Quiero agradecer a Raymundo y Leonardo, por llevarme a la frontera del conocimiento: estoy seguro que pronto traeremos tesoros de esa Terra Incognita que estamos avistando...

a Rudyd, quien maternalmente alimentó mi espíritu y mi cuerpo ..

a Susana, que junto a Rudyd me alentó a seguir siempre adelante...

a mis sinodales: Dr. Raymundo Bautista Ramos, Dr. Roberto Martínez Villa, Dr. Leonardo Salmerón Castro, Dr. José Antonio de la Peña, Dr. Dieter Vossieck, Dra. Rita Esther Zuazua Vega y Dr. Christof Geiss...

a Gerardo y Sergio, cuya amistad y apoyo son invaluables...

a Rafael, por confiar en mí para triunfar juntos en la CGEPI...

a Luis, Bety, Ricardo y Aracely, por su amistad y no permitirme olvidar que me encanta dar clases...

a todos los profesores cubanos que han impartido clases en la Escuela de Matemáticas, especialmente a Teresita Noriega y Héctor de Arazosa, pues su profesionalismo y vocación han logrado que nuestra pequeña institución sobreviva.

Índice

Resumen de la tesis doctoral

"Representaciones con grupo de auto-extensiones simple"

Uno de los problemas principales en la Teoría de Representaciones de Álgebras de Artin es la clasificación de los módulos inescindibles de un álgebra de Artin dada. El resultado más importante para el tipo de representación infinita, obtenido en 1986 por Y.A. Drozd, es que toda *álgebra Lambda* de dimensión finita sobre un campo k algebraicamente cerrado, es mansa o salvaje pero no ambas. En 1988 Crawley-Boevey dió una nueva versión de la prueba del Teorema de Drozd usando bocses.

En el presente trabajo se ha desarrollado la teoría relativa a los bocses y a los funtores de reducción. Dicha teoría es desarrollada a través de morfismos de bimódulos y diferenciales, por lo que resulta más clara que en la literatura anterior y muchos resultados se generalizan a álgebras de dimensión finita sobre campos perfectos.

Los funtores Eliminación de idempotentes, Regularización, Absorción y Reducción son utilizados para simplificar bocses, en el sentido de disminuir la norma cero, y a través de ellos se logra la parametrización de la familia de representaciones con grupo de auto-extensiones simple, para bocses pequeños, de tipo de representación no-salvaje, sobre campos perfectos.

Todos los requisitos del teorema principal son satisfechos por el bocs de Drozd asociado a una $k-$*álgebra Lambda* de dimensión finita para un campo perfecto, y la cual no es de tipo de representación salvaje, así que el funtor cokernel induce una parametrización desde el bocs de Drozd en *mod Lambda* , para ciertas familias caracterizadas por su vector de coordenadas normalizadas y su índice de Bautista-Boza.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas principales en la Teoría de Representaciones de Álgebras de Artin es la clasificación de los módulos inescindibles de un álgebra de Artin dada. El resultado más importante para el tipo de representación infinita, obtenido en 1986 por Y.A. Drozd, es que toda álgebra Λ de dimensión finita sobre un campo k algebraicamente cerrado, es mansa o salvaje pero no ambas. En 1988 Crawley-Boevey dió una nueva versión de la prueba del Teorema de Drozd usando bocses.

Nuestra meta de investigación, es lograr la generalización del Teorema de Drozd hasta campos perfectos, lo cual esperamos que ocurra en el mediano plazo. El presente trabajo se encuentra enmarcado en este anhelo, por lo que en él estudiamos a los bocses y especialmente a los funtores de reducción, cuyas propiedades nos permiten parametrizar ciertas familias de representaciones de bocses y módulos de álgebras de Artin.

En el capítulo 1 se estudian morfismos de bimódulos cuyas propiedades utilizamos para desarrollar la teoría. Consideramos que la reformulación conseguida presenta el tema de estudio de una manera más clara que en la literatura existente.

En al capítulo 2 se encuentran las definiciones de bocs y su categoría de representaciones, así como los conceptos de norma y de $\underline{\dim}_R M$. En este capítulo se introducen los conceptos de morfismos de bocses (ver **[BBP]**), de triangularidad y triangularidad aditiva y se analizan sus consecuencias. De esta parte debemos de destacar que las abstracciones realizadas, aunque tienen un aspecto bastante técnico, en realidad clarifican las pruebas.

En el capítulo 3 se construyen los funtores de reducción y se estudian sus propiedades. Un funtor de reducción es un funtor fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{B}$ es un bocs obtenido del bocs $\mathcal{A}$ y que en cierto sentido es más simple. Los funtores Eliminación de idempotentes, Regularización y Absorción son construidos a partir de ciertos morfismos de bocses, lo que da mayor unidad y claridad en su estudio. El funtor Reducción es construido a partir de un bimódulo muy específico, lo que ayuda a entender sus propiedades. La composición de los funtores Absorción y Reducción resultan en los clásicos unravelling y reducción de un eje.
Aquí también introducimos el concepto de $e-$dimensión, el cual, que para una representación inescidible de dimensión finita M, puede pensarse como el vector dimensión clásico dividido entre la $k-$dimensión del anillo de división asociado a los endomorfismos de M en el bocs. Utilizamos este concepto ya que se muestra más útil para trabajar con bocses sobre campos perfectos.

En el capítulo 4 se estudia una estructura exacta asociada a un bocs de Kleiner-Roiter, y se muestra como los funtores de reducción afectan al grupo de auto-extensiones de una representación dada. El amable lector podrá encontrar en la observación IV.2 las relaciones que hay entre los tres tipos de vector dimensión.
Vale la pena destacar al lema IV.29, pues se revela crucial: justo este resultado permite controlar el cambio de dimensión del grupo de autoextensiones al aplicar los funtores Absorción y Reducción. También se exhibe como están relacionados la dimensión del grupo de auto-extensiones con la forma cuadrática asociada.
El resultado principal de este capítulo es el teorema IV.38, el cual nos dice que si se cumplen ciertas condiciones sobre un bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, en particular que el campo base k sea perfecto, entonces para representaciones inescindibles L y N en el bocs, las cuales cumplen que $Ext_{\mathcal{A}}(L, L) = Ext_{\mathcal{A}}(N, N) = 0$, se tiene que $\underline{e-\dim}L = \underline{e-\dim}N$ si y sólo si $L \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$.

En el capítulo 5 se utilizan una variedad de resultados y técnicas de M. Ringel y W. Crawley-Boevey, sin profundizar en sus demostraciones, defecto que subsanaremos en los artículos resultantes del presente trabajo.
El resultado principal de la tesis es el teorema V.26, el cual requiere un bocs triangular aditivo y no salvaje sobre un campo perfecto, de tal manera que $W = W_0 \oplus W_1$, generalmente visualizado como las flechas llenas (W_0) y punteadas (W_1), sea finitamente generado como bimódulo. En tal situación, si tenemos una familia infinita de representaciones con grupo de auto-extensiones simple para una $e-$dimensión fija $\underline{d}$, esta familia estará parametrizada por la localización de una $k-$álgebra, la cual es un orden muy especial. Tal orden está asociado al anillo de endomorfismos del único módulo genérico de un álgebra hereditaria mansa, y ha sido extensamente estudiado por C.M Ringel y W. Crawley-Boevey.

Todos los requisitos del teorema principal son satisfechos por el bocs de Drozd asociado a una $k-$álgebra Λ de dimensión finita para k un campo perfecto, y la cual no es de tipo de representación salvaje. Esto se demuestra en el capítulo 6. Luego se prueba que el funtor cokernel induce una parametrización desde el bocs de Drozd en mod Λ. Para caracterizar a los módulos parametrizados recurrimos a los resultados de **[B]**. Mencionemos brevemente el contexto del resultado principal del sexto capítulo, es decir el teorema VI.23. Sea

$$\amalg_{i=1}^{r} m_i P_i \rightarrow \amalg_{i=1}^{r} n_i P_i \rightarrow M \rightarrow 0$$

la presentación proyectiva mínima de $M \in \operatorname{mod}\Lambda$. Definimos el vector de M de coordenadas normalizadas como

$$n-\underline{\dim}(M)=\frac{1}{c_M}(c_1m_1,\cdots,c_rm_r,c_1n_1,\cdots,c_rn_r)$$

donde $c_M=\dim_k\left(End_\Lambda\left(M\right)/rad\left(End_\Lambda\left(M\right)\right)\right)$ y $c_i=\dim_k\left(P_i/rad\left(P_i\right)\right)$.
Gracias al índice Bautista-Boza obtenemos que

$$\delta(M,N)=dim_kHom_\Lambda(N,DtrM)-dim_kHom_\Lambda(topM,socDtrN).$$

Finalmente probamos que si la familia $\mathcal{U}_{\underline{d}}$ de $\Lambda-$módulos L tales que

$$\delta(L,L)=\dim_k\left(End_\Lambda\left(L\right)/rad\left(End_\Lambda\left(L\right)\right)\right) \text{ y } n-\underline{\dim}\left(L\right)=\underline{d},$$

tiene infinitas isoclases, entonces es parametrizada por una localización de un orden asociado a un módulo genérico.

Capítulo I
Isomorfismos preliminares.

En este capítulo se estudian algunos isomorfismos requeridos en los siguientes capítulos. Todo anillo será asociativo unitario. Con k siempre denotaremos un campo central en algún anillo. Los anillos generalmente serán denotados por R, S o T.

I.1 Isomorfismos.

Por comodidad, y cuando no provoque confusiones, utilizaremos la siguiente **notación:** para morfismos en $R - Mod$ usaremos ${}_R(\_,\_)$, para aquellos en $Mod - R$ usaremos $(\_,\_)_R$, y para morfismos en $R - S - Mod$ usaremos ${}_R(\_,\_)_S$.

Para X en $R - Mod$ denotaremos por ${}^*X$ a ${}_R(X, R)$, para Y en $Mod - S$ denotaremos por Y^* a $(Y, S)_S$.

Para cada $S - S-$bimódulo X denotaremos por X^S al subgrupo $\{x \in X : sx = xs$ para todo $s \in S\}$.

Definición 1. *Sea P un $R-$módulo derecho. Un conjunto $\{p_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ donde $\lambda_i \in P^*$ y $p_i \in P$ se llama base dual de P, si para cualquier $p \in P$ se tiene que $\lambda_i(p) = 0$ para casi toda i, y además $\sum_{i\in I} p_i\lambda_i(p) = p$.*

Lema 2. *(2.8.20 [Ro]) Sea P un R-módulo derecho.*

1. *Si P es proyectivo y $\{p_i \mid i \in I\}$ es un conjunto generador de P entonces existen $\lambda_i \in P^*$, $i \in I$, tales que $\{p_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ es una base dual para P.*

2. *Si existe una base dual de P entonces P es proyectivo.*

Similarmente se hace la definición dual en $R - Mod$ y se satisface el lema dual.

Lema 3. *Sea P un $R-$módulo derecho proyectivo y finitamente generado. Sea $\{p_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ una base dual finita para P, y sea $p'_i \in {}^*(P^*)$ dado por $p'_i(\lambda) = \lambda(p_i)$ para $\lambda \in P^*$. El conjunto $\{p'_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ es una base dual de P^*.*

Demostración: A cada $\lambda \in P^*$ hagamos corresponder el elemento de P^* dado por $\lambda' = \sum_{i\in I} p'_i(\lambda)\lambda_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda'(p) &= \left(\sum_{i\in I} p'_i(\lambda)\lambda_i\right)(p) = \sum_{i\in I} p'_i(\lambda)\lambda_i(p) = \sum_{i\in I} \lambda(p_i)\lambda_i(p) \\ &= \lambda\left(\sum_{i\in I} p_i\lambda_i(p)\right) = \lambda(p),\end{aligned}$$

Capítulo II
Bocses y su categoría de representaciones.

II.1 Álgebras tensoriales y morfismos diferenciales.

Definición 1. *Sea R un anillo y W un $R-R-$bimódulo. El álgebra tensorial $T_R(W)$, de W sobre R, es el álgebra graduada sobre los números naturales:*

$$T_R(W) = R \oplus W \oplus W^{\otimes 2} \oplus W^{\otimes 3} \oplus \cdots \oplus W^{\otimes q} \oplus \cdots$$

donde el producto de $r = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \in W^{\otimes n}$ y $s = w_1' \otimes \cdots \otimes w_m' \in W^{\otimes m}$ está dado por $rs = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_1' \otimes w_2' \otimes \cdots \otimes w_m' \in W^{\otimes(n+m)}$.

Lema 2. *(Propiedad Universal del álgebra tensorial). Sea R un anillo y W un $R-R-$bimódulo. Entonces, para cada $R'-$álgebra A', i.e. para cada morfismo de anillos $\rho : R' \to A'$, y cada par de morfismos $\varphi_0 : R \to R'$ de anillos, $\varphi_1 : W \to A'$ de $R-R-$bimódulos, existe un único morfismo $\varphi : T_R(W) \to A'$ de anillos tal que $\varphi_{|W} = \varphi_1$ y $\varphi_{|R} = \rho\varphi_0$.*

Definición 3. *Si $W = W_0 \oplus W_1$ como $R-R-$bimódulos entonces tenemos una nueva graduación para el álgebra tensorial $T_R(W)$ definida en elementos homogéneos como:*

1. *$gr(w) = 0$ si $w \in W_0 \cup R$,*
2. *$gr(w) = 1$ si $w \in W_1$,*
3. *$gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = \sum_{i=1}^{s} gr(w_i)$.*

En la situación anterior diremos que W es graduado. Definiremos $[T_R(W)]_i$ como el $R-R-$bimódulo generado por los elementos homogéneos de grado i.

Lema 4. *Sea $W = W_0 \oplus W_1$ como $R-R-$bimódulos, entonces*

1. *Hay un isomorfismo $A = T_R(W_0) \cong [T_R(W)]_0$ inducido por el morfismo canónico $T_R(W_0) \to T_R(W)$. Más aún $T_R(W) \cong [T_R(W)]_0 \oplus T'$ como $R-R-$bimódulos.*
2. *Hay un isomorfismo $T_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A) \cong T_R(W)$, inducido por el morfismo canónico de $A \otimes_R W_1 \otimes_R A$ en $T_R(W)$, el cual es de $R-$álgebras y de $A-A-$bimódulos.*

3. *La restricción del isomorfismo del inciso anterior induce un isomorfismo* $V = A \otimes_R W_1 \otimes_R A \cong [T_R(W)]_1$.

4. *La restricción del isomorfismo del segundo inciso induce un isomorfismo* $V^{\otimes n} = V \otimes_A \dots \otimes_A V \cong [T_R(W)]_n$.

Demostración:

1. Por el lema II.2 $Id_R : R \to R$ y la inclusión $j : W_0 \to T_R(W)$ inducen un morfismo de anillos $\eta : T_R(W_0) \to T_R(W)$. A su vez, Id_R y la proyección $\pi_0 : W \to W_0$ inducen un morfismo de anillos $\eta_1 : T_R(W) \to T_R(W_0)$. Claramente $\eta_1\eta_{|R} = Id_R$ y $\eta_1\eta_{|W_0} = Id_{W_0}$, por lo que $\eta_1\eta = Id_{T_R(W_0)}$, así que $T_R(W_0)$ es isomorfa a su imagen bajo η, es decir a $[T_R(W)]_0$, y ésta es un sumando directo de $T_R(W)$.

2. Sea $\mathcal{T} = T_{T_R(W_0)}(T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0))$. Sean $j_1 : W_0 \to T_R(W_0)$ y $j_2 : T_R(W_0) \to \mathcal{T}$ las inclusiones canónicas, y sea $\sigma : W_1 \to \mathcal{T}$ el morfismo definido como $\sigma(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Por lema II.2 los morfismos Id_R y $(j_2j_1, \sigma) : W_0 \oplus W_1 \to \mathcal{T}$ inducen un morfismo $\nu : T_R(W) \to \mathcal{T}$ de anillos.

   Por el primer inciso $T_R(W)$ es una $T_R(W_0)-$álgebra vía el morfismo η. Sea $m' : T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0) \to T_R(W)$ el morfismo $m(\eta \otimes j \otimes \eta)$, donde $j : W_1 \to T_R(W)$ es la inclusión canónica y m es la multiplicación $T_R(W) \otimes_R T_R(W) \otimes_R T_R(W) \to T_R(W)$. Claramente m es un morfismo de $T_R(W_0) - T_R(W_0)-$bimódulos, así que por lema II.2 se induce un morfismo de anillos $\nu_1 : \mathcal{T} \to T_R(W)$.

   Es claro que $\nu_1\nu_{|R} = Id_R$ y que $\nu_1\nu_{|W_0} = Id_{W_0}$, por otra parte, para $w \in W_1$, tenemos que $\nu_1\nu(w) = 1w1 = w$; luego $\nu_1\nu = Id_{T_R(W)}$.

   Por construcción $\nu_{1|T_R(W_0)} = \eta$, por ello $\nu\nu_{1|T_R(W_0)} = \nu_{|[T_R(W)]_0}\eta = Id_{T_R(W_0)}$. Además, para $w \in W_1$, tenemos que $\nu\nu_1(1 \otimes w \otimes 1) = \nu(w) = 1 \otimes w \otimes 1$, luego $\nu\nu_{1|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)} = Id_{|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)}$. Se sigue que $\nu\nu_1 = Id_{\mathcal{T}}$.

3. Por el inciso anterior hay un isomorfismo $\nu_1 : \mathcal{T} \to T_R(W)$. Por su construcción se tiene que $\nu_1(T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)) = [T_R(W)]_1$, luego

   $\nu_{1|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)}$ es un isomorfismo de $A - A-$bimódulos.

4. Como antes, de la construcción del isomorfismo $\nu_1 : \mathcal{T} \to T_R(W)$ se tiene que $\nu_1(V^{\otimes n}) = [T_R(W)]_n$, así que $\nu_{1|V^{\otimes n}}$ es un isomorfismo de $A - A-$bimódulos.

Definición 5. *Una diferencial* $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ *es un morfismo de* $R-R-$*bimódulos tal que:*

1. $\delta\left([T_R(W)]_i\right) \subseteq [T_R(W)]_{i+1}$

2. *Regla de Leibnitz: si r, s son homogéneos, entonces*

$$\delta(rs) = \delta(r)s + (-1)^{gr(r)} r\delta(s);$$

Observación II.1: Por el lema II.4 podemos considerar a una diferencial como un morfismo de $R-R-$bimódulos

$$\delta : (A \oplus V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots) \to (A \oplus V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots)$$

el cual cumple que $\delta(A) \subseteq V$ y $\delta\left(V^{\otimes i}\right) \subseteq V^{\otimes(i+1)}$, así como la regla de Leibnitz. Usaremos libremente ambas interpretaciones de δ.

De la regla de Leibnitz se obtiene la fórmula para elementos homogéneos:

$$\delta\left(\otimes_{i=1}^n w_i\right) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{\left(\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)\right)} \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right).$$

Podemos apreciar de esta fórmula que la diferencial está totalmente determinada por su definición sobre W_0 y W_1.

Si x, y son elementos homogéneos tales que $\delta^2(x) = 0$ y $\delta^2(y) = 0$ entonces
$\delta^2(x \otimes y) = \delta\left(\delta(x) \otimes y + (-1)^{gr(x)} x \otimes \delta(y)\right)$
$= \delta^2(x) \otimes y + (-1)^{gr(\delta(x))} \delta(x) \otimes \delta(y) + (-1)^{gr(x)} \delta(x) \otimes \delta(y) + (-1)^{gr(x)} x \otimes \delta^2(y)$
$= 0$
por lo que es necesario y suficiente que $\delta^2(W) = 0$ para que $\delta^2 = 0$.

Nótese que $\delta^2\left([T_R(W)]_0\right) = 0$ si y sólo si δ es coasociativo en $[T_R(W)]_1$, es decir, $(\delta \otimes Id)\,\delta$ y $(Id \otimes \delta)\,\delta$ coinciden sobre $[T_R(W)]_1$.

Proposición 6. *[I.3 Z] Para definir una diferencial $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$, es suficiente con tener un morfismo de $R-R-$bimódulos $\delta_0 : W \to T_R(W)$ tal que:*

1. $\delta_0(W_0) \subseteq [T_R(W)]_1$ *y*

2. $\delta_0(W_1) \subseteq [T_R(W)]_2$.

II.2 Bocses y su categoría de representaciones.

Definición 7. *Un bocs es una terna $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ donde R es una $k-$álgebra, $W = W_0 \oplus W_1$ es un $R-R-$bimódulo graduado y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es una diferencial tal que $\delta^2 = 0$. El bocs tiene asociados la $k-$álgebra*

$$[T_R(W)]_0 \cong T_R(W_0) = A = A(\mathcal{A})$$

y el $A(\mathcal{A}) - A(\mathcal{A})$ –bimódulo

$$[T_R(W)]_1 \cong A \otimes_R W_1 \otimes_R A = V = V(\mathcal{A}).$$

Definición 8. *La categoría de representaciones del bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ denotada por $Rep\mathcal{A}$, tiene por objetos a las representaciones del álgebra $A(\mathcal{A})$.*

Así que si M y N son dos representaciones de $\mathcal{A}$, un morfismo $f : M \to N$ en $Rep\mathcal{A}$ consiste de un par de morfismos $f = (f^0, f^1)$ tal que:

1. *$f^0 \in Hom_R(M, N)$;*

2. *$f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M, N))$;*

3. *Para toda $a \in A$ y $m \in M$ se tiene:*

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a))[m]$$

Dados dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$ en $Rep\mathcal{A}$, su composición $gf = ((gf)^0, (gf)^1)$ se define como:

$$\begin{array}{lcl} (gf)^0 & = & g^0 f^0 \\ (gf)^1(v) & = & g^0 f^1(v) + g^1(v) f^0 + \sum g^1(v_i^1) f^1(v_i^2) \end{array}$$

donde $v \in V(\mathcal{A})$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

Nótese que la composición de morfismos entre representaciones de bocses está bien definida, pues la última suma se obtiene de aplicar la composición:

$$\begin{array}{ccccc} T_R(W) & \hookleftarrow & V(\mathcal{A}) & & Hom_k(M, L) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta} & & \uparrow^{c} \\ T_R(W) & \hookleftarrow & V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} V(\mathcal{A}) & \xrightarrow{g^1 \otimes f^1} & Hom_k(N, L) \otimes_{A(\mathcal{A})} Hom_k(M, N) \end{array}$$

donde c es la composición de funciones.

Una verificación detallada del hecho de que $Rep\mathcal{A}$ es una categoría puede verse en (I 22 [Z]). Denotaremos por $rep\mathcal{A}$ a la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ cuyos objetos son las representaciones de $\mathcal{A}$ de dimensión finita sobre k.

Observación II.2:

1. Si $f = (f^0, f^1)$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$, entonces f^0 es un isomorfismo en $R - Mod$.

2. Notemos que toda pareja $(f^0, 0)$ con $f^0 \in Hom_A(M, N)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, así que hay una inmersión densa de $A - Mod$ en $Rep\mathcal{A}$. En particular, esto nos dice que $Rep\mathcal{A}$ es una categoría aditiva.

3. Sean $M, N \in Rep\mathcal{A}$. Para que un par de morfismos $f^0 \in Hom_R(M, N)$ y $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V, (M, N)_k)$ sea un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, es necesario y suficiente que $wf^0(m) - f^0(wm) = f^1(\delta(w))[m]$, donde $w \in W_0$ y $m \in M$. Para convencernos de la suficiencia, usemos la fórmula de la observación II.1 en $w_1 \otimes ... \otimes w_n$, donde $w_i \in W_0$:

$$\begin{aligned} & f^1(\delta(w_1 \otimes ... \otimes w_n))[m] \\ = \; & f^1\left(\textstyle\sum_{j=1}^n \left(\left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right)[m] \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right)\left(f^1(\delta(w_j))\right)\left[\left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right) m\right] \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\otimes_{l=1}^{j} w_l\right) f^0\left(\left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right) m\right) - \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) f^0\left(\left(\otimes_{t=j}^n w_t\right) m\right) \\ = \; & (w_1 \otimes ... \otimes w_n) f^0(m) - f^0((w_1 \otimes ... \otimes w_n) m). \end{aligned}$$

Por linealidad el resultado se extiende a todo $a \in A(\mathcal{A})$.

Definición 9. *Sean R y R' $k-$álgebras, $W = W_0 \oplus W_1$ un $R-R-$bimódulo graduado y $W' = W'_0 \oplus W'_1$ un $R' - R'-$bimódulo graduado. Sea una pareja (η_R, η_W) con $\eta_R : R \to R'$ un morfismo de $k-$álgebras y $\eta_W : W \to W'$ un morfismo de $R - R-$bimódulos, donde la estructura de $R - R-$bimódulo de W' está inducida por η_R. Cuando $\eta_W(W_0) \subseteq W'_0$ y $\eta_W(W_1) \subseteq W'_1$ diremos que el par es graduado.*

Nótese que un par graduado induce un morfismo de álgebras graduadas $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$, donde la graduación es la de la definición II.3. Otra forma de expresar esto es que $\eta(A(\mathcal{A})) \subseteq A(\mathcal{A}')$ y $\eta(V(\mathcal{A})^{\otimes i}) \subseteq V(\mathcal{A}')^{\otimes i}$.

Definición 10. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses. Definimos un morfismo de bocses $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ como un morfismo de $k-$álgebras*

$$\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$$

el cual cumple que:

1. *preserva la graduación, es decir que*

$$\eta([T_R(W)]_i) \subseteq [T_{R'}(W')]_i$$

para toda $i \geq 0$;

2. *conmuta con las diferenciales, es decir que*

$$\delta'\eta = \eta\delta.$$

Lema 11. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses y η un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$. Entonces η induce un funtor $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$. Además, si η es suprayectivo tenemos que:*

$$F_\eta (M') = F_\eta (N') \text{ implica que } M' = N', \text{ y que } F_\eta \text{ es fiel,}$$

es decir, que F_η es un encaje.

Demostración: Por II.4 podemos identificar $A(\mathcal{A})$ con $[T_R(W)]_0$ y $V(\mathcal{A})$ con $[T_R(W)]_1$, así como $A(\mathcal{A}')$ con $[T_{R'}(W')]_0$ y $V(\mathcal{A}')$ con $[T_{R'}(W')]_1$.

Por definición η induce un morfismo de $k-$álgebras graduadas

$$\eta^0 : A(\mathcal{A}) \to A(\mathcal{A}');$$

e induce un morfismo de $A(\mathcal{A}) - A(\mathcal{A})$ $-$bimódulos

$$\eta^1 : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}').$$

Si $M' \in Rep\mathcal{A}'$ definimos $F_\eta(M')$ como M' con la estructura de $A(\mathcal{A})$ $-$módulo inducida por η^0.

Si $f = (f^0, f^1) : M' \to N'$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $F_\eta(f) = \left((F_\eta(f))^0, (F_\eta(f))^1\right)$ está dado por

$$\begin{aligned} (F_\eta(f))^0 &= f^0 \quad \text{como } k\text{-transformación lineal y} \\ (F_\eta(f))^1 &= f^1\eta^1. \end{aligned}$$

Veamos que $F_\eta(f) : F_\eta(M) \to F_\eta(N)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Sea $a \in A(\mathcal{A})$ y $m \in M'$, entonces

$$\begin{aligned} a\left((F_\eta(f))^0(m)\right) - (F_\eta(f))^0(am) &= \eta^0(a) f^0(m) - f^0(\eta^0(a) m) \\ &= f^1\left(\delta'(\eta^0(a))\right)[m] \\ &= f^1(\eta^1(\delta(a)))[m] \\ &= (F_\eta(f))^1(\delta(a))[m]. \end{aligned}$$

En particular, si $r \in R \subsetneq A(\mathcal{A})$, la identidad anterior se convierte en

$$r\left((F_\eta(f))^0(m)\right) - (F_\eta(f))^0(rm) = (F_\eta(f))^1(\delta(r))[m] = 0.$$

Por lo tanto $(F_\eta(f))^0$ es un R−morfismo y $F_\eta(f)$ es un morfismo en $RepA$.

Es claro que $F_\eta((Id_M,0)) = (Id_{F_\eta(M)},0)$. Sean $f = (f^0,f^1) : L' \to M'$ y $g = (g^0,g^1) : M' \to N'$ morfismos en $RepA'$, es inmediato que

$$(F_\eta(gf))^0 = (F_\eta(g))^0(F_\eta(f))^0.$$

Para $v \in V(\mathcal{A})$ sea $\delta(v) = \sum v_i^1 \otimes v_i^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}&(F_\eta(g)F_\eta(f))^1(v)\\ &= (F_\eta(g))^0(F_\eta(f))^1(v) + (F_\eta(g))^1(v)(F_\eta(f))^0 + \sum(F_\eta(g))^1(v_i^1)(F_\eta(f))^1(v_i^2)\\ &= g^0(f^1\eta)(v) + (g^1\eta)(v)f^0 + \sum(g^1\eta)(v_i^1)(f^1\eta)(v_i^2).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\delta'\eta(v) = \eta\delta(v) = \eta\left(\sum v_i^1 \otimes v_i^2\right) = \sum \eta(v_i^1) \otimes \eta(v_i^2)$$

Así que

$$\begin{aligned}(F_\eta(gf))^1(v) &= g^0f^1(\eta(v)) + g^1(\eta(v))f^0 + \sum g^1(\eta(v_i^1))f^1(\eta(v_i^2))\\ &= (F_\eta(g)F_\eta(f))^1(v).\end{aligned}$$

Se sigue que $F_\eta(gf) = F_\eta(g)F_\eta(f)$.

Si η es suprayectivo, entonces el funtor $A(\mathcal{A}')-Mod \to A(\mathcal{A})-Mod$ inducido por η^0 es un encaje pleno [Si]. Luego $F_\eta(M') = F_\eta(N')$, lo que es una igualdad como $A(\mathcal{A})$−módulos, ocurre si y sólo si $M' = N'$ como $A(\mathcal{A}')$−módulos. η^0 también induce un epimorfismo $A(\mathcal{A})\otimes_k(A(\mathcal{A}))^{op} \to A(\mathcal{A}')\otimes_k(A(\mathcal{A}'))^{op}$, por lo que tenemos para $M',N' \in RepA'$, $F_\eta(M') = M$ y $F_\eta(N') = N$ que

$$Hom_{A(\mathcal{A}')-A(\mathcal{A}')}(V(\mathcal{A}'),(M',N')_k) = Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}'),(M,N)_k).$$

Y a su vez, el epimorfismo η^1 induce una inyección

$$Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}'),(M,N)_k) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}),(M,N)_k).$$

■

Observación II.3: Si η es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ y η' es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}''$ entonces $\eta'\eta$ es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}''$. Más aún, $F_{\eta'\eta} = F_{\eta'}F_\eta$.

II.3 Normas.

Definición 12. *Sea $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs.*

1. *Si U es un $R-R-$bimódulo, definimos*
   $\|\text{-}\|_U : rep\mathcal{A} \to Z \cup \{\infty\}$ *como* $\|M\|_U = \dim_k (Hom_R (U \otimes_R M, M))$.
   Por simplicidad $\|\text{-}\| = \|\text{-}\|_R$, $\|\text{-}\|_0 = \|\text{-}\|_{W_0}$ *y* $\|\text{-}\|_1 = \|\text{-}\|_{W_1}$.

2. *Definimos* $q_{\mathcal{A}} : rep_0\mathcal{A} \to Z$, *donde* $rep_0\mathcal{A} = \{M \in rep\mathcal{A} \mid \|M\|_0, \|M\|_1 < \infty\}$, *como*

$$q_{\mathcal{A}}(M) = \|M\| - \|M\|_0 + \|M\|_1.$$

Cuando alguna de las funciones anteriores aparezca en un enunciado, estaremos suponiendo que está definida.

Definición 13. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, y supongamos que $R = D_1 \times ... \times D_n$ es una descomposición en producto de $k-$álgebras de división, es decir, que hay una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ en idempotentes ortogonales, primitivos y centrales. En tal caso, para $M \in Rep\mathcal{A}$ definimos su $R-$vector dimensión como el vector $(d_1, ..., d_n)$, donde $d_i = \dim_{D_i}(e_i M)$. Denotaremos a este vector como $\underline{\dim}_R M$.*

Lema 14. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs, tal que $R = D_1 \times ... \times D_n$ es una descomposición en producto de $k-$álgebras de división, y sea $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ la descomposición asociada. Para un $R-R-$bimódulo U y un objeto $M \in rep\mathcal{A}$ con $\underline{\dim}_R M = (d_1, ..., d_n)$, tenemos que*

$$\|M\|_U = \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i U e_j).$$

Luego, si $M \in rep_0\mathcal{A}$ entonces

$$q_{\mathcal{A}}(M) = \textstyle\sum_i d_i^2 \dim_k (e_i R) - \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i W_0 e_j) + \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i W_1 e_j).$$

Demostración: La primera de las fórmulas se sigue de las identidades

$$\begin{aligned}
\|M\|_U &= \dim_k (Hom_R (U \otimes_R M, M)) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} \dim_k \left(Hom_{e_i R}\left(e_i U e_j \otimes_{e_j R} e_j M, e_i M\right)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} d_j \dim_k (Hom_{e_i R}(e_i U e_j, e_i M)) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (Hom_{e_i R}(e_i U e_j, e_i R)) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i R) \dim_{e_i R}(e_i U e_j) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i U e_j).
\end{aligned}$$

Luego, $\|M\| = \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i R e_j) = \sum_i d_i^2 \dim_k (e_i R)$, así que por definición de $q_{\mathcal{A}}(M)$ se obtiene la segunda fórmula.

■

Lema 15. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sean $M, N \in Rep\mathcal{A}$ tales que $\|M\|_0 = 0$. Entonces $M \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$ si y sólo si $M \cong N$ en $R - Mod$.*

Demostración: Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$, por observación II.2.1, f^0 es un isomorfismo de $R-$módulos.

Si $M \cong N$ en $R - Mod$, entonces $\|N\|_0 = 0$. Luego, si $g : N \to M$ es un morfismo de $R-$módulos entonces $(g, 0)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Así que, si $f^0 : M \to N$ es un isomorfismo de $R-$módulos y $g^0 : N \to M$ es su inversa, tenemos los morfismos $(f^0, 0) : M \to N$ y $(g^0, 0) : N \to M$ en $Rep\mathcal{A}$, los cuales son inversos entre sí.

■

II.4 Isomorfismos y una reformulación de $Rep\mathcal{A}$.

El siguiente resultado nos ayudará a estudiar los morfismos en $Rep\mathcal{A}$.

Lema 16. *Sean R una $k-$álgebra, A y B $R-$álgebras, $M \in A - Mod$, $N \in B - Mod$ y U un $R - R-$bimódulo. Entonces hay un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{B-k}(B \otimes_R U \otimes_R A \otimes_A M, N) & \overset{\beta_0}{\longrightarrow} & Hom_{R-k}(U \otimes_R M, N) \\ \downarrow^{\sigma_1} & & \downarrow^{\sigma_2} \\ Hom_{B-A}(B \otimes_R U \otimes_R A, Hom_k(M, N)) & \underset{\beta}{\longrightarrow} & Hom_{R-R}(U, Hom_k(M, N)) \end{array}$$

donde los isomorfismos verticales son los de adjunción ([M] Cor. V 3.2),

$$\beta_0 : Hom_{B-k}(B \otimes_R U \otimes_R A \otimes_A M, N) \to Hom_{R-k}(U \otimes_R M, N)$$

está definido por $\beta_0(f)(u \otimes m) = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$, con inversa $\beta_0^{-1}(h)(b \otimes u \otimes a \otimes m) = bh(u \otimes am)$; y finalmente

$$\beta : Hom_{B-A}(B \otimes_R U \otimes_R A, Hom_k(M, N)) \to Hom_{R-R}(U, Hom_k(M, N))$$

está definido por $\beta(f)(u) = f(1 \otimes u \otimes 1)$, con inversa $\beta^{-1}(h)(b \otimes u \otimes a) = bh(u)a$.

Demostración: Las pruebas son cálculos rutinarios, tan sólo veamos que
$\sigma_2(\beta_0(f))(u)[m] = \beta_0(f)(u \otimes m) = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$ y que
$\beta(\sigma_1(f))(u)[m] = (\sigma_1(f)(1 \otimes u \otimes 1))[m] = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$,
es decir, el diagrama conmuta.

■

Corolario 17. *Hay un diagrama conmutativo de isomorfismos naturales:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) & \xrightarrow{\beta_0} & Hom_{R-k}\left(W_1\otimes_R M,N\right) \\ \downarrow^{\sigma_1} & & \downarrow^{\sigma_2} \\ Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right) & \xrightarrow[\beta]{} & Hom_{R-R}\left(W_1,Hom_k(M,N)\right) \end{array}$$

donde los isomorfismos verticales son los de adjunción,

$$\beta_0 : Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) \to Hom_{R-k}\left(W_1\otimes_R M,N\right)$$

está definido por $\beta_0(f)(w\otimes m) = f(1\otimes w\otimes 1\otimes m)$, *con inversa* $\beta_0^{-1}(h)(a\otimes w\otimes a'\otimes m) = ah(w\otimes a'm)$; *y finalmente*

$$\beta : Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right) \to Hom_{R-R}\left(W_1,Hom_k(M,N)\right)$$

está definido por $\beta(f)(w) = f(1\otimes w\otimes 1)$, *con inversa* $\beta^{-1}(h)(a\otimes w\otimes a') = ah(w)a'$.

Observación II.4: Sea $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs y sean M,N objetos de $Rep\mathcal{A}$, tenemos el isomorfismo de adjunción:

$$\sigma_1 : Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right).$$

Este isomorfismo nos permite reinterpretar la categoría $Rep\mathcal{A}$ como la siguiente categoría isomorfa $\underline{Rep\mathcal{A}}$:

$\underline{Rep\mathcal{A}}$ tiene por objetos los $A(\mathcal{A})$ –módulos.

Si M y N son dos objetos de $\underline{Rep\mathcal{A}}$ un morfismo $f : M \to N$ en $\underline{Rep\mathcal{A}}$ consiste de un par de morfismos $f = (f^0, f^1)$ tal que:

1. $f^0 \in Hom_R(M,N)$;
2. $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right)$;
3. Para toda $a \in A$ y $m \in M$ se tiene:

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a)\otimes m).$$

Dados dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$ en $\underline{Rep\mathcal{A}}$, su composición $gf = ((gf)^0,(gf)^1)$ se define como:

$$\begin{array}{lcl}(gf)^0 & = & g^0 f^0 \\ (gf)^1(v\otimes m) & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1\left(v\otimes f^0(m)\right) + \sum g^1\left(v_i^1 \otimes f^1(v_i^2\otimes m)\right)\end{array}$$

donde $v \in V(\mathcal{A})$, $m \in M$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

En efecto, la regla de asociación $\vartheta : \underline{Rep\mathcal{A}} \rightarrow Rep\mathcal{A}$ tal que $\vartheta(M) = M$, para $M \in ModA(\mathcal{A})$, y tal que $\vartheta((f^0, f^1)) = (\overline{f^0, \sigma_1}(f^1))$, si $(f^0, f^1) \in Hom_{\underline{Rep\mathcal{A}}}(M, N)$, envía la composición de morfismos de $\underline{Rep\mathcal{A}}$ en la composición de morfismos de $Rep\mathcal{A}$:

Sean $f = (f^0, f^1) \in Hom_{\underline{Rep\mathcal{A}}}(L, \overline{M})$ y $g = (g^0, g^1) \in Hom_{\underline{Rep\mathcal{A}}}(M, N)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}(\vartheta(g)\vartheta(f))^1(v)[m] & = & \left(\vartheta(g)^0\vartheta(f)^1(v) + \vartheta(g)^1(v)\vartheta(f)^0\right)[m] \\ & & + \left(\sum \vartheta(g)^1(v_i^1)\vartheta(f)^1(v_i^2)\right)[m] \\ & = & \left(g^0\sigma_1(f^1)(v) + \sigma_1(g^1)(v)f^0 + \sum \sigma_1(g^1)(v_i^1)\sigma_1(f^1)(v_i^2)\right)[m] \\ & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1\left(v\otimes f^0(m)\right) + \sum \sigma_1(g^1)(v_i^1) f^1(v_i^2\otimes m) \\ & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1\left(v\otimes f^0(m)\right) + \sum g^1\left(v_i^1\otimes f^1(v_i^2\otimes m)\right) \\ & = & (gf)^1(v\otimes m) \\ & = & (\vartheta(gf))^1(v)[m].\end{array}$$

Se sigue que $\underline{Rep\mathcal{A}}$ es una categoría y que ϑ es un isomorfismo de categorías. A menudo identificaremos a $Rep\mathcal{A}$ con $\underline{Rep\mathcal{A}}$ vía ϑ, en los siguientes capítulos.

II.5 Bocses triangulares y bocses de Kleiner-Roiter.

En esta sección usaremos los isomorfismos de II.16 y II.17, así como la equivalencia de categorías señalada en la observación II.4.

Notación: Si W es un $R-R-$bimódulo y W' es un subconjunto de W, denotaremos por $\langle W'\rangle_R$ al $R-R-$sub-bimódulo de W generado por W'. Sea A un $R-$álgebra y A' un subconjunto de A, denotaremos por $\langle A'\rangle^A$ a la $R-$subálgebra de A generada por A'.

Siempre que H y G sean $R-$sub-bimódulos de $T_R(W)$, denotaremos por $H\hat{\otimes}_R G$ a la imagen del morfismo natural $\eta : H\otimes_R G \rightarrow T_R(W)$ dado por $\eta(h\otimes g) = h\otimes g$.

Si η es inyectivo a menudo identificamos $H\hat{\otimes}_R G$ con $H\otimes_R G$.

Definición 18. *Diremos que un bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es* **triangular** *si existen $R-R-$sub-bimódulos $W_0^0, W_0^1, ..., W_0^r$ de W_0, y $R-R-$sub-bimódulos $W_1^0, W_1^1, ..., W_1^s$ de W_1 tales que:*

1. $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$.

2. $\delta(W_0^i) \subseteq A_{i-1}\hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{i-1}$, *para* $i \geq 1$, *donde* $A_{i-1} = \left\langle W_0^{i-1}\right\rangle^{A(\mathcal{A})}$.

3. $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq W_1^2 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$.

4. $\delta(W_1^i) \subseteq \left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})} \hat{\otimes}_R \left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}$, *para* $i \geq 1$. *Esto es decir que* $\delta(W_1^i)$ *está contenido en el* $R-R$*–sub-bimódulo de* $[T_R(W)]_2$ *generado por* W_0 *y* W_1^{i-1}.

Si $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$ *como* $R-R$*–bimódulos para* $i \in \{1, ..., r-1\}$ *diremos que* $\mathcal{A}$ *es un bocs* ***triangular aditivo.***

Lema 19. *Sean* $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ *un bocs triangular,* $M \in Rep\mathcal{A}$, *y* $f = (f^0, f^1)$ *un elemento de* $End_{\mathcal{A}}(M)$. *Entonces* f *es nilpotente si y sólo si* f^0 *es nilpotente.*

Demostración: Denotemos $f^{(n)} = \left(\left(f^{(n)}\right)^0, \left(f^{(n)}\right)^1\right)$. Si hay un entero n tal que $f^{(n)} = (0,0)$, entonces $\left(f^{(n)}\right)^0 = (f^0)^n = 0$ prueba que f^0 es nilpotente.

