UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTA DE INGENIERIA

PROBLEMAS DE PLACAS E INECUACIONES VARIACIONALES HIPERBOLICAS: ANALISIS Y APROXIMACION

T E S I S DOCTORAL

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTORADO EN INGENIERIA

MECANICA TEORICA Y APLICADA

P R E S E N T E

LUIS ALFONSO REYES AVILA

Nota: Tesis con una raya vertical. Falla de origen

MEXICO, D.F., 2002

PROBLEMAS DE PLACAS E INECUACIONES
VARIACIONALES HIPERBOLICAS:
ANALISIS Y APROXIMACION

ASESOR

Dr. Gonzalo Alduncin G.

Jefe de la DEPFI

Dr. Gabriel Echavez A.

Aprobada por el Comité Doctoral:

Dr. Ismael Herrera R.

Dr. Luis Ferrer A.

Dr. Gustavo Ayala M.

Dr. Porfirio Ballesteros B.

Dr. Gonzalo Alduncin G.

Dr. Ricardo Chicurel U.

Dr. Jean Pierre Hennart

A mi esposa MAGDALENA y a mis padres,

HECTOR y ELISA

RECONOCIMIENTOS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al profesor GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ por su - dirección y apoyo constante en la elaboración- del presente trabajo.

A la Escuela de Ingeniería de la Universi dad Autónoma de Sinaloa agradezco el subsidio- de una gran parte de esta tesis.

Finalmente expreso mi agradecimiento a las Sras. Guadalupe Espinoza y Guasco, Basilisa A- rroyo y Ruth Ramírez por el excelente trabajo- de mecanografía desarrollado en las distintas- etapas del trabajo.

TEMARIO

0. PRELIMINARES.

En esta sección presentaremos las notaciones y convenciones presentes en el desarrollo de este trabajo:

$(V, \|\cdot\|)$ = Espacio real de Hilbert.

$(V', \|\cdot\|_*)$ = Espacio dual de V.

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V' \times V \to \mathbb{R}$ = Par de dualidad entre V' y V.

$(H, |\cdot|)$ = Espacio real de Hilbert identificado con su dual en el cual V está continua y densamente embebido, esto es:

$$V \hookrightarrow H \approx H' \hookrightarrow V'.$$

Siendo $J = [0,T]$, $0 < T < +\infty$, el intervalo de tiempo, $L^p(0,T;V)$, $1 \leq p < +\infty$, denotará el espacio de funciones vectoriales del tiempo definido por:

$$L^p(0,T;V) = \{v : J \to V : \\ |||v|||_{\mathcal{V}} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt\right)^{1/p} < +\infty\},$$

y

$$C_A([0,T];V) = \{v : J \to V: \ v \text{ es absolutamente continua}\}.$$

Bajo estas convenciones, usaremos la siguiente simbología:

$$\mathcal{V} = L^2(0,T;V),$$

$$\mathcal{H} = L^2(0,T;H),$$

$$\mathcal{V}' = L^2(0,T;V'),$$

$$\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V}:\ v'' \in \mathcal{V}';$$

$$|||v|||_{\mathcal{W}} = |||v|||_{\mathcal{V}} + |||v''|||_{\mathcal{V}'}\}.$$

Aquí $v'' = \dfrac{d^2}{dt^2} v$ es la segunda derivada distribucional con respecto al tiempo de v, la cual pertenece a $\mathcal{D}'((0,T);V)$.

La transformación $a(:,:):V \times V \to \mathbb{R}$ denotará una forma bilineal, continua y simétrica, tal que satisface semicoercividad, esto es:

$$\exists\ \lambda \geq 0,\quad \alpha > 0:$$

$$a(v,v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2,\quad \forall\ v \in V.$$

En base a esta forma bilineal, los operadores $A \in L(V,V')$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}'(\mathcal{V},\mathcal{V}')$ se definirán por:

$$\langle Au,v\rangle = a(u,v),\quad \forall\ u,v \in V,$$

$$(\mathcal{A}v)(t) = A(v(t)),\quad \forall\ v \in \mathcal{V},\quad \text{c.t.}\quad t \in (0,T).$$

La funcional $j : V \to (-\infty, +\infty]$ es propia, convexa y semicontinua por abajo, con subdiferencial $\partial j \subset V \times V'$. El conjunto

$$D(j) = \{v \in V:\ j(v) < +\infty\} \subset V,$$

es llamado el dominio efectivo de $j:V \to (-\infty, +\infty]$. Además, $\mathcal{J}:\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ es la funcional definida por:

$$J(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T j(v(t))dt, & \text{si} \quad j(v(\cdot)) \in L^1(0,T), \\ \\ +\infty & , \text{si no.} \end{cases}$$

Los correspondientes dominios efectivos y subdiferencial de $J: V \to V'$ serán denotados por:

$$\mathcal{D}(J) = \{v \in V: j(v(\cdot)) \in L^1(0,T)\} \subset$$

$$\{v \in V: v(t) \in D(j), \text{ c.t. } t \in (0,T)\},$$

$$\partial J \subset V \times V',$$

respectivamente.

Finalmente, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $W^{m,p}(\Omega)$ denota el espacio de Sovolev definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): \; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \; 0 \leq \alpha \leq m\}.$$

Aquí,

$$L^p(\Omega) = \{u: \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty\},$$

y, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una n-ada de enteros no negativos,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \; \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} \; \cdots \; \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} \, ,$$

es un operador diferencial de orden $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$. En el caso de que $p=2$, se tienen los espacios de Hilbert $H^m(\Omega)$, esto es,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

cuya norma es dada por:

$$\|u\|_m = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2 \right\}^{1/2}.$$

1. INTRODUCCION

Los objetivos fundamentales del presente trabajo son:

1) Generar algunos modelos mecánicos, asociados a problemas dinámicos de placas elásticas sujetas, sobre alguna parte de su frontera, a condiciones de fricción.
2) Realizar el análisis cualitativo de los modelos mecánicos resultantes. Con este fin, presentaremos condiciones suficientes de existencia, unicidad y regularidad de soluciones del modelo matemático asociado a tales problemas.
3) Presentar, junto con el análisis cualitativo correspondiente, aproximaciones continuas, en dimensión infinita, y semidiscretas, en dimensión finita, de éste modelo matemático.
4) Presentar el Método del Elemento Finito como una forma sistemática de construir aproximaciones internas de los problemas en estudio.

Existen en la actualidad varios métodos para formular el modelo matemático bidimensional asociado a problemas de placas elásticas lineales. En un primer tipo de ellos éste es derivado del modelo matemático de la elasticidad lineal tridimensional, haciendo hipótesis sobre la forma de los componentes del vector desplazamiento y de algunos componentes del tensor esfuerzo. Algunos resultados en este sentido pueden encontrarse en [7], [17], [25], [27]. En un segundo tipo de métodos están los llamados métodos asintóticos, para los cuales se introduce un cambio de variable y la solución tridimensional es expresada, en términos de este cambio de variable, mediante una serie de potencias, [5], [6], [10], [14]. En las referencias antes citadas los modelos matemáticos bidimensionales obtenidos están asociados a problemas estáticos. Recientemente, [23], se aplicó el segundo tipo de métodos para el caso dinámico.

El análisis cualitativo, asi como la aproximación en dimensión infinita mediante regularización, de algunos problemas dinámicos y estáticos de placas elásticas lineales pueden encontrarse en [7]. El caso no lineal, placas de Von Karman, ha sido estudiado en [8] y [22]. La aproximación, mediante elementos finitos, de algunos problemas estáticos de placas elásticas lineales, con condiciones de frontera lineales, es presentada en [2], [4].

En este trabajo en la formulación de los modelos de placas elásticas lineales, asociados a problemas dinámicos, se usa un método del primer tipo de los descritos anteriormente, al cual llamamos método de la elastodinámica aplicada. Las condiciones de frontera tipo fricción se expresan mediante subdiferenciales, [9], lo cual nos permite, de manera natural, dar las formulaciones variacionales de los problemas de valores sobre la frontera e iniciales correspondientes, las cuales resultan estar dadas por inecuaciones variacionales hiperbólicas, [19]. Por tanto, el análisis cualitativo y de aproximación de este tipo de problemas, se reduce al correspondiente análisis de tal tipo de inecuaciones. En el primer tipo de análisis se usa el método de semigrupos no lineales presentado en [1] y [3], en el segundo, el llamado método variacional, [18], combinado con aproximaciones tipo penalización, [19], regularización, [11], e internas. La construcción de éstas últimas se realizarán mediante el método de elementos finitos.

Este trabajo está dividido en siete capítulos. El segundo de ellos está relacionado con el análisis cualitativo del siguiente tipo de problemas

$$\begin{aligned}
&\text{Dados } f \in V',\ u_0 \in V,\ v_0 \in D(j),\\
&\text{encuentre } u \in W \text{ con } u' \in \mathcal{D}(J): \qquad (1.1)\\
&u'' + Au + \partial J(u') \ni f,
\end{aligned}$$

$$u(0) = u_o,\ u'(0) = v_o,$$

cuya representación integral es una inecuación variacional hiperbólica. Aquí $A \in L(V,V')$ y $\partial J : V \to 2^{V'}$ es el subdiferencial de $J : V \to (-\infty, +\infty]$. La existencia, unicidad y regularidad de soluciones de este problema ha sido mostrada en [1] y [3], vía el método de semigrupos no lineales, para el caso que $A \in L(V,V')$ sea semicoercivo, $j : V \to (-\infty, +\infty]$ sea propia, convexa, semicontinua inferiormente y

$$\begin{aligned} & f \in H \quad \text{con} \quad f' \in L^1(0,T;H), \\ & u_o \in V, \quad v_o \in D(j), \\ & \{(Au_o + \partial j(v_o)) \cap H\} \neq \phi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

El problema (1.1) es expresado, para el caso que la funcional $j : V \to (-\infty, +\infty]$ esté definida en término de las trazas γv de $v \in V$, mediante el siguiente problema abstracto de valores sobre la frontera e iniciales:

$$\text{Encuentre} \quad u \in V \quad \text{con} \quad u'' \in H, \quad u' \in D(J):$$

$$\left.\begin{aligned} & u''(t) + Pu(t) = f(t), \\ & -\partial u(t) \in \partial h(\gamma u'(t)), \\ & u(0) = u_o, \quad u'(0) = v_o. \end{aligned}\right\} \text{c.t.} \quad t \in (0,T). \tag{1.3}$$

Aquí se asume la regularidad (1.2) y, $P \in L(V,V_o')$ es el operador formal, $\partial \in L(D_o,B')$ es el operador abstracto de Green, $j = h o \gamma$ y $\partial h : B \to 2^{B'}$ es el subdiferencial de la funcional $h : B \to (-\infty, +\infty]$.

En el capítulo tres se presentan aproximaciones continuas, penalización y regularización, y semidiscretas, aproximaciones internas, del siguiente problema:

Dados $f \varepsilon H$ con $f' \varepsilon L^1(0,T;H)$, $u_0 \varepsilon V$, $v_0 \varepsilon D(j)$ con $\left\{(Au_0 + \partial j(v_0)) \cap H\right\} \neq \phi$, encuentre $u \varepsilon V$ con $u'' \varepsilon H$, $u' \varepsilon \mathcal{D}(J)$:

$$<u''(t) + Au(t), v(t) - u'(t)> + j(v(t)) - j(u'(t)) \geq <f(t), v(t) - u'(t)>,$$
$$\forall \; v \varepsilon \mathcal{D}(J), \; \text{c.t.} \; t \varepsilon (0,T), \tag{1.4}$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0,$$

el cual es el problema pseudoinstantáneo asociado a la representación integral de (1.1) con regularidad en los datos (1.2).

El problema penalizado y regularizado asociado a (1.4) queda expresado por:

Encuentre $u_\varepsilon \varepsilon V$ con $u''_\varepsilon \varepsilon H$, $u'_\varepsilon \varepsilon V$:

$$<u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)), v_h(t)> = <f(t), v_h(t)>,$$
$$\forall \; v \varepsilon V, \; \text{c.t.} \; t \varepsilon (0,T), \; \varepsilon > 0, \tag{1.5}$$
$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u'_\varepsilon(0) = v_0.$$

Aquí $\beta : V \to V'$ es el operador de penalización asociado a $D(j)$ el cual es monótono y hemicontinuo de núcleo $D(j)$ y $\nabla j_\varepsilon : V \to V'$, monótono hemicontinuo, es el gradiente de una familia de funcionales $j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ diferenciables que regularizan a $j : V \to (-\infty, +\infty]$. Bajo definiciones apropiadas el problema (1.5) es llevado a un sistema de primer orden, para el cual, aplicando el método de semigrupos no lineales, [1], [3], se obtienen resultados de existencia unicidad y regularidad de soluciones. Posteriormente se introduce la definición de aproximación interna de los espacios $(\mathcal{V},\mathcal{V})$ para transformar el problema (1.5) en el siguiente problema semidiscreto.

$$\text{Encuentre } u_h \in \mathcal{V}_h:$$

$$<u_h''(t) + Au_h(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_h'(t)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(t)),\ v_h(t)> = <f(t),\ v_h(t)>$$

$$\forall\ v_h \in \mathcal{V}_h,\quad \text{c.t.}\quad t \in (0,T), \tag{1.6}$$

$$u_h(0) = u_{o_h},\ u_h'(0) = v_{o_h}.$$

Aquí $\mathcal{V}_h = L^2(0,T;V_h)$, donde, V_h es un subespacio de dimensión finita de V, dim $V_h = m_h \to \infty$, cuando $h \to 0$, tal que $\forall\ v \in \mathcal{V}$ con $v' \in \mathcal{V}$, existe $v_h \in \mathcal{V}_h$ con $v_h' \in \mathcal{V}_h$: $v_h \to v$ en $\mathcal{V}$ y $v_h' \to v'$ en H. Además, $u_{o_h} \to u_o$ y $v_{o_h} \to v_o$ en V. El problema semidiscreto (1.6) es llevado a su representación de primer orden correspondiente, la cual resulta ser:

$$\text{Encuentre } \underline{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}:$$

$$\underline{\gamma}'(t) = G(t;\underline{\gamma}(t)) = \mathcal{B}\underline{\gamma}(t) + \underset{\sim}{F}(t), \tag{1.7}$$

$$\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}_o,$$

donde, c.t. $t \in (0,T)$,

$$\underline{\gamma}(t) = [\underline{\alpha}(t),\ \underline{\alpha}'(t)]^T, \qquad \underline{\gamma}_o = [\underline{\alpha}(0),\ \underline{\alpha}'(0)]^T,$$

$$\mathcal{B}\underline{\gamma}(t) = [\underline{\alpha}'(t),\ -\underset{\sim}{M}^{-1}(\underset{\sim}{K}\underline{\alpha}(t) + \underset{\sim}{C}_\varepsilon(\underline{\alpha}'(t)) + \underset{\sim}{D}(\underline{\alpha}'(t))], \tag{1.8}$$

$$\underset{\sim}{F}(t) = [0,\underset{\sim}{M}^{-1}\underline{F}(t)].$$

Aquí se tiene que el vector $\underline{\alpha}(t)$, c.t. $t \in (0,T)$, se forma con el vector coordenado de $v_h \in V_h$, esto es, si $v_h(t) = \alpha_i(t)\omega_i$, $i = 1, \ldots, m_h$, siendo $\mathcal{B} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m_h}\}$ una base de V_h, $\underline{\alpha}(t) = [\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{m_h}(t)]^T \subset \mathbb{R}^{m_h}$, además,

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{ji} &= \langle \omega_i, \omega_j \rangle, \\
K_{ji} &= \langle A\omega_i, \omega_j \rangle, \\
\underset{\sim}{C}_{\varepsilon j}\, [\underline{\alpha}'(t)] &= \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(\alpha_i'(t)\omega_i), \omega_j \rangle, \\
\underset{\sim}{D}_j\, [\underline{\alpha}'(t)] &= \langle \nabla j_\varepsilon (\alpha_i'(t)\omega_i), \omega_j \rangle, \\
F_j(t) &= \langle f(t), \omega_j \rangle.
\end{aligned}
\right\} \text{ c.t. } t \in (0,T) \tag{1.9}
$$

Se muestra que el problema (1.7) posee una única solución $\underline{\gamma} \in C_A([0,T]; V_h) \times C_A([0,T]; V_h)$ la cual depende continuamente de los datos, puesto que, $G : [0,T_{m_h}] \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h} \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ satisface las condiciones de Caratheodory, [16], además para todo compacto $\omega \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ existe una función $g_\omega \in L^1(0,T)$:

$$
\begin{gathered}
|G(t;\underline{\gamma}(t)) - G(t;\underline{\delta}(t))| \leq g_\omega(t)\, |\underline{\gamma}(t) - \underline{\delta}(t)|, \\
(t,\underline{\gamma}(t)),\ (t,\underline{\delta}(t)) \in \omega, \quad \text{c.t. } t \in (0,T).
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

La solución es global, puesto que, las siguientes acotaciones son satisfechas:

$$
\begin{aligned}
&\{u_h(t)\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } V, \text{ c.t. } t \in [0,T], \\
&\{u_h\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } V \text{ y en } L^\infty(0,T;V),
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

$\{u_h'(t)\}_{h\geq 0}$ es acotada en H, c.t. $t \in [0,T]$,

$\{u_h'\}_{h\geq 0}$ es acotada en H y en $L^{\infty}(0,T;V)$.

Se muestra, mediante el método variacional, [18], utilizando las propiedades de monotonía y hemicontinuidad de $\beta : V \to V'$ y $\nabla_{j\varepsilon} : V \to V'$ que la solución $u_h \in V_h$ de (1.7), equivalentemente de (1.6), es convergente, en un cierto sentido, a la solución del problema (1.5), la cual a su vez, converge a la solución del problema (1.4).

En el capítulo cuatro se presenta el modelo mecánico de una placa tridimensional, elástica, lineal, homogénea e isotrópica, denominada, a través de este trabajo, modelo tridimensional de Kirchhoff. Entenderemos por modelo mecánico aquel que se deriva de los principios de balance de la elastodinámica tridimensional, bajo hipótesis en los campos, dando lugar a las ecuaciones de campo, de consistencia en cargas de cuerpo y tracciones de superficie, condiciones iniciales y de frontera, así como a las ecuaciones de equilibrio dinámico y de elementos mecánicos, momentos y cortantes, del cuerpo en estudio. Este método, al cual llamaremos método de la elastodinámica aplicada, sistematiza la obtención, a partir de los principios de balance tridimensionales de un medio continuo y de la hipótesis.

$$\text{H1:} \quad u_1 = u_2 = 0, \quad \text{en } \Omega \times \{0\} \times J, \tag{1.12}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= x_3\, u_{1,_3}(\underline{x},0,t), \\ u_2(x,t) &= x_3\, u_{2,_3}(\underline{x},0,t), \\ u_3(x,t) &= u_3(\underline{x},0,t) + x_3\, u_{3,_3}(\underline{x},0,t) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2} x_3^2\, u_{3,_{33}}(\underline{x},0,t), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\underline{x} \in \Omega, \\ &x = (\underline{x},x_3) \in B, \\ &t \in J. \end{aligned} \tag{1.13}$$

la obtención de principios bidimensionales asociados al problema de placas. Aqui B es la placa tridimensional y Ω su correspondiente plano medio. De tales principios bidimensionales se concluyen, la ecuación bidimensional de equilibrio dinámico y los elementos mecánicos que actuan sobre la placa. Esto permite ubicar la Resistencia de Materiales en el contexto de la mecánica del medio continuo en general y, de la elasticidad lineal en particular. Se formula también, bajo hipótesis en cargas, el modelo mecánico de Kirchhoff con tracciones nulas. Finalmente se presenta una fórmula de Green para tales modelos.

En el capítulo cinco, se presentan algunas simplificaciones del modelo mecánico desarrollado en el capítulo cuatro. En la primera de ellas se supone que los términos de $O(h^2)$, en desplazamientos, son despreciables. En este caso el campo de desplazamiento satisface las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_1-\hat{S}_1^*], \\ u_2(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_2-\hat{S}_2^*], \\ u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta\,(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h})\, \hat{S}_3 - \\ &\quad - (1 - \frac{x_3}{h})\, \hat{S}_3^*] + \frac{x_3^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} [\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} - \\ &\quad - \frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})]. \end{aligned}\right\} \text{ en } B \times J. \qquad (1.14)$$

Aquí $\bar{u}_3 = u_3(x_1,x_2,0,t)$, $(x_1,x_2) \in \Omega$, $t \in J$ y $\underline{\hat{S}} = (\hat{S}_1,\hat{S}_2,\hat{S}_2)$, $\underline{\hat{S}}^* = (\hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*, \hat{S}_3^*)$ son las tracciones en la parte superior e inferior de la placa, respectivamente. Con este campo de desplazamientos se formula el llamado modelo mecánico de Kirchhoff de $O(h^2)$. Suponiendo además que $\underline{\hat{S}} = \underline{\hat{S}}^* = \underline{\theta}$, se genera el modelo mecánico de Kirchhoff de $O(h^2)$ con tracciones nulas, el cual corresponde a un modelo de placa que satisface hipótesis, en desplazamientos, tipo Hencky y, los componentes de cortante en los tensores de deformación y esfuerzo son no nulos. Además, la ecuación de equilibrio dinámico bidimensional, la cual considera la inercia de rotación, [23] de la placa, es

$$-D\Delta\Delta\bar{u}_3 + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} + b^*_{0_3} = \rho_0 \left[h\,\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\,\frac{3\nu-2}{1-\nu}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3\right], \tag{1.15}$$

$$\text{en} \quad \Omega \times J.$$

Aquí, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $B \times J$ es el vector de cargas de cuerpo y

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\beta h^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \bar{m}_1 &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3\, b_{02}\, dx_3, \\ \bar{m}_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\, b_{01}\, dx_3, \\ b^*_{03} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{03}\, dx_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Suponiendo, además de (1.14) y $\underline{\hat{S}} = \hat{S}^* = \underline{\theta}$, que los términos de $O(h)$ en deformaciones son despreciables, se obtiene el modelo de placas de la teoría de Kirchhoff. En este caso los componentes de cortante en el tensor de esfuerzos son nulos. Para el caso que en desplazamientos los términos de $O(h)$ sean despreciables, esto es, los componentes del vector desplazamiento satisfagan

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*],\\
u_2\,(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*],\\
u_3\,(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta\,(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h})\, \hat{S}_3 -\\
&\quad - (1 - \frac{x_3}{h})\, \hat{S}_3^*],
\end{aligned}\right\}\ \text{en } B \times J, \qquad (1.17)$$

se formula el modelo mecánico de Kirchhoff de $O(h)$. El modelo mecánico de $O(h)$ con tracciones nulas es también presentado. En este último caso la ecuación de equilibrio dinámico del cuerpo resulta ser

$$\begin{aligned}
- \frac{h^3}{12} \frac{\beta\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta\Delta\bar{u}_3 + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} + b_{03}^* &=\\
= \rho_0\, [h\, \ddot{\bar{u}}_3 - \frac{h^3}{12} \Delta\, \ddot{\bar{u}}_3], \quad \text{en} \quad \Omega \times J. & \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Para el caso del modelo de Kirchhoff de $O(h^2)$ se deriva una fórmula de Green, la cual con tracciones externas nulas corresponde a la fórmula de Green clásica de placas elásticas [7]. Se presentan algunos problemas de valores sobre la frontera e iniciales, lineales y no lineales, asociados al modelo de Kirchhoff de $O(h^2)$ así como al de la teoría clásica de placas elásticas. Las condiciones de frontera lineales, Dirichlet, Neumann o mixtas, se deducen de la fórmula de Green correspondiente. Las condiciones de frontera no lineales son del tipo fricción, en momentos y cortantes, [8].

En el capítulo seis se aplican los resultados abstractos de los capítulos dos y tres al siguiente problema de valores sobre la frontera e iniciales; asociado a una placa elástica lineal, en la cual el término de inercia de rotación es despreciado.

Dados $\hat{\underline{S}}=\hat{\underline{S}}^{*}=\underline{0}$ sobre $\partial B_{+} \times J$, $\partial B_{-} \times J$, respectivamente, $\underline{b}^{*} = (0,0,b_{03}^{*})$ en $\Omega \times J$; u_0^{*}, v_0^{*} en Ω; $\hat{w}$, $\hat{v}$, sobre $\partial\Omega_1 \times J$; $\hat{F},\hat{M}$ sobre $\partial\Omega_2 \times J$; $g : \partial\Omega_3 \times J \to \mathbb{R}^{+}$; $h : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$, $\beta > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$, encuentre $\bar{u}_3 : \Omega \times J \to \mathbb{R}$:

$$-\rho_0\, h\, \bar{u}'' - D\Delta\Delta\bar{u}_3 + b_{03}^{*} = 0, \qquad \text{en } \Omega \times J,$$

$$\bar{u}_3(0) = u_0^{*}, \quad \bar{u}_3'(0) = v_0^{*}, \qquad \text{en } \Omega,$$

$$\bar{u}_3 = \hat{w}, \ \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \qquad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times J,$$

$$F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \ {}^{*}H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \qquad \text{sobre } \partial\Omega_2 \times J,$$

$$\left.\begin{array}{l} |F(\bar{u}_3)| < g \implies L(\bar{u}_3') = 0, \\ |F(\bar{u}_3)| = g \implies \exists\, \lambda \geq 0: \\ \qquad L(\bar{u}_3') = -\lambda\, F(\bar{u}_3), \\ \qquad L_c(\bar{u}_3') = 0. \end{array}\right\} \text{sobre } \partial\Omega_3 \times J. \tag{1.19}$$

Aquí la frontera del plano medio, $\partial\Omega$, es tal que

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3, \tag{1.20}$$

y, ∂B_{+}, ∂B_{-} son la frontera superior e inferior de la placa, respectivamente. Las condiciones sobre la frontera $\partial\Omega_3 \times J$, modela restricciones tipo fricción en cortantes y momentos y, $F_3(\bar{u}_3)$, ${}^{*}H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)$, son la fuerza cortante y el momento flexionante, inducidos por $\bar{u}_3$, respectivamente.

Para satisfacer nuestros objetivos es necesario presentar la formulación variacional de (1.19), para lo cual, las condiciones sobre $\partial\Omega_3 \times J$, se expresan en términos del subdiferencial de una funcional $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y semicontinua inferiormente. El problema (1.19) es equivalente, entonces, a:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Encuentre } \bar{u}_3 : \Omega \times J \to \mathbb{R}: & \\
-\rho_0\, h\, \bar{u}_3'' - D\Delta\Delta\bar{u}_3 = -\, b_{03}^*, & \text{en } \Omega \times J, \\
\bar{u}_3(0) = u_0^*, \quad \bar{u}_3'(0) = v_0^*, & \text{en } \Omega, \\
\bar{u}_3 = \hat{w}, \quad \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, & \text{sobre } \partial\Omega_1 \times J, \\
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \quad {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, & \text{sobre } \partial\Omega_2 \times J, \\
\left.\begin{array}{l} -\mathcal{F}(\bar{u}_3) \in \partial\, \psi(x,t;\mathcal{L}(\bar{u}_3')), \\ \mathcal{L}_c(\bar{u}_3') = 0. \end{array}\right\} & \text{sobre } \partial\Omega_3 \times J,
\end{array}
\tag{1.21}
$$

donde,

$$
\partial\psi(x,t;\xi) = \begin{cases} g(x,t), & \text{si } \xi > 0, \\ [-g(x,t),\, g(x,t)], & \text{si } \xi = 0, \\ -g(x,t), & \text{si } \xi < 0, \end{cases}
\tag{1.22}
$$

es el subdiferencial de la funcional $\psi(x,t;\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$
\psi(x,t;\xi) = g(x,t)|\xi|, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}.
\tag{1.23}
$$

Posteriormente se muestra que el problema (1.21) es equivalente, si

$\hat{w}(0)=\bar{u}_3(0), \hat{v}(0)= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}(0)$, al problema

$$
\begin{array}{ll}
\text{Encuentre } \bar{u}_3 : \Omega \times J \to \mathbb{R}: & \\
-\rho_0\, h\, \bar{u}_3'' - D\Delta\Delta\bar{u}_3 = -\, b_{03}^*, & \text{en } \Omega \times J, \\
\bar{u}_3(0) = u_0^*, \quad \bar{u}_3'(0) = v_0^*, & \text{en } \Omega, \\
\bar{u}_3' = \hat{w}', \quad \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n} = v', & \text{sobre } \partial\Omega_1 \times J, \\
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, & \text{sobre } \partial\Omega_2 \times J, \\
\left.\begin{array}{l} -F(\bar{u}_3) \in \partial\, \psi(x,t;L(\bar{u}_3')), \\ L_c(\bar{u}_3) = 0. \end{array}\right\} & \text{sobre } \partial\Omega_3 \times J,
\end{array}
\tag{1.24}
$$

Las formulaciones variacionales correspondientes al problema (1.24) se obtienen, de manera natural, al aplicar el concepto de subdiferencial de la funcional $\psi = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para esto se introducen los siguientes espacios de Hilbert

$$
\left.
\begin{array}{l}
V(\Omega) = H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^2(\Omega))', \\
V(Q) = L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ H(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
W(Q) = \{v \in V(Q) : v'' \in V'(Q)\}, \\
V_1(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0\, v = \gamma_1\, v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \\
\qquad\qquad \gamma_1\, v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_3\}, \\
V_1(Q) = L^2(0,T;V_1(\Omega)), \\
W_1(Q) = \{v \in W(Q) : v' \in V_1'(Q)\}, \\
V_2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0\, v = \gamma_1\, v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \\
\qquad\qquad \gamma_0\, v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_3\}, \\
V_2(Q) = L^2(0,T;V_2(\Omega)), \\
W_2(Q) = \{v \in W(Q) : v' \in V_2'(Q)\}.
\end{array}
\right\}
\tag{1.25}
$$

Las funcionales que modelan las condiciones de fricción sobre $\partial\Omega_3 \times J$, están dadas por las expresiones

$$
\left.
\begin{aligned}
j_1(v) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\Omega_3} \psi(x:\gamma_o v)\,d\Omega, & v \in \mathcal{D}(j_1) \\ +\infty, & v \notin \mathcal{D}(j_1), \end{cases} \\
J_1(v) &= \begin{cases} \displaystyle\int_o^T j_1\,(v(t))\,dt, & v \in \mathcal{D}(J_1), \\ +\infty, & v \notin \mathcal{D}(J_1), \end{cases} \\
j_2(v) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\Omega_3} \psi(x;\gamma_1 v)\,d\Omega, & v \in \mathcal{D}(j_2), \\ +\infty, & v \notin \mathcal{D}(j_2), \end{cases} \\
J_2(v) &= \begin{cases} \displaystyle\int_o^T j_2(v(t))\,dt, & v \in \mathcal{D}(J_2), \\ +\infty, & v \notin \mathcal{D}(J_2), \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \tag{1.26}
$$

cuyos dominios efectivos correspondientes son:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathcal{D}(j_1) &= \{v \in V_1(\Omega) : \psi(\,\cdot\,;\gamma_o v(\cdot)) \in L^1(\partial\Omega_3)\}, \\
\mathcal{D}(J_1) &= \{v \in \mathcal{V}_1(Q) : j_1(v(\cdot)) \in L^1(0,T)\},
\end{aligned}
\right\} \tag{1.27}
$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}(j_2) &= \{v \in V_2(\Omega):\ \psi(\cdot,\gamma_1\, v(\cdot)) \in L^1(\partial\Omega_3)\}, \\ \mathcal{D}(J_2) &= \{v \in \mathcal{V}_2(Q):\ j_2(v(\cdot)) \in L^1(0,T)\}, \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

Con esto, la formulación variacional clásica de (1.24), asociada a condiciones de cortante con fricción es:

Dados ρ_o, h, $D \in L^\infty(\Omega)$, $b^*_{o_3} \in H(Q)$ con $b^{*\prime}_{o_3} \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\hat{F}$, $\hat{H} \in L^2(0,T;L^2(\partial\Omega_2))$, con $\hat{F}'$, $\hat{H}' \in L^1(0,T;L^2(\partial\Omega_2))$, u^*_o, $v^*_o \in V_1(\Omega)$, encuentre $\bar{u}_3 \in \mathcal{W}_1(Q) \cap \mathcal{D}(J_1)$:

$$\begin{aligned} &[\bar{u}_3'', v-\bar{u}_3'] + [A\,\bar{u}_3, v-\bar{u}_3'] + J_1(v) - J_1(\bar{u}_3') \geq \\ &[\partial\bar{u}_3, \gamma_o v-\gamma_o\bar{u}_3']_{\partial\Omega_2} + [b^*_{o_3}, v-\bar{u}_3'],\ \forall\ v \in \mathcal{D}(J_1), \\ &\bar{u}_3(0) = u^*_o,\ \bar{u}_3'(0) = v^*_o. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Asimismo tenemos que, para el caso de condiciones de tipo momento con fricción, la formulación variacional clásica correspondiente es:

Dados ρ_o, h, $D \in L^\infty(\Omega)$, $b^*_{o_3} \in H(Q)$ con $b^{*\prime}_{o_3} \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\hat{F}$, $\hat{H} \in L^2(0,T;L^2(\partial\Omega_2))$, con $\hat{F}'$, $\hat{H}' \in L^1(0,T;L^2(\partial\Omega_2))$, u^*_o, $v^*_o \in V_2(\Omega)$, encuentre $\bar{u}_3 \in \mathcal{W}_2(Q) \cap \mathcal{D}(J_2)$:

$$\begin{aligned} &[\bar{u}_3'', v-\bar{v}_3'] + [A\,\bar{u}_3, v-\bar{u}_3'] + J_2(v) - J_2(\bar{u}_3') \geq \\ &[\partial\,\bar{u}_3, \gamma_1 v-\gamma_1\bar{u}_3']_{\partial\Omega_2} + [b^*_{o_3}, v-\bar{u}_3'],\ \forall\ v \in \mathcal{D}(J_2), \\ &\bar{u}_3(0) = u^*_o,\ \bar{u}_3'(0) = v^*_o. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Otras dos formulaciones variacionales, llamados formulación variacional punto a punto y formulación variacional fuerte, asociadas a (1.24) son presentadas. Además, con el fin de aplicar los resultados de análisis del capítulo dos, los problemas (1.27) y (1.28) son llevados a los sistemas de primer orden correspondientes. Finalmente se presentan los problemas regularizados asociados a la representación pseudoinstántanea de (1.29) y (1.30), los cuales resultan ser de la forma:

Encuentre $u_{1\varepsilon} \in V_1(Q)$ con $u'_{1\varepsilon} \in V_1(Q)$, $u''_{1\varepsilon} \in H(Q)$:

$$\begin{aligned} &<u''_{1\varepsilon}(t), v(t)> + <Au_{1\varepsilon}(t), v(t)> + <\nabla j_{1\varepsilon}(u'_{1\varepsilon}(t)), v(t)> = \\ &\quad = <f^*(t), v(t)>, \quad \forall \ v \in V_1(Q), \quad \text{c.t.} \quad t \in (0,T), \quad \varepsilon > 0, \\ &u_{1\varepsilon}(0) = u_0^*, \quad u'_{1\varepsilon}(0) = v_0^*, \end{aligned} \tag{1.31}$$

Encuentre $u_{2\varepsilon} \in V_2(Q)$ con $u'_{2\varepsilon} \in V_2(Q)$, $u''_{2\varepsilon} \in H(Q)$:

$$\begin{aligned} &<u''_{2\varepsilon}(t), v(t)> + <Au_{2\varepsilon}(t), v(t)> + <\nabla j_{2\varepsilon}(u'_{2\varepsilon}(t)), v(t)> = \\ &\quad = <f^*(t), v(t)>, \quad \forall \ v \in V_2(Q), \quad \text{c.t.} \quad t \in (0,T), \quad \varepsilon > 0, \\ &u_{2\varepsilon}(0) = u_0^*, \quad u'_{2\varepsilon}(0) = v_0^*. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Aquí $\nabla j_{1\varepsilon} : V_1(\Omega) \to V'_1(\Omega)$, $\nabla j_{2\varepsilon} : V_2(\Omega) \to V'_2(\Omega)$, son los gradientes de las funcionales $j_{1\varepsilon} : V_1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $j_{2\varepsilon} : V_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$j_{1\varepsilon}(v) = \int_{\partial\Omega_3} \frac{g(x)}{1+\varepsilon} |\gamma_0 \ v(x)|^{1+\varepsilon} \, dx, \qquad \varepsilon > 0, \tag{1.33}$$

$$j_{2\varepsilon}(v) = \int_{\partial\Omega_3} \frac{g(x)}{1+\varepsilon} |\gamma_1 v(x)|^{1+\varepsilon} dx, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.34}$$

las cuales regularizan a $j_1 : V_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $j_2 : V_2(\Omega) \to \mathbb{R}$, respectivamente.

Los resultados de análisis del capítulo dos son también aplicados a los problemas (1.31) y (1.32).

Finalmente en el capítulo siete se construye, mediante el método del elemento finito, una aproximación interna de los espacios $(V_1(\Omega), \mathcal{V}_1(Q))$, $(V_2(\Omega), \mathcal{V}_2(Q))$, asociados a los problemas (1.31) y (1.32). Se presenta, primeramente, el método del elemento finito, mediante sus tres aspectos básicos, como un procedimientos sistemático para construir subespacios de dimensión finita, V_{1h} y V_{2h}, de los espacios de Hilbert $V_1(\Omega)$, $V_2(\Omega)$. Posteriormente se describen tres elementos finitos particulares, Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmit, mediante los cuales se construyen dichos subespacios, mostrando que los dos primeros pueden ser embebidos en familias casi- afines de elementos finitos y el último se embebe en familias afines, [4]. Finalmente, mediante algunos resultados de la teoría de interpolación, [4], se demuestra que las parejas $(V_{1h}(\Omega), \mathcal{V}_{1h}(Q))$, $(V_2(\Omega), \mathcal{V}_{2h}(Q))$, donde,

$$\mathcal{V}_{1h}(Q) = L^2(0,T;V_{1h}(\Omega)), \quad \mathcal{V}_{2h}(Q) = L^2(0,T;V_{2h}(\Omega)),$$

constituyen una aproximación interna de $(V_1(\Omega), \mathcal{V}_1(Q))$ y $(V_2(\Omega), \mathcal{V}_2(Q))$, respectivamente, con lo cual la convergencia de los modelos semidiscretos está garantizada.

2. PROBLEMA ABSTRACTO DE VALORES EN LA FRONTERA E INICIALES.

El objetivo de esta parte es presentar un problema abstracto de valores en la frontera e iniciales asociado al siguiente problema variacional hiperbólico,

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Dados } f\varepsilon\mathcal{V}',u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \\ \text{encuentre } u\varepsilon\mathcal{W} \text{ con } u'\varepsilon\mathcal{D}(J): \\ u'' + Au + \partial J(u') \ni f, \\ u(0) = u_o,\ u'(0) = v_o, \end{cases}$$

cuya forma integral es:

Dados $f\varepsilon\mathcal{V}'$, $u_o\varepsilon V$, $v_o\varepsilon D(j)$, encuentre $u\varepsilon\mathcal{W}$ con $u'\varepsilon\mathcal{D}(J)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T \langle u''(t) + Au(t),\ v(t)-u'(t)\rangle dt + \int_0^T \{j(v(t))-j(u'(t))\}dt \\ &\qquad \geq \int_0^T \langle f(t),\ v(t)-u'(t)\rangle dt,\quad \forall\ v\varepsilon\ D(J), \\ &u(0) = u_o\ ,\ u'(0) = v_o. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

El problema (P) puede ser escrito en la forma

$$(P')\quad \begin{cases} \text{Dados } f\varepsilon\mathcal{V}',\ u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \\ \text{encuentre } u\varepsilon\mathcal{W} \text{ con } u'\varepsilon\mathcal{D}(J): \\ U' + \mathcal{M}U \ni \mathcal{F}, \\ U(0) = U_o. \end{cases}$$

al definir

$$U = [u, u'],\ U(0) = [u(0), u'(0)],\ U_o = [u_o, v_o],$$

$$\mathcal{M} : V \times D(J) \to V \times V',$$

$$\mathcal{M}U = [-u', (Au + \partial J(u'))],$$

$$F = [0, f].$$

La forma pseudoinstantánea [28] del problema (2.1) es

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dados } f\varepsilon V',\ u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \text{ encuentre } u\varepsilon W \text{ con } u'\varepsilon D(J): \\ \langle u''(t) + Au(t), v(t)-u'(t)\rangle + j(v(t)) - j(u'(t)) \geq \langle f(t), v(t)-u'(t)\rangle \\ \qquad \forall\ v\varepsilon D(J), \text{c.t. } t\varepsilon(0,T), \\ u(o) = u_o\ ,\ u'(0) = v_o. \end{array}\right\} \quad (2.2)$$

Por tanto, la forma instantánea del problema (P) es

$$(P1)\ \left\{\begin{array}{l} \text{Dados } f\varepsilon V',\ u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \\ \text{encuentre } u\varepsilon W \text{ con } u'\varepsilon D(J): \\ u''(t) + Au(t) + \partial j(u'(t)) \ni f(t), \text{c.t. } t\varepsilon(0,T), \\ \quad u(0) = u_o,\ u'(0) = v_o, \end{array}\right.$$

y el problema de primer orden correspondiente es

$$(P1)'\ \left\{\begin{array}{l} \text{Dados } f\varepsilon V',\ u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \\ \text{encuentre } u\varepsilon W \text{ con } u'\varepsilon \mathcal{D}(J): \\ U'(t) + \mathcal{M}U(t) \ni F(t), \text{ c.t. } t\varepsilon(0,T), \\ U(0) = U_o, \end{array}\right.$$

con M: $(V\times D(j)) \to (V\times V')$, $\mathcal{M}U(t) = (\mathcal{M}U)(t)$, $U\varepsilon V\times\mathcal{D}(J)$, c.t. $t\ \varepsilon\ (0,T)$.

El problema $(P1)'$ posee una única solución $u\in C([0,T];V)$, con $u''\in L^{\infty}(0,T;H)$, [2], [3], bajo la siguiente regularidad en los datos:

$$\left.\begin{array}{l} f\in H \quad \text{con} \quad f'\in L^{1}(0,T;H), \\ u_o \in V, \; v_o \in D(j), \\ \{(Au_o + \partial j(v_o)) \cap H\} \neq \phi. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

En efecto, el operador M es un subconjunto ω- máximo monótono de VxH con

$$\omega = \sup\left\{\frac{\lambda(u,v)}{<Au,u>+\lambda|u|^2+|v|^2} \; ; \; u\in V, \; v\in H, \; ||u|| + |v| \neq 0\right\} \geq 0, \tag{2.4}$$

esto es, $M + \omega I \subset (VxH)x(VxH)$ es máximo monótono.

Nuestro siguiente objetivo es expresar el problema (P) como un problema abstracto de valores en la frontera e iniciales. Sea $\gamma\in L(V,B)$ un operador lineal, continuo y sobre, con núcleo V_o denso en H, B un espacio de Hilbert isomórfico al espacio cociente V/V_o, y $\hat{\gamma}:V/V_o \to B$ el operador cociente que preserva la norma. Supongamos que la funcional $j:V\to(-\infty,+\infty]$ está definida en términos de las trazas γv de $v\in V$, esto es, existe una funcional convexa propia semicontinua inferiormente $h:B\to(-\infty,+\infty]$ tal que

$$j = h \circ \gamma. \tag{2.5}$$

Observe que

$$D(j) + V_0 = D(j). \tag{2.6}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El problema (2.1) adoptando la regularidad (2.3), toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dados } f\varepsilon\mathcal{H} \text{ con } f'\varepsilon L^1(0,T;H),\ u_o\varepsilon V,\ v_o\varepsilon D(j), \text{ con} \\ \{Au_o+\partial j(v_o))\cap H\} \neq \phi, \text{ encuentre } u\varepsilon\mathcal{V} \text{ con } u''\varepsilon\mathcal{H},\ u'\varepsilon D(J): \\ \displaystyle\int_o^T <u''(t)+Au(t),\ v(t)-u'(t)>\,dt + \int_o^T\Big[h(\gamma v(t))-h(\gamma u'(t))\Big]\,dt \\ \qquad\qquad \displaystyle\geq \int_o^T <f(t),v(t)-u'(t)>\,dt,\ \forall\ v\,\varepsilon\, D(J), \\ u(0) = u_o,\quad u'(0) = v_o. \end{array}\right\} \quad (2.7)$$

Identificaremos el problema (2.7) con un problema de valores en la frontera aplicando la fórmula de Green abstracta de la forma bilineal, simétrica y continua $a{:}V\times V\to R$, [26],

$$<Au,v> - (Pu,v) = <\partial u,\gamma v>_B,\forall u\varepsilon D_o,\ v\varepsilon V, \qquad (2.8)$$

donde $P\varepsilon L(V,V_o')$ es el operador formal: $<Pu,v>=a(u,v), u\varepsilon V, v\varepsilon V_o$, y $\partial\varepsilon L(D_o,B')$ es el operador abstracto de Green con dominio $D_o = \{v\varepsilon V{:}Pv\varepsilon H\}$. Sea $\mathcal{P}\varepsilon \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{V}'_o)$ el operador lineal y continuo definido por : $\mathcal{P}v(t) = P(v(t))$, $v\varepsilon\mathcal{V}$, c.t. $t\varepsilon(o,T)$, donde $\mathcal{V}_o' = L^2(0,T;V_o')$ es el dual de $\mathcal{V}_o = L^2(0,T;V_o)$.

<u>Teorema 2.1</u> El problema variacional hiperbólico (2.7) es equivalente al problema abstracto de valores en la frontera e iniciales:

Dados $f\varepsilon\mathcal{H}$ con $f'\varepsilon L^1(0,T;H)$, $u_o\varepsilon V$, $v_o\varepsilon D(j)$ con $\{(Au_o+\partial j(v_o))\cap H\} \neq \phi$, encuentre $u\varepsilon\mathcal{V}$ con $u''\varepsilon\mathcal{H}$, $u'\varepsilon D(J)$:

$$\left.\begin{aligned} & u'' + \mathcal{P}u = f, \\ & \int_0^T \langle \partial u(t), \gamma v(t) - \gamma u'(t) \rangle_B dt + \int_0^T \{h(\gamma v(t)) - h(\gamma u'(t))\} dt \geq 0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ v \in D(J), \\ & u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0. \end{aligned}\right\} (2.9)$$

<u>Demostración.</u> Sea u la solución del problema (2.7). Entonces de acuerdo a (2.5) y (2.6), podemos tomar $v = u' \pm v_0 \in D(J)$, $v_0 \in V_0$, y obtener

$$\int_0^T \langle u''(t) + Pu(t) - f(t),\ v_0(t) \rangle\, dt = 0\ ,$$

de donde, $u'' + \mathcal{P}u - f = 0$, puesto que V_0 es denso en H. Además, puesto que $u''(t) \varepsilon H$, $Pu(t) \varepsilon H$ y $u(t) \varepsilon D_0$ para c.t. $t\varepsilon(0,T)$. Usando la fórmula de Green (2.8) se obtiene la desigualdad de (2.9).

Inversamente, sea u solución de (2.9), entonces $u(t) \varepsilon D_0$, c.t. $t\varepsilon(0,T)$. Aplicando la fórmula de Green se obtiene (2.7) ■

<u>Observación 2.1.</u> Obsérvese que la forma instantánea del problema (2.9) es:

Dados $f\varepsilon H$ con $f' \varepsilon L^1(0,T;H)$, $u_0 \varepsilon V$, $v_0 \varepsilon D(j)$ con $\{(Au_0 + \partial j(v_0)) \cap H\} \neq \phi$, encuentre $u \varepsilon V$ con $u'' \varepsilon H$, $u' \varepsilon D(J)$:

$$\left.\begin{aligned} & u''(t) + Pu(t) = f(t), \\ & -\partial u(t) \varepsilon \partial h(\gamma u'(t))\ , \\ & u(0) = u_0, u'(0) = v_0. \end{aligned}\right\} \quad \text{c.t. } t\varepsilon(0,T). \qquad (2.10)$$

3. APROXIMACIONES DE INECUACIONES HIPERBOLICAS.

El objetivo de este capítulo es introducir aproximaciones, continuas y semidiscretas, así como establecer los correspondientes teoremas de convergencia del problema pseudoinstantáneo asociado a (2.7).

Se presentan primeramente las aproximaciones continuas, penalización y regularización, en el sentido de [19] y, mediante éstas, se presentan los problemas aproximados asociados a (2.7). A continuación se presenta una aproximación semidiscreta, aproximaciones internas, de un problema penalizado y regularizado asociado a (2.7). Se demuestra existencia de soluciones del problema semidiscreto al mostrar que el sistema de primer orden asociado satisface las condiciones de Carathéodory [16] y, mediante estimaciones a priori, que las sucesiones generadas por las aproximaciones son acotadas, en un sentido apropiado. Finalmente, mediante el paso al límite, se demuestran los teoremas de convergencia correspondiente.

3.1 APROXIMACIONES CONTINUAS DE INECUACIONES HIPERBOLICAS.

El objetivo de esta parte es introducir aproximaciones continuas, penalización y regularización, del siguiente problema variacional hiperbólico:

Dado: $f \varepsilon \mathcal{H}$ con $f' \varepsilon L^1(0,T;H)$, $u_0 \varepsilon V$, $v_0 \varepsilon D(j)$ con

$\{(Au_0 + \partial j(v_0)) \cap H\} \neq \phi$ encuentre $u \varepsilon \mathcal{V}$ con $u'' \varepsilon \mathcal{H}$, $u' \varepsilon D(J)$:

$$<u''(t) + Au(t), v(t) - u'(t)> + j((v(t)) - j(u'(t)) \geq <f(t), v(t) - u'(t)>$$

$$\forall\, v \varepsilon\, D(J),\ \text{c.t. } t \,\varepsilon\, (0,T), \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0,$$

el cual corresponde a la formulación pseudoinstántanea del problema (2.7). Se presenta, también, el teorema de convergencia correspondiente.

