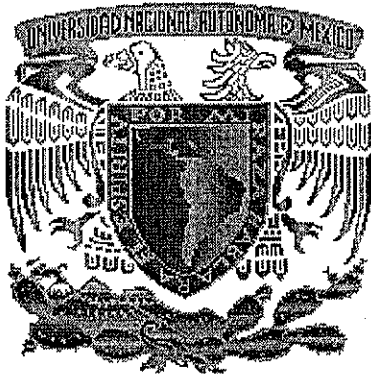


01174 /



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESTUDIO DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR CONJUGADA DURANTE  
DESPRESURIZACIÓN EN LÍNEAS QUE  
TRANSPORTAN UN LÍQUIDO VOLÁTIL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA PETROLERA

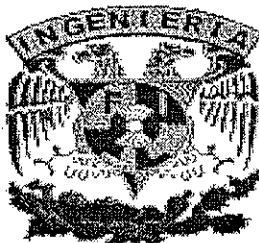
P R E S E N T A

SAÚL BAUTISTA FRAGOSO

NOTA: APARECEN DOS PUNTOS EN LA PARTE INFERIOR  
DIRECTOR DE TESIS

DR. YURI V. FAIRUZOV

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D. F. JUNIO 2002



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	5
RESUMEN.....	7
LISTA DE FIGURAS.....	8
LISTA DE TABLAS.....	10
NOMENCLATURA.....	11
Símbolos griegos.....	12
Subíndices.....	13
Superíndices.....	14
1. INTRODUCCIÓN	
1.1 Flujo multifásico transitorio en sistemas de transporte de petróleo.....	15
1.2 Conceptos y definiciones básicas.....	18
1.3 Fenómeno de despresurización.....	24

1.4 Fenómeno de transferencia de calor conjugada.....	25
1.5 Revisión de la literatura.....	28
1.5.1 Modelos de despresurización.....	28
1.5.2 Modelos de flujo de deriva.....	30
1.5.3 Modelos de transferencia de calor conjugada.....	38
1.6 Objetivos de la tesis.....	40
1.7 Descripción de la tesis.....	41
<b>2. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO</b>	
2.1 Planteamiento del problema.....	42
2.2 Ecuaciones básicas.....	43
2.3 Relaciones constitutivas.....	47
2.4 Condiciones iniciales y de frontera.....	49
2.5 Criterio de aplicabilidad.....	50
2.5.1 Desarrollo de ecuaciones.....	50
<b>3. DESARROLLO DE UN MODELO DE FLUJO ESTACIONARIO EN UN POZO</b>	
3.1 Ecuaciones básicas.....	55
3.2 Relaciones constitutivas.....	56
3.3 Método numérico para el modelo estacionario.....	56
<b>4. MÉTODO NUMÉRICO PARA EL MODELO TRANSITORIO</b>	
4.1 Discretización de ecuaciones básicas.....	63
4.2 Discretización de condiciones de frontera.....	73

4.2.1 Entrada.....	73
4.2.2 Salida.....	77
<b>5. RESULTADOS Y DISCUSIONES</b>	
5.1 Simulaciones de despresurización.....	83
5.1.1 Simulaciones de flujo estacionario en un sistema tubería horizontal – raiser.....	83
5.1.2 Simulaciones del modelo transitorio.....	87
5.1.3 Efecto de la transferencia de calor conjugada.....	91
<b>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	
6.1 Sumario.....	98
6.2 Contribuciones hechas.....	99
6.3 Conclusiones.....	100
6.4 Recomendaciones para futuros trabajos.....	101
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>102</b>

## AGRADECIMIENTOS

A la *Universidad Nacional Autónoma de México*, porque me abrió las puertas del conocimiento, porque es nuestra *Máxima Casa de Estudios* y por el orgullo de ser universitario.

A la *División de Estudios de Posgrado* de mi querida *Facultad de Ingeniería y al Instituto de Ingeniería*, porque aquí viví por más de dos años y aprendí a ser mejor Ingeniero.

A todas las demás *Instituciones Educativas* que me formaron académicamente porque sin una de estas, no hubiera llegado a obtener esta oportunidad de seguir preparándome.

Al *Dr. Yuri V. Fairuzov*, por las enseñanzas que me transmitió y la conducción de este trabajo, gracias.

A mis sinodales, *Dr. Faustino Fuentes Nucaméndi, Dr. Carlos Lira Galeana, Dr. Jesús Rivera Rodríguez y Dr. Fernando Samaniego Verduzco*, por las aportaciones valiosas para la elaboración de este trabajo.

A mis *profesores*, que tantos conocimientos y experiencias me transmitieron para el mejor desarrollo de mi profesión.

Al *Instituto Mexicano del Petróleo*, por la oportunidad y apoyo que me brindó para realizar mis estudios de posgrado.

A mi esposa *Lilia*, por haberte robado las horas más preciadas de sueño, esparcimiento y descanso al acompañarme en esta aventura en la que siempre estuviste a mi lado, no tengo palabras para agradecerte tantas cosas, Li, te amo y te quiero mucho.

A mis hijas *Lorena y Rosario*, por aquellos días en los que me preguntaban porque no estaba con ustedes, aquí esta la respuesta; las quiero mucho, son mi adoración y sirva el presente trabajo para que tengan el ejemplo de que con dedicación, tenacidad, esfuerzo y sacrificio podemos llegar a la meta que nos fijemos.

A mis padres *Isauro y Otilia*, gracias por darme la vida, nunca me cansaré de agradecer el cariño, amor y educación que me dieron; los quiero mucho.

A mis hermanos *Margarita, Irma, Rocío, José Isauro, Otilia y Lila*, por el cariño que les tengo y los buenos y malos momentos que nos unen desde aquellos días en que su juventud guiaba mi niñez.....

Dicen que *al hombre lo conoceréis por sus frutos, y he aquí uno de ellos.....*

## RESUMEN

En este trabajo se analiza el flujo transitorio bifásico y transferencia de calor conjugada en una tubería vertical que transporta un líquido volátil (Propano) durante el proceso de despresurización. Se plantea un modelo hidrodinámico que considera el modelo de flujo de deriva para describir el flujo del fluido en la tubería. El modelo de transferencia de calor conjugada transitorio utilizado se basa en una formulación matemática en la cual la pared de la tubería y el fluido se suponen en equilibrio térmico. El efecto de la capacidad térmica se considera con un término adicional en la ecuación de energía. Se propone un criterio de aplicabilidad para problemas de transferencia de calor conjugada sin generación de calor en la pared. Se elaboró un modelo de flujo estacionario para desarrollar el modelo de flujo transitorio. Se investigó la respuesta del sistema ante una despresurización súbita. Se discute el significado de los resultados obtenidos. Los resultados obtenidos muestran que la aplicación de este modelo es un método adecuado para la solución de problemas que requieren simular transferencia de calor conjugada en flujo transitorio vertical de dos fases durante despresurización, cuando sea posible suponer que existen condiciones cercanas al equilibrio térmico local.



---

---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Problema de transferencia de calor conjugada en flujo de dos fases.....	27
2.1	Esquema del sistema tubería horizontal-raiser.....	43
2.2	Mapa de patrón de flujo para correlaciones de resbalamiento.....	48
2.3	Efectos de conducción y convección.....	51
4.1.1	Esquema de diferencias escalonadas usado en el modelo hidrodinámico.....	64
4.1.2	Algoritmo de cálculo.....	65
4.2	Condición de frontera a la entrada.....	73
4.3	Condición de frontera a la salida.....	77
5.1	Perfil de presión.....	85
5.2	Perfil de fracción de vacío.....	85
5.3	Perfil de velocidad.....	86
5.4	Perfil de velocidades de las fases.....	86
5.5	Perfiles transitorios de presión.....	87

---

---

5.6.a	Perfil transitorio de velocidad a $t = 0$ s.....	88
5.6.b	Perfil transitorio de velocidad a $t = 250$ s.....	89
5.6.c	Perfil transitorio de velocidad a $t = 550$ s.....	89
5.7	Perfiles transitorios de fracción de vacío.....	90
5.8	Perfiles transitorios de variación de masa.....	91
5.9	Variación del gasto descargado.....	92
5.10	Variación de la presión a la salida del raiser.....	93
5.11	Variación de la fracción de vacío en la entrada de la tubería.....	93
5.12	Variación de la fracción de vacío a la entrada del raiser.....	94
5.13	Variación de la fracción de vacío a la salida del raiser.....	94
5.14	Variación de la presión a la entrada de la tubería.....	95
5.15	Variación de la presión en la entrada del raiser.....	95
5.16	Variación de la temperatura a la entrada de la tubería.....	96
5.17	Variación de la temperatura a la entrada del raiser.....	97
5.18	Variación de la temperatura a la salida del raiser.....	97

## LISTA DE TABLAS

1.1	Correlaciones para el cálculo de la velocidad relativa.....	33
1.2	Correlaciones para el cálculo de la velocidad de deriva.....	34
5.1	Resumen de datos del caso estudiado.....	84

## NOMENCLATURA

A = área,  $m^2$

c = capacidad térmica,  $J/KgK$

$C_o$  = parámetro de distribución

D = diámetro interno de la tubería, m

Fa = factor de adiabaticidad

G = velocidad másica,  $Kg/sm^2$

$j_D^g$  = flujo de deriva, m/s

$\langle J \rangle$  = flujo volumétrico; velocidad superficial

K = Coeficiente de fricción en la pared

k = conductividad térmica,  $W/mK$

L = longitud, m

M = gasto másico,  $Kg/s$

---

---

Nd	= relación de densidades
p	= presión, Pa
q	= calor, W; flujo de calor, W; gasto volumétrico total, m <sup>3</sup> /s
r	= coordenada radial
t	= tiempo, s
T	= temperatura, K
u	= energía interna específica, J/Kg
U	= velocidad
v	= volumen específico
V	= velocidad del flujo, m/s
<V>	= velocidad promedio
W	= flujo volumétrico
x	= elevación, m; coordenada axial
X	= calidad másica del vapor

### Símbolos griegos

$\alpha$	= fracción de vacío
$\delta$	= espesor de pared de la tubería, m
$\Delta$	= elemento diferencial

- 
- $\varepsilon$  = fracción de vacío  
 $\rho$  = densidad, Kg/m<sup>3</sup>  
 $\sigma$  = tensión superficial  
 $\beta$  = coeficiente de expansión  
 $\rho u$  = energía interna por unidad de volumen, J/m<sup>3</sup>

### Subíndices

- a = condición atmosférica  
b = despresurización  
cv = volumen de control  
fg = diferencia entre las propiedades del gas y líquido  
g = gas  
gj = de deriva  
in = entrada  
l = líquido  
m = mezcla  
o = aceite  
out = salida

r = relativa

s = superficial

w = referente a la pared

1 = líquido

2 = gas

21 = de deriva

## **Superíndices**

n = valor en el instante de tiempo actual (ya conocido)

n+1 = valor en el “próximo” instante de tiempo (aún por conocer)

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### **1.1 Flujo multifásico transitorio en sistemas de transporte de petróleo.**

Una apertura intencional o accidental en una tubería que contiene un líquido subenfriado a alta presión puede producir una rápida despresurización. El líquido se evapora cuando su presión alcanza su presión de burbuja y fluye a partir de este momento como una mezcla de dos fases. El modelado de este proceso desempeña un papel importante en el análisis de escenarios de accidentes y en el diseño de despresurización de sistemas controlados en la industria petrolera.



En líneas de conducción, si el fluido transportado es un líquido evaporado como el gas licuado de petróleo (LPG) o condensado, una ruptura de la tubería puede conducir a la formación de una nube de vapor en la atmósfera. Por lo tanto, es importante conocer las características del flujo en la ruptura para determinar el comportamiento del flujo en este punto y establecer las condiciones de frontera con modelos que describen la dispersión de la nube de vapor. En la industria petrolera costa afuera, una predicción exacta de los perfiles de presión y temperatura es necesario para estimar el riesgo de depositación de ceras y formación de hidratos en líneas de flujo multifásicas submarinas y raisers después de cierre o despresurización de sistemas de producción de aguas profundas. [Shoup, 1998]. Aislar las tuberías multifásicas en aguas profundas es una estrategia para que la temperatura del fluido fluyendo permanezca arriba de la temperatura de formación de hidratos bajo flujo normal. De este modo, ya no es necesaria la inyección de un inhibidor de hidratos. Cuando ocurre un cierre no programado, un método para prevenir los tapones de hidratos por enfriamiento mayor al de la temperatura ambiente es la despresurización de la línea. Antes de que se alcancen las condiciones de formación de hidratos en tuberías que conectan a los pozos productores con las instalaciones de producción flotantes, es importante predecir el movimiento del líquido durante la despresurización, para determinar la carga hidrostática remanente en el fondo marino al final del evento de despresurización.

En la industria química y petroquímica, la despresurización de tuberías que transportan líquidos altamente volátiles puede ser una operación riesgosa debido a las temperaturas bajas generadas dentro del fluido durante el proceso de despresurización.

[Haque, 1990]. Una predicción de la temperatura mínima estable del fluido en el sistema requiere modelar el flujo bifásico transitorio (para ver con que rapidez disminuye la temperatura en el sistema y durante que tiempo alcanza una distribución de temperaturas en estado estable) y transferencia de calor. Entender el fenómeno de despresurización es muy importante en el desarrollo de prácticas de seguridad y procedimientos para minimizar las consecuencias de descargas controladas, o descontroladas de líquidos inflamables o tóxicos que se evaporan en tuberías.

En recipientes de separación la despresurización generalmente se manifiesta en el sistema de quema y en algunas ocasiones, cuando existe una condición de sobrepresión antes del sistema de alivio de presión. Existe una norma API RP 521 (1990) que contempla la despresurización para proteger recipientes y tuberías por una falla debido al fuego. En altas temperaturas, la presión máxima de trabajo permisible para un componente de un proceso puede disminuir y causar una ruptura a una presión menor que la presión de diseño. Así, todos los sistemas que manejen materiales tóxicos o inflamables, y sujetos a un cierre en el comienzo de la quema, se proveen normalmente de un sistema de despresurización. Los cálculos de despresurización son complejos porque el flujo varía con el tiempo y se deben resolver una o más ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones son complejas porque consideran la transferencia de calor, balance de energía, vaporización, ecuación de estado, flujo del fluido, etc. La solución utiliza ecuaciones diferenciales parciales resueltas por métodos analíticos o aproximaciones numéricas.

## 1.2 Conceptos y definiciones básicas.

Con la finalidad de entender de una manera más simple este trabajo, es necesario definir los conceptos y terminología que con frecuencia se utilizan durante el desarrollo del mismo.

**Fluido:** Es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante, sin importar cuán pequeño sea ese esfuerzo.

**Flujo multifásico:** es el flujo simultáneo de varias fases. El flujo bifásico es el caso más sencillo de flujo multifásico. En la industria petrolera los más relevantes son: gas-líquido, líquido-líquido, líquido-sólido, y gas-líquido-sólido.

**Fase:** es una cantidad de materia homogénea en toda su extensión, tanto en composición química como en estructura física. Existen tres tipos de fases: sólida, líquida y gaseosa. Un sistema puede contener uno o más fases.

**Patrón de flujo:** es la configuración (estructura) geométrica de las fases en la tubería. El patrón de flujo está determinado por la forma de la interfaz.

**Interfaz:** es la superficie que separa a dos fases.

**Gasto másico:** es la cantidad de masa que atraviesa una área por unidad de tiempo.

$$M = \rho UA \quad (1.1)$$

El gasto másico total es la suma de los gastos másicos de cada fase.

$$M = M_o + M_g \quad (1.2)$$

**Velocidad másica:** es la rapidez con que una masa atraviesa el área de una sección transversal.

$$G_G = \frac{M_G}{A}; \quad G_L = \frac{M_L}{A}; \quad G = \frac{M}{A}; \quad G = G_L + G_G \quad (1.3)$$

**Calidad:** se define como la relación del gasto másico de gas y el gasto másico total de la mezcla.

$$x = \frac{M_G}{M} \quad (1.4)$$

A la relación del gasto másico de líquido y el gasto másico total, se le conoce como **fracción de humedad**.

$$1 - x = \frac{M_L}{M} \quad (1.5)$$

La calidad y la fracción de humedad se pueden definir en términos de las velocidades másicas.

$$x = \frac{G_G}{G}; \quad 1 - x = \frac{G_L}{G} \quad (1.6)$$

**Gasto volumétrico de aceite:** es el volumen de aceite que atraviesa una sección transversal de la tubería por unidad de tiempo.

$$q_o = U_o A_o \quad (1.7)$$

**Gasto volumétrico de gas:** es el volumen de gas que atraviesa una sección transversal de la tubería por unidad de tiempo.

$$q_g = U_g A_g \quad (1.8)$$

**Gasto volumétrico total:** es el volumen de la mezcla que atraviesa una sección transversal de la tubería por unidad de tiempo. El gasto volumétrico total es la suma de los gastos de cada fase.

$$q = q_o + q_g \quad (1.9)$$

**Velocidad superficial de una fase:** es la velocidad que tendría la fase si fluyera sola en la tubería. A la velocidad superficial también se le llama flujo volumétrico de la fase y representa el gasto volumétrico de la fase por unidad de área de la sección transversal de la tubería. Así, las velocidades superficiales de aceite y gas son, respectivamente:

$$U_{so} = \frac{q_o}{A} \quad (1.10)$$

$$U_{sg} = \frac{q_g}{A} \quad (1.11)$$

**Velocidad de la mezcla:** es la suma de velocidades superficiales de las fases.

$$U_m = U_{so} + U_{sg} \quad (1.12)$$

Por medio de las Ecs. (1.10) y (1.11) es fácil demostrar que

$$U_m = \frac{q}{A} \quad (1.13)$$

**Relación entre velocidad real y superficial del aceite y gas:**

$$U_o = \frac{U_{so}}{\alpha_o} \quad (1.14)$$

$$U_g = \frac{U_{sg}}{1 - \alpha_o} \quad (1.15)$$

Donde:

**Fracción volumétrica de aceite:** es la relación entre el área transversal ocupada por aceite y el área total.

$$\alpha_o = \frac{A_o}{A_t} \quad (1.16)$$

**Fracción volumétrica de gas:** es la relación entre el área transversal ocupada por gas y el área total.

$$\alpha_g = \frac{A_g}{A_t} \quad (1.17)$$

A la fracción volumétrica del gas también suele llamársele fracción de vacío.

El término colgamiento es común escucharlo en la industria petrolera, en flujos de gas-líquido, se utiliza para definir la relación entre el volumen de líquido existente en una sección de tubería a las condiciones de flujo, y el volumen de la sección aludida.

De las Ecs. 1.16 y 1.17 es evidente que

$$A = A_o + A_g \quad (1.18)$$

y

$$\alpha_o + \alpha_g = 1 \quad (1.19)$$

**Relación de velocidades:** se define como la relación entre la velocidad del aceite y la velocidad del gas

$$K = \frac{U_o}{U_g} \quad (1.20)$$

**Velocidad relativa o de resbalamiento:** es la diferencia entre las velocidades de las fases.

$$U_r = U_o - U_g \quad (1.21)$$



### 1.3 Fenómeno de despresurización.

Una descripción detallada de los procesos físicos que ocurren en la despresurización de una tubería (Fairuzov 1998) puede dividirse en tres etapas: propagación de la onda de despresurización, propagación de la evaporación en la frontera y descarga de dos fases.

*Propagación de la onda de despresurización.* Una apertura intencional o accidental (ruptura) de una línea conduce a una despresurización rápida del fluido. La onda resultante de despresurización se propaga a lo largo de la tubería a la velocidad del sonido local. Durante un período corto de tiempo esta propagación ocurre sólo en la fase líquida. La presión en el extremo intacto es igual a la presión inicial. El flujo es crítico en el extremo de la ruptura. Después que la expansión de la onda alcanzó el extremo intacto, la presión del fluido en la tubería es muy cercana a la presión de saturación correspondiente a la temperatura del fluido.