Ahora supongamos que existe un entero m tal que $\left(f^{(m)}\right)^0 = (f^0)^m = 0$. Veamos que podemos decir acerca de la parte de grado 1, para $n \geq m$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 de la condición de triangularidad.

Para $w' \in W_1^1$ se tiene, pues $\delta(w') = 0$, que

$$\left(f^{(2m)}\right)^1 (w') = \left(f^{(m)}\right)^0 \left(f^{(m)}\right)^1 (w') + \left(f^{(m)}\right)^1 (w') \left(f^{(m)}\right)^0 = 0.$$

Si para $w \in W_1^j$ y t natural, se cumple que $\left(f^{(tm)}\right)^1 (w) = 0$ entonces para $w' \in W_1^{j+1}$ se tiene, donde $\delta(w') = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^1$, que

$$\begin{aligned}
\left(f^{((t+1)m)}\right)^1 (w') &= \left(f^{(tm)}\right)^0 \left(f^{(m)}\right)^1 (w') + \left(f^{(tm)}\right)^1 (w') \left(f^{(m)}\right)^0 \\
&\quad + \textstyle\sum_i \left(f^{(tm)}\right)^1 (v_i^1) \left(f^{(m)}\right)^1 (v_i^2) \\
&= \textstyle\sum_i \left(f^{(tm)}\right)^1 (v_i^1) \left(f^{(m)}\right)^1 (v_i^2) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pues $v_i^1 \in \left\langle W_1^j\right\rangle_{A(\mathcal{A})}$. Luego $f^{((s+1)m)} = (0,0)$, es decir, f es nilpotente.

■

Observación II.5: Como antes sea $A_i = \langle W_0^i\rangle^{A(\mathcal{A})}$. Hay propiedades adicionales a la triangularidad que son muy útiles; consideremos, para $i \in \{1, ..., r-1\}$, que:

1.- $A_i \cong T_R(W_0^i)$ bajo el epimorfismo canónico.

2.- El morfismo canónico de $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

2^{op}.- El morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

3.- El morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

4.- $A_{i+1} = A_i \oplus T_i$ como $R-R-$bimódulos.

Si el bocs es triangular aditivo las propiedades anteriores se cumplen, pues en tal caso $A(\mathcal{A}) = T_R(W_0) \cong T_R(W_0^i) \oplus T_i = A_i \oplus T_i$.

Otra posibilidad de que se cumplan las condiciones 1, 2, 2^{op} y 3, es que W_1 y W_0 sean planos por ambos lados, y W_0^i sea plano como $R-$módulo derecho (izquierdo) para $i \in \{1, ..., r-1\}$. En tal caso, si $\iota : W_0^i \to W_0$ es la inclusión, hay monomorfismos

$$W_0^i \otimes_R W_0^i \xrightarrow{Id \otimes \iota} W_0^i \otimes_R W_0 \xrightarrow{\iota \otimes Id} W_0 \otimes_R W_0$$

e inductivamente monomorfismos

$$W_0^i \otimes_R (W_0^i)^{\otimes n} \xrightarrow{Id \otimes (\iota \otimes \cdots \otimes \iota)} W_0^i \otimes_R (W_0)^{\otimes n} \xrightarrow{\iota \otimes Id} W_0 \otimes_R (W_0)^{\otimes n}$$

por lo que $A_i \cong T_R(W_0^i)$. Como W_1 y W_0 son planos por ambos lados se siguen las condiciones 2, 2^{op} y 3.

En el lema II.20 se usan las condiciones 1 y 2, pero pudo usarse la 3 en lugar de la 2 y obtener el mismo resultado mediante una prueba análoga. Similarmente en el lema II.21 se puede sustitir 2^{op} con 3, y obtener el mismo resultado mediante una prueba análoga.

Lema 20. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular, donde $W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq ... \subseteq W_0^r$ es la filtración de grado cero asociada a la triangularidad, y se cumple para $i \in \{1, ..., r-1\}$ que el epimorfismo canónico de $T_R(W_0^i)$ en A_i es un isomorfismo, así como que el morfismo canónico de $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo. Supongamos que M es un $R-$módulo izquierdo, que $N \in RepA$, y que tenemos morfismos $f^0 \in_R (M, N)$ y $f' \in Hom_{R-R}(W_1, (M, N)_k)$. Si f^0 es una $R-$retracción, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre M tal que (f^0, f^1) es un morfismo en RepA, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$.*

Demostración: Recordemos los isomorfismos

$$\begin{array}{lll}
\sigma_2 & : & Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N) \to Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M, N)) \\
(\beta_0)^{-1} & : & Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N) \to Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} M, N\right) \\
\sigma_1 & : & Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} M, N\right) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M, N))
\end{array}$$

de II.17, podemos considerar que $f' \in Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N)$, y como se mencionó en la observación II.4, resolver el problema en $\underline{Rep\mathcal{A}}$. Sea $\theta_2 : A(\mathcal{A}) \otimes_R N \to N$ el R–morfismo que le da la estructura de $A(\mathcal{A})$–módulo a N. Puesto que $A(\mathcal{A})$ es un álgebra tensorial, este morfismo está determinado por su valor en $W_0 \otimes_R N$.

Teniendo en mente la primera condición de triangularidad, definiremos inductivamente los R–morfismos $\theta_1^i : W_0^i \otimes_R M \to M$. Por la propiedad universal del álgebra tensorial, estos últimos determinan de manera única R–morfismos $\hat{\theta}_1^i : T_R(W_0^i) \otimes_R M \to M$. Sean $j_i : W_0^i \to W_0$ y $j_i^{i+1} : W_0^i \to W_0^{i+1}$ las inclusiones canónicas. Es rutinario verficar la conmutatividad del siguiente diagrama para $i \in \{0, ..., r-1\}$:

$$\begin{array}{ccc}
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) & = & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \\
{\scriptstyle \alpha_i} \uparrow & {\scriptstyle h'_i} & \uparrow {\scriptstyle \alpha_{i+1}} \\
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i & \to & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_{i+1} \\
{\scriptstyle b_i} \uparrow & {\scriptstyle h_i} & \uparrow {\scriptstyle b_{i+1}} \\
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) & \to & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R\left(W_0^{i+1}\right)
\end{array}$$

donde todos los morfismos son canónicos. Como $T_R(W_0^0) = A_0 = R$ es un $R-R$–sumando directo de $A(\mathcal{A})$ tenemos que α_0 es inyectivo y que b_0 es isomorfismo. Luego, teniendo en cuenta lo anterior y las hipótesis del lema, para $i \in \{0, ..., r-1\}$ tenemos que α_i es inyectivo, por lo que h'_i también lo es, y puesto que b_i es isomorfismo entonces h_i es inyectivo. Recordemos que $\delta\left(W_0^{i+1}\right) \subseteq A_i \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_i$, así que δj_{i+1} se factoriza como $\alpha_i \delta'_{i+1}$ para un morfismo de $R-R$–bimódulos $\delta'_{i+1} : W_0^{i+1} \to A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$. Definamos $\delta_{i+1} : W_0^{i+1} \to A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i)$ como $b_i^{-1}\delta'_{i+1}$. Luego tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} b_{i+1} \delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} &= \alpha_{i+1} \delta'_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+1} \\
&= \alpha_i \delta'_{i+1} = \alpha_i b_i \delta_{i+1} = \alpha_{i+1} h'_i b_i \delta_{i+1} \\
&= \alpha_{i+1} b_{i+1} h_i \delta_{i+1},
\end{aligned}$$

y como $\alpha_{i+1} b_{i+1}$ es inyectivo, se cumple que $\delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = h_i \delta_{i+1}$ para $i \in \{0, ..., r-2\}$.

Por el lema II.16 podemos definir el $A(\mathcal{A})$–morfismo $f'_0 : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^0) \otimes_R M \to N$ como $f'_0(a \otimes w \otimes r \otimes m) = \theta_2(a \otimes f'(w \otimes rm))$, para $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$, $r \in R$ y $m \in M$.

Sea $q : N \to M$ un R–morfismo tal que $f^0 q = Id_N$. Sean $w \in W_0^1$ y $m \in M$, tenemos un R–morfismo

$$\theta_1^1(w \otimes m) = q\left[\theta_2(j_1(w) \otimes f^0(m)) - f'_0(\delta_1(w) \otimes m)\right].$$

Como decíamos antes, obtenemos $\hat{\theta}_1^1 : T_R(W_0^1) \otimes_R M \to M$, y a partir de este $R-$morfismo se construye, por II.16, el $A(\mathcal{A})-$morfismo $f_1' : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^1) \otimes_R M \to N$: si $a \in A(\mathcal{A})$, $a' \in T_R(W_0^1)$, $w \in W_1$ y $m \in M$ entonces

$$f_1'(a \otimes w \otimes a' \otimes m) = \theta_2\left(a \otimes f'\left(w \otimes \hat{\theta}_1^1(a' \otimes m)\right)\right).$$

Inductivamente, definimos,

$$\theta_1^{i+1} = q\left[\theta_2(j_{i+1} \otimes f^0) - f_i'(\delta_{i+1} \otimes Id_M)\right]$$

y, por II.16, definimos el $A(\mathcal{A})-$morfismo $f_{i+1}' : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R\left(W_0^{i+1}\right) \otimes_R M \to N$, como

$$f_{i+1}' = \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^{i+1}\right).$$

En r pasos obtenemos los morfismos

$$\theta_1 = \hat{\theta}_1^r : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M \text{ y } f_r' \in Hom_{A(\mathcal{A})-k}(V(\mathcal{A}) \otimes_R M, N).$$

Consideremos el isomorfismo de $T_R(W_0^i) - T_R(W_0^i)-$bimódulos $\zeta_1^i : T_R(W_0^i) \to T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} T_R(W_0^i)$ dado por $\zeta_1^i(t) = t \otimes 1$, y el morfismo de $T_R(W_0^i) - k-$bimódulos $\zeta_2^i : T_R(W_0^i) \otimes_R M \to M$ dado por $\zeta_1^i(t \otimes m) = tm$. Es claro que la composición

$$\begin{array}{c} A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle Id\otimes\zeta_1^i\otimes Id} \\ A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} T_R(W_0^i) \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle Id\otimes\zeta_2^i} \\ A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} M, \end{array}$$

es un isomorfismo de $A(\mathcal{A}) - k-$bimódulos. Luego, los morfismos f_i' determinan de manera única morfismos $f_i : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} M \to N$, dados por $f_i(a \otimes w \otimes a' \otimes m) = f_i'(a \otimes w \otimes a' \otimes m)$.

Observemos que $(f_1')_{|A(\mathcal{A})\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^0)\otimes_R M} = f_1'(h_0 \otimes Id_M) = f_0'$, así que

$$\begin{aligned} \theta_1^2(j_1^2 \otimes Id_M) &= q\left[\theta_2(j_2 j_1^2 \otimes f^0) - f_1'(\delta_2 j_1^2 \otimes Id_M)\right] \\ &= q\left[\theta_2(j_1 \otimes f^0) - f_1'(h_0\delta_1 \otimes Id_M)\right] \\ &= q\left[\theta_2(j_1 \otimes f^0) - f_0'(\delta_1 \otimes Id_M)\right] \\ &= \theta_1^1. \end{aligned}$$

En general, el que $f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) = f'_i$ implica que

$$\begin{aligned}\theta_1^{i+2}\left(j_{i+1}^{i+2} \otimes Id_M\right) &= q\left[\theta_2\left(j_{i+2}j_{i+1}^{i+2} \otimes f^0\right) - f'_{i+1}\left(\delta_{i+2}j_{i+1}^{i+2} \otimes Id_M\right)\right] \\ &= q\left[\theta_2\left(j_{i+1} \otimes f^0\right) - f'_{i+1}\left(h_i\delta_{i+1} \otimes Id_M\right)\right] \\ &= q\left[\theta_2\left(j_{i+1} \otimes f^0\right) - f'_i\left(\delta_{i+1} \otimes Id_M\right)\right] \\ &= \theta_1^{i+1}.\end{aligned}$$

Sea $\bar{j}_i^{i+1} : T_R(W_0^i) \to T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ el morfismo inducido por j_i^{i+1}. Si se cumple que $\theta_1^{i+1}\left(j_i^{i+1} \otimes Id_M\right) = \theta_1^i$ entonces $\hat{\theta}_1^{i+1}\left(\bar{j}_i^{i+1} \otimes Id_M\right) = \hat{\theta}_1^i$; como además $h_i = Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \bar{j}_i^{i+1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) &= \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^{i+1}\left(\bar{j}_i^{i+1} \otimes Id_M\right)\right) \\ &= \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^i\right) \\ &= f'_i.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $w \in W_0$ y $m \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned}\theta_2\left(w \otimes f^0(m)\right) - f^0\left(\theta_1(w \otimes m)\right) &= \theta_2\left(w \otimes f^0(m)\right) \\ &\quad -f^0\left(q\left[\theta_2\left(w \otimes f^0(m)\right) - f'_{r-1}\left(\delta_r(w) \otimes m\right)\right]\right) \\ &= f'_{r-1}\left(\delta_r(w) \otimes m\right) \\ &= f'_r\left(h_{r-1} \otimes Id_M\right)\left(\delta_r(w) \otimes m\right) \\ &= f'_r\left(\delta(w) \otimes m\right) = f_r\left(\delta(w) \otimes m\right)\end{aligned}$$

luego $(f^0, f_r) : M \to N$ es un morfismo en $\underline{Rep\mathcal{A}}$ (ver observación II.4), así que $(f^0, f^1) : M \to N$, con $f^1 = \sigma_1(f_r)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

■

Lema 21. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular, donde $W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq ... \subseteq W_0^r$ es la filtración de grado cero asociada a la triangularidad, y se cumple para $i \in \{1, ..., r-1\}$ que el epimorfismo canónico de $T_R(W_0^i)$ en A_i es un isomorfismo, así como que el morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo. Supongamos que $M \in Rep\mathcal{A}$, que N es un $R-$módulo izquierdo y que tenemos morfismos $f^0 \in_R (M, N)$ y $f' \in Hom_{R-R}(W_1, (M, N)_k)$. Si f^0 es una $R-$sección, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre N tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$.*

Demostración: Como en el lema anterior traslademos el problema a $\underline{Rep\mathcal{A}}$. Sea $\theta_1 : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M$ el $R-$morfismo que le da la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo a M. Puesto que $A(\mathcal{A})$ es un álgebra tensorial, este morfismo está determinado por su valor en $W_0 \otimes_R M$.

Teniendo en mente la primera condición de triangularidad, es decir, considerando a una filtración $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$, definiremos inductivamente los $R-$morfismos $\theta_2^i : W_0^i \otimes_R N \to N$. Por la propiedad universal del álgebra tensorial, estos últimos determinan de manera única $R-$morfismos $\hat{\theta}_2^i : T_R(W_0^i) \otimes_R N \to N$. Sean $j_i : W_0^i \to W_0$ y $j_i^{i+1} : W_0^i \to W_0^{i+1}$ las inclusiones canónicas. Es rutinario verficar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \arrow[r, equal] & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \\
A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \arrow[u, "\alpha_i"] \arrow[r, "h_i'"] & A_{i+1} \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \arrow[u, "\alpha_{i+1}"'] \\
T_R(W_0^i) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \arrow[u, "b_i"] \arrow[r, "h_i"] & T_R\left(W_0^{i+1}\right) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \arrow[u, "b_{i+1}"']
\end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos son canónicos. Los argumentos son los mismos del lema anterior: como α_i es inyectivo tenemos que h_i' también lo es, y puesto que b_i es isomorfismo entonces h_i es inyectivo. Como $\delta\left(W_0^{i+1}\right) \subseteq A_i \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_i$, tenemos que δj_{i+1} se factoriza como $\alpha_i \delta_{i+1}'$ para un morfismo de $R-R-$bimódulos $\delta_{i+1}' : W_0^{i+1} \to A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$. Definamos $\delta_{i+1} : W_0^{i+1} \to T_R(W_0^i) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ como $b_i^{-1}\delta_{i+1}'$. Luego tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} b_{i+1} \delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} &= \alpha_{i+1}\delta_{i+2}' j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+1} \\
&= \alpha_i \delta_{i+1}' = \alpha_i b_i \delta_{i+1} = \alpha_{i+1} h_i' b_i \delta_{i+1} \\
&= \alpha_{i+1} b_{i+1} h_i \delta_{i+1},
\end{aligned}$$

y como $\alpha_{i+1} b_{i+1}$ es inyectivo, se cumple que $\delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = h_i \delta_{i+1}$ para $i \in \{0, ..., r-2\}$.

Por el lema II.16 podemos definir el $R-$morfismo $f_0' : T_R(W_0^0) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to N$ como $f_0'(r \otimes w \otimes a \otimes m) = rf'(\theta_1(w \otimes am))$, para $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$, $r \in R$ y $m \in M$.

Sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $qf^0 = Id_M$. Sean $w \in W_0^1$ y $m \in M$, tenemos un $R-$morfismo

$$\theta_2^1(w \otimes n) = f^0(\theta_1(j_1(w) \otimes q(n))) + f_0'(\delta_1(w) \otimes q(n)).$$

Luego obtenemos $\hat{\theta}_2^1 : T_R(W_0^1) \otimes_R N \to N$, y a partir de este $R-$morfismo se construye el $T_R(W_0^1)-$morfismo $f_1' : T_R(W_0^1) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to N$: si $a' \in T_R(W_0^1)$, $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$ y $m \in M$ entonces

$$f_1'(a'\otimes w\otimes a\otimes m)=\hat{\theta}_2^1(a'\otimes f'(w\otimes\theta_1(a\otimes m)))$$

Inductivamente, definimos,

$$\theta_2^{i+1}=(f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_i'(\delta_{i+1}\otimes q))$$

y, por lema II.16, el $T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ –morfismo $f_{i+1}':T_R\left(W_0^{i+1}\right)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M\to N$ como

$$f_{i+1}'=\hat{\theta}_2^{i+1}\left(Id_{T_R(W_0^{i+1})}\otimes f'\right)\left(Id_{T_R(W_0^{i+1})}\otimes Id_{W_1}\otimes\theta_1\right).$$

En r pasos obtenemos los morfismos

$$\theta_2=\hat{\theta}_2^r:A(\mathcal{A})\otimes_R N\to N \text{ y } f_r'\in Hom_{A(A)-k}(V(\mathcal{A})\otimes_R M,N).$$

Como en la prueba del lema anterior, tenemos isomorfismos de bimódulos $\left(Id\otimes\zeta_2^i\right)\left(Id\otimes\zeta_1^i\otimes Id\right)$:
$T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M\to T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M$
inducidos por $\zeta_1^i:A(\mathcal{A})\to A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})}A(\mathcal{A})$ dado por $\zeta_1^i(a)=a\otimes 1$, y ζ_2^i : $A(\mathcal{A})\otimes_R M\to M$ dado por $\zeta_1^i(a\otimes m)=am$. Luego, los morfismos f_i' determinan de manera única morfismos $f_i:T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M\to N$, dados por $f_i(a'\otimes w\otimes a\otimes m)=f_i'(a'\otimes w\otimes a\otimes m)$.
Observemos que $(f_1')_{|T_R(W_0^0)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M}=f_1'(h_0\otimes Id_M)=f_0'$, así que

$$\begin{aligned}\theta_2^2(j_1^2\otimes Id_N)&=(f^0\theta_1(j_2j_1^2\otimes q)+f_1'(\delta_2j_1^2\otimes q))\\&=(f^0\theta_1(j_1\otimes q)+f_1'(h_0\delta_1\otimes q))\\&=(f^0\theta_1(j_1\otimes q)+f_0'(\delta_1\otimes q))\\&=\theta_2^1.\end{aligned}$$

En general, el que $f_{i+1}'(h_i\otimes Id_M)=f_i'$ implica que

$$\begin{aligned}\theta_2^{i+2}\left(j_{i+1}^{i+2}\otimes Id_N\right)&=\left(f^0\theta_1\left(j_{i+2}j_{i+1}^{i+2}\otimes q\right)+f_{i+1}'\left(\delta_{i+2}j_{i+1}^{i+2}\otimes q\right)\right)\\&=\left(f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_{i+1}'(h_i\delta_{i+1}\otimes q)\right)\\&=(f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_i'(\delta_{i+1}\otimes q))\\&=\theta_2^{i+1}.\end{aligned}$$

Sea $\tilde{j}_i^{i+1} : T_R(W_0^i) \to T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ el morfismo inducido por j_i^{i+1}. Si $\theta_2^{i+1}\left(j_i^{i+1} \otimes Id_N\right) = \theta_2^i$, entonces $\hat{\theta}_2^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_N\right) = \hat{\theta}_2^i$, luego $f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) = f'_i$, pues tenemos que $h_i = \tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_{W_1} \otimes Id_{A(\mathcal{A})}$, así que

$$\begin{aligned} f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) &= \hat{\theta}_2^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes f'\right)\left(Id_{A_{i+1}} \otimes Id_{W_1} \otimes \theta_1\right) \\ &= \hat{\theta}_2^{i}\left(Id_{A_{i+1}} \otimes f'\right)\left(Id_{A_{i+1}} \otimes Id_{W_1} \otimes \theta_1\right) \\ &= f'_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $w \in W_0$ y $m \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_2(w \otimes f^0(m)) - f^0(\theta_1(w \otimes m)) &= f^0\theta_1(w \otimes q(f^0(m))) + f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes q(f^0(m))) \\ &\quad - f^0(\theta_1(w \otimes m)) \\ &= f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes m) \\ &= f'_r(h_{r-1} \otimes Id_M)(\delta_r(w) \otimes m) \\ &= f'_r(\delta(w) \otimes m) = f_r(\delta(w) \otimes m) \end{aligned}$$

luego $(f^0, f_r) : M \to N$ es un morfismo en $\underline{Rep\mathcal{A}}$ (ver observación II.4), así que $(f^0, f^1) : M \to N$, con $f^1 = \sigma_1(f'_r)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

■

Observación II.6: Como ya vimos en II.17, hay un isomorfismo

$$\beta : Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N)) \to Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N))$$

que nos indica que todo morfismo en $Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N))$ está totalmente determinado por su evaluación en W_1. Por esto, en lugar de un enunciado como "entonces existe una estructura tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$", directamente usaremos "entonces existe una estructura tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$".

Definición 22. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular. Diremos que $\mathcal{A}$ es un bocs de Kleiner-Roiter, o bocs K-R, si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Sea M un $R-$módulo izquierdo y $N \in Rep\mathcal{A}$. Sean $f^0 \in_R (M,N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1, (M,N)_k)$. Si f^0 es un $R-$isomorfismo, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre M tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.*

2. *Sea $M \in RepA$ y N un $R-$módulo izquierdo. Sea $f^0 \in_R (M,N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1,(M,N)_k)$. Si f^0 es un $R-$isomorfismo, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre N tal que (f^0,f^1) es un morfismo en $RepA$.*

Lema 23. *Sean $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs K-R y $f = (f^0,f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, tal que f^0 es una $R-$retracción. Entonces existe en $Rep\mathcal{A}$ un morfismo $h = (Id_M,h^1) : M' \to M$ tal que $fh = (f^0,0)$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado uno asociada a la triangularidad, y sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $f^0q = Id_N$. Podemos elegir a h de tal manera que si $f^1\left(W_1^j\right) = 0$ entonces, para $w \in W_1^{j+1}$, $h^1(w) = -qf^1(w)$.*

Demostración: Sea M^1 igual a M como $R-$módulo. Definamos el $R-R-$morfismo $h_1' : W_1 \to (M^1,M)_k$ como $h_1'(w)[m] = -q(f^1(w)[m])$, el cual está bien definido pues $f^1(wr) = f^1(w)r$ para todo $r \in R$.

Por II.22.1 hay una $A(\mathcal{A})-$estructura en M^1, y un morfismo $h_1 = (Id_M,h_1^1) : M^1 \to M$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que para $w \in W_1$ y $m \in M$ se cumple que $h_1^1(w)[m] = -q(f^1(w)[m])$. Supongamos que $f^1\left(W_1^j\right) = 0$, luego para $w \in W_1^{j+1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(fh_1)^1(w)[m] &= f^0(h_1^1(w)[m]) + f^1(w)[Id_M(m)] \\ &= f^0(-q(f^1(w)[m])) + f^1(w)[m] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Similarmente construyamos inductivamente, para $i \geq 2$, morfismos $h_i : (Id_M,h_i^1) : M^i \to M^{i-1}$ en $Rep\mathcal{A}$, a partir de q y $fh_1...h_{i-1} : M^{i-1} \to N$. Entonces, $h_i'(w)[m] = -q\left((fh_1...h_{i-1})^1(w)[m]\right)$ para $w \in W_1$ y $m \in M$. A lo más en $s-j$ pasos obtenemos un morfismo $h = h_1...h_{t-1}h_t$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $fh = (f^0,0)$.

Observemos que para $w \in W_1^{j+1}$ e $i \geq 2$ se cumple que $h_i^1(w)[m] = 0$ y $h_1^1(w) = -qf^1(w)$. Sean $w \in W_1^{j+1}$ y $\delta(w) = \sum_l v_l^1 \otimes v_l^2$, si para $w \in W_1^{j+1}$, $i \geq 1$ y $g_i = h_1...h_i$ se tiene que $g_i^1(w) = -qf^1(w)$, entonces

$$(g_ih_{i+1})^1(w) = Id_Mh_{i+1}^1(w) + g_i^1(w)Id_M + \textstyle\sum_l g_i^1(v_l^1)h_{i+1}^1(v_l^2) = g_i^1(w) = -qf^1(w).$$

Así que, para $w \in W_1^{j+1}$, tenemos que $h^1(w) = -qf^1(w)$.

■

Lema 24. *Sean $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs K-R y $f = (f^0,f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ tal que f^0 es una $R-$sección. Entonces existe en $Rep\mathcal{A}$ un morfismo $h = (Id_N,h^1) : N \to N'$ tal que $hf = (f^0,0)$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 asociada a la triangularidad, y sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $qf^0 = Id_M$. Podemos elegir a h de tal manera que si $f^1\left(W_1^j\right) = 0$ entonces para $w \in W_1^{j+1}$ y $n \in N$ se cumple que $h^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.*

Demostración: Sea N^1 igual a N como $R-$módulo. Definamos el $R-$morfismo $h_1' : W_1 \to (N, N^1)_k$ como $h_1'(n)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.

Por II.22.2 hay una $A(\mathcal{A})-$estructura en N^1, y un morfismo $h_1 = (Id_N, h_1^1) : N \to N^1$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que para $w \in W_1$ y $n \in N$ se cumple que $h_1^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$. Supongamos que $f^1\left(W_1^j\right) = 0$, luego, para $w \in W_1^{j+1}$ y $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} (h_1 f)^1(w)[m] &= Id_N(f^1(w)[m]) + h_1^1(w)[f^0(m)] \\ &= f^1(w)[m] + f^1(w)[-q(f^0(m))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente construyamos inductivamente, para $i \geq 2$, morfismos $h_i : (Id_M, h_i^1) : M^i \to M^{i-1}$ en $Rep\mathcal{A}$, a partir de q y $h_{i-1}...h_1 f : M \to N^{i-1}$. Entonces, $h_i'(w)[n] = (h_{i-1}...h_1 f)^1(w)[-q(n)]$ para $w \in W_1$ y $m \in M$. A lo más en $s - j$ pasos obtenemos un morfismo $h = h_t h_{t-1}...h_1$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $hf = (f^0, 0)$.

Observemos que para $w \in W_1^{j+1}$, $n \in N$ e $i \geq 2$ se cumple que $h^i(w)[m] = 0$, así que como en el lema anterior probamos que, para $w \in W_1^{j+1}$, se cumple que $h_1^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.

■

Lema 25. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y f^0 es un isomorfismo entonces f es un isomorfismo.*

Demostración: Si f^0 es un isomorfismo, por lema II.23, existe un morfismo $h = (I, h^1) : M' \to M$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $fh = (f^0, 0)$. Sea g^0 la inversa de f^0. Como f^0 es un morfismo en $A(\mathcal{A}) - Mod$, entonces $g = (g^0, 0) : N \to M'$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, luego $fhg = (Id_N, 0)$. Similarmente, por lema II.24 existe un morfismo $t = (Id_N, t^1) : N \to N'$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $tf = (f^0, 0)$, y tenemos que $s = (g^0, 0) : N' \to M$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, luego $stf = (Id_M, 0)$. Por asociatividad de la composición se sigue que $hg = st = f^{-1}$.

■

Proposición 26. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Entonces los idempotentes se dividen en $Rep\mathcal{A}$.*

Demostración: Sea $e = (e^0, e^1) : M \to M$ un idempotente en $Rep\mathcal{A}$. Si $e^1 = 0$, entonces e^0 es un morfismo en $A(\mathcal{A}) - Mod$, por lo que se divide. Luego, para mostrar que todo idempotente se divide, es suficiente con encontrar un isomorfismo h tal que $(heh^{-1})^1 = 0$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado uno dada por la triangularidad. Sea n el número máximo con la propiedad de que hay un isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $(heh^{-1})^1 (W_1^n) = 0$. Si $n = s$ se tiene el enunciado. En caso contrario, $e^1 (W_1^n) = 0$ y $e^1 \left(W_1^{n+1}\right) \neq 0$. Luego, para $w \in W_1^{n+1}$ tenemos que

$$e^1 (w) = (ee)^1 (w) = e^0 e^1 (w) + e^1 (w) e^0.$$

De esto se sigue que $e^0e^1 (w) e^0 = e^0e^1 (w) e^0 + e^0e^1 (w) e^0$, es decir que $e^0e^1 (w) e^0 = 0$. Sea M' igual a M como $R-$módulo e $I : M \to M'$ la identidad como $R-$módulos. Sea $h^1 \in Hom_{R-R} (W_1, (M, M'))$ dado por $h^1 = (2Ie^0 - I) e^1$. Por II.22.2, existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo en M' tal que $h = (I, h^1) : M \to M'$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Por II.25, h es un isomorfismo, y claramente, $h^{-1} = (I^{-1}, v)$. Puesto que $0 = (h^{-1}h)^1$, tenemos para $w \in W_1^{n+1}$ que $I^{-1}h^1 (w) + v (w) I = 0$. Luego se cumple que

$$\begin{aligned}
&(heh^{-1})^1 (w) = h^1 (w) (eh^{-1})^0 + h^0 (eh^{-1})^1 (w)\\
&= h^1 (w) e^0 I^{-1} + I (e^0 v (w) + e^1 (w) I^{-1})\\
&= (2Ie^0 - I) e^1 (w) e^0 I^{-1} + Ie^0 (-I^{-1}h^1 (w) I^{-1}) + Ie^1 (w) I^{-1}\\
&= -Ie^1 (w) e^0 I^{-1} + Ie^0 (-2e^0 + Id_M) e^1 (w) I^{-1} + Ie^1 (w) I^{-1}\\
&= -Ie^1 (w) e^0 I^{-1} - 2Ie^0 e^1 (w) I^{-1} + Ie^0 e^1 (w) I^{-1} + Ie^1 (w) I^{-1}\\
&= I (-e^1 (w) e^0 - e^0 e^1 (w) + e^1 (w)) I^{-1} = 0
\end{aligned}$$

contradiciendo la maximalidad de n, luego $n = s$.

■

Corolario 27. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Entonces $rep\mathcal{A}$ es una categoría de Krull-Schmidt.*

Demostración: El enunciado afirma que $rep\mathcal{A}$ es aditiva y esbelta, y cada objeto es una suma de directa finita de inescindibles, cada uno de ellos con álgebra de endomorfismos local. Por la observación II.2.2 se tiene la aditividad de la categoría. Por el lema anterior, y el hecho de que los objetos son de dimensión finita, se sigue el resto de las propiedades.

■

El corolario nos permite, por (3.3 [GR]), afirmar que hay unicidad, salvo orden e isomorfismo, en la descomposición en sumandos directos inescindibles de un objeto de $rep\mathcal{A}$. En particular, $M \in rep\mathcal{A}$ es inescidible si y sólo si $End_{\mathcal{A}} (M)$ es local.

Definición 28. *Si $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs, la siguiente fórmula, para $M, N \in R - Mod$,*

$$\tau_{\mathcal{A}} (M, N) = Hom_R (M, N) \times Hom_{R-R} (W_1, (M, N)_k)$$

determina un bifuntor $\tau_{\mathcal{A}}(\_,?)$ sobre $R - Mod$. Si $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ es otro bocs y $F : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ es un functor, diremos que F está enmarcado por el par (F_0, η_F) si

1. *$F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ es un funtor;*
2. *$\eta_F : \tau_{\mathcal{A}'}(M', N') \to \tau_{\mathcal{A}}(F_0(M'), F_0(N'))$ es una transformación natural en $M', N' \in R' - Mod$;*
3. *${}_RF(M') = F_0({}_{R'}M')$, para todo $M' \in Rep\mathcal{A}'$;*
4. *$F((f^0, f^1)) = \eta_F((f^0, f^1))$, para todo $(f^0, f^1) \in Hom_{\mathcal{A}'}(M', N')$.*

Observación II.7: Para construir los funtores de reducción, a menudo construimos F_0 y η_F, damos estructura de $A(\mathcal{A})$ –módulo $F(M')$ a $F_0(M')$ y luego definimos F en morfismos de acuerdo al inciso cuatro de la anterior definición.

Lema 29. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses, y sea η un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ tal que $\eta(W_1) \subseteq W_1'$. En tal caso, el funtor $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ de II.11 está enmarcado por un par (F_0, η_F). Además, si η es suprayectiva y $\eta(W_1) = W_1'$, entonces η_F es inyectiva.*

Demostración: Sea $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ el funtor inducido por $\eta_{|R} : R \to R'$, el cual es fiel. Por construcción de F_η se sigue el tercer axioma de la definición anterior.

Para $f_0 \in Hom_{R'}(M', N')$ y $f_1 \in Hom_{R'-R'}(W_1', (M', N')_k)$, definimos $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$ como:

1. g_0 es f_0 considerado como R–morfismo, es decir, $g_0 = F_0(f_0)$.
2. Hay una inyección
$$\alpha_{M',N'} : Hom_{R'-R'}(W_1', (M', N')_k) \to Hom_{R-R}(F_0(W_1'), (F_0(M'), F_0(N'))_k),$$
y un homomorfismo
$$\begin{aligned}\left(\eta_{|W_1}\right)^* : Hom_{R-R}(F_0(W_1'), (F_0(M'), F_0(N'))_k) \to \\ Hom_{R-R}(W_1, (F_0(M'), F_0(N'))_k),\end{aligned}$$
el cual es inyectivo cuando $\eta_{|W_1}$ es suprayectivo. Luego, definimos a g_1 como $\left(\eta_{|W_1}\right)^*(\alpha_{M',N'}(f_1))$.

No es difícil verificar que η_F es natural en M', N'.

Además, por lema II.17 todo morfismo $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N))$ está determinado por su evaluación en W_1, luego, para $(f^0, f^1) \in Hom_{\mathcal{A}'}(M', N')$ tenemos que $F((f^0, f^1)) = \eta_F((f^0, f^1))$.

■

Lema 30. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses triangulares y sea $F : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ un funtor enmarcado por (F_0, η_F). Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *F es pleno;*
2. *η_F es inyectiva.*
3. *Sea $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$, si f_0 es un R'−isomorfismo entonces g_0 es un R−isomorfismo.*
4. *Si $M_0' \in R' - Mod$ y $M' \in Rep\mathcal{A}'$ con $F_0(M_0') = F_0(M')$, entonces M_0' admite una estructura de $A(\mathcal{A}')$−módulo y, con esa estructura, $F({}_{\mathcal{A}'}M_0') = F(M')$.*
5. *Sean $N \in \operatorname{Im} F$ y $M \in Rep\mathcal{A}$ tal que como R−módulo $M \in \operatorname{Im} F_0$. Se cumple que:*
   - (a) *Si $\eta_F((f_0, f_1)) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces $M \in \operatorname{Im} F$.*
   - (b) *Si $\eta_F((f_0, f_1)) : N \to M$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces $M \in \operatorname{Im} F$.*

En caso de cumplirse todas las condiciones, tendremos que si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R entonces $\mathcal{A}'$ es un bocs K-R.

Demostración: Sean $M' \in R' - Mod$ y $N' \in Rep\mathcal{B}$. Denotemos $M = F_0(M')$ y $N = F(N')$.

Consideremos morfismos $f_0 \in_{R'} (M', N')$ y $f_1 \in Hom_{R'-R'}(W_1', (M', N')_k)$ tales que f_0 es un R'−isomorfismo. Luego, si $(g_0, g_1) = \eta_F((f_0, f_1))$, por el tercer inciso g_0 es un R−isomorfismo. Como $\mathcal{A}$ es un bocs K-R existe una estructura de $A(\mathcal{A})$−módulo izquierdo sobre M, denotemos por ${}_{\mathcal{A}}M$ a este objeto, tal que $(g_0, g_1) :{}_{\mathcal{A}} M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y g_0 es un isomorfismo, por II.25 ${}_{\mathcal{A}}M$ es isomorfo a N, así que por el inciso 5.2 ${}_{\mathcal{A}}M = F(M'')$ para algún $M'' \in Rep\mathcal{A}'$.

Por el cuarto inciso M' admite una $A(\mathcal{A}')$−estructura para la cual $F({}_{\mathcal{A}'}M') = F(M'') =_{\mathcal{A}} M$.

Por plenitud de F hay un morfismo $h = (h^0, h^1) :_{\mathcal{A}'} M' \to N'$ tal que $F((h^0, h^1)) = (g_0, g_1)$, luego $\eta_F((f_0, f_1)) = \eta_F((h^0, h^1))$. Por inyectividad de η_F tenemos que $h^0 = f_0$ y $h^1 = f_1$.

La prueba del axioma II.22.2 es dual.

■

II.6 Producto de bocses.

Lema 31. *Sean R una k–álgebra, e un idempotente central de R y W un $R-R$–bimódulo. Sean $e' = 1 - e$, $T = T_R(W)$ y $L, N \in T - Mod$. Entonces:*

1. *Hay morfismos de k–álgebras graduadas $\eta : T \to T_{eR}(eWe)$ y $\sigma : T_{eR}(eWe) \to T$ tales que $\eta\sigma = Id_{T_{eR}(eWe)}$.*
2. *Si $eWe' \oplus e'We = 0$ entonces $T \cong eT \times e'T \cong T_{eR}(eWe) \times T_{e'R}(e'We')$.*
3. *Si $T \cong eT \times e'T$ entonces $Hom_T(L, N) \cong Hom_{eT}(eL, eN) \times Hom_{e'T}(e'L, e'N)$.*
4. *Si $T \cong eT \times e'T$ entonces $Ext_T(N, L) \cong Ext_{eT}(eN, eL) \times Ext_{e'T}(e'N, e'L)$.*

Demostración: El morfismo de k–álgebras $\eta_R : R \to eR$ y el morfismo de $R-R$–bimódulos $\eta_W : W \to eWe$ inducen, por lema II.2, un único morfismo de k–álgebras $\eta : T \to T_{eR}(eWe)$. Similarmente hay un morfismo de k–álgebras $\sigma_{eR} : eR \to R$, y un morfismo de $eR - eR$–bimódulos $\sigma_{eWe} : eWe \to W$ que inducen, por lema II.2, un único morfismo de k–álgebras $\sigma : T_{eR}(eWe) \to T$. Puesto que $\eta_R\sigma_{eR} = Id_{eR}$ y $\eta_W\sigma_{eWe} = Id_{eWe}$ tenemos que $\eta\sigma = Id_{T_{eR}(eWe)}$, comprobándose el primer inciso.

Análogamente podemos construir morfismos de k–álgebras $\eta' : T \to T_{e'R}(e'We')$ y $\sigma' : T_{e'R}(e'We') \to T$ tales que $\eta'\sigma' = Id_{T_{e'R}(e'We')}$.

Si $eWe' \oplus e'We = 0$, una rápida verificación en generadores prueba que $\sigma'\eta' + \sigma\eta = Id_T$, $\eta'\sigma = 0$ y $\eta\sigma' = 0$.

Es claro que $\operatorname{Im}\sigma \subseteq eTe$ y que $\operatorname{Im}\sigma' \subseteq e'Te'$, luego $\operatorname{Im}\sigma = eTe$ y $\operatorname{Im}\sigma' = e'Te'$, así que e y e' son centrales en T.

El tercer inciso se sigue de la centralidad y ortogonalidad de e y e'.

Puesto que $L \cong eL \oplus e'L$ y $N \cong eN \oplus e'N$ como T–módulos, tenemos que

$$Ext_T(N, L) \cong Ext_T(eN, eL) \oplus Ext_T(e'N, eL) \oplus Ext_T(eN, e'L) \oplus Ext_T(e'N, e'L).$$

Como las sucesiones exactas de T–módulos de la forma

$$0 \rightarrow eL \rightarrow M \rightarrow e'N \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow e'L \rightarrow M \rightarrow eN \rightarrow 0$$

se dividen, tenemos que

$$Ext_T(N,L) \cong Ext_T(eN,eL) \oplus Ext_T(e'N,e'L) \cong Ext_{eT}(eN,eL) \times Ext_{e'T}(e'N,e'L)$$

■

Definición 32. *Sean $\mathcal{A}_1 = (R_1, W^1, \delta_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (R_2, W^2, \delta_2)$ bocses. El bocs producto de $\mathcal{A}_1$ por $\mathcal{A}_2$, denotado por $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, es la terna (R, W, δ) donde $R = R_1 \times R_2$ es la $k-$álgebra producto de R_1 por R_2, $W = W^1 \oplus W^2$, donde $W_i = W_i^1 \oplus W_i^2$, para $i \in \{0,1\}$, y cada W_i^j tiene la estructura natural de $R-R-$bimódulo determinada por su estructura de $R_j - R_j-$bimódulo, y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es la diferencial que se obtiene extendiendo, de acuerdo con el lema II.31, el morfismo de $R-$bimódulos*

$$W = W^1 \oplus W^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}} T_{R_1}(W_1) \oplus T_{R_2}(W_2) \cong T_R(W).$$

Proposición 33. *Sean $\mathcal{A}_1 = (R_1, W^1, \delta_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (R_2, W^2, \delta_2)$ bocses. Entonces*

$$Rep\mathcal{A}_1 \times Rep\mathcal{A}_2 \cong Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Demostración: Sean e_1 y e_2 los idempotentes canónicamente asociados a $R = R_1 \times R_2$. Por el lema II.31.2 tenemos que hay un isomorfismo de $k-$álgebras $\sigma_1 \times \sigma_2 : T_{e_1R}(e_1We_1) \times T_{e_2R}(e_2We_2) \to T_R(W)$, el cual también puede ser considerado como un isomorfismo de $R-R-$bimódulos $\sigma_1 \oplus \sigma_2 : T_{e_1R}(e_1We_1) \oplus T_{e_2R}(e_2We_2) \to T_R(W)$. Más aún, para $j \in \{1,2\}$, tenemos que σ_j es un morfismo de $A(\mathcal{A}_j)-$álgebras.

