01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

VALUACION DE CONTRATOS FORWARD FUTUROS Y OPCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO ESQUIVEL PICHARDO

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

MEXICO, D.F. 2002

AGRADECIMIENTOS

A Dios, gracias por todo,
y por permitirme llegar a esta etapa de mi vida,
ya que no lo hubiera logrado
si él no hubiese estado presente en ella.

A la compañera que ha sido el apoyo,
la comprensión y la ayuda incondicional
y que ha compartido conmigo las alegrias
y los sinsabores. Gracias, MARÍA TERESA.

A mis hijas DANIELA y ARIADNA,
a las que quiero con toda el alma
y que son la fuerza y el aliento para soportar
cualquier situación por adversa que sea.
A ellas va dedicado este trabajo.

Al Dr. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ
por su tiempo, dedicación y dirección
para la elaboración de este trabajo.

Al Dr. RAFAEL MARTINEZ ENRIQUEZ
por el espacio proporcionado para que
este trabajo pudiera ser elaborado.

A la Maestra ISABEL PATRICIA AGUILAR JUAREZ
por la completa y magnífica revisión
que hizo para mejorar este escrito.

Al Dr. HUGO MEZA PUESTO
por los consejos y sugerencias
para presentar el grado.

A todos mis maestros y compañeros de la maestría.
Gracias por transmitirme sus conocimientos
y por su grata compañia.

A toda mi familia.
Gracias por su cariño.

A mis amigos ALONSO RUIZ y EDGAR HERNANDEZ
Por su apoyo incondicional.

A todos los compañeros que me ayudaron
en las traducciones e interpretaciones
de los libros y artículos.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Los productos derivados han sido uno de los desarrollos importantes en los mercados financieros en los últimos años. En muchas situaciones los inversionistas que usan los productos derivados como cobertura, así como los especuladores, encuentran más atractivo negociar productos derivados sobre activos financieros que negociar estos activos en sí mismos. Algunos productos derivados, tales como las opciones y los contratos futuros, son negociados en las bolsas. Otros han sido dispuestos por clientes corporativos de instituciones financieras o agregados a una nueva emisión de productos por aseguradoras. Parece ser que no existe escasez de nuevas ideas en esta área.

Este trabajo tuvo dos objetivos principales. El primero consistió en explorar las propiedades de los productos derivados que son comúnmente encontrados en el mercado; el segundo es mostrar un esquema teórico con el que se valúan dichos productos derivados y tratar de cubrir todos los aspectos que conciernen a la operación de los mercados de manera accesible para un amplio rango de inversionistas.

La base de la matemática usada es el movimiento Browniano, los Procesos de Wiener y el lema de Ito; más, sin embargo, los resultados obtenidos utilizan matemática sencilla, pero suficiente para explicar la manera en que operan los mercados y la forma en que ayudan a participar en la actual globalización comercial donde resulta indispensable contar con coberturas que auxilien a cubrir riesgos innecesarios y efectuar planeaciones financieras más confiables.

Algunos productos derivados, tales como los mercados de futuros y sus opciones, no sólo sirven como herramientas de cobertura, de hecho son utilizados en la mayoría de los casos como vehículo de especulación, debido a su alto apalancamiento y a las oportunidades que ofrecen de obtener considerables utilidades en relación al capital que requieren.

Se buscó la bibliografía que aparentemente debiera traer la información adecuada encontrándose que la mayoría de los libros y artículos proporcionan el tema al primer propósito pero sólo el artículo original [1] y el libro de Hull [6] contienen el segundo tema, que es la parte fuerte del trabajo. Fuí a la Bolsa Mexicana de Valores pero no proporcionaron información; esto por mera protección de los inversionistas. Así que se tuvieron que buscar conclusiones y resultados de otras fuentes.

En el capítulo 1 se introduce la terminología general de los contratos futuros, opciones, swaps y algunos otros productos derivados. El capítulo 2 especifica la forma, cuerpo y contenido de los contratos forward y futuros, así como algunas pequeñas estrategias usadas en estos contratos. Asímismo, se muestra un argumento de arbitraje en el contexto de una situación simple. En el capítulo 3 se explica el modelo del movimiento Browniano geométrico y su relación con el comportamiento de los precios de las acciones. En el capítulo 4 se presenta la metodología de valuación para los productos derivados mediante la ecuación diferencial de Black-Scholes y el comportamiento del portafolio de bajo riesgo.

CAPÍTULO 1

RESUMEN

Un *Producto Derivado* es un instrumento financiero cuyo valor depende de los valores de otra u otras variables financieras, estas últimas llamadas variables subyacentes, o simplemente subyacentes. En años recientes el mercado de los productos derivados ha mostrado un incremento importante. Acompañado de este auge, el estudio de dichos instrumentos financieros ha cobrado un interés aún mayor en el campo de las finanzas. Los *Futuros* y las *Opciones* son ahora activamente negociados en muchos y muy diversos subyacentes. Los *Contratos Forward* y los *Swaps* son usados regularmente dentro de Instituciones financieras y sus clientes corporativos. Muy frecuentemente, las variables subyacentes de los productos derivados son los precios de los bienes negociados. Una opción de acciones, por ejemplo, es un producto derivado cuyo precio se deriva del precio de la acción. Además, como veremos más adelante, el valor de los productos derivados puede depender casi de cualquier variable, desde los precios de la carne de cerdo hasta la cantidad de nieve que cae en un cierto centro turístico en una zona montañosa.

1.1. CONTRATOS FORWARD

Un *Contrato Forward* o adelantado es un producto derivado particularmente simple. Es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo financiero a un cierto precio en una fecha preestablecida. El contrato es usualmente hecho entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos. Una de las partes en un contrato forward toma una *posición larga*, es decir, una de las partes está de acuerdo en comprar el activo financiero, en una fecha futura y a un precio predeterminado. La otra parte, toma una *posición corta*, es decir, la contraparte está de acuerdo en vender el activo financiero en la misma fecha y por el mismo precio. El precio pactado por ambas partes en un contrato forward será llamado *Precio de Entrega.* Al mismo tiempo que el contrato es establecido, el precio de entrega es elegido de tal manera que el valor del contrato forward para ambas partes es cero, esto quiere decir que no cuesta nada tomar cualquiera de las posiciones, ya sea larga o corta. La negociación de este tipo de contratos no tiene costo alguno.

El *precio forward* para un cierto contrato está definido como el precio de entrega, el cual hace que el contrato tenga un valor cero. El precio forward y el precio de entrega son por lo tanto iguales, en el tiempo para el cual el contrato dió inicio. Sin embargo, mientras pasa el tiempo, el precio forward esta sujeto a cambios, y el precio de entrega, por supuesto, se mantiene igual. Por lo tanto, los dos precios no son iguales para cualquier tiempo después de iniciado el contrato. Generalmente, el precio forward, en un tiempo dado, depende del vencimiento del contrato. Por ejemplo, el precio forward para un contrato que se compra o vende a tres meses, difiere de aquél que se compra o vende a 6 meses. Un contrato forward se colaca exclusivamente al vencimiento. El titular de la posición corta hace entrega del activo financiero al titular de la posición larga en un monto en efectivo igual al precio de entrega. La variable subyacente principal del valor de un contrato forward es el precio de mercado del activo financiero.

Como se mencionó anteriormente, un contrato forward tiene valor cero cuando inicia. Si, subsecuentemente, el precio del activo financiero sube, el valor de una posición corta en un contrato forward baja. Si el precio del activo financiero baja, se genera la situación contraria.

Las corporaciones, frecuentemente, inician contratos forward sobre divisas. Considere las siguientes cotizaciones de la libra esterlina con respecto al dólar americano.

	Tipo de cambio dls. vs libra esterlina
spot	1.8470
30 días forward	1.8442
90 días forward	1.8381
180 días forward	1.8291

La primera cotización ignora comisiones y otros costos de transaccion; la libra puede ser comprada o vendida al contado (es decir, para una entrega virtualmente inmediata) a un tipo de cambio de $1.8470 dólares por libra esterlina. La segunda cotización indica que el precio para un contrato forward (o tipo de cambio forward) para comprar o vender libras esterlinas a 30 días es $1.8442 dólares por libra esterlina y así sucesivamente. Supongamos que una empresa tiene que pagar $1,000,000 en 90 días. La empresa puede elegir, sin costo alguno, iniciar un contrato forward con posición larga para comprar $1,000,000 en 90 días por $1,838,100 dólares o comprar libras al precio spot, abrir una cuenta bancaria en libras y hacer el depósito correspondiente. En ambos casos cubre sus divisas del riesgo en el tipo de cambio del precio que obtendrá por las libras al recibirlas. Sin embargo, en la primera opción el costo de la inversión inicial es cero.

Los contratos forward pueden ser usados para cobertura o especulación. Un inversionista que piensa que la libra esterlina aumentará su valor con respecto al dólar puede especular tomando una posición larga en un contrato forward sobre la libra esterlina. Similarmente, un inversionista que piensa que la libra esterlina bajará de valor, puede especular tomando una posición corta. Supongamos que el tipo de cambio actual de la libra esterlina a 90 días es $1.8600. Un inversionista que tomó una posición larga en un contrato forward a 90 días puede comprar libras por un valor de $1.8381 cuando estas valen en el mercado $1.8600. En este caso, el inversionista tendrá una ganancia de $0.0219 por libra esterlina. Similarmente, un inversionista con una posición corta a tres meses tendrá una pérdida de $0.0219 por libra esterlina.

Existe una diferencia importante entre especular usando mercados forward y especular comprando activos subyacentes (en este caso, moneda extranjera) en el mercado spot. Cuando se compran activos subyacentes en el mercado spot se requiere un pago inicial en efectivo igual al valor total de lo que se compre. Si se utiliza un contrato forward del mismo monto de los activos subyacentes, no se requiere pago en efectivo inicial. Por lo tanto especular usando mercados forward proporciona al inversionista grandes ventajas.

El valor de vencimiento o valor final de una posición larga en un contrato forward por unidad de un activo financiero es

$$S_T - K,$$

donde K es el precio de entrega y S_T es el precio que presenta el activo financiero al vencimiento del contrato. Similarmente, el valor final de una posición corta en un contrato forward por unidad de un activo financiero es

$$K - S_T.$$

Estos valores finales están ilustrados en la figura 1.1. Si los costos no se han establecido en un contrato forward, el valor final de los contratos es también la ganancia o la pérdida total de los inversionistas del contrato. Los contratos forward pueden ser adaptados como instrumentos de tasas de interés doméstico, así como de moneda extranjera.

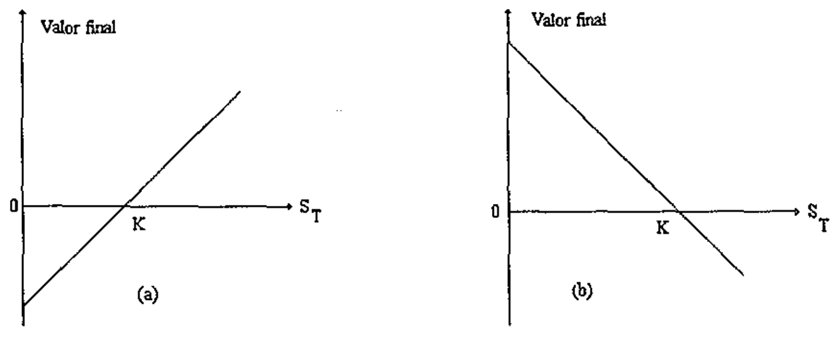

Figura 1.1. Valores finales de contratos forward. (a) posición larga. (b) posición corta. Precio de entrega=K, precio de los activos financieros al vencimiento=S_T.

Por ejemplo, dos empresas acuerdan una tasa de interés anual del 7% la cual se aplicará a depósitos en periodos de 6 meses, la tasa spot resultó ser diferente de 7%. Una empresa paga y la otra recibe el valor presente de la diferencia de intereses entre los flujos de efectivo. Esto es conocido como un *Acuerdo de Tasa Forward o Adelantada* (FRA).

1.2. CONTRATOS FUTUROS

Un *Contrato Futuro*, igual que un contrato forward, es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un bien (*commodities*) o un activo financiero en una fecha futura por un cierto precio. Sin embargo, a diferencia de los contratos forward, los contratos futuros son negociados en una bolsa de futuros. Para que el intercambio sea posible, el contrato especifica ciertas características estandarizadas. Aunque las dos partes del contrato no necesariamente se conocen, se proporciona a las dos partes la garantía de que el contrato será respetado a través de la intervención de una cámara de compensanción.

Las bolsas de futuros más importantes donde se negocian este tipo de productos derivados son la Chicago Board Of Trade y la Chicago Mercantile Exchange. En ambos mercados se negocian una gran cantidad de contratos sobre bienes y activos. Los bienes incluyen cerdos, ganado vivo, azúcar, lana, madera, cobre, aluminio, oro y estaño. Los activos financieros incluyen divisas, bonos y acciones. Un contrato futuro difiere de un contrato forward en que la fecha exacta de entrega para este último usualmente no está estandarizada. El contrato futuro está diseñado para una entrega en una fecha específica en la que la entrega tiene que ser hecha. Para bienes, las fechas de entrega se establecen a menudo al concluir el mes. El contrato especifica la cantidad de bienes y activos financieros que serán entregados.

En el caso de un bien, el contrato futuro también especifica la calidad del producto y el lugar de entrega. Considere, por ejemplo, un contrato futuro de trigo, negociado en la Chicago Board of Trade. El tamaño del contrato es de 500 bushels. Los contratos tienen cinco fechas de entrega en un año (marzo, mayo, julio, septiembre y diciembre). El contrato especifica la calidad del trigo y el lugar donde la entrega debe ser hecha.

Los *Precios Futuros* regularmente son reportados en la prensa financiera. Supongamos que el primero de septiembre, el precio futuro del oro para diciembre es cotizado en $500. Con este precio el inversionista puede comprar o vender oro para una entrega en diciembre. Esto es determinado en el piso de remates de la bolsa de futuros mediante la oferta y la demanda. Si la mayorí de inversionistas quieren asumir más posiciones largas que cortas, los precios suben; en caso contrario, los precios bajan; además, los precios futuros pueden cambiar de un día a otro.

Asimismo, los contratos futuros difieren de los contratos forward en que existen *Márgenes de mercado* o liquidaciones diarias. Para ilustrar esto, considere a un inversionista que contacta a su corredor de bolsa el primero de septiembre para comprar 100 onzas de oro a $500 por onza que serán entregados en diciembre del mismo año. El monto total del contrato es de $50,000. El corredor requiere que el inversionista deposite fondos llamados *Margen a cuenta* como garantía de la inversión. El monto que será depositado en el momento en que el contrato es iniciado se conoce como *Margen inicial.* Supongamos que este margen es del 20% del monto en dólares del contrato, o $10,000. Cada día que se comercia, como los precios futuros cambian, el margen a cuenta es ajustado para reflejar lo que el inversionista gana o pierde. Supongamos, por ejemplo, que para el final del primer día el precio del oro para diciembre ha disminuido a $490. El inversionista ha perdido 100×10=$1,000. El balance en el margen a cuenta por tanto se redujo a $9,000. Similarmente, si el precio sube a $510 el margen a cuenta se incrementa a $11,000. El inversionista está en su derecho de renunciar cualquier balance en el margen a cuenta que exceda al margen inicial. Para asegurar que el balance en el margen a cuenta nunca sea negativo, existe un *Margen de mantenimiento*, el cual es algo menor que el margen inicial.

Si el balance en el margen a cuenta cae debajo del margen de mantenimiento el inversionista recibe una *Llamada al margen* y es requerido para ajustar el margen a cuenta de manera que el margen inicial se nivele inmediatamente. Si el inversionista hace caso omiso de esta llamada al margen, el corredor cierra la posición cancelando el contrato. En este caso el inversionista cierra la posición neutralizando el contrato que existe para vender 100 onzas de oro para una entrega en diciembre.

TABLA 1.1 Operación de márgenes para un contrato futuro

DÍA	PRECIOS FUTUROS	GANANCIA DIARIA (PÉRDIDA)	GANANCIA ACUMULADA (PÉRDIDA)	BALANCE DE CUENTA	LLAMADA AL MARGEN
0	500			10,000	
1	490	(1,000)	(1,000)	9,000	
2	495	500	(500)	9,500	
3	492	(300)	(800)	9,200	
4	488	(400)	(1,200)	8,800	
5	475	(1,300)	(2,500)	7,500	
6	478	(300)	(2,200)	7,800	
7	469	(900)	(3,100)	6,900	3,100
8	468	(100)	(3,200)	9,900	
9	474	(600)	(2,600)	10,500	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
65	520		2,000		

La tabla 1.1 ilustra la operación del margen a cuenta para una posible secuencia de precios futuros en el caso del inversionista considerado anteriormente. El margen de mantenimiento, para ilustrar los propósitos de este ejemplo, será de $7,000. En el séptimo día el balance del inversionista cae $100 debajo de este nivel, con lo que resulta que el corredor requiere de un margen adicional de $3,100. La tabla indica que el inversionista paga este margen para cerrar el negocio en el día ocho.

El precio futuro, cuando la entrega se lleva a cabo, puede ser el mismo que el precio spot en este tiempo. En la tabla 1.1 vemos que este precio es $520 por onza y que se hace la entrega en el día 65, por lo que el inversionista tiene una ganancia de $2000 en la vida total del contrato. Si el inversionista ha tomado una posición corta en lugar de una posición larga, los signos del efectivo en las columnas 3 y 4 pueden ser invertidos. El inversionista ganará si el precio decrece y perderá si el precio aumenta. Un precio acumulado que se incremente en $30 o más conducirá a una llamada al margen.

Un inversionista generalmente ganará intereses en el balance de su monto al margen siempre que el balance en el monto no represente un costo verdadero. A menudo, los bonos del tesoro son usados para satisfacer los requerimientos del margen.

La diferencia esencial entre un contrato futuro y un contrato forward es el costo de oportunidad de efectivo. En un contrato forward se produce la liquidación al final del contrato, mientras que en un contrato futuro se liquida sobre bases diarias. Iniciar un contrato forward para comprar oro por \$500 la onza a 65 días, en el ejemplo de la tabla 1.1 también lleva a una ganancia acumulada de \$2000. Sin embargo, la ganancia neta puede ser realizada al final de la vida del contrato.

Como se mencionó anteriormente el cumplimiento de las partes de un contrato futuro es garantizada por la *Camara de compensación.* De la misma forma en que los inversionistas son requeridos, las casas de bolsa también son requeridas por la cámara de compensación para mantener márgenes con ellos. Así, en el día 1 del ejemplo, el monto al margen de los clientes con la casa de bolsa y ésta a su vez con la cámara de compensación se reduce en \$1,000; el día 2, ambos montos se incrementan en \$500, y así sucesivamente.

Del mismo modo que los contratos forward, los contratos futuros pueden ser usados para cubrir un cambio en el precio de los activos subyacentes. Por ejemplo, un granjero que tendrá trigo para vender en tres meses puede fijar el precio tomando una posición corta a tres meses en un contrato futuro de trigo. Similarmente, un molinero puede fijar el precio al que será pagado en tres meses si toma una posición larga en el mismo contrato. Los contratos futuros pueden ser usados también por especuladores; similar a los contratos forward, ellos tienen más ventaja sobre los correspondientes contratos futuros por que se requiere de una inversión relativamente pequeña. Una persona que siente que el precio spot a tres meses excederá los precios futuros a tres meses puede comprar contratos futuros; mientras que una persona que cree lo contrario puede vender contratos futuros. Finalmente, es importante notar que en una basta mayoría de contratos futuros la entrega nunca es hecha. El titular del contrato normalmente cierra su o sus posiciones antes del vencimiento para iniciar un nuevo contrato compensado con el mismo mes de entrega que el contrato original. En contraste, la entrega se hace normalmente en un contrato forward.

1.3. OPCIONES

Las *Opciones* sobre acciones primeramente fueron negociadas como un tipo de intercambio organizado en 1973. Desde entonces han tenido un alto crecimiento en los mercados de opciones. Las opciones son ahora negociadas en múltiples formas de intercambio por todo el mundo. Están disponibles sobre acciones, índices de acciones, moneda extranjera, instrumentos de deuda, bienes y contratos futuros.

