

01170  
6



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA

**CONTROL SEMIACTIVO DE ESTRUCTURAS CIVILES  
UTILIZANDO AMORTIGUADORES  
MAGNETO-REOLÓGICOS**

**T E S I S**

**PRESENTADA POR**

**RENÉ ENRIQUE JIMÉNEZ FABIÁN**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA  
( ELÉCTRICA )**

**DIRIGIDA POR**

**DR. LUIS ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA**

Ciudad Universitaria, Mayo de 2002

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Control semiactivo de estructuras civiles utilizando  
amortiguadores magneto-reológicos**

por

**René Enrique Jiménez Fabián**

**Tesis presentada para obtener el grado de**

**Maestro en Ingeniería**

**Área de conocimiento: Ingeniería Eléctrica  
(Control)**

en el

**Programa de Posgrado en Ingeniería  
de la  
Universidad Nacional Autónoma de México**

**Sinodales:**

**Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria, Director de tesis**

**Dr. Jaime Moreno Pérez**

**Dr. José Alberto Escobar Sánchez**

**Dra. Cristina Verde Rodarte**

**M. en C. Manuel Aguirre Gándara**

2002

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

## Resumen

En este trabajo se presenta un nuevo enfoque para modelar amortiguadores magneto-reológicos. Las principales características del modelo propuesto son su sencillez analítica y su capacidad de reproducir el comportamiento del amortiguador con buena exactitud, además de poseer una estructura que permite el uso de cualquier método estándar de identificación paramétrica.

También se plantea un esquema de identificación paramétrica para una estructura de  $n$  grados de libertad que utiliza un amortiguador magneto-reológico como elemento disipativo. Este esquema de identificación puede ser usado para determinar las dos primeras frecuencias naturales de vibración de una estructura de múltiples grados de libertad.

Finalmente, se proponen dos leyes de control para atenuar la respuesta dinámica de una estructura de  $n$  grados de libertad sujeta a excitación sísmica. Estas leyes se basan en el modelo del amortiguador propuesto en el presente trabajo y ejemplifican su uso en el control semiactivo de estructuras.

## Abstract

This thesis presents a new approach for modeling magnetorheological dampers. The most important features of the proposed model are its analytical simplicity and its high accuracy reproduction of the magnetorheological damper's behavior. Moreover, the proposed model has a structure that allows the use of any standard method of parametric identification.

A parametric identification scheme for an  $n$ -degree-of-freedom structure with a magnetorheological damper is also presented. This scheme can also be used for the identification of the first natural vibration frequencies of a structure with several degrees of freedom.

Finally, two control laws are proposed for the attenuation of the dynamic response of an  $n$ -degree-of-freedom structure under seismic excitation. The control laws are based on the proposed damper model and show how it can be used in a semi-active control scheme.

*A mis padres*

# Contenido

|   |            |
|---|------------|
| <b>Lista de figuras</b>   | <b>III</b> |
| <b>Lista de tablas</b>  | <b>V</b>   |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2. Modelado e identificación paramétrica de amortiguadores magneto-reológicos</b>      | <b>6</b>   |
| 2.1. Características de los fluidos magneto-reológicos . . . . .                          | 7          |
| 2.2. Descripción del amortiguador magneto-reológico . . . . .                             | 8          |
| 2.3. Modelado del amortiguador magneto-reológico . . . . .                                | 9          |
| 2.4. Ley de adaptación de parámetros . . . . .  | 14         |
| 2.5. Convergencia paramétrica . . . . .   | 15         |
| 2.6. Resultados de simulación . . . . .   | 24         |
| <b>3. Identificación paramétrica de estructuras con amortiguadores magneto-reológicos</b> | <b>29</b>  |
| 3.1. Modelo de la estructura . . . . .  | 30         |
| 3.2. Identificación paramétrica de la estructura . . . . .                                | 33         |
| 3.3. Identificación paramétrica de la estructura y del amortiguador . . . . .             | 37         |
| 3.4. Convergencia paramétrica . . . . .   | 40         |
| 3.5. Estimación de las frecuencias dominantes de la estructura . . . . .                  | 46         |
| <b>4. Control semiactivo de estructuras utilizando amortiguadores magneto-reológicos</b>  | <b>53</b>  |
| 4.1. Modelo del sistema . . . . .   | 54         |
| 4.2. Atenuación de la respuesta dinámica de estructuras . . . . .                         | 55         |
| 4.3. Resultados de simulación . . . . .   | 62         |
| <b>5. Conclusiones</b>  | <b>72</b>  |

# Lista de figuras

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Esquema del amortiguador magneto-reológico. . . . .   | 9  |
| 2.2. Esquema del amortiguador magneto-reológico para aplicaciones civiles. . . . .   | 10 |
| 2.3. Montaje experimental de un amortiguador magneto-reológico para aplicaciones civiles. . . . .  | 11 |
| 2.4. Representación mecánica del modelo basado en la estructura de Bouc-Wen. . . . .   | 12 |
| 2.5. Respuesta del modelo del amortiguador a excitación periódica. . . . .   | 25 |
| 2.6. Evolución de los parámetros estimados del amortiguador. . . . .   | 26 |
| 2.7. Fuerza vs. tiempo para diversos voltajes de entrada constantes. . . . .   | 27 |
| 2.8. Fuerza vs. desplazamiento para diversos voltajes de entrada constantes. . . . .   | 27 |
| 2.9. Fuerza vs. velocidad para diversos voltajes de entrada constantes. . . . .  | 28 |
| 3.1. Estructura de $n$ grados de libertad. . . . .   | 31 |
| 3.2. Modelo mecánico de $n$ grados de libertad. . . . .  | 31 |
| 3.3. Componente N-S del sismo El Centro. . . . .   | 35 |
| 3.4. Evolución de los parámetros del primer piso de la estructura de tres grados de libertad sin amortiguador magneto-reológico (expresión (3.8)). . . . .                                 | 36 |
| 3.5. Estructura de $n$ grados de libertad con un amortiguador magneto-reológico. . . . .   | 38 |
| 3.6. Parámetros estimados del amortiguador magneto-reológico en una estructura de tres grados de libertad (expresión (3.25)). . . . .  | 41 |
| 3.7. Error porcentual en la estimación de los parámetros del amortiguador magneto-reológico. . . . .   | 42 |
| 3.8. Parámetros estimados del primer piso de la estructura de tres grados de libertad con un amortiguador magneto-reológico. . . . .   | 43 |
| 3.9. Error porcentual en la estimación de los parámetros del primer piso. . . . .  | 44 |
| 3.10. Estimación de la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico (estructura de tres grados de libertad). . . . .  | 45 |
| 3.11. Estimación de las frecuencias naturales de vibración (estructura de tres grados de libertad). . . . .  | 46 |
| 3.12. Parámetros estimados del amortiguador en una estructura de seis grados de libertad utilizando el esquema reducido de tres grados de libertad (ecuación (3.25)). . . . .              | 50 |
| 3.13. Estimación de la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico de una estructura de seis grados de libertad mediante el esquema reducido de tres grados de libertad. . . . . | 51 |
| 3.14. Parámetros estimados del primer piso de la estructura de seis grados de libertad utilizando el esquema de identificación de tres grados de libertad. . . . .                         | 51 |
| 3.15. Estimación de las frecuencias naturales de vibración utilizando el esquema reducido de tres grados de libertad. . . . .  | 52 |



|   |    |
|---|----|
| 4.1. Desplazamiento del primer piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)). . . . .             | 63 |
| 4.2. Desplazamiento del segundo piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)). . . . .            | 63 |
| 4.3. Desplazamiento del tercer piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)). . . . .             | 64 |
| 4.4. Estimación del estado interno $z$ utilizando el controlador (1). . . . .   | 64 |
| 4.5. Estimación del estado interno $z$ utilizando el controlador (1) (ampliación). . . . .  | 65 |
| 4.6. Voltaje de control generado con el controlador (1). . . . .  | 65 |
| 4.7. Voltaje de control generado con el controlador (1) (ampliación). . . . .   | 66 |
| 4.8. Estimación del estado interno $z$ utilizando el controlador (2). . . . .   | 66 |
| 4.9. Voltaje de control generado con el controlador (2). . . . .  | 67 |
| 4.10. Desplazamiento del primer piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)). . . . .  | 67 |
| 4.11. Desplazamiento del segundo piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)). . . . . | 68 |
| 4.12. Desplazamiento del tercer piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)). . . . .  | 68 |
| 4.13. Voltaje de control generado con el controlador (3). . . . .   | 69 |
| 4.14. Voltaje de control generado con el controlador (3) (ampliación). . . . .  | 69 |
| 4.15. Voltaje de control generado con el controlador (4). . . . .   | 70 |
| 4.16. Comparación del desplazamiento del tercer piso para los casos: $v = 0$ , $v = \bar{v}$ , controlador (1) y controlador (2). . . . .                                 | 71 |
| 4.17. Comparación del desplazamiento del tercer piso para los casos: $v = 0$ , $v = \bar{v}$ , controlador (3) y controlador (4). . . . .                                 | 71 |

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

# Lista de tablas

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Parámetros para el modelo de las ecuaciones (2.1a-c). . . . .   | 24 |
| 3.1. Error porcentual entre el valor real de los parámetros y el valor estimado en la identificación paramétrica de una estructura de seis grados de libertad. . . . .   | 37 |
| 3.2. Valores finales de las frecuencias naturales de la estructura de tres grados de libertad. . . . .   | 40 |
| 3.3. Frecuencias estimadas a través del esquema de identificación reducido, empleando diferentes combinaciones de aceleración. . . . .   | 50 |
| 3.4. Frecuencias de la estructura generadas con el esquema de identificación reducido con las aceleraciones de los pisos 1, 2 y 6. . . . .   | 50 |
| 4.1. Comparación de los controladores probados en simulación: [a] modos deslizantes, controlador (1); [b] saturación, controlador (2); [c] modos deslizantes modelo reducido, controlador (3) y [d] saturación modelo reducido, controlador (4). . . . . | 70 |
| 4.2. Comparación del control por saturación, controlador (2), y el caso sin control. . . . .   | 71 |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. Luis Álvarez Icaza por su gran apoyo y por su paciencia en la realización de este trabajo. Su ayuda y sus valiosos consejos fueron decisivos y contribuyeron enormemente a mi formación académica.

Agradezco a los profesores Dr. Jaime Moreno, Dr. Alberto Escobar, M. en C. Manuel Aguirre y, en especial, a la Dra. Cristina Verde, por la revisión técnica del presente trabajo. Sus atinados comentarios sirvieron para aclarar y enriquecer el contenido del mismo.

Agradezco a la Dra. Victoria Raquel Bajar por la revisión del documento escrito y por sus comentarios y sugerencias sobre la redacción y estilo del mismo.

De manera especial quiero agradecer a mis padres, a mi hermano y a su nueva familia y, en general, a toda las personas que de una u otra forma contribuyeron, directa o indirectamente, al desarrollo de este trabajo.

A mi compañera, Rebeca Navarro Bajar, agradezco con todo mi corazón el tiempo que dedicó a estar conmigo y sobre todo, sus palabras y acciones siempre encaminadas a hacerme crecer y salir adelante.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología agradezco el apoyo brindado tanto para la realización de mis estudios de maestría como de la tesis correspondiente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Capítulo 1

## Introducción

Las trágicas consecuencias que suelen acompañar a los terremotos de gran intensidad ponen de manifiesto la importancia de desarrollar nuevas técnicas para atenuar la respuesta dinámica de estructuras y así ofrecer mayor seguridad a los usuarios. Tal es el caso del sismo que tuvo lugar en la ciudad de México en 1985, en donde la magnitud de las pérdidas humanas y económicas fue muy cuantiosa.

En el transcurso de los años se han desarrollado varias soluciones tecnológicas enfocadas a la disminución de los efectos causados por los sismos. Entre las más recientes se encuentra el aislamiento sísmico, también llamado aislamiento pasivo (Skinner, R.I., Robinson, W.H., y McVerry, G.H. 1993; Naeim, F. y Kelly, J.M. 1999). El aislamiento sísmico consiste esencialmente en la instalación de ciertos mecanismos que desacoplan la estructura del movimiento del suelo inducido por un sismo. Este desacoplamiento se logra modificando la rigidez del sistema junto con un amortiguamiento apropiado. El propósito de este tipo de sistemas es reducir substancialmente la transmisión de la energía provocada por el sismo a la estructura, siendo su principal característica el hacer que el período natural de la estructura aumente, evitando así la resonancia o pseudoresonancia y reduciendo la respuesta dinámica frente a una excitación sísmica.

La principal ventaja que ofrece el aislamiento sísmico es que permite reducir el costo de protección de una estructura al reducir las cargas sísmicas y la deformación estructural, lo que conduce a una disminución en la demanda de elementos estructurales de gran resistencia mecánica. Los sistemas de aislamiento constan de algún mecanismo de disipación de energía, generalmente basado en la deformación de algún elemento metálico o de algún material compuesto, y se caracterizan por no requerir energía de fuentes externas para su funcionamiento. Estos sistemas pueden ser efecti-

vos en la mayoría de los casos, excepto cuando las frecuencias dominantes de la onda sísmica son altas (Skinner, R.I., Robinson, W.H., y McVerry, G.H. 1993).

Por otra parte, el aislamiento sísmico activo (control activo de estructuras) constituye un área diferente en la protección de estructuras. Este tipo de esquemas consta de una masa activa cuyo peso corresponde a un cierto porcentaje de la masa de la estructura. La masa activa es desplazada con aceleraciones grandes, de tal forma que la reacción a las fuerzas inerciales generadas tiende a cancelar las fuerzas de inercia en la estructura inducidas por la aceleración del sismo. La eficacia de este tipo de sistemas puede ser muy buena pero puede implicar un costo muy elevado. Por ejemplo, una limitante está dada por los grandes desplazamientos de la masa activa que pueden requerirse durante sismos que induzcan oscilaciones de gran amplitud. Otra desventaja es que durante un sismo de magnitud considerable, el suministro de la energía requerida por el sistema activo puede interrumpirse en cualquier momento, reduciendo por completo la eficacia del sistema de protección. Además, el costo de mantenimiento de los sistemas activos es mayor que el de los sistemas de aislamiento pasivo (Skinner, R.I., Robinson, W.H., y McVerry, G.H. 1993; Ribakov, Y. y Gluk, J. 1999).

Recientemente han sido publicados varios trabajos enfocados al desarrollo de sistemas de control semiactivo para reducir los daños provocados por sismos (Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996a; Ramallo, J.C., Jonhson, E.A., Spencer, B.F., y Sain, M.K. 1999; Ribakov, Y. y Gluk, J. 1999; Xu, Y.L., Qu, W.L., y Ko, J.M. 2000; Nagarajaiah, S., Sahasrabudhe, S., y Iyer, R. 2000; Zeng, H., Kuehn, G., Song, G., Sun, J., y Stalford, H. 2000). El control semiactivo combina las ventajas de los dos enfoques antes mencionados, ofreciendo la confiabilidad de los sistemas pasivos y la adaptabilidad de los sistemas activos. De acuerdo con Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996), un dispositivo de control semiactivo es aquél que no suministra energía al sistema controlado. Sin embargo, para los fines de esta tesis se considerará que un controlador semiactivo es aquél cuyas acciones van encaminadas única y exclusivamente a modificar la capacidad de disipación de energía del sistema controlado.

En los últimos años se han propuesto varios dispositivos semiactivos para disipar la energía en sistemas estructurales. Estos dispositivos utilizan la fuerza de fricción generada en fluidos o en superficies de contacto y se caracterizan por funcionar con poca energía y por su capacidad de modificar el amortiguamiento estructural en forma similar a los sistemas aislamiento pasivo. El reducido consumo de energía de estos dispositivos los hace muy atractivos para la protección de

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

estructuras, ya que, en ausencia de energía eléctrica, el comportamiento de estos dispositivos es similar al de los amortiguadores viscosos. Algunos ejemplos de estos dispositivos son los amortiguadores controlables, amortiguadores de orificio variable, soportes de fricción controlable, aislamientos de fricción controlable y dispositivos de rigidez mecánica variable (Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996).

Entre los dispositivos semiactivos más recientes se encuentran los amortiguadores cuyo mecanismo de disipación se deriva de la fuerza de fricción generada en un fluido cuyas propiedades mecánicas pueden modificarse en tiempo real. La principal característica de estos fluidos es su capacidad para cambiar, reversiblemente, de un estado de libre flujo a un estado semisólido con una resistencia a la fluencia que puede modificarse a través de un campo eléctrico o magnético regulado mediante un voltaje. De acuerdo con la naturaleza del campo, estos fluidos pueden clasificarse en dos: fluidos electro-reológicos y fluidos magneto-reológicos. En el presente trabajo se analizarán exclusivamente los amortiguadores que utilizan fluidos magneto-reológicos, dadas las ventajas que presentan en comparación con los amortiguadores de fluido electro-reológico (Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996a; Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996). Como ejemplos de la utilización de amortiguadores magneto-reológicos en la protección de estructuras se encuentran el Museo Nacional de Ciencia e Innovación de Japón<sup>1</sup> y el Puente del lago Dong Ting, en China<sup>2</sup>.

El modelado de los amortiguadores magneto-reológicos es uno de los principales problemas en el desarrollo de sistemas de protección antisísmica que utilicen este tipo de dispositivos. La búsqueda de mejores desempeños sugiere el uso de modelos matemáticos confiables; sin embargo, también es necesario que dichos modelos sean a la vez sencillos de tal forma que el diseño y la implantación del controlador no se vuelvan excesivamente complicados. El modelado de los amortiguadores magneto-reológicos generalmente conduce a modelos no lineales dado que el comportamiento de éstos presenta ciclos de histéresis que deben ser considerados en el diseño de controladores si se quiere obtener desempeños mejores a los que ya se obtienen con los sistemas de aislamiento pasivo.

Aunado al problema de modelado se tiene también el problema de identificación paramétrica del sistema. Como es sabido, en la práctica es difícil conocer a priori el valor exacto de los parámetros de los modelos matemáticos y el caso del control semiactivo de estructuras no es la excepción. En cualquier problema de control, los parámetros del sistema juegan un papel muy importante en

---

<sup>1</sup> véase [www.miraikan.jst.go.jp](http://www.miraikan.jst.go.jp).

<sup>2</sup> véase [www.rheonetic.com/news\\_room.htm](http://www.rheonetic.com/news_room.htm).



el comportamiento dinámico del mismo. El desarrollo de técnicas para su determinación ha sido un tema de investigación ampliamente estudiado y en la actualidad existe una gran cantidad de algoritmos de identificación de parámetros (véase, por ejemplo, (Ljung 1987)). En el caso del control semiactivo de estructuras, tanto los parámetros del dispositivo semiactivo como los parámetros de amortiguamiento y rigidez de la estructura son de suma importancia ya que determinan la respuesta dinámica del sistema y por consecuencia, influyen en forma directa en la determinación de las acciones de control.

Para el caso de estructuras que han sufrido sismos de gran intensidad, y de las cuales se cuenta con registros de aceleración de diversos puntos de las mismas, se han aplicado varios métodos de identificación no recursivos (González Alcorta, R. 1995; Li, Y. y Mau, S.T. 1991; Loh, C.H. y Tou, I.C. 1995) para determinar cambios en las propiedades dinámicas y daños estructurales después de un sismo. Sin embargo, la identificación de los parámetros del sistema puede llevarse a cabo en tiempo real a través de algún método recursivo. Este enfoque permitiría incluir actualizaciones de los parámetros del sistema en el momento en el que ocurre un sismo. Entre los diferentes métodos recursivos sobresale el de mínimos cuadrados con factor de olvido, el cual ofrece un mejor desempeño en comparación con otros métodos recursivos (Ghanem, R. y Shinozuka, M. 1994).

En este trabajo se presenta un nuevo enfoque para modelar amortiguadores magneto-reológicos. El modelo propuesto se basa en el modelo de fricción de LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., y Lischinsky, P. 1995) y sus principales características son su sencillez analítica, en comparación con el modelo basado en la estructura de Bouc-Wen (Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996a; Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996), y su capacidad de reproducir el comportamiento del amortiguador con buena exactitud. Además, el modelo propuesto posee una estructura lineal en los parámetros que permite el uso de cualquier método estándar de identificación de parámetros. También se plantea un esquema de identificación de parámetros en tiempo real para una estructura de  $n$  grados de libertad que utiliza un amortiguador magneto-reológico como elemento disipativo.

Para el caso de estructuras de múltiples grados de libertad, y de las cuales sólo se cuenta con las aceleraciones de algunos pisos, se propone la utilización de un esquema de identificación diseñado para una estructura de tres grados de libertad. Este esquema permite caracterizar al sistema completo a través de las dos primeras frecuencias naturales de vibración. Los resultados obtenidos en simulación permiten determinar las dos primeras frecuencias naturales de una estructura de seis

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

grados de libertad, las cuales fueron comparadas con las frecuencias que se obtienen con el método de condensación estática para la reducción de matrices, lográndose excelentes resultados.

Finalmente, y de manera suplementaria, se proponen dos leyes de control para atenuar la respuesta dinámica de una estructura de tres grados de libertad sujeta a excitación sísmica. Estas leyes se basan en el modelo del amortiguador propuesto en el presente trabajo y ejemplifican su uso en el control semiactivo de estructuras. Ambas leyes poseen una estructura similar a la del control por modos deslizantes, la primera de éstas se basa en un análisis de Lyapunov del sistema completo; y la segunda se basa en un análisis de perturbaciones singulares. Para ambas leyes se presentan dos versiones: una que utiliza la función signo, y otra que es una aproximación de ésta mediante la función de saturación. Se presentan también los resultados de simulación para cada una de las leyes de control propuestas, haciéndose una comparación con los resultados que se obtienen sin el amortiguador y con el amortiguador usando voltajes constantes (voltaje igual a cero y voltaje máximo).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## Capítulo 2

# Modelado e identificación paramétrica de amortiguadores magneto-reológicos

Uno de los principales retos que se presentan al diseñar esquemas de control que utilicen amortiguadores magneto-reológicos es el modelado de estos dispositivos. El comportamiento de este tipo de amortiguadores puede conducir a modelos no lineales que hacen complicado el diseño de esquemas de control. Por esta razón, la búsqueda de modelos simples, pero suficientemente precisos, es una tarea primordial en el diseño de sistemas de protección antisísmica que utilicen este tipo de amortiguadores.

Una vez que se tiene un modelo matemático confiable para el amortiguador, el siguiente problema a resolver es la determinación del valor de los parámetros del mismo. Las propiedades del amortiguador y del fluido magneto-reológico pueden variar con respecto a los valores nominales, ya sea por el desgaste o por variantes en la fabricación. El problema de identificación paramétrica se puede simplificar enormemente si el modelo del amortiguador permite el uso de métodos convencionales de identificación (e.g. métodos de identificación paramétrica basados en modelos lineales en los parámetros).

En este capítulo se presenta un nuevo enfoque para modelar amortiguadores magneto-reológicos basado en el modelo dinámico de fricción de LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., y Lischinsky, P. 1995). Las ventajas más importantes que ofrece este modelo son su capacidad de reproducir el comportamiento no lineal del amortiguador (ciclos de histéresis) y su simplicidad matemática en comparación con los modelos basados en el modelo de fricción de Bouc-Wen (Wen 1976), mismos que han sido publicados en los últimos años. Otra ventaja importante de este modelo

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

es que conduce a una estructura lineal en los parámetros, dando paso al diseño de un esquema de identificación paramétrica en tiempo real basado en el algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido.

## 2.1. Características de los fluidos magneto-reológicos

Los fluidos magneto-reológicos poseen varias propiedades muy útiles entre las cuales se destacan una alta resistencia a la fluencia, baja viscosidad y un comportamiento estable de histéresis en un amplio rango de temperaturas. Un fluido magneto-reológico típico consta de un 20 a un 40% en volumen de partículas de hierro que pueden polarizarse magnéticamente las cuales se encuentran dispersas en algún fluido portador que puede ser aceite mineral, aceite sintético, agua o glicol. Un fluido de este tipo posee una resistencia a la fluencia que puede variar entre 50 y 100 [kPa] para un campo magnético que varía de 150 a 250 [kA/m], lo que permite lograr grandes fuerzas.

Cuando un campo magnético es aplicado al fluido se forman cadenas de partículas paralelas al campo aplicado. Estas estructuras producen fricción haciendo que el fluido se vuelva semisólido, mostrando un comportamiento plástico. La transición al equilibrio reológico de los fluidos magneto-reológicos se logra en unos cuantos milisegundos ( $< 25$  [ms]), lo que brinda un ancho de banda amplio.

Desde el punto de vista del control, la propiedad más importante de los fluidos magneto-reológicos es el esfuerzo de fluencia variable. Comúnmente, el máximo esfuerzo de fluencia de un fluido magneto-reológico es un orden de magnitud más grande que el mejor de los fluidos electro-reológicos, mientras que la viscosidad de ambos es similar. Esto permite que, para el mismo nivel de resistencia a la fluencia, la cantidad de fluido utilizado en un dispositivo magneto-reológico sea aproximadamente dos órdenes de magnitud menor que la cantidad utilizada en un dispositivo electro-reológico.

Desde el punto de vista práctico, otra ventaja de los fluidos magneto-reológicos es la baja potencia requerida para modificar las propiedades del fluido. De acuerdo con el principal fabricante de dispositivos magneto-reológicos<sup>1</sup>, un amortiguador con una capacidad de 2224 [N] puede alimentarse directamente con fuentes de bajo voltaje (12 a 24 [V]) y fuentes de corriente con salida máxima de 2 [A]. Se pueden usar conectores y cable eléctrico estándar incluso en ambientes agresivos sin temor a rupturas del dieléctrico.

Otra ventaja de los fluidos magneto-reológicos es su relativa tolerancia a temperaturas extremas

---

<sup>1</sup>Puede consultarse [www.rheonetic.com](http://www.rheonetic.com) y [www.mrfluid.com](http://www.mrfluid.com).

y a contaminantes. Estos fluidos pueden operar en un rango de temperaturas que va de  $-40$  a  $150$   $^{\circ}\text{C}$ , lo que permite su utilización tanto en exteriores (e.g., puentes y torres) como en interiores (e.g., edificios). Esto se debe a que la polarización magnética de las partículas, y por lo tanto el esfuerzo de fluencia, no dependen de la variación de la temperatura. De forma similar, contaminantes como la humedad no producen efectos significativos en las propiedades de los fluidos magneto-reológicos. En general, dichas propiedades no se ven afectadas por impurezas u otros contaminantes que están presentes durante su fabricación y uso. Agentes antidesgaste y aditivos lubricantes pueden incluirse en la composición de los fluidos magneto-reológicos para aumentar su estabilidad y vida útil.