*Propagación del frente de evaporación.* La propagación del líquido evaporado en la frontera a lo largo de la tubería, inicia en el extremo reventado. El proceso de despresurización continúa con una considerable reducción rápida del gasto. Cuando la presión en el extremo reventado ha disminuido considerablemente, el flujo de dos fases fuera de la tubería deja de ser crítico.

*Descarga de dos fases.* Después de que el frente del líquido evaporado alcanzó el extremo intacto, ocurre la evaporación del líquido dentro de toda la tubería. El proceso de evaporación del líquido causa cambios constantes de los patrones de flujo. La temperatura del fluido disminuye debido a la caída de presión en el fluido. La pared de la tubería se enfría debido al flujo del fluido. Debe señalarse que la presión del fluido puede alcanzar una presión inferior (presión mínima en el proceso de despresurización,  $P_n$ ) a su presión normal de burbujeo ( $P_{sat}$ ) durante la etapa de despresurización de la propagación de onda. Alamgir y colaboradores [1981] definen como “Presión no alcanzada” (Pressure undershoot) a la diferencia de  $P_{sat} - P_n$ .

#### **1.4 Fenómeno de transferencia de calor conjugada**

El proceso de evaporación del líquido causado por la despresurización de una tubería puede significar una caída importante de la temperatura del fluido. Esto es peligroso, porque la temperatura de la pared de la tubería estará expuesta a una temperatura cercana a la temperatura de transición maleable-quebradizo del acero del cual está fabricada. La predicción de transferencia de calor de la pared de la tubería al flujo de dos fases durante el proceso de despresurización es un problema de transferencia de calor conjugada. La relación de transferencia de calor a la interfaz del fluido – pared y las condiciones locales del fluido son directamente dependientes de uno a otro, y necesitan calcularse simultáneamente.

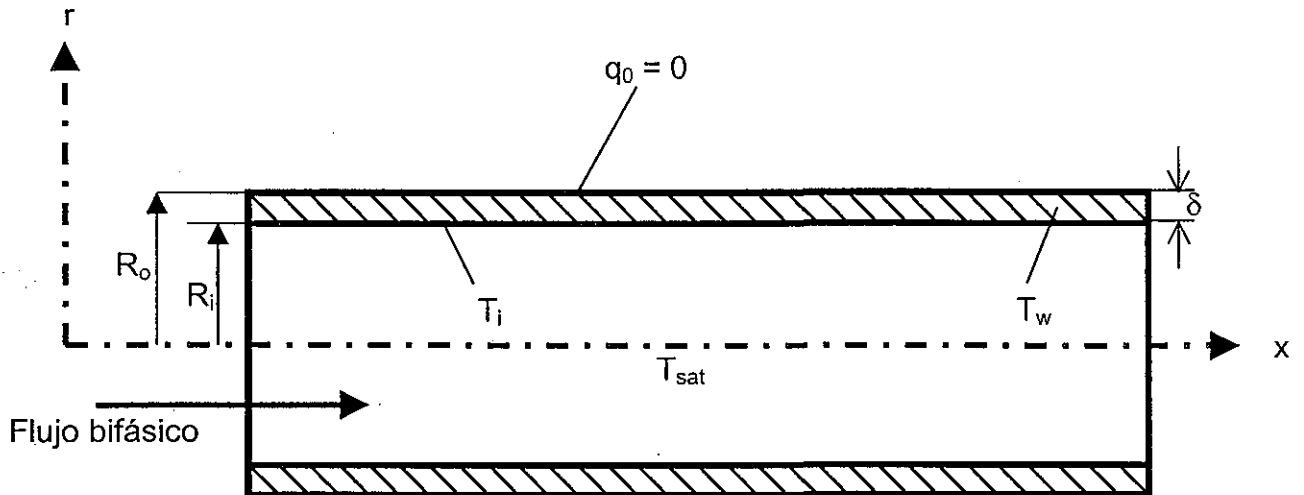
Debido a la gran aplicación del flujo multifásico en la industria del petróleo, química, aeroespacial y procesos industriales, se promueve el desarrollo de métodos confiables para el análisis de procesos transitorios en sistemas de dos fases, en los cuales los campos de temperaturas dentro del fluido en movimiento y de la frontera de la pared de la tubería son directamente dependientes la una a otra. Ejemplos de este tipo de procesos incluyen despresurización accidental o controlada de tuberías marinas aceite/gas, evaporación de líquidos multicomponentes altamente volátiles durante accidentes en plantas químicas, pérdida accidental de líquido refrigerante en una planta nuclear, etc.

Modelar la transferencia de calor conjugada en sistemas de flujo bifásico es importante en muchas aplicaciones de ingeniería. Los problemas de transferencia de calor conjugada se incrementan en situaciones cuando el campo de temperatura del fluido en movimiento y el campo de temperatura en los límites de las paredes son dependientes uno de otro y es necesario calcularlos simultáneamente. La temperatura del fluido en flujo de dos fases depende de la presión, por lo tanto, una variación local de presión produce una diferencia local de temperatura entre el fluido y la pared (Fairuzov 2000).

La transferencia de calor del fluido a la pared ocurre porque el fluido y la pared están en contacto directo. En muchas situaciones, la pared tiene un espesor finito, el material de la pared tiene una capacidad térmica finita y la condición de frontera térmica es conocida en la superficie exterior de la pared.

Modelar estos sistemas requiere una descripción correcta del fenómeno de transferencia de calor conjugada cuando existen condiciones de flujo bifásico. El detalle de este fenómeno se presenta en la Fig. 1.1 La transferencia de calor conjugada causada

por presiones transitorias sucede durante condiciones de arranque, paros o despresurización de tuberías largas que transportan mezclas de líquido-gas (vapor).



**Figura 1.1 Problema de transferencia de calor conjugada en flujo de dos fases**

Donde:

- $\delta$ : Espesor de pared de la tubería.
- $r$ : Coordenada radial.
- $x$ : Coordenada axial
- $q_0$ : Flujo de calor externo por unidad de volumen.
- $R_i$ : Radio interno de la tubería.
- $R_o$ : Radio externo de la tubería
- $T_i$ : Temperatura interna, en la interfaz pared-fluido.
- $T_{sat}$ : Temperatura de saturación del fluido.
- $T_w$ : Temperatura de la pared de la tubería.

## 1.5 Revisión de la literatura

### 1.5.1 Modelos de despresurización.

Muchos de los trabajos realizados se han enfocado al modelado de despresurización de tuberías relativamente cortas y sistemas de un componente (agua/vapor). Una revisión de estos modelos existentes, correlaciones y códigos de computación se describe por Lahey y Moody [1977], Riebold [1981] y Jackson [1981].

La despresurización en tuberías largas ha recibido poca atención en la literatura, se han propuesto varios métodos y modelos para simular la despresurización de tuberías de gas (McKee [1990]; Goh [1989]). Algunos como Botros y colaboradores [1989] obtuvieron una solución analítica del problema linearizando el término de fricción en la ecuación de momento. Sin embargo, este modelo no puede aplicarse para despresurización de dos fases.

Por su parte Morrow y colaboradores [1980] presentaron un modelo para despresurización de una tubería larga conteniendo gas licuado de petróleo (LPG), sin validación experimental. Grolmes y colaboradores [1984] examinaron teóricamente la despresurización de una tubería larga conteniendo un componente líquido volátil. Su estudio se basó en el modelo homogéneo de equilibrio y el modelo de flujo de resbalamiento de dos fases. Tam y Higgins [1990] desarrollaron un modelo empírico simple para predecir el gasto másico de salida de una tubería larga conteniendo gas licuado de petróleo (LPG). Richardson y Saville [1991] emplearon un modelo pseudo estacionario de flujo de dos fases para simular despresurización de tuberías largas que transportan mezclas de hidrocarburos y mostraron la validación para su modelo. Chen y

colaboradores [1995a] formularon un modelo para despresurización de dos fases el cual toma en cuenta la transferencia de calor por convección forzada entre la pared de la tubería y el fluido. Sin embargo, los efectos de la capacidad térmica de la pared y la conducción de calor transitoria los desprecia en su estudio. Esta aproximación puede ser utilizada para transferencia de calor en flujos que son conducidos por tuberías de espesor muy delgado. La relación del espesor de pared y el diámetro de tuberías de acero empleadas en el transporte de líquidos volátiles alcanza el valor de 0.13 (Engineering Data Book, 1972) y de esta manera, se transfiere una gran cantidad de calor al fluido durante la despresurización de la tubería.

En la segunda parte del artículo Chen y colaboradores [1995b], propusieron un método numérico simplificado para resolver ecuaciones de flujo multicomponente de dos fases, y presentaron un estudio detallado de la despresurización de tuberías conteniendo mezclas de uno y dos componentes de líquido volátil.

Todos los modelos mencionados previamente para despresurización de tuberías largas desprecian la capacidad térmica de la pared de la tubería; algunos de esos modelos suponen que el flujo del fluido en la tubería es adiabático.

Fairuzov [1998] desarrolló un modelo matemático para simular la despresurización de una tubería larga que contiene una mezcla multicomponente de líquido volátil. Se incorporó el efecto de capacidad térmica de la pared de la tubería empleando una nueva aproximación para la formulación de la ecuación de conservación de energía, para flujo de fluidos en la tubería. Se realizó un estudio detallado para investigar el efecto de transferencia de calor entre el flujo de fluido y la pared de la

tubería. El modelo fue validado comparando con datos experimentales publicados previamente para despresurización de una tubería conteniendo una mezcla de 2 componentes. Sin embargo, dicho estudio no considera flujo en tuberías verticales, así como tampoco el movimiento relativo de las fases.

Más recientemente, Fairuzov [1998] desarrolló una solución numérica para el problema de despresurización basado en la ecuación de energía modificada determinándose un parámetro adimensional, el factor de adiabaticidad de flujo volátil o  $F_a$ , que gobierna el efecto de la capacidad térmica de la pared de la tubería en el comportamiento de flujo de dos fases. Este parámetro permite cuantificar la salida de condiciones adiabáticas causada por la transferencia de calor de la pared al flujo.

El trabajo realizado por Fairuzov [1998], fue aplicado para tuberías horizontales por lo cual el presente trabajo, es extendido para analizar el flujo en tuberías verticales incluyendo el modelo de flujo de deriva para describir el flujo del fluido en la tubería.

### **1.5.2 Modelos de flujo de deriva**

Una técnica para analizar el flujo unidimensional es mediante los modelos analíticos simples. Estos aunque no toman en cuenta los detalles de flujo pueden ser muy satisfactorios para predecir parámetros de diseño. Por ejemplo, en el modelo homogéneo los componentes son tratados como un pseudofluido con propiedades promedio, sin preocuparse por una descripción detallada del patrón de flujo. En el modelo de flujo separado las fases se suponen que fluyen una junto a otra, se escriben las ecuaciones para cada una de las fases y la interacción entre las fases también se considera. Este modelo

toma en cuenta el efecto que las dos fases pueden tener diferentes propiedades y velocidades. El modelo de flujo de deriva (drift flux) es esencialmente un modelo de flujo separado que hace énfasis en el movimiento relativo de las fases más que en el movimiento de las fases individuales. Es una alternativa para una solución de problemas de flujo transitorio.

El flujo de deriva puede expresarse en términos de la velocidad relativa

$$j_{gl} = v_{gl}\alpha(1 - \alpha) \quad (1.22)$$

o en términos de los componentes de flujo

$$j_{gl} = (1 - \alpha)j_g - \alpha j_l \quad (1.23)$$

como

$$j = j_l + j_g$$

$$j_l = (1 - \alpha)j - j_{gl} \quad (1.24)$$

$$j_g = \alpha j + j_{gl} \quad (1.25)$$

Aunque el modelo de flujo homogéneo es una herramienta poderosa para analizar el flujo multifásico, cuando existe resbalamiento entre las fases, es mejor aplicar el modelo de flujo de deriva que es esencialmente un modelo de flujo separado el cual toma en cuenta el movimiento relativo en lugar del movimiento individual de las fases. La fracción de vacío, densidad media y el flujo de momento pueden expresarse en función del flujo homogéneo, valuado conjuntamente con un factor de corrección o un término adicional, que es una función de las relaciones del flujo de deriva a los componentes de flujo.



$$\alpha = \frac{j_2}{j} \left( 1 - \frac{j_{21}}{j_2} \right) \quad (1.26)$$

$$\rho_m = \frac{j_1 \rho_1 + j_2 \rho_2}{j} + (\rho_1 - \rho_2) \frac{j_{21}}{j} \quad (1.27)$$

La teoría de flujo de deriva es particularmente conveniente para analizar regímenes de flujo en donde la gravedad o alguna otra fuerza, se contrarresta con el gradiente de presión y las fuerzas entre los componentes.

El modelo de flujo de deriva ha sido utilizado mundialmente para calcular la fracción de vacío y otras relaciones constitutivas en flujos vertical gas/líquido de dos fases. Sin embargo, el modelo propuesto por Zúber y Findlay (1965) es un modelo general que no depende explícitamente de la orientación de la tubería. No obstante, los parámetros de flujo de deriva  $C_o$  y  $V_{Gj}$  que se definen a continuación, dependerán de la orientación del flujo y régimen de flujo en flujos gas/líquido.

Parámetro de distribución:

$$C_o = \frac{\langle \varepsilon (V_{sg} + V_{sl}) \rangle}{\langle \varepsilon \rangle \langle (V_{sg} + V_{sl}) \rangle} \quad (1.28)$$

Velocidad de deriva:

$$V_{Gj} = \frac{\langle \varepsilon (1 - \varepsilon) V_r \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \quad (1.29)$$

El símbolo  $\langle \rangle$  representa el área promedio total de la sección de tubería,  $V_r$  es la velocidad relativa ( $V_g - V_l$ ) y  $\varepsilon$  es la fracción de vacío

Para flujo vertical, la velocidad de deriva  $V_{Gj}$ , resulta de un balance entre el arrastre local interfacial y la flotación sobre la fase dispersa. Este no es el caso para flujos

horizontales. La velocidad de deriva en estos flujos se relaciona con la distribución de fases y con el resbalamiento local que resulta de los gradientes de presión axial y lateral.

Además, en flujos horizontales separados la estructura de la interfase determina los parámetros de flujo. Doster [1999] examinó la estabilidad numérica asociada con la solución de diferencias finitas de las ecuaciones de la mezcla del flujo de deriva. Las correlaciones utilizadas para la velocidad relativa y el parámetro de distribución se tomaron de TRAC - P1A [1979] (Tabla 1.1)

**Tabla 1.1 Correlaciones para el cálculo de la velocidad relativa**

RÉGIMEN DE FLUJO	VELOCIDAD RELATIVA	NO. DE EC.
Burbuja	$V_r = \frac{1.41}{\alpha_l} \left[ \frac{g(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right]^{\frac{1}{4}}$	1.30
Bache	$V_r = \frac{0.345}{\alpha_l} \left[ \frac{Dg(\rho_l - \rho_g)}{\rho_l} \right]^{\frac{1}{2}}$	1.31
Turbulento agitado	$V_r = \frac{v}{(1 - C_o \alpha_g) / (C_o - 1) + \alpha_g \rho_g / \rho}$	1.32
Anular	$V_r = \frac{v}{\left[ \rho_g (76 - 75 \alpha_g) / \rho_l \sqrt{\alpha_g} \right]^{\frac{1}{2}} + \alpha_g \rho_g / \rho}$	1.33

El parámetro de distribución dado como  $C_o = 1.1$  y  $\alpha_g$  se restringe a un valor máximo de 0.8

Pan [1999] investigó las características del estado estacionario de un circuito cerrado basado en el modelo de flujo de deriva, tomando en cuenta el cambio en el patrón de flujo del fluido subenfriado en la entrada.

Este estudio adoptó un conjunto de regímenes de flujo simplificados para la velocidad de deriva donde clasifica la variación de velocidades de deriva referidas al trabajo desarrollado por Ishii (1977) (Tabla 1.2).

**Tabla 1.2 Correlaciones para el cálculo de la velocidad de deriva**

RÉGIMEN DE FLUJO	VELOCIDAD DE DERIVA	NO. DE EC.
Burbuja, bache y agitado	$U_{gj} = 1.4 \left( \sigma_g \left( \frac{1}{Nd} - 1 \right) \right)^{0.25}$	1.34
Anular	$U_{gj} = \frac{1 - \alpha}{\alpha + 4\sqrt{Nd}} * \left[ j + \sqrt{\frac{\Delta\rho g D (1 - \alpha)}{0.015 \rho_f}} \right]$	1.35

El parámetro de distribución fue tomado de la forma funcional para la variación de  $C_o$  con presión y calidad de flujo sugerida por Dix (1971).

$$C_o = \beta \left[ 1 + \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^b \right] \quad (1.36)$$

$$b = \left( \frac{\rho_g}{\rho_f} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{(1 + Nd \left( \left( \frac{1 - x}{x} \right) \right))}$$

$$Nd = \frac{\rho_g}{\rho_f}$$

Lahex [1992] presenta datos para flujo horizontal de dos fases teniendo varios regímenes de flujo. Muestra que el modelo de flujo de deriva es capaz de correlacionar estos datos y que la velocidad de deriva es normalmente finita. Para flujo estratificado el parámetro de distribución  $C_o$  se determina de la siguiente manera:

$$C_o \cong \frac{\langle V_G \rangle_G}{\langle j \rangle} \quad (1.37)$$

y la velocidad de deriva

$$V_{Gj} = \frac{\langle \alpha(1-\alpha)V_r \rangle}{\langle \alpha \rangle} \quad (1.38)$$

Takeuchi, Kenji [1992] desarrolló una correlación generalizada para flujo vertical a partir del método utilizado por Wallis. La velocidad relativa se definió como:

$$U_R = V_{gj} / (1 - \alpha) \quad (1.39)$$

$$U_R = \frac{[\langle\langle V_{gj} \rangle\rangle] + (C_o - 1)U_m}{1 - (C_o - 1)\langle\alpha\rangle\Delta\rho / \langle\rho_m\rangle} (1 - \alpha) \quad (1.40)$$

y el parámetro de distribución como

$$C_o = \frac{\langle\alpha j\rangle}{\langle\alpha\rangle\langle j\rangle} \quad (1.41)$$

Kim [1991], utilizando las mismas correlaciones para la velocidad relativa y el parámetro de distribución de TRAC – P1A [1979], introduce una técnica que elimina las desventajas que tiene normalmente el modelo de flujo de deriva, cuando no se simulan correctamente los flujos en los que intervienen fuerzas de flotación, y flujo contracorriente de líquido y vapor en canales estancados verticales.

Clark [1990] analiza el modelo de flujo de deriva para flujos a velocidades bajas o diámetros de tubería grandes. Establece valores de  $C_o$  cuando este está afectado por efectos de flotación (debidos a la fuerza resultante ejercida sobre un cuerpo por un fluido estático, en el cual está sumergido o flotando). Presenta una técnica para predecir circulación en una columna burbujeante sin previo conocimiento de la fracción de vacío.

La velocidad relativa la define como:

$$U_{Gm} = U_G - (W_G - W_L) \quad (1.42)$$

y el parámetro de distribución

$$C_o = \frac{(W_G + W_L)\epsilon}{(W_G + W_L)\epsilon} \quad (1.43)$$

Varias correlaciones para calcular la fracción de vacío utilizando la formulación de flujo de deriva, han sido desarrolladas por investigadores como Yeh y Zuber [1960], Sterman [1956], Dimentiev y colaboradores [1959], Wilson y colaboradores [1962], Bartolomei y Alkhuton [1967] y Sudo [1980] quienes compararon sus resultados con un gran número de datos experimentales.

Kataoka, [1987] desarrolló una nueva correlación para determinar la fracción de vacío en sistemas de ebullición en un recipiente, que es uno de los parámetros más importantes en el análisis de procesos de transferencia de calor y masa. Utilizó la formulación del flujo de deriva y encontró que en un sistema estancado la velocidad de deriva depende del diámetro del recipiente, presión del sistema, flujo de gas y propiedades físicas del fluido. En función de la velocidad identifica cuatro regímenes de flujo diferentes: burbuja, turbulento agitado, bache y tapón – burbuja.

