	$\kappa_{LB} = 0.293 \pm 0.0195$	$r_{fB} = 0.124 \pm 0.0052$

Tabla 4.22: Coeficiente de absorción lineal y la fracción de la reflexión para las dos fibras ópticas.

$$\eta_{r_o} = (1 - r_f) \exp(-\kappa_L L_{f_o}) \quad (4.39)$$

y la incertidumbre asociada a la ecuación (4.39) la estimamos mediante

$$\dot{w}_{\eta_{r_o}} = \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial r_f} w_{r_f} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_L} w_{\kappa_L} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial L_{f_o}} w_{L_{f_o}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.40)$$

$$w_{\eta_{r_o}} = \left[ \left( (-e^{-\kappa_L L_{f_o}}) w_{r_f} \right)^2 + \left( -L_{f_o} e^{-\kappa_L L_{f_o}} w_{\kappa_L} \right)^2 + \left( -\kappa_L e^{-\kappa_L L_{f_o}} w_{L_{f_o}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.41)$$

En la siguiente sección presentamos el desarrollo experimental para el estudio del comportamiento térmico de la fibra óptica durante la transmisión de flujo radiativo concentrado.

## 4.6.2 Mediciones de temperatura como función de la posición y el tiempo

En esta sección reportamos las mediciones de temperatura de las dos fibra en estudio propuestas cuando éstas transportan flujo radiativo. Como mencionamos, la dependencia temporal y espacial de la temperatura es medida a través de termopares que son colocados sobre la superficie de la fibra óptica. Los datos experimentales de temperatura son recolectados por el sistema de adquisición de datos.

Para la recolección de datos experimentales de la temperatura en los dos tipos de fibras ópticas, utilizamos las fibras que cuentan con una longitud mayor (ver tabla 4.23).

Lumonics	$L_{f_o1A} = 1.578m$
Oriel	$L_{f_o1B} = 1.662m$

Tabla 4.23: Longitudes de las fibras ópticas utilizadas en el estudio del comportamiento térmico

Como mencionamos en las secciones previas, las fibras ópticas utilizadas fueron ambas instrumentadas con la misma configuración en el espaciamiento de los termopares, la que se indica en la tabla (4.24).

6 Termopares a la entrada	espaciados 0.025m
6 Termopares en la parte media	espaciados 0.080 m
4 Termopares al final	espaciados 0.160m

Tabla 4.24: Espaciamiento de los termopares para cada una de las fibras ópticas.

La idea de contar con el mismo espaciamiento de los termopares sobre la superficie de cada fibra es facilitar la comparación de los resultados experimentales obtenidos entre una y otra fibra.

Por otra parte, para llevar a cabo el experimento consideramos dos potencias radiativas de entrada para cada una de las dos fibras. En la tabla (4.25) indicamos las potencias radiativas correspondientes a un suministro de voltaje a la lámpara de 115V y 100V, respectivamente.

Voltaje[V]	$G_0 [Wm^{-2}]$
115	$G_0 = 7710 \pm 106.6$
100	$G_0 = 5780 \pm 117.0$

Tabla 4.25: Potencias radiativas de entrada.

De esta manera consideramos cuatro casos de estudio. Dos fibras ópticas distintas sometidas cada una a dos potencias radiativas de entrada diferentes.

Para cada uno de los cuatro casos de estudio realizamos cinco corridas experimentales. Las mediciones de temperatura en cada corrida experimental las tomamos cada 60 segundos hasta que la fibra óptica llegaba al estado permanente.

Es importante aclarar que, al igual que en el modelo teórico, en las cinco corridas experimentales para cada uno de los cuatro casos consideramos la diferencia de temperatura de la fibra óptica con respecto a la temperatura del medio ambiente, de esta manera

$$\Delta T = T(z, t) - T_{amb}, \quad (4.42)$$

es decir, a cada una de las mediciones de temperatura restamos la temperatura ambiente correspondiente.

En las figuras 4.7 y 4.8, graficamos  $\Delta T$  experimental para la fibra óptica de la marca Lumonics cuando la lámpara opera a 115V y 100V, respectivamente.

En las figuras 4.9 y 4.10 graficamos  $\Delta T$  experimental para la fibra óptica de la marca Oriel cuando la lámpara opera a 115V y 100V, respectivamente.

En estas cuatro figuras, sólo reportamos el comportamiento térmico para los primeros 10 centímetros a la entrada de cada una de las fibras ópticas, ya que la temperatura no cambia significativamente en el resto de la fibra.

Como se observa en cada una de las cuatro figuras, al graficar las cinco corridas experimentales, se presenta una ligera variación de temperatura entre una y otra corrida experimental. Esto se debe principalmente a que el coeficiente de transferencia hacia los alrededores cambia ligeramente entre una corrida experimental y otra. En el apéndice C se discute la manera de estimar el error en la medición de temperatura sobre la superficie de la fibra óptica. Es importante mencionar que la incertidumbre asociada en la medición de temperatura usando termopares sin enbeber resulta prácticamente igual que la incertidumbre de termopares embebidos, esto es 0.3°C. Se puede hablar entonces que la incertidumbre asociada en la mediciones de temperatura no es mayor que 0.3°C.

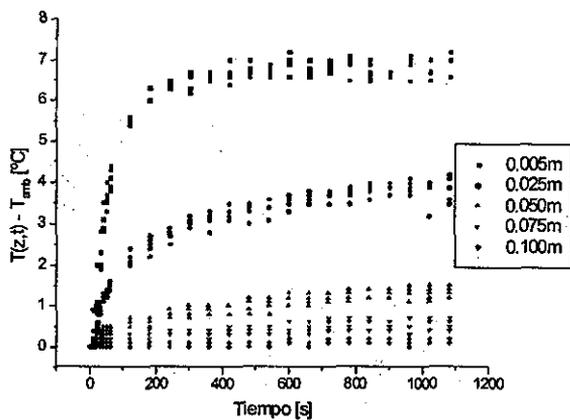
En la siguiente sección presentamos la comparación entre los resultados experimentales y los resultados obtenidos mediante el modelo teórico desarrollado en el capítulo anterior.

## 4.7 Resultados y conclusiones

Con base en los resultados experimentales obtenemos los valores de la eficiencia de transmisión (ecuación (3.165)) y los valores de la eficiencia óptica de transmisión (ecuación (4.39)). En las tablas 4.26 y 4.27 reportamos la eficiencia de transmisión y la eficiencia óptica de transmisión para la fibra óptica de la marca Lumonics y para la fibra de la marca Oriel, respectivamente.

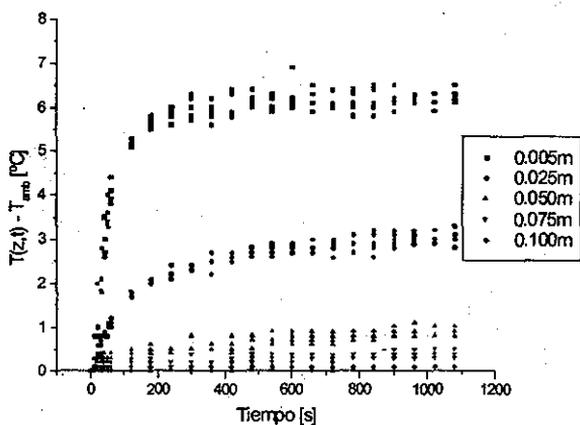
Voltaje[V]	$\kappa_{LA} [m^{-1}]$	$L_{foA}[m]$	$\eta_{TA}$	$\eta_{roA}$
115	0.252 ± 0.0112	1.578 ± 0.0005	0.672 ± 0.0095	0.592 ± 0.0118
		0.159 ± 0.0005	0.958 ± 0.0018	0.847 ± 0.0034
		0.094 ± 0.0005	0.977 ± 0.0010	0.861 ± 0.0025
100	0.298 ± 0.0184	1.578 ± 0.0005	0.625 ± 0.0055	0.566 ± 0.0094
		0.159 ± 0.0005	0.951 ± 0.0024	0.865 ± 0.0030
		0.094 ± 0.0005	0.972 ± 0.0013	0.881 ± 0.0023

Tabla 4.26: Eficiencia de transmisión y eficiencia óptica de transmisión para la fibra óptica de la marca Lumonics.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.7: Mediciones de temperatura para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.8: Mediciones de temperatura para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

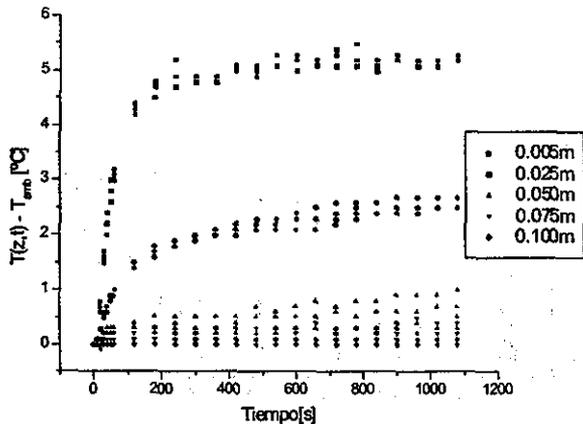


Figura 4.9: Mediciones de temperatura para la fibra óptica de Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada.

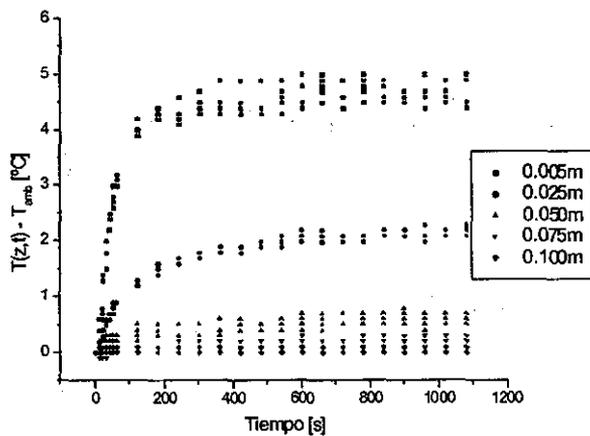


Figura 4.10: Mediciones de temperatura para la fibra óptica de Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V), para las cinco corridas experimentales y las primeras cinco distancias a la entrada.

Voltaje[V]	$\kappa_{LB} [m^{-1}]$	$L_{foB} [m]$	$\eta_{rB}$	$\eta_{roB}$
115	$0.243 \pm 0.0125$	$1.662 \pm 0.0005$	$0.667 \pm 0.0095$	$0.576 \pm 0.0125$
		$0.165 \pm 0.0005$	$0.957 \pm 0.0019$	$0.829 \pm 0.0037$
		$0.127 \pm 0.0005$	$0.970 \pm 0.0012$	$0.837 \pm 0.0023$
100	$0.293 \pm 0.0195$	$1.622 \pm 0.0005$	$0.615 \pm 0.0093$	$0.544 \pm 0.0105$
		$0.165 \pm 0.0005$	$0.950 \pm 0.0045$	$0.834 \pm 0.0066$
		$0.127 \pm 0.0005$	$0.963 \pm 0.0029$	$0.844 \pm 0.0035$

Tabla 4.27: Eficiencia de transmisión y eficiencia óptica de transmisión para la fibra óptica de la marca Oriel.

1

Además, en las tablas 4.26 y 4.27 incluimos el cálculo para  $\eta_r$  y  $\eta_{ro}$  al considerar un metro de longitud de fibra óptica. Esto con la finalidad de comparar los resultados de ambas fibra ópticas.

Al comparar los coeficientes de absorción lineal de la fibra óptica Lumonics y de la fibra Oriel observamos que el coeficiente de la fibra Oriel es menor que el coeficiente de la fibra Lumonics. Por tanto es de esperar que la eficiencia de transmisión de la marca Oriel es mayor que la eficiencia de transmisión de la marca Lumonics,

$$\eta_{rB} > \eta_{rA},$$

como lo muestran los resultados experimentales.

Sin embargo, al incluir las pérdidas por reflexión a la entrada de las fibras, observamos que la fibra óptica de la marca Oriel presenta una eficiencia óptica de transmisión menor que la fibra óptica de la marca Lumonics,

$$\eta_{roB} < \eta_{roA}.$$

Por otro lado, a partir de los datos experimentales obtenemos la distribución espacial y temporal de la temperatura sobre la superficie de cada una de las fibras ópticas.

Para estimar el comportamiento térmico de las fibras ópticas consideramos los valores promedio de las cinco mediciones de temperatura para cada caso de estudio. De esta manera obtenemos para diferentes posiciones a lo largo de la fibra la evolución temporal de la temperatura.

En las figuras 4.11 y 4.12 reportamos la comparación del comportamiento térmico de la fibra óptica de la marca Lumonics. La figura 4.11 corresponde a un suministro a la lámpara de 115V, mientras que la figura 4.12 corresponde a un suministro de 100V. Los símbolos corresponden a las primeras cinco temperaturas a la entrada de la fibra.

En las figuras 4.13 y 4.14 hacemos lo propio para la fibra óptica de la marca Oriel.

Además, en las gráficas 4.11 a 4.14 incluimos la emulación térmica de las fibras ópticas llevada a cabo mediante el modelo teórico desarrollado en el capítulo 3. Incluimos mediante líneas continuas los resultados de dicho modelo para las mismas distancias a las cuales fueron colocados los termopares.

Al comparar el comportamiento térmico de la fibra óptica Lumonics (figuras 4.11 y 4.12) y el comportamiento de la fibra óptica Oriel (figuras 4.13 y 4.14), notamos que la temperatura de la fibra Lumonics es mayor que la temperatura de la fibra Oriel, pese a que se tienen prácticamente las mismas condiciones de operación en ambas fibras. Concluimos que la fibra óptica Lumonics tiene un incremento de temperatura mayor que la fibra de Oriel debido a que el coeficiente de absorción  $\kappa_L$  de la fibra Lumonics es mayor que el coeficiente de la fibra Oriel. En otras palabras la potencia radiativa es absorbida en mayor cantidad por la fibra de Lumonics que por la fibra de Oriel.

Cabe mencionar que el comportamiento térmico de las fibras ópticas para la transmisión de energía radiativa no depende de la longitud de la fibra utilizada, esto se debe principalmente a dos razones: la primera es que el flujo radiativo es absorbido intensamente en sus componentes espectrales a la

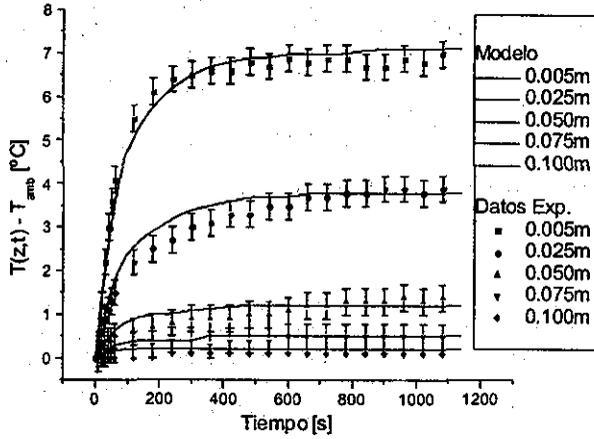


Figura 4.11: Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V).

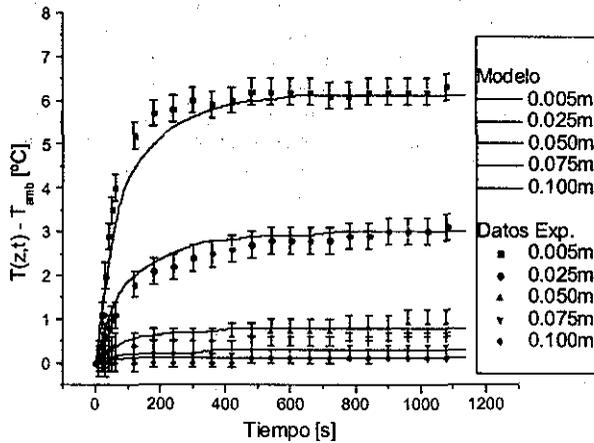


Figura 4.12: Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Lumonics (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V).

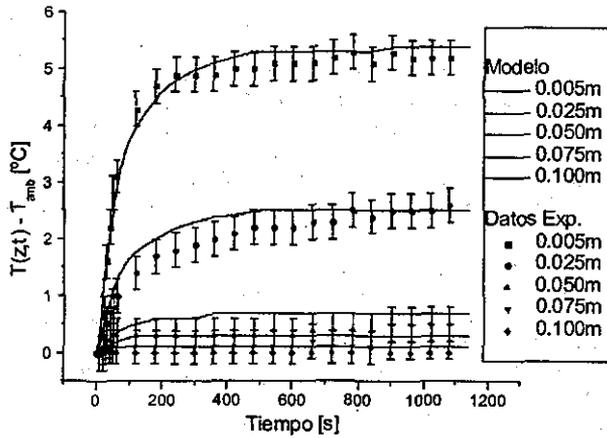


Figura 4.13: Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 115V).

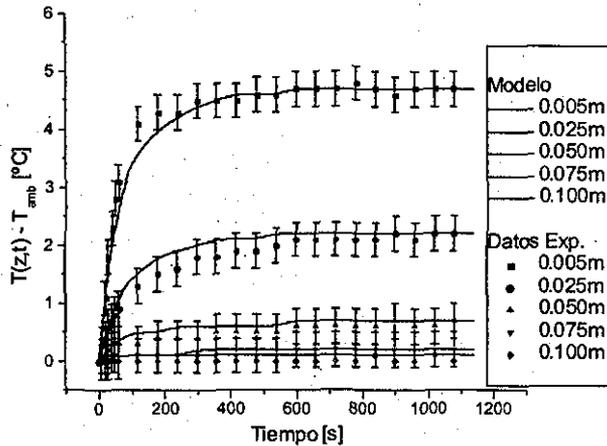


Figura 4.14: Resultados experimentales y emulación teórica para la fibra óptica Oriel (el voltaje suministrado a la lámpara es 100V).

entrada, así en el resto de la fibra se presenta un flujo radiativo que es ligeramente absorbido, dando como resultado lo que ya mencionamos, que la temperatura a la entrada sea mayor; la segunda se debe a que la difusividad térmica  $\alpha = k/\rho C_p$  es muy baja para ambas fibras (del orden  $1 \times 10^{-6} m^2 s^{-1}$ ), y aún cuando se tiene un gradiente de temperatura entre la entrada y la salida, la difusión de calor por conducción apuntando a lo largo de la dirección de propagación se presenta de manera débil.