## 2.2. Descripción del amortiguador magneto-reológico

El amortiguador para el cual se desarrolló el modelo matemático es un prototipo desarrollado por Lord Corporation cuyo fluido magneto-reológico está constituido por partículas de hierro suspendidas en aceite de hidrocarburos con una densidad de  $3.28$   $[\text{g}/\text{cm}^3]$ . El amortiguador tiene  $21.5$   $[\text{cm}]$  de longitud y el cilindro principal tiene  $3.8$   $[\text{cm}]$  de diámetro con  $\pm 2.5$   $[\text{cm}]$  de carrera. El cilindro principal aloja al pistón, el circuito magnético, un acumulador de gas y  $50$   $[\text{ml}]$  de fluido magneto-reológico. El campo magnético es generado por un electroimán colocado en la cabeza del pistón. El volumen total de fluido activo sobre el cual surte efecto el campo magnético aplicado es de  $0.3$   $[\text{ml}]$  aproximadamente. El campo magnético puede variarse entre  $0$  y  $200$   $[\text{kA}/\text{m}]$  para corrientes de  $0$  a  $1$   $[\text{A}]$  en la bobina cuya resistencia es de  $4$   $[\Omega]$ . La potencia pico requerida es menor a los  $10$   $[\text{W}]$ , lo que permitiría operar el amortiguador en forma continua por más de una hora con una batería común. La corriente para el electroimán puede ser proporcionada por una fuente de corriente lineal de  $120$   $[\text{V}]$  AC generando de  $0$  a  $1$   $[\text{A}]$ , lo cual es equivalente a una entrada de voltaje DC de  $0$  a  $3$   $[\text{V}]$ . Con este sistema de potencia el amortiguador alcanza el equilibrio reológico en menos de  $6.5$   $[\text{ms}]$  después de aplicarse el campo magnético, lográndose fuerzas de hasta  $2000$   $[\text{N}]$ ; las cuales son estables para un amplio rango de temperaturas, variando menos del  $10\%$  en el rango de  $-40$  a  $150$   $^{\circ}\text{C}$ . La Figura 2.1 muestra un esquema del amortiguador utilizado.

Para este caso en particular, la saturación del amortiguador magneto-reológico ocurre alrededor de  $2.25$   $[\text{V}]$ .

Existe también un prototipo con una capacidad nominal de  $200$   $[\text{kN}]$  que opera con una potencia máxima de  $50$   $[\text{W}]$  y con una corriente máxima de  $2$   $[\text{A}]$ , el cual está diseñado especialmente para aplicaciones dentro de la ingeniería civil (Carlson, J.D., Catanzarite, D.M., y St. Clair, K.A. 1996).

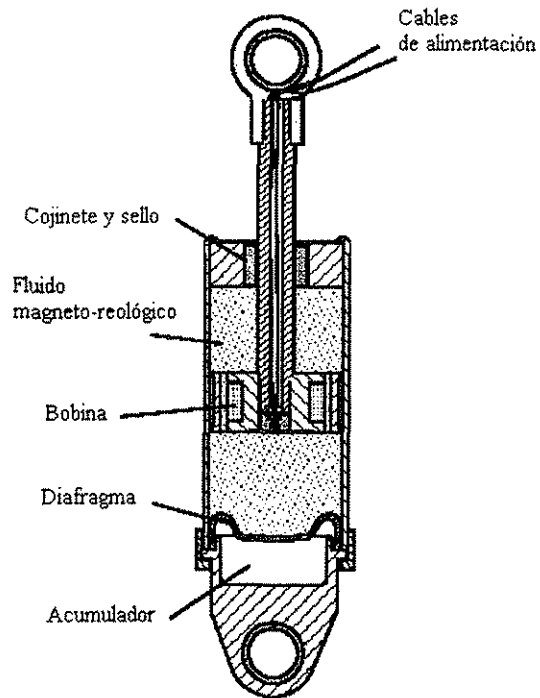


Figura 2.1: Esquema del amortiguador magneto-reológico.

Se trata de un amortiguador de doble efecto ( $\pm 8$  [cm] de carrera), con un diámetro interno de 20.32 [cm], aproximadamente un metro de largo y con una masa de 250 [kg]. Como puede verse, las dimensiones y la fuerza que es capaz de generar este amortiguador hacen de éste un candidato ideal para el control de estructuras civiles (Figuras 2.2 y 2.3).

### 2.3. Modelado del amortiguador magneto-reológico

En esta sección se presenta el modelado del amortiguador magneto-reológico. El primer paso en el diseño de estrategias de control que ocupen amortiguadores magneto-reológicos es el desarrollo de un modelo matemático sencillo que sea capaz de reproducir el comportamiento dinámico del amortiguador. El desarrollo de este modelo representa uno de los retos más importantes dado que los amortiguadores magneto-reológicos son altamente no lineales y su comportamiento presenta ciclos de histéresis. Son varios los modelos que se han propuesto para el estudio de amortiguadores de fluido controlable (Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996b; Spencer, B.F.,

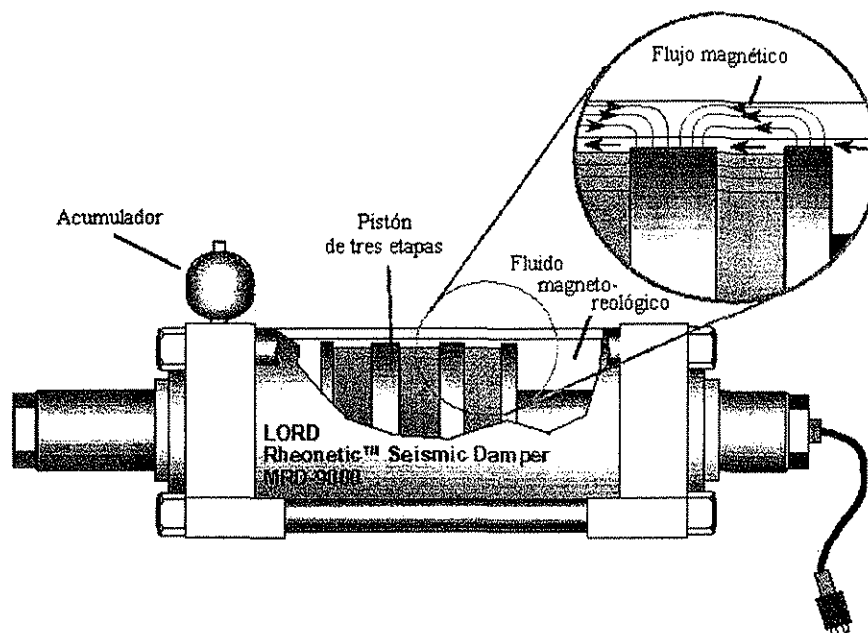


Figura 2.2: Esquema del amortiguador magneto-reológico para aplicaciones civiles.

Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1996; Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. 1998; Kim, B. y Roschke, P.N. 1999); sin embargo, la mayoría presenta deficiencias en el modelado del comportamiento no lineal del amortiguador, especialmente en la relación fuerza-velocidad; o bien, son demasiado complejos de tal suerte que su tratamiento numérico resulta difícil y por lo tanto, su aplicación en la práctica puede ser limitada.

Entre los trabajos de investigación enfocados al modelado de los amortiguadores magneto-reológicos se destacan los de Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996). Para representar el comportamiento del amortiguador, estos autores utilizan la estructura del modelo Bouc-Wen (Wen 1976), el cual es extremadamente versátil y puede exhibir una gran variedad de comportamientos de histéresis. Los resultados presentados en Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996a) y Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996) muestran que este modelo reproduce con gran precisión el comportamiento real del amortiguador bajo condiciones típicas de trabajo. El esquema del modelo presentado por estos autores se muestra en la Figura 2.4. Las ecuaciones que gobiernan este modelo son las siguientes:

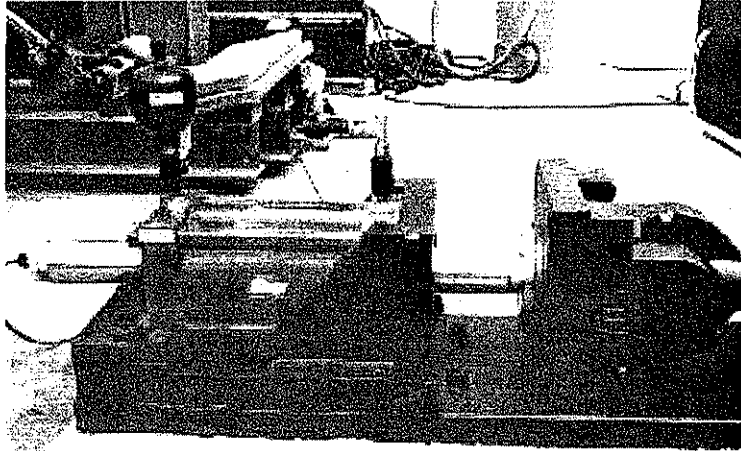


Figura 2.3: Montaje experimental de un amortiguador magneto-reológico para aplicaciones civiles.

$$c_1 \dot{y} = \alpha_w z_w + k_0(x - y) + c_0(\dot{x} - \dot{y}) , \quad (2.1a)$$

$$\dot{z}_w = -\gamma_w (|\dot{x} - \dot{y}|)(z_w)(|z_w|)^{h-1} - \beta_w(\dot{x} - \dot{y})|z_w|^h + A_w(\dot{x} - \dot{y}) , \quad (2.1b)$$

$$f = \alpha_w z_w + c_0(\dot{x} - \dot{y}) + k_0(x - y) + k_1(x - x_0) , \quad (2.1c)$$

donde  $f$  es la fuerza ejercida por el amortiguador,  $x$  es el desplazamiento relativo de uno de los extremos del amortiguador<sup>2</sup>,  $x_0$  es el desplazamiento inicial del émbolo,  $y$  es un estado interno que reproduce los efectos de deslizamiento observados a bajas velocidades y  $z_w$  es el estado interno del modelo de Bouc-Wen. Las constantes  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $c_0$  y  $c_1$  son los parámetros de rigidez y amortiguamiento viscoso de los elementos de la Figura 2.4. Los parámetros  $\gamma_w$ ,  $\beta_w$  y  $A_w$  controlan la forma del ciclo de histéresis del modelo de Bouc-Wen. De igual forma, el parámetro  $h$  está relacionado con el estado  $z_w$  y determina su evolución. Finalmente,  $\alpha_w$  representa el acoplamiento de  $z_w$  con la fuerza  $f$ .

Para cuantificar los cambios en el esfuerzo de fluencia del fluido magneto-reológico, Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996) proponen las siguientes relaciones lineales entre el voltaje aplicado y los parámetros  $\alpha_w$ ,  $c_0$  y  $c_1$

$$\alpha_w = \alpha_w(u) = \alpha_a + \alpha_b u , \quad (2.2a)$$

$$c_0 = c_0(u) = c_{0a} + c_{0b} u , \quad (2.2b)$$

$$c_1 = c_1(u) = c_{1a} + c_{1b} u , \quad (2.2c)$$

<sup>2</sup>El otro extremo está fijo en el esquema de la Figura 2.4.

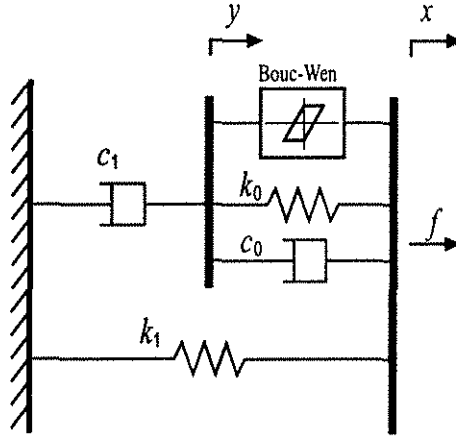


Figura 2.4: Representación mecánica del modelo basado en la estructura de Bouc-Wen.

donde  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$ ,  $c_{0a}$ ,  $c_{0b}$ ,  $c_{1a}$  y  $c_{1b}$  son constantes y el voltaje  $u$  está dado por

$$\dot{u} = -\eta_w(u - v), \quad \eta_w > 0, \quad (2.3)$$

donde (2.3) representa la dinámica del fluido involucrada en alcanzar el equilibrio reológico al aplicarse un voltaje  $v$  en la entrada.

El ajuste de los parámetros del modelo propuesto por Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996) está basado en datos experimentales y muestra un desempeño confiable. Sin embargo, a pesar de que la respuesta de este modelo coincide con gran precisión con los resultados experimentales, su complejidad matemática limita su utilización en el diseño de esquemas de control, además de poseer catorce parámetros y una estructura no lineal en los mismos.

En esta tesis se presenta un modelo dinámico basado en el modelo de fricción propuesto por Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., y Lischinsky, P. (1995). Este modelo tiene la siguiente forma

$$f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}, \quad (2.4a)$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z, \quad (2.4b)$$

donde  $f$  es la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico,  $\dot{x}$  es la velocidad relativa entre los extremos del amortiguador,  $z$  es un estado interno que modela la dinámica del fluido, y  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $a_0$  son parámetros constantes.

En el planteamiento original de Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., y Lischinsky, P. (1995), el parámetro  $a_0$  es una función no lineal de la velocidad relativa<sup>3</sup>. Para mantener la simplicidad del modelo, y basándose en el modelo propuesto por Dahl (1976), el parámetro  $a_0$  se considera constante en este trabajo.

Para incluir los efectos que provoca el campo magnético sobre el fluido magneto-reológico se supone que la corriente que determina la intensidad del campo magnético es proporcional al voltaje aplicado. Para incluir el voltaje  $v$  en el modelo, las ecuaciones (2.4a-b) se pueden modificar de la siguiente manera

$$f = \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} , \quad (2.5a)$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z (1 + a_1 v) . \quad (2.5b)$$

Nótese que sustituyendo (2.5b) en (2.5a) se tiene

$$f = \sigma_0 z v - \sigma_0 \sigma_1 a_0 |\dot{x}| z - \sigma_0 \sigma_1 a_0 a_1 |\dot{x}| z v + (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{x} . \quad (2.6)$$

Considerando los siguiente parámetros

$$\theta_1 = \sigma_0 , \quad (2.7a)$$

$$\theta_2 = \sigma_0 \sigma_1 a_0 , \quad (2.7b)$$

$$\theta_3 = \sigma_0 \sigma_1 a_0 a_1 , \quad (2.7c)$$

$$\theta_4 = \sigma_1 + \sigma_2 , \quad (2.7d)$$

el modelo propuesto puede reparametrizarse de la siguiente manera

$$f = U \Theta \quad (2.8)$$

con

$$U = [z v, -|\dot{x}| z, -|\dot{x}| z v, \dot{x}] \quad (2.9)$$

y

$$\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T , \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>El parámetro  $a_0$  intenta representar el efecto Stribeck. Véase, por ejemplo, Álvarez, L. y Olmos, L. (2001).



dando como resultado una estructura lineal en los parámetros que es adecuada para utilizar cualquier técnica de identificación en tiempo real.

Es importante hacer notar que sólo se pueden determinar cuatro parámetros con el vector  $\Theta$ , mientras que las ecuaciones (2.5a-b) requieren cinco. Para calcular en forma única estos cuatro parámetros se supone que el valor de  $\sigma_2$  es conocido. El resto de los parámetros se obtiene de la siguiente forma

$$\sigma_1 = \theta_4 - \sigma_2, \quad (2.11a)$$

$$\sigma_0 a_0 = \frac{\theta_2}{\sigma_1}, \quad (2.11b)$$

$$\sigma_0 a_0 a_1 = \frac{\theta_3}{\sigma_1}. \quad (2.11c)$$

## 2.4. Ley de adaptación de parámetros

Una vez escrito el modelo en la forma paramétrica (2.8), la aplicación de cualquier algoritmo convencional de identificación es directa. En este trabajo se utilizó un algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido<sup>4</sup> (Ljung 1987), lográndose la identificación en tiempo real de los parámetros del modelo.

La ley de adaptación para el valor estimado  $\hat{\Theta}$  de los parámetros reales es la siguiente

$$\dot{P} = \alpha P - P U^T U P, \quad \alpha > 0 \quad (2.12a)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = P U^T \tilde{f}, \quad (2.12b)$$

donde  $\tilde{f} = f - \hat{f}$  es el error en la salida del esquema de identificación,  $\hat{f}$  es la fuerza estimada.  $\alpha$  corresponde al factor de olvido del esquema de identificación y  $P$  es la matriz de covarianza. La ecuación (2.9), requiere del conocimiento del estado interno  $z$  el cual no se puede medir directamente. Para resolver este problema se propone el siguiente observador no lineal

$$\dot{\hat{z}} = \hat{x} - \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 |\hat{x}| \hat{z} (1 + \hat{a}_1 v), \quad (2.13)$$

<sup>4</sup>En (Ghanem, R. y Shinozuka, M. 1994) se presenta una evaluación cualitativa de varios métodos de identificación paramétrica para diagnóstico de estructuras en tiempo real de los cuales se destaca el método arriba mencionado.

donde  $\hat{\sigma}_0$ ,  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  son los valores estimados de los parámetros reales calculados a través de las relaciones (2.11a-c) y el valor estimado de  $\Theta$ , es decir,

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\theta}_1 , \quad (2.14a)$$

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\theta}_4 - \sigma_2 , \quad (2.14b)$$

$$\hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 = \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\sigma}_1} , \quad (2.14c)$$

$$\hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1 = \frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\sigma}_1} , \quad (2.14d)$$

donde el valor de  $\hat{\sigma}_1$  es truncado por un algoritmo de proyección que evita que este parámetro eventualmente sea cero.

En las ecuaciones (2.12a-b) el vector de señales,  $U$ , es reemplazado por

$$\hat{U} = [\hat{z}v, -|\hat{x}|\hat{z}, -|\hat{x}|\hat{z}v, \hat{x}] , \quad (2.15)$$

obteniéndose la siguiente ley de adaptación de parámetros que contempla la estimación de  $z$

$$\dot{P} = \alpha P - P\hat{U}^T\hat{U}P , \quad (2.16a)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = P\hat{U}^T\tilde{f} ; \quad (2.16b)$$

con lo cual, la fuerza esimada está dada por

$$\hat{f} = \hat{U}\hat{\Theta} . \quad (2.17)$$

## 2.5. Convergencia paramétrica

Para la prueba de estabilidad del esquema de identificación y del observador considérese la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V = V_1 + V_2 , \quad (2.18)$$

donde

$$V_1 = \frac{1}{2}\hat{\Theta}^T P^{-1}\hat{\Theta} \quad (2.19)$$

y

$$V_2 = \frac{1}{2}\hat{z}^2 \quad (2.20)$$

son funciones positivas definidas en las que  $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$  es el error paramétrico y  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  es el error de observación.

Las funciones  $V_1$  y  $V_2$  se tratarán por separado con el objeto de facilitar el desarrollo de la prueba.

La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.19) puede escribirse como

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \left( \tilde{\Theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} + \dot{\tilde{\Theta}}^T P^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T \dot{P}^{-1} \tilde{\Theta} \right) \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{f} - \tilde{f}^T \hat{U} \tilde{\Theta} + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \dot{P}^{-1} \tilde{\Theta} \right) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -2\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{f} - \tilde{\Theta}^T P^{-1} \dot{P} P^{-1} \tilde{\Theta} \right), \quad (2.23)$$

ya que  $\dot{\tilde{\Theta}} = -P\hat{U}^T\tilde{f}$  y  $\dot{P}^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$ .

Ahora bien, sustituyendo (2.12a) en (2.23), se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \left( -2\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{f} - \alpha \tilde{\Theta}^T P^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\Theta} \right). \quad (2.24)$$

Por otra parte, el error de estimación satisface la siguiente igualdad

$$\tilde{f} = U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta} \quad (2.25)$$

$$= U\Theta - \hat{U}(-\tilde{\Theta} + \Theta) \quad (2.26)$$

$$= (U - \hat{U})\Theta + \hat{U}\tilde{\Theta} \quad (2.27)$$

$$= \tilde{U}\Theta + \hat{U}\tilde{\Theta}. \quad (2.28)$$

Ahora bien, sustituyendo la expresión (2.28) y redefiniendo

$$\tilde{U} = [\tilde{z}v - |\dot{x}|\tilde{z} - |\dot{x}|\tilde{z}v \ 0] \quad (2.29)$$

$$= U_1\tilde{z} \quad (2.30)$$

con

$$U_1 = [v - |\dot{x}| - |\dot{x}|v \ 0], \quad (2.31)$$

se tiene

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} \left( -2\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\Theta} - 2\tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\Theta} - \alpha \tilde{\Theta}^T P^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\Theta} \right) \quad (2.32)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\Theta} - \frac{1}{2} \alpha \tilde{\Theta}^T P^{-1} \tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T U_1 \Theta \tilde{z} \quad (2.33)$$

$$= - \left( \tilde{\Theta}^T W_1 \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T W_2 \tilde{z} \right), \quad (2.34)$$

donde

$$W_1 = \frac{1}{2} (\hat{U}^T \hat{U} + \alpha P^{-1}), \quad (2.35)$$

$$W_2 = \hat{U}^T U_1 \Theta. \quad (2.36)$$

Por otra parte, la variación con respecto al tiempo del error de observación está dada por

$$\dot{\hat{z}} = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}| z - \sigma_0 a_0 a_1 |\dot{x}| z v + \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 |\dot{x}| \hat{z} + \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1 |\dot{x}| \hat{z} v. \quad (2.37)$$

Usando el resultado que se obtiene de sumar y restar los términos  $\sigma_0 a_0 |\dot{x}| \hat{z}$  y  $\sigma_0 a_0 a_1 |\dot{x}| \hat{z} v$  a la ecuación (2.37), la derivada con respecto al tiempo de (2.20) es

$$\dot{V}_2 = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}| (1 + a_1 v) \tilde{z}^2 - \widetilde{\sigma_0 a_0} |\dot{x}| \tilde{z} \tilde{z} - \widetilde{\sigma_0 a_0 a_1} |\dot{x}| \tilde{z} \tilde{z} v, \quad (2.38)$$

con  $\widetilde{\sigma_0 a_0} = \sigma_0 a_0 - \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0$  y  $\widetilde{\sigma_0 a_0 a_1} = \sigma_0 a_0 a_1 - \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1$ .

Los últimos dos términos de la ecuación (2.38) están en función de los productos  $\widetilde{\sigma_0 a_0}$  y  $\widetilde{\sigma_0 a_0 a_1}$  cuyo signo no puede determinarse fácilmente. Para evitar este problema es conveniente expresar estos productos en términos de valores conocidos. Por ejemplo, utilizando las ecuaciones (2.11b) y (2.14c), el término  $\widetilde{\sigma_0 a_0}$  puede expresarse de la siguiente manera

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0} = \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 - \sigma_0 a_0 \quad (2.39)$$

$$= \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\sigma}_1} - \frac{\theta_2}{\sigma_1} \quad (2.40)$$

$$= \frac{\hat{\sigma}_1 \theta_2 - \sigma_1 \hat{\theta}_2}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1}, \quad (2.41)$$

sustituyendo  $\hat{\sigma}_1 = \sigma_1 - \bar{\sigma}_1$  en (2.41) y reagrupando, se tiene

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0} = \frac{\sigma_1 (\hat{\theta}_2 - \theta_2) + \theta_2 \bar{\sigma}_1}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1}. \quad (2.42)$$

Además, dado que  $\sigma_2$  se supone conocido,  $\tilde{\theta}_4 = \theta_4 - \hat{\theta}_4 = \sigma_1 + \sigma_2 - \hat{\sigma}_1 - \sigma_2 = \bar{\sigma}_1$ . Con este último resultado, la expresión (2.42) finalmente se reduce a

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0} = \frac{\sigma_1 (\hat{\theta}_2 - \theta_2) + \theta_2 \tilde{\theta}_4}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_1} \bar{\theta}_2 + \frac{\theta_2}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1} \tilde{\theta}_4. \quad (2.43)$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtiene una expresión equivalente para el producto  $-\widetilde{\sigma_0 a_0 a_1}$

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0 a_1} = -\frac{1}{\hat{\sigma}_1} \bar{\theta}_3 + \frac{\theta_3}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1} \tilde{\theta}_4, \quad (2.44)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

con lo cual se logra expresar la ecuación (2.38) de la siguiente manera

$$\dot{V}_2 = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}| (1 + a_1 v) \bar{z}^2 + |\dot{x}| \bar{z} \left[ -\frac{1}{\hat{\sigma}_1} \bar{\theta}_2 - \frac{v}{\hat{\sigma}_1} \bar{\theta}_3 + \frac{\theta_2 + \theta_3 v}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1} \bar{\theta}_4 \right] \bar{z} \quad (2.45)$$

$$= -W_3 \bar{\Theta} \bar{z} - W_4 \bar{z}^2, \quad (2.46)$$

donde

$$W_3 = \left[ 0, \frac{1}{\hat{\sigma}_1}, \frac{1}{\hat{\sigma}_1} v, -\frac{\theta_2 + \theta_3 v}{\sigma_1 \hat{\sigma}_1} \right] |\dot{x}| \bar{z} \quad (2.47)$$

y

$$W_4 = \sigma_0 a_0 |\dot{x}| (1 + a_1 v). \quad (2.48)$$

Utilizando las ecuaciones (2.34) y (2.46), la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.18) toma la siguiente forma

$$\dot{V} = - \left( \bar{\Theta}^T W_1 \bar{\Theta} + \bar{\Theta}^T W_2 \bar{z} + W_3 \bar{\Theta} \bar{z} + W_4 \bar{z}^2 \right), \quad (2.49)$$

o bien,

$$\dot{V} \leq - \left( \bar{\Theta}^T \bar{W}_1 \bar{\Theta} + \bar{\Theta}^T W_2 \bar{z} + W_3 \bar{\Theta} \bar{z} + W_4 \bar{z}^2 \right), \quad (2.50)$$

con  $\bar{W}_1 = \hat{U}^T \hat{U}$  dado que el término  $\frac{1}{2} \alpha \bar{\Theta}^T P^{-1} \bar{\Theta}$  en (2.33) corresponde a  $\alpha V_1$ , que por definición, es positivo definido.