Existen dos tipos básicos de opciones. Una opción *Call* proporciona al titular el *derecho de comprar* activos financieros en una cierta fecha por un precio establecido. Una opción *Put* proporciona al titular el *derecho de vender* los activos financieros en una cierta fecha por un precio establecido. El precio en el contrato es conocido como el *Precio de ejercicio* o precio notable; la fecha en el contrato es conocida como la *fecha de expiración, fecha de ejercicio o fecha de vencimiento.* Existen dos tipos básicos de opciones: *Americanas* y *Europeas.* Una opción *Americana* puede ser ejercida en cualquier periodo fuera de la fecha de vencimiento. Las opciones *Europeas* sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. La mayoría de las opciones que son negociadas en las casas de bolsa son Americanas, sin embargo, las opciones Europeas son generalmente más fáciles de analizar que las opciones Americanas, y algunas de las propiedades de una opción Americana son frecuentemente deducidas de sus homólogas Europeas.

Se debe enfatizar que una opción proporciona al titular el derecho de hacer o decir algo, pero no tiene porque ejercer este derecho. Este hecho distingue las opciones de los forwards y los futuros donde el titular está obligado a comprar o vender los bienes. Note que, mientras no hay costos (excepto por márgenes) al iniciar un contrato forward o un futuro, un inversionista debe pagar para comprar un contrato de opciones.

Considere la situación de un inversionista que compra 100 opciones call Europeas de acciones IBM con un precio de ejercicio de $140. Suponga que el precio spot de las acciones es $138, la fecha de vencimiento de la opción es en dos meses, y el precio de la opción es $5. Si las opciones son Europeas, el inversionista puede ejercer sólo al vencimiento; si el precio de las acciones en esta fecha es menor que $140, el titular claramente elige no ejercer su derecho (no conviene comprar por $140 una acción que tiene valor de mercado menor que $140). En estas circunstancias, el inversionista pierde la totalidad de la inversión inicial de $500. Si el precio de las acciones está arriba de $140 en la fecha de vencimiento, la opción será ejercida. Suponga por ejemplo, que el precio de la acción es de $155. Para ejercitar la opción el inversionista debe ser capaz de comprar 100 acciones a un precio de $140 por acción. Si las acciones son vendidas inmediatamente, el inversionista tendrá una ganancia de $15 por acción o $1,500 en total, ignorando costos de transacción. Cuando el costo inicial de la opción es tomado en cuenta, la ganancia neta del inversionista es de $10 por opción o $1,000 en total. La figura 1.2 muestra la manera en la cual la ganancia/pérdida neta por opción varía con el precio final de la acción.

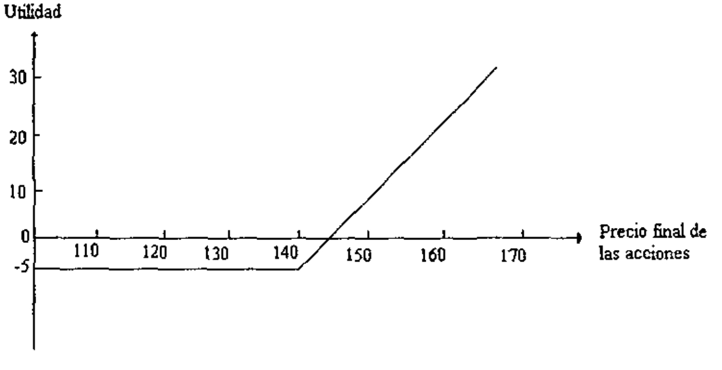

Fig.1.2. Utilidad por comprar una opción call Europea de acciones de IBM. Precio de la opción=$5. Precio de ejercicio=$140

Mientras el comprador de una opción call espera que el precio de una acción aumente, el comprador de una opción put espera que baje. Considere un inversionista que compra 100 opciones put Europeas de Exxon con un precio de ejercicio de $90. Suponga que el precio actual es de $86, la fecha de vencimiento de la opción es de tres meses y el precio de la opción es de $7. Si las opciones son Europeas, se ejercerán sólo si el precio de las acciones está debajo de $90. Suponga que el precio de las acciones es de $65 en esta fecha. El inversionista puede comprar 100 acciones de $65 por acción y, bajo los términos de la opción put, vender la misma acción en $90 y tener una ganancia de $25 por acción o $25,000 en total (nuevamente los costos de transacción son ignorados). Cuando el costo inicial de la opción es tomado en cuenta, la ganancia neta del inversionista es $18 por opción, o $18,000 en total. De hecho, si el precio final de la acción está arriba de $90, la opción put termina sin valor y el inversionista pierde $7 por opción, o $700 en total. La figura 1.3 muestra cual sería la pérdida/ganancia del inversionista por opción con el precio final de la acción.

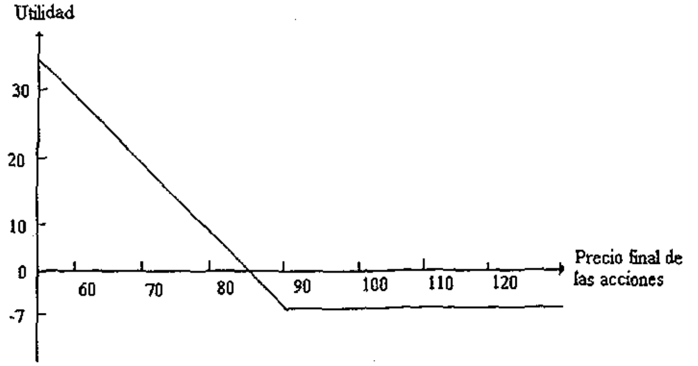

Fig.1.3. Utilidad por comprar una opción put Europea de acciones de Exxon. Precio de la opción=$7. Precio de ejercicio=$90

Como se mencionó anteriormente, las opciones de acciones son generalmente Americanas en vez de Europeas. Esto muestra que el inversionista no tiene que esperar hasta la fecha de vencimiento para ejercer la opción. Veremos más adelante que existen algunas características bajo las cuales es óptimo el ejercicio de opciones Americanas antes del vencimiento.

Existen dos posturas para cualquier contrato de opciones. Por un lado está el inversionista que toma la posición larga (es decir, compra la opción). Por el otro lado está el inversionista que toma la posición corta (es decir, vende o emite la opción). El emisor de una opción recibe efectivo por adelantado, pero contrae responsabilidades potenciales. Su o sus ganancias/pérdidas son lo contrario para el comprador de la opción. Las figuras 1.4 y 1.5 muestran la variación de las ganancias/pérdidas con el precio final de las acciones para los emisores de las opciones consideradas en las figuras 1.2 y 1.3.

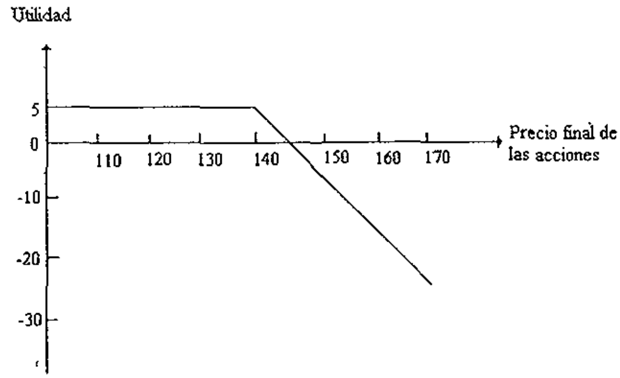

Fig.1.4. Utilidad por emitir una opción call Europea de acciones de IBM. Precio de la opción \$5. Precio de ejercicio=\$140

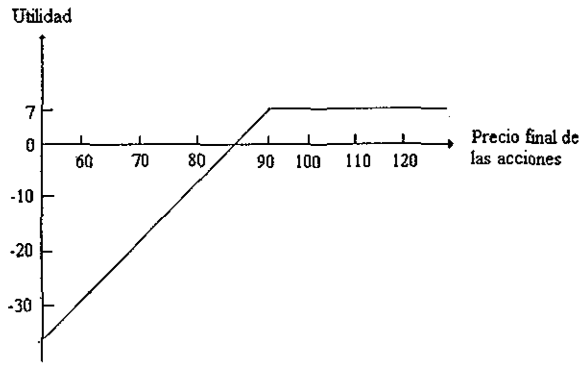

Fig.1.5. Utilidad por emitir una opción put de acciones de Exxon. Precio de la opción=\$7. Precio de ejercicio=\$90

Existen 4 posiciones básicas para las opciones:

1. Una posición larga en una opción Call.
2. Una posición larga en una opción Put.
3. Una posición corta en una opción Call.
4. Una posición corta en una opción Put.

Es a menudo útil caracterizar las posiciones de las opciones Europeas en términos de la utilidad del inversionista al vencimiento. El costo inicial de la opción no está incluido en el cálculo. Si X es el precio de ejercicio y S_T es el precio final del activo financiero, la utilidad de una posición larga en una opción call Europea es

$$\max[S_T - X, 0]$$

Esto refleja el hecho de que la opción será ejercida si $S_T > X$ y no será ejercida si $S_T < X$.

La utilidad del titular de una posición corta en una opción call Europea es:

$$-\max[S_T - X, 0]$$

La utilidad del titular de una posición larga en una opción put Europea es:

$$\max[X - S_T, 0]$$

y la utilidad del titular de una posición corta en una opción put Europea es:

$$-\max[X - S_T, 0]$$

La figura 1.6 ilustra el perfil de utilidades gráficamente.

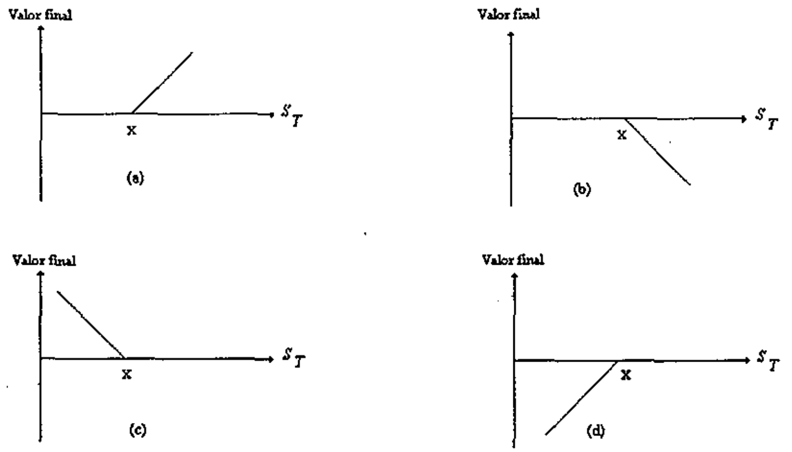

Fig.1.6. Liquidaciones de las posiciones de las opciones Europeas: (a) call largo, (b) call corto, (c) put largo, (d) put corto. Precio de ejercicio=X. Precio de los activos financieros al vencimiento=S_T

No hay razón para que el agente de la bolsa requiera margen de un cliente que toma una posición larga en una opción (i.e. compra). Esto es porque el valor de la opción nunca puede ser negativo. Lo peor que puede pasar es que el cliente nunca ejerza y pierda toda la suma pagada de la opción. Los márgenes son requeridos de los clientes cuando desea emitir opciones. La posición del cliente es monitoreada diaramente, como en el caso de los contratos futuros en que las llamadas al margen son hechas cuando hay movimientos adversos en el precio de los activos financieros.

Las opciones, al igual que los contratos futuros, tienen formas estandarizadas que son determinadas por la casa de bolsa. Normalmente, son propuestas para diferentes fechas de vencimiento y diferentes precios de ejercicio. Por ejemplo, el Chicago Board Options Exchange actualmente negocia opciones Americanas de acciones de la Mobil Oil, las cuales tienen vencimiento a nueve meses. Las opciones expiran en fechas específicas en febrero, mayo, agosto, y noviembre; así como tres fechas de vencimiento que son usadas en cualquier periodo. La fecha precisa de vencimiento es el sábado siguiente al tercer viernes del mes en que expira el contrato. Los precios de ejercicio están en intervalos de \$5. En el momento de emitir el contrato, el precio de las acciones de Mobil es por ejemplo $\$51\frac{1}{8}$ y los precios de ejercicio varían de \$40 a \$55.

Cuando las opciones son usadas por especuladores, éstos proporcionan una influencia extra. Para ilustrar este punto, supongamos que el precio de las acciones es \$32 y un inversionista que siente que subirán, compra opciones call con un precio de ejercicio de \$35 a \$0.50 por opción. Si el precio no llegó arriba de \$35 durante la vida de la opción, el inversiónista perderá \$0.50 por opción (o 100% de su inversión). Sin embargo, si el precio aumentó a \$40, el inversionista tendrá una utilidad de \$4.50 (o 900% de su inversión original).

Al igual que los productos derivados, las opciones pueden ser usadas como cobertura así como para especular. Por ejemplo, un inversionista que ya posee una acción puede cubrirse contra un precio que está debajo de un nivel X, comprando una opción put con precio de ejercicio X. Si el precio de la acción cae debajo de X, la opción put será ejercida y se obtendra el precio X para la acción .

Finalmente, un tipo particular de opción que vale la pena mencionar es un *warrant*. Este es una opción call emitida por una empresa sobre sus acciones. A menudo es adicionado a las deudas de la corporación como un "dulcificante ". La fecha y el precio de ejercicio de un warrant no tiene porque corresponder a los estándares de una casa de bolsa en particular. Sin embargo, una vez que ha sido emitido por la empresa, el warrant es a menudo negociado en una casa de bolsa. Las opciones call sobre una acción y los warrant difieren en un aspecto: cuando la opción call es ejercida, el emisor de la opción demanda al titular las acciones que ya han sido emitidas por la empresa. El emisor usa las acciones que ya tiene y compra de la manera usual. Cuando un warrant es ejercido, la empresa emite nuevos bonos a cambio, por el precio de ejercicio especificado en el contrato.

1.4. COMERCIO DE OPCIONES QUE IMPLICAN ESTRATEGIAS

Las opciones son productos muy flexibles. Estas obtener permiten una gran variedad de patrones de dividendos.

Un *Spread* combina dos o más opciones del mismo tipo (i.e. dos o más calls o dos o más puts). Los tres spread más comúnmente usados, se componen de opciones call Europeas que tienen la misma fecha de vencimiento, estos son el *spread vertical a la alza*, el *spread vertical a la baja* y el *spread mariposa.*

El spread vertical a la alza, el cual se ilustra en la figura 1.7a se obtiene al comprar un call con precio de ejercicio, X_1, y vendiendo un call con precio de ejercicio, X_2, donde $X_2 > X_1$. Si el call con precio de ejercicio menor, X_1, es más rentanble, el spread vertical a la alza requiere una inversión inicial.

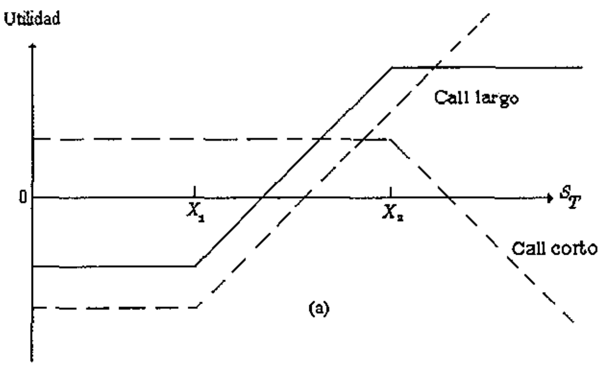

Fig.1.7.a Spread vertical a la alza

El spread vertical a a la baja, el cual se ilustra en la figura 1.7b se crea de vender un call con precio de ejercicio, X_1, y comprando un call con precio de ejercicio X_2, donde $X_2 > X_1$. Esta estrategia genera efectivo inmediato.

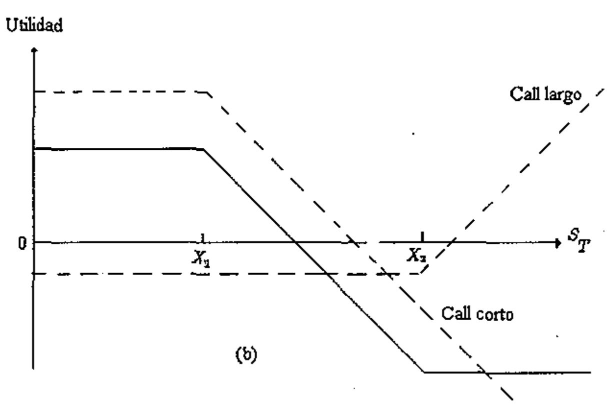

Fig.1.7.b Spread vertical a la baja

El spread mariposa, el cual se ilustra en la figura 1.7c puede ser considerada como una combinación de un spread vertical a la alza y un spread vertical a la baja. Esto implica comprar un call con precio de ejercicio, X_1, comprar un call con precio de ejercicio X_2, y vender dos calls con un precio de ejercicio X_3.

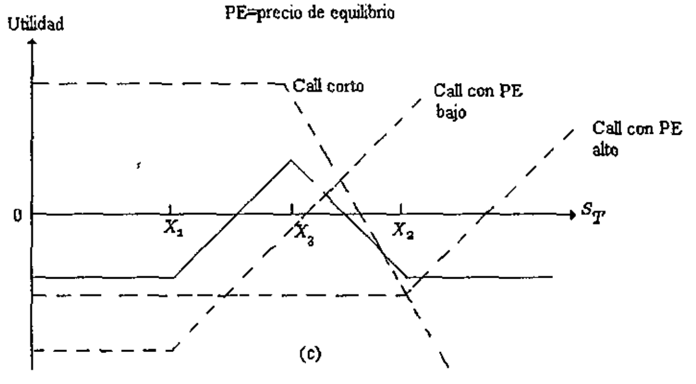

Fig.1.7.c Spread vertical mariposa

Una *Combinación* es una mezcla de opciones de diferentes tipos. Las cuatro combinaciones comúnmente usadas pueden ser creadas de opciones Europeas con el mismo vencimiento. Estas son, el *Straddle (asiento) más bajo*, el *Straddle más alto*, la *combinación vertical más baja* y la *combinación vertical más alta.*

El straddle más bajo, el cual se ilustra en la figura 1.8a, implica comprar un call y comprar un put con el mismo precio de ejercicio, X.

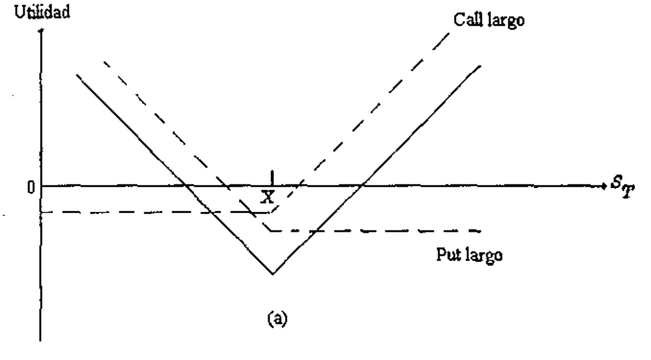

Fig.1.8.a Straddle más bajo.

El straddle más alto, el cual se ilustra en la figura 1.8b implica vender un call y vender un put con el mismo precio de ejercicio X.

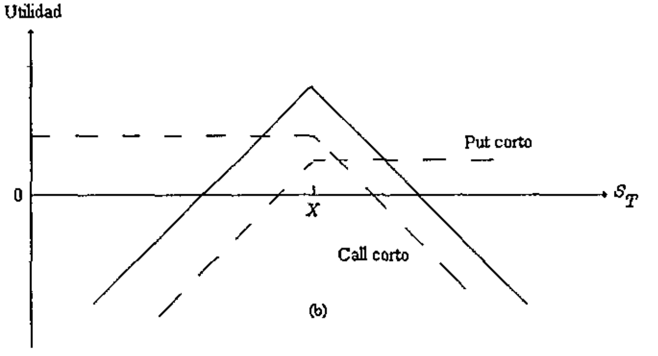

Fig.1.8.b Straddle más alto.