Kataoka, [1987] en su estudio derivó el parámetro de distribución y la velocidad de deriva para un líquido estancado de la correlación de fracción de vacío y condiciones de frontera de los parámetros de flujo de deriva, y entonces los comparó con parámetro de distribución y la velocidad de deriva para altas velocidades. Sus resultados mostraron que los valores del parámetro de distribución para un líquido estancado fueron mayores que para valores de velocidad alta cuando los valores de la velocidad de deriva fueron los mismos en ambos casos.

$$C_o = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \quad (1.44)$$

$$U_R \cong \langle\langle U_g \rangle\rangle - \langle\langle U_f \rangle\rangle \quad (1.45)$$

### 1.5.3 Modelos de transferencia de calor conjugada

Varios trabajos se han llevado a cabo para investigar la transferencia de calor conjugada en flujos de una fase. Existen métodos para resolver el problema incluyendo técnicas exactas, aproximadas y numéricas. Los primeros intentos para tratar el problema se basaron en métodos exactos y aproximados, en los cuales las simplificaciones consideradas fueron respecto a la capacidad térmica del fluido, la capacidad térmica y conductividad de la pared [Suecec, 1975 y 1981; Lin y colaboradores 1991]. La formulación matemática más rigurosa del problema [Lin y Kuo, 1988] toma en cuenta la conducción radial de calor, la conducción axial de calor y los efectos de capacidad térmica, ambos en el fluido y en la pared de la tubería. En este caso, las ecuaciones que gobiernan para el flujo de fluido y la pared de la tubería se resolvieron numéricamente.

Existe una técnica para resolver el problema de transferencia de calor conjugada. Fairuzov [2000] muestra que un planteamiento riguroso del problema en condiciones de flujo bifásico, incluye modelar numéricamente la conducción de calor transitoria dentro de la pared de la tubería y la predicción de la transferencia de calor evaporativa mediante el uso de correlaciones experimentales.

Un modelo simplificado de transferencia de calor conjugada en condiciones de flujo multifásico [Fairuzov, 2001] representa una alternativa simple y confiable para modelar flujo bifásico transitorio en tuberías horizontales. Esto debido a que en dicho modelo su formulación parte de la suposición de equilibrio térmico entre la pared interna de la tubería y el fluido, por lo que el planteamiento no requiere predecir la conducción de calor en el interior de la tubería, para tomar en cuenta el efecto de la transferencia de calor entre la pared y el fluido. El modelo propuesto es, por lo tanto, aplicable cuando el gradiente de temperatura en la pared del conducto es poco importante.

Resolver el problema de transferencia de calor conjugada en un líquido volátil, es una tarea compleja por las dificultades asociadas con el modelado de la convección forzada bajo condiciones de flujo de dos fases. La aproximación tradicional para resolver el problema de transferencia de calor conjugada se basa en correlaciones experimentales para transferencia de calor de ebullición por convección forzada y un modelo numérico de conducción de calor transitorio en la pared. El flujo de fluido se modela por medio de un sistema de ecuaciones para flujo de dos fases, en el cual la ecuación de energía incluye un término fuente gobernando la transferencia de calor pared-fluido. La conducción de calor transitoria en los límites de las paredes del flujo se simula por medio de la ecuación de conducción de calor.

En la literatura se han propuesto varias correlaciones de transferencia de calor para flujo de dos fases que presentan ebullición por convección forzada (por ejemplo, Chen [1966], Klimenko [1988] y Shah [1976]).



Un proceso de ebullición diferente, en el cual el cambio de fase es el resultado del calentamiento del fluido, es la evaporación de líquido que ocurre debido a una despresurización. Esta situación, en cuanto a la aplicabilidad de las correlaciones de transferencia de calor burbujeante para predecir convección forzada en flujos de líquidos volátiles, no ha sido estudiada.

## 1.6 Objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis es plantear un modelo simplificado de transferencia de calor conjugada transitoria en flujo vertical bifásico durante un proceso de despresurización de tuberías.

Los objetivos específicos de este trabajo se describen a continuación:

1. Plantear un modelo hidrodinámico que considere flujo con deslizamiento entre fases. Este modelo se basa en el modelo de flujo de deriva.
2. Establecer un modelo de flujo estacionario
3. Desarrollar un modelo de flujo transitorio
4. Proporcionar un criterio de aplicabilidad del modelo de transferencia de calor conjugada transitoria para flujo bifásico vertical durante despresurización de tuberías.
5. Aplicar el modelo para un ducto submarino con tubería vertical (raiser).

## 1.7 Descripción de la tesis

En el capítulo 2 se presenta el problema y la formulación del modelo matemático con sus ecuaciones básicas y condiciones iniciales y de frontera, así como las relaciones constitutivas.

El establecimiento de un modelo de flujo estacionario en un pozo con sus ecuaciones básicas se plantea en el capítulo 3, así como el método numérico para el modelo estacionario y sus relaciones constitutivas.

El capítulo 4 incluye el desarrollo del método numérico con la discretización en diferencias finitas de las ecuaciones básicas y de las condiciones de frontera a la entrada y salida.

El análisis y las discusiones de los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas de la despresurización del sistema tubería horizontal – raiser, causada por una ruptura a la salida del raiser de los modelos estacionario y transitorio se describen en el capítulo 5, así mismo el efecto de la transferencia de calor conjugada.

Las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros, al igual que un análisis de las contribuciones que este trabajo aporta, se ofrecen en el capítulo 6.

## CAPÍTULO 2

# FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 Planteamiento del problema

El problema considerado en este estudio se muestra esquemáticamente en la figura 2.1. El sistema consiste de una tubería horizontal de longitud  $L$  y una tubería vertical (raiser) de longitud  $H$  que transportan una mezcla bifásica a alta presión ( $p > p_a$ ). Ambas tuberías tienen un diámetro interno  $D$  y un espesor de pared  $\delta$ . Inicialmente, el sistema está en régimen estacionario. En  $t=0$ , una ruptura de la tubería a la salida de la tubería vertical inicia el proceso de despresurización y la válvula a la entrada de la tubería

horizontal cierra instantáneamente. El líquido se evapora debido a la despresurización del sistema y a que su temperatura disminuye. El flujo es crítico en el extremo del raiser dañado durante algún periodo de tiempo. Cuando en la ruptura la presión estática se iguala a la presión ambiente, el flujo deja de ser crítico.

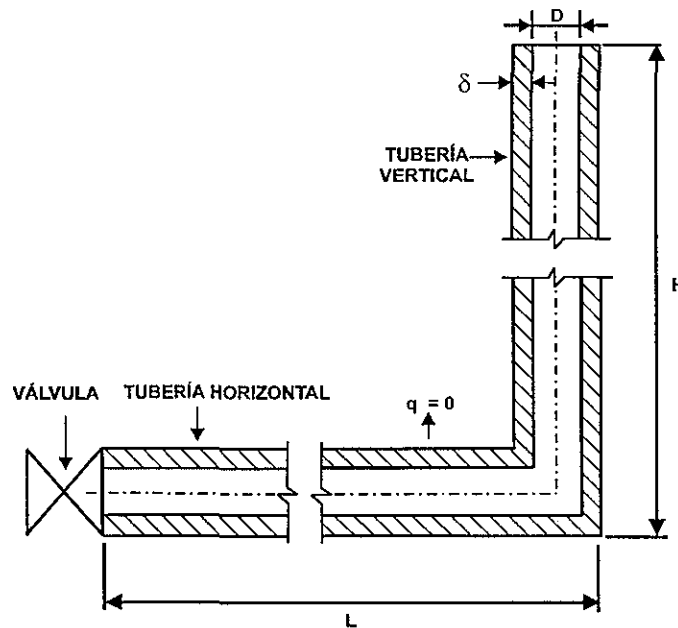


Fig. 2.1 Esquema del sistema tubería horizontal/raiser

## 2.2 Ecuaciones básicas

El flujo dinámico bifásico se describe utilizando el modelo de flujo de deriva (3 ecuaciones) para simular flujo bifásico en el raiser, en el cual se usa una nueva formulación de la ecuación de energía. Las ecuaciones que rigen el modelo hidrodinámico para predecir el comportamiento del sistema (el cuál se tiene que resolver)

y que constituyen el sistema de ecuaciones fundamental del fenómeno analizado son las siguientes:

*Ecuación de continuidad de la mezcla:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \quad (2.1)$$

*Ecuación de cantidad de movimiento de la mezcla:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - KV|V| - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} \frac{1}{\alpha_l \alpha_g} j_D^2 \right) \quad (2.2)$$

Fairuzov (1998) planteó un método para resolver el problema de transferencia de calor conjugada en flujos de líquidos volátiles sometidos a evaporación por procesos de despresurización. Este planteamiento se basó en la suposición de que la pared de la tubería y el fluido están en equilibrio térmico local. *La ecuación de energía* se formuló para un volumen de control que incluye un elemento fluido y un elemento de la pared de la tubería. El efecto de la capacidad térmica de la pared se incorpora en la ecuación de la energía para el fluido mediante la inclusión de un término adicional. De esta manera, un modelo basado en este planteamiento no requiere predecir la conducción de calor en el

interior de la pared de la tubería, para tomar en cuenta la transferencia de calor entre la pared y el fluido.

En Fairuzov (1998), se presenta un posterior desarrollo de este planteamiento y se incorpora un nuevo parámetro adimensional básico que define el efecto de la capacidad térmica de la pared sobre el comportamiento del flujo bifásico. Así, la ecuación de energía puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\rho(u + gh)]}{\partial t} + Fa \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(u + gh)V] \\ + p \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho} j_D^g \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} (u_g - u_l) j_D^g \right] = q \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$Fa = \frac{\rho_w c_w T v_{fg} A_w}{h_{fg} A} \quad (2.4)$$

es el *factor de adiabaticidad*, que proporciona una medida de la razón entre la energía almacenada en la pared y la energía que se requiere para la evaporación de un líquido de un solo componente, volátil por algún motivo que podría ser su despresurización.

El segundo término del lado izquierdo de la Ec. (2.3) toma en cuenta el efecto de la pared sobre la dinámica del flujo del fluido y solamente puede aplicarse en situaciones en las cuales la caída de temperatura total en la dirección transversal, la suma de

diferencias de temperatura a través de la pared y flujo de fluido, sean despreciables. Fairuzov [2000] ha desarrollado dos criterios de aplicabilidad de esta aproximación. Para problemas conjugados sin generación de calor en la pared, los cuales son:

1) Si  $Fa < 1$ , el efecto de la pared es despreciable y se considera sólo flujo de calor entre el fluido y el medio ambiente.

2) Si  $Fa > 1$ , predomina el efecto de la transferencia de calor se toma en cuenta y entonces, si  $\frac{fL}{D} > 200$ , donde  $f$  es el factor de fricción,  $L$  y  $D$  son la longitud y diámetro

de la tubería respectivamente se aplica en la Industria Petrolera porque  $\frac{fL}{D} \gg 200$ .

Estos dos criterios mencionados pueden reducirse al siguiente:

$$\frac{\rho_w c_w A_w}{\pi t_b} \left( \frac{Ln\left(\frac{D+2\delta}{D}\right)}{2k} + \frac{1}{hD} \right) \ll 1 \quad (2.5)$$

Así mismo la cuarta ecuación que rige el modelo hidrodinámico es la ecuación de estado:

$$\rho = \rho(p, u) \quad (2.6)$$

cuya derivada parcial es

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_u \left[ 1 - u \left( \frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p \right]$$

### 2.3 Relaciones constitutivas

Las variables de la mezcla que aparecen en las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de las siguientes propiedades físicas:

$$\rho = \alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g \quad (2.7)$$

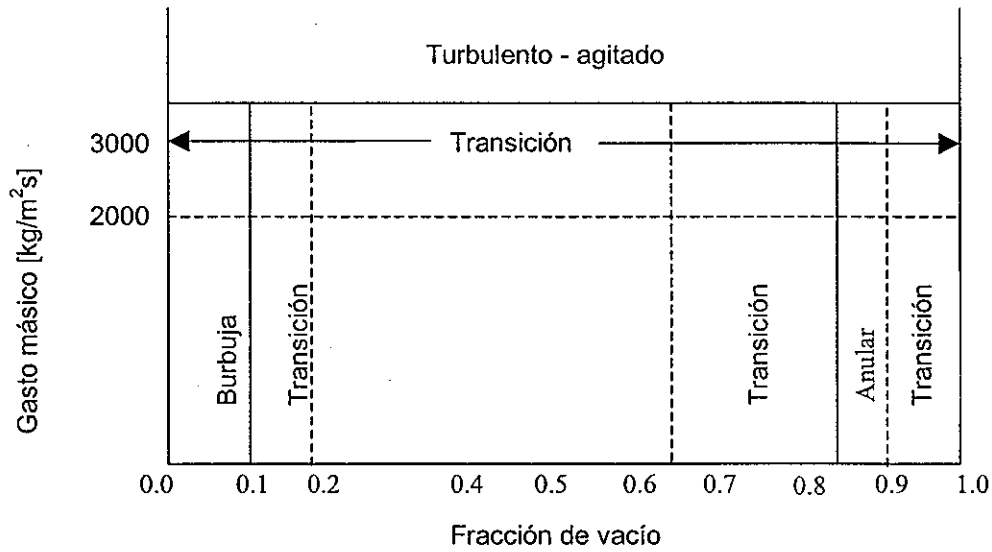
$$\rho V = \alpha_l \rho_l V_l + \alpha_g \rho_g V_g \quad (2.8)$$

$$\rho u = \alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g \quad (2.9)$$

$$j_D^g = \alpha_l \alpha_g (V_g - V_l) = \alpha_l \alpha_g V_r \quad (2.10)$$

La velocidad relativa se determina por medio de una correlación en la interfaz que depende del régimen de flujo. El patrón de flujo se determinó usando el mapa de régimen de flujo TRAC - P1A [1979], el cual se presenta en la Figura 2.2. Las líneas punteadas son las regiones de transición entre los patrones de flujo. En esas regiones, los valores se obtienen interpolando linealmente para dos patrones de flujo adyacentes.





**Figura 2.2 Mapa de patrón de flujo para correlaciones de resbalamiento**

Las ecuaciones que representan los patrones de flujo burbuja, bache y anular se describen en la Tabla 1.1.

El flujo turbulento agitado no fue considerado en el presente estudio, ya que en las simulaciones numéricas realizadas la velocidad másica fue menor a 2000 kg/m<sup>2</sup>s.

Las velocidades de las fases pueden calcularse con las ecuaciones siguientes (Kyungdo Kim [1991]):

$$V_g = V + \frac{\rho_l j_D^g}{\rho \alpha_g} \quad (2.11)$$

$$V_l = V - \frac{\rho_g j_D^g}{\rho \alpha_l} \quad (2.12)$$

El flujo de los fluidos en la tubería horizontal se describe utilizando el modelo de equilibrio homogéneo. Chen y colaboradores[1995] demostraron que el modelo homogéneo simple proporciona predicciones exactas de los parámetros principales de flujo (gasto, presión, temperatura, fracción de vacío y masa), durante la despresurización de tuberías largas. El flujo crítico en la ruptura se pronosticó usando el método propuesto por Starkman[1964]

## 2.4 Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales del modelo consisten en que al tiempo inicial,  $t = 0$ , la densidad, velocidad y energía interna del fluido son funciones conocidas, que dependen de la distancia.

Es decir

Para  $t = 0$

$$\rho, u, V = \rho(x), u(x), V(x), \quad \text{conocidas} \quad (2.13)$$

Los valores de las condiciones de frontera se determinan para tiempos mayores que cero ( $t > 0$ ). En este caso, como condiciones de frontera se tiene que los valores de gasto másico y energía interna del fluido a la entrada son conocidos y constantes y la presión a la que se encuentra el fluido a la salida, es también conocida y constante.

Para  $t > 0$

A la entrada ( $x = 0$ )

$$G|_{x=0} = G_{in} = cte \quad (2.14)$$

$$u|_{x=0} = u_{in} = cte$$

A la salida ( $x = L$ )

$$P|_{x=L} = P_{out} = cte \quad (2.15)$$

## 2.5 Criterio de aplicabilidad

Debido a que no se cuenta con datos experimentales para validar el modelo y poder determinar su rango de aplicabilidad, se desarrolló un criterio para problemas de transferencia de calor conjugada sin generación de calor en la pared de la tubería Ec.2.5 (Fairuzov, 2000).

### 2.5.1 Desarrollo de ecuaciones

Como la conductividad térmica del aceite es muy alta se considera flujo quasi-estacionario, por lo que en la transferencia de calor transitoria se considerarán los efectos de conducción y convección en régimen estacionario, como se muestra en la Fig. 2.3.

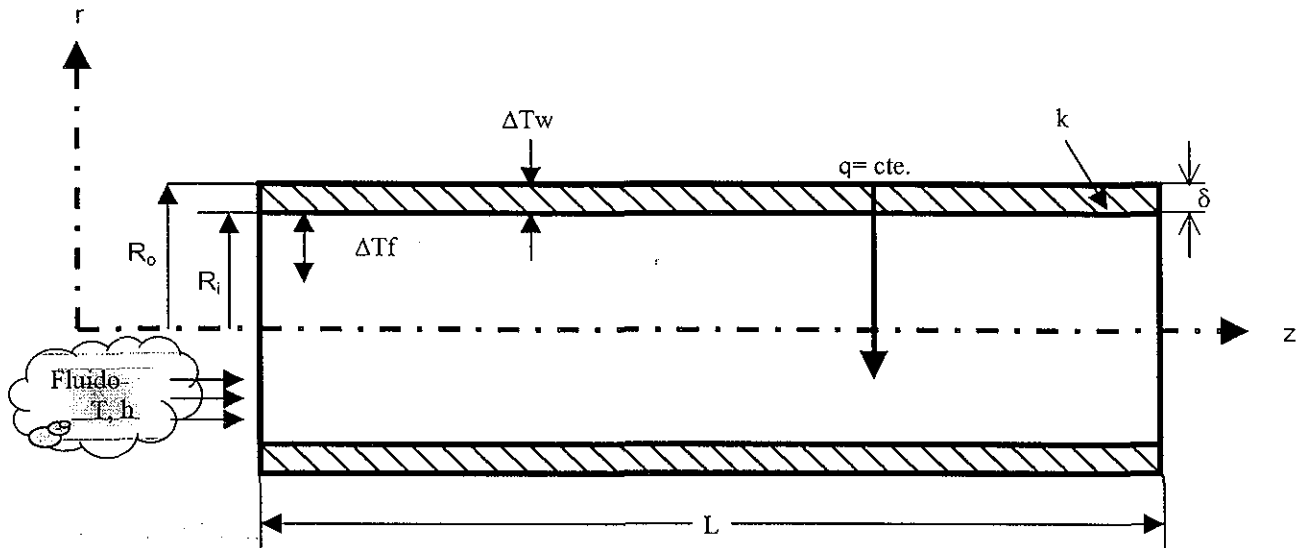


Figura 2.3 Efectos de conducción y convección.

$\Delta T_w$  y  $\Delta T_f$  varían en la transferencia de calor sin embargo, se puede obtener una estimación de estos parámetros a partir de la consideración que se presenta a continuación.

$$\Delta T_w + \Delta T_f < \Delta T_b \quad (2.16)$$

La caída de temperatura en la pared depende de la conducción de calor a través de una pared cilíndrica, por lo que a continuación se hacen las siguientes suposiciones:

1. El flujo es unidimensional. Debido a que no se consideran variaciones o cambios en la velocidad, presión, etc., transversales a la dirección del flujo

principal. Las condiciones en una sección transversal se expresan en términos de valores promedio de velocidad, densidad y otras propiedades.

2. Régimen estacionario. Por la condición descrita en el punto 2.5.1
3. La conducción de calor en la pared de la tubería, en la sección longitudinal, es despreciable. Esto se debe a que el área de la sección transversal de la pared de la tubería es muy pequeña en comparación con la superficie a través de la cual se presenta transferencia de calor por conducción en la dirección radial.
4. Propiedades constantes de la tubería.
5. No existe generación de calor.