Por otra parte, es importante mencionar que ambas fibras alcanzan el estado permanente aproximadamente 900 segundos después de iniciar el experimento. La respuesta transitoria principalmente depende de la transferencia de calor hacia los alrededores en la parte longitudinal de las fibras. En los casos de estudios presentados la respuesta transitoria desaparece de manera rápida debido principalmente a las potencias radiativas bajas que son utilizadas, así las fibras ópticas alcanzan el equilibrio térmico con los alrededores en lapso de tiempo corto.

La densidad  $\rho$ , la capacidad calorífica  $C_p$  y el rango de valores para el coeficiente de transferencia  $h$  están reportados en la literatura como indicamos anteriormente. Para llevar a cabo la emulación del comportamiento térmico de ambas fibras ópticas modificamos en un rango pequeño los valores de  $\rho$ ,  $C_p$  y  $h$  lo que nos permite reproducir el comportamiento térmico de manera adecuada.

En la tabla 4.28 presentamos los parámetros físicos utilizados en la emulación térmica de la fibra óptica Lumonics (*Lumonics, 1999*) y en la tabla 4.29 presentamos los parámetros físicos utilizados en la emulación térmica de la fibra óptica Oriel (*Oriel, 1999*)

115V 100V	$G_0 = 7710.0 [Wm^{-2}]$ $5780.0 [Wm^{-2}]$	$r_f = 0.118 [-]$ $0.093 [-]$	$\kappa_L = 0.252 [m^{-1}]$ $0.298 [m^{-1}]$
$h_0 = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k = 1.70 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_n = 0.00050 [m]$
$h_L = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k_1 = 1.40 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_1 = 0.00055 [m]$
$h_R = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k_2 = 1.40 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_2 = 0.00060 [m]$
$\rho = 2500 [kgm^{-3}]$		$C_p = 1800 [Jkg^{-1}K^{-1}]$	$L_{fo} = 1.578 [m]$

Tabla 4.28: Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica Lumonics.

115V 100V	$G_0 = 7710.0 [Wm^{-2}]$ $5780.0 [Wm^{-2}]$	$r_f = 0.137 [-]$ $0.124 [-]$	$\kappa_L = 0.243 [m^{-1}]$ $0.293 [m^{-1}]$
$h_0 = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k = 1.70 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_n = 0.00050 [m]$
$h_L = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k_1 = 1.40 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_1 = 0.00055 [m]$
$h_R = 7.5 [Wm^{-2}K^{-1}]$		$k_2 = 0.24 [Wm^{-1}K^{-1}]$	$R_2 = 0.00060 [m]$
$\rho = 2600 [kgm^{-3}]$		$C_p = 1900 [Jkg^{-1}K^{-1}]$	$L_{fo} = 1.662 [m]$

Tabla 4.29: Parámetros físicos considerados para la emulación térmica de la fibra óptica Oriel.

Cabe aclarar que el material de la cubierta protectora de la fibra óptica de la marca Oriel es Tefzel (*Dupont, 2000*) por esta razón consideramos la conductividad térmica  $k_2 = 0.24 [Wm^{-1}K^{-1}]$ .

Notamos en las figuras 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14, que el comportamiento térmico de ambas fibras durante el estado permanente se reproduce satisfactoriamente mediante el modelo teórico desarrollado. Notamos además, que el modelo reproduce con una exactitud limitada los resultados experimentales en el estado transitorio.

No obstante que el modelo teórico desarrollado es un modelo sencillo y simplificado, reproduce apropiadamente la física involucrada en la transmisión de energía radiativa a través de fibras ópticas.

Por tanto, los datos experimentales nos permiten validar el modelo teórico desarrollado para la transferencia de calor por conducción, la absorción de energía radiativa y las pérdidas de calor hacia los alrededores para una fibra óptica.

Al considerar los resultados del capítulo 2, debemos tomar en cuenta que el comportamiento de la absorción es lineal para las intensidades logradas en flujos radiativos solares. Esta situación se traduce en que el modelo teórico desarrollado no demanda considerar los efectos no lineales del coeficiente de absorción y promete emular adecuadamente el comportamiento térmico de las fibras ópticas.

Entonces, para llevar a cabo la emulación del comportamiento de una fibra óptica durante la transmisión de energía solar mediante el modelo teórico desarrollado, lo que se requiere conocer es el coeficiente de absorción<sup>4</sup>  $\kappa_L$  y la fracción de la reflexión a la entrada  $r_f$  para el espectro de radiación solar y los valores de los parámetros físicos  $\rho$ ,  $C_p$  y  $h$ .

Es claro que la posibilidad de transferir energía solar concentrada de un colector a un receptor remoto a través de fibras ópticas de SiO<sub>2</sub> ofrece una amplia gama de usos y aplicaciones como mencionamos en los antecedentes.

Como un ejemplo, en el capítulo siguiente analizamos el uso de fibras ópticas acopladas a un espejo parabólico para la transformación de energía solar en potencia mecánica. Estudiamos un sistema Colector/Stirling donde al remover la máquina Stirling de la estructura del colector y colocarla a unos cuantos metros de distancia evitamos estructuras de diseño complejas y logramos disminuir las pérdidas por sombreado. Diseñamos un absorbedor cerrado que reduce considerablemente las pérdidas por radiación, conducción y convección, procurando una eficiencia más alta.

---

<sup>4</sup> En la literatura se reportan los valores de la atenuación en  $dB_{per}$ . Kribus *et al.* (Kribus *et al.*, 2000) recopilaron los valores de atenuación en el espectro solar para 12 fibras ópticas comerciales.

Cabe recordar que  $dB_{per}$  está relacionado con el coeficiente de absorción mediante

$$\kappa_L = \frac{\ln(10)}{10} dB_{per}.$$

The first part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow \infty$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The second part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow 0$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow 0$ .

The third part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow \infty$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The fourth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow 0$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow 0$ .

The fifth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow \infty$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The sixth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow 0$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow 0$ .

The seventh part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow \infty$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The eighth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow 0$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow 0$ .

The ninth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow \infty$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The tenth part of the paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the solutions of the system (1) as  $t \rightarrow 0$ . It is shown that the solutions of the system (1) are bounded and tend to zero as  $t \rightarrow 0$ .

## Capítulo 5

# Fibras ópticas para un sistema miniplato parabólico/máquina Stirling: una posible aplicación

### 5.1 Introducción

La principal dificultad en el uso de la energía solar es su baja densidad de energía. Por esta razón, se propone comúnmente el uso de concentradores que incrementan la densidad de flujo radiativo por unidad de área. Si pensamos en el uso de fibras ópticas para el transporte del flujo radiativo solar concentrado obtenemos como principales ventajas la disminución de las pérdidas de calor por radiación y por convección hacia los alrededores durante el transporte de energía, sin olvidar desde luego que las fibras ópticas simplifican el diseño estructural del mecanismo usado para seguir al Sol.

Por otra parte, en la literatura una importante cantidad de estudios concernientes a máquinas térmicas están dirigidos a determinar los límites reales de operación de la potencia generada y la eficiencia de conversión. En estos estudios se analizan las fuentes de irreversibilidad debidas a la transferencia de calor y a la fricción. Además, algunos de estos estudios están especializados en analizar máquinas térmicas solares para convertir energía solar en trabajo (*i.e.* Gordon 1988, De Vos 1992, De Vos et al. 1993, Goktum 1996, Badescu et al. 1997, Navarrete-González et al. 1997, Badescu 1998 y Salah 1999):

En 1975, Curzon y Alborn (*Curzon y Ahlborn, 1975*) estudiaron un modelo termodinámico endorreversible, el cual consiste en un ciclo de Carnot con transferencia de calor finita (la cual obedece la ley de Newton del enfriamiento) en las ramas isotérmicas. Con base en el modelo propuesto por Curzon y Alborn, en este capítulo analizamos desde el punto de vista de la primera y de la segunda leyes de la termodinámica, un sistema de conversión de energía solar. Este sistema cuenta con un colector solar de concentración, un manojo de fibras ópticas para la transmisión del flujo solar concentrado y una máquina térmica de ciclo Stirling que es activada por la energía solar transportada por las fibras. Diseñamos la parte correspondiente al absorbedor/calentador del sistema de conversión tomando en cuenta las irreversibilidades internas y externas del sistema de conversión.

Cabe aclarar que uno de los principales problemas en las máquinas térmicas solares consiste en la determinación de la temperatura de operación óptima del sistema, ya que la eficiencia del colector disminuye conforme la temperatura de operación aumenta, mientras que la eficiencia de la máquina térmica se incrementa cuando se aumenta la temperatura de operación.

Mediante un análisis basado en la segunda ley de la termodinámica, estudiamos la eficiencia total

máxima  $\eta_{s,\max}$  del sistema de conversión solar,

$$\eta_{s,\max}(T_{AH}) = \eta_{c,\dot{q}_{AH,\max}}(T_{AH}) \eta_{e,P\max}(T_{AH}) \quad (5.1)$$

donde  $\eta_{c,\dot{q}_{AH,\max}}$  es la eficiencia máxima del colector solar a máxima transferencia de energía y  $\eta_{e,P\max}$  es la eficiencia térmica de la máquina Stirling a máxima potencia. En este punto consideramos que  $\eta_{c,\dot{q}_{AH,\max}}$  y  $\eta_{e,P\max}$  dependen de la temperatura  $T_{AH}$  del absorbedor/calentador.

Mediante la ecuación (5.1) obtenemos la temperatura óptima a la cual debe operar el colector solar y la máquina Stirling para obtener la máxima eficiencia de sistema de conversión (Goktum, 1996),

$$\frac{\partial \eta_s(T_{AH})}{\partial T_{AH}} = 0, \quad (5.2)$$

esta temperatura  $T_{AH}$  tiene lugar en el absorbedor/calentador. En otras palabras, la ecuación (5.2) nos asegura entonces la máxima eficiencia del sistema de conversión obtenida a una temperatura de operación óptima  $T_{AH\text{opt}}$ .

## 5.2 Ciclo Stirling: análisis termodinámico de tiempo finito

Recientemente el interés por la máquina de ciclo Stirling está creciendo. Esta máquina térmica ofrece la posibilidad de transformar la radiación solar en potencia mecánica de manera directa. El trabajo producido puede ser usado para producir electricidad, potencia de enfriamiento, calefacción, etc. La máquina de ciclo Stirling ha encontrado una gran aceptación en aplicaciones extraterrestres puesto que transforma directamente la energía del Sol.

Algunos trabajos relacionados con la máquina de ciclo Stirling están dirigidos a encontrar métodos para obtener la máxima potencia a la salida y su correspondiente eficiencia térmica (*i.e.* Erbay y Yavuz 1997, Wu et al. 1998, Costea y Feit 1998, Blank 1998, Costea et al. 1999, Kaushik y Kumar, 2000 y Chen 1997).

Comencemos por describir el ciclo Stirling con regenerador<sup>1</sup>.

En la máquina Stirling, una cantidad fija de gas está contenida en un volumen de trabajo. Una parte del gas de trabajo está contenido en un espacio pequeño, el cual es mantenido a temperatura alta  $T_c$  y otra parte del mismo gas está contenido en otro espacio pequeño, pero mantenido a una temperatura baja  $T_f$ . Por medio del movimiento de un pistón parte del gas es transferido de adelante hacia atrás entre los espacios *caliente* y *frío* (ver figura 5.1). Cuando la mayor parte del gas está en la región caliente, la presión aumenta y cuando el gas es transferido de regreso a la región fría, la presión disminuye. El pistón que lleva acabo dicha tarea se denomina desplazador. La presión alta mueve un segundo pistón donde se obtiene la potencia mecánica (ver figura 5.1). Sólo hasta que el gas se regresa a la región fría la presión nuevamente decae y el gas se comprime a su volumen original revirtiendo el movimiento del pistón que entrega la potencia mecánica. Debido a que la presión es menor durante esta parte del ciclo, la fuerza del pistón que entrega la potencia mecánica es menor que durante el movimiento de expansión.

En una máquina de ciclo Stirling o simplemente máquina Stirling, es común colocar un regenerador entre el espacio caliente y el espacio frío. El regenerador es un intercambiador de calor y facilita a su vez un almacenamiento de energía. La parte interna del regenerador está constituida, en la mayoría de los casos, por un tipo de esponja metálica a través de la cual el gas de trabajo fluye por la acción del desplazador. La acción del regenerador es muy fácil de entender. Imaginemos primero

<sup>1</sup> Una descripción más detallada de la máquina de ciclo Stirling se puede consultar en la referencia (West, 1986).

el comportamiento del gas sin la presencia del regenerador. El gas a temperatura alta deberá ser transferido, con la ayuda del desplazador, directamente de la región de expansión hasta la región de compresión donde deberá ser enfriado. Entonces se exhala el calor desechado durante el proceso de enfriamiento y por tanto se pierde. Cuando el gas es devuelto a la región de expansión para ser nuevamente calentado requiere una mayor cantidad de calor que extrae directamente de la fuente. De tal manera que se requiere de calor extra que más tarde será desechado durante el proceso de enfriamiento. Debido a esta situación la eficiencia de la máquina disminuye. Mientras tanto, un regenerador mantiene un gradiente de temperatura a lo largo de éste, ya que el gas de trabajo pasa de la región caliente donde ocurre la expansión a la región fría donde ocurre la compresión. De esta manera el gas se enfria gradualmente cediendo calor al metal del regenerador. Así, una vez que el gas abandona el regenerador ya ha bajado su temperatura, disminuyendo la cantidad de calor desechado en la región fría. Al regreso del gas hacia la región caliente, el gas se calienta gradualmente al transferirse la energía almacenada que dejó a su paso cuando se encontraba pasando en dirección opuesta. De esta manera el gas emerge en el espacio caliente a mayor temperatura que sin el regenerador, disminuyendo así la cantidad de calor suministrado por la fuente. El regenerador permite tener una eficiencia cercana a la eficiencia del ciclo de Carnot (West, 1986). En la figura 5.1 presentamos un esquema de la máquina de ciclo Stirling con regenerador. En la figura 5.1  $T_{AH}$ ,  $T_H$ ,  $T_L$  y  $T_0$  son las temperaturas del absorbedor/calentador, del calentador, del enfriador y del sumidero de calor, respectivamente<sup>2</sup>.

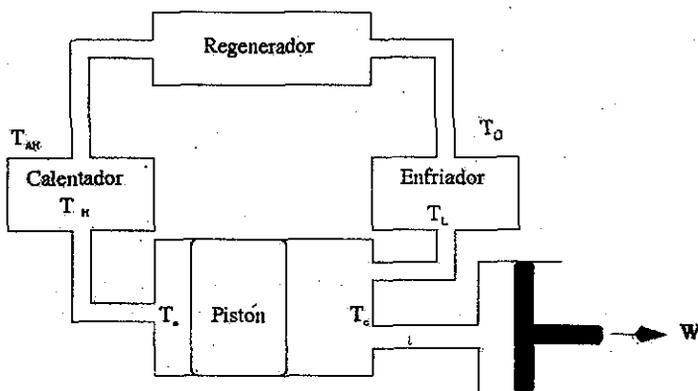


Figura 5.1: Esquema de la máquina Stirling, (Adaptado de West, 1986).

Por otro lado, en la figura 5.2 presentamos el diagrama de temperatura-entropía para la máquina de ciclo Stirling. En esta figura se observa que, durante el proceso isotérmico de eyección de calor  $a-b$ , la temperatura  $T_c$  permanece constante y se considera que la eyección ocurre durante un tiempo finito  $t_{ab}$ . De manera similar, en el proceso de adición de calor  $c-d$  se considera también un proceso isotérmico con temperatura  $T_c$  constante que se lleva a cabo en un tiempo finito  $t_{cd}$ . Por tanto, los

<sup>2</sup> En este punto consideramos  $T_0$  como la temperatura del sumidero de calor. Esta temperatura puede corresponder a la temperatura ambiente  $T_{amb}$  o bien a cualquiera que permita remover la energía hacia el sumidero.

procesos de transferencia de calor  $a - b$  y  $c - d$  son procesos térmicos irreversibles. El proceso de adición de calor  $c - d$  se realiza por una diferencia de temperatura de  $T_{AH} - T_H$ . Similarmente durante el proceso de remoción de calor  $a - b$ , la diferencia de temperaturas es  $T_L - T_0$ . El ciclo termodinámico está acotado entonces por las temperaturas  $T_H$  y  $T_L$ . Además suponemos que los procesos de regeneración  $d - a$  y  $b - c$  son procesos politrópicos reversibles. Es decir, las curvas  $d - a$  y  $b - c$  representan la dependencia entre la presión  $p$  y el volumen  $V$  en las transformaciones reversibles del gas de trabajo para el caso en que la cantidad de calor  $Q$  suministrada es proporcional a la elevación que experimenta la temperatura  $T$ .