Para $j \in \{1,2\}$ hay, siguiendo la notación del lema anterior, los morfismos de $k-$álgebras

$$\begin{array}{ccc} T_R(W) & \stackrel{\eta_j}{\to} & T_{R_1}(W^j) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta_j} \\ T_R(W) & \stackrel{\eta_j}{\to} & T_{R_1}(W^j). \end{array}$$

Los morfismos de $k-$álgebras mostrados inducen morfismos de bocses

$$F_{\eta_j} : RepA_j \to Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Por II.11 cada uno de estos funtores es un encaje.

Definamos ahora funtores

$$F_{\sigma_j} : Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \to RepA_j.$$

Sean $M, N \in Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Sean $A = A(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ y $V = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Definimos $F_{\sigma_j}(M) = e_jM$ como R_j-módulo. Notemos que e_jM tiene una estructura canónica como $A(\mathcal{A}_j)-$módulo, pues, por el lema anterior, $T_R(W) \otimes_R e_jM \cong T_{R_j}(W^j) \otimes_{R_j} e_jM$.

También por el lema anterior tenemos que $f^0 \cong f_1^0 \times f_2^0$ donde $f_j^0 : e_jM \to e_jN$ es el R_j-morfismo obtenido por restricción de f^0.

Por otra parte $f^1\sigma_j : V(\mathcal{A}_j) \to (M, N)_k$ es un morfismo de $A(\mathcal{A}_j)-A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos, el cual induce de manera canónica un morfismo de $A(\mathcal{A}_j) - A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos $f_j^1 : V(\mathcal{A}_j) \to (e_jM, e_jN)_k$.

Así que definimos $F_{\sigma_j}(f) = \left(f_j^0, f_j^1\right)$.

Por construcción de δ tenemos diagramas conmutativos de $A(\mathcal{A}_j)-A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos

$$\begin{array}{ccc} T_R(W) & \stackrel{\sigma_j}{\leftarrow} & T_{R_1}(W^j) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta_j} \\ T_R(W) & \stackrel{\sigma_j}{\leftarrow} & T_{R_1}(W^j). \end{array}$$

Luego, para $a \in A(\mathcal{A}_j)$ y $m_j \in e_jM$, se cumple que

$$\begin{aligned} f_j^1(\delta_j(a))[m_j] &= f_j^1\left(\eta_j\delta\sigma_j(a)\right)[m_j] = f^1(\delta\sigma_j(a))[m_j] \\ &= \sigma_j(a) f^0(m_j) - f^0(\sigma_j(a) m_j) \\ &= af_j^0(m_j) - f_j^0(am_j). \end{aligned}$$

De la construcción de F_{η_j} y F_{σ_j} es inmediato que $F_{\sigma_j}F_{\eta_j} = Id_{RepA_j}$ y, para $i \neq j$, que $F_{\sigma_i}F_{\eta_j} = 0_{RepA_i}$.

También es fácil convencerse de que $(F_{\sigma_1} \times F_{\sigma_2})\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right) = Id_{RepA_1 \times RepA_2}$, luego F_{σ_j} es un funtor, y $\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right) : RepA_1 \times RepA_2 \to Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ es un isomorfismo de categorías.

■

Capítulo III
Funtores de Reducción.

Dado un bocs $\mathcal{A}$, entenderemos por un funtor de reducción a un funtor fiel y pleno $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$, donde $\mathcal{B}$ es un bocs que en cierto sentido es más simple que $\mathcal{A}$. El propósito de este capítulo es describir explícitamente a cuatro funtores de reducción y obtener algunas de sus propiedades importantes. Dichos funtores son: Eliminación de idempotentes, Regularización, Absorción y Reducción.

III.1 Eliminación de idempotentes y regularización.

Lema 1. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea (η_R, η_W), con $\eta_R : R \to R'$ un morfismo de $k-$álgebras y $\eta_W : W \to W' = W_0' \oplus W_1'$ un morfismo de $R-R-$bimódulos, un par graduado como en la definición II.9. Sea $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ el morfismo de álgebras graduadas inducido. Supongamos que η_R y η_W son suprayectivos y*

$$\eta\left(\delta\left(\ker \eta_W\right)\right) = 0.$$

Entonces:

1. *Existe δ' tal que $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ es un bocs y η es un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es triangular entonces $\mathcal{A}'$ es triangular.*

Demostración:

1. Si η_R y η_W son morfismos suprayectivos entonces el morfismo de álgebras graduadas $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ también. Por construcción, $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ es un morfismo homogéneo de grado cero multiplicativo.

   La hipótesis nos asegura la existencia de un morfismo de $R' - R'-$bimódulos δ_0', tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\eta_W"] & T_R(W) \arrow[d, "\eta"] \\ W' \arrow[r, "\delta_0'"] & T_{R'}(W') \end{tikzcd}.$$

Se cumple que $\delta_0'(W_0') \subseteq [T_{R'}(W')]_1$ y $\delta_0'(W_1') \subseteq [T_{R'}(W')]_2$ pues η es homogéneo de grado cero. Luego, podemos aplicar la proposición II.6 y asegurar la existencia de una diferencial $\delta' : T_{R'}(W') \to T_{R'}(W')$. Por la fórmula de la observación II.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta'\eta\left(\otimes_{i=1}^{n} w_i\right) \\
= \; & \delta'\left(\otimes_{i=1}^{n} \eta\left(w_i\right)\right) \\
= \; & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(\eta(w_l))}\left(\otimes_{l=1}^{j-1}\eta\left(w_l\right)\right) \otimes \delta'\eta\left(w_j\right) \otimes \left(\otimes_{t=j+1}^{n}\eta\left(w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(\eta(w_l))}\left(\otimes_{l=1}^{j-1}\eta\left(w_l\right)\right) \otimes \eta\delta\left(w_j\right) \otimes \left(\otimes_{t=j+1}^{n}\eta\left(w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \eta\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)}\left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes \delta\left(w_j\right) \otimes \left(\otimes_{t=j+1}^{n} w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \eta\delta\left(\otimes_{i=1}^{n} w_i\right),
\end{aligned}$$

luego $\delta'\eta = \eta\delta$.

Finalmente notemos que $\left(\delta'\right)^2 \eta = \eta\delta^2 = 0$ implica que $\left(\delta'\right)^2 = 0$, pues η es un morfismo suprayectivo.

2. Sean $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq W_1^2 \subseteq \ldots \subseteq W_1^s = W_1$ las filtraciones que hacen triangular a $\mathcal{A}$.

   Tenemos entonces que

   - $0 = \eta\left(W_0^0\right) \subseteq \eta\left(W_0^1\right) \subseteq \ldots \subseteq \eta\left(W_0^r\right) = \eta\left(W_0\right) = W_0'$.
   - $\delta'\left(\eta\left(W_0^i\right)\right) = \eta\left(\delta\left(W_0^i\right)\right) \subseteq \eta\left(A_{i-1}\hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{i-1}\right)$
     $= \eta\left(A_{i-1}\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(W_1\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(A_{i-1}\right)$, lo que es la propiedad buscada, pues $\eta\left(A_{i-1}\right)$ es la subálgebra de $A(\mathcal{A}')$ generada por $\eta\left(W_0^{i-1}\right)$.
   - $0 = \eta\left(W_1^0\right) \subseteq \eta\left(W_1^1\right) \subseteq \ldots \subseteq \eta\left(W_1^s\right) = \eta\left(W_1\right) = W_1'$
   - $\delta'\left(\eta\left(W_1^i\right)\right) = \eta\left(\delta\left(W_1^i\right)\right) \subseteq \eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\hat{\otimes}_R\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)$
     $= \eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)$, lo que es la propiedad buscada, pues
     $\eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right) = \left\langle\eta\left(W_1^{i-1}\right)\right\rangle_{A(\mathcal{A}')}$.

   Así que $\mathcal{A}'$ es triangular.

■

Proposición 2. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses. Sea η un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$ inducido por el par graduado (η_R, η_W), donde η_R y η_W son morfismos suprayectivos. Entonces:*

1. *Hay un encaje $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$.*
2. *La imagen de F_η es una subcategoría de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M que son anulados por $R \cap \ker \eta$ y por $W_0 \cap \ker \eta$.*
3. *F_η está enmarcado por el par (F_0, η_F), donde $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ es el funtor restricción de escalares vía $\eta_R : R \to R'$, y $\eta_F((f_0, f_1)) = \left(f_0, f_1 \eta_{|W_1}\right)$.*
4. *Sean $M, N \in \operatorname{Im} F_\eta$, si para todo morfismo $(g^0, g^1) : M \to N$ en $Rep\mathcal{A}$ se satisface que*
$$g^1 (W_1 \cap \ker \eta) = 0,$$
entonces F_η es pleno.
5. *Si F_η es pleno y se cumple el axioma II.30.5, entonces el que $\mathcal{A}$ sea un bocs K-R implica que $\mathcal{A}'$ es un bocs K-R.*

Demostración:

1. Sea F_η como en el lema II.11, es decir, si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $(F_\eta(f))^0$ es f^0 considerado como R–morfismo, y $(F_\eta(f))^1 = f^1\eta^1$. Como η es suprayectivo, del mismo lema se sigue que F_η es un encaje.
2. Sea $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ el funtor del tercer inciso. Es claro que la imagen de F_0 consta de los R–módulos anulados por $\ker \eta_R$.

   Sea $M \in Rep\mathcal{A}'$, por construcción de F_η tenemos que M es un $A(\mathcal{A})$–módulo con
$$am = \eta(a)\, m,$$
   donde $m \in M$ y $a \in A(\mathcal{A})$. Luego, es claro que $\ker \eta_R$ y $W_0 \cap \ker \eta_W$ anulan a ${}_{A}M = F_\eta(M)$.

   Ahora supongamos que $M \in Rep\mathcal{A}$ es anulado por $\ker \eta_R$ y que $W_0 \cap \ker \eta_W$. Como η_R es suprayectivo, el funtor F_0 es un encaje pleno, cuya imagen consiste de los R–módulos anulados por $\ker \eta_R$. De modo que ${}_{R}M$ se obtiene por restricción de escalares de un módulo ${}_{R'}M$.

   Ahora bien, la acción del álgebra $T_R(W_0)$ sobre M determina un morfismo de $R - R$–bimódulos

$$\theta \in Hom_{R-R}(W_0, (M,M)_k) \cong Hom_{R-k}(W_0 \otimes_R M, M).$$

Sea $\eta_W^0 : W_0 \to W_0'$ la restricción de η_W. Entonces, $\ker \eta_W^0 = W_0 \cap \ker \eta_W$. La hipótesis de que $\ker \eta_W^0$ anula a M significa que $\theta(\ker \eta_W^0) = 0$. Luego existe θ'', morfismo de $R-R$–bimódulos, tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\eta_W^0} & W_0' \\ \downarrow^{\theta} & & \downarrow^{\theta''} \\ (M,M)_k & = & (M,M)_k \end{array}$$

Sea $\theta' : W_0' \to (M,M)_k$ el morfismo de $R'-R'$–bimódulos que corresponde a θ'' bajo el morfismo identidad

$$Hom_{R'-R'}(W_0', (M,M)_k) = Hom_{R-R}(W_0', (M,M)_k).$$

Este morfismo θ' determina una estructura de $T_{R'}(W_0')$ –módulo sobre $_{R'}M$ tal que $F_\eta({}_{\mathcal{A}'}M) = {}_{\mathcal{A}}M$.

3. Se sigue del lema II.30.

4. Sea $g = (g^0, g^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $F_\eta({}_{\mathcal{A}'}M) = {}_{\mathcal{A}}M$ y $F_\eta({}_{\mathcal{A}'}N) = {}_{\mathcal{A}}N$. Sea $\eta_W^1 : W_1 \to W_1'$ la restricción de η_W, luego $W_1 \cap \ker \eta = \ker \eta_W^1$.

   Como η_R es suprayectiva, tenemos que

   $$Hom_{R-R}(W_1', (M,N)_k) = Hom_{R'-R'}(W_1', ({}_{R'}M, {}_{R'}N)_k).$$

   Dada la hipótesis de este inciso hay un isomorfismo

   $$(\eta_W^1)^* : Hom_{R-R}(W_1', (M,N)_k) \to Hom_{R-R}(W_1, (M,N)_k),$$

   es decir, que $g^1_{|W^1} = f_1 \eta_W^1$ para algún f_1 en $Hom_{R'-R'}(W_1', ({}_{R'}M, {}_{R'}N)_k)$. Sea β el isomorfismo de II.17, construimos el par $(g^0, \beta^{-1}(f_1))$, donde g^0 es visto como morfismo de R'–módulos.

   Veamos que $f = (g^0, \beta^{-1}(f_1)) : {}_{\mathcal{A}'}M \to {}_{\mathcal{A}'}N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$. Sea $a' \in A(\mathcal{A}')$, $m \in M$ y $\eta(a) = a'$ para algún $a \in A(\mathcal{A})$, entonces

$$\begin{aligned} a'(g^0(m)) - g^0(a'm) &= a(g^0(m)) - g^0(am) \\ &= g^1(\delta(a))[m] \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos, para $\delta(a) = \sum_i a_i^1 \otimes w_i \otimes a_i^1$ con $w_i \in W_1$ y $a_i^1, a_i^2 \in A(\mathcal{A})$, que

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(f_1)(\delta'(\eta(a)))[m] &= \beta^{-1}(f_1)(\eta\delta(a))[m] \\ &= \beta^{-1}(f_1)\left(\textstyle\sum_i \eta(a_i^1) \otimes \eta(w_i) \otimes \eta(a_i^2)\right)[m] \\ &= \textstyle\sum_i \eta(a_i^1)(f_1\eta_W^1)(w_i)[\eta(a_i^2)m] \\ &= \textstyle\sum_i \eta(a_i^1)\left(g_{|W^1}^1\right)(w_i)[\eta(a_i^2)m] \\ &= g^1\left(\textstyle\sum_i \eta(a_i^1) \otimes w_i \otimes \eta(a_i^2)\right)[m] \\ &= g^1(\delta(a))[m]. \end{aligned}$$

Así, f es un $A(\mathcal{A}')$ −morfismo y $F_\eta(f) = g$. Luego F_η es pleno.

5. Hemos demostrado la inyectividad de η_F, y es claro que se cumple el axioma II.30.3. Como F_0 es un encaje pleno, se cumple II.30.4. Las hipótesis de este inciso son II.30.1 y II.30.5, por lo que del lema II.30 se sigue el enunciado.

■

Teorema 3. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea e un idempotente de R tal que y $eR(1-e) = (1-e)Re = 0$. Entonces:*

1. *Existen un bocs $\mathcal{A}_e = (eRe, eWe, \delta_e)$, y un encaje pleno $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ que llamaremos* **eliminación de idempotentes.**

2. *La imagen de F_e es la subcategoría plena constituida por aquellos objetos M tales que $(1-e)M = 0$.*

3. *Si $\mathcal{A}$ es triangular (aditivo) entonces $\mathcal{A}_e$ es triangular (aditivo).*

4. *Si $\mathcal{A}$ es K-R entonces $\mathcal{A}_e$ es K-R.*

5. *Si $M' \in rep\mathcal{A}_e$ y $\hat{W}$ es un $R-R$−subbimódulo de W_0, entonces $\|M'\|_{e\hat{W}e} = \|F_e(M')\|_{\hat{W}}$ y $q_{\mathcal{A}_e}(M') = q_{\mathcal{A}}(F_e(M'))$.*

Demostración: Sean $e_1 = e$ y $e_2 = (1-e)$. En general, esta descomposición de la unidad de R en idempotentes induce descomposiciones de $R-R$−bimódulos

$$W_0 = e_1W_0e_1 \oplus e_1W_0e_2 \oplus e_2W_0e_1 \oplus e_2W_0e_2 \text{ y}$$
$$W_1 = e_1W_1e_1 \oplus e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2.$$

Sean $A = A(\mathcal{A})$, $R' = e_1Re_1$, $W_0' = e_1W_0e_1$, $W_1' = e_1W_1e_1$ y $W' = e_1W_1e_1$. Las proyecciones $\eta_R : R \to R'$ y $\eta_W : W \to e_1We_1$ son, gracias a que $eR(1-e) = (1-e)Re = 0$, un morfismo de anillos y un morfismo de $R-R$–bimódulos respectivamente, es decir, forman un par graduado. Luego hay un morfismo de k–álgebras $\eta : T_R(W) \to T_{e_1Re_1}(e_1We_1)$.

Se cumplen las hipótesis del lema III.1 pues

$$\begin{aligned}&\eta(\delta(W_0 \cap \ker \eta_W))\\ &= \eta(\delta(e_1W_0e_2 \oplus e_2W_0e_1 \oplus e_2W_0e_2))\\ &\subseteq \eta\left(\left[e_1A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_2\right] \oplus \left[e_2A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_1\right] \oplus \left[e_2A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_2\right]\right) = 0,\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}&\eta(\delta(W_1 \cap \ker \eta_W))\\ &= \eta(\delta(e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2))\\ &\subseteq \eta\left(\left[e_1V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_2\right] \oplus \left[e_2V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_1\right] \oplus \left[e_2V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_2\right]\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así que por III.1.1 hay un bocs $\mathcal{A}' = (e_1Re_1, e_1We_1, \delta')$, y un morfismo η del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$. Luego, por III.2, existe un encaje $F_e = F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$.

Por III.2.2 la imagen de F_e se compone de aquellos objetos $M \in Rep\mathcal{A}$ que son anulados por $R \cap \ker \eta$ y por $W_0 \cap \ker \eta$. Ahora bien, es claro que un R–módulo M es anulado por $R \cap \ker \eta$ si y sólo si $e_2M = 0$. Más aún, si $e_2M = 0$ entonces $W_0 \cap \ker \eta$ anula a M. Esto prueba que la imagen de F_e es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $e_2M = 0$.

Por observación II.2.1 $\operatorname{Im} F_e$ es cerrada bajo isomorfismos en $Rep\mathcal{A}$.

Más aún, si $M, N \in \operatorname{Im} F_\eta$ y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, tenemos que, para $w \in e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2 = W_1 \cap \ker \eta$ y $m \in M$

$$f^1(w)[m] = e_1(f^1(w)[e_1m]) = f^1(e_1we_1)[m] = 0.$$

Así que se cumple la condición III.2.4, por lo que F_e es pleno.

Por III.1.2 la triangularidad de $\mathcal{A}$ implica la de $\mathcal{A}'$.

Ahora bien, si $\mathcal{A}$ triangular aditivo, y $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$ como $R-R$–bimódulos para $i \in \{1, ..., r-1\}$, entonces $e_1W_0^{i+1}e_1 = e_1W_0^ie_1 \oplus e_1V_ie_1 = \eta(W_0^i) \oplus e_1V_ie_1$, por lo que $\mathcal{A}_e$ es triangular aditivo.

Como $\operatorname{Im} F_e$ es cerrada bajo isomorfismos en $Rep\mathcal{A}$ se sigue cumple el axioma II.30.5, así que por III.2.5, si $\mathcal{A}$ un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_e$ es un bocs K-R.

Sea $F_e(M') = M$. Tenemos que

$$\|M\| = \dim_k({}_R(M,M)) = \dim_k({}_{e_1Re_1}(M,M)) = \dim_k({}_{e_1Re_1}(M',M')) = \|M'\|.$$

Para $\hat{W}$ un $R-R$–subbimódulo de W se cumple que $\hat{W} \cap \ker \eta = e_1\hat{W}e_2 \oplus e_2\hat{W}e_1 \oplus e_2\hat{W}e_2$, luego

$$
\begin{aligned}
\|M\|_{\hat{W}} &= \dim_k \left({}_R\left(\hat{W} \otimes_R M, M\right)\right) \\
&= \dim_k \left({}_R\left(\left(\left(\hat{W} \cap \ker \eta\right) \oplus e_1\hat{W}e_1\right) \otimes_R M, M\right)\right) \\
&= \dim_k \left({}_R\left(\left(\hat{W} \cap \ker \eta\right) \otimes_R M, M\right)\right) + \dim_k \left({}_R\left(e_1\hat{W}e_1 \otimes_R M, M\right)\right) \\
&= 0 + \dim_k \left({}_{e_1Re_1}\left(e_1\hat{W}e_1 \otimes_{e_1Re_1} M', M'\right)\right) \\
&= \|M'\|_{e_1\hat{W}e_1}.
\end{aligned}
$$

Por las identidades anteriores se sigue que $M' \in rep_0\mathcal{A}_e$ si y sólo si $M \in rep_0\mathcal{A}$, y que

$$q_A(M) = \|M\| - \|M\|_0 + \|M\|_1 = \|M'\| - \|M'\|_0 + \|M'\|_1 = q_{\mathcal{A}_e}(M').$$

■

Teorema 4. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sean*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & W_0^{(1)} & \to & W_0 & \xrightarrow{\pi_0} & W_0^{(2)} & \to & 0 \\
0 & \to & W_1^{(1)} & \to & W_1 & \xrightarrow{\pi_1} & W_1^{(2)} & \to & 0
\end{array}
$$

sucesiones exactas de $R-R$–bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = W_1^{(1)}$. Entonces:

1. *Existe un bocs $\mathcal{A}_r = \left(R, W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)}, \delta_r\right)$, y un encaje pleno $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ al que llamaremos* **regularización.** *Si $M' \in rep\mathcal{A}_r$ entonces $F_r(M') \in rep\mathcal{A}$.*

2. *La imagen de F_r es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $W_0^{(1)}$ anula a M.*

3. *Si $\mathcal{A}$ es triangular entonces $\mathcal{A}_r$ es triangular.*

4. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R.*

5. *Sea $\mathcal{A}$ triangular y $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ una de las filtraciones asociada a la triangularidad. Si $\mathcal{A}$ es triangular aditivo y $W_0^{(1)} \subseteq W_0^1$, entonces $\mathcal{A}_r$ es triangular aditivo.*

Demostración: La identidad $\eta_R : R \to R$ y el epimorfismo $\eta_W = \pi_0 \oplus \pi_1 : W_0 \oplus W_1 \to W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)} = W^{(2)}$ forman un par graduado. Sea $\eta : T_R(W) \to T_R\left(W^{(2)}\right)$ el morfismo de $k-$álgebras inducido. La hipótesis del lema III.1 se sigue de que $\eta\left(\delta\left(W_0^{(1)}\right)\right) = \eta\left(W_1^{(1)}\right) = 0$, y de que
$\eta\left(\delta\left(W_1^{(1)}\right)\right) = \eta\left(\delta^2\left(W_0^{(1)}\right)\right) = 0$. Luego hay un bocs $\mathcal{A}' = (R, W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)}, \delta')$ y η es un morfismo de bocses. Por III.2.1, $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ es un encaje. Denotemos a este caso particular de F_η como F_r, y a $\mathcal{A}'$ como $\mathcal{A}_r$.

Por III.2.2, la imagen de F_r está constituida por aquellos objetos de $Rep\mathcal{A}$ que son anulados por $W_0^{(1)}$.

Sean $M = F_r(M')$, $N = F_r(N')$ y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Puesto que para todo $w \in W_1^{(1)}$ existe $a \in W_0^{(1)}$ tal que $\delta(a) = w$, se tiene para toda $m \in M$ la identidad $f^1(w)[m] = f^1(\delta(a))[m] = af^0(m) - f^0(am) = 0$, pues M y N son anulados por $W_0^{(1)}$. Luego se cumple la condición de lema III.2.4, por lo que F_r es pleno.

La triangularidad de $\mathcal{A}$ implica la triangularidad de $\mathcal{A}_r$ por III.1.2.

Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Sean $M \in Rep\mathcal{A}$ y $N = F_r(N')$. Supongamos que $f^0 \in_R (M, N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}\left(W_1^{(2)}, (M, N)_k\right)$ son tales que $(f^0, f^1\pi_1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$. Por observación II.2.1 f^0 es un isomorfismo. Tenemos para $a \in W_0^{(1)}$ que

$$f^0(am) = af^0(m) - f^1\eta(\delta(a))[m] = -f^1(0)[m] = 0,$$

luego $W_0^{(1)}$ anula a M, así que $M \in \operatorname{Im} F_r$.

Similarmente, si $f^0 \in_R (N, M)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}\left(W_1^{(2)}, (N, M)_k\right)$ son tales que $(f^0, f^1\pi_1) : N \to M$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$. Tenemos para $a \in W_0^{(1)}$ que

$$af^0(n) = f^0(an) + f^1\eta(\delta(a))[n] = f^1(0)[n] = 0$$

luego $W_0^{(1)}$ anula a M, así que $M \in \operatorname{Im} F_r$.

Con esto hemos verificado el axioma II.30.5. Por III.2.5 $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R.

Demostremos el último inciso. Como se vió en la prueba de III.1.2, la filtración en grado cero asociada a $\mathcal{A}_r$ es $0 = \eta(W_0^0) \subseteq \eta(W_0^1) \subseteq \ldots \subseteq \eta(W_0^r) = \eta(W_0) = W_0'$. Si para cada $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ hay una descomposición como $R-R-$bimódulos $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$, entonces $W_0^{i+1} = W_0^1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_i$ como $R-R-$bimódulos. Luego, si $W_0^{(1)} \subseteq W_0^1$ entonces $\eta\left(W_0^{i+1}\right) = \left(W_0^1 / W_0^{(1)}\right) \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_i$, así que $\eta\left(W_0^{i+1}\right) = \eta\left(W_0^i\right) \oplus V_i$.

■

Proposición 5. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ el funtor regularización como en el teorema anterior. Sean $\hat{W}$ un $R-R$–sub-bimódulo de W, $\hat{W}^{(2)} = \eta\left(\hat{W}\right)$, $\hat{W}^{(1)} = \left(\ker\eta \cap \hat{W}\right)$, $M' \in Rep\mathcal{A}_r$ y $F_r(M') = M$. Si para $\hat{W}$ se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0 \ (*)$$

entonces $\|M'\|_{\hat{W}} \leq \|F_r(M')\|_{\hat{W}^{(2)}}$, y la desigualdad estricta se obtiene si y sólo si ${}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$.

Si para cada $\hat{W} \in \{R, W_0, W_1\}$ se tienen sucesiones exactas como $(*)$, entonces $q_{\mathcal{A}_r}(M') \geq q_{\mathcal{A}}(F_r(M'))$, obteniéndose la igualdad si y sólo si $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es biyectivo.

Si R es semisimple, para todo $R-R$–bimódulo $\hat{W}$ la sucesión $(*)$ es exacta.

Demostración: De la sucesión exacta

$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|M\|_{\hat{W}} &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W} \otimes_R M, M\right)\right) \\ &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) + \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ &\geq \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) = \|M'\|_{\hat{W}^{(2)}}. \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) = 0$.

Ahora supongamos la existencia de sucesiones exactas similares para R, W_0 y W_1.

El epimorfismo $\delta \otimes I : W_0^{(1)} \otimes_R M \to W_1^{(1)} \otimes_R M$ induce un monomorfismo ${}_R\left(W_1^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)$, luego

$$\begin{aligned} & \dim_k\left({}_R\left(W_0 \otimes_R M, M\right)\right) - \dim_k\left({}_R\left(W_0^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ = \ & \dim_k\left({}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) \geq \dim_k\left({}_R\left(W_1^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ = \ & \dim_k\left({}_R\left(W_1 \otimes_R M, M\right)\right) - \dim_k\left({}_R\left(W_1^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right), \end{aligned}$$

por lo que $q_{\mathcal{A}}(M) \leq q_{\mathcal{A}_r}(M')$, y la igualdad se obtiene sólo si $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es biyectivo.

Si R es semisimple, se tienen, para cualquier $R-R$–bimódulo $\hat{W}$, las sucesiones exactas

$$0 \to \hat{W}^{(1)} \to \hat{W} \to \hat{W}^{(2)} \to 0$$
$$0 \to \hat{W}^{(1)} \otimes_R M \to \hat{W} \otimes_R M \to \hat{W}^{(2)} \otimes_R M \to 0$$
$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0$$

■

Lema 6. *Sea R una $k-$álgebra semisimple y sean M, N un par de $R-$módulos, entonces $(M,N)_k$ es un $R-R-$bimódulo inyectivo.*

Demostración: Sea $0 \to V \to W \to Z \to 0$ una sucesión exacta arbitraria de $R-R-$bimódulos. Por la semisimplicidad de R se tienen las sucesiones exactas

$0 \to V \otimes_R M \to W \otimes_R M \to Z \otimes_R M \to 0$ de $R-k-$bimódulos y

$0 \to_R (Z \otimes_R M, N)_k \to_R (W \otimes_R M, N)_k \to_R (V \otimes_R M, N)_k \to 0$ de grupos.

Aplicando el isomorfismo de adjunción se sigue que la sucesión

$$0 \to_R (Z, (M,N)_k)_R \to_R (W, (M,N)_k)_R \to_R (V, (M,N)_k)_R \to 0$$

también es exacta.

■

Proposición 7. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sean $0 \to W_0^{(1)} \to W_0 \to W_0^{(2)} \to 0$ y $0 \to W_1^{(1)} \to W_1 \to W_1^{(2)} \to 0$ sucesiones exactas de $R-R-$bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = W_1^{(1)}$. Supongamos que*

1. *R es semisimple o que*
2. *$W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ como $R-R-$bimódulos.*

Si $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ es el funtor regularización asociado, entonces $M \in Rep\mathcal{A}$ es isomorfo a un objeto de $\operatorname{Im} F_r$ si y sólo si es anulado por $(\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$.

Demostración: Sea M' igual a M considerado como $R-$módulo. Si $(\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$ anula a M, entonces podemos definir un morfismo de $R-R-$bimódulos $f_1^1 : W_1^{(1)} \to (M', M)_k$ mediante la fórmula $f^1(\delta(a))[m] = am$. Si R es semisimple, por el lema anterior, podemos extender f_1^1 a $f^1 : W_1 \to (M', M)_k$. Si $W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ extendemos f_1^1 a f^1 definiendo $f^1((w_1, w_2)) = f_1^1(w_1)$. De II.22.1 y II.25 se sigue que hay un isomorfismo $f = (Id, f^1) : M' \to M$ en $Rep\mathcal{A}$. Por construcción tenemos que si $w \in W_0^{(1)}$ entonces $wId(m) = Id(wm) + f^1(\delta(w))[m] = Id(wm) + wId(m)$, por lo tanto $wm = 0$, es decir, $W_0^{(1)}$ anula a M'. Así que, por III.4.2 M' está en $\operatorname{Im} F_r$.

Supongamos que hay un isomorfismo $(f^0, f^1) : M \to N = F_r(N')$. Por III.4.2 $W_0^{(1)}$ anula a N, y por observación II.2.1 f^0 es un isomorfismo. Sea $w \in (\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$, entonces

$$f^0(wm) = wf^0(m) - f^1(\delta(w))[m] = 0$$

implica que $(\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$ anula a M.

■

III.2 Absorción.

Proposición 8. *Sea* $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ *un bocs tal que* $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$ *y* $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, *entonces:*

1. *Hay un nuevo bocs* $\mathcal{A}_\theta = (R', W', \delta')$, *donde*

$$R' = T_R\left(W_0^{(1)}\right), \; W_0' = R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R', \; W_1' = R' \otimes_R W_1 \otimes_R R',$$

y un isomorfismo de bocses θ *de* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{A}_\theta$.

2. *El funtor asociado por II.11* $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$, *al que en este caso llamaremos* **absorción**, *es un isomorfismo de categorías.*

3. *Sea* $\hat{W}_0$ *un sub-bimódulo de* W_0 *tal que* $\hat{W}_0 = \hat{W}_0^{(1)} \oplus \hat{W}_0^{(2)}$, *donde* $\hat{W}_0^{(1)} \subseteq W_0^{(1)}$ *y* $\hat{W}_0^{(1)} \subseteq W_0^{(2)}$, *y sean* $M' \in Rep\mathcal{A}_\theta$ *y* $M = F_\theta(M')$. *Entonces se cumple que* $\|M'\|_{T\otimes_R \hat{W}_0^{(2)} \otimes_R T} \leq \|M\|_{\hat{W}}$, *con desigualdad estricta si y sólo si* ${}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$, *y* $q_{A_1}(M') \geq q_A(M)$.

4. *Si* $\mathcal{A}$ *es triangular entonces* $\mathcal{A}_\theta$ *es triangular.*

5. *Si* $\mathcal{A}$ *es K-R entonces* $\mathcal{A}_\theta$ *es K-R.*

Demostración:

1. Sea $\theta_R : R \to R'$ la inclusión, el cual es un morfismo de anillos. Sean los morfismo de $R-R-$bimódulos $\theta_W^{0,1} : W_0^{(1)} \to R'$, el cual es la inclusión canónica, $\theta_W^{0,2} : W_0^{(2)} \to R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R'$, dado por $\theta_W^{0,2}(w) = 1 \otimes w \otimes 1$, y $\theta_W^1 : W_1^{(1)} \to R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'$, dado por $\theta_W^1(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Por lema II.2 estos morfismos inducen un único morfismo de anillos $\theta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$.

   Consideremos los morfismos canónicos $\vartheta_{R'} : R' \to T_R(W_0)$, de anillos, $\vartheta_{W'}^0 : R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R' \to T_R(W)$ y $\vartheta_{W'}^0 : R' \otimes_R W_1 \otimes_R R' \to T_R(W)$ de $R-R-$bimódulos. Por lema II.2 estos morfismos inducen un único morfismo de anillos $\vartheta : T_{R'}(W') \to T_{A(\mathcal{A})}(A(\mathcal{A}) \otimes_R W_0 \otimes_R A(\mathcal{A})) = \mathcal{F}$.

   Es un cálculo rutinario verificar que $\vartheta\theta_{|R} = Id_R$, que $\vartheta\theta_{|W_0}$ es la inclusión canónica de W_0 en $\mathcal{F}$, y que para $w \in W_1$ se tiene $\vartheta\theta(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Luego $\vartheta\theta = \nu : T_R(W) \to \mathcal{F}$ es el isomorfismo de anillos construido en el lema II.4.2, así que θ es inyectivo.

   Tampoco es difícil convencerse de que θ es suprayectivo y que preserva la graduación, es decir que

$$\theta([T_R(W)]_i) = [T_{R'}(W')]_i.$$

   Definamos $\delta' = \theta\delta\theta^{-1}$, así que δ' es un morfismo de $R-R-$bimódulos. Es claro que δ' es de grado 1, que cumple la regla de Leibnitz, y que $(\delta')^2 = 0$.

   Mostremos ahora que δ' es un morfismo de $R'-R'-$bimódulos. Sea $z = \theta(\otimes_{i=1}^n w_i)$ la imagen de un elemento homogéneo de $T_R(W)$, sean $n_2, n_1 \in \{1, ..., n\}$ tales que $n_2 > n_1$, y $w_i \in W_0^{(1)}$ para $i \in \{1, ..., n_1\} \cup \{n_2, ..., n\}$. Puesto que $\delta(w_i) = 0$ y $gr(w_i) = 0$ para $i \in \{1, ..., n_1\} \cup \{n_2, ..., n\}$, por la fórmula de la observación II.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \delta'\theta(\otimes_{i=1}^n w_i) \\
= \; & \theta\delta(\otimes_{i=1}^n w_i) \\
= \; & \theta\left(\sum_{j=1}^n \left((-1)^{\left(\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)\right)} \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\sum_{j=(n_1+1)}^{n_2-1} \left((-1)^{\left(\sum_{l=(n_1+1)}^{j-1} gr(w_l)\right)} \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \delta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \left(\otimes_{n_2}^n w_t\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \theta\delta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \theta\left(\otimes_{n_2}^n w_t\right) \\
= \; & \theta\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \delta'\theta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \theta\left(\otimes_{n_2}^n w_t\right),
\end{aligned}$$

por lo que δ' es un morfismo de $R' - R'$–bimódulos, luego es una diferencial.

Puesto que θ es un isomorfismo de k–álgebras que preserva la graduación y conmuta con las diferenciales, es un isomorfismo de bocses.

2. Por II.11 existen los encajes $F_\theta : RepA_\theta \to RepA$ y $F_{\theta^{-1}} : RepA \to RepA_\theta$. Es inmediato que $F_{\theta^{-1}} = F_\theta^{-1}$.

3. Sean Z un $R - R$–bimódulo y $M \in RepA$. Notemos que R es un subanillo de R', y que $\theta_{|R} = Id_R$, por lo que $_R\left(F_\theta^{-1}(M)\right) =_R (M)$, así que tenemos isomorfismos

$$\begin{array}{rcl} _{R'}\left(R' \otimes_R Z \otimes_R R' \otimes_{R'} F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right) & \cong & _R\left(Z \otimes_R F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right) \\ & = & _R(Z \otimes_R M, M). \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \left\|F_\theta^{-1}(M)\right\|_{R'\otimes_R \hat{W}^{(2)}\otimes_R R'} & = & \dim_k\left(_{R'}\left(R' \otimes_R \hat{W}_0^{(2)} \otimes_R R' \otimes_{R'} F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right)\right) \\ & = & \dim_k\left(_R\left(\hat{W}_0^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ & = & \|M\|_{\hat{W}} - \dim_k\left(_R\left(\hat{W}_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right), \end{array}$$

por lo que $\left\|F_\theta^{-1}(M)\right\|_{R'\otimes_R \hat{W}_0^{(2)}\otimes_R R'} \leq \|M\|_{\hat{W}_0}$, y la desigualdad estricta se obtiene si y sólo si $_R\left(\hat{W}_0^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$.

Sea $\phi : W_0^{(1)} \otimes_R M \to M$ el R–morfismo determinado por la estructura de R'–módulo de $F_\theta^{-1}(M) = M'$. Se tiene una función k–lineal

$$\alpha :_R (M, M) \to_R \left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right) \text{ definida como } \alpha(f) = f\phi - \phi(I \otimes f).$$

Como el núcleo de α es $_{R'}(M', M')$ se sigue que

$$\dim_k(_R(M, M)) \leq \dim_k(_{R'}(M', M')) + \dim_k\left(_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right)$$

y por lo tanto que

$q_{A_\theta}(M') - q_A(M)$

$= \dim_k(_{R'}(M', M')) + \dim_k\left(_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) - \dim_k(_R(M, M)) \geq 0$

4. Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es triangular, y sean $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ las filtraciones asociadas. Sea $\pi_0 : W_0 \to W_0^{(2)}$ el epimorfismo canónico, y sean $(W')_0^i = \langle \theta(\pi_0(W_0^i)) \rangle_{R'}$, para $i \in \{0, ..., r\}$, y $(W')_1^j = \langle \theta(W_1^j) \rangle_{R'}$ para $j \in \{0, ..., s\}$. Entonces tenemos las filtraciones:

$$0 = (W')_0^0 \subseteq (W')_0^1 \subseteq ... \subseteq (W')_0^r = R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R',$$
$$0 = (W')_1^0 \subseteq (W')_1^1 \subseteq ... \subseteq (W')_1^s = R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'.$$

La R'–subálgebra de $A(\mathcal{A}_\theta)$ generada por $(W')_0^i$ será denotada por A'_{i+1}. Nótese que A'_{i+1} está generada por $\theta\left(W_0^{(1)} + (W_0^i)^{(2)}\right)$, por lo que contiene a la subálgebra generada por $\theta(W_0^i)$. Sea A_i la R–subálgebra de $A(\mathcal{A})$ generada por W_0^i, entonces tenemos que $\langle \theta(A_i) \rangle_{R'} \subseteq A'_i$. Por fin, podemos verificar las propiedades de las nuevas filtraciones:

- $\delta'\left((W')_0^i\right) = \left\langle \delta'\theta\left((W_0^i)^{(2)}\right)\right\rangle_{R'} = \left\langle \theta\delta\left((W_0^i)^{(2)}\right)\right\rangle$
  $\subseteq \langle \theta(A_{i-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{i-1}) \rangle_{R'} \subseteq \langle A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} W_1 \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1} \rangle_{R'}$
  $= A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} (R' \otimes_R W_1 \otimes_R R') \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1} = A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} W'_1 \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1}$.
- Denotemos por $W'(j)$ al $A(\mathcal{A}_\theta) - A(\mathcal{A}_\theta)$–sub-bimódulo generado por $(W')_1^j$. Luego
  $\delta'\left((W')_1^j\right) = \langle \delta'\theta(W_1^j) \rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})} \hat{\otimes}_R \langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\right\rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right) \hat{\otimes}_{R'} \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\right\rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle (W')_1^{j-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A}_\theta)} \hat{\otimes}_{R'} \left\langle (W')_1^{j-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A}_\theta)}$.

5. Sea $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ el funtor restricción inducido por $\theta_{|R} : R \to R'$. Sean $M, N \in R' - Mod$ y consideremos las funciones $f_0 \in_{R'} (M, N)$ y $f_1 \in Hom_{R'-R'}(W'_1, (M, N)_k)$. Como antes hay un isomorfismo

$$Hom_{R'-R'}(R' \otimes_R W_1 \otimes_R R', (M, N)_k) \cong Hom_{R-R}(W_1, (F_0(M), F_0(M))_k).$$

Si $g_0 = F_0(f_0)$, y g_1 es la imagen de f_1 bajo el isomorfismo anterior, entonces no es difícil verificar que $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$ es una función inyectiva y que (F_0, η_F) enmarcan a F_θ. Es claro que si f_0 es un isomorfismo entonces g_0 es un isomorfismo. La condición II.30.5 se sigue de $\operatorname{Im} F_\theta = Rep\mathcal{A}$. La condición II.30.4 se obtiene de la existencia de F_θ^{-1}. Luego, por II.30, si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_\theta$ es un bocs K-R.

■

III.3 Construcción del bocs $\mathcal{A}^X$ y del funtor reducción $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$

Definición 9. *Sean R y S k–álgebras. El módulo ${}_RX$ es llamado S–admisible si*

1. $\Gamma = ({}_R(X,X))^{op}$ *contiene a S como una subálgebra;*
2. Γ *contiene un ideal bilátero B tal que*

$$\Gamma = S \oplus B$$

como $S - S$–bimódulos; y

3. X_S *y* B_S *son proyectivos y finitamente generados.*

Recordemos que si B_S es proyectivo y finitamente generado, por el corolario I.12, hay un morfismo de $S - S$–bimódulos μ coasociativo, es decir que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B^* & \underset{\mu}{\longrightarrow} & B^* \otimes_S B^* \\ \downarrow^{\mu} & & \downarrow^{\mu\otimes 1} \\ B^* \otimes_S B^* & \underset{I\otimes\mu}{\longrightarrow} & B^* \otimes_S B^* \otimes_S B^* \end{array}$$

En los siguientes lemas estaremos considerando un módulo ${}_RX$ que sea S–admisible. Consideremos la evaluación $v : X \otimes_S B \to X$, dada por $v(x \otimes \rho) = \rho(x)$, la cual es un morfismo de $R - S$–bimódulos. Por lema I.9, como en la observación I.1, v induce el morfismo de $S - R$–bimódulos $a = \phi_2^{-1} v^* : X^* \longrightarrow B^* \otimes_S X^*$, tal que $a(\lambda) = \sum_i \gamma_i \otimes \lambda_i$ es el único elemento de $B^* \otimes_S X^*$ que satisface $\sum_i \gamma_i(\lambda_i(x)\rho) = \lambda(\rho(x))$, para todo $x \in X$ y toda $\rho \in B$.