La expresión (2.50) constituye una forma cuadrática dada por

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \bar{\Theta}^T & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{z} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Para demostrar que el error de estimación  $\bar{f}$  tiende a 0 conforme  $t$  tiende a  $\infty$  primero se procederá a mostrar que la ecuación (2.51) es menor o igual a cero. Con esto se probará que la candidata a función de Lyapunov evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema es uniformemente acotada y en consecuencia, el error paramétrico,  $\bar{\Theta}$ , y el error de observación,  $\bar{z}$  también lo son. Posteriormente, mediante el Lema de Barbálat se probará que  $\dot{V}$  tiende a 0 conforme  $t$  tiende a  $\infty$ , implicando que  $\bar{f}$  tiende a 0 asintóticamente.

Definiendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\Theta}^T & \bar{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_2 & \bar{\theta}_3 & \bar{\theta}_4 & \bar{z} \end{bmatrix} \\ &= \psi^T \end{aligned}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

y

$$W = \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix},$$

la ecuación (2.51) puede escribirse de la siguiente forma

$$\dot{V} \leq -\psi^T W \psi, \quad (2.52)$$

y sabiendo que

$$\bar{W}_1 = \hat{U}^T \hat{U}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{z}v \\ -|\dot{x}|\hat{z} \\ -|\dot{x}|\hat{z}v \\ \dot{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}v \\ -|\dot{x}|\hat{z} \\ -|\dot{x}|\hat{z}v \\ \dot{x} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\hat{z}v)^2 & -|\dot{x}|\hat{z}^2v & -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & \dot{x}\hat{z}v \\ -|\dot{x}|\hat{z}^2v & (|\dot{x}|\hat{z})^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} \\ -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & (|\dot{x}|\hat{z}v)^2 & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v \\ \dot{x}\hat{z}v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v & \dot{x}^2 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \hat{U}^T U_1 \Theta$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{z}v \\ -|\dot{x}|\hat{z} \\ -|\dot{x}|\hat{z}v \\ \dot{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ -|\dot{x}| \\ -|\dot{x}|v \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = (v\theta_1 - (\theta_2 + v\theta_3)|\dot{x}|) \begin{bmatrix} \hat{z}v \\ -|\dot{x}|\hat{z} \\ -|\dot{x}|\hat{z}v \\ \dot{x} \end{bmatrix} \\ = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3 \ \rho_4]^T,$$

$$W_3 = \left[ 0, \frac{1}{\hat{\sigma}_1}, \frac{1}{\hat{\sigma}_1}v, -\frac{\theta_2 + \theta_3v}{\sigma_1\hat{\sigma}_1} \right] |\dot{x}|\hat{z} \\ = [\rho_5 \ \rho_6 \ \rho_7 \ \rho_8]$$

y

$$W_4 = \sigma_0 a_0 |\dot{x}|(1 + a_1v),$$

la matriz  $W$  se puede desarrollar de la siguiente forma,

$$W = \begin{bmatrix} (\hat{z}v)^2 & -|\dot{x}|\hat{z}^2v & -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & \dot{x}\hat{z}v & \rho_1 \\ -|\dot{x}|\hat{z}^2v & (|\dot{x}|\hat{z})^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} & \rho_2 \\ -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & (|\dot{x}|\hat{z}v)^2 & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v & \rho_3 \\ \dot{x}\hat{z}v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v & \dot{x}^2 & \rho_4 \\ \rho_5 & \rho_6 & \rho_7 & \rho_8 & \sigma_0 a_0 |\dot{x}|(1 + a_1v) \end{bmatrix}$$

Esta matriz puede descomponerse en la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica<sup>5</sup> de la siguiente forma

$$W = W_s + W_{as} ,$$

donde

$$W_s = \frac{1}{2} (W + W^T) \quad (2.53)$$

$$= \begin{bmatrix} (\hat{z}v)^2 & -|\dot{x}|\hat{z}^2v & -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & \dot{x}\hat{z}v & \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_5) \\ -|\dot{x}|\hat{z}^2v & (|\dot{x}|\hat{z})^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} & \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_6) \\ -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & (|\dot{x}|\hat{z}v)^2 & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v & \frac{1}{2}(\rho_3 + \rho_7) \\ \dot{x}\hat{z}v & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z} & -\dot{x}|\dot{x}|\hat{z}v & \dot{x}^2 & \frac{1}{2}(\rho_4 + \rho_8) \\ \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_5) & \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_6) & \frac{1}{2}(\rho_3 + \rho_7) & \frac{1}{2}(\rho_4 + \rho_8) & \sigma_0 a_0 |\dot{x}|(1 + a_1 v) \end{bmatrix}$$

y

$$W_{as} = \frac{1}{2} (W - W^T)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_8) \\ -\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_5) & -\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_6) & -\frac{1}{2}(\rho_3 - \rho_7) & -\frac{1}{2}(\rho_4 - \rho_8) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 \\ -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 & 0 \end{bmatrix}$$

son la parte simétrica y antisimétrica, respectivamente. De esta forma,

$$\psi^T W \psi = \psi^T W_s \psi + \psi^T W_{as} \psi .$$

<sup>5</sup>véase Horn, R. A. y Johnson, C. R. (1993).

Nótese que

$$\begin{aligned} \psi^T W_{as} \psi &= \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 & \tilde{\theta}_2 & \tilde{\theta}_3 & \tilde{\theta}_4 & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 \\ -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 \\ \tilde{\theta}_4 \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \\ &= \theta_1 r_1 z + \theta_2 r_2 z + \theta_3 r_3 z + \theta_4 r_4 z + z(-r_1 \theta_1 - r_2 \theta_2 - r_3 \theta_3 - r_4 \theta_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En general, el producto  $x^T A_{as} x = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$  y  $A_{as} = -A_{as}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dada la estructura que poseen las matrices antisimétricas.

Con esto se puede concluir que el signo de  $V$  depende sólomente de la matriz  $W_s$ , es decir

$$\dot{V} \leq \psi^T W \psi = \psi^T W_s \psi$$

Ahora bien, en esta parte de la prueba sólo se pretende demostrar la estabilidad de  $\tilde{\Theta} = 0$  y  $\tilde{z} = 0$ , por lo que bastará con demostrar que la matriz  $W_s$  es positiva semidefinida.

Una matriz simétrica es positiva semidefinida si sus determinantes principales son mayores o iguales a cero (Khalil 1996). Si se designa con  $R_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , a cada uno de los determinantes principales de (2.53) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} R_1 &= |(\hat{z}v)^2| = (\hat{z}v)^2 \geq 0, \\ R_2 &= \begin{vmatrix} (\hat{z}v)^2 & -|\dot{x}|\hat{z}^2v \\ -|\dot{x}|\hat{z}^2v & (|\dot{x}|\hat{z})^2 \end{vmatrix} = (\hat{z}v)^2(|\dot{x}|\hat{z})^2 - (|\dot{x}|\hat{z}^2v)^2 = 0 \\ R_3 &= \begin{vmatrix} (\hat{z}v)^2 & -|\dot{x}|\hat{z}^2v & -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 \\ -|\dot{x}|\hat{z}^2v & (|\dot{x}|\hat{z})^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v \\ -|\dot{x}|(\hat{z}v)^2 & (|\dot{x}|\hat{z})^2v & (|\dot{x}|\hat{z}v)^2 \end{vmatrix} \\ &= (\hat{z}v)^2 [|\dot{x}|^4 \hat{z}^4 v^2 - |\dot{x}|^4 \hat{z}^4 v^2] + \\ &\quad + |\dot{x}|\hat{z}^2v [-|\dot{x}|\hat{z}^2v (|\dot{x}|\hat{z}v)^2 + |\dot{x}|(\hat{z}v)^2 (|\dot{x}|\hat{z})^2 v] + \\ &\quad - |\dot{x}|(\hat{z}v)^2 [-|\dot{x}|\hat{z}^2v (|\dot{x}|\hat{z})^2 v + |\dot{x}|(\hat{z}v)^2 (|\dot{x}|\hat{z})^2] = 0 \end{aligned}$$

y sucesivamente,  $R_4 = 0$  y  $R_5 = 0$ .



Por lo tanto, los determinantes principales de  $W_s$  son todos iguales a cero, excepto el de menor orden que es igual a  $v^2 \dot{z}^2 \geq 0$ . Con esto se puede concluir que (2.52) es negativa semidefinida, y por ende

$$\dot{V} \leq 0, \quad (2.54)$$

demostrándose así que los puntos  $\tilde{\Theta} = 0$  y  $\tilde{z} = 0$  son estables.

□

De acuerdo con (Ioannou, P.A. y Sun, J. 1996)<sup>6</sup>, el hecho de que  $V \geq 0$  y  $\dot{V} \leq 0$  permite afirmar que  $V$  está acotada, es decir,  $V \in \mathcal{L}_\infty$ . Además, si  $\dot{V}$  es uniformemente continua entonces  $\dot{V} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , con lo cual se mostraría que  $\tilde{f} \rightarrow 0$ .

Para mostrar que  $\dot{V}$  es uniformemente continua basta con probar que  $\ddot{V}$  es acotada. De (2.49), la segunda derivada con respecto al tiempo de  $V$  está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{V} = & -2\tilde{\Theta}^T \dot{W}_1 \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{\Theta}^T \dot{W}_1 \ddot{\tilde{\Theta}} - \dot{\tilde{\Theta}}^T W_2 \tilde{z} - \tilde{\Theta}^T W_2 \dot{\tilde{z}} - \dot{\tilde{\Theta}}^T W_2 \tilde{z} - \\ & - W_3 \dot{\tilde{\Theta}} \tilde{z} - W_3 \tilde{\Theta} \dot{\tilde{z}} - \dot{W}_3 \tilde{\Theta} \tilde{z} - 2W_4 \tilde{z} \dot{\tilde{z}} - \dot{W}_4 \tilde{z}^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

De (2.54) se sabe que  $\tilde{\Theta}, \tilde{z} \in \mathcal{L}_\infty$ . Además, como las señales  $v$  y  $\dot{x}$  son las entradas del amortiguador, para el proceso de identificación paramétrica es posible escoger a éstas de tal forma que  $v, \dot{v}, x, \dot{x}, \ddot{x} \in \mathcal{L}_\infty$  junto con  $\sigma_2 \in \mathcal{L}_\infty$ . Ahora bien, suponiendo que  $z \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  implica que  $\hat{z} \in \mathcal{L}_\infty$  con lo cual, de (2.15) y (2.29) se concluye que  $\dot{U}, \ddot{U} \in \mathcal{L}_\infty$  y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^T \dot{W}_1 \dot{\tilde{\Theta}} &= -\tilde{\Theta}^T (\dot{U}^T \dot{U}) P \dot{U} \tilde{f} \\ &= -\tilde{\Theta}^T (\dot{U}^T \dot{U}) P \dot{U} (\tilde{U} \Theta + \dot{U} \tilde{\Theta}) \in \mathcal{L}_\infty, \end{aligned}$$

ya que los términos  $\tilde{\Theta}$  y  $\tilde{z}$  son acotados y  $V = \frac{1}{2} (\tilde{\Theta}^T P^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{z}^2) \in \mathcal{L}_\infty$  implica que los elementos de  $P$  y  $P^{-1}$  también son acotados. Por otra parte,

$$\dot{W}_1 = \dot{U}^T \dot{U} + \dot{U}^T \ddot{U},$$

donde

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{z}v + \dot{z}\dot{v}, & -|\dot{x}|\dot{z} - \text{sgn}(\dot{x})\dot{z}, & -|\dot{x}|\dot{z}\dot{v} - |\dot{x}|\dot{z}\dot{v} - \text{sgn}(\dot{x})\dot{z}\dot{v}, & \ddot{x} \end{bmatrix} \in \mathcal{L}_\infty,$$

<sup>6</sup>Lemas 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5 (Lema de Barbălat) de (Ioannou, P.A. y Sun, J. 1996) pp.74-76.

lo que implica que

$$\tilde{\Theta}^T \dot{W}_1 \tilde{\Theta} \in \mathcal{L}_\infty .$$

De (2.36), claramente se aprecia que  $W_2 \in \mathcal{L}_\infty$ ,

$$\dot{z} = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}| \tilde{z} - \sigma_0 a_0 a_1 |\dot{x}| \tilde{z} v - \widetilde{\sigma_0 a_0} |\dot{x}| \tilde{z} - \widetilde{\sigma_0 a_0 a_1} |\dot{x}| \tilde{z} v \in \mathcal{L}_\infty$$

y

$$\dot{W}_2 = \left( \dot{U}^T U_1 + \dot{U}^T U_1 \right) \Theta$$

con

$$\dot{U}_1 = \left[ \dot{v}, \quad -\text{sgn}(\dot{x}), \quad -\text{sgn}(\dot{x})v - |\dot{x}|\dot{v}, \quad 0 \right] \in \mathcal{L}_\infty ,$$

por lo que los términos  $\dot{\Theta}^T W_2 \tilde{z}$ ,  $\tilde{\Theta}^T W_2 \dot{z}$  y  $\tilde{\Theta}^T \dot{W}_2 \tilde{z}$  son acotados.

De (2.47) se deduce que  $W_3$  y  $\dot{W}_3$  están acotados. De igual forma, de (2.48) se observa que  $W_4$  es acotado y

$$\dot{W}_4 = (\text{sgn}(\dot{x})(1 + a_1 v) + a_1 |\dot{x}| \dot{v}) \in \mathcal{L}_\infty ,$$

por lo que, en conclusión,

$$\dot{V} \in \mathcal{L}_\infty , \tag{2.56}$$

lo que implica que  $\dot{V}$  es uniformemente continua, y por lo tanto,

$$\dot{V} \rightarrow 0 \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty. \tag{2.57}$$

La expresión (2.57) implica que el término  $\tilde{\Theta}^T \dot{U}^T \dot{U} \tilde{\Theta}$  tiende a cero asintóticamente, lo que a su vez implica

$$\dot{U} \tilde{\Theta} \rightarrow 0 \quad \text{asintóticamente} . \tag{2.58}$$

Dado que también el término  $W_4 \tilde{z}^2$  tiende a cero asintóticamente,  $\tilde{z}$  también tiende a cero asintóticamente, lo cual conduce a que  $\tilde{U} \rightarrow 0$  y por lo tanto,

$$\dot{f} = \tilde{U} \Theta + \dot{U} \tilde{\Theta} \rightarrow 0 \quad \text{conforme } t \rightarrow \infty \tag{2.59}$$

□

De esta forma se logra que la fuerza generada por el modelo propuesto tienda a la fuerza generada por el modelo de referencia. Normalmente la fuerza inducida por ondas sísmicas es rica en frecuencias por lo que se espera tener excitación persistente, en cuyo caso  $\tilde{\theta}$  tendería a 0 asintóticamente.

Tabla 2.1: Parámetros para el modelo de las ecuaciones (2.1a-c).

| Parámetro  | Valor numérico             |
|------------|----------------------------|
| $c_{0a}$   | 2100 [N · s/m]             |
| $c_{0b}$   | 350 [N · s/(V · m)]        |
| $k_0$      | 4690 [N/m]                 |
| $c_{1a}$   | 28300 [N · s/m]            |
| $c_{1b}$   | 295 [N · s/(V · m)]        |
| $k_1$      | 500 [N/m]                  |
| $\alpha_a$ | 140000                     |
| $\alpha_b$ | 69500 [V <sup>-1</sup> ]   |
| $\gamma_w$ | 3630000 [m <sup>-2</sup> ] |
| $\beta_w$  | 3630000 [m <sup>-2</sup> ] |
| $A_w$      | 301                        |
| $h$        | 2                          |
| $\eta_w$   | 190 [s <sup>-1</sup> ]     |

## 2.6. Resultados de simulación

Para evaluar el desempeño del modelo propuesto se utilizó el modelo de la Figura 2.4 para generar la señal de referencia de fuerza,  $f$ , en la ecuación (2.16b). Los valores de los parámetros de las ecuaciones (2.1a) a (2.3) fueron tomados de Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996) y se muestran en la Tabla 2.1.

El primer resultado de simulación corresponde a la identificación de los parámetros mediante una señal de entrada en la que el desplazamiento  $x$  [m] y el voltaje de entrada  $v$  [V] satisfacen

$$x = 0.0115 \text{ sen}(8.6\pi t) ,$$

$$v = 1.25 \text{ sen}(10.2\pi t) + 1.25 ,$$

respectivamente.

La señal de referencia  $f$  y la fuerza calculada a partir de los parámetros estimados se muestran en la Figura 2.5, donde se puede observar una muy buena aproximación de la fuerza generada por el modelo propuesto. Para un vector de condiciones iniciales dado por

$$\hat{\theta}_0 = [20 \ 20 \ 20 \ 20]^T , \quad (2.60)$$

y  $\sigma_2 = 2300$  [kg/s], el vector de parámetros estimados que se obtiene después de 36 [s] de simulación es

$$\hat{\theta} = 10^4 \times [1.059 \ 0.181 \ -0.026 \ 0.008]^T , \quad (2.61)$$

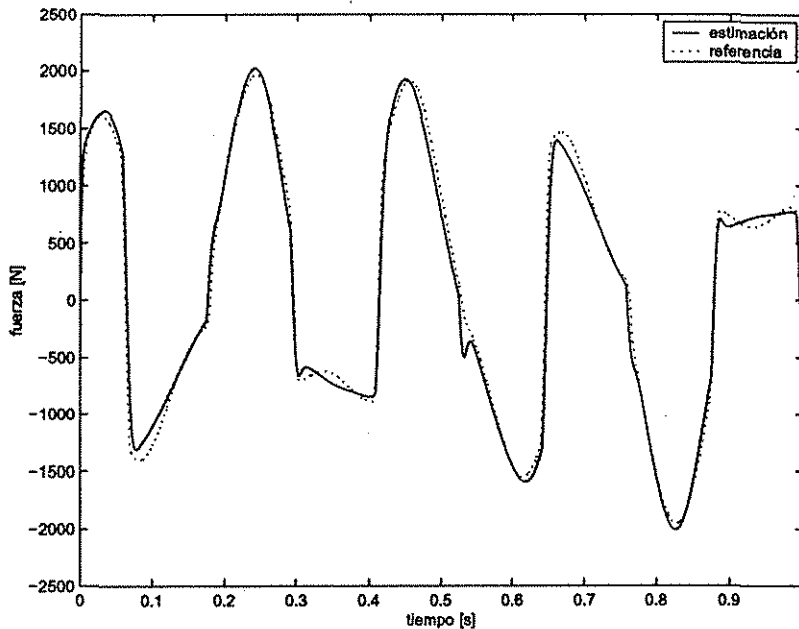


Figura 2.5: Respuesta del modelo del amortiguador a excitación periódica.

de donde

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\theta}_1 = 1059300 \text{ [kg/(V} \cdot \text{s}^2)],$$

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\theta}_4 - \sigma_2 = 5800 \text{ [kg/s]},$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1} = 0.003 \text{ [(s}^2 \cdot \text{V)/(kg} \cdot \text{m)],}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \hat{a}_0} = -0.1444 \text{ [V}^{-1}].$$

La evolución de los parámetros se muestra en la Figura 2.6. En el segundo análisis de simulación, los parámetros mostrados en (2.61) se mantuvieron constantes para probar el desempeño del modelo bajo diferentes niveles de voltaje. En este caso se consideró  $z_0 = 0.1229$  como valor inicial de  $z$  para igualar la fuerza inicial proporcionada por el amortiguador cuando  $v = 0$  [V]. La señal de entrada tanto para el modelo dado por las ecuaciones (2.1a-c) como para el modelo propuesto fue un desplazamiento senoidal  $x$  [cm] tal que

$$x = 1.5 \text{ sen}(5\pi t),$$

con voltajes constantes de 0.75, 1.5 y 2.25 [V]. Las Figuras 2.7 a 2.9 muestran los resultados obtenidos para cada voltaje. En la Figura 2.7 se muestra la evolución de la fuerza en el tiempo,

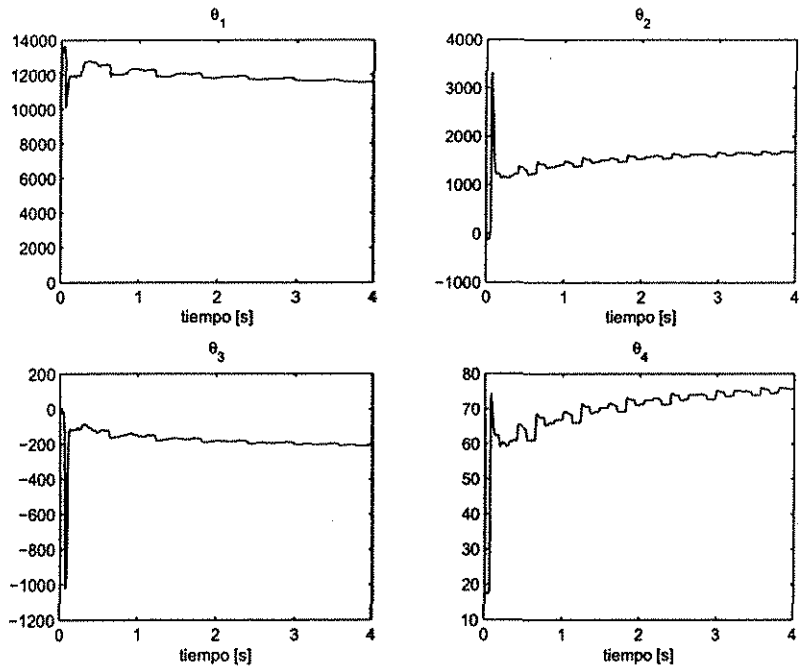


Figura 2.6: Evolución de los parámetros estimados del amortiguador.

mientras que la Figura 2.8 presenta la relación fuerza-desplazamiento. Finalmente, en la Figura 2.9 se muestra la curva fuerza vs. velocidad.

En resumen, los resultados expuestos en las Figuras 2.5 a 2.9 muestran un buen desempeño del modelo propuesto en comparación con el modelo basado en la estructura de Bouc-Wen.

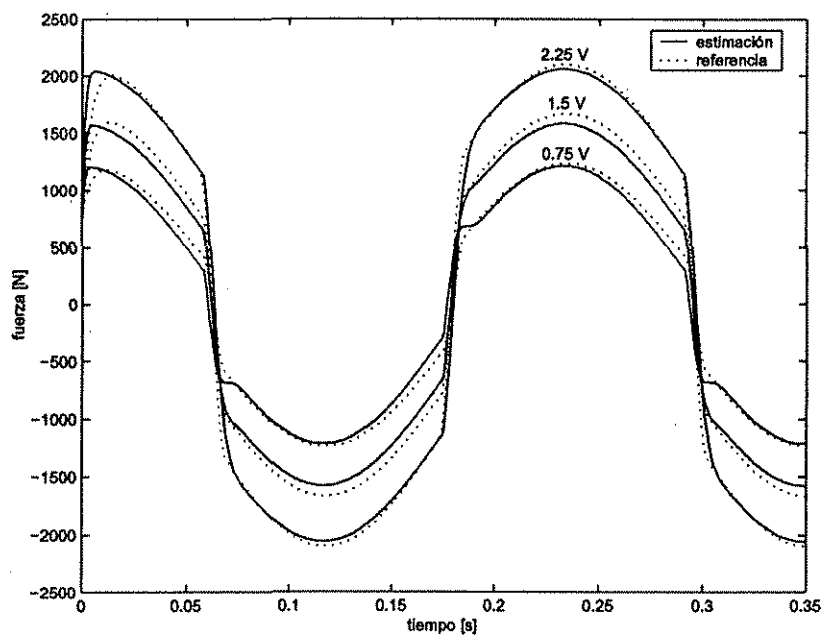


Figura 2.7: Fuerza vs. tiempo para diversos voltajes de entrada constantes.

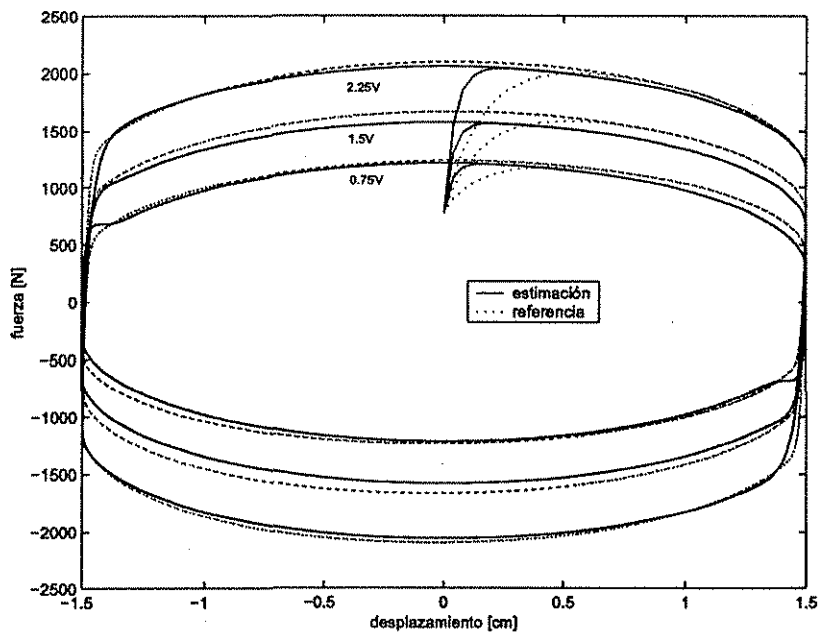


Figura 2.8: Fuerza vs. desplazamiento para diversos voltajes de entrada constantes.