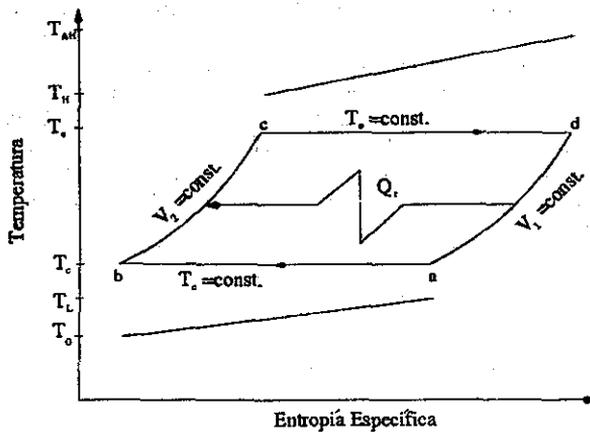


Figura 5.2: Diagrama temperatura-entropía para el ciclo Stirling (Adaptado de West, 1986).

Durante los procesos de regeneración  $d - a$  y  $b - c$ , con volúmenes constantes  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente, el gas de trabajo absorbe calor  $Q_e[J]$  y desecha calor  $Q_c[J]$ , de esta manera (Kaushik y Kumar, 2000)

$$Q_e = T_e \Delta S = n\varphi T_e \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (5.3)$$

y

$$Q_c = T_c \Delta S = n\varphi T_c \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (5.4)$$

donde  $\Delta S [JK^{-1}]$  es la producción de entropía,  $n [mol]$  es el número de moles del gas de trabajo,  $\varphi = 8.3145 Jmol^{-1}K^{-1}$  es la constante universal de los gases,  $V_2 [m^{-3}]$  es el volumen del calentador y  $V_1 [m^{-3}]$  es el volumen del enfriador.

En nuestro estudio consideramos un sistema que presenta una fuga de calor interna que se lleva a cabo a través de la carcasa de la máquina Stirling, dos intercambiadores de calor que transfieren calor durante un tiempo finito y una máquina de ciclo Stirling endorreversible. En la figura 5.3 presentamos el esquema del modelo para la máquina térmica solar.

Para la transferencia de calor (ley de Newton del enfriamiento) la razón de intercambio es proporcional a la media logarítmica de la diferencia de temperatura  $DMLT$  (Blank, 1998 y Kaushik y

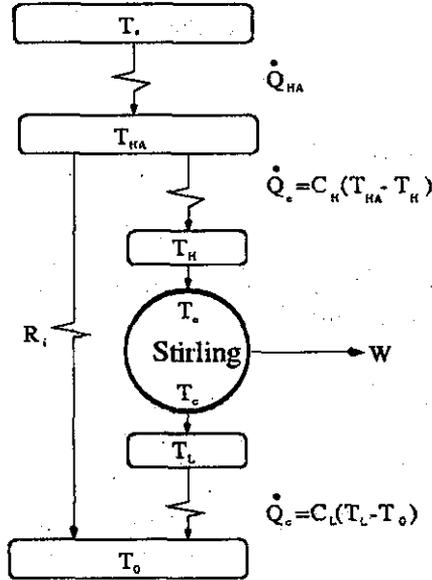


Figura 5.3: Esquema de la configuración de la máquina térmica solar.

*Kumar, 2000*), i.e.

$$Q_e = (UA)_H (DMLT)_H t_{cd} = C_H (T_{AH} - T_H) t_{cd}, \quad (5.5)$$

y

$$Q_c = (UA)_L (DMLT)_L t_{ab} = C_L (T_L - T_o) t_{ab}, \quad (5.6)$$

donde  $(UA)_H$  y  $(UA)_L$  son las conductancias térmicas (coeficiente global de pérdidas  $U$  por el área  $A$ ) para la transferencia de calor de la fuente (debida a la diferencia de temperaturas  $T_{AH} - T_H$ ) y la transferencia de calor del sumidero (debida a la diferencia de temperaturas  $T_L - T_o$ ), respectivamente.  $C_H$  y  $C_L$  son las capacidades de calor de la fuente y del sumidero, respectivamente.  $(DMLT)_H$  y  $(DMLT)_L$  están definidos como (*Blank, 1998* y *Kaushik y Kumar, 2000*),

$$(DMLT)_H = \frac{[(T_{AH} - T_e)(T_H - T_e)]}{\ln \frac{T_e - T_o}{T_c - T_L}}, \quad (5.7)$$

y

$$(DMLT)_L = \frac{[(T_{AH} - T_e)(T_H - T_e)]}{\ln \frac{T_e - T_o}{T_c - T_L}}. \quad (5.8)$$

Para obtener las temperaturas  $T_H$  y  $T_L$  resolvemos las ecuaciones (5.5)-(5.8), (*Blank, 1998*),

$$T_H = T_e + (T_{AH} - T_e) \exp(-N_H), \quad (5.9)$$

y

$$T_L = T_c - (T_c - T_L) \exp(-N_L), \quad (5.10)$$

donde  $N_H = (UA)_H/C_H$  y  $N_L = (UA)_L/C_L$  son el número de unidades transferidas (*NUT's*) por la fuente y por el sumidero, respectivamente.

De tal suerte que al sustituir las ecuaciones (5.9) y (5.10) en las ecuaciones (5.5) y (5.6) nos conduce a (*Blank, 1998*),

$$Q_c = C_H \epsilon_H (T_{AH} - T_c) t_{cd} = xK (T_{AH} - T_c) t_{cd}, \quad (5.11)$$

y

$$Q_c = C_L \epsilon_L (T_c - T_0) t_{cb} = (1-x)K (T_c - T_0) t_{cb}, \quad (5.12)$$

donde  $\epsilon_H = 1 - \exp(-N_H)$  y  $\epsilon_L = 1 - \exp(-N_L)$  son las efectividades del intercambiador de calor para la fuente y para el sumidero, respectivamente. En las ecuaciones (5.11)-(5.12) tomamos en cuenta la conductancia térmica total  $K$  en la máquina Stirling, definida como

$$K \equiv C_H \epsilon_H + C_L \epsilon_L, \quad (5.13)$$

así como la porción  $x$  para la conductancia  $K$ , definida tal que

$$C_H \epsilon_H = xK, \quad (5.14)$$

y

$$C_L \epsilon_L = (1-x)K. \quad (5.15)$$

Durante el proceso de regeneración (debido a la diferencia de temperatura ( $T_c - T_e$ ) como lo muestran las curvas  $d-a$  y  $b-c$  en la figura 5.2) la transferencia de calor es  $Q_r$  y la escribimos como, (*Blank, 1998*),

$$Q_r = nC_v \epsilon_r (T_c - T_e), \quad (5.16)$$

donde  $C_v [Jmol^{-1}K^{-1}]$  es el calor específico a volumen constante del gas de trabajo y  $\epsilon_r$  es la efectividad del regenerador. Además podemos escribir las pérdidas de calor en el regenerador para un ciclo como (*Blank, 1998*),

$$Q_{per,r} = nC_v (1 - \epsilon_r) (T_c - T_e). \quad (5.17)$$

La transferencia de calor que tiene lugar directamente a través de la carcasa de la máquina Stirling representa una fuga de calor  $Q_i$  y es otra fuente de irreversibilidad. En este punto consideramos la transferencia de calor de la forma,

$$Q_i = \frac{1}{R_i} (T_{AH} - T_0), \quad (5.18)$$

donde  $R_i$  es la resistencia térmica a través de la carcasa (producto de la diferencia de temperatura  $T_{HA}$  y  $T_0$  ver figura 5.3)

Por otro lado, al considerar en la máquina térmica solar (ver figura 5.3) un proceso endorreversible<sup>3</sup> (*De Vos, 1992*), es decir, solamente la máquina de ciclo Stirling se modela como un proceso reversible, podemos escribir el cambio de entropía como  $\sum \dot{S} = 0$ , donde  $\dot{S} [WK^{-1}]$  es el flujo entrópico por unidad de tiempo. De tal suerte que mediante la segunda ley de la termodinámica escribimos

$$\frac{\dot{Q}_c}{T_c} - \frac{\dot{Q}_e}{T_e} = 0, \quad (5.19)$$

<sup>3</sup> El término endorreversible indica que se considera la parte central o medular de un proceso termodinámico como un proceso reversible, es decir, el cambio total de entropía generada que presenta dicho componente es igual con cero. Es importante indicar que las irreversibilidades se atañen a la interacción del sistema con los alrededores.

donde consideramos ahora las relaciones 5.11 y 5.12, así

$$\dot{Q}_e = \frac{Q_e}{t_{cd}} = xK(T_{AH} - T_e) \quad (5.20)$$

y

$$\dot{Q}_c = \frac{Q_c}{t_{ab}} = (1-x)K(T_c - T_0). \quad (5.21)$$

La expresión que representa matemáticamente el modelo de la máquina térmica solar (ver figura 5.3) y que establecemos mediante la primera ley de la termodinámica es,

$$Q_H = Q_e + Q_i + Q_{per,r}, \quad (5.22)$$

y

$$Q_L = Q_c + Q_i + Q_{per,r}, \quad (5.23)$$

donde  $Q_H$  es el calor neto que surge del absorbedor/calentador de la fuente de calor y  $Q_L$  es el calor neto hacia el sumidero. También a través de la primera ley de la termodinámica el trabajo es entonces,

$$W = Q_H - Q_L = Q_e - Q_c, \quad (5.24)$$

donde  $W[J]$  es el trabajo y por tanto la potencia a la salida  $P[W]$  por ciclo la estimamos mediante

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q_H - Q_L}{t} = \frac{Q_e - Q_c}{t_{cd} + t_{ab} + t_r}, \quad (5.25)$$

y la potencia no depende de  $Q_{per,r}$ , donde  $t$  es tiempo total del ciclo y  $t_r$  es el tiempo característico del proceso de regeneración ( $2t_r = t_{bc} + t_{da}$ ).

La temperatura del gas de trabajo varía con respecto al tiempo durante el proceso de regeneración de la forma (Chen, 1997)

$$\frac{dT}{dt} = \alpha, \quad (5.26)$$

donde  $\alpha[Ks^{-1}]$  es una constante de proporcionalidad que depende de las propiedades del gas en el regenerador. A partir de la ecuación (5.26) escribimos el tiempo  $t_r$  como

$$2t_r = \frac{t_{bc} + t_{da}}{2} = \frac{1}{\alpha}(T_e - T_c). \quad (5.27)$$

Al sustituir las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.11), (5.12) y (5.27) en la ecuación (5.25), la potencia a la salida  $P$  es ahora,

$$P = \frac{\left(\frac{T_e}{T_c} - 1\right)}{\left[\frac{T_e}{T_c} \frac{1}{xK(T_{AH} - T_e)} + \frac{1}{(1-x)K(T_c - T_0)} + a_1 \left(\frac{T_e}{T_c} - 1\right)\right]}, \quad (5.28)$$

donde

$$a_1 = \frac{2}{\alpha n \phi \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}. \quad (5.29)$$

Al considerar las ecuaciones (5.19)-(5.21) tenemos

$$\frac{T_c}{T_e} = \frac{(1-x)K(T_c - T_0)}{xK(T_{AH} - T_e)}, \quad (5.30)$$

y al tomar como factor común  $(1-x)K(T_c - T_0)$  en la parte derecha de la ecuación (5.28), la potencia  $P$  la reescribimos como

$$P = \frac{(1-x)KT_0 \left(\frac{T_c}{T_0} - 1\right) \left(\frac{T_c}{T_c} - 1\right)}{\left[2 + a_1(1-x)KT_0 \left(\frac{T_c}{T_0} - 1\right) \left(\frac{T_c}{T_c} - 1\right)\right]} \quad (5.31)$$

Para omitir la razón de temperaturas  $T_c/T_0$ , usamos el conjunto de ecuaciones (5.19)-(5.21) y encontramos,

$$\frac{T_c}{T_0} = 1 - x + x \frac{\Theta}{\Theta_c} \quad (5.32)$$

donde

$$\Theta = \frac{T_{AH}}{T_0}, \quad (5.33)$$

y

$$\Theta_c = \frac{T_c}{T_c}. \quad (5.34)$$

De tal suerte que al sustituir la ecuación (5.32) en la ecuación (5.31), nos conduce a establecer la potencia en la forma

$$P = \frac{x(1-x)KT_0 \left(\frac{\Theta}{\Theta_c} - 1\right) (\Theta_c - 1)}{\left[2 + a_1x(1-x)KT_0 \left(\frac{\Theta}{\Theta_c} - 1\right) (\Theta_c - 1)\right]} \quad (5.35)$$

La ecuación (5.35) muestra la potencia mecánica instantánea que puede maximarse a través de la razón de la conductancia  $x$  y la temperatura adimensional  $\Theta_c$ . El valor óptimo para la fracción de la conductancia térmica la obtenemos mediante  $\partial P/\partial x = 0$  y el valor óptimo de la razón de temperatura para el compartimiento endorreversible lo determinamos mediante  $\partial P/\partial \Theta_c = 0$  (Bejan, 1996).

El correspondiente valor óptimo para la porción de la conductancia térmica es

$$x = \frac{1}{2}, \quad (5.36)$$

y por tanto, determinamos para las ecuaciones (5.13) y (5.15) el valor óptimo

$$C_H \epsilon_H = C_L \epsilon_L. \quad (5.37)$$

De esta manera, la potencia mecánica es ahora,

$$P_{\max} = \frac{\frac{1}{2}KT_0 \left(\frac{\Theta}{\Theta_c} - 1\right) (\Theta_c - 1)}{\left[4 + a_1 \frac{1}{2}KT_0 \left(\frac{\Theta}{\Theta_c} - 1\right) (\Theta_c - 1)\right]} \quad (5.38)$$

Al resolver  $\partial P_{\max}/\partial \Theta_c = 0$  obtenemos el valor óptimo de la razón de temperatura  $T_c/T_c$

$$\Theta_{c,opt} = \Theta^{1/2} \quad (5.39)$$

o bien,

$$\left(\frac{T_c}{T_c}\right)_{opt} = \left(\frac{T_{AH}}{T_0}\right)^{1/2}, \quad (5.40)$$

de tal suerte que al usar las ecuaciones (5.19), (5.20), (5.21) y (5.40) obtenemos el valor óptimo para la diferencia de temperaturas a través de los intercambiadores de calor

$$(T_{AH} - T_e)_{opt} = \frac{1}{2} T_{AH} (1 - \Theta^{-1/2}), \quad (5.41)$$

y

$$(T_c - T_0)_{opt} = \frac{1}{2} T_0 (\Theta^{3/2} - 1). \quad (5.42)$$

Con base en las relaciones (5.20) y (5.21) escribimos

$$\frac{\dot{Q}_e (T_c - T_0)}{\dot{Q}_c (T_{AH} - T_e)} = \frac{xK}{(1-x)K}, \quad (5.43)$$

y al considerar  $x = 1/2$  y  $\dot{Q}_e / \dot{Q}_c = T_e / T_c$ , reescribimos la ecuación (5.43) como

$$\frac{T_{e,opt} (T_{c,opt} - T_0)}{T_{c,opt} (T_{AH} - T_{e,opt})} = 1, \quad (5.44)$$

de tal manera que al combinar las ecuaciones (5.41), (5.42) y (5.44) obtenemos los valores  $T_{e,opt}$  y  $T_{c,opt}$  óptimos (Blank, 1998)

$$T_{c,opt} = \frac{1}{2} T_0 (\Theta^{1/2} + 1) = \frac{1}{2} (\sqrt{T_{AH} T_0} + T_0), \quad (5.45)$$

y

$$T_{e,opt} = \frac{1}{2} T_{AH} (\Theta^{-1/2} + 1) = \frac{1}{2} (\sqrt{T_{AH} T_0} + T_{AH}). \quad (5.46)$$

Al sustituir la ecuación (5.39) en la ecuación (5.38) obtenemos la doblemente maximizada potencia instantánea,

$$P_{max,max} = \frac{\frac{1}{2} K T_0 (\Theta^{1/2} - 1)^2}{4 + \frac{1}{2} a_1 K T_0 (\Theta^{1/2} - 1)^2}. \quad (5.47)$$

Es importante mencionar que si se considera un proceso regenerativo instantáneo en el ciclo termodinámico, es decir,  $\alpha \rightarrow \infty$  y por tanto  $a_1 = 0$  de la ecuación (5.29), la ecuación (5.47) se simplifica a

$$P_{max,max} \leq \frac{1}{8} K T_0 (\Theta^{1/2} - 1)^2, \quad (5.48)$$

donde la desigualdad se establece por el hecho que el ciclo de Carnot alternante es el límite máximo para la potencia a la salida.

Una comparación de la potencia  $P_{max,max}$  obtenida en la ecuación (5.48) entre el ciclo de Carnot alternante

$$P_{max,max,carnot} = \frac{1}{4} K T_0 (\Theta^{1/2} - 1)^2, \quad (5.49)$$

y el ciclo de Carnot continuo muestra que

$$P_{max,max,Stirling(alternante)} \leq \frac{1}{2} P_{max,max,carnot(contiuuo)}. \quad (5.50)$$

Así, la potencia en el ciclo de Carnot alternante sólo puede ser igual o menor que un medio de la potencia del ciclo de Carnot continuo. En el ciclo continuo la adición y eyección de calor ocurre

simultáneamente, mientras que en el ciclo alternante la adición y eyección de calor toma un tiempo correspondiente a un medio del tiempo del ciclo. En tanto que en la máquina Stirling la potencia a la salida se ve disminuida por el tiempo que transcurre en los procesos de regeneración (Blank, 1998).