Primeramente introducieremos una penalización del problema (3.1); recuérdese que $D(j) = D(j)+V_0$. Sea $\beta: V \to V'$ un operador de penalización asociado a $D(j)$, esto es

i) $\beta: V \to V'$ es monótono y hemicontinuo,

ii) N_β = Núcleo de $\beta = D(j)$

el cual satisface

iii) $||\beta(v))||_* \leq C\, ||\ v\ ||,\ \forall\ v \varepsilon V,$

iv) $<\beta(v),\ v> \geq 0,\ \forall\ v\ \varepsilon\ V.$

El problema penalizado asociado a (3.1) es:

Encuentre $u_\varepsilon \varepsilon V$ con $u''_\varepsilon \;\varepsilon\; H$, $u'_\varepsilon \;\varepsilon\; V$

$$<u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)),\ v(t) - u'_\varepsilon(t)> + j(v(t)) - j(u'_\varepsilon(t)) \tag{3.2}$$
$$\geq <f(t),\ v(t)-u'_\varepsilon(t)>,\ \forall\ v\varepsilon V \quad \text{c.t. } t\varepsilon\ (0,T),$$

$u_\varepsilon(0) = u_0$, $u'_\varepsilon(0) = v_0$.

Nuestro siguiente objetivo es regularizar el problema (3.2). Sea $j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ una familia de funcionales convexas y G-diferenciable en V que regularizan a $j:V\to(-\infty,\infty]$, esto es:

v) $j_\varepsilon(v) \to j(v)$, cuando $\varepsilon \to 0$,

vi) si $u_\mu \to u$ debilmente en V, entonces,

$$\liminf j_\varepsilon(u_\mu) \geq j(u),$$

cuyo gradiente $\nabla j_\varepsilon : V\to V'$, satisface

vii) $||\nabla j_\varepsilon(v)||_* \leq C\ ||v||$, $\forall\ v\varepsilon V$,

viii) $<\nabla j_\varepsilon(v),\ v> \geq 0$, $\quad \forall\ v\varepsilon V$.

El problema regularizado asociado a (3.2) es:

Encuentre $u_\varepsilon\ \varepsilon V$ con $u''_\varepsilon\ \varepsilon\ H$, $u'_\varepsilon\ \varepsilon\ V$:

$$<u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)),\ v(t) - u'_\varepsilon(t)> + j_\varepsilon(v(t)) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) \geq$$
$$\geq <f(t),\ v(t) - u'_\varepsilon(t)>,\ \forall\ v\varepsilon V \quad \text{c.t. } t\varepsilon\ (0,T), \tag{3.3}$$

$u_\varepsilon(0) = u_0$, $u'_\varepsilon(0) = v_0$.

Teorema 3.1. El problema (3.3) es equivalente al problema

Encuentre $u_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$ con $u''_\varepsilon \varepsilon \mathcal{H}$, $u'_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$:

$$\langle u''_\varepsilon(t)+Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)), v(t)-u'_\varepsilon(t)\rangle \geq \langle f(t), v(t)-u'_\varepsilon(t)\rangle, \tag{3.4}$$

$$\forall v \varepsilon \mathcal{V}, \text{ c.t. } t \varepsilon (0,T),$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \; u'_\varepsilon(0) = v_0.$$

Demostración. Obsérvese que siendo $j_\varepsilon : V \to (-\infty, \infty]$ convexa y G-diferenciable en V, su gradiente satisface

$\langle \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)), v(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle \leq j_\varepsilon(v(t)) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t))$, $\forall\, v \varepsilon V$.

Por tanto (3.4) implica (3.3). Sea ahora $v = u'_\varepsilon + \Theta(\tilde{v}-u'_\varepsilon)$ $\forall\, \tilde{v} \varepsilon V$, $\Theta \varepsilon [0,1]$. Entonces, $v - u'_\varepsilon = \Theta(\tilde{v}-u'_\varepsilon)$ y

$$\Theta \langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)), \tilde{v}(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle +$$
$$+ j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t) + \Theta(\tilde{v}(t) - u'_\varepsilon(t))) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) \geq \Theta\langle f(t), \tilde{v}(t) - u'_\varepsilon(t)\rangle,$$

dividiendo por Θ y tomando el límite $\Theta \downarrow 0$, se obtiene (3.4). ■

Observación 3.1. El problema (3.3), en términos del subdiferencial $\partial j_\varepsilon C V x V'$ de $j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$, el cual es univaluado e idéntico al gradiente, puede expresarse como:

Encuentre $u_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$ con $u''_\varepsilon \varepsilon \mathcal{H}$, $u'_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$:

$$u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) = f(t), \text{ c.t. } t\varepsilon(0,T), \tag{3.5}$$
$$u_\varepsilon(0) = u_0, \; u'_\varepsilon(0) = v_0.$$

El sistema de primer orden asociado a (3.5) es:

Encuentre $u_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$ con $u''_\varepsilon \varepsilon \mathcal{H}$, $u'_\varepsilon \varepsilon \mathcal{V}$:

$$U'_\varepsilon(t) + M_\varepsilon(U_\varepsilon\ (t)) = F\ (t) \quad \text{c.t. } t\varepsilon(0,T),$$
$$U_\varepsilon(0) = U_{0_\varepsilon}, \tag{3.6}$$

donde, $U_\varepsilon(t) = [u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)],\ U_\varepsilon(0) = [u_\varepsilon(0), u'_\varepsilon(0)],\ U_{\varepsilon_0} = [u_0,\ v_0],$

$$M_\varepsilon: V \times V \to V \times V',$$
$$M_\varepsilon(U_\varepsilon(t)) = [-u'_\varepsilon(t),\ Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t))], \tag{3.7}$$
$$F\ (t) = [0,\ f(t)].$$

El problema (3.6) posee una única solución $u_\varepsilon\ \varepsilon L^\infty(0,T;V)$ con $u'_\varepsilon\ \varepsilon L^\infty(0,T;V)$, $u''_\varepsilon\ \varepsilon\ L^\infty(0,T;H)$ si $(Au_0 + \frac{1}{\varepsilon}\beta(v_0) + \partial j_\varepsilon(v_0)) \cap H \neq \phi$, puesto que, el operador M_ε es un subconjunto ω - máximo monótono de V x H, [1]. ■

Observación 3.2. Obsérvese que siendo (3.4) definido $\forall v \varepsilon V$, V un espacio lineal, este puede expresarse como:

Encuentre $u_\varepsilon\ \varepsilon\ V$ con $u''_\varepsilon\ \varepsilon\ H$, $u'_\varepsilon\ \varepsilon\ V$:

$$\langle u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)),\ \tilde{v}(t)\rangle = \langle f(t), \tilde{v}(t)\rangle,\ \forall\ \tilde{v} \varepsilon\ V,$$
$$\text{c.t. } t\varepsilon\ (0,T), \tag{3.8}$$
$$u_\varepsilon(0) = u_0\ ,\ u'_\varepsilon(0) = v_0.$$

En efecto, tómese $v = u'_\varepsilon \pm \tilde{v}$. Claramente (3.8) es idéntico a (3.5). ■

Presentaremos ahora el siguiente teorema de convergencia, el cual será demostrado posteriormente en la sección 3.4, para el problema (3.8).

Teorema 3.2. La solución u_ε del problema (3.8), la cual satisface, $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V)$, $u'_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V)$, $u''_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H)$, converge a la solución u del problema (3.1) en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \rightharpoonup * \ u, \text{ debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;V), \\ &u'_\varepsilon \rightharpoonup * \ u', \text{ debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;V), \qquad (3.9) \\ &u''_\varepsilon \rightharpoonup * \ u'', \text{ debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;H). \ \blacksquare \end{aligned}$$

3.2 APROXIMACIONES INTERNAS.

Nuestro siguiente objetivo es introducir una aproximación interna del problema (3.8). Diremos que $\{V_h, \mathcal{V}_h\}$ es una aproximación interna de $\{V, \mathcal{V}\}$ si

i) $\{V_h\}_{h>0}$ es una familia de subespacios de dimensión finita de V, $\dim V_h = m_h \to \infty$, cuando $h \to 0$.

ii) $\mathcal{V}_h = L^2(0,T;V_h)$,

iii) $\forall\, v \in \mathcal{V}$ con $v' \in \mathcal{V}$ existe $v_h \in \mathcal{V}_h$ con $v_h' \in \mathcal{V}_h$: $v_h \to v$ en $\mathcal{V}$ y $v_h' \to v'$ en $\mathcal{H}$.

El problema semidiscreto asociado al problema (3.8) es

Encuentre $u_h \in \mathcal{V}_h$:

$$<u_h''(t) + Au_h(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_h'(t)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(t)),\ v_h(t)> = <f(t),\ v_h(t)>,$$

$$\forall\, v_h \in \mathcal{V}_h, \text{c.t. } t \in (0,T),$$

$$u_h(0) = u_{0_h}\ ,\ u_h'(0) = v_{0_h}\ , \tag{3.10}$$

$$u_{0_h} \to u_0 \ \text{ en } V,$$

$$v_{0_h} \to v_0 \ \text{ en } V.$$

Demostraremos a continuación el teorema de existencia de soluciones del problema (3.10)

<u>Teorema 3.3.</u> El problema (3.10) posee al menos una solución u_h, $u_h' \in C_A([0,T_{m_h}];\ V_h)$.

Demostración. Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_{m_h}\}$ una base ortogonal de V_h, entonces, $\forall\, v_h \in V_h$, $v_h(t) = \alpha_i(t) w_i$, $i=1,2,\ldots,m_h$. La ecuación semidiscreta del problema 3.10 es equivalente al sistema de m_h ecuaciones diferenciales no lineales

Encuentre $\underline{\alpha} : [0,T] \to \mathbb{R}^{m_h}$ tal que

$$\underline{\alpha}''(t) = \underset{\sim}{M}^{-1} [\underset{\sim}{F}(t) - \underset{\sim}{K}\,\underline{\alpha}(t) - \underset{\sim\varepsilon}{C}[\underline{\alpha}'(t)] - \underset{\sim}{D}[\underline{\alpha}'(t)]],$$

$$\underline{\alpha}(0) = \underline{\alpha}_0, \quad \underline{\alpha}'(0) = \underline{\alpha}_0', \qquad (3.11)$$

donde,

$$M_{ji} = \langle w_i, w_j\rangle, \; k_{ji} = \langle Aw_i, w_j\rangle, \; F_j(t) = \langle f(t), w_j\rangle,$$

$$\underset{\sim}{C}_{\varepsilon_j}[\underline{\alpha}'(t)] = \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(\alpha_i'(t) w_i), w_j\rangle,$$

$$\underset{\sim}{D}_j[\underline{\alpha}'(t)] = \langle \nabla j_\varepsilon(\alpha_i'(t)\, w_i), w_j\rangle.$$

El problema (3.11) puede escribirse como un sistema de primer orden al definir $\underline{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ por $\underline{\gamma}(t) = [\underline{\alpha}(t), \underline{\alpha}'(t)]^T$. El problema equivalente asociado es

Encuentre $\underline{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ tal que

$$\underline{\gamma}'(t) = G(t, \underline{\gamma}(t)) = A\underline{\gamma}(t) + F(t), \qquad (3.12)$$

$$\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}_0,$$

donde,

$$A\underline{\gamma}(t) = [\underline{\alpha}'(t), -\underset{\sim}{M}^{-1}(\underset{\sim}{K}\,\underline{\alpha}(t) + \underset{\sim\varepsilon}{C}(\underline{\alpha}'(t)) + \underset{\sim}{D}(\underline{\alpha}'(t))],$$

$$F(t) = [0, \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{F}(t)], \quad \underline{\gamma}_0 = [\underline{\alpha}(0), \underline{\alpha}'(0)].$$

Mostraremos que el problema (3.12) posee al menos una solución local u_h, $u_h' \varepsilon C_A([0,T_{m_h}]; V_h)$, puesto que, $G:[0,T_{m_h}] \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h} \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ satisface las condiciones de Carathéodory, esto es,

i) $G(\cdot, \underline{\delta}):[0,T_{m_h}] \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ es medible,

ii) $G(t, \cdot): \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h} \to \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ es continua,

iii) $\forall$ compacto $\omega \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$, existe una función $g_\omega \ \varepsilon\ L^1(0,T)$, tal que $|G(t,\underline{\delta})| \le g_\omega(t)$, $(t,\underline{\delta}) \varepsilon \omega$.

Obsérvese que $f \varepsilon L^2(0,T;H)$ y $F_j(t) = <f(t),w_j>$, lo cual implica que $F_j \ \varepsilon L^1(0,T)$, $j=1,\ldots,m_h$ por tanto la condición (i) es satisfecha. Obsérvese que $\beta + \nabla j_\varepsilon : V \to V'$ es monótono y hemicontinuo puesto que $\beta : V \to V'$ y $\nabla j_\varepsilon : V \to V'$, lo son, por tanto, si $u_h \to u$ en V, $<(\beta + \nabla j_\varepsilon)(u_h),w> \to <(\beta + \nabla j_\varepsilon)(u),w>$ $\forall\ w \varepsilon V$, esto es $\beta + \nabla j_\varepsilon$ es demicontinuo, [29]. Entonces $A(\gamma(t))$ es continuo en $\mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$, lo cual implica que (ii) es satisfecha. Mostraremos a continuación que (iii) es también satisfecha. Sea

$$\omega = [t_1,t_2] \times \{\underset{\sim}{U} \varepsilon\ \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h} : |u_k| \le C, \quad k = 1,2,\ldots,2m_h\},$$

$$0 \le t_1 \le t_2 \le T \quad y \quad (t, \underline{\gamma}(t)) \varepsilon \omega.$$

Entonces,

$$|G_k(t;\underline{\gamma}(t))| = |A_k(\underline{\gamma}(t)) + F_k(t)| = |(\alpha_k'(t), \frac{1}{<w_i,w_k>}\{-\alpha_i(t)<Aw_i,w_k> -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} <\beta(\alpha_i'(t)w_i),w_k> - <\nabla j_\varepsilon(\alpha_i'(t)w_i),w_k> + <f(t),w_k>\})| =$$

$$= |\alpha_k'(t)| + \frac{1}{|\langle w_i,w_k\rangle|}\{| - \alpha_i(t)\langle Aw_i,w_k\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(\alpha_i'(t)w_i),w_k\rangle -$$

$$- \langle\nabla j_\varepsilon(\alpha_i'(t)w_i),\ w_k\rangle + \langle f(t),w_k\rangle\ | \leq$$

$$\leq |\alpha_k'(t)| + \frac{1}{|\langle w_i,w_k\rangle|}\{M||\alpha_i(t)w_i||\ ||w_k|| + \frac{1}{\varepsilon}||\beta(\alpha_i'(t)w_i)||_*||w_k||$$

$$+ ||\ \nabla j_\varepsilon(\alpha_i'(t)w_i)||_*||w_k|| + ||f(t)||_*||w_k||\} \leq$$

$$\leq |\alpha_k'(t)| + \frac{1}{|\langle w_i,w_k\rangle|}\{\tilde{M}\ \underset{i}{\text{Máx}}\ |\alpha_i(t)|\ \sum_{i=1}^{m}||w_i|| +$$

$$+ \underset{i}{\text{Máx}}\ |\alpha_i'(t)|[(\frac{1}{\varepsilon}+1)\sum_{i=1}^{m}||w_i||] + ||f(t)||_*\}\ ||w_k||$$

$$\leq |\alpha_k'(t)| + \frac{1}{|\langle w_i,w_k\rangle|}\{\tilde{C}\ \sum_{i=1}^{m}||w_i|| + ||f(t)||_*\}\ ||w_k||.$$

El resultado se sigue al observar que $||f(\cdot)||_* \in L^2(0,T)$. ■

A continuación mostraremos que $[0,T_{m_h}] = [0,T]$, al mostrar, mediante estimaciones a priori, el

<u>Teorema 3.4</u>. Toda solución $\{u_h\}_{h\geq 0}$ del problema 3.10 satisface

$$\begin{aligned}
&\{u_h(t)\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } V, \text{ c.t. } t\in[0,T], \\
&\{u_h\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } \mathcal{V} \text{ y en } L^\infty(0,T;V), \\
&\{u_h'(t)\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } H, \text{ c.t. } t\in[0,T], \\
&\{u_h'\}_{h\geq 0} \text{ es acotada en } \mathcal{H} \text{ y en } L^\infty(0,T;H).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

<u>Demostración</u>. Sustituyendo en el problema (3.10) $v_h(t)$ por $u_h'(t)$, $t \in [0,T_{m_h}]$ se obtiene

$$\langle u_h''(t) + Au_h(t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_h'(t)) + \nabla j(u_h'(t)),\ u_h'(t)\rangle = \langle f(t),\ u_h'(t)\rangle.$$

Tomando en cuenta la positividad de $\beta: V \to V'$ y $\nabla j_\varepsilon: V \to V'$, se obtiene

$$\langle u_h''(t) + Au_h(t),\ u_h'(t)\rangle \le \langle f(t),\ u_h'(t)\rangle,$$

por tanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\{|u_h'(t)|^2 + \langle Au_h(t),\ u_h'(t)\rangle\} \le \langle f(t),\ u_h'(t)\rangle.$$

Al integrar esta última desigualdad y tomar en cuenta la semicoercividad y continuidad de $A: V \to V'$ y la acotación de u_{0_h}, v_{0_h}, se obtiene

$$|u_h'(t)|^2 + \alpha||u_h(t)||^2 \le C + \lambda\,|u_h(t)|^2 + 2\int_0^t \langle f(\tau),\ u_h(\tau)\rangle d\tau \le$$

$$\le C + \lambda\,|u_h(t)|^2 + 2\int_0^t |f(\tau)|\ ||u_h(\tau)||\,d\tau.$$

Al aplicar la desigualdad de Young se obtiene

$$|u_h'(t)|^2 + \alpha||u_h(t)||^2 \le C_1 + \lambda\,|u_h(t)|^2 + \int_0^t ||u_h(\tau)||^2\,d\tau$$

Puesto que,

$$|u_h(t)|^2 \le 2\,|u_h(0)|^2 + C_2\int_0^t |u_h'(\tau)|^2 d\tau,\quad C_2 > 0,$$

se obtiene

$$|u_h'(t)|^2 + \alpha\,||u_h(t)||^2 \le C_3 + C_2\int_0^t |u_h'(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t ||u_h(\tau)||^2\,d\tau$$

$$\le C_3 + C_4\,\{\int_0^t [|u_h'(\tau)|^2 + ||u_h(\tau)||^2] d\tau\}$$

Por tanto, existen constantes C_5 y C_6, tal que,

$$|u_h'(t)|^2 + ||u_h(t)||^2 \leq C_5 + C_6 \{\int_0^t [|u_h'(\tau)|^2 + ||u_h(\tau)||^2] d\tau\}$$

Al aplicar la desigualdad de Gronwall, [16], se obtiene

$$|u_h'(t)|^2 + ||u_h(t)||^2 \leq C_5 \, e^{C_6 T}$$

por tanto, (3.13) es satisfecho. ■

<u>Observación 3.1</u>. Obsérvese que se satisfacen las acotaciones siguientes:

$$|u_h'(t)|^2 \leq C_5 \, e^{C_6 T} \; , \; ||u_h(t)||^2 \leq C_5 \, e^{C_6 T}.$$

Estas desigualdades pueden escribirse en la siguiente forma matricial

$$\underline{\alpha}^T(t) \; \underset{\sim}{A} \; \underline{\alpha}(t) \leq C_5 \, e^{C_6 T} \; , \; (\underline{\alpha}')^T(t) \; \underset{\sim}{B} \; \underline{\alpha}'(t) \leq C_5 \, e^{C_6 T},$$

donde,

$$\underline{\alpha}(t) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_{m_h}(t)]^T,$$

$$A_{ij} = (\omega_j, \omega_i)_V \; , \; B_{ij} = (\omega_j, \omega_i)_H.$$

Por tanto,

$$\underline{\alpha}^T(t) \; \underset{\sim}{A} \; \underline{\alpha}(t) + (\underline{\alpha}')^T(t) \; \underset{\sim}{B} \; \underline{\alpha}'(t) \leq C_7 \, e^{C_6 T}.$$

Esta desigualdad puede escribirse como

$$\underline{\gamma}^T(t) \; \underset{\sim}{A} \; \underline{\gamma}(t) \leq C_7 \, e^{C_6 T},$$

donde,

$$\underline{\gamma}(t) = [\underline{\alpha}(t)\ ,\ \underline{\alpha}'(t)],$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{B} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\underline{\gamma}(t) \varepsilon \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ es acotada. La existencia global se sigue al aplicar el teorema de continuación, [16], a (3.12).

Además la solución es única y depende continuamente del dato inicial si para todo compacto $\omega \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{m_h} \times \mathbb{R}^{m_h}$ existe una función $g_\omega \ \varepsilon\ L^1(0,T)$ tal que

$$|G(t\ ;\ \underline{\gamma}(t)) - G(t\ ;\ \underline{\delta}(t))| \leq g_\omega(t)\ |\underline{\gamma}(t) - \underline{\delta}(t)|,$$

$$(t,\ \underline{\gamma}(t)),\ (t,\ \underline{\delta}(t)) \varepsilon\ \omega.$$

En este caso se tiene que

$$|G_k(t;\underline{\gamma}(t) - G_k(t;\underline{\delta}(t))| = |A_k(\underline{\gamma}(t)) - A_k(\underline{\delta}(t))| \leq$$

$$\leq |\alpha_k'(t) - \beta_k'(t)| + \frac{1}{|<\omega_i,\omega_k>|}\ [\ M \max_i ||w_i|| \sum_{i=1}^{m_h} |\alpha_i(t) - \beta i(t)| +$$

$$+ (1 + \frac{1}{\varepsilon})\ (\max_i |\alpha_i'(t)| + \max_i |\beta_i'(t)|) \sum_{i=1}^{m_h} ||w_i||]\ ||w_k|| \leq$$

$$\leq |\alpha_k'(t) - \beta_k'(t)| + \{C_1\ |\underline{\alpha}(t) - \underline{\beta}(t)| + C_2\ \{||w_k|| \leq$$

$$\leq |\underline{\alpha}'(t) - \underline{\beta}'(t)|\ + C_3\ |\underline{\alpha}(t) - \underline{\beta}(t)| \leq C_4\ |\underline{\gamma}(t) - \underline{\delta}(t)|.$$

Por tanto, unicidad y dependencia continua respecto a los datos de la solución de (3.12) es satisfecha. ■

3.3 CONVERGENCIA DEL PROBLEMA SEMIDISCRETO.

Demostraremos ahora el siguiente teorema de convergencia débil.

Teorema 3.5. Toda sucesión $\{u_h\}_{h\geq 0}$ solución del problema (3.10) converge a u_ε, cuando $m_h \to \infty$, en el siguiente sentido:

$$
\begin{aligned}
&u_h \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ , debilmente, en } V,\\
&u_h \rightharpoonup {}^* u_\varepsilon \text{ , debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;V),\\
&u'_h \rightharpoonup u'_\varepsilon \text{ , debilmente, en } H,\\
&u'_h \rightharpoonup {}^* u'_\varepsilon \text{ , debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;H).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Demostración. De acuerdo a las acotaciones dadas por el teorema 3.4 y tomando en cuenta que todo conjunto acotado en espacios de Hilbert es secuencialmente debilmente compacto, existe una subsucesión de $\{u_h\}_{h>0}$ que denotaremos también $\{u_h\}_{h>0}$ que satisface $(3.14)_1$, $(3.14)_3$. Además, $(3.14)_2$ y $(3.14)_4$ son implicados por $(3.13)_2$, $(3.14)_1$ y $(3.13)_4$, $(3.14)_2$ respectivamente. ■

Mostraremos a continuación acotación de $\{u''_h\}_{h\geq 0}$ mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.6. Toda solución $\{u_h\}_{h>0}$ del problema (3.10) satisface, además de $(3.13)_1$ y $(3.13)_2$,

$$\begin{array}{ll}\{u_h'(t)\}_{h\geq 0} & \text{es acotada en } V, \text{ c.t. } t \in [0,T], \\ \{u_h'\}_{h\geq 0} & \text{es acotada en } V \text{ y } L^\infty(0,T;V), \\ \{u_h''(t)\}_{h\geq 0} & \text{es acotada en } H, \text{ c.t. } t \in [0,T], \\ \{u_h''\}_{h\geq 0} & \text{es acotada en } H \text{ y en } L^\infty(0,T;H).\end{array} \tag{3.15}$$

<u>Demostración</u>. Derivando la ecuación (3.10) con respecto al tiempo se obtiene

$$<u_h'''(t) + Au_h'(t) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_h'(t)))' + (\nabla j(u_h'(t)))', v_h(t)> +$$

$$+ < u_h''(t) + Au_h(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_h'(t)) + \nabla j(u_h'(t)), v_h'(t)> = <f'(t), v_h(t)> +$$

$$+ < f(t), v_h'(t)>.$$

Al sustituir en esta ecuación $v_h(t)$ por $u_h''(t)$ y $v_h'(t)$ por $u_h'(t)$ y, tomando en cuenta la positividad de $\beta:V\to V'$ y $\nabla j:V\to V'$, se obtiene

$$< u_h'''(t) + Au_h'(t) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_h'(t)))' + (\nabla j(u_h'(t)))', u_h''(t) > +$$

$$+ < u_h'''(t) + Au_h(t), u_h'(t)> \leq <f'(t), u_h''(t)> + < f(t), u_h'(t)>$$

Además, puesto que $\beta:V\to V'$ y $\nabla j:V\to V'$, son monótonos, se satisface

$$<(\beta(u_h'(t)))' + (\nabla j(u_h'(t)))', u_h''(t)> \geq 0,$$

por tanto,

$$< u_h'''(t) + Au_h'(t),\ u_h''(t)> + <u_h''(t) + Au_h(t),\ u_h'(t)> \leq < f'(t),\ u_h''(t)> +$$

$$+ <f(t),\ u_h'(t)> ,$$

de donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|u_h''(t)|^2 + <Au_h'(t),\ u_h'(t)> + |u_h'(t)|^2 + <Au_h(t),\ u_h(t)>\} \leq$$

$$\leq < f'(t),\ u_h''(t)> + < f(t),\ u_h'(t)>.$$

Al integrar esta última desigualdad se obtiene

$$|u_h''(t)|^2 + <Au_h'(t),\ u_h'(t)> + <Au_h(t), u_h(t)> \leq |u_h''(0)|^2 - |u_h'(t)|^2 +$$

$$+ M\{||u_h'(0)|| + ||u_h(0)||^2\} + 2\{\int_0^t\{<f'(\tau),\ u_h''(\tau)> + <f(\tau),\ u_h'(\tau)>\}d\tau\}$$

Puesto que $\{u_h'(t)\}_{h\geq 0}$, u_{0_h}, v_{0_h} son acotados en H y V se satisface que:

$$|u_h''(t)|^2 + <Au_h'(t),\ u_h'(t)> + <Au_h(t),\ u_h(t)> \leq C + |u_h''(0)|^2 +$$

$$+ 2\{\int_0^t [<f'(\tau),\ u_h''(\tau)> + <f(\tau),\ u_h'(t)\}]\ d\tau\} .$$

También, $u_h''(0) = f(0) - \frac{1}{\varepsilon}\beta(v_{0h}) - \nabla j(v_{0h}) - Au_{0h}$, por tanto,

$$|u_h''(0)| \leq |f(0)| + \frac{1}{\varepsilon}|\beta(v_{0h})| + |\nabla j(v_{0h})| + |Au_{0h}|$$

$$\leq |f(0)| + C\,|v_{0h}| + M\,||u_{0h}|| \leq C_1,$$

y $\quad |u_h''(t)|^2 + <Au_h'(t),\ u_h'(t)> + <Au_h(t),\ u_h(t)> \leq C +$

$$+ 2\{\int_0^t[<f'(\tau),\ u_h''(\tau)> + <f(\tau),\ u_h'(\tau)>]\ d\tau\} \leq C +$$

$$+ 2\{\int_0^t |f'(\tau)||u_h''(\tau)|d\tau + \int_0^t|f(\tau)|\ |u_h'(\tau)|\ d\tau\} \leq$$

$$\leq C_1 + 2\{\int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + |u_h'(\tau)|^2]\ d\tau\} .$$

Al usar la semicoercividad de $A:V\to V'$ se obtiene,

$$|u_h''(t)|^2 + \alpha \{||u_h'(t)||^2 + ||u_h(t)||^2\} \leq C_2 + \lambda \{|u_h'(t)|^2 + |u_h(t)|^2\} +$$

$$+ 2 \{ \int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + |u_h'(\tau)|^2] \, d\tau\} \leq C_3 +$$

$$+ 2 \{ \int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + |u_h'(\tau)|^2] \, d\tau\} \leq C_3 +$$

$$+ C_4 \int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + ||u_h'(\tau)||^2] \, d\tau,$$

por tanto,

$$|u_h''(t)|^2 + \alpha \, ||u_h'(t)||^2 \leq C_5 + C_4 \int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + ||u_h'(\tau)||^2] \, d\tau.$$

Existen entonces constantes C_6 y C_7 tales que

$$|u_h''(t)|^2 + ||u_h'(t)||^2 \leq C_6 + C_7 \int_0^t [|u_h''(\tau)|^2 + ||u_h'(\tau)||^2] d\tau.$$

Al aplicar la desigualdad de Gronwall se obtienen los siguientes resultados

$$|u_h''(t)| \leq C_6 \, e^{C_7 T} \ , \ ||u_h'(t)|| \leq C_6 \, e^{C_7 T}$$

por tanto (3.15) es satisfecha. ■

Observación 3.2. Obsérvese que, de acuerdo al teorema 3.5, existen subsucesiones de $\{u_h'\}_{h\geq 0}$, $\{u_h''\}_{h\geq 0}$ denotadas también por $\{u_h'\}_{h\geq 0}$, $\{u_h''\}_{h\geq 0}$ tal que

$$\begin{aligned} u_h' &\rightharpoonup u_\varepsilon' \text{, debilmente, en } V, \\ u_h' &\rightharpoonup^* u_\varepsilon' \text{, debilmente estrella, en } L^\infty(0,T:V), \\ u_h'' &\rightharpoonup u_\varepsilon'' \text{, debilmente, en } H, \\ u_h'' &\rightharpoonup^* u_\varepsilon'' \text{, debilmente estrella, en } L^\infty(0,T;H). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Además, puesto que $\beta:V\to V'$, $\nabla j_\varepsilon:V\to V'$ son acotados,

$$\begin{aligned}&\beta(u_h'(t)) \to \chi(t), \text{ debilmente, en } V', \text{ c.t. } t\in[0,T],\\ &\nabla j_\varepsilon(u_h'(t))\to\psi(t), \text{ debilmente, en } V', \text{ c.t. } t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.17}$$ ■

Teorema 3.7. Los límites débiles del teorema (3.5) y observación 3.2 satisfacen

$$\begin{aligned}\int_0^T < u_\varepsilon''(t), v(t)>dt + \int_0^T <Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\chi(t) + \psi(t), v(t)>dt =\\ = \int_0^T <f(t), v(t)> dt,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\forall\ v\in V \text{ con } v'\in V$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0\ ,\ u_\varepsilon'(0) = v_0.$$

Demostración. Sea $v_h \in V_h$ tal que $v_h(T) = 0$. Integrando por partes la ecuación (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T <-u_h'(t), v_h'(t)>dt + \int_0^T <Au_h(t) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_h'(t)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(t)), v_h(t)> dt =\\ = \int_0^T <f(t), v_h(t)> dt + (v_{0_h}, v_h(0)).\end{aligned}$$

Al pasar al límite, tomando en cuenta la definición de aproximación interna, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T <-u_\varepsilon'(t), v'(t)>dt + \int_0^T <Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\chi(t) + \psi(t), v(t)> dt =\\ = \int_0^T <f(t), v(t)>dt + (v_0, v(0)),\ \forall\ v\in V \text{ con } v'\in V.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Al tomar $v \in \mathcal{D}(0,T)$ se observa que

$$\int_0^T <-u_\varepsilon'(t), v'(t)> dt = \int_0^T <f(t) - Au_\varepsilon(t) - \frac{1}{\varepsilon}\chi(t) - \psi(t), v(t)> dt.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} <-u'_\varepsilon(\cdot),\ v(t)> = <f(\cdot) - Au_\varepsilon(\cdot) - \frac{1}{\varepsilon}\chi(\cdot) - \psi(\cdot),\ v(t)> \qquad \varepsilon\ \mathcal{D}'(0,T),$$

esto es,

$$\frac{d}{dt} <u'_\varepsilon(\cdot),\cdot> = <f(\cdot) - Au_\varepsilon(\cdot) - \frac{1}{\varepsilon}\chi(\cdot) - \psi(\cdot),\cdot> \qquad \varepsilon\ \mathcal{D}'(0,T;V').$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} u'_\varepsilon = f - Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\chi - \psi\ \varepsilon\ \mathcal{V}' = L^2(0,T;V') \subset \mathcal{D}'(0,T;V').$$

Además debido a que, $u_h(0) \to u_\varepsilon(0)$, debilmente, en V y $u_h(0) \to u_0$, fuertemente en V, $u_\varepsilon(0) = u_0$. También

$$\int_0^T <u''_\varepsilon(t),\ v(t)>dt = -\int_0^T <u'_\varepsilon(t),\ v'(t)>dt - (u'_\varepsilon(0),\ v(0)), \qquad \forall\ v\varepsilon\ \mathcal{V} \text{ con } v(T) = 0.$$

Por tanto,

$$(u'_\varepsilon(0) - v_0,\ v(0)) = 0,\ \forall\ v\varepsilon\ \mathcal{V},\ v(T) = 0,\ v'\varepsilon\ \mathcal{V}.$$

Esto es $u'_\varepsilon(0) = v_0$. Al integrar por partes (3.19) se obtiene (3.18). ■

Para mostrar que u_ε es solución del problema (3.9) es necesario que

$$\frac{1}{\varepsilon}\chi(t) + \psi(t) = \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(t)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)),\ \text{c.t. } t\varepsilon\ (0,T), \qquad (3.20)$$

lo cual se muestra utilizando los dos siguientes lemas, la demostración del lema 1.3 se presta en [19].

Lema 1.3. Sea $\omega \varepsilon L^{\infty}(0,T;V)$, $\omega' \varepsilon L^{\infty}(0,T;H)$, tal que

$$\omega''(t) + A\omega(t) = g(t), \qquad g \ \varepsilon \ L^2(0,T;V')$$

$$\omega(0) = u_0 \ , \ \omega'(0) = v_0,$$

entonces, para casi toda $t\varepsilon[0,T]$,

$$<A\omega(t), \omega(t)> + |\omega'(t)|^2 \geq <Au_0, u_0> + |v_0|^2 + 2\int_0^t <g(t), \omega'(\tau)> d\tau. \quad (3.21)$$

$\blacksquare$

Lema 2.3

$$\liminf \int_0^t <\beta(u_h'(\tau)) - \beta(v(\tau)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(\tau)) - \nabla j(v(\tau)), u_h'(\tau) - v(\tau)>d\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t <\chi(\tau) - \beta(v(\tau)) + \psi(\tau) - \nabla j(v(\tau)), u_\varepsilon'(\tau) - v(\tau)> d\tau, \ \forall \ v\varepsilon V \quad (3.22)$$

Demostración. Una condición suficiente para que (3.22) sea satisfecha es:

$$\liminf \int_0^t [< \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_h'(\tau)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(\tau)), u_h'(\tau)>] \ d\tau \leq$$
$$\int_0^t < \frac{1}{\varepsilon} \chi(\tau) + \psi(\tau), u_\varepsilon'(\tau)> d\tau, \quad (3.23)$$

puesto que,

$$< \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_h'(\tau) - \frac{1}{\beta} (v(\tau)) + \nabla j_\varepsilon(u_h'(\tau)) - \nabla j(v(\tau)), u_h'(\tau) - v(\tau)> =$$

$$= < \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_h'(\tau)), u_h'(\tau)> - < \frac{1}{\varepsilon} \beta(v(\tau)), u_h'(\tau)> - < \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_h'(\tau)), v(\tau)> +$$

$$+ < \frac{1}{\varepsilon} \beta(v(\tau)), v(\tau)> + < \nabla j_\varepsilon(u_h'(\tau)), u_h'(\tau)> - < \nabla j(v(\tau)), u_h'(\tau)> -$$

$$- < \nabla j(u_h'(\tau)), v(\tau)> + < \nabla j(v(\tau)), v(\tau)>.$$

Procederemos a demostrar la desigualdad (3.23). De la ecuación (3.10) se obtiene, al sustituir $v_h(t)$ por $u_h'(t)$, que

$$\frac{1}{2}\,[|u_h'(t)|^2 + \langle Au_h(t),\, u_h(t)\rangle] + \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_h'(\tau)) + \nabla j_\varepsilon(u_m'(\tau)),\, u_h'(\tau)\rangle d\tau =$$

$$= \int_0^t \langle f(\tau),\, u_h'(\tau)\rangle d\tau + \frac{1}{2}\,[\langle Au_{0_h},\, u_{0_h}\rangle + |v_{0_h}|^2],$$

en el límite se obtiene

$$\frac{1}{2} \langle |u_\varepsilon'(t)|^2 + \langle Au_\varepsilon(t),\, u_\varepsilon(t)\rangle\} + \liminf \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_h'(\tau)) + \nabla j(u_h'(\tau)),\, u_h'(\tau)\rangle d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t \langle f(\tau),\, u_\varepsilon'(\tau)\rangle d\tau + \frac{1}{2}\,[\langle Au_0,\, u_0\rangle + |v_0|^2],$$

ya que

$\liminf |u_h'(t)| \geq |u_\varepsilon'(t)|$, $\liminf \langle Au_h(t),\, u_h(t)\rangle \geq \langle Au_\varepsilon(t),\, u_\varepsilon(t)\rangle$.

Puesto que,

$$u_\varepsilon''(t) + Au_\varepsilon(t) = f(t) - \frac{1}{\varepsilon}\,\chi(t) - \psi(t), \text{ a.e. } t\in[0,T],$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0,\quad u_\varepsilon'(0) = v_0,$$

Se puede aplicar el lema 1.3 con $g(t) = f(t) - \frac{1}{\varepsilon}\,\chi(t)$. Entonces

$$\liminf \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_h'(\tau)) + \nabla j(u_h'(\tau)),\, u_h'(\tau)\rangle d\tau \leq \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\,\chi(t) + \psi(\tau),\, u_\varepsilon'(\tau)\rangle d\tau,$$

y, (3.22) es satisfecha. ■

Puesto que $\beta : V \to V'$ y $\nabla j_\varepsilon : V \to V'$ son monótonos y satisfacen (3.22) se observa que

$$0 \leq \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\,\chi(\tau) - \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v(t)) + \psi(\tau) - \nabla j_\varepsilon(v(\tau)),\, u_\varepsilon'(\tau) - v(\tau)\rangle d\tau$$

Haciendo $v = u_\varepsilon' - \lambda\omega$, $\lambda > 0$, $\omega\in V$ arbitrario, se obtiene

$$0 \leq \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\chi(\tau) - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(\tau) - \lambda\omega(\tau)) + \psi(\tau) - \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(\tau) - \lambda\omega(\tau)), \omega(\tau)\rangle d\tau.$$

Al usar la hemicontinuidad de $\beta: V \to V'$ y $\nabla j_\varepsilon: V \to V'$ se obtiene, cuando $\lambda \to 0$,

$$0 \leq \int_0^t \langle \frac{1}{\varepsilon}\chi(\tau) - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(\tau)) + \psi(\tau) - \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(\tau)), \omega(\tau)\rangle d\tau,$$

por tanto,

$$\frac{1}{\varepsilon}\beta(u'_\varepsilon(\tau)) + \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(\tau)) = \frac{1}{\varepsilon}\chi(\tau) + \psi(\tau). \qquad (3.24)$$

Se ha demostrado, mediante (3.18) y (3.24), el siguiente teorema

<u>Teorema 3.5.</u> El límite débil $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V)$, que satisface, $u'_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V)$ y $u''_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H)$, es solución del problema (3.9). ■

3.4 DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.2.

Mostraremos ahora que la solución del problema (3.9) es convergente, en el sentido del teorema 3.2, a la solución del problema (3.1).

<u>Teorema 3.6.</u> La solución, u_ε, del problema (3.4) satisface,

$$\begin{array}{ll} \{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} & \text{es acotada en } L^\infty(0,T;V), \\ \{u'_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} & \text{es acotada en } L^\infty(0,T;V), \\ \{u''_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} & \text{es acotada en } L^\infty(0,T;H). \end{array} \qquad (3.25)$$

<u>Demostración.</u> La demostración es idéntica a la del teorema 3.5. ■

<u>Observación 3.4.</u> Obsérvese que por (3.25) existen subsucesiones de $\{u_\varepsilon\}$, $\{u'_\varepsilon\}$, $\{u''_\varepsilon\}$, denotadas de la misma forma,

tal que

$$u_\varepsilon \to * \; u \quad \text{(debilmente estrella) en } L^\infty(0,T;V),$$

$$u'_\varepsilon \to * \; u' \quad \text{(debilmente estrella) en } L^\infty(0,T;V), \quad (3.26)$$

$$u''_\varepsilon \to * \; u'' \quad \text{(debilmente estrella) en } L^\infty(0,T;H),$$

$$\beta(u'_\varepsilon(t)) \to \beta(u'(t)) \quad \text{(debilmente) en } V', \text{ c.t. } t\varepsilon[0,T],$$

$$\nabla j(u'_\varepsilon(t)) \to \nabla j(u'(t)) \quad \text{(debilmente) en } V'. \text{c.t. } t\varepsilon[0,T].$$

Además,

$$\beta(u'_\varepsilon(t)) = \varepsilon\,[f(t) - u''_\varepsilon(t) - Au_\varepsilon(t) - \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t))] \to 0,$$

por tanto, $\beta(u'_\varepsilon(t)) = 0$, c.t. $t\varepsilon$ $(0,T)$, esto es, $u'_\varepsilon(t)\varepsilon K$, c.t. $t\varepsilon$ $(0,T)$. Además,

$$<u''_\varepsilon(t) + Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u'_\varepsilon(t)) - f(t),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)> + j_\varepsilon(v(t)) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) =$$

$$= j_\varepsilon(v(t)) - j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)) - < \nabla j_\varepsilon(u'_\varepsilon(t)),\, v(t) - u'_\varepsilon(t)> \geq 0,\ \forall\, v\,\varepsilon\, V,$$

por la convexidad de $j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$. Al tomar el límite y al usar las propiedades, de convergencia y consistencia, de $j_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$, se obtiene

$$<u''(t) + Au(t),\, v(t) - u'(t)> + j(v(t)) - j(u'(t)) \geq < f(t),\, v(t) - u'(t)> \forall\, v\varepsilon V.$$

También

$$u(0) = u_0\ ,\ u'(0) = v_0.$$

Lo cual indica que u es solución del problema (3.1). Se ha mostrado, por tanto, el teorema 3.2. ■

4. MODELO MECANICO GENERAL DE KIRCHHOFF.

El objetivo de este capítulo es obtener el modelo mecánico; ecuaciones de campo, consistencia (en cargas de cuerpo, tracciones de superficie, de condiciones iniciales y de frontera), equilibrio dinámico y elementos mecánicos, de una placa tridimensional, elástica lineal, homogéneo e isotrópica. A dicha placa la llamaremos cuerpo tridimensional de Krichhoff y, a su modelo mecánico correspondiente, modelo mecánico general de Kirchhoff.

Como una primera etapa se especializarán, mediante el Método de Kantarovich [21], las ecuaciones de campo de la elasticidad lineal tridimensional. Posteriormente, mediante la ecuación de equilibrio dinámico de un medio continuo y la relación del tensor de esfuerzos con la tracción de superficie, ley de Cauchy, se presentan condiciones de consistencia para cargas de cuerpo y de superficie, respectivamente. La consistencia en condiciones de frontera e iniciales quedan determinadas, en forma directa, de las hipótesis de partida. Finalmente mediante los principios de balance, lineal y angular de un medio continuo, se plantean las ecuaciones de equilibrio dinámico del cuerpo en estudio y, mediante la ley de Cauchy, se establecen las relaciones entre cortantes y momentos con los desplazamientos.

Se presenta también, bajo hipótesis en cargas, una simplificación del modelo mecánico general de Kirchhoff. El modelo mecánico resultante es llamado modelo de Kirchhoff con tracciones nulas. Finalmente, mediante un procedimiento formal presentado en [7], se desarrolla una fórmula de Green para el cuerpo tridimensional en estudio.

4.1 ECUACIONES DE CAMPO TRIDIMENSIONALES DE KIRCHHOFF.

El objetivo de esta parte es expresar los componentes del tensor de deformaciones y de esfuerzos de un cuerpo $B \subset \mathbb{R}^3$, elástico lineal, homogéneo e isotrópico que satisface hipótesis a priori conocidas en desplazamientos. Para lograr nuestro objetivo recordemos que las relaciones, en este caso, desplazamiento - deformación y esfuerzo - deformación están dadas por las siguientes ecuaciones de campo [15]:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{E} &= \frac{1}{2}\,[\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T], \\ \underset{\sim}{S} &= \frac{\beta}{1+\nu}\,[\underset{\sim}{E} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{E})\underset{\sim}{1}]. \end{aligned}\right\} \text{ en } B\times J \qquad (4.1)$$

Aquí, $\beta > 0$, es el módulo de young, $0 < \nu < \frac{1}{2}$ es el coeficiente de Poisson, $\underline{u}$, $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{S}$, son el vector desplazamiento, el tensor de deformaciones y el de esfuerzos, respectivamente, y $J = (0,T)$, $T < +\infty$, el intervalo de tiempo.

Sea B el cuerpo tridimensional definido, en su configuración de referencia, con respecto a un sistema ortogonal por:

$$\overline{B} = \{p = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2) \in \overline{\Omega},\ -\tfrac{1}{2}\,h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq \tfrac{1}{2}h(x_1,x_2)\},$$

donde,

Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ de frontera $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, suficientemente regular, $h:\overline{\Omega} \to (0, +\infty)$ representa el espesor de B.

La frontera del cuerpo B, ∂B, es tal que

$$\partial B = \partial B_+ \cup \partial B_- \cup \partial B_1 \cup \partial B_2,$$

donde,

$$\partial B_+ = \{(x_1,x_2, \frac{h}{2}(x_1,x_2)) : (x_1,x_2) \varepsilon \bar{\Omega}\},$$

$$\partial B_- = \{(x_1,x_2, -\frac{h}{2}(x_1,x_2)) : (x_1,x_2) \varepsilon \bar{\Omega}\},$$

$$\partial B_1 = \{(x_1,x_2,x_3) : -\frac{h}{2}(x_1,x_2) < x_3 < \frac{h}{2}(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \varepsilon \partial\Omega_1\},$$

$$\partial B_2 = \{(x_1,x_2,x_3) : -\frac{h}{2}(x_1,x_2) < x_3 < \frac{h}{2}(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \varepsilon \partial\Omega_2\}.$$

Al cuerpo B, así definido, lo llamaremos cuerpo tridimensional de Kirchhoff al satisfacer además la hipótesis

H1: Hipótesis de Kirchhoff Modificadas

$$u_1 = u_2, \quad \text{en } \{(x_1,x_2,0)\} x J, \ (x_1,x_2) \varepsilon \Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= x_3\, u_{1,3}(\underline{x},0,t), \\ u_2(x,t) &= x_3\, u_{2,3}(\underline{x},0,t), \\ u_3(x,t) &= u_3(\underline{x},0,t) + x_3\, u_{3,3}(\underline{x},0,t) + \\ &+ \frac{1}{2} x_3^2\, u_{3,33}(\underline{x},0,t). \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\underline{x} \varepsilon \Omega, \\ &x = (\underline{x},x_3) \varepsilon B, \\ &t \varepsilon J. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Esta hipótesis y las ecuaciones de campo (4.1) permiten particularizar las expresiones de los componentes del tensor de deformaciones $\underset{\sim}{E}$ y de esfuerzos $\underset{\sim}{S}$ del cuerpo B. A tales expresiones las llamaremos ecuaciones de campo tridimensionales de Kirchhoff. Su forma explícita es:

$$\left.\begin{aligned}
E_{11}\ (x,t) &= x_3\,\bar{u}_{1,31}\ ,\\
E_{22}\ (x,t) &= x_3\,\bar{u}_{2,32}\ ,\\
E_{33}\ (x,t) &= \bar{u}_{3,3} + x_3\,\bar{u}_{3,33}\ ,\\
E_{12}\ (x,t) &= \tfrac{1}{2}\,x_3\,[\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31}]\,,\\
E_{13}\ (x,t) &= \tfrac{1}{2}\,[\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + x_3\,\bar{u}_{3,31} + \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\bar{u}_{3,331}]\,,\\
E_{23}\ (x,t) &= \tfrac{1}{2}\,[\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + x_3\,\bar{u}_{3,32} + \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\bar{u}_{3,332}]\,,\\
E_{21}\ (x,t) &= E_{12}\ (x,t),\ E_{31}\ (x,t) = E_{13}\ (x,t),\ E_{32}\ (x,t) = E_{23}\ (x,t),\\
\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{E}\ (x,t) &= \bar{u}_{3,3} + x_3\,[\bar{u}_{1,31} + \bar{u}_{2,32} + \bar{u}_{3,33}].
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}(x,t)\in B\times J\\ \\ (4.3)\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}\ (x,t) &= \frac{\beta}{1+\nu}\,[x_3\,\bar{u}_{1,31} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{E}\ (x,t)]\,,\\
S_{22}\ (x,t) &= \frac{\beta}{1+\nu}\,[x_3\,\bar{u}_{2,32} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{E}\ (x,t)]\,,\\
S_{33}\ (x,t) &= \frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,3} + x_3\,\bar{u}_{3,33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{E}\ (x,t)]\,,\\
S_{12}\ (x,t) &= \frac{\beta x_3}{2(1+\nu)}\,[\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31}]\,,\\
S_{13}\ (x,t) &= \frac{\beta}{2(1+\nu)}\,[\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + x_3\,\bar{u}_{3,31} + \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\bar{u}_{3,331}]\,,\\
S_{23}\ (x,t) &= \frac{\beta}{2(1+\nu)}\,[\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + x_3\,\bar{u}_{3,32} + \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\bar{u}_{3,332}]\,,\\
S_{21}\ (x,t) &= S_{12}(x,t),\ S_{31}(x,t) = S_{13}(x,t),\ S_{32}(x,t) = S_{23}(x,t),
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}(x,t)\in B\times J\\ (4.4)\end{array}$$

donde, $\bar{u}_{i,j} = u_{i,j}(x_1,x_2,0,t)$, $\bar{u}_{i,jk} = u_{i,jk}(x_1,x_2,0,t)$,

$\bar{u}_{i,jk\ell} = u_{i,jk\ell}(x_1,x_2,0,t)$, $(x_1,x_2)\in\Omega$, $t\in J$.