Lema 10. $(\mu \otimes I)\, a = (I \otimes a)\, a$.

Demostración: El siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_S B \otimes_S B & \overset{I\otimes m}{\longrightarrow} & X \otimes_S B \\ \downarrow^{v\otimes I} & & \downarrow^{v} \\ X \otimes_S B & \underset{v}{\longrightarrow} & X \end{array}$$

pues $v\,(I \otimes m)\,(x \otimes \rho_1 \otimes \rho_2) = v\,(x \otimes (\rho_2 \cdot \rho_1)) = \rho_2 \cdot \rho_1\,(x)$ y
$v\,(v \otimes I)\,(x \otimes \rho_1 \otimes \rho_2) = v\,(\rho_1\,(x) \otimes \rho_2) = \rho_2\,(\rho_1\,(x))$. Así que por I.11 también el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{a} & B^* \otimes_S X^* \\ \downarrow^{a} & & \downarrow^{\mu \otimes I} \\ B^* \otimes_S X^* & \xrightarrow[I \otimes a]{} & B^* \otimes_S B^* \otimes_S X^* \end{array}$$

■

Consideremos nuevamente a la evaluación, pero ahora vista como el morfismo $R - S-$bimódulos $v' : X \to (B,X)_S$ dado por $v'(x)\,[\rho] = \rho\,(x)$. Por el lema I.5 hay un isomorfismo de bimódulos $\Phi_2^{-1} : (B,X)_S \to X \otimes_S B^*$, por lo que se induce un morfismo $\hat{e} : X \to X \otimes_S B^*$ tal que $\hat{e}\,(x) = \sum_t x_t \otimes \gamma_t$ es el único elemento de $X \otimes_S B^*$ que satisface $\sum_t x_t \gamma_t\,(\rho) = \rho\,(x)$ para toda ρ en B.

Lema 11. $(\hat{e} \otimes I)\,\hat{e} = (I \otimes \mu)\,\hat{e}$.

Demostración: Sean los isomorfismos naturales de bimódulos $\Phi : ((B,X)_S) \otimes_S B^* \to (B,(B,X)_S)_S$, $\Phi_2 : X \otimes_S B^* \to (B,X)_S$, $\Phi_3 : X \otimes_S (B \otimes_S B)^* \to (B \otimes_S B, X)_S$ y $\phi_2 : B^* \otimes_S B^* \to (B \otimes_S B)^*$ construidos en I.5 y I.9.

Por naturalidad de los isomorfismos considerados conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\hat{e}} & X \otimes_S B^* & \xrightarrow{I \otimes \mu} & X \otimes_S B^* \otimes_S B^* \\ \| & & \| & & \uparrow^{I \otimes \phi_2^{-1}} \\ X & \xrightarrow{\hat{e}} & X \otimes_S B^* & \xrightarrow{I \otimes m^*} & X \otimes_S (B \otimes_S B)^* \\ \| & & \uparrow^{\Phi_2^{-1}} & & \uparrow^{\Phi_3^{-1}} \\ X & \xrightarrow{v'} & (B,X)_S & \xrightarrow{(m,I)} & (B \otimes_S B, X)_S . \end{array}$$

Si $\tau : (B,(B,X)_S)_S \to (B \otimes_S B, X)_S$ es el isomorfismo de adjunción, entonces, para $u \in (B,X)_S$ tenemos que $\tau\,((I,v')\,(u))\,(\rho_1 \otimes \rho_2) = [((I,v')\,(u))\,(\rho_1)]\,[\rho_2] = \rho_2\,(u\,(\rho_1))$.

Por otra parte, $((m,I)\,(u))\,(\rho_1 \otimes \rho_2) = u\,(\rho_2 \cdot \rho_1)$. Luego, si $u = v'(x)$ tenemos que $\rho_2\,(u\,(\rho_1)) = \rho_2\,(\rho_1\,(x)) = u\,(\rho_2 \cdot \rho_1)$ así que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im} v' & \xrightarrow{(m,I)} & (B \otimes_S B, X)_S \\ \downarrow^{(I,v')} & & \| \\ (B,(B,X)_S)_S & \xrightarrow{\tau} & (B \otimes_S B, X)_S \end{array}$$

es conmutativo.
Por naturalidad, también el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
(B,X)_S & \xrightarrow{(I,v')} & (B,(B,X)_S)_S \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_2^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{-1}} \\
X\otimes_S B^* & \xrightarrow{v'\otimes I} & (B,X)_S \otimes_S B^* \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_2^{-1}\otimes I} \\
X\otimes_S B^* & \xrightarrow{\hat{e}\otimes I} & X\otimes_S B^* \otimes_S B^*.
\end{array}$$

A su vez, la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc}
X\otimes_S B^* \otimes_S B^* & \xrightarrow{\Phi_2\otimes I} & (B,X)_S \otimes_S B^* \\
\downarrow{\scriptstyle I\otimes\phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\
X\otimes_S (B\otimes_S B)^* & & (B,(B,X)_S)_S \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_3} & & \| \\
(B\otimes_S B, X)_S & \xleftarrow{\tau} & (B,(B,X)_S)_S
\end{array}$$

se sigue de que

$$\begin{aligned}
\tau\left(\Phi\cdot(\Phi_2\otimes I)\left(x\otimes\gamma_1\otimes\gamma_2\right)\right)[\rho_1\otimes\rho_2] &= \tau\left(\Phi\cdot\left(x\gamma_1\left(_\right)\otimes\gamma_2\right)\right)[\rho_1\otimes\rho_2] \\
&= \tau\left(\left(x\gamma_1\left(_\right)\right)\gamma_2\left(_\right)\right)[\rho_1\otimes\rho_2] \\
&= x\gamma_1\left(\gamma_2\left(\rho_1\right)\rho_2\right),
\end{aligned}$$

y de que

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_3\cdot(I\otimes\phi_2)\right)\left(x\otimes\gamma_1\otimes\gamma_2\right)[\rho_1\otimes\rho_2] &= \Phi_3\left(x\otimes\gamma_1\left(\gamma_2\left(_\right)_\right)\right)[\rho_1\otimes\rho_2] \\
&= x\gamma_1\left(\gamma_2\left(\rho_1\right)\rho_2\right).
\end{aligned}$$

Por fin podemos ver que

$$\begin{aligned}
(I\otimes\mu)\,\hat{e} &= \left(I\otimes\phi_2^{-1}\right)\cdot\Phi_3^{-1}\cdot(m,I)\cdot v' \\
&= \left(I\otimes\phi_2^{-1}\right)\cdot\Phi_3^{-1}\cdot\tau\cdot(I,v')\cdot v' \\
&= \left(\Phi_2^{-1}\otimes I\right)\cdot\Phi^{-1}\cdot(I,v')\cdot v' = (\hat{e}\otimes I)\cdot\Phi_2^{-1}\cdot v' \\
&= (\hat{e}\otimes I)\,\hat{e}.
\end{aligned}$$

■

Lema 12. *Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible. Sea $\hat{e} : X \to X \otimes_S B^*$ el morfismo de $S-R-$bimódulos inducido por la evaluación $v' : X \to (B, X)_S$ dada por $v'(x)[\rho] = \rho(x)$. Sea $a : X^* \longrightarrow B^* \otimes_S X^*$ el morfismo de $S-R-$bimódulos inducido por la evaluación $v : X \otimes_S B \to X$, dada por $v(x \otimes \rho) = \rho(x)$. Sean $\{\rho_j, \gamma_j \mid j \in J\}$ y $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ bases duales finitas de B_S y X_S respectivamente. Entonces:*

1. *Si $e = -\hat{e}$ y $x \in X$, entonces*

$$e(x) = -\sum \rho_j(x) \otimes \gamma_j.$$

2. *Si $\lambda \in X^*$ tenemos que:*

$$a(\lambda) = \sum_{i,j} \lambda\left(\rho_j(x_i)\right) \gamma_j \otimes \lambda_i.$$

Demostración: Para probar el primer inciso recordemos que por la fórmula del lema I.5.2

$$\hat{e}(x) = \Phi_2^{-1}(v'(x)) = \sum v'(x)\left[\rho_j\right] \otimes \gamma_j = \sum \rho_j(x) \otimes \gamma_j.$$

Resolvamos ahora el segundo inciso. Si $\lambda \in X^*$ entonces

$$v^*(\lambda)[x \otimes \rho] = \lambda(v(x \otimes \rho)) = \lambda(\rho(x)),$$

así que, por fórmula I.9.2, se sigue que

$$a(\lambda) = \phi_2^{-1}(v^*(\lambda)) = \sum_i \lambda(\_(x_i)) \otimes \lambda_i.$$

Puesto que para $\gamma \in B^*$ se cumple $\sum_j \gamma\left(\rho_j\right) \gamma_j = \gamma$, tenemos que:

$$a(\lambda) = \sum_{i,j} \lambda\left(\rho_j(x_i)\right) \gamma_j \otimes \lambda_i.$$

■

Definición 13. *Sean R y S anillos, W un $R-R-$bimódulo y X un $R-S-$bimódulo, tal que X_S es proyectivo y finitamente generado. Por I.5.2, $\Phi_2 : X \otimes_S X^* \to (X, X)_S$ es un isomorfismo de bimódulos, por lo que si $\Phi_2^{-1}(Id_X) = \sum_i x_i \otimes \lambda_i$, entonces $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ es una base dual de X_S. Como $Id_X \in_R (X, X)_S$ se cumple por I.5.1 que $\sum_i x_i \otimes \lambda_i \in (X \otimes_S X^*)^R$. Podemos definir entonces el morfismo de $S-S-$bimódulos*

$$\alpha : X^* \otimes_R T_R(W) \otimes_R X \to T_S(X^* \otimes_R W \otimes_R X)$$

en elementos homogéneos como $\alpha(\lambda\otimes r\otimes x)=\lambda(rx)$ *y*
$\alpha(\lambda\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_n\otimes x)$
$=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{(n-1)}}\lambda\otimes w_1\otimes x_{i_1}\otimes\lambda_{i_1}\otimes w_2\otimes x_{i_2}\otimes\lambda_{i_2}\otimes\cdots\otimes x_{i_{(n-1)}}\otimes\lambda_{i_{(n-1)}}\otimes w_n\otimes x.$
Por comodidad, para $w\in T_R(W)$, *denotaremos* $\alpha(\lambda\otimes w\otimes x)$ *como* $\alpha_{\lambda,x}(w)$. *Notemos que*

$$\alpha_{\lambda,x}(w\otimes w')=\textstyle\sum_i\alpha_{\lambda,x_i}(w)\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(w'),$$

para $w,w'\in T_R(W)$, $\lambda\in X^*$ *y* $x\in X$. *De ello se sigue que* $gr(w)=gr(\alpha_{\lambda,x}(w))$, *para* $w\in T_R(W)$.

Proposición 14. *Sea* $\mathcal{A}=(R,W_0\oplus W_1,\delta)$ *un bocs. Sea* ${}_RX$ *un módulo* S*–admisible. Entonces* $\mathcal{A}^X=(S,W_0^X\oplus W_1^X,\delta^X)$ *es un bocs, donde* $W_0^X=X^*\otimes_R W_0\otimes_R X$, $W_1^X=B^*\oplus(X^*\otimes_R W_1\otimes_R X)$, *y donde* δ^X *se obtiene de extender mediante la regla de Leibnitz su definición en* $W^X=B^*\oplus(X^*\otimes_R W\otimes_R X)$:
$\delta^X(\lambda\otimes w\otimes x)=a(\lambda)\otimes w\otimes x+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes e(x)$, *y*
$\delta^X(\gamma)=\mu(\gamma)$, *si* $\gamma\in B^*$.

En particular, si $t\in T_R(W)$ *es un elemento homogéneo,* $\lambda\in X^*$ *y* $x\in X$ *se cumple que*

$$\delta^X(\alpha_{\lambda,x}(t))=(a\otimes I)(\alpha_{\lambda,x}(t))+\alpha_{\lambda,x}(\delta(t))+(-1)^{gr(t)}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(t)).$$

Demostración: Teniendo en mente el lema II.4, se deriva que $\delta^X(W_0^X)\subseteq[T_S(W^X)]_1$ y $\delta^X(W_1^X)\subseteq[T_S(W^X)]_2$, así que por II.6 podemos extender δ^X mediante la regla de Leibnitz. Por observación II.1 basta con ver que $(\delta^X)^2(W^X)=0$ para probar que δ^X al cuadrado es cero. Recordemos que $(\mu\otimes I)a=(I\otimes a)a$ y que $(e\otimes I)e=-(I\otimes\mu)e$.

Sea $\gamma\otimes\lambda\otimes w\otimes x$ un elemento de $B^*\otimes_S X^*\otimes_R W\otimes_R X$, donde $\gamma\in B^*$, $\lambda\in X^*$, $w\in W$ y $x\in X$. Por la fórmula de la observación II.1, y por el hecho de que γ es de grado 1 en $T_S(W^X)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\delta^X(\gamma\otimes\lambda\otimes w\otimes x)\\
=\;&\delta^X(\gamma)\otimes\lambda\otimes w\otimes x-\gamma\otimes\delta^X(\lambda\otimes w\otimes x)\\
=\;&\mu(\gamma)\otimes\lambda\otimes w\otimes x-\gamma\otimes(a(\lambda)\otimes w\otimes x+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))\\
&-\gamma\otimes\left((-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes e(x)\right)\\
=\;&(\mu(\gamma)\otimes\lambda-\gamma\otimes a(\lambda))\otimes w\otimes x-\gamma\otimes\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\\
&+(-1)^{gr(w)+1}\gamma\otimes\lambda\otimes w\otimes e(x).
\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda\in X^*$, $w\in W$, $x\in X$, $I_1=Id_{X^*}$, e $I_2=Id_{B^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X(a(\lambda)\otimes w\otimes x) \\
= & ((\mu\otimes I_1 - I_2\otimes a)\,a(\lambda))\otimes w\otimes x \\
& -(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(-1)^{gr(w)+1}a(\lambda)\otimes w\otimes e(x) \\
= & -(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(-1)^{gr(w)+1}(a(\lambda)\otimes w\otimes e(x))
\end{aligned}$$

Sea ahora $\lambda\otimes w\otimes x\otimes\gamma$ un elemento de $X^*\otimes_R W\otimes_R X\otimes_S B^*$, donde $\gamma\in B^*$, $\lambda\in X^*$, $w\in W$ y $x\in X$. Por la fórmula de la observación II.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X(\lambda\otimes w\otimes x\otimes\gamma) \\
= & \delta^X(\lambda\otimes w\otimes x)\otimes\gamma+(-1)^{gr(\lambda\otimes w\otimes x)}\lambda\otimes w\otimes x\otimes\delta^X(\gamma) \\
= & \left(a(\lambda)\otimes w\otimes x+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes e(x)\right)\otimes\gamma \\
& +(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes x\otimes\mu(\gamma) \\
= & a(\lambda)\otimes w\otimes x\otimes\gamma+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\otimes\gamma \\
& +(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes(e(x)\otimes\gamma+x\otimes\mu(\gamma)).
\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda\in X^*$, $w\in W$, $x\in X$, $I_1=Id_{X^*}$, e $I_2=Id_{B^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X(\lambda\otimes w\otimes e(x)) \\
= & a(\lambda)\otimes w\otimes e(x)+(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x)) \\
& +(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes(e\otimes I_2+I_1\otimes\mu)\,e(x) \\
= & a(\lambda)\otimes w\otimes e(x)+(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x)).
\end{aligned}$$

Recordemos que $\sum_i x_i\otimes\lambda_i$ es la imagen de Id_X bajo el isomorfismo $X\otimes_S X^*\cong (X,X)_S$ del lema I.5.2, y así $\{x_i,\lambda_i \mid i\in I\}$ es una base dual de X_S. Sean $I'=Id_X$ e $I''=Id_{X^*}$. Usando las fórmulas III.12.1 y III 12.2 se sigue que

$$\begin{aligned}
(I'\otimes a)\left(\textstyle\sum_h x_h\otimes\lambda_h\right) &= \textstyle\sum_{i,j,h} x_h\otimes\lambda_h\left(\rho_j(x_i)\right)\gamma_j\otimes\lambda_i \\
&= \textstyle\sum_{i,j,h} x_h\lambda_h\left(\rho_j(x_i)\right)\otimes\gamma_j\otimes\lambda_i \\
&= \textstyle\sum_{i,j}\rho_j(x_i)\otimes\gamma_j\otimes\lambda_i \\
&= -(e\otimes I'')\left(\textstyle\sum_i x_i\otimes\lambda_i\right)
\end{aligned} \qquad (*)$$

Usemos esta identidad para demostrar que

$$\delta^X(\alpha_{\lambda,x}(t))=(a\otimes I)(\alpha_{\lambda,x}(t))+\alpha_{\lambda,x}(\delta(t))+(-1)^{gr(w)}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(t)),$$

donde $t=w_1\otimes\cdots\otimes w_n$ es un elemento homogéneo de $W^{\otimes n}$, $\lambda\in X^*$ y $x\in X$. Hagamos la prueba por inducción sobre n.

Para $n = 1$ el resultado se sigue por definición de δ^X.

Supongamos cierto el resultado para un $n-1$ dado, y sea $t = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1} \otimes w_n = t' \otimes w_n$. En tal caso tenemos que

$$
\begin{aligned}
& \delta^X\left(\alpha_{\lambda,x}\left(t' \otimes w_n\right)\right) \\
= \; & \delta^X\left(\textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right) \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left(\delta^X\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \delta^X\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right)\right] \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left((a \otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[(I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \delta^X\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right)\right] \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left((a \otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[(I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) \otimes \lambda_i \otimes w_n \otimes x\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes a\left(\lambda_i\right) \otimes w_n \otimes x\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left[\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right) + (-1)^{gr(w_n)} \lambda_i \otimes w_n \otimes e(x)\right]
\end{aligned}
$$

Por la fórmula $(*)$ y se cancelan los sumandos intermedios y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum_i \left[\left((a \otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right)\right] \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left[\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right) + (-1)^{gr(w_n)} \lambda_i \otimes w_n \otimes e(x)\right] \\
= \; & (a \otimes I)\, \alpha_{\lambda,x}(t) \\
& + \textstyle\sum_i \left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right)\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)} (I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right) \\
= \; & (a \otimes I)\, \alpha_{\lambda,x}(t) \\
& + \alpha_{\lambda,x}\left(\delta\left(t'\right) \otimes w_n + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1})} t' \otimes \delta\left(w_n\right)\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)} (I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right)
\end{aligned}
$$

Lo que por regla de Leibnitz es igual a

$$(a \otimes I)\, \alpha_{\lambda,x}(t) + \alpha_{\lambda,x}(\delta(t)) + (-1)^{gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)} (I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right)$$

Podemos ver ahora que

$$\begin{aligned}
&\left(\delta^{X}\right)^{2}(\lambda\otimes w\otimes x)\\
=\ &\delta^{X}\left(a(\lambda)\otimes w\otimes x+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes e(x)\right)\\
=\ &-(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(-1)^{gr(w)+1}(a(\lambda)\otimes w\otimes e(x))\\
&+(a\otimes I)\,\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+\alpha_{\lambda,x}(\delta(\delta(w)))+(-1)^{gr(w)+1}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))\\
&+(-1)^{gr(w)}(a(\lambda)\otimes w\otimes e(x))+(-1)^{gr(w)}(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x))\\
=\ &-(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(a\otimes I)\,\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\\
&+(-1)^{gr(w)+1}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))+(-1)^{gr(w)}(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x))\\
=\ &0
\end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado que tenemos un nuevo bocs.

■

Construyamos ahora un funtor $F_X : Rep\ \mathcal{A}^X \rightarrow Rep\mathcal{A}$. Mantendremos la base dual $\{x_i,\lambda_i \mid i\in I\}$ de X_S fijada en III.13 y, desde ahora, fijamos también una base dual finita $\{\rho_j,\gamma_j \mid j\in J\}$ de B_S.

Definición 15. *Para $M\in Rep\ \mathcal{A}^X$, definimos $F_X(M)=X\otimes_S M$ como $R-$módulo. Recordemos que $A^X = A(\mathcal{A}^X) = T_S(X^*\otimes_R W_0\otimes_R X)$. La siguiente composición proporciona una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo a $F_X(M)$, a la que denotaremos por $\cdot$*

$$\begin{array}{c}
A(\mathcal{A})\otimes_R X\otimes_S M\\
\downarrow^{\tau}\\
X\otimes_S X^*\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R X\otimes_S M\\
\downarrow^{I\otimes\alpha\otimes I}\\
X\otimes_S A^X\otimes_S M\\
\downarrow^{I\otimes *}\\
X\otimes_S M
\end{array}$$

donde $\tau(a\otimes x\otimes m)=\sum_i x_i\otimes\lambda_i\otimes a\otimes x\otimes m$, y $*: A^X\otimes_S M\rightarrow M$ es la estructura de A^X-módulo de M, así que

1. $a\cdot(x\otimes m)=\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(a)*m$.

Puesto que las funciones son aditivas y $\sum_i rx_i\otimes\lambda_i=\sum_i x_i\otimes\lambda_i r$, por I.5.1, nos basta con checar que

$$\begin{aligned}
1_R\cdot(x\otimes m) &= \textstyle\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(1_R)*m\\
&= \textstyle\sum_i x_i\otimes\lambda_i(x)*m\\
&= \textstyle\sum_i x_i\lambda_i(x)\otimes m\\
&= x\otimes m
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} a'\cdot(a\cdot(x\otimes m)) &= \left(a'\cdot\left(\textstyle\sum_h x_h\otimes\alpha_{\lambda_j,x}(a)*m\right)\right)\\ &= \textstyle\sum_{i,h} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x_h}(a')*(\alpha_{\lambda_h,x}(a)*m)\\ &= \textstyle\sum_{i,h} x_i\otimes(\alpha_{\lambda_i,x_h}(a')\otimes\alpha_{\lambda_h,x}(a))*m\\ &= \textstyle\sum_i x_i\otimes(\alpha_{\lambda_h,x}(a'\otimes a))*m\\ &= (a'\otimes a)\cdot(x\otimes m). \end{aligned}$$

Si $f=(f^0,f^1):M\to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$ definimos, para $w\in V(\mathcal{A})$, $x\in X$ y $m\in M$:

2. $(F_X(f))^0[x\otimes m]=x\otimes f^0(m)+\sum_j\rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m]$ *y*

3. $(F_X(f))^1(w)[x\otimes m]=\sum_i x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]$.

Teorema 16. *Sea $\mathcal{A}=(R,W,\delta)$ un bocs. Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible. Entonces se tiene un funtor $F_X : Rep\mathcal{A}^X\to Rep\mathcal{A}$ dado por las fórmulas de III.14, III.15.1, III.15.2 y III.15.3 al cual llamaremos funtor* **reducción** *con respecto a X.*

Además, F_X está enmarcado por un par (F_0,η_F), donde $F_0=X\otimes_S -$, y η_F está definida de la siguiente manera: si $f_0\in_S(M,N)$, $f_1\in Hom_{S-S}\left(W_1^X,(M,N)_k\right)$, $\eta_F((f_0,f_1))=(g_0,g_1)$, $w\in W_1$ y $m\in M$, entonces

1. $g_0[x\otimes m]=x\otimes f_0(m)+\sum_j\rho_j(x)\otimes f_1(\gamma_j)[m]$,

2. $g_1(w)[x\otimes m]=\sum_i x_i\otimes f_1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]$.

Demostración: Sea $f=(f^0,f^1):M\to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$, claramente $(F_X(f))^0$ es un morfismo de $R-$módulos. Veamos que $F_X(f)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, así que sean $w\in V(\mathcal{A})$, $x\in X$ y $m\in M$:

$$\begin{aligned} &(F_X(f))^0[w\cdot(x\otimes m)]\\ =\ &(F_X(f))^0\left[\textstyle\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m\right]\\ =\ &\textstyle\sum_i x_i\otimes f^0(\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m)+\sum_{i,j}\rho_j(x_i)\otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m]; \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} &w\cdot(F_X(f))^0[x\otimes m]\\ =\ &w\cdot\left(x\otimes f^0(m)+\textstyle\sum_j\rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m]\right)\\ =\ &\textstyle\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(w)*f^0(m)+\sum_{i,j}x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)*f^1(\gamma_j)[m]. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
& w\cdot(F_X(f))^0[x\otimes m]-(F_X(f))^0[w\cdot(x\otimes m)]\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*f^0(m)-f^0(\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m)]\\
& +\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}*f^1(\gamma_j)[m]\\
& -\textstyle\sum_{i,j}\rho_j(x_i)\otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m].
\end{aligned}$$

Por comodidad, sean $\sum_{i,j}x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)*f^1(\gamma_j)[m]=E$ y $\sum_{i,j}\rho_j(x_i)\otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m]=H$; así que, como f es un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$, y w es de grado 1, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1(\delta^X(\alpha_{\lambda_i,x}(w)))[m]+E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1((a\otimes I)(\alpha_{\lambda_i,x}(w))+\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w)))[m]\\
& +\textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left((-1)^{gr(w)}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda_i,x}(w))\right)[m]+E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w)))[m]\\
& +\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes f^1\left(\sum_h\lambda_i(\rho_j(x_h))\gamma_j\otimes\alpha_{\lambda_h,x}(w)\right)[m]\\
& -\textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\sum_j\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\otimes\gamma_j\right)[m]\\
& +E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w)))[m]\\
& +\textstyle\sum_{i,j,h} x_i\lambda_i(\rho_j(x_h))\otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_h,x}(w)*m]\\
& -\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)*f^1(\gamma_j)[m]\\
& +E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w)))[m]\\
& +\textstyle\sum_{h,j}\rho_j(x_h)\otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_h,x}(w)*m]-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w)))[m],
\end{aligned}$$

con lo que se comprueba que $F_X(f)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

Es fácil ver que $F_X((Id_M,0))=\left(Id_{F_X(M)},0\right)$.
Sean $f:M\to N$, $g:N\to L$ morfismos en $Rep\mathcal{A}^X$. Verifiquemos que $F_X(gf)=F_X(g)F_X(f)$. Veamos primero que coinciden las primeras componentes; sean $x\in X$ y $m\in M$:

$$\begin{aligned}
& (F_X(gf))^0[x\otimes m]=x\otimes(gf)^0(m)+\textstyle\sum_j\rho_j(x)\otimes(gf)^1(\gamma_j)[m]\\
& =x\otimes(gf)^0(m)+\textstyle\sum_j\rho_j(x)\otimes\left[g^0f^1(\gamma_j)[m]+g^1(\gamma_j)[f^0(m)]+\sum_h g^1(\gamma^1_{j,h})f^1(\gamma^2_{j,h})[m]\right]
\end{aligned}$$

donde $\delta(\gamma_j)=\mu(\gamma_j)=\sum_h\gamma^1_{j,h}\otimes\gamma^2_{j,h}$.
Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}
&(F_X(g))^0 (F_X(f))^0 [x \otimes m] = (F_X(g))^0 \left(x \otimes f^0(m) + \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m] \right) \\
&= x \otimes (gf)^0(m) + \textstyle\sum \rho_j(x) \otimes g^0 f^1(\gamma_j)[m] \\
&+ \textstyle\sum \rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_j)[f^0(m)] \\
&+ \textstyle\sum_{h,j} \rho_h \rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_h)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]
\end{aligned}$$

y recordemos que $(1 \otimes \mu)(-e) = (-e \otimes 1)(-e)$, luego las expresiones son iguales, por lo que en la primera componente la composición va en la composición.

Veamos que ocurre en la segunda componente; tenemos, usando la definición de composición en $RepA$, que para $w \in V(\mathcal{A})$, $x \in X$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned}
&(F_X(g) F_X(f))^1 (w) [x \otimes m] \\
&= (F_X(g))^0 (F_X(f))^1 (w) [x \otimes m] + (F_X(g))^1 (w) \left[(F_X(f))^0 (x \otimes m) \right] \\
&+ c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1 \right) (\delta(w)) [x \otimes m]
\end{aligned}$$

donde $c : (X \otimes_S N, X \otimes_S L) \otimes_{A(A)} (X \otimes_S M, X \otimes_S N) \to (X \otimes_S M, X \otimes_S L)$ es el morfismo composición,

$$\begin{aligned}
&= (F_X(g))^0 \left(\textstyle\sum x_i \otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m] \right) \\
&+ (F_X(g))^1 (w) \left[x \otimes f^0(m) + \textstyle\sum \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m] \right] \\
&+ c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1 \right) (\delta(w)) [x \otimes m] \\
&= \textstyle\sum_i x_i \otimes g^0 f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m] + \textstyle\sum_{i,j} \rho_j(x_i) \otimes g^1(\gamma_j)[f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]] \\
&+ \textstyle\sum_i x_i \otimes g^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[f^0(m)] + \textstyle\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right] \\
&+ c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1 \right) (\delta(w)) [x \otimes m]
\end{aligned}$$

Mientras que la segunda componente de la imagen de la composición es

$$\begin{aligned}
&(F_X(gf))^1 (w) [x \otimes m] = \textstyle\sum x_i \otimes (gf)^1 (\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m] \\
&= \textstyle\sum x_i \otimes \left(g^0 f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m] + g^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[f^0(m)] \right) \\
&+ \textstyle\sum x_i \otimes \left(c^X (g^1 \otimes f^1) \left(\delta^X (\alpha_{\lambda_i,x}(w)) \right) [m] \right),
\end{aligned}$$

donde $c^X : (N, L) \otimes_{A(A^X)} (M, N) \to (M, L)$ es el morfismo composición. Usando las fórmulas III.12.1 y III.12.2 se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum x_i \otimes \left(c^X (g^1 \otimes f^1) \left(\delta^X (\alpha_{\lambda_i,x}(w)) \right) [m] \right) \\
&= \textstyle\sum_{i,h,l} x_i \otimes g^1 \left(\lambda_i (\rho_l(x_h)) \gamma_l \right) [f^1(\alpha_{\lambda_h,x}(w))[m]]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]\\
&+\sum_{i,j,t} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,x_j}(w_t^1)\right)\left[f^1\left(\alpha_{\lambda_j,x}(w_t^2)\right)[m]\right]\\
&=\sum_{i,h,l} x_i\lambda_i(\rho_l(x_h)) \otimes g^1(\gamma_l)\left[f^1(\alpha_{\lambda_h,x}(w))[m]\right]\\
&+\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]\\
&+c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x\otimes m]\\
&=\sum_{h,l} \rho_l(x_h) \otimes g^1(\gamma_l)\left[f^1(\alpha_{\lambda_h,x}(w))[m]\right]\\
&+\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}\right)(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]\\
&+c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x\otimes m],
\end{aligned}
$$

donde $\delta(w) = \sum_t w_t^1 \otimes w_t^2$, pues $\sum_i x_i\lambda_i = Id_X$, comprobándose por ello la identidad.

Por construcción de F_X este funtor estará enmarcado por (F_0, η_F) si y sólo si η_F es una transformación natural.

Sean $M, N, M', N' \in S-Mod$, $u : M' \to M$ y $v : N \to N'$ S–morfismos y $I\otimes u : X\otimes_S M' \to X\otimes_S M$, $I\otimes v : X\otimes_S N \to X\otimes_S N'$ los R–morfismos inducidos.

Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccc}
\tau_{A^X}(M,N) & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X\otimes_S M, X\otimes_S N)\\
\downarrow^{(u^*,(u^*)_*)} & & \downarrow^{((I\otimes u)^*,((I\otimes u)^*)_*)}\\
\tau_{A^X}(M',N) & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X\otimes_S M', X\otimes_S N).
\end{array}
$$

Para verificar esto sea $(f_0, f_1) \in \tau_{A^X}(M,N) = Hom_S(M,N)\times Hom_{S-S}(W_1,(M,N)_k)$. Tenemos que

$$
\eta_F(u^*,(u^*)_*)[(f_0,f_1)] = \eta_F[(f_0u, u^*f_1)] = (h_0,h_1)
$$

está dada, para $w\in W_1$, $x\in X$ y $m'\in M'$ por

$$
\begin{aligned}
h_0(x\otimes m') &= x\otimes f_0u(m') + \textstyle\sum_j \rho_j(x)\otimes u^*\left(f_1(\gamma_j)\right)[m']\\
&= x\otimes f_0u(m') + \textstyle\sum_j \rho_j(x)\otimes f_1(\gamma_j)[u(m')]
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{array}{rcl} h_1(w)[x \otimes m'] & = & \sum_i x_i \otimes u^*(f_1(\alpha_{\lambda_i,x}(w)))[m'] \\ & = & \sum_i x_i \otimes f_1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[u(m')] . \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rcl} ((I \otimes u)^*, ((I \otimes u)^*)_*)\,\eta_F[(f_0, f_1)] & = & ((I \otimes u)^*, ((I \otimes u)^*)_*)[g_0, g_1] \\ & = & (g_0(I \otimes u), (I \otimes u)^* g_1), \end{array}$$

y tenemos, para $w \in W_1$, $x \in X$ y $m' \in M'$, que

$$\begin{array}{rcl} g_0(I \otimes u)[x \otimes m'] & = & g_0[x \otimes u(m')] \\ & = & x \otimes f_0(m') + \sum_j \rho_j(x) \otimes f_1(\gamma_j)[u(m')] \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} ((I \otimes u)^* g_1)(w)[x \otimes m'] & = & g_1(w)(I \otimes u)[x \otimes m'] \\ & = & \sum_i x_i \otimes f_1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[u(m')] . \end{array}$$

Luego $\eta_F(u^*, (u^*)_*) = ((I \otimes u)^*, ((I \otimes u)^*)_*)\,\eta_F$.
Similarmente probamos la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \tau_{A^X}(M, N) & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X \otimes_S M, X \otimes_S N) \\ \downarrow^{(v_*, (v_*)^*)} & & \downarrow^{((I\otimes v)_*, ((I\otimes v)_*)^*)} \\ \tau_{A^X}(M, N') & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X \otimes_S M, X \otimes_S N') . \end{array}$$

■

Lema 17. *Sean $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs, ${}_RX$ un módulo $S-$admisible y $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor reducción asociado. Entonces:*

1. *Si $M_0' \in S-Mod$ es tal que $X \otimes_S M_0'$ admite una estructura de $T_R(W_0)-$módulo, módulo al que llamaremos M, entonces M_0' admite una única estructura de $T_S(W_0^X)-$módulo, lo que denotaremos por M', tal que $F_X(M') = M$.*

   Sean $\upsilon : X^* \otimes_R X \to S$ la evaluación, y $\sigma : S \otimes_S M_0' \to M_0'$ el isomorfismo canónico, entonces la estructura $*$ de M' está determinada por la estructura $\cdot$ de M por la fórmula:

$$(\lambda \otimes w \otimes x) * m = \sigma(\upsilon \otimes Id)(\lambda \otimes w \cdot (x \otimes m))$$

   para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $m \in M_0'$.

2. *Sea $F_0 = X \otimes_R - : S - Mod \to R - Mod$. Entonces $\operatorname{Im} F_X$ es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ cuyos objetos, como $R-$módulos, están en $\operatorname{Im} F_0$.*

3. *Sean $N, N' \in Rep\mathcal{A}^X$. Si $F_X(N) = F_X(N')$ como $A(\mathcal{A})-$módulos y $N = N'$ como $S-$módulos, entonces $N = N'$ como $A(\mathcal{A}^X)-$módulos.*

Demostración: Sea M_0' como en el primer inciso. Puesto que υ es un $S-S-$morfismo y σ es un $S-$morfismo, $* : W_0^X \otimes_S M_0' = X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X \otimes_S M_0' \to M_0'$ es un $S-$morfismo. Sea $*'$ la imagen de $*$ bajo el isomorfismo

$$_S\left(W_0^X \otimes_S M_0', M_0'\right) \cong Hom_{S-S}\left(W_0^X, (M_0', M_0')_k\right).$$

Por lema II.2, hay un único morfismo de anillos

$$*' : A\left(\mathcal{A}^X\right) = T_S\left(W_0^X\right) \to (M_0', M_0')_k,$$

al que por el isomorfismo

$$Hom_{S-S}\left(A\left(\mathcal{A}^X\right), (M_0', M_0')_k\right) \cong_S \left(A\left(\mathcal{A}^X\right) \otimes_S M_0', M_0'\right)$$

le corresponde un único $S-$morfismo $*$, es decir una estructura de $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo sobre M_0'. Denotemos por M' tal $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo.

Para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $m \in M_0'$ tenemos, si $\cdot'$ denota la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo de $F_X(M')$, es decir la inducida por el funtor, y $w \cdot (x \otimes m) = \sum_h x_h \otimes m_h$ es la estructura original de M, que

$$\begin{aligned} w \cdot' (x \otimes m) &= \textstyle\sum_i x_i \otimes (\lambda_i \otimes w \otimes x) * m \\ &= \textstyle\sum_i x_i \otimes \sigma (v \otimes Id) (\lambda_i \otimes w \cdot (x \otimes m)) \\ &= \textstyle\sum_{i,h} x_i \otimes \lambda_i (x_h) m_h \\ &= \textstyle\sum_{i,h} x_i \lambda_i (x_h) \otimes m_h \\ &= \textstyle\sum_h x_h \otimes m_h \end{aligned}$$

por lo que $F_X(M') = M$. Es decir que cada objeto de $Rep\mathcal{A}$ que como $R-$módulo está en $\operatorname{Im} F_0$ pertenece a $\operatorname{Im} F_X$.

Supongamos ahora que $N \in Rep\mathcal{A}^X$ y que $*$ es su estructura como $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo. Sea $*'$ la estructura como $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo inducida por $F_X(N) = M$ en ${}_SN$, y denotemos a este objeto de $Rep\mathcal{A}^X$ como N'. Tenemos, para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $n \in N$, que

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes w \otimes x) *' n &= \sigma (v \otimes Id) (\lambda \otimes w \cdot (x \otimes n)) \\ &= \sigma (v \otimes Id) \left(\lambda \otimes \left(\textstyle\sum_i x_i \otimes (\lambda_i \otimes w \otimes x) * n\right)\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_i \lambda (x_i) \lambda_i \otimes w \otimes x\right) * n \\ &= (\lambda \otimes w \otimes x) * n. \end{aligned}$$

Es decir que $N = N'$. Esto prueba que hay una única estructura de $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo sobre ${}_SN$ tal que su imagen bajo F_X es M. Otra forma de expresar esto es el enunciado del tercer inciso.

■

Corolario 18. *La categoría $R-Mod$ es claramente isomorfa a $Rep\mathcal{C}$ para el bocs $\mathcal{C} = (R, 0, 0)$. Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible. Entonces hay un bocs*

$$\mathcal{C}^X = \left(S, W^{\mathcal{C}}, \delta^{\mathcal{C}}\right)$$

donde $W_0^{\mathcal{C}} = 0$, $W_1^{\mathcal{C}} = B^*$ y $\delta^{\mathcal{C}}$ es la diferencial inducida por la comultiplicación $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$, y tenemos un funtor de reducción $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R-Mod$.

Observación III.1: Llamaremos a $\mathcal{C}^X$ el bocs canónico asociado a X. Si $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ es un bocs y ${}_R X$ es un módulo $S-$admisible, la proyección $\eta_1 : W^X \to B^*$, y la inyección $\sigma_1 : B^* \to W^X$, junto con la identidad $1_S : S \to S$, determinan pares graduados $(1_S, \eta_1)$ y $(1_S, \sigma_1)$ que inducen morfismos de álgebras graduadas

$$T_S(B^*) \overset{\eta}{\underset{\sigma}{\leftrightarrows}} T_S(W^X)$$

tales que $\delta^X \sigma = \sigma \delta^C$, $\delta^C \eta = \eta \delta^X$ y $\eta\sigma = Id_{T_S(B^*)}$.
Tenemos entonces morfismos de bocses

$$\mathcal{C}^X \overset{\eta}{\underset{\sigma}{\leftrightarrows}} \mathcal{A}^X$$

tales que $\eta\sigma = Id$, lo cual determina funtores

$$Rep\mathcal{C}^X \overset{F_\sigma}{\underset{F_\eta}{\leftrightarrows}} Rep\mathcal{A}^X$$

tales que $F_\sigma F_\eta = Id_{Rep\mathcal{C}^X}$. Así, las representaciones del bocs canónico $\mathcal{C}^X$ yacen entre las del bocs inducido $\mathcal{A}^X$.

Describamos a los funtores en cuestión.

Para $M, N \in Rep\mathcal{C}^X$ y un morfismo $f = (f^0, f^1) : M \to N$, se tiene que $F_\eta(M) = M$, pues bajo la estructura de $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo inducida, $F_\eta(M)$ es anulada por W_0^X, que $(F_\eta(f))^0 = f^0$, y que $(F_\eta(f))^1 = f^1\eta_1$.

Para $M, N \in Rep\mathcal{A}^X$ y un morfismo $f = (f^0, f^1) : M \to N$, se tiene que $F_\sigma(M) =_S M$, que $(F_\sigma(f))^0 = f^0$, y que $(F_\sigma(f))^1 = f^1_{|B^*}$.

Finalmente notemos que conmuta el diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} Rep\mathcal{A}^X & \overset{F_\sigma}{\rightarrow} & Rep\mathcal{C}^X \\ \downarrow^{F_X} & u & \downarrow^{F_X^C} \\ Rep\mathcal{A} & \rightarrow & R-Mod \end{array}$$

donde $u((f^0, f^1)) = f^0$.

Definición 19. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Diremos que X es $S-$completo si el funtor $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ es fiel y pleno.*

Teorema 20. *Sean $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs y $_RX$ un módulo $S-$completo. Entonces:*

1. *Sea (F_0, η_F), como en el teorema III.16, el par que enmarca al funtor F_X,* entonces η_F es biyectiva.

2. *El funtor reducción $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ es fiel y pleno.*

Demostración: Sean $L, M \in S - Mod$ y sea $u_0 : X \otimes_S L \to X \otimes_S M$ un $R-$morfismo. Como $_RX$ es $S-$completo, se sigue que existe un único morfismo $g = (g^0, g^1) : L \to M$ en $Rep\mathcal{C}^X$, tal que $u_0 = F_X^{\mathcal{C}}(g)$, es decir que

$$u_0 (x \otimes l) = x \otimes g^0 (l) + \textstyle\sum_j \rho_j (x) \otimes g^1 (\gamma_j) [l]$$

Nótese que todo par (g_0, g_1), donde $g_0 \in_S (L, M)$, $g_1 \in Hom_{S-S} (B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$.

Sea $\sigma : S \otimes_S M \to M$ el isomorfismo canónico, y sea $v : X^* \otimes_R X \to S$ la evaluación; ambos son morfismos de bimódulos.