Por otro lado, la eficiencia térmica  $\eta_e$  de la máquina Stirling la estimamos mediante,

$$\eta_e \equiv \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_e - Q_c}{Q_e + Q_i + Q_{per,r}}, \quad (5.51)$$

o bien,

$$\eta_e = \frac{1 - \frac{Q_c}{Q_e}}{1 + \frac{Q_c}{Q_e} + \frac{\Delta Q_r}{Q_e}}, \quad (5.52)$$

de tal suerte que al sustituir las ecuaciones (5.3), (5.4), (5.17), (5.18) y (5.34), en la ecuación (5.52), escribimos

$$\eta_e = \frac{1 - \frac{1}{\Theta_c}}{1 + a_3 \frac{(T_{AH} - T_0)}{T_c} + a_2 \left(1 - \frac{1}{\Theta_c}\right)}, \quad (5.53)$$

donde

$$a_2 = \frac{C_v (1 - \epsilon_r)}{\varphi \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \quad (5.54)$$

y

$$a_3 = \frac{1}{R_i n \varphi \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)}. \quad (5.55)$$

Ahora, si consideramos el resultado de la ecuación (5.39), el cual es

$$\frac{(T_{AH} - T_0)}{T_{e,opt}} = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{T_0}{T_{AH}}}\right),$$

y el resultado presentado en la ecuación (5.46) estamos en la posibilidad de escribir la correspondiente eficiencia térmica a máxima potencia, a saber

$$\eta_{e,P,max} = \frac{1 - \Theta^{-1/2}}{1 + (2a_3 + a_2)(1 - \Theta^{-1/2})}. \quad (5.56)$$

Es importante notar que si consideramos  $a_2 = 0$  (la efectividad del regenerador  $\epsilon_r = 1$ , es decir una regeneración perfecta) y  $a_3 = 0$  (la resistencia térmica a través de la carcasa de la máquina Stirling es muy grande,  $R_i \rightarrow \infty$ ) es posible recuperar la eficiencia de un ciclo de Carnot endorreversible propuesto en el modelo de Curzon-Alborn (Curzon y Ahlborn, 1975), así

$$\eta_{e,P,max,Carnot} = 1 - \frac{1}{\Theta^{1/2}} = 1 - \sqrt{\frac{T_0}{T_{AH}}}. \quad (5.57)$$

Con base en la relación (5.25) mostramos que la potencia a la salida no depende de las pérdidas en el regenerador, sin embargo, ésta depende del tiempo para llevar a cabo el proceso regenerativo. Demostramos también que la eficiencia de la máquina Stirling con pérdidas en el regenerador y resistencia térmica a través de la carcasa y que opera a su máxima potencia a la salida es menor que la de un ciclo de Carnot endorreversible.

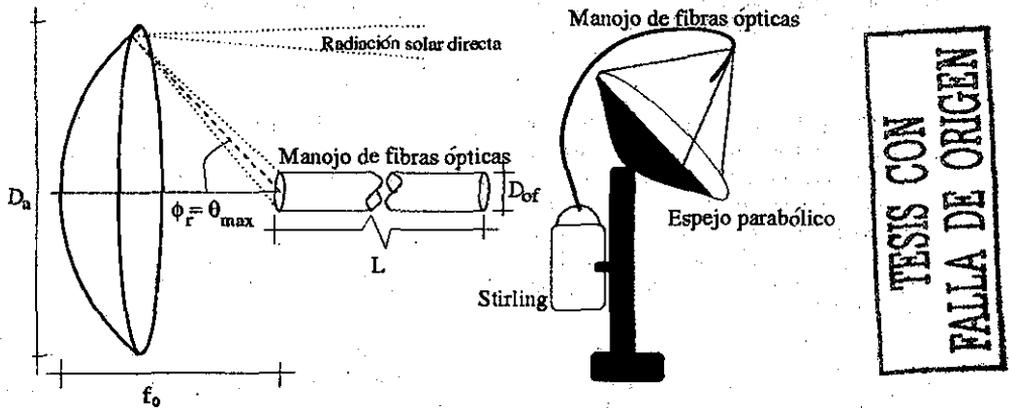
BOO BIRT  
MENDOZO RO ALLIAN

En la siguiente sección discutimos el uso de fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada. Diseñamos un absorbedor/calentador para la máquina térmica solar. Este absorbedor/calentador es una cavidad que permite confinar el flujo radiativo solar proveniente de los extremos finales del manajo de fibras ópticas, de tal suerte que al evacuar y aislar térmicamente dicha cavidad se reducen las pérdidas por convección, conducción y radiación.

### 5.3 Fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada

En esta sección estudiamos el acoplamiento entre un manajo de fibras ópticas y un espejo parabólico pequeño. Analizamos los parámetros geométricos óptimos para acoplar un manajo de fibras ópticas al espejo parabólico. Diseñamos el absorbedor/calentador de la máquina Stirling, este diseño asegura incrementar la eficiencia global del sistema.

Un plato parabólico con superficie especular permite concentrar los rayos solares en su plano focal donde el manajo de fibras ópticas se coloca (ver Figura 5.4).



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.4: Acoplamiento entre el manajo de fibras ópticas y el espejo parabólico para el transporte de energía solar concentrada.

En este punto consideramos el manajo de fibras ópticas para transportar la energía solar concentrada sugerido por Liang en 1997 (*Liang et al., 1997*) y presentado en el capítulo 1 de este trabajo. Este manajo de fibras consiste de 19 fibras ópticas con un diámetro de 1.5mm cada una. El diámetro efectivo  $D_{of}$  de la sección de entrada del manajo de fibras ópticas es de aproximadamente 7cm. Cabe mencionar que los primeros 2cm a la entrada de cada fibra están pulidos de forma hexagonal por lo que no hay espaciamiento entre una y otra fibra como ocurre típicamente en los manajos de fibras ópticas circulares. En la figura 5.5 presentamos el esquema del manajo de fibras ópticas que consideramos.

Por otro lado, recordemos que el núcleo de una fibra óptica es de un material con un índice de refracción  $n_1$ , el cual es más grande que el índice de refracción del revestimiento  $n_2$ . Esta condición

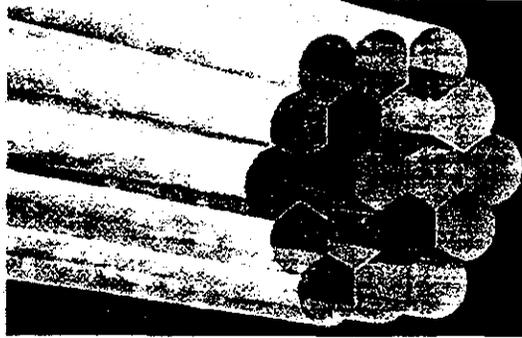


Figura 5.5: Sección de entrada del mazo de fibras ópticas (Adaptado de Liang, (1997)).

permite que la reflexión interna total ocurra para los rayos que inciden en un cono con ángulo  $\theta_{\max}$  (ver figura 4.1). La diferencia entre los índices de refracción del núcleo y del revestimiento determina el ángulo de admisión para la radiación incidente,

$$NA = \sin \theta_{\max} = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad (5.58)$$

donde  $NA[-]$  es la apertura numérica que representa la medida del ángulo de admisión  $\theta_{\max} [^\circ]$  de cada fibra. Es de esperar que el ángulo de admisión para todo el manojo de fibras ópticas es el mismo que el de una sola fibra óptica ya que la conjunción de cada fibra óptica se puede ver ahora como un único maso donde el ángulo  $\theta_{\max} [^\circ]$  el cual está dado por la relación entre los índices de refracción como lo indica la ecuación 5.58.

Por otra parte, la energía por unidad de tiempo  $\dot{Q}_p [W]$  que se encuentra en el plano receptor del plato parabólico, donde el manojo de fibras ópticas es colocado, se estima mediante (Jaramillo y del Rio, 1998)

$$\dot{Q}_p = \pi f_p^2 (\sin^2 \phi_r - \sin^2 \phi_s) \rho_m G_S \quad (5.59)$$

donde  $f_p [m]$  es la distancia focal del paraboloide,  $\rho_m [-]$  es la reflectancia de la superficie especular del paraboloide,  $\phi_r [^\circ]$  es el ángulo de borde del espejo parabólico,  $\phi_s [^\circ]$  es el ángulo de sombra causado por el tamaño del receptor y  $G_S [Wm^{-2}]$  es la radiación solar directa que intercepta el espejo parabólico. Es importante mencionar que el ángulo de borde  $\phi_r$  (ver figura 5.4) debe ser igual o menor que el ángulo de admisión  $\theta_{\max}$  para asegurar que toda la radiación a la entrada se transmita por reflexión interna total, de esta manera

$$\phi_r = \theta_{\max}, \quad (5.60)$$

y  $\phi_s$  es igual entonces al ángulo máximo de admisión  $\theta_{\max}$  del manojo de fibras ópticas.

La distancia focal  $f_p$  y el diámetro de apertura  $D_a$  del espejo parabólico están relacionados por

$$\frac{f_p}{D_a} = \frac{1}{4 \tan(\phi_r/2)}, \quad (5.61)$$

y el diámetro  $D_r$  para un receptor plano se estima a través de (Duffie y Beckman, 1991)

$$D_r = \frac{D_a \sin(0.267^\circ + \delta/2)}{\sin \phi_r \cos(\phi_r + 0.267^\circ + \delta/2)}, \quad (5.62)$$

donde  $\delta/2[^\circ]$  es una medida del error angular de la superficie reflejante del paraboloide,  $0.267^\circ$  es la mitad del ángulo cónico de la radiación solar directa. Para que toda la radiación colectada incida en la entrada del manajo de fibras ópticas el diámetro del receptor  $D_r$  deberá ser igual o menor que el diámetro  $D_{of}$  de la sección de entrada del manajo de fibras ópticas, así

$$D_{of} = D_r. \quad (5.63)$$

Es importante notar que una vez establecidos los parámetros físicos  $D_{of}$  y  $\theta_{max}$  del manajo de fibras ópticas, los parámetros físicos del paraboloide  $D_a$  y  $\phi_r$  quedan completamente determinados.

Si tomamos en cuenta las ecuaciones (5.60)-(5.63) podemos escribir la distancia focal óptima  $f_o[m]$  como una función del diámetro  $D_{of}$  de la sección de entrada y del ángulo de admisión  $\theta_{max}$  del manajo de fibras ópticas,

$$f_o = \left( \frac{D_{of}}{4 \tan(\theta_{max}/2)} \right) \left( \frac{\sin \theta_{max} \cos(\theta_{max} + 0.267^\circ + \delta/2)}{\sin(0.267^\circ + \delta/2)} \right). \quad (5.64)$$

Además, mediante las ecuaciones (5.59), (5.60) y (5.64) podemos escribir la potencia radiativa a la entrada del manajo de fibras ópticas,

$$\dot{Q}_{ent,of} = A_{of} \rho G_S F_s C_{max}, \quad (5.65)$$

donde,

$$\rho = (1 - \tau_f) \rho_m, \quad (5.66)$$

$$F_s = \frac{\sin^2 \theta_{max} - \sin^2 \phi_s}{4 \tan^2(\theta_{max}/2)}, \quad (5.67)$$

$$C_{max} = \frac{A_a}{A_{of}} = \frac{\sin^2 \theta_{max} \cos^2(\theta_{max} + 0.267^\circ + \delta/2)}{\sin^2(0.267^\circ + \delta/2)}, \quad (5.68)$$

$r_f[-]$  es la fracción de la radiación no polarizada incidente en la entrada del manajo de fibras ópticas que es reflejada por el paso de un medio a otro medio con índices de refracción diferentes.  $A_{of}[m^2]$  es el área de la sección transversal de entrada,  $A_a[m^2]$  es el área de apertura del paraboloide,  $C_{max}[-]$  es la concentración geométrica máxima y  $F_s[-]$  es el factor de forma para el receptor plano del paraboloide,  $C_{max}$  y  $F_s$  dependen del ángulo de admisión  $\theta_{max}$ .

Para obtener un flujo de calor radiativo  $\dot{Q}_{ent,of} [W]$  a la entrada del manajo de fibras ópticas tan intenso como sea posible, determinamos el valor óptimo de  $\theta_{max}$  a partir del producto del factor de forma  $F_s$  y de la concentración  $C_{max}$ ,

$$F_s C_{max} = g(\theta_{max}) = \left( \frac{\sin^2 \theta_{max}}{4 \tan^2(\theta_{max}/2)} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_{max} \cos^2(\theta_{max} + 0.267^\circ)}{\sin^2(0.267^\circ)} \right), \quad (5.69)$$

donde consideramos un espejo parabólico perfecto sin dispersión ( $\delta/2 = 0$ ) y un ángulo de sombra despreciable  $\phi_s = 0$  ( $\phi_s = \tan^{-1}(D_{of}/f_o) \simeq 0$ , ya que  $f_o \gg D_{of}$ , ver figura 5.4). Entonces, para obtener el valor óptimo de  $\theta_{max}$  escribimos,

$$\frac{dg(\theta_{max})}{d\theta_{max}} = 0, \quad 0 \leq \theta_{max} \leq 90, \quad (5.70)$$

donde el valor óptimo de  $\theta_{max}$  es

$$\theta_{max,opt} \simeq 40^\circ. \quad (5.71)$$

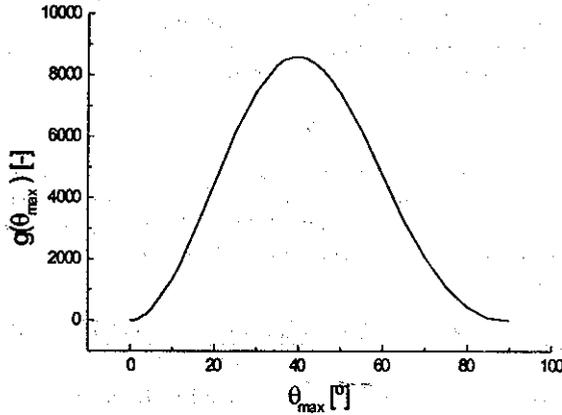


Figura 5.6: Valores para  $g(\theta_{\max})$  como función del ángulo de admisión  $\theta_{\max}$ .

En la figura 5.6 presentamos la gráfica de  $g(\theta_{\max})$  [W] (ecuación (5.69)). Por tanto, el valor máximo para  $g_{\max}(40^\circ)$  es,

$$g_{\max}(40^\circ) \cong 8640. \quad (5.72)$$

Como mencionamos en el capítulo 2 (ecuación (2.166)), de la definición de decibeles de pérdidas por unidad de longitud, la potencia radiativa  $\dot{Q}_{sal,of}$  [W] a la salida la escribimos como

$$\dot{Q}_{sal,of} = \dot{Q}_{ent,of} 10^{-[L_{of} dB_{per}/10]} \quad (5.73)$$

o bien, al sustituir la ecuación (5.65) en la ecuación (5.73) tenemos

$$\dot{Q}_{sal,of} = g(\theta_{\max}) 10^{-L_{of} dB_{per}/10} A_{of} \rho G_S, \quad (5.74)$$

donde  $L_{of}$  [m] es la longitud del manajo de fibras ópticas,  $dB_{per}$  [ $dBm^{-1}$ ] son los decibeles de pérdidas<sup>4</sup>

Hasta aquí, mostramos los parámetros geométricos óptimos para acoplar el espejo parabólico y el manajo de fibras ópticas. La potencia radiativa solar que se tiene al final del manajo de fibras se aplica de manera directa al absorbedor/calentador de la máquina Stirling que corresponde a la fuente de calor de dicha máquina.

En el diseño del absorbedor/calentador de la máquina solar, el flujo radiativo solar al final del manajo de fibras ópticas es confinado en una cavidad con superficies grises difusas. En la figura 5.7 presentamos el esquema del absorbedor/calentador propuesto:

<sup>4</sup> Los decibeles de pérdidas corresponden a la atenuación del flujo solar, esta atenuación es integrada en el espectro solar al considerar un metro de fibra óptica. Los valores típicos de fibras comerciales se encuentran en el rango  $0.014 \leq dB_{loss}/m \leq 2.348$ . En la referencia (Kribus et al. 2000) se reportan los decibeles de pérdida para varias fibras ópticas comerciales.

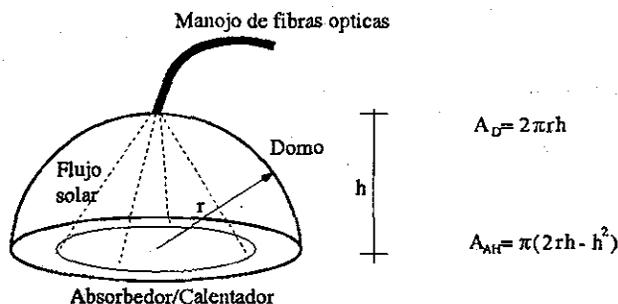


Figura 5.7: Esquema del confinamiento donde se coloca el extremo de las fibras ópticas.

Para estimar la transferencia de calor radiativa que ocurre dentro del confinamiento (ver figura 5.7), consideramos el intercambio radiativo de un confinamiento con superficies grises y difusas (Modest, 1993),

$$\frac{q_i}{\epsilon_i} - \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\epsilon_j} - 1 \right) F_{i \rightarrow j} q_j + H_{oi} = E_b - \sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} E_{bj}, \quad (5.75)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

donde  $q [W m^{-2}]$  es flujo de calor radiativo,  $\epsilon [-]$  es la emisividad de la superficie,  $N [-]$  número de superficies de intercambio radiativo,  $H_o [W m^{-2}]$  es la radiación incidente en la superficie y  $E_b$  es la potencia emisiva de cuerpo negro por la superficie  $[W m^{-2}]$ .