La combinación vertical más baja, la cual se ilustra en la figura 1.8c, implica comprar un call y un put con diferentes precios de ejercicio, X_1 y X_2.

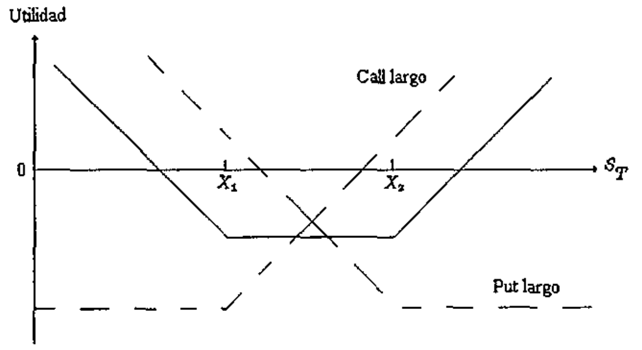

Fig.1.8.c Combinación vertical inferior.

Una combinacón vertical más alta, la cual se ilustra en la figura 1.8d implica vender un call y un put con diferentes precios de ejercicio, X_1 y X_2.

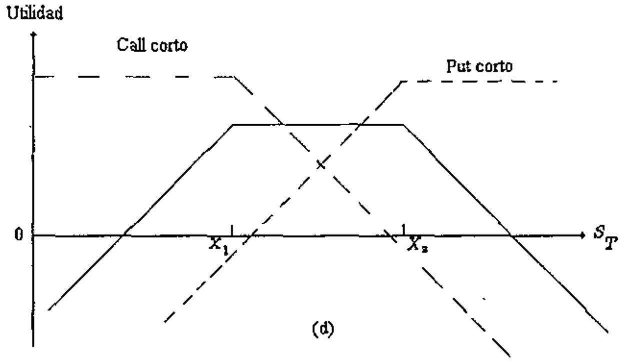

Fig.1.8.d Combinación vertical superior

1.5. SWAPS (INTERCAMBIOS)

Los *Swaps* son la más reciente innovación en los mercados financieros y que las contingencias exigían se consideraran hace ya algún tiempo. El primer contrato swap fué iniciado en 1981 y desde entonces, este mercado ha crecido rápidamente. The International Swap Dealers Association estima que alrededor de $300 billones en contratos fueron emitidos en 1986.

Un swap implica un acuerdo privado entre dos partes para intercambiar efectivo a ciertos tiempos en el futuro y con alguna fórmula de preacuerdo. El efectivo puede estar en la misma moneda o en diferentes monedas. La fórmula determina la cantidad de efectivo e implica alguna variable subyacente, la cual es una tasa de interés LIBOR[1] a seis meses; sin embargo, son usadas algunas veces otras variables.

El swap más básico es un "plain vainilla "(*swap de tasa de interés*). La vida de un swap fluctua entre de 2 y 15 años. En éste, una parte, X, acuerda pagar a la otra parte, Y, efectivos iguales a una tasa de interés fija predeterminada sobre un concepto principal por un cierto número de años. Al mismo tiempo, la parte Y acuerda pagar a la parte X

[1] Six-month LIBOR quiere decir Short for six-month London Interbank offer Rate, y es una tasa de interés que es ofrecida por bancos sobre depósitos a 6 meses de otros bancos. Es frecuentemente usada como una referencia a la tasa de interés para prestar en mercados financieros internacionales. Cambia continuamente de la misma manera a como cambian las condiciones económicas. Para entender como es usada, considere un préstamo donde la tasa de interés es LIBOR+0.5% a seis meses. La vida del préstamo está dividida en periodos de 6 meses. Para cada periodo, la tasa de interés es coloçada al 0.5% p.a. arriba de la tasa LIBOR a 6 meses en el inicio del periodo.

efectivos iguales a una tasa de interés flotante sobre el mismo concepto y por el mismo periodo de tiempo. Las monedas de los dos se colocan a la misma tasa de interés sobre el flujo de efectivo. En cada fecha de pago de intereses, el acuerdo especifica que una parte envía un comprobante por la diferencia entre los dos pagos de intereses a la otra parte.

Ilustraremos una posible razón para garantizar el intercambio. Consideremos que la empresa A y la empresa B desean pedir prestados $10 millones por 5 años y les han ofrecido las tasas mostradas en la tabla 1.2

Tabla 1.2. Tasas ofrecidas a las Empresas A y B.

	FIJA	FLOTANTE
EMPRESA A	11%	LIBOR+1.0%
EMPRESA B	10%	LIBOR+0.5%

Supongamos que la empresa A desea el préstamo a fondos de tasa fija, mientras que la empresa B desea el préstamo a fondos de tasa flotante. Es claro que la empresa A tiene menos confianza crediticia que la empresa B, por lo que pagará intereses más altos en ambos créditos. Sin embargo, mientras que paga 1% más que la empresa B en tasa fija, sólo paga 0.5% más en tasa flotante. Esto puede ser porque, como su confianza crediticia es menor, encuentra más dificultad para acceder al mercado de tasas fijas. Por lo tanto, la empresa A tiene cierta ventaja sobre la empresa B en el mercado de tasas flotantes. Por lo mismo, la empresa B tiene cierta ventaja sobre la empresa A en el mercado de tasas fijas. Esta aparente anomalía permite un intercambio en las tasas de interés y es arreglada por una Institución financiera de tal manera que ambas empresas ganan y la institución *financiera hace un spread positivo.*[2]

Cada empresa A y B pide prestado en el mercado donde ellos tienen ventaja comparativa. La empresa A pide prestado fondos a tasa flotante al LIBOR+1%; la empresa B pide prestado fondos a tasa fija al 10%. El efecto del intercambio de tasas de interés es convertir el préstamo de la empresa A en préstamo de tasa fija (que es lo que originalmente deseaba la empresa A) y convertir el préstamo de la empresa B a tasa flotante (que es lo que la empresa B deseaba inicialmente).

La empresa A acuerda pagar 9.80% de interés a la institución financiera y recibe la LIBOR a cambio. La empresa B acuerda pagar a la institución financiera la LIBOR y recibe 9.70% a cambio. Todos los pagos de intereses son calculados sobre un concepto principal de $10 millones y continuar por 5 años. El monto principal no es intercambiado. Hay que hacer notar que la institución financiera ha separado los contratos con las dos empresas. Si la empresa A incumple a sus compromisos, la institución financiera aún tiene en cumplimiento su contrato con la empresa B y viceversa.

[2] Aunque extensamente parece ser la razón de intercambios, la ventaja comparativa requiere deudas de mercado y el argumento es ineficiente en alguna forma y ha recibido algunas críticas.

Un posible arreglo se ilustra en la figura 1.9.

Fig.1.9. Tasa de interés de flujo de efectivo en un plain vainilla de una tasa de interés swap.

Cuando las deudas exteriores de las dos empresas son tomadas a cuenta, obtenemos la figura 1.10. La empresa A recibe LIBOR y paga LIBOR+1.0% p.a. Cualquiera que sea la tasa de interés LIBOR, la empresa A pierde 1.0% por año sobre el efectivo de la base LIBOR. Por esto, paga en total una tasa de interés fija de 9.80%+1.0%=10.80% p.a. La empresa B recibe intereses de 9.70% p.a. y paga al 10% p.a. Así, pierde 0.30% p.a. sobre efectivo a una tasa fija y al final paga LIBOR+0.30% p.a.

Fig.1.10. Tasa de interés de flujo de efectivo del swap y préstamos externos

Veamos porqué las tres partes se benefician del intercambio. La empresa A pide prestado al 10.80% p.a. en vez del 11% p.a. si va directamente a los mercados de tasa fija. La empresa B pide prestado al LIBOR+0.30% en vez del LIBOR+0.50% p.a. si va directamente a los mercados de tasa flotante. En ausencia de fallas, la institución financiera gana 0.10% p.a. sobre el capital principal. Note que la ganancia total de las tres partes es 0.50% p.a. Esta ganancia total puede ser calculada anticipadamente. Esto es $a - b$, donde a es la diferencia entre las tasas que enfrentan las empresas en mercados de tasa fija y b es la diferencia entre las tasas que enfrentan las empresas en mercados de tasa flotante. En nuestro ejemplo $a = 1.0\%$ y $b = 0.5\%$.

La tasa de interés de intercambio ha sido considerada como un derecho contingente de la tasa de interés LIBOR a seis meses. Como la tasa LIBOR aumenta, el valor del intercambio de A aumenta y el valor de intercambio de la empresa B cae. Si la tasa LIBOR cae, sucede lo contrario.

Otro tipo de swap muy usado es el *Swap de moneda.* En éste, el capital y los pagos de intereses sobre un préstamo en una moneda son intercambiadas por capital y pago de intereses sobre un préstamo similar en otra moneda. Estas acciones son similares al intercambio de tasas de interés en las que el efecto del swap por cada parte convierte un préstamo determinado en la otra moneda.

1.6. OTROS PRODUCTOS DERIVADOS

Los productos derivados especializados a menudo forman parte de deudas o de emisión de acciones. Algunos de estos pueden ser vistos como combinaciones de productos que ya han sido mencionados en este capítulo. Otros son más complejos. Las posibilidades para designar nuevos e interesantes valores derivados son virtualmente ilimitados.

Primeramente notemos que una emisión de deuda pueda ser vista como un producto derivado. Supongamos que A es el valor total de deuda emitida por una empresa, y para simplificar las cosas se supondrá que el vencimiento de las deudas son al mismo tiempo. Si V es el valor de los activos financieros de la empresa al vencimiento de la deuda, el valor de la deuda en el periodo es A si $V > A$ y V si $V < A$, esto es

$$\min(A, V),$$

esto es lo mismo que

$$A - \max(0, A - V),$$

lo cual es equivalente a que el titular de la deuda hubiera emitido una opción put con precio de ejercicio A sobre el valor de la empresa.

Los *Bonos convertibles* son un tipo común de productos derivados. El titular de éstos tiene el derecho de intercambiar bonos convertibles por acciones que la empresa emite a ciertos periodos en el futuro acorde a cierto radio de intercambio. Las características de un bono convertible son similares a las de una opción, sin embargo, el precio de ejercicio es igual al valor del bono y por eso no es constante. Muy a menudo surge una complicación adicional en que el bono es *Requerido*, esto es , puede ser recomprado por el emisor a un cierto precio en un tiempo futuro. Una vez que los bonos han sido requeridos, el titular siempre puede escoger entre primero convertirlos o recomprarlos. Así, el efecto de la llamada provisional frecuentemente proporciona al emisor el derecho de forzar una conversión de los bonos en acciones en un tiempo menor que los titulares pueden escoger de otra manera.

Otro tipo de productos derivados, *Las opciones de liquidez de rendimiento*, LYON, fueron creadas por Merril Lynch en 1985. Un Lyon es un cupón cero convertible, el cual es requerido por el emisor y amortizado por el titular. El precio al cual el titular puede amortizar (o put) el bono y el precio al cual el emisor puede requerir el bono se incrementa conforme pase el tiempo.

En 1986, la Estandar Oil emitió una serie de bonos cupón-cero lo cual implicó un nuevo producto derivado. Sumados a los $1,000 del valor al vencimiento, la empresa prometió pagar un monto basado en el precio del petróleo presente en el momento del vencimiento. En el caso de los 1990 bonos, este monto adicional fué igual al producto de 170 y el exceso (si es que existe) del precio de un barril de petróleo al vencimiento fué arriba de $25. Sin embargo, el monto máximo adicional pagado fué limitado a $2,550, lo cual corresponde a un precio de $40 por barril.

En 1985, la Bankers Trust Desarrolló las opciones *Indice de moneda* o ICONs. Estos son bonos en los cuales el monto recibido por el titular al vencimiento varía con el tipo de cambio internacional. Si el tipo de cambio excede algún monto, el titular de los bonos recibe el valor nominal. Si el tipo de cambio es menor que este monto, el titular de los bonos recibe menos que el valor nominal. La Bankers Trust primero emitió un ICON para el Long Term Credit Bank of Japan. El ICON especifica que si el tipo de cambio del yen con respecto al dólar es más grande que 169 yen por dólar al vencimiento (en 1995), el titular del bono recibe $1,000. Si es menor que 169 yens por dólar la cantidad recibida por el titular del bono se reduce por

$$\max\left[0, (1000)\left(\frac{169}{S} - 1\right)\right],$$

y si el tipo de cambio es menor que 84.5, el bono tiene valor cero al vencimiento.

Un *Contrato forward de rango* (contrato forward flexible) es otro ejemplo interesante de un producto derivado. Supongamos que el 10 de marzo de 1988 una empresa norteamericana encuentra que se requieren libras esterlinas en periodos de 90 días. Como se discutió en la secc.1.1, puede iniciar un contrato forward por $1.8381 por libra. Alternativamente, una banda de cambio para un forward de rango se coloca, digamos, de $1.800 a $1.870 por libra. Al vencimiento, si el tipo de cambio es menor que $1.800 por libra, la empresa paga $1.800 por libra; si está entre $1.800 y $1.870, la empresa paga el tipo de cambio presente; si es más grande que $1.870 la empresa paga $1.870. Al igual que un contrato forward regular, un contrato forward de rango está normalmente estructurado y es iniciado con valor cero para ambas partes.

Algunos productos derivados implican restringir las variaciones en las tasas de interés sobre préstamos en las tasas flotantes. El *warrant capuchón (Caps)* es tal que la tasa nunca subirá de algún nivel. El *warrant collar (Collars)* es tal que la tasa nunca estará arriba de un nivel ni debajo de otro nivel. Algunas veces están estructurados para garantizar un rango para la tasa promedio durante la vida del préstamo más que para garantizar un rango para la tasa en cualquier tiempo. Como recurso natural, algunas empresas desarrollan productos derivados innovadores, los cuales implican el precio de los bienes producidos por estas empresas.

Los bonos de la Standar Oil, donde el pago es unido al precio del petróleo, ya ha sido mencionado. Echo Bay Mines LTD., que es una empresa canadiense comprometida en la producción de oro, nos proporciona otro ejemplo; en 1981, esta empresa produjo $80 millones de dólares canadienses a través de una emisión de acciones preferenciales y garantizando compras de oro. El oro produjo warrants que son divididas en cuatro clases de acuerdo a su vencimiento. Las fechas de vencimiento fueron el 31 de enero de 1986, 1987, 1988 y 1989. El precio de cada warrant fué de $595 dólares americanos por onza. Sin embargo, los warrants serían ejercidos sólo si Echo Bay encontraba ciertos niveles de producción antes de la fecha de ejercicio y si, además, ciertas condiciones se satisfacían. Así, el valor de los warrants dependía de una forma compleja del capital de la empresa, así como del precio del oro.

CAPÍTULO 2

RESUMEN
CONTRATOS FORWARD Y FUTUROS

En este capítulo presentaremos algunos conceptos correspondientes a contratos Forward y Futuros. Los contratos forward son generalmente más fáciles de analizar que los contratos futuros porque implican un pago simple al vencimiento. Consecuentemente, la mayor parte del análisis en la primera parte del capítulo está dirigido hacia la determinación de los precios forward en vez de los precios futuros. Afortunadamente, podemos mostrar que los precios forward y los precios futuros son, generalmente, muy parecidos uno del otro cuando el vencimiento de los dos contratos es el mismo. La forma de obtener los resultados para los precios forward puede ser utilizada también para futuros.

Es importante distinguir entre activos financieros que se usan únicamente para inversión por un número bastante significativo de inversionistas y aquellos que son mantenidos casi exclusivamente para el consumo. Los precios forward y futuros para los primeros pueden ser determinados de una forma relativamente sencilla, mientras que para los segundos no es así. A través del trabajo encontraremos que es necesario hacer la misma distinción cuando se valuan opciones y otros productos derivados más complicados.

2.1. TASAS CONTINUAMENTE COMPUESTAS

Como primer punto, mostraremos que las valuaciones están en términos de *tasas de interés continuamente compuestas*. El lector que ya esté familiarizado con el análisis de contratos forward y futuros basados en tasas de interés que están compuestas anual, semestral, o en alguna otra forma, puede prescindir de esta sección sin pérdida de generalidad subsecuente. Las tasas de interés continuamente compuestas son usadas de tal forma que una gran mayoría de las valuaciones de opciones, y otros productos derivados más complicados, son calculadas en el sentido que son usados para trabajar con ellos.

Considere un capital invertido por n años a una tasa R por año. Si la tasa es compuesta anualmente, el valor final de la inversión es

$$A(1+R)^n.$$

Si está compuesta por m periodos por año, el valor final de la inversión es

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn}.$$

Cuando m se incrementa, la frecuencia de componer también se incrementa. En el límite tenemos que $m \to \infty$ la tasa R está continuamente compuesta y el valor final de la inversión será

$$Ae^{Rn},$$

donde $e = 2.71828$. Para propósitos prácticos, los compuestos contínuos pueden ser considerados como equivalentes a diaramente compuestos. Componer una cantidad de dinero a una tasa R continuamente compuesta por n años implica multiplicar por e^{Rn}. Descuentos en una tasa continuamente compuesta implica multiplicarla por e^{-Rn}.

Supongamos que R_1 es una tasa de interés continuamente compuesta y R_2 es una tasa compuesta equivalente a m periodos por año. De lo anterior tenemos que

$$Ae^{R_1 n} = A\left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{mn},$$

$$e^{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{m},$$

entonces

$$R_1 = m\ ln(1 + \frac{R_2}{m}),$$

$$R_2 = m(e^{\frac{R_1}{m}} - 1),$$

donde ln es la función logaritmo natural. Estas ecuaciones pueden ser usadas para convertir una tasa cuando la frecuencia compuesta es m veces por año a una tasa continuamente compuesta y viceversa.

Ejemplo 2.1. Considere una tasa de interés que es cotizada al 10% anual, compuesta semestralmente. La tasa continuamente compuesta es

$$2\ ln(1 + 0.05) = 0.09758,$$

o 9.758% .

Ejemplo 2.2. Suponga que un banco cotiza la tasa de interés sobre préstamos en 8% anual, continuamente compuesta y los intereses deberán ser pagados trimestralmente. La tasa equivalente es

$$4(e^{0.02} - 1) = 0.0808,$$

u 8.08% anual. Esto muestra que sobre un préstamo de \$1000, los pagos requeridos cada trimestre serán de \$20.20.

2.2. PRECIOS FUTUROS

Como se mencionó en el capítulo 1, los contratos futuros son negociados sobre un gran número de activos financieros en la mayoría de las casas de bolsa. En este capítulo se reproducen resultados teóricos correspondientes a los precios de los futuros. Nuestro enfoque será considerar primero los precios forward y después examinar la relación entre los precios forward y futuros. Suponemos que no hay costos de transacción, que todas las ganancias (así como las pérdidas) están sujetas a la misma tasa de impuestos, y los mercados participantes pueden pedir prestado o prestar dinero a la misma tasa de interés libre de riesgo.

2.3. ARBITRAJE

Muchos de los argumentos en este capítulo, y más adelante en este trabajo, están basados en lo que es conocido como *Arbitraje*. El arbitraje implica seguridad de obtener beneficios con bajo riesgo y simultáneamente iniciar transacciones en dos o más mercados diferentes. Tomando un ejemplo simple, considere un valor que es negociado en el NEW YORK STOCK EXCHANGE y en el LONDON STOCK EXCHANGE. Supongamos que el precio de una acción es de \$172 dólares en New York y £100 en Londres al mismo tiempo donde el tipo de cambio es de \$1.7500 dólares por libra. Un árbitro puede comprar simultáneamente la acción en New York y venderla en Londres. Esto puede generar una ganancia de \$3 por acción comprada. Los costos de transacción pueden, probablemente, eliminar esta ganancia para un pequeño inversionista. Sin embargo, una gran casa internacional de inversiones que tiene costos muy bajos de transacción en el mercado de valores y en el mercado de intercambio extranjero puede encontrar en el arbitraje una oportunidad atractiva.