Definimos, para $\lambda \in X^*$, $w \in W_1$, $x \in X$ y $l \in L$,

$\varrho_1 : Hom_{R-R} (W_1, (X \otimes_S L, X \otimes_S M)_k) \to Hom_{S-S} (X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L, M)_k)$
como

$\varrho_1 (u_1) (\lambda \otimes w \otimes x) [l] = \sigma (v \otimes I) (\lambda \otimes u_1 (w) [x \otimes l])$,

y

$\varrho_2 : Hom_{S-S} (X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L, M)_k) \to Hom_{R-R} (W_1, (X \otimes_S L, X \otimes_S M)_k)$
como

$\varrho_2 (h) (w) [x \otimes l] = \sum x_i \otimes h (\alpha_{\lambda_i, x} (w)) [l]$.

Tenemos entonces, que

$$\begin{aligned} \varrho_2 \varrho_1 (u_1) (w) [x \otimes l] &= \textstyle\sum x_i \otimes (\varrho_1 (u_1) (\alpha_{\lambda_i, x} (w))) [l] \\ &= \textstyle\sum x_i \otimes \sigma (v \otimes I) (\lambda_i \otimes u_1 (w) [x \otimes l]) \\ &= u_1 (w) [x \otimes l], \end{aligned}$$

pues $\sum x_i \lambda_i (y) = y$ para todo $y \in X$, y

$$\begin{aligned} \varrho_1 \varrho_2 (h) (\lambda \otimes w \otimes x) [l] &= \sigma (v \otimes I) (\lambda \otimes (\varrho_2 (h) (w)) [x \otimes l]) \\ &= \sigma (v \otimes I) (\lambda \otimes \textstyle\sum x_i \otimes h (\alpha_{\lambda_i, x} (w)) [l]) \\ &= h (\lambda \otimes w \otimes x) [l], \end{aligned}$$

pues $\sum_i \lambda(x_i)\lambda_i = \lambda$ para todo $\lambda \in X^*$.

Luego ϱ_1 es inversa de ϱ_2. Estas biyecciones inducen una biyección ϱ, recordando la notación de II.28, entre

$$\tau_{A^X}(L,M) = \left\{ (g_0,g_1,h) \mid \begin{array}{l} g_0 \in_S (L,M), g_1 \in Hom_{S-S}(B^*,(L,M)_k) \\ h \in Hom_{S-S}(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L,M)_k) \end{array} \right\},$$

y

$$\tau_A(X\otimes_S L, X\otimes_S M) = \{(u_0,u_1) \mid u_0 \in_R (X\otimes_S L, X\otimes_S M), u_1 \in_R (W_1,(X\otimes_S L, X\otimes_S M)_k)\}.$$

Es inmediato que $\varrho = \eta_F$, donde η_F es como en el teorema III.16.

Sea $u = (u^0,u^1) : X\otimes_S L \to X \otimes_S M$ un morfismo en $RepA$. Por III.17 podemos definir una estructura de A^X-módulo sobre L y sobre M. Sea (f^0,g^1,h) la única terna que bajo η_F va en (u^0,u^1). Denotemos por $f^1 : W_1^X \to (L,M)_k$ al morfismo de $A^X - A^X-$bimódulos que se obtiene de (g^1,h) al aplicar los isomorfismos de II.17.

Afirmamos que $f = (f^0,f^1) : L \to M$ es un morfismo en $RepA^X$.

Por observación II.2.3 basta con probar la fórmula de la definición de morfismo para $w \in W_0$, para lo que tenemos que

$$w\cdot(u^0(x\otimes l)) - u^0(w\cdot(x\otimes l)) = u^1(\delta(w))[x\otimes l]$$

o, equivalentemente,

$$w\cdot\left(x\otimes f^0(l) + \textstyle\sum_j \rho_j(x)\otimes g^1(\gamma_j)[l]\right) - \left(I\otimes f^0 + \textstyle\sum_j \rho_j \otimes g^1(\gamma_j)\right)(w\cdot(x\otimes l)) = u^1(\delta(w))[x\otimes l].$$

Así que, para $\lambda \in X^*$, tenemos por fórmula III.17.2 que

$$\begin{array}{rl} & (\lambda\otimes w\otimes x) * f^0(l) - f^0((\lambda\otimes w\otimes x) * l) \\ = & \sigma(v\otimes I)[\lambda\otimes w\cdot(x\otimes f^0(l)) - (I\otimes I\otimes f^0)(\lambda\otimes w\cdot(x\otimes l))] \\ = & \sigma(v\otimes I)[\lambda\otimes u^1(\delta(w))[x\otimes l]] \\ & +\sigma(v\otimes I)\left[\left(I\otimes \sum_j (\rho_j\otimes g^1(\gamma_j))\right)(\lambda\otimes w\cdot(x\otimes l))\right] \\ & -\sigma(v\otimes I)\left[\sum_j \lambda\otimes w\cdot(\rho_j(x)\otimes g^1(\gamma_j)[l])\right] \\ = & f^1(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))[l] \\ & +\sum_j \sigma(v\otimes I)\left[(I\otimes g^1(\gamma_j))((\lambda\rho_j)\otimes w\cdot(x\otimes l))\right] \\ & -\sum_j \sigma(v\otimes I)\left[\lambda\otimes w\cdot(\rho_j(x)\otimes g^1(\gamma_j)[l])\right]. \end{array} \qquad (1)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& f^1\left(\delta^X(\lambda\otimes w\otimes x)\right)[l] \\
= \;& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+f^1\left(a(\lambda)\otimes w\otimes x\right)[l]+f^1\left(\lambda\otimes w\otimes e(x)\right)[l],
\end{aligned}$$

lo que por III.12 es igual a

$$\begin{aligned}
& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+f^1\left(\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\gamma_j\otimes\lambda_i\otimes w\otimes x\right)[l] \\
& -f^1\left(\textstyle\sum_j\lambda\otimes w\otimes\rho_j(x)\otimes\gamma_j\right)[l],
\end{aligned}$$

y por ser f^1 un morfismo de A^X-A^X-bimódulos equivale a

$$\begin{aligned}
& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)g^1\left(\gamma_j\right)\left[(\lambda_i\otimes w\otimes x)*l\right] \\
& -\textstyle\sum_j\left(\lambda\otimes w\otimes\rho_j(x)\right)*g^1\left(\gamma_j\right)[l] \\
= \;& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)g^1\left(\gamma_j\right)\left[\sigma(v\otimes I)\left(\lambda_i\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right] \\
& -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

y por ser g^1 un morfismo de $S-S-$bimódulos lo anterior es

$$\begin{aligned}
& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_j\left[\sigma(v\otimes I)\left[\left(I\otimes g^1\left(\gamma_j\right)\right)\left(\sum_i\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\lambda_i\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right]\right] \\
& -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

y puesto que $\sum_i\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\lambda_i=\lambda\rho_j$, tenemos que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
& f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_j\left[\sigma(v\otimes I)\left[\left(I\otimes g^1\left(\gamma_j\right)\right)\left(\left(\lambda\rho_j\right)\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right]\right] \\
& -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

lo que es el resultado de (1), luego f es un morfismo en $RepA^X$, y consecuentemente F_X es fiel y pleno.

■

Proposición 21. *Sean $\mathcal{A}=(R,W,\delta)$ un bocs y ${}_RX$ un módulo $S-$completo. Sea $F_X: RepA^X\to RepA$ el funtor reducción correspondiente. Si $M\in repA^X$ y X tiene $k-$dimensión finita entonces $F_X(M)\in repA$. Sea $\hat{W}$ un $R-R-$sub-bimódulo de W_0, se cumple que $\|M\|_{X^*\otimes_R\hat{W}\otimes_R X}=\|F_X(M)\|_{\hat{W}}$ y $q_{A^X}(M)=q_A(F_X(M))$.*

Demostración: De la proposición I.7.2 se sigue que

$${}_S\left(X^*\otimes_R\hat{W}\otimes_R X\otimes_S M,M\right)\cong_R\left(\hat{W}\otimes_R X\otimes_S M,X\otimes_S M\right)$$

y que

$$_S(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X \otimes_S M, M) \cong_R (W_1 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M),$$

por lo que $\|M\|_{X^*\otimes_R \hat{W} \otimes_R X} = \|F_X(M)\|_{\hat{W}}$.
Como $_RX$ es un módulo $S-$completo hay $k-$isomorfismos

$$_R(X \otimes_S M, X \otimes_S M) \cong_{RepC^X} (X \otimes_S M, X \otimes_S M) \cong_S (M, M) \oplus_S (B^* \otimes_S M, M).$$

Luego

$$\begin{aligned} q_A(F_X(M)) &= \dim_k({}_R(X \otimes_S M, X \otimes_S M)) - \dim_k({}_R(W_0 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M)) \\ &\quad + \dim_k({}_R(W_1 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M)) \\ &= \dim_k({}_S(M, M)) + \dim_k({}_S(B^* \otimes_S M, M)) \\ &\quad - \dim_k({}_S(X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X \otimes_S M, M)) \\ &\quad + \dim_k({}_S(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X \otimes_S M, M)) \\ &= q_{A^X}(M). \end{aligned}$$

■

Lema 22. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible, entonces $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$ es equivalente a $RepC^X$.*

Demostración: Teniendo en mente a I.17.3 y III.18 definamos un funtor $G_1 : Tens_{S-Mod}\Gamma^* \longrightarrow RepC^X$.

En objetos $G_1(M) = M$.

Puesto que $\Gamma = S \oplus B$, sean $\pi_S : \Gamma \to S$ y $\pi_B : \Gamma \to B$ las proyecciones canónicas, y $\pi_B^* : B^* \longrightarrow \Gamma^*$ el monomorfismo inducido.

Consideremos los isomorfismos naturales de bimódulos

$$_S(\Gamma^* \otimes_S L, M) \cong_S (S^* \otimes_S L, M) \oplus_S (B^* \otimes_S L, M) \cong_S (L, M) \oplus_S (B^*, (L, M)_k)_S.$$

Podemos asociar a cada $f' \in_S (\Gamma^* \otimes_S L, M)$ el morfismo imagen bajo la sucesión anterior de isomorfismos, esto es : $G_1(f') = (f^0, f^1) = f$ definido como $f^0(l) = f'(\pi_S \otimes l)$ y $f^1(\gamma')[l] = f'(\pi_B^*(\gamma') \otimes l)$ para $\gamma' \in B^*$.

Sean las comultiplicaciones $\mu_0 : \Gamma^* \to \Gamma^* \otimes_S \Gamma^*$ y $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$. Por I.14 $\mu_0(\pi_S) = \pi_S \otimes \pi_S$, y si para $\gamma' \in B^*$ denotamos $\gamma = \pi_B^*(\gamma')$, entonces $\mu_0(\gamma) = \pi_S \otimes \gamma + \gamma \otimes \pi_S + \mu(\gamma')(\pi_B \otimes \pi_B)$.

Ahora sea $g' \in_S (\Gamma^* \otimes_S M, N)$, entonces

$$\begin{aligned} (G_1(g' \circledast f'))^0(l) &= [g'(Id \otimes f')(\mu_0 \otimes Id)](\pi_S \otimes l) \\ &= g'(Id \otimes f')(\pi_S \otimes \pi_S \otimes l) = g'(\pi_S \otimes f'(\pi_S \otimes l)) \\ &= g^0(f^0(l)) = (G_1(g'))^0 (G_1(f'))^0(l). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\gamma = \pi_B^*(\gamma')$ y $\mu(\gamma') = \sum_i \gamma_i^1 \otimes \gamma_i^2$

$$\begin{aligned}
&(G_1(g' \circledast f'))^1(\gamma)[l] \\
&= g'(Id \otimes f')(\mu_0 \otimes Id)(\gamma \otimes l) \\
&= g'(Id \otimes f')[(\pi_S \otimes \gamma + \gamma \otimes \pi_S + \mu(\gamma')(\pi_B \otimes \pi_B)) \otimes l] \\
&= g^0 f^1(\gamma)[l] + g^1(\gamma)[f^0(l)] + \textstyle\sum_i g^1(\pi_B^*(\gamma_i^1)) f^1(\pi_B^*(\gamma_i^2))[l] \\
&= (gf)^1(\gamma)[l]
\end{aligned}$$

Por lo que composiciones van en composiciones. Si $1_M : M \to M$ es la identidad de M en $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$, $m \in M$ y $\gamma' \in B^*$, entonces

$$\begin{aligned}
(G_1(1_M))^0(m) &= 1_M(\pi_S \otimes m) = \pi_S(1_\Gamma)m = \pi_S(1_S)m = m \\
(G_1(1_M))^1(\gamma')[m] &= 1_M(\pi_B^*(\gamma') \otimes m) = \gamma'\pi_B(1_\Gamma)m = 0,
\end{aligned}$$

es decir, $G_1(1_M) = (Id, 0)$. Hemos comprobado que G_1 es un funtor.

Ahora definamos un funtor $G_2 : Rep\mathcal{C}^X \to Tens_{S-Mod}\Gamma^*$.

En objetos $G_2(M) = M$. Si $f = (f^0, f^1) : L \to M$ es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$ definimos el morfismo $G_2(f) = f' : \Gamma^* \otimes_S L \to M$ como $f'((s\pi_S, \pi_B^*(\gamma')) \otimes l) = f^0(sl) + f^1(\gamma')[l]$.

Puesto que $G_2(G_1(f')) = f'$ y $G_1(G_2(f)) = f$, tenemos que G_2 es un funtor y es inverso de G_1.

■

Proposición 23. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Si S es semisimple y X es finitamente generado como $R-$módulo entonces X es $S-$completo.*

Demostración: Consideremos a $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ y el funtor del lema anterior $G_1 : Tens_{S-Mod}\Gamma^* \to Rep\mathcal{C}^X$. Por corolario I.21.1 $S - Mod$ es $X-$reducible.

Recordemos que $\Gamma = S \oplus B$. Sea $\{\rho_j', \gamma_j' \mid j \in \{2, ..., m\}\}$ una base dual de B_S. Sean $\pi_S : \Gamma \to S$ y $\pi_B : \Gamma \to B$ las proyecciones canónicas, $\pi_B^* : B^* \to \Gamma^*$ el monomorfismo inducido e $\iota_B : B^* \to \Gamma^*$ la inyección canónica. Definiendo $\gamma_j = \pi_B^*(\gamma_j')$, $\rho_j = \iota_B(\rho_j')$ para $j \in \{2, ..., m\}$, $\gamma_1 = \pi_S$ y $\rho_1 = (1_S, 0)$ obtenemos que $\{\rho_j, \gamma_j \mid j \in \{1, ..., m\}\}$ es una base dual de Γ_S. Como en I.21.1 tenemos el isomorfismo natural de $S - S-$bimódulos que preserva composiciones

$$\Psi = \Psi_2\Psi_1^{-1} :_S (\Gamma^* \otimes_S L, M) \to_R (X \otimes_S L, X \otimes_S M)$$

el cual para $f' \in_S (\Gamma^* \otimes_S L, M)$ está dado por

$$\begin{aligned}\Psi(f')[x\otimes l] &= \sum_j \rho_j(x)\otimes f'(\gamma_j\otimes l)\\ &= x\otimes f'(\pi_S\otimes l)+\sum_{j\geq 2}\rho_j(x)\otimes f'(\gamma_j\otimes l)\\ &= x\otimes (G_1(f'))^0(l)+\sum_{j\geq 2}\rho_j(x)\otimes (G_1(f'))^1(\gamma_j)[l]\\ &= F_X^{\mathcal{C}}(G_1(f'))[x\otimes l].\end{aligned}$$

Es decir, el funtor inducido por Ψ entre $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$ e $Induc_{S-Mod}X \subsetneq R-Mod$ es igual a $F_X G_1$. Puesto que Ψ y G_1 son fieles y plenos tenemos que F_X es fiel y pleno. ■

Proposición 24. *Sean ${}_RX_i$ módulos S_i–completos, para $i\in\{1,2\}$. Supongamos que si $i\neq j$ entonces ${}_R(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j)=0$. Entonces el R–módulo $X=X_1\oplus X_2$ es $S_1\times S_2$–completo.*

Demostración: Tenemos los isomorfismos de álgebras

$$({}_R(X,X))^{op}\cong\begin{pmatrix} S_1^{op}\oplus B_1^{op} & 0\\ 0 & S_2^{op}\oplus B_2^{op}\end{pmatrix}^{op}\cong\begin{pmatrix} S_1\oplus B_1 & 0\\ 0 & S_2\oplus B_2\end{pmatrix}$$

Sea $S=S_1\times S_2$. Tenemos el isomorfismo de $S-S$–bimódulos

$$\begin{pmatrix} S_1\oplus B_1 & 0\\ 0 & S_2\oplus B_2\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} S_1 & 0\\ 0 & S_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$

luego X es S–admisible. De hecho, $Rep\mathcal{C}^X\cong Rep\left(\mathcal{C}^{X_1}\times\mathcal{C}^{X_2}\right)$. Por proposición II.32, y usando su notación, tenemos un isomorfismo de categorías $F_{\eta_1}\times F_{\eta_2}: Rep\mathcal{C}^{X_1}\times Rep\mathcal{C}^{X_2}\to Rep\mathcal{C}^X$.

Dada la hipótesis, podemos asegurar la existencia de un isomorfismo de categorías $\vartheta: Induc_{S_1-Mod}X_1\times Induc_{S_2-Mod}X_2\to Induc_{S-Mod}X$, dado en objetos como $\vartheta((X_1\otimes M_1, X_2\otimes M_2))=((X_1\otimes M_1)\oplus(X_2\otimes M_2))$, y en morfismos, digamos para $f_1: X_1\otimes M_1\to X_1\otimes N_1$ y $f_2: X_2\otimes M_2\to X_2\otimes N_2$, como $\vartheta((f_1,f_2))=f_1\oplus f_2$.

Afirmamos que el siguiente diagrama de funtores conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Rep\mathcal{C}^{X_1}\times Rep\mathcal{C}^{X_2} & \overset{F_{\eta_1}\times F_{\eta_2}}{\longrightarrow} & Rep\mathcal{C}^X\\ \downarrow^{F_{X_1}^{\mathcal{C}}\times F_{X_2}^{\mathcal{C}}} & \vartheta & \downarrow^{F_X}\\ Induc_{S_1-Mod}X_1\times Induc_{S_2-Mod}X_2 & \longrightarrow & Induc_{S-Mod}X\end{array}$$

Para $M_1 \in S_1 - Mod$ y $M_2 \in S_2 - Mod$ tenemos que

$$\begin{aligned} \vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(M_1, M_2) &= \vartheta\left(X_1 \otimes M_1, X_2 \otimes M_2\right) \\ &= \left(X_1 \otimes M_1\right) \oplus \left(X_2 \otimes M_2\right) \cong X \otimes \left(M_1 \oplus M_2\right) \end{aligned}$$

y

$$F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(M_1, M_2) = F_X\left(M_1 \oplus M_2\right) = X \otimes \left(M_1 \oplus M_2\right).$$

Sea $\left\{x^1_j, \lambda^1_j \mid j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$ una base dual de $(X_1)_{S_1}$ y $\left\{x^2_j, \lambda^2_j \mid j \in \{n+1, \ldots, l\}\right\}$ una base dual de $(X_2)_{S_2}$, entonces su unión se puede identificada con $\{x_j, \lambda_j \mid j \in \{1, \ldots, l\}\}$ una base dual de X. Similarmente si $\{\rho^1_h, \gamma^1_h \mid h \in \{1, \ldots, s\}\}$ es una base dual de B_1y $\{\rho^2_h, \gamma^2_h \mid h \in \{s+1, \ldots, t\}\}$ es una base dual de B_2, entonces su unión puede ser identificada con $\{\rho_h, \gamma_h \mid h \in \{1, \ldots, t\}\}$ una base dual de B.

Por otra parte, si $f_1 = (f^0_1, f^1_1) : M_1 \to N_1$ es un morfismo en $RepC^{X_1}$ y $f_2 = (f^0_2, f^1_2) : M_2 \to N_2$ es un morfismo en $RepC^{X_2}$, tenemos, para $x \in X$, $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$, que

$$\begin{aligned} & \left(F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^0 \left[x \otimes (m_1 + m_2)\right] \\ = \; & x \otimes \left(f^0_1 \oplus f^0_2\right)(m_1 + m_2) \\ & + \textstyle\sum_{h=1}^{t} \rho_h(x) \otimes \left(f^1_1(e_1\gamma_h) \oplus f^1_2(e_2\gamma_h)\right)[m_1 + m_2] \\ = \; & x \otimes \left(f^0_1(m_1) + f^0_2(m_2)\right) \\ & + \textstyle\sum_{h=1}^{t} \rho_h(x) \otimes f^1_1(e_1\gamma_h)[m_1] + \sum_{h=1}^{t} \rho_h(x) \otimes f^1_2(e_2\gamma_h)[m_2] \\ = \; & \left(xe_1 \otimes f^0_1(m_1) + \textstyle\sum_{h=1}^{s} \rho^1_h(xe_1) \otimes f^1_1(\gamma^1_h)[m_1]\right) \\ & + \left(xe_2 \otimes f^0_2(m_2) + \textstyle\sum_{h=s+1}^{t} \rho^2_h(xe_2) \otimes f^1_2(\gamma^2_h)[m_2]\right) \\ = \; & \left(\vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^0 \left[x \otimes (m_1 + m_2)\right]. \end{aligned}$$

Similarmente verificamos, donde $w \in W_1$, que

$$\begin{aligned} & \left(F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 (w)\left[x \otimes (m_1 + m_2)\right] \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^{l} x_i \otimes \left(\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 (\lambda_i \otimes w \otimes x)[m_1 + m_2] \\ = \; & \left(\textstyle\sum_{j=1}^{l} x_i \otimes f^1_1(\lambda_i \otimes e_1 w \otimes x)[m_1]\right) \\ & + \left(\textstyle\sum_{j=1}^{l} x_i \otimes f^1_2(\lambda_i \otimes e_2 w \otimes x)[m_2]\right) \\ = \; & \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} x^1_i \otimes f^1_1\left(\lambda^1_i \otimes we_1 \otimes e_1 x\right)[m_1]\right) \\ & + \left(\textstyle\sum_{j=n+1}^{l} x^2_i \otimes f^1_2(\lambda_i \otimes we_2 \otimes e_2 x)[m_2]\right) \\ = \; & \left(\vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 \left[x \otimes (m_1 + m_2)\right]. \end{aligned}$$

Se sigue que F_X es fiel y pleno.

■

Corolario 25. *Sean* ${}_{R_i}X_i$ *módulos* S_i*−completos, para* $i \in \{1,2\}$. *Entonces* $X = X_1 \oplus X_2$ *es un* $R_1 \times R_2$*−módulo* $S_1 \times S_2$*−completo.*

Demostración: A través de las proyecciones $\pi_i : R_1 \times R_2 \to R_i$ los X_i adquieren estructura de $R_1 \times R_2$−módulo. Es claro que si $i \neq j$ entonces
${}_{R_1 \times R_2}\left(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j\right) = 0$, por lo que aplicamos la proposición anterior.
■

III.4 Preservación de triangularidad.

En esta sección veremos condiciones sobre X, un módulo S−admisible, para que la construcción $\mathcal{A}^X$ preserve triangularidad.

Definición 26. *Sea* ${}_RX$ *un módulo* S*−admisible, diremos que* X *es* S*−triangular si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $B = B_1 \oplus ... \oplus B_n$ como $S-S$−bimódulos, y $B_nB = BB_n = 0$ y $B_iB + BB_i \subseteq B_n \oplus ... \oplus B_{(i+1)}$.

2. $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_m = X$ como $R-S$−bimódulos. Además pediremos que como S−módulos, $X_{i+1} = X_i \oplus L_{i+1}$, para $i \geq 0$.

3. Para todo $\rho \in B$, y para cada $i \geq 1$, se tiene que $\rho(X_i) \subseteq X_{i-1}$.

Lema 27. *Sea* ${}_RX$ *un módulo* S*−triangular, y consideremos los mapeos* $a : X^* \to B^* \otimes_S X^*$ *y* $e : X \to X \otimes_S B^*$. *Entonces tenemos que:*

1. $e(X_1) = 0$. Para $i \geq 2$ se cumple que $e(X_i) \subseteq X_{i-1} \otimes_S B^*$.

2. Para $i \in \{0, 1, ..., m\}$ definimos $Y_{m-i} = \{\lambda \in X^* \mid \lambda(X_i) = 0\}$. Entonces Y_i es un $S - R$−subbimódulo de X^* y que $a(Y_i) \subseteq B^* \otimes_S Y_{i-1}$, para $i \geq 1$. En particular, $a(Y_1) = 0$.

Demostración:

1. Por III.12.1 tenemos que

$$e(X_i) = -\sum \rho_j(X_i) \otimes \gamma_j \subseteq X_{(i-1)} \otimes_S B^*.$$

2. Sea $\lambda \in Y_{m-n}$, como X_n es un $R-$módulo tenemos que $(s\lambda r)(X_n) = s(\lambda(rX_n)) = s0 = 0$, por lo que Y_{m-n} es un $S-R-$bimódulo.

Por hipótesis $X = \oplus_{i=1}^{m} L_i$ como $S-$módulos derechos. Sea $\{x_{i,t}, \lambda'_{i,t} \mid t \in \{1, ..., j_i\}\}$ una base dual de L_i. Sean $\pi_i : X \to L_i$ las proyecciones canónicas y $\lambda_{i,t} = \lambda'_{i,t}\pi_i$, entonces $\{x_{i,t}, \lambda_{i,t} \mid i \in \{1, ..., m\}, t \in \{1, ..., j_i\}\}$ es una base dual de X. Observemos que si $\lambda \in Y_{m-n}$ entonces $\lambda(\rho(x)) = 0$ para todo $x \in X_{n+1}$. Luego, para $\rho \in B$, tenemos que $\lambda(\rho(x_{l,t})) \neq 0$ sólo puede cumplirse cuando $l > n+1$. Usando III.12.2 se tiene que, para $\lambda \in Y_{m-n}$,

$$a(\lambda) = \sum_{i,t,j} \lambda(\rho_j(x_{i,t}))\gamma_j \otimes \lambda_{i,t} = \sum_{i>n+1} \sum_{t,j} \lambda(\rho_j(x_{i,t}))\gamma_j \otimes \lambda_{i,t}.$$

Como $\lambda_{i,t}(X_{n+1}) = 0$ cuando $i > n+1$, se sigue que los elementos $\lambda_{i,t}$ que aparecen en la expresión anterior de $a(\lambda)$, están en Y_{m-n-1}, por lo que se cumple el enunciado.

■

Lema 28. *Sea $_RX$ un módulo $S-$triangular y $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$ como en I.12. Entonces $\mu(B_1^*) = 0$ y $\mu(B_i^*) \subseteq (B_1^* + ... + B_{i-1}^*) \otimes_S (B_1^* + ... + B_{i-1}^*)$ para $i > 1$.*

Demostración: Sea $\{\rho_{i,t}, \gamma'_{i,t} \mid t \in \{1, ..., j_i\}\}$ una base dual de B_i^*, $i \in \{1, ..., n\}$. Sean $\pi_i : B \to B_i$ las proyecciones canónicas, y sea $\gamma_{i,t} = \gamma'_{i,t}\pi_i$, entonces tenemos que $\{\rho_{i,t}, \gamma_{i,t} \mid i \in \{1, ..., m\}, t \in \{1, ..., j_i\}\}$ es una base dual de B^*. Por I.9 tenemos isomorfismos

$$\oplus_{i,j}(B_i^* \otimes B_j^*) \cong \oplus_{i,j}(B_j \otimes B_i)^* \cong (B \otimes B)^*.$$

Recordemos de la observación I.1 que la comultiplicación está dada por $\mu(\gamma) = \sum_m \gamma_m^1 \otimes \gamma_m^2$, tal que éste es el único elemento que cumple que $\sum_m \gamma_m^1(\gamma_m^2(\rho_2)\rho_1) = \gamma(\rho_1 \cdot \rho_2)$, para todo $\rho_1, \rho_2 \in B$. Si $\gamma \in B_1^*$, entonces $\gamma(\rho_1 \cdot \rho_2) = 0$, por lo que $\mu(\gamma) = 0$, luego $\mu(B_1^*) = 0$. Como $B_iB + BB_i \subseteq B_n + ... + B_{(i+1)}$ se sigue que si $\gamma \in B_i^*$, entonces $\gamma(\rho_1 \cdot \rho_2) = 0$ cuando ρ_1 o ρ_2 pertenece a B_j, para $j \geq i$. Así que, de la definición de ϕ_2 en I.9, deducimos que en $\sum_m \gamma_m^1 \otimes \gamma_m^2$ no hay elementos de $B_n^* + ... + B_i^*$.

■

Corolario 29. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $_RX$ un módulo $S-$triangular. Entonces $\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R.*

Demostración: Por definición $\mathcal{C}^X = (S, W^C, \delta^C)$, donde $(End_R(X))^{op} = \Gamma = S \oplus B^*$, $W_0^C = 0$, $W_1^C = B^*$ y δ^C es la diferencial inducida por la comultiplicación $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$. Por el lema anterior $\mathcal{C}^X$ es un bocs triangular. Como $W_0^C = 0$, cualquier par de morfismos (q^0, q^1), donde $q^0 \in_S (L, M)$ y $q^1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$, luego $\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R.

■

Lema 30. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $_RX$ un módulo $S-$completo y $S-$triangular. Sea $f = (f^0, f^1) : L \to M$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$ y sea $(u^0, u^1) = F_X(f)$.*

1. *Entonces f^0 es una $S-$sección (retracción) si y sólo si u^0 es una $R-$sección (retracción). En particular, f^0 es un $S-$isomorfismo si y sólo si u^0 es un $R-$isomorfismo.*

2. *Sea $g = (g^0, g^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$ y sea $(v^0, v^1) = F_X(g)$. Si*

$$0 \to X \otimes_S L \xrightarrow{u^0} X \otimes_S M \xrightarrow{v^0} X \otimes_S N \to 0$$

es una sucesión exacta que se divide en $R - Mod$ entonces

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es una sucesión exacta que se divide en $S - Mod$.

Demostración: Sea $\mathcal{C}^X = (S, W^C, \delta^C)$. Puesto que $W_0^C = 0$, cualquier par de morfismos (q^0, q^1), donde $q^0 \in_S (L, M)$ y $q^1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$.

Sea $F_X^C : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ el funtor de III.18. Como en observación III.1 sea $f' = F_\sigma(f) = \left(f^0, f^1_{|B^*}\right)$. Del diagrama conmutativo de funtores, de la misma observación, se sigue que $u^0 = F_X^C(f')$.

Puesto que X es $S-$completo tenemos que F_X^C es fiel y pleno.

Sea $q^0 \in_S (M, L)$ tal que $q^0 f^0 = Id_L$, por el corolario III.29 $Rep\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R, así que por II.24 existe un morfismo $h = (Id, h^1) : M \to M'$ en $Rep\mathcal{C}^X$ tal que $hf' = (f^0, 0)$, luego $(q^0, 0) hf' = (Id_L, 0)$. En tal caso $Id_{X \otimes L} = F_X^C((q^0, 0) hf') = F_X^C((q^0, 0) h) u^0$. Esto prueba que si f^0 es una $S-$sección entonces u^0 es una $R-$sección.

Sea $v^0 : X \otimes_S M \to X \otimes_S L$ tal que $v^0 u^0 = Id_{X \otimes L}$. Hay un único morfismo $q = (q^0, q^1) : M \to L$ de $Rep\mathcal{C}^X$ tal que $F_X^C(q) = v^0$. Luego, $Id_{X \otimes L} = v^0 u^0 = F_X^C(q) F_X^C(f') = F_X^C(qf')$.

Entonces $(Id_L, 0) = qf' = \left(q^0 f^0, (qf')^1\right)$. Se sigue que si u^0 es una $R-$sección entonces f^0 es una $S-$sección.

De manera similar se prueba que u^0 es una $R-$retracción si y sólo si f^0 es una $S-$retracción.

Vayamos al último inciso.

Supongamos que hay $R-$morfismos $q : X \otimes_S M \to X \otimes_S L$ y $p : X \otimes_S N \to X \otimes_S M$ tales que $qp = 0$, $v^0 u^0 = 0$, $qu^0 = Id_{X \otimes_S L}$, $v^0 p = Id_{X \otimes_S N}$ y $pv^0 + u^0 q = Id_{X \otimes_S M}$.

Como F_X^C es fiel y pleno, hay morfismos únicos $(q^0, q^1) : M \to L$ y $(p^0, p^1) : N \to M$ tales que $F_X^C((q^0, q^1)) = q$ y $F_X^C((p^0, p^1)) = p$. Así que, por fidelidad y plenitud, obtenemos que

$(q^0, q^1)(p^0, p^1) = (0, 0)$, luego $q^0 p^0 = 0$,
$(g^0, g^1)(f^0, f^1) = (0, 0)$, luego $g^0 f^0 = 0$,
$(q^0, q^1) f' = (Id_L, 0)$, luego $q^0 f^0 = Id_L$,
$g'(p^0, p^1) = (Id_N, 0)$, luego $g^0 p^0 = Id_N$, y
$f'(q^0, q^1) + (p^0, p^1) g' = (Id_M, 0)$, luego $f^0 q^0 + p^0\, g^0 = Id_M$.

Entonces,

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es exacta que se divide en $S - Mod$.

■

Proposición 31. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea ${}_R X$ un módulo $S-$admisible. Entonces se satisface lo siguiente:*

1. *Si $\mathcal{A}$ es triangular y ${}_R X$ es $S-$triangular, entonces $\mathcal{A}^X$ es triangular.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y ${}_R X$ es $S-$triangular y completo, entonces $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.*

Demostración: Consideremos las filtraciones $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \ldots \subseteq W_1^s = W_1$ que hacen triangular al bocs $\mathcal{A}$. Sean $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n = B$, $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_m = X$ y $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_m = X^*$ como en III.26 y III.27. Para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq u \leq r$, $0 \leq j \leq m$ consideremos los $S-S-$sub-bimódulos de $X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X$ de la forma

$$W_0'((i, u, j)) = \langle \lambda \otimes w \otimes x \mid \lambda \in Y_i, w \in W_0^u, x \in X_j \rangle_S = Y_i \hat{\otimes}_S W_0^u \hat{\otimes}_S X_j.$$

Denotaremos por $\left(W_0'\right)^h$ al $S-S-$sub-bimódulo generado por todos los $W_0'((i, u, j))$ tales que $i + 2mu + j \leq h$.

La filtración previa induce una filtración:

$$0 = (W_0')^0 \subseteq (W_0')^1 \subseteq \ldots \subseteq (W_0')^q = X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X.$$

Para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq t \leq s$, $0 \leq j \leq m$, consideremos los $S-S$−sub-bimódulos de $X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X$ de la forma

$$W_1'((i,t,j)) = \langle \lambda \otimes w \otimes x \mid \lambda \in Y_i, w \in W_1^t, x \in X_j \rangle_S = Y_i \hat{\otimes}_S W_1^t \hat{\otimes}_S X_j.$$

Denotaremos por $(W_1')^l$ al $S-S$−subbimódulo generado por todos los $W_1'((i,t,j))$ con $i + 2mt + j \leq l$.

Sea $W_1'(d) = \oplus_{i \leq d} B_i^*$ para $1 \leq d \leq n$, y $W_1'(0) = 0$. Recordemos que $W_1^X = (X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X) \oplus B^*$. Se induce la filtración

$$0 = W_1'(0) \subseteq W_1'(1) \subseteq \ldots \subseteq W_1'(n) \subseteq (W_1')^1 \oplus B^* \subseteq \ldots \subseteq (W_1')^p \oplus B^* = W_1^X.$$

Afirmamos que las dos filtraciones presentadas hacen que $\mathcal{A}^X$ sea triangular.

Sea A_h' la subálgebra de $A(\mathcal{A}^X)$ generada por $(W_0')^h$, y A_u la subálgebra de $A(\mathcal{A})$ generada por W_0^u.

Recordemos de III.14 que

$\delta^X(\lambda \otimes w \otimes x) = a(\lambda) \otimes w \otimes x + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes e(x)$, y $\delta^X(\gamma) = \mu(\gamma)$ si $\gamma \in B^*$.

Así que aplicando III.27 obtenemos, para $i + 2mu + j \leq h$, con $h, i, j > 0$, $\lambda \in Y_i$ y $x \in X_j$, que

$$\begin{aligned}
&\delta^X(W_0'(i,u,j)) \\
&\subseteq B^* \hat{\otimes}_S W_0'(i-1,u,j) + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}) + W_0'(i,u,j-1) \hat{\otimes}_S B^* \\
&\subseteq W_1^X \hat{\otimes}_S A_{h-1}' + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}) + A_{h-1}' \hat{\otimes}_S W_1^X \\
&\subseteq A_{h-1}' \hat{\otimes}_S W_1^X \hat{\otimes}_S A_{h-1}' + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}). \ (*)
\end{aligned}$$

Ahora bien, sean $w_1, \ldots, w_q, w_1', \ldots, w_p' \in W_0^{u-1}$ y $v \in W_1$. Tenemos por III.13 que

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\lambda,x}(w_1 \otimes \ldots \otimes w_q \otimes v \otimes w_1' \otimes \ldots \otimes w_p') \\
&= \textstyle\sum_{z_k} \lambda \otimes w_1 \otimes x_{z_1} \otimes \lambda_{z_1} \otimes \ldots \otimes \lambda_{z_q} \otimes w_q \otimes x_{z_q} \otimes \lambda_{z_q} \otimes v \otimes \ldots \otimes \lambda_{z_{p+q}} \otimes w_p' \otimes x.
\end{aligned}$$

Luego

$$gr\left(\lambda_{z_k}\otimes w_k\otimes x_{z_k}\right)\leq m+2m\left(u-1\right)+m\leq 2mu<h.$$

Así que $(*)$ está contenida en $A'_{h-1}\hat{\otimes}_S W_1^X\hat{\otimes}_S A'_{h-1}$.

Consideremos la parte de grado uno. Sea $W'_1\left[d\right]$ el $A(\mathcal{A}^X)-A(\mathcal{A}^X)-$subbimódulo de B^* generado por $W'_1(d)$, es decir que $W'_1\left[d\right]=\left\langle W'_1(d)\right\rangle_{A(\mathcal{A}^X)}$. Por III.27 tenemos que

$$\begin{aligned}&\delta^X\left(W'_1\left(d\right)\right)=\delta^X\left(\oplus_{i\leq d}B^*_i\right)\subseteq\left(B^*_1+\dots+B^*_{d-1}\right)\otimes_S\left(B^*_1+\dots+B^*_{d-1}\right)\\&\subseteq W'_1\left[d-1\right]\hat{\otimes}_S W'_1\left[d-1\right].\end{aligned}$$

Sean $\left(W'_1\right)\left[l\right]=\left\langle\left(W'_1\right)^l\oplus B^*\right\rangle_{A(\mathcal{A}^X)}$ y $W_1\left(t\right)=\left\langle W_1^t\right\rangle_{A(\mathcal{A})}$. Para $i+2mt+j\leq l$, con $h,i,j>0$, $\lambda\in Y_i$ y $x\in X_j$ tenemos, por III.26, que

$$\begin{aligned}&\delta^X\left(W'_1\left(i,t,j\right)\right)\\&\subseteq B^*\hat{\otimes}_S W'_1\left(i-1,t,j\right)+\alpha_{\lambda,x}\left(\delta\left(W_1^t\right)\right)+W'_1\left(i,t,j-1\right)\hat{\otimes}_S B^*\\&\subseteq B^*\hat{\otimes}_S\left(W'_1\right)\left[l-1\right]+\alpha_{\lambda,x}\left(W_1\left(t-1\right)\hat{\otimes}_R W_1\left(t-1\right)\right)+\left(W'_1\right)\left[l-1\right]\hat{\otimes}_S B^*\\&\subseteq\left(W'_1\right)\left[l-1\right]\hat{\otimes}_S\left(W'_1\right)\left[l-1\right]+\alpha_{\lambda,x}\left(W_1\left(t-1\right)\hat{\otimes}_R W_1\left(t-1\right)\right)\\&\subseteq\left(W'_1\right)\left[l-1\right]\hat{\otimes}_S\left(W'_1\right)\left[l-1\right]+\left(X^*\hat{\otimes}_S W_1^{t-1}\hat{\otimes}_S X\right)\hat{\otimes}_S\left(X^*\hat{\otimes}_S W_1^{t-1}\hat{\otimes}_S X\right).\ (**)\end{aligned}$$

Para $\lambda\in X^*$, $x\in X$ y $w\in W_1^{t-1}$ tenemos que

$$gr\left(\lambda\otimes w\otimes x\right)\leq m+2m\left(t-1\right)+m\leq 2mt<h.$$

Así que $(**)$ está contenida en $\left(W'_1\right)\left[l-1\right]\hat{\otimes}_S\left(W'_1\right)\left[l-1\right]$.

Con esto hemos comprobado la triangularidad de $\mathcal{A}^X$.

Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y que ${}_RX$ es $S-$triangular y completo.

En la III.20 vimos que F_X es fiel y pleno, y que si (F_0,η_F) es el par de III.16 que enmarca a F, entonces η_F es biyectiva.

Por III.30 tenemos que si $\eta_F\left((f^0,f^1)\right)=\left(g^0,g^1\right)$, entonces g^0 es un $R-$isomorfismo si y sólo si f^0 es un $S-$isomorfismo.

Por III.17.1 se cumple el axioma II.30.4.

El axioma II.30.5 se cumple dado que η_F está definido en morfismos en la imagen de F_0, y si algún objeto en $\operatorname{Im}F_0$ también se encuentra en $Rep\mathcal{A}$, por III.17.1 está en $\operatorname{Im}F$.

Luego $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.

■

Corolario 32. *Sean ${}_RX_i$ módulos S_i−triangulares, para $i \in \{1,2\}$. Supongamos que si $i \neq j$ entonces ${}_R\left(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j\right) = 0$. Entonces el R−módulo $X = X_1 \oplus X_2$ es $S_1 \times S_2$−triangular.*

Demostración: Como se prueba al principio de la prueba de III.24, X es $S_1 \times S_2$−admisible.

Sean $B_1 = (B_1)_1 \oplus ... \oplus (B_1)_{n_1}$ y $0 = (X_1)_0 \subseteq (X_1)_1 \subseteq ... \subseteq (X_1)_{m_1} = X_1$ la descomposición y la filtración asociada a X_1, y sean $B_2 = (B_2)_1 \oplus ... \oplus (B_2)_{n_2}$ y $0 = (X_2)_0 \subseteq (X_2)_1 \subseteq ... \subseteq (X_2)_{m_2} = X_2$ la descomposición y la filtración asociada a X_2. Sean $\underline{n} = \min(n_1, n_2)$, $n' = \max(n_1, n_2)$, $\underline{m} = \min(m_1, m_2)$ y $m' = \max(m_1, m_2)$. Si $\underline{n} = n_1$ entonces sea $i = 1$, $j = 2$, en caso contrario sea $i = 2$, $j = 1$. Similarmente, si $\underline{m} = m_1$ entonces sea $h = 1$, $l = 2$, en caso contrario sea $h = 2$, $l = 1$.