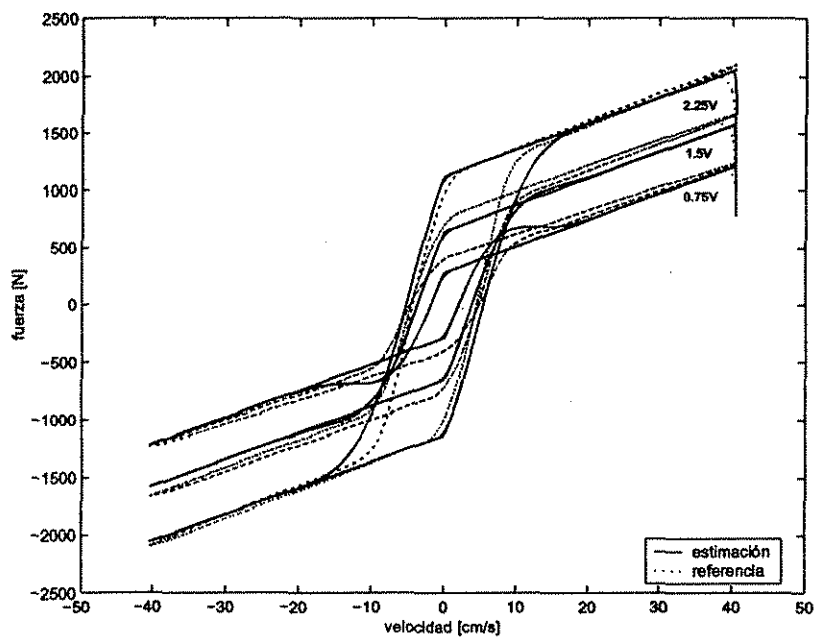


Figura 2.9: Fuerza vs. velocidad para diversos voltajes de entrada constantes.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 3

# Identificación paramétrica de estructuras con amortiguadores magneto-reológicos

La determinación del valor de los parámetros de una estructura puede constituir un problema difícil de resolver, aun cuando se utilicen modelos matemáticos simplificados. Conocer los valores nominales de las propiedades mecánicas de una estructura civil no es suficiente ya que éstos pueden modificarse por la influencia de diversos factores, como pueden ser las cargas de ocupación, el deterioro causado por cargas de viento y sismos de gran intensidad. La cuantificación de estas propiedades y de sus cambios es muy importante para evaluar daños y determinar así la confiabilidad de una estructura y, sobre todo, para predecir su respuesta dinámica a futuros sismos.

El objetivo de los métodos de identificación es caracterizar un sistema empleando únicamente la información disponible de las entradas y las salidas. Son dos los principales métodos que han sido usados en la identificación de estructuras civiles:

1. Métodos no paramétricos. Estos métodos no emplean explícitamente un conjunto finito de parámetros y en general conducen a representaciones entrada-salida en el dominio de la frecuencia (véase, por ejemplo, Luco (1980) y Safak (1995)).
2. Métodos paramétricos. Estos métodos se basan en un modelo que posee un conjunto finito de parámetros y cuya estructura está bien determinada. Los parámetros se estiman minimizando el error de salida entre el modelo y el sistema real en el dominio del tiempo (véase, por ejemplo,



Safak (1991); Li, Y. y Mau, S.T. (1991); Stewart, J. P. y Fenves, G. L. (1998); y Yi, F., Dyke, S.J., y Caicedo, J.M. (1999)).

En este capítulo se presenta un esquema de identificación en tiempo real para estructuras civiles con un amortiguador magneto-reológico como elemento de disipación de energía. El procedimiento de identificación propuesto se evalúa en ejemplos numéricos de estructuras de tres y seis grados de libertad.

En general, el comportamiento dinámico de los sistemas estructurales puede describirse de forma confiable a través de los primeros modos de vibración ya que son éstos los que tienen un peso más marcado en la dinámica de una estructura. Esta suposición permite no sólo obtener modelos matemáticos más simples sino también desarrollar esquemas de identificación paramétrica de menor orden.

Bajo esta hipótesis se propone la utilización de un esquema diseñado para una estructura de tres grados de libertad para determinar las dos primeras frecuencias naturales de una estructura de seis grados de libertad. Los resultados obtenidos muestran que el algoritmo propuesto tiene un buen desempeño, simplificando en gran medida el problema de caracterización de sistemas de múltiples grados de libertad.

### 3.1. Modelo de la estructura

El modelado matemático de un estructura civil es una tarea difícil ya que estos sistemas están compuestos por una gran cantidad de elementos cuyo comportamiento dinámico es muy variado. En la práctica se suele recurrir a aproximaciones lineales que describen parcialmente el comportamiento de la estructura; pero que son suficientemente buenas para las condiciones de operación más comunes.

Para el caso en estudio, las ecuaciones de movimiento del edificio se derivan de una estructura ideal ampliamente utilizada en el análisis de estructuras de varios grados de libertad (Clough, R.W. y Penzien, J. 1993; Chopra 1995). En este modelo, los pisos y los elementos de soporte horizontales (vigas) se consideran rígidos y también se toma como nula la deformación y los efectos elásticos en la dirección axial de vigas y columnas. Asimismo, se considera que la masa está concentrada en los niveles de piso de cada planta, es decir, el modelo es de parámetros concentrados. Esta última suposición es en general adecuada ya que en edificios de varios pisos la contribución de fuerzas de inercia se da principalmente en esos niveles. Se supone también que la disipación de energía en la

estructura está dada por un mecanismo de amortiguamiento viscoso que depende del movimiento relativo entre cada uno de los pisos. La fuerza ejercida por el movimiento sísmico en la base de la estructura es la única excitación considerada para el análisis dinámico del sistema. En la Figura 3.1 se muestra un esquema de la estructura en cuestión. Los grados de libertad considerados para el análisis son los desplazamientos de las masas en la misma dirección que el desplazamiento del suelo. La Figura 3.2 muestra el modelo mecánico equivalente.

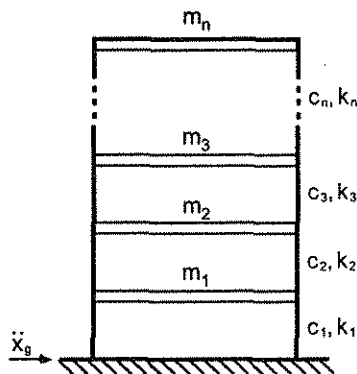


Figura 3.1: Estructura de  $n$  grados de libertad.

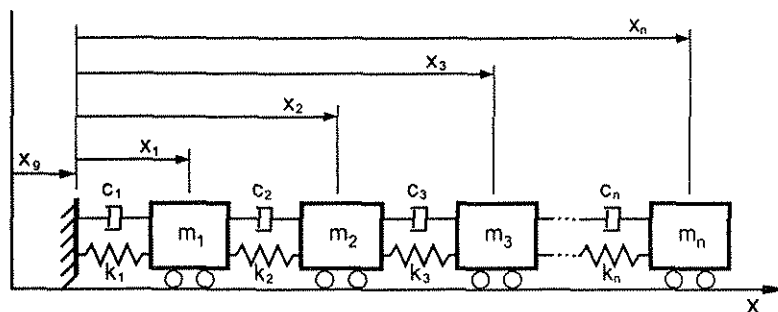


Figura 3.2: Modelo mecánico de  $n$  grados de libertad.

El desplazamiento absoluto de la masa  $m_i$  está dado por la suma algebraica del desplazamiento total del suelo, denotado por  $x_g$ , y el desplazamiento relativo de la masa con respecto al suelo, denotado por  $x_i$ , es decir,

$$x_{ti} = x_i + x_g . \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de continuidad que rigen al sistema están dadas por la suma de fuerzas que actúan sobre cada masa

$$f_{m_i} = f_{k_i} + f_{c_i} - f_{k_{i-1}} - f_{c_{i-1}} \quad (3.2)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

y las ecuaciones constitutivas de los elementos dinámicos que intervienen en este modelo son:

$$f_{m_1} = m_1 \ddot{x}_{t_1} \quad f_{c_1} = c_1 \dot{x}_1 \quad f_{k_1} = k_1 x_1 \quad (3.3a)$$

$$f_{m_2} = m_2 \ddot{x}_{t_2} \quad f_{c_2} = c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad f_{k_2} = k_2 (x_2 - x_1) \quad (3.3b)$$

$$f_{m_3} = m_3 \ddot{x}_{t_3} \quad f_{c_3} = c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad f_{k_3} = k_3 (x_3 - x_2) \quad (3.3c)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{m_n} = m_n \ddot{x}_{t_n} \quad f_{c_n} = c_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) \quad f_{k_n} = k_n (x_n - x_{n-1}) \quad (3.3d)$$

donde  $n$  es el número de pisos;  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  es la masa del  $i$ -ésimo piso;  $c_i$  y  $k_i$  son los coeficientes de amortiguamiento viscoso y de rigidez mecánica, respectivamente; y finalmente,  $\dot{x}_i$  y  $\ddot{x}_i$  son la velocidad y la aceleración del  $i$ -ésimo piso, respectivamente. Al sustituir (3.3a-d) en (3.2) se tiene

$$m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) = k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 \quad (3.4a)$$

$$m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) = k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3.4b)$$

$$m_3(\ddot{x}_3 + \ddot{x}_g) = k_4(x_4 - x_3) + c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \quad (3.4c)$$

$$\vdots$$

$$m_n(\ddot{x}_n + \ddot{x}_g) = -k_n(x_n - x_{n-1}) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) \quad (3.4d)$$

donde  $\ddot{x}_g$  es la aceleración del terreno inducida por el sismo. Las ecuaciones (3.4a-d) se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{x}_g \quad (3.5)$$

donde

$$M = M^T = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} > 0,$$

$$C = C^T = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \dots & 0 \\ 0 & c_{23} & c_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n,n} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$K = K^T = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \dots & 0 \\ 0 & k_{23} & k_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix} > 0.$$

En la ecuación (3.5), el término  $-M\ddot{x}_g$  es la fuerza efectiva ejercida por el sismo. Como se puede observar, la matriz  $M$ , es una matriz diagonal positiva definida mientras que las matrices  $C$  y  $K$  poseen una estructura de banda y son positiva semi-definida y positiva definida, respectivamente.

### 3.2. Identificación paramétrica de la estructura

Si se considera que se dispone de las aceleraciones de todos los pisos, la identificación en tiempo real del modelo puede realizarse utilizando en forma directa cualquier método recursivo de identificación para modelos lineales en los parámetros.

Considérese el caso del primer piso. De (3.5), la ecuación asociada a la masa  $m_1$  es

$$m_1\ddot{x}_1 + c_{11}\dot{x}_1 + c_{12}\dot{x}_2 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = -m_1\ddot{x}_g, \quad (3.6)$$

donde  $c_{1j}$  y  $k_{1j}$ ,  $j = 1, 2$ , son los elementos no nulos del primer renglón de las matrices  $C$  y  $K$ , respectivamente. Dividiendo la ecuación (3.6) por  $m_1$  se obtiene la siguiente estructura lineal en los parámetros

$$-(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \theta_{14} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{m_1} & \frac{c_{12}}{m_1} & \frac{k_{11}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} \end{bmatrix}^T; \quad (3.8)$$

o bien,

$$Y_1 = \Phi_1 \Theta_1, \quad (3.9)$$

donde

$$Y_1 = -(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) \quad (3.10)$$

y

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Dada la estructura que presentan las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$ , la ecuación (3.9) puede generalizarse para los pisos restantes de la siguiente forma:

$$Y_p = \Phi_p \Theta_p, \quad (3.12)$$

donde  $1 < p < n$ ,

$$Y_p = -(\ddot{x}_p + \ddot{x}_g), \quad (3.13)$$

$$\Phi_p = \begin{bmatrix} \dot{x}_{p-1} & \dot{x}_p & \dot{x}_{p+1} & x_{p-1} & x_p & x_{p+1} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

y

$$\Theta_p = \begin{bmatrix} \theta_{p1} & \theta_{p2} & \theta_{p3} & \theta_{p4} & \theta_{p5} & \theta_{p6} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{c_{p,p-1}}{m_p} & \frac{c_{p,p}}{m_p} & \frac{c_{p,p+1}}{m_p} & \frac{k_{p,p-1}}{m_p} & \frac{k_{p,p}}{m_p} & \frac{k_{p,p+1}}{m_p} \end{bmatrix}^T. \quad (3.15)$$

Por último, para el piso  $n$  las ecuaciones (3.14) y (3.15) se simplifican de la siguiente forma:

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \dot{x}_{n-1} & \dot{x}_n & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

y

$$\Theta_n = \begin{bmatrix} \theta_{n1} & \theta_{n2} & \theta_{n3} & \theta_{n4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{c_{n,n-1}}{m_n} & \frac{c_{n,n}}{m_n} & \frac{k_{n,n-1}}{m_n} & \frac{k_{n,n}}{m_n} \end{bmatrix}^T. \quad (3.17)$$

De lo anterior se puede ver que para este esquema se requiere determinar un total de  $6n - 4$  parámetros lo cual puede resultar inconveniente para edificios de varios pisos.

Para constatar el desempeño del esquema de identificación se recurrió a la simulación numérica de una estructura de tres grados de libertad con una excitación sísmica dada por el registro de aceleración N-S del sismo El Centro<sup>1</sup>, del año 1940. En la Figura 3.3 se muestra el registro de aceleración del terreno.

<sup>1</sup>Tomado de <http://www.nd.edu/~quake/smd/elcen.txt> (Departamento de Control Estructural de la Universidad de Notre Dame).

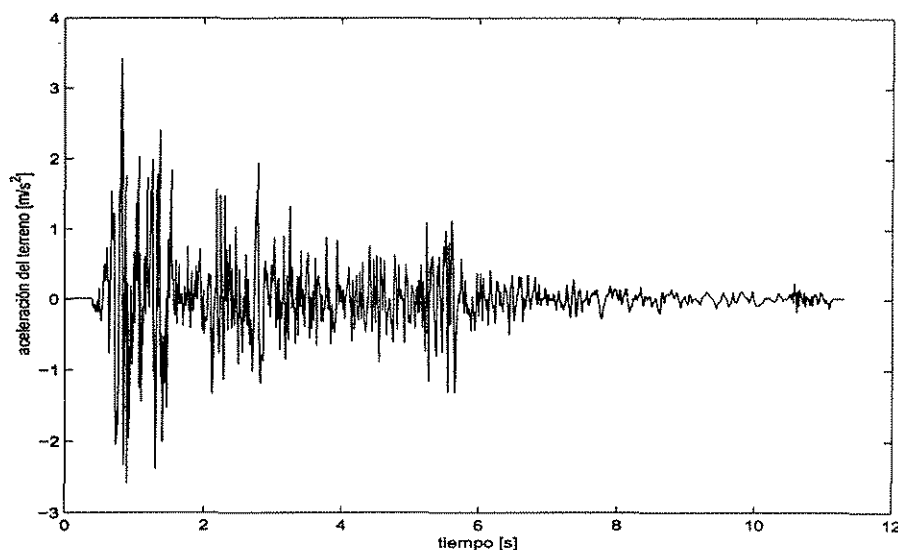


Figura 3.3: Componente N-S del sismo El Centro.

Los parámetros nominales del modelo son los siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} 98.3 & 0 & 0 \\ 0 & 98.3 & 0 \\ 0 & 0 & 98.3 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad C = \begin{bmatrix} 175 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & -50 \\ 0 & -50 & 50 \end{bmatrix} \frac{N \cdot s}{m},$$

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 12 & -6.84 & 0 \\ -6.84 & 13.7 & -6.84 \\ 0 & -6.84 & 6.84 \end{bmatrix} \frac{N}{m},$$

los cuales corresponden a un modelo a escala de una estructura de tres pisos. Para esta estructura, las frecuencias naturales no amortiguadas  $\omega_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , son

$$\omega_1 = 34 \text{ [rad/s]}, \quad \omega_2 = 99 \text{ [rad/s]}, \quad \omega_3 = 149 \text{ [rad/s]},$$

o bien, dividiendo por  $2\pi$ ,

$$f_1 = 5.456 \text{ [Hz]}, \quad f_2 = 15.810 \text{ [Hz]}, \quad f_3 = 23.637 \text{ [Hz]}.$$

Las frecuencias naturales  $\omega_r$  corresponden a la parte imaginaria de los valores propios<sup>2,3</sup>  $\lambda_r =$

<sup>2</sup>véase Meirovitch (1967) pp. 412-415.

<sup>3</sup>Cuando  $\tau_r$  es muy cercano a cero, las frecuencias naturales amortiguadas  $w_{r,d}$  son similares a las frecuencias naturales del sistema.

$-\tau_r + j\omega_r$ , de la matriz

$$A_r = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}.$$

Con los datos del modelo, la expresión (3.8) toma los siguientes valores

$$[\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}]^T = [1.78, -0.51, 1.22 \times 10^4, -6.96 \times 10^3]^T. \quad (3.18)$$

El registro sísmico fue escalado en el tiempo con una reducción de 1:5 para que los resultados fueran congruentes con la escala del modelo de la estructura<sup>4</sup>. La identificación de los parámetros se llevó a cabo a través de la ley de adaptación de mínimos cuadrados con factor de olvido (Ljung 1987). En la Figura 3.4 se muestra la evolución de los parámetros correspondientes al primer piso de la estructura. La convergencia de los parámetros estimados se da en aproximadamente 0.5 [s], aunque

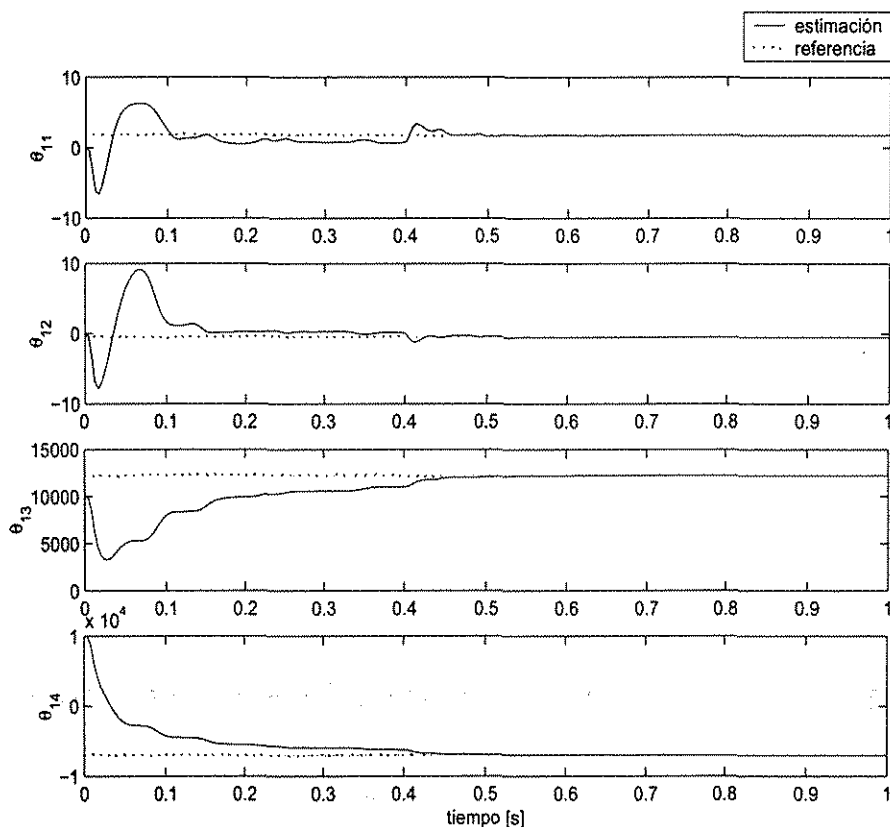


Figura 3.4: Evolución de los parámetros del primer piso de la estructura de tres grados de libertad sin amortiguador magneto-reológico (expresión (3.8)).

desde los 0.3 [s] los valores son cercanos a los reales. El desempeño del esquema de identificación

<sup>4</sup>Esto es, que el registro sísmico completo tendrá una duración igual a la quinta parte de la duración real.

Tabla 3.1: Error porcentual entre el valor real de los parámetros y el valor estimado en la identificación paramétrica de una estructura de seis grados de libertad.

|               | Valor real          | Valor estimado      | $E_r$ [%] |
|---------------|---------------------|---------------------|-----------|
| $\theta_{11}$ | 1.78                | 1.67                | 0.73      |
| $\theta_{12}$ | -0.51               | -0.36               | 2.63      |
| $\theta_{13}$ | $1.22 \times 10^4$  | $1.21 \times 10^4$  | 0.91      |
| $\theta_{14}$ | $-6.96 \times 10^3$ | $-6.89 \times 10^3$ | 1.03      |

puede apreciarse mejor a través del error porcentual entre el valor nominal de los parámetros y el valor estimado de éstos. La tabla 3.1 muestra los errores porcentuales finales que se obtienen después de 0.5 [s] de simulación.

El error porcentual, denotado por  $E_r$ , se calculó de la siguiente forma

$$E_r = 100 \left| \frac{\text{valor estimado} - \text{valor real}}{\text{valor real}} \right| [\%]. \quad (3.19)$$

### 3.3. Identificación paramétrica de la estructura y del amortiguador

En la Figura 3.5 se muestra un esquema del modelo completo de la estructura con un amortiguador magneto-reológico colocado entre el primer piso y el suelo<sup>5</sup>, el cual contribuye en forma paralela al amortiguamiento viscoso de la estructura. Para el caso en consideración, el comportamiento del amortiguador se rige por el desplazamiento del primer piso, por lo que su modelo toma la siguiente forma:

$$f_{MR} = \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}_1, \quad (3.20a)$$

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| z (1 + a_1 v), \quad (3.20b)$$

donde  $f_{MR}$  es la fuerza del amortiguador,  $z$  es una variable interna que modela la dinámica del fluido magneto-reológico y  $v$  es el voltaje aplicado.

Tomando en cuenta la participación del amortiguador magneto-reológico, el balance de fuerzas que actúan sobre la masa  $m_1$  está dado por

$$f_{m_1} = f_{k_2} + f_{c_2} - f_{k_1} - f_{c_1} - f_{MR}. \quad (3.21)$$

<sup>5</sup>En la práctica se usaría un amortiguador diseñado para aplicaciones civiles (Capítulo 2) cuyo cilindro se podría fijar horizontalmente a la cadena de cimentación y los extremos del émbolo se fijarían a soportes verticales colocados en la trabe del primer piso.



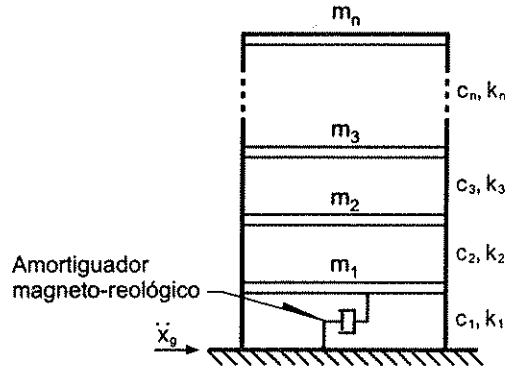


Figura 3.5: Estructura de  $n$  grados de libertad con un amortiguador magneto-reológico.

Sustituyendo (3.3a-b) y (3.20a-b) en (3.21), y reordenando se obtiene lo siguiente

$$-m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) = \sigma_0 z v - \sigma_0 \sigma_1 a_0 |\dot{x}_1| z - \sigma_0 \sigma_1 a_0 a_1 |\dot{x}_1| z v + (\sigma_1 + \sigma_2 + c_{11}) \dot{x}_1 + c_{12} \dot{x}_2 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2, \quad (3.22)$$

dando lugar a la siguiente reparametrización:

$$Y_1 = \Phi_{1MR} \Theta_{1MR}, \quad (3.23)$$

donde

$$\Phi_{1MR} = \begin{bmatrix} z v - |\dot{x}_1| z - |\dot{x}_1| z v & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

y

$$\begin{aligned} \Theta_{1MR} &= \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} & \theta_{15} & \theta_{16} & \theta_{17} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{m_1} & \frac{\sigma_0 \sigma_1 a_0}{m_1} & \frac{\sigma_0 \sigma_1 a_0 a_1}{m_1} & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + c_{11}}{m_1} & \frac{c_{12}}{m_1} & \frac{k_{11}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

Las ecuaciones (3.13)-(3.17) siguen siendo válidas para los pisos superiores.

Una vez que se tiene el modelo de la estructura en la forma paramétrica lineal (3.23), la aplicación del algoritmo de mínimos cuadrados es directa.

Como se vio en el Capítulo 2, el estado  $z$  no puede medirse directamente por lo que se requiere un observador que, para el caso en consideración, toma la siguiente forma:

$$\dot{\hat{z}} = \dot{x}_1 - \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 |\dot{x}_1| \hat{z} (1 + \hat{a}_1 v), \quad (3.26)$$

donde nuevamente  $\hat{z}$  es el valor estimado de  $z$  y  $\hat{\sigma}_0$ ,  $\hat{a}_0$  y  $\hat{a}_1$  son los parámetros estimados a través del algoritmo de identificación. Para poder determinar en forma única estos parámetros, el valor de  $\frac{\sigma_2 + c_{11}}{m_1}$  se supone conocido, de tal forma que

$$\hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 = \frac{\hat{\theta}_{12}}{\hat{\theta}_{14} - \frac{\sigma_2 + c_{11}}{m_1}} \quad (3.27)$$

y

$$\hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1 = \frac{\hat{\theta}_{13}}{\hat{\theta}_{14} - \frac{\sigma_2 + c_{11}}{m_1}}, \quad (3.28)$$

donde  $\hat{\theta}_{14} - \frac{\sigma_2 + c_{11}}{m_1}$  es truncado por un algoritmo de proyección que evita que este parámetro eventualmente sea cero.

Los resultados de la simulación numérica para la estructura de la sección anterior se muestran en las Figuras 3.6 a 3.11. En este caso, la excitación sísmica también está dada por el registro N-S de El Centro. El voltaje de excitación para el amortiguador fue

$$v = 1.12 \text{sen}(37.7t) + 1.12 [V]. \quad (3.29)$$

La Figura 3.6 muestra la evolución de los parámetros del amortiguador magneto-reológico mientras que la Figura 3.8 presenta los parámetros del primer piso de la estructura. También se presentan los errores porcentuales de cada uno de estos parámetros (designados por  $Er_{\theta_i}$ ) en las Figuras 3.7 y 3.9. La convergencia de los parámetros del amortiguador depende en gran medida de la estimación inicial de éstos. En los experimentos de simulación se observó que la sobreestimación de los valores iniciales conduce a mejores resultados. La Figura 3.10 muestra un buen seguimiento de la fuerza ejercida por el amortiguador.