La ecuación que rige este proceso de transferencia de calor está dada por:

$$q = \frac{2\pi Lk\Delta T_w}{\text{Ln}\left(\frac{R_0}{R_1}\right)} \quad (2.17)$$

De la ley de enfriamiento de Newton para la convección:

$$q = 2\pi R_1 Lh\Delta T_f \quad (2.18)$$

Despejando de las Ecs. 2.17 y 2.18 la caída de temperatura respectiva y sustituyendo en la Ec. 2.16:

$$\frac{qLn\left(\frac{R_0}{R_1}\right)}{2\pi Lk} + \frac{q}{2\pi R_1 Lh} < \Delta T_b \quad (2.19)$$

Para estimar el flujo de calor desde la pared del ducto se tiene

$$q = \frac{Q}{t_b} \quad (2.20)$$

Que es la energía total transferida por unidad de tiempo.

El calor total transferido se define como:

$$Q = M_w c_w \Delta T_b \quad (2.21)$$

Sustituyendo las Ecs. 2.21 y 2.20 en la Ec. 2.19:

$$\frac{M_w c_w \Delta T_b Ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)}{t_b 2\pi Lk} + \frac{M_w c_w \Delta T_b}{t_b 2\pi R_1 Lh} < \Delta T_b \quad (2.22)$$

Factorizando términos y despejando la caída de temperatura debido al despresurizamiento:

$$\frac{M_w C_w}{t_b \pi} \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{R_o}{R_i} \right)}{2Lk} + \frac{1}{2R_i Lh} \right] < 1 \quad (2.23)$$

Expresando la masa en términos de la densidad, área, longitud y considerando que  $r = D/2$

$$\frac{\rho_w A_w c_w}{t_b \pi} \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{D+2\delta}{D} \right)}{2k} + \frac{1}{Dh} \right] < 1 \quad (2.24)$$

La Ec. (2.24) establece el criterio de aplicabilidad del modelo propuesto de transferencia de calor conjugada sin generación de calor en la pared de la tubería, el cual depende de la geometría de la tubería, coeficientes de transferencia de calor de conducción y convección, propiedades de la tubería y tiempo de descarga o despresurización.

Entre mayor sea el tiempo de descarga, la aplicabilidad de este método es más factible. Asimismo, deben de tenerse coeficientes altos de transferencia de calor de convección y conducción. Por lo contrario, si la geometría de la tubería y sus propiedades presentan valores grandes, este método no puede ser aplicable.

## **CAPÍTULO 3**

# **DESARROLLO DE UN MODELO DE FLUJO ESTACIONARIO EN UN POZO**

Se realizó primero un análisis en régimen permanente para calcular las condiciones iniciales del análisis transitorio. Para este propósito, se desarrolló un modelo de flujo en estado estacionario, el cual utiliza las mismas relaciones de cerradura describen las ecuaciones 2.1 a 2.3 y 2.6.

### **3.1 Ecuaciones básicas**

Las ecuaciones que representan este modelo son las mismas que se describen en el capítulo 2 sección 2.2 , aplicables para flujo en régimen permanente.



*Ecuación de masa de la mezcla*

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = 0 \quad (3.1)$$

*Ecuación de movimiento de la mezcla*

$$V \frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} \frac{1}{\alpha_l \alpha_g} j_D^g{}^2 \right] = -kV |V| - g \quad (3.2)$$

*Ecuación de energía de la mezcla*

$$\frac{d}{dx} [\rho(u + gx)V] + P \frac{dV}{dx} + P \frac{d}{dx} \left[ \frac{(\rho_l - \rho_g)}{\rho} j_D^g \right] + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} (u_g - u_l) j_D^g \right] = q \quad (3.3)$$

### 3.2 Relaciones constitutivas

Son las mismas relaciones constitutivas que se mencionan en el capítulo 2, ecuaciones 2.7 a 2.12 y las Ecuaciones de la tabla 1.1.

### 3.3 Método numérico para el modelo estacionario

Habiéndose efectuando una presentación esquemática que permite visualizar los fenómenos que intervienen en el proceso, planteadas las ecuaciones involucradas y

resueltas las mismas en todo lo que se refiere a la aplicación de hipótesis simplificativas y manipuleo de tipo algebraico, cabe arribar a una (o más) ecuaciones diferenciales ordinarias (Ecs. 3.1, 3.2 y 3.3) que forman un sistema, el cual puede escribirse en forma de vector:

$$\frac{dY}{dX} = F(X, Y)$$

Donde Y es el vector de variables dependientes

$$Y = [p, V, \rho u]$$

y que no pudiéndose resolver analíticamente, resulta conveniente recurrir a algún método numérico, del tipo Runge-Kutta.

Se utilizó el método de Runge – Kutta de cuarto orden que es uno de los procedimientos más comunes y exacto para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Consiste en determinar las constantes adecuadas para que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4, \quad (3.4)$$

en la que

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

coincida con un polinomio de Taylor de cuarto grado. Con lo anterior se obtienen 11 ecuaciones con 13 incógnitas. El conjunto de valores de las constantes que más se usa produce el siguiente resultado:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

de la Ec. 3.1

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = v \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dv}{dx} \quad (3.8)$$

Como la densidad es función de la presión y la energía interna, de la Ecuación de Estado

$$\rho = f(p, \rho u)$$

cuya derivada es

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{\rho u} dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_P d(\rho u) \quad (3.9)$$

Dividiendo la ecuación entre dx

$$\frac{d\rho}{dx} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u} \frac{dP}{dx} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_P \frac{d(\rho u)}{dx} \quad (3.10)$$

sustituyendo la Ec. 3.9 en la Ec. 3.8

$$V \frac{d\rho}{dP} \frac{dP}{dx} + V \frac{d\rho}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} + \rho \frac{dV}{dx} = 0 \quad (3.11)$$

agrupando términos

$$\frac{dP}{dx} \left[ V \frac{d\rho}{dP} \right] + \frac{dV}{dx} [\rho] + \frac{d(\rho u)}{dx} \left[ V \frac{d\rho}{d(\rho u)} \right] = 0 \quad (3.12)$$

De la Ec. 3.2

$$\text{si } j_D^g = \alpha_l \alpha_g V r$$

$$V \frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} j_D^g V r \right] = -kV |V| - g \quad (3.13)$$

si se define

$$F = \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} j_D^g V r, \quad (3.14)$$

y sustituimos en la Ec. 3.13

$$V \frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dx} = -kV |V| - g \quad (3.15)$$

como

$$F = f(P, V, \rho u),$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la Ec. 3.15

$$\begin{aligned} V \frac{dV}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dV} \frac{dV}{dx} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} = -kV |V| - g \end{aligned} \quad (3.17)$$

agrupando términos

$$\frac{dP}{dx} \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dP} \right] + \frac{dV}{dx} \left[ V + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dV} \right] + \frac{d(\rho u)}{dx} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d(\rho u)} \right] = -kV |V| - g \quad (3.18)$$

De la Ec. 3.3, si se tiene que

$$F_2 = \left[ \frac{\rho_l \rho_g}{\rho} (u_g - u_l) j_D^g \right], \quad (3.19)$$

$$y \quad F_3 = \left[ \frac{(\rho_l - \rho_g)}{\rho} j_D^g \right], \quad (3.20)$$

Sustituyendo las Ecs. 3.19 y 3.20 en la Ec. 3.3

$$\frac{d}{dx} [\rho(u + gx)V] + P \frac{dV}{dx} + P \frac{dF_3}{dx} + \frac{dF_2}{dx} = q, \quad (3.21)$$

$$\frac{d(\rho u V)}{dx} + \frac{d(\rho g x V)}{dx} + P \frac{dV}{dx} + P \left[ \frac{dF_3}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_3}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_3}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] + \quad (3.22)$$

$$\left[ \frac{dF_2}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_2}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_2}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] = q$$

$$\rho u \frac{dV}{dx} + V \frac{d(\rho u)}{dx} + g \rho x \frac{dV}{dx} + g \rho V \frac{dx}{dx} + g x V \frac{d\rho}{dx} + P \frac{dV}{dx} \quad (3.23)$$

$$+ P \left[ \frac{dF_3}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_3}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_3}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] + \left[ \frac{dF_2}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_2}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_2}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] = q$$

sustituyendo

$$\frac{d\rho}{dx} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u} \frac{dP}{dx} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_P \frac{d(\rho u)}{dx} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{dV}{dx} + V \frac{d(\rho u)}{dx} + g\rho x \frac{dV}{dx} + gxV \left[ \frac{d\rho}{dx} \frac{dP}{dx} + \frac{d\rho}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] + P \frac{dV}{dx} \\ + P \left[ \frac{dF_3}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_3}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_3}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] + \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\left[ \frac{dF_2}{dP} \frac{dP}{dx} + \frac{dF_2}{dV} \frac{dV}{dx} + \frac{dF_2}{d(\rho u)} \frac{d(\rho u)}{dx} \right] = q - g\rho V$$

agrupando términos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} \left[ gxV \frac{d\rho}{dP} + P \frac{dF_3}{dP} + \frac{dF_2}{dP} \right] + \frac{dV}{dx} \left[ \rho u + gx\rho + P + P \frac{dF_3}{dV} + \frac{dF_2}{dV} \right] \\ + \frac{d(\rho u)}{dx} \left[ V + gxV \frac{d\rho}{d(\rho u)} + P \frac{dF_3}{d(\rho u)} + \frac{dF_2}{d(\rho u)} \right] = q - g\rho V \end{aligned} \quad (3.26)$$

Las ecuaciones 3.12, 3.18, y 3.26 forman el sistema de ecuaciones que se resuelve mediante el método de Runge – Kutta. Los resultados de los parámetros que se obtienen mediante este método numérico como la presión, velocidad de la mezcla, velocidad de cada fase y fracción de vacío se discuten en el Capítulo 5.

## **CAPÍTULO 4**

# **MÉTODO NUMÉRICO PARA EL MODELO**

## **TRANSITORIO**

### **4.1 Discretización de ecuaciones básicas**

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales formado por las Ecs. 2.1 a 2.3 y 2.6 se resuelve mediante el esquema de solución numérica RELAP5 (Ransom y Trapp, 1978). Este método se basa en sustituir el sistema original de ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas, parcialmente implícitas en el tiempo [Liles,

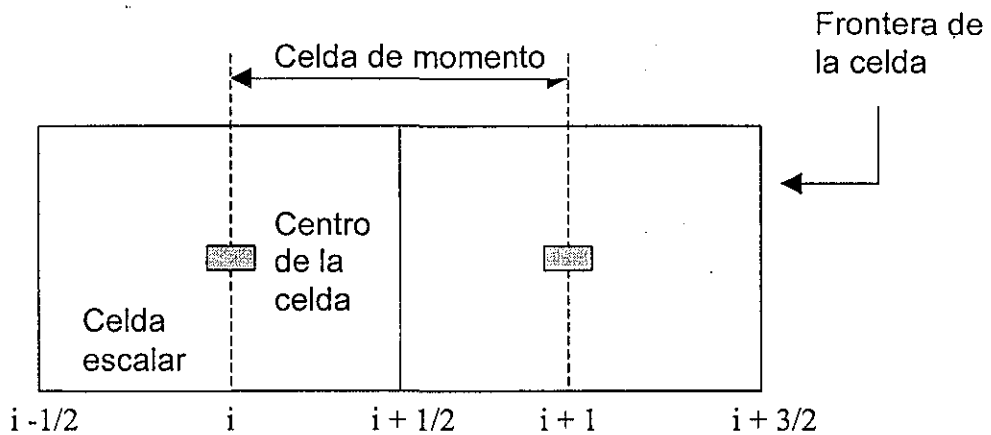


1978]. El intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , se encuentra limitado por el criterio de convergencia de Courant [Michael Doster, 1999]:

$$\Delta t \leq \left| \frac{\Delta x}{V} \right|$$

Donde  $\Delta x$  es el espaciamiento de la malla y  $V$  la velocidad de flujo. La verificación del criterio de Courant se hace en cada celda, para cada paso de tiempo, el  $\Delta t$  es de 0.1 s.

Las cantidades escalares (variables de estado así como presión, energía interna y fracción de vacío) se obtienen para los centros de las celdas de la malla, mientras que las cantidades vectoriales (velocidades relativas) se obtienen para las fronteras de las celdas, como se muestra en la Fig. 4.1.1. En las nuevas variables temporales, todos los términos implícitos son lineales. La malla consiste de 20 celdas uniformes usadas para las simulaciones numéricas, un incremento en el número de celdas no tiene influencia significativa en los resultados.



**Figura 4.1.1 Esquema de diferencias escalonadas para el modelo hidrodinámico.**

La Fig. 4.1.2 muestra el diagrama de flujo para la solución global del modelo.

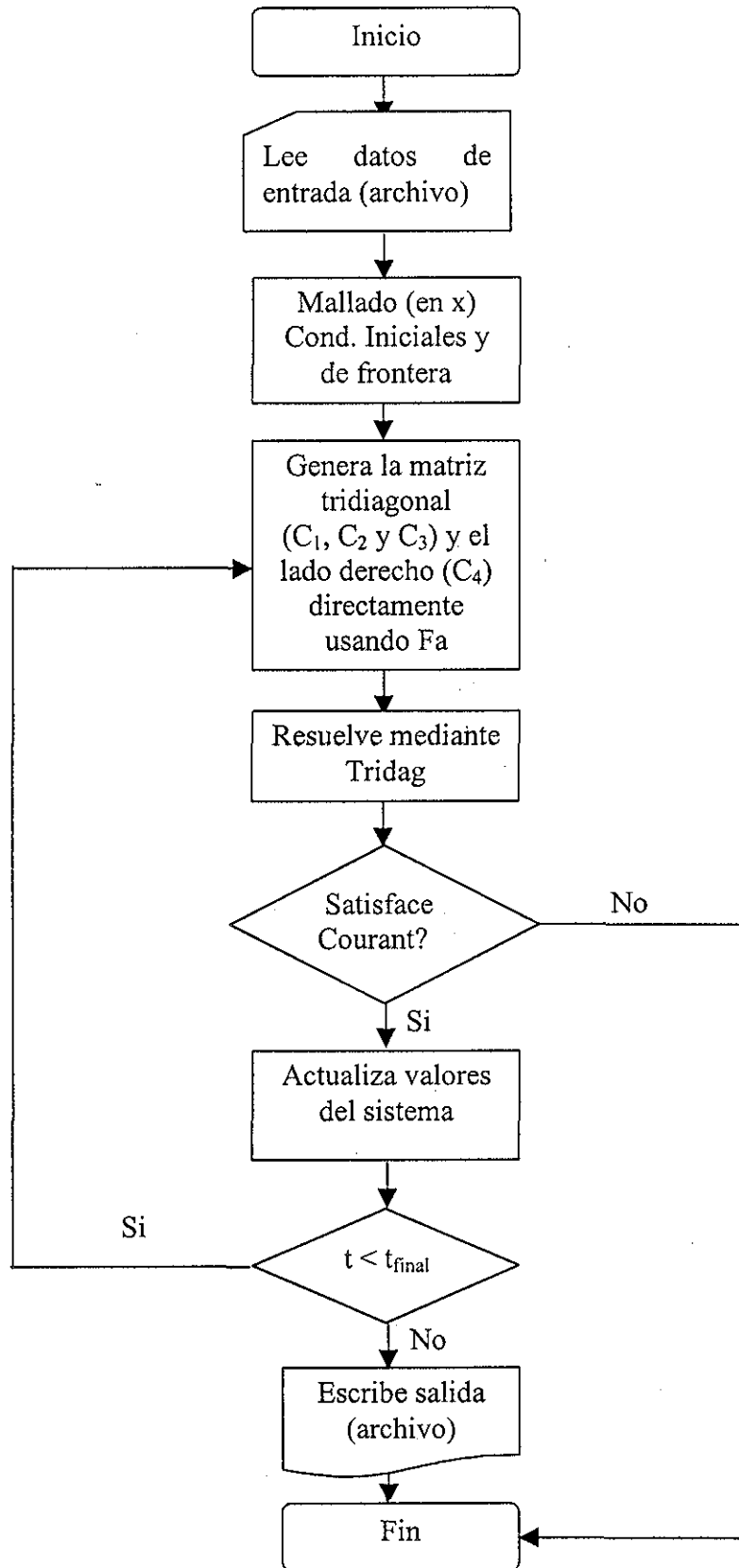


Fig. 4.1.2 Algoritmo de cálculo

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas correspondiente al modelo y que se resuelve mediante el método parcialmente implícito linealizado (Liles, 1978) es

*Ecuación de masa*

De la Ec. 2.1

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} = \frac{(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}}{\Delta x} \quad (4.1)$$

o reordenando

$$\rho_i^{n+1} - \rho_i^n = \Delta t \frac{(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}}{\Delta x} \quad (4.2)$$

*Ecuación de momento*, partiendo de la Ec. 2.2

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\Delta t} = & -V_{i+1/2}^n * \frac{CONV}{\Delta x} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \left( \frac{P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n| - g \\ & - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n \Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right\}_{i+1}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right\}_i^n \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para asegurar la estabilidad del esquema numérico, se utiliza una formulación de tipo “donante” para calcular las cantidades escalares en las fronteras de las celdas, en donde no están definidas

$$\Phi_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\Phi_i + \Phi_{i+1}) + \frac{V_{i+1/2}}{|V_{i+1/2}|} (\Phi_i - \Phi_{i+1}) \quad (4.4)$$

dónde

$$\Phi_{i+1/2} = [\rho_{i+1/2}, (\rho u)_{i+1/2}] \quad (4.5)$$

Para definir el término de flujo de momento, se utiliza una formulación semejante a la de tipo donante en la ecuación de momento (Liles, 1978) descrita como

$$CONV = V_{i+1} - V_i = \begin{cases} V_{i+1/2} - V_{i-1/2} \geq 0 \\ V_{i+3/2} - V_{i-1/2} < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

De la Ec. 2.3 y partiendo de la definición de  $Fa = \rho_w C_w \left( \frac{dT}{dp} \right) \frac{A_w}{A}$  (Fairuzov, 1998), la

*Ecuación de energía* aplicando el modelo de flujo de deriva es

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\Delta t} + gx \frac{1}{\Delta x} [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] + \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2}^n V_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \\ & \frac{c_w M_w}{V_{Cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i^n \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{gx [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}]}{\Delta x} - g \rho V - p_i^{n+1} \frac{(V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n)}{\Delta x} + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + \\ & p_i^n \frac{1}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] = q \end{aligned} \quad (4.7)$$

En las ecuaciones anteriores los superíndices n y n+1 se refieren a los niveles de tiempo,  $\Delta t$  y  $\Delta x$  son espaciamiento de la malla en tiempo y espacio, respectivamente, y  $\Delta x$  se supone constante aunque esto no es una restricción fundamental del método. Las ecuaciones diferenciales 4.2, 4.3 y 4.7 son semi-implícitas.