No es difícil verificar que la descomposición de $S - S$−bimódulos

$$\begin{aligned} &B_1 \oplus B_2 \\ &= [(B_1)_1 \oplus (B_2)_1] \oplus ... \oplus \left[(B_1)_{\underline{n}} \oplus (B_2)_{\underline{n}}\right] \oplus \left[(B_i)_{\underline{n}} \oplus (B_j)_{\underline{n}+1}\right] \oplus ... \oplus \left[(B_i)_{\underline{n}} \oplus (B_j)_{n'}\right] \end{aligned}$$

y la filtración

$$\begin{aligned} &0 = [(X_1)_0 \oplus (X_2)_0] \subseteq [(X_1)_1 \oplus (X_2)_1] \subseteq ... \subseteq \left[(X_1)_{\underline{m}} \oplus (X_2)_{\underline{m}}\right] \subseteq ... \\ &\subseteq \left[(X_h)_{\underline{m}} \oplus (X_l)_{\underline{m}+1}\right] \subseteq ... \subseteq \left[(X_h)_{\underline{m}} \oplus (X_l)_{m'}\right] \end{aligned}$$

hacen que X sea $S_1 \times S_2$−triangular.

■

Corolario 33. *Sean ${}_{R_i}X_i$ módulos S_i− triangulares, para $i \in \{1,2\}$. Entonces $X = X_1 \oplus X_2$ es un $R_1 \times R_2$−módulo $S_1 \times S_2$−triangular.*

Necesitaremos algunos resultados de la teoría de anillos.

Definición 34. *(2.5.28[Ro]) Sea R una k−álgebra de dimensión finita. Decimos que R es separable si $R \otimes_K L$ es semisimple artiniana para toda extensión de campo L de k.*

Definición 35. *(5.3.6 [Ro]) Sean C una k-álgebra conmutativa y R una C−álgebra. Decimos que R es C−separable si R es proyectivo como $R \otimes_C R^{op}$−módulo.*

Teorema 36. *(5.3.18 [Ro]) R es k−separable en el sentido de III.34 si y sólo si lo es en el sentido de III.35.*

Proposición 37. *Si R y S son $k-$álgebras semisimples de dimensión finita, con k un campo perfecto, entonces $R \otimes_k S$ es semisimple artiniana.*

Demostración: Por ejercicio 2.5.8 [**Ro**] se tiene que si k es perfecto y R es una $k-$álgebra semisimple artiniana, entonces R es $k-$separable. Por proposición 5.3.10 (ii) [**Ro**] se sigue que $R \otimes_k S$ es $k \otimes_k k-$separable, luego, por III.36 es semisimple artiniana.

■

Teorema 38. *Sea k un campo perfecto y R una $k-$álgebra. Sea X un $R-$módulo izquierdo de $k-$dimensión finita. Entonces X es $S-$triangular y $S-$completo, con $S \cong (End_R(X))^{op} / rad((End_R(X))^{op})$.*

Demostración: Por el Teorema de Wedderburn-Malcev (5.3.20 [**Ro**]) tenemos que $\Gamma = (End_R(X))^{op} = S \oplus rad((End_R(X))^{op})$ y que S es semisimple, luego por III.23 X es $S-$completo. Para obtener la $S-$triangularidad veamos que si $rad\Gamma$ tiene grado de nilpotencia $n+1$ entonces

1. Tenemos una filtración $0 \subseteq (rad\Gamma)^n \subseteq ... \subseteq rad\Gamma = B$. Por proposición III.37 tenemos que $S \otimes_k S^{op}$ es semisimple, luego hay $S-S-$bimódulos B_i tales que $B_n = (rad\Gamma)^n$, y los cuales satisfacen que $(rad\Gamma)^i = (rad\Gamma)^{i+1} \oplus B_i$. A fortiori los B_i son proyectivos y f.g. como $S-$módulos derechos. Tenemos que $B_n B = (rad\Gamma)^n (rad\Gamma) = 0$ y $BB_n = (rad\Gamma)(rad\Gamma)^n = 0$. Además,

$$\begin{aligned} B_iB + BB_i \subseteq (rad\Gamma)^i (rad\Gamma) + (rad\Gamma)(rad\Gamma)^i &= (rad\Gamma)^{i+1} \\ &= \oplus_{j=i+1}^n B_j. \end{aligned}$$

2. Sea $X_j = (rad\Gamma)^{(n+1-j)}(X)$ y $X_{n+1} = X$, entonces se cumple que $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_{n+1} = X$ como $R-S-$bimódulos, donde cada X_i es finitamente generado y proyectivo como $S-$módulo, y que como $S-$módulos, $X_{i+1} = X_i \oplus L_i$.

3. También es claro que para todo $\rho \in B$, y cada $i \geq 1$, se tiene que $\rho(X_i) \subseteq X_{(i-1)}$.

■

III.5 Endolongitud y funtores de reducción.

Definición 39. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea M un objeto de $Rep\mathcal{A}$ y $E_M = \{f^0 \mid (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M)\}$. Luego E_M es un subanillo de $End_R(M)$, y M es un E_M^{op}–módulo con acción $mf = f(m)$. Decimos que la endolongitud de M es la longitud que tiene como E_M^{op}–módulo, y la denotaremos por endolen(M).*

Definición 40. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R, esto es, por definición, una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ del uno de la k–álgebra R en suma de idempotentes ortogonales. Notemos que si $M \in Rep\mathcal{A}$, por definición de E_M^{op}, hay morfismos de anillos $\varphi_i : E_M^{op} \to (End_{e_iRe_i}(e_iM))^{op}$. Así que tiene sentido considerar la longitud l_i de e_iM como E_M^{op}–módulo. Denotaremos entonces,*

$$\underline{e - \dim} M = (l_1, ..., l_n).$$

Observación III.2: Notemos que si $M \cong N$, entonces $\underline{e - \dim} M = \underline{e - \dim} N$, pues por observación II.2.1, tenemos que si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces f^0 es un isomorfismo, así que una filtración como E_M^{op}–módulo de e_iM se corresponde de manera única, a través de f^0, a una filtración como E_N^{op}–módulo de e_iN.

Lema 41. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Sea $j \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon = 1 - e_j$, $\mathcal{A}_\varepsilon = (R_\varepsilon, W_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ el bocs asociado al funtor eliminación del idempotente ε : $F_\varepsilon : Rep\mathcal{A}_\varepsilon \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, $e' = (e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n)$ es un vector de idempotentes para R_ε y si $M' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$, tenemos:*

$$\underline{e' - \dim} M' = (l_1, ..., l_{j-1}, l_{j+1}, .., l_n) \text{ si y sólo si}$$
$$\underline{e - \dim} F_\varepsilon(M') = (l_1, ..., l_{j-1}, 0, l_{j+1}, ..., l_n).$$

Demostración: Por III.3.2 la imagen de F_ε es la subcategoría de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $e_jM = 0$, así que existe $M' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$ tal que $M \cong F_\varepsilon(M')$. Recordemos que M es M' considerado como R–módulo, y que si $f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}_\varepsilon}(M')$ entonces $(F_\varepsilon(f))^0$ no es más que f^0 visto como R–morfismo. Luego, para $i \neq j$,

$$e_iM_1' \subseteq ... \subseteq e_iM_n' = e_iM'$$

es una $E_{M'}^{op}$–filtración si y sólo si es una E_M^{op}–filtración, por lo que se cumple el enunciado.

■

Lema 42. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Sea $\mathcal{A}_r = (R, W_r, \delta_r)$ el bocs asociado al funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, para cada $M' \in Rep\mathcal{A}_r$,*

$$\underline{e - \dim} M' = \underline{e - \dim} F_r (M') .$$

Demostración: Similar al lema anterior.

■

Lema 43. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Supongamos que $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$, $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, $R' = T_R(W_0^{(1)})$. Sean entonces $\mathcal{A}_\theta = (R', W_\theta, \delta_\theta)$ el bocs asociado al funtor absorción $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, para cada $M' \in Rep\mathcal{A}_\theta$*

$$\underline{e - \dim} M' = \underline{e - \dim} F_\theta (M') .$$

Demostración: Es inmediato que $(e_1, ..., e_n)$ es un vector de idempotentes de R'. Además, de la prueba de III.8.3 deducimos que ${}_R M' =_R F_\theta (M')$, por lo que $e_i M' = e_i F_\theta (M')$.

Como en las pruebas anteriores, si $f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}_\theta} (M')$ entonces $(F_\theta (f))^0$ no es más que f^0 visto como $R-$morfismo. Luego, para $i \neq j$,

$$e_i M_1' \subseteq ... \subseteq e_i M_n' = e_i M'$$

es una $E_{M'}^{op}-$filtración si y sólo si es una $E_M^{op}-$filtración, por lo que se cumple el enunciado.

■

Proposición 44. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular con vector de idempotentes $e = (e_1, ..., e_n)$. Sea ${}_R X$ un módulo $S-$triangular donde $S = D_1 \times ... \times D_m$ con D_i una $k-$álgebra de división. Sea $e' = (e_1', ..., e_m')$ el vector de idempotentes para S asociado a la descomposición $S = D_1 \times ... \times D_m$, y sea $a_t^i = \dim_{D_i} (e_t X e_i')$ para $t \in \{1, ..., n\}$ e $i \in \{1, ..., m\}$. Sea $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor de reducción asociado a X. Entonces, si $M' \in Rep\mathcal{A}^X$ tiene $\underline{e - \dim} M' = (l_1', ..., l_m')$, tendremos que*

$$\underline{e - \dim} F_X (M') = (\textstyle\sum_{i=1}^m a_1^i l_i', ..., \sum_{i=1}^m a_n^i l_i')$$

Demostración: Usando la notación y las fórmulas de III.15.2 y II.15.3 tenemos que si (f^0, f^1) es un automorfismo de M' en $Rep\mathcal{A}^X$, entonces $F_X ((f^0, f^1)) = (u^0, u^1)$ es un automorfismo de $M = F_X (M') = X \otimes_S M'$ en $Rep\mathcal{A}$, y que

$$u^0(x\otimes m) = x\otimes f^0(m) + \sum_j \rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m].$$

Definimos, $r(x\otimes m) = \sum_j \rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m]$. Así,

$$u^0 = I\otimes f^0 + r.$$

Sea $0 = X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^q = X$ la filtración de $R-S-$bimódulos considerada en la definición de $S-$triangularidad. Por comodidad usamos superíndices en lugar de subíndices. Recordemos que para toda $\rho\in B$, se cumple que $\rho(X^h)\subseteq X^{h-1}$, luego $r(e_tX^h\otimes_S M')\subseteq e_tX^{h-1}\otimes_S M'$ $(*)$. De esto se sigue que los $e_tX^h\otimes_S M'$ son $E_M^{op}-$módulos y $E_{M'}^{op}-$módulos. Más aún, de $(*)$ se sigue, para $h\in\{0,...,q-1\}$, que

$$l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'/e_tX^h\otimes_S M'\right) = l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'/e_tX^h\otimes_S M'\right).$$

También por $(*)$ las sucesiones

$$0\to e_tX^h\otimes_S M'\to e_tX^{h+1}\otimes_S M'\to\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'/e_tX^h\otimes_S M'\right)\to 0$$

son exactas de $E_M^{op}-$módulos y exactas de $E_{M'}^{op}-$módulos. Luego, inductivamente demostramos que $l_{E_M^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right) = l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right)$, para $h\in\{1,...,q\}$: el caso $h=1$ ya fue contemplado anteriormente, así que basta con ver que si suponemos cierto el enunciado para h, entonces, por las sucesiones exactas presentadas, tenemos que

$$\begin{aligned} l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'\right) &= l_{E_M^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right) + l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'/e_tX^h\otimes_S M'\right)\\ &= l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right) + l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'/e_tX^h\otimes_S M'\right)\\ &= l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1}\otimes_S M'\right).\end{aligned}$$

Así que, para $h\in\{1,...,q\}$

$$\begin{aligned} length_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right) &= length_{E_M^{op}}\left(e_tX^h\otimes_S M'\right)\\ &= length_{E_M^{op}}\left(\oplus_{i=1}^m e_tX^he_i'\otimes_S e_i'M'\right)\\ &= \sum_{i=1}^m \dim_{D_i}\left(e_tX^he_i'\right) length_{E_M^{op}}\left(e_i'M'\right)\\ &= \sum_{i=1}^m \dim_{D_i}\left(e_tX^he_i'\right) l_i'.\end{aligned}$$

Luego, $length_{E^{op}_{M'}}(e_t X \otimes_S M') = \sum_{i=1}^{m} a^i_t l'_i$.

■

Observación III.3: Las condiciones de la proposición anterior son satisfechas cuando se cumplen las hipótesis de III.38 y R es básica.

Observación III.4: Consideremos a Z^n, $(l_1, ..., l_n)$ un elemento arbitrario de Z^n y las siguientes transformaciones:

$t_{F_{e_i}} : Z^n \to Z^{n+1}$ dada como $t_{F_{e_i}}((l_1, ..., l_n)) = (l_1, ..., l_{i-1}, 0, l_i, ..., l_n)$ para $i \in \{1, ..., n+1\}$,

$t_{F_r} : Z^n \to Z^n$ dada como la identidad,

$t_{F_\theta} : Z^n \to Z^n$ dada como la identidad,

$t_{F_X} : Z^n \to Z^m$ dada como $t_{F_X}((l_1, ..., l_n)) = (\sum_{i=1}^{n} a^i_1 l_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a^i_m l_i)$ para enteros a^i_j.

Lo que hemos mostrado de III.41 a III.44 es que

$$\begin{aligned} t_{F_{e_i}}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_{e_j}(M'), \\ t_{F_r}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_r(M'), \\ t_{F_\theta}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_\theta(M'), \\ t_{F_X}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_X(M'). \end{aligned}$$

III.6 Bocses salvajes.

Sea Σ la categoría de $k\langle x, y\rangle$ −módulos izquierdos de dimensión finita sobre k. Para motivar la siguiente definición véase 3.6 de **[LRS]**.

Definición 45. *Decimos que el bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es de tipo de representación salvaje, o que es salvaje, si existe un $A(\mathcal{A}) - k\langle x, y\rangle$ −bimódulo M, finitamente generado como $k\langle x, y\rangle$ −módulo, tal que el funtor composición $G = E\left[M \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_\right] : \Sigma \to repA(\mathcal{A}) \to rep\mathcal{A}$, donde E denota la inmersión canónica, preserva inescindibles y clases de isomorfía. En lo sucesivo denotaremos a G simplemente como $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_$.*

Por supuesto que esta definición incluye el caso $\mathcal{A} = (R, 0, 0)$, y para el cual $Rep\mathcal{A} = R - Mod$.

Lema 46. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, y sea W'_0 un $R - R$−sumando directo de W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$. Sea M un objeto de $rep\mathcal{A}$ y A' la subálgebra $T_R(W'_0)$ de $A(\mathcal{A})$. Si M es inescindible como A'−módulo entonces es inescindible en $rep\mathcal{A}$.*

Demostración: Supongamos que M es inescindible como A'−módulo y que $f = (f^0, f^1) : M \to M$ es un morfismo idempotente en $rep\mathcal{A}$. Como $(f)^2 = f$ tenemos que $(f^0)^2 = f^0$. Por hipótesis $\delta(W'_0) = 0$, así que $f^0 \in End_{A'}(M)$, y como es idempotente, f^0 sólo puede ser la identidad o el morfismo cero. Si f^0 es un isomorfismo del lema II.25 se sigue que f es un isomorfismo, y así $f = Id_M$ en $repA$. Si $f^0 = 0$ por II.19 f es nilpotente, y por ser idempotente es el morfismo $(0,0)$.

■

Proposición 47. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, y sea W_0' un $R-R$–sumando directo de W_0, tal que $\delta\left(W_0'\right) = 0$. Sea A' la subálgebra $T_R(W_0')$ de $A(\mathcal{A})$. Si A' es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A' - k\langle x,y\rangle$ –bimódulo, el cual es finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, tal que el funtor $G_0 = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to repA'$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Hay una retracción de anillos $A(\mathcal{A}) \to A'$, así que se induce una retracción de funtores $r : A' - Mod \to A(\mathcal{A}) - Mod$ por V.1.2 de [M]. Luego hay un funtor $G = rG_0 : \Sigma \to repA$, dado en objetos como $G(Y) = r\left(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y\right) = r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$, y en morfismos g de Σ, como $F(g) = (r(G_0(g)), 0)$. Se cumple que $r(M)$ es finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, pues tiene la misma $k\langle x,y\rangle$ –estructura que M. Por el lema III.46, como r es retracción, se tiene que F preserva inescindibles.

Supongamos que $h = (h^0, h^1) : r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y \to r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y'$ es un isomorfismo en $repA$, por observación II.2.1 h^0 es un isomorfismo. Como $\delta\left(W_0'\right) = 0$ se sigue que h^0 es un isomorfismo en $A' - Mod$, así que por hipótesis Y y Y' son isomorfos en Σ. Luego F preserva clases de isomorfía.

■

Proposición 48. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y (η_0, η_1), con $\eta_0 : R \to R'$ y $\eta_1 : W \to W'$, un par graduado como en III.1. Sea $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ el bocs inducido y $F' : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ el encaje asociado, como en III.2.1. Supongamos que F' es pleno. Luego, si $\mathcal{A}'$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A(\mathcal{A}') - k\langle x,y\rangle$ –bimódulo, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, de manera tal que el funtor $G = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to repA'$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ el epimorfismo inducido, el cual es un morfismo de bocses. Sea $\theta' : A(\mathcal{A}') \otimes_{R'} M \to M$ el R'–morfismo que da estructura de $A(\mathcal{A}')$ –módulo a M, y sea $\theta : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M$ el R–morfismo que es la $A(\mathcal{A})$ –estructura inducida por η. Ahora bien, si $Y \in \Sigma$, entonces la $A(\mathcal{A}')$ –estructura de $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$ está dada por $\theta' \otimes Id_Y$. Luego la $A(\mathcal{A})$ –estructura inducida por η es $\theta_1 = \theta \otimes Id_Y$, es decir, $F'(G(Y)) \cong F'(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$.

Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $F'((f^0, f^1)) = (f^0, f^1\eta)$. Luego, si $g : Y \to Y'$ es un morfismo en Σ tenemos que

$F'(G(g)) = F'(Id_M \otimes g, 0) = \left(Id_{F'(M)} \otimes g, 0\right)$.

Concluimos que hay un funtor $G_0 = F'(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to repA$ el cual es naturalmente isomorfo a $F'G$, y puesto que en el contexto de la hipótesis F' es fiel y pleno, tenemos que $F'G$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

■

Corolario 49. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ el funtor eliminación de idempotentes. Si $\mathcal{A}_e$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Corolario 50. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ el funtor regularización. Si $\mathcal{A}_r$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Proposición 51. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$ el funtor absorción. Si $\mathcal{A}_\theta$ es salvaje, entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Se sigue de que F_θ es un isomorfismo de categorías.

■

Proposición 52. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea ${}_RX$ un módulo $S-$completo. Sea $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor reducción asociado a X. Si $\mathcal{A}^X$ es salvaje, entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A\left(\mathcal{A}^X\right) - k\langle x,y\rangle -$bimódulo, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle -$módulo, de manera tal que el funtor $G = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to rep\mathcal{A}^X$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ una base dual finita de X_S. Sea N un objeto en $Rep\mathcal{A}^X$ y $* : A\left(\mathcal{A}^X\right) \otimes_S N \to N$ su $A\left(\mathcal{A}^X\right) -$estructura. Tenemos por III.17.2 que la $A(\mathcal{A}) -$estructura de $F_X(N)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes n) = \textstyle\sum_i x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * n$$

para $a \in A(\mathcal{A})$. Así que la $A(\mathcal{A}) -$estructura de $F_X(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes m) \otimes y = \left(\textstyle\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * m\right) \otimes y$$

y la $A(\mathcal{A}) -$estructura de $F_X\left(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y\right)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes (m \otimes y)) = \textstyle\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * (m \otimes y) = \left(\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * m\right) \otimes y$$

por lo que $F_X\left(M\otimes_{k\langle x,y\rangle}Y\right)\cong F_X\left(M\right)\otimes_{k\langle x,y\rangle}Y$.
Si $g:Y\rightarrow Y'$ es un morfismo en Σ tenemos por III.15.2 y III.15.3 que

$$F_X\left(G\left(g\right)\right)=F_X\left(\left(Id_M\otimes g,0\right)\right)=\left(Id_X\otimes Id_M\otimes g,0\right)=\left(Id_{X\otimes M}\otimes g,0\right).$$

Se sigue que hay un funtor $G_0=F_X\left(M\right)\otimes_{k\langle x,y\rangle}\_:\Sigma\rightarrow rep\mathcal{A}$, el cual es naturalmente isomorfo a F_XG, y puesto que F_X es fiel y pleno, tenemos que F_XG preserva inescindibles y clases de isomorfía. Como $M_{k\langle x,y\rangle}$ y X_S son finitamente generados, tenemos que $F_X\left(M\right)_{k\langle x,y\rangle}$ es finitamente generado.
■

Capítulo IV
Estructuras exactas.

IV.1 Estructuras exactas y funtores exactos.

Recordemos que una categoría $\mathcal{C}$ es preaditiva si para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano, y para cada terna de objetos A, B, C en $\mathcal{C}$, la composición de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ es $\mathbb{Z}-$bilineal. Si además $\mathcal{C}$ tiene sumas directas finitas, y objeto cero, entonces $\mathcal{C}$ es aditiva. En los siguientes nueve enunciados $\mathcal{C}$ será una categoría aditiva.

Definición 1. *Sea (i, d) una pareja de morfismos en $\mathcal{C}$ con composición*

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$$

Decimos que i es un núcleo de d si $di = 0$ y para todo morfismo $t : M \to Y$ tal que $dt = 0$, existe un único morfismo $s : M \to X$ tal que $t = is$. A su vez, d es conúcleo de i si $di = 0$ y si para todo morfismo $p : Y \to N$ tal que $pi = 0$, existe un único morfismo $q : Z \to N$ tal que $p = qd$.

Nótese que un núcleo es un monomorfismo, y un conúcleo es un epimorfismo. Más aún, para un morfismo dado, en caso de existir su núcleo éste es único salvo isomorfismo, y en caso de existir su conúcleo éste es único salvo isomorfismo.

Definición 2. *Sea (i, d) una pareja de morfismos en $\mathcal{C}$ con composición*

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z,$$

diremos que (i, d) es una pareja exacta si i es núcleo de d, y d es conúcleo de i.

Definición 3. *Un morfismo entre parejas exactas (i, d) e (i_0, d_0), es una terna (f, g, h) de morfismos que hacen conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow \\ X_0 & \xrightarrow[i_0]{} & Y_0 & \xrightarrow[d_0]{} & Z_0 \end{array}$$

Definición 4. *Decimos que un morfismo entre parejas exactas es un isomorfismo si cada uno de los elementos de la terna es un isomorfismo.*

Luego, la relación de isomorfía es una relación de equivalencia.

Proposición 5. *Sea* $(f, g, h) : (i, d) \to (i_0, d_0)$ *un morfismo de parejas exactas:*

1. *Si* f, h *son monomorfismos, entonces* g *es un monomorfismo.*

2. *Si* f, h *son epimorfismos, entonces* g *es un epimorfismo.*

Demostración: Tengamos en mente el diagrama de la definición IV.3.

1. Sea $t : M \to Y$ tal que $gt = 0$, entonces $0 = d_0gt = hdt$. Puesto que h es un monomorfismo, se sigue que $dt = 0$, y así existe un único $s : M \to X$ tal que $is = t$. Luego $0 = gt = gis = i_0fs$, y como i_0f es un monomorfismo tenemos que $0 = s$ y que $t = 0$

2. Dual

■

Definición 6. *Una estructura exacta* ε *para la categoría* $\mathcal{C}$ *es una clase de parejas exactas* ε *cerrada bajo isomorfismos. Una conflación es una pareja exacta* (i, d) *en* ε*; en tal caso llamamos a* i *inflación y a* d *deflación.*

Definición 7. *([GR]) Una categoría exacta es un par* $(\mathcal{C}, \varepsilon)$*, donde* ε *es una estructura exacta para* $\mathcal{C}$*, que satisface el conjunto* GR *de axiomas siguiente:*

1. *La composición de dos deflaciones es una deflación.*

2. *Para cada* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z_0, Z)$ *y cada deflación* $d : Y \to Z$*, hay un* $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y_0, Y)$ *y una deflación* $d_0 : Y_0 \to Z_0$ *tal que* $dg = fd_0$*.*

3. *Las identidades son deflaciones, si* dp *es una deflación, entonces* d *es una deflación.*

4. *Las identidades son inflaciones, si* pi *es una inflación, entonces* i *es una inflación.*

Teorema 8. *(Keller) Sea* $(f, g, h) : (i, d) \to (i_0, d_0)$ *un morfismo de conflaciones. Si* f *y* h *son morfismos identidad, entonces* g *es un isomorfismo.*

Demostración: Es el paso 2, pag.31, de ([DRSS]).
■

Definición 9. *Consideremos el siguiente conjunto K de axiomas para un par $(\mathcal{C}, \varepsilon)$:*

1. *1_0 es una deflación.*

2. *Composición de deflaciones es una deflación.*

3. *Para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z_0)$ y toda deflación $d_0 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y_0, Z_0)$ hay un pull-back*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{d} & Z \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y_0 & \xrightarrow{d_0} & Z_0 \end{array}$$

donde d es una deflación.

4. *Para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X_0)$ y toda inflación $i \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ hay un pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X_0 & \xrightarrow{i_0} & Y_0 \end{array}$$

donde i_0 es una inflación.

5. *Las retracciones en $\mathcal{C}$ tienen núcleos.*

Teorema 10. *(Keller [DRSS]) Para un par $(\mathcal{C}, \varepsilon)$, los siguientes conjuntos de axiomas son equivalentes:*

1. *K*

2. *K^{op}*

3. *GR*

4. *GR^{op}*

Ahora construyamos una estructura exacta para $RepA$ cuando $\mathcal{A}$ es un bocs. Recordemos que por observación II.2.2 $RepA$ es una categoría aditiva.

Definición 11. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs, denotaremos por $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ a la clase formada por aquellos pares de morfismos con composición,*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

tales que $gf = 0$ y la sucesión de $R-$módulos

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es exacta que se divide.

Probaremos que $(Rep\mathcal{A}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ es una categoría exacta, si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R, pero primero veremos que $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ consta de pares exactos de $Rep\mathcal{A}$.

Lema 12. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs, entonces $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es cerrada bajo isomorfismos.*

Demostración: Sea (f, g) un elemento de $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, y consideremos el isomorfismo de parejas exactas

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & {\scriptstyle h_2}\downarrow & & {\scriptstyle h_3}\downarrow \\ L_0 & \xrightarrow[u]{} & M_0 & \xrightarrow[v]{} & N_0. \end{array}$$

Como $0 = h_3 gf = vuh_1$ y h_1 es un isomorfismo, tenemos que $vu = 0$. Por observación II.2.1 h_1^0, h_2^0 y h_3^0 son $R-$isomorfismos, así que (u^0, v^0) es exacta corta que se divide.

■

Definición 13. *Dos pares $(f, g), (f', g') \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$ son equivalentes, si y sólo si hay un isomorfismo h que hace conmutativo el siguiente diagrama en $Rep\mathcal{A}$:*

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ \| & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \| \\ L & \xrightarrow[f']{} & M' & \xrightarrow[g']{} & N. \end{array}$$

Lema 14. *(Ovsienko) Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Cada par $(f, g) \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$, en donde $f = (f^0, f^1)$, $g = (g^0, g^1)$ y*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N,$$

es equivalente a un par en ε_A de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M' \xrightarrow{(g^0,0)} N.$$

Demostración: Sea $x = ((f^0, f^1), (g^0, g^1))$ un elemento de ε_A.

Como f^0 es una R–sección, tenemos por II.24 un isomorfismo $h = (Id, h^1) : M \to M'$ tal que $hf = (f^0, 0)$, es decir que tenemos la equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{(f^0,f^1)} & M & \xrightarrow{(g^0,g^1)} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \xrightarrow[(f^0,0)]{} & M' & \xrightarrow[(g^0,\nu)]{} & N. \end{array}$$

De la misma manera, como g^0 es una R–retracción, por II.23 hay un isomorfismo $h = (Id, h^1) : M'' \to M$ tal que $gh = (g^0, 0)$, es decir que ahora tenemos la equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{(f^0,u)} & M'' & \xrightarrow{(g^0,0)} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \xrightarrow[(f^0,f^1)]{} & M & \xrightarrow[(g^0,g^1)]{} & N. \end{array}$$

Consideremos a todos los pares de ε_A equivalentes a x que son de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M' \xrightarrow{(g^0,\nu)} N$$

o de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,u)} M' \xrightarrow{(g^0,0)} N$$

Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 relacionada a la triangularidad. A un par $x' \in \varepsilon_A$ del primer tipo asociémosle el número $i_{x'}$, definido como el máximo valor para el que $\nu(W_1^i) = 0$, y a un par $x'' \in \varepsilon_A$ del segundo tipo, el número $j_{x''}$, definido como el máximo valor para el cual $u\left(W_1^j\right) = 0$. Sea n el máximo de todos los posibles valores $i_{x'}$ y $j_{x''}$, si $n = s$ el enunciado es cierto. Supongamos que $n < s$ y que $n = i_{x'}$ para algún par $x' \in \varepsilon_A$, como antes, por II.23 tenemos una equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \overset{(f^0,u)}{\rightarrow} & M' & \overset{(g^0,0)}{\rightarrow} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \underset{(f^0,0)}{\rightarrow} & M'' & \underset{(g^0,\nu)}{\rightarrow} & N \end{array}$$

para la cual $h^1(w) = -q\nu(w)$ cuando $w \in W_1^{i_{x'}+1}$, donde $q \in_R (N, M')$ es tal que $g^0 q = Id$. Puesto que $0 = ((g^0,\nu)(f^0,0))^1(w) = \nu(w) f^0$, tenemos que, para $w \in W_1^{i_{x'}+1}$

$$0 = (h(f^0,u))^1(w) = h^1(w) f^0 + Idu^1(w) = -q\nu(w) f^0 + u^1(w) = u^1(w),$$

lo que contradice la maximalidad de n. Si $n < s$ y $n = j_{x''}$ para algún par $x'' \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$, como antes, tenemos una equivalencia de pares de $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, por II.24

$$\begin{array}{ccccc} L & \overset{(f^0,u)}{\rightarrow} & M' & \overset{(g^0,0)}{\rightarrow} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \underset{(f^0,0)}{\rightarrow} & M'' & \underset{(g^0,\nu)}{\rightarrow} & N \end{array}$$

para la cual $h^1(w) = u(w)(-q)$ cuando $w \in W_1^{j_{x''}+1}$, donde $q \in_R (M'', L)$ es tal que $qf^0 = Id$. Puesto que $0 = ((g^0,0)(f^0,u))^1(w) = g^0 u(w)$, tenemos que, para $w \in W_1^{j_{x''}+1}$

$$0 = ((g^0,\nu) h)^1(w) = g^0 h^1(w) + \nu(w) Id = g^0 u(w)(-q) + \nu(w) = \nu(w)$$

lo que contradice la maximalidad de n.
■

Lema 15. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R y supongamos que*

$$L \overset{f^0}{\rightarrow} M \overset{g^0}{\rightarrow} N$$

es una sucesión exacta corta de $A(\mathcal{A})$-módulos, entonces en $Rep\mathcal{A}$: $(f^0, 0)$ es núcleo de $(g^0, 0)$, y $(g^0, 0)$ es un conúcleo de $(f^0, 0)$. Así que, $((f^0, 0), (g^0, 0))$ es un par exacto en $Rep\mathcal{A}$.

Demostración: Por observación II.2.2 $(f^0, 0)$ y $(g^0, 0)$ son morfismos en $RepA$.

Sea $h = (h^0, h^1) : X \to M$ tal que $gh = 0$. Luego existe un único $u^0 \in_R (X, L)$ tal que $f^0u^0 = h^0$, y para cada $v \in V(\mathcal{A})$ existe un único morfismo $u^1(v) \in (X, L)_k$ tal que $f^0u^1(v) = h^1(v)$.

Entonces, para cada $a \in A(\mathcal{A})$, se cumple que

$$f^0u^1(av) = h^1(av) = ah^1(v) = af^0(u^1(v)) = f^0(au^1(v)),$$

luego, de la inyectividad de f^0 se sigue que $u^1(av) = au^1(v)$. Similarmente, se tiene que

$$f^0[(u^1(va))[x]] = h^1(va)[x] = h^1(v)[ax] = f^0[(u^1(v))[ax]] = f^0[(u^1(v)a)[x]]$$

implica que $u^1(va) = (u^1(v))a$. Por lo anterior $u^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), (X, L)_k)$. Como tenemos que f^0 es un morfismo de $A(\mathcal{A})-$módulos, luego

$$f^0(au^0(x) - u^0(ax)) = af^0(u^0(x)) - f^0(u^0(ax)) = ah^0(x) - h^0(ax) = \\ h^1(\delta(a))[x] = f^0[u^1(\delta(a))[x]],$$

por lo tanto $au^0(x) - u^0(ax) = u^1(\delta(a))[x]$, por lo que $u = (u^0, u^1) : X \to L$ es un morfismo en $RepA$, y como se vió en la construcción es único.

De manera análoga se prueba que $(g^0, 0)$ es un conúcleo.

■

Corolario 16. *Si $\mathcal{A}$ un bocs K-R, $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es una estructura exacta sobre $RepA$.*

Lema 17. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Un morfismo $(g^0, g^1) : M \to N$ en $RepA$ es una deflación si y sólo si g^0 es una $R-$retracción.*

Demostración: Una implicación se sigue de la definición.

Si $g = (g^0, g^1)$ cumple que g^0 es una $R-$retracción, entonces por lema II.23 existe un isomorfismo $h = (Id, h^1) : M' \to M$ tal que $gh = (g^0, 0)$. Como $(g^0, 0)$ es un morfismo en $RepA$, se sigue que g^0 es una $A(\mathcal{A})-$retracción. Sea f^0 el inverso derecho de g^0. Por lema IV.15 la primera línea del siguiente diagrama es conflación:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{(f^0,0)} & M' & \xrightarrow{(g^0,0)} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ K & \xrightarrow[(f^0,f^1)]{} & M & \xrightarrow[(g^0,g^1)]{} & N. \end{array}$$

Puesto que $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es cerrado bajo isomorfismos, por IV.12, la segunda línea también es conflación.

■

Similarmente se prueba el resultado dual.

Lema 18. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Un morfismo $(f^0, f^1) : L \to M$ en $Rep\mathcal{A}$ es inflación si y sólo si f^0 es una R–sección.*

Teorema 19. *$(Rep\mathcal{A}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ es una categoría exacta.*

Demostración: De los lemas anteriores se siguen los axiomas 11.1, 11.3 y 11.4 :

1. (11.1) : Si $g = (g^0, g^1) : M \to N$ y $h = (h^0, h^1) : N \to X$ son deflaciones, entonces g^0 y h^0 son R–retracciones, así que $h^0 g^0$ es una R–retracción, luego $hg = \left(h^0 g^0, (hg)^1\right)$ es una deflación.

2. (11.3) : Las identidades, las cuales son morfismos de la forma $(Id, 0)$, por IV.17 son deflaciones. Si dp es una deflación entonces $(dp)^0 = d^0 p^0$ es una R–retracción, así que d^0 es una R–retracción y d es una deflación.

3. (11.4) : Argumento dual.

Vamos a probar 11.2. Sean $f = (f^0, f^1) : Z_0 \to Z$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ y $d = (d^0, d^1) : Y \to Z$ una deflación. Puesto que d^0 es una R–retracción existe $q \in_R (Z, Y)$ tal que $d^0 q = Id_Z$. Luego, el R–morfismo $(d^0, -f^0) : Y \oplus Z_0 \to Z$ es una R–retracción, pues si consideramos el R–morfismo $\binom{q}{0} : Z \to Y \oplus Z_0$ obtenemos que $(d^0, -f^0)\binom{q}{0} = d^0 q = Id_Z$. Así que por IV.17, existe una conflación

$$N \xrightarrow{\binom{j_1}{j_2}} Y \oplus Z_0 \xrightarrow{(d,-f)} Z.$$

Así, $j = \binom{j_1}{j_2}$ es núcleo de $(d, -f)$. Luego, si $\binom{u}{v} : X \to Y \oplus Z_0$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ tal que $du = fv$, existe un único morfismo $p : X \to N$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $j_1 p = u$ y $j_2 p = v$, es decir, tenemos un pullback en $Rep\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "j_1"'] \arrow[dr, phantom, "d"] & Z_0 \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r] & Z. \end{tikzcd}$$

Como $(j, (d, -f))$ es una conflación, tenemos que $(j^0, (d^0, -f^0))$ es una sucesión corta exacta que se divide, luego

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{j_2^0} & Z_0 \\ j_1^0 \downarrow & d^0 & \downarrow f^0 \\ Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

es el pullback en $R-Mod$, por lo que j_2^0 es una $R-$retracción. Por IV.17 tenemos que j_2 es una deflación.

■

Observación IV.1: En el desarrollo anterior hemos construido el pullback en $RepA$, de manera dual podemos construir el pushout, el cual existe por IV.10.

Definición 20. *Denotaremos por $Ext_A(M,N)$ a las clases de equivalencia bajo la equivalencia de conflaciones que principian en N y terminan en M.*

Como en el caso de las categorías abelianas se le puede dar a $Ext_A(M,N)$ una estructura de $k-$espacio vectorial: el teorema IV.10, y la existencia del pullback y el pushout permiten imitar las pruebas de III.1 y III.2 de [M]. Más aún, $Ext_A(?,\_)$ es un bifuntor sobre $RepA$, contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

Definición 21. *Sea T un álgebra y R una subálgebra de T. Si $M,N \in T-Mod$ entonces definimos a $Ext_{T,R}(M,N)$ como todos los elementos de $Ext_T(M,N)$ que restringidos a R se dividen.*

Proposición 22. *Sea $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs K-R. Sean $L,N \in RepA$, y denotemos por $\theta_1 \in Hom_{R-R}(W_0,(L,L)_k)$ y $\theta_2 \in Hom_{R-R}(W_0,(N,N)_k)$ los morfismos correspondientes a sus respectivas estructuras de $A(\mathcal{A})-$módulos. Consideremos la siguiente sucesión:*

$$0 \rightarrow Hom_{\mathcal{A}}(N,L) \xrightarrow{\alpha} {}_R(N,L) \oplus Hom_{R-R}(W_1,(N,L)_k) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} Hom_{R-R}(W_0,(N,L)_k) \xrightarrow{\gamma} Ext_{\mathcal{A}}(N,L) \rightarrow 0$$

donde $\alpha(f) = \alpha((f^0,f^1)) = (f^0,f^1)$, $\beta((f_0,f_1))(w)[n]$
$= \theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n]) - f_1(\delta(w))[n]$, *y definimos a $\gamma(g)$ como la clase de la conflación*

$$c_g = L \xrightarrow{(\binom{1}{0},0)} L \oplus N \xrightarrow{((0,1),0)} N$$

donde L y N conservan las respectivas estructuras de $A(\mathcal{A})-$módulos, y a $L \oplus N$ le asociamos la estructura dada por

$$\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & g \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la sucesión es exacta.

En particular, para $M \in repA$ se tiene que

$$\dim_k (Hom_{\mathcal{A}}(M,M)) - \dim_k (Ext_{\mathcal{A}}(M,M)) = q_{\mathcal{A}}(M).$$

Demostración: La inyectividad de α es inmediata. El núcleo de β se compone de los morfismos (f_1, f_2) tales que $\theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n]) - f_1(\delta(w))[n] = 0$, los cuales son precisamente los morfismos $(f^0, f^1) \in_{RepA}(N,L)$, es decir, $\operatorname{Im}\alpha = Ker\beta$.

Cualquier sucesión $x \in Ext_{\mathcal{A}}(N,L)$ se divide en $R - Mod$, por lo que podemos suponer, gracias a IV.14, que un representante de x se escribe, en términos de $A(\mathcal{A})-$módulos, como

$$L \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} L \oplus N \xrightarrow{((0,1),0)} N.$$

De esta manera tenemos que la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo de $L \oplus N$ está determinada por un $\theta_3 \in Hom_{R-R}(W_0, (L \oplus N, L \oplus N)_k)$, lo que podemos escribir como $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_3^1 & \theta_3^2 \\ \theta_3^3 & \theta_3^4 \end{pmatrix}$. Entonces, para que $\binom{1}{0}$ y $(0,1)$ sean $A(\mathcal{A})-$morfismos se debe cumplir que $\begin{pmatrix} \theta_3^1 \\ \theta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $(\theta_3^3, \theta_3^4) = (0, \theta_2)$, por lo que en realidad $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta' \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$.

De aquí se sigue que $\gamma : Hom_{R-R}(W_0, (N,L)_k) \to Ext_{\mathcal{A}}(N,L)$ es suprayectiva.

Supongamos que las conflaciones c_g y $c_{g'}$ son equivalentes, esto es, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_g: & 0 & \to & L & \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} & L \oplus N & \xrightarrow{((0,1),0)} & N & \to & 0 \\
 & & & \| & & h \downarrow & & \| & & \\
c_{g'}: & 0 & \to & L & \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} & L \oplus N & \xrightarrow{((0,1),0)} & N & \to & 0.
\end{array}$$

Usando la conmutatividad del diagrama en *RepA*, es una comprobación directa ver que $h = \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, por lo que

$$\begin{pmatrix} \theta_1(w) & g'(w) \\ 0 & \theta_2(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{l}{n} - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(w) & g(w) \\ 0 & \theta_2(w) \end{pmatrix} \left(\binom{l}{n}\right)$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\delta(w)) \left[\binom{l}{n}\right] = 0$$

de lo cual se sigue que

$$\theta_1(w)[t(n)] + g'(w)[n] - t(\theta_2(w)[n]) - g(w)[n] - s(\delta(w))[n] = 0$$

es decir que $(g - g') = \beta((t,s))$, por lo que $\operatorname{Im}\beta = Ker\gamma$.
■

Proposición 23. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ la estructura exacta sobre RepA definida en IV.11. Sea W_0^1 un sumando directo de W_0 como $R-R-$bimódulos, tal que $\delta(W_0^1) = 0$, y sea $T = T_R(W_0^1)$. Entonces tenemos un morfismo suprayectivo de $End_{\mathcal{A}}(L) - (End_{\mathcal{A}}(N))^{op}$ $-$bimódulos dado por la restricción*

$$r : Ext_{\mathcal{A}}(N, L) \to Ext_{T,R}(N, L).$$

Demostración: Sea $i : W_0^1 \to W_0$ la inclusión canónica. Consideremos las sucesiones de la proposición previa. Afirmamos que hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} {}_R(N,L) \oplus Hom_{R-R}(W_1,(N,L)_k) & \xrightarrow{\beta} & Hom_{R-R}(W_0,(N,L)_k) & \xrightarrow{\gamma} & Ext_{\mathcal{A}}(N,L) \\ {\scriptstyle (1,0)}\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\ {}_R(N,L) & \xrightarrow{\beta'} & Hom_{R-R}(W_0^1,(N,L)_k) & \xrightarrow{\gamma'} & Ext_{T,R}(N,L), \end{array}$$

donde las horizontales son sucesiones exactas y γ y γ' son suprayectivas. Las últimas afirmaciones se siguen de la proposición anterior, así que comprobemos la conmutatividad:

$\beta' \cdot (1,0)((f_0, f_1)) = \beta'(f_0) = g$ definida por $g(w)[n] = \theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n])$, mientras que $i^* \cdot \beta((f_0, f_1)) = g_0$ está dada por

$$\begin{aligned} g_0(w)[n] &= \theta_1(i(w))[f_0(n)] - f_0(\theta_2(i(w))[n]) - f_1(\delta(i(w)))[n] \\ &= \theta_1(i(w))[f_0(n)] - f_0(\theta_2(i(w))[n]), \end{aligned}$$

luego conmuta el primer cuadro. Por otra parte,

$$\gamma' i^*(g) \quad = \quad L \xrightarrow{\binom{1}{0}} L \oplus N \xrightarrow{(0,1)} N$$

donde a $L \oplus N$ le asociamos la estructura dada por $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & g \cdot i \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$, y precisamente ésta es el resultado de $r(\gamma(g))$. Como $\gamma' i^*$ es un epimorfismo, se tiene que r es un epimorfismo.