La oportunidad de arbitraje tal y como se ha descrito puede no ser adecuada a la larga. Como el árbitro compra el valor en New York, las leyes de oferta y demanda causarán que el precio del dólar aumente. Similarmente, como él vendió el valor en Londres, el precio de la libra esterlina tenderá a la baja. Muy rápidamente los dos precios serán equivalentes cuando se use el tipo de cambio de la moneda. Efectivamente, la existencia de "codicia de beneficio" de los árbitros hace poco probable que pueda existir, en primer lugar, una mayor disparidad entre la libra y el dólar. Generalizando este ejemplo, podemos decir que la existencia de árbitros es poco significativa en la práctica y las oportunidades de arbitraje son observadas en los precios que son cotizados en la mayoría de los mercados financieros.

En este capítulo se supone que la relación entre el precio forward (o futuro) y el precio spot es tal que no hay oportunidades de arbitraje. En la siguiente sección iniciamos nuestras suposiciones sin costos de transacción, todas las ganancias comerciales están sujetas a la misma tasa de impuesto, y no se diferencía entre las tasas de pedir prestado y prestar. Notemos que no se requiere que estas suposiciones sean ciertas para todos los inversionistas. Todo esto requiere que sea cierto para algunos inversionistas (i.e. grandes casas de inversión) y que estos inversionistas estén preparados para aprovechar la ventaja de la oportunidad de arbitraje si se presenta la ocasión. Cuando iniciamos de esta manera, las suposiciones no son irreales.

2.4. VENTAS EN CORTO

Algunas de las estrategias de arbitraje que se presentan en este capítulo implican *ventas en corto*. Es apropiado explicar exáctamente como es la estrategia para dichas ventas. Las ventas en corto implican vender productos que no son propios. Por ejemplo, un inversionista puede contactar a su corredor para vender en corto 500 acciones IBM. El corredor pedirá prestadas acciones de otro cliente y vende éstas en el mercado abierto de la manera usual. El inversionista puede mantener la posición corta tanto tiempo como el cliente elija garantizando que siempre habrá acciones para reponer el préstamo. En algún momento, sin embargo, el inversionista cerrará la posición comprando 500 acciones de IBM. Las acciones son entonces reemplazadas en el capital del cliente a quién se le pidieron prestadas. El inversionista consigue una ganancia si el precio del valor ha decrecido y una pérdida si ha aumentado. Si en cualquier momento, mientras el contrato esté abierto, el corredor pide prestadas acciones por fuera, el inversionista es apretado en corto y es forzado a cerrar la posición inmediatamente aunque, incluso, no esté preparado para cumplir.

Los reguladores sólo permiten acciones para ser vendidas en corto sobre un *uptick* "arriba de marca", esto sucede cuando el movimiento más reciente en el precio de las acciones se ha incrementado. Un corredor requiere de margen inicial significativo de los clientes con posiciones cortas y, así como en los contratos futuros, si existen movimientos adversos (i.e. incrementos) en el precio de los productos, puede requerir también un margen adicional. Los beneficios de las ventas iniciales de los productos corresponden al inversionista y normalmente forman parte del margen a cuenta. Sin embargo, como en el caso de contratos futuros, el margen no representa un costo real. El interés es normalmente pagado sobre el margen a cuenta y los productos comerciables, tales como T-Bills, que pueden ser depositados con un corredor para encontar requirimientos de margen. Un inversionista con una posición corta debe pagar cualquier rédito, como los dividendos o los interéses que pueden normalmente ser recibidos sobre los productos que han sido cancelados. El corredor transferirá éstos al monto del cliente a quien se le pidieron prestadas las acciones.

2.5. NOTACION

Alguna de la notación que será usada en este capítulo es la siguiente:

T: tiempo de vencimiento de un contrato forward (años).
t: tiempo actual (años).
S: precio de un activo financiero en un contrato forward al tiempo t.
S_T: precio de un activo financiero en un contrato forward al tiempo T (desconocido al tiempo actual t).
K: precio de entrega en un contrato forward.
f: valor de un contrato forward largo al tiempo t.
F: precio forward al tiempo t.
r: tasa de interés libre de riesgo anual al tiempo t continuamente compuesta para una inversión que vence al tiempo T.

Las varibles T y t son medidas en años en alguna fecha (no importa cuando) anterior al inicio del contrato. La variable de interés para el propósito de nuestro análisis es de hecho $T - t$, la cual es el tiempo medidp en años en el contrato forward. Existe una razón para definir las dos variables, t y T, separadamente. Esto volverá a aparecer en secciones posteriores cuando consideremos el efecto del precio de un producto derivado a medida que pasa el tiempo. En este momento, el lector puede convenientemente pensar en términos de $T - t$ como una variable simple.

Es importante decir que el precio forward, F, es totalmente diferente del valor del contrato forward f. Como se explicó en el capítulo 1, el precio forward en cualquier periodo dado, es el precio de entrega que hará que el contrato tenga un valor cero. Cuando un contrato es iniciado, el precio de entrega es colocado igual que el precio forward de tal forma que $f = 0$ y $K = F$. Conforme pasa el tiempo f y F cambian. El análisis y los ejemplos en la siguiente sección aclararán la diferencia entre las dos variables.

2.6. CONTRATOS FORWARD SOBRE ACCIONES QUE NO APORTAN UTILIDADES

El contrato forward más fácil de evaluar es aquel que se emite sobre acciones que no aportan utilidades al titular . Las acciones que no pagan dividendos y los bonos de descuento son ejemplos de tales acciones. Un contrato forward largo, como se explicó en el capítulo 1, obliga al titular a comprar las acciones en alguna fecha futura en un cierto precio de entrega.

Considere los siguientes dos portafolios

Portafolio A: un contrato forward largo de una acción, más un monto de efectivo igual a $Ke^{-r(T-t)}$.
Portafolio B: una acción.

En el portafolio A, el efectivo, que se supone es invertido a una tasa libre de riesgo, que crecerá a un monto K al tiempo T, puede ser usado para pagar las acciones al vencimiento del contrato forward. Ambos portafolios, por tanto, consistirán de una acción al tiempo T. Se sigue de aquí que sus precios, a lo más, son iguales en un tiempo t. Si esto no es cierto, un inversionista puede tener un menor riesgo comprando el portafolio más pequeño y desechar el más grande. Se sigue que

$$f + Ke^{-r(T-t)} = S,$$

o

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.3. Considere un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos y vence en tres meses. Suponga que el precio de entrega es \$42, el precio actual de la acción es \$40 y la tasa de interés libre de riesgo a 3 meses es 5% anual En este caso $T - t = 0.25$, $r = 0.05$, $S = 40$ y $K = 42$, así que

$$f = 40 - 42e^{(-0.05)(0.25)} = -1.48,$$

es el valor de un contrato forward largo. El valor de un contrato forward corto es $+1.48$.

Cuando se inicia un contrato forward, el precio forward es igual al precio de entrega especificado en el contrato y se elige de tal manera que el valor del contrato sea cero. El precio forward, F, es tal que el valor de K hace $f = 0$ en la ecuación (2.1), esto es

$$F = Se^{r(T-t)}. \tag{2.2}$$

Así, en el ejemplo 2.3 $F = 40e^{(0.05)(0.25)} = 40.50$. Nótese que cuando $t = T$, obtenemos $F = S$. Esto confirma lo esperado y se tiene que el precio forward es igual al precio de las acciones al vencimiento.

Si $F > Se^{r(T-t)}$, el precio forward es demasiado alto con relación al precio spot. Un árbitro puede tener un beneficio a bajo riesgo comprando el activo financiero en el mercado spot y vendiendo un forward. Específicamente, el árbitro pide prestado un monto S por un periodo $T - t$, compra las acciones y cancela el contrato forward . La ganancia (posiblemente negativa) del contrato forward es

$$F - S_T.$$

Los fondos requeridos para liquidar el préstamo son $Se^{r(T-t)}$ y los fondos logrados de vender las acciones al tiempo T, son S_T. El beneficio del árbitro es por tanto

$$F - S_T - Se^{r(T-t)} + S_T = F - Se^{r(T-t)}.$$

Si $F < Se^{r(T-t)}$, el precio forward es demasiado bajo con relación al precio spot. Un árbitro puede tener un beneficio a bajo costo si cancela las acciones, invierte las ganancias a una tasa de interés libre de riesgo, e inicia un contrato forward largo. Al vencimiento, las acciones son compradas para cerrar la posición corta. La ganancia del contrato forward es

$$S_T - F.$$

Los fondos logrados de la venta corta crecerán a $Se^{r(T-t)}$ para un tiempo T y los fondos requeridos para cerrar la posición corta al tiempo T son S_T. El beneficio del árbitro al tiempo T es entonces

$$S_T - F + Se^{r(T-t)} - S_T = Se^{r(T-t)} - F.$$

Note que si el árbitro ya tiene las acciones, las ventas cortas son innecesarias. El árbitro vende las acciones, invierte las ganancias a una tasa de interés libre de riesgo e inicia un contrato forward largo. El árbitro tiene la certeza de ser $Se^{r(T-t)}$ mejor que el inversionista por que tiene las acciones.

Ejemplo 2.4. Considere un contrato forward a 6 meses sobre la emisión de un bono de descuento anual. Supongamos que la tasa de interés libre de riesgo (continuamente compuesta) es 6% anual y el precio actual del bono es \$930. En este caso $T - t = 0.50$, $r = 0.06$ y $S = 930$. Así, el precio forward, F, está dado por

$$F = 930e^{(0.5)(0.06)} = 958.3,$$

este será el precio de entrega en un contrato negociado actualmente. Si el precio forward es menor que 958.3 un árbitro puede cancelar las acciones e iniciar un contrato forward largo. Si el precio forward es más grande que 958.3 un árbitro puede cancelar el contrato forward y comprar las acciones.

2.7. CONTRATOS FORWARD SOBRE ACCIONES QUE APORTAN EFECTIVO

En esta sección consideramos contratos forward sobre acciones que proporcionan un pronóstico confiable del efectivo que ganará el titular. Como ejemplos están las acciones que pagan dividendos conocidos y los bonos de cupones al portador. Definimos I como el valor actual, con una tasa de descuento libre de riesgo, de los ingresos que se recibirán durante la vida del contrato forward.

Si mantenemos el portafolio A de la sección anterior y cambiamos el Portafolio B por

Portafolio B: una acción, más un préstamo de un monto I
a una tasa libre de riesgo,

los beneficios de la acción pueden ser usados para liquidar el préstamo, así que este portafolio tiene el mismo valor que las acciones al tiempo T. El portafolio A también tiene este valor al tiempo T. Los dos portafolios deben, por tanto, tener el mismo valor al tiempo t, esto es

$$f + ke^{-r(T-t)} = S - I,$$

o

$$f = S - I - Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.5. Considere un bono a cinco años con un precio de \$900. Suponga *que un contrato forward sobre un bono con un precio de entrega de \$910 tiene* vencimiento de un año. El primer pago de cupones es de \$60 y se espera que sean pagados a los seis y doce meses. El segundo pago de los cupones es inmediatamente antes de la fecha de entrega especificada en el contrato forward. La tasa de interés libre de riesgo continuamente compuesta para seis meses y 1 año son 9% y 10% anual En este caso $S = 900$, $K = 910$, $r = 0.10$, $T - t = 1$ y

$$I = 60e^{(-0.09)(0.5)} + 60e^{-0.10)} = 111.65,$$

así que el valor, f, en una posición larga de un contrato forward será

$$f = 900 - 115.65 - 910e^{-0.1} = -35.05.$$

El valor de la posición corta es +35.05. Note que no se acumulan intereses al comienzo y al final del contrato en este ejemplo. Las complicaciones que surgen cuando se acumulan intereses son discutidos más adelante.

El precio forward, F, es, como antes, el valor de K que hace a f cero. Así

$$F = (S - I)e^{r(T-t)}. \tag{2.4}$$

En el ejemplo 2.5, el precio forward, F, está dado por

$$F = (900 - 111.65)e^{0.1} = 871.26,$$

note que I es una función de t en las ecuaciones (2.3) y (2.4). En particular, cuando $t = T$, tenemos $I = 0$.

Si $F > (S - I)e^{r(T-t)}$, el precio forward está demasiado alto con relación al precio spot. Un árbitro puede manejar bajo riesgo pidiendo dinero prestado para comprar las acciones, y cancelar el contrato forward. Las acciones son vendidas por S_T al tiempo T y la ganancia del contrato forward es

$$F - S_T,$$

por lo tanto, los fondos requeridos para liquidar el préstamo son $Se^{r(T-t)}$ y los fondos obtenidos de vender las accións son S_T. Los beneficios de las acciones tienen valor actual I y valdrán $Ie^{r(T-t)}$ al tiempo T. El beneficio del árbitro es por lo tanto

$$F - S_T - Se^{r(T-t)} + S_T + Ie^{r(T-t)} = F - (S - I)e^{r(T-t)}.$$

Si $F < S - I)e^{r(T-t)}$, un árbitro puede manejar beneficio a bajo riesgo con una estrategia opuesta a la antes mencionada. El inversionista cancela las acciones (o las vende si ya son suyas) e inicia un contrato forward largo. Como se mencionó en la sección 2.4 el inversionista está obligado a pagar los beneficios sobre las acciones mientras esté en corto.

Ejemplo 2.6. Considere un contrato forward a 10 meses de una acción con un precio de \$50. Suponemos que la tasa de interés libre de riesgo (continuamente compuesta) es 8% p.a. y la estructura del periodo es llana (lisa). También suponemos que los dividendos son de \$0.75 por acción y esperados a tres, seis y nueve meses. El retorno esperado de los dividendos I está dado por

$$I = 0.75e^{-0.02} + 0.75e^{-0.04} + 0.75e^{-0.06} = 2.162,$$

la variable $T - t$ es 0.8333 años, así que el precio forward, F, está dado por

$$F = (50 - 2.162)e^{(0.08)(0.8333)} = 51.14,$$

si el precio forward fuera menor que esta cantidad, un árbitro puede cancelar la acción y comprar contratos forward. Si el precio forward fuera mayor, un árbitro puede cancelar el contrato forward y comprar la acción.

2.8. CONTRATOS FORWARD DE ACCIONES QUE PROPORCIONAN RENDIMIENTOS (DIVIDEND YIELD)

Como se explicó en secciones anteriores la moneda y los índices de acciones pueden ser considerados como productos derivados que pagan *Rendimientos* conocidos. En esta sección se proporciona un análisis general de contratos forward sobre dichos productos derivados.

Un rendimiento es la forma en que se conoce un ingreso cuando es expresado como porcentaje del precio de las acciones. Suponemos que los rendimientos son pagados continuamente a una tasa anual q. Para ilustrar esto suponga que $q = 0.05$, así que los rendimientos son 5% p.a. Cuando el precio de un acción es \$10 los dividendos en el siguiente intervalo pequeño de tiempo son pagados a una razón de 50 centavos por año; cuando el precio de la acción es \$100, los dividendos en el siguiente intervalo pequeño de tiempo son pagados a razón de \$5 p.a. y así sucesivamente. En la práctica, los dividendos no son pagados continuamente. Sin embargo, en algunas situaciones los rendimientos continuos se acepta que son razonables.

El valor del contrato forward, en el portafolio B de la sección 2.6 puede ser reemplazado por:

Portafolio B: $e^{-q(T-t)}$ de las acciones con todos los intereses reinvertidos
en las mismas acciones.

El precio de las acciones en el portafolio B crecerá como resultado de los dividendos que son pagados así como del tiempo exacto T en el cual las acciones son mantenidas. Los portafolios A y B, por lo tanto, tienen el mismo valor al tiempo T. Al igualar sus valores al tiempo t obtemos

$$f + Ke^{-r(T-t)} = Se^{-q(T-t)},$$

o

$$f = Se^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}, \tag{2.5}$$

y la tasa forward, F, está dada por el valor de K que hace $f = 0$.

$$F = Se^{-(r-q)(T-t)}, \tag{2.6}$$

note que si el rendimiento varía durante la vida del contrato forward, la ecuación (2.6) es, no obstante, correcta con q igual al porcentaje del rendimiento.

Ejemplo 2.7. Considere un contrato forward a 6 meses sobre una acción que se espera genere un rendimiento continuo de 4% p.a. La tasa de interés libre de riesgo (continuamente compuesta) es 10% p.a. El precio de la acción es \$25 y el precio de entrega es \$27. En este caso $S = 25$, $K = 27$, $r = 0.10$, $q = 0.04$. De la ecuación (2.5) el valor de una posición larga, f, está dada por

$$f = 25e^{-(0.04)(0.5)} - 27e^{-(0.1)(0.5)} = -1.18,$$

de la ecuación (2.6) el precio forward, F, está dado por

$$F = 25e^{(0.06)(0.5)} = 25.76.$$

2.9. PRECIOS FORWARD VS. PRECIOS FUTUROS

Cuando la tasa de interés libre de riesgo es constante y es la misma para todos los vencimientos, los precios forward y los precios futuros son los mismos. El argumento puede ser extendido para cubrir situaciones donde la tasa de interés es una función del tiempo conocido.

Cuando las tasas de interés varían imprevisiblemente, los precios forward y futuros no son, en teoría, más grandes que las mismas tasas. La prueba de la relación entre estas dos está más allá del alcance de este trabajo, sin embargo podemos obtener un sentido natural si consideramos la situación cuando el precio de los activos financieros, S, está fuertemente correlacionado positivamente con las tasas de interés. Cuando S aumenta, un inversionista que sostiene un futuro de posición larga tiene una ganancia inmediata. Esta ganancia tiende a ser invertida a una tasa de interés, en promedio, más alta. Similarmente, cuando S decrece, el inversionista perderá dinero. Esta pérdida tiende a ser financiada a una tasa de interés, en promedio, más baja. Un inversionista que prefiere un contrato forward más que un contrato futuro no es afectado por movimientos de la tasa de interés. Se sigue que un contrato futuro largo será más atractivo que un contrato forward largo. Por lo tanto , cuando S está fuertemente correlacionado positivamente con las tasas de interés, los precios futuros tenderán a ser más altos que los precios forward. Cuando S está fuertemente correlacionado negativamente con las tasas de interés, un argumento similar muestra que los precios forward tienden a ser más altos que los precios futuros.

La diferencia teórica entre los precios futuros y forward es lo suficientemente pequeña que se ignora. En la práctica, existen ciertos factores que no se reflejan en los modelos teóricos que pueden causar la diferencia entre los precios futuros y forward. Estos incluyen impuestos, costos de transacción y el tratamiento de los márgenes. En suma, debemos notar que el riesgo es grande si la contraparte falta a sus compromisos en un contrato forward. A pesar de esto, es razonable suponer que, para nuestros propósitos, los precios forward y futuros son los mismos. Esta es la suposición que se hará a lo largo del trabajo. El símbolo F será usado para representar a ambos: los precios forward y los precios futuros.

2.10. FUTUROS SOBRE ÍNDICES ACCIONARIOS

Un *Indice accionario* localiza los cambios en el valor de un portafolio hipotético de acciones. El peso de una acción en el portafolio iguala la proporción del portafolio invertido en la acción. Las acciones en el portafolio pueden tener igual peso o los pesos cambian de alguna forma con el tiempo. El porcentaje que se incrementa en el precio de un índice accionario en un intervalo pequeño de tiempo usualmente se define *como el porcentaje que es igual al incremento en el valor total de las acciones que comprenden el portafolio en este período.* Un índice accionario usualmente no está definido para dividendos de efectivo. En otras palabras, cualquier efectivo recibido en el portafolio es ignorado cuando los cambios de porcentaje en los índices están siendo calculados. Los contratos futuros de índices accionarios difieren de otros contratos futuros en que, si el contrato se mantene vigente hasta el vencimiento, la liquidación final es siempre en efectivo.