4.2 CONSISTENCIA DE CARGAS DE CUERPO.

En esta parte presentaremos condiciones de consistencia, con respecto a la hipótesis H1, para las cargas de cuerpo que pueden actuar en el cuerpo B. Para esto utilizaremos la ecuación de equilibrio de la elasticidad lineal tridimensional [15];

$$- \operatorname{Div} \underset{\sim}{S} = \underline{b}_o - \rho_o \, \underline{\ddot{u}}, \quad \text{en } B \times J \cdot \tag{4.5}$$

Aquí, $\underline{b}_o = (b_{o_1}, b_{o_2}, b_{o_3})$, $\rho_o > 0$, son el vector de cargas de cuerpo y la densidad de masa por unidad de volumen, del cuerpo B respectivamente. Al sustituir (4.4) en (4.5) se obtienen las siguientes condiciones de consistencia para las cargas de cuerpo.

$$\left.\begin{aligned}
b_{o_1} &= - [S_{11_{,1}} + S_{12_{,2}} + S_{13_{,3}}] + \rho_o \ddot{u}_1 = \\
&= - {}^{\beta}/_{1+\nu} \Big[1/2 \; \bar{u}_{3,31} + \frac{x_3}{2} (2\bar{u}_{1_{,311}} + \bar{u}_{1_{,322}} + \bar{u}_{2_{,312}} + \\
&\qquad + \bar{u}_{3_{,331}}) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\operatorname{tr} \underset{\sim}{E})_{,1} \Big] + \rho_o \, x_3 \, \ddot{\bar{u}}_{1_{,3}} \, , \\
b_{o_2} &= - [S_{21_{,1}} + S_{22_{,2}} + S_{23_{,3}}] + \rho_o \ddot{u}_2 = \\
&= - {}^{\beta}/_{1+\nu} \Big[1/2 \; \bar{u}_{3,32} + \frac{x_3}{2} (2\bar{u}_{2_{,322}} + \bar{u}_{2_{,311}} + \bar{u}_{1_{,321}} + \\
&\qquad + \bar{u}_{3_{,332}}) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\operatorname{tr} \underset{\sim}{E})_{,2} \Big] + \rho_o \, x_3 \, \ddot{\bar{u}}_{2_{,3}} \, ,
\end{aligned}\right\} \text{en } B \times J \tag{4.6}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{o_3} &= -\ [S_{31,1} + S_{32,2} + S_{33,3}] + \rho_o \ddot{u}_3 \\ &= -\ {}^{\beta}/{1+\nu}\ [\tfrac{1}{2}\ (2\bar{u}_{3,33} + \bar{u}_{1,31} + \bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{2,32} + \bar{u}_{3,22} \\ &\quad + {}^{x_3}/2\ (\bar{u}_{3,311} + \bar{u}_{3,322}) + 1/4\ x_3^2 [\bar{u}_{3,3322} + \bar{u}_{3,3311} \\ &\quad + \frac{\nu}{1-2\nu}\ (\mathrm{tr}\ E)_{,3}] + \rho_o\ (\ddot{\bar{u}}_3 + x_3\ \ddot{\bar{u}}_{3,3} + \tfrac{1}{2}\ x_3^2\ \ddot{\bar{u}}_{3,33}) . \end{aligned}\right\}$$

4.3 CONSISTENCIA DE TRACCIONES DE SUPERFICIE

La consistencia, entre la hipótesis H1 y las tracciones de superficie que pueden actuar sobre la frontera ∂B, se establece mediante la ley de Cauchy [15], esto es,

$$\hat{\underline{S}} = \underset{\sim}{S}\ \underline{n} \quad , \quad \text{sobre } \partial B x J . \tag{4.7}$$

Aquí $\hat{\underline{S}}$, $\underline{n}$ son la tracción de superficie y la normal unitaria exterior a ∂B, respectivamente. Sean $\hat{\underline{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$, $\hat{\underline{S}}^* = (\hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*, \hat{S}_3^*)$, $\hat{\underline{g}} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ las tracciones de superficie actuando sobre $\partial B_+ xJ$, $\partial B_- xJ$ y $\partial B_2 xJ$, respectivamente, entonces, de acuerdo a (4.7) se tiene que

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_1\ (\underline{x},t) &= S_{13}(\underline{x},h/2,t) = \frac{\beta}{2(1+\nu)}\ [\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,31} + \frac{h^2}{8}\ \bar{u}_{3,331}] , \\ \hat{S}_2\ (\underline{x},t) &= S_{23}(\underline{x},h/2,t) = \frac{\beta}{2(1+\nu)}\ [\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,32} + \frac{h^2}{8}\ \bar{u}_{3,332}] , \\ \hat{S}_3\ (\underline{x},t) &= S_{33}(\underline{x},h/2,t) = \frac{\beta}{1+\nu}\ [\bar{u}_{3,3} + \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{E}(\underline{x},h/2,t)] , \\ \hat{S}_1^*\ (\underline{x},t) &= -\ S_{13}(\underline{x},-h/2,t) = -\frac{\beta}{2(1+\nu)}\ [\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} - \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,31} + \frac{h^2}{8}\ \bar{u}_{3,331}] , \\ \hat{S}_2^*\ (\underline{x},t) &= -\ S_{23}(\underline{x},-h/2,t) = -\frac{\beta}{2(1+\nu)}\ [\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} - \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,32} + \frac{h^2}{8}\ \bar{u}_{3,332}] , \\ \hat{S}_3^*\ (\underline{x},t) &= -\ S_{33}(\underline{x},-h/2,t) = -\frac{\beta}{1+\nu}\ [\bar{u}_{3,3} - \frac{h}{2}\ \bar{u}_{3,33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{E}(\underline{x},-\frac{h}{2},t)] , \end{aligned}\right\} (\underline{x},t) \in \bar{\Omega} x J \tag{4.8}$$

donde, $h = h(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x} \in \bar{\Omega}$,

$$\left.\begin{aligned}
\hat{g}_1\ (x,t) &= \frac{\beta}{1+\nu}[(x_3\ \bar{u}_{1,31} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{E}(x,t))n_1 + \\
&\quad + (\frac{x_3}{2}\ (\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31}))n_2], \\
\hat{g}_2\ (x,t) &= \frac{\beta}{1+\nu}[\frac{x_3}{2}(\bar{u}_{1,32} + \bar{u}_{2,31})n_1 + \\
&\quad + (x_3\ \bar{u}_{2,32} + \frac{\nu}{1-2\nu}\ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{E}(x,t))n_2], \\
\hat{g}_3\ (x,t) &= \frac{\beta}{2(1+\nu)}[(\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + x_3\ \bar{u}_{3,31} + \tfrac{1}{2}\ x_3^2\ \bar{u}_{3,331})n_1 + \\
&\quad + (\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + x_3\ \bar{u}_{3,32} + \tfrac{1}{2}\ x_3^2\ \bar{u}_{3,332})n_2].
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&(x,t)\in\partial B_2 x J\\ &(4.9)\end{aligned}$$

<u>Observación 4.1</u>. Obsérvese que en $x_3 = 0$ se satisface

$$\left.\begin{aligned}
\hat{g}_1\ (\underset{\sim}{x},0,t) &= \frac{\nu}{1-2\nu}\ \bar{u}_{3,3}\ n_1, \\
\hat{g}_2\ (\underset{\sim}{x},0,t) &= \frac{\nu}{1-2\nu}\ \bar{u}_{3,3}\ n_2, \\
\hat{g}_3\ (\underset{\sim}{x},0,t) &= \frac{\beta}{2(1+\nu)}\ [(\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1})n_1 + (\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2})n_2].
\end{aligned}\right\}\ \underset{\sim}{x}\in\partial\Omega_2, t\in J$$

■

4.4 CONSISTENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA EN DESPLAZAMIENTO.

La hipótesis H1 introduce condiciones de consistencia, en condiciones iniciales y de frontera, naturales. Sean $\underset{\sim}{u}_o = (u_{o_1}, u_{o_2}, u_{o_3})$, $\underset{\sim}{v}_o = (v_{o_1}, v_{o_2}, v_{o_3})$, $\hat{\underset{\sim}{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$, las condiciones iniciales en B, en desplazamiento y velocidad, y las condiciones de frontera prescritas sobre $\partial B_1 xJ$. Entonces, estas condiciones naturales de consistencia son:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll}
u_{o_1}(x) = \ddot{u}_1(x,0) = x_3\, u_{1,_3}(\underline{x},0,0)\,, & \\
u_{o_2}(x) = \ddot{u}_2(x,0) = x_3\, u_{2,_3}(\underline{x},0,0)\,, & \\
u_{o_3}(x) = \ddot{u}_3(x,0) = u_3\,(\underline{x},0,0)+x_3\, u_{3,_3}(\underline{x},0,0)+ & \\
\qquad + \tfrac{1}{2}\, x_3^2\, u_{3,_{33}}(\underline{x},0,0)\,, & \\
v_{o_1}(x) = \dot{u}_1(x,0) = x_3\, \dot{u}_{1,_3}(\underline{x},0,0)\,, & \\
v_{o_2}(x) = \dot{u}_2(x,0) = x_3\, \dot{u}_{2,_3}(\underline{x},0,0)\,, & \\
v_{o_3}(x) = \dot{u}_3(x,0) = \dot{u}_3\,(\underline{x},0,0)+x_3\, \dot{u}_{3,_3}(\underline{x},0,0)+ & \\
\qquad + \tfrac{1}{2}\, x_3^2\, \dot{u}_{3,_{33}}(\underline{x},0,0)\,, &
\end{array}\right\} x\varepsilon B \\
\left.\begin{array}{l}
\hat{u}_1(x,t) = u_1(x,t) = x_3\, \bar{u}_{1,_3}\,, \\
\hat{u}_2(x,t) = u_2(x,t) = x_3\, \bar{u}_{2,_3}\,, \\
\hat{u}_3(x,t) = u_3(x,t) = \bar{u}_3 + x_3\, \bar{u}_{3,_3} + \\
\qquad + \tfrac{1}{2}\, x_3^2\, \bar{u}_{3,_{33}}\,.
\end{array}\right\} (x,t)\in \partial B_1 \times J
\end{array}\right\} \quad (4.10)$$

<u>Observación 4.2</u>. En $x_3 = 0$ las condiciones iniciales y de frontera satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
u_{o_1}(x) = u_{o_2}(x) = v_{o_1}(x) = v_{o_2}(x) = 0\,, \\
u_{o_3}(x) = u_3(\underline{x},0,0), v_{o_3}(x) = \dot{u}_3(\underline{x},0,0),
\end{array}\right\} x=(\underline{x},0)\,\varepsilon B \\
\left.\begin{array}{l}
\hat{u}_1(x,t) = \hat{u}_2(x,t) = 0\,, \\
\hat{u}_3(x,t) = u_3(\underline{x},o,t).
\end{array}\right\} (x,t)\in \partial B_1 \times J
\end{array}\right\}$$

■

4.5 COMPONENTES DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO EN TERMINOS DE $\bar{u}_3$ Y SUS DERIVADAS.

Nuestro siguiente objetivo es expresar los componentes del vector desplazamiento, (u_1,u_2,u_3), en términos de la función $\bar{u}_3 = u_3(\underline{x},\ 0,\ t)$, $\underline{x}\varepsilon\Omega$, $t\varepsilon J$ y sus derivadas. La siguiente notación será usada con este fin.

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_1(\underline{x},t),\ \hat{S}_2 = \hat{S}_2(\underline{x},t),\ \hat{S}_3 = \hat{S}_3(\underline{x},t),\ (\underline{x},t)\,\varepsilon\,\Omega \times J,$$

$$\hat{S}^*_1 = \hat{S}^*_1(\underline{x},t),\ \hat{S}^*_2 = \hat{S}^*_2(\underline{x},t),\ \hat{S}^*_3 = \hat{S}^*_3(\underline{x},t),\ (\underline{x},t)\,\varepsilon\,\Omega \times J.$$

Primeramente observemos que, de acuerdo a la ecuación (4.8), se satisfacen las siguientes relaciones

$$\left.\begin{aligned}
\hat{S}_1 + \hat{S}^*_1 &= \frac{\beta h}{2(1+\nu)}\,\bar{u}_{3,31}\,,\\
\hat{S}_2 + \hat{S}^*_2 &= \frac{\beta h}{2(1+\nu)}\,\bar{u}_{3,32}\,,\\
\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1 &= \frac{\beta}{(1+\nu)}\,[\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,331}],\\
\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2 &= \frac{\beta}{(1+\nu)}\,[\bar{u}_{2,3} + \bar{u}_{3,2} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,332}],
\end{aligned}\right\} \quad (4.11)$$

lo cual nos permite, de acuerdo a las ecuaciones (4.2), obtener

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,t) &= -\,x_3\,[\bar{u}_{3,1} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,331}] + x_3\,\frac{(1+\nu)}{\beta}\,[\hat{S}_1-\hat{S}^*_1],\\
u_2(x,t) &= -\,x_3\,[\bar{u}_{3,2} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,332}] + x_3\,\frac{(1+\nu)}{\beta}\,[\hat{S}_2-\hat{S}^*_2].
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&x=(\underline{x},x_3)\,\varepsilon B\\ &t\varepsilon J\\ &(4.12)\end{aligned}$$

También de acuerdo a las ecuaciones (4.8) y (4.12), las relaciones

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} \; [\hat{S}_3 - \hat{S}^*_3] = \bar{u}_{3,3} \;, \\
&\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{h\beta(1-\nu)} \; [\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3] - \\
&- \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{1+\nu}{\beta} \; [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu} \; [\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \bar{u}_{3,3322})] = \bar{u}_{3,33} \;,
\end{aligned}\right\} (4.13)$$

son satisfechas. Sustituyendo la ecuación (4.13) en la tercera ecuación (4.2) se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[(1 + \frac{x_3}{h})\,\hat{S}_3 - \\
&- (1 - \frac{x_3}{h})\,\hat{S}^*_3] + \frac{x_3^2}{2}\,[\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \bar{u}_{3,3322})] - \\
&- \frac{\nu(1+\nu)}{\beta(1-\nu)}\,(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] .
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x=(\underline{x},x_3)\in B \\ &t \in J \\ &(4.14) \end{aligned}$$

<u>Observación 4.3.</u> Observemos que, de acuerdo a las ecuaciones (4.11) y (4.13), se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\hat{S}_1 + \hat{S}^*_1 = \frac{h}{4}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_{3,1} - \hat{S}^*_{3,1}] \,,$$

$$\hat{S}_2 + \hat{S}^*_2 = \frac{h}{4}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_{3,2} - \hat{S}^*_{3,2}] \,. \qquad \blacksquare$$

4.6 ECUACIONES DE CAMPO TRIDIMENSIONALES DE KIRCHHOFF COMO FUNCION DE $\bar{u}_3$.

Las ecuaciones (4.3) y (4.4) pueden ser expresadas, mediante las ecuaciones (4.12) y (4.14), en términos de la función $\bar{u}_3$ y sus derivadas. Las expresiones de los componentes del tensor de deformaciones son:

$$
\left.
\begin{aligned}
E_{11}(x,t) &= - x_3 \, [\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,3311}] + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}], \\
E_{22}(x,t) &= - x_3 \, [\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,3322}] + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}], \\
E_{33}(x,t) &= \bar{u}_{3,3} + x_3 \, \bar{u}_{3,33} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)} \, [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - \\
&\quad - (\tfrac{1}{2} - x_3/h) \, \hat{S}^*_3] - \\
&\quad - x_3 \frac{\nu}{1-\nu} \left[\frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] - \right. \\
&\quad \left. - [\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,3311} + \bar{u}_{3,3322})] \right], \\
E_{12}(x,t) &= - x_3 \, [\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,3312}] + \\
&\quad + \frac{x_3}{2} \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}],
\end{aligned}
\right\}
\quad (x,t) \in B \times J \qquad (4.15)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
E_{13}(x,t) &= \left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)\bar{u}_{3,331} + \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1] + \frac{x_3}{2}\,\bar{u}_{3,31} = \\
&= \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,\Big[\Big(x_3 + \frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{4}\Big)\hat{S}_{3,1} - \\
&- \Big(x_3 - \frac{x_3^2}{h} + \frac{h}{4}\Big)\hat{S}^*_{3,1}\Big] - \\
&- \left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)\frac{\nu}{1-\nu}\Big[\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21}] \\
&- [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33111} + \bar{u}_{3,33221})]\Big] + \\
&+ \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1], \\
E_{23}(x,t) &= \left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)\bar{u}_{3,332} + \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2] + \frac{x_3}{2}\,\bar{u}_{3,32} = \\
&= \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,\Big[\Big(x_3 + \frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{4}\Big)\hat{S}_{3,2} - \\
&- \Big(x_3 - \frac{x_3^2}{h} + \frac{h}{4}\Big)\hat{S}^*_{3,2}\Big] - \\
&- \left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)\frac{\nu}{1-\nu}\Big[\frac{1+\nu}{\beta}\,(\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{2,12} + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22}) \\
&- [\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112} + \bar{u}_{3,33222})]\Big] + \\
&+ \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2], \\
\operatorname{tr}\underset{\sim}{E}(x,t) &= \bar{u}_{3,3} + x_3\,\bar{u}_{3,33} - x_3[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \bar{u}_{3,3322})] + \\
&+ x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] = \\
&= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3] - \\
&- x_3\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\Big[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \bar{u}_{3,3322}) - \\
&- \frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}]\Big].
\end{aligned}\right\}
\tag{4.15}
$$

La ecuación (4.15) nos permite expresar los componentes del tensor de esfuerzos mediante las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= -x_3\, \beta/1-\nu^2 [\bar{u}_{3,11} + \nu \bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\, [\bar{u}_{3,3311} + \nu \bar{u}_{3,3322}]] + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu}\, [(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3 + \\
&+ x_3\, (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] + \frac{x_3}{1-\nu}\, [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}], \\
S_{22}(x,t) &= -\, x_3\, \beta/1-\nu^2\, [\bar{u}_{3,22} + \nu \bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8} [\bar{u}_{3,3322} + \nu \bar{u}_{3,3311}]] + \\
&+ \frac{\nu}{1-\nu}\, [(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3 + \\
&+ x_3\, (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] + \frac{x_3}{1-\nu}\, [\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}], \\
S_{33}(x,t) &= [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3], \\
S_{12}(x,t) &= -\, x_3\, \beta/1+\nu\, [\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312}] + \\
&+ x_3/2[\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}], \\
S_{13}(x,t) &= \tfrac{1}{4}\, \frac{1-2\nu}{1-\nu}[(x_3 + \frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{4})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h} + \frac{h}{4})\hat{S}^*_{3,1}] - \\
&- (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16})\, \frac{\nu}{1-\nu}\, [\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} - \\
&- \beta/1+\nu\, [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221} + \frac{h^2}{8}\, (\bar{u}_{3,33111} + \bar{u}_{3,33221})]] + \\
&+ \tfrac{1}{2}\, [\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1], \\
S_{23}(x,t) &= \tfrac{1}{4}\, \frac{1-2\nu}{1-\nu}\, [(x_3 + \frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{4})\hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h} + \frac{h}{4})\hat{S}^*_{3,2}] - \\
&- (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16})\, \frac{\nu}{1-\nu}\, [\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22} - \\
&- \beta/1+\nu[\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112} + \bar{u}_{3,33222})]] + \\
&+ \tfrac{1}{2}[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2],
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&(x,t)\\ &\in \partial B\times J\end{aligned} \qquad (4.16)$$

4.7 CONSISTENCIA DE LAS CARGAS DE CUERPO CON $\bar{u}_3$.

Las ecuaciones de consistencia, para las cargas de cuerpo, pueden ser expresadas, mediante (4.12), (4.14) en términos de la función $\bar{u}_3$ y sus derivadas. Estas son

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{o_1} = {} & x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{122}} + \frac{h^2}{8} [\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33122}}]] - \\
& - \tfrac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} [(1+2\,{}^{x_3}/h)\, \hat{S}_{3,_{1}} - (1-2\frac{x_3}{h})\, \hat{S}^*_{3,_{1}}] - \\
& - \frac{x_3}{2(1-\nu)} [\hat{S}_{2,_{21}} - \hat{S}^*_{2,_{21}} + (2-\nu)[\hat{S}_{1,_{11}} - \hat{S}^*_{1,_{11}}] + \\
& \qquad + (1-\nu)[\hat{S}_{1,_{22}} - \hat{S}^*_{1,_{22}}]] + \\
& \qquad + \rho_0 [-x_3 [\ddot{\bar{u}}_{3,_{1}} + \frac{h^2}{8} \ddot{\bar{u}}_{3,_{331}}] + \\
& \qquad + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\ddot{\hat{S}}_1 - \ddot{\hat{S}}^*_1]], \\
b_{o_2} = {} & x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,_{222}} + \bar{u}_{3,_{112}} + \frac{h^2}{8} [\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}}]] - \\
& - \frac{1}{4(1-\nu)} [(1+2\,{}^{x_3}/h)\, \hat{S}_{3,_{2}} - (1-2\,{}^{x_3}/h)\, \hat{S}^*_{3,_{2}}] - \\
& - \frac{x_3}{2(1-\nu)} [\hat{S}_{1,_{21}} - \hat{S}^*_{1,_{21}} + (2-\nu)[\hat{S}_{2,_{22}} - \hat{S}^*_{2,_{22}}] + \\
& + (1-\nu)[\hat{S}_{2,_{11}} - \hat{S}^*_{2,_{11}}]] + \\
& + \rho_0 [-x_3 [\ddot{\bar{u}}_{3,_{2}} + \frac{h^2}{8} \ddot{\bar{u}}_{3,_{332}}] + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\ddot{\hat{S}}_2 - \ddot{\hat{S}}^*_2],
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l} \text{en } B \times J \\ \\ (4.17) \end{array}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{o_3} = {} & - \tfrac{1}{4}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,[(x_3 + {x_3^2}/h - {h}/4)(\hat{S}_{3,_{11}} + \hat{S}_{3,_{22}}) - \\
& - (x_3 - {x_3^2}/h + {h}/4)(\hat{S}^*_{3,_{11}} + \hat{S}^*_{3,_{22}})] + \\
& + (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16})\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_{1,_{111}} - \hat{S}^*_{1,_{111}} + \hat{S}_{2,_{211}} - \\
& - \hat{S}^*_{2,_{211}} + \hat{S}_{1,_{122}} - \hat{S}^*_{1,_{122}} + \hat{S}_{2,_{222}} - \\
& - \hat{S}^*_{2,_{222}} - \frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,_{1111}} + 2\,\bar{u}_{3,_{2211}} + \bar{u}_{3,_{2222}} + \\
& + \frac{h^2}{8}\,[\bar{u}_{3,_{331111}} + 2\,\bar{u}_{3,_{331122}} + \bar{u}_{3,_{332222}}]]\Big] \\
& - \tfrac{1}{2}\,[\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1} + \hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2}] - \\
& - \frac{1}{h}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3] + \\
& + \rho_o\,[\ddot{\bar{u}}_3 + x_3\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[(1+\frac{x_3}{h})\,\ddot{\hat{S}}_3 - (1-\frac{x_3}{h})\,\ddot{\hat{S}}^*_3] + \\
& + \frac{x_3^2}{2}\,[\frac{\nu}{1-\nu}\,[\ddot{\bar{u}}_{3,_{11}} + \ddot{\bar{u}}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}\,(\ddot{\bar{u}}_{3,_{3311}} + \ddot{\bar{u}}_{3,_{3322}})] - \frac{\nu(1+\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[\ddot{\hat{S}}_{1,_1} - \\
& - \ddot{\hat{S}}^*_{1,_1} + \ddot{\hat{S}}_{2,_2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,_2}]]\Big] .
\end{aligned}
\right\} \quad (4.17
$$

4.8 CONSISTENCIA DE LAS TRACCIONES DE SUPERFICIE CON $\bar{u}_3$.

Las ecuaciones de consistencia para las tracciones de superficie, sobre la frontera ∂B_2, en términos de la función $\bar{u}_3$ y sus derivadas, segun (4.12) y (4.14) son:

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{g}_1(x,t) = {} & [-x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} [\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8} [\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}]] + \\
& + \frac{\nu}{1-\nu} [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3 + \\
& + x_3 [\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}]] + \frac{x_3}{1-\nu} [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}_{1,1}]]n_1 + \\
& + [-x_3\, \beta/1+\nu\, [\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\, \bar{u}_{3,3312}] + \\
& + \frac{x_3}{2} [\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}_{2,1}]]n_2 , \\
\hat{g}_2(x,t) = {} & [-x_3 \frac{\beta}{1+\nu} [\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\, \bar{u}_{3,3312}] + \\
& + \frac{x_3}{2} [\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}]]n_1 + \\
& + [-x_3\, \beta/1-\nu^2 [\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8} [\bar{u}_{3,3322} + \nu\bar{u}_{3,3311}]] + \\
& + \frac{\nu}{1-\nu} [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3 + \\
& + x_3 [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \frac{x_3}{1-\nu} [S_{2,2}\ \hat{S}^*_{2,2}]]n_2 , \\
\hat{g}_3(x,t) = {} & [\tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h} - h/4)\hat{S}_{3,1} - (x_3 - x_3^2/h + h/4)\hat{S}^*_{3,1}] - \\
& - (x_3^2/4 - h^2/16) \frac{\nu}{1-\nu} [\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} - \\
& - \beta/1+\nu\, [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221} + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,3111} + \bar{u}_{3,3221})]] \\
& + \tfrac{1}{2} (\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1)]\, n_1 + \\
& + [\tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + x_3^2/h - h/4)\hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h} + \frac{h}{4})\hat{S}^*_{3,2}] - \\
& - (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}) \frac{\nu}{1-\nu} [\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22} - \\
& - \beta/1+\nu\, [\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222} + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,33112} + \bar{u}_{3,33222})]] + \\
& + \tfrac{1}{2} (\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2)]n_2 .
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} & (x,t)\in \\ & \partial B_2 x J \end{aligned} \quad (4.18)
$$

4.9 CONSISTENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA EN TERMINOS DE $\bar{u}_3$.

Las condiciones de consistencia de condiciones iniciales y de frontera, en términos de (4.12) y (4.14), quedan determinadas por

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{o_1}(x) &= - x_3\,[u_{3,1}(\underline{x},0,0)+ \frac{h^2}{8} u_{3,331}(\underline{x},0,0)] + \\
&\quad + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_1(\underline{x},0)- \hat{S}^*_1(\underline{x},0,)],\\
u_{o_2}(x) &= - x_3\,[u_{3,2}(\underline{x},0,0)+ \frac{h^2}{8} u_{3,332}(\underline{x},0,0)] + \\
&\quad + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_2(\underline{x},0)- \hat{S}^*_2\,(\underline{x},0)],\\
u_{o_3}(x) &= u_3\,(\underline{x},0,0)+ \frac{x_3}{2}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(1+\frac{x_3}{h})\hat{S}_3(\underline{x},0)\\
&\quad - (1-x_3/h)\hat{S}^*_3(\underline{x},0)] - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\frac{1+\nu}{\beta}(\hat{S}_{1,1}(\underline{x},0)-\hat{S}^*_{1,1}(x,0)+\hat{S}_{2,2}(\underline{x},0)-\hat{S}^*_{2,2}(\underline{x},0))- \\
&\quad - [\bar{u}_{3,11}(\underline{x},0,0)+ u_{3,22}(\underline{x},0,0)+ h^2/8(u_{3,3311}(\underline{x},0,0)+ \\
&\quad + u_{3,3322}(\underline{x},0,0))]],\\
v_{o_1}(x) &= - x_3\,[\dot{u}_{3,1}(\underline{x},0,0)+ \frac{h^2}{8}\dot{u}_{3,331}(\underline{x},0,0)] + \\
&\quad + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\dot{\hat{S}}_1(\underline{x},0)- \dot{\hat{S}}^*_1(\underline{x},0)],\\
v_{o_2}(x) &= - x_3\,[\dot{u}_{3,2}(\underline{x},0,0)+ \frac{h^2}{8}\dot{u}_{3,332}(\underline{x},0,0)] + \\
&\quad + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\dot{\hat{S}}_2(\underline{x},0)- \dot{\hat{S}}^*_2(\underline{x},0)],\\
v_{o_3}(x) &= \dot{u}_3\,(\underline{x},0,0)+ \frac{x_3}{2}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}[(1+\frac{x_3}{h})\dot{\hat{S}}_3(\underline{x},0)- \\
&\quad - (1- x_3/h)\dot{\hat{S}}^*_3(\underline{x},0)] - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\frac{1+\nu}{\beta}(\dot{\hat{S}}_{1,1}(\underline{x},0)- \dot{\hat{S}}^*_{1,1}(\underline{x},0)+\dot{\hat{S}}_{2,2}(\underline{x},0)-\dot{\hat{S}}^*_{2,2}(\underline{x},0))- \\
&\quad - [\dot{u}_{3,11}(\underline{x},0,0)+\dot{u}_{3,22}(\underline{x},0,0)+ \frac{h^2}{8}(\dot{u}_{3,3311}(\underline{x},0,0)+ \\
&\quad + \dot{u}_{3,3322}(\underline{x},0,0)]],
\end{aligned}
\right\}\; x \varepsilon B \qquad (4.19)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{u}_1(x,t) &= - x_3\,[\bar{u}_{3,1}+ \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,331}]+ x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_1- \hat{S}^*_1],\\
\hat{u}_2(x,t) &= - x_3\,[\bar{u}_{3,2}+ \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,332}]+ x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_2- \hat{S}^*_2],
\end{aligned}
\right\}\; (x,t)\,\varepsilon\,\partial B_1 x J
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{u}_3(x,t) = {} & \bar{u}_3 + x_3\,\bar{u}_{3,_3} + \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\bar{u}_{3,_{33}} = \bar{u}_3 + \\
& + \frac{x_3}{2}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(1+x_3/h)\hat{S}_3 - (1-\frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3] - \\
& - \tfrac{1}{2}\,x_3^2\,\frac{\nu}{1-\nu}[\frac{1+\nu}{\beta}\,(\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1} + \hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2}) - \\
& - [\bar{u}_{3,_{11}} + \bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,_{3311}} + \\
& + \bar{u}_{3,_{3322}})]] .
\end{aligned}\right\}\quad (4.20)
$$

<u>Observación 4.4.</u> De acuerdo a la observación (4.1) y a las ecuaciones (4.11), (4.13), los componentes del vector de tracciones preescritas $\underset{\sim}{g}$, sobre ∂B_2 con $x_3 = 0$, satisfacen:

$$
\hat{g}_1(\underset{\sim}{x},0,t) = \frac{\nu(1+\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[\hat{S}_3 - \hat{S}^*_3]n_1,
$$

$$
\hat{g}_2(\underset{\sim}{x},0,t) = \frac{\nu(1+\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[\hat{S}_3 - \hat{S}^*_3]n_2,
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}_3(\underset{\sim}{x},0,t) = {} & [-\frac{\beta h^2}{16(1+\nu)}\,\bar{u}_{3,_{331}} + \tfrac{1}{2}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1]]n_1 + \\
& + \left[-\frac{\beta h^2}{16(1+\nu)}\,\bar{u}_{3,_{332}} + [\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2]\right]n_2 .
\end{aligned}
$$

■

4.10 ECUACIONES DE EQUILIBRIO: METODO DE LA ELASTODINAMICA APLICADA.

Nuestro objetivo, en esta parte, es construir, mediante el método de la elastodinámica aplicada, las ecuaciones de equilibrio locales, del cuerpo tridimensional de Kirchhoff en estudio. Consideremos una parte B_1 de B de frontera $\partial B_1 = \partial S_1 \cup \partial S_2 \cup \partial S_3$. Esto es

$$\bar{B}_1 = \{p = (x_1,x_2,x_3) \varepsilon \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \varepsilon \Omega_1, -\tfrac{1}{2} h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq \tfrac{1}{2} h(x_1,x_2)\},$$

donde, Ω_1 es un subconjunto de Ω de frontera $\partial\Omega_1$, y

$$\partial S_1 = \{(x_1,x_2, \tfrac{1}{2} h(x_1, x_2)) : (x_1,x_2) \varepsilon \Omega_1\},$$

$$\partial S_2 = \{(x_1,x_2, -\tfrac{1}{2} h(x_1,x_2)) : (x_1,x_2) \varepsilon \Omega_1\},$$

$$\partial S_3 = \{(x_1,x_2,x_3) : -\tfrac{1}{2} h(x_1,x_2) < x_3 < \tfrac{1}{2} h(x_1,x_2), (x_1,x_2) \varepsilon\, \partial\Omega_1\}.$$

Supondremos que B_1 satisface la hipótesis H1. Por tanto, sus ecuaciones de campo, de consistencia de cargas de cuerpo, tracciones de superficie, condiciones iniciales y de frontera están dadas por (4.15) - (4.20). Para lograr nuestro objetivo aplicaremos a B_1 los principios de balance del momentum lineal y angular de un medio contínuo [15], cuyas expresiones son:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{B_1} \underline{b}_0 dx + \int_{\partial B_1} \underline{S}\, dx = \int_{B_1} \rho_0\, \underline{\ddot{u}}\, dx,\\[2ex]&\int_{B_1} \underline{p} \times \underline{b}_0 dx + \int_{\partial B_1} \underline{p} \times \underline{S}\, dx = \int_{B_1} \underline{p} \times \rho_0 \underline{\ddot{u}}\, dx.\end{aligned}\right\}\quad \text{en } B_1 \times J, \quad (4.21)$$

Las integrales sobre la frontera ∂B_1 están dadas por:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\partial B_1} \underline{S}\, dx = \int_{\partial S_1} \underline{\hat{S}}\, dx + \int_{\partial S_2} \underline{\hat{S}}^*\, dx + \int_{\partial S_3} \underline{g}\, dx =\\
&\qquad = \int_{\Omega_1} \underline{\hat{S}}\, dx + \int_{\Omega_1} \underline{\hat{S}}^*\, dx + \int_{\partial S_3} \underline{g}\, dx ,\\
&\int_{\partial B_1} (\underline{p} \times \underline{S})_i\, dx = \int_{\partial B_1} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, S_k\, dx = \int_{\partial S_1} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \hat{S}_k\, dx +\\
&\qquad + \int_{\partial S_2} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \hat{S}^*_k\, dx + \int_{\partial S_3} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, g_k\, dx =\\
&\qquad = \int_{\Omega_1} (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha + \varepsilon_{i3k} h/2) \hat{S}_k\, dx +\\
&\qquad + \int_{\Omega_1} (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha - \varepsilon_{i3k} h/2) \hat{S}^*_k\, dx +\\
&\qquad + \int_{\partial S_3} (\varepsilon_{i\alpha k} x_\alpha + \varepsilon_{i3k} x_3) g_k\, dx =\\
&\qquad = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha (\hat{S}_k + \hat{S}^*_k)\, dx + \frac{h}{2} \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i3k} (\hat{S}_k - \hat{S}^*_k) dx +\\
&\qquad + \int_{\partial S_3} (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha + \varepsilon_{i3k}\, x_3) g_k\, dx. \qquad i,j,k = 1,2,3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha = 1,2.
\end{aligned}\right\}\quad \text{sobre } \partial B_1 x J \quad (4.22)$$

Las integrales en el interior del cuerpo B_1 pueden también ser expresadas como:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{B_1} (\underline{p} \times \underline{b}_0)_i \, dx = \int_{B_1} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, b_{0_k} dx = \int_{B_1} (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha + \varepsilon_{i3k}\, x_3) b_{0_k}\, dx = \\
&\qquad = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, b^*_{0_k} dx + \int_{B_1} \varepsilon_{i3k}\, x_3\, b_{0_k}\, dx, \\
&\int_{B_1} (\underline{p} \times \rho_0\, \underline{\ddot{u}})_i dx = \int_{B_1} \rho_0\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \ddot{u}_k\, dx = \\
&\qquad = \int_{B_1} \rho_0\, (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha + \varepsilon_{i3k}\, x_3) \ddot{u}_k\, dx = \\
&\qquad = \int_{\Omega_1} \rho_0\, \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, \ddot{u}^*_k\, dx + \int_{B_1} \rho_0\, \varepsilon_{i3k}\, x_3\, \ddot{u}_k\, dx. \\
&\text{Aquí} \\
&\qquad b^*_{0_k} = \int_{-h/2}^{h/2} b_{0_k}\, dx_3, \\
&\qquad \ddot{u}^*_k = \int_{-h/2}^{h/2} \ddot{u}_k\, dx_3\, .
\end{aligned}\right\} \text{en } B_1 x J \quad (4.23)$$

Al tomar en cuenta (4.22), (4.23) y que $\underline{g} = \underset{\sim}{S}\, \underline{n}$ sobre $\partial S_3 x J$, los principios de balance (4.21), en componentes, están dados por las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} (b^*_{0_i} + \hat{S}_i + \hat{S}^*_i) dx + \int_{\partial\Omega_1} S^*_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx = \int_{\Omega_1} \rho_0\, \ddot{u}^*_i\, dx, \\
&\int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha (b^*_{0_k} + \hat{S}_k + \hat{S}^*_k) dx + \int_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, S^*_{k\beta} n_\beta\, dx + \\
&\qquad + \int_{\Omega_1} m_i\, dx + \int_{\partial\Omega_1} M_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, \rho_0\, \ddot{u}^*_k\, dx.
\end{aligned}\right\} \text{en } \bar{\Omega}_1 x J \quad (4.24)$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} S^*_{i_\alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{i_\alpha}\, dx_3, \\ m_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k}\, x_3\, (b_{0_k} - \rho_0\, \ddot{u}_k) dx_3 + \frac{h}{2}\, \varepsilon_{i3k}(\hat{S}_k - \hat{S}^*_k), \\ M_{i\alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k} x_3\, S_{k\alpha}\, dx_3. \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia en (4.24) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} (b^*_{0_i} + \hat{S}_i + \hat{S}^*_i + S^*_{i_{\alpha,\alpha}} - \rho_0\, \ddot{u}^*_i)\, dx = 0, \\ &\int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha (b^*_{0_k} + \hat{S}_k + \hat{S}^*_k - \rho_0\, \ddot{u}^*_k) dx + \int_{\Omega_1} (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, S^*_{k\beta})_{,\beta}\, dx + \\ &\quad + \int_{\Omega_1} (m_i + M_{i\alpha,\alpha})\, dx = 0. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i,k = 1,2,3 \\ &\alpha,\beta = 1,2 \\ &(4.26) \end{aligned}$$

Puesto que $(4.26)_1$ es válida para cualquier subregión Ω_1, aplicando el teorema de localización, se obtiene:

$$b^*_{0_i} + \hat{S}_i + \hat{S}^*_i + S^*_{i\alpha,\alpha} = \rho_0\, \ddot{u}^*_i, \text{ en } \Omega \times J, \qquad (4.27)$$
$$i=1,2,3,\ \alpha=1,2.$$

Al sustituir (4.27) en la segunda ecuación (4.26) se obtiene:

$$\varepsilon_{i\alpha k}\, S^*_{k\alpha} + m_i + M_{i\alpha,\alpha} = 0, \text{ en } \Omega \times J, \qquad (4.28)$$

$$i,k=1,2,3 \quad \alpha=1,2.$$

Si i = 3, en (4.28), $m_3 = M_{3\alpha,\alpha} = 0$. Entonces,

$$\varepsilon_{3\alpha k}\, S^*_{k\alpha} = 0, \quad \alpha,k = 1,2. \qquad (4.29)$$

Obsérvese que (4.29) implica que $S^*_{12} = S^*_{21}$, en $\Omega \times J$.

Si i = 1,2, en (4.28) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} S^*_{32} + m_1 + M_{1\alpha,\alpha} &= 0 \text{ , en } \Omega \times J, \\ -S^*_{31} + m_2 + M_{2\alpha,\alpha} &= 0 \text{ , en } \Omega \times J. \end{aligned}\right\} \alpha = 1,2 \qquad (4.30)$$

Obsérvese que la tercera ecuación de equilibrio (4.27) es

$$b^*_{0_3} + \hat{S}_3 + \hat{S}^*_3 + S^*_{3\alpha,\alpha} = \rho_0\, \ddot{u}^*_3, \text{ en } \Omega \times J, \ \alpha = 1,2 \qquad (4.31)$$

Además de (4.30) se tiene que

$$S^*_{3\beta,\beta} = m_{2,1} + M_{2\alpha,\alpha 1} - m_{1,2} - M_{1\alpha,\alpha 2}, \text{ en } \Omega x J,\ \alpha,\beta=1,2. \quad (4.32)$$

De (4.31) y (4.32) se obtiene:

$$M_{2\alpha,\alpha 1} - M_{1\alpha,\alpha 2} - m_{1,2} + m_{2,1} + b^*_{0_3} + \hat{S}_3 + \hat{S}^*_3 = \rho_0\, \ddot{u}^*_3, \qquad (4.33)$$

$$\text{en } \Omega \times J,\ \alpha = 1,2.$$

La forma explícita de las ecuaciones (4.27) y (4.33) son:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{h\nu}{2(1-\nu)}[\hat{S}_{3,1} - \hat{S}^*_{3,1}] + \hat{S}_1 + \hat{S}^*_1 + b^*_{0_1} = 0\,, \\
&\frac{h\nu}{2(1-\nu)}[\hat{S}_{3,2} - \hat{S}^*_{3,2}] + \hat{S}_2 + \hat{S}^*_2 + b^*_{0_2} = 0\,, \\
&-\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}[\bar{u}_{3,1111} + 2\bar{u}_{3,1212} + \bar{u}_{3,2222} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,331111} + 2\bar{u}_{3,331212} + \bar{u}_{3,332222})]+ \\
&+\frac{h^3}{12}\frac{1}{1-\nu}[\hat{S}_{1,122} - \hat{S}^*_{1,122} + \hat{S}_{2,121} - \hat{S}^*_{2,121} + \hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222} + \hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111}] \\
&+\frac{h^2}{12}\frac{\nu}{1-\nu}[\hat{S}_{3,11} + \hat{S}^*_{3,11} + \hat{S}_{3,22} + \hat{S}^*_{3,22}] + m_{2,1} - m_{1,2} + S_3 + S^*_3 + b^*_{0_3} = \rho_0\,[h\ddot{\bar{u}}_3 + \\
&+\frac{h^2}{24}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}[\ddot{\hat{S}}_3 + \ddot{\hat{S}}^*_3] + \frac{h^3}{24}\frac{\nu}{1-\nu}[\ddot{\bar{u}}_{3,11} + \ddot{\bar{u}}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\ddot{\bar{u}}_{3,3311} + \ddot{\bar{u}}_{3,3322}) - \\
&-\frac{1+\nu}{\beta}(\ddot{\hat{S}}_{1,1} - \ddot{\hat{S}}^*_{1,1} + \ddot{\hat{S}}_{2,2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,2})]].
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{c}\text{en } \Omega \times J \\ \\ (4.34)\end{array}
$$

Observación 4.5. El término $\underline{g} = \underset{\sim}{S}\,\underline{n}$ sobre $\partial S_3 x J$, representa la fuerza por unidad de área ejercida, a través de $\partial S_3 x J$, sobre B_1 por la parte $B - B_1$. Por tanto, el término

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_1} {}^*S_i\, dx \equiv \int_{\partial\Omega_1} S^*_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx = \int_{\partial\Omega_1} \int_{-h/2}^{h/2} S_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx_3\, dx = \\
= \int_{\partial S_3} S_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx = \int_{\partial S_3} g_i\, dx,
\end{aligned}
\qquad (4.35)
$$

$i=1,2,3, \;;\; \alpha=1,2.$

representa la componente i-ésima de la fuerza resultante ejercida sobre B_1, a través de $\partial S_3 xJ$, por la parte $B - B_1$. Asimismo

$$*S_i \equiv S^*_{i\alpha}\, n_\alpha = (\underset{\sim}{S}^*\, \underline{n})_i \ , \text{ sobre } \partial S_3 xJ, \tag{4.36}$$

representa la i-ésima componente de la fuerza por unidad de longitud ejercida, a través de $\partial S_3 xJ$, sobre B_1 por $B - B_1$.