Sea $x = ((f^0, 0), (g^0, 0))$ un representante de un elemento $Ext_{\mathcal{A}}(N, L)$. Por IV.19 y IV.14, si $u = (u^0, u^1) : N' \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces hay un diagrama de pullback en $Rep\mathcal{A}$ y una equivalencia de conflaciones:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & ((f')^0,0) & & ((g')^0,0) & \\
x': & L & \to & M'' & \to & N' \\
 & \| & f' & \downarrow^{v_2} & g' & \| \\
 & L & \to & E & \to & N' \\
 & \| & (f^0,0) & \downarrow^{v_1} & (g^0,0) & \downarrow^{u^0} \\
x: & L & \to & M & \to & N.
\end{array}$$

Sea $v_1 v_2 = v = (v^0, v^1)$. Como $\delta(W_0^1) = 0$ se sigue que v^0 y u^0 son T–morfismos. Luego, al aplicar r obtenemos el diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas en $T - Mod$:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & (f')^0 & & (g')^0 & \\
r(x'): & L & \to & M'' & \to & N' \\
 & \| & f^0 & \downarrow^{v^0} & g^0 & \downarrow^{u^0} \\
r(x): & L & \to & M & \to & N.
\end{array}$$

Sea $r(x)u^0$ el pullback de $r(x)$ por u^0 en $T - Mod$. Por lema III.1.3 de [M] existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & (f')^0 & & (g')^0 & \\
r(x'): & L & \to & M'' & \to & N' \\
 & \| & & \downarrow & & \| \\
r(x)u^0: & L & \to & M' & \to & N' \\
 & \| & f^0 & \downarrow & g^0 & \downarrow^{u} \\
r(x): & L & \to & M & \to & N.
\end{array}$$

Luego, $r(x')$ es equivalente a $r(x)u^0$. Hemos demostrado que si, para $y \in Ext_{T,R}(N, L)$ y $u = (u^0, u^1) \in End_{\mathcal{A}}(N)$, definimos la acción por la derecha como el pullback

yu^0 (¡compárese con la definición de E_M^{op} en III.39 !), entonces r es un morfismo de $(End_{\mathcal{A}}(N))^{op}$ −módulos.

Similarmente probamos que r es morfismo de $End_{\mathcal{A}}(L)$ −módulos.

■

Definición 24. *Un funtor $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bocses K-R, se dice que es exacto si envia conflaciones en conflaciones.*

Lema 25. *Sea $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ un funtor exacto. Entonces:*

1. *F induce una transformación natural de bifuntores*

$$F_* : Ext_{\mathcal{B}}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F(?), F(\_)).$$

2. *Si F es fiel y pleno entonces F_* es inyectiva.*

Demostración: La primera parte se realiza como en [M]. Para la segunda parte, consideremos la conflación en $Rep\mathcal{B}$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

La conflación

$$F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$$

se divide si y sólo si existe un morfismo $h : F(N) \to F(M)$ tal que $F(g)h = (I_{F(N)}, 0)$. Como F es pleno existe h' tal que $F(h') = h$. Como F es fiel tenemos que $gh' = (I_N, 0)$, así que la sucesión original se divide.

■

Lema 26. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sea $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ un bocs como en III.1, de manera que el morfismo de bocses η es suprayectivo, por lo que $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ es el encaje de III.2.*

1. *Si $\mathcal{A}'$ es K-R entonces F_η es exacto.*

2. *Supongamos que $\mathrm{Im}\, F_\eta$ es cerrada bajo extensiones en $A(\mathcal{A}) - Mod$. Si el par de morfismos con composición $(F_\eta(f), F_\eta(g))$ es una conflación, entonces es equivalente a la imagen, bajo F_η, de una conflación $(\underline{f}, \underline{g})$.*

Demostración: Sea $f=(f^0,f^1)$ en $RepA'$; el morfismo $(F_\eta(f))^0$ es precisamente el morfismo f^0 considerado como $R-$morfismo. Luego, para $f=(f^0,f^1):L\to M$ y $g=(g^0,g^1):M\to N$ en $RepA'$ tenemos que

$$0\;\to\;L\;\overset{f^0}{\to}\;M\;\overset{g^0}{\to}\;N\;\to\;0$$

es exacta que se divide si y sólo si

$$0\;\to\;F_\eta(L)\;\overset{(F_\eta(f))^0}{\to}\;F_\eta(M)\;\overset{(F_\eta(g))^0}{\to}\;F_\eta(N)\;\to\;0$$

es exacta que se divide. Por fidelidad tenemos que $(F_\eta(g))(F_\eta(f))=0$ si y sólo si $gf=0$.

Supongamos que (f,g) es una conflación. Por IV.14 hay una conflación equivalente $(\underline{f},\underline{g})$de la forma

$$L\;\overset{(f^0,0)}{\to}\;M'\;\overset{(g^0,0)}{\to}\;N$$

donde f^0 y g^0 son $A(\mathcal{A}')-$morfismos. Como $F_\eta(\underline{f})=\left((F_\eta(\underline{f}))^0,0\right)$ y $F_\eta(\underline{g})=\left((F_\eta(\underline{g}))^0,0\right)$, entonces $(F_\eta(\underline{f}))^0$ y $(F_\eta(\underline{g}))^0$ son $A(\mathcal{A})-$morfismos. Luego, por IV.15, $\left(F_\eta(\underline{f}),F_\eta(\underline{g})\right)$ es un elemento de $\varepsilon_{\mathcal{A}}$. Como F_η es un funtor $\left(F_\eta(\underline{f}),F_\eta(\underline{g})\right)$ es equivalente a $(F_\eta(f),F_\eta(g))$, así que también es una conflación.

Hemos probado que F_η es exacto.

Supongamos ahora que $(F_\eta(f),F_\eta(g))$ es una conflación. Por IV.14 hay una conflación equivalente de la forma

$$F_\eta(L)\;\overset{((F_\eta(f))^0,0)}{\to}\;M''\;\overset{((F_\eta(g))^0,0)}{\to}\;F_\eta(N)$$

donde $(F_\eta(f))^0$ y $(F_\eta(g))^0$ son $A(\mathcal{A})-$morfismos. Por hipótesis del segundo inciso $M''=F_\eta(M')$. Como $\eta_{|A(\mathcal{A}')}$ es un epimorfismo de anillos, por [Si] η induce un encaje pleno $A(\mathcal{A}')-Mod\to A(\mathcal{A})-Mod$, así que hay una sucesión exacta corta en $A(\mathcal{A}')-Mod$ de la forma

$$L\;\overset{\underline{f}^0}{\to}\;M'\;\overset{\underline{g}^0}{\to}\;N$$

donde $\underline{f}^0$ y $\underline{g}^0$ vistos como $A(\mathcal{A})$ −morfismos son $(F_\eta(f))^0$ y $(F_\eta(g))^0$ respectivamente. Por IV.15, $(\underline{f}, \underline{g}) = ((\underline{f}^0, 0), (\underline{g}^0, 0))$ es un elemento de $\varepsilon_{\mathcal{A}'}$, y por construcción su imagen es $(((F_\eta(f))^0, 0), ((F_\eta(g))^0, 0))$.

■

Proposición 27. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ el funtor eliminación de idempotentes. Este funtor induce un isomorfismo natural de bifuntores*

$$(F_e)_* : Ext_{\mathcal{A}_e}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F_e(?), F_e(\_)).$$

Demostración: Por III.3.4 $\mathcal{A}_e$ es un bocs K-R. Por IV.26.1 F_e es exacto. Por IV.25.2 $(F_e)_*$ es una transformación natural inyectiva. Sea una conflación

$$F_e(L) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_e(N)$$

Por III.3.2 tenemos que la imagen de F_e es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ formada por los objetos Q tales que $(1-e)Q = 0$. Puesto que como R−módulos $M \cong F_e(L) \oplus F_e(N)$, existe M' en $Rep\mathcal{A}_e$ tal que $F_e(M') = M$. Por IV.26.2 la conflación (f, g) proviene de una conflación en $Rep\mathcal{A}_e$, luego $(F_e)_*$ es suprayectiva.

■

Proposición 28. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sean $0 \to W_0^{(1)} \to W_0 \to W_0^{(2)} \to 0$ y $0 \to W_1^{(1)} \to W_1 \to W_1^{(2)} \to 0$ sucesiones exactas de $R-R-$bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = W_1^{(1)}$. Entonces,*

1. *El funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ induce una transformación natural inyectiva de bifuntores $(F_r)_* : Ext_{\mathcal{A}_r}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F_r(?), F_r(\_))$.*

2. *Sea $\delta_{|W_0^{(1)}}$ inyectivo. Si R es semisimple, o si $W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ como bimódulos, entonces $(F_r)_*$ es un isomorfismo.*

Demostración: Por III.4.4 $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R. Por IV.26.1 F_r es exacto. Por IV.25.2 $(F_r)_*$ es inyectiva.

Supongamos que $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es inyectivo. Así, $(\ker\delta) \cap W_0^{(1)} = 0$ y, gracias a las hipótesis del segundo inciso, por III.7, F_r es un funtor denso. Consideremos ahora una conflación

$$F_r(L) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_r(N).$$

Entonces, existe M' en $RepA_r$ tal que $F_r(M') \cong M$, luego hay una conflación (f', g'), en la imagen de F_r, que es equivalente a (f, g). Por IV.26.2 la conflación (f', g') proviene de una conflación en $RepA_r$, luego $(F_r)_*$ es suprayectiva.

■

Lema 29. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, con $W_0^{(1)}$ un sumando directo de W_0 como $R - R-$bimódulos tal que $\delta(W_0^1) = 0$. Sea $T = T_R(W_0^1)$. El funtor absorción F_θ : $RepA_\theta \to RepA$ es exacto, e induce una sucesión exacta corta de $R - R-$bimódulos:*

$$0 \to Ext_{A_\theta}(N, L) \xrightarrow{F_\theta} Ext_A(F_\theta(N), F_\theta(L)) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(F_\theta(N), F_\theta(L)) \to 0$$

donde r es la restricción.

Demostración: Por III.8.4 $\mathcal{A}_\theta$ es un bocs K-R. Sea (f, g)un par de morfismos con composición en $RepA_\theta$:

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

Como F_θ es un isomorfismo de categorías se cumple que (f, g) es una pareja exacta si y sólo si $(F_\theta(f), F_\theta(g))$ es una pareja exacta.

Puesto que $(F_\theta(f))^0$ es f^0 considerado como $R-$morfismo, tenemos que F_θ envia conflaciones en conflaciones.

Por IV.23 r es un epimorfismo. Como su núcleo está constituido por aquellas conflaciones que consideradas como $T-$sucesiones se dividen, se sigue que $\ker r = \operatorname{Im} F_\theta$.

■

Lema 30. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y sea $_RX$ un módulo $S-$triangular y $S-$completo. El funtor reducción F_X : $RepA^X \to RepA$ es exacto e induce un isomorfismo natural de bifuntores*

$$(F_X)_* : Ext_{A^X}(?, \_) \to Ext_A(F(?), F(\_)).$$

Demostración: Por III.31.2 $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.
Sea

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M \xrightarrow{(g^0,0)} N$$

un representante del elemento z de $Ext_{\mathcal{A}^X}(N, L)$. La sucesión $F_X(z)$, por fórmulas III.15.2 y III.15.3, es de la forma

$$X \otimes_S L \overset{(I\otimes f^0,0)}{\longrightarrow} X \otimes_S M \overset{(I\otimes g^0,0)}{\longrightarrow} X \otimes_S N.$$

Como F_X es fiel y pleno, la última sucesión es una sucesión exacta corta en $A(\mathcal{A}) - Mod$, así que por IV.15 es una conflación. Luego, F_X es exacto.

Por III.25.2 $(F_X)_*$ es una transformación natural inyectiva.

Veamos que $(F_X)_*$ es suprayectiva. Sea x

$$X \otimes_S L \overset{(q^0,0)}{\longrightarrow} E \overset{(h^0,0)}{\longrightarrow} X \otimes_S N$$

una conflación en $Rep\mathcal{A}$. Puesto que en $R - Mod$ la sucesión se divide, tenemos un R–isomorfismo $\sigma : E \to X \otimes_S (L \oplus N)$. Luego, vía σ dotamos a $X \otimes_S (L \oplus N)$ de una estructura de $A(\mathcal{A})$–módulo, por lo que podemos considerar a σ un morfismo de $A(\mathcal{A})$–módulos.

Por III.17.1, ${}_S(L \oplus N)$ admite una estructura de $A(\mathcal{A}^X)$ –módulo, denotémosla por M, tal que $F_X(M) = X \otimes_S (L \oplus N)$.

Tenemos una equivalencia de conflaciones

$$\begin{array}{ccccccc}
x: & X \otimes_S L & \overset{(q^0,0)}{\longrightarrow} & E & \overset{(h^0,0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S N \\
 & \| & & \downarrow{\scriptstyle(\sigma,0)} & & \| \\
x': & X \otimes_S L & \overset{(\sigma q^0,0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S M & \overset{(h^0\sigma^{-1},0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S N.
\end{array}$$

Tenemos entonces que existen morfismos únicos $f = (f^0, f^1) : L \to M$ y $g = (g^0, g^1) : M \to N$ en $RepA^X$ tales que $F_X((f^0, f^1)) = (\sigma q^0, 0) = u$, $F_X((g^0, g^1)) = (h^0\sigma^{-1}, 0) = v$ y $gf = 0$.

Por III.30 f^0 y g^0 determinan una S–sucesión exacta corta, luego (f, g) es una conflación cuya imagen es x'.

■

IV.2 representaciones sin auto-extensiones y con e-dim fija.

Lema 31. *Sean R una k–álgebra, W_0 un $R - R$–bimódulo y sea $1_R = e_1 + \dots + e_n$ una descomposición del 1 de R como suma de idempotentes ortogonales centrales. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, no necesariamente distintos, y sean $e = e_i + e_j - e_ie_j$ y $e' = 1 - e$. Finalmente, sean $W_0^{(1)}$ un $R - R$–subbimódulo de $e_iW_0e_j$, $T = T_R\left(W_0^{(1)}\right)$ y $L, N \in T - Mod$. Entonces:*

1. $End_T(L) \cong End_{eT}(eL) \times End_{e'T}(e'L) = End_{eT}(eL) \times End_{e'R}(e'L)$.

2. $Ext_T(N,L) \cong Ext_{eT}(eN,eL) \times Ext_{e'R}(e'N,e'L)$.

3. *Si R es semisimple entonces* $Ext_{T,R}(N,L) = Ext_T(N,L)$ *y* $Ext_T(N,L) \cong Ext_{eT}(eN,eL)$.

Demostración: Los enunciados 1 y 2 son consecuencia directa del lema II.31. ■

A menudo, al efectuar procesos de reducción sobre representaciones de bocses, nos veremos en la necesidad de utilizar bimódulos como $W_0^{(1)}$ en el corolario anterior. Nos interesará particularmente el caso $R = D_1 \times ... \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita sobre k, y W_0 finitamente generado sobre R. Para comprender sus propiedades apoyémonos en el estudio de las $k-$especies.

Proposición 32. *Sea Q una realización de la $k-$especie $\bullet_1 \to \bullet_2$, donde los vértices se corresponden a los anillos de división D_1 y D_2, ambos de dimensión finita sobre k, y asociada a la flecha se tiene el $D_1 - D_2-$bimódulo W. Sea $R = D_1 \times D_2$ y Λ el álgebra de Artin determinada por Q. Sea M una representación de dimensión finita de Λ, diferente de cero, tal que $Ext^1_\Lambda(M,M) = 0$. Si $M \cong \oplus_{i\in I} M_i$ es una descomposición en inescindibles tenemos que:*

1. *Todos los sumandos M_i son preproyectivos, o todos los sumandos M_i son preinyectivos.*

2. *Hay a lo más dos clases de isomorfía de sumandos.*

3. *En caso de que haya dos clases de isomorfía, estas se corresponden a clases contiguas en el carcaj de Auslander-Reiten de Λ.*

Demostración: De la proposición IV.1.9 (b) de [**ARS**] sabemos que $Dtr : \underline{\mathrm{mod}}\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\Lambda$ es una equivalencia de categorías con inversa $trD : \overline{\mathrm{mod}}\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}\Lambda$.

De p.135 [**ARS**] tenemos el isomorfismo funtorial (fórmula de Auslander-Reiten) $D(Ext^1_\Lambda(Y,X)) \cong \overline{Hom}(X, Dtr(Y))$ para $X, Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda$. En nuestro caso Λ es hereditaria, por ello tenemos que $\overline{Hom}(X, Dtr(Y)) = Hom(X, Dtr(Y))$.

Las representaciones de Λ han sido estudiadas en [**DR**]: de la proposición 2.4 del citado artículo tenemos que hay un proyectivo, al que llamaremos P_1, determinado por $\underline{\dim}_R P_1 = (0,1)$, y un inyectivo al que llamaremos I_2, determinado por $\underline{\dim}_R I_2 = (1,0)$. Además, hay otro proyectivo: P_2, y otro inyectivo: I_1. Salvo P_1 e I_2 todos los inescindibles tienen vectores dimensión sin ceros.

Observemos que para inescindibles $X, Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, se cumple que $Y \not\cong I_2$ implica $Hom_\Lambda(P_1, Y) \neq 0$, y que si $X \not\cong P_1$ entonces $Hom_\Lambda(X, I_2) \neq 0$.

Sea M un inescindible con $\underline{\dim}_R M = (a,b)$ y $a \neq 0$, claramente su cubierta proyectiva debe tener sumandos isomorfos a P_2, luego, $Hom_\Lambda(P_2, M) \neq 0$.

Similarmente, si $\underline{\dim}_R M = (a,b)$ y $b \neq 0$, entonces la envolvente inyectiva de M tiene sumandos directos isomorfos a I_1, luego $Hom_\Lambda(M, I_1) \neq 0$.

Veamos que si $M \cong \oplus M_i$ es una descomposición en módulos inescindibles y $Ext^1_\Lambda(M,M) = 0$, entonces ninguno de los M_i es regular, y si alguno es preproyectivo, entonces todos son preproyectivos, o si alguno es preinyectivo, entonces todos son preinyectivos:

1. Sea M_1 inescindible no preproyectivo y $M_2 = (trD)^n(P_i)$, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left(P_i, (Dtr)^{n+1}(M_1)\right) \neq 0.$$

2. Sea $M_1 = (Dtr)^n(I_i)$ y M_2 inescindible no preinyectivo, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left(M_2, (DTr)^{n+1}(I_i)\right) \cong_\Lambda \left((TrD)^{n+1}(M_2), I_i\right) \neq 0.$$

3. Si M es regular, $Ext^1_\Lambda(M,M) \neq 0$, pues su forma cuadrática es cero o negativa: véase **[DR]**.

Ahora analicemos las posibles combinaciones de preproyectivos:

1. Sea $M_1 = (trD)^n(P_i)$ y $M_2 = (trD)^m(P_j)$, con $n-1 > m \geq 0$ e $i,j \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left((trD)^m(P_j), (trD)^{n-1}(P_i)\right) \cong_\Lambda \left(P_j, (trD)^{n-1-m}(P_i)\right) \neq 0.$$

2. Sea $M_1 = (trD)^{n+1}(P_2)$ y $M_2 = (trD)^n(P_1)$, con $n \geq 0$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left((trD)^n(P_1), (trD)^n(P_2)\right) \cong_\Lambda (P_1, P_2) \neq 0.$$

3. Sea $M_1 = (trD)^{n+1}(P_i)$ y $M_2 = (trD)^n(P_i)$, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda\left(M_1,M_2\right)\right)\cong_\Lambda\left(M_2,Dtr\left(M_1\right)\right)\cong_\Lambda\left(\left(trD\right)^n\left(P_i\right),\left(trD\right)^n\left(P_i\right)\right)$$
$$\cong_\Lambda\left(P_i,P_i\right)\neq 0.$$

Esto nos deja pocas opciones, es decir, si $Ext^1_\Lambda(M,M)=0$ y M sólo tiene sumandos preproyectivos, entonces M es una suma de un sólo preproyectivo inescindible, o a lo más tiene dos clases de isomorfía de sumandos preproyectivos inescindibles contiguos en el carcaj de Auslander-Reiten.

Un análisis similar nos proporciona el resultado dual, es decir que si $Ext^1_\Lambda(M,M)=0$ y M sólo tiene sumandos preinyectivos entonces M es suma de isomorfos a un sólo preinyectivo inescindible, o a lo más tiene dos clases de isomorfía de sumandos preinyectivos inescindibles contiguos en el carcaj de Auslander-Reiten.

■

Proposición 33. *Sea Q una realización de la $k-$especie $\bullet_1\to\bullet_2$, donde los vértices se corresponden a los anillos de división D_1 y D_2, ambos de dimensión finita sobre k, y asociada a la flecha se tiene el D_1-D_2-bimódulo W. Sea $R=D_1\times D_2$ y Λ el álgebra de Artin determinada por Q. Sean L,N representaciones de dimensión finita de Q, tales que $Ext^1_\Lambda(N,N)=0$ y $Ext^1_\Lambda(L,L)=0$, entonces ${}_\Lambda L\cong_\Lambda N$ si y sólo si ${}_R L\cong_R N$. Equivalentemente $\underline{\dim}_R L=\underline{\dim}_R N$ si y sólo si ${}_\Lambda L\cong_\Lambda N$.*

Demostración: Es claro que si $L\cong N$ entonces ${}_R L\cong_R N$. También es inmediato que $\underline{\dim}_R L=\underline{\dim}_R N$ si y sólo si ${}_R L\cong_R N$.

La siguiente parte de la prueba está basada en [**DR**] y en VIII.2 de [**ARS**].

Sea $d_1=\dim_{D_1}(W)$ y $d_2=\dim_{D_2}(W)$, por la introducción de [**DR**] tenemos las siguientes transformaciones lineales de $\Re\times\Re$ en $\Re\times\Re$:

$s_1\left(\left(x_1,x_2\right)\right)=\left(-x_1+x_2d_1,x_2\right)$

$s_2\left(\left(x_1,x_2\right)\right)=\left(x_1,-x_2+x_1d_2\right)$

$c=s_1s_2$, $c^{-1}=s_2s_1$.

Observemos que $s_1^2=Id=s_2^2$.

A $c=s_1s_2$ se le conoce como transformación de Coxeter (pag. 8 [**DR**]). Asociados a esta transformación están los funtores $C^+=S_1^+S_2^+$ y $C^-=S_2^-S_1^-$, llamados funtores de Coxeter (pag. 19 [**DR**]). Por 2.4 [**DR**], se relacionan de la siguiente manera: sea M una representación inescindible de Q, si M no es proyectivo entonces $\underline{\dim}_R\left(C^+\left(M\right)\right)=c\left(\underline{\dim}_R\left(M\right)\right)$, y si M no es inyectivo, $\underline{\dim}_R\left(C^-\left(M\right)\right)=c^{-1}\left(\underline{\dim}_R\left(M\right)\right)$. A su vez, por 2.1 [**DR**], a los funtores S_1^+ y S_1^- se les asocia la transformación s_1, y a los funtores S_2^+ y S_2^- se les asocia la transformación s_2.

En la proposición 2.4 [**DR**] se prueba que un módulo es proyectivo inescindible si y sólo si es de la forma $P_t=S_{k_1}^-S_{k_2}^-...S_{k_{t-1}}^-F_{k_t}$ y es preinyectivo inescindible si y sólo si es de la forma $Q_t=S_{k_n}^+S_{k_{n-1}}^+...S_{k_{t+1}}^+F_{k_t}$. Luego 2.4 [**DR**] nos indica que $\underline{\dim}_R P_1=(0,1)$,

$\underline{\dim}_R I_2 = (1,0)$, $\underline{\dim}_R P_2 = s_2((1,0)) = (1,d_2)$ y $\underline{\dim}_R I_1 = s_1((0,1)) = (d_1,1)$. Más aún, tenemos que

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(P_1)) = s_2 s_1((0,1)) = s_2((d_1,1)) = (d_1, d_1 d_2 - 1)$

$c(\underline{\dim}_R(I_2)) = s_1 s_2((1,0)) = s_1((1,d_2)) = (d_1 d_2 - 1, d_2)$

También tenemos:

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(I_1)) = s_2 s_1 s_1((0,1)) = s_2((0,1)) = (0,-1) = -\underline{\dim}_R P_1$

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(I_2)) = s_2 s_1((1,0)) = s_2((-1,0)) = -(1,d_2) = -\underline{\dim}_R P_2$

$c(\underline{\dim}_R(P_1)) = s_1 s_2((0,1)) = s_1((0,-1)) = -(d_1,1) = -\underline{\dim}_R I_1$

$c(\underline{\dim}_R(P_2)) = s_1 s_2 s_2((1,0)) = s_1((1,0)) = (-1,0) = -\underline{\dim}_R I_2$.

Observemos que si ${}_R M \cong_R M'$ entonces $c^n(\underline{\dim}_R(M)) = c^n(\underline{\dim}_R(M'))$ para n en los enteros.

Por VIII.2.2 de **[ARS]** $c(\underline{\dim}_R(M)) = \underline{\dim}_R(Dtr(M))$ para M inescindible no proyectivo, y $c^{-1}(\underline{\dim}_R(M)) = \underline{\dim}_R(trD(M))$ para M inescindible no inyectivo.

Supongamos que $Ext^1_\Lambda(N,N) = 0$ y $Ext^1_\Lambda(L,L) = 0$. Por la proposición anterior si $L \cong \oplus L_i$ es una descomposición en inescindibles, entonces a lo más hay dos clases de isomorfía en los sumandos: todos preproyectivos o todos preinyectivos. Lo mismo ocurre para $N \cong \oplus N_i$. Así que si Λ no es de tipo de representación finito y ${}_R L \cong_R N$, tenemos que los sumandos de L son preproyectivos si y sólo si son preproyectivos los de N; de otra manera habría algún entero n tal que $c^n(\underline{\dim}_R(L)) < 0$ y $c^n(\underline{\dim}_R(N)) > 0$, o tal que $c^{-n}(\underline{\dim}_R(L)) < 0$ y $c^{-n}(\underline{\dim}_R(N)) > 0$, lo que es una contradicción.

Con esto en mente empecemos a comparar combinaciones de preproyectivos.

Sean $L = aL_1 \oplus bL_2$ y $N = \alpha N_1 \oplus \beta N_2$, donde L_1, L_2, N_1 y N_2 son inescindibles, por lo que ocurre alguna de las siguientes posibilidades:

1. $L_1 \cong (trD)^n(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^m(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

   - Si $m \neq n$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $m > n$, luego $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = c(\underline{\dim}_R(aP_1 + bP_2)) = -(\underline{\dim}_R(aI_1 + bI_2)) < 0$ y $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)) > 0$: contradicción.
   - Si $m = n$ entonces $\underline{\dim}_R(aP_1 + bP_2) = c^n(\underline{\dim}_R(L)) = c^n(\underline{\dim}_R(N)) = \underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)$, es decir que $(b, a + bd_2) = (\beta, \alpha + \beta d_2)$, lo cual sólo es posible si $a = \alpha$ y $b = \beta$.

2. $L_1 \cong (trD)^{n+1}(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^{m+1}(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

   - Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m > n$, luego $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = \underline{\dim}_R(aP_1) + c(\underline{\dim}_R(bP_2)) = (-b, a)$.
     Por otro lado $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1)) + c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\beta P_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.

- Si $m = n$ tenemos que $(-b, a) = c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = (-\beta, \alpha) = c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N))$, lo cual sólo es posible si $a = \alpha$ y si $b = \beta$.

3. $L_1 \cong (trD)^{n+1}(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^m(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

   - Si $m < n$ entonces
     $c^{m+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)) = -(\underline{\dim}_R(\alpha I_1 + \beta I_2)) < 0$
     $c^{m+1}(\underline{\dim}_R(L)) = c^{m-n}(\underline{\dim}_R(aP_1)) + c^{m+1-n}(\underline{\dim}_R(bP_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.
   - Si $m = n$ entonces
     $c^m(\underline{\dim}_R(L)) = c^{-1}(\underline{\dim}_R(aP_1)) + \underline{\dim}_R(bP_2) = a(d_1, d_1d_2 - 1) + b(1, d_2)$
     $c^m(\underline{\dim}_R(N)) = \underline{\dim}_R(\alpha P_1) + \underline{\dim}_R(\beta P_2) = (0, \alpha) + \beta(1, d_2)$
     es decir que se debe satisfacer que $a = (\beta - b) \big/ d_1$, lo que implica que $\beta \geq b$, y se debe cumplir simultáneamente que $0 \leq \alpha = a(d_1d_2 - 1) + (b - \beta) d_2 = (\beta - b)\left(d_2 - \frac{1}{d_1} - d_2\right)$, lo cual es sólo posible si $\beta = b$, pero en tal caso $\alpha = a = 0$
   - Si $m > n$ entonces
     $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = a(0,1) - b\underline{\dim}_R(I_2) = (-b, a)$
     $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.

Con esto concluimos el caso preproyectivo. Un análisis similar para el caso preinyectivo verifica la proposición.

■

Lema 34. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto. Sea $M \in rep\mathcal{A}$. Entonces:*

1. *Hay una descomposición $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ como $D-D-$bimódulos, con D una $k-$álgebra de división.*

2. *Supongamos que R es semisimple y $\|M\|_0 = 0$, entonces*

$$rad(End_{\mathcal{A}}(M)) = \{f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M) \mid f^0 = 0\},$$

   y podemos elegir a D como:

$$D = \{f = (f^0, f^1) \in End_A(M) \mid f^0 \neq 0, f^1 = 0\}.$$

Demostración: Por el Teorema de Wedderburn, 2.5.37 [Ro], $End_A(M) = D \oplus rad(End_A(M))$ donde D es una subálgebra isomorfa a $End_A(M)/rad(End_A(M))$, luego, como M es inescindible, tenemos que D es un anillo de división.

Por II.19 $f = (f^0, f^1) \in rad(End_A(M))$ si y sólo si f^0 es nilpotente. Puesto que $\|M\|_0 = 0$, el que M sea inescindible en $RepA$ implica que es inescindible como $R-$módulo. Como R es semisimple, esto sólo deja dos posibilidades para $f = (f^0, f^1) \in End_A(M)$: f^0 es un isomorfismo o $f^0 = 0$. Luego, si $f \in rad(End_A(M))$ entonces $f^0 = 0$.

Por II.25 $D = \{f = (f^0, 0) \in End_A(M) \mid f^0 \neq 0\}$ es un anillo de división, y como $\|M\|_0 = 0$, se sigue que $End_A(M) = D \oplus rad(End_A(M))$.

■

Definición 35. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, y supongamos que hay una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ en idempotentes ortogonales primitivos y centrales. En tal caso, para $M \in RepA$ definimos su vector dimensión como el vector $(d_1, ..., d_n)$, donde $d_i = \dim_k(e_i M)$. Denotaremos a este vector como $\underline{\dim} M$.*

Observación IV.2: Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs con $R = D_1 \times ... \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita. Sean $M, N \in repA$. Si $c_i = \dim_k(D_i)$ y $\underline{\dim}_R M = (d_1, ..., d_n)$ entonces $\underline{\dim} M = (d_1 c_1, ..., d_n c_n)$.

Luego, para q en los racionales tenemos que $q\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$ si y sólo si $q\underline{\dim}_R M = \underline{\dim}_R N$. Más aún, de la fórmula II.14 se sigue que si $q\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$ entonces $q^2\|M\|_U = \|N\|_U$.

Supongamos que en el bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ la $k-$álgebra R es de la forma $D_1 \times ... \times D_n \times O = S \times O$, donde una vez más cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita, pero O es un anillo arbitrario. Sea $f_1 + f_2 = 1_R$ la descomposición canónica de la unidad correspondiente a $R = S \times O$.

Si U es un $S - S-$bimódulo, este tiene una estructura canónica como $R - R-$bimódulo. En tal caso, para $M \in repA$, tenemos que

$$\|M\|_U = \dim_k({}_R(U \otimes_R M, M)) = \dim_k({}_S(U \otimes_S f_1 M, f_1 M)) = \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k(e_i U e_j)$$

donde $\underline{\dim}_S(f_1 M) = (d_1, ..., d_n)$. Así que incluso en esta situación tendremos, para q racional, que si $q\underline{\dim}(f_1 M) = \underline{\dim}(f_1 N)$ entonces $q^2\|M\|_U = \|N\|_U$. Este resultado será usado en el capítulo 5.

Proposición 36. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto. Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes ortogonales, primitivos y centrales para R. Sea $M \in repA$. Si $D_M = End_A(M)/rad(End_A(M))$ y $c_M = \dim_k(D_M)$ entonces*

$$c_M\,(\underline{\mathrm{e}-\dim}M) = \underline{\dim}M.$$

Demostración: Por el lema anterior, $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad\,(End_{\mathcal{A}}(M))$. Por otra parte $D^{op} \cong (End_{\mathcal{A}}(M)/rad\,(End_{\mathcal{A}}(M)))^{op} \cong (E_M^{op}/rad\,(E_M^{op}))$, así que todo $D^{op}-$módulo es un $E_M^{op}-$módulo vía la proyección canónica. Los $D^{op}-$módulos son los $E_M^{op}-$módulos anulados por $rad\,(E_M^{op})$.

Puesto que cada $E_M^{op}-$módulo simple N es anulado por $rad(E_M^{op})$, $N \cong D$. Entonces, si $0 = L_0 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = e_iM$ es una $E_M^{op}-$serie de composición para e_iM, tenemos que $\dim_k(L_i) = c_M + \dim_k(L_{i-1})$, para $i = 1, .., n$. Se sigue que $\dim_k(L_n) = nc_M$. Esto es que $\dim_k(e_iM) = c_M length_{E_M^{op}}(e_iM)$.

■

Lema 37. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto, y sea $M \in rep\mathcal{A}$ inescindible tal que $End_{\mathcal{A}}(M)$ es de $k-$dimensión finita. Por IV.34 $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad\,(End_{\mathcal{A}}(M))$. Sea $W_0^{(1)}$ un $R-R-$sumando directo de W_0 tal que $\delta(W_0) = 0$, y sea $T = T_R(W_0)$. Sea $\mathcal{A}_\theta = (T, W', \delta')$ el bocs inducido y $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$ el funtor absorción asociado. Sea $_TX$ es un módulo $S-$completo, $\mathcal{A}_\theta^X = (S, W^X, \delta^X)$ el bocs inducido y $F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \to Rep\mathcal{A}_\theta$ el funtor reducción asociado. Supongamos que $M_X \in rep\mathcal{A}_\theta^X$ es tal que $F_\theta F_X(M_X) = F_\theta(M_\theta) = M$, entonces hay una sucesión exacta corta de $D - D^{op}-$bimódulos*

$$Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X) \xrightarrow{(F_\theta F_X)_*} Ext_{\mathcal{A}}(F_\theta F_X(M_X), F_\theta F_X(M_X)) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(M, M)$$

donde r es el morfismo restricción de IV.23. En particular,

$$\dim_D(Ext_{\mathcal{A}}(M, M)) = \dim_D(Ext_{T,R}(M, M)) + \dim_D\left(Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X)\right).$$

Demostración: Por IV.29 hay una sucesión exacta corta

$$Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta) \xrightarrow{(F_\theta)_*} Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(M, M)$$

donde r es un morfismo suprayectivo de $D - D^{op}-$bimódulos. Como F_θ es fiel y pleno $End_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta) = D' \oplus rad\,(End_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta))$ donde $F_\theta(D') = D$. Luego, $Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta)$ tiene estructura de $D - D^{op}-$bimódulo vía el isomorfismo que hay entre D y D'. Puesto que $(F_\theta)_*$ es una transformación natural de bifuntores, es también un isomorfismo de $D - D^{op}-$bimódulos. De la misma manera se induce un isomorfismo de $D - D^{op}-$bimódulos

$(F_X)_* : Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X) \to Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta)$.

■

Teorema 38. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R con $R = D_1 \times \ldots \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita. Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ el vector de idempotentes correspondiente a $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$, la descomposición canónica en idempotentes centrales ortogonales de R. Supongamos que k es perfecto y W_0 es de $k-$dimensión finita. Sean $L, N \in rep\mathcal{A}$ tales que $Ext_{\mathcal{A}}(N, N) = 0$ y $Ext_{\mathcal{A}}(L, L) = 0$. Si L y N son inescindibles, entonces $\underline{e - \dim} L = \underline{e - \dim} N$ si y sólo si $L \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$.*

Demostración: Por observación III.2, si $L \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$ entonces $\underline{e - \dim} L = \underline{e - \dim} N$.

Sea $\preceq$ el orden lexicográfico en $Z \times Z$. Realizaremos la prueba de la suficiencia por inducción sobre $(\|L\|_0, \dim_k (W_0))$ con el orden $\preceq$.

Pero antes veamos que por IV.36 $\underline{\dim} L = c_L \underline{e - \dim} L$ y $\underline{\dim} N = c_N \underline{e - \dim} N$, así que por observación IV.2 $\|N\|_0 = \left(\frac{c_N}{c_L}\right)^2 \|L\|_0$.

Si $\|L\|_0 = 0$ entonces $End_R(L) = End_{A(\mathcal{A})}(L)$, así que L inescindible en $Rep\mathcal{A}$ implica que L es inescindible en $R - Mod$, por lo que L es de la forma $D_i = e_i R$. Similarmente concluimos que N es de la forma $e_j R$. Como las endolongitudes coinciden $i = j$.

Supongamos cierto el enunciado para todo bocs $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$, como en el enunciado, y todo par de inescindibles $L', N' \in rep\mathcal{A}'$ tales que $(\|L'\|_0, \dim_k (W_0')) \preceq (\|L\|_0, \dim_k (W_0))$. Supongamos ahora que $\|L\|_0 = n$ y $\dim_k (W_0) = m + 1$. Por triangularidad existe un $R - R-$subbimódulo $0 \neq W_0^1$ de W_0 tal que $\delta (W_0^1) \subseteq W_1$.

Si $\underline{e - \dim} L = (l_1, ..., l_{i-1}, 0, l_{i+1}, ..., l_n)$, por III.3 podemos usar eliminación de idempotentes: sean $\varepsilon = 1_R - e_i$, $\mathcal{A}_\varepsilon = (R_\varepsilon, W_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ y $F_\varepsilon : Rep\mathcal{A}_\varepsilon \to Rep\mathcal{A}$.

Por III.3.2 y III.41 hay objetos $L', N' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$ tales que $F_\varepsilon (L') = L$ y $F_\varepsilon (N') = N$, los cuales cumplen que $\underline{e - \dim} L' = (l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, ..., l_n) = \underline{e - \dim} N'$. Puesto que $\dim_k ((W_\varepsilon)_0) = \dim_k (\varepsilon W_0 \varepsilon) \leq \dim_k (W_0)$, al menos podemos suponer que en $\underline{e - \dim} L$ no hay ceros. Con esto en mente analicemos las diferentes posibilidades:

1. Sean $\delta_{|W_0^1}$ inyectivo y $\delta (W_0^1) = W_1^{(1)}$. Por III.4 tenemos un bocs

   $\mathcal{A}_r = \left(R, (W_0/W_0^1) \oplus \left(W_1/W_1^{(1)}\right), \delta_r\right)$ y el funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$.

   Como $(\ker \delta) \cap W_0^1 = 0$, por III.7 F_r es denso. Sean $L', N' \in rep\mathcal{A}_r$ tales que $F_r (L') \cong L$, y $F_r (N') \cong N$.

   Por III.42 $\underline{e - \dim} L' = \underline{e - \dim} N'$. Como $\dim_k (W_0/W_0^1)$ es menor que $m + 1$, por hipótesis de inducción $L' \cong N'$. Como F_r es un funtor $L \cong N$.

2. Supongamos que $Ker(\delta) \cap W_0^1 \neq 0$, luego hay idempotentes primitivos centrales ortogonales e_i y e_j, donde i no necesariamente es distinto de j, tales que $e_i (Ker(\delta) \cap W_0^1) e_j \neq 0$. Por comodidad sea $W_0^{(1)} = e_i (Ker(\delta) \cap W_0^1) e_j$.

   Por III.37 tenemos una descomposición de $R-R-$bimódulos $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$.

   Sean $e = e_i + e_j - e_i e_j$, $e' = 1 - e$, $R' = e'R$, $T = T_R\left(W_0^{(1)}\right)$ y $T' = T_{eR}\left(W_0^{(1)}\right)$.

   Por lema II.31 $T' \cong eT$, y que $T \cong T' \times T_{e'R}\left(e'W_0^{(1)}e'\right) = T' \times e'R$.

   Por IV.23 hay un epimorfismo r, y corolario IV.31.3 un isomorfismo σ :

$$Ext_A(L,L) \overset{r}{\rightarrow} Ext_{T,R}(L,L) = Ext_T(L,L) \overset{\sigma}{\cong} Ext_{T'}(eL,eL).$$

   Por hipótesis $Ext_A(L,L) = 0$, así que $Ext_{T'}(eL,eL) = 0$. Como en $\underline{e-\dim}L$ no hay ceros, se sigue que $i \neq j$.

   Como vimos antes $c_N\underline{\dim}(L) = c_L\underline{\dim}(N)$, así que por IV.33 $c_N(eL) \cong c_L(eN)$ como $T'-$módulos, por lo que aparecen las mismas clases de isomorfía de inescindibles en sus descomposiciones. Por observación IV.2 $c_N(L) \cong c_L(N)$ como $T-$módulos.