En general, la convergencia de los parámetros de la estructura es buena, aunque es más lenta que en el caso de la estructura sin amortiguador. Los parámetros  $\theta_{14}$  y  $\theta_{15}$  no convergen a los valores de referencia y presentan un error constante a partir de aproximadamente un segundo. Sin embargo, estos parámetros no afectan el comportamiento global del sistema, como se puede apreciar en la Figura 3.11 donde se muestra que el cálculo de las frecuencias naturales converge a los valores reales en aproximadamente 1.2 [s]. La Tabla 3.2 muestra los valores finales de las frecuencias naturales reales y las frecuencias estimadas del sistema las cuales fueron calculadas en cada instante de tiempo a partir de los parámetros estimados correspondientes al modelo lineal de la estructura, es decir, despreciando la contribución del modelo no lineal del amortiguador.

Tabla 3.2: Valores finales de las frecuencias naturales de la estructura de tres grados de libertad.

|       | Valor real [Hz] | Valor estimado [Hz] | Er [%] |
|-------|-----------------|---------------------|--------|
| $f_1$ | 5.456           | 5.453               | 0.055  |
| $f_2$ | 15.810          | 15.769              | 0.259  |
| $f_3$ | 23.637          | 23.605              | 0.135  |

### 3.4. Convergencia paramétrica

La prueba de convergencia del esquema de identificación de los parámetros de la estructura y del amortiguador es muy similar a la que se presenta en el capítulo anterior<sup>6</sup>. Para el caso en estudio, la convergencia de los parámetros correspondientes al primer piso está íntimamente relacionada con la convergencia del estado estimado  $\hat{z}$ , por lo que en esta sección se analizará exclusivamente este caso. La convergencia de los parámetros de la estructura correspondientes a los pisos en los que no se tiene colocado un amortiguador magneto-reológico se garantiza si la excitación es persistente<sup>7</sup>.

Considérese la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V = V_1 + V_2 \quad (3.30)$$

donde

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T P^{-1} \tilde{\Theta} \quad (3.31)$$

y

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{z}^2 \quad (3.32)$$

son funciones positivas definidas en las que  $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$  es el error paramétrico y  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  es el error de observación<sup>8</sup>. Al igual que en la Sección 2.5 del capítulo anterior, para facilitar el desarrollo de la prueba de estabilidad, las funciones  $V_1$  y  $V_2$  se tratarán por separado.

El algoritmo de identificación está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{P} = \alpha P - P \hat{\Phi}^T \hat{\Phi} P, \quad (3.33a)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = P \hat{\Phi}^T \tilde{Y}. \quad (3.33b)$$

La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.31) puede escribirse como

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \hat{\Phi}^T \tilde{Y} - \frac{1}{2} \tilde{Y}^T \hat{\Phi} \tilde{\Theta} + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T \dot{P}^{-1} \tilde{\Theta}, \quad (3.34)$$

<sup>6</sup>Puede consultarse también Álvarez, L. y Jiménez, R. (2002).

<sup>7</sup>Se espera que en general esta condición se satisfaga ya que los sismos poseen un gran contenido de frecuencias.

<sup>8</sup>Por simplicidad en la notación, en esta sección se considera  $Y = Y_1$ ,  $\Theta = \Theta_{1MR}$  y  $\Phi = \Phi_{1MR}$ .

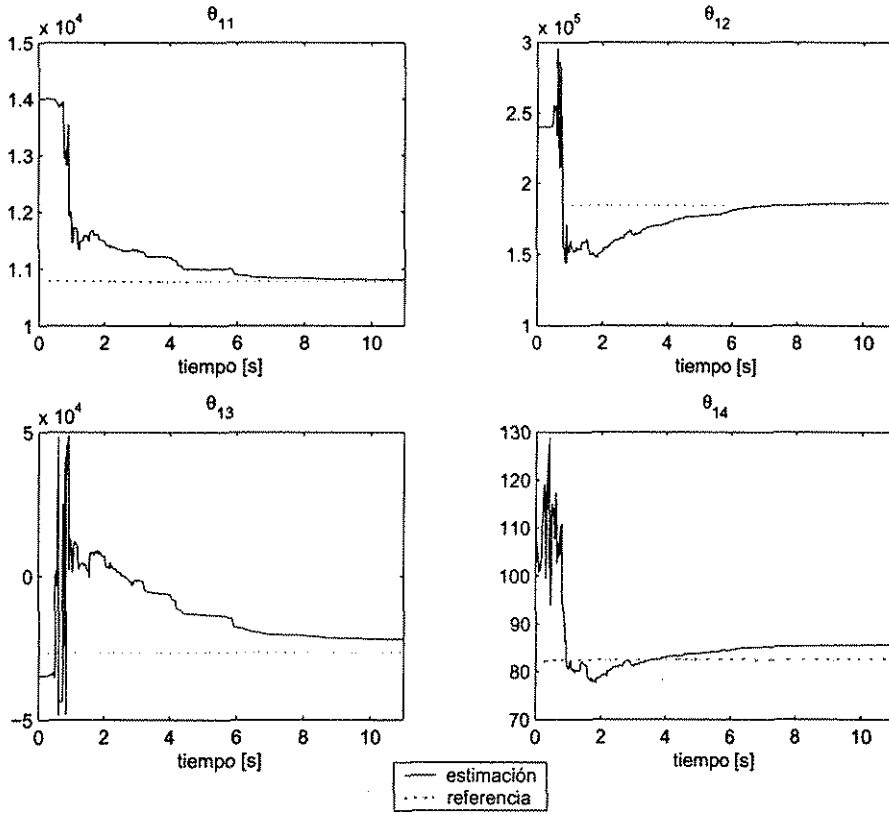


Figura 3.6: Parámetros estimados del amortiguador magneto-reológico en una estructura de tres grados de libertad (expresión (3.25)).

donde  $\tilde{Y} = Y - \hat{Y}$  es el error en la salida del esquema de identificación que satisface la siguiente igualdad

$$\tilde{Y} = \Phi\Theta - \hat{\Phi}\Theta = \tilde{\Phi}\Theta + \hat{\Phi}\tilde{\Theta}. \quad (3.35)$$

Tomando en cuenta que  $\dot{P}^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$  y la ecuaciones (3.33a) y (3.35), la ecuación (3.34) queda de la siguiente manera

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T\hat{\Phi}^T\hat{\Phi}\tilde{\Theta} - \frac{1}{2}\alpha\tilde{\Theta}^T\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^T\hat{\Phi}^T\Phi\Theta\tilde{z} = -\left(\tilde{\Theta}^TW_1\tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^TW_2\tilde{z}\right), \quad (3.36)$$

donde

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{\Phi}^T\hat{\Phi} + \alpha P^{-1}\right), \quad (3.37)$$

$$W_2 = \hat{\Phi}^T\phi_1\Theta \quad (3.38)$$

y

$$\phi_1 = [v \ -|\dot{x}_1| \ -|\dot{x}_1|v \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.39)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

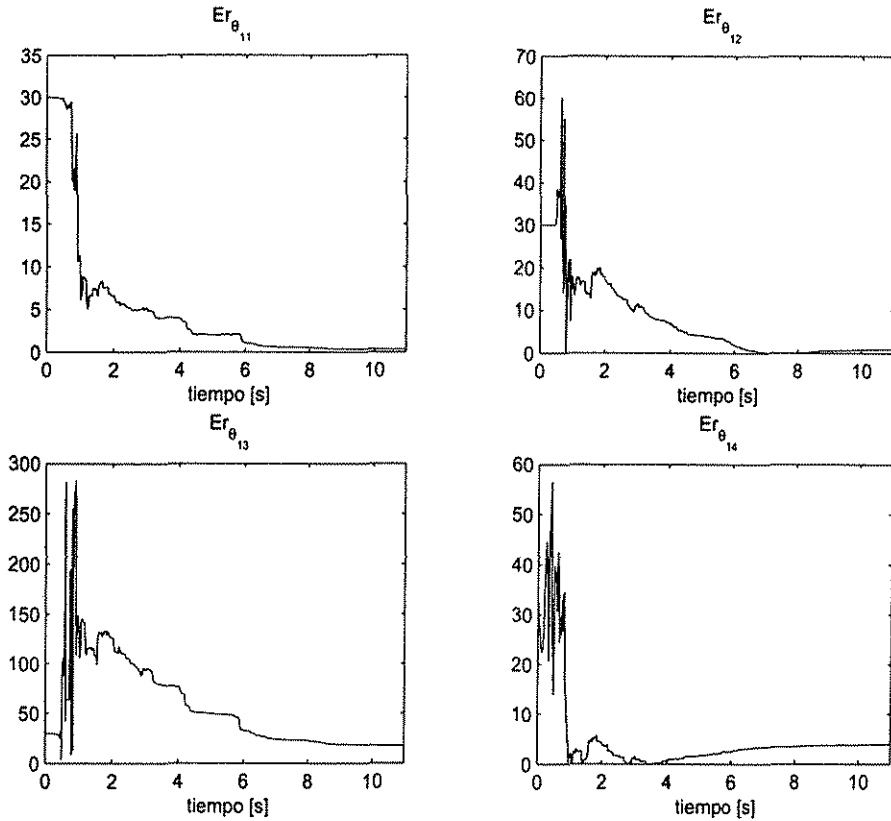


Figura 3.7: Error porcentual en la estimación de los parámetros del amortiguador magneto-reológico.

Considérese ahora la ecuación (3.32). De la ecuación (3.20b), la variación con respecto al tiempo del error de observación está dada por

$$\dot{\hat{z}} = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| z - \sigma_0 a_0 a_1 |\dot{x}_1| z v + \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 |\dot{x}_1| \hat{z} + \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1 |\dot{x}_1| \hat{z} v. \quad (3.40)$$

Sumando y restando los términos  $\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| \hat{z}$  y  $\sigma_0 a_0 a_1 |\dot{x}_1| \hat{z} v$  a la ecuación (3.40) y evaluando la derivada de (3.32) con respecto al tiempo se llega a

$$\dot{V}_2 = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \hat{z}^2 - \widetilde{\sigma}_0 \widetilde{a}_0 |\dot{x}_1| \hat{z} \hat{z} - \widetilde{\sigma}_0 \widetilde{a}_0 a_1 |\dot{x}_1| \hat{z} \hat{z} v. \quad (3.41)$$

Los dos últimos términos de la ecuación (3.41) pueden ser expresados en términos de valores

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

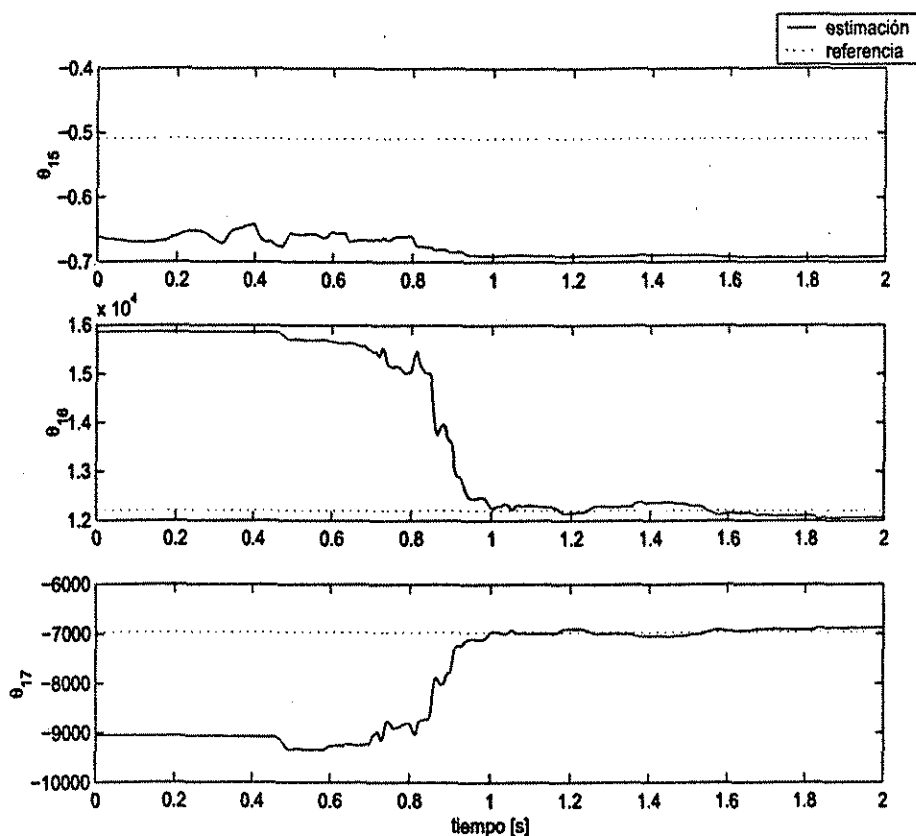


Figura 3.8: Parámetros estimados del primer piso de la estructura de tres grados de libertad con un amortiguador magneto-reológico.

conocidos. Utilizando la ecuación (3.27), el término  $\widetilde{\sigma_0 a_0}$  puede expresarse de la siguiente manera

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0} = \hat{\sigma}_0 \hat{a}_0 - \sigma_0 a_0 \quad (3.42)$$

$$= \frac{\hat{\theta}_{12}}{\hat{\theta}_{14} - \delta} - \frac{\theta_{12}}{\theta_{14} - \delta} \quad (3.43)$$

$$= \frac{\delta \bar{\theta}_{12} + \theta_{14} \hat{\theta}_{12} - \hat{\theta}_{14} \theta_{12}}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)}, \quad (3.44)$$

donde  $\delta = \frac{\sigma_2 + c_{11}}{m_1}$ . Sustituyendo  $\hat{\theta}_{12} = \theta_{12} - \bar{\theta}_{12}$  en (3.44) y haciendo las operaciones pertinentes se tiene lo siguiente

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0} = \frac{(\delta - \theta_{14})\bar{\theta}_{12} + \theta_{12}\hat{\theta}_{14}}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)} \quad (3.45)$$

$$= -\frac{1}{\hat{\theta}_{14} - \delta} \bar{\theta}_{12} + \frac{\theta_{12}}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)} \hat{\theta}_{14}. \quad (3.46)$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtiene una expresión equivalente para el producto

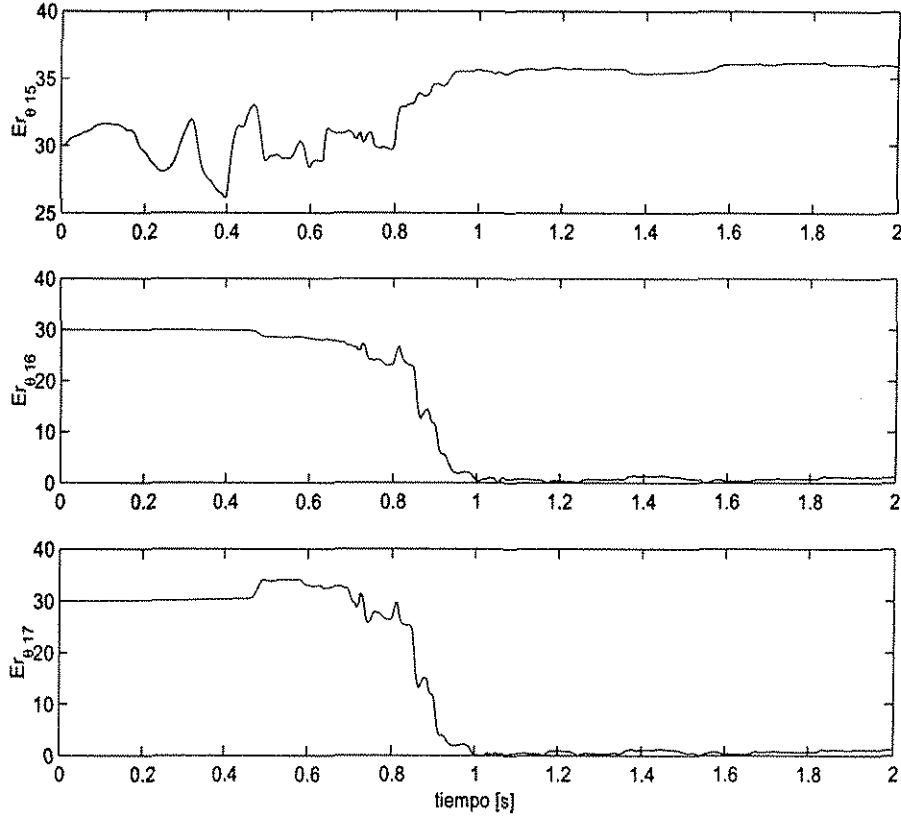


Figura 3.9: Error porcentual en la estimación de los parámetros del primer piso.

$$-\widetilde{\sigma_0 a_0 a_1} = -\frac{1}{\hat{\theta}_{14} - \delta} \tilde{\theta}_{13} + \frac{\theta_{13}}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)} \tilde{\theta}_{14}. \quad (3.47)$$

Con el desarrollo algebraico anterior se logra expresar la ecuación (3.41) de la siguiente manera

$$\dot{V}_2 = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \tilde{z}^2 + |\dot{x}_1| \tilde{z} \left[ -\frac{1}{\hat{\theta}_{14} - \delta} \tilde{\theta}_{12} - \frac{v}{\hat{\theta}_{14} - \delta} \tilde{\theta}_{13} + \frac{\theta_{12} + \theta_{13} v}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)} \tilde{\theta}_{14} \right] \tilde{z} \quad (3.48)$$

$$= -W_3 \tilde{\Theta} \tilde{z} - W_4 \tilde{z}^2, \quad (3.49)$$

donde

$$W_3 = \left[ 0, \frac{1}{\hat{\theta}_{14} - \delta}, \frac{1}{\hat{\theta}_{14} - \delta} v, -\frac{\theta_{12} + \theta_{13} v}{(\hat{\theta}_{14} - \delta)(\theta_{14} - \delta)} \right] |\dot{x}_1| \tilde{z} \quad (3.50)$$

y

$$W_4 = \sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v). \quad (3.51)$$

De las ecuaciones (3.36) y (3.49), la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.30) toma

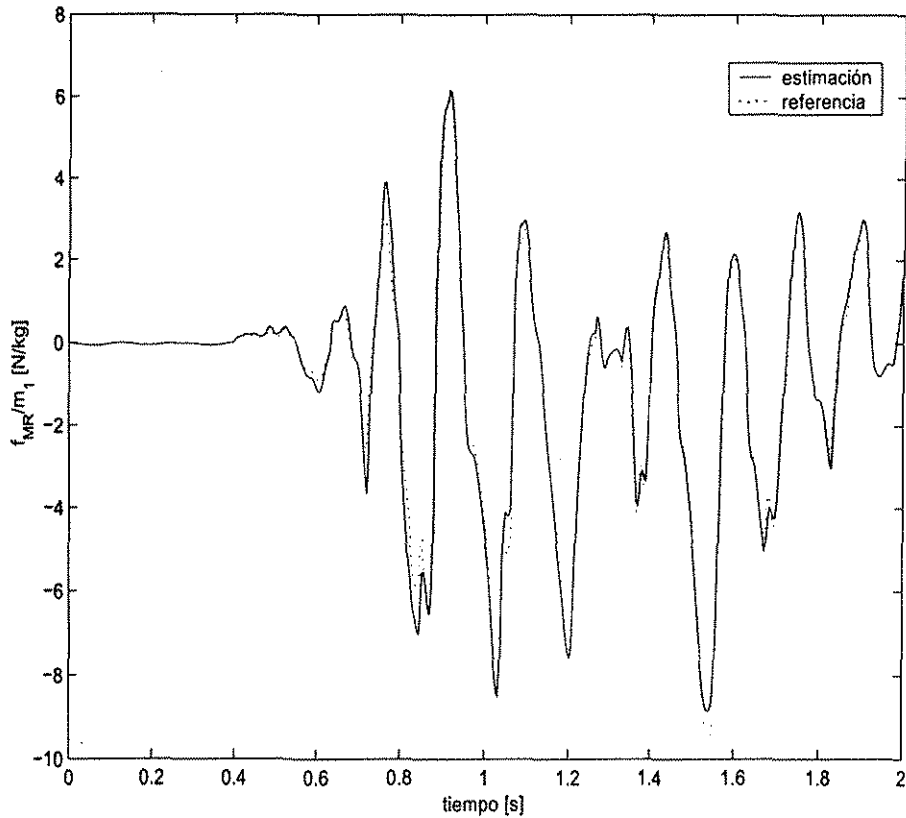


Figura 3.10: Estimación de la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico (estructura de tres grados de libertad).

la siguiente forma

$$\dot{V} = - \left( \tilde{\Theta}^T W_1 \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T W_2 \tilde{z} + W_3 \tilde{\Theta} \tilde{z} + W_4 \tilde{z}^2 \right), \quad (3.52)$$

o bien

$$\dot{V} \leq - \left( \tilde{\Theta}^T \bar{W}_1 \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T W_2 \tilde{z} + W_3 \tilde{\Theta} \tilde{z} + W_4 \tilde{z}^2 \right), \quad (3.53)$$

donde  $\bar{W}_1 = \hat{\Phi}^T \hat{\Phi}$ , si se desprecia el término  $\alpha P^{-1}$  en (3.37).

La expresión (3.53) constituye una forma cuadrática dada por

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}^T & \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W}_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

en la que los determinantes principales de  $\begin{bmatrix} \bar{W}_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}$  son todos iguales a cero, excepto el de menor orden que es igual a  $v^2 \tilde{z}^2 > 0$ , con lo que se concluye que (3.54) es negativa semidefinida,



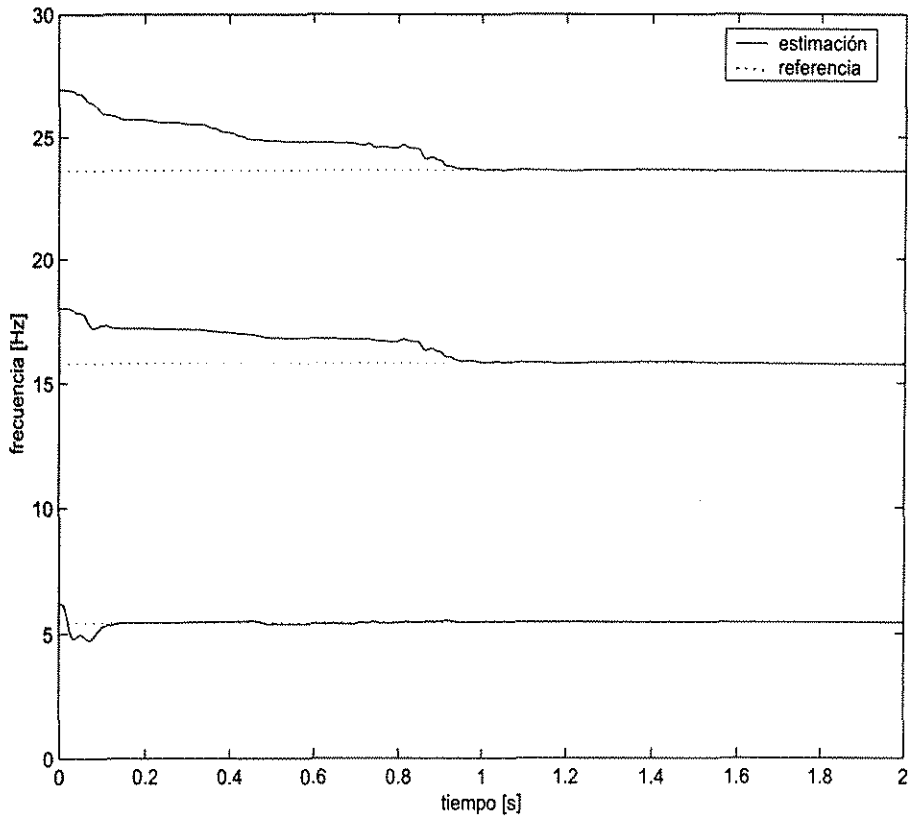


Figura 3.11: Estimación de las frecuencias naturales de vibración (estructura de tres grados de libertad).

demostrándose así que los puntos  $\tilde{\Theta} = 0$  y  $\tilde{z} = 0$  son estables y, al igual que en el capítulo anterior, utilizando el Lema de Barbălat se puede concluir que  $\tilde{f} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Nuevamente, si la fuerza inducida por la onda sísmica constituye una excitación persistente,  $\tilde{\Theta} \rightarrow 0$ .

### 3.5. Estimación de las frecuencias dominantes de la estructura

Uno de los problemas que surgen cuando se analizan estructuras civiles de múltiples grados de libertad es que el cálculo de las frecuencias naturales y de los modos de vibración se vuelve muy difícil debido a las dimensiones de las matrices del sistema. En el caso de la identificación de parámetros, la dimensión del modelo también constituye una limitante en la implantación de los algoritmos. Tal es el caso del método visto en las secciones anteriores, cuya aplicación puede hacerse difícil para edificios de varios pisos dado que requiere de tantas mediciones como grados de libertad

se tengan en la estructura. Sin embargo, el método propuesto en las secciones anteriores puede utilizarse para obtener aproximaciones de los primeros modos de vibración<sup>9</sup> como se mostrará más adelante.

En la mayoría de los casos, la respuesta dinámica de una estructura puede representarse adecuadamente utilizando sólo los primeros modos de vibración los cuales pueden encontrarse a partir de un modelo simplificado con un número reducido de grados de libertad. Los parámetros correspondientes a los tres primeros modos de vibración se consideran más confiables que aquéllos de los modos restantes, dada su presencia más marcada en el comportamiento dinámico de la estructura (Li, Y. y Mau, S.T. 1991).

Recientes investigaciones (Stewart, J. P. y Fenves, G. L. 1998) muestran que varios registros obtenidos en diferentes puntos dentro una estructura presentan un comportamiento muy parecido, por lo que en la mayoría de los casos es adecuado considerar sólo las variables del último piso para la identificación de los modos de vibración más importantes. Lo anterior permite reducir el número de mediciones requeridas en el proceso de identificación a tal grado que, por ejemplo, si se tiene interés únicamente sobre el primer modo de vibración, el esquema de identificación puede reducirse al caso de un sistema de un grado de libertad.

La eliminación de grados de libertad también está justificada desde el punto de vista teórico. Existen varios métodos para reducir el número de grados de libertad (Clough, R.W. y Penzien, J. 1993; Chopra 1995; Paz 1997), de los cuales, los métodos propuestos por Paz (1997) para reducir las matrices dinámicas son los más simples. Paz (1997) presenta una extensión del método de condensación estática para reducir las matrices de una estructura en problemas dinámicos. Este método es muy atractivo por su simplicidad y porque los parámetros modales que se obtienen con él son razonablemente buenos.