■

Observación 4.6. El término $\underline{p} \times \underline{S}$ sobre $\partial B_1 xJ$ nos representa el vector momento, con respecto a un punto fijo, producido por la tracción de superficie $\underline{S}$. En forma explícita está dado por

$$\underline{M} = \underline{p} \times \underline{S} = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, S_k\, \underline{e}_i = (\varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, S_k + \varepsilon_{i3k}\, x_3\, S_k)\, \underline{e}_i, \tag{4.37}$$

$$i,j,k = 1,2,3 \ ; \quad \alpha = 1,2.$$

Por lo tanto, los componentes del vector $\underline{M}$ están dados por

$$M_i = G_i + H_i = \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha S_k + \varepsilon_{i3k}\, x_3\, S_k, \text{ sobre } \partial B_1 xJ. \tag{4.38}$$

La forma explícita de estos componentes son:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= x_2\, S_3 - x_3\, S_2, \\ M_2 &= -x_1\, S_3 + x_3\, S_1, \\ M_3 &= x_1\, S_2 - x_2\, S_1. \end{aligned}\right\} \text{ sobre } \partial B_1 xJ \quad (4.39)$$

Obsérvese que el término

$$H_i = \varepsilon_{i3k}\; x_3\; S_k \;, \text{ sobre } \partial B_1 x J, \tag{4.40}$$

representa el componente i-ésimo del momento producido por la componente S_k, $k = 1,2,3$ de la tracción de superficie $\underline{S}$. El componente S_k de $\underline{S}$ puede ser escrito como $S_k = S_{k\alpha}\, n_\alpha$, $k = 1,2,3$; $\alpha = 1,2$, por tanto,

$$H_i = \varepsilon_{i3k}\; x_3\; S_{k\alpha}\; n_\alpha \;, \text{ sobre } \partial B_1 x J, \quad i=1,2,3. \tag{4.41}$$

Al integrar (4.40) obtenemos

$$*H_i = \int_{-h/2}^{h/2} H_i \; dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k}\; x_3\; S_{k\alpha}\; n_\alpha\; dx_3 = M_{i\alpha}\; n_\alpha. \tag{4.42}$$

Además de acuerdo a (4.22), se tiene que, para $i,k = 1,2,3$; $\alpha, \beta = 1,2$,

$$\left.\begin{aligned} \int_{\partial B_1} M_i\, dx &= \int_{\partial B_1} (\underline{p} \times \underline{S})_i\, dx = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha (\hat{S}_k + \hat{S}^*_k)\, dx + \\ &+ \int_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, \hat{g}^*_k\, dx + \int_{\partial\Omega_1} M_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx + \frac{h}{2}\int_{\Omega_1} \varepsilon_{i3k} (\hat{S}_k - \hat{S}^*_k)\, dx = \\ &= \int_{\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, (\hat{S}_k + \hat{S}^*_k)\, dx + \int_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{i\alpha k}\, x_\alpha\, S^*_{k\beta}\, n_\beta\, dx + \\ &+ \frac{h}{2}\int_{\Omega_1} \varepsilon_{i3k} (\hat{S}_k - \hat{S}^*_k)\, dx + \int_{\partial\Omega_1} M_{i\alpha}\, n_\alpha\, dx. \quad \blacksquare \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

4.11 ELEMENTOS MECANICOS.

El objetivo de esta parte es presentar los elementos mecánicos, en el contexto de la Resistencia de Materiales, que actuan sobre el cuerpo B_1, a través de la frontera $\partial S_3 xJ$. Para esto utilizaremos las ecuaciones (4.36) y (4.42), esto es

$$\left.\begin{aligned} {}^*S_i &= S^*_{i\alpha}\, n_\alpha, \\ {}^*H_i &= M_{i\alpha}\, n_\alpha. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1,2,3, \\ \alpha &= 1,2. \end{aligned} \quad \text{sobre } \partial S_3 xJ. \qquad (4.44)$$

La forma explícita de estas ecuaciones, según (4.16) y (4.25), es

$$\left.\begin{aligned}
{}^*\hat{S}_1 &= \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h}{2}\,[\hat{S}_3-\hat{S}^*_3]\,n_1, \\
{}^*\hat{S}_2 &= \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h}{2}\,[\hat{S}_3-\hat{S}^*_3]\,n_2, \\
{}^*S_3 &= [-\frac{h^2}{24}\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\hat{S}_{3,1}+\hat{S}^*_{3,1})+\frac{h^3}{24}\frac{\nu}{1-\nu}[\hat{S}_{1,11}-\hat{S}^*_{1,11}+\hat{S}_{2,21}-\hat{S}^*_{2,21} - \\
&\quad -\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,111}+\bar{u}_{3,221}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33111}+\bar{u}_{3,33221}))]+\frac{h}{2}(S_1-S^*_1)]n_1 + \\
&\quad +[-\frac{h^2}{24}\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\hat{S}_{3,2}+\hat{S}^*_{3,2})+\frac{h^3}{24}\frac{\nu}{1-\nu}[\hat{S}_{1,12}-\hat{S}^*_{1,12}+\hat{S}_{2,22}-\hat{S}^*_{2,22} - \\
&\quad -\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,112}+\bar{u}_{3,222}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112}+\bar{u}_{3,33222}))] + \\
&\quad +\frac{h}{2}[\hat{S}_2-\hat{S}^*_2]]n_2.
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{sobre} \\ &\partial S_3 xJ \\ &(4.45) \end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{*}H_1 &= [\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}) - \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,_2} - \hat{S}^*_{1,_2} + \hat{S}_{2,_1} - \hat{S}^*_{2,_1})]n_1 + \\
&\quad + [\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}(\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3322}} + \nu\bar{u}_{3,_{3311}})) - \\
&\quad - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}[\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3 + h(\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1})] - \frac{h^3}{12(1-\nu)}(\hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2})]n_2, \\
{}^{*}H_2 &= [-\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}(\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu\bar{u}_{3,_{3322}})) + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}[(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) + h(\hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2})] + \frac{h^3}{12(1-\nu)}(\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1})]n_1 + \\
&\quad + [-\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}) + \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,_2} - \hat{S}^*_{1,_2} + \hat{S}_{2,_1} - \hat{S}^*_{2,_1})]n_2, \\
{}^{*}H_3 &= 0.
\end{aligned}
\right\}
\text{ sobre } \partial S_3 \times J
\qquad (4.46)
$$

En términos de (4.44) podemos definir los vectores $*\underline{S} = (*S_1, *S_2, *S_3)$, $*\underline{H} = (*H_1, *H_2, 0)$, cuyas componentes, normales y tangenciales, están dados por

$$\left.\begin{aligned} *\underline{S}_{\underline{n}} &= (*\underline{S}\cdot\underline{n})\underline{n} = (\underset{\sim}{S}*\underline{n}\cdot\underline{n})\underline{n}, \\ *\underline{S}_{\underline{\tau}} &= *\underline{S} - *\underline{S}_{\underline{n}} = \underset{\sim}{S}*\underline{n} - (\underset{\sim}{S}*\underline{n}\cdot\underline{n})\underline{n}, \\ *\underline{H}_{\underline{n}} &= (*\underline{H}\cdot\underline{n})\underline{n}, \\ *\underline{H}_{\underline{\tau}} &= *\underline{H} - *\underline{H}_{\underline{n}}. \end{aligned}\right\} \text{ sobre } \partial S_3 x J \quad (4.47)$$

Al tomar en cuenta las ecuaciones (4.45) se puede expresar en forma explícita las componentes cartesianas de los vectores $*\underline{S}_{\underline{n}}, *\underline{S}_{\underline{\tau}}, *\underline{H}_{\underline{n}}, *\underline{H}_{\underline{\tau}}$. Estas satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} (*\underline{S}_{\underline{n}})_1 &= \frac{h}{2}\frac{\nu}{1-\nu}(\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*)n_1, \\ (*\underline{S}_{\underline{n}})_2 &= \frac{h}{2}\frac{\nu}{1-\nu}(\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*)n_2, \\ (*\underline{S}_{\underline{n}})_3 &= 0, \\ (*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 &= (*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = 0, \end{aligned}\right| \text{ Sobre } \partial S_3 x J \quad (4.48)$$

$$(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 = -\frac{h^2}{24}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[(\hat{S}_{3,1}+\hat{S}^*_{3,1})n_1 + (\hat{S}_{3,2}+\hat{S}^*_{3,2})n_2 +$$

$$+\frac{h^3}{24}\frac{\nu}{1-\nu}[(\hat{S}_{1,11}-\hat{S}^*_{1,11}+\hat{S}_{2,21}-\hat{S}^*_{2,21} -$$

$$-\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,111}+\bar{u}_{3,221}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33111}+\bar{u}_{3,33221}))])n_1 +$$

$$+(\hat{S}_{1,12}-\hat{S}^*_{1,12}+\hat{S}_{2,22}-\hat{S}^*_{2,22}-\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,112}+\bar{u}_{3,222} +$$

$$+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,33112}+\bar{u}_{3,33222}))])n_2] +$$

$$+\frac{h}{2}[(\hat{S}_1-\hat{S}^*_1)n_1 + (\hat{S}_2-\hat{S}^*_2)n_2],$$

$$(^*\underline{H}_{\underline{n}})_1 = [\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,12}+\frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312})-\frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2}-\hat{S}^*_{1,2}+\hat{S}_{2,1}-\hat{S}^*_{2,1})](n_1^2-n_2^2)n_1 +$$

$$+\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}[(\bar{u}_{3,22}+\nu\,\bar{u}_{3,11}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322}+\nu\,\bar{u}_{3,3311})) -$$

$$-(\bar{u}_{3,11}+\nu\,\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\nu\,\bar{u}_{3,3322}))]n_1^2\,n_2 +$$

$$+\frac{h^3}{12}[\hat{S}_{1,1}-\hat{S}^*_{1,1}-\hat{S}_{2,2}+\hat{S}^*_{2,2}]n_1^2\,n_2,$$

$$(^*\underline{H}_{\underline{n}})_2 = [\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,12}+\frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312})-\frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2}-\hat{S}^*_{1,2}+\hat{S}_{2,1}-\hat{S}^*_{2,1})](n_1^2-n_2^2)n_2 +$$

$$+\frac{h^3}{24}\frac{\beta}{1-\nu^2}[(\bar{u}_{3,22}+\nu\,\bar{u}_{3,11}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322}+\nu\,\bar{u}_{3,3311})) -$$

$$-(\bar{u}_{3,11}+\nu\bar{u}_{3,22}+\frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}+\nu\,\bar{u}_{3,3322}))]n_1\,n_2^2 +$$

$$+\frac{h^3}{12}[\hat{S}_{1,1}-\hat{S}^*_{1,1}-\hat{S}_{2,2}+\hat{S}^*_{2,2}]\,n_1\,n_2^2,$$

$$(*\underline{H}_\tau)_1 = \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312} - \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})](n_1 - n_1^3 + n_1 n_2^2) +$$

$$+ \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}[(\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322} + \nu\,\bar{u}_{3,3311}))(n_2 - n_1^2 n_2) +$$

$$+ (\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \nu\,\bar{u}_{3,3322}))n_1^2\, n_2] -$$

$$- [\frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}[\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3 + h(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] + \frac{h^3}{12(1-\nu)}(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})]n_2 -$$

$$- \frac{h^3}{12}[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} - \hat{S}_{2,2} + \hat{S}^*_{2,2}]\, n_1^2\, n_2,$$

$$(*\underline{H}_\tau)_2 = -\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}[(\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \nu\,\bar{u}_{3,3322}))(n_1 - n_1 n_2^2) +$$

$$+ (\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322} + \nu\,\bar{u}_{3,3311}))n_1 n_2^2] +$$

$$+ [\frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}[(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) + h(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] +$$

$$+ \frac{h^3}{12(1-\nu)}(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})]n_1 + [-\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312}) +$$

$$+ \frac{h^3}{24}[\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}](n_2 + n_1^2\, n_2 - n_2^3) -$$

$$- \frac{h^3}{12}[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} - \hat{S}_{2,2} + \hat{S}^*_{2,2}]\, n_1 n_2^2,$$

$$(*\underline{H}_n)_3 = (*\underline{H}_\tau)_3 = 0.$$

Observación 4.5. De acuerdo a (4.47) se observa que

$$*\underline{H}_n = *H_n\,\underline{n} = (*\underline{H}\cdot\underline{n})\underline{n}, \text{ sobre } \partial S_3 x J. \qquad (4.49)$$

El término $*H_n = *\underline{H}\cdot\underline{n}$, según (4.48) está dado por la ecuación siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
{}^{*}H_{\underline{n}} = {} & \Big[\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312}) - \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})\Big](n_1^2 - n_2^2) + \\
& + \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}\Big[(\bar{u}_{3,22} + \nu\,\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322} + \nu\,\bar{u}_{3,3311})) - \\
& - (\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \nu\,\bar{u}_{3,3322}))\Big]n_1n_2 \\
& + \frac{h^3}{12(1+\nu)}\Big[(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} - \hat{S}_{2,2} + \hat{S}^*_{2,2})\Big]n_1n_2 .
\end{aligned}\right| \quad \begin{matrix}\text{sobre}\\ \partial S_3 x J\\ (4.50)\end{matrix}$$

El vector ${}^{*}\underline{H}_{\tau}$ puede también determinarse de la relación

$$ {}^{*}\underline{H}_{\tau} = {}^{*}H_{\tau}\,\underline{\tau} = ({}^{*}\underline{H}\cdot\underline{\tau})\,\underline{\tau}, \text{ sobre } \partial S_3 xJ, \qquad (4.51)$$

con $\underline{\tau} = -n_2\,\underline{e}_1 + n_1\,\underline{e}_2$, y

$$\left.\begin{aligned}
{}^{*}H_{\underline{\tau}} = {} & \Big[-\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,3312}) + \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})\Big]2n_1n_2 - \\
& - \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1-\nu^2}\Big[(\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3322} + \nu\,\bar{u}_{3,3311}))n_2^2 + \\
& + (\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}))n_1^2\Big] + \\
& + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}\Big[(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) + h\{(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})n_2^2 + (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})n_1^2\}\Big] + \\
& + \frac{h^3}{12(1-\nu)}\Big[(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})n_2^2 + (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})n_1^2\Big]. \quad \blacksquare
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}\text{sobre}\\ \partial S_3 x J\\ (4.52)\end{matrix}$$

Observación 4.5 Obsérvese que las dos primeras ecuaciones de equilibrio en (4.34) nos relacionan las cargas de cuerpo con las cargas de superficie y la tercera es la ecuación de equilibrio dinámico de momentos y fuerzas verticales. Los términos $*\hat{S}_1$, $*\hat{S}_2$, $*\hat{S}_3$ son llamados, en el marco de la Resistencia de Materiales, tracciones normales y tracción de cortante, y $*H_{\underline{n}}$, $*H_{\underline{\tau}}$, momento torsionante y momento flexionante, respectivamente. ■

Observación 4.6 La hipótesis H1 y el método de la elastodinámica aplicada nos permiten expresar la ecuación de equilibrio dinámico, ecuación (4.34), en función de una única incógnita, $\bar{u}_3 = u_3(x_1,x_2,0,t)$, $(x_1, x_2)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$. En este sentido puede decirse que el problema ha sido bidimensionalizado. Este método es conocido como método de Kantarovich [21]. ■

4.12 MODELO DE KIRCHHOFF CON TRACCIONES NULAS

El objetivo de esta parte es, bajo hipótesis de cargas, simplificar el modelo general de Kirchhoff. El modelo así obtenido lo llamaremos modelo mecánico de Kirchhoff con tracciones nulas.

Consideremos que las cargas que actuan, sobre $\partial B_+ xJ$ y $\partial B_- xJ$, satisfacen $\underline{\hat{S}} = (0,0,0)$, $\underline{\hat{S}}^* = (0,0,0)$, respectivamente. Entonces, de (4.12), (4.14) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= - x_3 \, [\bar{u}_{3,_1} + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,_{331}}], \\ u_2(x,t) &= - x_3 \, [\bar{u}_{3,_2} + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,_{332}}], \\ u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + \frac{x_3^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} [\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^2}{8} \Delta\bar{u}_{3,_{33}}]. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\underline{x}\varepsilon\Omega, \\ &x = (\underline{x},x_3)\varepsilon B, \\ &t\varepsilon J. \end{aligned} \qquad (4.53)$$

siendo Δ el operador lapalaciano en $\mathbb{R}^2$.

Mediante (4.53) podemos construir las ecuaciones de campo, deformaciones y esfuerzos, correspondientes al modelo mecánico de Kirchhoff con tracciones nulas, las primeras resultan ser:

$$\left.\begin{aligned}
E_{11}(x,t) &= - x_3 \; [\bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8} \; \bar{u}_{3,_{3311}}],\\
E_{22}(x,t) &= - x_3 \; [\bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8} \; \bar{u}_{3,_{3322}}],\\
E_{33}(x,t) &= x_3 \frac{\nu}{1-\nu} \; [\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^2}{8} \; \Delta\bar{u}_{3,_{33}}],\\
E_{12}(x,t) &= - x_3 \; [\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8} \; \bar{u}_{3,_{3312}}],\\
E_{13}(x,t) &= (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}) \frac{\nu}{1-\nu} \; [\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{221}} + \\
&\quad + \frac{h}{8} \; (\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33221}})],\\
E_{23}(x,t) &= (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}) \frac{\nu}{1-\nu} \; [\bar{u}_{3,_{112}} + \bar{u}_{3,_{222}} + \\
&\quad + \frac{h^2}{8} \; (\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}})].
\end{aligned}\right\} \quad (x,t)\in B\times J, \qquad (4.54)$$

Los componentes del tensor de esfuerzos, construidos mediante (4.54), satisfacen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} \; [\bar{u}_{3,_{11}} + \nu \; \bar{u}_{3,_{22}} + \\
&\quad + \frac{h^2}{8} \; (\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu \; \bar{u}_{3,_{3322}})],\\
S_{22}(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} \; [\bar{u}_{3,_{22}} + \nu \; \bar{u}_{3,_{11}} +
\end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\qquad + \frac{h^2}{8}\ (\bar{u}_{3,_{3322}} + \nu\ \bar{u}_{3,_{3311}})], \\
S_{33}(x,t) &= 0, \\
S_{12}(x,t) &= -\ x_3\ \frac{\beta}{1+\nu}\ [\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\ \bar{u}_{3,_{3312}}], \\
S_{13}(x,t) &= (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16})\ \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}\ [\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{221}} + \\
&\qquad + \frac{h^2}{8}\ (\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33221}})], \\
S_{23}(x,t) &= (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16})\ \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}\ [\bar{u}_{3,_{112}} + \bar{u}_{3,_{222}} + \\
&\qquad + \frac{h^2}{8}\ (\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}})].
\end{aligned}\right\}\ (x,t)\in B\times J \quad (4.55)
$$

En este caso las ecuaciones de consistencia para las cargas de cuerpo son:

$$
\begin{aligned}
b_{0_1} &= x_3\ \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)}\ [\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{122}} + \\
&\qquad + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33122}})] - x_3\ \rho_0\ [\ddot{\bar{u}}_{3,_{1}} + \\
&\qquad + \frac{h^2}{8}\ \ddot{\bar{u}}_{3,_{331}}], \\
b_{0_2} &= x_3\ \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)}\ [\bar{u}_{3,_{222}} + \bar{u}_{3,_{112}} +
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}})] - x_3\, \rho_0\, [\ddot{\bar{u}}_{3,_2} +$$

$$+ \frac{h^2}{8}\ddot{\bar{u}}_{3,_{332}}],$$

$$b_{0_3} = -\left(\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)\frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}[\bar{u}_{3,_{1111}} + 2\,\bar{u}_{3,_{2211}} + \bar{u}_{3,_{2222}} +$$

$$+ \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{331111}} + 2\,\bar{u}_{3,_{331122}} + \bar{u}_{3,_{332222}})] +$$

$$+ \rho_0\,[\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{x_3^2}{2}\frac{\nu}{1-\nu}(\ddot{\bar{u}}_{3,_{11}} + \ddot{\bar{u}}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}(\ddot{\bar{u}}_{3,_{3311}} +$$

$$+ \ddot{\bar{u}}_{3,_{3322}})].$$

en BxJ (4.56)

Las condiciones de consistencia para las tracciones de superficie, sobre la frontera ∂B_2, están dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\hat{g}_1(x,t) = [-x_3\frac{\beta}{1-\nu^2}(\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\,\bar{u}_{3,_{22}} +$$

$$+ \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu\,\bar{u}_{3,_{3322}})]n_1 +$$

$$+ [-\,x_3\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}})]n_2,$$

$$\hat{g}_2(x,t) = [-\,x_3\frac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}})]n_1 +$$

$$\left.\begin{array}{l} + [- x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} (\bar{u}_{3,_{22}} + \nu \bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,_{3322}} + \\ + \nu \bar{u}_{3,_{3311}}))]n_2, \\ \hat{g}_3(x,t) = (\frac{x_3^2}{4} - \frac{h^2}{16}) \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \{[\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{221}} + \\ + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33221}})]n_1 + \\ + [\bar{u}_{3,_{112}} + \bar{u}_{3,_{222}} + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}})]n_2\}. \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x,t) \varepsilon\ \partial B_2 x \\ (4.57) \end{array}$$

Las condiciones de consistencia, en condiciones iniciales y de frontera, están dadas por

$$\left.\begin{array}{l} u_{0_1}(x) = - x_3 [\bar{u}_{3,_1}(0) + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,_{331}}(0)], \\ u_{0_2}(x) = - x_3 [\bar{u}_{3,_2}(0) + \frac{h^2}{8} \bar{u}_{3,_{332}}(0)], \\ u_{0_3}(x) = \bar{u}_3(0) + \frac{x_3^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} [\bar{u}_{3,_{11}}(0) + \\ \quad + \bar{u}_{3,_{22}}(0) + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_{3,_{3311}}(0) + \bar{u}_{3,_{3322}}(0))], \\ V_{0_1}(x) = - x_3 [\dot{\bar{u}}_{3,_1}(0) + \frac{h^2}{8} \dot{\bar{u}}_{3,_{331}}(0)], \\ V_{0_2}(x) = - x_3 [\dot{\bar{u}}_{3,_2}(0) + \frac{h^2}{8} \dot{\bar{u}}_{3,_{332}}(0)], \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \varepsilon B \\ (4.58) \end{array}$$

$$V_{0_3}(x) = \dot{\bar{u}}_3\,(0) + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\dot{\bar{u}}_{3,_{11}}(0) + \dot{\bar{u}}_{3,_{22}}(0) + + \frac{h^2}{8}\,(\dot{\bar{u}}_{3,_{3311}}(0) + \dot{\bar{u}}_{3,_{3322}}(0))].$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_1(x,t) &= - x_3\,[\bar{u}_{3,_1} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,_{331}}], \\ \hat{u}_2(x,t) &= - x_3\,[\bar{u}_{3,_2} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,_{332}}], \\ \hat{u}_3(x,t) &= \bar{u}_3 + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\bar{u}_{3,_{11}} + \bar{u}_{3,_{22}} + \\ &\quad + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,_{3311}} + \bar{u}_{3,_{3322}})]. \end{aligned}\right\} \text{sobre } \partial B_1 x J \quad (4.59)$$

Las ecuaciones de equilibrio (4.34) se simplifican a

$$\left.\begin{aligned} & b^*_{0_1} = b^*_{0_2} = 0, \\ & - D\,[\Delta\Delta\,\bar{u}_3 + \frac{h^2}{8}\,\Delta\Delta\,\bar{u}_3] + \bar{m}_{2,_1} - \bar{m}_{1,_2} + b^*_{0_3} = \\ & = \rho_0\,[h\,\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\,\frac{-2+3\nu}{1-\nu}\,(\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^2}{8}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_{3,_{33}})]. \end{aligned}\right\} \text{en } \Omega x J \quad (4.60)$$

Aquí,

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\beta h^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \bar{m}_1 &= -\int_{-h/2}^{h/2} x_3\, b_{0_2}\, dx_3, \\ \bar{m}_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3\, b_{0_1}\, dx_3. \end{aligned}\right\} \quad (4.61)$$

Al término D, definido en 4.61, lo llamaremos el módulo de rigidez a la flexión del cuerpo B.

Los componentes cartesianos de los vectores $*\underline{S}$, $*\underline{H}$, definidos en (4.44) satisfacen, sobre $\partial S_3 xJ$, las siguientes ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} *S_1 &= *S_2 = 0, \\ *S_3 &= -\frac{h^3}{24}\frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}\{[\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{221}} + \\ &\quad + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{33111}} + \bar{u}_{3,_{33221}})]n_1 + \\ &\quad + [\bar{u}_{3,_{112}} + \bar{u}_{3,_{222}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{33112}} + \bar{u}_{3,_{33222}})]n_2\}, \\ *H_1 &= \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}]n_1 + \\ &\quad + D[\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3322}} + \nu\bar{u}_{3,_{3311}})]n_2, \\ *H_2 &= -D[\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu\bar{u}_{3,_{3322}})]n_1 - \\ &\quad - \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}]n_2, \\ *H_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \text{sobre } \partial S_3 xJ \quad (4.62)$$

Al construir, mediante (4.62), los componentes cartesianos de los vectores $^*\underline{S}_{\underline{n}}$, $^*\underline{S}_{\underline{\tau}}$, $^*\underline{H}_{\underline{n}}$ y $^*\underline{H}_{\underline{\tau}}$ definidos en (4.47), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}
&(^*\underline{S}_{\underline{n}})_1 = (^*\underline{S}_{\underline{n}})_2 = (^*\underline{S}_{\underline{n}})_3 = 0,\\
&(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 = (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = 0,\\
&(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 = {}^*S_3\ ,\\
&(^*\underline{H}_{\underline{n}})_1 = \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3312}]\,(n_1^2-n_2^2)\,n_1 + \\
&\qquad + D[\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3322} + \nu\bar{u}_{3,3311}) - \\
&\qquad - (\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}))]\,n_1^2\,n_2,\\
&(^*\underline{H}_{\underline{n}})_2 = \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3312}]\,(n_1^2-n_2^2)\,n_2 + \\
&\qquad + D\,[\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3322} + \nu\,\bar{u}_{3,3311}) - \\
&\qquad - (\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}))]\,n_1\,n_2^2,\\
&(^*\underline{H}_{\underline{\tau}})_1 = \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3312}]\,(n_1 - n_1^3 + n_1\,n_2^2) + \\
&\qquad + D\,[(\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3322} + \nu\bar{u}_{3,3311}))\,(n_2 - n_1^2 n_2) + \\
&\qquad + (\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}))\,n_1^2\,n_2],\\
&(^*\underline{H}_{\underline{\tau}})_2 = -D\,[(\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3311} + \nu\bar{u}_{3,3322}))\,(n_1 - n_1 n_2^2) + \\
&\qquad + (\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11} + \frac{h^2}{8}\,(\bar{u}_{3,3322} + \nu\bar{u}_{3,3311}))\,n_1\,n_2^2] - \\
&\qquad - \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\,\bar{u}_{3,3312}]\,(n_2 + n_1^2\,n_2 - n_2^3),\\
&(^*\underline{H}_{\underline{n}})_3 = (^*\underline{H}_{\underline{\tau}})_3 = 0.
\end{aligned}\right\}\ \text{sobre } \partial S_3 \times J \qquad (4.63)$$

Observación 4.7. Las ecuaciones (4.49) y (4.51) son satisfecha con

$$\left.\begin{aligned}
{}^*H_{\underline{n}} = {} & \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}](n_1^2-n_2^2) + \\
& + D[\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3322}} + \nu\bar{u}_{3,_{3311}}) - \\
& - (\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu\bar{u}_{3,_{3322}}))]n_1n_2, \\
{}^*H_{\underline{\tau}} = {} & -\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}[\bar{u}_{3,_{12}} + \frac{h^2}{8}\bar{u}_{3,_{3312}}]2n_1n_2 - \\
& - D[(\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3322}} + \nu\bar{u}_{3,_{3311}}))n_2^2 + \\
& + (\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,_{3311}} + \nu\bar{u}_{3,_{3322}}))n_1^2]. \blacksquare
\end{aligned}\right\}\ \text{sobre}\ \partial S_3 \times J \qquad (4.64)$$

4.13 FORMULA DE GREEN

En esta parte presentaremos la fórmula de Green asociada al cuerpo tridimensional de Kirchhoff. Para esto seguiremos el procedimiento, formal, presentado en [7], es decir, consideraremos que las funciones son suficientemente regulares para que las integraciones por partes tengan sentido. Primeramente multipliquemos la ecuación (4.33) por una función, llamémosla v, e integremos, para obtener

$$\int_\Omega \{M_{2\alpha,\alpha_1} - M_{1\alpha,\alpha_2} - m_{1,2} + m_{2,1} + \hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b_{0_3}^*\} \, v \, dx = \rho_0 \int_\Omega \ddot{u}_3^* \, v \, dx. \quad (4.65)$$

Observemos ahora que

$$\varepsilon_{3\gamma\delta} \, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta} = -M_{2\alpha,\alpha_1} + M_{1\alpha,\alpha_2} \, , \quad \alpha,\gamma,\delta = 1,2, \quad (4.66)$$

por tanto, la ecuación (4.65) puede ser escrita como

$$\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta} \, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta} \, v \, dx = \int_\Omega \{-\rho_0 \, \ddot{u}_3^* - m_{1,2} + m_{2,1} + \hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b_{0_3}^*\} \, v \, dx. \quad (4.67)$$

Integrando por partes, el término izquierdo de la ecuación (4.67), se obtiene

$$\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta} \, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta} \, v \, dx = -\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta} \, M_{\gamma\alpha,\alpha} \, v_{,\delta} \, dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} \, M_{\gamma\alpha,\alpha} \, v \, n_\delta \, dx \, . \quad (4.68)$$

Integrando por partes, el primer término de la derecha de (4.68) se obtiene

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} v_{,\delta} dx = - \int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\delta} n_{\alpha} dx. \quad (4.69)$$

De acuerdo a (4.68) y (4.69) se tiene la siguiente fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha\delta} v \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx$$
$$- \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\delta} n_{\alpha} dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} v \, n_{\delta} dx. \quad (4.70)$$

Al sustituir la fórmula de Green (4.70) en (4.67) se obtiene

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\alpha\delta} dx - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha} v_{,\delta} n_{\alpha} dx + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} v \, n_{\delta} dx =$$
$$= \int_{\Omega} \{-\rho_0 \ddot{u}_3^* - m_{1,2} + m_{2,1} + \hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b_{0\,3}^* \} v \, dx. \quad (4.71)$$

Nuestro siguiente objetivo es expresar las integrales sobre la frontera en (4.70) en términos de $^*S_3$, $^*H_{\underline{n}}$ y $^*H_{\underline{\tau}}$. Para ello utilizaremos (4.28),

$$M_{\gamma\alpha,\alpha} = - \varepsilon_{\gamma\alpha k} S_{k\alpha}^* - m_{\gamma} , \quad (4.72)$$

por tanto,

$$\int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} M_{\gamma\alpha,\alpha} v \, n_{\delta} dx = - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\alpha k} S_{k\alpha}^* + m_{\gamma}) v \, n_{\delta} dx =$$
$$= - \int_{\partial\Omega} S_{3\alpha}^* n_{\alpha} v \, dx - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} m_{\gamma} v \, n_{\delta} dx = \quad (4.73)$$
$$= - \int_{\partial\Omega} {}^*S_3 v \, dx - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta} m_{\gamma} v \, n_{\delta} dx.$$

Además

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, n_\alpha = \varepsilon_{3\gamma\delta}(^*H_{\underline{n}}\, n_\gamma + {}^*H_{\underline{\tau}}\, \tau_\gamma), \\ &\tau_\delta = \varepsilon_{\delta 3\gamma}\, n_\gamma \;,\; n_\delta = -\,\varepsilon_{\delta 3\gamma}\, \tau_\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{4.74}$$

por tanto, siendo la frontera una curva cerrada [7]

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, v,_\delta\, n_\alpha\, dx &= \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta}(^*H_{\underline{n}}\, n_\gamma + {}^*H_{\underline{\tau}}\, \tau_\gamma) v,_\delta\, dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{n}}\, v,_\delta\, \tau_\delta\, dx - \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}\, n_\delta\, v,_\delta\, dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{n}}\, \frac{\partial v}{\partial \tau}\, dx - \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}\, \frac{\partial v}{\partial n}\, dx = \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial {}^*H_{\underline{n}}}{\partial \tau}\, v\, dx - \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}\, \frac{\partial v}{\partial n}\, dx. \end{aligned} \tag{4.75}$$

La fórmula de Green (4.70) puede escribirse, de acuerdo a (4.72) - (4.75), como

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta}\, v\, dx &= \int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, v,_{\alpha\delta}\, dx + \\ &- \int_{\partial\Omega} (^*S_3 + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_\gamma\, n_\delta - \frac{\partial {}^*H_{\underline{n}}}{\partial \tau})\, v\, dx + \\ &+ \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}\, \frac{\partial v}{\partial n}\, dx. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Al tomar en cuenta las ecuaciones (4.25) los términos de la fórmula de Green (4.76) pueden expresarse en forma explícita, esto es,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta}\, v\, dx = D \int_\Omega (\Delta\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^2}{8}\, \Delta\Delta\bar{u}_{3,33})\, v\, dx - \\
&- \frac{\nu h^2}{12(1-\nu)} \int_\Omega \{\Delta(\hat{S}_3+\hat{S}_3^*) + \frac{h}{\nu}\, ((\hat{S}_{1,122} - \hat{S}^*_{1,122} + \hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211})+ \\
&+ (\hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222} + \hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111}))\}\, v\, dx, \\
&\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, v_{,\alpha\delta}\, dx = D\int_\Omega (\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^2}{8}\, \Delta\bar{u}_{3,33})\Delta v\, dx + \\
&+ D\int_\Omega \{(1-\nu)[2(\bar{u}_{3,12} + \frac{h^2}{8}\, \bar{u}_{3,3312})\, v_{,12} - \\
&- (\bar{u}_{3,11}\, v_{,22} + \bar{u}_{3,22}\, v_{,11} + \frac{h^2}{8}(\bar{u}_{3,3311}\, v_{,22} + \bar{u}_{3,3322}\, v_{,11}))]\}\, dx - \\
&- \frac{h^3}{12} \int_\Omega (\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})\, v_{,12}\, dx - \\
&- \frac{h^3}{12}\, \frac{\nu}{1-\nu} \int_\Omega \{\frac{1}{h}(\hat{S}_3+\hat{S}_3^*)\Delta v + [(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \frac{1}{\nu}\, (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{1,2})]\, v_{,22} + \\
&+ [(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \frac{1}{\nu}\, (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})]\, v_{,11}\}\, dx.
\end{aligned}\right\} \quad (4.77)$$

Aquí D es el módulo de rigidez a la flexión definida en (4.61).

Observación 4.8. De acuerdo a (2.8) se observa que, de manera formal, se satisface

$$< Au,v > = \int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, v,_{\alpha\delta}\, dx,$$

$$(\ Pu,v\ ) = \int_{\Omega} \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta}\, v\, dx, \qquad (4.78)$$

$$<\partial u,\gamma v > = \int_{\partial\Omega} (*S_3 + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_{\gamma}\, n_{\delta} - \frac{\partial^* H_{\underline{n}}}{\partial\tau})\, v\, dx -$$

$$- \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}\, \frac{\partial v}{\partial n}\, dx.$$

En el capítulo 6 se precisan los espacios donde (4.78) tiene sentido y el significado de las integrales.

El término,

$$F_3 = *S_3 + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_{\gamma}\, n_{\delta} - \frac{\partial^* H_{\underline{n}}}{\partial\tau}\ , \text{ sobre } \partial\Omega x J, \qquad (4.79)$$

es llamado, en el contexto de la resistencia de materiales, fuerza cortante. ■

5. MODELOS DE KIRCHHOFF SIMPLIFICADOS.

El objetivo de este capítulo es presentar otros modelos mecánicos asociados al cuerpo tridimensional de Kirchhoff del capítulo anterior. El primero de ellos, que llamaremos modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$, lo obtendremos despreciando en las ecuaciones (4.12), (4.14) los términos de $0(h^2)$, en el sentido de [15]. Con el campo de desplazamientos asi aproximado se construirán las ecuaciones de campo de $0(h^2)$ correspondientes. Posteriormente se construirán las condiciones de consistencia en cargas de cuerpo, tracciones de superficie, condiciones iniciales y de frontera, así como, las ecuaciones de equilibrio dinámico de fuerzas y momentos. Se establece también, las relaciones entre fuerza cortante y momentos, tanto flexionante como torsionante, con el desplazamiento $\bar{u}_3$. Mediante hipótesis en tracciones externas, en el modelo anterior, se construirá el modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas. Se comparará este último modelo con el modelo de la teoría de placas elásticas lineales que satisfacen hipótesis tipo Hencky [25]. También, despreciando en (4.12) y (4.14) los términos de $0(h)$ se construirá el modelo de Kirchhoff de $0(h)$. Despúes, bajo las hipótesis de que en desplazamientos los términos de $0(h^2)$ son despreciables y, en deformaciones, los de $0(h)$ y, que las tracciones externas son nulas, se construye el modelo mecánico de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales. Se presenta una fórmula de Green para el modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$.

Algunos problemas de valores sobre la frontera e iniciales clásicos para el modelo de $0(h^2)$ son presentados. Finalmente se discuten algunas condiciones de frontera no lineales tipo fricción para el modelo de $0(h^2)$, presentando los correspondientes problemas de valores sobre la frontera e iniciales.

5.1 ECUACIONES DE CAMPO DE $0(h^2)$

El objetivo de esta parte es presentar una aproximación de las ecuaciones de campo desarrolladas en la sección 4.6, las cuales llamaremos ecuaciones de campo de $0(h^2)$. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que la función $\alpha \to f(\alpha)$ se aproxima mas rápido al cero que $\alpha \in \mathbb{R}$ y lo escribiremos $f(\alpha) = 0(\alpha)$ si

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha\neq 0}} \frac{|f(\alpha)|}{|\alpha|} = 0. \qquad (5.1)$$

De acuerdo a (5.1) las ecuaciones (4.12) y (4.14) pueden expresarse como

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,1} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_1-\hat{S}^*_1] + 0(h^2),\\
u_2(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,2} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_2-\hat{S}^*_2] + 0(h^2),\\
u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[(1+\frac{x_3}{h})\hat{S}_3 -\\
&\quad -(1-\frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3] + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[(\bar{u}_{3,11}+\bar{u}_{3,22}) -\\
&\quad -\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1}-\hat{S}^*_{1,1}+\hat{S}_{2,2}-\hat{S}^*_{2,2}]] + 0(h^3).
\end{aligned}\right\}\ \text{en } B\times J \qquad (5.2)$$

Despreciando en (5.2) los términos de $0(h^2)$ se obtiene lo que llamaremos campo de desplazamiento de $0(h^2)$. Mediante este campo de desplazamiento aproximado construiremos las ecuaciones de campo de $0(h^2)$ cuyos componentes satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$
\left.
\begin{aligned}
E_{11}(x,t) &= -x_3\bar{u}_{3,11} + x_3\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}],\\
E_{22}(x,t) &= -x_3\bar{u}_{3,22} + x_3\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}],\\
E_{33}(x,t) &= \frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3] -\\
&\quad - x_3\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] -\\
&\quad - (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22})],\\
E_{12}(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2}\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}],\\
E_{13}(x,t) &= \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,1}] +\\
&\quad + \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1] - \frac{x_3^2}{4}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\frac{1+\nu}{\beta}(\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} -\\
&\quad - \hat{S}^*_{2,21}) - (\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221})],\\
E_{23}(x,t) &= \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,2}] +\\
&\quad + \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2] - \frac{x_3^2}{4}\,\frac{\nu}{1-\nu}[\frac{1+\nu}{\beta}(\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \hat{S}_{2,22} -\\
&\quad - S^*_{2,22}) - (\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222})],\\
\mathrm{tr}\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{x},t) &= \frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3] -\\
&\quad - x_3\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22} - \frac{1+\nu}{\beta}\,(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} +\\
&\quad + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})],
\end{aligned}
\right\}
\;(x,t) \in B \times J \qquad (5.3)
$$

Los componentes del tensor esfuerzo, tomando en cuenta (4.1) y (5.3), satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} [\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22}] + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu} [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3 + \\
&\quad + x_3 (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] + \frac{x_3}{1-\nu}[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}], \\
S_{22}(x,t) &= - x_3\beta/_{1-\nu^2} [\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11}] + \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu} [(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3 + \\
&\quad + x_3 (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] + \frac{x_3}{1-\nu}[\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}], \\
S_{33}(x,t) &= [(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}^*_3], \\
S_{12}(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2} [\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}], \\
S_{13}(x,t) &= \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - x_3^2/h)\hat{S}^*_{3,1}] + \tfrac{1}{2} [\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1] - \\
&\quad - \frac{x_3^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} [\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} - \frac{\beta}{1+\nu} (\bar{u}_{3,111} + \\
&\quad + \bar{u}_{3,221})], \\
S_{23}(x,t) &= \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h}) \hat{S}_{3,2} - (x_3 - x_3^2/h)\hat{S}^*_{3,2}] + \tfrac{1}{2}[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2] - \\
&\quad - \frac{x_3^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} [\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22} - \frac{\beta}{1+\nu} (\bar{u}_{3,112} + \\
&\quad + \bar{u}_{3,222})].
\end{aligned}\right\} \quad (x,t) \in B \times \quad (5$$

5.2 CONSISTENCIA DE CARGAS DE CUERPO DE $0(h^2)$

Las condiciones de consistencia para las cargas de cuerpo, según (5.2), están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{o_1} =\; & x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,122}] - \tfrac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} [(1+2\frac{x_3}{h}) \hat{S}_{3,1} - \\
& - (1-2\frac{x_3}{h}) \hat{S}^*_{3,1}] - \frac{x_3}{2(1-\nu)} [\hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} + \\
& + (2-\nu) [\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11}] + (1-\nu) [\hat{S}_{1,22} - \hat{S}^*_{1,22}]] + \\
& + \rho_0 [-x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\ddot{\hat{S}}_1 - \ddot{\hat{S}}^*_1]], \\
b_{o_2} =\; & x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,112}] - \tfrac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} [1+2\frac{x_3}{h}) \hat{S}_{3,2} - (1-2\frac{x_3}{h}) \hat{S}^*_{3,2}] - \\
& - \frac{x_3}{2(1-\nu)} [\hat{S}_{1,21} - \hat{S}^*_{1,21} + (2-\nu) [\hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22}] + \\
& + (1-\nu) [\hat{S}_{2,11} - \hat{S}^*_{2,11}]] + \\
& + \rho_0 [-x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\ddot{\hat{S}}_2 - \ddot{\hat{S}}^*_2]], \\
b_{o_3} =\; & - \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + x_3^2/h) (\hat{S}_{3,11} + \hat{S}_{3,22}) - \\
& - (x_3 - x_3^2/h) (\hat{S}^*_{3,11} + \hat{S}^*_{3,22})] - \tfrac{1}{2} [\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] - \\
& - \frac{1}{h} [\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3] + \frac{x_3^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} [\hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111} + \hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211} + \hat{S}_{1,122} - \\
& - \hat{S}^*_{1,122} + \hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222} - \frac{\beta}{1+\nu} (\bar{u}_{3,1111} + 2\bar{u}_{3,1122} + \bar{u}_{3,2222})] + \\
& + \rho_0 [\ddot{\bar{u}}_3 + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} [(1+x_3/h) \ddot{\hat{S}}_3 - (1-x_3/h) \ddot{\hat{S}}^*_3] + \\
& + \frac{x_3^2}{2} [\frac{\nu}{1-\nu} (\ddot{\bar{u}}_{3,11} + \ddot{\bar{u}}_{3,22} - \frac{1+\nu}{\beta} [\ddot{\hat{S}}_{1,1} - \ddot{\hat{S}}^*_{1,1} + \ddot{\hat{S}}_{2,2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,2}])]].
\end{aligned}
\right\} \text{en } B \quad (5.5)
$$

5.3 CONSISTENCIA DE TRACCIONES DE SUPERFICIE DE $0(h^2)$

Las ecuaciones de consistencia para las tracciones de superficie, sobre la frontera ∂B_2, según (4.7) y (5.4), son:

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{g}_1(x,t) = {} & [-x_3 \tfrac{\beta}{1-\nu^2}[\bar{u}_{3,11} + \nu \bar{u}_{3,22}] + \\
& + \tfrac{\nu}{1-\nu}\,(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}_3^* + \\
& + x_3\,[\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] + \tfrac{x_3}{1-\nu}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}]]\, n_1 + \\
& + [-x_3\beta/1+\nu\; \bar{u}_{3,12} + \tfrac{x_3}{2}\,(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})]n_2, \\
\hat{g}_2(x,t) = {} & [-x_3 \tfrac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12} + \tfrac{x_3}{2}\,(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})]n_1 + \\
& + [-x_3 \tfrac{\beta}{1-\nu^2}(\bar{u}_{3,22} + \nu \bar{u}_{3,11}) + \\
& + \tfrac{\nu}{1-\nu}\,[(\tfrac{1}{2} + x_3/h)\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - x_3/h)\hat{S}_3^* + \\
& + x_3(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] + \tfrac{x_3}{1-\nu}(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})]n_2, \\
\hat{g}_3(x,t) = {} & [\tfrac{1}{4}\tfrac{1-2\nu}{1-\nu}\,[(x_3 + \tfrac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - \tfrac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,1}] + \\
& + \tfrac{1}{2}\,(\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*) - \tfrac{x_3^2}{4}\,\tfrac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} - \\
& - \tfrac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221})]]n_1 + [\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1-2\nu}{1-\nu}\,[(x_3 + \tfrac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,2} - \\
& - (x_3 - \tfrac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,2}\,] + \tfrac{1}{2}\,(\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*) - \tfrac{x_3^2}{4}\,\tfrac{\nu}{1-\nu}[\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \\
& + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22} - \tfrac{\beta}{1+\nu}(\bar{u}_{3,112} + \bar{u}_{3,222})]]\, n_2 .
\end{aligned}
\right\}
\quad (x,t) \in \partial B_2 \times J \qquad (5.
$$

5.4 CONSISTENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA DE $0(h^2)$

Las condiciones de consistencia de condiciones iniciales y de frontera, en términos de (5.2), están dadas por:

$$u_{o_1}(x) = -x_3\, u_{3,1}(\underline{x},0,0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_1(\underline{x},0) - \hat{S}^*_1(\underline{x},0)],$$

$$u_{o_2}(x) = -x_3\, u_{3,2}(\underline{x},0,0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_2(\underline{x},0) - \hat{S}^*_2(\underline{x},0)],$$

$$u_{o_3}(x) = u_3(\underline{x},0,0) + \frac{x_3}{2} \frac{(1+\nu)\ (1-2\nu)}{\beta(1-\nu)} [(1+ \frac{x_3}{h})\hat{S}_3(\underline{x},0) -$$

$$- (1 - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3(\underline{x},0] - \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} [\frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_{1,1}(\underline{x},0) -$$

$$- \hat{S}^*_{1,1}(\underline{x},0) + \hat{S}_{2,2}(\underline{x},0) - \hat{S}^*_{2,2}(\underline{x},0)) - (\bar{u}_{3,11}(\underline{x},0,0) +$$

$$+ \bar{u}_{3,22}(\underline{x},0,0))],$$

$$v_{o_1}(x) = -x_3\, \dot{u}_{3,1}(\underline{x},0,0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{\dot{S}}_1(\underline{x},0) - \hat{\dot{S}}^*_1(x,0)],$$

$$v_{o_2}(x) = -x_3\, \dot{u}_{3,2}(\underline{x},0,0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{\dot{S}}_2(\underline{x},0) - \hat{\dot{S}}^*_2(x,0)],$$

$$v_{o_3}(x) = \dot{u}_3(\underline{x},0,0) + \frac{x_3}{2} \frac{(1+\nu)}{\beta} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h})\hat{\dot{S}}_3(\underline{x},0) -$$

$$- (1 - \frac{x_3}{h})\hat{\dot{S}}^*_3(\underline{x},0)] - \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} [\frac{1+\nu}{\beta}\hat{\dot{S}}_{1,1}(\underline{x},0) - \hat{\dot{S}}^*_{1,1}(\underline{x},0) +$$

$$+ \hat{\dot{S}}_{2,2}(\underline{x},0) - \hat{\dot{S}}^*_{2,2}(\underline{x},0)) - (\dot{\bar{u}}_{3,11}(\underline{x},0,0) + \dot{\bar{u}}_{3,22}(x,0,0))].$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$$\hat{u}_1(x,t) = -x_3\, \bar{u}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1],$$

$$\hat{u}_2(x,t) = -x_3\, \bar{u}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} [\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2],$$

$$\hat{u}_3(x,t) = \bar{u}_3 + \frac{x_3}{2} \frac{(1+\nu)\ (1-2\nu)}{\beta(1-\nu)} [(1 + x_3/h)\hat{S}_3 - (1-x_3/h)\hat{S}^*_3] -$$

$$- \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} [\frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) - (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22})].$$

5.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE $0(h^2)$

En esta parte presentaremos las ecuaciones de equilibrio locales del modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$. Para ello escribiremos, usando (5.2), la forma explícita de (4.31) y (4.33). Las ecuaciones resultantes son:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\nu h}{2(1-\nu)}\,[\hat{S}_{3,1}-\hat{S}^*_{3,1}] + b^*_{0_1} + \hat{S}_1 + \hat{S}^*_1 = 0\,,\\
&\frac{\nu h}{2(1-\nu)}\,[\hat{S}_{3,2}-\hat{S}^*_{3,2}] + b^*_{0_2} + \hat{S}_2 + \hat{S}^*_2 = 0\,,\\
&- D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^3}{12(1-\nu)}\,[\hat{S}_{1,212} - \hat{S}^*_{1,212} + \hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211} +\\
&+ \hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222} + \hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111}] + \frac{h^2\nu}{12(1-\nu)}\,[\Delta(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3)] +\\
&+ m_{2,1} - m_{1,2} + \hat{S}_3 + \hat{S}^*_3 + b^*_{0_3} = \rho_0\,[h\ddot{u}_3 + \frac{h^2}{24}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\\
&(\ddot{\hat{S}}_3 + \ddot{\hat{S}}^*_3) + \frac{h^3}{24}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\Delta\,\ddot{u}_3 - \frac{1+\nu}{\beta}\,(\ddot{\hat{S}}_{1,1} - \ddot{\hat{S}}^*_{1,1} + \ddot{\hat{S}}_{2,2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,2})]]\,.
\end{aligned}\right\}\ \text{en } \Omega\mathrm{x}J \qquad (5.8)
$$

5.6 ELEMENTOS MECANICOS DE $0(h^2)$

Presentaremos, en esta sección, los elementos mecánicos del modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ que actúan a través de la frontera $\partial S_3\mathrm{x}J$. En este caso, según (4.44) y (5.4), los componentes de los vectores $^*\underline{S} = (^*S_1, {}^*S_2, {}^*S_3)$, $^*\underline{H} = (^*H_1, {}^*H_2, 0)$, están dados por:

$$\left.\begin{aligned}
{}^*S_1 &= \frac{h\nu}{2(1-\nu)}\ [\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*]n_1,\\
{}^*S_2 &= \frac{h\nu}{2(1-\nu)}\ [\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*]n_2,\\
{}^*S_3 &= \frac{h^2}{48}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_{3,_1} + \hat{S}^*_{3,_1}) + \frac{h}{2}\ (\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*) -\\
&\quad - \frac{h^3}{48}\,\frac{\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_{1,_{11}} - \hat{S}^*_{1,_{11}} + \hat{S}_{2,_{21}} - \hat{S}^*_{2,_{21}} - \frac{\beta}{1+\nu}\,\Delta\,\bar{u}_{3,_1})]n_1 +\\
&\quad + [\frac{h^2}{48}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_{3,_2} + \hat{S}^*_{3,_2}) + \frac{h}{2}\ (\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*)\\
&\quad - \frac{h^3}{48}\ \frac{\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_{1,_{12}} - \hat{S}^*_{1,_{12}} + \hat{S}_{2,_{22}} - \hat{S}^*_{2,_{22}} - \frac{\beta}{1+\nu}\,\Delta\,\bar{u}_{3,_2})]n_2,\\
{}^*H_1 &= [\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,_{12}} - \frac{h^3}{24}\ (\hat{S}_{1,_2} - \hat{S}^*_{1,_2} + \hat{S}_{2,_1} - \hat{S}^*_{2,_1})]n_1 +\\
&\quad + [D(\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}}) - \frac{h^2}{12}\,\frac{\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + h(\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1})) -\\
&\quad - \frac{h^3}{12(1-\nu)}\ (\hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2})]n_2,\\
{}^*H_2 &= [-D(\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}}) + \frac{h^2}{12}\,\frac{\nu}{1-\nu}\ (\hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + h(\hat{S}_{2,_2} - \hat{S}^*_{2,_2})) +\\
&\quad + \frac{h^3}{12(1-\nu)}\ (\hat{S}_{1,_1} - \hat{S}^*_{1,_1})]n_1 + [-\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,_{12}}\\
&\quad + \frac{h^3}{24}\ (\hat{S}_{1,_2} - \hat{S}^*_{1,_2} + \hat{S}_{2,_1} - \hat{S}^*_{2,_1})]n_2,\\
{}^*H_3 &= 0.
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{sobre}\\ \partial S_3 xJ\end{array} \qquad (5.9)$$

Las componentes de los vectores $^*\underline{S}_n$, $^*\underline{S}_\tau$, definidos en (4.47), satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
(^*\underline{S}_n)_1 &= \frac{h}{2}\frac{\nu}{1-\nu}(\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*)n_1,\\
(^*\underline{S}_n)_2 &= \frac{h}{2}\frac{\nu}{1-\nu}(\hat{S}_3 - \hat{S}_3^*)n_2,\\
(^*\underline{S}_n)_3 &= 0,\\
(^*\underline{S}_\tau)_1 &= (^*\underline{S}_\tau)_2 = 0,\\
(^*\underline{S}_\tau)_3 &= (^*\underline{S})_3 = \frac{h^2}{48}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[(\hat{S}_{3,1} + \hat{S}^*_{3,1})n_1 + (\hat{S}_{3,2} + \hat{S}^*_{3,2})n_2] -\\
&\quad - \frac{h^3}{48}\frac{\nu}{1-\nu}[(\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11} + \hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21} - \frac{\beta}{1+\nu}\Delta\bar{u}_{3,1})n_1 +\\
&\quad + (\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12} + \hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{2,22} - \frac{\beta}{1+\nu}\Delta\bar{u}_{3,2})n_2] +\\
&\quad + \frac{h}{2}[(\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*)n_1 + (\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*)n_2].
\end{aligned}\right\}\ \text{sobre } \partial S_3 x0 \quad (5.10$$

Las ecuaciones de momentos, torsionante y flexionante, construidas con (4.49), (4.50) y (5.2), son:

$$\begin{aligned}
^*H_{\underline{n}} &= [\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}\bar{u}_{3,12} - \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})](n_1^2 - n_2^2) +\\
&\quad + [D(\bar{u}_{3,22} - \bar{u}_{3,11} + \nu(\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}))]n_1 n_2 +\\
&\quad + \frac{h^3}{12}[S_{1,1} - S^*_{1,1} - S_{2,2} + S^*_{2,2}]n_1 n_2.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
{}^{*}H_{\underline{\tau}} = {} & [-\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12} + \frac{h^3}{24}\,(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^{*}_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^{*}_{2,1})]\,2\,n_1 n_2 - \\
& - D[(\bar{u}_{3,22} + \nu\,\bar{u}_{3,11})\,n_2^2 + (\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22})\,n_1^2] + \\
& + \frac{h^2}{12}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}^{*}_3 + h\,\{(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^{*}_{1,1})\,n_2^2 + (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^{*}_{2,2})\,n_1^2\}] + \\
& + \frac{h^3}{12(1-\nu)}\,[(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^{*}_{2,2})\,n_2^2 + (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^{*}_{1,1})\,n_1^2].
\end{aligned}\right|\begin{array}{l}\text{sobre}\\ \partial S_3 x J\\ (5.11)\end{array}$$

5.7 MODELO DE KIRCHHOFF DE $0(h^2)$ CON TRACCIONES NULAS.

En esta sección, bajo hipótesis de cargas, simplificaremos el modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$. El modelo obtenido será llamado modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas.