Con base en la ecuación (5.75), escribimos un sistema lineal de ecuaciones para el balance de energía en estado permanente del confinamiento (Modest, 1993). De esta manera consideramos dos ecuaciones acopladas puesto que el confinamiento cuenta con la superficie de absorbedor/calentador y la superficie del domo. En la ecuación (5.75) asignamos como el subíndice 1 la superficie del absorbedor/calentador ( $1=AH$ ) y para el subíndice 2 la superficie del domo ( $2=D$ ). Los factores de forma involucrados entre estas dos superficies son,  $F_{AH \rightarrow AH} = 0$ ,  $F_{AH \rightarrow D} = 1$ ,  $F_{D \rightarrow AH} = A_{AH}/A_D$  y  $F_{D \rightarrow D} = 1 - F_{D \rightarrow AH} = 1 - A_{AH}/A_D$  (Modest, 1993). Por tanto, escribimos el sistema

$$\frac{1}{\epsilon_{AH}} \dot{q}_{AH} - \left( \frac{1}{\epsilon_D} - 1 \right) \dot{q}_D = H_{oAH} - \sigma (T_{AH}^4 - T_D^4), \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{AH}}{A_D} \left( \frac{1}{\epsilon_{AH}} - 1 \right) \dot{q}_{AH} + \left( \left( \frac{1}{\epsilon_D} - 1 \right) \left( 1 - \frac{A_{AH}}{A_D} \right) - \frac{1}{\epsilon_D} \right) \dot{q}_D \\ & = - \frac{A_{AH}}{A_D} \sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) - U_D (T_D - T_0), \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde  $A_{AH}$  y  $A_D$  son las áreas del absorbedor/calentador y del domo, respectivamente,  $\epsilon$  es la emisividad (puesto que suponemos ambas superficies grises, éstas son por tanto absorbedores y emisores difusos,  $\epsilon = \alpha = 1 - \rho$ ),  $\dot{q}$  es la potencia por unidad de área que abandona la superficie,  $H_{oAH}$  es la potencia radiativa por unidad de área que llega hasta la superficie del absorbedor/calentador

proveniente del manajo de fibras ópticas y  $\sigma = 5.6696 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  es la constante de Stefan-Boltzmann. Es importante mencionar que en la ecuación (5.77) consideramos las pérdidas de calor del domo con respecto al medio ambiente a través de la conductancia térmica del domo  $U_D$ .

Al resolver el sistema lineal de ecuaciones (5.76) y (5.77) para  $q_{AH} = \dot{Q}_{AH} / A_{AH}$  y  $q_D = \dot{Q}_D / A_D$ , obtenemos

$$\dot{Q}_{AH} = \frac{\Phi_1 \dot{Q}_{sal,of} - \sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) A_{AH} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_D}\right) U_D A_{AH} (T_D - T_0)}{\Phi_2}, \quad (5.78)$$

y

$$\dot{Q}_D = \frac{\left(\frac{1}{\epsilon_{AH}} - 1\right) \dot{Q}_{sal,of} + \sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) A_{AH} - \frac{1}{\epsilon_{AH}} U_D A_D (T_D - T_0)}{\Phi_2}, \quad (5.79)$$

donde  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  están dados por,

$$\Phi_1 = 1 + \left(1 - \frac{h}{2r}\right) \left(\frac{1}{\epsilon_D} - 1\right), \quad (5.80)$$

y

$$\Phi_2 = \frac{1}{\epsilon_{AH}} + \left(1 - \frac{h}{2r}\right) \left(\frac{1}{\epsilon_D} - 1\right), \quad (5.81)$$

donde consideramos el área del absorbedor/calentador,

$$A_{AH} = \pi (2rh - h^2), \quad (5.82)$$

y área del domo (ver figura 5.7),

$$A_D = 2\pi rh, \quad (5.83)$$

donde  $r$  es el radio (del centro hacia el borde del domo) y  $h$  es la distancia entre el polo y la base del domo.

Es importante mencionar que en las ecuaciones (5.78) y (5.79) consideramos que el flujo radiativo solar proveniente del manajo de fibras ópticas se distribuye homogéneamente sobre el área del absorbedor/calentador, de esta manera

$$\dot{Q}_{sal,of} = H_{oAH} A_{AH}. \quad (5.84)$$

Por otro lado, reescribiendo la ecuación (5.78) como,

$$\dot{Q}_{AH} = \frac{\Phi_1 \dot{Q}_{sal,of} - \pi (2rh - h^2) \frac{\sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_D}\right) U_D (T_D - T_0)}{\Phi_2}}{\Phi_2}, \quad (5.85)$$

y al sustituir la ecuación (5.74) en la ecuación (5.85) y tomando en cuenta que  $A_{of} C_{max} = A_o$  (ecuación (5.68)), obtenemos,

$$\dot{Q}_{AH} = \eta_o A_o G_S - \pi (2rh - h^2) \frac{\sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_D}\right) U_D (T_D - T_0)}{\Phi_2}, \quad (5.86)$$

donde  $\eta_o$  es la eficiencia óptica del sistema colector,

$$\eta_o \equiv \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) \rho_m (1 - \tau_f) \eta_{\tau,of} F_s \quad (5.87)$$

donde  $\eta_{\tau,of}$  es la eficiencia de transmisión del manajo de fibras ópticas, tomada de la relación (3.166)<sup>5</sup>

$$\eta_{\tau,of} = 10^{[-L_{of}dB_{per}/10]}, \quad (5.88)$$

$F_s$  es el factor de forma entre el paraboloide y un receptor plano colocado en su plano focal y  $\Phi_1/\Phi_2$  está definida por

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{1 + (1 - \frac{h}{2r}) \left( \frac{1}{\epsilon_D} - 1 \right)}{\frac{1}{\epsilon_{AH}} + (1 - \frac{h}{2r}) \left( \frac{1}{\epsilon_D} - 1 \right)}. \quad (5.89)$$

En la ecuación (5.89) notamos que si la absorptividad  $\alpha$  del absorbedor/calentador es cercana a la unidad para obtener la máxima ganancia de energía radiativa, es decir  $\epsilon_{AH} \rightarrow 1$  (y suponemos  $\epsilon = \alpha$  con base en la ley de Kirchoff) la relación  $\Phi_1/\Phi_2 = 1$ , esto es,

$$\lim_{\epsilon_{AH} \rightarrow 1} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = 1 \quad (5.90)$$

por tanto el valor óptimo de  $\epsilon_{AH}$  es,

$$\epsilon_{AH,opt} = 1. \quad (5.91)$$

Al tomar en cuenta los resultados de las ecuaciones (5.71) y (5.91), escribimos la eficiencia óptica óptima del sistema colector de la forma

$$\eta_{o,opt} = \rho_m (1 - \tau_f) \eta_{\tau,of} F_s (\theta_{max,opt}). \quad (5.92)$$

En la figura 5.8 presentamos el valor de  $F_s$  como función de  $\theta_{max}$ . Observamos que para ángulos de admisión pequeños el factor de forma  $F_s$  está cercano a la unidad. Sin embargo, ángulos de admisión pequeños son equivalentes a reducir la capacidad de colección solar ya que se disminuye por ende la razón de concentración. Por tanto, para obtener la cantidad de energía  $\dot{Q}_{AH}$  en el absorbedor tan alta como sea posible, el factor de forma está limitado al valor correspondiente al óptimo del ángulo de admisión  $\theta_{max,opt}$ .

Por otro lado, la máxima temperatura que se llega a tener en el colector ocurre cuando el calor útil del absorbedor/calentador es  $\dot{Q}_{AH} = 0$ , (i.e. cuando toda la energía solar disponible  $\eta_o A_a G_S$  se pierde hacia los alrededores (Bejan, 1996)), así

$$\eta_{o,opt} A_a G_S = \pi (2rh - h^2) \frac{\sigma (T_{AH}^4 - T_D^4) - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_D}\right) U_D (T_D - T_0)}{\Phi_2}. \quad (5.93)$$

A partir de la ecuación (5.93) obtenemos la máxima temperatura del colector, la cual escribimos de manera adimensional al considerar la temperatura ambiente  $T_0$

$$\frac{T_{AH,max}^4}{T_0^4} = \frac{T_D^4}{T_0^4} + \Phi_2 \frac{\eta_{o,opt} A_a G_S}{\pi (2rh - h^2) \sigma T_0^4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_D}\right) U_D (T_D - T_0)}{\sigma T_0^4}, \quad (5.94)$$

donde  $T_{AH,max}$  es llamada la temperatura de estancamiento del colector (Bejan, 1996).

La eficiencia del colector la definimos como la relación entre la cantidad de energía útil en el absorbedor/calentador y la energía de entrada que llega del sistema colector, así

$$\eta_c = \frac{\dot{Q}_{AH}}{\eta_{o,opt} A_a G_S}, \quad (5.95)$$

<sup>5</sup> En este punto consideramos que todas las fibras ópticas que componen el manajo de fibras presentan una misma atenuación. De tal suerte que la eficiencia de transmisión promedio es la misma que la una fibra individual.

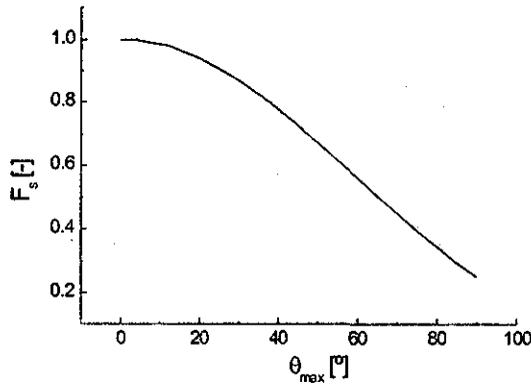


Figura 5.8: Valores de  $F_s$  como función de  $\theta_{\max}$ .

y en función de la temperatura de estancamiento escribimos

$$\eta_c = \frac{\pi (2rh - h^2) \sigma T_0^4}{\eta_{o,opt} A_a G_S \Phi_2} (\Theta_{st}^4 - \Theta^4), \quad (5.96)$$

donde

$$\Theta_{st} = \frac{T_{AH,max}}{T_0} \quad (5.97)$$

y

$$\Theta = \frac{T_{AH}}{T_0}, \quad (5.98)$$

$\Theta_{st}$  es la temperatura de estancamiento adimensional respecto a la temperatura ambiente  $T_0$  y  $\Theta$  es la misma que la ecuación (5.33). Es importante notar que

$$1 \leq \Theta \leq \Theta_{st}. \quad (5.99)$$

Así, al sustituir la ecuación (5.81) en la ecuación (5.96), escribimos la eficiencia del colector como

$$\eta_c = \frac{\sigma T_0^4 (\Theta_{st}^4 - \Theta^4) \pi r^2}{\eta_{o,opt} A_a G_S} \left( \frac{(2y - y^2)}{1 + (1 - \frac{1}{2}y) \left( \frac{1}{\varepsilon_D} - 1 \right)} \right), \quad (5.100)$$

donde consideramos que la altura del domo  $h$  es  $y$  veces el radio  $r$  del absorbedor, tal que

$$h = yr \quad (0 \leq y \leq 1). \quad (5.101)$$

Se puede obtener el máximo de la ecuación (5.100) por dos caminos, considerando la emitancia del domo  $\varepsilon_D$  y tomando en cuenta el parámetro  $y$ . De esta manera, para obtener los valores de

la eficiencia máxima con respecto a los parámetros  $y$  y  $\varepsilon_D$  aplicaríamos el criterio de  $\partial\eta_c/\partial y = 0$  y  $\partial\eta_c/\partial\varepsilon_D = 0$ . Sin embargo, notamos que en ambos casos se trata de funciones monótonamente crecientes, es decir  $\partial\eta_c/\partial y > 0$  y  $\partial\eta_c/\partial\varepsilon_D > 0$ . Por tanto determinamos que los valores óptimos para  $y$  y  $\varepsilon_D$ <sup>6</sup> son

$$y_{opt} = 1, \quad (5.102)$$

y

$$\varepsilon_{D,opt} = 1. \quad (5.103)$$

A partir de la ecuaciones (5.82), (5.83), (5.101) y (5.102) obtenemos, en función del radio  $r$ , el área óptima del absorbedor/calentador

$$A_{AH,opt} = \pi r^2, \quad (5.104)$$

y el área óptima del domo

$$A_{D,opt} = 2\pi r^2, \quad (5.105)$$

por tanto tenemos que la relación óptima entre áreas es

$$2A_{AH,opt} = A_{D,opt}. \quad (5.106)$$

La máxima potencia por unidad de área en el absorbedor/calentador la escribimos como

$$\dot{q}_{AH,max,max} = \dot{q}_{ent,max} - \sigma T_0^4 (\Theta^4 - \Theta_D^4), \quad (5.107)$$

donde

$$\dot{q}_{ent,max} = g_{max}\rho_m (1 - r_f) \eta_{\tau,of} \frac{A_{of}}{A_{AH,opt}} G_S, \quad (5.108)$$

y

$$\Theta_D = \frac{T_D}{T_0}. \quad (5.109)$$

De esta manera, con base en el análisis expuesto hasta ahora, la eficiencia máxima del colector operando a la transferencia de potencia máxima la escribimos como,

$$\eta_{c,\dot{q}_{AH,max}} = a_4 (\Theta_{st,max}^4 - \Theta^4), \quad (5.110)$$

y la ecuación (5.94) la podemos reescribir así

$$\Theta_{st,max}^4 = \Theta_D^4 + \frac{1}{a_4}, \quad (5.111)$$

donde

$$a_4 = \frac{\sigma T_0^4}{g_{max}\rho_m (1 - r_f) \eta_{\tau,of} A_{of} G_S} \frac{A_{AH,opt}}{A_{of} G_S}. \quad (5.112)$$

Con base en los resultados obtenidos, escribimos de la ecuación (5.78) la energía por unidad de tiempo y por unidad de área en el absorbedor/calentador,

<sup>6</sup> Es importante notar que el valor para la emisividad del domo  $\varepsilon_D$  ocurre

$$0 \leq \varepsilon_D \leq 1.$$

$$\dot{Q}_{AH} = \dot{q}_{ent} A_{AH} - \sigma T_0^4 (\Theta^4 - \Theta_D^4) A_{AH}, \quad (5.113)$$

y de la ecuación (5.79) la energía por unidad de tiempo y por unidad de área en el domo,

$$\dot{Q}_D = \sigma A_{AH} T_0^4 (\Theta^4 - \Theta_D^4) - 2U_D A_{AH} T_0 (\Theta_D - 1), \quad (5.114)$$

donde  $\dot{q}_{ent}$  está dado por la ecuación (5.108). La ecuación 5.113 muestra que las pérdidas por emisión en la superficie del absorbedor/calentador son menores si se les comparará con la ausencia del domo ya que se tendría entonces,

$$\dot{Q}_{AH} = \dot{q}_{ent} A_{AH} - \sigma (T_0 \Theta)^4 A_{AH}. \quad (5.115)$$

Se muestra pues, que el domo absorbe la radiación que abandona el absorbedor/calentador y el domo a su vez emite hacia la superficie del absorbedor/calentador. La ecuación 5.114 muestra que de la energía absorbida por el domo una fracción es emitida y otra fracción se pierde hacia el medio ambiente debido a su conductancia térmica  $U_D$ .

Por último la eficiencia total del sistema  $\eta_{s,max}$ , la construimos como

$$\eta_{s,max}(T_{AH}) = \eta_{e,\dot{q}_{AH,max}}(T_{AH}) \eta_{e,P,max}(T_{AH}). \quad (5.116)$$

donde  $\eta_{e,P,max}$  es la eficiencia térmica máxima de la máquina Stirling a la potencia de operación máxima (ecuación (5.56)) y  $\eta_{e,\dot{q}_{AH,max}}$  es la potencia máxima del colector solar operando a la transferencia máxima de calor en el absorbedor (ecuación (5.110)).

De tal suerte que la temperatura óptima  $T_{AH,opt}$  de operación de la máquina solar la obtenemos mediante

$$\frac{\partial \eta_s(T_{AH})}{\partial T_{AH}} = 0. \quad (5.117)$$

Al resolver la ecuación (5.117) obtenemos el valor óptimo para la temperatura de operación del colector solar y de la máquina Stirling cuando estos están acoplados mediante el absorbedor/calentador del sistema. En los resultados y conclusiones de este capítulo reportamos la eficiencia máxima del colector operando a la transferencia de potencia máxima  $\eta_{e,\dot{q}_{AH,max}}$ , la eficiencia térmica a máxima potencia  $\eta_{e,P,max}$ , y la eficiencia global del sistema  $\eta_{s,max}$ .

Com parte final del estudio termodinámico desarrollado, en la siguiente sección discutimos la generación de entropía que tiene lugar en el absorbedor /calentador de la máquina solar propuesta.

## 5.4 Generación de entropía en el absorbedor/calentador

Por facilidad de lectura, comencemos por reescribir las ecuaciones (5.113) y (5.114), donde estimamos la potencia por unidad de área en el absorbedor/calentador y en el domo,

$$\dot{Q}_{AH} = \dot{q}_{ent} A_{AH} - \sigma T_0^4 (\Theta^4 - \Theta_D^4) A_{AH}, \quad (5.118)$$

y

$$\dot{Q}_D = \sigma A_{AH} T_0^4 (\Theta^4 - \Theta_D^4) - 2U_D A_{AH} T_0 (\Theta_D - 1). \quad (5.119)$$

Mediante la primera ley de la termodinámica escribimos que la conservación de la energía en la cavidad es

$$\dot{Q}_E = \dot{Q}_{AH} + \dot{Q}_D, \quad (5.120)$$

donde  $\dot{Q}_E$  es la energía dentro del confinamiento. Al sustituir las ecuaciones (5.118) y (5.119) en la ecuación (5.120), obtenemos,

$$\dot{Q}_E = \dot{q}_{ent} A_{AH} - 2U_D A_{AH} T_0 (\Theta_D - 1). \quad (5.121)$$

Ahora, tomando en cuenta el teorema de Gouy-Stodola generalizado como un caso especial de un sistema termodinámico para colectores solares (Bejan, 1996), la generación de entropía debido al proceso de absorción y emisión que toma lugar en la cavidad la establecemos mediante

$$\dot{S}_{gen} = \frac{2U_D A_{AH} T_0 (\Theta_D - 1)}{T_0} - \frac{\dot{q}_{ent} A_{AH}}{T_*} + \frac{\dot{Q}_E}{T_D}, \quad (5.122)$$

o de manera adimensional

$$\frac{\dot{S}_{gen}}{U_D A_{AH}} = 2 \frac{(\Theta_D - 1)^2}{\Theta_D} - \frac{\dot{q}_{ent}}{U_D T_D} \left( \frac{\Theta_* - \Theta_D}{\Theta_*} \right) \geq 0, \quad (5.123)$$

donde

$$\Theta_* = \frac{T_*}{T_0} \quad (5.124)$$

y  $T_*$  es la temperatura aparente del Sol. Debemos notar que la entropía total generada en la cavidad depende de la temperatura del domo  $T_D$  donde ocurre  $T_{AH} > T_D$ . En la ecuación (5.123) el grupo adimensional  $\dot{S}_{gen}/U_D A_{AH}$  considera el hecho que la generación de entropía aumenta de manera proporcional con el tamaño del confinamiento, el cual se describe mediante el área  $A_{AH}$ .