Para justificar la hipótesis de la identificación de las primeras frecuencias de una estructura a través de un esquema de menor orden, considérese el método de condensación estática simple (Paz 1997). Este método consiste en encontrar una transformación de coordenadas que relaciona los  $p$  grados de libertad que serán reducidos con los  $q$  grados de libertad que se considerarán independientes. El procedimiento de condensación se lleva a cabo a través del método de eliminación de

---

<sup>9</sup>véase (Loh, C.H. y Tou, I.C. 1995).

Gauss-Jordan de tal forma que la ecuación de rigidez pueda arreglarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I & -\bar{T} \\ 0 & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_p \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_q \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

donde  $y_p$  es el vector de desplazamientos correspondiente a los  $p$  grados de libertad que serán reducidos y  $y_q$  es el vector correspondiente a los  $q$  grados de libertad considerados como independientes. La expresión (3.55) es equivalente a las relaciones siguientes:

$$y_p = \bar{T}y_q, \quad (3.56)$$

$$\bar{K}y_q = F_q. \quad (3.57)$$

La ecuación (3.56) expresa la relación estática entre las coordenadas  $y_p$  y  $y_q$  y puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} y_p \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ I \end{bmatrix} y_q \quad (3.58)$$

o bien,

$$y = Ty_q \quad (3.59)$$

donde

$$y = \begin{bmatrix} y_p \\ y_q \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ I \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

La ecuación (3.57) es la ecuación de rigidez en su versión reducida y establece la relación entre las coordenadas  $y_q$  y las fuerzas  $F_q$  que actúan sobre las masas cuyos desplazamientos corresponden a los grados de libertad independientes.  $\bar{K}$  representa la matriz de rigidez reducida y puede ser expresada como una transformación de la matriz  $K$  dada por la siguiente expresión:

$$\bar{K} = T^T K T. \quad (3.61)$$

La reducción de las matrices  $M$  y  $C$  del sistema se hace suponiendo que la transformación  $T$  es válida para el caso dinámico, dando como resultado las siguientes expresiones:

$$\bar{M} = T^T M T \quad (3.62)$$

y

$$\bar{C} = T^T C T, \quad (3.63)$$

donde  $T$  está dada por la ecuación (3.60). La justificación de este método se basa en un análisis de las energías potencial y cinética de la estructura y puede consultarse en (Paz 1997).

Con el objetivo de evaluar el comportamiento de un esquema reducido se recurrió a un análisis en simulación numérica en el cual, el esquema de identificación de tres grados de libertad desarrollado en la sección anterior fue aplicado a una estructura civil de seis grados de libertad bajo la hipótesis de que el comportamiento dinámico de una estructura está regido por los primeros modos de vibración, como ya se mencionó anteriormente. Este esquema de identificación simplificado resulta muy atractivo ya que requiere únicamente de tres mediciones independientes. Las mediciones de aceleración del primero y segundo pisos resultan indispensables dado que el amortiguador se encuentra colocado entre el primer piso y la planta baja, y la identificación de sus parámetros requiere de estas mediciones<sup>10</sup>. Para determinar la tercera medición requerida por el algoritmo de identificación se realizaron diferentes experimentos para determinar cuál de las aceleraciones de los pisos restantes (3, 4, 5 o 6) funciona mejor en combinación con las mediciones de los dos primeros pisos. Las excitaciones tanto de la estructura como del amortiguador son idénticas a las empleadas en la secciones anteriores.

En la Figura 3.12 se puede observar que los parámetros del amortiguador permanecen acotados pero no todos convergen a un valor constante aunque el seguimiento de la fuerza ejercida por el amortiguador es razonablemente bueno, como se muestra en la Figura 3.13. La evolución de los parámetros del primer piso se presenta en la Figura 3.14; en este caso, los parámetros encontrados corresponden al modelo reducido de tres grados de libertad, que mejor se ajusta al comportamiento de la estructura de seis grados de libertad.

En la Figura 3.15 se puede observar que la aplicación del esquema de identificación de tres grados de libertad en una estructura de seis grados de libertad conduce a excelentes resultados en la determinación de las dos primeras frecuencias de vibración, evitándose así la necesidad de determinar el valor de los parámetros restantes de la estructura. Diferentes experimentos utilizando combinaciones de las aceleraciones de los pisos 1 y 2 con las aceleraciones de los pisos 3, 4, 5 y 6 mostraron que los mejores resultados se obtienen con la aceleración del último piso, como se puede ver en la Tabla 3.3. La Tabla 3.4 presenta una comparación entre las frecuencias obtenidas en la identificación en línea y las frecuencias que se obtienen a través del método de condensación antes expuesto.

---

<sup>10</sup>véase la ecuación (3.24).

Tabla 3.3: Frecuencias estimadas a través del esquema de identificación reducido, empleando diferentes combinaciones de aceleración.

| Aceleración de los pisos | $f_1$ [Hz] | $f_2$ [Hz] | $f_3$ [Hz] |
|--------------------------|------------|------------|------------|
| 1,2 y 3                  | 4.85       | 11.48      | 23.38      |
| 1,2 y 4                  | 3.57       | 10.03      | 21.58      |
| 1,2 y 5                  | 3.09       | 9.41       | 20.87      |
| 1,2 y 6                  | 3.05       | 9.34       | 20.58      |
| frecuencias reales       | 3.13       | 9.07       | 14.67      |

Tabla 3.4: Frecuencias de la estructura generadas con el esquema de identificación reducido con las aceleraciones de los pisos 1, 2 y 6.

|       | Real [Hz] | Método de condensación [Hz] | Estimación [Hz] |
|-------|-----------|-----------------------------|-----------------|
| $f_1$ | 3.13      | 3.21                        | 3.05            |
| $f_2$ | 9.07      | 9.32                        | 9.34            |
| $f_3$ | 14.67     | 19.73                       | 20.58           |

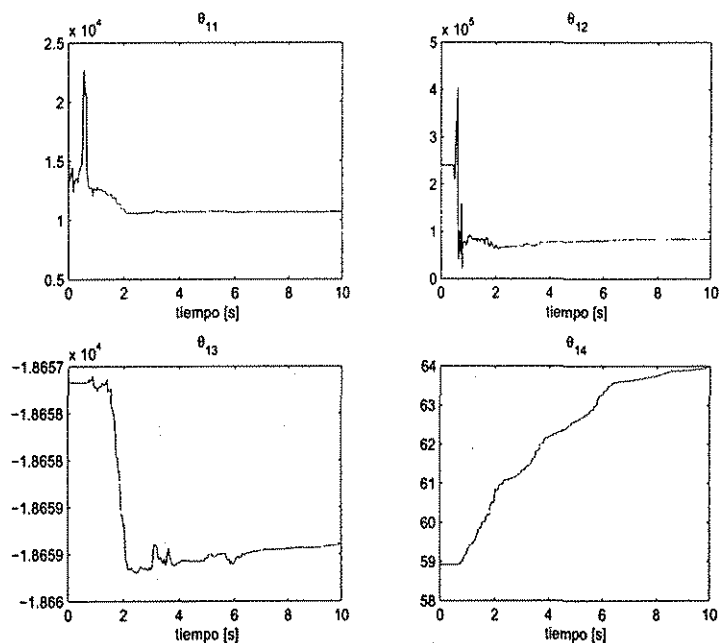


Figura 3.12: Parámetros estimados del amortiguador en una estructura de seis grados de libertad utilizando el esquema reducido de tres grados de libertad (ecuación (3.25)).

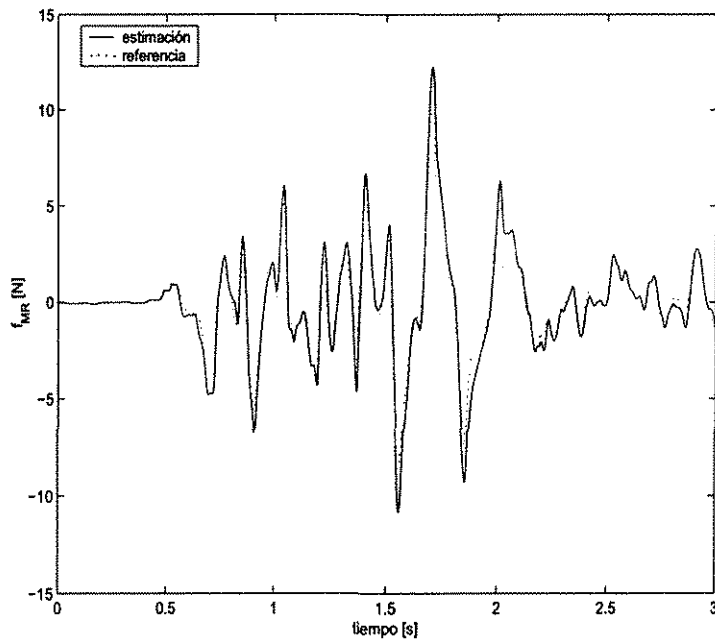


Figura 3.13: Estimación de la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico de una estructura de seis grados de libertad mediante el esquema reducido de tres grados de libertad.

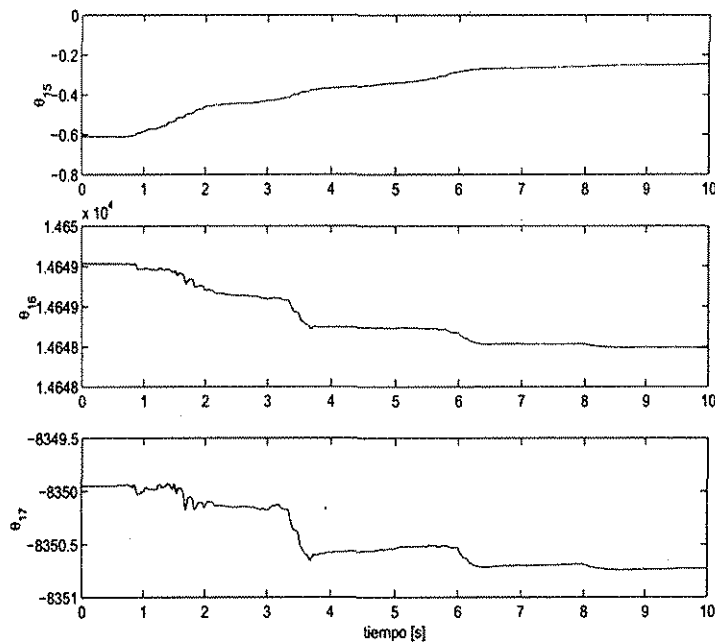


Figura 3.14: Parámetros estimados del primer piso de la estructura de seis grados de libertad utilizando el esquema de identificación de tres grados de libertad.

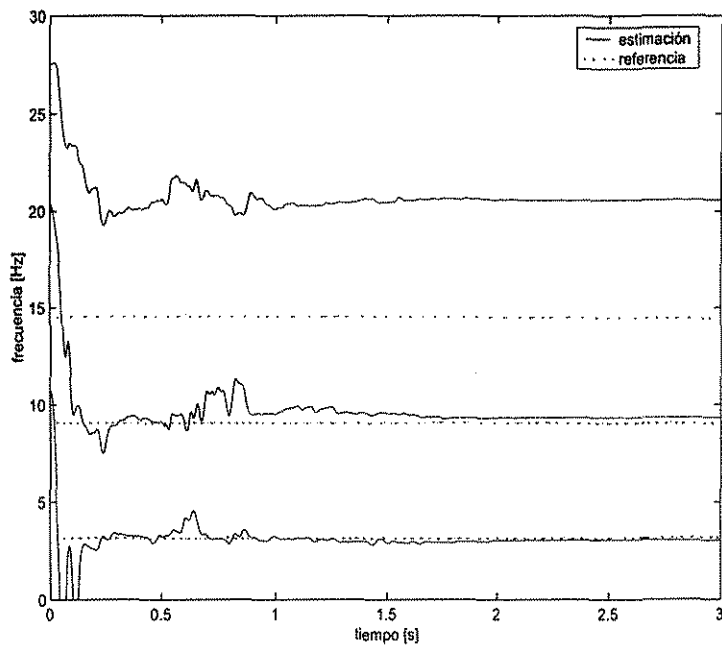


Figura 3.15: Estimación de las frecuencias naturales de vibración utilizando el esquema reducido de tres grados de libertad.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 4

# Control semiactivo de estructuras utilizando amortiguadores magneto-reológicos

De manera adicional, en este capítulo se pretende mostrar la utilidad del modelo del amortiguador propuesto en los capítulos precedentes. Aquí se proponen dos leyes de control para proteger estructuras utilizando un amortiguador magneto-reológico colocado entre la base de la estructura y el primer piso. La síntesis de estos controladores está basada en la teoría de Lyapunov. La primera de estas leyes se basa en un análisis del sistema completo, y la segunda se basa en un análisis de perturbaciones singulares que permite reducir el orden del sistema, dando como resultado una ley de control más simple que la primera pero con un desempeño similar. En ambos casos se puede garantizar que, bajo una excitación sísmica, las trayectorias del sistema son uniformemente acotadas. Para cada una de estas leyes se presentan dos versiones, una que utiliza la función signo (control “encendido y apagado”) y otra que emplea la función de saturación (función del estado). El funcionamiento de ambos esquemas se evalúa mediante un ejemplo numérico y los resultados se comparan con los que se obtendrían en el caso puramente pasivo.



## 4.1. Modelo del sistema

La ecuación diferencial que rige el movimiento de una estructura lineal de  $n$  grados de libertad está dada por

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + F_A + Kx = -M\ddot{x}_g \quad (4.1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez, respectivamente;  $F_A = [f \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  es la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico que está dada por

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) z \quad (4.2a)$$

$$f = \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}_1, \quad (4.2b)$$

donde el observador de  $z$  está dado por

$$\dot{\hat{z}} = \dot{x}_1 - \sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \hat{z}, \quad (4.3)$$

siendo  $\hat{z}$  el valor estimado de  $z$ . La dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{\tilde{z}} = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \tilde{z}, \quad (4.4)$$

donde  $\tilde{z} = z - \hat{z}$ . Ahora bien, considerando  $V_z = \frac{1}{2} \tilde{z}^2$ , se puede concluir que  $\hat{z} \rightarrow z$  asintóticamente, ya que<sup>1</sup>

$$\dot{V}_z = -\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \tilde{z}^2 \leq 0, \quad 1 + a_1 v > 0. \quad (4.5)$$

Además, de la ecuación (4.3) se pueden obtener los máximos de  $\hat{z}$  a través del cálculo de los puntos para los cuales la pendiente de la solución de esta ecuación se anula, es decir

$$\dot{x}_1 - \sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \hat{z}_{max} = 0, \quad (4.6)$$

lo cual implica

$$\hat{z}_{max} = \frac{\dot{x}_1}{\sigma_0 a_0 |\dot{x}_1| (1 + a_1 v)} \quad (4.7)$$

$$= \frac{\pm 1}{\sigma_0 a_0 (1 + a_1 v)}. \quad (4.8)$$

De (4.8) se concluye que el estado  $\hat{z}$  permanece acotado<sup>2</sup> sin importar el valor que pueda tomar  $\dot{x}_1$ .

<sup>1</sup>La condición  $1 + a_1 v > 0$  se satisface ya que para el caso en consideración,  $a_1 = -0.1444$  y  $0 \leq v \leq 2.25$ .

<sup>2</sup>Este hecho se explota en el análisis de estabilidad del sistema de control, quedando fuera de los alcances de este trabajo el análisis de estabilidad que contempla la parte de identificación de parámetros junto con la estimación del estado  $z$ .

Definiendo el vector de estados como

$$\zeta = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \hat{z} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

y utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.2a-b) se puede obtener la siguiente representación en el espacio de estados

$$\dot{\zeta} = A_1\zeta + B_1\ddot{x}_g + A_2\hat{z} + B_2\hat{z}v, \quad (4.10)$$

donde las matrices del sistema están definidas de la siguiente manera

$$A_1 = \begin{bmatrix} O_3 & I & O \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C + \Lambda & O \\ O^T & L & -a_{21} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} O \\ -l \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} O \\ \frac{\sigma_0\sigma_1a_0}{m_1}|\dot{x}_1| \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_0a_0|\dot{x}_1| + a_{21} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} O \\ -\frac{\sigma_0}{m_1} + \frac{\sigma_0\sigma_1a_0a_1}{m_1}|\dot{x}_1| \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_0a_0a_1|\dot{x}_1| \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad l = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$O_3$  es una matriz de  $3 \times 3$  cuyos elementos son todos iguales a cero,  $I$  es la matriz identidad de orden 3, y  $a_{21}$  es cualquier constante mayor a cero que garantiza que la matriz  $A_1$  sea Hurwitz.

## 4.2. Atenuación de la respuesta dinámica de estructuras

El objetivo de un sistema de control antisísmico es reducir la respuesta dinámica de la estructura de tal forma que los desplazamientos de los pisos sean menores o iguales a los desplazamientos máximos que garanticen la seguridad del inmueble y sus ocupantes. El objetivo de control es llevar al sistema al punto de equilibrio  $\zeta = 0$ , o al menos, mantener las trayectorias del sistema en un entorno de este punto cuando la estructura está sujeta a excitación sísmica.

Siguiendo el enfoque de Lyapunov es posible encontrar una ley de control que reduzca sustancialmente la respuesta dinámica de una estructura. Considérese la siguiente candidata a función de

Lyapunov:

$$V_1 = \zeta^T P_1 \zeta, \quad (4.11)$$

donde  $P_1 = P_1^T$  es una matriz positiva definida.

La variación con respecto al tiempo de (4.11) evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}_1 = \zeta^T P_1 \dot{\zeta} + \dot{\zeta}^T P_1 \zeta \quad (4.12)$$

$$= \zeta^T P_1 [A_1 \zeta + B_1 \ddot{x}_g + A_2 \hat{z} + B_2 \hat{z} v] + [A_1 \zeta + B_1 \ddot{x}_g + A_2 \hat{z} + B_2 \hat{z} v]^T P_1 \zeta \quad (4.13)$$

$$= \zeta^T [P_1 A_1 + A_1^T P_1] \zeta + 2\zeta^T P_1 [B_1 \ddot{x}_g + A_2 \hat{z} + B_2 \hat{z} v]. \quad (4.14)$$

Dado que la matriz  $A_1$  es Hurwitz, del Teorema de Lyapunov se sabe que existe una matriz  $P_1$ , simétrica y positiva definida, tal que  $P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1$ , para toda  $Q_1$  simétrica y positiva definida. Usando este argumento, la ecuación (4.14) se puede escribir como

$$\dot{V}_1 = -\zeta^T Q_1 \zeta + 2\zeta^T P_1 [B_1 \ddot{x}_g + A_2 \hat{z} + B_2 \hat{z} v]. \quad (4.15)$$

Dado que el voltaje que se puede aplicar al amortiguador varía sólo entre 0 y el voltaje máximo<sup>3</sup>, denotado por  $\bar{v}$ , un primer intento para diseñar una ley de control es escoger a  $v$  de la siguiente manera:

$$v = \begin{cases} 0, & \text{si } \zeta^T P_1 B_2 \hat{z} \geq 0; \\ \bar{v}, & \text{si } \zeta^T P_1 B_2 \hat{z} < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

La función anterior permite minimizar el efecto de  $2\zeta^T P_1 B_2 \hat{z} v$  en la ecuación (4.15) haciendo que la magnitud de este término sea máxima, cuando éste es menor que cero; y mínima, cuando éste es mayor que cero.

Para analizar la estabilidad del sistema (4.10) bajo la ley de control (4.16) es importante conocer cuál es el efecto de los términos  $2\zeta^T P_1 B_1 \ddot{x}_g$  y  $2\zeta^T P_1 A_2 \hat{z}$  cuyo signo no está definido. Bajo estas condiciones, lo mejor que puede esperarse es que las trayectorias del sistema sean uniformemente acotadas, es decir, que la función de Lyapunov del sistema sea negativa definida al menos en  $R \leq \|\zeta\| \leq r$ ;  $R, r \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$ .

<sup>3</sup>Este voltaje es el que corresponde a la corriente de saturación del amortiguador magneto-reológico y que para las simulaciones numéricas corresponde a 2.25 [V].

Considerando el caso extremo en el que los términos  $2\zeta^T P_1 B_1 \ddot{x}_g$  y  $2\zeta^T P_1 A_2 \dot{z}$  son positivos, y valiéndose de la desigualdad<sup>4</sup>

$$\underline{q}_1 \zeta^T \zeta \leq \zeta^T Q_1 \zeta \leq \bar{q}_1 \zeta^T \zeta,$$

la ecuación (4.15) satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\underline{q}_1 \|\zeta\|^2 + 2 [|\zeta^T P_1 B_1| |\ddot{x}_g| + |\zeta^T P_1 A_2| |\dot{z}| + |\zeta^T P_1 B_2 \dot{v}|] \\ &\leq -\underline{q}_1 \|\zeta\|^2 + 2 [\|\zeta\| \|P_1 B_1\| |\ddot{x}_g| + \|\zeta\| \|P_1 A_2\| |\dot{z}| + \|\zeta\| \|P_1 B_2\| |\dot{v}|] \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $\underline{q}_1$  y  $\bar{q}_1$  son respectivamente los valores propios mínimo y máximo de la matriz  $Q_1$ ;  $\|\cdot\|$  es la norma  $l_2$  (norma euclídeana) y

$$|\zeta^T p| \leq \|\zeta\| \|p\|, \quad \forall \zeta, p \in \mathbb{R}^n.$$

Intuitivamente puede pensarse que en el peor de los casos  $|\zeta^T P_1 B_1| |\ddot{x}_g|$  y  $|\zeta^T P_1 A_2| |\dot{z}|$  alcanzan sus valores máximos simultáneamente, lo cual implica que  $\ddot{x}_g$  y  $\dot{z}$  también son máximos.

Por otra parte, expresando los vectores  $A_2$  y  $B_2$  como

$$A_2 = A_{21} + A_{22} |\dot{x}_1|$$

y

$$B_2 = B_{21} + B_{22} |\dot{x}_1|;$$

y utilizando la desigualdad

$$|\dot{x}_1| = |\zeta^T \lambda| \leq \|\zeta\| \|\lambda\| \leq \|\zeta\|,$$

donde  $\lambda = [O^T \ 1 \ 0 \ 0]^T$ , la ecuación (4.17) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\underline{q}_1 \|\zeta\|^2 + 2 (\|\zeta\| \|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + \|\zeta\| \|P_1 A_{21}\| \bar{z} + \|\zeta\| \|P_1 A_{22}\| |\dot{x}_1| \bar{z}) \\ &\quad + 2 (\|\zeta\| \|P_1 B_{21}\| + \|\zeta\| \|P_1 B_{22}\| |\dot{x}_1|) \bar{z} v \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} &\leq -(1 - \Gamma_1) \underline{q}_1 \|\zeta\|^2 - \Gamma_1 \underline{q}_1 \|\zeta\|^2 + 2 (\|\zeta\| \|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + \|\zeta\| \|P_1 A_{21}\| \bar{z} + \|\zeta\|^2 \|P_1 A_{22}\| \bar{z}) \\ &\quad + 2 (\|\zeta\| \|P_1 B_{21}\| + \|\zeta\|^2 \|P_1 B_{22}\|) \bar{z} v, \quad 0 < \Gamma_1 < 1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\leq -(1 - \Gamma_1) \underline{q}_1 \|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geq \frac{\|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + (\|P_1 A_{21}\| + \|P_1 B_{21}\| v) \bar{z}}{\frac{1}{2} \Gamma_1 \underline{q}_1 - (\|P_1 A_{22}\| + \|P_1 B_{22}\| v) \bar{z}}, \quad (4.20)$$

<sup>4</sup>Teorema de Raleigh-Ritz (véase, por ejemplo, Horn, R. A. y Johnson, C. R. (1993)).

con

$$\begin{aligned} A_{21} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a_{21}]^T, \\ A_{22} &= [0 \ 0 \ 0 \ \frac{\sigma_0 \sigma_1 a_0}{m_1} \ 0 \ 0 \ -\sigma_0 a_0]^T, \\ B_{21} &= [0 \ 0 \ 0 \ -\frac{\sigma_0}{m_1} \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ B_{22} &= [0 \ 0 \ 0 \ \frac{\sigma_0 \sigma_1 a_0 a_1}{m_1} \ 0 \ 0 \ -\sigma_0 a_0 a_1]^T, \end{aligned}$$

y  $\ddot{x}_g$  es el valor máximo de la aceleración del terreno.

La condición dada por la ecuación (4.20) muestra que las trayectorias del sistema son uniformemente acotadas. Ahora bien, tomando en cuenta la intervención del control se tiene

- Para  $v = 0$ :

$$\dot{V}_1 \leq -(1 - \Gamma) \underline{q}_1 \|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geq \frac{\|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + (\|P_1 A_{21}\|) \bar{z}}{\frac{1}{2} \Gamma_1 \underline{q}_1 - (\|P_1 A_{22}\|) \bar{z}}, \quad (4.21)$$

- Para  $v = \bar{v}$ :

$$\dot{V}_1 \leq -(1 - \Gamma) \underline{q}_1 \|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geq \frac{\|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + (\|P_1 A_{21}\| - \|P_1 B_{21}\| \bar{v}) \bar{z}}{\frac{1}{2} \Gamma_1 \underline{q}_1 - (\|P_1 A_{22}\| - \|P_1 B_{22}\| \bar{v}) \bar{z}}, \quad (4.22)$$

donde claramente se observa que la trayectorias del sistema son uniformemente acotadas.

Una alternativa para analizar el comportamiento del sistema es explotar el hecho de que la dinámica del amortiguador es mucho más rápida que la dinámica de la estructura (Álvarez, L. y Jiménez, R. 2002). Si en efecto, la rapidez con la que evolucionan las trayectorias de  $\hat{z}$  es mucho mayor que la rapidez con la que responde la estructura, entonces, para fines prácticos, basta con tomar en cuenta sólo los valores cuasiestacionarios de  $\hat{z}$ . Formalmente, la hipótesis anterior se puede sustentar en un argumento similar al utilizado en el análisis de perturbaciones singulares.