Sean $\hat{\underset{\sim}{S}} = (0,0,0)$, $\hat{\underset{\sim}{S}}^* = (0,0,0)$ sobre $\partial B_+ xJ$ y $\partial B_- xJ$, respectivamente, entonces de (5.2) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,1}\,, \\ u_2(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,2}\,, \\ u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\bar{u}_3. \end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.12)$$

Mediante (5.12) podemos construir las ecuaciones de campo, de formaciones y esfuerzos, correspondientes al modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas. Los componentes del tensor de deformaciones satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} E_{11}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,11}\,, \\ E_{22}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,22}\,, \\ E_{33}(x,t) &= x_3\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\bar{u}_3\,, \end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.13)$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{12}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,_{12}} \,, \\
E_{13}(x,t) &= \frac{x_3^2}{4}\, \frac{\nu}{1-\nu}\, \Delta\bar{u}_{3,_{1}} \,, \\
E_{23}(x,t) &= \frac{x_3^2}{4}\, \frac{\nu}{1-\nu}\, \Delta\bar{u}_{3,_{2}} \,.
\end{aligned}\right|$$

Con (5.13) se construyen las ecuaciones para los componentes del tensor de esfuerzos, estas son:

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= -\, x_3\, \frac{\beta}{1-\nu^2}\, [\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\bar{u}_{3,_{22}}] \,, \\
S_{22}(x,t) &= -\, x_3\, \frac{\beta}{1-\nu^2}\, [\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}}] \,, \\
S_{33}(x,t) &= 0 \,, \\
S_{12}(x,t) &= -\, x_3\, \frac{\beta}{1+\nu}\, \bar{u}_{3,_{12}} \,, \\
S_{13}(x,t) &= \frac{x_3^2}{4}\, \frac{\beta\nu}{1-\nu^2}\, \Delta\bar{u}_{3,_{1}} \,, \\
S_{23}(x,t) &= \frac{x_3^2}{4}\, \frac{\beta\nu}{1-\nu^2}\, \Delta\bar{u}_{3,_{2}} \,.
\end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.14)$$

Las condiciones de consistencia para las cargas de cuerpo están dadas, en este caso, por las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
b_{0_1} &= x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{122}}] - \rho_0 x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,_1} , \\
b_{0_2} &= x_3 \frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)} [\bar{u}_{3,_{222}} + \bar{u}_{3,_{112}}] - \rho_0 x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,_2} , \\
b_{0_3} &= - \frac{x_3^2}{4} \frac{\beta\nu}{(1-\nu)(1+\nu)} (\bar{u}_{3,_{1111}} + 2\bar{u}_{3,_{1122}} + \bar{u}_{3,_{2222}}) + \\
&\quad + \rho_0 [\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{x_3^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} (\ddot{\bar{u}}_{3,_{11}} + \ddot{\bar{u}}_{3,_{22}})].
\end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.15)$$

Las condiciones de consistencia para las tracciones de superficie, sobre ∂B_2, se expresan mediante las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\hat{g}_1(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} (\bar{u}_{3,_{11}} + \nu \bar{u}_{3,_{22}}) n_1 - x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,_{12}} n_2 , \\
\hat{g}_2(x,t) &= - x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,_{12}} n_1 - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} (\bar{u}_{3,_{22}} + \nu \bar{u}_{3,_{11}}) n_2 , \\
\hat{g}_3(x,t) &= \frac{x_3^2}{4} \frac{\beta\nu}{1-\nu^2} [(\bar{u}_{3,_{111}} + \bar{u}_{3,_{221}}) n_1 + (\bar{u}_{3,_{112}} + \bar{u}_{3,_{222}}) n_2].
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{sobre} \\ \partial B_2 xJ \\ (5.16)\end{array}$$

Las ecuaciones de consistencia, en condiciones iniciales y de frontera, están dadas por

$$\left.\begin{aligned}
u_{0_1}(x) &= - x_3\, \bar{u}_{3,_1}(0),\\
u_{0_2}(x) &= - x_3\, \bar{u}_{3,_2}(0),\\
u_{0_3}(x) &= \bar{u}_3(0) + \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} \Delta\bar{u}_3(0),\\
v_{0_1}(x) &= - x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,_1}(0),\\
v_{0_2}(x) &= - x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,_2}(0),\\
v_{0_3}(x) &= \dot{\bar{u}}_3(0) + \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} \Delta\dot{\bar{u}}_3(0).
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l} x\varepsilon B \\ (5.17) \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}
\hat{u}_1(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,_1},\\
\hat{u}_2(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,_2},\\
\hat{u}_3(x,t) &= \bar{u}_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \frac{\nu}{1-\nu} \Delta\bar{u}_3.
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{sobre } \partial B_1 x J \\ (5.18) \end{array}$$

Las ecuaciones de equilibrio (5.8) se simplifican a

$$\left.\begin{aligned}
&b^*_{0_1} = b^*_{0_2} = 0,\\
&-D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 + \bar{m}_{2,_1} - \bar{m}_{1,_2} + b^*_{0_3} = \rho_0\,[h\,\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\frac{3\nu-2}{1-\nu}\Delta\ddot{\bar{u}}_3].
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{en } \Omega x J \\ (5.19) \end{array}$$

Los términos D, $\bar{m}_2$, $\bar{m}_1$, están definidos en (4.61).

Los componentes cartesianos de los vectores $^*\underline{S}_{\underline{n}}$, $^*\underline{S}_{\underline{\tau}}$, y los momentos torsionantes y flexionantes satisfacen, sobre $\partial S_3 x J$, las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
(^*\underline{S}_{\underline{n}})_1 &= (^*\underline{S}_{\underline{n}})_2 = (^*\underline{S}_{\underline{n}})_3 = 0,\\
(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 &= (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = 0,\\
(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 &= \frac{h^3}{48}\,\frac{\beta\nu}{1-\nu^2}[\Delta\,\bar{u}_{3,_1}\, n_1 + \Delta\,\bar{u}_{3,_2}\, n_2],\\
^*H_{\underline{n}} &= \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,_{12}}\,(n_1^2 - n_2^2) + \\
&\quad + D\,[\bar{u}_{3,_{22}} - \bar{u}_{3,_{11}} + \nu\,(\bar{u}_{3,_{11}} + \bar{u}_{3,_{22}})]n_1 n_2,\\
^*H_{\underline{\tau}} &= -\frac{h^3}{6}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,_{12}}\, n_1 n_2 - D\,[(\bar{u}_{3,_{22}} + \nu\bar{u}_{3,_{11}})n_2^2 + \\
&\quad + (\bar{u}_{3,_{11}} + \nu\,\bar{u}_{3,_{22}})n_1^2].
\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{sobre}\\ \partial S_3 x J\\ (5.20)\end{array}$$

Observación 5.2. En el modelo de Kircchoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas se observa que los componentes E_{13}, E_{23} del tensor de deformaciones son no nulos y consecuentemente los de esfuerzos S_{13}, S_{23}. En la ecuación de equilibrio dinámico (5.19) aparece el término $\Delta \ddot{u}_3$ que, según la terminología de [23], considera la inercia de rotación del cuerpo. De acuerdo a la terminología de la Resistencia de Materiales al cuerpo tridimensional de Kirchhoff se le da el nombre de placa. Por tanto, este modelo, corresponde a una placa donde los efectos de deformación por cortante e inercia de rotación son considerados. Según [25] este es el modelo de placa de la teoría de Hencky con el término inercia de rotación presente. Modelos similares, para el caso estático, se presentan en [7], sin especificar las condiciones de consistencia en cargas de cuerpo, tracciones de superficie, condiciones iniciales y de frontera y, sin considerar, los términos $\bar{m}_{2,1}$, $\bar{m}_{1,2}$ en la ecuación de equilibrio. Hay que observar que la hipótesis clásica en la teoría de placas $S_{33}(x,t) = 0$, $(x,t) \in B \times J$, se satisface para el modelo aquí desarrollado. ■

5.8 MODELO DE KIRCHHOFF DE O(h).

Construiremos en esta sección un modelo mecánico asociado a un cuerpo tridimensional de Kirchhoff despreciando, en las ecuaciones (5.2), los términos de O(h). El modelo resultante será llamado modelo de Kirchhoff de O(h). Los componentes del vector desplazamiento, bajo la hipótesis ya especificada, están dados por las ecuaciones siguientes

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,1} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*],\\ u_2(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,2} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*],\\ u_3(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)}\,[(1+\frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - \\ &\quad -(1-\frac{x_3}{h})\,\hat{S}_3^*]. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{en } BxJ\\ \\ (5.21)\end{array}$$

Los componentes del tensor de deformaciones asociado a este modelo mecánico, de acuerdo a (5.21), deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} E_{11}(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,11} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}],\\ E_{22}(x,t) &= -x_3\,\bar{u}_{3,22} + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}],\\ E_{33}(x,t) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(\tfrac{1}{2}+\frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2}-\frac{x_3}{h})\hat{S}_3^*], \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{en } BxJ\\ \\ (5.22)\end{array}$$

$$E_{12}(x,t) = - x_3\,\bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2}\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}],$$

$$E_{13}(x,t) = \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,1}] +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1],$$

$$E_{23}(x,t) = \tfrac{1}{4}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,2}] +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2\beta}\,[\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2],$$

$$\mathrm{tr}\,E(x,t) = - x_3\,[\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}] + x_3\,\frac{1+\nu}{\beta}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} +$$

$$+ \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}] + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}\,[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\,\hat{S}_3 -$$

$$- (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3].$$

Los componentes del tensor esfuerzo satisfacen, de acuerdo a 5.22, las ecuaciones

$$S_{11}(x,t) = - x_3\,\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,[(1-\nu)\,\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22}] +$$

$$+ \frac{x_3}{1-2\nu}[(1-\nu)(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \nu\,(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] +$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu}\,[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3],$$

$$S_{22}(x,t) = - x_3\,\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,[(1-\nu)\bar{u}_{3,22} + \nu\,\bar{u}_{3,11}] +$$

$$+ \frac{x_3}{1-2\nu}\,[(1-\nu)(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \nu\,(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] +$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu}\,[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3],$$

$$\left.\begin{aligned}
S_{33}(x,t) = & - x_3 \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}) + \\
& + x_3 \frac{\nu}{1-2\nu} (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \\
& + [(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h}) \hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h}) \hat{S}^*_3], \\
S_{12}(x,t) = & - x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2} [\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1}], \\
S_{13}(x,t) = & \ \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h}) \hat{S}_{3,1} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h}) \hat{S}^*_{3,1}] + \\
& + \tfrac{1}{2} [\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1], \\
S_{23}(x,t) = & \ \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h}) \hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h}) \hat{S}^*_{3,2}] + \\
& + \tfrac{1}{2} [\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2].
\end{aligned}\right\} \text{en } B\times J \quad (5.23)$$

5.9 CONSISTENCIA DE CARGAS DE CUERPO DE O(h)

Al construir, mediante (4,5) y (5.23), las ecuaciones de consistencia para los componentes del vector de cargas de cuerpo $\underline{b}_0$, se obtiene

$$
\left.
\begin{aligned}
b_{0_1} = {} & x_3 \frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221}] - \\
& - \frac{x_3}{1-2\nu} [(1-\nu)(\hat{S}_{1,11} - \hat{S}^*_{1,11}) + \nu(\hat{S}_{2,21} - \hat{S}^*_{2,21})] - \\
& - \frac{x_3}{2} [\hat{S}_{1,22} - \hat{S}^*_{1,22} + \hat{S}_{2,12} - \hat{S}^*_{2,12}] - \tfrac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} [(1+\frac{2x_3}{h})\hat{S}_{3,1} - \\
& - (1-\frac{2x_3}{h})\hat{S}^*_{3,1}] + \rho_0 [-x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\dot{\hat{S}}_1 - \dot{\hat{S}}^*_1)], \\[2ex]
b_{0_2} = {} & x_3 \frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,112}] - \\
& - \frac{x_3}{2} (\hat{S}_{1,21} - \hat{S}^*_{1,21} + \hat{S}_{2,11} - \hat{S}^*_{2,11}) - \\
& - \frac{x_3}{1-2\nu} [(1-\nu)(\hat{S}_{2,22} - \hat{S}^*_{1,22}) + \nu(\hat{S}_{1,12} - \hat{S}^*_{1,12})] - \\
& - \tfrac{1}{4} \frac{1}{1-\nu} [(1+\frac{2x_3}{h})\hat{S}_{3,2} - (1-\frac{2x_3}{h})\hat{S}^*_{3,2}] + \\
& + \rho_0 [-x_3 \ddot{\bar{u}}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\dot{\hat{S}}_2 - \dot{\hat{S}}^*_2)], \\[2ex]
b_{0_3} = {} & - \tfrac{1}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [(x_3 + \frac{x_3^2}{h})(S_{3,11} + S_{3,22}) - (x_3 - \frac{x_3}{h})(\hat{S}^*_{3,11} + \hat{S}^*_{3,22})] - \\
& - \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}) - \frac{1}{h} (\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) - \\
& - \frac{1}{2(1-2\nu)} (\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \\
& + \rho_0 [\ddot{\bar{u}}_3 + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h})\dot{\hat{S}}_3 - (1 - \frac{x_3}{h})\dot{\hat{S}}^*_3]].
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l} \text{en} \\ B \times J \\ (5. \end{array}
$$

5.10 CONSISTENCIA DE TRACCIONES DE SUPERFICIE DE 0(h).

Las ecuaciones de consistencia de 0(h) para los componentes del vector tracción de superficie, según (4,7) y (5.23), son:

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{g}_1(x,t) = {} & [-x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,11} + \nu \bar{u}_{3,22}] + \\
& + \frac{x_3}{1-2\nu}[(1-\nu)(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \nu(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] + \\
& + \frac{\nu}{1-\nu}[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3]]n_1 + \\
& + [-x_3 \frac{\beta}{1+\nu}\bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})]n_2, \\
\hat{g}_2(x,t) = {} & [-x_3 \frac{\beta}{1+\nu}\bar{u}_{3,12} + \frac{x_3}{2}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})]n_1 + \\
& + [-x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,22} + \nu \bar{u}_{3,11}] + \\
& + \frac{x_3}{1-2\nu}[(1-\nu)(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \nu(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] + \\
& + \frac{\nu}{1-\nu}[(\tfrac{1}{2} + \frac{x_3}{h})\hat{S}_3 - (\tfrac{1}{2} - \frac{x_3}{h})\hat{S}^*_3]]n_2, \\
\hat{g}_3(x,t) = {} & [\tfrac{1}{4}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,1} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,1}] + \\
& + \tfrac{1}{2}(\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1)]n_1 + \\
& + [\tfrac{1}{4}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[(x_3 + \frac{x_3^2}{h})\hat{S}_{3,2} - (x_3 - \frac{x_3^2}{h})\hat{S}^*_{3,2}] + \\
& + \tfrac{1}{2}(\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2)]n_2,
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l} \text{sobre} \\ \partial B_2 x J \\ \\ (5.25) \end{array}
$$

5.11 CONSISTENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA DE 0(h).

Las condiciones de consistencia de condiciones iniciales y de frontera de 0(h) se simplifican, según (5.21), a las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
u_{0_1}(x) &= - x_3\, \bar{u}_{3,1}(0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_1(0) - \hat{S}^*_1(0)),\\
u_{0_2}(x) &= - x_3\, \bar{u}_{3,2}(0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_2(0) - \hat{S}^*_2(0)),\\
u_{0_3}(x) &= \bar{u}_3(0) + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h}) \hat{S}_3(0) -\\
&\quad - (1 - \frac{x_3}{h}) \hat{S}^*_3(0)],\\
v_{0_1}(x) &= - x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,1}(0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\dot{\hat{S}}_1(0) - \dot{\hat{S}}^*_1(0)),\\
v_{0_2}(x) &= - x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,2}(0) + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\dot{\hat{S}}_2(0) - \dot{\hat{S}}^*_2(0)),\\
v_{0_3}(x) &= \dot{\bar{u}}_3(0) + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h}) \dot{\hat{S}}_3(0) -\\
&\quad - (1 - \frac{x_3}{h}) \dot{\hat{S}}^*_3(0)].
\end{aligned}\right\} \quad x \varepsilon B \qquad (5.26)$$

$$\left.\begin{aligned}
\hat{u}_1(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,1} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1),\\
\hat{u}_2(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,2} + x_3 \frac{1+\nu}{\beta} (\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2),\\
\hat{u}_3(x,t) &= \bar{u}_3 + x_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\beta(1-\nu)} [(1 + \frac{x_3}{h}) \hat{S}_3 -\\
&\quad - (1 - \frac{x_3}{h}) \hat{S}^*_3].
\end{aligned}\right\} \quad (x,t) \varepsilon \partial B_1 x J \qquad (5.27)$$

5.12 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE 0(h).

Mediante las ecuaciones (5.21) y (5.23) es posible expresar en forma explícita las ecuaciones de quilibrio dinámicas del modelo de 0(h). Estas resultan ser

$$\left.\begin{aligned}
& b^*_{0_1} + \hat{S}_1 + \hat{S}^*_1 + \frac{h\nu}{2(1-\nu)} (\hat{S}_{3,1} - \hat{S}^*_{3,1}) = 0, \\
& b^*_{0_2} + \hat{S}_2 + \hat{S}^*_2 + \frac{h\nu}{2(1-\nu)} (\hat{S}_{3,2} - \hat{S}^*_{3,2}) = 0, \\
& -\frac{h^3}{12} \frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta\Delta\bar{u}_3 + \frac{h^3}{12(1-2\nu)} [(1-\nu)(\hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111} + \hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222}) + \\
& + \nu(\hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211} + \hat{S}_{1,122} - \hat{S}^*_{1,122})] + \frac{h^3}{12} \frac{\nu}{1-\nu} (\hat{S}_{3,11} + \hat{S}^*_{3,11} + \hat{S}_{3,22} + \\
& + \hat{S}^*_{3,22}) + \frac{h^3}{12} (\hat{S}_{1,221} - \hat{S}^*_{1,221} + \hat{S}_{2,121} - \hat{S}^*_{2,121}) + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} + \\
& + \frac{h}{2} (\hat{S}_{1,1} + \hat{S}^*_{1,1} + \hat{S}_{2,2} + \hat{S}^*_{2,2}) + b^*_{0_3} = \rho_0 \{h \ddot{\bar{u}}_3 - \frac{h^3}{12} \Delta \ddot{\bar{u}}_3 + \\
& + \frac{h^2}{24} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)} (\ddot{\hat{S}}_3 + \ddot{\hat{S}}^*_3) + \frac{h^3}{12} \frac{1+\nu}{\beta} (\ddot{\hat{S}}_{2,2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,2} + \ddot{\hat{S}}_{1,1} - \ddot{\hat{S}}^*_{1,1}) \}.
\end{aligned}\right\} \text{en } \Omega x \quad (5.$$

Los términos $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$ están definidos en (4.61).

5.13 ELEMENTOS MECANICOS DE 0(h).

En esta parte presentaremos los elementos mecánicos asociados al modelo de 0(h). Los componentes de los vectores $*\underline{S}$, $*\underline{H}$ satisfacen, según (4.44) y (5.23), las ecuaciones

$$
\left.
\begin{aligned}
*S_1 &= \frac{h}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}_3^*]\,n_1,\\
*S_2 &= \frac{h}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}_3^*]\,n_2,\\
*S_3 &= \frac{h^2}{48}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}[(\hat{S}_{3,1} + \hat{S}^*_{3,1})n_1 + (\hat{S}_{3,2} + \hat{S}^*_{3,2})n_2] +\\
&\quad + \frac{h}{2}\,[(\hat{S}_1 - \hat{S}_1^*)n_1 + (\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*)n_2],\\
*H_1 &= [\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12} - \frac{h^3}{24}(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})]n_1\\
&\quad + [\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,[(1-\nu)\bar{u}_{3,22} + \nu\,\bar{u}_{3,11}] -\\
&\quad - \frac{h^3}{12(1-2\nu)}\,[(1-\nu)(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \nu\,(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})] -\\
&\quad - \frac{h^2\nu}{12(1-\nu)}\,(\hat{S}_3 + \hat{S}_3^*)]\,n_2\ ,\\
*H_2 &= [-\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22}] +\\
&\quad + \frac{h^3}{12(1-2\nu)}\,[(1-\nu)(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \nu\,(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})] +\\
&\quad + \frac{h^2}{12}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,(\hat{S}_3 + \hat{S}_3^*)]\,n_1 +\\
&\quad + [-\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12} + \frac{h^3}{24}\,(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}_{2,1})]\,n_2,\\
*H_3 &= 0.
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
&\text{sobre}\\
&\partial S_3 x J\\
&\\
&(5.29)
\end{aligned}
$$

Los componentes de los vectores $^*\underline{S}_{\underline{n}}$, $^*\underline{S}_{\underline{\tau}}$ satisfacen, según (5.29), las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
(^*\underline{S}_{\underline{n}})_1 &= \frac{h}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3]n_1, \\
(^*\underline{S}_{\underline{n}})_2 &= \frac{h}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,[\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3]n_2, \\
(^*\underline{S}_{\underline{n}})_3 &= 0, \\
(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 &= (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = 0, \\
(^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 &= \frac{h^2}{48}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,[(\hat{S}_{3,1} + \hat{S}^*_{3,1})n_1 + \\
&\quad + (\hat{S}_{3,2} + \hat{S}^*_{3,2})n_2] + \frac{h}{2}\,[(\hat{S}_1 - \hat{S}^*_1)n_1 + \\
&\quad + (\hat{S}_2 - \hat{S}^*_2)n_2].
\end{aligned}\right\}\ \text{sobre } \partial S_3 x J \quad (5.30)$$

Las ecuaciones de momentos, torsionante y flexionante, construidas con (4.47) y (5.29) son:

$$\begin{aligned}
^*H_{\underline{n}} = {} & [\frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12} - \frac{h^3}{24}\,(\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})](n_1^2 - n_2^2) + \\
& + \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,(\bar{u}_{3,22} - \bar{u}_{3,11})n_1 n_2 + \\
& + \frac{h^3}{12}\,[\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1} - \hat{S}_{2,2} + \hat{S}^*_{2,2}]n_1 n_2.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{H}_{\underline{\tau}} = {} & [- \frac{h^3}{12} \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12} + \frac{h^3}{24} (\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})] 2n_1 n_2 - \\
& - \frac{h^3}{12} \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\bar{u}_{3,11} n_1^2 + \bar{u}_{3,22} n_2^2) + \\
& + \nu (\bar{u}_{3,11} n_2^2 + \bar{u}_{3,22} n_1^2)] + \\
& + \frac{h^3}{12(1-2\nu)} [(1-\nu)[(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) n_1^2 + (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) n_2^2] + \\
& + \nu [(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) n_2^2 + (\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) n_1^2]] + \\
& + \frac{h^2 \nu}{12(1-\nu)} (\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) .
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \text{sobre} \\ & \partial S_3 x J \\ & (5.31) \end{aligned}$$

5.14 MODELO DE KIRCHHOFF DE 0(h) CON TRACCIONES NULAS.

En esta parte, bajo hipótesis en cargas, simplificaremos el modelo de Kirchhoff de 0(h). El modelo resultante será llamado modelo mecánico de Kirchhoff de 0(h) con tracciones nulas.

Sean $\underline{\hat{S}} = (0,0,0)$, $\underline{\hat{S}}^* = (0,0,0)$ sobre $\partial B_+ xJ$ y $\partial B_- xJ$, respectivamente. Entonces, de (5.21) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,1}, \\ u_2(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,2}, \\ u_3(x,t) &= \bar{u}_3. \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{en } BxJ \\ (5.32) \end{array}$$

Al construir, mediante (5.32) los componentes del tensor de deformaciones, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} E_{11}(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,11}, \\ E_{22}(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,22}, \\ E_{33}(x,t) &= 0, \\ E_{12}(x,t) &= - x_3\, \bar{u}_{3,12}, \\ E_{13}(x,t) &= E_{23}(x,t) = 0, \\ \mathrm{tr}\underset{\sim}{E}(x,t) &= - x_3\, \Delta\, \bar{u}_3. \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{en } BxJ \\ (5.33) \end{array}$$

Los componentes del tensor esfuerzo satisfacen las ecuaciones, construidas mediante (5.33), siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= -x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,11} + \nu\, \bar{u}_{3,22}], \\
S_{22}(x,t) &= -x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,22} + \nu\, \bar{u}_{3,11}], \\
S_{33}(x,t) &= -x_3 \frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}) \\
S_{12}(x,t) &= -x_3 \frac{\beta}{1+\nu}\, \bar{u}_{3,12}, \\
S_{13}(x,t) &= S_{23}(x,t) = 0.
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}(x,t)\,\varepsilon BxJ \\ \\ (5.34)\end{array}$$

Las ecuaciones de consistencia de cargas de cuerpo (5.24) se simplifican a

$$\left.\begin{aligned}
b_{0_1} &= x_3 \frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221}] - \rho_0\, x_3\, \ddot{\bar{u}}_{3,1}, \\
b_{0_2} &= x_3 \frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,112}] - \rho_0\, x_3\, \ddot{\bar{u}}_{3,2}, \\
b_{0_3} &= -\frac{\beta\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{u}_{3,11} + \bar{u}_{3,22}) + \rho_0\, \ddot{\bar{u}}_3.
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{en } BxJ \\ \\ (5.35)\end{array}$$

Las condiciones de consistencia para las tracciones de superficie de 0(h) están dadas, de acuerdo a (5.25), por

$$\left.\begin{aligned}
\hat{g}_1(x,t) &= -\, x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,11} + \nu\bar{u}_{3,22}]n_1 - \\
&\quad -\, x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12}\, n_2, \\
\hat{g}_2(x,t) &= -\, x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12}\, n_1 + \\
&\quad + [-\, x_3 \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\bar{u}_{3,22} + \nu\bar{u}_{3,11}]]n_2, \\
\hat{g}_3(x,t) &= 0.
\end{aligned}\right\} (x,t)\varepsilon\partial B_2 xJ \quad (5.36)$$

Las condiciones de consistencia en condiciones iniciales y de frontera de 0(h) son

$$\left.\begin{aligned}
u_{0_1}(x) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,1}(0), \\
u_{0_2}(x) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,2}(0), \\
u_{0_3}(x) &= \quad \bar{u}_3(0), \\
v_{0_1}(x) &= -\, x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,1}(0), \\
v_{0_2}(x) &= -\, x_3\, \dot{\bar{u}}_{3,2}(0), \\
v_{0_3}(x) &= \quad \dot{\bar{u}}_3(0).
\end{aligned}\right\} x\varepsilon B \quad (5.37)$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{u}_1(x,t) &= -\,x_3\,\bar{u}_{3,1},\\ \hat{u}_2(x,t) &= -\,x_3\,\bar{u}_{3,2},\\ \hat{u}_3(x,t) &= \bar{u}_3.\end{aligned}\right\}\ (x,t)\in\partial B_1 xJ \quad (5.38)$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico asociadas al modelo de O(h) se simplifican a

$$\left.\begin{aligned}& b^*_{0_1} = b^*_{0_2} = 0,\\ & -\frac{h^3}{12}\frac{\beta(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Delta\Delta\bar{u}_3 + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} + b^*_{0_3} =\\ & = \rho_0\,\{h\,\ddot{\bar{u}}_3 - \frac{h^3}{12}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3\}.\end{aligned}\right\}\ \text{en } \Omega xJ \quad (5.39)$$

Los componentes de los vectores $*\underline{S}$, $*\underline{H}$, satisfacen

$$\left.\begin{aligned}& *S_1 = *S_2 = *S_3 = 0,\\ & *H_1 = \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}\bar{u}_{3,12}\,n_1 + \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\bar{u}_{3,22}+\nu\bar{u}_{3,11}]n_2,\\ & *H_2 = -\frac{h^3}{12}\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\bar{u}_{3,11}+\nu\bar{u}_{3,22}]n_1 - \frac{h^3}{12}\frac{\beta}{1+\nu}\bar{u}_{3,12}\,n_2,\\ & *H_3 = 0.\end{aligned}\right\}\ \text{sobre } \partial S_3 x\ J \quad (5.40)$$

Por tanto, los componentes de los vectores $*\underline{S}_{\underline{n}}$, $*\underline{S}_{\underline{\tau}}$ satisfacen,

$$\left.\begin{aligned} (*\underline{S}_{\underline{n}})_1 &= (*\underline{S}_{\underline{n}})_2 = (*\underline{S}_{\underline{n}})_3 = 0, \\ (*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 &= (*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = (*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 = 0. \end{aligned}\right\} \text{sobre } \partial S_3 x J \qquad (5.41)$$

Las ecuaciones de los momentos torsionantes y flexionantes son:

$$\left.\begin{aligned} *H_{\underline{n}} &= \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,[\bar{u}_{3,12}\,(n_1^2 - n_2^2) - (\bar{u}_{3,11} - \bar{u}_{3,22})n_1 n_2], \\ *H_{\underline{\tau}} &= -\frac{h^3}{6}\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12}\,n_1 n_2 - \\ &\quad - \frac{h^3}{12}\,\frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,[(1-\nu)(\bar{u}_{3,11}\,n_1^2 + \bar{u}_{3,22}\,n_2^2) + \\ &\quad + \nu\,(\bar{u}_{3,11}\,n_2^2 + \bar{u}_{3,22}\,n_1^2)]. \end{aligned}\right\} \text{sobre } \partial S_3 x J \qquad (5.42)$$

5.15 *MODELO DE LA TEORIA DE KIRCHHOFF DE PLACAS ELASTICAS LINEALES.*

De acuerdo a la observación 5.2 el cuerpo tridimensional de Kirchhoff presentado en este trabajo es llamado en el contexto de la Resistencia de Materiales,placa. El objetivo de esta parte es presentar el modelo mecánico clásico de la teoria de Kirchhoff de placas elásticas lineales. Las hipótesis características de tal teoría son:

$$\left.\begin{aligned} E_{13}(x,t) &= E_{23}(x,t) = 0, \\ S_{33}(x,t) &= 0. \end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.43)$$

Obsérvese que las hipótesis (5.43) se obtienen del modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas al suponer que los términos de $0(h)$ en deformaciones, ecuación (5.13), son también despreciables. En este caso los componentes del tensor de deformaciones están dados por:

$$\left.\begin{aligned} E_{11}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,11}, \\ E_{22}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,22}, \\ E_{33}(x,t) &= x_3 \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \bar{u}_3, \\ E_{12}(x,t) &= -\, x_3\, \bar{u}_{3,12}, \\ E_{13}(x,t) &= E_{23}(x,t) = 0. \end{aligned}\right\} \text{en } BxJ \quad (5.44)$$

Los componentes del tensor de esfuerzos satisfacen, de acuerdo a (5.44), las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
S_{11}(x,t) &= -\,x_3\,\frac{\beta}{(1-\nu^2)}\,[\bar{u}_{3,11} + \nu\,\bar{u}_{3,22}],\\
S_{22}(x,t) &= -\,x_3\,\frac{\beta}{(1-\nu^2)}\,[\bar{u}_{3,22} + \nu\,\bar{u}_{3,11}],\\
S_{33}(x,t) &= 0,\\
S_{12}(x,t) &= -\,x_3\,\frac{\beta}{1+\nu}\,\bar{u}_{3,12},\\
S_{13}(x,t) &= S_{23}(x,t) = 0.
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}\text{en } BxJ\\ \\ (5.45)\end{array}$$

Las condiciones de consistencia para los componentes del vector de cargas de cuerpo se expresan mediante las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
b_{0_1} &= x_3\,\frac{\beta}{1-\nu^2}\,[\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221}] - \rho_0\,x_3\,\ddot{\bar{u}}_{3,1},\\
b_{0_2} &= x_3\,\frac{\beta}{1-\nu^2}\,[\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,121}] - \rho_0\,x_3\,\ddot{\bar{u}}_{3,2},\\
b_{0_3} &= \rho_0\,\{\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{x_3^2}{2}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3\}.
\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}\text{en } BxJ\\ (5.46)\end{array}$$

Las ecuaciones de consistencia para los componentes del vector de tracciones de superficie son

$$\left.\begin{aligned}\hat{g}_1(x,t) &= -\, x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} (\bar{u}_{3,11} + \nu \bar{u}_{3,22}) n_1 - x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12}\, n_2, \\ \hat{g}_2(x,t) &= -\, x_3 \frac{\beta}{1+\nu} \bar{u}_{3,12}\, n_1 - x_3 \frac{\beta}{1-\nu^2} (\bar{u}_{3,22} + \nu \bar{u}_{3,11}) n_2, \\ \hat{g}_3(x,t) &= 0.\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{sobre} \\ \partial B_2 x J \\ (5.47)\end{array}$$

Las ecuaciones de consistencia en condiciones iniciales y de frontera están dadas por (5.17) y (5.18) y las de equilibrio dinámico por (5.19), esto es,

$$\left.\begin{aligned}& b^*_{0_1} = b^*_{0_2} = 0, \\ & -D\Delta\Delta\, \bar{u}_3 + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} + b^*_{0_3} = \rho_0\, [h\, \ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24} \frac{3\nu-2}{1-\nu} \Delta\, \ddot{\bar{u}}_3].\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{en } \Omega x J \\ (5.48)\end{array}$$

Los componentes de los vectores $^*\underline{S}_{\underline{n}}$, $^*\underline{S}_{\underline{\tau}}$, satisfacen

$$\left.\begin{aligned}(^*S_{\underline{n}})_1 &= (^*S_{\underline{n}})_2 = (^*S_{\underline{n}})_3 = 0, \\ (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_1 &= (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_2 = (^*\underline{S}_{\underline{\tau}})_3 = 0,\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{sobre } \partial S_3 x J \\ (5.49)\end{array}$$

y, los momentos, torsionante y flexionante, satisfacen la ecuación (5.20).

Las ecuaciones (5.44) - (5.49), además de (5.17), (5.18) y (5.20), constituyen el modelo mecánico de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales.

Observación 5.3. Bajo la hipótesis de que los términos de $O(h)$ en deformaciones son despreciables en el modelo de $O(h^2)$ con tracciones nulas se obtienen las ecuaciones de campo clásicas de la teoría de Kirchhoff de placas elásticas lineales. Sin embargo, en la ecuación de equilibrio dinámica (5.48), aparece un término adicional a la ecuación clásica de equilibrio. Este término toma en cuenta la inercia de rotación de la placa. Modelos similares, para el caso dinámico, han sido desarrollados recientemente en [23] y, para el caso estático, en [7]. Las condiciones de consistencia en cargas de cuerpo, tracciones de superficie y condiciones iniciales y de frontera, no se presentan en las referencias citadas ni los términos $\bar{m}_{1,2}$, $\bar{m}_{2,1}$ se consideran en la ecuación de equilibrio. Esto último porque se considera que los componentes b_{0_1}, b_{0_2} del vector de cargas de cuerpo son nulos. Hay que observar que esta hipótesis no puede ser arbitraria puesto que, según las ecuaciones de consistencia correspondientes, esto introduciría condiciones adicionales en la función $\bar{u}_3$.

En base a la presente observación y a la 5.2 se concluye que los modelos de placas, en las teorías de Hencky y Kirchhof, son modelos de $O(h^2)$ en desplazamientos con tracciones nulas. ∎

5.16 FORMULA DE GREEN: MODELO DE KIRCHHOFF DE $0(h^2)$

En esta parte presentaremos, en forma explícita los términos de la fórmula de Green (4.78), para el modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$. De acuerdo a (4.25) y (5.4) se tiene que

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha,\alpha\delta}\, v\, dx = D \int_\Omega \Delta\Delta\bar{u}_3\, v\, dx - \\
&- \frac{\nu h^2}{12(1-\nu)} \int_\Omega \{\Delta(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3) + \frac{h}{\nu}((\hat{S}_{1,122} - \hat{S}^*_{1,122} + \hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211}) + \\
&+ (\hat{S}_{2,222} - \hat{S}^*_{2,222} + \hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111}))\}\, v\, dx\,, \\
&\int_\Omega \varepsilon_{3\gamma\delta}\, M_{\gamma\alpha}\, v_{,\alpha\delta}\, dx = D \int_\Omega \Delta\bar{u}_3\, \Delta v\, dx + \\
&+ D \int_\Omega 2(1-\nu)[\bar{u}_{3,12}\, v_{,12} - \bar{u}_{3,11}\, v_{,22} - \bar{u}_{3,22}\, v_{,11}]\, dx - \\
&- \frac{h^3}{12} \int_\Omega (\hat{S}_{1,2} - \hat{S}^*_{1,2} + \hat{S}_{2,1} - \hat{S}^*_{2,1})\, v_{,12}\, dx - \\
&- \frac{h^3}{12}\, \frac{\nu}{1-\nu} \int_\Omega \{ \frac{1}{h}(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3)\Delta v + [(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1}) + \frac{1}{\nu}(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2})]\, v_{,22} + \\
&+ [(\hat{S}_{2,2} - \hat{S}^*_{2,2}) + \frac{1}{\nu}(\hat{S}_{1,1} - \hat{S}^*_{1,1})]\, v_{,11}\}\, dx.
\end{aligned}
\right\} \quad (5.5
$$

<u>Observación 5.4</u>. Obsérvese que en el caso $\underline{\hat{S}} = \underline{0}$, sobre $\partial B_+ xJ$ y, $\underline{\hat{S}}^* = \underline{0}$ sobre $\partial B_- xJ$ se obtiene la fórmula de Green clásica de placas elásticas [7]. ■

5.17 ALGUNOS PROBLEMAS DE VALORES SOBRE LA FRONTERA E INICIALES ASOCIADOS AL MODELO DE $0(h^2)$: CONDICIONES DE FRONTERA LINEALES.

En esta parte presentaremos algunos problemas de valores en la frontera e iniciales asociados al modelo Kirchhoff de $0(h^2)$. De acuerdo a la ecuación (5.8) se observa que el equilibrio dinámico del cuerpo tridimensional de Kirchhoff está gobernado por una ecuación diferencial parcial bidimensional, de segundo orden en el tiempo y espacialmente de cuarto orden. De acuerdo a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales las condiciones iniciales a especificar para que el problema sea bien planteado son sobre la función y su primer derivada. Además, el número de condiciones de frontera apropiado son dos, estas están determinadas por las imágenes bajo los operadores de Dirichlet y Neumann que aparecen en la fórmula de Green (4.69), esto es,

$$\left.\begin{aligned} \gamma v &= \left(v, \frac{\partial v}{\partial n}\right), \\ \partial u &= \left({}^*S_3(u) + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_\gamma\,(u) n_\delta - \frac{\partial {}^*H_n}{\partial \underline{\tau}},\ {}^*H_{\underline{\tau}}(u)\right). \end{aligned}\right\} \quad (5.51)$$

De acuerdo a (5.51) se pueden tener los siguientes tipos de problemas de valores sobre la frontera: tipo Dirichlet donde se especifican, sobre alguna parte de la frontera, las condiciones $(5.51)_1$; tipo Neumann, donde se prescribe $(5.51)_2$; tipo mixto donde se especifican, en número apropiado, combinaciones de las condiciones $(5.51)_1$ y $(5.52)_2$.

Consideremos el siguiente problema de valores sobre la frontera e iniciales asociado a un cuerpo tridimensional de Krichhoff, el cual satisface las hipótesis del modelo de $0(h^2)$.

Dados $\underline{b}_0^* = (0,\ 0,\ b_{0_3}^*)$ en ΩxJ, $\hat{\underline{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$, sobre $\partial B_+ xJ$, $\hat{\underline{S}}^* = (\hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*, \hat{S}_3^*)$ sobre $\partial B_- xJ$, u_0^*, v_0^* en $\Omega x\{0\}$, $\hat{w}$, $\hat{v}$ sobre $\partial\Omega_1 xJ$, $\hat{F}$, $\hat{M}$ sobre $\partial\Omega_2 xJ$, $h:\Omega\to\mathbb{R}^+$, $\beta > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$, encuentre $\bar{u}_3:\Omega xJ\to\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
-\rho_0[h\,\ddot{\bar{u}}_3 + \dfrac{h^3}{24}\dfrac{\nu}{1-\nu}\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3] - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 + \\[2ex]
+\hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b_{0_3}^* + m_{2,1} - m_{1,2} = G\,(\hat{\underline{S}}, \hat{\underline{S}}^*, h, \beta, \nu),
\end{array}\right\}\ \text{en } \Omega xJ, \\[4ex]
\bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \dot{\bar{u}}_3(0) = v_0^*,\quad \text{en } \Omega, \\[3ex]
\bar{u}_3 = \hat{w},\ \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v},\ \text{sobre}\ \ \partial\Omega_1 xJ, \\[3ex]
\left.\begin{array}{l}
{}^*S_3(\bar{u}_3) + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_\gamma\,(\bar{u}_3) - \dfrac{\partial \overset{*}{H}_{\underline{n}}(\bar{u}_3)}{\partial\tau} = \hat{F}, \\[3ex]
{}^*H_{\underline{\tau}}\,(\bar{u}_3) = \hat{M}.
\end{array}\right\}\ \text{sobre } \partial\Omega_2 xJ
\end{array}\right\}\quad (5.52)$$

Aquí

$$\left.\begin{aligned} G(\underline{\hat{S}}, \underline{\hat{S}}^*, h, \beta, \nu) &= \frac{h^2}{24}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\beta(1-\nu)}(\ddot{\hat{S}}_3 + \ddot{\hat{S}}^*_3) - \\ &- \frac{h^3}{24}\frac{\nu(1+\nu)}{\beta(1-\nu)}(\ddot{\hat{S}}_{1,1} - \ddot{\hat{S}}^*_{1,1} + \ddot{\hat{S}}_{2,2} - \ddot{\hat{S}}^*_{2,2}) - \\ &- \frac{h^3}{12(1-\nu)}[\hat{S}_{1,212} - \hat{S}^*_{1,212} + \hat{S}_{2,211} - \hat{S}^*_{2,211} + \hat{S}_{2,222} - \\ &- \hat{S}^*_{2,222} + \hat{S}_{1,111} - \hat{S}^*_{1,111}] - \frac{h^2\nu}{12(1-\nu)}[\Delta(\hat{S}_3 + \hat{S}^*_3)]. \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{sobre } \Omega x J \\ (5.53)\end{matrix}$$

Observación 5.4. Para el caso del modelo de Kirchhoff de $O(h^2)$ con tracciones nulas el problema (5.52) se simplifica a:

Encuentre $\bar{u}_3 : \Omega x J \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} & -\rho_0[h\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\frac{3\nu-2}{1-\nu}\Delta\ddot{\bar{u}}_3] - D\Delta\Delta\bar{u}_3 + b^*_{0_3} + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} = 0, \quad \text{en } \Omega x J \\ & \bar{u}_3(0) = u^*_0,\ \dot{\bar{u}}_3(0) = v^*_0, \text{ en } \Omega, \\ & \bar{u}_3 = \hat{w}, \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \text{ sobre } \partial\Omega_1 x J, \\ & \left.\begin{aligned} & {}^*S_3(\bar{u}_3) + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_\gamma(\bar{u}_3) - \frac{\partial H\underline{n}(\bar{u}_3)}{\partial\tau} = \hat{F}, \\ & {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}. \end{aligned}\right\} \text{sobre } \partial\Omega_2 x J \end{aligned}\right\} (5.54)$$

El problema (5.54) corresponde a una placa elástica lineal que satisface hipótesis tipo Hencky en desplazamiento donde se considera la inercia de rotación de la misma, [13].

Algunas condiciones de frontera clásicas en la teoría de placas elásticas lineales son: empotramiento, apoyo simple, borde libre. Tales condiciones corresponden a:

$$\left.\begin{aligned} \gamma\bar{u}_3 &= (0,\ 0), \\ {}^*H_{\underline{\underline{T}}} &= 0,\ \bar{u}_3 = 0, \\ \partial\bar{u}_3 &= (0,\ 0). \end{aligned}\right\} \quad \text{sobre } \partial\Omega \mathrm{x} J \quad (5.55)$$

respectivamente.