Las incógnitas que deben resolverse son  $\rho_i^{n+1}$ ,  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y  $(\rho u)_i^{n+1}$ . La primera se despeja directamente de la Ec. 4.1

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] \quad (4.8)$$

La segunda incógnita se despeja de la siguiente forma:

$$V_{i+1/2}^{n+1} = V_{i+1/2}^n - V_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (CONV) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \Delta t k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n| - \Delta t \text{tg} \\ - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1}^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n \right\} \quad (4.9)$$

Si se define  $\tilde{V}$  como:

$$\tilde{V}_{i+1/2} = V_{i+1/2}^n - V_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (CONV) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^n - p_i^n) - \Delta t \text{tg} \\ - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1}^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n \right\} \quad (4.10)$$

Sustituyendo la Ec. 4.10 en la 4.9 se tiene la Ec. 4.11

$$V_{i+1/2}^{n+1} = \tilde{V}_{i+1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^{n+1} - p_{i+1}^n - p_i^{n+1} + p_i^n) - \Delta t k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n|$$

Agrupando los términos de velocidad al nuevo tiempo del lado izquierdo de la ecuación

$$V_{i+1/2}^{n+1} + \Delta t k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n| = \tilde{V}_{i+1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^{n+1} - p_{i+1}^n - p_i^{n+1} + p_i^n)$$

Factorizando el término  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y si

$$B_{i+1/2}^n = 1 + k^n |V_{i+1/2}^n| \Delta t \quad (4.12)$$

Finalmente es posible llegar a

$$V_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{B_{i+1/2}^n} \left[ \tilde{V}_{i+1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1}^{n+1} - p_{i+1}^n - p_i^{n+1} + p_i^n) \right] \quad (4.13)$$

Procediendo de igual forma para

$$V_{i-1/2}^{n+1} = \frac{1}{B_{i-1/2}^n} \left[ \tilde{V}_{i-1/2} - \frac{1}{\rho_{i-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_i^{n+1} - p_i^n - p_{i-1}^{n+1} + p_{i-1}^n) \right] \quad (4.14)$$

De forma análoga, de la Ec. 4.3 es posible aislar la tercera incógnita

$$\begin{aligned} (\rho u)_i^{n+1} = & (\rho u)_i^n - \frac{c_w M_w}{V_{cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i^n (p_i^{n+1} - p_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2}^n V_{i-1/2}^{n+1}] - \\ & 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} g x [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] + g \rho V \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_i^{n+1} (V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n) - \\ & \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] - \\ & p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + q \Delta t \end{aligned} \quad (4.13)$$

La cuarta incógnita,  $p_i^{n+1}$ , aparece tanto en la Ec. 4.7 como en la Ec. 4.8.

La cuarta ecuación requerida para satisfacer la cerradura del sistema, ya que tenemos cuatro incógnitas y tres Ecs. 4.2, 4.3 y 4.7, es la que corresponde con la derivada de la ecuación de estado

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_u \left[ 1 - u \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_p \right] \quad (4.16)$$

Una expresión en series de Taylor de la diferencial de la densidad que se obtiene de la derivada de la ecuación de estado es

$$\rho_i^{n+1} - \rho_i^n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_i^{n+1} - p_i^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_p [(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n] \quad (4.17)$$

Igualando las Ecs. 4.17 y 4.1 se llega a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_i^{n+1} - p_i^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_p [(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n] = \Delta t \frac{(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}}{\Delta x} \quad (4.18)$$

Sustituyendo el valor de la Ec. 4.15 en la Ec. 4.18 se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_i^{n+1} - p_i^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial(\rho u)}\right)_p \left\{ \left[ -\frac{c_w M_w}{V_{CVi}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_i (p_i^{n+1} - p_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i-1/2}^n V_{i-1/2}^{n+1}] \right] \right. \\ & \quad - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} g \lambda [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] - g \rho V \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_i^{n+1} (V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n) - \\ & \quad \left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_i \alpha \rho (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_i \alpha \rho (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] \right. \\ & \quad \left. - p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + q \Delta \right\} \\ & \quad = \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho^n V^{n+1})_{i-1/2} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.19) los valores de  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y  $V_{i-1/2}^{n+1}$  se tiene la Ec. 4.20, que puede reordenarse para factorizar los términos comunes de  $p_x^{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
 & p_{i+1}^{n+1} \left[ -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n D_2}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2gx D_2}{B_{i+1/2}^n} \right] + \\
 & p_i^{n+1} \left[ +\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2}{B_{i-1/2}^n} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2}{B_{i+1/2}^n} + D_1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n D_2}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n D_2}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{gx D_2}{B_{i-1/2}^n} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{gx D_2}{B_{i+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_{i+1/2}^n D_2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_{i-1/2}^n D_2 - \frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_i \right] + \\
 & p_{i-1}^{n+1} \left[ -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i-1/2}^n} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n D_2}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2gx D_2}{B_{i-1/2}^n} \right] = \\
 & \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)}\right)_p \left\{ -\frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_i p_i^n + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n \tilde{V}_{i+1/2}}{B_{i+1/2}^n} + p_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} \right. \\
 & \left. - p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n V_{i-1/2}}{B_{i-1/2}^n} - p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} \right. \\
 & \left. + p_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} + \frac{\tilde{V}_{i-1/2} \rho_{i-1/2}^n}{B_{i-1/2}^n} 2gx \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2}{B_{i-1/2}^n} gx - p_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2}{B_{i-1/2}^n} gx \right. \\
 & \left. - \tilde{V}_{i+1/2} 2gx \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \frac{\rho_{i+1/2}^n}{B_{i+1/2}^n} - p_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{2gx}{B_{i+1/2}^n} + p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{gx}{B_{i+1/2}^n} + g\rho V \Delta t \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v (u_v - u_i) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v (u_v - u_i) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] \right. \\
 & \left. + p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] - q \Delta t \right]^2 + \\
 & \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} + \frac{\tilde{V}_{i-1/2} \rho_{i-1/2}^n}{B_{i-1/2}^n} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} - p_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} - \\
 & - p_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + p_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n}
 \end{aligned}$$



$$\text{Donde } D_1 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\rho u} \text{ y } D_2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p$$

El desarrollo algebraico de las ecuaciones en diferencias finitas condujo a la Ec. 4.20 la cual es una expresión del tipo

$$C_1 p_{i-1}^{n+1} + C_2 p_i^{n+1} + C_3 p_{i+1}^{n+1} = C_4 \quad (4.21)$$

donde los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son conocidos y los valores de la presión al nuevo tiempo son las incógnitas que se desea calcular.

La ecuación (4.20) se establece para cada uno de los nodos del mallado del sistema. Esto implica que se tienen dos matrices, una formada por los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  que será del tipo tridiagonal (sólo las tres diagonales centrales tendrán valores distintos de cero) y otra formada por los valores del lado derecho,  $C_4$ . Esto significa que se tiene un sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas que se puede resolver mediante una subrutina numérica. En este caso, se utilizó la subrutina *Tridag* (Numerical Recipes, 1992).

El flujo de calor se calcula mediante el término adicional de la ecuación de energía modificada. Se hace un cálculo que es válido para todo el sistema y las condiciones específicas de cada celda se toman en consideración mediante el término adicional mencionado. Es decir, el fenómeno conjugado se resuelve como si no lo fuese. El efecto de la pared se toma en cuenta únicamente mediante el término adicional y ya no es necesario analizar a detalle el fenómeno de conducción.

## 4.2 Discretización de condiciones de frontera

### 4.2.1 Entrada

Para esta condición el gasto másico a la entrada es conocido y constante para un tiempo mayor que cero ( $t > 0$ ), como se muestra en la Figura 4.2.

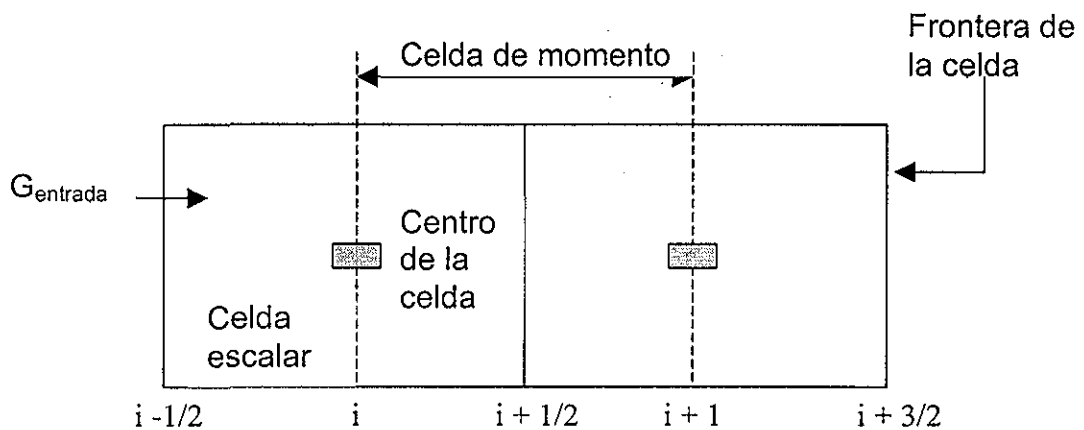


Figura 4.2 Condición de frontera a la entrada

*Ecuación de masa*

$$\rho_i^{n+1} - \rho_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2} \right] \quad (4.22)$$

*Ecuación de movimiento*

Queda expresada de la misma forma que la Ec. 4.3

La ecuación de Energía es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n}{\Delta t} + \frac{c_w M_w}{V_{Cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i^n \frac{(p_i^{n+1} - p_i^n)}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^n G_{in}}{\Delta x} + \\
 & \frac{2gx[G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}]}{\Delta x} + g\rho V + p_i^{n+1} \frac{(V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n)}{\Delta x} + \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V_r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V_r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + \\
 & p_i^n \frac{1}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V_r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V_r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] = q
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Las incógnitas que deben calcularse son  $\rho_i^{n+1}$ ,  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y  $(\rho u)_i^{n+1}$ . La primera y segunda se obtienen de la misma manera que las Ecs. 4.8 y 4.9. La tercera incógnita queda en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 (\rho u)_i^{n+1} &= (\rho u)_i^n - \frac{c_w M_w}{V_{Cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i^n (p_i^{n+1} - p_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^n V_{i-1/2}^{n+1} G_{in}] - \\
 & 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} gx[G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] + g\rho V \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_i^{n+1} (V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n) - \\
 & \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V_r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V_r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] - \\
 & p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V_r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V_r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + q\Delta t
 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Igualando las Ecs. 4.18 y 4.22, se tiene

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_i^{n+1} - p_i^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)}\right)_p [(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_i^n] = \frac{\Delta t}{\Delta x} [G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] \quad (4.25)$$

Sustituyendo el valor de la Ec. 4.24 en la Ec. 4.25, nos da la Ec. 4.26

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\rho u} (p_i^{n+1} - p_i^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)}\right)_p \left\{ \left[ -\frac{c_w M_w}{V_{cvi}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_i (p_i^{n+1} - p_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho u)_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^n V_{i-1/2}^{n+1} G_{in}] \right] \right. \\ & - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} g x [G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] - g \rho V \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} p_i^{n+1} (V_{i+1/2}^n - V_{i-1/2}^n) - \\ & \left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha) \rho_l \alpha \rho (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] \right. \\ & \left. - p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2}^n - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2}^n \right] + q \Delta t \right\} \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta x} [G_{in} - (\rho^n V^{n+1})_{i+1/2}] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. 4.26 los valores de  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y  $V_{i-1/2}^{n+1}$  dados por las Ecs. 4.13 y 4.14 se tiene la siguiente Ec. 4.27, que puede reordenarse factorizando los términos comunes de  $p_x^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} & p_{i+1}^{n+1} \left[ -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n D_2}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{g x D_2}{B_{i+1/2}^n} \right] + \\ & p_i^{n+1} \left[ + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + D_1 - D_2 \frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left(\frac{dT}{dp}\right)_i - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n D_2}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{g x D_2}{B_{i+1/2}^n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_{i+1/2}^n D_2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_{i-1/2}^n D_2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_p \left\{ -\frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i p_i^n + \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n \tilde{V}_{i+1/2}}{B_{i+1/2}^n} + p_{i+1}^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - p_i^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} \right. \\
 & - \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) \frac{u_{i-1/2}^n V_{i-1/2} G_{in}}{B_{i-1/2}^n} + 2 \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) G_{in} g x - 2 \frac{\tilde{V}_{i+1/2} \rho_{i+1/2}^n}{B_{i+1/2}^n} g x \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) + p_{i+1}^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{2 g x}{B_{i+1/2}^n} + p_i^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{2 g x}{B_{i-1/2}^n} \\
 & + g \rho V \Delta x + \frac{\Delta x}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{[(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r]^n}{\rho} \right\}_{i+1/2} - \left\{ \frac{[(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r]^n}{\rho} \right\}_{i-1/2} \right] + p_i^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x}{B_{i+1/2}^n} \\
 & + p_i^n \frac{\Delta x}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{[\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r]^n}{\rho} \right\}_{i+1/2} - \left\{ \frac{[\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r]^n}{\rho} \right\}_{i-1/2} \right] - q \Delta x \left. \right\} - p_{i+1}^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} \\
 & + p_i^n \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x}{B_{i-1/2}^n} + \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) G_{in} - \frac{\tilde{V}_{i+1/2} \rho_{i+1/2}^n}{B_{i+1/2}^n} \left( \frac{\Delta x}{\Delta x} \right)
 \end{aligned}$$

El desarrollo algebraico de las ecuaciones en diferencias finitas condujo a la Ec. 4.27 la cual es de la misma forma que la Ec. 4.21, donde los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son conocidos y los valores de la presión al nuevo tiempo son las incógnitas que se desean calcular.

### 4.2.2 Salida

Para esta condición la presión a la que se encuentra el fluido a la salida es conocida y constante para un tiempo mayor que cero ( $t > 0$ ), como se muestra en la Fig. 4.3.

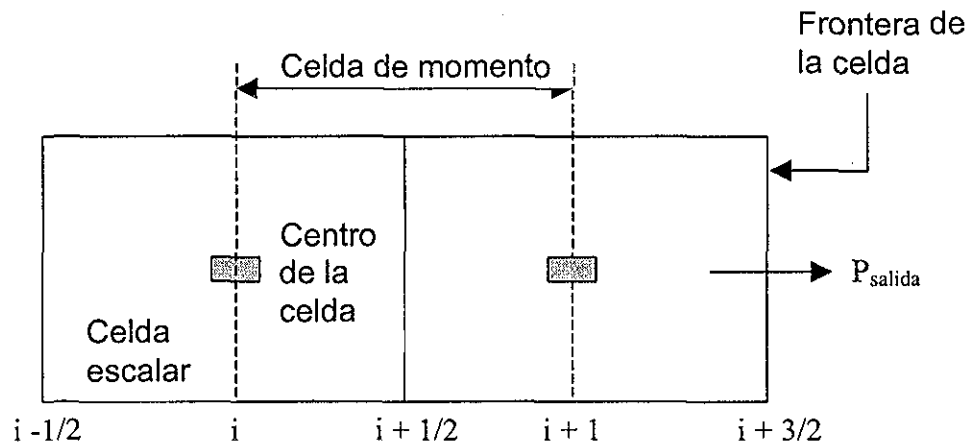


Figura 4.3 Condición de frontera a la salida

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas que corresponde al modelo con esta condición de frontera queda expresado como sigue

#### *Ecuación de continuidad*

Se expresa de la misma forma que tienen las Ecs. 4.1 y 4.2.

*Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\frac{V_{i+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2}^n}{\Delta t} = -V_{i+1/2}^n * \frac{CONV}{\Delta x} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \left( \frac{P_{salida}^{n+1} - P_i^{n+1}}{\Delta x} \right) - k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n| - g$$

$$- \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n \Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \rho_v V r^2}{\rho} \right\}_{i+1}^n - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \rho_v V r^2}{\rho} \right\}_i^n \right]$$

(4.28)

La *Ecuación de energía* se expresa de la misma manera que la Ec. 4.7

Las incógnitas que deben calcularse son  $\rho_i^{n+1}$ ,  $V_{i+1/2}^{n+1}$  y  $(\rho u)_i^{n+1}$ . La primera queda como la Ec. 4.8.

La segunda incógnita se despeja de la siguiente forma:

$$V_{i+1/2}^n = V_{i+1/2}^n - V_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (CONV) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{salida}^{n+1} - P_i^{n+1}) - \Delta t k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n| - \Delta t g$$

$$- \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1}^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n \right\}$$

(4.29)

Si se define  $\tilde{V}$  como:

$$\tilde{V}_{i+1/2} = V_{i+1/2}^n - V_{i+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (CONV) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{salida}^{n+1} - p_i^{n+1}) - \Delta t g \quad (4.30)$$

y se sustituye la Ec. 4.30 en la Ec. 4.29 se tiene:

$$V_{i+1/2}^{n+1} = \tilde{V}_{i+1/2} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{salida}^{n+1} - p_{salida}^n - p_i^{n+1} + p_i^n) - \Delta t k^n V_{i+1/2}^{n+1} |V_{i+1/2}^n|$$

$$- \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1}^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n \right\} \quad (4.31)$$

Como las presiones a la salida al tiempo actual y tiempo nuevo son las mismas finalmente es posible llegar a

$$V_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{B_{i+1/2}^n} \left[ \tilde{V}_{i+1/2} + \frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_i^{n+1} - p_i^n) \right] -$$

$$\frac{1}{\rho_{i+1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1}^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_i \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n \right\} \quad (4.32)$$



Procediendo de igual forma para

$$V_{i-1/2}^{n+1} = \frac{1}{B_{i-1/2}^n} \left[ \tilde{V}_{i-1/2} - \frac{1}{\rho_{i-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_i^{n+1} - p_i^n - p_{i-1}^{n+1} + p_{i-1}^n) \right] - \frac{1}{\rho_{i-1/2}^n} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v V r^2}{\rho} \right]_i^n - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i-1}^n \right\} \quad (4.33)$$

La tercera incógnita se expresa de la misma forma que la Ec. 4.15

Para la cuarta incógnita,  $p_i^{n+1}$ , se sigue el mismo procedimiento que en las Ecs. 4.16 a 4.19. De manera que sustituyendo los valores de las Ecs. 4.13 y 4.14 tenemos la Ec. 4.34 que agrupa los términos comunes de  $p_x^{n+1}$

$$p_i^{n+1} \left[ \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i-1/2}^n} + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + D_1 - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n D_2}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n D_2}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} \right] + \left[ -2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x D_2}{B_{i-1/2}^n} + 2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x D_2}{B_{i+1/2}^n} - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) V_{i+1/2}^n D_2 + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) V_{i-1/2}^n D_2 - \frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i^n D_2 \right] p_{i-1}^{n+1} \left[ - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i-1/2}^n} + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n D_2}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} - 2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x D_2}{B_{i-1/2}^n} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial \rho}{\partial (\rho u)} \right)_p \left\{ -\frac{C_v M_w}{V_{cvi}} \left( \frac{dT}{dp} \right)_i p_i^n + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n \tilde{V}_{i+1/2}}{B_{i+1/2}^n} - p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n B_{i+1/2}^n} - \frac{(\rho u)_{i+1/2}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{\rho_{i+1/2}^n} \right. \\
 & * \left. \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i-1} \right\} - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n \tilde{V}_{i-1/2}}{B_{i-1/2}^n} - p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} \right. \\
 & + p_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n}{\rho_{i-1/2}^n B_{i-1/2}^n} + \frac{(\rho u)_{i-1/2}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{\rho_{i-1/2}^n} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i-1} \right\} + \\
 & \frac{2\tilde{V}_{i-1/2} \rho_{i-1/2}^n}{B_{i-1/2}^n} g x \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{2}{B_{i-1/2}^n} g x - p_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{2}{B_{i-1/2}^n} g x - \frac{\tilde{V}_{i+1/2}}{B_{i+1/2}^n} 2 g x \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \\
 & p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{2}{B_{i+1/2}^n} g x - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{g x}{\rho_{i-1/2}^n} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i-1} \right\} + \\
 & \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 g x \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1} - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i \right\} + g \rho V \Delta t \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2} - \left\{ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v (u_v - u_l) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2} \right] \\
 & + p_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i+1/2} - \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l - \rho_v) V r}{\rho} \right\}_{i-1/2} \right] + q \Delta t \left. \right\} \\
 & + \tilde{V}_{i-1/2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\rho_{i-1/2}^n}{B_{i-1/2}^n} + p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} - p_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i-1/2}^n} - \frac{\tilde{V}_{i+1/2} \rho_{i+1/2}^n}{B_{i+1/2}^n} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + p_i^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} + \\
 & \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i-1/2}^n} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1} - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i \right\} + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{B_{i+1/2}^n} \\
 & * \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_{i+1} - \left[ \frac{(1-\alpha)\rho_l \alpha \rho_v V r^2}{\rho} \right]_i \right\} \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

El desarrollo algebraico de las ecuaciones en diferencias finitas condujo a la Ec. 4.34 la cual es también similar a la Ec. 4.19, donde los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son

conocidos y los valores de la presión al nuevo tiempo son las incógnitas que se desea calcular.