Un índice accionario usualmente puede ser considerado como el precio de una acción que paga dividendos. Las acciónes son el portafolio de variables subyacentes del índice y los dividendos pagados por las acciones son los beneficios que podrán ser recibidos por el titular de este portafolio. Una aproximación razonable del índice de las variables subyacentes puede suponerse que proporciona un rendimiento continuo de dividendos. Si q es la tasa de rendimiento, el argumento de la sección 2.8 es usado para calcular el precio futuro, F, como

$$F = Se^{(r-q)(T-t)}.$$

Ejemplo 2.8. Considere un contrato futuro a 3 meses en el S&P500. Supongamos que el índice de las acciones subyacentes paga un rendimiento de 3% p.a., que el valor actual del índice es \$400, y que la tasa de interés libre de riesgo continuamente compuesta es 8% p.a. En este caso $r = 0.08$, $S = 400$, $T-t = 0.25$ y $q = 0.03$. Por lo tanto, el precio futuro, F, está dado por

$$F = 400e^{(0.05)(0.25)} = 405.03$$

En la práctica, los rendimientos del portafolio subyacente sobre un índice varían semana a semana a lo largo del año. Por ejemplo, una gran proporción de los dividendos de acciones en el NYSE son pagados en la primera semana de febrero, mayo, agosto y noviembre de cada año. El valor de q que es usado puede representar el promedio anualizado de los rendimientos durante la vida del contrato. Los dividendos usados para estimar q pueden ser aquellos para los cuales los dividendos anteriores han estado presentes durante la vida del contrato futuro.

Si un analista no está conforme trabajando en términos de rendimientos, puede estimar el monto de los dividendos que pagará el índice del portafolio subyacente y el costo de oportunidad de estos dividendos. El índice puede entonces ser considerado como una acción que proporciona intereses, y el resultado en la ecuación (2.4) puede ser usada para calcular los precios futuros.

Si $F > Se^{(r-q)(T-t)}$, los beneficios pueden ser adquiridos comprando el índice de las acciones subyacentes y cancelando los contratos futuros.

Si $F < Se^{(r-q)(T-t)}$, los beneficios pueden ser adquiridos haciendo lo contrario, esto es, cancelando o vendiendo el índice de las acciones subyacentes y tomando una posición larga en los contratos futuros. Estas estrategias son conocidas como *Arbitraje de Indice.*

Cuando $F < Se^{(r-q)(T-t)}$, el arbitraje de índice es con frecuencia terminado por un fondo de pensión propio de los índices del portafolio de acciones.

Cuando $F > Se^{(r-q)(T-t)}$, el arbitraje de índice es con frecuencia terminado por una corporación titular de término-corto en el mercado de inversión de dinero.

Para índices que implican muchas acciones, en ocasiones se usa el arbitraje de índice para negociar, relativamente, una pequeña muestra representativa de acciones cuyos movimientos al cierre reflejan aquellos del índice. A menudo el arbitraje de índice se implementa usando un *program trading*, que es una manera de generar negocios usando un sistema de computadora. En condiciones normales de mercado, F, es muy cercano a

$$Se^{(r-q)(T-t)}.$$

2.11. CONTRATOS FORWARD Y FUTUROS SOBRE DIVISAS

Consideremos nuevamente los contratos forward y futuros sobre divisas extranjeras. La variable S, es el precio de divisa en dólares de una unidad en la divisa extranjera. Una divisa extranjera tiene la propiedad de que gana intereses sobre la tasa libre de riesgo que prevalece en la ciudad extranjera. Definimos r_f como el valor de la tasa libre de riesgo continuamente compuesta.

Los dos portafolios que permiten usar el precio de un contrato forward sobre una divisa extranjera son:

Portafolio C: un contrato forward largo, más un monto de efectivo igual a $Ke^{-r_f(T-t)}$

Portafolio D: un monto $e^{-r_f(T-t)}$ de una divisa extranjera.

Ambos portafolios volverán a tener el mismo valor como una unidad de la divisa extranjera al tiempo T. Estas deben tener el mismo precio al tiempo t. Así

$$f + Ke^{-r(T-t)} = Se^{-r_f(T-t)},$$

o

$$f = Se^{-r_f(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.7}$$

El precio forward (o tipo de cambio forward), F, es el valor de K que hace $f = 0$ en la ecuación (2.7)

$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)}, \tag{2.8}$$

esta es la tasa de interés mejor conocida como *Relación de Paridad* en el campo de las finanzas internacionales. De la discusión en la sección 2.9, F también es el precio futuro.

Note que las ecuaciones (2.7) y (2.8) son idénticas a las ecuaciones (2.5) y (2.6), respectivamente, con q que es reemplazada por r_f. Esto es porque una divisa extranjera es análoga a un producto derivado que paga un rendimiento conocido. El rendimiento es la tasa de interés libre de riesgo de la divisa extranjera. Esto es así porque el interés ganado por el titular de la divisa extranjera está denominado en la divisa extranjera. Este valor, cuando es medido en la moneda doméstica, es proporcional al valor de la divisa extranjera.

2.12. FUTUROS SOBRE ORO Y PLATA

El oro y la plata son poseidos por un número significativo de inversionistas únicamente para invertir. Si los costos de almacenamiento son ignorados, pueden ser considerados como ànálogos a los productos que no pagan intereses. Usando la notación dada en la sección 2.6, S es el precio spot. Como muestra la ecuación (2.2) el precio futuro, F, está dado por

$$F = Se^{r(T-t)}, \tag{2.9}$$

Los costos de almacenamiento pueden considerarse como ingresos negativos. Si U es el valor presente de todos los costos de almacenamiento esto se contraerá durante la vida de un contrato, se sigue de la ecuación (2.4), que

$$F = (S + U)e^{r(T-t)}, \tag{2.10}$$

si los costos de almacenamiento se contraen en cualquier período y son proporcionales al precio de los bienes, pueden ser considerados que proporcionan rendimientos negativos. En este caso, de la ecuación (2.6)

$$F = Se^{(r+u)(T-t)},$$

donde u es el costo de almacenamiento por año como una proporción del precio spot.

Ejemplo 2.10. Considere un contrato futuro de oro a un año. Suponga que los costos son \$2 por onza por año en el mercado de oro y el pago se hará al finalizar el año. Supongamos que el precio spot es de \$450 y la tasa libre de riesgo es 7% por año para el vencimiento. Esto corresponde a $r = 0.07$, $S = 450$ y

$$U = 2e^{-0.07} = 1.865$$

El precio futuro, F, está dado por

$$F = (450 + 1.865)e^{0.07} = 484.6$$

2.13. FUTUROS DE OTROS BIENES

Para bienes que no son considerados, ante todo para propósitos de inversión, el argumento de arbritaje llevado a las ecuaciones (2.9) y (2.10) necesita revisarse cuidadosamente.

Supongamos que en lugar de la ecuación (2.10) tenemos

$$F > (S + U)e^{r(T-t)} \tag{2.11}$$

Para tomar ventaja de esto, un árbitro puede implementar la siguiente estrategia:

1. Pedir prestado un monto $S + U$ a una tasa libre de riesgo y usarlo para comprar el bien y pagar los costos de almacenamiento.

2. Cancelar un contrato futuro.

Esto lleva a un beneficio de $F - (S + U)e^{r(T-t)}$ al tiempo T. No existe problema al implementar la estrategia para cualquier bien. Sin embargo, como el árbitro lo hizo, habrá una tendencia al incrementarse S y F decrecerá hasta que la ecuación (2.11) no sea cierta. Concluimos que la ecuación (2.11) no puede sostenerse para cualquier longitud de tiempo significativa .

Ahora suponga que

$$F < (S + U)e^{r(T-t)} \tag{2.12}$$

Para tomar ventaja de esto, la forma es análoga a la descrita en la sección 2.7, es necesario suspender el bien de tal manera que los costos de almacenamiento sean pagados a la persona con la posición corta. Esto usualmente no es posible.

Para el oro y la plata podemos argumentar que hay muchos inversionistas que tienen el bien solamente para invertir. Cuando ellos observan la desigualdad en la ecuación (2.12), encuentran más rentable lo siguiente:

1. Vender el bien, rescatar los costos de almacenamiento e invertir las ganancias a una tasa libre de riesgo.

2. Comprar el contrato futuro.

   El resultado será un menor riesgo del beneficio al vencimiento de $(S+U)e^{r(T-t)} - F$ relativo a la posición que se ha mantenido si ellos han tenido el oro y la plata. Por lo tanto, la ecuación (2.12) no puede mantenerse a la larga y $F = (S+U)e^{r(T-t)}$.

Para bienes que no están, en un amplio sentido, mantenidos por inversionistas, este argumento no puede ser usado por particulares y compañías que guardan el bien en inventario porque es un valor de consumo, no porque sea un valor de inversión. Ellos son reacios a vender el bien y comprar contratos futuros ya que éstos no pueden ser consumidos. No existe nada que pare la ecuación (2.12) para sostenerla. Esto explica porque los precios futuros de muchos bienes decrecen conforme el tiempo de vencimiento aumenta. Cuando la ecuación (2.12) se mantiene, los usuarios del bien deben sentir que pueden obtener beneficios del bien físico, los cuales no han sido obtenidos por el titular de un contrato futuro. Estos beneficios pueden incluir la habilidad de ganar con una escasez local temporalmente o la habilidad de guardar una producción que está en proceso. Los beneficios son algunas veces llamados *Rendimientos de Conveniencia* provistos por el producto. Si el monto de los costos de almacenamiento y su valor presente, U, son conocidos, los rendimientos de conveniencia, y, están definidos como

$$Fe^{y(T-t)} = (S+U)e^{r(T-t)},$$

si los costos de almacenamiento por unidad de tiempo son una proporción constante, u, de un precio actual, y está definida como

$$Fe^{y(T-t)} = (S+U)e^{r(T-t)},$$

o

$$Fe^{y(T-t)} = Se^{(r+u-y)(T-t)}. \tag{2.13}$$

Para un bien que es poseído solamente para invertir por un número significativo de individuos se tiene

$$F = (S+U)e^{r(T-t)},$$

o

$$F = Se^{(r+u)(T-t)},$$

así que $y = 0$

2.14. CONTRATOS FUTUROS SOBRE T-BONDS Y T-NOTES

El titular de un contrato largo sobre un bono está obligado a comprar el bono en alguna fecha futura en un precio preestablecido. Las acciones subyacentes del contrato son, por tanto, aquellas que proveen beneficios conocidos. La ecuación (2.4) es entonces verdadera con S igual al valor del bono al tiempo t, e I igual al valor presente de cualquier pago de cupones recibidos por el titular.

Un factor complicado es la relación entre el precio cotizado de un bono y el precio efectivo que debe tener para ser pagado por el comprador del bono. En general

$$\textit{precio efectivo} = \textit{precio cotizado} + \begin{array}{l}\textit{intereses acumulados desde la}\\ \textit{última fecha del cupón}\end{array}$$

el precio spot cotizado debe ser convertido a precio de efectivo antes que la ecuación (2.4) sea usada. Los precios futuros dados por la ecuación (2.4) son los precios de efectivo futuro. Ya que los precios futuros de los bonos son normalmente cotizados de la misma forma que los precios de los bonos, debemos usar la ecuación

$$\textit{precios futuros cotizados} = \textit{precio futuro del efectivo} - \begin{array}{l}\textit{intereses acumulados desde la}\\ \textit{última fecha del cupón}\end{array}$$

para obtener los precios futuros cotizados.

Los contratos futuros de los bonos del tesoro son negociados en el Chicago Board of Trade. Los precios se dan en dólares y treinta y dosavos de dólar. Así 91-15 indica un precio de $\$91\frac{15}{32}$. El valor será 100% del valor nominal de los bonos. Un contrato incluye la entrega de \$100,000 del valor nominal del bono. Así, un cambio de \$1 dólar en el precio futuro cotizado puede llevar a un cambio de \$1000 dólares en el valor del contrato futuro. La entrega puede tener lugar en cualquier periodo durante el mes de entrega. El contrato especifica una entrega a 15 años para bonos del gobierno con un 8% por cupón. Para dichos bonos es raro que exista fecha de entrega, existe una previsión para cualquier bono del gobierno con 15 años de vencimiento (y no exigidos antes). La parte con la posición corta elige aquellos bonos que le serán entregados. Para cada posible bono que puede ser entregado, el intercambio define un *Factor de Conversión*. Este es el número del 8% de los bonos que son contados como equivalentes al bono para el propósito del contrato. Calcular exactamente los precios futuros de los T-Bonds depende de cómo se calcule primero el precio probable más barato del bono a entregar. Porque de la manera en que se calcule el factor de conversión, los bonos con cupones altos y vencimiento largo son usualmente para los cuales la parte con la posición corta encuentra más barata la entrega.

Ejemplo 2.11. Supongamos que en un contrato futuro de T-Bonds se conoce que el bono más barato a la entrega será un bono cupón al 12% con un factor de conversión del 1.4. Supongamos también que se conoce que la entrega será en periodos de 270 días. Los cupones serán pagados semestralmente sobre el bono. La última fecha del cupón, supongamos, fué hace 60 días, la siguiente fecha del cupón es en un periodo de 122 días y la siguiente es en 305 días. El periodo de estructura es descargado y la tasa de interés (continuamente compuesta) es 10%p.a. Suponemos que el precio del bono cotizado actualmente es \$120. El precio en efectivo del bono es obtenido sumando la proporción del precio cotizado del siguiente cupón pagando lo que acumuló el titular. El precio en efectivo es por lo tanto

$$120 + \frac{(60}{182)}(6) = 121978$$

Un cupón de 6 será recibido después de 122 días (=0.3342) años). El valor presente de éste es

$$6e^{(-0.3342)(0.1)} = 5.803$$

El contrato futuro finaliza a los 270 días (=0.7397 años. El precio futuro en efectivo, si el contrato se escribe sobre el 12% de los bonos, será

$$(121.978 - 5.083)e^{(0.7397)(0.1)} = 125.094$$

A la entrega hay 148 días de intereses acumulados. El precio futuro cotizado, si el contrato se emite sobre el 12% de los bonos, será

$$125.094 - (6)\frac{(148}{183)} = 120.242$$

El contrato de hecho es escrito sobre un estandar del 8% sobre los bonos y 1.4 de bonos estandar son considerados equivalentes a cada 12% de los bonos. El precio futuro actual cotizado será por tanto

$$\frac{120}{1.4} = 85.887$$

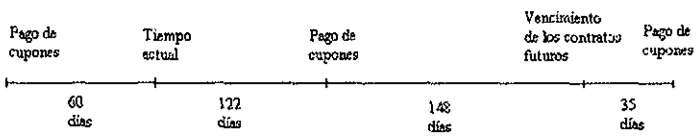

Fig.2.1 Gráfica de periodo para el ejemplo 2.11

El Chicago Board of Trade anota los contratos futuros que trabajan similarmente con sus contratos de Bonos del Tesoro. Cualquier bono de gobierno puede ser entregado con un vencimiento entre $6\frac{1}{2}$ y 10 años. Los factores de conversión están disponibles para determinar el número de bonos estándar que son contados como equivalentes a las distintos bonos que están siendo liberados para los propósitos del contrato.

2.15. FUTUROS DE T-BILLS

Un contrato futuro a 90 días sobre *T-Bills* se diferencia de los otros contratos considerados anteriormente en que el activo financiero que existe en el período puede no existir actualmente y durante la vida del contrato forward. Es por tanto necesario hipotetizar que un bien que existe en el período en que el contrato futuro está siendo valuado y el cual lleva el mismo valor que un T-Bill a 90 días al vencimiento del contrato forward.

Supongamos que los contratos forward tienen 120 días de vencimiento. Un activo financiero que tiene el mismo valor que los T-Bills al vencimiento del contrato futuro es un bono puro de descuento que tiene 210 días al vencimiento y paga el mismo monto principal que los billetes del tesoro al vencimiento.

Más generalmente, suponga que un punto en un periodo de 90 días después del periodo T es denotado por T^* y se define S como el precio de un bono de descuento que vence al tiempo T^*. Este bono de descuento es el activo financiero del contrato futuro y no causa ingresos, se sigue de la ecuación (2.2) que el precio futuro, F, está dado por

$$F = Se^{r(T-t)}, \tag{2.14}$$

el precio del bono, S, está dado por

$$S = Ae^{-r^*(T^*-t)}, \tag{2.15}$$

donde A es le valor en el contrato (e.d. el monto principal pagadero al vencimiento) del T-Bill y r^* es la tasa de interés libre de riesgo continuamente compuesta que se aplica al periodo de tiempo entre t y T^*. Sustituyendo S de la ecuación (2.15) en la ecuación (2.14.) obtenemos

$$F = Ae^{r(T-t)-r^*(T^*-t)}. \tag{2.16}$$

La tasa de interés forward, $\hat{r}$, al tiempo t para el periodo de tiempo entre T y T^* es la tasa de interés forward que, cuando está compuesta con r para el periodo de tiempo entre t y T, proporciona una tasa global r^* para el tiempo entre t y T^*. Cuando todas las tasas *están continuamente compuestas, es fácil mostrar que* r^* *es la tasa promedio de* r *y* $\hat{r}$, esto es

$$r^*(T^* - t) = \hat{r}(T^* - T) + (T - t)$$

$$\hat{r} = \frac{r^*(T^*t) - r(T-t)}{T^* - t},$$

entonces, de la ecuación (2.16)

$$F = e^{-\hat{r}(T^*-T)},$$

esto muestra que el precio futuro es el valor de T- Bill que produce la tasa de interés forward aplicable al periodo de tiempo entre T y T^*.

Existe una diferencia entre el precio de efectivo y el precio cotizado de un T-Bill. Si Y es el precio de efectivo del T-Bill que tiene un valor nominal, A, de \$100, el precio cotizado es

$$4(100 - Y),$$

esto es conocido como *Descuento Producido.* Este es el retorno anualizado del dólar proporcionado por el T-Bill expresado como porcentaje del valor nominal. Si $Y = 98$, el precio cotizado del T-Bill será de \$8.00.

Un contrato futuro a 90 días de T-Bills especifica una entrega de $1 millón en T-Bills. Los precios futuros de T-Bills no cotizan de la misma forma que los T-BIlls en sí mismos. Se usa la siguiente relación

precios futuros cotizados de T-bills	= 100 -	precio cotizado de los T-Bills

Si Z es el precio futuro cotizado y Y es el precio correspondiente que actualmente puede ser pagado por $100 en T-bills, tenemos que

$$Z = 100 - 4(100 - Y),$$

esta fórmula es equivalente a

$$Y = 100 - 0.25(100 - Z).$$

Ejemplo 2.12. Supongamos que la tasa a 140 días es 8% p.a. y la tasa a 230 días es 8.25% p.a. continuamente compuesta. La tasa forward para el periodo de tiempo entre el día 140 y el día 230 es

$$\frac{(0.0825)(230) - (0.08)(140)}{90} = 0.0864$$

u 8.64%. Así a 90 días=0.2466 años, el precio futuro por $100 de T-Bills para entregar en 140 días es

$$100e^{(-0.0864)(0.2466)} = 97.89$$

esto será cotizado como 100-4(100-97.89)=91.56

La cotización del Eurodólar (IMM y LIFFE) son para entregar a 90 días en depósitos de Eurodólar que valdrá $100 al vencimiento. Los cálculos son ánalogos que para T-Bills.

2.16. OPCIONES DE ENTREGA

Mientras un contrato forward normalmente especifica que la entrega tendrá lugar en un día particular, un contarto futuro a menudo permite que la parte con la posición corta elija la entrega en cualquier tiempo durante cierto periodo. (Típicamente, la parte dá a conocer con muy pocos días de anticipación su intención de entrega). Esto produce una complicación para determinar los precios futuros. ? debe el vencimiento de un contrato especificarse al inicio, en medio o al final del periodo de entrega ?. Incluso, aunque por lo general los contratos son cerrados antes del vencimiento, es importante conocer cuándo ha de tener lugar la entrega, para calcular los precios futuros teóricamente.

Si el precio futuro es una función creciente en el tiempo de vencimiento, la ecuación (2.13) muestra que los beneficios del activo financiero (incluyendo los rendimientos y los costos netos de almacenamiento) son menores que la tasa libre de interés. Por lo tanto, generalmente es óptimo para la parte con la posición corta entregar lo más pronto como sea posible. Esto es porque los intereses ganados sobre el efectivo recibido prevalecen sobre los beneficios del valor del activo financiero. Como regla general, los precios futuros en estas circunstancias deben por tanto ser calculados al inicio del período sobre las bases en que la entrega tendrá que ser hecha. Si los precios futuros decrecen tanto como el vencimiento crece, considere lo contrario: es usualmente óptimo para la parte con la posición corta entregar lo más tarde como sea posible y los precios futuros deben, como regla general, ser calculados sobre el supuesto que esto pasará.