Además, si los términos de O(h) en deformaciones se desprecian, el problema (5.54) corresponde a una placa elástica lineal que satisface las hipótesis de Kirchhoff donde se considera su inercia de rotación. $\blacksquare$

5.18 CONDICIONES DE FRONTERA TIPO FRICCION.

En esta parte presentaremos algunos problemas con condiciones de frontera no lineales, tipo fricción, asociados al modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$. Consideremos que sobre una tercera parte del cuerpo en estudio se satisfacen, además de las condiciones clásicas de los problemas (5.52) y (5.53), alguna de las siguientes condiciones de frontera:

i) Momento con fricción [8],

$$\left.\begin{aligned} &|{}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| < g_1 \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = 0, \\ &|{}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| = g_1 \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0: \\ &\qquad \frac{\partial \dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = -\lambda\, {}^*H_{\underline{\tau}}. \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{sobre } \partial\Omega_3 x J \\ (5.56) \end{array}$$

Aquí $0 < g_1 < +\infty$, es un dato.

ii) Cortante con fricción [8],

$$\left.\begin{aligned} &|F_3(\bar{u}_3)| < g_2 \Rightarrow \dot{\bar{u}}_3 = 0, \\ &|F_3(\bar{u}_3)| = g_2 \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0: \\ &\qquad \dot{\bar{u}}_3 = -\lambda\, F_3(\bar{u}_3), \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{sobre } \partial\Omega_3 x J \\ (5.57) \end{array}$$

donde, $0 < g_2 < +\infty$ es dato y

$$F_3(\bar{u}_3) = {}^*S_3(\bar{u}_3) + \varepsilon_{3\gamma\delta}\, m_\gamma(\bar{u}_3) - \frac{\partial^* \underline{H}(\bar{u}_3)}{\partial \tau}\ , \qquad (5.58)$$

$$\text{sobre } \partial\Omega_3 x J.$$

El problema de valores sobre la frontera e iniciales correspondiente a la restricción (5.56), resulta ser:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Encuentre } \bar{u}_3 : \Omega x J \to \mathbb{R} : \\
\left.\begin{array}{l} -\rho_0\ [h\ \ddot{\bar{u}}_3 + \dfrac{h^3}{24}\dfrac{\nu}{1-\nu}\ \Delta\ \ddot{\bar{u}}_3] - D\ \Delta\Delta\ \bar{u}_3 + \\ + \hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b_{0_3}^* + m_{2,1} - m_{1,2} = G(\hat{\underline{S}}, \hat{\underline{S}}^*, h, \beta\ \nu), \end{array}\right\} \text{en } \Omega x J \\
\bar{u}_3(0) = u_0^*\ ,\ \dot{\bar{u}}_3(0) = v_0^*,\ ,\ \text{en } \Omega,\ . \\
\bar{u}_3 = \hat{w}\ ,\ \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}\ ,\ \text{sobre } \partial\Omega_1 x J, \\
\left.\begin{array}{l} F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \\ {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \end{array}\right\} \text{sobre } \partial\Omega_2 x J \\
\left.\begin{array}{l} |{}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| < g_1 \Rightarrow \dfrac{\partial\dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = 0, \\ |{}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| = g_1 \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0 : \dfrac{\partial\dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = -\lambda\, {}^*H_{\underline{\tau}}. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{sobre} \\ \partial\Omega_3 x J\end{array}
\end{array}\right\} \quad (5.59)$$

En el caso de que las condiciones de fricción sea del tipo (5.57), el problema de valores sobre la frontera e iniciales correspondiente es

Encuentre $\bar{u}_3 : \Omega \times J \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
-\rho_0[h\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\ddot{\bar{u}}_3] - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 + \\
+\hat{S}_3 + \hat{S}_3^* + b^*_{0_3} + m_{2,1} - m_{1,2} = G(\hat{\underline{S}}, \hat{\underline{S}}^*, h, \beta, \nu)
\end{array}\right\}\text{en } \Omega \times J \\
\bar{u}_3(0) = u_0^*, \quad \dot{\bar{u}}_3(0) = v_0^*, \text{ en } \Omega, \\
\bar{u}_3 = \hat{w}, \quad \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \text{ sobre } \partial\Omega_1 \times J, \\
\left.\begin{array}{l}
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \\
{}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3) = \hat{M},
\end{array}\right\}\text{sobre } \partial\Omega_2 \times J, \\
\left.\begin{array}{l}
|F_3(\bar{u}_3)| < g_2 \Rightarrow \dot{\bar{u}}_3 = 0. \\
|F_3(\bar{u}_3)| = g_2 \Rightarrow \exists\, \lambda \geq 0: \\
\qquad \dot{\bar{u}}_3 = -\lambda\, F_3(\bar{u}_3).
\end{array}\right\}\text{sobre } \partial\Omega_3 \times J
\end{array}\right\} \quad (5.60)$$

Observación 5.5 En el modelo de Kirchhoff de $0(h^2)$ con tracciones nulas los problemas (5.59) y (5.60) se reducen a:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{Encuentre } \ \bar{u}_3 : \Omega x J \to \mathbb{R}: \\[2mm]
-\rho_0[h\,\ddot{\bar{u}}_3 + \dfrac{h^3}{24}\,\dfrac{3\nu-2}{1-\nu}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3] - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 + b^*_{0_3} + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} = 0, \\[1mm]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } \Omega \text{ x } J, \\[3mm]
\bar{u}_3(0) = u^*_0 \ , \ \dot{\bar{u}}_3(0) = v^*_0, \ \text{en } \Omega, \\[2mm]
\bar{u}_3 = \hat{w}, \ \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \ \text{ sobre } \partial\Omega_1 x J, \\[2mm]
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \ {}^*\!H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \ \text{sobre } \partial\Omega_2 x J, \\[2mm]
\left.
\begin{array}{l}
|{}^*\!H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| < g_1 \Rightarrow \dfrac{\partial \dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = 0, \\[2mm]
|{}^*\!H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3)| = g_1 \Rightarrow \ \exists\ \lambda \geq 0: \ \dfrac{\partial \dot{\bar{u}}_3}{\partial n} = -\lambda\,{}^*\!H_{\underline{\tau}}
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l} \text{sobre} \\ \partial\Omega_3 x J \end{array}
\end{array}
\right\} \quad (5.61)
$$

$$
\text{Encuentre } \ \bar{u}_3 : \Omega x J \to \mathbb{R} :
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
-\rho_0[h\,\bar{u}_3 + \dfrac{h^3}{24}\,\dfrac{3\nu-2}{1-\nu}\,\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3] - D\,\Delta\Delta\,\bar{u}_3 + b^*_{0_3} + \bar{m}_{2,1} - \bar{m}_{1,2} = 0 \\[1mm]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } \Omega \text{ x } J, \\[3mm]
\bar{u}_3(0) = u^*_0, \ \dot{\bar{u}}_3(0) = v^*_0, \ \text{en } \Omega, \\[2mm]
\bar{u}_3 = \hat{w}, \ \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \ \text{sobre } \partial\Omega_1 x J, \\[2mm]
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \ {}^*\!H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \ \text{sobre } \partial\Omega_2 x J, \\[2mm]
|F_3(\bar{u}_3)| < g_2 \Rightarrow \dot{\bar{u}}_3 = 0, \\[2mm]
\left.
\begin{array}{l}
|F_3(\bar{u}_3)| = g_2 \Rightarrow \ \exists\ \lambda \geq 0: \\[1mm]
\qquad\qquad \dot{\bar{u}}_3 = -\lambda\,F_3(\bar{u}_3).
\end{array}
\right\} \text{ sobre } \partial\Omega_3 x J
\end{array}
\right\} \quad (5.62)
$$

$\blacksquare$

Observación 5.5 Los problemas de valores sobre la frontera presentados en las secciones 5.16 y 5.17 son, desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, bien planteados. Cada uno de tales problemas caracteriza un problema tridimensional asociado el cual se conoce; mediante las condiciones de consistencia, en términos de sus soluciones bidimensionales. ■

Observación 5.6 En la teoría de placas es común suponer que $\underline{b}_0 = (0,\ 0\ b_{0_3})$ en BxJ. Según las ecuaciones de consistencia (5.15) y (5.46) se observa que esto es satisfecho solo si

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)}\,[\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,122}] - \rho_0\,\ddot{\bar{u}}_{3,1} = 0,\\[2ex] &\frac{\beta(2-\nu)}{2(1-\nu^2)}\,[\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,112}] - \rho_0\,\ddot{\bar{u}}_{3,2} = 0. \end{aligned}\right\}\ \text{en } \Omega\text{xJ} \quad (5.63)$$

en la teoría de Hencky y, en la teoría de Kirchhoff,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\beta}{1-\nu^2}[\bar{u}_{3,111} + \bar{u}_{3,221}] - \rho_0\,\ddot{\bar{u}}_{3,1} = 0,\\[2ex] &\frac{\beta}{1-\nu^2}[\bar{u}_{3,222} + \bar{u}_{3,121}] - \rho_0\,\ddot{\bar{u}}_{3,2} = 0. \end{aligned}\right\}\ \text{en } \Omega\text{xJ} \quad (5.64)$$

En este caso además se satisface $\bar{m}_2 = \bar{m}_1 = 0$, en ΩxJ. Por tanto, los problemas de valores sobre la frontera e iniciales asociados a ambas teorias de placas son de la forma

Encuentre $\bar{u}_3 : \Omega xJ \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}
-\rho_0[h\ddot{\bar{u}}_3 + \frac{h^3}{24}\frac{3\nu-2}{1-\nu}\Delta\ddot{\bar{u}}_3] - D\,\Delta\Delta\,\bar{u}_3 + b^*_{0_3} = 0, \text{ en } \Omega xJ, \\
\bar{u}_3(0) = u^*_0,\ \dot{\bar{u}}_3(0) = v^*_0, \text{ en } \Omega, \\
\bar{u}_3 = \hat{w},\ \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \text{ sobre } \partial\Omega_1 xJ, \\
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},\ {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \text{ sobre } \partial\Omega_2 xJ, \\
\left.\begin{array}{l}
|F(\bar{u}_3)| < g \Rightarrow L\,\dot{\bar{u}}_3 = 0, \\
|F(\bar{u}_3)| = g \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0 : \\
\qquad L\,\dot{\bar{u}}_3 = -\lambda\, F(\bar{u}_3).
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{sobre } \partial\Omega_3 xJ, \\ 0 < g < +\infty\end{array}
\end{array}\right\} \quad (5.65)$$

Si las condiciones sobre $\partial\Omega_3 xJ$ son de momento con fricción, entonces $F = {}^*H_{\underline{\tau}}$ y $L = \frac{\partial}{\partial n}$. En caso de condiciones de cortante con fricción $F = F_3$, $L = I$. Es común también en las teorias de placas despreciar el término

$$I_R(\ddot{\bar{u}}_3) = \frac{h^3}{24}\frac{3\nu-2}{1-\nu}\Delta\,\ddot{\bar{u}}_3, \text{ en } \Omega xJ, \qquad (5.66)$$

el cual es llamado inercia de rotación de la placa. ■

6. FORMULACION VARIACIONAL DEL PROBLEMA DE PLACAS ELASTICAS CON CONDICIONES DE FRONTERA TIPO FRICCION.

El objetivo de este capítulo es aplicar los resultados de los capítulos 2 y 3 a un problema de valores sobre la frontera e iniciales de una placa elástica sujeta, sobre parte de su frontera, a condición tipo fricción. La formulación de tal tipo de problemas se presenta a través de los capítulos 4 y 5. De acuerdo a (2.10) y (5.65) se observa que para cumplir nuestro objetivo es necesario despreciar la inercia de rotación de la placa. El problema de nuestro interés es, por tanto:

Dados $\underline{S} = (0,0,0)$ sobre $\partial B_+ xJ$; $\underline{S}^* = (0,0,0)$ sobre $\partial B_- xJ$; $\underline{\overset{*}{b}}_0 = (0,0\ \overset{*}{b}_{0_3})$ en ΩxJ : $\overset{*}{u}_0$, $\overset{*}{v}_0$ en Ω ; $\hat{w}$, $\hat{v}$, sobre $\partial\Omega_1 xJ$; $\hat{F}$, $\hat{M}$ sobre $\partial\Omega_2 xJ$; $g:\partial\Omega_3 xJ \to \mathbb{R}^+$ sobre $\partial\Omega_3 xJ$; $h:\Omega\to\mathbb{R}^+$, $\beta > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$, encuentre $\bar{u}_3:\Omega xJ \to \mathbb{R}$:

$$
\left.
\begin{array}{l}
-\rho_0\, h\, \bar{u}_3'' - D\,\Delta\Delta\, \bar{u}_3 + b^*_{0_3} = 0, \quad \text{en } \Omega x J, \\[2mm]
\bar{u}_3(0) = u^*_0, \; \bar{u}_3'(0) = v^*_0, \; \text{en } \Omega, \\[2mm]
\bar{u}_3 = \hat{w}, \; \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \; \text{sobre } \partial\Omega_1 x J, \\[2mm]
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, \; {}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \; \text{sobre } \partial\Omega_2 x J, \\[2mm]
\left.
\begin{array}{l}
|F(\bar{u}_3)| < g \Rightarrow L(\bar{u}_3') = 0, \\[2mm]
|F(\bar{u}_3)| = g \Rightarrow \exists\, \lambda \geq 0 : \\[2mm]
\qquad L(\bar{u}_3') = -\lambda F(\bar{u}_3), \\
\qquad L_c(\bar{u}_3') = 0.
\end{array}
\right\} \begin{array}{l}\text{sobre} \\ \partial\Omega_3 x J.\end{array}
\end{array}
\right\} \quad (6.1)
$$

Las condiciones de frontera sobre $\partial\Omega_3 xJ$ que consideraremos son de dos tipos. En el primero de ellos $F(u_3)=F_3(u_3)$, $L(\bar{u}_3') = \bar{v}_3'$, $L_c(\bar{u}_3') = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}$. En el segundo $F(u_3) = -{}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3)$, $L(\bar{u}_3') = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}$ y $L_c(\bar{u}_3') = \bar{u}_3'$. Tales condiciones corresponden a cortante y momento con fricción, respectivamente.

Primeramente expresaremos las condiciones de fricción del problema (6.1) en términos del subdiferencial [9] de una funcional $\psi(x,t;.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Después daremos un problema equivalente a (6.1) en el cual las condiciones de frontera sobre $\partial\Omega_1 xJ$ están dadas sobre $\bar{u}_3'$ y $\frac{\partial \bar{u}_3'}{\partial n}$. Posteriormente presentaremos la formulación variacional y de primer orden asociada a este último problema. Finalmente presentaremos su formulación variacional regularizada.

6.1 FORMULACION DEL PROBLEMA EN TERMINOS DE SUBDIFERENCIALES.

En esta sección formularemos el problema (6.1) en términos del subdiferencial, [9], de una funcional $\psi(x,t;\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tal objetivo es satisfecho a través del siguiente teorema.

Teorema 6.1. El problema (6.1) es equivalente al problema

$$\left.\begin{array}{l} \text{Encuentre } \bar{u}_3 : \Omega x J \to \mathbb{R}: \\ -\rho_0\, h\, \bar{u}_3'' - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 = -b_{0_3}^*, \text{ en } \Omega x J, \\ \bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \bar{u}_3'(0) = v_0^*, \text{ en } \Omega, \\ \bar{u}_3 = \hat{w},\ \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial n} = \hat{v}, \text{ sobre } \partial\Omega_1 x J, \\ F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},\ {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \text{ sobre } \partial\Omega_2 x J, \\ \left.\begin{array}{l} -F(\bar{u}_3)\in\partial\psi(x,t;L(\bar{u}_3')), \\ L_c(\bar{u}_3') = 0. \end{array}\right\} \text{ sobre } \partial\Omega_3 x J \end{array}\right\} \quad (6.2)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde,

$$\partial\psi(x,t;\xi) = \begin{cases} g(x,t) \quad \text{si } \xi > 0 \\ [-g(x,t), g(x,t)] \quad \text{si } \xi = 0, \\ -g(x,t) \quad \text{si } \xi < 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

es el subdiferencial de la funcional $\psi(x,t;\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x,t;\xi) = g(x,t)|\xi| \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Demostración. El teorema queda demostrado al mostrar que las condiciones de frontera, sobre $\partial\Omega_3 xJ$, en (6.1) y (6.2) son equivalentes. Mostremos primero que (6.1) implica (6.2). Obsérvese que $D(\psi) = \mathbb{R}$ y además

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)[\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)] \le |F(\bar{u}_3)(x,t)||\xi| + F(\bar{u}_3)(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t) \le$$

$$\le g(x,t)\ |\xi| + F(\bar{u}_3)(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t), \tag{6.5}$$

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \ (x,t) \in \partial\Omega_3 xJ.$$

Mostraremos ahora que

$$F(\bar{u}_3)(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t) = -g(x,t)\,|L(\bar{u}_3')(x,t)|,\ (x,t) \in \partial\Omega_3 xJ. \tag{6.6}$$

En efecto, si $L(\bar{u}_3') = 0$ sobre $\partial\Omega_3 xJ$, (6.6) es trivialmente satisfecha. Sea $L(\bar{u}_3') \neq 0$, entonces, $L(\bar{u}_3') = -\lambda\ F(\bar{u}_3)$, $\lambda > 0$ y

$$F(\bar{u}_3)(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t) = -\lambda(F(\bar{u}_3)(x,t))^2 = -\lambda|F(\bar{u}_3)(x,t)||F(\bar{u}_3)(x,t)| =$$

$$= -\lambda g(x,t)|F(\bar{u}_3)(x,t)| =$$

$$= -\lambda g(x,t)|\lambda^{-1}\ L(\bar{u}_3')(x,t)| =$$

$$= -\ g(x,t)|L(\bar{u}_3')(x,t)|,\ \forall\ (x,t)\varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ.$$

De (6.5) y (6.6) se concluye que

$$-F(\bar{u}_3)(x,t)[\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)] \leq g(x,t)\{|\xi| - |L(\bar{u}_3')(x,t)|\},$$
$$\forall\ \xi\ \varepsilon\ \mathbb{R},\ (x,t)\varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ.$$

Por tanto,

$$-F(\bar{u}_3)(x,t)\varepsilon\ \partial\psi(x,t;\ L(\bar{u}_3')(x,t)),\ \forall\ (x,t)\varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ, \qquad (6.7)$$

donde la función $\psi(x,t;\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\psi(x,t;\xi) = g(x,t)|\xi|,\ \forall\ \xi\ \varepsilon\ \mathbb{R},\ (x,t)\varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ. \qquad (6.8)$$

Nuestro siguiente objetivo es caracterizar el subdiferencial $\partial\psi(x,t;\cdot)$ de la funcional $\psi(x,t;\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t)\varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ$.

Sea $-F(\bar{u}_3)(x,t) \in \partial\psi(x,t;L(\bar{u}_3')(x,t))$, $(x,t) \in \partial\Omega_3 xJ$, entonces,

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq g(x,t)\ \{|\xi| - |L(\bar{u}_3')(x,t)|\}, \quad (6.9)$$

$$\forall\ (x,t) \in \partial\Omega_3 xJ,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Si $L(\bar{u}_3')(x,t) = 0$, se tiene de (6.9) que

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\xi \leq g(x,t)\ |\xi|\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}\ ,$$

lo cual es satisfecho para valores

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) \in [-\ g(x,t),\ g(x,t)],$$

$$(x,t) \in \partial\Omega_3 xJ. \qquad (6.10)$$

Sea $L(\bar{u}_3')(x,t) > 0$. Entonces, si $\xi = 0$ en (6.9), se obtiene

$$F(\bar{u}_3)(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t) \leq -g(x,t)L(\bar{u}_3')(x,t),$$

por tanto,

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) \geq g(x,t) \qquad (6.11)$$

Sea $\xi > 0$, entonces, $|\xi| = \xi$ y de (6.9) se tiene que

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq g(x,t)\ \{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\}.$$

Si $\xi - L(\bar{u}_3')(x,t) < 0$, se obtiene (6.11); si $\xi - L(\bar{u}_3')(x,t) > 0$, se obtiene

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) \leq g(x,t) \tag{6.12}$$

que junto con (6.11) implican que

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) = g(x,t), (x,t) \varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ. \tag{6.13}$$

El caso $\xi < 0$ es trivialmente satisfecho, puesto que,

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} = g(x,t)\ \{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\}$$

$$\leq g(x,t)\{-\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\},$$

y, $\{\xi - L\ (\bar{u}_3')(x,t)\} \leq \{-\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\}$.

Sea ahora $L(\bar{u}_3')(x,t) < 0$. Entonces

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq g(x,t)\{|\xi| + L(\bar{u}_3')(x,t)\},$$

$$\forall\ (x,t) \varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ,\ \xi\ \varepsilon\ \mathbb{R}$$

Sea $\xi = 0$. Entonces

$$F(\bar{u}_3)(x,t) L(\bar{u}_3')(x,t) \leq g(x,t) L(\bar{u}_3')(x,t),$$

Por tanto

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) \leq - g(x,t), (x,t) \varepsilon\ \partial\Omega_3 xJ. \tag{6.14}$$

Sea $\xi < 0$. Entonces

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq - g(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\}.$$

Si $\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} > 0$ se obtiene (6.14). Si $\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} < 0$, entonces,

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) \geq - g(x,t), (x,t) \varepsilon \partial\Omega_3 xJ, \qquad (6.15)$$

que junto con (6.14) implica que

$$- F(\bar{u}_3)(x,t) = - g(x,t), (x,t) \varepsilon \partial\Omega_3 xJ. \qquad (6.16)$$

El caso $\xi > 0$ es trivialmente satisfecha, puesto que,

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - L(\bar{u}_3')(x,t)\} = g(x,t)\{-\xi + L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq$$
$$\leq g(x,t)\{\xi + L(\bar{u}_3')(x,t)\},$$

y, $\{-\xi + L(\bar{u}_3')(x,t)\} \leq \{\xi + L(\bar{u}_3')(x,t)\}$.

Las ecuaciones (6.13), (6.16) y (6.10) indican que, para $(x,t) \varepsilon \partial\Omega_3 xJ$,

$$\partial\psi(x,t;L(\bar{u}_3')(x,t)) = \begin{cases} g(x,t) & \text{Si } L(\bar{u}_3')(x,t) > 0, \\ [-g(x,t), g(x,t)] & \text{Si } L(\bar{u}_3')(x,t) = 0, \\ -g(x,t), & \text{Si } L(\bar{u}_3')(x,t) < 0. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Sean las condiciones sobre $\partial\Omega_3 xJ$ del problema (6.2) satisfechas. Además $- F(\bar{u}_3) \varepsilon [-g(x,t), g(x,t)]$, Si $L(\bar{u}_3') = - \lambda F(\bar{u}_3)(x,t)$ con $\lambda = 0$, $(x,t) \varepsilon \partial\Omega_3 xJ$. Por otra parte si

$L(\bar{u}_3')(x,t) > 0$, $(x,t) \varepsilon \partial\Omega_3 xJ$, $- F(\bar{u}_3)(x,t) = g(x,t)$, y para todo $\xi > 0$ se tiene que

$$- F(\bar{u}_3)(x,t)\{\xi - |L(\bar{u}_3')(x,t)|\} = - F(\bar{u}_3)(x,t)\xi + F(\bar{u}_3)(x,t)|L(\bar{u}_3')(x,t)|$$

$$= -F(\bar{u}_3)(x,t)\xi - g(x,t)\ L(\bar{u}_3')(x,t),\quad (x,t)\in \partial\Omega_3 xJ.$$

Por tanto

$$L(\bar{u}_3')(x,t) = -\lambda\ \dot{F}(\bar{u}_3)(x,t), \qquad (6.18)$$

con

$$\lambda = \frac{|L(\bar{u}_3')(x,t)|}{g(x,t)} > 0. \qquad (6.19)$$

En el caso $L(\bar{u}_3')(x,t) < 0$, $(x,t)\in \partial\Omega_3 xJ$, se obtiene de nuevo (6.18) y (6.19). Las condiciones sobre $\partial\Omega_3 xJ$ del problema (6.1) son por tanto satisfechas. ■

<u>Observación 6.2</u>. Las gráficas de $\psi(x,t,): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\partial\psi(x,t;\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se muestran en las siguientes figuras:

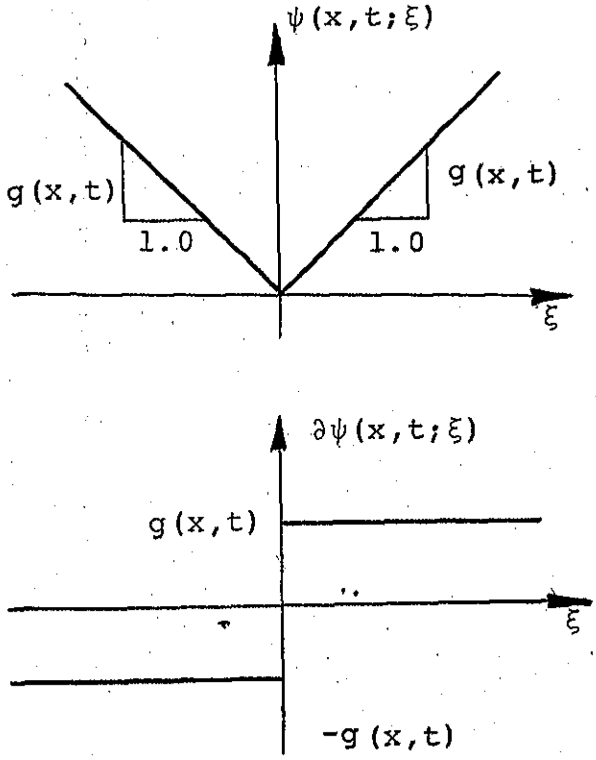


Fig 6.1 Gráficas de $\psi(x,t;\cdot)\to\mathbb{R}$ y su subdiferencial.

Presentaremos a continuación un problema equivalente a (6.2), en el cual las condiciones de frontera sobre $\partial\Omega_1 x J$ están dadas sobre $\bar{u}_3'$ y $\frac{\partial\bar{u}_3'}{\partial n}$.

Teorema 6.2. Sea $\hat{w}(0) = \bar{u}_3(0)$, $\hat{v}(0) = \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial n}(0)$ sobre $\partial\Omega_1$. Entonces, el problema (6.2) es equivalente a:

Encuentre $\bar{u}_3:\Omega x J \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} &-\rho_0\, h\, \bar{u}_3'' - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 = -\, b^*_{0_3},\ \text{en } \Omega\, x\, J,\\ &\bar{u}_3(0) = u^*_0,\ \bar{u}_3'(0) = v^*_0,\ \text{en } \Omega,\\ &\bar{u}_3' = \hat{w}',\ \frac{\partial\bar{u}_3'}{\partial n} = \hat{v}',\ \text{sobre } \partial\Omega_1 x J, \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},\ {}^*H_{\underline{\tau}}\ (\bar{u}_3) = \hat{M},\ \text{sobre } \partial\Omega_2 xJ, \\ \left.\begin{array}{l} -F(\bar{u}_3) \in \partial\psi(x,t;\ L(\bar{u}_3'))\,, \\ L_c(\bar{u}_3') = 0. \end{array}\right\}\ \text{sobre } \partial\Omega_3 xJ, \end{array}\right|$$

Demostración. Obsérvese que las condiciones de frontera de (6.2), sobre $\partial\Omega_1 xJ$, implican las de (6.20). Sean ahora las condiciones sobre $\partial\Omega_1 xJ$ de (6.20) satisfechas. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_3(x,t) = \hat{w}(x,t) + h(x), \\ \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}(x,t) = \hat{v}(x,t) + p(x). \end{array}\right\}\ (x,t) \in \partial\Omega_1 xJ.$$

Por tanto, $h(x) = \bar{u}_3(x,0) - \hat{w}(x,0) = 0$, $p(x) = \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}(x,0) - \hat{v}(x,0) = 0$, $x \in \partial\Omega_1$. ∎

En el caso de que los datos $\hat{w}$, $\hat{v}$, g, no dependan del tiempo, esto es, $\hat{w}:\Omega \to \mathbb{R}$, $\hat{v}:\Omega \to \mathbb{R}$, $g:\partial\Omega_3 \to \mathbb{R}^+$, el problema (6.20) toma la siguiente forma

Encuentre $\bar{u}_3 : \Omega xJ \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} -\rho_0 h\, \bar{u}_3'' - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 = -\,b^*_{0_3},\ \text{en } \Omega xJ, \\ \bar{u}_3(0) = u^*_0,\ \bar{u}_3'(0) = v^*_0,\ \text{en } \Omega, \\ \bar{u}_3' = 0,\ \dfrac{\partial \bar{u}_3'}{\partial n} = 0,\ \text{sobre } \partial\Omega_1 xJ, \\ F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},\ {}^*H_{\underline{\tau}}\ (\bar{u}_3) = \hat{M},\ \text{sobre } \partial\Omega_2 xJ, \\ -F(\bar{u}_3) \in \partial\psi(x,\ L(\bar{u}_3'))\,,\ \text{sobre } \partial\Omega_3 xJ, \\ L_c(\bar{u}_3') = 0. \end{array}\right\}\ (6.21)$$

En este caso el problema (6.21) es equivalente al problema (6.20) si y solo si $\hat{w}:\partial\Omega_1 \to \mathbb{R}$, $\hat{v}:\partial\Omega_1 \to \mathbb{R}$ y

$$\hat{w}(x) = \bar{u}_3(x,0), \quad \hat{v}(x) = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}(x,0), \quad x \in \partial\Omega_1. \qquad (6.22)$$

6.2 FORMULACION VARIACIONAL Y DE PRIMER ORDEN.

En esta sección presentaremos las formulaciones variacionales, punto a punto, fuerte y clásica o débil, así como las formulaciones de primer orden, asociadas al problema (6.21). Primeramente, usando la definición de subdiferencial, escribiremos éste problema en la forma:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Encuentre } \bar{u}_3:\Omega x J \to \mathbb{R}: \\
-\rho_0 h\, \bar{u}_3'' - D\,\Delta\Delta\bar{u}_3 = -\,b^*_{0_3}, \text{ en } \Omega x J, \\
\bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \bar{u}_3'(0) = v_0^*, \text{ en } \Omega, \\
\bar{u}_3' = 0,\ \dfrac{\partial \bar{u}_3'}{\partial n} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1 x J, \\
F_3(\bar{u}_3) = \hat{F}, {}^*H_{\underline{\tau}}(\bar{u}_3) = \hat{M}, \text{ sobre } \partial\Omega_2 x J, \\
\left.\begin{array}{l}
L(\bar{u}_3') \in \mathcal{D}(\psi(x;\cdot)) = \mathbb{R}, \\
\quad \psi(x;v(x,t)) - \psi(x;\ L(\bar{u}_3'(x,t))) \geq \\
\qquad \geq -\ F(\bar{u}_3)\{v(x,t) - L(\bar{u}_3'(x,t))\}, \\
\qquad\quad \forall\ v(x,t) \in \mathcal{D}(\psi(x;\cdot)) = \mathbb{R}\ , \\
\qquad\quad L_c(\bar{u}_3'(x,t)) = 0.
\end{array}\right\}\ (x,t) \in \partial\Omega_3 x J.
\end{array}\right\} \quad (6.23)$$

A (6.23) lo llamaremos la formulación variacional fuerte punto a punto de (6.21).

A continuación presentaremos la formulación variacional global fuerte asociada a (6.23). Para esto consideremos los espacios de Hilbert,

$$V(\Omega) = H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)', \tag{6.24}$$

$$\mathcal{V}(Q) = L^2(0,T;\ H^2(\Omega)),\ \mathcal{H}(Q) = L^2(0,T;\ L^2(\Omega)), \tag{6.25}$$

$$\mathcal{W}(Q) = \{v \varepsilon \mathcal{V}(Q):\ v'' \varepsilon \mathcal{V}'(Q)\}. \tag{6.26}$$

Bajo las definiciones,

$$\mathcal{D}_0(Q) = \{v \varepsilon L^2(0,T;H^2(\Omega)):\ -\ D^*\Delta\Delta\ \varepsilon \mathcal{H}^2(Q)\}, \tag{6.27}$$

$$D_0(\Omega) = \{v \varepsilon H^2(\Omega):\ -\ D^*\Delta\Delta\ \varepsilon\ L^2(\Omega)\}, \tag{6.28}$$

$$< Pu,v > = \int_\Omega -\ D\Delta\Delta u\ v\ d\Omega,\ u\varepsilon\ D_0(\Omega),\ v\varepsilon H^2(\Omega), \tag{6.29}$$

$$[\mathcal{P}u,v] = \int_0^T <Pu(t),v(t)>dt,\ u\varepsilon \mathcal{D}_0(Q),\ v\varepsilon \mathcal{V}(Q), \tag{6.30}$$

$$<u,v> = \int_\Omega u\ v d\Omega,\ u,\ v\varepsilon L^2(\Omega), \tag{6.31}$$

$$[u'',v] = \int_0^T <\rho_0 h u''(t),\ v(t)> dt,\ \rho_0,\ h\varepsilon L^\infty(\Omega),\quad u\varepsilon \mathcal{W}(Q),\ v\varepsilon \mathcal{V}(Q), \tag{6.32}$$

$$[f,v] = \int_0^T < b_{0_3}^*(t),\ v(t)>dt,\quad b_{0_3}^*\ \varepsilon\ \mathcal{H}(Q),\ v\varepsilon \mathcal{V}(Q), \tag{6.33}$$

se obtiene la siguiente igualdad variacional asociada a la igualdad en Ω, del problema (6.23),

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_3 \varepsilon\ W(Q) \cap \mathcal{D}_0(Q): \\ [\bar{u}_3'', v] + [P\bar{u}_3, v] = [f,v], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ v \varepsilon V(Q). \end{array}\right\} \qquad (6.34)$$

Obtendremos a continuación la expresión variacional correspondiente a las restricciones de frontera del problema en estudio. Primeramente observemos que el operador Dirichlet $\gamma\ \varepsilon\ L\ (H^2(\Omega),\ H^{3/2}(\partial\Omega) x\ H^{1/2}(\partial\Omega))$ asociado al operador formal $D\Delta\Delta\ \varepsilon\ L(H^2(\Omega),\ H_0^2(\Omega))$ está caracterizado por

$$\gamma u = (\gamma_0 u,\ \gamma_1 u) = (u,\ \frac{\partial u}{\partial n})\, \varepsilon\, H^{3/2}(\partial\Omega) x\ H^{1/2}(\partial\Omega), \qquad (6.35)$$
$$\forall\ u \varepsilon\ H^2(\Omega),$$

y, el operador Neumann, $\delta \varepsilon L(D_0(\Omega), (H^{3/2}(\partial\Omega) x\ H^{1/2}(\partial\Omega))')$, según (4.78), por

$$\langle \partial u, \gamma v\rangle = \int_{\partial\Omega} F_3(u)\gamma_0 v\ d\Omega - \int_{\partial\Omega} {}^{*}H_{\underline{\tau}}(u)\gamma_1 v\ d\Omega, \qquad (6.36)$$
$$u\ \varepsilon D_0(\Omega),\ v \varepsilon\ H^2\ (\Omega).$$

Consideremos ahora que la condición de frontera sobre $\partial\Omega_3 x J$ sea de cortante con fricción, esto es,

$$\mathcal{L}(\bar{u}_3') = \gamma_0\bar{u}_3', \; \mathcal{F}(\bar{u}_3) = F_3(\bar{u}_3), \; \mathcal{L}_c(\bar{u}_3) = \gamma_1\bar{u}_3. \qquad (6.37)$$

Definamos a continuación los espacios de Hilbert

$$V_1(\Omega) = \{v\varepsilon H^2(\Omega): \gamma_0 v = \gamma_1 v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \\ \gamma_1 v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_3\}, \qquad (6.38)$$

$$\mathcal{V}_1(Q) = L^2(0,T;V_1(\Omega)), \qquad (6.39)$$

$$\mathcal{W}_1(Q) = \{v\varepsilon\mathcal{W}(Q): v'\varepsilon \mathcal{V}_1'(Q)\}, \qquad (6.40)$$

y las funcionales convexas $j_1 : v_1(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,
$J_1 : \mathcal{V}_1(Q) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$j_1(v) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega_3} \psi(x;\gamma_0 v)d\Omega, & v\varepsilon D(j_1). \\ +\infty, & v\notin D(j_1), \end{cases} \qquad (6.41)$$

$$J_1(v) = \begin{cases} \int_0^T j_1(v(t))dt, & v\varepsilon\mathcal{D}(J_1), \\ +\infty, & v\notin\mathcal{D}(J_1), \end{cases} \qquad (6.42)$$

con dominios efectivos

$$D(j_1) = \{v\varepsilon V_1(\Omega): \psi(\cdot,\gamma_0 v(\cdot))\varepsilon L^1(\partial\Omega_3)\}, \qquad (6.43)$$

$$\mathcal{D}(J_1) = \{v\varepsilon\ V_1(Q):\ \ j_1(v(\cdot))\varepsilon\ \ L^1(0,T)\}. \tag{6.44}$$

Por tanto, la inecuación de frontera global asociada a las condiciones sobre la frontera del problema (6.21) es

$$\begin{aligned} &\bar{u}_3\varepsilon W_1(Q)\cap\mathcal{D}(J_1): \\ &J_1(v) - J_1(\bar{u}_3') \geq - [F_3(\bar{u}_3),\ \gamma_0 v - \gamma_0\bar{u}_3']_{\partial\Omega_3}, \\ &\qquad\qquad \forall\ v\varepsilon\ \ \mathcal{D}(J_1). \end{aligned} \tag{6.45}$$

Aqui

$$[F_3(\bar{u}_3),\gamma_0 u - \gamma_0\bar{u}_3']_{\partial\Omega_3} = \int_0^T \int_{\partial\Omega_3} F_3(\bar{u}_3)\{\gamma_0 v - \gamma_0\bar{u}_3'\}dxdt. \tag{6.46}$$

Combinando la ecuación (6.35) con la inecuación (6.46) se obtiene la siguiente formulación variacional global fuerte del problema en estudio.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Dados } \rho_0,\ h,\ D\varepsilon L^{\infty}(\Omega),\ b^*_{0_3}\ \varepsilon\ H(Q),\ \hat{F},\hat{H}\varepsilon L^2(0,T;L^2(\partial\Omega_2)), \\ &u_0^*,\ v_0^*\varepsilon V(Q),\ \text{encuentre } \bar{u}_3\ \varepsilon W_1(Q)\cap\mathcal{D}_0(Q)\cap\mathcal{D}(J_1): \\ &\quad [\bar{u}_3'',\ v-\bar{u}_3'] + [P\bar{u}_3,\ u-\bar{u}_3'] + J_1(u) - J_1(\bar{u}_3') \geq \\ &- [F_3(\bar{u}_3),\gamma_0 v-\gamma_0\bar{u}_3']_{\partial\Omega_3} + [f,v-\bar{u}_3'],\ \forall\ v\varepsilon\ \mathcal{D}(J_1), \\ &\quad F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},{}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3) = \hat{H}, \\ &\quad \bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \bar{u}_3'(0) = v_0^*. \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

Nuestro siguiente objetivo es presentar la formulación variacional clásica o débil de (6.23). Para esto aplicaremos la primera fórmula de Green del operador formal del problema,

$D\,\Delta\Delta \in L(H^2(\Omega),\ H_0^2(\Omega))$, la cual está dada por:

$$\langle Au,v\rangle = D\int_\Omega \{\Delta u\,\Delta v - (1-\nu)[2u_{,12}v_{,12} - u_{,11}v_{,22} - u_{,22}v_{,11}]\}\,dx =$$

$$= D\int_\Omega \Delta\Delta u\,v\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} F_3(u)\gamma_0 v\,d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} {}^*H_{\underline{\tau}}(u)\gamma_1 v\,d\partial\Omega, \qquad (6.48)$$

$$u\in D_0(\Omega),\ v\in H^2(\Omega).$$

De la inecuación (6.47) y (6.48) se concluye la siguiente formulación clásica o débil de (6.23):

Dados ρ_0, h, $D\in L^\infty(\Omega)$, $b^*_{0_3}$, $\hat{F}$, $\hat{H}\in V'(Q)$, u_0^*, $v_0^*\in V_1(\Omega)$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{encuentre } \bar{u}_3 \in W_1(Q)\cap \mathcal{D}(J_1): \\ [\bar{u}_3'',\ v-\bar{u}_3'] + [A\bar{u}_3,\ v-\bar{u}_3'] + J_1(v) - J_1(\bar{u}_3') \geq \\ \qquad [\partial\bar{u}_3,\ \gamma_0 v-\gamma_0\bar{u}_3']_{\partial\Omega_2} + [f,\ v-\bar{u}_3'],\quad \forall\ v\in\mathcal{D}(J_1), \\ \qquad \bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \bar{u}_3'(0) = v_0^*. \end{array}\right\} \qquad (6.49)$$

Aquí

$$[Au,v] = \int_0^T \langle Au,t\rangle dt, \qquad (6.50)$$

$$[\partial\bar{u}_3,\gamma v-\gamma\bar{u}_3']_{\partial\Omega_2} = \int_0^T\int_{\partial\Omega_2} \hat{F}\{\gamma_0 v-\gamma_0\bar{u}_3'\}d\,\partial\Omega_2 - \qquad (6.51)$$

$$- \int_0^T\int_{\partial\Omega_2} \hat{H}\,\{\gamma_1 v-\gamma_1\bar{u}_3'\}\,d\,\partial\Omega_2.$$

Desarrollemos ahora el caso en que la condición de frontera sobre $\partial\Omega_3 xJ$ sea de momento con fricción. Esto es,

$$\left.\begin{aligned} L(\bar{u}_3') &= \gamma_1 \bar{u}_3', \\ F(\bar{u}_3) &= -H_{\underline{T}}(\bar{u}_3), \\ L_c(\bar{u}_3') &= \gamma_0 \bar{u}_3'. \end{aligned}\right\} \text{ sobre } \partial\Omega_3 xJ. \qquad (6.52)$$

En este caso los espacios de Hilbert considerados son:

$$\begin{aligned} V_2(\Omega) &= \{v \varepsilon H^2(\Omega) : \gamma_0 v = \gamma_1 v = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \\ &\qquad \gamma_0 v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_3\}, \\ V_2(Q) &= L^2(0,T : V_2(\Omega)), \\ W_2(Q) &= \{v \varepsilon W(Q) : v' \varepsilon V_2'(Q)\}, \end{aligned} \qquad (6.53)$$

y, las funcionales convexas $j_2 : V_2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $J_2 : V_2(Q) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, con dominios efectivos

$$\begin{aligned} D(j_2) &= \{v \varepsilon V_2(\Omega) : \psi(\cdot, \gamma_1 v(\cdot)) \varepsilon L^1(\partial\Omega_3)\}, \\ D(J_2) &= \{v \varepsilon V_2(\Omega) : j_2(v(\cdot)) \varepsilon L^1(0,T)\}, \end{aligned} \qquad (6.54)$$

están definidas por:

$$j_2(v) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega_3} \psi(x;\gamma_1 v)\, d\Omega, & v \in D(j_2), \\ \\ +\infty, & v \notin D(j_2), \end{cases} \tag{6.55}$$

$$J_2(v) = \begin{cases} \int_0^T j_2(v(t))\,dt, & v \in \mathcal{D}(J_2), \\ \\ +\infty, & v \notin \mathcal{D}(J_2). \end{cases} \tag{6.56}$$

La inecuación global de frontera para este caso es:

$$\bar{u}_3 \in \mathcal{W}_2(Q) \cap \mathcal{D}(J_2):$$

$$J_2(v) - J_2(\bar{u}_3') \geq [{}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3),\ \gamma_1 v - \gamma_1 \bar{u}_3']_{\partial\Omega_3}, \tag{6.57}$$

$$\forall\, v \in \mathcal{D}(J_2),$$

donde,

$$[{}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3),\ \gamma_1 v - \gamma_1\bar{u}_3']_{\partial\Omega_3} = \int_0^T \int_{\partial\Omega_3} {}^*H_{\underline{T}}(\bar{u}_3)\{\gamma_1 v - \gamma_1 \bar{u}_3'\}\, d\,\partial\Omega_3\, dt. \tag{6.58}$$

La formulación variacional global fuerte correspondiente es:

Dados $\rho_0, h, D \varepsilon L^\infty(\Omega)$, $b_{03}^* \varepsilon \mathcal{H}(Q)$, $\hat{F}$, $\hat{H}$ $\varepsilon L^2(0,T;\ L^2(\partial\Omega_2))$,

u_0^*, v_0^* $\varepsilon\, \mathcal{V}(Q)$, encuentre $\bar{u}_3 \varepsilon \mathcal{W}_2(Q) \cap \mathcal{D}_0(Q) \cap \mathcal{D}(J_2)$:

$$[\bar{u}_3'',\ v - \bar{u}_3'] + [\mathcal{R}\bar{u}_3,\ v - \bar{u}_3'] + J_2(v) - J_2(\bar{u}_3') \geq$$

$$[{}^{*}H_{\underline{T}}(\bar{u}_3),\ \gamma_1 v - \gamma_1\bar{u}_3']_{\partial\Omega_3} + [\ f,\ v - \bar{u}_3'],\ \forall\ v\varepsilon\mathcal{D}(J_2), \tag{6.59}$$

$$F_3(\bar{u}_3) = \hat{F},\ {}^{*}H_{\underline{T}}(\bar{u}_3) = \hat{H},$$

$$\bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \ \bar{u}_3'(0) = v_0^*,$$

y, su formulación variacional clásica,

Dados ρ_0, h, $D\varepsilon L^{\infty}(\Omega)$, $\ddot{b}_{0_3}^*$, $\hat{F}$, $\hat{H}\ \varepsilon\ \mathcal{V}'(Q)$,

u_0^*, $v_0^*\ \varepsilon V_2(\Omega)$, encuentre $\bar{u}_3\varepsilon\ \mathcal{W}_2\cap\mathcal{D}(J_2)$:

$$[\bar{u}_3'',\ v-\bar{u}_3'] + [A\bar{u}_3,\ v - \bar{u}_3'] + \tag{6.60}$$

$$+ J_2(v) - J_2(\bar{u}_3') \geq [\partial\bar{u}_3,\ \gamma v-\gamma\bar{u}_3']_{\partial\Omega_2} + [f,\ v-\bar{u}_3'],$$

$$\forall\ v\varepsilon\mathcal{D}(J_2),$$

$$\bar{u}_3(0) = u_0^*,\ \ \bar{u}_3'(0) = v_0^*.$$

Las formulaciones pseudoinstantáneas de los problemas (6.49) y (6.60) son:

Encuentre $\bar{u}_3\varepsilon\mathcal{W}_1(Q)\cap\mathcal{D}(J_1)$:

$$<\bar{u}_3''(t),\ v(t)-\bar{u}_3'(t)> + <A\bar{u}_3(t),v(t)-\bar{u}_3'(t)> +$$

$$+ j_1(v(t))-j_1(\bar{u}_3') \geq <\partial\bar{u}_3(t),\ \gamma_0 v(t)-\gamma_0\bar{u}_3'(t)>_{\partial\Omega_2} + \tag{6.61}$$

$$+ <f(t),\ v(t)-\bar{u}_3'(t)>,\ \forall\ v\ \varepsilon\mathcal{D}(J_1),\ \text{c.t. } t\varepsilon(0,T),$$

$\bar{u}_3(0) = u_0^*, \quad \bar{u}_3'(0) = v_0^*.$

Encuentre $\bar{u}_3 \in \mathcal{W}_2(Q) \cap \mathcal{D}(J_2)$:

$$\begin{aligned}
&<\bar{u}_3''(t), v(t)-\bar{u}_3'(t)> + <A\bar{u}_3(t), v(t)-\bar{u}_3'(t)> + \\
&+ j_2(v(t)) - j_2(\bar{u}_3'(t)) \geq <\partial\bar{u}_3(t), \gamma v(t)-\gamma\bar{u}_3'(t)>_{\partial\Omega_2} \qquad (6.62)\\
&+ <f(t), v(t) - \bar{u}_3'(t)>, \ \forall \ v \in \mathcal{D}(J_2), \text{ c.t. } t \in (0,T),
\end{aligned}$$

$\bar{u}_3(0) = u_0^*, \quad \bar{u}_3'(0) = v_0^*.$

Las formulaciones de primer orden asociadas a (6.61) y (6.62) son:

Encuentre $\bar{u}_3 \in \mathcal{W}_k(Q) \cap \mathcal{D}(J_k)$, $k = 1,2$,

$$U_3'(t) + MU_3(t) \ni F(t), \text{ c.t. } t \in (0,T), \qquad (6.63)$$

$U_3(0) = U_0,$

donde, para $k = 1,2$,

$$\left.\begin{aligned}
&u_3(t) = [\bar{u}_3(t), \bar{u}_3'(t)], \\
&U_0 = [u_0^*, v_0^*], \ U_3(0) = [\bar{u}_3(0), \bar{u}_3'(t)], \\
&F(t) = [0, f^*(t)], \\
&<f^*(t), v(t)-\bar{u}_3'(t)> = <f(t), v(t)-\bar{u}_3'(t)> +
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{c.t } t \in (0,T)\\ &(6.64)\end{aligned}$$

$$+ \langle \partial \bar{u}_3(t),\ \gamma u(t) - \gamma \bar{u}_3'(t) \rangle_{\partial\Omega_2}, \Big]$$

y, para k = 1, cortante con fricción se tiene que

$$MU_3(t) = [-\bar{u}_3'(t),\ A\,\bar{u}_3(t) + \partial j_1(\bar{u}_3'(t))], \tag{6.65}$$

para k = 2, momento con fricción,

$$MU_3(t) = [-\bar{u}_3'(t),\ A\,\bar{u}_3(t) + \partial j_2(\bar{u}_3'(t))], \tag{6.66}$$

$$\langle f^*(t),\ v(t) - \bar{u}_3'(t) \rangle = \langle f(t),\ v(t) - \bar{u}_3'(t) \rangle +$$

$$+ \langle \partial \bar{u}_3(t),\ \gamma v(t) - \gamma \bar{u}_3'(t) \rangle_{\partial\Omega_2},\ \text{c.t. } t \in (0,T).$$

En la referencia [7] se muestra que la forma bilineal simétrica $a: V_k(\Omega) x V_k(\Omega) \to \mathbb{R}$, k = 1,2, es seicoerciva y continua, $j_K: V_k(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, k = 1,2, es propia, convexa y semicontinua inferiormente. De acuerdo al capítulo 2, el problema de primer orden (6.63) posee una única solución $\bar{u}_3 \varepsilon C([0,T]; V_k(\Omega))$, k = 1,2, $\bar{u}_3'' \varepsilon L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, bajo la siguiente regularidad en los datos,

$$\begin{aligned} & f^* \varepsilon\ H(Q),\ f^{*\prime} \varepsilon L^1(0,T\ ;\ L^2(\Omega)\ ) \\ & u_0^* \ \varepsilon\, V_k(\Omega),\ v_0^* \ \varepsilon\, D(j_k), \\ & \{(Au_0^* + \partial j_k(v_0^*)) \cap L^2(\Omega)\} \neq \phi, \end{aligned} \tag{6.67}$$

la cual es satifecha en los problemas (6.49) y (6.60).

6.3 FORMULACION VARIACIONAL REGULARIZADA

Nuestro siguiente objetivo es presentar una regularización, en el sentido del capítulo 3, de las funcionales $j_1 : V_1(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $j_2 : V_2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y, por consiguiente, formular los problemas regularizados asociados a (6.61) y (6.62). En la referencia [7] se muestran que las funcionales $j_{1\varepsilon} : V_1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $j_{2\varepsilon} : V_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$
\begin{aligned}
j_{1\varepsilon}(v) &= \int_{\partial\Omega_3} \frac{g(x)}{1+\varepsilon} \, |\gamma_0 v(x)|^{1+\varepsilon} dx, \quad \varepsilon > 0, \\
j_{2\varepsilon}(v) &= \int_{\partial\Omega_3} \frac{g(x)}{1+\varepsilon} \, |\gamma_1 v(x)|^{1+\varepsilon} dx, \quad \varepsilon > 0,
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

regularizan a las funcionales $j_1 : V_1(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $j_2 : V_2(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, respectivamente. Los gradientes de estas funcionales son

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla j_{1\varepsilon}(v), w \rangle &= \int_{\partial\Omega_3} (\mathrm{Sig}\, \gamma_0 w(x)) \, g(x) |\gamma_0 v(x)|^{\varepsilon} \gamma_0 w(x) dx, \\
&\qquad \forall \; w \in V_1(\Omega), \; \varepsilon > 0 \\
\langle \nabla j_{2\varepsilon}(v), w \rangle &= \int_{\partial\Omega_3} (\mathrm{Sig}\, \gamma_1 w(x)) \, g(x) |\gamma_1 v(x)|^{\varepsilon} \gamma_1 w(x) dx, \\
&\qquad \forall \; w \in V_2(\Omega), \; \varepsilon > 0.
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

Los problemas pseudoinstantáneos regularizados, correspondientes a (6.61) y (6.62), son:

$$\begin{aligned}
&\text{Dados } f^*\varepsilon H(Q) \text{ con } f^{*\prime}\varepsilon L^1(0,T;L^2(\Omega)),\ u_0^*\varepsilon V_1(\Omega)\\
&v_0^*\ \varepsilon D(j_1) \text{ con } \{(Au_0^* + \partial j_1(v_0^*))\cap L^2(\Omega)\} \neq \phi,\\
&\text{encuentre } u_{1\varepsilon}\ \varepsilon V_1(Q) \text{ con } u_{1\varepsilon}'\varepsilon V_1(Q),\ u_{1\varepsilon}''\varepsilon\ H(Q): \qquad\qquad (6.70)\\
&< u_{1\varepsilon}''(t),\ v(t)> + a(u_{1\varepsilon}(t),v(t)) + <\nabla j_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}'(t)),v(t)> =\\
&\quad = <f^*(t),v(t)>,\forall\ v\varepsilon V_1(Q), \text{c.t } t\varepsilon(0,T),\ \varepsilon > 0,\\
&u_{1\varepsilon}(0) = u_0^*,\ u_{1\varepsilon}'(0) = v_0^*.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Dados } f^*\varepsilon\ H(Q) \text{ con } f^{*\prime}\varepsilon L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ u_0^*\varepsilon V_2(\Omega),\\
&v_0^*\ \varepsilon\ D(j_2) \text{ con } \{(Au_0^* + \partial j_2(v_0^*))\cap L^2(\Omega)\} \neq \phi,\\
&\text{encuentre } u_{2\varepsilon}\ \varepsilon\ V_2(Q) \text{ con } u_{2\varepsilon}'\varepsilon V_2(Q),\ u_{2\varepsilon}''\varepsilon H(Q):\\
&<u_{2\varepsilon}''(t),\ v(t)> + a(u_{2\varepsilon}(t),v(t)) + <\nabla_{j_{2\varepsilon}}(u_{2\varepsilon}'(t)),v(t)> \qquad (6.71)\\
&\quad = <f^*(t),v(t)>,\ \forall\ v\varepsilon\ V_2(Q),\ \text{c.t. } t\varepsilon(0,T),\ \varepsilon > 0,\\
&u_{2\varepsilon}(0) = u_0^*,\quad u_{2\varepsilon}'(0) = v_0^*,
\end{aligned}$$

respectivamente y, los correspondientes sistemas de primer orden:

Encuentre $u_{1\varepsilon}\varepsilon \mathcal{V}_1(Q)$ con $u'_{1\varepsilon}\varepsilon \mathcal{V}_1(Q)$, $u''_{1\varepsilon}\varepsilon \mathcal{H}(Q)$:

$$U'_{1\varepsilon}(t) + M_{1\varepsilon}U_{1\varepsilon}(t) = F_{1\varepsilon}(t), \text{ c.t. } t\varepsilon(0,T),\ \varepsilon > 0, \tag{6.72}$$

$$U_{1\varepsilon}(0) = U_0.$$

Encuentre $u_{2\varepsilon}\varepsilon \mathcal{V}_2(Q)$ con $u'_{1\varepsilon}\varepsilon \mathcal{V}_2(Q)$, $u''_{2\varepsilon}\varepsilon \mathcal{H}(Q)$:

$$U_{2\varepsilon}(t) + M_{2\varepsilon}U_{2\varepsilon}(t) = F_{2\varepsilon}(t), \text{ c,t, } t\varepsilon(0,T),\ \varepsilon > 0, \tag{6.73}$$

$$U_{2\varepsilon}(0) = u_0.$$

Aquí,

$$\left.\begin{aligned} U_{k\varepsilon}(t) &= [u_{k\varepsilon}(t),\ u'_{k\varepsilon}(t)],\\ U_{k\varepsilon}(0) &= [u_{k\varepsilon}(0),\ u'_{k\varepsilon}(0)],\\ M_{k\varepsilon}U_{k\varepsilon}(t) &= [-u'_{k\varepsilon}(t),\ Au_{k\varepsilon}(t) + \nabla j_{k\varepsilon}(u'_{k\varepsilon}(t))]. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{c.t. } t\varepsilon(0,t),\\ &k = 1,2,\\ &\varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Los operadores $M_{k\varepsilon}$, $k = 1,2$ son, bajo la regularidad supuesta en los datos, ω-máximos monótonos, con $\omega > 0$. Por tanto, los problemas (6.72) y (6.73) poseen una única solución $u_{k\varepsilon}\varepsilon\ C([0,T];\ V_k(\Omega))$, $u'_{k\varepsilon}\ \varepsilon L^\infty(0,t;V_k(\Omega))$, $u''_{k\varepsilon}\varepsilon L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $k = 1,2$, las cuales satisfacen, para $k = 1$,

$$
\begin{aligned}
u_{1\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;V_1(\Omega)),\\
u'_{1\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}'_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;V_1(\Omega)),\\
u''_{1\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}''_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

donde, $\bar{u}_3$ es la solución del problema (6.61). Para k=2,

$$
\begin{aligned}
u_{2\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;V_2(\Omega)),\\
u'_{2\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}'_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;V_2(\Omega)),\\
u''_{2\varepsilon} &\rightharpoonup * \; \bar{u}''_3 \quad \text{en } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

donde, $\bar{u}_3$ es la solución del problema (6.62).