El procedimiento de solución se realizó de la siguiente manera:

1. Modelo de flujo estacionario.

- a. Planteamiento de las ecuaciones diferenciales de masa, momento y energía que representan el modelo de flujo.
- b. Solución del sistema de ecuaciones  $\frac{D(Y)}{D(X)} = F(I, X, Y(1), Y(2), \dots, Y(N))$  mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
- c. Los resultados que se obtienen de los parámetros mediante este método numérico como la presión, velocidad de la mezcla, velocidad de las fases y fracción de vacío representan las condiciones de iniciales del modelo de flujo transitorio.

2. Modelo de flujo transitorio.

- a. Discretización de las ecuaciones diferenciales mediante el método parcialmente implícito linealizado.
- b. Se fijan las condiciones de frontera.
- c. Generación de una matriz tridiagonal a partir de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas.
- d. Se resuelve mediante la subrutina numérica *Tridag*.
- e. Aplica criterio de convergencia.
- f. Actualización de valores del sistema.
- g. Compara tiempo  $t < t_{\text{final}}$ .

## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS Y DISCUSIONES**

#### **5.1 Simulaciones de despresurización.**

##### **5.1.1 Simulaciones de flujo estacionario en un sistema tubería**

###### **horizontal - raiser.**

Se realizaron las simulaciones numéricas de la despresurización del sistema causada por una ruptura a la salida del raiser. La geometría de la tubería, propiedades del material de la pared de la tubería y condiciones de operación del sistema se resumen en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1 Resumen de datos del caso estudiado**

FLUIDO	PROPANO
Longitud de la tubería	750 m.
Longitud del riser	750 m.
Diámetro interno	208.76 mm (8.2189 pg)
Espesor de pared de la tubería	5.16 mm (0.203 pg)
Material de la tubería	Acero al carbón
Densidad del acero	7800 kg/m <sup>3</sup>
Capacidad térmica del acero	502.08 J/(kgK)
Conductividad térmica del acero	44.969 W/(mK)
Velocidad másica inicial	750 kg/(m <sup>2</sup> s)
Presión a la entrada de la tubería horizontal	20.1 x 10 <sup>5</sup> Pa
Presión a la salida de la tubería horizontal	19.7 x 10 <sup>5</sup> Pa
Temperatura a la entrada de la tubería horizontal	331 K
Presión a la salida del raiser	9.5 x 10 <sup>5</sup> Pa

Las figuras 5.1 a 5.4 ilustran la predicción de los perfiles de presión, fracción de vacío, velocidad de la mezcla y velocidades de las fases.

Se observa que la caída de presión debida únicamente a la fricción en la tubería horizontal es pequeña comparándola con la del raiser, donde se incrementa considerablemente debido a que la fuerza dominante es la gravedad y la presión disminuye conforme se incrementa la elevación. (Fig. 5.1).

La fracción de vacío alcanza un valor de 0.898 a la salida del raiser porque el líquido se evapora debido al decremento en la presión del fluido (Fig. 5.2).

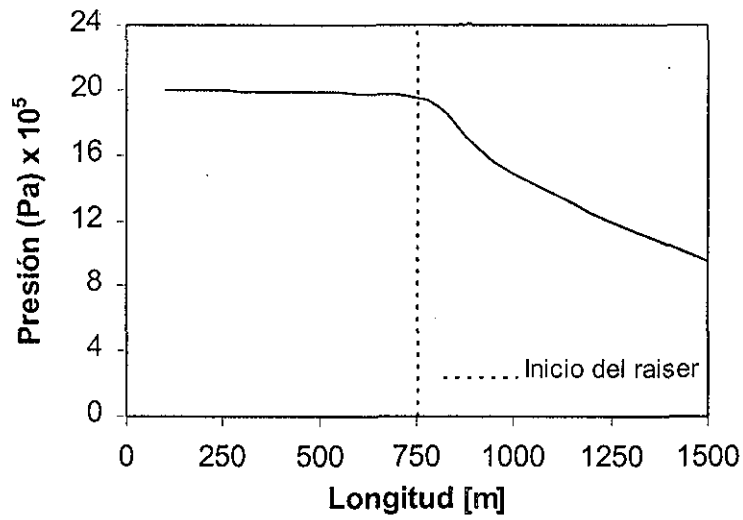


Fig. 5.1 Perfil de presión

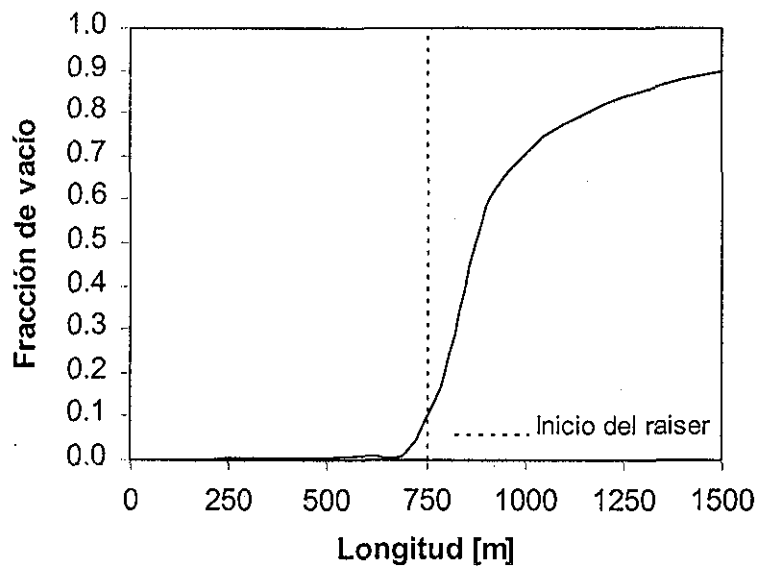


Fig. 5.2 Perfil de fracción de vacío

El parámetro de velocidad de la mezcla a la salida del raiser llega a un valor de 9.73 m/s (Fig. 5.3).

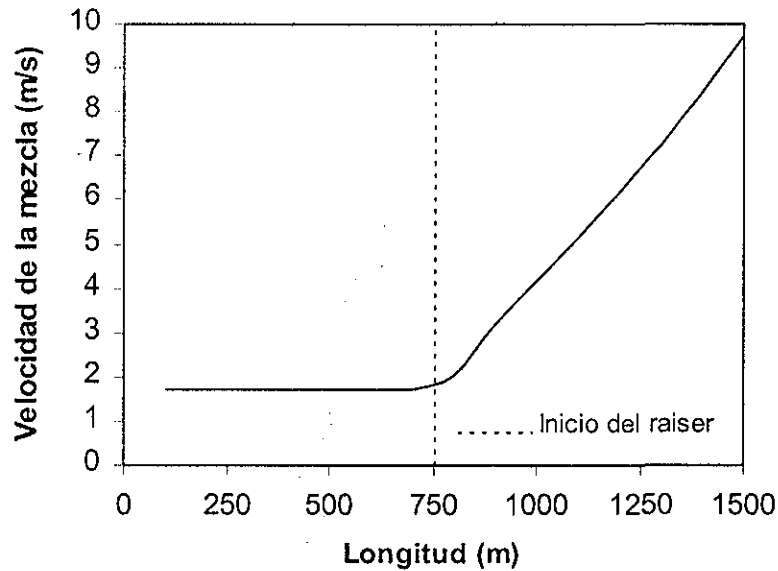


Fig. 5.3 Perfil de velocidad

El resbalamiento entre las fases se incrementa conforme la elevación aumenta, la velocidad del líquido alcanza 6.91 m/s y la velocidad del gas 18.1 m/s a la salida del raiser (Fig. 5.4).

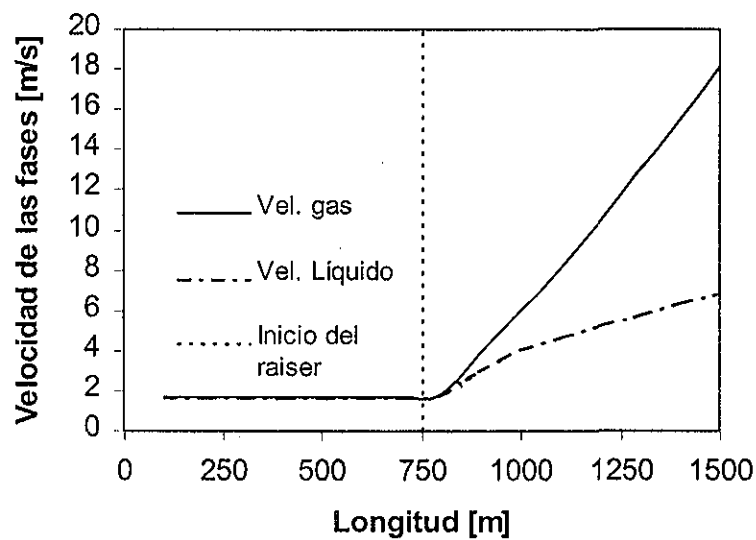


Fig. 5.4 Perfiles de velocidades de las fases

### 5.1.2 Simulaciones del modelo transitorio

Se realizaron simulaciones numéricas de la despresurización del sistema en régimen transitorio. La geometría de la tubería, propiedades del material de la pared de la tubería y condiciones iniciales de operación del sistema se resumen en la tabla 5.1. El fluido transportado es propano puro. El propano entra al sistema en forma de líquido ligeramente subenfriado. La presión ambiente tiene un valor de  $1.013 \times 10^5$  Pa.

La predicción de los perfiles transitorios de presión, velocidad de las fases y fracción de vacío se presentan en las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7, respectivamente. La ruptura de la tubería causa una despresurización del sistema (Fig.5.5).

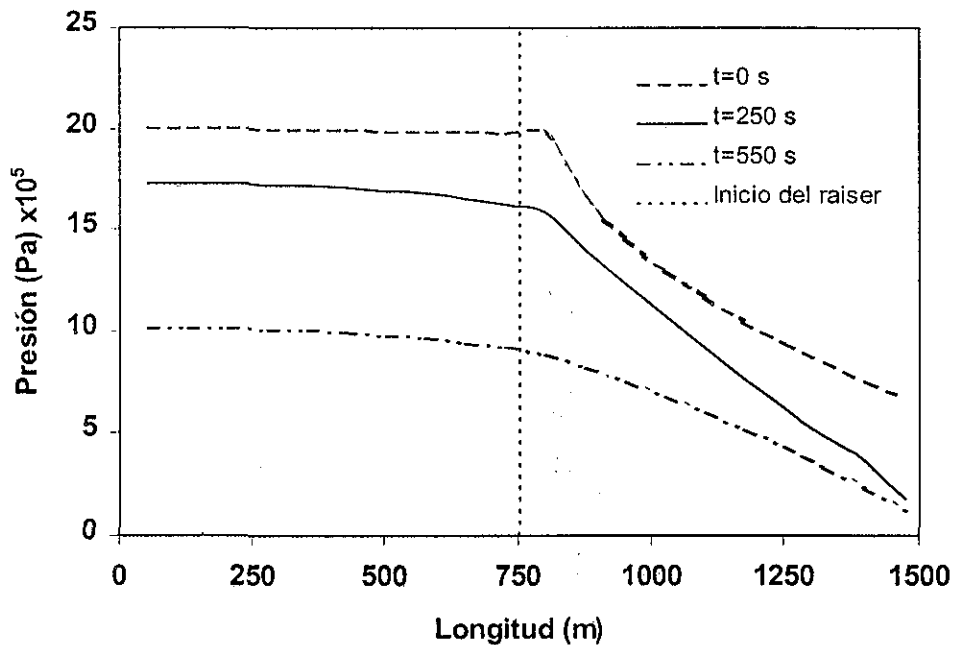


Figura 5.5 Perfiles transitorios de presión



Inicialmente, la caída de presión debido a la fricción resulta en evaporación parcial del líquido dentro de la sección horizontal (Fig.5.6.a). En el raiser, la fuerza de gravedad es dominante y la presión disminuye rápidamente con un incremento en la elevación. El líquido se evapora debido a esta disminución en la presión del fluido. La fracción de vacío alcanza el valor de 0.8 a la salida del raiser. El resbalamiento entre las fases se incrementa gradualmente con un incremento en la elevación (Fig.5.6.a).

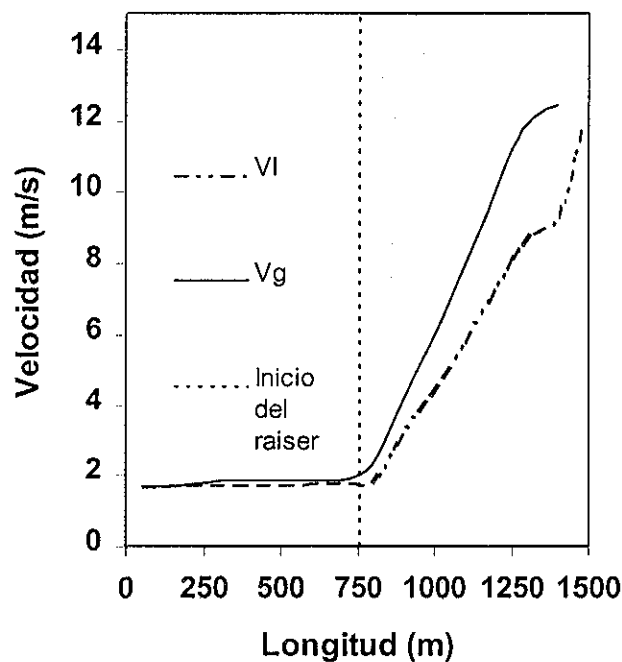
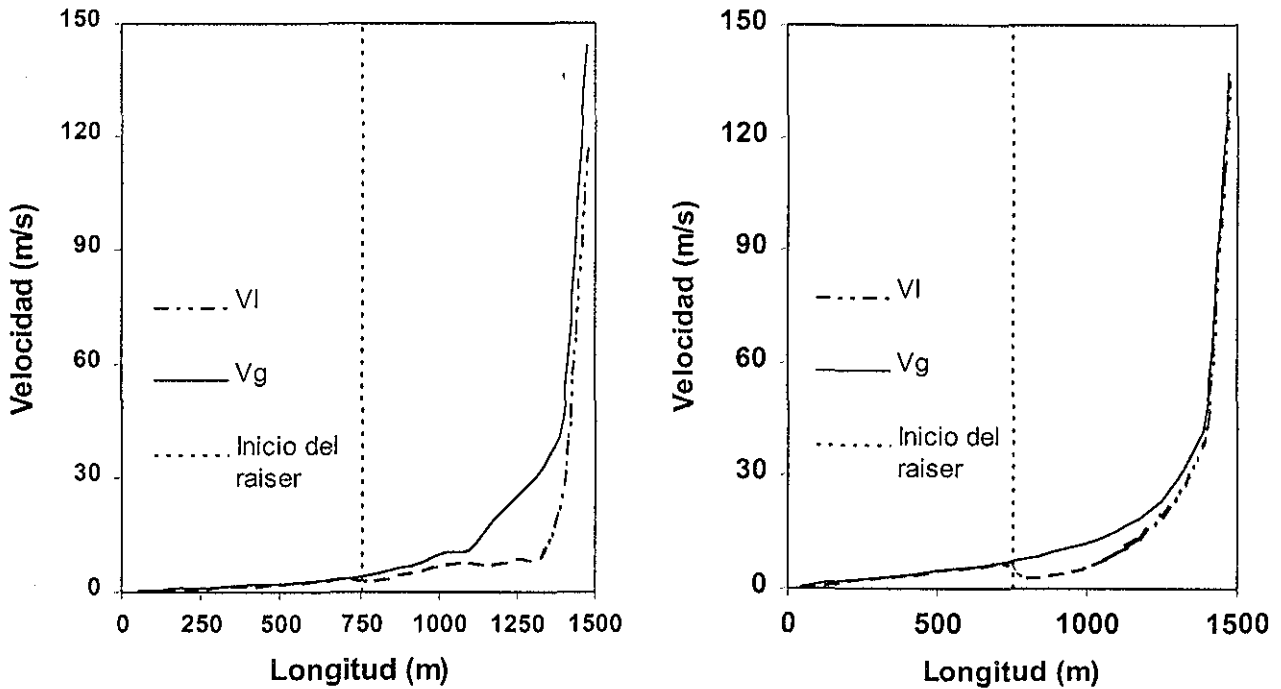


Figura 5.6.a Perfil transitorio de velocidad a t=0

En t=250 s, el flujo es crítico en la ruptura. Las velocidades de las fases cerca de la ruptura en el raiser son muy altas (> 120 m/s).



Figuras 5.6.b y 5.6.c Perfiles transitorios de velocidad a  $t=250$  s. y  $t=550$  s

En la sección horizontal, se estableció un flujo quasi-estacionario; entonces el gasto de flujo total a la salida de la tubería es significativamente más bajo que a la salida del raiser.

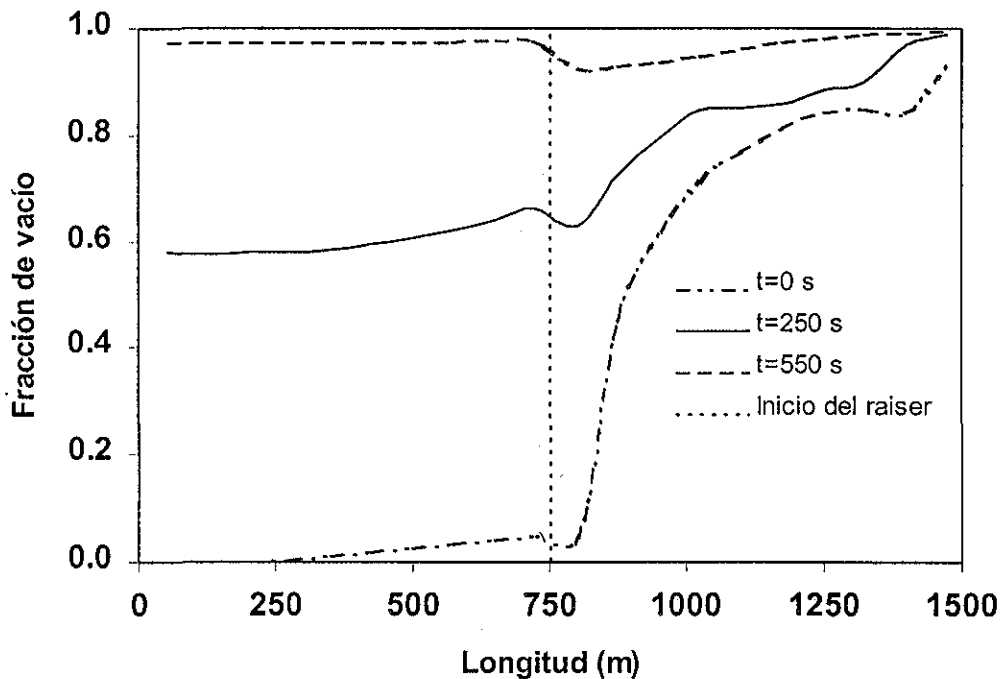
En el codo que une la tubería con el raiser ocurre acumulación de líquido (un mínimo local en  $t=250$  s y  $x=750$  m se observa en la Fig.5.7). Esto puede ser atribuido al efecto de colgamiento. Cuando la mezcla de dos fases entra al raiser, los efectos de gravedad causan que la fase líquida se mueva más lentamente que la fase gaseosa. Como los gastos de flujo de fase en este punto son casi los mismos que a la salida de la tubería horizontal la fracción de volumen de líquido se incrementa.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Al tiempo  $t=0$  s el frente de evaporación se presenta aproximadamente a 300 m de la entrada de la tubería horizontal, de tal forma que en este punto la temperatura del fluido y la pared no han cambiado.

En  $t=250$  s la presión en el raiser disminuye rápidamente con un incremento en la elevación, sin embargo la fracción de vacío casi no se incrementa (en  $x \approx 1000-1400$ m).

El efecto de colgamiento impide la formación de vacío causado por el proceso de evaporación. El flujo en la ruptura termina su proceso de estrangulación en  $t = 350$  s.