La irreversibilidad que toma lugar en la superficie del absorbedor/calentador por el proceso de absorción y de emisión se estima mediante (Bejan, 1997)

$$\dot{S}_{gen,AH} = \dot{S}_{AH} - \dot{S}_D - \dot{S}_{E/AH} \geq 0, \quad (5.125)$$

donde

$$\dot{S}_{AH} = \frac{4}{3} A_{AH} \sigma T_{AH}^3 - \frac{4}{3} A_{AH} \sigma T_D^3 - \frac{\dot{q}_{ent}}{T_*} A_{AH}, \quad (5.126)$$

$$\dot{S}_D = -\frac{4}{3} A_{AH} \sigma T_{AH}^3 + \frac{4}{3} A_{AH} \sigma T_D^3 + \frac{2U_D A_{AH} (T_D - T_0)}{T_D} \quad (5.127)$$

y

$$\dot{S}_{E/AH} = \frac{2U_D A_{AH} (T_D - T_0)}{T_D} - \frac{\dot{q}_{ent}}{T_D} A_{AH}. \quad (5.128)$$

Substituyendo las ecuaciones (5.126)-(5.128) en la ecuación (5.125), obtenemos de manera adimensional la generación del flujo de entropía en absorbedor/calentador, de esta manera,

$$\frac{\dot{S}_{gen,AH}}{U_D A_{AH}} = \frac{8\sigma T_0^3}{3U_D} (\Theta^3 - \Theta_D^3) + \frac{\dot{q}_{ent}}{U_D T_D} \left( \frac{\Theta_* - \Theta_D}{\Theta_*} \right) - 4 \left( 1 - \frac{1}{\Theta_D} \right) \geq 0. \quad (5.129)$$

Para mostrar que la temperatura del domo siempre es menor que la temperatura del absorbedor/calentador y éstas a su vez no pueden ser iguales o mayores que la temperatura  $\Theta_*$ ,

$$\Theta_D < \Theta < \Theta_*. \quad (5.130)$$

consideramos primero la ecuación (5.118) donde suponemos que  $\dot{q}_{ent} > 0$  y  $(\Theta = \Theta_D) \rightarrow \Theta_*$ . En este punto la primera ley indica que el absorbedor/calentador contiene toda la energía radiativa y no indica ninguna controversia en este resultado. Sin embargo para el mismo punto  $(\Theta = \Theta_D) \rightarrow \Theta_*$ , la generación de entropía (ecuación (5.129)) se escribiría como

$$\frac{\dot{S}_{gen,AH}}{U_D A_H} = -4 \left( 1 - \frac{1}{\Theta_*} \right) < 0, \quad (5.131)$$

la cual es claramente una violación de la segunda ley de la termodinámica ya que  $\Theta_* \gg 1$ .

Como mencionamos anteriormente, la energía absorbida por el domo, una parte es emitida y otra se pierde hacia los alrededores, por lo que dentro de la cavidad (figura 5.7) encontramos radiación difusa de cuerpo negro donde ocurre  $\Theta_D < \Theta < \Theta_*$ . Esta conclusión está de acuerdo con la ley de Kirchhoff donde es imposible para un cuerpo negro absorber radiación sin emitir simultáneamente (Modest, 1993).

En la siguiente sección resolvemos la ecuación (5.117) para obtener el valor de la temperatura óptima en el absorbedor/calentador. Además analizamos diferentes escenarios de la temperatura óptima  $T_{AHopt}$  obtenida.

## 5.5 Resultados y conclusiones

Nuestro objetivo es determinar el valor óptimo de la temperatura  $T_{HA}$  considerando que el diseño de la máquina térmica solar se encuentra entre los límites de reversibilidad termodinámica y la potencia de operación máxima.

Como mencionamos en la ecuación 5.116, la eficiencia global del sistema está dada por

$$\eta_{s,max} = \eta_{c,q_{AH,max}} \eta_{e,P,max}, \quad (5.132)$$

y al sustituir las ecuaciones (5.56) y (5.110) en la ecuación (5.132) obtenemos

$$\eta_{s,max} = a_4 (\Theta_{st,max}^4 - \Theta^4) \left( \frac{1 - \Theta^{-1/2}}{1 + (2a_3 + a_2)(1 - \Theta^{-1/2})} \right), \quad (5.133)$$

donde los valores para  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  son estimados mediante las relaciones (5.54), (5.55) y (5.112), respectivamente.

Para obtener el valor óptimo de  $T_{HA}$  resolvemos  $\partial \eta_s / \partial \Theta = 0$ , tal que

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left( a_4 (\Theta_{st,max}^4 - \Theta^4) \left( \frac{1 - \Theta^{-1/2}}{1 + (2a_3 + a_2)(1 - \Theta^{-1/2})} \right) \right) = 0. \quad (5.134)$$

donde el valor óptimo  $\Theta_{opt}$  son las raíces de la ecuación

$$8(1 + 2a_3 + a_2) \Theta_{opt}^{\frac{9}{2}} - (7 + 32a_3 + 16a_2) \Theta_{opt}^{\frac{5}{2}} + 8(2a_3 + a_2) \Theta_{opt}^{\frac{3}{2}} - \Theta_{st,max}^4 = 0. \quad (5.135)$$

donde notamos que  $a_4$  se encuentra de manera implícita en  $\Theta_{st,max}$ , como lo muestra la ecuación (5.111).

Si consideramos que

$$\Theta_{opt} = \frac{T_{AH,opt}}{T_0}, \quad (5.136)$$

y

$$\Theta_{st,max}^4 = \frac{T_{AH,max,max}^4}{T_0^4}, \quad (5.137)$$

podemos escribir la ecuación (5.135) como

$$8(1+A)T_{AH,opt}^{9/2} - (7+16A)T_{AH,opt}^4\sqrt{T_0} + 8AT_{AH,opt}^{7/2}T_0 - T_{AH,max,max}^4\sqrt{T_0} = 0, \quad (5.138)$$

donde

$$A = (2a_3 + a_2). \quad (5.139)$$

En la figura 5.9 presentamos los resultados de la temperatura óptima  $T_{AH,opt}$  como función de la temperatura de estancamiento máxima  $T_{AH,max,max}$ , suponiendo la temperatura  $T_0 = 300K$  y consideramos valores arbitrarios de  $A$ . El parámetro  $A$  agrupa las pérdidas en el proceso de regeneración y las pérdidas debido a la resistencia térmica interna de la máquina Stirling.

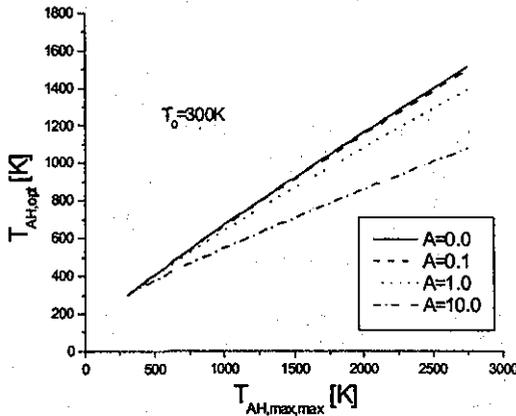


Figura 5.9: Temperatura óptima de operación  $T_{AH,opt}$  para la máquina térmica solar como función de la temperatura de estancamiento máxima  $T_{AH,max,max}$  y valores arbitrarios de  $A$ .

En la figura 5.9 observamos que la temperatura  $T_{AH,opt}$  en el absorbedor/calentador para la de operación óptima disminuye al incrementarse las pérdidas de calor relacionadas a la regeneración y a la resistencia interna.

Con la idea de tener resultados con apreciación numérica para el cálculo de  $\eta_{s,max}$  (ecuación (5.133)), consideramos una máquina Stirling con una relación entre volúmenes  $V_1/V_2 = 2.5$  y cuyas capacitancias de calor de la fuente y del sumidero  $C_H$  y  $C_L$  son iguales con  $1.8kWK^{-1}$  (Kaushik y Kumar, 2000). Además tomando en cuenta los valores de temperatura reportados por Cariou *et al.* (Cariou *et al.*, 1985) del horno solar que ensayaron y que semeja la cavidad propuesta, suponemos una temperatura  $T_{AH,max,max} = 2500K$ . En la tabla 5.1 escribimos los valores de temperatura  $T_{AH,max,max}$  y sus correspondientes valores de temperatura  $T_{AH,opt}$  para dos valores arbitrarios  $A$ ,

	$A = 0$	$A = 10$
$T_{AH,max,max}$	2500K	2500K
$T_{AH,opt}$	1400K	1000K
$T_0$	300K	300K

Tabla 5.1: Valores de temperatura considerados para el cálculo de la eficiencia

Por otro lado, a partir de la relación (5.112) escribimos para  $a_4$  la relación,

$$a_4 = \frac{\sigma T_0^4}{g_{max} \rho_m (1 - \tau_f) 10^{[-L_{of} dB_{per}/10]}} \frac{A_{AH,opt}}{A_{of}} \frac{1}{G_S} \quad (5.140)$$

y en la tabla 5.2 escribimos los valores considerados para realizar el cálculo de dicho parámetro, donde el valor de la reflectividad  $\rho_m$  corresponde a la reflectividad del aluminio para el espectro solar

$\sigma$	$5.6705 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$
$g_{max}(40^\circ)$	8640
$\rho_m$	0.95
$\tau_f$	0.05
$L_{of}$	3.00m
$dB_{per}$	0.05dBm <sup>-1</sup>
$A_{AH,opt}$	$\pi(0.058m)^2 = 1.057 \times 10^{-2} m^2$
$A_{of}$	$\pi(0.035m)^2 = 3.849 \times 10^{-3} m^2$
$G_S$	850Wm <sup>-2</sup>
$T_0$	300K

Tabla 5.2: Valores para estimar  $a_4$ .

y los valores de  $\tau_f$  y  $dB_{per}$  son valores típicos tomados de la referencia (Kribus et al. 2000). Así, escribimos de nueva cuenta la relación (5.133) como,

$$\eta_{s,max} = 1.97 \times 10^{-4} \left( \frac{T_{AH,max,max}^4}{T_0^4} - \frac{T_{AH,opt}^4}{T_0^4} \right) \left( \frac{1 - \left( \frac{T_{AH,opt}}{T_0} \right)^{-1/2}}{1 + A \left( 1 - \left( \frac{T_{AH,opt}}{T_0} \right)^{-1/2} \right)} \right) \quad (5.141)$$

y en la tabla 5.3 reportamos la eficiencia máxima del colector operando a la transferencia de potencia máxima  $\eta_{c,s,AH,max}$ , la eficiencia térmica a máxima potencia  $\eta_{e,P,max}$ , y la eficiencia global del sistema  $\eta_{s,max}$  para los dos valores arbitrarios  $A = 0$  y  $A = 10$ .

La simple configuración para el absorbedor/calentador de la máquina Stirling permite disminuir las pérdidas de calor por conducción, convección y radiación, ya que el absorbedor/calentador del sistema de conversión se encuentra aislado térmicamente, evacuado y la energía radiativa confinada. Se debe prestar especial atención a las pérdidas en el proceso de regeneración y a las pérdidas debido a la resistencia térmica interna de la máquina Stirling. Como se muestra en la tabla 5.3 cuando estas pérdidas son muy altas, como lo muestra el parámetro  $A = 10$ , es de esperar que la máquina Stirling presente una eficiencia muy baja.

Con base en el estudio desarrollado, nos encontramos en la posibilidad de diseñar y construir un sistema de conversión de energía solar que utiliza fibras ópticas para el transporte de energía. Este

	$A = 0$	$A = 10$
$T_{AH,max,max}$	2500K	2500K
$T_{AH,opt}$	1400K	1000K
$T_0$	300K	300K
$\eta_{c, AH,max}$	85.7%	92.5%
$\eta_{e,P,max}$	53.7%	8.19%
$\eta_{s,max}$	46.0%	7.58%

Tabla 5.3: Cálculo de la eficiencia global del sistema.

sistema de conversión cuenta con una eficiencia máxima asegurando un aprovechamiento adecuado del recurso solar.

Si bien, a lo largo de cada uno de los capítulos desarrollados presentamos parte de las conclusiones a las que llegamos en cada uno de ellos, en la parte final de este trabajo se presentan las conclusiones generales que consolidan nuestra investigación.



## Conclusiones

Como parte final de este trabajo, presentamos las conclusiones generales. Si bien al final de cada uno de los capítulos incluimos los resultados y las conclusiones que fuimos obteniendo, el propósito de este apartado es agrupar y resaltar las contribuciones más importantes de nuestra investigación teórica-experimental.

Por primer punto de nuestra investigación, recopilamos los antecedentes en el uso de fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada. La revisión bibliográfica del estado del arte de fibras ópticas y guías de onda para la transmisión de energía solar comprende los primeros intentos del uso de esta tecnología iniciados hace 26 años hasta recientes fechas.

La revisión bibliográfica ha sido exhaustiva y muy completa. Notamos al examinar los trabajos reportados en la literatura que la mayoría de éstos son investigaciones teóricas y las menos, investigaciones experimentales. Notamos además que el uso de las fibras ópticas para el transporte de luz solar ha encontrado aplicaciones en diferentes áreas, como son la físico-química, la biotecnología, la medicina, entre otras, y no sólo se ha aplicado en la conversión fototérmica. Sin embargo, pese a que esta tecnología es prometedora, pues facilita el transporte y conversión de energía solar y disminuye las pérdidas de calor o la necesidad de robustas estructuras de seguimiento, son pocos los trabajos recopilados referentes a la aplicación de las fibras ópticas. Quizás la escasez en la investigación experimental, tanto básica como aplicada, ha provocado que esta tecnología no se haya consolidado a pesar de contar con un cuarto de siglo de haberse sugerido.

Es importante mencionar que en la literatura no se reporta hasta ahora, el comportamiento térmico de fibras ópticas cuando éstas conducen energía solar concentrada, exceptuado algunos trabajos teóricos que realizamos anteriormente (*Jaramillo y del Río 1997, Jaramillo y del Río 1998 y Jaramillo et al. 1999<sup>7</sup>*).

Con la idea de impulsar el uso de la energía solar como recurso renovable, en esta investigación analizamos teórica y experimentalmente el comportamiento térmico de fibras ópticas con núcleo de  $\text{SiO}_2$  durante el transporte de flujo radiativo.

Como mencionamos en los capítulos anteriores, el comportamiento térmico de las fibras ópticas está relacionado estrechamente al coeficiente de absorción. Dicho coeficiente puede presentar una dependencia a la intensidad de la energía transmitida. Sin embargo, en la literatura no se encuentra reportada la dependencia no lineal a la intensidad radiativa de una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  cuando ésta transmite energía solar concentrada. Por tal razón, en el capítulo 2 estudiamos teóricamente para las frecuencias del espectro solar la respuesta no lineal para fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  durante la interacción con la energía radiativa y determinamos la dependencia del coeficiente de absorción

<sup>7</sup> Este trabajo vincula la investigación iniciada durante los estudios de maestría y la investigación desarrollada durante el doctorado).

con la energía transportada.

Analizamos para la molécula de  $\text{SiO}_2$  (material con el que se fabrica el núcleo de la fibra óptica) la carga de polarización eléctrica inducida, producto del campo eléctrico de la onda electromagnética viajera. Con base en las ecuaciones de Maxwell, mostramos la corrección para el índice de refracción, al considerar la contribución del coeficiente de extinción de segundo orden durante la propagación de una onda electromagnética a través de un medio. Obtuvimos además las relaciones entre el índice de refracción y la susceptibilidad eléctrica lineal y no lineal. Bajo este mismo punto de vista macroscópico, desarrollamos una expresión que nos permite estimar el coeficiente de absorción no lineal como función del coeficiente de extinción no lineal. Sin embargo, el coeficiente de extinción no lineal del  $\text{SiO}_2$ , que corresponde a la parte imaginaria en la corrección de segundo orden en el índice de refracción, no está reportado en la literatura. Por tal motivo, desarrollamos un modelo con base en la teoría de dispersión óptica de Drude-Lorentz que nos permite estimar coeficiente de extinción no lineal en función de parámetros microscópicos. Con dicho modelo estudiamos el desplazamiento de las partículas cargadas al suponer un sistema de osciladores anarmónicos forzados y amortiguados. Al vincular las relaciones obtenidas de la teoría microscópica de Drude-Lorentz y la teoría macroscópica de las ecuaciones de Maxwell, desarrollamos un modelo teórico que nos permite estimar el valor del coeficiente de extinción no lineal y por ende el coeficiente de absorción no lineal para fibras ópticas con núcleo  $\text{SiO}_2$  de alta pureza en el rango del espectro solar. Al considerar la energía solar proveniente de un concentrador circular en condiciones de máxima insolación ( $1000\text{Wm}^{-2}$ ) mostramos que el coeficiente de absorción no lineal es despreciable para las fibras ópticas de  $\text{SiO}_2$  de alta pureza. Por esta razón, en el resto de la investigación no consideramos efectos no lineales en el proceso de absorción de energía radiativa presente durante el transporte de la misma.