7. METODO DEL ELEMENTO FINITO

El objetivo de este capítulo es construir una aproximación interna de los espacios $(V_1(\Omega), V_1(Q))$, $(V_2(\Omega), V_2(Q))$, asociados a los problemas de placas del capítulo anterior, mediante el método del elemento finito. Primeramente presentaremos este método como un procesos sistemático para construir subespacios de dimensión finita de $V_1(\Omega)$ y $V_2(\Omega)$, este proceso estará caracterizado por tres aspectos básicos los cuales llamamos MEF1, MEF2 y MEF3. Posteriormente describimos tres elementos finitos, Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmit, con los cuales construiremos dichos subespacios de dimensión finita, en los cuales los tres aspectos básicos están presentes. Se presentan también algunos resultados de la teoría de interpolación, [4], para familias afines y casi-afines de elemento finitos, mostrando, además que familias de elementos finitos formada de elementos de Bogner-Fox-Schmit son afines y familias formadas con elementos finitos de Argyris ó Bell son casi-afines. Finalmente, usando los resultados de errores de interpolación,[4], se construyen, mediante los elementos finitos antes mencionados, aproximaciones internas de $(V_1(\Omega), V_1(Q))$ y $(V_2(\Omega), V_2(Q))$.

7.1 CONSTRUCCION DE SUBESPACIOS DE DIMENSION FINITA.

El objetivo de esta sección es presentar el Método del Elemento Finito como un proceso sistemático para construir subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert como los definidos en (6.38) y (6.53). Tal construcción está caracterizada por tres aspectos básicos, que llamaremos MEF1, MEF2 y MEF3, los cuales describiremos a continuación;

MEF1. El primer aspecto básico es establecer una "triangularización"

τ_h sobre el dominio $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, el cual será supuesto poligonal. Esto es, el conjunto $\bar{\Omega}$ es subdividido en un número finito de subconjuntos E, llamados elementos finitos geométricos, de tal manera que se satisfaga

i) $E \subset \mathbb{R}^2$, cerrado, con interior no vacío y frontera Lipchitz continua,

ii) $\bar{\Omega} = \bigcup_{E \varepsilon \tau_h} E$,

iii) $\forall$ E_1 ó $E_2 \; \varepsilon \; \tau_h$ distintos, $\mathring{E}_1 \cap \mathring{E}_2 = \phi$. Además, $\partial E_1 \cap \partial E_2$ es un vértice, o una cara, común a E_1 y E_2.

Una vez que la triangularización es establecida sobre el dominio $\bar{\Omega}$, se define el espacio X_h, llamado espacio de elemento finito, el cual es un subespacio de dimensión finita de funciones $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, esto es,

$$X_h \subset \{f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}\} \tag{7.1}$$

Dado el espacio X_h se definen los espacios,

$$P_E = \left\{ v_h \big|_E : v_h \; \varepsilon \; X_h \right\}, \tag{7.2}$$

$$V_h = \left\{ v_h \; \varepsilon \; X_h : \; v_h \text{ satisface las condiciones de frontera tipo Dirichlet homogeneas del problema} \right\}. \tag{7.3}$$

A través de hipótesis en los espacios P_E, $E \; \varepsilon \; \tau_h$ se lograrán las inclusiones, $V_h \subset V_1(\Omega)$, $V_h \subset V_2(\Omega)$.

MEF2 El segundo aspecto básico del elemento finito es, que los espacios P_E, $E \varepsilon \tau_h$, son espacios polinomiales. Esto es, son subespacios de espacios de polinomios ó de espacio de funciones cercanas a ellos.

MEF3 Existe al menos una base canónica en el espacio X_h, cuyas correspondientes funciones base poseen soporte "pequeño".

A la terna formada por (E, P_E, Σ_E), donde,

E = Elemento finito geométrico,

P_E = El subespacio definido en (7.2),

$\Sigma_E = \left\{\phi_i, \ i=1,2,\dots N: \phi_i \ \varepsilon \ L(P_E, \mathbb{R})\right\}$,

es el conjunto de grados de libertad del elemento finito, el cual se supone que es P_E - unisolvente, esto es, $\forall \ \alpha_i \ \varepsilon \ \mathbb{R}, \ i=1,\dots,N$, existe $p \ \varepsilon \ P_E$:

$$\phi_i(p) = \alpha_i, \tag{7.4}$$

la definiremos en general como un elemento finito.

Observación 7.1. Obsérvese que si $p \ \varepsilon \ P_E$, entonces,

$$p = \alpha_i \ \omega_i, \qquad \alpha_i \ \varepsilon \ \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq N, \tag{7.5}$$

donde, $\omega_i \ \varepsilon \ P_E$, $1 \leq i \leq N$, son llamadas las funciones base del elemento finito. De acuerdo a la P_E-unisolvencia de $\phi_j \ \varepsilon \ L(P_E,\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq N$, se observa que

$$\phi_j(p) = \alpha_j = \alpha_i \ \phi_j(\omega_i), \quad 1 \leq i,j \leq N, \tag{7.6}$$

por tanto,

$$\phi_j(\omega_i) = \delta_{ji}, \qquad 1 \leq i,j \leq N, \tag{7.7}$$

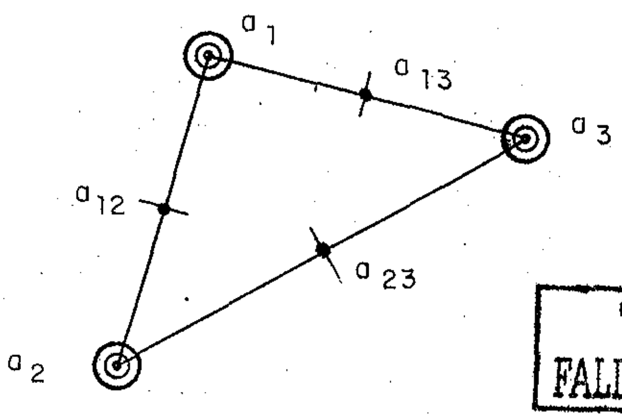
lo cual implica que las funcionales $\phi_j \in L(P_E,\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq N$, forman una base del espacio dual de P_E. $\blacksquare$

Presentaremos a continuación algunos elementos finitos, mediante los cuales construiremos subespacios de dimensión finita, de los espacios $V_1(\Omega)$, $V_2(\Omega)$, definidos en (6.38) y (6.53).

7.2 ELEMENTO FINITO DE ARGYRIS

Presentaremos, primeramente, el elemento finito de Argyris, el cual está definido, según la sección anterior, mediante la terna (E, P_E, Σ_E), donde,

i) $E \subset \mathbb{R}^2$, es un triángulo de vértices a_1, a_2, a_3 y puntos medios a_{12}, a_{13} y a_{23}, según se muestra en la siguiente figura:



Al conjunto

$$N_E = \left\{a_i \in E: 1 \leq i \leq 3,\ a_{ij} \in E,\ 1 \leq i < j \leq 3\right\}, \tag{7.8}$$

lo llamaremos el conjunto de puntos nodales de E.

$$\text{ii)}\quad P_E = P_5(E) = \left\{p\!:\!E\to\mathbb{R}:\ p \text{ es un polinomio de grado } \le 5 \text{ en dos variables}\right\}, \tag{7.9}$$

$$\text{iii)}\quad \Sigma_E = \left\{\begin{array}{l} \phi_r \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \le r \le 21: \\[2mm] \phi_j(p) = p(a_j), \qquad 1\le j\le 3, \\[2mm] \phi_l(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x_1}(a_{l-3}), \quad 4\le l\le 6, \\[2mm] \phi_k(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x_2}(a_{k-6}), \quad 7\le k\le 9, \\[2mm] \phi_m(p) = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(a_{m-9}), \quad 10\le m\le 12, \\[2mm] \phi_n(p) = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_{n-12}), \quad 13\le n\le 15, \\[2mm] \phi_q(p) = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}), \quad 16\le q\le 18, \\[2mm] \phi_{19}(p) = \dfrac{\partial p}{\partial n}(a_{12}), \\[2mm] \phi_{20}(p) = \dfrac{\partial p}{\partial n}(a_{23}), \\[2mm] \phi_{21}(p) = \dfrac{\partial p}{\partial n}(a_{13}) \end{array}\right\} \tag{7.10}$$

Las funciones base de este elemento finito están dadas por el conjunto

$$B = \left\{\omega_\alpha,\ \omega_\alpha^1,\ \omega_\alpha^2,\ \omega_\alpha^3,\ \omega_\alpha^4,\ \omega_\alpha^5,\ \omega_\alpha^6,\quad 1\le\alpha\le 3\right\} \subset P_5(E), \tag{7.11}$$

cuyos elementos se determinan al resolver, según (7.7), los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\quad \omega_\alpha \in P_5(E), \quad 1 \leq \alpha \leq 3: & \\[2mm]
\phi_j(\omega_\alpha) = \omega_\alpha(a_j) = \delta_{\alpha j}, & 1 \leq j \leq 3, \\[2mm]
\phi_l(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_1}(a_{l-3}) = 0, & 4 \leq l \leq 6, \\[2mm]
\phi_k(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, & 7 \leq k \leq 9, \\[2mm]
\phi_m(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, & 10 \leq m \leq 12, \\[2mm]
\phi_n(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, & 13 \leq n \leq 15, \\[2mm]
\phi_q(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}(a_{q-15}) = 0, & 16 \leq q \leq 18, \\[2mm]
\phi_{19}(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial n}(a_{12}) = 0, & \\[2mm]
\phi_{20}(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial n}(a_{23}) = 0, & \\[2mm]
\phi_{21}(\omega_\alpha) = \dfrac{\partial \omega_\alpha}{\partial n}(a_{13}) = 0. &
\end{array}\right\} \qquad (7.12)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
2)\quad \omega_\alpha^1 \in P_5(E), & 1 \leq \alpha \leq 3: \\[2mm]
\phi_j(\omega_\alpha^1) = \omega_\alpha^1(a_j) = 0, & 1 \leq j \leq 3, \\[2mm]
\phi_l(\omega_\alpha^1) = \dfrac{\partial \omega_\alpha^1}{\partial x_1}(a_{l-3}) = \delta_{\alpha(l-3)}, & 4 \leq l \leq 6, \\[2mm]
\phi_k(\omega_\alpha^1) = \dfrac{\partial \omega_\alpha^1}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, & 7 \leq k \leq 9,
\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
\phi_m(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^1}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, && 10\le m\le 12,\\
\phi_n(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^1}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, && 13\le n\le 15,\\
\phi_q(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^1}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}) = 0, && 16\le q\le 18,\\
\phi_{19}(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial\omega_\alpha^1}{\partial n}(a_{12}) = 0, &&\\
\phi_{20}(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial\omega_\alpha^1}{\partial n}(a_{23}) = 0, &&\\
\phi_{21}(\omega_\alpha^1) &= \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial n}(a_{13}) = 0. &&
\end{aligned}\right\} \quad (7.13)$$

3) $\omega_\alpha^2 \in P_5(E)$, $1\le\alpha\le 3$:

$$\left.\begin{aligned}
\phi_j(\omega_\alpha^2) &= \omega_\alpha^2(a_j) = 0, && 1\le j\le 3,\\
\phi_l(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial\omega_\alpha^2}{\partial x_1}(a_{l-3}) = 0, && 4\le l\le 6,\\
\phi_k(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial\omega_\alpha^2}{\partial x_1}(a_{k-6}) = \delta_{\alpha(k-6)}, && 7\le k\le 9,\\
\phi_m(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^2}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, && 10\le m\le 12,\\
\phi_n(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^2}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, && 13\le n\le 15,\\
\phi_q(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial^2\omega_\alpha^2}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}) = 0, && 16\le q\le 18,\\
\phi_{19}(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial\omega_\alpha^2}{\partial n}(a_{12}) = 0, &&\\
\phi_{20}(\omega_\alpha^2) &= \frac{\partial\omega_\alpha^2}{\partial n}(a_{23}) = 0, &&
\end{aligned}\right\} \quad (7.14)$$

$$\phi_{21}(\omega_\alpha^2) = \frac{\partial \omega_\alpha^2}{\partial n}(a_{13}) = 0.$$

4) $\omega_\alpha^3 \in P_5(E), \qquad 1 \le \alpha \le 3,$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_j(\omega_\alpha^3) = \omega_\alpha^3 (a_j) = 0, && 1 \le j \le 3,\\
&\phi_l(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial \omega_\alpha^3}{\partial x_1}(a_{l-3}) = 0, && 4 \le l \le 6,\\
&\phi_k(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial \omega_\alpha^3}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, && 7 \le k \le 9,\\
&\phi_m(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial^2 \omega_\alpha^3}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = \delta_{\alpha(m-9)}, && 10 \le m \le 12,\\
&\phi_n(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial^2 \omega_\alpha^3}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, && 13 \le n \le 15,\\
&\phi_q(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial^2 \omega_\alpha^3}{\partial x_1 \partial x_2}(a_{q-15}) = 0, && 16 \le q \le 18,\\
&\phi_{19}(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial \omega_\alpha^3}{\partial n}(a_{12}) = 0,\\
&\phi_{20}(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial \omega_\alpha^3}{\partial n}(a_{23}) = 0,\\
&\phi_{21}(\omega_\alpha^3) = \frac{\partial \omega_\alpha^3}{\partial n}(a_{13}) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.15)$$

5) $\omega_\alpha^4 \in P_5(E), \qquad 1 \le \alpha \le 3,$

$$\begin{aligned}
&\phi_j(\omega_\alpha^4) = \omega_\alpha^4 (a_j) = 0, && 1 \le j \le 3,\\
&\phi_l(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial \omega_\alpha^4}{\partial x_1}(a_{l-3}) = 0, && 4 \le l \le 6,
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_k(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial\omega_\alpha^4}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, && 7\leq k\leq 9,\\
&\phi_m(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial^2\omega_\alpha^4}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, && 10\leq m\leq 12,\\
&\phi_n(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial^2\omega_\alpha^4}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = \delta_{\alpha(n-12)}, && 13\leq n\leq 15,\\
&\phi_q(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial 2\omega_\alpha^4}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}) = 0, && 16\leq q\leq 18,\\
&\phi_{19}(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial\omega_\alpha^4}{\partial n}(a_{12}) = 0, &&\\
&\phi_{20}(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial\omega_\alpha^4}{\partial n}(a_{23}) = 0, &&\\
&\phi_{21}(\omega_\alpha^4) = \frac{\partial\omega_\alpha^4}{\partial n}(a_{13}) = 0. &&
\end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

6) $$\left.\begin{aligned}
&\omega_\alpha^5 \in P_5(E), && 1\leq\alpha\leq 3,\\
&\phi_j(\omega_\alpha^5) = \omega_\alpha^5(a_j) = 0, && 1\leq j\leq 3,\\
&\phi_l(\omega_\alpha^5) = \frac{\partial\omega_\alpha^5}{\partial x_1}(a_{l-3}) = 0, && 4\leq l\leq 6,\\
&\phi_k(\omega_\alpha^5) = \frac{\partial\omega_\alpha^5}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, && 7\leq k\leq 9,\\
&\phi_m(\omega_\alpha^5) = \frac{\partial^2\omega_\alpha^5}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, && 10\leq m\leq 12,\\
&\phi_n(\omega_\alpha^5) = \frac{\partial^2\omega_\alpha^5}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, && 13\leq n\leq 15,\\
&\phi_q(\omega_\alpha^5) = \frac{\partial^2\omega_\alpha^5}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}) = \delta_{\alpha(q-15)}, && 16\leq q\leq 18,
\end{aligned}\right\} \qquad (7.17)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\phi_{19}(\omega_\alpha^5) = \dfrac{\partial\omega_\alpha^5}{\partial n}(a_{12}) = 0, \\[2ex]
\phi_{20}(\omega_\alpha^5) = \dfrac{\partial\omega_\alpha^5}{\partial n}(a_{23}) = 0, \\[2ex]
\phi_{21}(\omega_\alpha^5) = \dfrac{\partial\omega_\alpha^5}{\partial n}(a_{13}) = 0.
\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{lll}
7) & \omega_\alpha^6 \in P_5(E), & 1 \leq \alpha \leq 3, \\[2ex]
 & \phi_j(\omega_\alpha^6) = \omega_\alpha^6\,(a_j) = 0, & 1 \leq j \leq 3, \\[2ex]
 & \phi_l(\omega_\alpha^6) = \dfrac{\partial\omega_\alpha^6}{\partial x_1}(a_{j-3}) = 0, & 4 \leq l \leq 6, \\[2ex]
 & \phi_k(\omega_\alpha^6) = \dfrac{\partial\omega_\alpha^6}{\partial x_2}(a_{k-6}) = 0, & 7 \leq k \leq 9, \\[2ex]
 & \phi_m(\omega_\alpha^6) = \dfrac{\partial^2\omega_\alpha}{\partial x_1^2}(a_{m-9}) = 0, & 10 \leq m \leq 12, \\[2ex]
 & \phi_n(\omega_\alpha^6) = \dfrac{\partial^2\omega_\alpha}{\partial x_2^2}(a_{n-12}) = 0, & 13 \leq n \leq 15, \\[2ex]
 & \phi_q(\omega_\alpha^6) = \dfrac{\partial^2\omega_\alpha}{\partial x_1\partial x_2}(a_{q-15}) = 0, & 16 \leq q \leq 18, \\[2ex]
 & \phi_{19}(\omega_1^6) = \dfrac{\partial\omega_1^6}{\partial n}(a_{12}) = 1, & \\[2ex]
 & \phi_{20}(\omega_1^6) = \dfrac{\partial\omega_1^6}{\partial n}(a_{23}) = 0, & \\[2ex]
 & \phi_{21}(\omega_1^6) = \dfrac{\partial\omega_1^6}{\partial n}(a_{13}) = 0, & \\[2ex]
 & \phi_{19}(\omega_2^6) = \dfrac{\partial\omega_2^6}{\partial n}(a_{12}) = 0, & \\[2ex]
 & \phi_{20}(\omega_2^6) = \dfrac{\partial\omega_2^6}{\partial n}(a_{23}) = 1, &
\end{array}\right\} \qquad (7.18)$$

$$\phi_{21}(\omega_2^6) = \frac{\partial\omega_2^6}{\partial n}(a_{13}) = 0,$$

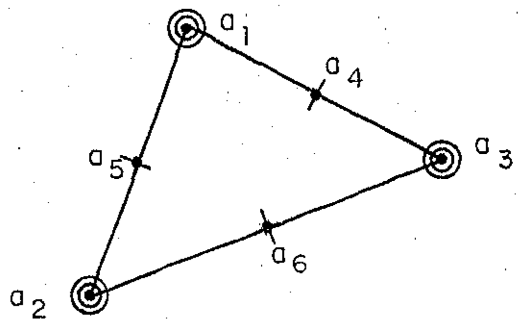
$$\phi_{19}(\omega_3^6) \quad \frac{\partial\omega_3^6}{\partial n}(a_{12}) = 0,$$

$$\phi_{20}(\omega_3^6) = \frac{\partial\omega_3^6}{\partial n}(a_{23}) = 0,$$

$$\phi_{20}(\omega_3^6) = \frac{\partial\omega_3^6}{\partial n}(a_{13}) = 1.$$

Observación 7.2 Obsérvese que el elemento finito de Argyris puede ser definido, como una forma alternativa, de la siguiente manera:

i) $E \subset \mathbb{R}^2$ es un triángulo de vertices a_1, a_2, a_3 y puntos medios a_4, a_5, a_6, como se muestra en la figura:



El correspondiente conjunto de puntos nodales puede ser escrito en la forma

$$N_E = N_{VE} \cup N_{ME}, \tag{7.19}$$

donde,

$$N_{VE} = \left\{a_i \in E : a_i \text{ es un vértice de } E\right\}, \qquad 1 \leq i \leq 3, \tag{7.20}$$

$$N_{ME} = \left\{a_4, a_5, a_6 \in E : a_4, a_5, a_6 \text{ son los puntos medios entre } a_1 \text{ y } a_3, a_1 \text{ y } a_2, a_2 \text{ y } a_3, \text{ respectivamente}\right\}. \tag{7.21}$$

A los conjuntos N_{VE} y N_{ME}, de cardinalidad Card N_{VE} = 3 y Card N_M = 3, respectivamente, los llamaremos el conjunto de vértices y el conjunto de puntos medios del elemento finito E.

ii) $P_E = P_5(E)$, (7.22)

iii) $\Sigma_E = \Sigma_{E^\circ} \cup \Sigma_{E^1} \cup \Sigma_{E^2} \cup \Sigma_{E^{11}} \cup \Sigma_{E^{22}} \cup \Sigma_{E^{12}} \cup \Sigma_E n$, (7.23)

donde,

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma_{E^\circ} = \Big\{\phi_i \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \leq n \leq \text{card } N_{VE} : \\
\qquad \phi_i(p) = p(a_i),\quad a_i \in N_{VE}\Big\}, \\
\\
\Sigma_{E^1} = \Big\{\phi_i^1 \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \leq i \leq \text{card } N_{VE} : \\
\qquad \phi_i^1(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x_1}(a_i),\ a_i \in N_{VE}\Big\}, \\
\\
\Sigma_{E^2} = \Big\{\phi_i^2 \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \leq i \leq \text{card } N_{VE} : \\
\qquad \phi_i^2(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x_2}(a_i),\ a_i \in N_{VE}\Big\}, \\
\\
\Sigma_{E^{11}} = \Big\{\phi_i^{11} \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \leq i \leq \text{card } N_{VE} : \\
\qquad \phi_i^{11}(p) = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(a_i),\quad a_i \in N_{VE}\Big\}, \\
\\
\Sigma_{E^{22}} = \Big\{\phi_i^{22} \in L(P_E,\mathbb{R}),\quad 1 \leq i \leq \text{card } N_{VE} : \\
\qquad \phi_i^{22}(p) = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_i),\quad a_i \in N_{VE}\Big\},
\end{array}\right\} \quad (7.24)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma_{E^{12}} &= \Big\{\phi_i^{12} \in L(P_E,\mathbb{R}), \quad 1\leq i\leq \text{card } N_{VE} : \\
&\qquad \phi_i^{12}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_i),\ a_i \in N_{VE}\Big\}, \\
\Sigma_{E^n} &= \Big\{\phi_i^{n} \in L(P_E,\mathbb{R}), \quad \text{Card } N_{VE}+1\leq i\leq \text{card } N_{VE}+\text{Card } N_{ME} : \\
&\qquad \phi_i^{n}(p) = \frac{\partial p}{\partial n}(a_i),\ \ldots,\ a_i \in N_{ME}\Big\}.
\end{aligned}
\right|
$$

Los sistemas de ecuaciones (7-12)-(7-18), de los cuales se determinan las funciones base del elemento finito, se puede expresar también de la siguiente forma:

$$
\left.
\begin{aligned}
&1)\quad \omega_i \in P_5(E), \qquad 1\leq i\leq \text{card } N_{VE}: \\
&\left.
\begin{aligned}
\phi_l(\omega_i) &= \omega_i(a_l) = \delta_{il}, \\
\phi_l^1(\omega_i) &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}(a_l) = 0, \\
\phi_l^2(\omega_i) &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2}(a_l) = 0, \\
\phi_l^{11}(\omega_i) &= \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1^2}(a_l) = 0, \\
\phi_l^{22}(\omega_i) &= \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_2^2}(a_l) = 0, \\
\phi_l^{12}(\omega_i) &= \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,
\end{aligned}
\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{VE}, \\
&\phi_j^n(\omega_i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial n}(a_j),\ \text{Card } N_{VE}+1\leq j\leq \text{Card } N_{VE}+\text{Card } N_{ME},
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.25)
$$

2) $\omega_i^1 \in P_5(E), \quad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\phi_l(\omega_i^1) = \omega_i^1\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^1(\omega_i^1) = \dfrac{\partial \omega_i^1}{\partial x_1}\,(a_l) = \delta_{il}, \\[2mm]
\phi_l^2(\omega_i^1) = \dfrac{\partial \omega_i^1}{\partial x_2}\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^{11}(\omega_i^1) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^1}{\partial x_1^2}\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^{22}(\omega_i^1) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^1}{\partial x_2^2}\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^{12}(\omega_i^1) = \dfrac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_2) = 0,
\end{array}\right\} \quad 1 \le l \le \text{Card } N_{VE}, \\[2mm]
\phi_j^n(\omega_i^1) = \dfrac{\partial \omega_i^1}{\partial n}\,(a_j), \quad \text{Card } N_{VE}+1 \le j \le \text{Card } N_{VE}+\text{Card } N_{ME}.
\end{array}\right\} \qquad (7.26)$$

3) $\omega_i^2 \in P_5(E), \quad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\phi_l(\omega_i^2) = \omega_i^2\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^2(\omega_i^2) = \dfrac{\partial \omega_i^2}{\partial x_1}\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_1^2(\omega_i^2) = \dfrac{\partial \omega_i^2}{\partial x_2}\,(a_l) = \delta_{il}, \\[2mm]
\phi_l^{11}(\omega_i^2) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_2^2}\,(a_l) = 0, \\[2mm]
\phi_l^{22}(\omega_i^2) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_2^2}\,(a_l) = 0,
\end{array}\right\} \quad 1 \le l \le \text{Card } N_{VE},
\end{array}\right\} \qquad (7.27)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi_l^{12}(\omega_i^2) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,\end{array}\right| \\ \phi_j^n(\omega_i^2) = \dfrac{\partial \omega_i^2}{\partial n}(a_j) = 0, \text{ Card } N_{VE}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{VE} + \text{Card } N_{ME}.\end{array}\right\}$$

4) $\omega_i^{11} \in P_5(E)$, $\quad 1 \leq i \leq \text{Card } N_{VE}$,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi_l(\omega_i^{11}) = \omega_i^{11}(a_l) = 0, \\ \phi_l^1(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial \omega_i^{11}}{\partial x_1}(a_l) = 0, \\ \phi_l^2(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial \omega_i^{11}}{\partial x_2}(a_l) = 0, \\ \phi_l^{11}(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{11}}{\partial x_1^2}(a_l) = \delta_{il}, \\ \phi_l^{22}(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{11}}{\partial x_2^2}(a_l) = 0, \\ \phi_l^{12}(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{12}}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,\end{array}\right\} 1 \leq l \leq \text{Card } N_{VE}, \\ \phi_j^n(\omega_i^{11}) = \dfrac{\partial \omega_i^{11}}{\partial n}(a_j), \text{ Card } N_{VE}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{VE} + \text{Card } N_{ME}.\end{array}\right\} \quad (7.28)$$

5) $\omega_i^{22} \in P_5(E)$, $\quad 1 \leq i \leq \text{Card } N_{VE}$,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi_l(\omega_i^{22}) = \omega_i^{22}(a_l) = 0, \\ \phi_l^1(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial \omega_i^{22}}{\partial x_1}(a_l) = 0, \\ \phi_l^2(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial \omega_i^{22}}{\partial x_2}(a_l) = 0,\end{array}\right\} 1 \leq l \leq \text{Card } N_{VE},\end{array}\right\} \quad (7.29)$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
\phi_1^{11}\,(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{22}}{\partial x_1^2}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{22}\,(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{22}}{\partial x_2^2}\,(a_1) = \delta_{i1}, \\[2ex]
\phi_1^{12}(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial \omega_i^{22}}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_1) = 0,
\end{array}
\right| \\[2ex]
\phi_j^{n}(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial \omega_i^{22}}{\partial n}\,(a_j) = 0, \text{ Card } N_V+1 \le j \le \text{Card } N_{VE} + \text{Card } N_{ME}.
\end{array}
\right|
$$

6) $\omega_i^{12} \in P_5(E), \quad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE},$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
\phi_1(\omega_i^{12}) = \omega_i^{12}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{1}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial \omega_i^{12}}{\partial x_1}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{2}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial \omega_i^{12}}{\partial x_2}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{11}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{12}}{\partial x_1^2}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{22}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{12}}{\partial x_2^2}\,(a_1) = 0, \\[2ex]
\phi_1^{12}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2 \omega_i^{12}}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_1) = \delta_{i1},
\end{array}
\right\} \quad 1 \le 1 \le \text{Card } N_{VE}, \\[2ex]
\phi_j^{n}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial \omega_i^{12}}{\partial n}\,(a_j) = 0, \text{ Card } N_V+1 \le j \le \text{Card } N_{VE} + \text{Card } N_{ME}.
\end{array}
\right\} \qquad (7.30)
$$

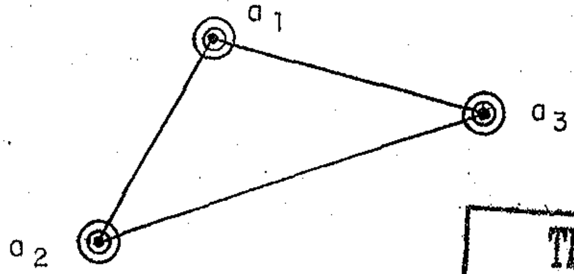
$$
\left.
\begin{array}{l}
7) \quad \omega_j^n \in P_5(E), \quad \text{Card } N_{VE}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{VE}+\text{Card } N_{ME}, \\[2ex]
\left.
\begin{array}{l}
\phi_l(\omega_j^n) = \omega_j^n\,(a_l) = 0, \\[1ex]
\phi_l^1(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial x_1}\,(a_l) = 0, \\[1ex]
\phi_l^2(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial x_2}\,(a_l) = 0, \\[1ex]
\phi_l^{11}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_1^2}\,(a_l) = 0, \\[1ex]
\phi_l^{22}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_2^2}\,(a_l) = 0, \\[1ex]
\phi_l^{12}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_l) = 0,
\end{array}
\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{VE}, \\[2ex]
\phi_k^n(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial n}\,(a_k) = \delta_{jk}, \quad \text{Card } N_{VE}+1 \leq k \leq \text{Card } N_{VE}+\text{Card } N_{ME}.
\end{array}
\right\} \qquad (7.31)
$$

■

7.3 ELEMENTO FINITO DE BELL

Presentaremos ahora el elemento finito de Bell. En este caso la terna (E, P_E, Σ_E) está dada por:

i) $E \subset \mathbb{R}^2$: Triángulo de vértices a_1, a_2, a_3 según se muestra en la figura



ii) $P_E = P_5'(E) = \left\{ p \in P_5(E) : \frac{\partial p}{\partial n} \in P_3(E') \right.$ (7.32)

$\left. \forall \text{ card } E' \subset E \right\}, \quad \dim P_5' = 18.$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{iii)} \quad \Sigma_E = \left\{ \phi_r \in L(P_E, \mathbb{R}), \right. & 1 \le r \le 18: \\ \phi_j(p) = p(a_j), & 1 \le j \le 3, \\ \phi_l(p) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(a_{l-3}), & 4 \le l \le 6, \\ \phi_k(p) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_{k-1}), & 7 \le k \le 9, \\ \phi_m(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(a_{m-9}), & 10 \le m \le 12, \\ \phi_n(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_{n-12}), & 13 \le n \le 15, \\ \phi_q(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_{q-15}), & \left. 16 \le q \le 18 \right\}. \end{array}\right\} \quad (7.33)$$

El correspondiente conjunto de puntos nodales del elemento finito geométrico es:

$$N_E = \left\{ a_i \in E, \quad 1 \le i \le 3 \right\}. \qquad (7.34)$$

Además, según [4],

$$P_4(E) \subset P_5'(E). \qquad (7.35)$$

Las funciones base correspondientes a este elemento finito están dadas por el conjunto,

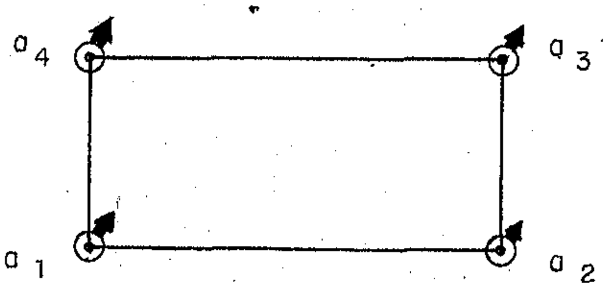
$$B = \left\{ \omega_\alpha, \omega_\alpha^1, \omega_\alpha^2, \omega_\alpha^3, \omega_\alpha^4, \omega_\alpha^5, \quad 1 \le \alpha \le 3 \right\} \subset P_5'(E), \qquad (7.36)$$

las cuales se construyen de manera idéntica a las funciones base del elemento finito de Argyris.

7.4 ELEMENTO FINITO DE BOGNER-FOX-SCHMIT

El elemento finito, cuya terna satisface que

i) $E \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo de vértices a_1, a_2, a_3, a_4, según se muestra en la figura



El conjunto de puntos nodales correspondientes es

$$N_E = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4\right\} \subset E. \qquad (7.37)$$

ii) $P_E = Q_3(E) = \Big\{p : E \to \mathbb{R} : p$ es un polinomio, en dos variables de grado $\leq 3\Big\}$, (7.38)

$$\dim \; Q_3(E) = 16.$$

$$\text{iii) } \Sigma_E = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_j \in L(Q_3(E),\mathbb{R}), & 1\leq i\leq 16: \\ \phi_j(p) = p(a_j), & 1\leq j\leq 4, \\ \phi_k(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x_1}(a_{k-4}), & 5\leq k\leq 8, \end{array} \right. \qquad (7.39)$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_l(p) &= \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_{l-8}), \qquad 9\le l\le 12,\\ \phi_m(p) &= \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_{m-12}), \quad 13\le m\le 16\Big\}.\end{aligned}\right|$$

es llamado elemento finito de Bogner-Fox-Schmit.

Las funciones base de este elemento finito, cuya construcción es similar a los casos anteriores, están dadas por el conjunto,

$$B = \left\{\omega_\alpha,\ \omega_\alpha^1,\ \omega_\alpha^2,\ \omega_\alpha^{12},\quad 1\le\alpha\le 4\right\}. \tag{7.40}$$

Observación 7.3 El conjunto de grados de libertad del elemento finito de Bell se puede definir, como en el caso del elemento finito de Argyris, de la siguiente manera

$$\Sigma_E = \Sigma_{E^\circ} \cup \Sigma_{E^1} \cup \Sigma_{E^2} \cup \Sigma_{E^{11}} \cup \Sigma_{E^{22}} \cup \Sigma_{E^{12}}, \tag{7.41}$$

donde, siendo $a_i \in N_{VE}$,

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{E^\circ} &= \left\{\phi_i \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i(p)=p(a_i)\right\},\\
\Sigma_E 1 &= \left\{\phi_i^1 \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i^1(p)=\frac{\partial p}{\partial x_1}(a_i)\right\},\\
\Sigma_E 2 &= \left\{\phi_i^2 \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i^2(p)=\frac{\partial p}{\partial x_2}(a_i)\right\},\\
\Sigma_E 11 &= \left\{\phi_i^{11} \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i^{11}(p)=\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(a_i)\right\},\\
\Sigma_E 22 &= \left\{\phi_i^{22} \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i^{22}(p)=\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_i)\right\},\\
\Sigma_E 12 &= \left\{\phi_i^{12} \varepsilon L(P_5'(E_k),\mathbb{R}), \quad 1\le i\le \text{Card } N_{VE},\ \phi_i^{12}(p)=\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_i)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

Aquí el conjunto N_{VE}, de cardinalidad Card $N_{VE} = 3$, está definido por

$$N_{VE} = \left\{ a \in E : \text{a es un vértice del elemento finito geométrico} \right\}. \quad (7.43)$$

Similarmente, para el rectángulo de Bogner-Fox-Schmidt, el conjunto de grados de libertad queda definido por:

$$\Sigma_E = \Sigma_{E^0} \cup \Sigma_{E^1} \cup \Sigma_{E^2} \cup \Sigma_{E^{12}}, \quad (7.44)$$

donde, para $a_i \in N_{VE}$,

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_E^0 &= \left\{ \phi_i \in L(Q_3(E), \mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}, \right. \\
&\qquad \left. \phi_i(p) = p(a_i) \right\}, \\
\Sigma_E^1 &= \left\{ \phi_i^1 \in L(Q_3(E), \mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}, \right. \\
&\qquad \left. \phi_i^1(p) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(a_i) \right\}, \\
\Sigma_E^2 &= \left\{ \phi_i^2 \in L(Q_3(E), \mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}, \right. \\
&\qquad \left. \phi_i^2(p) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_i) \right\}, \\
\Sigma_E^{12} &= \left\{ \phi_i^{12} \in L(Q_3(E), \mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \text{Card } N_{VE}, \right. \\
&\qquad \left. \phi_i^{12}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_i) \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (7.45)$$

El conjunto N_{VE} está definido como en el caso del elemento finito de Bell. ■

7.5 CONSTRUCCION DE ESPACIOS DE ELEMENTOS FINITOS.

Procederemos a continuación a ejemplificar, mediante los elementos finitos presentados anteriormente, la construcción de los espacios de elementos finitos X_h. Primeramente construiremos el espacio asociado a una "triangularización" realizada mediante el elemento finito de Argyris. Supongamos que tal triangularización satisface el primer aspecto básico que caracteriza al método del elemento finito, MEF1. Definamos a continuación los conjuntos,

$$N_{Vh} = \left\{a \in \mathbb{R}^2 : \text{a es un vértice de un elemento finito de la triangularización } \tau_h\right\}. \tag{7.46}$$

$$N_{Mh} = \left\{a \in \mathbb{R}^2 : \text{a es un punto medio, entre dos vértices, de algún elemento finito de la triangularización } \tau_h\right\}, \tag{7.47}$$

de cardinalidad, card N_V, card N_M, respectivamente. El conjunto de puntos nodales de τ_h se define como

$$N_h = N_{Vh} \cup N_{Mh}. \tag{7.48}$$

su correspondiente cardinalidad es

$$\text{Card } N_h = \text{Card } N_{Vh} + \text{Card } N_{Mh}. \tag{7.49}$$

Supongamos además que en tal triangularización se numeran primeramente los vértices y posteriormente los puntos medios. El espacio de elemento finito, X_h, asociado a tal triangularización será tal que:

$$X_h \subset \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \; : \; f|_{E_j} \in P_5(E_j), \;\; \forall \, E_j \in \tau_h \right\}. \tag{7.50}$$

El conjunto de grados de libertad de la triangularización está dado por

$$\Sigma_h = \Sigma_{h^{\circ}} \cup \Sigma_{h^{1}} \cup \Sigma_{h^{2}} \cup \Sigma_{h^{11}} \cup \Sigma_{h^{22}} \cup \Sigma_{h^{12}} \cup \Sigma_{h^{n}}, \tag{7.51}$$

donde,

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{h^{\circ}} &= \Big\{ \phi_i \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i(p) = p(a_i),\; a_i \in N_{vH},\; E_k \in \tau_h \Big\}, \\
\Sigma_{h}1 &= \Big\{ \phi_i^1 \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i^1\,(p) = \frac{\partial p}{\partial x_1}\,(a_i),\; a_i \in N_v,\; E_k \in \tau_h \Big\}, \\
\Sigma_{h}2 &= \Big\{ \phi_i^2 \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i^2(p) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_i),\; a_i \in N_v,\; E_k \in \tau_h \Big\}, \\
\Sigma_{h}11 &= \Big\{ \phi_i^{11} \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i^{11} = \frac{{}^{2}p}{x_1^2}\,(a_i),\; a_i \in N_v,\; E_k \in \tau_h \Big\}, \\
\Sigma_{h}22 &= \Big\{ \phi_i^{22} \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i^{22}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\,(a_i),\; a_i \in N_v,\; E_k \in \tau_h \Big\}, \\
\Sigma_{h}12 &= \Big\{ \phi_i^{12} \in L(P_5(E_k),\mathbb{R}), \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{vh} : \\
&\qquad \phi_i^{12}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_i),\; a_i \in N_v,\; E_k \in \tau_h \Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

$$\Sigma_h n = \left\{ \phi_i^n \in L(P_5(E_k), \mathbb{R}), \ \text{Card } N_{vh}+1 \leq i \leq \text{Card } N_{vh} + \text{Card } N_{Mh} : \right.$$
$$\left. \phi_i^n(p) = \frac{\partial p}{\partial n}(a_i), \quad a_i \in N_M, \ E_k \in \tau_h \right\}.$$

De acuerdo a las expresiones (7.51) y (7.52), se observa que

$$\text{Card } \Sigma_h = 6 \text{ Card } N_{vh} + \text{Card } N_{Mh}. \tag{7.53}$$

La base del espacio de elemento finito X_h, está dada por el conjunto, de cardinalidad igual a Card Σ_h, siguiente.

$$B = \left\{ \omega_i, \omega_i^1, \omega_i^2, \omega_i^{11}, \omega_i^{22}, \omega_i^{12}, \omega_i^n, \right.$$
$$\left. 1 \leq i \leq \text{Card } N_{Vh}, \ \text{Card } N_{Vh} + 1 \leq j \leq \text{Card } N_{Vh} + \text{Card } N_{Mh} \right\}. \tag{7.54}$$

Los elementos de B son llamadas funciones base globales de la triangularización τ_h, las cuales se determinan al resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\omega_i \in X_h, \qquad 1 \leq i \leq \text{Card } N_{Vh},$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_l(\omega_i) = \omega_i(a_l) = \delta_{il}, \\
&\phi_l^1(\omega_i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1}(a_l) = 0, \\
&\phi_l^2(\omega_i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_2}(a_l) = 0, \\
&\phi_l^{11}(\omega_i) = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1^2}(a_l) = 0, \\
&\phi_l^{22}(\omega_i) = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_2^2}(a_l) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{vh}, \tag{7.55}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_l^{12}(\omega_i) = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,\\
&\phi_j^{n}(\omega_i) = \frac{\partial \omega_i}{\partial n}(a_j), \quad \text{Card } N_{Vh}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{Vh} + \text{Card } N_{Mh}.
\end{aligned}\right\}$$

2) $\omega_i^1 \in X_h, \qquad 1 \leq i \leq \text{Card } N_{Vh},$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\phi_l(\omega_i^1) = \omega_i^1(a_l) = 0,\\
&\phi_l^1(\omega_i^1) = \frac{\partial \omega_i^1}{\partial x_1}(a_l) = \delta_{il},\\
&\phi_l^2(\omega_i^1) = \frac{\partial \omega_i^1}{\partial x_2}(a_l) = 0,\\
&\phi_l^{11}(\omega_i^1) = \frac{\partial^2 \omega_i^1}{\partial x_1^2}(a_l) = 0,\\
&\phi_l^{22}(\omega_i^1) = \frac{\partial^2 \omega_i^1}{\partial x_2^2}(a_l) = 0,\\
&\phi_l^{12}(\omega_i^1) = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{Vh},\\
&\phi_j^{n}(\omega_i^1) = \frac{\partial \omega_i^1}{\partial n}(a_j), \quad \text{Card } N_{Vh}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{Vh} + \text{Card } N_{Mh}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

3) $\phi_i^2 \in X_h, \qquad 1 \leq i \leq \text{Card } N_{Vh},$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\phi_l(\omega_i^2) = \omega_i^2(a_l) = 0,\\
&\phi_l^1(\omega_i^2) = \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_1}(a_l) = 0,\\
&\phi_l^2(\omega_i^2) = \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_2}(a_l) = \delta_{il},
\end{aligned}\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{Vh}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

$$\phi_l^{11}(\omega_i^2) = \frac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_1^2}(a_l) = 0,$$

$$\phi_l^{22}(\omega_i^2) = \frac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_2^2}(a_l) = 0,$$

$$\phi_l^{12}(\omega_i^2) = \frac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,$$

$$\phi_j^n(\omega_i^2) = \frac{\partial \omega_i^2}{\partial n}(a_j) = 0, \quad \mathrm{Card}\, N_{Vh}+1 \le j \le \mathrm{Card}\, N_{Vh} + \mathrm{Card}\, N_{Mh}.$$

4) $\omega_i^{11} \in X_h, \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{Vh};$

$$\left.\begin{aligned}
\phi_l(\omega_i^{11}) &= \omega_i^{11}(a_l) = 0,\\
\phi_l^1(\omega_i^{11}) &= \frac{\partial \omega_i^{11}}{\partial x_1}(a_l) = 0,\\
\phi_l^2(\omega_i^{11}) &= \frac{\partial \omega_i^{11}}{\partial x_2}(a_l) = 0,\\
\phi_l^{11}(\omega_i^{11}) &= \frac{\partial^2 \omega_i^{11}}{\partial x_1^2}(a_l) = \delta_{il},\\
\phi_l^{22}(\omega_i^{11}) &= \frac{\partial^2 \omega_i^{11}}{\partial x_2^2}(a_l) = 0,\\
\phi_l^{12}(\omega_i^{11}) &= \frac{\partial^2 \omega_i^{12}}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad 1 \le l \le \mathrm{Card}\, N_{Vh}, \tag{7.58}$$

$$\phi_j^n(\omega_i^{11}) = \frac{\partial \omega_i^{11}}{\partial n}(a_j), \quad \mathrm{Card}\, N_{Vh}+1 \le j \le \mathrm{Card}\, N_{Vh} + \mathrm{Card}\, N_{Mh}.$$

5) $\omega_i^{22} \in X_h, \qquad 1 \le i \le \mathrm{Card}\, N_{Vh},$

$$\phi_l(\omega_i^{22}) = \omega_i^{22}(a_l) = 0,$$

$$\phi_l^1(\omega_i^{22}) = \frac{\partial \omega_i^{22}}{\partial x_1}(a_l) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi_l^2(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial\omega_i^{22}}{\partial x_2}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^{11}(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{22}}{\partial x_1^2}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^{22}(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{22}}{\partial x_2^2}(a_l) = \delta_{il},\\[2ex] \phi_l^{12}(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{22}}{\partial x_1\partial x_2}(a_l) = 0,\end{array}\right\} \quad 1\le l\le \text{Card } N_{Vh},\\[2ex] \phi_j^n(\omega_i^{22}) = \dfrac{\partial\omega_i^{22}}{\partial n}(a_j) = 0,\ \text{Card } N_{Vh}+1\le j\le \text{Card } N_{Vh}+\text{Card } N_{Mh}.\end{array}\right\} \qquad (7.59)$$

6) $\omega_i^{12} \in X_h, \quad 1\le i\le \text{Card } N_{Vh},$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi_l(\omega_i^{12}) = \omega_i^{12}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^1(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial\omega_i^{12}}{\partial x_1}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^2(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial\omega_i^{12}}{\partial x_2}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^{11}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{12}}{\partial x_1^2}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^{22}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{12}}{\partial x_2^2}(a_l) = 0,\\[2ex] \phi_l^{12}(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial^2\omega_i^{12}}{\partial x_1\partial x_2}(a_l) = \delta_{il},\end{array}\right\} \quad 1\le l\le \text{Card } N_{Vh},\\[2ex] \phi_j^n(\omega_i^{12}) = \dfrac{\partial\omega_i^{12}}{\partial n}(a_j) = 0,\ \text{Card } N_{Vh}+1\le j\le \text{Card } N_{Vh}+\text{Card } N_{Mh}.\end{array}\right\} \qquad (7.60)$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
7)\quad \omega_j^n \in X_h, \quad \text{Card } N_{Vh}+1 \leq j \leq \text{Card } N_{Vh}+\text{Card } N_{Mh}, \\[1em]
\left.
\begin{array}{l}
\phi_l(\omega_j^n) = \omega_j^n\,(a_l) = 0, \\[0.5em]
\phi_l^1(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial x_1}(a_l) = 0, \\[0.8em]
\phi_l^2(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial x_2}(a_l) = 0, \\[0.8em]
\phi_l^{11}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_1^2}(a_l) = 0, \\[0.8em]
\phi_l^{22}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_2^2}(a_l) = 0, \\[0.8em]
\phi_l^{12}(\omega_j^n) = \dfrac{\partial^2 \omega_j^n}{\partial x_1 \partial x_2}(a_l) = 0,
\end{array}
\right\} \quad 1 \leq l \leq \text{Card } N_{Vh}, \\[2em]
\phi_k^n(\omega_j^n) = \dfrac{\partial \omega_j^n}{\partial n}(a_k) = \delta_{jk}, \quad \text{Card } N_{Vh}+1 \leq k \leq \text{Card } N_{Vh}+\text{Card } N_{Mh}.
\end{array}
\right\} \qquad (7.61)
$$

Sea ahora una triangularización, τ_h, realizada con el elemento finito de Bell, la cual satisface MEF1. El conjunto de puntos nodales de la triangularización será en este caso

$$
N_h = N_{Vh} = \left\{ a \in \mathbb{R}^2 : \ \text{a es un vértice de un elemento finito de la triangularización } \tau_h \right\}. \qquad (7.62)
$$

El espacio de elemento finito X_h, asociado a esta triangularización será tal que:

$$
X_h \subset \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f\big|_{E_j} \in P_5'(E_j), \quad \forall \ E_j \in \tau_h \right\}. \qquad (7.63)
$$

El correspondiente conjunto de grados de libertad es:

$$\Sigma_h = \Sigma_{h^\circ} \cup \Sigma_{h^1} \cup \Sigma_{h^2} \cup \Sigma_{h^{11}} \cup \Sigma_{h^{22}} \cup \Sigma_{h^{12}} \,, \tag{7.64}$$

donde, para $1 \leq i \leq \text{Card}\, N_h$, $a_i \in N_h$, $E_k \in \tau_h$, se tiene que

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{h^\circ} &= \left\{\phi_i \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i(p) = p(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 1 &= \left\{\phi_i^1 \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^1(p) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 2 &= \left\{\phi_i^2 \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^2(p) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 11 &= \left\{\phi_i^{11} \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^{11}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 22 &= \left\{\phi_i^{22} \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^{22}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 12 &= \left\{\phi_i^{12} \in L(P_5'(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^{12}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_i)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

La cardinalidad de Σ_h en este caso es,

$$\text{Card}\, \Sigma_h = 6\ \text{Card}\, N_h. \tag{7.66}$$

El conjunto,

$$B = \left\{\omega_i,\ \omega_i^1,\ \omega_i^2,\ \omega_i^{11},\ \omega_i^{22},\ \omega_i^{12}, \quad 1 \leq i \leq \text{Card}\, N_h\right\}, \tag{7.67}$$

cuyos elementos, llamados funciones base globales de τ_h y construidas de manera idéntica al caso del elemento finito de Argyris, forman una base del espacio

X_h, cuya dimensión es igual a la cardinalidad de Σ_h.