Definiendo  $\bar{z} = \sigma_0 a_0 \hat{z}$ , la ecuación (4.2a) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sigma_0 a_0} \dot{\bar{z}} = \dot{x}_1 - |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \bar{z}, \quad (4.23)$$

con lo cual, el problema original toma la forma del problema de perturbación singular dado por

$$\dot{x} = f(x, \bar{z}, \epsilon) = Ax + B\ddot{x}_g + C|\dot{x}_1|\bar{z} + D_1\bar{z}v + D_2|\dot{x}_1|\bar{z}v \quad (4.24a)$$

$$\epsilon \dot{\bar{z}} = g(x, \bar{z}, \epsilon) = \dot{x}_1 - |\dot{x}_1| (1 + a_1 v) \bar{z} \quad (4.24b)$$

donde

$$\epsilon = \frac{1}{\sigma_0 a_0}, \quad x = [x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} O_3 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C + \Lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ -l \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} O \\ \frac{\sigma_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} O \\ -\epsilon \frac{\sigma_0}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} O \\ \frac{\sigma_1 a_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para valores pequeños de  $\epsilon$ , el comportamiento del sistema dado por (4.24a-b) puede aproximarse a través del sistema reducido dado por

$$\dot{x} = f(x, h(x), 0), \quad (4.25)$$

donde  $h(x)$  representa el estado cuasiestacionario de  $\bar{z}$ .

De acuerdo con Khalil (1996), las condiciones necesarias<sup>5</sup> para que la solución  $x(t, \epsilon)$ ,  $z(t, \epsilon)$  del problema de perturbación singular dado por (4.24a-b) sea única, y las trayectorias del sistema reducido se mantengan en un entorno de las trayectorias del problema de perturbación singular, se satisfacen excepto en el punto  $|\dot{x}_1| = 0$ . Para continuar con el análisis supóngase que  $|\dot{x}_1| > \xi \forall t \in [0, \infty)$ , excepto en un número finito de intervalos de  $t$  y  $0 < \xi \ll 1$ .

Tomando  $\epsilon = 0$ , la ecuación

$$0 = \dot{x}_1 - |\dot{x}_1|(1 + a_1 v) \bar{z} \quad (4.26)$$

tiene una raíz aislada dada por

$$\bar{z} = \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|(1 + a_1 v)} \quad (4.27)$$

$$= \frac{\text{sgn}(\dot{x}_1)}{(1 + a_1 v)} \quad (4.28)$$

$$= h(x). \quad (4.29)$$

<sup>5</sup>Teorema 9.1 Khalil (1996), pp. 361.

Sustituyendo  $\epsilon = 0$  y (4.27) en (4.24a) se obtiene el modelo reducido

$$\dot{x} = f(x, h(x), 0) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} &= Ax + B\ddot{x}_g + C|\dot{x}_1| \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|(1+a_1v)} \\ &\quad + D_1 \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|(1+a_1v)} v + D_2 |\dot{x}_1| \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|(1+a_1v)} v \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$= Ax + B\ddot{x}_g + C \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} + D_2 \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} v. \quad (4.32)$$

Considérese ahora la función

$$V = x^T P x, \quad P = P^T > 0. \quad (4.33)$$

La variación con respecto al tiempo de (4.33), evaluada sobre las trayectorias de (4.32), está dada por

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \quad (4.34)$$

$$= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P \left( B\ddot{x}_g + C \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} + D_2 \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} v \right) \quad (4.35)$$

$$= -x^T Q x + 2x^T P \left( B\ddot{x}_g + C \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} + D_2 \frac{\dot{x}_1}{1+a_1v} v \right), \quad Q = Q^T > 0. \quad (4.36)$$

La ecuación (4.36) sugiere la siguiente ley de control

$$v = \begin{cases} 0, & \text{si } x^T P D_2 \dot{x}_1 \geq 0; \\ \bar{v}, & \text{si } x^T P D_2 \dot{x}_1 < 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

suponiendo que  $1 + a_1 v > 0$ .

Supóngase nuevamente que en el peor de los casos los términos  $2x^T P B \ddot{x}_g$  y  $2x^T P C \dot{x}_1$  son positivos. Utilizando las ecuaciones (4.36) y (4.37) se puede escribir lo siguiente:

- Para  $v = 0$ :

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2(x^T P B \ddot{x}_g + x^T P C \dot{x}_1) \quad (4.38)$$

$$\dot{V} \leq -\underline{q} \|x\|^2 + 2(|x^T P B| |\ddot{x}_g| + |x^T P C| |\dot{x}_1|) \quad (4.39)$$

$$\leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|x\|^2 - \Gamma \underline{q} \|x\|^2 + 2\|x\| (\|P B\| \ddot{x}_g + \|P C\| |\dot{x}_1|) \quad (4.40)$$

$$\leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \frac{2\|P B\| \ddot{x}_g}{\Gamma \underline{q} - 2\|P C\|}. \quad (4.41)$$

■ Para  $v = \bar{v}$ :

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 \left( x^T P B \ddot{x}_g + x^T P C \frac{\dot{x}_1}{1 + a_1 v} + x^T P D_2 \frac{\dot{x}_1}{1 + a_1 v} v \right) \quad (4.42)$$

$$\leq -\underline{q} \|x\|^2 + 2 \left( |x^T P B| |\ddot{x}_g| + |x^T P C| \frac{|\dot{x}_1|}{1 + a_1 \bar{v}} - |x^T P D_2| \frac{|\dot{x}_1|}{1 + a_1 \bar{v}} \bar{v} \right) \quad (4.43)$$

$$\leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|x\|^2 - \Gamma \underline{q} \|x\|^2 + 2 \|x\| \left( \|P B\| \ddot{x}_g + (\|P C\| - \|P D_2\| \bar{v}) \frac{\|x\|}{1 + a_1 \bar{v}} \right) \quad (4.44)$$

$$\leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \frac{2 \|P B\| \ddot{x}_g}{\Gamma \underline{q} - \frac{2}{1 + a_1 \bar{v}} (\|P C\| - \|P D_2\| \bar{v})}, \quad (4.45)$$

donde  $0 < \Gamma < 1$ .

Tomando ahora el caso en que  $|\dot{x}_1| < \xi$ , para el sistema completo se tiene lo siguiente

$$\dot{V}_1 \leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|x\|^2 - \Gamma \underline{q}_1 \|\zeta\|^2 + 2 (\|\zeta\| \|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + \|\zeta\| \|P_1 C_1\| \bar{z} + \|\zeta\| \|P_1 C_2\| \xi \bar{z}) \quad (4.46)$$

$$+ 2 (\|\zeta\| \|P_1 D_1\| + \|\zeta\| \|P_1 D_2\| \xi) \bar{z} v$$

$$\leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geq 2 \frac{\|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + (\|P_1 C_1\| + \|P_1 C_2\| \xi) \bar{z} + (\|P_1 D_1\| + \|P_1 D_2\| \xi) \bar{z} v}{\Gamma \underline{q}_1}. \quad (4.47)$$

Si  $\xi$  es mucho menor a la unidad, entonces se puede considerar que

$$\dot{V} \leq -(1 - \Gamma) \underline{q} \|\zeta\|^2, \quad \forall \|\zeta\| \geq 2 \frac{\|P_1 B_1\| \ddot{x}_g + \|P_1 C_1\| \bar{z} - \|P_1 D_1\| \bar{z} v}{\Gamma \underline{q}_1}. \quad (4.48)$$

Tanto (4.16) como (4.37) tienen la estructura de un controlador de modos deslizantes con  $\zeta^T P_1 B_2 \hat{z}$  y  $x^T P D_2 \dot{x}_1$  como superficies de deslizamiento, respectivamente. Este tipo de controladores presenta varios inconvenientes como son la discontinuidad de la ley de control y la conmutación a frecuencias muy altas de la señal de control generada (chattering). Sin embargo, el desempeño de ambos controladores puede mejorarse mediante una función de saturación<sup>6</sup> que permite utilizar un voltaje de control proporcional a la magnitud del término que representa la superficie de deslizamiento, obteniéndose una ley de control más suave y evitando así la conmutación a altas frecuencias. Las leyes de control aproximadas son

$$v = \text{sat}(\gamma_1 \zeta^T P_1 B_2 \hat{z}), \quad \gamma_1 > 0, \quad (4.49)$$

y

$$v = \text{sat}(\gamma_2 x^T P D_2 \dot{x}_1), \quad \gamma_2 > 0, \quad (4.50)$$

<sup>6</sup>El empleo de la función saturación es una práctica frecuente en el mejoramiento de leyes de control de modos deslizantes (véase (Khalil 1996) pp. 601-607).



donde

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \geq 0; \\ |y|, & \text{si } -\bar{v} < y < 0; \\ \bar{v}, & \text{si } y \leq -\bar{v}. \end{cases} \quad (4.51)$$

### 4.3. Resultados de simulación

El propósito de los ensayos numéricos que aquí se presentan es evaluar única y exclusivamente el comportamiento de las leyes de control propuestas en esta sección. Por simplicidad, en todos los experimentos realizados en simulación se considera que el estado  $x$  es medible y que los parámetros del sistema son conocidos, quedando como trabajo a futuro el desarrollo de un esquema de control que contemple los esquemas de identificación presentados en los capítulos precedentes.

Las leyes de control (4.16), (4.37), (4.49) y (4.50) fueron probadas numéricamente utilizando el ejemplo de tres grados de libertad presentado en el Capítulo 3. La excitación sísmica está dada por la componente N-S del sismo El Centro, utilizada también en el capítulo anterior, con un ajuste en la escala del tiempo de 1:5 para adecuar los datos con la escala del modelo de la estructura.

En las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se muestra la reducción en el desplazamiento de cada piso de la estructura para un tiempo de simulación de 5 [s]. Con línea de segmentos largos y cortos se muestran los resultados que se obtienen con la ley de control (4.16), mientras que el desempeño de la ley de control con saturación se muestra con línea sólida. La evolución del estado interno  $z$  y de su estimado se muestra en las Figuras 4.4, 4.5 y 4.8, donde se aprecia claramente la convergencia de  $\hat{z}$  al valor real. La diferencia entre las señales de voltaje generadas con las ecuaciones (4.16) y (4.49) se puede observar en las Figuras 4.6, 4.7 y 4.9. En lo sucesivo se designará como “controlador (1)” a la expresión (4.16) y “controlador (2)” a la expresión (4.49).

En las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 se muestra el desplazamiento de cada piso de la estructura bajo la acción de las leyes de control: ecuaciones (4.37), con línea discontinua; y (4.50), con línea sólida, las cuales en lo sucesivo se designarán como “controlador (3)” y “controlador (4)”, respectivamente.

En la Tabla 4.1 se presentan los valores máximos alcanzados en los desplazamientos absolutos, desplazamientos relativos, aceleraciones absolutas de cada piso y fuerza máxima ejercida para diferentes acciones de control. En esta tabla se puede apreciar claramente la reducción en los desplazamientos máximos alcanzados con cada ley de control. Además, en las Figuras 4.16 y 4.17 se muestra el efecto de las leyes de control sobre el desplazamiento del tercer piso el cual presenta los

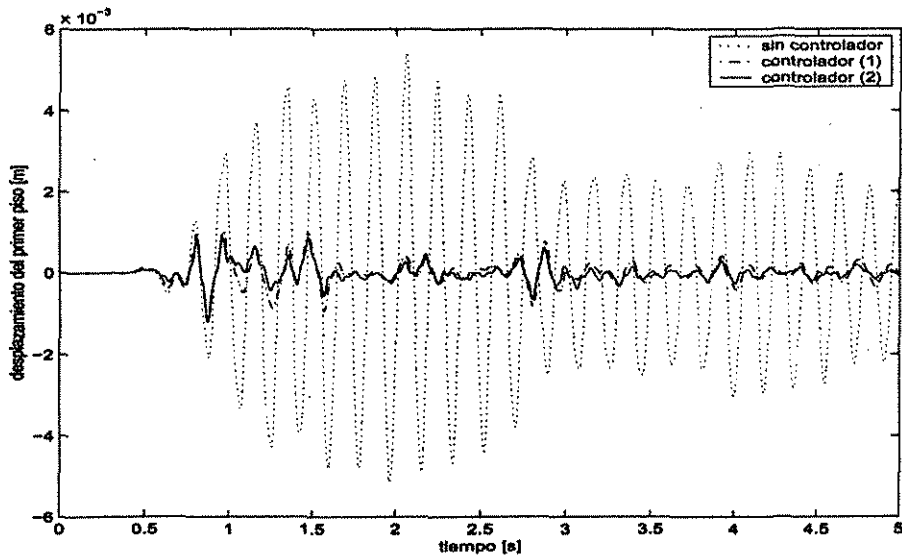


Figura 4.1: Desplazamiento del primer piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)).

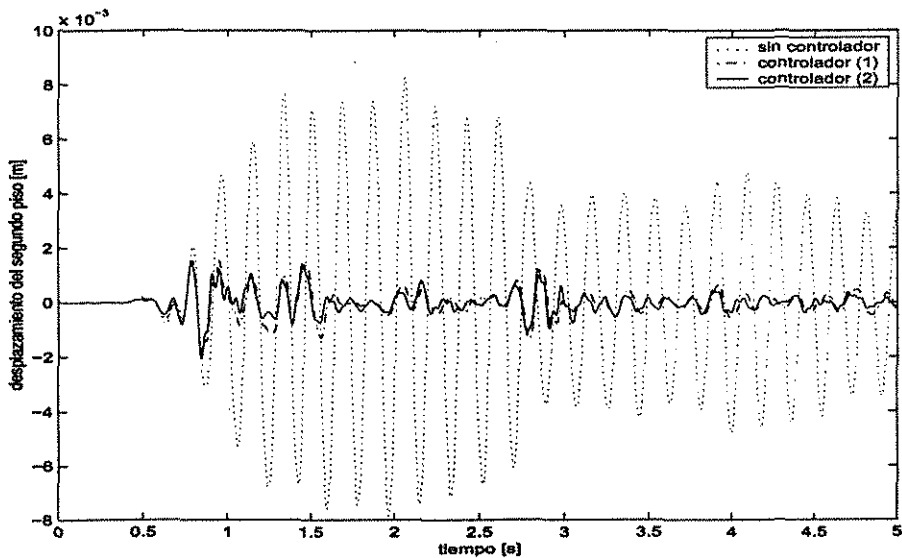


Figura 4.2: Desplazamiento del segundo piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

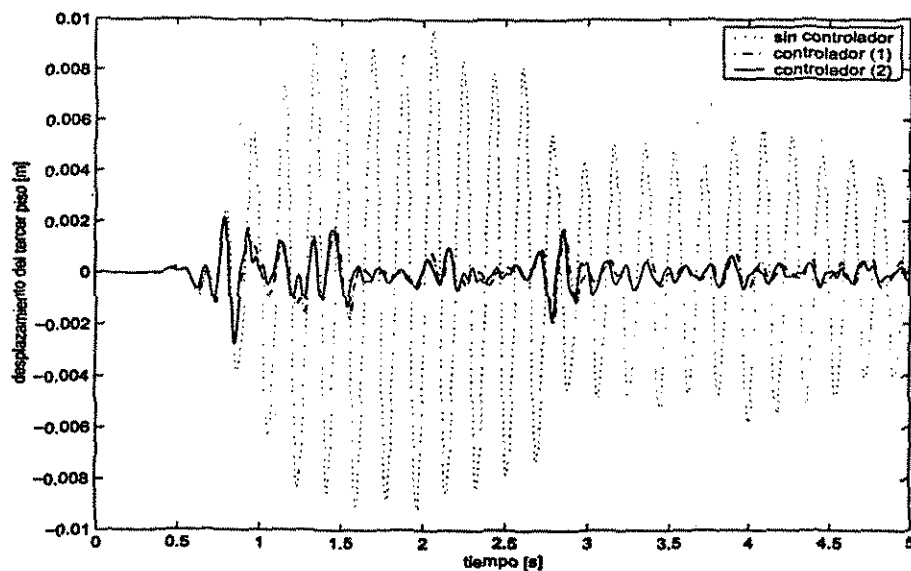


Figura 4.3: Desplazamiento del tercer piso utilizando las leyes de control de modos deslizantes (controlador (1)) y la función saturación (controlador (2)).

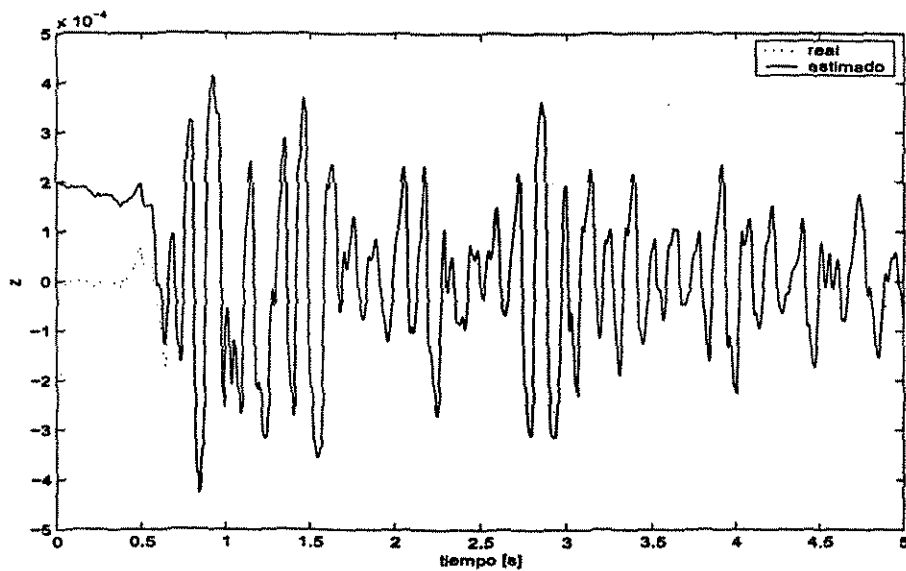


Figura 4.4: Estimación del estado interno  $z$  utilizando el controlador (1).

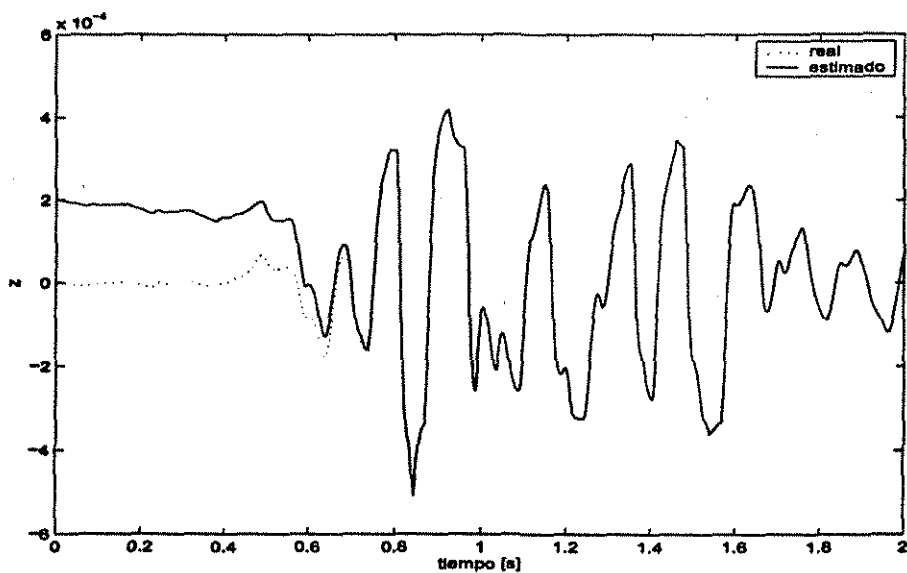


Figura 4.5: Estimación del estado interno  $z$  utilizando el controlador (1) (ampliación).

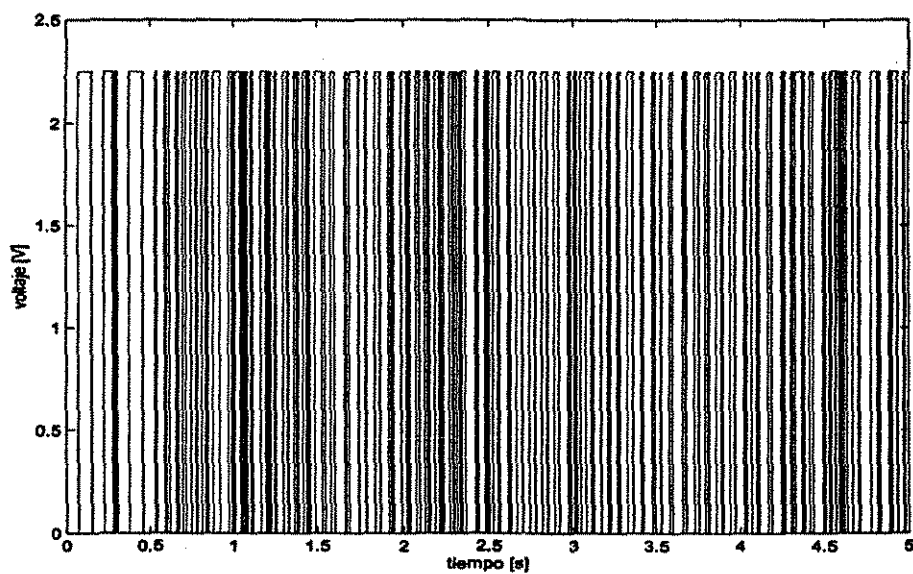


Figura 4.6: Voltaje de control generado con el controlador (1).

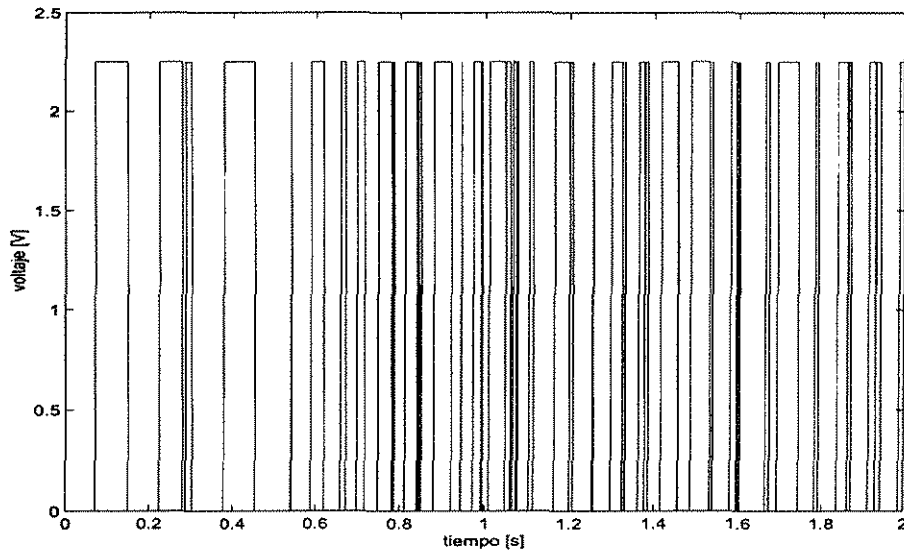


Figura 4.7: Voltaje de control generado con el controlador (1) (ampliación).

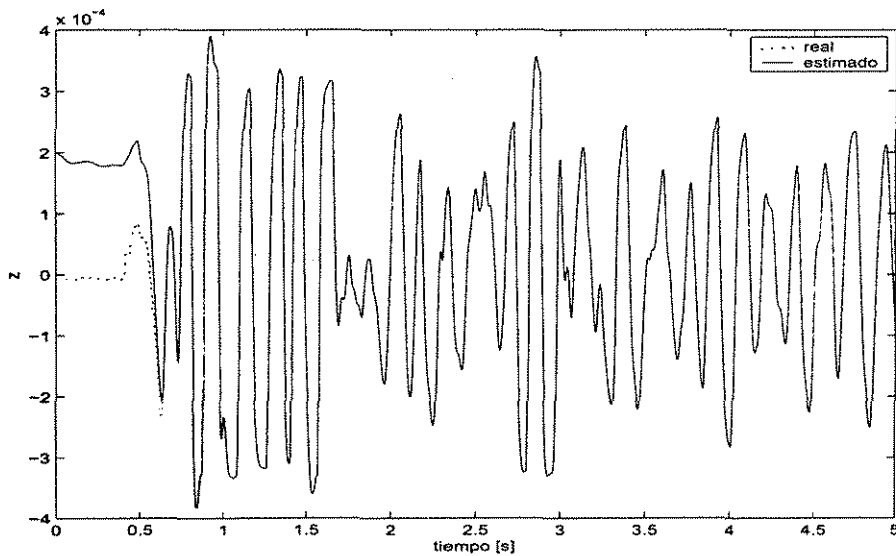


Figura 4.8: Estimación del estado interno  $z$  utilizando el controlador (2).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

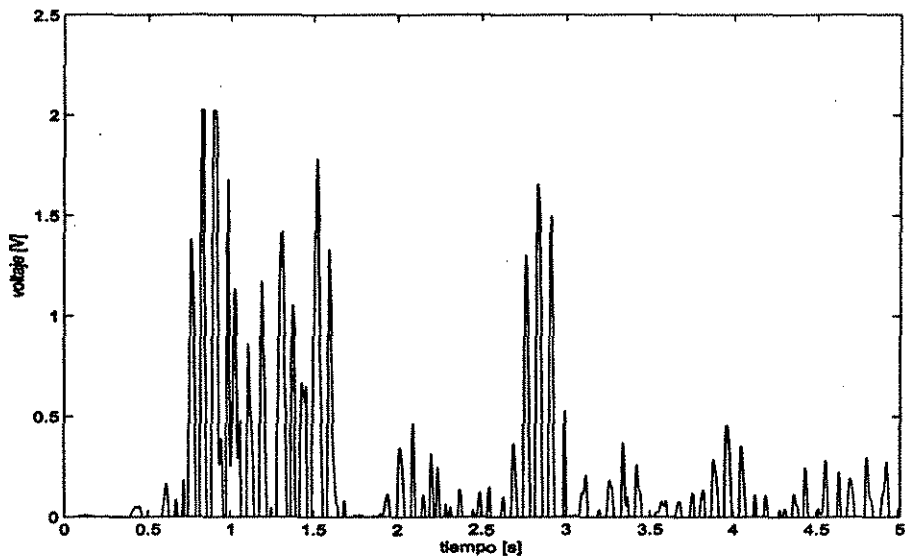


Figura 4.9: Voltaje de control generado con el controlador (2).