Como se discutió anteriormente, en los contratos futuros sobre bonos y T-Bills, la parte con la posición corta puede elegir de un número de bonos diferentes cuándo le hacen la entrega de estos. Esto lleva a complicaciones extras cuando los precios futuros están siendo determinados. El bono que parece más barato a la entrega, ahora puede no serlo a la entrega del vencimiento. En suma, debemos notar que, por lo general, los contratos futuros de bienes especifican un número de grados diferentes del bien subyacente que puede ser entregado y un número de localidades alternativas para la entrega. Esto puede también sumar algunas complicaciones para el cálculo de los precios futuros.

CAPÍTULO 3

UN MODELO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS PRECIOS DE ACCIONES

Una variable aleatoria que se desarrolla en el tiempo es un *Proceso estocástico.* Un proceso estocástico puede ser clasificado en *tiempo discreto* o *tiempo continuo.* Un proceso estocástico en tiempo discreto es aquel donde el valor de la variable sólo puede cambiar en puntos fijos de tiempo, mientras que un proceso estocástico en tiempo continuo es aquel donde los cambios pueden tener lugar en cualquier momento. Los procesos estocásticos también pueden ser clasificados como una *variable discreta* o una *variable continua.* En un proceso de variable continua, la variable puede tomar cualquier valor en un cierto rango, mientras que en un proceso de variable discreta, sólo son posibles una cantidad finita de valores.

En este capítulo obtendremos procesos estocásticos de una variable continua y tiempo continuo para precios de acciones. El comprender estos procesos es el primer paso para entender el comportamiento del precio de las opciones y de otros productos derivados más complicados. Es preciso señalar que en la práctica los precios de las acciones no siguen un proceso estocástico de variable continua ni de tiempo continuo sino que son restringidas a valores discretos (usualmente en múltiplos de $\frac{1}{8}$) y los cambios sólo son observados cuando la casa de bolsa está abierta. Sin embargo, los procesos estocásticos de variable continua y de tiempo continuo nos proporcionan un modelo práctico para nuestro propósito.

3.1. LA PROPIEDAD MARKOVIANA

Un proceso de *Markov* es un tipo particular de proceso estocástico donde sólo el estado actual del proceso es relevante para tratar de pronosticar el futuro. El pasado histórico del proceso y la forma en que el presente ha surgido son irrelevantes.

Usualmente se supone que los precios de acciones siguen un proceso de Markov. Como ejemplo, suponga que el precio de las acciones de IBM es de \$100. Si el precio de las acciones sigue un proceso de Markov, nuestros pronósticos no deben de ser afectadas por el precio de la semana y el mes anteriores, ni mucho menos del precio que tenían hace un año. Los pronósticos para el futuro son inciertos y deben ser expresados en términos de distribuciones de probabilidad. En este ejemplo, la única pieza de información relevante es el hecho de que el precio es ahora \$100 y la propiedad markoviana implica que la distribución de probabilidad del precio de las acciones para cualquier fecha futura depende sólo del precio actual de las acciones de \$100.

La propiedad markoviana de los precios de las acciones corresponde a la forma debil de eficiencia del mercado. Este estado del mercado favorece que el precio actual de una acción se apropie de toda la información contenida en el pasado del precio de la acción. Si la forma debil de eficiencia del mercado no fuera cierta, los analístas técnicos podrían calcular el pronóstico de los precios de las acciones interpretando los datos del pasado histórico. Existen pequeñas evidencias de que ellos en realidad hacen esto último.

La competencia en el mercado tiende a asegurar que los precios de las acciones sigan un proceso de Markov. El heccho es que hay muchos inversionistas observando el cierre del mercado de acciones e intentan crearse un beneficio conduciendo a una situación donde el precio de las acciones en algún tiempo dado se apropie de la información de los precios anteriores. Supongamos que se descubre que los precios de una acción sigue un patrón que siempre proporciona 65% de probabilidad de que los precios aumenten en una fecha cercana. Los inversionistas podrían comprar accciones tan pronto como el patrón aparezca y demandar las acciones inmediatamente que aumenten. Esto llevará a un aumento inmediato en el precio y el efecto observado podría ser eliminado como también lo serían las oportunidades de comercio rentables.

3.2. PROCESO DE WIENER

Los modelos de comportamiento de los precios de acciones son usualmente expresados en términos que son conocidos como *Procesos de Wiener.* Un proceso Wiener es un tipo particular de proceso de Markov. Ha sido usado en la Física para describir el movimiento de una partícula que está sujeta a un gran número de pequeñas moléculas que chocan y es alguna veces referida como *Movimiento Browniano.*

El comportamiento de una variable, z, que sigue un proceso Wiener puede ser entendida considerando los cambios en su valor en un pequeño intervalo de tiempo. Considere un pequeño intervalo de tiempo de longitud Δt y se define Δz como el cambio en z durante Δt. Existen dos propiedades básicas de Δz:

Propiedad 1. Δz está relacionada con Δt por la ecuación

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}, \tag{3.1}$$

donde ϵ es una variable aleatoria de una Distribución Normal estandarizada (es decir, una distribución normal con media cero y desviación estandar 1).

Propiedad 2. El valor de Δz para cualesquiera dos diferentes intervalos pequeños de tiempo Δt son independientes.

Se sigue de la propiedad 1 que Δz en sí misma tiene una distribución normal con

$$\text{media de } \Delta z = 0$$
$$\text{varianza de } \Delta z = \Delta t$$
$$\text{desviación estándar de } \Delta z = \sqrt{\Delta t}$$

la propiedad 2 implica que z sigue un proceso de Markov.

Considere el incremento en el valor de z durante un periodo relativamente largo de tiempo, T. Definamos este incremento por $z(T) - z(0)$. Se puede considerar como la suma de los incrementos en z en N pequeños intervalos de longitud Δt, por lo tanto

$$N = \frac{T}{\Delta t},$$

así

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t}, \tag{3.2}$$

donde ϵ_i (con $i = 1, 2, 3, ..., N$) son muestras aleatorias de una distribución normal estandarizada.

Se sigue de la ecuación (3.2) que $z(T) - z(0)$ está normalmente distribuida con

$$\text{media de } [z(T) - z(0)] = 0$$
$$\text{varianza de } [z(T) - z(0)] = N\Delta t = T$$
$$\text{desviación estándar de } [z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$$

así, en cualquier intervalo de tiempo de longitud T, el incremento en el valor de una variable que sigue un proceso Wiener está normalmente distribuido con una media igual a cero y desviación estandar igual a $\sqrt{T}$. Ahora es claro porque Δt está definida como el producto de ϵ por $\sqrt{\Delta t}$ en vez del producto de ϵ y Δt. Las varianzas son aditivas para distribuciones normales independientes; no así las desviaciones estándar.

Ejemplo 3.1. Suponga que el valor inicial de una variable que sigue un proceso Wiener es 25 y que el tiempo es medido en años. Al final de un año el valor de la variable está normalmente distribuida con una media de 25 y desviación estándar 1.0. Al final de dos años está normalmente distribuida con una media de 25 y desviación estándar $\sqrt{2}$ o 1.414. Note que nuestra incertidumbre acerca del valor de la variable a una fecha futura, como medida de la desviación estandar, se incrementa con la raíz cuadrada y de qué tan lejos proyectemos hacia adelante.

En cálculo ordinario es usual proceder de pequeños cambios al límite conforme los pequeños cambios se aproximen a cero. Así $\Delta y \setminus \Delta x$ nos conduce a $dy \setminus dx$ en el límite y así por el estilo en otras aproximaciones. Podemos proceder similarmente cuando tratamos con procesos estocásticos en tiempo continuo. Un proceso Wiener es el límite cuando $\Delta t \to 0$ del proceso descrito anteriormente para z.

Análogamente al cálculo ordinario, escribimos el caso del límite de la ecuación (3.1) como

$$dz = \epsilon\sqrt{dt}$$

El proceso Wiener básico que ha sido desarrollado hasta estos momentos tiene una tasa de variación cero y una tasa de varianza igual a 1.0. La tasa de variación cero significa que el valor esperado de z en cualquier tiempo futuro es igual al valor actual. La tasa de varianza de 1.0 significa que el cambio de varianza en z en un intervalo de tiempo de longitud T es (1.0)(T). Un proceso *Wiener Generalizado* para una variable x puede ser definido en términos de dz como sigue

$$dx = a\,dt + b\,dz \tag{3.3}$$

donde a y b son constantes.

Para comprender la ecuación (3.3) consideremos las dos componentes en el lado derecho separadamente. El término $a\,dt$ implica que x tiene una tasa de variación esperada de a unidades por unidad de tiempo. Sin el término $b\,dz$ la ecuación es

$$dx = a\,dt$$

esto implica que

$$\frac{dx}{dt} = a$$

por lo tanto

$$x = x_0 + at$$

donde x_0 es el valor de x al tiempo t_0. En un intervalo de tiempo de longitud T, x crece en un monto aT.

El término $b\,dz$ puede ser considerado como ruido adicional o la variabilidad que sigue la trayectoria de x. El monto de esta variabilidad es b veces un proceso Wiener. En un intervalo pequeño de tiempo Δt el cambio en el valor de x, Δx, en las ecuaciones (3.1) y (3.3) dado por

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde, como se mencionó anteriormente, ϵ es una variable aleatoria de una distribución normal estandarizada. Así, Δx tiene una distribución normal con

$$\text{media de } \Delta x = a\Delta t$$
$$\text{varianza de } \Delta x = b^2\Delta t$$
$$\text{desviación estándar de } \Delta x = b\sqrt{\Delta t}$$

Un argumento similar muestra que el cambio en el valor de x en cualquier intervalo de tiempo T está normalmente distribuida con

$$\text{media del cambio en x} = a\,T$$
$$\text{varianza del cambio en x} = b^2 T$$
$$\text{desviación estándar del cambio en x} = b\sqrt{T}$$

por lo tanto, el proceso Wiener generalizado dado en la ecuación (3.3) tiene una tasa de variación esperada (es decir, variación por unidad de tiempo) de a y una tasa de varianza (es decir, varianza por unidad de tiempo) de b^2.

Ejemplo 3.2 Considere la situación donde la posición de efectivo de una empresa, medida en miles de dólares, sigue un proceso Wiener generalizado con una variación de 20 p.a. y una tasa de varianza de 900 p.a. Inicialmente, la posición de efectivo es de 50. Al final de un año la posición del efectivo tendrá una distribución normal con una media de 70 y desviavión estándar de $\sqrt{900}$ o 30. Al final de seis meses tendrá una distribución normal con una media de 60 y desviación estándar de 30 $\sqrt{0.5} = 21.21$. Note que nuestra incertidumbre acerca de la posición del efectivo para algúna fecha futura, como medida de la desviación estándar, aumenta tanto como la raíz cuadrada sea proyectada hacia adelante. También, note que la posición del efectivo puede volverse negativa (lo cual se puede interpretar como una situación donde la empresa está pidiendo fondos prestados).

Puede ser definido un nuevo tipo de proceso estocástico. Este es conocido como un proceso *Ito*. Es un proceso Wiener generalizado donde los parámetros a y b son funciones del valor de una variable subyacente, x, y tiempo t. Algebráicamente, un proceso Ito puede ser descrito como

$$dx = a(x,t)\ dt + b(x,t)\ dz \tag{3.4}$$

tanto la tasa de variación como la tasa de varianza de un proceso Ito están sujetas a cambios en el tiempo.

3.3. EL PROCESO PARA PRECIOS DE ACCIONES

En esta sección discutiremos el proceso estocástico de los precios de acciones que no pagan dividendos. Los efectos de los dividendos en el proceso serán discutidos posteriormente.

Es alentador sugerir que los precios de acciones siguen un proceso Wiener generalizado, esto es, que tienen una tasa de variación esperada constante y una tasa de varianza constante. Sin embargo, este modelo falla al capturar cierto aspecto clave de precios de acciones. Este aspecto se refiere a que el porcentaje esperado de beneficios requeridos por los inversionistas de una acción es independiente de los precios de la acción. Más explicitamente, si el inversionista requiere un 14% p.a. de beneficio esperado cuando el precio de la acción es de \$10, entonces, también se requiere de un 14% p.a. de beneficio esperado cuando el precio es de \$50. Claramente, el supuesto de que la tasa de variación esperada es constante es inapropiado y necesita ser reemplazado por el supuesto de que la variación esperada, expresada como una proporción de los precios de las acciones, es constante. Esto último implica que si S es el precio de la acción, la tasa de variación esperada en S es μS para alguna constante μ. Así, en un intervalo corto de tiempo, Δt, el incremento esperado en S es $\mu S\ \Delta t$. El parámetro, μ, es el beneficio esperado de la acción, expresada en forma decimal. Si la tasa de varianza del precio de la acción es siempre cero, este modelo implica que

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt \\ S &= S_0 e^{\mu t} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde S_0 es el precio de la acción al tiempo cero. La ecuación (3.5) muestra que, cuando la tasa de varianza es cero, el precio de la acción crece como una tasa continuamente compuesta de μ por unidad de tiempo.

En la práctica, de hecho, el precio de las acciones exhibe *volatilidad.* Un supuesto razonable es que la varianza del porcentaje del beneficio en un periodo corto de tiempo Δt es la misma pase lo que pase con el precio de las acciones. En otras palabras, un inversionista sólo tiene certeza que su porcentaje de beneficio es el mismo cuando el precio de las acciones es de \$50 que cuando es de \$10. Definimos σ^2 como la tasa de varianza del cambio proporcional en el precio de las acciones. Esto muestra que $\sigma^2 \Delta t$ es la varianza del cambio actual en el precio de las acciones, S, durante Δt. La tasa de varianza instantanea de S es por tanto $\sigma^2 S^2$.

Estos argumentos sugieren que S puede ser representado por un proceso Ito que tiene tasa de variación esperada instantanea μS y tasa de varianza instantanea $\sigma^2 S^2$. Esto puede ser escrito como

$$\begin{aligned} ds &= \mu S dt + \sigma S dz \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dz \end{aligned} \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) es el modelo más ampliamente usado de comportamiento de precios de acciones. La variable σ es usualmente referida como la volatilidad del precio de las acciones. La variable μ es el beneficio esperado.

Ejemplo 3.3 Considere una acción que no paga dividendos y tiene una volatilidad de 30% p.a. *y proporciona un beneficio esperado de 15% p.a. En este caso* $\mu = 0.15$ y $\sigma = 0.30$. El proceso para el precio de la acción es

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

si S es el precio de la acción en un tiempo particular y ΔS es el incremento en el precio de la acción en el siguiente intervalo pequeño de tiempo

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ϵ es una muestra aleatoria de una distribución normal estandarizada. Considere un intervalo de tiempo de una semana o 0.0192 años y supongamos que el precio inicial de la acción es \$100, entonces $\Delta t = 0.0192$, $S = 100$ y

$$\Delta S = 100(0.00288 + 0.0416\epsilon)$$

muestra que el incremento en el precio es una muestra aleatoria de una distribución normal con media \$0.288 y desviación estándar \$4.16.

3.4. UNA REVISIÓN DEL MODELO

El modelo de comportamiento de los precios de acciones que ha sido desarrollado en esta parte es alguna veces conocido como *Movimiento Browniano geométrico.* La versión tiempo-discreto del modelo es

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}, \tag{3.7}$$

la variable ΔS es el cambio en el precio de acciones, S, en un pequeño intervalo de tiempo Δt, y ϵ es una muestra aleatoria de una distribución normal estandarizada. El parámetro μ es el beneficio esperado por unidad de tiempo de las acciones y el parámetro σ es la volatilidad del precio de las acciones. Ambos parámetros se suponen constantes.

El lado derecho de la ecuación (3.7) es el beneficio proporcional que se obtiene por las acciones en un periodo corto de tiempo Δt. El término $\mu\Delta t$ es el valor esperado de este beneficio. La varianza de la componente estocástica (y por tanto del beneficio íntegro) es $\sigma^2\Delta t$.

La ecuación (3.7) muestra que $\Delta S \setminus S$ está normalmente distribuida con media $\mu\Delta t$ y desviación estandar $\sigma\sqrt{\Delta t}$. En otras palabras

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}), \tag{3.8}$$

donde $\phi(m,\ s)$ denota una distribución normal con media m y desviación estandar s.

Supongamos que el beneficio esperado de las acciones es 14% p.a. y que la desviación estándar del beneficio (es decir, la volatilidad) es 20% p.a. Si el tiempo es medido en años, se sigue que

$$\mu = 0.14$$

$$\sigma = 0.20$$

Consideremos que $\Delta t = 0.01$ y que los cambios en el precio de las acciones en intervalos de tiempo de longitud 0.01 años (o 3.65 días). Se sigue que $\Delta S \setminus S$ es normal con media 0.0014 (=0.14 X 0.01) y desviación estándar 0.02 (=0.2 $\times\sqrt{0.01}$), esto es

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(0.0014,\ 0.02) \tag{3.9}$$

Una trayectoria para los precios de las acciones puede ser simulada por muestreo repetitivo de $\phi(0.0014,\ 0.02)$. Un procedimiento para desarrollar dicha simulación es tomar una muestra de valores v_1, de una distribución normal estandarizada y entonces convertir a una muestra, v_2, con $\phi(0.0014,\ 0.02)$ usando

$$v_2 = 0.0014 + 0.02\ v_1 (3.10)$$

La tabla 3.1 muestra una simulación particular de movimientos en el precio de las acciones.

Tabla 3.1

Precio de las acciones al inicio del periodo	Muestra aleatoria v_1 de $\phi(0,1)$	Muestra aleatoria de v_2 correspondiente a $\phi(0.0014, 0.02)$	Cambio en los precios durante el periodo
20.000	0.52	0.0118	0.236
20.236	1.44	0.0302	0.611
20.847	-0.86	-0.0158	-0.329
20.518	1.46	0.0306	0.628
21.146	-0.69	-0.0124	-0.262
20.883	0.21	0.0056	0.115
20.719	-1.10	-0.0206	-0.427
20.292	0.73	0.0160	0.325
20.617	1.16	0.0246	0.507
21.124	2.56	0.0526	1.111

El precio inicial de las acciones es \$20. Para el primer periodo el número aleatorio v_1, muestreado de $\phi(0,1)$, es 0.52. Usando la ecuación (3.10) obtenemos un valor aleatorio de 0.0118, de $\phi(0.0014, 0.02)$. Usando la ecuación (3.9), $\Delta S = 20 \times 0.0118$, o 0.236 y así sucesivamente. Note que las muestras, v_2, son independientes una de la otra. Sino lo fueran, la propiedad markoviana no es aplicable. La tabla 3.1 supone que los precios de las acciones son medidas en el valor más cercano 0.001 lo cual, de hecho, no es el caso. Para obtener los precios de acciones que pueden ser cotizadas, los valores en la primera columna de la tabla pueden redondearse al valor más cercano $\$\frac{1}{8}$. Es importante enfatizar que la tabla muestra sólo un posible patrón del movimiento de precios de acciones. Diferentes muestras aleatorias pueden conducir a diferentes movimientos de precios. Cualquier pequeño intervalo de tiempo puede ser usado en la simulación. Sin embargo, sólo en el límite, $\Delta t \to 0$ es una verdadera descripción del movimiento Browniano geométrico obtenido. El precio final de 21.124 en la tabla 3.1 puede ser considerado como un valor aleatorio de la distribución de los precios de las acciones al final de 10 intervalos de tiempo, o un décimo de año. Por simulación repetida de los movimientos en los precios de la tabla 3.1 se obtiene una completa distribución de probabilidad de los precios de las acciones al final de un décimo de año.

3.5. LOS PARÁMETROS

El proceso para los precios de acciones que ha sido desarrollado en esta parte implica dos parámetros, μ y σ. Los valores de estos parámetros dependen de la unidad en que el tiempo es medido. Aquí y a lo largo de este trabajo suponemos que el tiempo se mide en años.