Los trabajos reportados en la literatura sobre el comportamiento térmico de fibras ópticas durante el transporte de flujo solar concentrado corresponden a trabajos que realizamos previamente a esta investigación. En estos trabajos desarrollamos dos modelos teóricos que permiten estimar el comportamiento de una fibra óptica cuando ésta transporta energía solar concentrada. Tales modelos fueron resueltos numéricamente, por lo que sus soluciones fueron fácilmente obtenidas. Sin embargo, una vez obtenidas las soluciones correspondientes, éstas resultaron difíciles de evaluar y poco prácticas, ya que su implementación computacional fue complicada. No obstante, es importante mencionar que los resultados obtenidos a partir de este par de modelos impulsaron y motivaron la presente investigación.

Con la idea de inferir el comportamiento térmico de una fibra óptica cuando ésta transporta flujo radiativo concentrado, en el capítulo 3 desarrollamos un modelo nuevo que resolvemos de manera analítica. Se trata de un modelo unidimensional que nos permite estudiar teóricamente el comportamiento térmico de una fibra óptica durante la transmisión de energía radiativa. El modelo propuesto en esta investigación presenta una importante ventaja sobre los modelos propuestos anteriormente, ya que ofrece una solución analítica que se implementa fácilmente. Con base en el modelo unidimensional de transferencia de calor en aletas, desarrollamos el modelo unidimensional propuesto donde tomamos en cuenta la conducción de calor, la ganancia de energía radiativa absorbida por el material del núcleo de la fibra y la transferencia de calor por convección en las superficies longitudinal y de los extremos de la fibra. Cabe mencionar que el coeficiente de absorción lineal y las pérdidas por reflexión a la entrada de la fibra para llevar a cabo la emulación del comportamiento térmico de la fibra óptica fueron obtenidos durante el desarrollo experimental de esta investigación. Observamos en la emulación del comportamiento térmico que la mayor temperatura ocurre cerca de la entrada de la fibra óptica ya que el flujo a la entrada sufre una absorción fuerte en sus componentes espectrales que presentan una atenuación mayor. Notamos además que la fibra óptica no presenta variación de temperatura más allá de los 10 centímetros a la entrada pues, como mencionamos, algunas componentes de la radiación han sido absorbidas por el material del núcleo de la fibra y las componentes con

absorción menor pasan más libremente. Observamos también que la fibra óptica alcanza el estado permanente a los 900 segundos.

En la literatura no se reportan estudios experimentales del comportamiento térmico de fibras ópticas cuando éstas conducen flujo radiativo. Por tal motivo, en el capítulo 4 presentamos el desarrollo experimental de esta investigación. Esta parte de la investigación se centra principalmente en determinar el comportamiento térmico de una fibra óptica con núcleo de  $\text{SiO}_2$  durante la transmisión de energía radiativa concentrada y comparar los resultados experimentales con los resultados teóricos. En este capítulo describimos el dispositivo experimental usado y la instrumentación del dispositivo para la medición de las variables experimentales. Además reportamos la metodología para la medición del coeficiente de absorción y la medición de las temperaturas. Consideramos dos marcas de fibras ópticas (ambas con núcleo de  $\text{SiO}_2$ ) las cuales fueron sometidas cada una a dos potencias radiativas distintas por lo que contamos con cuatro casos de estudio diferentes. Para cada uno de los cuatro casos de estudio realizamos una emulación del comportamiento térmico mediante el modelo desarrollado en el capítulo 3. Como mencionamos, para llevar a cabo la emulación consideramos el coeficiente de absorción lineal y las pérdidas por reflexión a la entrada de la fibra, además con base en datos reportados en la literatura consideramos como parámetros de ajuste la difusividad térmica y el coeficiente de transferencia por convección en las superficies longitudinal y laterales de la fibra óptica. Observamos que el modelo teórico reproduce adecuadamente el comportamiento térmico de las fibras ópticas en el estado permanente, ya que nuestros resultados teóricos reproducen los resultados experimentales y se encuentran dentro de la precisión para la medición de temperatura. Si bien, los resultados obtenidos del modelo teórico para el estado transitorio se encuentran ligeramente fuera de la incertidumbre de medición de la temperatura en los resultados experimentales, el modelo reproduce cualitativamente su tendencia. No obstante que el modelo teórico desarrollado es un modelo sencillo y simplificado, reproduce apropiadamente la física involucrada en la transmisión de energía radiativa a través de fibras ópticas.

Por tanto, los datos experimentales nos permiten validar el modelo teórico desarrollado para la transmisión de energía radiativa a través de fibras ópticas.

A pesar que en nuestra investigación utilizamos una fuente de energía radiativa de intensidad baja comparada con la intensidad radiativa lograda en concentradores solares de enfoque, debemos considerar los resultados del capítulo 2. En dicho capítulo mostramos que el comportamiento de la absorción es lineal para las intensidades logradas en flujos radiativos solares. Por tanto, la emulación térmica de la fibra óptica durante la transmisión de energía solar concentrada se puede llevar a cabo entonces con base en los resultados reportados en la literatura para la atenuación (relacionada al coeficiente de absorción) para el espectro solar. Ya que el modelo teórico desarrollado no demanda ajustes para el coeficiente de absorción, éste promete emular adecuadamente el comportamiento térmico de las fibras ópticas durante la transmisión de energía solar concentrada.

Como complemento a nuestra investigación, en el capítulo 5, analizamos desde el punto de vista de la termodinámica, un sistema de conversión de energía solar. Este sistema cuenta con un colector solar de concentración, un manojo de fibras ópticas para la transmisión del flujo solar concentrado y una máquina térmica de ciclo Stirling que es activada por la energía solar transportada por las fibras. Con base en el modelo propuesto por Curzon y Alhorn y los conceptos de la termodinámica de tiempos finitos, estudiamos la eficiencia total del sistema al considerar la eficiencia máxima del colector solar a máxima transferencia de energía y la eficiencia térmica máxima de la máquina Stirling a máxima potencia. En este punto consideramos las irreversibilidades internas y externas del sistema de conversión. Diseñamos la parte correspondiente al absorbedor/calentador del sistema de conversión. La configuración del diseño propuesto permite disminuir las pérdidas de calor por conducción, convección y radiación, ya que éste encuentra aislado térmicamente, evacuado y la energía radiativa confinada. Además, obtenemos la temperatura de operación óptima del sistema de

conversión que tiene lugar en el absorbedor/calentador del sistema. En nuestro análisis mostramos que la temperatura de operación óptima del sistema de conversión de energía solar disminuye al incrementarse las pérdidas de calor.

Confiamos que el estudio teórico-experimental del comportamiento térmico de fibras ópticas durante la transmisión de flujo radiativo presentado en este trabajo, proporcione un impulso importante en la aplicación de las fibras ópticas para el transporte de energía solar concentrada.

## Apéndice A

### Programa para implementar la solución analítica del modelo unidimensional

En este apartado presentamos el programa de cómputo realizado en *Mathematica 3.0* para obtener la emulación del modelo unidimensional desarrollado en el capítulo 3. Decidimos utilizar este programa ya que ofrece facilidades de manejo e implementación, además incorpora subrutinas preestablecidas que facilitan su uso.

Cabe aclarar que en el listado se incluyen los comentarios pertinentes para facilitar la implementación del programa en *Mathematica 3.0*, mediante la notación (\* Comentario \*)

(\* Borra los archivos previos donde se almacenan los resultados de la temperatura \*)  
DeleteFile[{"Permanente.txt", "Temperaturas.txt"}]

(\* Valores de los parámetros físicos involucrados \*)

$G_0 := 7710.0$   
 $\kappa_L := 0.253$   
 $r_f := 0.0018$   
 $L_{fo} := 1.578$   
 $k := 1.7$   
 $k_1 := 1.4$   
 $k_2 := 1.4$   
 $h_0 := 7.0$   
 $h_L := 7.0$   
 $h_R := 7.0$   
 $R_n := 0.00050$   
 $R_1 := 0.00055$   
 $R_2 := 0.00060$   
 $\rho := 2500.0$   
 $C_p := 1800.0$   
 $T_{amb} := 0.0$

(\* Ecuación (3.148) \*)

$$\alpha := \frac{k}{(\rho * C_p)}$$

(\* Ecuaciones (3.151) y (3.152)\*)

$$H_0 := \frac{h_0}{k}$$

$$H_L := \frac{h_L}{k}$$

(\* Ecuación (3.153) \*)

(\* Para implementar el logaritmo natural utilizamos  $\ln[a] = \frac{\log[a]}{\log[e]}$  \*)

$$R_{ter} := \left( \frac{R_2}{k_1} * \frac{\text{Log}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\text{Log}[2.7182818]} + \frac{R_2}{k_2} * \frac{\text{Log}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\text{Log}[2.7182818]} + \frac{1}{h_R} \right)$$

(\* Ecuación (3.149) \*)

$$B := \sqrt{\frac{2}{R_n * k * R_{ter}}}$$

(\* Ecuación (3.150) \*)

$$S := \frac{\kappa_L}{k} * (1 - r_f) * G_0$$

(\* Subrutina para calcular los valores característicos de la eingenfunción (3.157) \*)

raices := 500

For[i = 1, i < raices, i ++,

betas[i] = FindRoot[Tan[β \* L<sub>f0</sub>] - β \* (  $\frac{H_0 + H_L}{\beta^2 - H_0 * H_L}$  ) == 0, {β, i \* 2.0, 0.0, 2500.0}];

b[i] = β /. betas[i]]

(\* Subrutina para calcular los valores de las constantes C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> y C<sub>3</sub> \*)

(\* Ecuaciones (3.154), (3.155) y (3.156))

$$C_1 := \left( \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \right) * \left( \frac{(H_0 + \kappa_L) * (H_L + B) * E^{B * L_{f0}} - (H_0 - B) * (H_L - \kappa_L) * E^{-\kappa_L * L_{f0}}}{(H_0 + B) * (H_L + B) * E^{B * L_{f0}} - (H_0 - B) * (H_L - B) * E^{-B * L_{f0}}} \right)$$

$$C_2 := \left( \frac{S}{\kappa_L^2 - B^2} \right) * \left( \frac{(H_0 + B) * (H_L - \kappa_L) * E^{-\kappa_L * L_{f0}} - (H_0 + \kappa_L) * (H_L - B) * E^{-B * L_{f0}}}{(H_0 + B) * (H_L + B) * E^{B * L_{f0}} - (H_0 - B) * (H_L - B) * E^{-B * L_{f0}}} \right)$$

$$C_3 := \frac{S}{B^2 - \kappa_L^2}$$

(\* Subrutina para calcular la temperatura en el estado permanente \*)

(\* Ecuación (3.66) \*)

$$T_s[z_] := T_{amb} + (C_3 * E^{-\kappa_L * z} + C_2 * E^{B * z} + C_1 * E^{-B * z})$$

Plot[T<sub>s</sub>[z], {z, 0.0, L<sub>f0</sub>}]

Lf[1] := 0.005

Lf[2] := 0.025

Lf[3] := 0.050

Lf[4] := 0.075

Lf[5] := 0.100

Lf[6] := 0.125

For[i = 1, i < 7, i ++, TS[i] = T<sub>s</sub>[Lf[i]]]

For[i = 1, i < 7, i ++, Print[TS[i]]]

For[i = 0, i < 7, m ++, TS[m] >>> Fermanente.txt]

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.142) \*)

For[i = 1, i < raices, i ++,

$$AA[i] = C_3 * b[i] * \left( \frac{E^{-\kappa_L * L_{f0}} * (\kappa_L * \text{Cos}[b[i] * L_{f0}] - b[i] * \text{Sin}[b[i] * L_{f0}]) - \kappa_L}{\kappa_L^2 + (b[i])^2} \right)$$

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.143) \*)

For[i = 1, i < raices, i + +,

$$BB[i] = C_3 * H_0 * \left( \frac{E^{-\kappa_L * L_{fo}} * (b[i] * \text{Cos}[b[i] * L_{fo}] + \kappa_L * \text{Sin}[b[i] * L_{fo}]) - b[i]}{\kappa_L^2 + (b[i])^2} \right) ]$$

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.144) \*)

For[i = 1, i < raices, i + +,

$$CC[i] = -C_2 * b[i] * \left( \frac{E^{B * L_{fo}} * (B * \text{Cos}[b[i] * L_{fo}] + b[i] * \text{Sin}[b[i] * L_{fo}]) - B}{B^2 + (b[i])^2} \right) ]$$

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.145) \*)

For[i = 1, i < raices, i + +,

$$DD[i] = C_2 * H_0 * \left( \frac{E^{B * L_{fo}} * (b[i] * \text{Cos}[b[i] * L_{fo}] - B * \text{Sin}[b[i] * L_{fo}]) - b[i]}{B^2 + (b[i])^2} \right) ]$$

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.146) \*)

For[i = 1, i < raices, i + +,

$$EE[i] = C_1 * b[i] * \left( \frac{E^{-B * L_{fo}} * (B * \text{Cos}[b[i] * L_{fo}] - b[i] * \text{Sin}[b[i] * L_{fo}]) - B}{B^2 + (b[i])^2} \right) ]$$

(\* Subrutina para calcular los valores de la ecuación (3.147) \*)

For[i = 1, i < raices, i + +,

$$FF[i] = C_1 * H_0 * \left( \frac{E^{-B * L_{fo}} * (b[i] * \text{Cos}[b[i] * L_{fo}] + B * \text{Sin}[b[i] * L_{fo}]) - b[i]}{B^2 + (b[i])^2} \right) ]$$

(\* Subrutina para calcular el valor de la temperatura, ecuación (3.141) \*)

T[z\_, t\_] := T\_amb + (C\_3 \* E^{-\kappa\_L \* z} + C\_2 \* E^{B \* z} + C\_1 \* E^{-B \* z}) +

$$\left( E^{(-B * B * \alpha * t)} * \sum_{i=1}^{\text{raices}-1} \left( \frac{E^{(-b[i] * \alpha * t)} * (b[i] * \text{Cos}[b[i] * z] + H_0 * \text{Sin}[b[i] * z])}{\frac{1}{2} \left( (b[i])^2 + H_0^2 \right) \left( L_{fo} + \frac{H_L}{(b[i])^2 + H_0^2} \right) + H_0} \right) * \right.$$

(AA[i] + BB[i] + CC[i] + DD[i] + EE[i] + FF[i]))

(\* Subrutina para almacenar los resultados de la temperatura \*)

p := 6

q := 27

For[i = 1, i < 7, i + +,

For[j = p, j < q, j + +, TTEO[i, j - 1] = T[Lf[i], (j - 6) \* 60]]

TableForm[Table[k, j], {k, 0, 6}, {j, p + 1, q}]

For[j = 7, j < q - 1, j + +,

For[k = 0, k < 7, k + +, TTEO[k, j] >>> Temperatura.txt]]



## Apéndice B

### Calibración del radiómetro

Para la calibración del radiómetro fijamos distintas potencias radiativas a ser medidas al acercar o alejar la termopila de la fuente luminosa. Mediante el sistema de adquisición de datos, tomamos las lecturas de voltaje del radiómetro a través de su salida analógica. Es decir, las intensidades luminosas de la lámpara son transducidas por el radiómetro y adquiridas por el SAD a través de lecturas de voltaje.

Para la calibración tomamos en cuenta la resolución de la salida analógica del voltaje (0.05%) del radiómetro, la incertidumbre del SAD para la medición de voltaje (0.0004%) y la incertidumbre del radiómetro para los valores desplegados en pantalla para el rango de medición de 3W (2% aproximadamente según datos del fabricante (*Oriel, 1999*)).

En la figura B.1, se observa la curva de calibración de la potencia como función del voltaje. Primero se llevó a cabo la regresión lineal de las parejas de puntos  $(x_i, y_i)$ , donde  $x_i$  es el valor de voltaje medido en volts y  $y_i$  es el valor de la intensidad de potencia medida en watts, tal que la curva de calibración tiene la forma

$$y = mx + b, \quad (\text{B.1})$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta, la cual se calcula mediante

$$m = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (\text{B.2})$$

y  $b$  es la ordenada al origen, determinada por

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (\text{B.3})$$

En seguida, en términos de la desviación estándar

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (\delta y_i)^2}{n - 2}}, \quad (\text{B.4})$$

se calcula la desviación de la pendiente  $s_m$ ,

$$s_m = s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (\text{B.5})$$

y la desviación de la ordenada al origen  $s_b$ ,

$$s_b = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \quad (\text{B.6})$$

para obtener la curva de calibración de la forma

$$y = (m \pm s_m) x + (b \pm s_b), \quad (\text{B.7})$$

donde  $x$  representa el valor de la lectura de voltaje y  $y$  es el valor de la intensidad de potencia.

En la ecuación (B.4), el valor para cada  $\delta y_i$  corresponde al valor absoluto de la incertidumbre ( $\pm 2\%$ ) para la medición de potencia radiativa  $y_i$ , esto es  $\delta y_i = |0.02 y_i|$ . Es importante mencionar que durante el cálculo de la regresión lineal no se consideró la incertidumbre asociada con la medición de voltaje, ya que dicha incertidumbre es de aproximadamente  $\pm 0.06\%$  y resulta despreciable comparada con la incertidumbre para la medición de potencia radiativa.

De esta manera, la curva de calibración para la medición de potencia a través de la salida de voltaje del radiómetro cuando se utiliza el SAD es,

$$Q [W] = (3.0 \pm 0.02) V + (0.00 \pm 0.002), \quad (\text{B.8})$$

donde  $V$  es el valor de la lectura de voltaje en volts y  $Q$  es la potencia radiativa en watts.