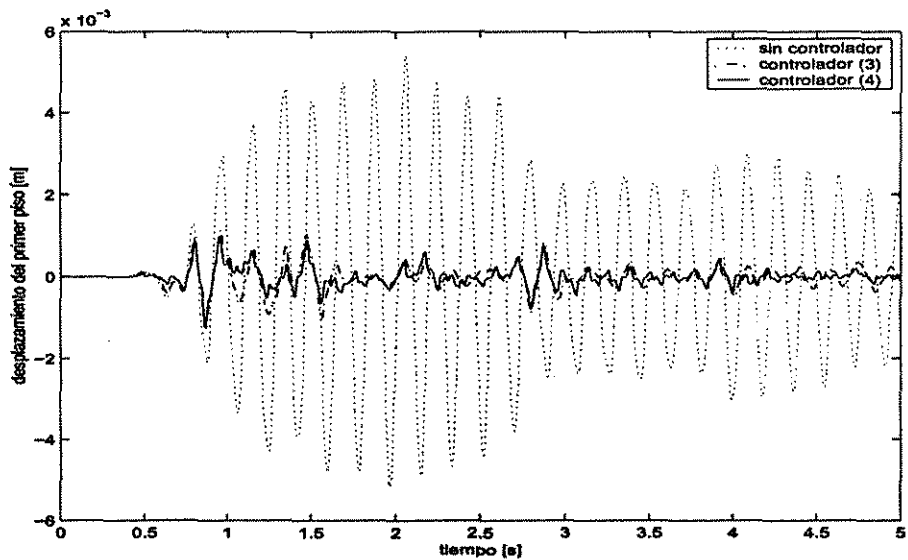


Figura 4.10: Desplazamiento del primer piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)).

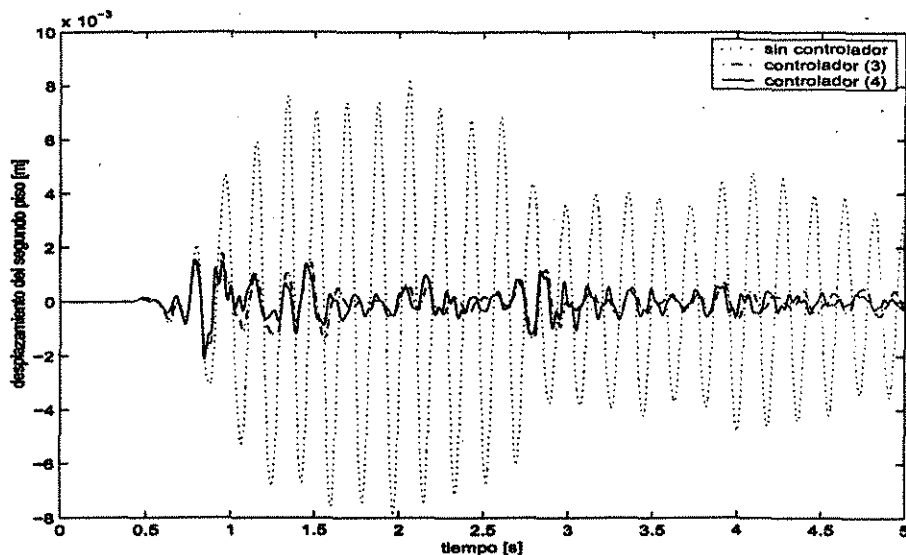


Figura 4.11: Desplazamiento del segundo piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)).

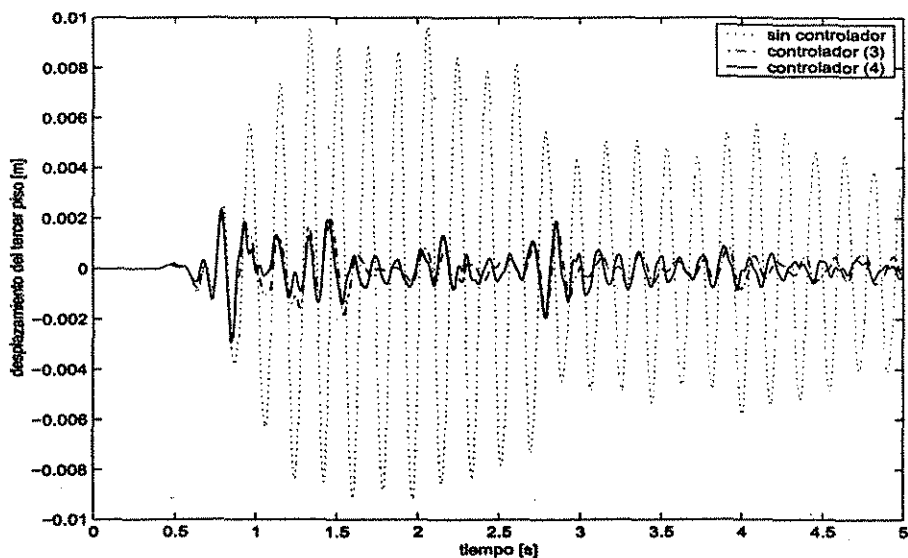


Figura 4.12: Desplazamiento del tercer piso utilizando las leyes de control reducidas de modos deslizantes (controlador (3)) y la función saturación (controlador (4)).

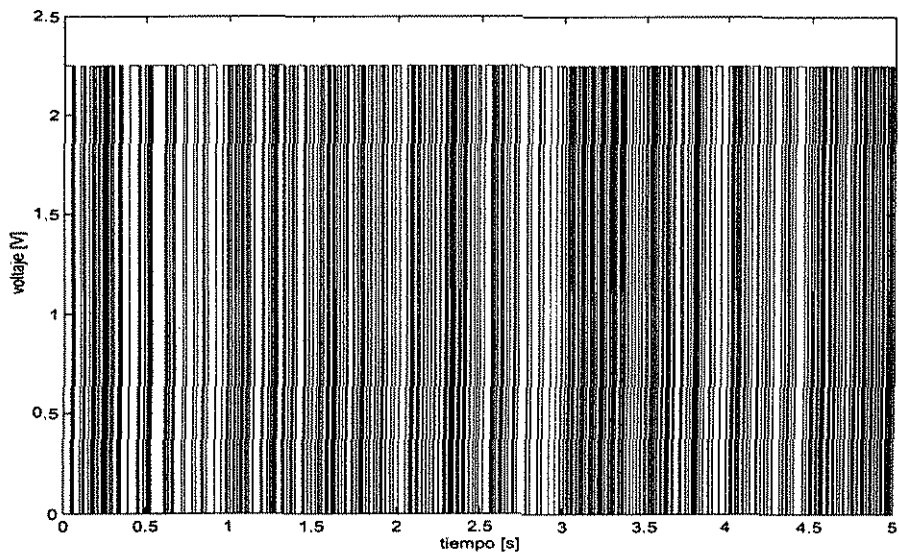


Figura 4.13: Voltaje de control generado con el controlador (3).

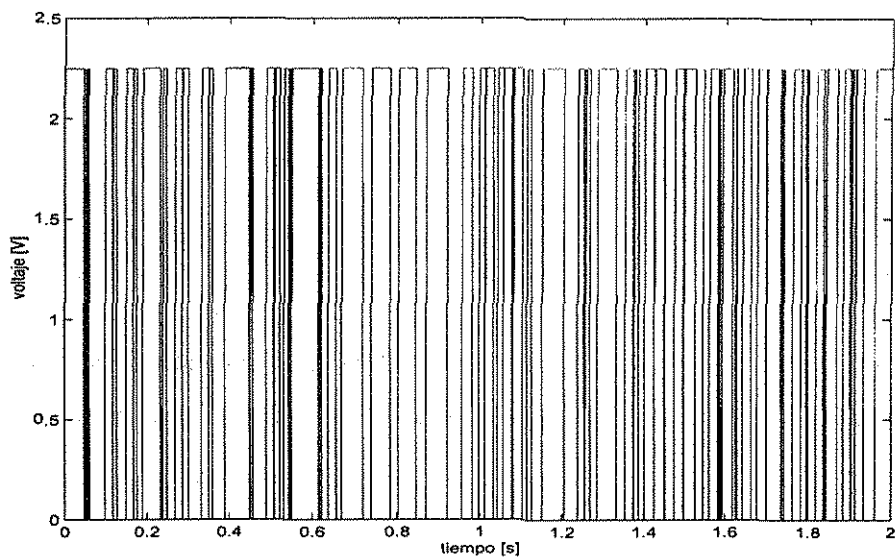


Figura 4.14: Voltaje de control generado con el controlador (3) (ampliación).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



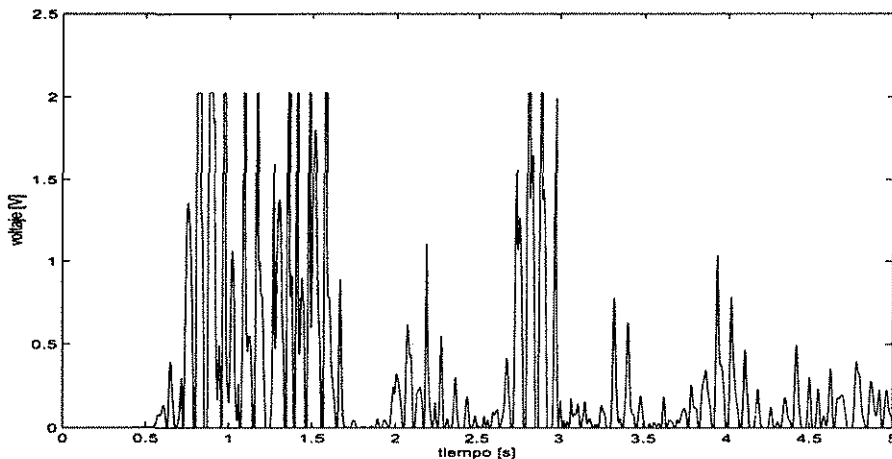


Figura 4.15: Voltaje de control generado con el controlador (4).

Tabla 4.1: Comparación de los controladores probados en simulación: [a] modos deslizantes, controlador (1); [b] saturación, controlador (2); [c] modos deslizantes modelo reducido, controlador (3) y [d] saturación modelo reducido, controlador (4).

|                         | piso | sin control | $v = 0$ | $v = v_{max}$ | [a]     | [b]    | [c]     | [d]    |
|-------------------------|------|-------------|---------|---------------|---------|--------|---------|--------|
| $x$ [cm]                | 1    | 0.5418      | 0.2354  | 0.0889        | 0.1201  | 0.1207 | 0.1202  | 0.1250 |
|                         | 2    | 0.8265      | 0.3877  | 0.2677        | 0.2059  | 0.1728 | 0.2134  | 0.1765 |
|                         | 3    | 0.9625      | 0.4970  | 0.4119        | 0.2767  | 0.2584 | 0.2925  | 0.2723 |
| $d$ [cm]                | 1    | 0.5418      | 0.2354  | 0.0889        | 0.1201  | 0.1207 | 0.1202  | 0.1250 |
|                         | 2    | 0.3187      | 0.1574  | 0.2020        | 0.1762  | 0.1430 | 0.1902  | 0.1441 |
|                         | 3    | 0.2010      | 0.1095  | 0.1445        | 0.1113  | 0.1055 | 0.1251  | 0.1137 |
| $a$ [m/s <sup>2</sup> ] | 1    | 8.6566      | 3.8930  | 3.9273        | 10.7672 | 4.8776 | 13.9847 | 7.6938 |
|                         | 2    | 10.4680     | 5.2521  | 5.7846        | 10.2403 | 8.1747 | 12.4221 | 9.3766 |
|                         | 3    | 13.9887     | 7.6196  | 10.0524       | 7.7421  | 7.3391 | 8.7064  | 7.9127 |
| $F \times 10^3$ [N]     | -    | 0           | 0.305   | 1.096         | 1.100   | 0.888  | 1.094   | 0.857  |

mayores desplazamientos. Los desplazamientos mostrados en estas figuras se comparan con aquéllos que se obtienen con voltajes constantes  $v = 0$  y  $v = \bar{v}$ .

Los resultados obtenidos muestran una reducción considerable en los desplazamientos de los pisos,  $x_i$ , y en los desplazamientos relativos,  $d_i = x_i - x_{i-1}$ . El mejor desempeño se obtiene con la ecuación (4.49). También se puede apreciar que el control semiactivo ofrece mejores reducciones de los desplazamientos en comparación con los casos en que  $v = 0$  y  $v = \bar{v}$ , aunque con aceleraciones mayores. En la Tabla 4.2 se muestra el porcentaje de reducción que se obtiene con la ley de control de mejor desempeño.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

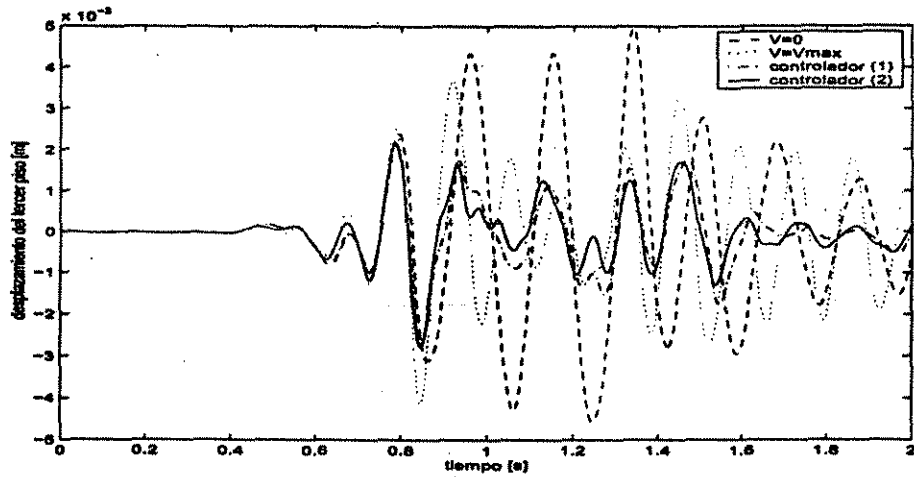


Figura 4.16: Comparación del desplazamiento del tercer piso para los casos:  $v = 0$ ,  $v = \bar{v}$ , controlador (1) y controlador (2).

Tabla 4.2: Comparación del control por saturación, controlador (2), y el caso sin control.

|         | piso | sin control | saturación |
|---------|------|-------------|------------|
| $x$ [%] | 1    | 100         | 22.28      |
|         | 2    | 100         | 20.91      |
|         | 3    | 100         | 26.85      |
| $d$ [%] | 1    | 100         | 22.28      |
|         | 2    | 100         | 44.87      |
|         | 3    | 100         | 52.49      |
| $a$ [%] | 1    | 100         | 56.35      |
|         | 2    | 100         | 78.09      |
|         | 3    | 100         | 52.46      |

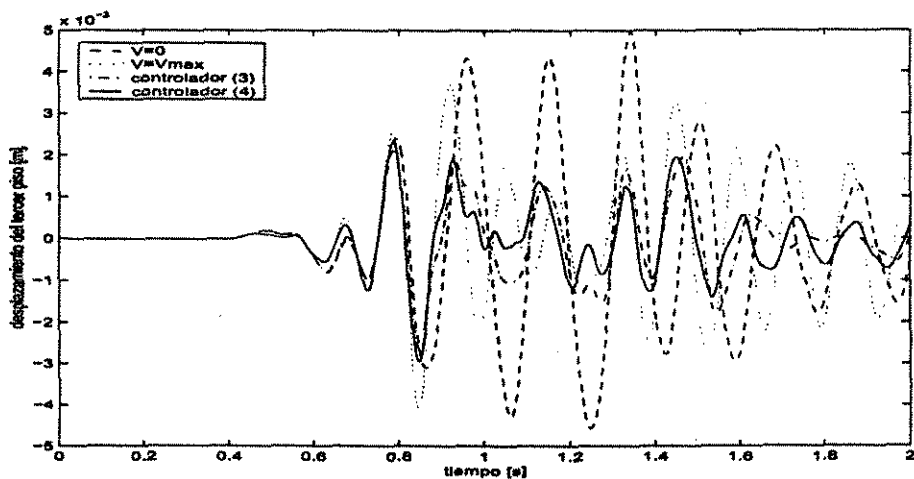


Figura 4.17: Comparación del desplazamiento del tercer piso para los casos:  $v = 0$ ,  $v = \bar{v}$ , controlador (3) y controlador (4).

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 5

# Conclusiones

Como pudo verse, el problema de la protección antisísmica de estructuras mediante control semiactivo plantea la necesidad de contar con un modelo matemático que describa con buena aproximación el comportamiento tanto del amortiguador como de la estructura, y que además permita implantar algún mecanismo de identificación de parámetros.

En este trabajo se presentó un nuevo enfoque para modelar amortiguadores magneto-reológicos basado en el modelo dinámico de fricción de LuGre. Las principales ventajas que se obtienen con el modelo desarrollado son su sencillez analítica y su capacidad de reproducción del comportamiento del amortiguador, comparable a la del modelo de Spencer, B.F. et al. (1996), el cual experimentalmente ha demostrado tener un buen desempeño. El modelo propuesto posee un estado interno que puede ser estimado a través de un observador asintótico. Además, la estructura del modelo, en conjunto con el observador, tiene la propiedad de ser lineal en los parámetros, lo que permite, bajo ciertas consideraciones, la identificación en tiempo real de los parámetros del amortiguador. La prueba de estabilidad del esquema observador-identificador muestra que el error de estimación tiende a cero asintóticamente, garantizando que el modelo desarrollado en este trabajo es capaz de reproducir fielmente la fuerza generada por el modelo de referencia (modelo de Bouc-Wen). Las simulaciones numéricas muestran que los desempeños del modelo y del esquema de identificación-observación son bastante buenos.

También se presentó un esquema de identificación de parámetros para una estructura de  $n$  grados de libertad con un amortiguador magneto-reológico colocado entre el primer piso y la base. El esquema propuesto emplea un algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido que permite la identificación en tiempo real de los parámetros de la estructura y del amortiguador.

En simulación numérica se obtienen excelentes resultados para el caso en el que se dispone de las aceleraciones de todos los pisos de la estructura. Los resultados de simulación muestran también que un esquema de identificación, diseñado para una estructura con un número reducido de grados de libertad, permite la determinación de las primeras frecuencias naturales para edificios de varios grados de libertad. Para el caso estudiado se obtuvieron excelentes resultados al determinar las dos primeras frecuencias de una estructura de seis grados de libertad empleando un esquema diseñado para una estructura de tres grados de libertad. Dichos resultados son muy similares a los que se obtienen mediante el método analítico de condensación estática, corroborando así la eficacia del esquema propuesto. Se observó también que el requisito para poder implantar el algoritmo de identificación es tener a disposición las mediciones de aceleración de los pisos que están relacionados con la disipación de energía a través del amortiguador (1 y 2, en el caso presentado) y del último piso.

En la última parte de este trabajo se presentaron dos leyes de control con una estructura similar a la del control por modos deslizantes. Para cada una de estas leyes se presentaron también sus aproximaciones mediante la función de saturación. Ambos diseños se basan en la teoría de Lyapunov para sistemas dinámicos. Las pruebas analíticas muestran que dadas las características de la excitación sísmica, las trayectorias del sistema son finalmente acotadas, garantizando la estabilidad del sistema. En simulación numérica se constató la gran capacidad de atenuación de la respuesta dinámica de una estructura de tres grados de libertad sujeta a una excitación sísmica de gran intensidad, utilizando las leyes de control desarrolladas. Los desempeños de ambas leyes de control son muy similares, aunque se obtienen mejores resultados con la ley de control diseñada para el sistema completo, siendo la aproximación de ésta la mejor alternativa para la implantación. Queda como trabajo a futuro el análisis de estabilidad (y el rediseño, si es el caso) de estas leyes de control, funcionando en conjunto con los esquemas de observación-identificación de parámetros propuestos en este trabajo.

Como trabajo a futuro queda también la obtención de datos experimentales para validar el modelo del amortiguador y los esquemas de identificación aquí presentados. También es necesario desarrollar un esquema de control para el caso en el que no se disponga de las aceleraciones de todos los pisos de la estructura controlada, ya que en la mayoría de los casos, una instrumentación completa para estructuras de múltiples grados de libertad resulta poco rentable, además de que la cantidad de cálculos realizados por el sistema de control podría aumentar considerablemente,

dificultando su implantación en la práctica.

Para garantizar el buen desempeño de este enfoque de protección sísmica es conveniente considerar los efectos del movimiento de rotación e inclinación de la estructura y el movimiento de translación en varias direcciones usando registros sísmicos de varias entradas. También resulta indispensable conocer la interacción de la cimentación con el suelo y los efectos que puedan tener las cargas de viento sobre la estructura. Un análisis más detallado puede considerar también el comportamiento no lineal de la estructura, aunque para estructuras nuevas cuyo diseño contempla el uso de amortiguadores magneto-reológicos sería conveniente canalizar toda la disipación de energía en el amortiguador y evitar que la estructura también la disipe ya que al hacerlo eventualmente sufre daño.

Sin duda, la utilización de amortiguadores magneto-reológicos constituye una alternativa viable para la atenuación de vibraciones, ya sea para la protección de edificios o para otras aplicaciones de diversa índole. El modelo propuesto en este trabajo para este tipo de dispositivos ofrece claramente varias ventajas que lo hacen sumamente atractivo en el análisis y diseño de sistemas que involucren a estos amortiguadores.

## Referencias

- Álvarez, L. y Jiménez, R. (2002), Real-time identification of magneto-rheological dampers, en *Proceedings of the 2002 IFAC World Congress*, vol. L.
- Álvarez, L. y Olmos, L. (2001), Observador y adaptación paramétrica de un modelo dinámico de fricción llanta/pavimento, *Memorias del 2o. Taller Nacional de Estimación y Observación en Sistemas no Lineales*, México, Series del Instituto de Ingeniería, (en prensa).
- Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., y Lischinsky, P. (1995), A new model for control of systems with friction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, No. 3, pp. 419-425.
- Carlson, J.D., Catanzarite, D.M., y St. Clair, K.A. (1996), Commercial magneto-rheological fluid devices. *International Journal of Modern Physics*, vol. 10, No. 23 y 24, pp. 2857-2865.
- Chopra, A. (1995), *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.
- Clough, R.W. y Penzien, J. (1993), *Dynamic of Structures*, 2a ed.. Nueva York, McGraw-Hill.
- Dahl, P. (1976), Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, vol. 14, No. 12, pp. 1675-1682.
- Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996b), Modelling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. *Smart Materials and Structures*, vol. 5, No. 5, pp. 565-575.
- Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996a), Seismic response reduction using magnetorheological dampers. en *Proceedings of the 1996 IFAC World Congress, San Francisco*, vol. L, pp. 145-150.
- Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1998), An experimental study of MR dampers for seismic protection. *Smart Materials and Structures*, vol. 7, pp. 693-703. Special

Issue on Large Civil Structures.

- Ghanem, R. y Shinozuka, M. (1994), A comparative analysis of system identification techniques for earthquake engineering applications. en *Structural Safety & Reliability*, vol. 2, pp. 783–788.
- González Alcorta, R. (1995), *Análisis y predicción de comportamiento dinámico de estructuras usando técnicas de identificación de sistemas y linealización equivalente*. Tesis doctoral, DE-PFI, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Horn, R. A. y Johnson, C. R. (1993), *Matrix Analysis*. Estados Unidos de América, Cambridge University Press.
- Ioannou, P.A. y Sun, J. (1996), *Robust Adaptive Control*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.
- Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear Systems*, 2a ed.. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.
- Kim, B. y Roschke, P.N. (1999), Linearization of magnetorheological behavior using a neural network. en *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California*, pp. 4501–4505.
- Li, Y. y Mau, S.T. (1991), A case study of mimo system identification applied to building seismic records. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 20, pp. 1045–1064.
- Ljung, L. (1987), *System Identification: Theory for the user*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- Loh, C.H. y Tou, I.C. (1995), A system identification approach to the detection of changes in both linear and non-linear structural parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 24, pp. 85–97.
- Luco, J. (1980), Soil-structure interaction and identification of structural models. en *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Civil Engineering and Nuclear Power*, vol. 2, pp. 10/1/1–10/1/31.
- Meirovitch, L. (1967), *Analytical Methods in Vibrations*, 1a ed.. Third Avenue, Nueva York, NY, Macmillan Publishing.
- Naeim, F. y Kelly, J.M. (1999), *Design of Seismic Isolated Structures*. Estados Unidos de América, John Wiley & Sons.
- Nagarajaiah, S., Sahasrabudhe, S., y Iyer, R. (2000), Seismic response of sliding isolated bridges with mr dampers. en *Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois*, pp. 4437–4441.

- Paz, M. (1997), *Structural Dynamics: theory and computation*, 4a ed.. Nueva York, NY, Chapman & Hall, International Thomson Publishing.
- Ramallo, J.C., Jonhson, E.A., Spencer, B.F., y Sain, M.K. (1999), Semiactive building base isolation. en *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California*, pp. 515–519.
- Ribakov, Y. y Gluk, J. (1999), Active control of mdof structures with supplemental electrorheological fluid dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 28, pp. 143–156.
- Safak, E. (1991), Identification of linear structures using discrete-time filters. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 117, pp. 3064–3085.
- Safak, E. (1995), Detection and identification of soil-structure interaction in buildings from vibration recordings. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 121, pp. 899–906.
- Skinner, R.I., Robinson, W.H., y McVerry, G.H. (1993), *An Introduction to Seismic Isolation*. West Sussex, Inglaterra, John Wiley & Sons.
- Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K., y Carlson, J.D. (1996), Phenomenological model of a magnetorheological damper. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 123, No. 3, pp. 230–238.
- Stewart, J. P. y Fenves, G. L. (1998), System identification for evaluating soil-structure interaction effects in buildings from strong motion recordings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 27, pp. 869–885.
- Wen, Y. (1976), Method for random vibration of hysteric systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 102, No. EM2, pp. 249–263.
- Xu, Y.L., Qu, W.L., y Ko, J.M. (2000), Seismic response control of frame structures using magnetorheological/electrorheological dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 29, pp. 557–575.
- Yi, F., Dyke, S.J., y Caicedo, J.M. (1999), Seismic response control using smart dampers. en *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California*, pp. 1022–1026.
- Zeng, H., Kuehn, G., Song, G., Sun, J., y Stalford, H. (2000), A semi-active controller for the vibration absorber on the i-35 walnut creek bridge. en *Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois*, pp. 3565–3569.