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

**Figura 5.7** Perfiles transitorios de fracción de vacío.

El proceso de evaporación casi ha concluido totalmente en un tiempo igual a  $t=550$  s. Alguna cierta cantidad de líquido permanece todavía en el raiser donde prevalece el patrón de flujo anular (Fig.5.7).

A la salida del raiser, la fase gaseosa se descarga a los alrededores. Las Figuras 5.8 y 5.9 muestran las variaciones con el tiempo de la masa y gasto liberado, respectivamente.

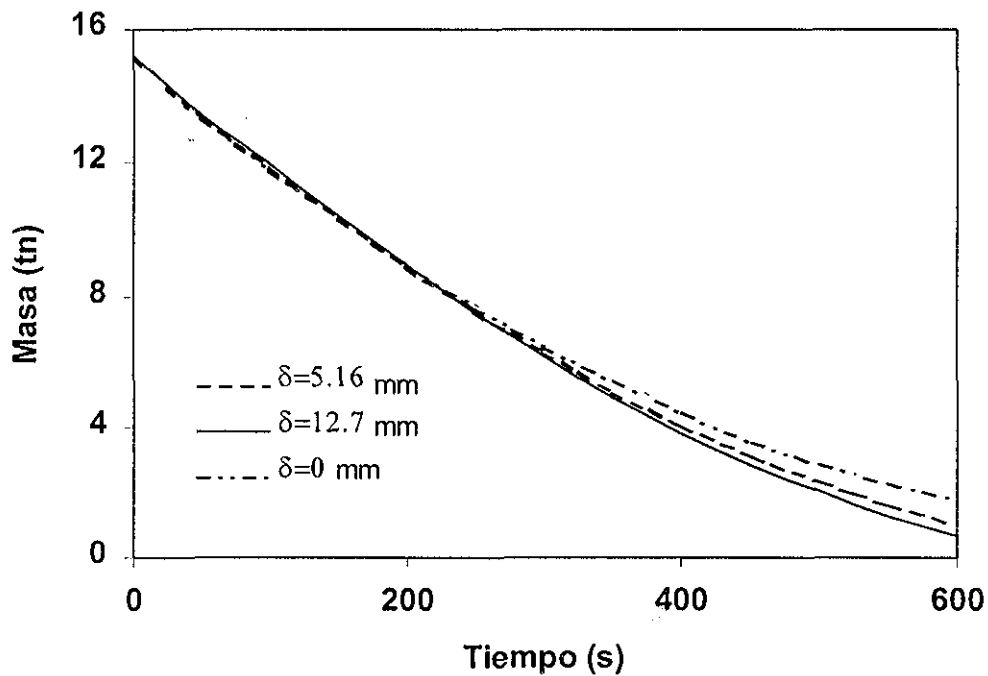


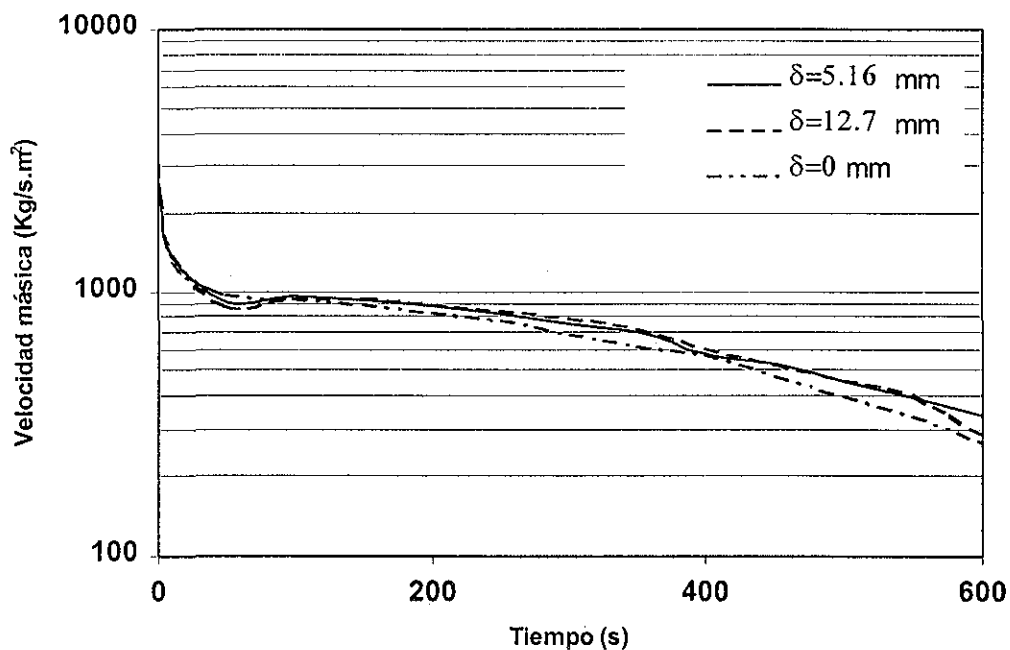
Figura 5.8 Perfiles transitorios de variación de masa

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

### 5.1.3 Efecto de la transferencia de calor conjugada

Para investigar el efecto de transferencia de calor del fluido a la pared sobre el comportamiento del flujo, se realizaron una serie de simulaciones numéricas adicionales.

En esas simulaciones se consideraron tres valores diferentes de espesor de pared de tubería:  $\delta=0$  mm, 5.16 mm y 12.7 mm. Las demás condiciones (geometría de la tubería, material de la pared de la tubería y condiciones iniciales de operación) están dadas en la tabla 5.1. Los resultados obtenidos se presentan en las Figuras 5.8 a 5.18. Un análisis de esos resultados revela que la transferencia de calor conjugada tiene un efecto pequeño sobre las variaciones de masa, de gasto liberado y de presión a la salida del raiser (Figs. 5.8, 5.9 y 5.10).



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura 5.9 Variación del gasto descargado

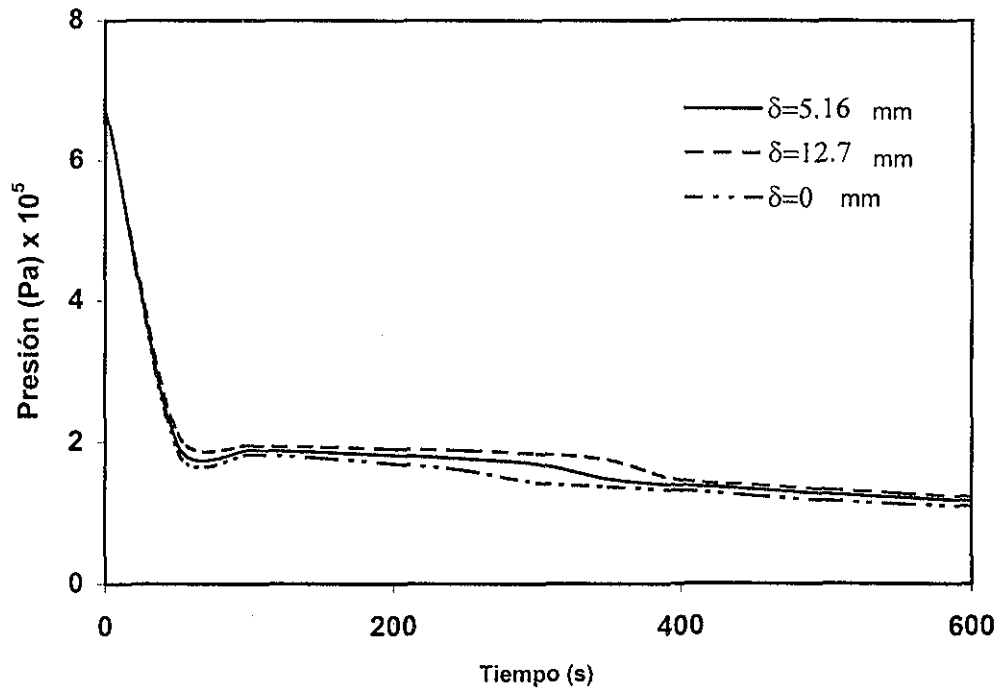
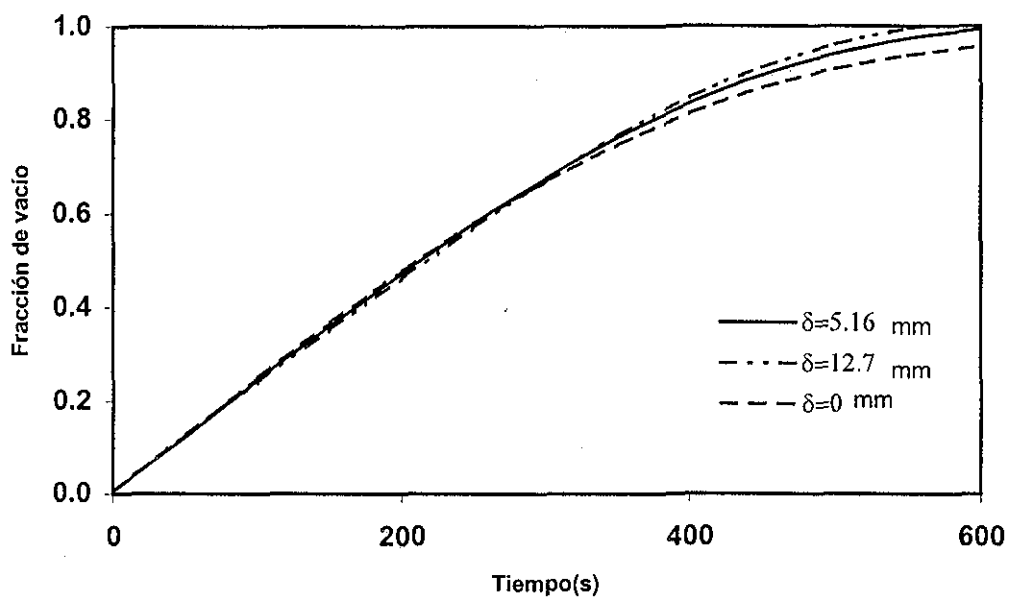


Figura 5.10 Variación de la presión a la salida del raiser

La transferencia de energía almacenada en la pared de la tubería no afecta la formación de vacío durante el proceso de despresurización (Figs. 5.11, 5.12 y 5.13)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 5.11 Variación de la fracción de vacío en la entrada de la tubería.

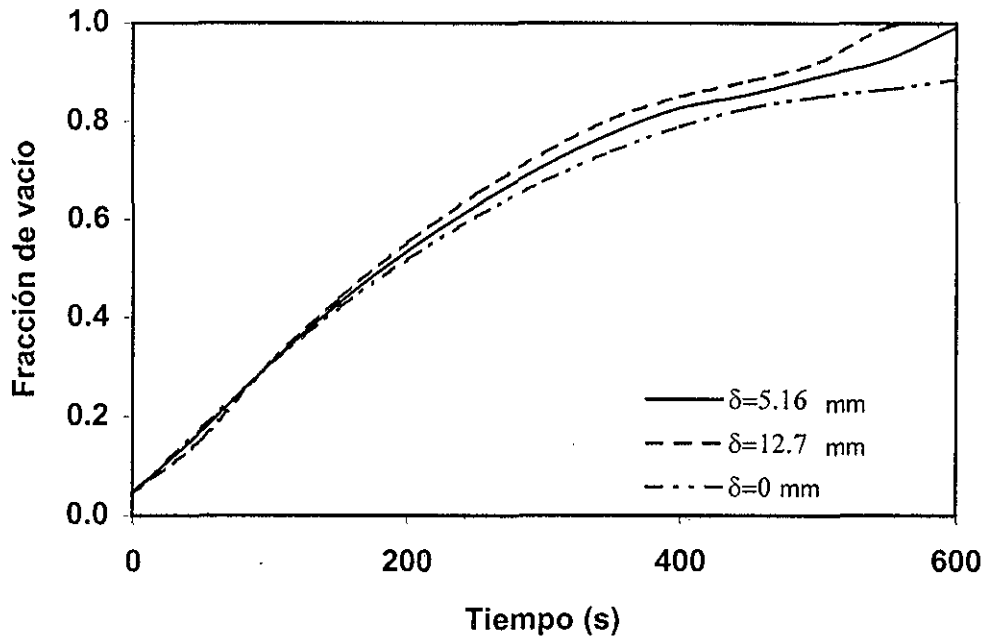


Figura 5.12 Variación de la fracción de vacío a la entrada del raiser

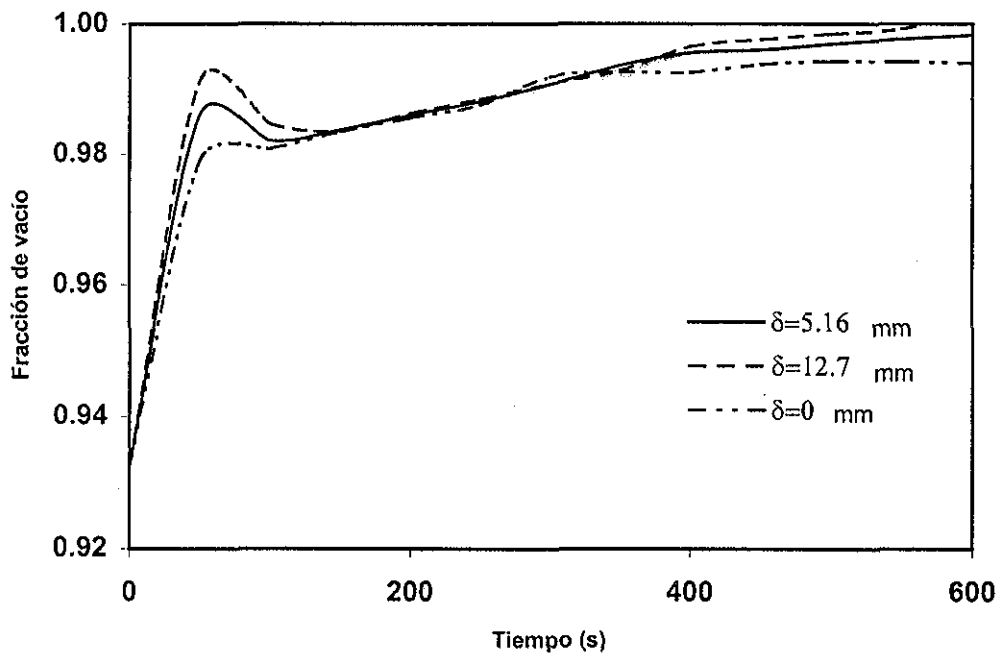


Figura 5.13 Variación de la fracción de vacío a la salida del raiser

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Sin embargo, el espesor de la pared tiene un efecto fuerte sobre la presión y consecuentemente temperatura en el sistema (Figs. 5.14 y 5.15).

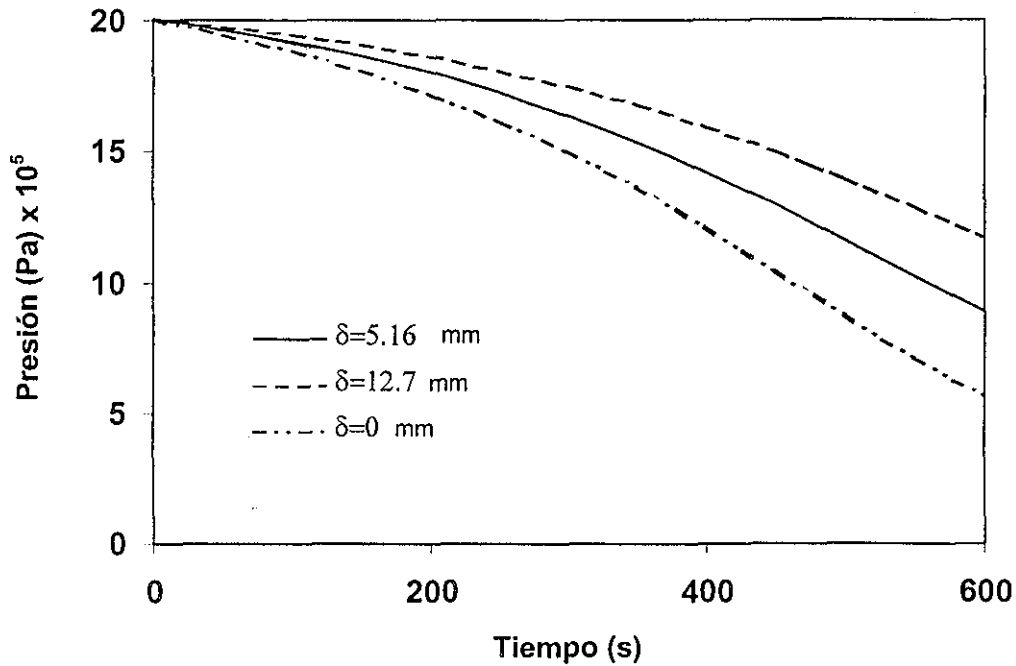


Figura 5.14 Variación de la presión a la entrada de la tubería

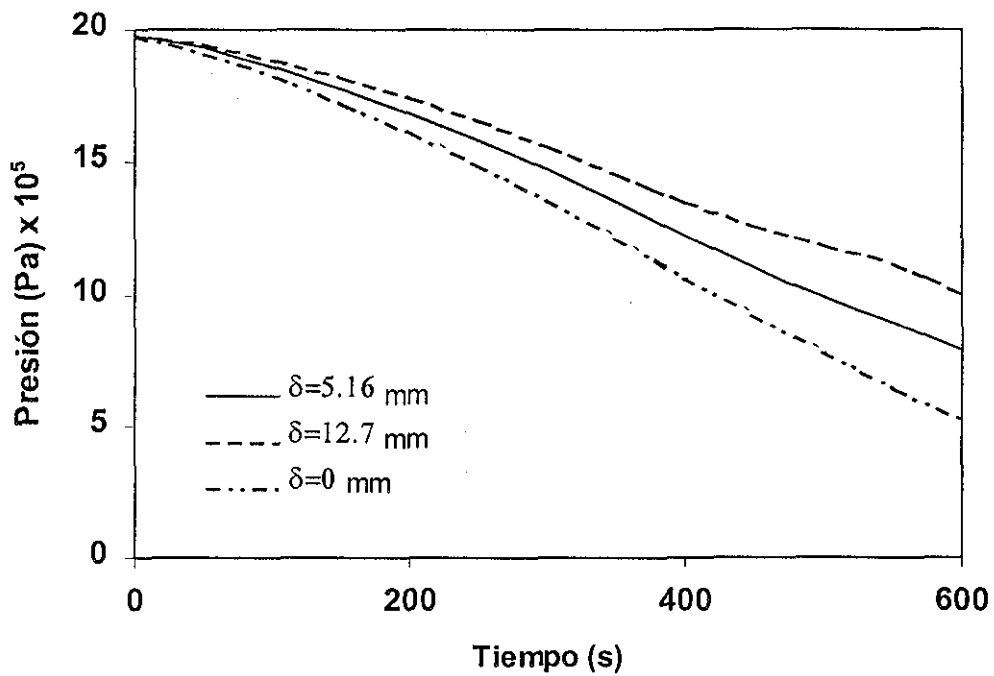


Figura 5.15 Variación de la presión a la entrada del raiser

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



En las Figs. 5.16 a 5.18 se presenta el perfil de temperatura en la entrada de la tubería horizontal y entrada y salida del raiser respectivamente. Se observa que la pared de la tubería tiene un efecto importante en la caída de temperatura del fluido para los tres distintos espesores a la entrada de la tubería horizontal y raiser. La onda de despresurización después de 600 s causa una caída de temperatura aproximada de 30°K. Sin embargo, la variación de temperatura a la salida del raiser muestra que el efecto de la pared tiene una caída de temperatura en el fluido mayor (de 40°K aproximadamente) en los tres espesores de tubería en los primeros 50 segundos de ocurrida la ruptura.