El parámetro μ es el beneficio esperado ganado por el inversionista en un periodo corto de tiempo. Este beneficio es anualizado y expresado como una proporción. La mayoría de los inversionistas necesitan altas ganancias esperando que se produzcan tomando en cuenta los altos riesgos tomados. Se sigue que el valor μ dependerá del riesgo del beneficio de la acción. También dependerá del nivel de las tasas de interés del mercado: el más alto nivel de las tasas de interés, el más alto beneficio esperado requerido de las acciones. Por ejemplo, el promedio μ está sobre 8% del beneficio en una inversión libre de riesgo para los bonos del tesoro. Así, cuando el beneficio en los bonos del tesoro es 8% p.a. o 0.08, un valor típico de μ es 0.16, esto es, el beneficio esperado de una acción es 16% p.a.

Afortunadamente, no debe importarnos calcular los valores de μ en sus detalles, porque el precio de un proucto derivado que depende de una acción es en general independiente de μ. El parámetro σ, la volatilidad del precio de la acción es, en contraste, críticamente importante para determinar el precio de la mayoría de los derechos de contingencia. Los procedimientos para estimar σ empíricamente son discutidos más adelante. Los valores típicos de σ para una acción están en un rango de 0.20 a 0.40 (es decir, entre 20% y 40%).

La desviación estándar, $\sigma\sqrt{\Delta t}$, es el cambio proporcional en el precio de las acciones en un pequeño intervalo de tiempo Δt. Una aproximación preliminar de la desviacón estándar del cambio en el precio de las acciones en un periodo de tiempo relativamente largo T es $\sigma\sqrt{T}$. Esto muestra que, como una aproximación, la volatilidad puede ser interpretada como la desviación estándar del cambio en el precio de las acciones en un año. Note que la desviacón estándar del cambio, proporcional en el precio de las acciones en un intervalo de tiempo relativamente largo T, no es exactamente $\sigma\sqrt{T}$. Esto es porque los cambios proporcionales no son aditivos (por ejemplo, un incremento del 10% en el precio de las acciones seguido de un 20% nos conduce a un incremento del 32% y no a 30%). En el siguiente capítulo la distribución de probabilidad del cambio en el precio de la acciones en un periodo de tiempo relativamente largo, T, será una normal logarítmica. También se mostrará que la volatilidad del precio de las acciones es exactamente igual a la desviación estándar del beneficio proporcionado por las acciones continuamente compuesto a un año.

3.6. UN MODELO BINOMIAL

En varias secciones de este trabajo se usa un modelo binomial como una representación de tiempo discreto del modelo para precios de acciones que han sido descritos en este capítulo. Supongamos que el precio inicial de las acciones es S. Bajo el modelo binomial se sigue el proceso ilustrado en la figura 3.1; en el siguiente pequeño intervalo de tiempo de longitud Δt sube a S_u con probabilidad p y baja a S_d con probabilidad $1-p$.

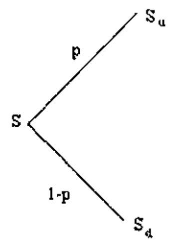

Fig.3.1. Modelo Binomial

Las variables u, d, y p deben ser elegidas de tal manera que, para un pequeño Δt, el beneficio esperado del precio de las acciones sea $\mu\Delta t$ y la varianza sea $\sigma^2\Delta t$. Una forma en que se logra hacer esto es haciendo

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\ , \quad d = \frac{1}{u}\ , \quad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}.$$

Se puede mostrar que cuando en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, este modelo binimial de movimientos de los precios de las acciones conduce al modelo de movimiento Browniano geométrico que ha sido desarrollado anteriormente.

Ejemplo 3.4 Considere un precio de acciones que proporciona un beneficio esperado de 12% p.a. y tiene una volatilidad de 30% p.a. Supongamos que el modelo binomial es usado para representar movimientos en periodos de tiempo de 0.04 años (aproximadamente 2 semanas). En este caso $\mu = 0.12, \sigma = 0.30$y $\Delta t = 0.04$, por tanto

$$\begin{aligned}
u &= e^{(0.30)(\sqrt{0.04}} = 1.0618 \\
d &= \frac{1}{u} = 0.9418 \\
p &= \frac{e^{(0.12)(0.04)} - 0.9418}{1.0618 - 0.9418} = 0.525
\end{aligned}$$

si el precio de las acciones inicia con \$100, los posibles movimientos en cuatro intervalos de tiempo de longitud Δt se ilustran en la figura 3.2.

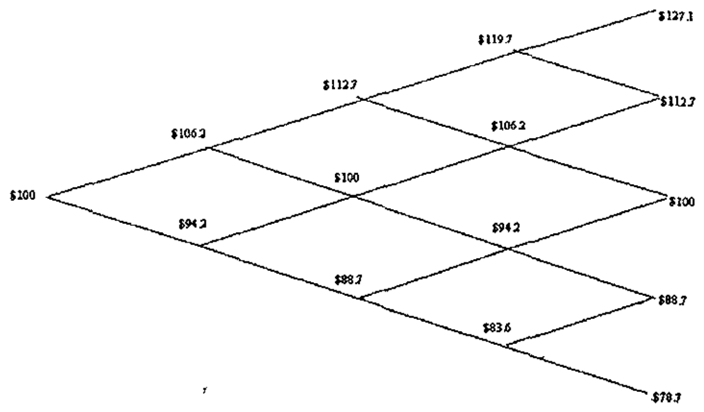

Fig.3.2 Movimientos del precio de las acciones.

La probabilidad de un movimiento hacia arriba es siempre 0.475. Cuando el precio de las acciones es de $112.7 ocurre que al final de los cuatro intervalos de tiempo están tres movimientos hacia arriba y uno hacia abajo. Entonces, la probabilidad del precio de las acciones comenzando con $112.7 y al final de cuatro intervalos de tiempo es

$$(4)(0.525)^3(0.475) = 0.275$$

las probabilidades, cuando los precios de las acciones son $127.1, $100, $88.7 y $78.7, puede mostrarse que son 0.076,.0.373, 0.225 y 0.051 respectivamente.

CAPÍTULO 4

EL ANÁLISIS DE BLACK-SCHOLES Y LA VALUACIÓN DE RIESGO NEUTRAL

A comienzos de los 70, *Black* y *Scholes* desarrollaron una ecuación diferencial que satisface a la mayoría de los precios de cualquier producto derivado que dependen de una acción que no paga dividendos. Ellos usaron la ecuación para obtener precios para opciones call y put Europeas sobre las acciones. En este capítulo explicamos el cálculo de la ecuación diferencial de Black-Scholes. Además se discuten las propiedades del proceso estocástico para los precios de las acciones desarrollado en el capítulo anterior y se explica una herramienta poderosa conocida como *Valuación de Riesgo Neutral.*

Recordemos que cuando se calculó el valor de los contratos forward no se hicieron suposiciones acerca de la tasa de interés y la variable r fué usada para representar la tasa de interés libre de riesgo para una inversión que vence al tiempo T. Seguiremos denotando la tasa de interés libre de riesgo por r. Sin embargo, excepto donde se establezca de otra forma, suponemos que la tasa de interés es constante y es la misma para todos los vencimientos.

4.1. LEMA DE ITO

El precio de una opción de acciones es una función del precio de las acciones subyacentes y del tiempo. Más generalmente, podemos decir que el precio de cualquier producto derivado es una función de las variables subyacentes estocásticas de los productos derivados y del tiempo. Un resultado importante del comportamiento de dichas funciones estocásticas fué descubierto por un matemático, ITO, en 1951.

Supongamos que el valor de una variable x sigue un proceso Ito

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \tag{4.1}$$

donde dz es un proceso Wiener y a y b son funciones de x y t. La variable x tiene una tasa de variación a y tasa de varianza de b^2. El lema de Ito muestra que una función G de x y t sigue el proceso

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\, a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\, b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x} b\; dz, \tag{4.2}$$

donde el término dz es el mismo proceso Wiener mostrado en la ecuación (4.1). Así, G también sigue un proceso Ito y tiene una tasa de variación

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\, b^2,$$

Una demostración completa y rigurosa del lema de Ito está fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, el lema puede ser presentado como una extensión natural de resultados conocidos del cálculo diferencial.

En el capítulo 3 se muestra que la ecuación

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{4.3}$$

es un modelo razonable del movimiento de los precios de las acciones con μ y σ constantes.

Del lema de Ito se infiere que el proceso que sigue una función, G, de S y t es

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\,\sigma S dz, \tag{4.4}$$

note que S y G están afectados por la misma fuente de incertidumbre dz.

Ejemplo 4.1. Considere un contrato forward sobre acciones que no pagan dividendos. Suponemos que la tasa de interés libre de riesgo es constante e igual a r para todo el vencimiento. Se definió F como el precio forward. De la ecuación (2.2)

$$F = Se^{r(T-t)},$$

así que

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)},\ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)},$$

suponemos que S sigue un movimiento Browniano geométrico con beneficio esperado μ y volatilidad σ [este es el proceso de la ecuación (4.3)]. El proceso para F, de la ecuación (4.4), está dado por

$$dF = \left[e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}\right]dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz,$$

sustituyendo $F = Se^{r(T-t)}$ obtenemos

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz,$$

por tanto, F sigue también un movimiento Browniano geométrico; además tiene la misma volatilidad que S y el valor de la tasa esperada es $\mu - r$.

4.2. UNA APLICACIÓN DEL LEMA DE ITO

En esta sección usaremos el lema de Ito para calcular el proceso seguido por $Ln(S)$. Se define

$$G = Ln(S),$$

entonces

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}\ ;\ \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}\ ;\ \frac{\partial G}{t} = 0,$$

se sigue de la ecuación (4.4) que el proceso seguido por G es

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz, \tag{4.5}$$

donde μ y σ son constantes. La ecuación (4.5) indica que G sigue un proceso Wiener generalizado. Tiene una tasa de variación constante $\mu - \sigma^2 \setminus 2$ y tasa de varianza constante σ^2. De los resultados en el capítulo 3, la forma en que cambian estos valores en G entre el tiempo actual, t, y algún tiempo futuro, T, están distribuidos normalmente con media

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),$$

y varianza

$$\sigma^2(T - t).$$

El valor de G al tiempo t es $Ln(S)$ y el valor al tiempo T es $Ln(S_T)$, donde S_T es el precio de las acciones al tiempo T. Este cambio durante el intervalo de tiempo $T - t$ es por tanto

$$Ln(S_T) - Ln(S),$$

entonces, con la notación del capítulo 3

$$Ln(S_T) - Ln(S) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),\ \sigma\sqrt{T - t}\ \right].$$

4.3. LA PROPIEDAD LOGNORMAL DE PRECIOS DE ACCIONES

Una variable tiene una distribución *Lognormal* si el logaritmo natural de las variables está distribuida normalmente. Se mostró en la sección 4.2 que el comportamiento de los precios de acciones desarrollado en el capítulo 3 implica que

$$Ln(S_T) - Ln(S) \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t),\ \sigma\sqrt{T - t}\ \right], \tag{4.6}$$

donde S_T es el precio de las acciones al tiempo T, S es el precio de las acciones en el tiempo actual t, y $\phi(m, s)$ denota una distribución normal con media m y desviación estándar s.

De las propiedades de la distribución normal, se sigue de la ecuación (4.6) que

$$Ln(S_T) \sim \phi\Big[Ln(S) + \Big(\frac{\mu - \sigma^2}{2}\Big)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\Big], \tag{4.7}$$

de aquí se deduce que S_T tiene una distribución Lognormal. La desviación estandar de $Ln(S_T)$ es proporcional a $\sqrt{T-t}$. Esto muestra que nuestra incertidumbre acerca del logaritmo de los precios de acciones, como medida de su desviación estándar, es proporcional a la raíz cuadrada anterior.

Ejemplo 4.2. Considere una acción con un precio de \$40, un beneficio esperado de 16% anual y una volatilidad de 20% anual, de la ecuación (4.7), la distribución de probabilidad del precio de la acción, S_T, en un tiempo de seis meses está dado por

$$\begin{aligned}
&Ln(S_T) \sim \phi\Big[Ln(40) + \Big(0.16 - \frac{0.04}{2}\Big)(0.5), (0.2)\sqrt{0.5}\Big],\\
&Ln(S_T) \sim \phi\big[3.759, 0.141\big],
\end{aligned}$$

existe un 95% de probabilidad de que una variable distribuida normalmente tenga un valor con dos desviaciones estándar de su media. Entonces, con 95% de confianza

$$\begin{aligned}
&3.477 < LnS_T < 4.041,\\
&e^{3.477} < S_T < e^{4.041},\\
&32.36 < S_T < 56.88,
\end{aligned}$$

concluimos que con una probabilidad de 95%, el precio de la acción a seis meses estará entre \$32.36 y \$56.88.

Una variable que tiene una distribución Lognormal puede tomar cualquier valor entre cero e infinito. A diferencia de la distribución normal, ésta es sesgada, así que la media, la mediana y la moda son todas diferentes. De la ecuación (4.7) y de las propiedades de la distribución Lognormal, se puede mostrar que el valor esperado de S_T, $E(S_T)$, está dado por

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)}, \tag{4.8}$$

esto coincide con la definición de μ como la tasa esperada del beneficio. La varianza de S_T, $Var(S_T)$, está dada por

$$Var(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)}\big(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\big). \tag{4.9}$$

Ejemplo 4.3. Considere una acción donde el precio actual es de \$20, el beneficio esperado es 20% anual y la volatilidad es 40% anual. El valor esperado de la acción, $E(S_T)$, y la varianza del precio de la acción en un año, $Var(S_T)$, están dadas por

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= 20e^{0.2} = 24.43,\\
Var(S_T) &= 400e^{0.4}(e^{0.16} - 1) = 103.54,
\end{aligned}$$

la desviación estándar del precio de la acción en un año es $\sqrt{103.54}$ o 10.18

4.4. LA DISTRIBUCION DE LA TASA DE BENEFICIO

La propiedad Lognormal de los precios de las acciones puede ser usada para proporcionar información sobre la distribución de probabilidad de la tasa continuamente compuesta del beneficio ganado de una acción entre los tiempos t y T. Si definimos el *beneficio continuamente compuesto* como η se sigue que

$$S_T = Se^{\eta(T-t)},$$

y

$$\eta = \frac{1}{T-t}\, Ln\Big(\frac{S_T}{S}\Big), \tag{4.10}$$

entonces

$$Ln(S_T) - Ln(S) = Ln\Big(\frac{S_T}{S}\Big),$$

la ecuación (4.6) implica que

$$Ln(\frac{S_T}{S}) \sim \phi\Big[\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\Big], \tag{4.11}$$

y de las propiedades de la distribución normal, se infiere de la ecuación (4.10) que

$$\eta \sim \phi\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\Big), \tag{4.12}$$

por lo tanto, la tasa de beneficio continuamente compuesta se distribuye normalmente con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}$.

Ejemplo 4.4. Considere una acción con un beneficio esperado de 17% y una volatilidad de 20% anuales. La distribución de probabilidad para la tasa de beneficio actual (continuamente compuesta) realizada sobre tres años es normal con media

$$0.17 - \frac{0.04}{2} = 0.15,$$

o 15% anual y desviación estándar

$$\frac{0.2}{\sqrt{3}} = 0.115,$$

u 11.5% anual Si Existe un 95% de confianza de que una variable distribuida normalmente esté a dos desviaciones estándar de su media, podemos decir, con 95% de confianza, que el beneficio actual realizado sobre tres años estará entre -8% y 38% anual.

El resultado de la ecuación (4.12) muestra que el beneficio esperado continuamente compuesto en el tiempo $T-t$ es $\mu-\frac{\sigma^2}{2}$. Este resultado nos pareció extraño desde el capítulo 3; μ fué definida como el precio esperado de la tasa de beneficio en cualquier intervalo pequeño. Cómo puede ser diferente el precio esperado de la tasa de beneficio continuamente compuesta en un intervalo de tiempo más largo?. Para comprender la diferencia entre las dos, consideremos un ejemplo numérico. Supongamos que lo siguiente es una secuencia de beneficios por año sobre una acción, usando como medida un compuesto anual

$$15\%, 20\%, 30\%, -20\%, 25\%$$

La media artmética del beneficio es calculada tomando la suma de los beneficios y divididas por 5. Esto es 14%. Sin embargo, un inversionista puede actualmente ganar menos que 14% anual si deja su dinero invertido por 5 años. El valor de \$100 al final de 5 años será

$$100 \times 1.15 \times 1.20 \times 1.30 \times 0.80 \times 0.80 \times 1.25 = 179.40$$

En contraste, un beneficio de 14% continuamente compuesto anualmente dará

$$100 \times (1.14)^5 = 192.54,$$

y el promedio actual del beneficio obtenido por el inversionista compuesto anualmente es

$$(1.7940)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.124,$$

0 12.4 anual.

Este ejemplo ilustra el resultado general de que la media del beneficio obtenido en diferentes años no es necesariamente el mismo que el beneficio medio por año en varios años compuesto anualmente. Se puede mostrar, a menos que el beneficio anterior sea el mismo en cada año, que el último beneficio siempre es más grande que el anterior.

No hay, de hecho, nada mágico acerca del periodo de tiempo de un año en este resultado. Supongamos que el periodo de tiempo sobre el cual el beneficio es medido, se hace progresivamente pequeño y el número de observaciones se incrementa. En el límite obtenemos las siguientes dos estimaciones:

1. La tasa de beneficio esperado en un periodo infinitesimalmente corto de tiempo.
2. La tasa de beneficio esperado continuamente compuesta sobre un periodo largo de tiempo.

Análogamente a lo anterior, podemos esperar que la estimación 1 sea más grande que la estimación 2. Nuestro resultado anterior muestra que esto es, de hecho, el caso. La tasa de beneficio esperado continuamente compuesto es $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

El argumento en esta sección muestra que el término *beneficio esperado* es ambigua. Se puede referir a μ o a $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$. A menos que se diga otra cosa, la usaremos para referirnos a μ en lo que resta del trabajo.

4.5. ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD A PARTIR DE DATOS HISTÓRICOS

Para estimar la volatilidad del precio de una acción empíricamente, los precios de la acción son usualmente observados en intervalos fijos de tiempo (es decir, cada día, cada semana o cada mes). Se define

$n+1$: número de observaciones.
S_i: precio de la acción al final del i-ésimo intervalo (i=0, 1, ..., n).
τ : longitud del intervalo de tiempo en años.
$u_i : ln(S_i/S_{i-1})$.

Así, $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$ es el beneficio continuamente compuesto (no anualizado) en el i-ésimo intervalo para i=1, 2, ..., n. Una estimación preliminar, s, de la desviación estándar de las $u_i's$ está dada por

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2},$$

o

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i{}^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2},$$

donde $\bar{u}$ es la media de la $u_i's$.

De la ecuación (4.11), la desviación estándar de las $u_i's$ es $\sigma\sqrt{\tau}$. La variable, s, es por tanto una estimación de $\sigma\sqrt{\tau}$; se sigue que σ en sí misma puede ser estimada como s^*, donde

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}},$$

y puede mostrarse que el error estándar de esta estimación es aproximadamente

$$\frac{s^*}{\sqrt{2n}}.$$

Escoger un valor apropiado para n no es fácil. Eso si, a mayor número de datos, mayor exactitud. Sin embargo, σ cambia con el tiempo y los datos más antiguos pueden no ser relevantes para predecir el futuro. Un acuerdo que parece ser razonable es usar los precios del cierre de datos diarios entre 90 y 180 días. Existe una cuestión importante concerniente al tiempo verdadero que puede ser medido en días calendario o en los días hábiles de negociación cuando la volatilidad está siendo medida y usada. Sobre la base de investigación empírica de los datos, parece ser que los días de negociación es lo más usado. En otras palabras, los días, cuando se cierra el tipo de cambio, pueden ser ignoradas para los propósitos del cálculo de la volatilidad.