Finalmente, supongamos que la triangularización, τ_h, la cual satisface MEF1, se realiza mediante elemento finitos de Bogner-Fox-Schmit. El conjunto de puntos nodales de la triangularización es

$$\mathcal{N}_h = \left\{a \in \mathbb{R}^2 : a \text{ es un vértice de un elemento finito de la triangularización } \tau_h\right\}. \tag{7.68}$$

El espacio de elemento finito, X_h, correspondiente satisface

$$X_h \subset \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f\big|_{E_j} \in Q_3(E_j), \ \forall \ E_j \in \tau_h\right\}. \tag{7.69}$$

El conjunto de grados de libertad de τ_h está determinado por

$$\Sigma_h = \Sigma_{h^\circ} + \Sigma_h 1 + \Sigma_h 2 + \Sigma_h 12, \tag{7.70}$$

donde, para $1 \leq i \leq \operatorname{Card} \mathcal{N}_h, a_i \in \mathcal{N}_h$, $E_k \in \tau_h$,

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_{h^\circ} &= \left\{\phi_i \in L(Q_3(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i(p) = p(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 1 &= \left\{\phi_i^1 \in L(Q_3(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^1(p) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 2 &= \left\{\phi_i^2 \in L(Q_3(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^2(p) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(a_i)\right\}, \\
\Sigma_h 12 &= \left\{\phi_i^{12} \in L(Q_3(E_k),\mathbb{R}): \quad \phi_i^{12}(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(a_i)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.71}$$

La cardinalidad de Σ_h está determinada por:

$$\text{Card } \Sigma_h = 4 \text{ Card } N_h. \tag{7.72}$$

La base del espacio X_h, está dada por el conjunto

$$B = \left\{\omega_i,\ \omega_i^1,\ \omega_i^2,\ \omega_i^{12} \qquad 1 \leq i \leq \text{Card } N_h\right\}. \tag{7.73}$$

Las funciones base globales se determinan al resolver los sistemas de ecuaciones siguientes

1) $\omega_i \in X_h, \quad 1 \leq i \leq \text{Card } N_h$:

$$\left.\begin{aligned} \phi_j(\omega_i) &= \omega_i\,(a_j) = \delta_{ij}, \\ \phi_j^k(\omega_i) &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}\,(a_j) = 0, \qquad 1 \leq k \leq 2, \\ \phi_j^{12}(\omega_i) &= \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_j) = 0. \end{aligned}\right\}\ 1 \leq j \leq \text{Card} N_h \tag{7.74}$$

2) $\omega_i^1 \in X_h, \quad 1 \leq i \leq \text{Card } N_h$:

$$\left.\begin{aligned} \phi_j(\omega_i^1) &= \omega_i^1\,(a_j) = 0, \\ \phi_j^1(\omega_i^1) &= \frac{\partial \omega_i^1}{\partial x_1}\,(a_j) = \delta_{ij}, \\ \phi_j^2(\omega_i^1) &= \frac{\partial \omega_i^1}{\partial x_2}\,(a_j) = 0, \\ \phi_j^{12}(\omega_i^1) &= \frac{\partial^2 \omega_i^1}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_j) = 0. \end{aligned}\right\}\ 1 \leq j \leq \text{Card } N_h. \tag{7.75}$$

3) $\omega_i^2 \in X_h$, $1 \leq i \leq \text{Card } N_h$:

$$\left.\begin{aligned} \phi_j(\omega_i^2) &= \omega_i^2\,(a_j) = 0, \\ \phi_j^1(\omega_i^2) &= \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_1}\,(a_j) = 0, \\ \phi_j^2(\omega_i^2) &= \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_2}\,(a_j) = \delta_{ij}, \\ \phi_j^{12}(\omega_i^2) &= \frac{\partial^2 \omega_i^2}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_j) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 1 \leq j \leq \text{Card } N_h. \tag{7.76}$$

4) $\omega_i^{12} \in X_h$, $1 \leq i \leq \text{Card } N_h$:

$$\left.\begin{aligned} \phi_j(\omega_i^{12}) &= \omega_i^{12}\,(a_j) = 0, \\ \phi_j^k(\omega_i^{12}) &= \frac{\partial \omega_i^{12}}{\partial x_k}\,(a_j) = 0, \qquad 1 \leq k \leq 2, \\ \phi_j^{12}(\omega_i^{12}) &= \frac{\partial \omega_i^{12}}{\partial x_1 \partial x_2}\,(a_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}\right\} \quad 1 \leq j \leq \text{Card } N_h. \tag{7.77}$$

Las propiedades de los elementos finitos ejemplificados anteriormente, asi como de los espacios correspondientes, son estudiadas en [4]. Algunos de ellas, de acuerdo a nuestros intereses, se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 7.1 Los elementos finitos de Argyris, Bell, Bogner-Fox-Schmidt, son $P_E(E)$ unisolventes. Si X_h es el espacio de elementos finitos construido con algunos de estos elementos, entonces,

$$X_h \subset C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega). \tag{7.78}$$

Además,

$$V_{h1} = \left\{ v_h \in X_h : v_h = \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \right.$$

$$\left. \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega_3 \right\} \subset V_1(\Omega), \tag{7.79}$$

$$V_{h2} = \left\{ v_h \in X_h : v_h = \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_1, \right.$$

$$\left. v_h = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_3 \right\} \subset V_2(\Omega). \tag{7.80}$$

siempre que $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_3$ sean, en forma exacta, la unión de caras de algunos elementos finitos de la triangularización. Aquí $V_1(\Omega)$, $V_2(\Omega)$, son los espacios definidos en (6.38) y (6.53), respectivamente. ■

Observación 7.4. Obsérvese que en todos los casos anteriormente presentados, los tres aspectos básicos del elemento finito están presentes. En el elemento finito de Argyris, $P_E = P_5(E)$ en el de Bell $P_5' \subset P_4(E)$ y, en el de Bogner-Fox-Schmit $Q_3 \in P_4(E)$, con lo cual MF2 es satisfecho. Además de acuerdo a la construcción de la base global de la triangularización, MF3 es satisfecha.

■

7.6 OPERADORES DE INTERPOLACION

Para mostrar la tercer propiedad de la definición de aproximación interna, presentada en el capítulo 3, es necesario introducir algunos conceptos adicionales, temas de ésta y la próxima sección, a los utilizados en las primeras secciones del presente capítulo. Sean (E, P_E, Σ_E) un elemento finito y $v \in C^S(E,\mathbb{R})$, donde S denota el máximo orden de las derivadas que aparecen en la definición del conjunto Σ_E. El operador $\Pi_E : C^S(E,\mathbb{R}) \to P_E$, definido por

$$\Pi_E v = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(v)\, p_i, \tag{7.81}$$

donde, N = cardinalidad del conjunto N_E, siendo,

$$N_E = \left\{ a \in E : a \text{ es un punto nodal} \right\}. \tag{7.82}$$

es llamado el P_E - interpolante de la función $v \in C^s(E,\mathbb{R})$.

Sea X_h un espacio de elementos finitos y Σ_h su correspondiente conjunto de grados de libertad. Sea $v \in C^m(\bar{\Omega},\mathbb{R})$, donde m es el máximo orden de las derivadas que aparecen en la definición del conjunto Σ_h. El operador $\Pi_h : C^m(\Omega,\mathbb{R}) \to X_h$, definido por

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{M} \phi_i(v)\, \omega_i, \tag{7.83}$$

donde, M = Cardinalidad de N_h, siendo,

$$N_h = \left\{ a \in \Omega : \; a \text{ es un nodo} \right\}, \tag{7.84}$$

es llamado el X_h - interpolante de la función $v \in C^s(\bar{\Omega},\mathbb{R})$.

El siguiente teorema, presentado en [4] , nos relaciona el X_h - interpolante de $v \in C^m(\bar{\Omega},\mathbb{R})$ con el P_E - interpolante.

Teorema 7.1. Sea $v \in \operatorname{dom} \Pi_h = C^m(\bar{\Omega},\mathbb{R})$, entonces, $\forall\; E \in \tau_h$,

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad v\big|_E \in \operatorname{dom} \Pi_E = C^s(E,\mathbb{R}), \\ &\text{ii)} \quad (\Pi_h v)\big|_E = \Pi_E v\big|_E . \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{7.85}$$

Para el caso de condiciones de frontera homogeneas, como las consideradas en (7.79) y (7.80), se presenta, en [4] , el siguiente resultado.

Teorema 7.2. Los elementos finitos de Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmidt, poseen las siguientes propiedades

$$
\begin{aligned}
& v \in \operatorname{dom} \Pi_h, \quad v\big|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_3} = 0, \Rightarrow \Pi_h v \in V_{h1}, \\
& v \in \operatorname{dom} \Pi_h, \quad v\big|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1} = v\big|_{\partial\Omega_3} = 0, \Rightarrow \Pi_h v \in V_{h2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
\tag{7.86}
$$

7.7 ELEMENTOS FINITOS AFINES Y CASI AFINES

Nuestro objetivo en esta sección es el demostrar que las parejas $(V_{h1}, \mathcal{V}_{h1})$, $(V_{h2}, \mathcal{V}_{h2})$, donde V_{h1}, V_{h2} se caracterizan por (7.79); (7.80) y

$$
\mathcal{V}_{h1} = L^2(0,T;V_{h1}), \qquad \mathcal{V}_{h2} = L^2(0,T;V_{h2}), \tag{7.87}
$$

representan una aproximación interna, en el sentido del capítulo 3, de $(V_1(\Omega), L^2(0,T;V_1(\Omega)))$ $(V_2(\Omega), L^2(0,T;V_2(\Omega)))$ respectivamente. Para satisfacer este objetivo es necesario introducir los conceptos de familias afines y casi-afines de elementos finitos.

Sea (E,P_E,Σ_E) un elemento finito, donde los grados de libertad son de la forma

$$
\begin{aligned}
& p \longrightarrow p(a_i^\circ), \\
& p \longrightarrow Dp(a_i^1)\, \xi_{ik}^1, \\
& p \longrightarrow D^2p(a_i^2)\, (\xi_{ik}^2, \xi_{il}^2),
\end{aligned}
\tag{7.88}
$$

aqui, $p \in P_E$, a_i^0, a_i^1, a_i^2 son puntos nodales del elemento finito $E \subset \mathbb{R}^n$, $Dp : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $D^2p : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ son la primera y segunda derivada del Fréchet de $p \in P_E$ y $\xi^1_{ik}, \xi^2_{ik}, \xi^2_{il}$ son vectores fijos de $E \subset \mathbb{R}^n$. Dos elementos finitos $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ y (E, P_E, Σ_E) con grados de libertad de la forma (7.88) se dicen ser afinmente equivalentes si existe una transformación afín invertible $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que;

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b, \tag{7.89}$$

$$E = F(\hat{E}) \tag{7.90}$$

$$P_E = \left\{p : E \to \mathbb{R};\quad p = \hat{p} \circ F^{-1},\quad \hat{p} \in \hat{P}_E\right\}, \tag{7.91}$$

$$a_i^r = F(\hat{a}_i^r) \in E, \quad \hat{a}_i^r \in \hat{E}, \quad r = 0, 1, 2, \tag{7.92}$$

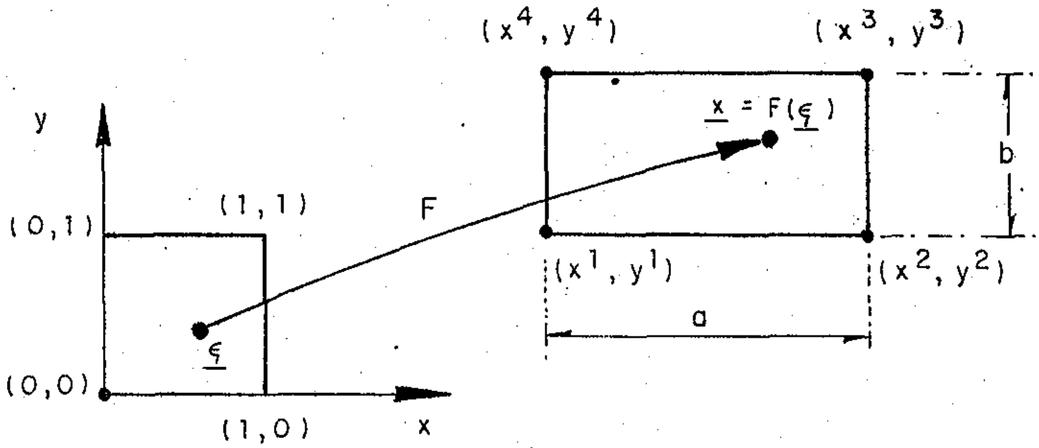
$$\xi^1_{ik} = B\hat{\xi}^1_{ik}, \quad \xi^2_{ik} = B\hat{\xi}^2_{ik}, \quad \xi^2_{ik} = B\hat{\xi}^2_{ik}, \tag{7.93}$$

donde, $\hat{a}_i^r$, $\hat{\xi}^1_{ik}, \hat{\xi}^2_{ik}, \hat{\xi}^2_{il}$ aparecen en la definición del conjunto $\hat{\Sigma}_E$, B es una matríz de orden $n\mathrm{x}n$ y $b \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Mostraremos a continuación que dos elementos finitos de Bogner-Fox-Schmit son afinmente equivalentes, mediante el siguiente teorema.

Teorema 7.3 Si $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ y (E, P_E, Σ_E) son dos elementos finitos de *Bogner-Fox-Schmit, entonces, son afinmente equivalentes.*

Demostración. Para demostrar el teorema construiremos la transformación afín, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que deforma un elemento finito de referencia $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ en el elemento finito (E, P_E, Σ_E). Consideremos un elemento finito de referencia de Bogner-Fox-Schmit de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ el cual se deforma, mediante $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, según se muestra en la figura



Nuestro objetivo es construir la transformación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que satisfaga (7.89)-(7.93). Primeramente supongamos que

$$
\begin{aligned}
F(0,0) &= (x^1,y^1),\\
F(1,0) &= (x^2,y^2),\\
F(1,1) &= (x^3,y^3),\\
F(0,1) &= (x^4,y^4).
\end{aligned}
\tag{7.94}
$$

lo cual nos lleva a suponer que

$$
(x,y) = F(\xi^1,\xi^2) = (\alpha_0+\alpha_1\xi^1+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi^1\xi^2,\ \beta_0+\beta_1\xi^1+\beta_2\xi^2+\beta_3\xi^1\xi^2), \tag{7.95}
$$

$$
\forall\ (\xi^1,\xi^2) \in \hat{E}.
$$

Los coeficientes α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j=0,1,2,3$, se determinan al valuar (7.95) en los vértices del elemento finito de referencia y utilizar (7.94) para obtener que:

$$(\alpha_0,\beta_0) = (x^1,y^1), \tag{7.96}$$

$$(\alpha_1,\beta_1) = (x^2-x^1,\ y^2-y^1), \tag{7.97}$$

$$(\alpha_2,\beta_2) = (x^4-x^1,\ y^4-y^1), \tag{7.98}$$

$$(\alpha_3,\beta_3) = (x^1-x^2+x^3-x^4,\ \ y^1-y^2+y^3-y^4). \tag{7.99}$$

Mediante (7.95)-(7.99) se obtiene que

$$\begin{aligned}(x,y) = F(\xi^1,\xi^2) = (&x^1+(x^2-x^1)\xi^1 + (x^4-x^1)\xi^2 + (x^1-x^2+x^3-x^4)\xi^1\xi^2,\\ &y^1 + (y^2-y^1)\xi^1 + (y^4-y^1)\xi^2 + (y^1-y^2+y^3-y^4)\xi^1\xi^2), \quad (7.100)\\ &\forall\ (\xi^1,\xi^2) \in \hat{E}.\end{aligned}$$

Esta ecuación puede escribirse en la siguiente forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-x^1 & x^4-x^1 & x^1-x^2+x^3-x^4 \\ y^2-y^1 & y^4-y^1 & y^1-y^2+y^3-y^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi 2 \\ \xi^1\xi^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} \tag{7.101}$$

Al observar que $x^1=x^4$, $x^2=x^3$, $y^1=y^2$, $y^3=y^4$, la ecuación (7.100) se reduce a

$$(x,y) = F(\xi^1,\xi^2) = (x^1+(x^2-x^1)\xi^1,\quad y^1+(y^4-y^1)\xi^2), \quad \forall\ (\xi^1,\xi^2) \in \hat{E}, \tag{7.102}$$

y la correspondiente representación matricial es, tomando en cuenta que $x^2-x^1=a$ y $y^4-y^1=b$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} \quad \forall\ (\xi^1,\xi^2) \in \hat{E} \tag{7.103}$$

La transformación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ presentada en (7.102) es afín, de la forma (7.89), además $E = F(\hat{E})$, $\underline{a}^i = F(\xi^i)$, $i=1,2,3,4$ e invertible, puesto que, $F^{-1} : E \to \hat{E}$ está dada por,

$$(\xi^1,\xi^2) = F^{-1}(x,y) = \left[\frac{1}{a}(x-x^1),\ \frac{1}{b}(y-y^1)\right], \qquad (x,y) \in E. \tag{7.104}$$

Mostraremos ahora que (7.91) y (7.93) son también satisfechas. Obsérvese que $\hat{p}_E \in Q_3(\hat{E})$, esto es,

$$\begin{aligned}\hat{p}(\xi,\eta) = {} & \alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\xi\eta+\alpha_4\xi^2+\alpha_5\eta^2+\alpha_6\eta^2\xi^2+\alpha_7\xi^3+ \\ & +\alpha_8\xi\eta^2+\alpha_9\xi^2\eta+\alpha_{10}\eta^3+\alpha_{11}\xi^3\eta^3+\alpha_{12}\xi\eta^3+\alpha_{13}\xi^3\eta+ \\ & +\alpha_{14}\xi^2\eta^3+\alpha_{15}\xi^3\eta^2, \qquad (\xi,\eta) \in \hat{E}.\end{aligned} \tag{7.105}$$

Por tanto, (7.91) es satisfecha, puesto que

$$\begin{aligned}p(x,y) &= (\hat{p} o F^{-1})(x,y) = \hat{p}\,(F^{-1}(x,y)) = \\ &= \hat{p}\left[\frac{1}{a}(x-x^1),\ \frac{1}{b}(y-y^1)\right] \in Q_3(E).\end{aligned} \tag{7.106}$$

El conjunto de grados de libertad $\hat{\Sigma}_E$ en este caso, según (7.70) y (7.71), son de la forma (7.88), puesto que

$$\left.\begin{aligned}\hat{\phi}_j^i(\hat{p}) &= \frac{\partial\hat{p}}{\partial x_i}(\hat{a}_j) = D\hat{p}(a_j)\,\underline{\hat{e}}_i, \\ \hat{\phi}_j^{12}(\hat{p}) &= \frac{\partial^2\hat{p}}{\partial x_1\partial x_2}(\hat{a}_j) = D^2\hat{p}(a_j)(\underline{\hat{e}}_1,\underline{\hat{e}}_2).\end{aligned}\right\}\ \hat{p} \in \hat{P}_E \tag{7.106}$$

Además,

$$\underline{\alpha} = a\,\underline{\hat{e}}_1 + 0\,\underline{\hat{e}}_2 = B\,\underline{\hat{e}}_1, \tag{7.107}$$

$$\underline{\beta} = 0\,\underline{\hat{e}}_1 + b\,\underline{\hat{e}}_2 = B\,\underline{\hat{e}}_2. \tag{7.108}$$

Por tanto, (7.93) es satisfecha. $\blacksquare$

Mediante el mismo procedimiento que el empleado en el teorema 7.3 se demuestra que dos elementos finitos de Argyris o Bell no son afinmente equivalentes, ver [4]. En el primer caso (7.93) no se satisface por la presencia de las derivadas normales en los puntos medios de las caras de los elementos finitos y, en el segundo, (7.91) no es satisfecha. Debido a esto es necesario introducir el concepto de familias casi-afines de elementos finitos, lo cual se hará posteriormente. Para elementos finitos afinmente equivalentes se tiene el siguiente resultado de la teoría de interpolación, [4].

Teorema 7.4 Sea $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ un elemento finito, para el cual s denota el máximo orden de derivadas parciales que aparece en la definición de $\hat{\Sigma}$. Si las inclusiones siguientes son satisfechas para $m \geq 0$, $k \geq 0$, $p,q \in [1,\infty]$,

$$\begin{aligned} &W^{k+1,p}(\hat{E}) \hookrightarrow C^s(\hat{E}),\\ &W^{k+1,p}(\hat{E}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{E}),\\ &P_k \subset \hat{P}_E \subset W^{m,q}(\hat{E}), \end{aligned} \tag{7.109}$$

existe una constante $C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$, tal que, para todo elemento finito (E, P_E, Σ_E) afinmente equivalente a $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ se satisface la siguiente desigualdad

$$|v - \Pi_E v|_{m,q,E} \leq C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)\,(\operatorname{mes}(E))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,\frac{h_E^{k+1}}{\rho_E^m}\,|v|_{k+1,p,E}, \tag{7.110}$$

$$\forall\; v \in W^{k+1,p}(E),$$

donde,

h_E = diámetro de E,

ρ_E = Sup {diam(S): S es una bola contenida en E} $\blacksquare$

Para familias afinmente regulares de elementos finitos, en el sentido de [4], la estimación del error de interpolación del teorema 7.4 se transforma en el resultado presentado en el siguiente teorema, [4].

Teorema 7.5 Sea dada una familia afinmente regular de elementos finitos (E, P_E, Σ_E) cuyo elemento finito de referencia $(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ satisface las hipótesis del Teorema 7.4. Entonces, existe una constante $C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)$ tal que para todo elemento finito de la familia se satisfaga la desigualdad

$$\|v-\Pi_E v\|_{m,q,E} \leq C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)\,(\text{mes}(E))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\, h^{k+1-m}\, |v|_{k+1,p,E}, \qquad (7.111)$$

$$\forall \;\; v \in W^{k+1,p}(E),$$

donde,

$$h = \max_{E\in\tau_h} h_E. \quad \blacksquare$$

El teorema (7.5) es la base de la siguiente definición. La familia de elementos finitos (E, P_E, Σ_E) es casi-afín si para todo $k,m\geq 0$, $p,q \in [1,\infty]$ compatible con las inclusiones

$$\begin{aligned} &W^{k+1,p}(E) \hookrightarrow C^s(E),\\ &W^{k+1,p}(E) \hookrightarrow W^{m,q}(E), \qquad (7.112)\\ &P_k(E) \subset P_E \subset W^{m,q}(E), \end{aligned}$$

existe una constante C independiente de E, tal que

$$\|v-\Pi_E v\|_{m,q,E} \leq C(\mathrm{mes}(E))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h_E^{k+1-m} |v|_{k+1,p,E}, \tag{7.113}$$

$$\forall \ v \in W^{k+1,p}(E).$$

Los resultados siguientes son presentados en [4],

Teorema 7.6. UNa familia regular de triángulos de Argyris es casi-afín. Para toda $p \in [1,\infty)$ y (m,q), con $m \geq 0$ y $q \in [1,\infty]$, compatibles con la inclusión

$$W^{6,p}(E) \hookrightarrow W^{m,q}(E),$$

existe una constante C independiente de E, tal que,

$$\|v-\Pi_E v\|_{m,q,E} \leq C(\mathrm{mes}(K))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h_E^{6-m} |v|_{6,p,E}, \tag{7.114}$$

$$\forall \ v \in W^{6,p}(E). \quad \blacksquare$$

Teorema 7.7. Una familia regular de triángulos de Bell es casi-afín. Para toda $p \in [1,\infty)$ y (m,q), con $m \geq 0$ y $q \in [1,\infty]$ compatibles con las inclusiones.

$$W^{5,p}(E) \hookrightarrow C^2(E),$$

$$W^{5,p}(E) \hookrightarrow W^{m,q}(E), \tag{7.115}$$

$$P_4(E) \subset P_5'(E) \subset W^{m,q}(K),$$

existe una constante C independiente de E, tal que,

$$\|v-\Pi_E v\|_{m,q,E} \leq C\ (\mathrm{mes}(K))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\ h_E^{5-m}\ |v|_{5,p,E},$$

$$\forall\ \ v \in W^{5,p}(E). \quad \blacksquare$$

7.8 APROXIMACION INTERNA DE PROBLEMAS DE PLACAS

Mostraremos en esta sección la manera de construir, mediante el uso de los teoremas 7.4-7.8, una aproximación interna para los problemas de placas presentados en el capítulo anterior. En este caso, p=m=q=2, por tanto, las condiciones de la expresión (7.109) se reducen a garantizar las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} &H^{k+1}(\hat{E}) \hookrightarrow C^3(\hat{E}), \\ &H^{k+1}(\hat{E}) \hookrightarrow H^2(\hat{E}), \\ &P_k \subset \hat{P}_E \subset H^2(\hat{E}). \end{aligned} \tag{7.116}$$

Asimismo, las estimaciones de error de interpolación para familias afinmente equivalentes, y casi-a fines, ecuaciones (7.111) y (7.113) se reducen a:

$$\|v-\Pi_E v\|_{H^2(E)} \leq C(\hat{E},\ \hat{P}_E,\ \hat{\Sigma}_E)\ h^{k+1-2}\ |v|_{H^{k+1}(E)}, \tag{7.117}$$

$$\forall\ \ v \in H^{k+1}(E).$$

De acuerdo a la sección 7.2 sabemos que el orden máximo de derivadas que aparecen en la definición del conjunto de grados de libertad, tanto en el elemento finito de Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmit es dos. Además, en el primer caso $P_E = P_5(E)$, por tanto, las relaciones dadas en la ecuación (7.116) se reducen a:

$$H^6(\hat{E}) \hookrightarrow C^2(\hat{E}),$$

$$H^6(\hat{E}) \hookrightarrow H^2(\hat{E}), \tag{7.118}$$

$$P_5 = P_5(\hat{E}) \subset H^2(\hat{E}),$$

y la estimación del error de interpolación es, en este caso,

$$\|v-\Pi_E v\|_{H^2(E)} \leq C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)\, h^4\, |v|_{H^6(E)}, \quad \forall\ v \in H^6(E). \tag{7.119}$$

Para el elemento finito de Bell se tiene que $P_4 \subset P_5'(E)$, por tanto, las ecuaciones (7.116) se particularizan a:

$$H^5(\hat{E}) \hookrightarrow C^2(\hat{E}),$$

$$H^5(\hat{E}) \hookrightarrow H^2(\hat{E}), \tag{7.120}$$

$$P_4 \subset P_5'(E) \subset H^2(\Omega),$$

la correspondiente estimación del error es:

$$\|v-\Pi_E v\|_{H^2(E)} \leq C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)\, h^3\, |v|_{h^5(E)}, \quad \forall\ v \in H^5(E). \tag{7.121}$$

Finalmente, para el elemento finito de Bogner-Fox-Schmit, se tiene que

$$H^4(\hat{E}) \hookrightarrow C^2(\hat{E}),$$

$$H^4(\hat{E}) \hookrightarrow H^2(\hat{E}), \tag{7.122}$$

$$P_3 \subset Q_3(\hat{E}) \subset H^2(\hat{E}),$$

y, además,

$$\|v-\Pi_E v\|_{H^2(E)} \leq C(\hat{E}, \hat{P}_E, \hat{\Sigma}_E)\, h^2 \, |v|_{H^4(E)} \quad , \quad \forall \quad v \in H^4(E). \qquad (7.123)$$

Tomando en cuenta que, según teorema 7.1,

$$\|v-\Pi_h v\|_{H^2(\Omega)} = \Big(\sum_{E\in\tau_h} \|v-\Pi_E v\|^2_{H^2(E)} \Big)^{1/2} , \quad v \in \mathrm{dom}\, \Pi_h, \qquad (7.124)$$

se obtiene las siguientes estimaciones de error de interpolación, para el elemento de Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmit, globales

$$\|v-\Pi_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 |v|_{H^6(\Omega)} \quad , \quad \forall \quad v \in H^6(\Omega),$$

$$\|v-\Pi_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^3 |v|_{H^5(\Omega)} \quad , \quad \forall \quad v \in H^5(\Omega), \qquad (7.125)$$

$$\|v-\Pi_h v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^2 |v|_{H^4(\Omega)} \quad , \quad \forall \quad v \in H^4(\Omega).$$

Los resultados presentados en (7.124) son la base de la demostración de los siguientes teoremas.

Teorema 7.8 La pareja $(V_{h1}, \mathcal{V}_{h1})$, donde V_{h1} está dado por (7.79), con X_h construido mediante elementos finitos de Argyris, Bell ó Bogner-Fox-Schmit y $\mathcal{V}_{h1} = L^2(0,T;V_{h1})$, constituyen una aproximación interna de $(V_1,\mathcal{V}_1)$, definidos en (6.38) y (6.39).

Demostración. Mostraremos primero el caso del elemento finito de Argyris. Obsérvese que $\Pi_h : C^2(\bar{\Omega}) \to V_{h1}$, por tanto, $\forall \; v(t) \in H^6(\Omega) \cap V_{h1}$ con $v'(t) \in H^6(\Omega) \cap V_{h1}$, c.t. $t \in (0,T)$, se tiene que se satisfacen las desigualdades siguientes

$$\|v(t) - \Pi_h v(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq CH^4 |v(t)|_{H^6(\Omega)} \quad , \quad \forall \quad v(t) \in H^6(\Omega), \qquad (7.126)$$

$$\|v'(t) - \Pi_h v'(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^4 |v'(t)|_{H^6(\Omega)} \quad , \forall \quad v(t) \in H^6(\Omega) \text{ c.t. } t\varepsilon(0.T) \quad (7.127)$$

Por tanto, si $v_h(t) = \Pi_h v(t)$, $v_h'(t) = \Pi_h v'(t)$, c.t. $t \in (0,T)$, y

$$\lim_{h\downarrow 0} \|v(t) - v_h(t)\|_{H^2(\Omega)} = \lim_{h\downarrow 0} \|v'(t) - v_h'(t)\| = 0, \tag{7.128}$$

además, según Teorema 7.2, $v_h(t)$, $v_h'(t) \in V_{h1}$. También,

$$\lim_{h\downarrow 0} \|v-v_h\|_{V_1} = \lim_{h\downarrow 0} \int_0^T \|v(t) - v_h(t)\|_{H^2(\Omega)} dt = 0, \tag{7.129}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \|v'-v_h'\|_{V_1} = \lim_{h\downarrow 0} \int_0^T \|v'(t) - v_h'(t)\|_{H^2(\Omega)} dt = 0, \tag{7.130}$$

por tanto,

$$\lim_{h\downarrow 0} |v-v_h|_H \leq C \lim_{h\downarrow 0} \|v-v_h\|_{V_1} = 0, \tag{7.131}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} |v'-v_h'|_H \leq C \lim_{h\downarrow 0} \|v-v_h\|_{V_1} = 0. \tag{7.132}$$

El resultado buscado se sigue del Teorema 7.1 y ecuaciones (7.130) y (7.131). Los casos de Bell y Bogner-Fox-Schmit se muestran de manera similar, seleccionando $v(t) \in H^s(\Omega) \cap V_{h1}$ con $v'(t) \in H^5(\Omega) \cap V_{h1}$ y $v(t) \in H^4(\Omega) \cap V_{h1}$ con $v'(t) \in H^4(\Omega) \cap V_{h1}$, c.t. $t \in (0,T)$, respectivamente. ■

Teorema 7.9. La pareja (V_{h2}, V_{h2}), con V_{h2} definido por (7.80), donde X_h está construido mediante elementos finitos de Argyris, Bell, Bogner-Fox-

Schmit y $\mathcal{V}_{h2} = L^2(0,T;V_{h2})$, constituyen una aproximación interna de $(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_2)$, definidos en (6.53).

Demostración. Es idéntica a la demostración del teorema 7.8. ■

8. CONCLUSIONES

A través de la presente tesis fueron satisfechos los siguientes objetivos:

a) Fundamentar, a partir de la mecánica del continuo, algunos modelos dinámicos de placas linealmente elásticas las cuales satisfacen condiciones de frontera de fricción tipo Coulomb.

b) Modelar matemáticamente los modelos mecánicos de interés.

c) Realizar el correspondiente análisis cualitativo de los modelos matemáticos resultantes.

d) Regularizar y penalizar el modelo variacional, para enmarcar el problema dentro de la teoría de ecuaciones hiperbólicas no lineales.

e) Establecer condiciones suficientes de convergencia para aproximaciones de ecuaciones hiperbólicas no lineales, asi como el análisis cualitativo de los sistemas no lineales semidiscretos resultantes.

f) Demostrar que algunas familias de elementos finitos conformes son aproximaciones internas convergentes.

La fundamentación de los modelos mecánicos presentados en este trabajo, se llevó a cabo mediante un método el cual fué llamado Método de Elastodinámica Aplicada. Este consiste en construir el modelo mecánico de interés particularizando, mediante hipótesis en los campos, el modelo de la elasticidad tridimensional. En este trabajo se procedió a introducir, capítulo 4, hipótesis sobre la variación transversal del campo de desplazamiento del cuerpo tridimensional conocido comunmente como Placa. Esto dió lugar a simplificaciones en las ecuaciones de campo de la elasticidad tridimensional y a las ecuaciones de consistencia de cargas de cuerpo, tracciones de superficie y condiciones iniciales y de frontera, mediante las cuales fué posible conocer la familia de acciones externas consistentes con la hipótesis de partida. Además, las ecuaciones de consistencia de las tracciones externas permitió expresar el campo de desplazamiento, y consecuentemente los de deformación y esfuerzo, en función únicamente del desplazamiento vertical del plano medio, sus derivadas y las tracciones externas actuantes. Mediante esta última representación del campo de esfuerzo, fué posible expresar los principios de balance tridimensionales de un medio contínuo, en términos únicamente de integrales sobre el plano medio, obteniéndose los principios de balance bidimensionales del cuerpo en estudio. De tales principios, se obtuvieron las ecuaciones de equilibrio bidimensionales de fuerzas y momentos. Mediante la construcción de la fórmula de Green del operador formal de la ecuación de equilibrio dinámico de la placa, se concluyeron las ecuaciones de los elementos mecánicos, momentos y cortantes, que actuan sobre la misma. Bajo la hipótesis de que las tracciones externas en la parte superior e inferior de la placa son nulas, se dió lugar a un modelo que podría ser adecuado para placas gruesas.

Posteriormente, capítulo 5, otras simplificaciones de los modelos mecánicos fueron consideradas. Primeramente se despreciarion en el campo de desplazamiento términos de $O(h^2)$, construyéndose el llamado modelo de Kirchhoff de $O(h^2)$. Suponiendo, además, que las tracciones en las fronteras superior e inferior de la placa son nulas, se obtuvo el modelo de placas de la teoría de Hencky; dicho modelo con términos de $O(h)$ en deformaciones despreciados, co rresponde al modelo de placas de la teoría de Kirchhoff. Es importante enfatizar que, en ambos modelos de placas, el término de inercia de rotación, comunmente ignorado, si está presente. Finalmente, en este capítulo se construyó, despreciando términos de $O(h)$ en desplazamientos, el modelo de Kirchhoff de $O(h)$, el cual puede ser asociado a una membrana plana.

Como se mencionó en la introducción, este método ya ha sido aplicado en la generación de modelos bidimensionales asociados a placas elásticas lineales. Sin embargo la potencialidad del método no es del todo apreciado en dichos trabajos, puesto que los modelos ahí obtenidos representan problemas estáticos con condiciones de frontera y cargas muy particulares. El problema dinámico ha sido tratado recientemente mediante el segundo tipo de método en [23]. En todos estos casos no se presentan las ecuaciones de consistencia ni los principios de balance bidimensionales correspondientes. En conclusión, podemos decir que se ha logrado exhibir la naturalidad y potencialidad del Método de la Elastodinámica Aplicada en la generación de modelos mecánicos particulares. Su importancia ha quedado constantada en el desarrollo de los modelos aquí presentados, quedando las bases metodológicas del mismo claramente asentados para el tratamiento de cualquier otro problema.

La modelación matemática de problemas de valores sobre la frontera e iniciales asociados a una placa elástica lineal la cuál satisface condiciones de frontera en momentos y cortantes tipo fricción de Coulomb, fué presentada en el Capítulo 6. Se concluyó primeramente, mediante elementos del análisis convexo, que tales condiciones de fricción pueden ser expresadas en términos del subdiferencial de una funcional convexa $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con lo cual es posible presentar de una manera natural las formulaciones variacionales punto a punto, fuerte y débil (o clásica) de los problemas en estudio. El modelo matemático correspondiente a ésta última formulación variacional, resultó estar dado por una inecuación variacional hiperbólica o, equivalentemente, por una ecuación multivaluada. Mediante una regularización de la funcional no diferenciable que modela las condiciones de fricción sobre la frontera de la placa, la inecuación variacional hiperbólica fué transformada a una ecuación hiperbólica no lineal, con lo que se generaron las formulaciones variacionales regularizadas de los problemas de interés. Así entonces, con base en los resultados de análisis de la teoría de semigrupos presentados en los capítulos 2 y 3, se pudieron concluir propiedades de existencia, unicidad y regularidad de soluciones para los problemas variacionales clásicos, así como para sus regularizaciones. Además, dentro del marco variacional de los problemas, extendiendo las técnicas clásicas utilizadas en el estudio de aproximaciones tipo Galerkin, se analizó y estableció la convergencia de las soluciones de los problemas regularizados a aquellas de los problemas variacionales originales.

Es importante resaltar el papel que juega la formulación de problemas de la física en términos de subdiferenciales. Esto es, a partir de las expresiones subdiferenciales, de manera natural, se da lugar al modelo matemático subdiferencial global correspondiente, el cual tiene dos interpretaciones, una variacional y una de semigrupos. La primera es precisamente el problema variacional clásico del cual se derivan principios variacionales alternativos, así como distintos problemas de aproximación, tanto en dimensión infinita como en dimensión finita. En cuanto a la segunda, se tiene el problema en el contexto de los sistemas dinámicos y, consecuentemente, a disposición los resultados de análisis cualitativo de comportamiento en el tiempo de la propia teoría.

Como anteriormente se ha mencionado, el modelo matemático que representa los problemas de nuestro interés resultó estar dado por una inecuación va cional hiperbólica o, equivalentemente, por la siguiente ecuación multivaluada:

$$\text{Dados } f \in V',\ u_0 \in V,\ v_0 \in D(j);$$
$$\text{encuentre } u \in W \text{ con } u' \in \mathcal{D}(J):$$
$$\ni$$
$$u'' + Au + \partial J(u') \ni f, \tag{8.1}$$
$$u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0,$$

para la cual, Capítulo 2, mediante el método de semigrupos no lineales, que exige la regularidad en los datos (2.3), se concluyó existencia, unicidad y regularidad de soluciones. Como se vió la aplicación de este método requiere mostrar que el operador del sistema de primer orden asociado a (8.1) sea ω-máximo monótono con $\omega \geq 0$. El caso en que dicha regularidad en los datos no es satisfecha es tratado en [18] mediante el método variacional usando aproximaciones tipo penalización y Faedo-Galerkin, dandose lugar, en cuanto a regularidad de la solución, a resultados más débiles que los aquí presentados. Sin embargo, la regularidad propia del método de semigrupos permite caracterizar el problema (8.1), al poder entonces aplicar la fórmula de Green, en la siguiente forma:

$$\text{Encuentre } u \in V \text{ con } u'' \in H,\ u' \in \mathcal{D}(J):$$

$$\left.\begin{array}{l} u''(t) + Pu(t) = f(t) \\ -\partial u(t) \in \partial(\gamma u'(t)), \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = v_0. \end{array}\right\} \text{ c.t. } t \in (0,T). \tag{8.2}$$

Esta es una forma abstracta del problema de valores sobre la frontera e iniciales de la cual el modelo mecánico en estudio es recuperado. Además, dicha regularidad es precisamente aquella requerida en el estudio de velocidades de convergencia al aplicar la teoría de interpolación para aproximaciones de elemento finito.

En el Capítulo 3, con el objeto de enmarcar el problema en la teoría de ecuaciones hiperbólicas no lineales, se introdujeron aproximaciones en dimensión infinita tipo penalización y regularización. Para tales aproximaciones se concluyó primeramente, mediante el método de semigrupos, existencia, unicidad y regularidad de soluciones y posteriormente, mediante el método variacional, el teorema de convergencia correspondiente. La aproximación mediante penalización de inecuaciones variacionales hiperbólicas ha sido anteriormente utilizada en [18], [19], y la regularización de problemas dinámicos de placas con condiciones de frontera tipo fricción en [7]. Sin embargo, el análisis de las dos aproximaciones simultáneas, lo que permite abordar problemas con restricciones unilaterales y fricción al mismo tiempo, parece no haber sido realizado.

Con el fin de generar esquemas numéricos semidiscretos asociados a la ecuación hiperbólica no lineal, se introdujo el concepto de aproximaciones interna, obteniéndose el problema (3.10) para el cual se mostró existencia y unicidad de soluciones. Además, mediante el método variacional la convergencia de tales esquemas fué establecida. La aproximación semidiscreta de ecuaciones hiperbólicas no lineales ha sido realizada a través del método de Faedo-Galerkin en [18], [19]. Sin embargo, como es fácil demostrar, este tipo de aproximación es un caso particular del concepto de aproximación interna aqui presentado. A su vez, es importante mencionar que el propio concepto de aproximación interna es un caso particular del concepto mas amplio de aproximación ex terna. Este último permite abstraer aproximaciones de tipo diferencias finitas variacionales, asi como de elementos finitos no conformes. En la tesis de Raviart, [24], el análisis numérico de aproximaciones externas es desarrollado para ecuaciones hiperbólicas no lineales. El caso de inecuaciones ha sido tratado por Tremoliere, [28].

Finalmente, en el capítulo 7, con el objeto de construir aproximaciones internas de los problemas variacionales en estudio, se presentó el método del elemento finito mediante el cual se generaron en forma sistemática los subespacios de dimensión finita de los espacios de Hilbert correspondientes. Como casos particulares se presentaron los elementos finitos conformes de Argyris, Bell y Bogner-Fox-Schmit, con los cuales se concretaron las aproximaciones deseadas. En el análisis correspondiente se concluyó que los elementos finitos de Argyris y Bell pueden ser embebidos en familias casi-afines de elementos finitos y, el de Bogner-Fox-Schmit, en familias afines. Mediante este resultado y la teoría de interpolación de espacios de Sovolev, se demostró que los espacios de elementos finitos asi construidos constituyen aproximaciones internas, en el sentido del capítulo 2. Por tanto, los esquemas numéricos resultantes son convergentes en el sentido (3.14) y (3.16), pudiéndose entonces concluir que el método del elemento finito conforme puede ser entendido como una técnica sistemática para concretar aproximaciones internas. En términos análogos elementos finitos no conformes son analizables como aproximaciones externas; casos típicos son el triángulo de Zienckiewrez y el rectángulo de Adini, [4].

Podemos finalmente concluir que, en general, en este trabajo se han establecido las bases metodológicas para el análisis y aproximación de problemas de la física. Futuros estudios derivados del mismo podrian ser:

a) Aproximaciones (completamente) Discretas de Ecuaciones Hiperbólicas no Lineales y su Experimentación Numérica.

b) Aproximaciones Internas y Externas de Inecuaciones Variacionales Hiperbólicas.

c) Penalización y Regularización de Inecuaciones Variacionales Hiperbólicas Semidiscretas.

d) Estabilidad de Inecuaciones Variacionales Hiperbólicas.

e) Modelación, Análisis y Aproximación de Problemas Dinámicos de Contacto y Fricción.

f) Análisis y Aproximación de Problemas de Placas con Inercia Rotacional.

g) Formulaciones Lagrangianas e Híbridas de Problemas de Evolución no Lineales.

h) Modelación Mecánica de Sistemas Estructurales con Placas Sujetos a Restricciones no Lineales.

i) Experimentación Numérica y Física de Problemas de Placas Modelados Tri y Bidimensionalmente.

REFERENCIAS.

1. Barbu, V., Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhiff int., Leyden, the Netherlands, 1976.

2. Bernardou, M., Ducatel, Y. Methodes Conformes, d'elements Finis pour des Problémes Elliptiques du Quatriéme Ordre avec Integration Numérique, LABORIA, No. 195, 1976.

3. Brezis, H., Problemes Unilateraux, J. Math. Pure et Appl., 51, 1972, 1-168.

4. Ciarlet, P.G. The Finite Element Method For Elliptic Problems, North-Holland, 1978.

5. Ciarlet, P.G., Destuynder, P.A. A justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model, J. Mécanique, Vol. 18, No. 2, 1979, 315-344.

6. Destuynder, P., Sur une Justification des Modeles de Plaques et de Coques par les Mehodes Asymptotiques, Thése, Université Paris VI, 1980.

7. Duvaut, G., Lions, J.L., Les inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.

8. Duvaut, G., Lions, J.L., Problémes Unilatéraux dans la Théorie de la Flexion Forte des Plaques, J. Mecánique, Vol. 13, 1, 1974.

9. Ekeland, I., Temam, R., Analyse Convexe et Problémes Variationnels, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1974.

10. Friedrichs, K.O., Dressler, R.F. A Boundary Layer Theory for Elastic Plates, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 14, 1961, 1-13.

11. Glowinski, R. Lions, J.L. Tremolieres, R. Analyse Numérique des Inequations Variationnelles, I, II, Dunod, 1976.

12. Glowinski, R. Numerical Mehods for Non-Linear Variational Problems, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.

13. Glowinski, R. Lions, J.L. and Tremolieres, R., Numerical Analysis of Variational Inequalities, North-Holland, Amsterdan - New York - Oxford, 1981.

14. Gol'denveizer, A.L. Derivation of and Aproximate Theory of Bending of a Plate by the Method of Asymptotic Integration of the Equations of the Theory of Elasticity, Prikl. Math. Mech. Vol. 26, 1962, pp 668-686. English translation, P.M.M., 1964, 1000-1025.

15. Gurtin, M.E., An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 1981.

16. Hale, J.K., Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, N.Y. 1969.

17. Landau, L. Lifchitz, E. Theorie de l'elasticité, Mir Moscow, 1967.

18. Lions, J.L. Strauss, W. Some non Linear Evolution Equations. Bull. Soc. Math. France, 93, 1965, 43-96.

19. Lions, J.L., Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

20. Naghdi, P.M. The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, Vol. VI, No. a-2, Springer-Verlag, 1972, 425-640.

21. Necas, J., Hlavacek, I., Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York, 1981.

22. Potier-Ferry, M., Problémes Unilatéraux en théorie des Plaques non linéaire, thése, Université de Paris VI, 1973.

23. Raoult, A., Construction d'un Modéle D'évolution de Plaques avec Terme d'inertie de Rotation, Publication 83054 du Laboratoire D'analyse Numerique, Paris.

24. Raviart, P.A. Sur l'approximation de Certaines Equations d'evolution Linéaires et non Linéaires. J. Math., Pures et Appl. 46, 1967, 11-183.

25. Sander, G., Applications de la Methode des Elements Finis a la Flexion des Plaques, Thése, Université de Liége, 1969.

26. Showalter, R.E., Hilbert Space Mehods for Partial Differential Equations, Pitman, 1979.

27. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, New York, 1959.

28. Tremolieres, R., Inequations Variationnelles: Existence, Approximation, Resolution, Thése, Université de Paris VI, 1972.

29. Vainberg, M.M., Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations, Halsted Press, John Wiley and Sons, N.Y., 1973.