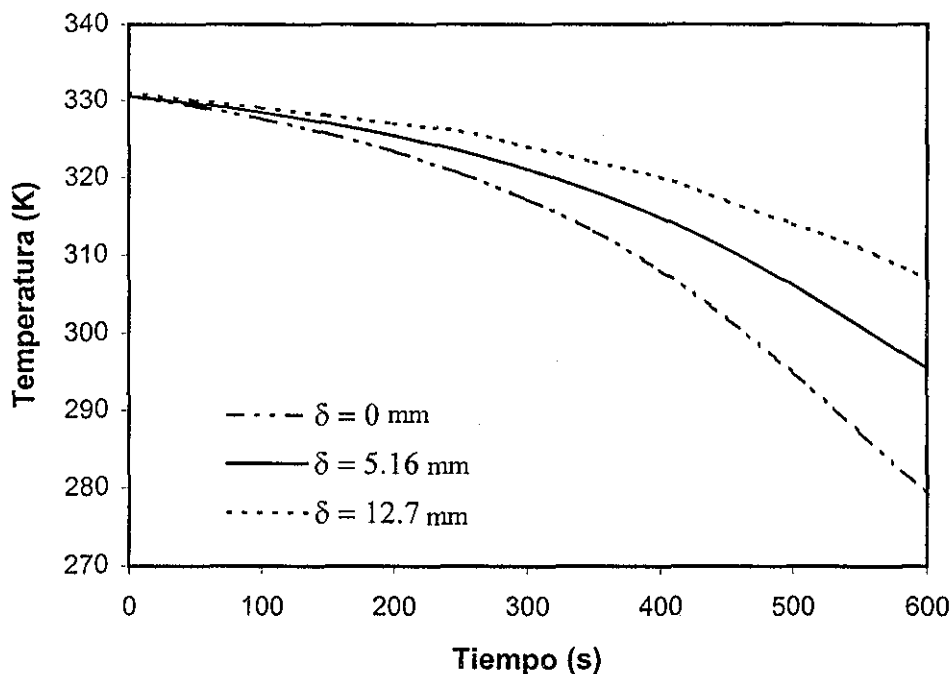


Fig. 5.16 Variación de la temperatura a la entrada de la tubería.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

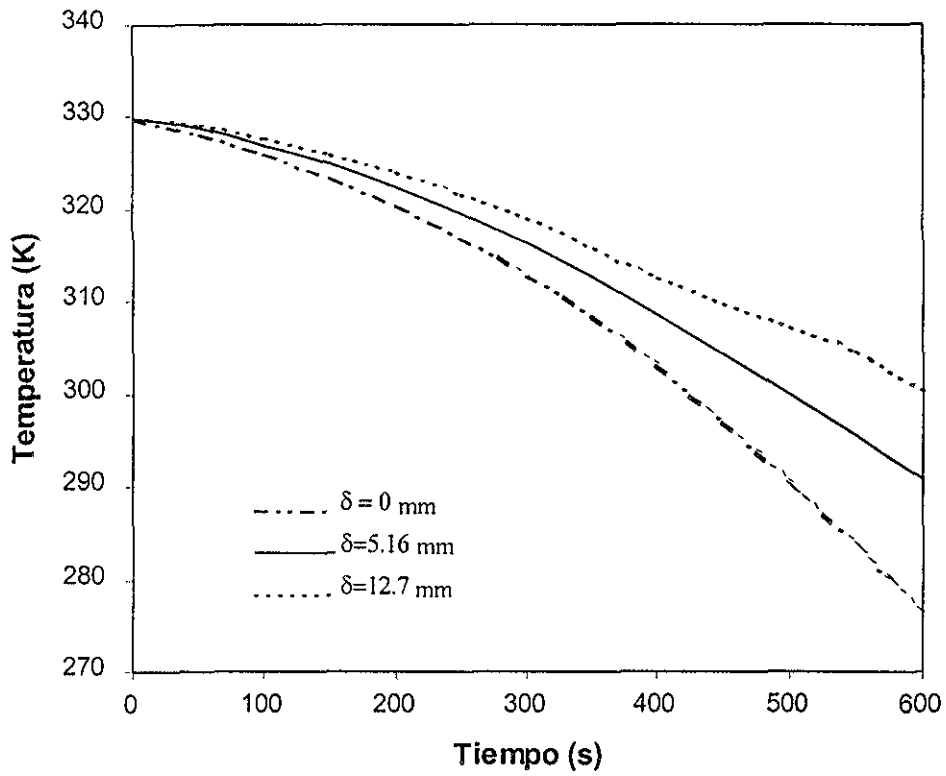


Fig. 5.17 Variación de la temperatura a la entrada del raiser

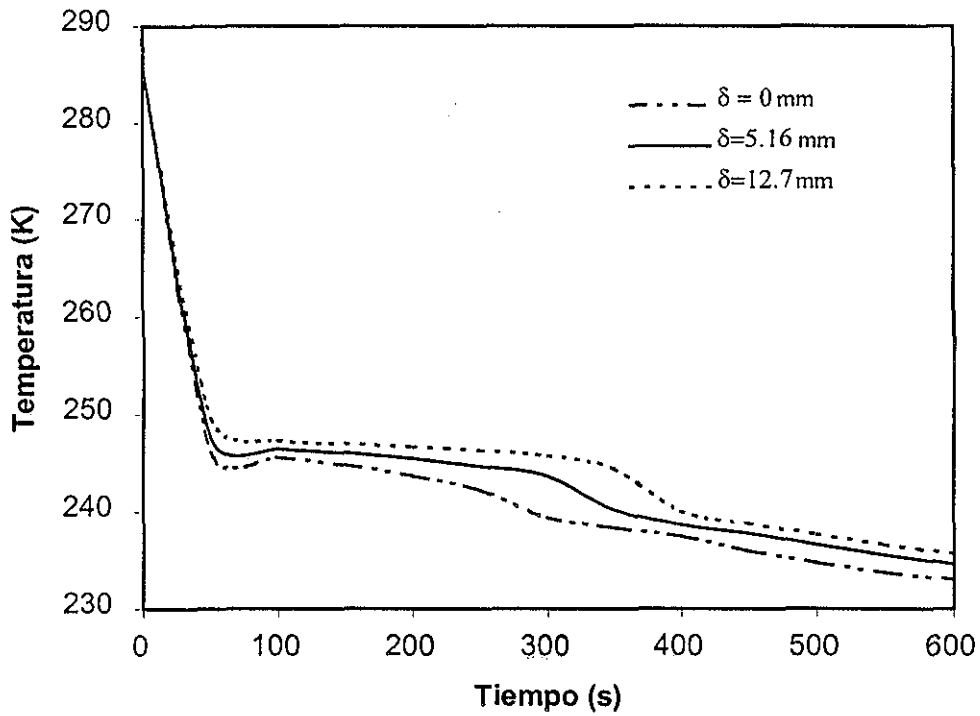


Fig. 5.18 Variación de la temperatura a la salida del raiser

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 6.1 Sumario

Se modificó un método desarrollado previamente para modelar flujo homogéneo transitorio bifásico y transferencia de calor conjugada causada por presiones transitorias en tuberías horizontales, para flujo vertical de dos fases que intercambia calor con las paredes de la tubería.

Se desarrolló inicialmente un modelo de flujo estacionario, en el cual se utilizó el método de Runge – Kutta de cuarto orden para obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales que representan el modelo.

El modelo simplificado para la transferencia de calor conjugada transitoria en tuberías que transportan flujos bifásicos se basó en la formulación de la ecuación de

balance de energía para un volumen de control, que incluye un elemento de fluido y un elemento de pared adyacente, en el que se genera calor.

Para describir el flujo dinámico se utilizó el modelo de flujo de deriva (tres ecuaciones), en el cual se utiliza la nueva formulación para el balance de energía. Se incluyeron los términos de flujo de deriva en las ecuaciones de movimiento y energía respectivamente. Así mismo, mediante correlaciones se obtuvieron los valores de velocidad relativa. Se realizó un desarrollo algebraico por medio de ecuaciones en diferencias finitas para obtener un sistema lineal de “n” ecuaciones con “n” incógnitas, el cual se resolvió mediante una subrutina numérica. Este desarrollo se hizo para tres casos: nodo de entrada, nodo intermedio y nodo a la salida. Con lo anterior se efectuaron las simulaciones en régimen transitorio.

Se estudió además el efecto de la pared de la tubería sobre el comportamiento de flujo durante el proceso de despresurización de la misma. Se planteó la suposición de flujo de calor cuasi-estacionario para desarrollar una ecuación que permite obtener un criterio de aplicabilidad del modelo para transferencia de calor conjugada transitoria, sin generación de calor en la pared de la tubería.

## **6.2 Contribuciones hechas**

Las contribuciones de este trabajo han sido en términos del modelado simplificado del fenómeno de transferencia de calor conjugada en flujo vertical de dos fases, durante despresurización de tuberías.

Las contribuciones principales son:

1. El estudio numérico de transferencia de calor conjugada durante despresurización de una tubería vertical larga que transporta una mezcla de dos fases.
2. Este estudio puede usarse para aplicaciones prácticas de ingeniería que requieren simular transferencia de calor conjugada en flujo vertical bifásico.
3. El método es aplicable para modelar flujo de dos fases en el cual se considera el efecto de resbalamiento en la interfaz.
4. Se propone un criterio de aplicabilidad para problemas de transferencia de calor conjugada sin generación de calor en la pared.

### **6.3 Conclusiones**

Las principales conclusiones de este trabajo son:

1. El estudio reveló que la transferencia de calor fluido-pared producida por variaciones de presión, tiene un efecto pequeño sobre el gasto descargado en el sistema.
2. Se tiene un efecto significativo sobre las respuestas de presión y temperatura.

3. La transferencia de energía almacenada en la pared de la tubería no afecta la formación de vacío durante el proceso de despresurización.
4. El modelo desarrollado es una alternativa simple y confiable para la solución de problemas de transferencia de calor conjugada transitoria, en flujo bifásico, durante despresurización.

Los resultados del presente trabajo han sido publicados en forma de:

- Artículo en una conferencia: Bautista, F., Fairuzov, Y. V., "A Study of Transient Heat Transfer in a Vertical Two-Phase Flow During Blowdown of a Pipeline", ASME IMECE 2001, New York, Noviembre 11 – 16, 2001.

#### **6.4 Recomendaciones para futuros trabajos.**

- Emplear la formulación del balance de energía para mezclas multicomponentes, es decir flujo de dos líquidos inmiscibles ó de más de dos fases.
- Probar con modelos mecanísticos los valores de velocidad relativa obtenidos mediante correlaciones.
- Realizar un estudio para obtener datos experimentales.

## REFERENCIAS

- Alamgir, Md. Y Leinhard, J. H., "Correlation of Pressure Undershoot During Hot-Water Depressurization", J. Heat transfer, 103, 52 (1981).
  
- Bartolomei, G. G. y Alkhuton, M. S., 1967, "Determination of the True Vapor Content When There Is Bubbling in the stabilization Section", Teploenergetika 14(12), 80.
  
- Botros, K. K., Jungowski, W. M. Y Weiss, M. H., 1989, "Models and Methods of Simulating Gas Pipeline Blowdown", Can. J. Chem. Eng., 67 .
  
- Chen, J.C., 1966, "Correlation for Boiling Heat Transfer to Saturated Liquids in Convective Flow," Int. Eng. Chem. Process Design Development 5, pp 322-333.

- Chen, J.R., Richarson, S.M., y Saville,G., 1995 a, “Modelling of Two-Phase Blowdown from Pipelines-I. A Hyperbolyc Model Based on Variational Principles”, *Chemical Engineering Science*, Vol.50, 695.
  
- Chen, J.R., Richarson, S.M., y Saville,G., 1995 b, “Modelling of Two-Phase Blowdown from Pipelines-II. A Simplified Numerical Method for Multi-Component Mixtures,” *Chemical Engineering Science*, Vol.50, 2173-2187.
  
- Clark, N N. Van Egmond, J W. y Nebiolo, E P. 1990 “Drift-Flux Model Applied to Bubble Columns and Low Velocity Flows”. *International Journal of multiphase Flow*. V 16, n 2, Mar-Apr p 261-279.
  
- Dimentiev, B. A., Lepilin R. S. y Loginov A. A. 1959, “An Investigation of Hidrodynamic Process of Bubbling Through a Vapor liquid Mixture of Considerable Height”, *Nauch. Dokl. Vish. Shkol-Energetica* No. 2, 251.
  
- Engineering Data book 1972, Gas Processors Association, Tulsa, OK.
  
- Fairuzov Y. V. y Arvizu dal Piaz, H., 2001, “Numerical Solution for Transient Conjugate Two-Phase Heat Transfer with Heat Generation in the Pipe Wall,” *ASME Journal of Heat Transfer*, (in review).



- Fairuzov Y. V., 2000, "Modeling of Conjugate Two-Phase Heat Transfer During Depressurization of Pipelines", Journal of Heat Transfer, Vol. 122, pp.99-106.
  
- Fairuzov, Y. V., 1998, "Blowdown of Pipelines Carrying Flashing Liquids", AIChE. J., 44, pp 245-254.
  
- Fairuzov, Y. V., 1998, "Numerical Solution for Blowdown of Pipelines Containing Flashing Liquids", AIChE. J., 44, pp 2124-2128.
  
- Franca, F. Y Lahex, RT Jr. 1992 "Use of Drift-Flux Techniques for the Analysis of Horizontal Two-Phase Flows. International Journal of Multiphase Flows". V 18, n 6, Nov. p. 787-801.
  
- Goh, C. B., 1989 "Estimation of Flowrate Through a Rupture Natural Gas Pipe", Int. J. Heat Fluid Flow, 10, 173.
  
- Grolmes, M. A., Leung, J. C. y Fauske, h. K., 1984 "Transient Two-Phase Flow Discharge of Flashing Liquids Following a Break in Long Transmission Pipeline", Multi-phase Flow and Heat Transfer III, Part A: Fundamentals, T. N. Veziroglu y A. E. Bergles, eds., Elsevier Amsterdam. P 567.

- 
- 
- Geurst, J. A., 1986 "Variational Principles and Two Fluid Hydrodynamics of Bubbly Liquid/Gas Mixtures", *Physica*, 135A, 445.
  - Haque, M.A., Richardson, S.M., Saville, G., y Chamberlain, G., 1990, "Rapid Depressurization of Pressure Vessels," *J.Loss rev. Proc. Ind.*, Vol. 3, pp.4-7.
  - Jackson, J.F., Liles, D.R., Ransom, V.H., y Ybarrondo, L.J., 1981, "LWR System Safety Analysis," *Nuclear Reactor Safety Heat Transfer*, Edited by Jones, O.C., Hemisphere, 1981, pp.415-478.
  - Jeng, H R. y Pan, C. 1999 "Analysis of Two-Phase Flow Characteristics in a Natural Circulation Loop Using the Drift-Flux Model Taking Flow Pattern Change and Subcooled Boiling into Consideration". *Annals of Nuclear Energy*. V 26, n 14, . P 1227-1251.
  - Kataoka, Isao. Ishii, Mamoru. 1987 "Drift Flux Model for Large Diameter Pipe and New Correlation for Pool Void Fraction". *International Journal of Heat and mass Transfer*, v 30, n 9, Sep p 1927-1939
  - Kataoka, Yoshiyuki, Suzuki, Hiroaki, y Murase, Michio. 1987 "Drift-Flux Parameters for Upward gas Flow in Stagnant Liquid". *Journal of Nuclear Science and Technology*. V 24, n 7, Jul. P 580-586.

- Kim, Doster, J. M. 1991 "Application of Mixture Drift-Flux Equations to Vertical separating Flows". Nuclear Technology. V 95, n 1, Jul. P 103-115.
- Klimenko, V. V., 1988, "A Generalized Correlation for Two-Phase Forced Flow Heat Transfer," Int. J. Heat Mass Transf., 31, pp. 541-552.
- Lahey, R. T. y Moody, F. J., 1977 " The Thermal-Hydraulics of a boiling Water Nuclear Reactor", American Nuclear Society, Lagrange Park, IL.
- Liles D. y Reed W., 1978 "A Semi-Implicit Method for Two-Phase Fluid Dynamics," J. Comp. Phys. 26, 390-407. Marzo
- Lin, Y. K., y Kuo, J. C., 1988, "Transient Conjugated Heat Transfer in Fully Developed laminar Pipe Flows," Int. J. Heat Mass Transf., 31, pp. 1093-1102.
- Lin, Y. K., Yin, C. P., y Yan, W. M., 1991, "Transient Laminar mixed Convective heat Transfer in a flat Duct," ASME J. Heat Transfer, 113, pp 384-390.
- McKee, R. J., 1990 "Simplified Blowdown Calculations", Pipeline Gas J., 40 April.

- Michael Doster, J. Kauffman, Jeremy M. 1999 "Numerical Stability of the Mixture drift-Flux Equations". Nuclear Science and Engineering. V 132, n 1, P 90-104.
  
- Morrow, T. B., Bass, L. R. y Dodge, F. T. 1980, "Pipe Line Break Flow Model", SwRI Project No. 02-5953, Final Rep.
  
- Numerical Recipes Software©, 1986 – 92, Microsoft Developer Studio, Microsoft Corporation.
  
- Ransom, V.H., and Trapp, J.A., 1978, "RELAP5 Progress Summary," PILOT Code Hydrodynamic Model and Numerical Scheme, Idaho National Engineering Laboratory report No. CD-AP-TR-005.
  
- Reibold, W. L., Reocreux y Jones, O. C., 1981 " Blowdown Phase", Nuclear Reactor Safety Heat Transfer, O. C., Jones, ed., Hemisphere, Washington, p. 415.
  
- Richardson, S. M. y Saville, G., 1991 "Blowdown of Pipelines", Proc. Offshore Europe 91 , 369, Aberdeen, U. K.

- 
- 
- Shah, M., 1976, "A New Correlation for Heat Transfer During Boiling Flow Through Tubes," ASHRAE Trans., 82, pp. 66-72.
  
  - Shoup, G., Xiao, J.J., y Roma, J.O., 1998, "Multiphase Pipeline Blowdown Simulation and Comparison to Field Data," *Multiphase Technology, Technology from the Arctic to the Tropics*, Proceeding of 1 st. North American Conference on Multiphase Technology, Brill J. P., Gregory G. A., eds., Professional Engineering Publishing, London, UK, pp. 3-16.
  
  - Starkman, E.S., Schrock, V.E., Neusen, K.F., y Maneely, D.J., 1964. "Expansion of a Very Low Quality Two-Phase Fluid Through a Convergent-Divergent Nozzle". J. of Basic Engineering, Trans. ASME, Series D, 86, 247-256
  
  - Sterman, L. S., "The Generalization of Experimental Data concerning the bubble of Vapor Through Liquid", J. Tech. Phys. (U.S.S.R.) 26, 1519 (1956).
  
  - Sucec, J., 1975, "Unsteady Heat Transfer Between a Fluid With Time Varying Temperature and a Plate: An Exact Solution," Int. J. Heat Mass Transf., 18, pp. 25-34.

- Sucec, J., 1981, "An Improved Quasi-Steady Approach for transient Conjugated forced Convection Problems," Int. J. Heat Mass Transf., 24, pp. 1711-1722.
- Sudo, Y., "Estimation of Average Void Fraction in Vertical Two-Phase Flow Channel Under Low Liquid Velocity", J. Mech. Sci. Technol. 17(1), 1 (1980).
- Takeuchi, Kenji. Young, Michael Y. Hochreiter, y Lawrence E. 1992 "Generalized Drift-Flux Correlation for Vertical Flow". Nuclear Science and Engineering. V 112, n 2, Oct. P 170-180
- Tam, V. H. y Higgins, R. B., 1990 "Simple Transient Release Models of Pressurized Liquid Petroleum Gas from Pipelines", J. Hazard. Mater., 25, 193.
- "TRAC – P1A : An Advance Best – Estimate Computer Program for PWR LOCA Analysis," NUREG/CR – 0665, LA – 7777 – MS, Los Alamos National Laboratory (1979)
- Wilson, J. F., Grenda, R. J. y Patterson, J. F., "Steam Volume Fraction in a Bubbling Two-Phase Mixture", Trans. ANS 5, 151 (1962).
- Yeh, G. C. K. y Zuber, N. "On the Problem of Liquid Entrainment", Argonne Nacional Laboratory Report ANL-6244 (1960).