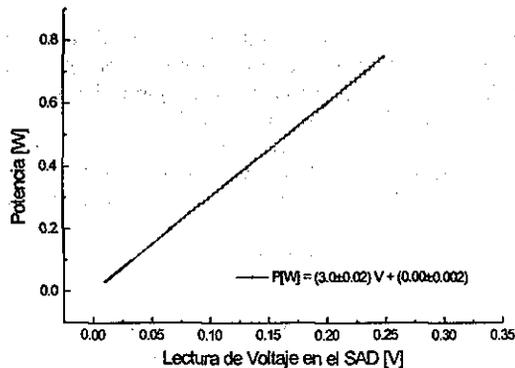


Figura B.1: Curva de calibración del radiómetro.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

## Apéndice C

# Medición de la temperatura en la superficie de la fibra óptica

Para llevar a cabo mediciones de temperatura sobre superficies, se recomienda incrustar ligeramente la punta de prueba de los termopares sobre la superficie en la que se lleva a cabo la medición. Esta situación asegura que la medición de temperatura ofrece una mayor exactitud, pues la punta del termopar está circundada por una cantidad de aire menor al estar embebida en la superficie.

Sin embargo, debido a que no es posible medir la temperatura al interior de la fibra óptica sin alterar las condiciones de propagación de la energía radiativa que se encuentra pasando a través de ésta, las mediciones de temperatura se llevaron a cabo con termopares cuyas puntas de prueba fueron colocadas y pegadas únicamente sobre la superficie de la fibra óptica sin la posibilidad de estar incrustadas.

Para estimar el error cometido durante las mediciones de temperatura de la fibra óptica, llevamos a cabo el siguiente experimento.

Por inicio, consideramos el tipo de material de la fibra óptica, en este caso  $\text{SiO}_2$  y sugerimos el uso de un vaso de precipitado de vidrio Pyrex, pues este material presenta propiedades muy similares al  $\text{SiO}_2$  de alta pureza.

En seguida se llevaron a cabo cuatro ligeras perforaciones sobre la superficie del vaso de precipitado Pyrex sin llegar a traspasar la pared del vaso. Estas perforaciones se hicieron con un diámetro aproximado de 0.4mm y una profundidad de 0.2mm, cabe mencionar que presentaban forma cilíndrica. En la figura C.1 se muestra los detalles como fueron colocados los termopares.

Para pegar los termopares se utilizó cemento *CC High Temperature Cement* de la marca Omega. Las principales propiedades de este cemento se muestran en la tabla C.1

Propiedad Física	
Conductividad térmica [ $Btu - in/ft^2hr$ ]	8
Máxima temperatura de operación [ $^{\circ}C$ ]	843
Constante dieléctrica	5.0-7.0
Coefficiente de expansión térmico [ $In/In/^{\circ}F$ ]	$4.6 \times 10^{-6}$

Tabla C.1: Propiedades del cemento CC High Temperature Cement - Omega (datos tomados de <http://www.britishelectricals.com/>)

Para comparar las mediciones entre termopares embebidos y aquellos que estaban sólo en la superficie, consideramos una separación entre uno y otro igual con 1 cm. De esta manera contamos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

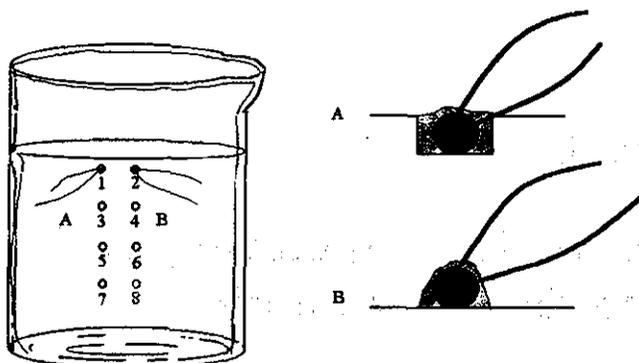


Figura C.1: Colocación de los termopares en el vaso de precipitado. Los de tipo A se encuentran incrustados en la superficie mientras que los tipo B sólo descansan sobre ésta.

cuatro termopares embebidos tipo A y cuatro sobre la superficie tipo B como se muestra en la figura C.1.

Por último el vaso de precipitado se llenó con agua a  $60^{\circ}\text{C}$  y tomamos las mediciones de temperatura para 3 corridas experimentales.

Notamos que la diferencia entre la medición de temperatura de los termopares embebidos tipo A y los termopares de superficie tipo B no supera  $0.3^{\circ}\text{C}$ . Cabe mencionar que esta diferencia de temperatura no es mayor que el valor de incertidumbre en la calibración de los termopares.

En la tabla C.2 se reportan las diferencias de temperatura entre los termopares tipo A y los termopares tipo B tomados en parejas (ver figura C.1).

Termopares	Diferencia de Temperatura
1-2	-0.3
3-4	-0.1
5-6	-0.2
7-8	-0.3

Tabla C.2: Diferencia de temperatura entre termopares tipo A y tipo B

Así, los termopares pares corresponden a termopares tipo A y los pares al tipo B. En la tabla C.2 se puede observar la diferencia de temperatura entre los de tipo A y los de tipo B.

Por tanto concluimos que los errores que se atañen en la medición de temperatura sobre la superficie de la fibra óptica no son mayores que el valor de la incertidumbre de la medición.

Ya que la fibra óptica que consideramos presenta un diámetro muy pequeño del orden de  $1\text{mm}$ , es de esperar que no se presenten gradientes de temperatura significativos en la sección transversal de la fibra, es decir que la temperatura será prácticamente igual tanto en el centro de la fibra como en las paredes de la misma.

## Bibliografía

- Arfken G. (1970), *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, N. Y.
- Artiglia M., Caponi R., Cisternino F., Naddeo C. and Roccatò D. (1996). A new method for the measure of the non-linear refractive index of optical fiber, *Optical Fiber Tech.*, **2**, 75.
- Badescu V., Landsberg P.T. and De Vos A. (1997), Statistical Thermodynamic Foundation for Photovoltaic and Photothermal conversion III: Application to Hybrid Solar Converters, *J. Appl. Phys.*, **81**, 8, 3692.
- Badescu V. (1998), Accurate Upper Bound for the Efficiency of Converting Solar Energy into Work, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **31**, 820.
- Bansal N. P. and Doremus R. H. (1986), *Handbook of Glass Properties*, Academic Press, N. Y.
- Bejan A. (1993), *Heat Transfer*, John Wiley and Sons, Inc., N. Y.
- Bejan A. (1996), *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, N. Y.
- Bejan A. (1997), *Advanced Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., N. Y.
- Betz H., Burcham P. B. and Ewing G. M. (1984), *Differential Equations with Applications*, Harper Inter. Edition, Harper & Row Publishers, N.Y.
- Bladwin G. C. (1969), *An Introduction to Non-Linear Optics*, Plenum Press, N. Y.
- Blank D. A. (1998), Universal Power Optimized for Reciprocating Internally Reversible Stirling-like Heat Engine Cycles with Regeneration and Linear External Heat Transfer, *J. Appl. Phys.*, **84**, 5, 2385.
- Bois G. P. (1961), *Tables of Indefinite Integrals*, Dover Publications, Inc., N. Y.
- Braun J. E., and Mitchell J. C. (1983), *Solar Geometry for Fixed and Tracking Surfaces*, *Solar Energy*, **31**, 349.
- Cariou J. M., Dugas J. and Martin L. (1982), Transport of Solar Energy with Optical Fibres, *Solar Energy*, **29**, 397.
- Cariou J. M., Dugas J. and Martin L. (1985), Theoretical Limits of Optical Fibre Solar Furnaces, *Solar Energy*, **34**, 329.
- Cervantes J. G. (1999), *Fundamentos de Transferencia de Calor*, Fondo de Cultura Económica, México D. F.
- Costea M. and Feit M. (1998), The Effect of the Overall Heat Transfer Coefficient Variation on the Optimal Distribution of the Heat Transfer Surface Conductance or Area in the Stirling Engine, *Energy Convers. Mgmt.*, **39**, 1753.
- Costea M., Petrescu S. and Harman C. (1999), The Effect of Irreversibilities on Solar Stirling Engine Cycle Performance, *Energy Convers. Mgmt.*, **40**, 1723.
- Cutolo A. and Rendina I. (1989) Coupling Efficiency of Non-Uniform Optical Fibers for Solar Energy Applications, *Solar Energy Materials* **18**, 191.
- Curzon F. L. and Ahlborn B. (1975), Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output, *Am. J. Phys.*, **43**, 22.

- Crystran (1999), <http://www.crystran.co.uk/sio2data.htm>
- Chopra K. L. and Das S. R. (1981), *Thin Film Solar Cells*, Plenum Press, N. Y. and London.
- Chen J. (1997), Effect of the Regenerative Losses on the Efficiency of a Stirling Engine at Maximum Power Output, *Int. J. Ambient Energy*, **18**, 107.
- De Vos A. (1992), *Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversion*, Oxford University Press, G. B.
- De Vos A., Landsberg P.T., Baruch P. and Parrot J. E. (1993), Entropy Fluxes, Endoreversibility, and Solar Conversion, *J. Appl. Phys.*, **74**, 3631.
- Derrick R. W. and Grossman S. I. (1981), *Elementary Differential Equations with Applications*, Addison-Wesley, USA.
- Duffie J. A. and Beckman W. A. (1991), *Solar Engineering of Thermal Processes*, Wiley-Interscience, N. Y.
- Dupont (2000), Properties handbook, <http://www.dupont.com/teflon/chemical/tefz.html>
- Edwards C. H. Jr. and Penney D. E. (1985), *Elementary Differential Equations with Applications*, Prentice-Hall, U. S. A.
- Erbay L. B. and Yavuz H. (1997), Analysis of the Stirling Heat Engine at Maximum Power Conditions, *Energy*, **22**, 645.
- Feuermann D. and Gordon, J. M. (1998), Solar Surgery: Remote Fiber Optic Irradiation with Highly Concentrated Sunlight in Lieu of Lasers, *Optical Engineering*, **37**, 2760.
- Feuermann D. and Gordon, J. M. (1999), Solar Fiber-Optic Mini-Dishes: A New Approach to the Efficient Collection of Sunlight, *Solar Energy*, **65**, 159.
- Gordon J. M. (1988), On Optimised Solar-Driven Heat Engines, *Solar Energy*, **40**, 457.
- Gordon J. M. and Choon K. N (2000), High-Efficiency Solar Cooling, *Solar Energy*, **68**, 23.
- Goktum S. (1996), Finite-Time Optimization Solar-Driven Heat Engine, *Solar Energy*, **56**, 617.
- Grätzel M. (1983), *Energy Resources Through Photochemistry and Catalysis*, Academic Press, N. Y.
- Gurwich I. (1997). A Novel Approach to Non-Linear Propagation of Wide Light Beams, *J. Phys. D. Appl. Phys.*, **30**, 2183.
- Hagdorn P. (1988), *Non-Linear Oscillations*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, Great Britain.
- Hernández D., Antoine D., Olalde G. and Gineste J. M. (1999), Optical Fiber Reflectometer Couple With a Solar Concentrator to Determine Solar Reflectivity and Absorbity at High Temperature, *Journal of Solar Energy Engineering*, **121**, 31
- Hecht E. and Zajac A. (1976), *Optics*, Addison-Wesley, USA, .
- Hecht J. (1990), *Understanding Fiber Optics*, Howard W, Sams & Company, U. S. A.
- Hewlett-Packard Co. (1999), <http://www.hp.com/>
- Holman J. P. (1984), *Experimental Methods for Engineers*, McGraw Hill Inc, U. S. A.
- Jaramillo O.A. y del Río J.A. (1997), Aplicación de las Fibras Ópticas a la Energía Solar, Memoria de la XXI Reunión Nacional de Energía Solar; Chihuahua Chih., Octubre 1997, 285.
- Jaramillo, O. A. (1998), Transporte de Energía Solar Concentrada a Través de Fibras Ópticas: Acoplamiento Fibra-Concentrador y Estudio Térmico, Tesis de Maestría en Energía Solar (Fototérmica), UACPyP-CCH UNAM, México.
- Jaramillo O. A., Arriaga L. G., Sebastian P. J., Fernández A. M. and del Río J. A. (1998), Application of Optical Fibers in the Hydrogen Production by Photoelectrolysis. *Int. J. Hydrogen Energy*, **23**, 985.
- Jaramillo O. A. and del Río J. A. (1998), A Model for Heating Optical Fibers to Conduct Concentrated Solar Energy, *Renewable Energy WREC V (Pergamon, Florence Italy, 1998)*, **IV**, 2243.

- Jaramillo O. A., del Río J. A. and Huelsz G (1999), Thermal Study of Optical Fibres Transmitting Concentrated Solar Energy, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **32**, 1000.
- Jaramillo O. A., del Río J. A. and Huelsz G. (2000), Non-Linear Model For Absorption in SiO<sub>2</sub> Optical Fibers: Transport of Concentrated Solar Energy, *Solar Energy Mater. Solar Cells*, **64**, 209.
- Jaramillo O. A., del Río J. A. and Huelsz G (2002), A Theoretical and Experimental Thermal Study of SiO<sub>2</sub> Optical Fibres Transmitting Concentrated Radiative Energy, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **35**, 95.
- Jaramillo O. A. and del Río J. A. (2002), Optical Fibres for a Mini-Dish/Stirling System: Thermodynamic Optimization, *sent to J. Phys. D: Appl. Phys.*
- Jaramillo O. A. (2002), Solar Energy Conversion Using Optical Fibres: A Mini-Dish/Stirling System *sent to Renewable Energy WREC VII (Cologne, Germany, 2002)*.
- Kapitaniak T. (1991), Chaotic Oscillations in Mechanical System, Manchester University Press, Manchester and N. Y.
- Kato D. and Nakamura T. (1976). Application of Optical Fibers to the Transmission of Solar Radiation, *J. Appl. Phys.* **47**, 4528.
- Kaushik S. C. and Kumar S. (2000), Finite Time Thermodynamic Analysis of Endoreversible Stirling Heat Engine with Regenerative Losses, *Energy*, **25**, 989.
- Khatri N., Brown M. and Gerner F. (1993), Using Fiber Optics to Tap the Sun's Power, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **20**, 771
- Kribus A., Zik O and Karni J. (2000), Optical Fibers and Solar Power Generation, *Solar Energy*, **68**, 405.
- Landsberg G. S. (1984), Óptica, Mir Moscú, URSS.
- Liang D., Nunes Y., Fraser Monteiro L., Fraser Monteiro L. M. and Collares-Pereira M. (1997), 200 W Solar Energy Delivery with Optical Fiber Bundles, *J. SPIE* **3139** 217.
- Liang D., Fraser Monteiro L., Ribau Teixeira M., Fraser Monteiro L. M. and Collares-Pereira M. (1998), Fiber-Optic Solar Energy Transmission and Concentration, *Solar Energy Mater. Solar Cells*, **54**, 323.
- Loudon R. (1986), The Quantum Theory of Light, Oxford Science Publications, Great Britain.
- Lumonics Corporation (1999), <http://www.lumonics.com/>
- Modest M. F. (1993), Radiative Heat Transfer, McGraw Hill, N. Y.
- Navarrete-González T. D., Rocha-Martinez J. A. and Angulo-Brown F. (1997), A Müser-Curzon-Ahlborn Engine Model for Photothermal Conversion, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **30**, 2490.
- Ogbonna J. C., Soejima T. and Tanaka H. (1999), An Integrated Solar and Artificial Light System for Internal Illumination of Photobioreactors, *Journal of Biotechnology*, **70**, 289.
- Oriel Corporation (1999), <http://www.oriel.com/>
- Özisik M. N. (1989), Boundary Value Problems of Heat Conduction, Dover Publications, Inc., N.Y.
- Özisik M. N. (1993), Heat Conduction 2<sup>nd</sup> Ed., John Wiley and Sons, Inc., N. Y.
- Özisik M. N. (1994), Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC Press, N. Y.
- Patel A. P. (1984), A High Temperature Solar Energy Conversion Device Using Optical Waveguides, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **17**, 1743.
- Peill N. J. and Hoffmann M. R. (1997), Solar-Powered Photocatalytic Fiber-Optic Cable Reactor for Waste Stream Remediation, *J. of Solar Energy Engineering*, **119**, 229
- Polymicro Technologies (1999), <http://www.polymicro.com/>
- Rabl A. (1976), Comparison of Solar Concentrators., *Solar Energy*, **18**, 93.
- Rabl A. (1985), Active Solar Collectors and Their Applications, Oxford University Press. N. Y. and Oxford.

- Reitz J. R., Milford F. J. and Christy R. W. (1980), *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, U. S. A.
- Remoissents, M. (1994), *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Robieux J. (1975), Patent No. 75-14582 (I.N.P.I.) Intern, Class.
- Salah El-Din M. M. (1999), Thermodynamic Optimization of Irreversible Solar Heat Engines, *Renewable Energy*, **17**, 183.
- Serpone N. and Pelizzeti N. (1989), *Photocatalysis*, John Wiley & Sons, U.S.A.
- Siegel R. and Howell J. R. (1981), *Thermal Radiation Heat Transfer*, Mc. Graw-Hill, N.Y.
- Snyder A. W. and Love J. D. (1983), *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall. U.S.A.
- Stolen R. H. and Bjorkolm, J. E. (1982), Parametric Amplification and Frequency Conversion in Optical Fibers, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-18**, 1062.
- Vloc (1999), <http://www.vloc.com/fs.htm>
- West C. D. (1986), *Principles and Applications of Stirling Engines*, Van Nostrand Reinhold, N.Y.
- Wu F., Chen L., Wu Chin and Sun F. (1998), Optimum Performance of Irreversible Stirling Engine with Imperfect Regeneration, *Energy Convers. Mgmt.*, **39**, 727.
- Young J. A. and Woo B. K. (2000), Biological Desulfurization in an Optical-Fiber Photobioreactor Using an Automatic Sunlight Collection System, *Journal of Biotechnology*, **80**, 35.
- Zik O., Karni J. and Kribus A. (1999), The TROF (Tower Reflector with Optical Fibers): A New Degree of Freedom for Solar Energy Systems, *Solar Energy*, **67**, 13.