Ejemplo 4.5 La tabla 4.1 muestra una posible secuencia de precios de acciones sobre un periodo de 20 días. Tenemos que

$$\sum u_i = 0.09531 \text{y} \sum {u_i}^2 = 0.00333$$

TABLA 4.1

Día	Precio de la acción al cierre	Precio relativo S_i/S_{i-1}	Beneficio Diario $u_i = ln(S_i/S_{i-1})$
0	20		
1	$20\frac{1}{8}$	1.00625	0.00623
2	$19\frac{7}{8}$	0.98758	-0.01250
3	20	1.00629	0.00627
4	$20\frac{1}{2}$	1.02500	0.02469
5	$20\frac{1}{4}$	0.98781	-0.01227
6	$20\frac{7}{8}$	1.03086	0.03040
7	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
8	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
9	$20\frac{3}{4}$	0.99401	-0.00601
10	$20\frac{3}{4}$	1.00000	0.00000
11	21	1.01205	0.01198
12	$21\frac{1}{8}$	1.00595	0.00593
13	$20\frac{7}{8}$	0.98817	-0.01190
14	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
15	$21\frac{1}{4}$	1.01796	0.01780
16	$21\frac{3}{8}$	1.00588	0.00587
17	$21\frac{3}{8}$	1.00000	0.00000
18	$21\frac{1}{4}$	0.99415	-0.00587
19	$21\frac{3}{4}$	1.02353	0.02326
20	22	1.01149	0.01143

una estimación de la desviación estándar para el beneficio diario es

$$\sqrt{\frac{0.00333}{19} - \frac{(0.09531)^2}{380}} = 0.0123$$

Supongamos que el tiempo es medido en días negociables y que existen 250 días negociables por año, $\tau = 1/250$ y el dato proporciona una estimación para la volatilidad p.a. de $0.0123\sqrt{250}$=0.194. La volatilidad estimada es 19.5% anual. El error estándar de esta estimación es

$$\frac{0.194}{\sqrt{2\text{x}20}} = 0.031$$

o 3.1% anual.

El análisis anterior supone que la acción no paga dividendos. Sin embargo, se puede adoptar para acciones que pagan dividendos. El beneficio u_i, durante el intervalo de tiempo que incluya un *período extra de dividendos* está dado por

$$u_i = Ln\Big(\frac{S_i + D}{S_{i-1}}\Big),$$

donde, D, es el monto del dividendo. El beneficio en otro intervalo de tiempo es no obstante

$$u_i = Ln\Big(\frac{S_i}{S_{i-1}}\Big),$$

Además, como los factores de impuesto juegan una parte en determinados beneficios alrededor de una fecha de *exdividendos*, es probablemente mejor deshacer en conjunto los datos para los intervalos que incluyen una fecha de *exdividendos*.

4.6. VALUACIÓN DE OPCIONES USANDO UN MODELO BINOMIAL SIMPLE

En esta sección se proporciona un ejemplo mostrando como una opción call Europea puede ser valuada en una situación particularmente simple. El siguiente ejemplo proporciona alguna perspicacia en el argumento fundamental de la ecuación diferencial de Black-Scholes.

Supongamos que el precio de una acción es actualmente de \$20 y se sabe que al final del mes el precio será de \$22 o \$18. Considere una opción call Europea para comprar la acción por \$21 a un mes. Si el precio de la acción es de \$22 el valor de la opción es \$1; si el precio de la acción es de \$18, el valor de la opción es cero.

Considere un portafolio consistente de una posición larga en α partes de una acción y una posición corta de una opción call. El valor del portafolio es $22\alpha - 1$ si el precio de la acción se mueve hacia arriba y 18α si se mueve hacia abajo. Cuando α se elige igual a 0.25, estos valores son el mismo

$$18\alpha = 22\alpha - 1 = 4.5,$$

para este valor de α, el riesgo del portafolio es menor a pesar de que su valor rebase \$4.5 en un mes. El valor presente del portafolio cuando $\alpha = 0.25$ es

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f,$$

donde f es el valor actual de la opción call. Los portafolios de menor riesgo deben tener, en ausencia de oportunidades de arbitraje, beneficio con una tasa de interés libre de riesgo.

Supongamos que la tasa libre de riesgo es 1% por mes (continuamente compuesta). Se sigue que

$$1.01(5 - f) = 4.5,$$

o

$$f = 5 - \frac{4.5}{1.01} = 0.5445$$

El lector puede sorprenderse de que las probabilidades del movimiento de la acción arriba de \$22 y abajo de \$18 no se usaran para llegar a este resultado. Este punto se verá en la sección 4.10.

4.7. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

La ecuación diferencial de Black-Scholes es una ecuación que debe ser satisfecha por el precio, f, de cualquier producto derivado que depende de una acción que no paga dividendos. Aquí consideramos un argumento natural que conduce a la ecuación.

En esencia, el argumento es muy similar al argumento usado para el precio de la opción de la sección 4.6. Un portafolio de bajo riesgo que consiste de una posición en el producto derivado y una posición en la acción que es colocada y el beneficio del portafolio es entonces igual a la tasa de interés libre de riesgo. En el análisis de Black-Scholes, el portafolio que es colocado permanece a bajo riesgo para sólo un periodo de tiempo infinitesimalmente corto. Sin embargo, podemos argumentar que el beneficio durante este corto periodo de tiempo debe tener tasa de interés libre de riesgo si las oportunidades de arbitraje fueran evitadas.

La razón por la que el portafolio puede ser colocado a bajo riesgo, es porque el precio de la acción y el producto derivado son ambos afectados por la misma variable subyacente de incertidumbre. Esto muestra que en un periodo corto de tiempo, las dos están perfectamente relacionadas. Cuando un portafolio apropiado de la acción y del producto derivado es colocado, el beneficio(pérdida) en la posición del producto derivado así como el valor total del portafolio y al final del periodo corto de tiempo es conocido como *certidumbre*

Las posiciones que son necesarias para derivar la ecuación diferencial son las siguientes:

1. El precio de las acciónes sigue el proceso desarrollado en el capítulo 3 con μ y σ constantes.
2. La venta corta de acciones con el completo uso de procedimientos es permitido.
3. No existen costos de transacciones ni impuestos. Todos los productos son perfectamente divisibles.
4. No existen dividendos durante la vida de los productos derivados.
5. No existen oportunidades de arbitraje de bajo riesgo.
6. La negociación de los productos es continua.
7. La tasa de interés libre de riesgo, r, es constante y es la misma para todo el vencimiento

4.8. DERIVACIÓN DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

Derivemos la ecuación diferencial de Black-Scholes. Supongamos que el precio de las acciones, S, sigue el proceso

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{4.13}$$

supongamos que f es el precio del producto derivado contingente sobre S. La variable f debe ser alguna función de S y t. De la ecuación (4.4)

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz, \tag{4.14}$$

las versiones discretas de las ecuaciones (4.13) y (4.14) son, respectivamente

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z, \tag{4.15}$$

y

$$\Delta f = \Big(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\Big)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z, \tag{4.16}$$

donde ΔS y Δf son los cambios en f y S en un pequeño intervalo de tiempo Δt. Recordemos de la discución del lema de Ito que en el proceso Wiener las varibles subyacentes f y S son el mismo. En otras palabras, el término $\Delta z (= \epsilon\sqrt{\Delta_t})$ en la ecuación (4.15) y (4.16) son los mismos. Se sigue que eligiendo un portafolio apropiado de las acciones y del producto derivado, el proceso Wiener puede ser eliminado.

Considere el portafolio siguiente

$$\begin{aligned} -1 &: \quad \text{producto derivado} \\ +\frac{\partial f}{\partial S} &: \quad \text{acciones} \end{aligned}$$

el titular de este portafolio está en corto con el producto derivado y largo con el monto $\partial f \setminus \partial S$ de las acciones. Se define Π como el valor del portafolio. Por definición

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S, \tag{4.17}$$

el cambio $\Delta\Pi$ en el valor del portafolio en el tiempo Δt está dado por

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S, \tag{4.18}$$

sustituyendo las ecuaciones (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.18) se obtiene

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t. \tag{4.19}$$

Ya que esta ecuación no incluye a Δz, el portafolio Π debe ser de bajo riesgo durante el tiempo Δt. Los supuestos, listados en la sección anterior implican que el portafolio debe tener instantaneamente beneficio como el valor libre de riesgo en término corto. Si lo ganado es mayor que este beneficio esperado, los árbitros pueden tener un beneficio a bajo riesgo cancelando el producto y usando el procedimiento para comprar el portafolio; si lo ganado es menor, los árbitros pueden tener un beneficio a bajo riesgo cancelando el portafolio y comprando productos libre de riesgo.

Se sigue que

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t,$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Sustituyendo las ecuaciones (4.17) y (4.19)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t,$$

así que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \tag{4.20}$$

La ecuación (4.20) es la ecuación diferencial de Black-Scholes. Tiene muchas soluciones, correspondientes a todos los diferentes productos derivados que pueden ser definidos con S como el subyacente. El producto derivado particular que es obtenido cuando la ecuación es resuelta, depende de las condiciones de límite que son usadas. Estas especifican los precios del producto derivado alrededor de posibles valores de S y t. En el caso de una opción call Europea, al introducir condiciones de límite se tiene

$$f = \max(S - X, 0); \quad \text{cuando t=T},$$

y en el caso de una opción put Europea se tiene

$$f = \max(X - S, 0); \quad \text{cuando t=T}.$$

Un punto que puede ser realzado acerca del portafolio Π en la derivación de la ecuación (4.20) es que no es permanentemente de bajo riesgo. Es de bajo riesgo sólo para un periodo infenitesimalmente corto de tiempo. Como S y t cambian, $\partial f \setminus \partial S$ también cambia. Si se desea mantener el portafolio a bajo riesgo, es necesario cambiar continuamente las proporciones relativas del producto derivado y las acciones en el portafolio.

Ejemplo 4.6. Un contrato forward de una acción que no paga dividendos es un producto derivado que depende de otra acción, por lo que satisface la ecuación (4.20). De la ecuación (2.1), el valor del contrato forward, f, está dado por

$$f = S - Ke^{-r(T-t)},$$

donde K es el precio de entrga. Esto muestra que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0,$$

cuando estas ecuaciones son sustituidas en el lado derecho de la ecuación (4.20) obtenemos

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS,$$

que es igual a rf, mostrando que la ecuación realmente se satisface.

4.9. VALUACIÓN DE RIESGO NEUTRAL

La valuación de *Riesgo Neutral* es, sin duda alguna, la más sencilla pero la más importante herramienta para el análisis de productos derivados. Esto surge de una propiedad clave de la ecuación diferencial de Black-Scholes (4.20). Esta propiedad señala que la ecuación no implica ninguna variable que esté afectada por el riesgo preferencial del inversionista. Las variables que aparecen en la ecuación son los precios spot de las acciones, tiempo, volatilidad del precio de las acciones y la tasa de interés libre de riesgo. Todas son independientes del riesgo preferencial.

La ecuación diferencial de Black-Scholes puede no ser independiente del riesgo preferencial si implica el beneficio esperado de las acciones, μ. Esto es porque el valor de μ depende del riesgo preferencial. El nivel más alto de riesgo de aversión para el inversionista, para cualquier acción dada, se tiene cuando la μ tiene un valor muy grande. Por lo tanto, es afortunado que μ desaparezca en el cálculo de la ecuación.

El hecho que la ecuación diferencial de Black-Scholes es independiente del riesgo preferencial permite usar un argumento ingenioso. Si el riesgo preferencial no se establece en la ecuación, no puede afectar su solución. Cualquier conjunto de riesgos preferenciales pueden por tanto ser usados cuando se evalúa f. En particular, un supuesto muy simple, que todo inversionista puede hacer, es neutralizar el riesgo.

Un ámbito donde los inversionistas tienen un beneficio esperado de riesgo neutral es la tasa de interés libre de riesgo, r. Esto es porque el riesgo neutral de los inversionistas no requiere una prima que permita formar riesgos. Es también cierto que el valor actual de cualquier flujo de efectivo en un ámbito de riesgo neutral puede ser obtenido descontando el valor esperado en la tasa libre de riesgo. El supuesto que el ámbito es de riesgo neutral simplifica considerablemente el análisis de los productos derivados.

Considere un producto derivado tal como una opción Europea que cancela alguna función del precio de una acción al tiempo T. Primero, el valor esperado del producto derivado es calculado en el supuesto que el beneficio esperado de la acción es r en vez de μ. El valor esperado es entonces descontado en el tiempo actual usando una tasa de decuento de r.

Es importante que al realizar la neutralización de la tasa se tenga en cuenta que solo es un mecanismo artificial para obtener soluciones de la ecuación diferencial de BLack-Scholes. Las soluciones que se obtienen son válidas en todos los ámbitos (no sólo en el ámbito de tasa neutral). Cuando nos movemos de un ámbito de tasa neutral a un ámbito de tasa de aversión, pasan dos cosas. El valor de la tasa esperada en el precio de la acción se incrementa y la tasa de descuento, que puede ser usada para liquidar los productos derivados, cambia. Se tiene que estos dos efectos siempre se compensan uno al otro exactamente.

4.10. ILUSTRACIÓN DE LA VALUACIÓN DE RIESGO NEUTRAL MEDIANTE UN MODELO BINOMIAL

En esta sección regresamos al ejemplo considerado en la sección 4.6. Recordemos que este se refiere a un precio de acciones el cual es actualmente de \$20 y que se mueve hacia arriba a \$22 y hacia abajo a \$18, al final de un mes. El producto derivado en el ejemplo es una opción call Europea con un precio de ejercicio de \$21.

Es ilustrativo que las probabilidades del precio de las acciones se muevan hacia arriba a \$22 y hacia abajo a \$18 porque nunca se usó al derivar el precio de la opción de \$0.5445 en la sección 4.6. Esto puede ser interpretado en el sentido de que el precio de la opción es independiente del beneficio esperado de las acciones. Esto es consistente con la observación, hecha en la sección 4.9, de que la ecuación diferencial de Black-Scholes es independiente del beneficio esperado de las acciones.

Ahora mostraremos que el precio de la opción call puede ser derivada usando valuación de riesgo neutral. En un ámbito de riesgo neutral, el beneficio esperado de una acción debe ser la tasa de interés libre de riesgo de 1% por mes. La probabilidad, p, de un movimiento ascendente debe por tanto satisfacer

$$22p + 18(1-p) = 20 \times 1.01,$$

esto es, p debe ser 0.55. El valor esperado de la opcón call en un mes usando este valor de p es

$$0.55\text{x}1 + 0.45\text{x}0 = \$0.55,$$

este es valor final esperado de la opción call en un ámbito de riesgo neutral. El valor actual de este valor esperado cuando se descuenta la tasa de interés libre de riesgo es

$$\frac{0.55}{1.01} = 0.5445,$$

o \$0.5545. Este es la mismo que el valor obtenido en la sección 4.6. Los argumentos de arbitraje de bajo riesgo y la valuación de riesgo neutral proporcionan la misma respuesta. Se puede mostrar que este es siempre el caso para el modelo binomial. Como se discutió en la sección 3.6, el movimiento Brawniano geométrico puede ser considerado como el caso del límite del modelo binomial. Mostrar que la valuación del riesgo neutral siempre es considerado para el modelo binomial es por tanto una forma de mostrar que se toma en cuenta cuando el precio de las acciones sigue un movimiento Browniano geométrico.

4.11. APLICACIÓN A LOS CONTRATOS FORWARD DE UNA ACCIÓN

Los contratos forward de una acción que no paga dividendos ya han sido valuados en la seccioón 2.6. Fueron valuados también en esta sección para proporcionar una ilustración simple de valuación de riesgo neutral. Se hace el supuesto que la tasa de interés es constante e igual a r. Esto es más restrictivo que lo supuesto en la sección 2.6. Considere un contrato forward largo que vence al tiempo T con precio de entrega K. Como se decribió en el capítulo 1, el valor del contrato al vencimiento es

$$S_T - K$$

donde S_T es el precio de la acción al tiempo T. Del argumento de valuación de riesgo neutral, el valor del contrato forward al tiempo t, ($< T$), es el valor esperado al tiempo T en un ámbito de riesgo neutral, descontado al tiempo t de la tasa de interés libre de riesgo.

Denotemos el valor del contrato forward al tiempo t por f, lo anterior muestra que

$$f = e^{-r(T-t)}\hat{E}(S_T - K), \tag{4.21}$$

donde $\hat{E}$ denota el valor esperado en un ámbito de riesgo neutral. Cuando K es una constante, la ecuación (4.21) se transforma en

$$f = e^{-r(T-t)}\hat{E}(S_T) - Ke^{-r(T-t)}, \tag{4.22}$$

y la tasa promedio del precio de la acción, μ, conduce a r en un ámbito de riesgo neutral. Por tanto, de la ecuación (4.8)

$$\hat{E}(S_T) = Se^{r(T-t)}, \tag{4.23}$$

sustituyendo la ecuación (4.23) en la ecuación (4.22) obtenemos

$$f = S - e^{-r(T-t)},$$

esto está de acuerdo con la ecuación (2.1). El ejemplo 4.6 muestra que esta expresión para f satisface la ecuación diferencial de Black-Scholes.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado que los precios forward o futuros de un activo financiero, el cual es poseido solamente para inversión por un número significativo de inversionistas pueden ser determinados del precio spot, tiempo de vencimiento, tasas dce interés, ingresos a recibir del activo financiero y costos de almacenamiento. Las últimas tres de éstos son los costos y los beneficios asociados propiamente con el bien en vez de iniciar contratos futuros o forward sobre el activo financiero. Estos pueden ser resumidos algunas veces por el término *costos de transporte*. Este es el interés que debe ser pagado para financiar el bien más los costos de almacenamiento menos cualquier ingreso recibido del activo financiero durante la vida del contrato.

El precio futuro de un activo financiero que es poseído principalmente para consumo no puede ser determinado directamente del costo de transporte. Esto es porque el usuario del activo financiero puede estar preparado para pagar una prima por la conveniencia asociada con la propiedad del activo financiero en vez de tener el contrato futuro. Podemos, sin embargo, especificar que debe ser un bono superior del precio futuro en ausencia de costos de transacción.

Los precios de las acciones parece que siguen un proceso de Markov. Es decir, que para cualquier tiempo dado toda la información anterior de los precios de las acciones está contenida en el precio spotl. En esta parte se ha desarrollado un posible proceso estocástico para el comportamiento de los precios de las acciones conforme pasa el tiempo. El proceso es conocido como *Movimiento Browniano Geométrico.* Bajo este proceso la tasa proporcional de beneficio del titular de las acciones en cualquier pequeño intervalo de tiempo está dado por una distribución normal y el beneficio en cualesquiera dos pequeños intervalos de tiempo diferentes son independientes.

La ecuación de Black-Sholes es generalmente usada como una ecuación diferencial para los precios de opciones call y put de una acción que no paga dividendos. De hecho, cualquier derecho cuyo precio es contingente con el precio de la acción debe satisfacer la ecuación diferencial bajo los supuestos que se han hecho. El argumento de valuación de riesgo neutral proporciona un uso alternativo para resolver la ecuación diferencial directamente. El argumento es agradablemente simple. Como la ecuación diferencial de Black-Sholes no implica riesgo preferncial, la solución de la ecuación puede también ser independiente de riesgo preferencial y el mecanismo artificial de suponer que el ámbito es de riesgo neutral puede, por tanto, ser usado.

BIBLIOGRAFÍA

1. Black F., and M. Sholes., "The pricing of options and coorporate liabilities", Journal of Political Economy, vol.81 (May-June 1973), pp.637-659.

2. Cox D.R., and H.D. Miller, The theory of Stochastic Processes. Chapman & Hall, London, 1965.

3. Cox, J.C, J.E. Ingersoll and S.A. Ross "The Ralation beteewn forward prices and futures prices" Journal of financial Economics, vol.9 (December 1981), pp.221-346.

4. Cox J.C. and S.A. Ross "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics, Vol.3 (1976), pp.145-166.

5. Chicago Board of Trade. "Commodity Trading Manual", 1985.

6. Hull John. Options, Futures and other Derivative Securities. Tercera edición 1997. Ed. Prentice Hall.

7. Mc Millan L, G. Options as a Strategic Investment, New York Institute of Finance, New York, 1980.

8. Futures, Emerging Markets Training. Latin Amrica. Citibank. April 1995.