   Sean $\oplus_{u=1}^q m_u X_u \cong eL$ y $\oplus_{u=1}^q n_u X_u \cong eN$ descomposiciones en suma de $T'-$módulos inescindibles, tales que si $u \neq u'$ entonces $X_u \ncong X_{u'}$. Sin pérdida de generalidad digamos que $\{i,j\} = \{n-1,n\}$, así que $e' = e_1' + e_2' + \ldots + e_{n-2}'$ es la descomposición canónica en idempotentes ortogonales, primitivos y centrales. Dado que $c_N(L) \cong c_L(N)$ como $T-$módulos, se sigue que $c_N m_u = c_L n_u$ y $c_N \dim_{D_h}(e_h' L) = c_L \dim_{D_h}(e_h' N)$, para $u \in \{1,\ldots,q\}$ y $h \in \{1,\ldots,n-2\}$.

   Sea ${}_TX = (\oplus_{u=1}^q X_u) \oplus R'$. Por III.23, III.25, III.33 y III.38 X es $S-$completo y $S-$triangular, donde $S = S' \times R'$, $S' = S_1 \times \ldots \times S_q$, y, como era de esperarse, $S_i \cong (End_{T'}(X_i) / rad(End_{T'}(X_i)))^{op}$.

   Sea $\mathcal{A}_\theta = (T, W', \delta')$ el bocs inducido por $W_0^{(1)}$ y sea $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \rightarrow Rep\mathcal{A}$ el correspondiente funtor absorción. Sea $\mathcal{A}_\theta^X = (S, W^X, \delta^X)$ el bocs inducido por X y sea $F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \rightarrow Rep\mathcal{A}_\theta$ el correspondiente funtor reducción asociado a X.

   Sean $L_\theta = F_\theta^{-1}(L)$ y $N_\theta = F_\theta^{-1}(N)$. Puesto que como $T-$módulos $L_\theta \cong X \otimes_S ((\oplus_{u=1}^q m_u S_u) \oplus e'L)$ y $N_\theta \cong X \otimes_S ((\oplus_{u=1}^q n_u S_u) \oplus e'N)$, por III.17.1 hay objetos $L', N' \in Rep\mathcal{A}_\theta^X$ tales que $F_X(L') \cong L_\theta$ y $F_X(N') \cong N_\theta$.

   Sea $1_{S'} = \sum_{u=1}^q f_q$ la descomposición en idempotentes ortogonales centrales de S', por lo tanto $e'' = (f_1, \ldots, f_q, e_1, \ldots, e_{n-2})$ es un vector de idempotentes para $\mathcal{A}_\theta^X$.

Argumentando como antes tenemos que $m_u X_u \cong X_u \otimes (m_u S_u)$, luego $\dim_{S_u} f_u L' = m_u$.

$$\begin{aligned} c_N \underline{\dim}_S (L') &= c_N \left(m_1, ..., m_q, \dim_{D_1}(e'_1 L), ..., \dim_{D_{n-2}}\left(e'_{n-2} L\right)\right) \\ &= c_L \left(n_1, ..., n_q, \dim_{D_1}(e'_1 N), ..., \dim_{D_{n-2}}\left(e'_{n-2} N\right)\right) \\ &= c_L \underline{\dim}_S (N'). \end{aligned}$$

Por fidelidad y plenitud de los funtores reducción y absorción $c_N = c_{N'}$ y $c_L = c_{L'}$, luego, por observación IV.2 y IV.36 $\underline{e'' - \dim} L' = \underline{e'' - \dim} N'$.

Por IV.37 hay un monomorfismo:

$$0 \rightarrow Ext_{A_\theta^X}(L', L') \overset{(F_\theta F_X)_*}{\rightarrow} Ext_A (F_\theta F_X (L'), F_\theta F_X (L')) \cong Ext_T (L, L).$$

Se sigue que $Ext_{A_\theta^X}(L', L') = 0$ y $Ext_{A_\theta^X}(N', N') = 0$.

Como $\underline{e - \dim} L$ no tiene ceros, ${}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R L, L\right) \neq 0$. Luego, por III.8.3 y III.21, tenemos que $\|L'\|_0 < n$, así que por hipótesis de inducción $L' \cong N'$, y así $L \cong N$.

■

Capítulo V
Familias parametrizadas de representaciones.

V.1 Subálgebras mansas y módulos generadores.

Definición 1. *Sea Q un anillo. Q es un anillo de cocientes si todo elemento regular de Q es una unidad. Un subanillo O de Q es un orden izquierdo si cada $q \in Q$ es de la forma ou^{-1} para $o, u \in O$. Un orden derecho es definido análogamente; y un orden izquierdo y derecho es un orden.*

Definición 2. *Sea Z un dominio entero conmutativo con campo de fracciones K. Un subanillo O de Q será llamado un orden clásico en Q sobre Z, o Z–orden en Q, si $Z \subseteq O$, $OK = Q$ y O es finitamente generado sobre Z.*

Definición 3. *Una $k-$álgebra R es minimal si existen idempotentes primitivos centrales ortogonales tales que $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$, y para toda $i \in \{1, ..., n\}$, el anillo e_iR es una $k-$álgebra de división de dimensión finita o un Z_i- orden para algún dominio entero conmutativo Z_i.*

Si $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs con R una $k-$álgebra minimal, y es tal que $W_0 = 0$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un bocs minimal.

Los órdenes considerados, denotados por O, estarán relacionados con el único módulo genérico asociado a un álgebra de Artin hereditaria de tipo de representación manso, llamémosla Λ, por lo que, entre otras, tendrán las siguientes características:

1. O es un dominio, es decir, es un anillo sin divisores de cero.

2. O es un dominio de ideales izquierdos principales, y un dominio de ideales derechos principales.

3. $Z(O)$, es decir el centro de O, es un dominio de Dedekind.

4. O es finitamente generado como $Z(O)-$módulo.

5. Casi todos los $\Lambda-$módulos regulares simples están en correspondencia biyectiva con los $O-$módulos simples.

6. Hay una correspondencia biyectiva entre los O–módulos simples y los $Z(O)$ –módulos simples.

Para proseguir usaremos resultados de W. Crawley-Boevey en **[CB2]**, que complementan la teoría desarrollada por Claus M. Ringel en **[Ri2]**. Comencemos por algunas definiciones.

Definición 4. *R es una k–álgebra central simple si R es simple, y si la dimensión de R sobre su centro es finita.*

Observemos que el Teorema deWedderburn-Artin (2.18 **[Ro]**) nos dice que si R es un anillo primitivo y cumple la condición de cadena descendente en ideales izquierdos, entonces R es isomorfo a un anillo $M_n(D)$ para un cierto anillo de división D. En particular, si R es como en la definición, y $Z(R)$ es un campo, entonces $R \cong M_n(D)$.

Teorema 5. *(4.1 [Sc]) Sean R un anillo y $\sum$ un conjunto de mapeos entre R–módulos proyectivos y finitamente generados. Entonces hay un R–anillo $R_{\sum}$, el cual es universal respecto a la propiedad de que los mapeos $R_{\sum} \otimes_R \alpha$, para $\alpha \in \sum$, tienen inversa.*

Definición 6. *([CB2]) Sea A una k–álgebra hereditaria.*

1. *En lo sucesivo $rkK_0(A)$ es el número de módulos simples de A.*

2. *U será un conjunto de clases de isomorfía de A–módulos simples*

3. *Por A_U denotaremos a la localización universal de A con respecto a U, es decir el A–anillo $A_{\sum}$ del teorema anterior, donde $\sum$ es el conjunto de todos los monomorfismos α entre A–módulos proyectivos finitamente generados tales que $cok(\alpha) \in U$. Por (2.2 [CB2]) hay un epimorfismo de álgebras $A \to A_U$, el cual es inyectivo.*

4. *Un cliqué es un conjunto de clases de módulos simples regulares en un tubo, y un cliqué será completo si contiene a todas las clases que aparecen en ese tubo.*

Teorema 7. *(4.2 [CB2]) Sea A un álgebra hereditaria de tipo de representación manso con centro k, y sea U un conjunto de clases de isomorfía de módulos regulares simples. Exactamente uno de los siguientes casos ocurre.*

1. *Si U no contiene cliqués completos entonces A_U es un álgebra mansa hereditaria, de dimensión finita sobre k, con $rkK_0(A_U) = rkK_0(A) - |U|$, y donde la función rango inducida es el defecto normalizado para A_U.*

2. *Si U consiste de todos los módulos simples regulares, entonces A_U, también denotado por A_∂, es artiniano simple, de dimensión finita sobre su centro, pero de dimensión infinita sobre k.*

3. *De otra manera, si hay algún cliqué con al menos dos módulos regulares simples que no están en U, entonces A_U no es un orden maximal en A_∂ y la función rango inducida es la dimensión normalizada uniforme.*

4. *En otro caso, A_U es un orden máximo en A_∂, es decir (3 [CB2]) que*

    - *A_U es hereditario,*
    - *A_U es finitamente generado como módulo sobre su centro $Z(A_U)$,*
    - *A_U es un $Z(A_U)-$orden máximo en A_∂,*
    - *el campo de cocientes del centro de $Z(A_U)$ es el centro de A_∂, y*
    - *$Z(A_U)$ es un dominio de Dedekind.*

A_∂ es isomorfo al anillo $M_n(D)$, donde D es el anillo, de división, de los endomorfismos del único módulo genérico, salvo isomorfismo, en $A - Mod$. La existencia de tal módulo fue probada en 5.3 [**Ri3**] y sus propiedades fueron ampliamente utilizadas en [**Ri2**].

Teorema 8. *(5.2 [CB2]) Si A es una álgebra hereditaria mansa entonces hay un conjunto U, consistente de $rkK_0(A) - 1$ módulos regulares simples, tal que A_U es un anillo de matrices sobre un dominio O, y*

1. *todos los ideales izquierdos y todos los ideales derechos de O son principales, es decir, son de la forma Ox y xO respectivamente,*

2. *el centro $Z(O)$ de O es un dominio de Dedekind, y O es finitamente generado como un $Z(O)-$módulo,*

3. *los $A-$módulos regulares simples, que no están en U, están en correspondencia biyectiva con los $O-$módulos simples, y por lo tanto también están en correspondencia biyectiva con los $Z(O)-$módulos simples.*

Observación V.1: La prueba del teorema anterior se realiza por inducción sobre $rkK_0(A)$, y el primer paso de la inducción se realiza para $rkK_0(A) = 2$, es decir, para un álgebra con dos módulos simples.

En este caso se prueba que hay un $A-$módulo simple regular, digamos S, tal que $A_{\{S\}}$ es un anillo de matrices sobre un anillo de ideales libres. Se afirma que $A_{\{S\}}$ es noetheriano y que es un anillo de matrices sobre un dominio O, el cual es de ideales principales por la izquierda, y de ideales principales por la derecha.

Veamos con un poco más de detenimiento al inciso 2.

Por teorema V.7.4 $A_{\{S\}}$ es un $Z\left(A_{\{S\}}\right)$ −orden máximo en A_{∂}, y este último por V.7.2 es un álgebra central simple. Ahora bien, el teorema 5.3.1 de [MR] afirma que para un anillo R con centro Z son equivalentes:

1. R es un anillo PI primo,
2. R es un orden en un álgebra central simple,
3. R es un Z−orden en un álgebra central simple,

así que $A_{\{S\}}$ es un anillo PI primo.

Por V.7.4 $A_{\{S\}}$ es hereditario, y sabemos que es noetheriano, luego por el corolario 6.2.8 de [MR], el cual afirma que si R es un anillo primo hereditario noetheriano entonces su dimensión de Krull es menor o igual a uno, podemos afirmar que $A_{\{S\}}$ tiene dimensión de Krull 1, pues no es artiniano.

Una de las caracterizaciones de un anillo primo de Dedekind, por 5.2.10 de [MR], es que el anillo sea primo, hereditario, noetheriano y un orden maximal, así que $A_{\{S\}}$ es un anillo primo de Dedekind.

Citemos ahora al teorema 13.9.14 de [MR]:

Sea R un anillo PI primo, noetheriano, el cual es un orden maximal y posee dimensión de Krull igual a uno. Entonces el centro $Z(R)$ de R es un dominio de Dedekind y R es un $Z(R)$ −orden clásico y un anillo primo de Dedekind.

Ahora bien, sea $A_{\{S\}} \cong M_n(O)$, entonces $Z\left(A_{\{S\}}\right) = Z(O) I_n \cong Z(O)$, donde I_n es la matriz identidad. Se sigue que $Z(O)$ es un dominio de Dedekind, y como $A_{\{S\}}$ es finitamente generado sobre su centro, también O es finitamente generado en $Z(O)$.

Puesto que $M_n(O)$ es noetheriano, tenemos que O es noetheriano.

Si K es el anillo de fracciones de $Z(O)$ entonces el anillo de fracciones de $Z(M_n(O))$ es KI_n, y tenemos que $M_n(OK) \cong M_n(O) KI_n \cong A_{\partial}$, luego OK es simple artiniano, por lo que O es un $Z(O)$ −orden maximal.

Utilizaremos ahora el teorema 5.3.16 de [MR]: si Z es un dominio de Dedekind y R es un Z−orden maximal en Q, entonces R es un anillo primo de Dedekind. De este teorema se sigue que O es un anillo primo de Dedekind.

No entraremos en más detalles de la prueba del inciso 3, pero debemos notar que la primera correspondencia biyectiva está dada de la siguiente manera; si m es un ideal maximal de O, entonces hay epimorfismos de anillos

$$A \rightarrow M_n(O) \rightarrow M_n(O) \otimes_O (O/m) \cong M_n(O/m)$$

los cuales dotan de una estructura de A−módulo a $(O/m)^n$: este es un A−módulo regular simple. Por V.1.2 de [M] estos epimorfismos inducen una inmersión plena $M_n(O/m)-Mod \hookrightarrow A-Mod$, así que $End_A((O/m)^n) = End_{M_n(O/m)}((O/m)^n) = O/m$.

La correspondencia biyectiva entre los O−módulos simples, y los $Z(O)$ −módulos simples, está dada por el siguiente teorema, 22.4 de [R]:

Sea R un Z−orden máximo en una K−álgebra A. Entonces hay una correspondencia biyectiva entre los ideales primos de R y los ideales primos de Z, dada de la siguiente manera:

A un ideal primo P de R le asociamos el ideal primo $Z \cap P$, a un ideal primo P' de Z le asociamos el ideal primo $R \cap rad(R_{P'})$.

Observación V.2: Es una propiedad muy conveniente que $Z(O)$ sea un dominio de Dedekind; 9 5.6 de [Co] nos dice que todo ideal no cero de un dominio de Dedekind se expresa de manera única como un producto finito de ideales maximales. Si $x \in Z(O)$ y consideramos el ideal $xZ(O)$, este se expresa como el producto $m_1 \ldots m_l$, así que si $xZ(O)$ está contenido en el ideal maximal m, como este es primo, tenemos que al menos para una $i \in \{1, \ldots, l\}$ se cumple que $m = m_i$, luego x está en un número finito de ideales maximales. Concluimos que cada vez que localizamos por un elemento x de $Z(O)$ perdemos sólo un número finito de ideales maximales, así que los $Z(O)_x$ −simples están en correspondencia biyectiva con un conjunto cofinito de clases de isomorfía de A−módulos regulares simples.

Por 5.3.1 de [MR] O es un anillo PI primo, así que 6.1.36 de [Ro] se puede localizar con respecto a un elemento x del centro de Formaneck, de tal manera que O_x es un álgebra de Azumaya libre sobre $Z(O)_x$.

En este caso el inciso tres queda más bonito, pues por 5.3.25 de [Ro] hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $Z(O)_x$ y los ideales de O_x dada de la siguiente manera: a un ideal I de O_x le asociamos el ideal $I \cap Z(O)_x$, y a un ideal J de $Z(O)_x$ le asociamos el ideal JO_x

Definición 9. *Sea A una k−álgebra hereditaria de dimensión finita y mansa. Sea O el dominio del teorema V.8, el epimorfismo $A \to M_n(O)$ induce una estructura de A−módulo en O^n. Al bimódulo ${}_A(O^n)_O$ lo llamaremos un A−módulo generador.*

Proposición 10. *Sea A una k−álgebra hereditaria de dimensión finita y mansa. Si G_0 es un A−módulo generador entonces es O−completo y O−triangular.*

Demostración: Por V.1.2 de [M] tenemos que ${}_A(G_0, G_0) = {}_{M_n(O)}(G_0, G_0)$, luego $\Gamma = ({}_A(G_0, G_0))^{op} = O$, y por hipótesis $(G_0)_O \cong O^n$, así que G_0 es O−admisible.

Por otra parte, como en III.18, sean $\mathcal{A} = (A, 0, 0)$, $\mathcal{C}^{G_0} = (O, 0, 0)$ el bocs canónico asociado y $F_X^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{G_0} \longrightarrow \mathcal{A}$ el correspondiente funtor reducción. Consideremos a

$\{e_i, \lambda_i \mid i \in \{1, ..., n\}\}$ la base dual canónica de $(G_0)_O$ Por III.15.1, para $a \in A$, $x \in G_0$, $M \in O - Mod$ y $m \in M$, tenemos que la $A-$estructura de $G_0 \otimes_O M$ está dada por:

$$a \cdot (x \otimes m) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \ \alpha (\lambda_i \otimes a \otimes x) * m = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \lambda_i (ax) m = ax \otimes m.$$

Por III.15.2, para un morfismo $f : M \to N$ en $RepC^{G_0}$, tenemos que

$$(F_{G_0}(f)) [x \otimes m] = x \otimes f(m) + \sum \rho_j (x) \otimes f^1 (\gamma_j) [m] = x \otimes f(m).$$

Se sigue que el funtor F_{G_0} es el funtor $G_0 \otimes_O \_ : O - Mod \to A - Mod$.

Consideremos el funtor $F_1 = O^n \otimes_O \_ : O - Mod \to M_d(O) - Mod$, el cual es una equivalencia de categorías por 1.1.17. [Ro], y el funtor $F_2 : M_n(O) - Mod \to A - Mod$ inducido por el epimorfismo de anillos $A \to M_n(O)$. Por V.1.2 de [M] F_2 es un encaje pleno. Como la composición F_2F_1 coincide con F_{G_0} este es un funtor fiel y pleno, por lo que G_0 es O-completo. La triangularidad es inmediata.

■

Lema 11. *Si $R \to R'$ es un epimorfismo de anillos entonces $X =_R R'$ es un $R-$módulo $R'-$completo y $R'-$triangular.*

Demostración: Por V.1.2 de [M] $_R(R', R') =_{R'} (R', R') \cong R'$, luego X es $R'-$admisible. Puesto que $\mathcal{C}^X = (R', 0, 0)$ el funtor F_X coincide con el funtor $R' \otimes_{R'} \_ :$ $R' - Mod \to R - Mod$ el cual, también por V.1.2 de [M] es fiel y pleno.

■

V.2 Representaciones con grupo de autoextensiones simple.

En lo sucesivo R será una $k-$álgebra minimal y k será un campo perfecto. Sea $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ la descomposición de la unidad en idempotentes primitivos centrales ortogonales. Sea $0 \leq t \leq n$, cuando escribamos $R = O_1 \times ... \times O_t \times S$ entenderemos que O_i es un orden, relacionado a un módulo generador $(G_0)_i$, y que por ello $S = S_{t+1} \times ... \times S_n$ donde S_i es un anillo de división de $k-$dimensión finita. Si $t = 1$ simplemente escribiremos $R = O \times S$.

Utilizaremos la definición III.40 de $\underline{e - \dim}$, y nos referiremos a este concepto como $e-$dimensión.

Definición 12. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Para $M \in rep\mathcal{A}$ definimos l_M como la longitud de $Ext_{\mathcal{A}}(M, M)$ como $End_{\mathcal{A}}(M)$ $-$módulo. Para cada natural i definimos las familias*

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{A}) = \{M \in repA \mid M \text{ es inescindible y } l_M = i\}$$
$$\text{y } \mathcal{F}_i(\mathcal{A})(\underline{d}) = \{M \in \mathcal{F}_i(\mathcal{A}) \mid \underline{e - \dim}M = \underline{d}\}.$$

Definición 13. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sea $R = O_1 \times ... \times O_t \times S$. Definimos a la familia $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ como*

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \left\{ M \in repA \mid \begin{array}{l} {}_RM \cong n_1O_1/m_1 \oplus ... \oplus n_tO_t/m_t \oplus M' \\ \text{y tal que } n_i \in N \cup \{0\}, \ m_i \text{es un ideal maximal de } O_i \\ \text{y } M' \text{ es un } S - \text{módulo} \end{array} \right\}.$$

Definimos la familia $\mathcal{H}(\mathcal{A})(\underline{d})$ como

$$\mathcal{H}(\mathcal{A})(\underline{d}) = \{M \in \mathcal{H} \mid \underline{e - \dim}M = \underline{d}\}$$

Definición 14. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sea $R = O_1 \times ... \times O_t \times S$. Definimos a las familias $\mathcal{H}_i(\mathcal{A})$ y $\mathcal{H}_i(\mathcal{A})(\underline{d})$ como*

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}_i(\mathcal{A}) \text{ y } \mathcal{H}_i(\mathcal{A})(\underline{d}) = \mathcal{H}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}_i(\mathcal{A})(\underline{d}).$$

Definición 15. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Si $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ son familias de objetos en RepA, decimos que $\mathcal{Q}_1$ cubre a $\mathcal{Q}_2$ si*

1. $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{Q}_2$.
2. *Para casi toda clase de isomorfía $[M]$, con $M \in \mathcal{Q}_2$, existe un $M' \in \mathcal{Q}_1$ tal que $M \cong M'$.*

Definición 16. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Diremos que es pequeño si W es finitamente generado como $R - R-$bimódulo.*

Definición 17. *Sea $\underline{d}$ un vector y U un $R - R-$bimódulo. Por observación IV.2, $\frac{1}{(c_N)^2}\|N\|_U$ es un valor constante, para cada $N \in repA$ tal que $\underline{e - \dim}(N) = \underline{d}$. Por ello definimos la norma de la dimensión con respecto al bimódulo U como $\|\underline{d}\|_U = \frac{1}{(c_N)^2}\|N\|_U$.*

Proposición 18. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, pequeño y $R = O_1 \times ... \times O_t \times S$. Sean $e = 1 - e_i$, $\mathcal{A}_e = (eR, eWe, \delta_e)$ y $F_e : RepA_e \to RepA$ el funtor eliminación de idempotentes. Entonces, para cada e−dimensión $\underline{d}$, con $(\underline{d})_i = 0$, existe una única e−dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_e(\mathcal{H}_j(\mathcal{A}_e)(\underline{d}')) = \mathcal{H}_j(\mathcal{A})(\underline{d})$, donde $j \in N \cup \{0\}$. Además, $\mathcal{A}_e$ es K-R y pequeño.*

Demostración: Sea $M' \in repA_e$, y $M = F_e(M')$. Sea $\underline{d} = (l_1, ..., l_{i-1}, 0, l_{i+1}, ..., l_n)$.
Como R–módulos $F_e(M') = M'$, luego $F_e(\mathcal{H}(\mathcal{A}_e))$ está contenida en $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, y si $N \in \mathcal{H} \cap \operatorname{Im} F_e$ entonces $M \in F_e(\mathcal{H}')$.
Por III.3.2 $\operatorname{Im} F_e$ es la subcategoría de $RepA$ cuyos objetos son anulados por e_i, así que $\mathcal{H}(\underline{d}) \subseteq \operatorname{Im} F_e$.
Por III.41, si $\underline{e-\dim} M' = (l'_1, ..., l'_{i-1}, l'_{i+1}, ..., l'_n) = \underline{d}'$ entonces $\underline{e-\dim} M = (l'_1, ..., l'_{i-1}, 0, l'_{i+1}, ..., l'_n)$. Luego, $F_e(\mathcal{H}(\mathcal{A}_e)(\underline{d}')) = \mathcal{H}(\underline{d})$.
Por IV.27, $(F_e)_* : Ext_{\mathcal{A}_e}(M', M') \to Ext_{\mathcal{A}}(M, M)$ es un isomorfismo natural en M'. Luego, para cada j, $F_e(\mathcal{H}_j(\mathcal{A}_e)(\underline{d}')) \subseteq \mathcal{H}_j(\mathcal{A})(\underline{d})$. Así que $F_e(\mathcal{H}_j(\mathcal{A}_e)(\underline{d}')) = \mathcal{H}_j(\mathcal{A})(\underline{d})$.
Por III.3.4, $\mathcal{A}_e$ es K-R.
Claramente eWe es finitamente generado como $eR-eR$–bimódulo.
■

Lema 19. *Sea $\sigma : T \to S$ un morfismo de anillos. Sean U un $T-$módulo y M un $S-$módulo. M tiene estructura de $T-$módulo y S tiene estructura de $T-T-$bimódulo vía σ. Entonces:*

1. *Hay un isomorfismo de $T-$módulos $\tau_1 : S \otimes_S M \to M$ dado por $\tau_1(s \otimes m) = sm$, con inversa $\tau_1^{-1}(m) = 1 \otimes m$.*

2. *Hay un isomorfismo de $T-$módulos $\tau_2 : Hom_S(S_T, M) \to M$ dado por $\tau_2(f) = f(1_S)$, con inversa $\tau_2^{-1}(m) = f_m$, donde $f_m(s) = sm$.*

3. *Hay un isomorfismo de grupos $\tau_3 : Hom_S(S \otimes_T U, M) \to Hom_R(U, M)$ dado por $\tau_3(g)[u] = g(1 \otimes u)$, con inversa $\tau_3^{-1}(h)[s \otimes u] = sh(u)$.*

Demostración: Veamos que τ_1 es un morfismo de $T-$módulos:
$\tau_1(ts \otimes m) = \tau_1(\sigma(t) s \otimes m) = \sigma(t) sm = t(sm)$.
Claramente τ_1^{-1} es la inversa de τ_1.
Veamos que τ_2 es un morfismo de $T-$módulos:
$\tau_2(tf) = (tf)(1) = f(1t) = f(\sigma(t)) = \sigma(t) f(1) = t(f(1))$.
También tenemos que
$\tau_2 \tau_2^{-1}(m) = f_m(1) = m$ y que
$\tau_2^{-1}\tau_2(f) = \tau_2^{-1}(f(1)) = f_{f(1)}$, donde $f_{f(1)}(s) = sf(1) = f(s)$, luego $f = f_{f(1)}$.
Por el segundo inciso y el isomorfismo de adjunción ς tenemos el isomorfismo composición, al que dennotamos por τ_3 :

$$Hom_S(S \otimes_T U, M) \xrightarrow{\varsigma} Hom_T(U, {}_S(S, M)) \xrightarrow{(\tau_2)_*} Hom_T(U, M).$$

Así que $\tau_3(g)(u) = ((\tau_2)_* \varsigma(g))(u) = [\varsigma(g)(u)][1] = g(1 \otimes u)$.
Finalmente
$\tau_3^{-1}(h)(s \otimes u) = \left(\varsigma^{-1}\left(\tau_2^{-1}\right)_*(h)\right)(s \otimes u) = \tau_2^{-1}(h(u))[s] = f_{h(u)}[s] = sh(u)$.
■

Proposición 20. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, pequeño y $R = O \times S$. Sea $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ la filtración de grado cero asociada a la triangularidad. Sea $\delta(e_i W_0^1 e_j) = W_1^{(1)} \subseteq e_i W_1 e_j$. Sea $\underline{d}$ un vector tal que $(\underline{d})_i \neq 0$ o $(\underline{d})_j \neq 0$.*

1. *Si $i, j > 1$, existe un $R-R-$bimódulo W_0'' de $e_i W_0^1 e_j$ tal que el bocs*

$$\mathcal{A}_r = \left(R, (W_0 / W_0'') \oplus \left(W_1 / W_1^{(1)}\right), \delta_r\right)$$

es K-R y pequeño, y el funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ cumple, para cada $t \in N \cup \{0\}$ que

$$F_r(\mathcal{H}_t(\mathcal{A}_r)(\underline{d})) = \mathcal{H}_t(\mathcal{A})(\underline{d}).$$

2. *Si $i = 1$ o $j = 1$, y $\mathcal{A}$ es triangular aditivo y no salvaje, entonces hay un bocs K-R, pequeño y triangular aditivo*

$$\mathcal{A}_r = \left(R, (W_0 / e_i W_0^1 e_j) \oplus \left(W_1 / W_1^{(1)}\right), \delta_r\right).$$

Además, el funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ cumple, para cada $\underline{d}$, que

$$F_r(\mathcal{H}_0(\mathcal{A}_r)(\underline{d})) \text{ cubre a } \mathcal{H}_0(\mathcal{A})(\underline{d}).$$

Demostración: Denotemos $\mathcal{H}(\mathcal{A}_r)$ como $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ como $\mathcal{H}$. Los siguientes hechos son comunes a ambos casos, una vez que se haya precisado $\mathcal{A}_r$:

Por III.42 $\underline{e-\dim} M' = \underline{e-\dim} F_r(M')$.

Puesto que como $R-$módulos $M' = F_r(M')$, tenemos que $F_r(\mathcal{H}')$ está contenida en $\mathcal{H}$.

Sea $M \in \mathcal{H}$, es decir que $_R M \cong n_1(O/m) \oplus (1 - e_1) M$ para m ideal maximal de O. Así que consideremos al anillo semisimple $S' = O/m \times S$.

Como $S' \otimes_R W \otimes_R S'$ es finitamente generado como bimódulo, tiene $k-$dimensión finita, así que

$$\|M\| = \dim_k(Hom_R(M, M)) = \dim_k(Hom_{S'}(M, M)) < \infty,$$

por lema V.19

$$\begin{aligned}\|M\|_0 &= \dim_k\left(Hom_R\left(W_0\otimes_R M, M\right)\right)\\ &= \dim_k\left(Hom_R\left(W_0\otimes_R S'\otimes_{S'} M, M\right)\right)\\ &= \dim_k\left(Hom_{S'}\left(S'\otimes_R W_0\otimes_R S'\otimes_{S'} M, M\right)\right)<\infty\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|M\|_1 &= \dim_k\left(Hom_R\left(W_1\otimes_R M, M\right)\right)\\ &= \dim_k\left(Hom_R\left(W_1\otimes_R S'\otimes_{S'} M, M\right)\right)\\ &= \dim_k\left(Hom_{S'}\left(S'\otimes_R W_1\otimes_R S'\otimes_{S'} M, M\right)\right)<\infty.\end{aligned}$$

Luego $M \in rep_0\mathcal{A}$ y está definida $q_A(M) = \|M\| - \|M\|_0 + \|M\|_1$, es decir

Es claro que en ambos incisos de la proposición obtenemos bocses pequeños, por lo que si $M' \in \mathcal{H}'$ podemos usar la argumentación anterior para probar que $M' \in rep_0\mathcal{A}_r$.

1. Supongamos que $i, j > 1$. En tal caso, $e_iW_0^1e_j$ y $W_1^{(1)}$ son $S-S-$bimódulos; así que, por III.37, hay descomposiciones de $S-S-$bimódulos $e_iW_0^1e_j = \ker\delta_{|e_iW_0^1e_j}\oplus W_0''$, $e_iW_0e_j = (e_iW_0e_j)'\oplus e_iW_0^1e_j$ y $e_iW_1e_j = W_1''\oplus W_1^{(1)}$.

   Entonces tenemos descomposiciones de $R-R-$bimódulos:

   $$\begin{aligned}W_0 &= W_0'\oplus e_iW_0e_j = W_0'\oplus(e_iW_0e_j)'\oplus e_iW_0^1e_j\\ &= \left[W_0'\oplus(e_iW_0e_j)'\oplus\ker\delta_{|e_iW_0^1e_j}\right]\oplus W_0'' = W_0'''\oplus W_0'',\end{aligned}$$

   y

   $W_1 = W_1'\oplus e_iW_1e_j = W_1'\oplus W_1''\oplus W_1^{(1)} = W_1'''\oplus W_1^{(1)}$.

   Sean $\mathcal{A}_r$ y F_r como en el inciso 1.

   Por III.7.2, F_r es denso. Es claro que $F_r(\mathcal{H}'(\underline{d})) = \mathcal{H}(\underline{d})$.

   Sean $M\in\mathcal{H}$ y $S' = O/m\times S$ como al comienzo de la demostración, tenemos entonces que

   $$S'\otimes_R W_0\otimes_R S' \cong \left(S'\otimes_R W_0''\otimes_R S'\right)\oplus\left(S'\otimes_R W_0'''\otimes_R S'\right),$$
   $$S'\otimes_R W_1\otimes_R S' \cong \left(S'\otimes_R W_1^{(1)}\otimes_R S'\right)\oplus\left(S'\otimes_R W_1'''\otimes_R S'\right),$$

   y que δ induce un isomorfismo $\left(S'\otimes_R W_0''\otimes_R S'\right)\cong\left(S'\otimes_R W_1^{(1)}\otimes_R S'\right)$. Por III.5, para $M'\in\mathcal{H}'$ tal que $F_r(M') = M$, se cumple que $q_A(M) = q_{\mathcal{A}_r}(M')$.

   Por IV.22 esto equivale a que

$$\dim_k (Hom_{\mathcal{A}_r} (M', M')) - \dim_k (Ext_{\mathcal{A}_r} (M', M')) =$$
$$\dim_k (Hom_{\mathcal{A}} (M, M)) - \dim_k (Ext_{\mathcal{A}} (M, M)) .$$

Lo cual, por fidelidad y plenitud de F_r implica que

$$\dim_k (Ext_{\mathcal{A}_r} (M', M')) = \dim_k (Ext_{\mathcal{A}} (M, M)) .$$

Por IV.34 $End_{\mathcal{A}_r} (M') = D' \oplus rad (End_{\mathcal{A}_r} (M'))$ y $End_{\mathcal{A}} (M) = D \oplus rad (End_{\mathcal{A}} (M))$. Por fidelidad y plenitud $D' \cong D$. Luego, la identidad en las $k-$dimensiones de las extensiones, implica que $F_r (\mathcal{H}'_t)$ está contenida en $\mathcal{H}_t$ para cada t. Se sigue que $F_r (\mathcal{H}'_t (\underline{d})) = \mathcal{H}_t (\underline{d})$.

2. Supongamos que $i = 1$ y $j \neq 1$ y $\mathcal{A}$ triangular aditivo. Por III.4.5 $\mathcal{A}_r$ es triangular aditivo.

   Sea $W'_0 = e_i W_0^1 e_j$. Supongamos que hubiese cinco ideales maximales $m_1, ..., m_5$ de O tales que para cada $q \in \{1, ..., 5\}$

$$(O/m_q) \otimes_R W'_0 \otimes_R e_j R \neq 0 \text{ e}$$
$$I_q \otimes \delta \otimes I_q : (O/m_q) \otimes_R W'_0 \otimes_R e_j R \to (O/m_q) \otimes_R W_1^{(1)} \otimes_R e_j R \ (*)$$

   no es inyectivo. En tal caso sea

$$X = O/m_1 \oplus ... \oplus O/m_5 \oplus e_j R,$$

   en donde la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo no es más que la que posee como $R-$módulo. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left({}_{A(\mathcal{A})} (X, X)\right)^{op} = \left({}_{R} (X, X)\right)^{op} \\ &\cong \left({}_{R} (O/m_1, O/m_1)\right)^{op} \times ... \times \left({}_{R} (O/m_5, O/m_5)\right)^{op} \times \left({}_{R} (e_j R, e_j R)\right)^{op}. \end{aligned}$$

   Dado que $R \to e_j R$ y $R \to O/m_q$ son epimorfismos para cada q, por V.1.2 de [M] lo último es igual a

$$\begin{aligned} &\left({}_{O/m_1} (O/m_1, O/m_1)\right)^{op} \times ... \times \left({}_{O/m_5} (O/m_5, O/m_5)\right)^{op} \times \left({}_{e_j R} (e_j R, e_j R)\right)^{op} \\ \cong\ & O/m_1 \times ... \times O/m_5 \times e_j R \end{aligned}$$

   Así que $\Gamma \cong S_0$ el cual es un anillo semisimple. Luego, por III.23, X es S_0-completo, así que hay un funtor fiel y pleno $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$.

Como $\Gamma \cong S_0$, es decir, lo que en la definición III.26 correspondería al bimódulo B es cero, tenemos que la filtración de $R-S-$bimódulos $0 \subseteq X$ hace que X sea S_0-triangular, así que por III.31 $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.

Veamos que la suposición implica que $\mathcal{A}^X$ es salvaje. Primero observemos que para cada

$$\begin{aligned}
(O/m_q)^* = (O/m_q, O/m_1 \times ... \times O/m_5 \times e_j R)_{S_0} &\cong (O/m_q, O/m_q)_{S_0} \\
&\cong (O/m_q, O/m_q)_{O/m_q} \\
&\cong O/m_q.
\end{aligned}$$

Luego, para cada q

$$(O/m_q)^* \otimes_R W_0' \otimes_R e_j R \neq 0.$$

Como $B^* = 0$, tenemos, para los morfismos de III.12 que $e = 0$ y $a = 0$. Para cada q hay una base dual que está dada por $\lambda_q = Id_{O/m_q}$ y $x_q = 1_{O/m_q}$. Similarmente $\lambda_6 = Id_{e_j R}$, $x_6 = e_j$ es una base dual de $e_j R$. No es difícil convencerse de que si $\Phi_2^{-1} : (X, X)_S \to X \otimes_{S_0} X^*$ es como en 1.5.2, entonces $\Phi_2^{-1}(Id_X) = \sum_{q=1}^6 x_q \otimes \lambda_q$. Aplicando las fórmulas de III.14 obtenemos, para $\lambda_q \in (O/m_q)^*$, $q \in \{1, ..., 5\}$ y $w \in W_0'$, que

$$\begin{aligned}
&\delta^X (\lambda_q \otimes_R w \otimes_R e_j) \\
= \ & (a \otimes I)\left(\alpha_{\lambda, e_j}(w)\right) + \alpha_{\lambda, e_j}(\delta(w)) + (-1)^{gr(w)} (I \otimes e)\left(\alpha_{\lambda, e_j}(w)\right) \\
= \ & \alpha_{\lambda, e_j}(\delta(w)) \\
= \ & \lambda_q \otimes_R \delta(w) \otimes_R e_j,
\end{aligned}$$

pues $\delta(w) \in e_i W_1 e_j$. Luego,

$$\begin{aligned}
\delta^X\left((O/m_q)^* \otimes_R W_0' \otimes_R e_j R\right) &= (O/m_q)^* \otimes_R \delta(W_0') \otimes_R e_j R \\
&\cong (I_q \otimes \delta \otimes I_q)\left[(O/m_q) \otimes_R W_0' \otimes_R e_j R\right].
\end{aligned}$$

Por suposición $\ker(I_q \otimes \delta \otimes I_q) \neq 0$. Así que sea

$W_q = \ker(\delta^X) \cap \left((O/m_q)^* \otimes_R W_0' \otimes_R e_j R\right)$. Por III.37 tenemos que $\oplus_{q=1}^5 W_q$ es un sumando directo de $X^* \otimes W_0 \otimes X$. Como $\oplus_{q=1}^5 W_q$ se corresponde a una $k-$especie de la forma

$$\begin{array}{ccc}
\bullet_{O/m_2} & & \bullet_{O/m_1} \\
& \searrow & \downarrow \\
\bullet_{O/m_3} & \rightarrow & \bullet_{e_jR} \\
& \nearrow & \uparrow \\
\bullet_{O/m_4} & & \bullet_{O/m_5}
\end{array}$$

el cual, por [**Ri1**], es de tipo salvaje. Así que, por III.47, $\mathcal{A}^X$ es salvaje y, por III.52, $\mathcal{A}$ es salvaje: contradicción con la hipótesis.

Luego hay a lo más cuatro ideales que cumplen las condiciones pedidas. Por IV.38 en $\mathcal{H}_0(\underline{d})$ hay a lo más cuatro clases de isomorfía que como $R-$módulos tienen componentes O/m_q, tal que m_q cumple que $(*)$ no es inyectivo.

Por III.4.2 Im F_r es la subcategoría de objetos que son anulados por W_0', así que $F_r(\mathcal{H}')(\underline{d})$ cubre a $\mathcal{H}_0(\underline{d})$.

Sea $M \in F_r(\mathcal{H}')(\underline{d})$ y $S' = O/m \times S$ como al comienzo de la demostración. Sea $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
S' \otimes_R W_0' \otimes_R S' & \xrightarrow{I\otimes\iota_0\otimes I} & S' \otimes_R W_0 \otimes_R S' & \rightarrow & S' \otimes_R W_0'' \otimes_R S' & & \\
\downarrow^{I\otimes\delta\otimes I} & & \downarrow^{I\otimes\delta\otimes I} & & \downarrow^{I\otimes\delta_r\otimes I} & & \\
S' \otimes_R W_1^{(1)} \otimes_R S' & \xrightarrow{I\otimes\iota_1\otimes I} & S' \otimes_R V(\mathcal{A}) \otimes_R S' & \rightarrow & S' \otimes_R V(\mathcal{A}_r) \otimes_R S' & \rightarrow & 0
\end{array}$$

donde la primera sucesión es **exacta corta**, y la segunda sucesión es **exacta**. En S' no aparecen los ideales m_q, así que $I \otimes \delta \otimes I_{|S'\otimes_R W_0' \otimes_R S'}$ es inyectivo, luego es isomorfismo, por lo que $I \otimes \iota_1 \otimes I$ es inyectivo. Tenemos entonces la sucesión **exacta corta**:

$$S' \otimes_R W_1^{(1)} \otimes_R S' \xrightarrow{I\otimes\iota_1\otimes I} S' \otimes_R W_1 \otimes_R S' \xrightarrow{\pi} S' \otimes_R \left(W_1/W_1^{(1)}\right) \otimes_R S'.$$

Luego, como S' es semisimple, por III.5 podemos concluir que si $M' \in \mathcal{H}'$ y $F_r(M') = M$, entonces $q_{\mathcal{A}}(M) = q_{\mathcal{A}_r}(M')$. Por IV.22 esto equivale a que

$$\begin{gathered}
\dim_k\left(Hom_{\mathcal{A}_r}(M', M')\right) - \dim_k\left(Ext_{\mathcal{A}_r}(M', M')\right) = \\
\dim_k\left(Hom_{\mathcal{A}}(M, M)\right) - \dim_k\left(Ext_{\mathcal{A}}(M, M)\right).
\end{gathered}$$

Por IV.28 se cumple que

$$\dim_k \left(Ext_{\mathcal{A}_r} \left(M', M' \right) \right) = \dim_k \left(Ext_{\mathcal{A}} \left(M, M \right) \right).$$

Como vimos en IV.34 $End_{\mathcal{A}_r}(M') = D' \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M'))$ y $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$. Por fidelidad y plenitud de F_r se sigue que $D' \cong D$. Luego, la identidad en la dimensión de las extensiones implica que $F_r(\mathcal{H}'_i)$ está contenida en $\mathcal{H}_i$. Luego $F_r(\mathcal{H}'_0(\underline{d}))$ cubre a $\mathcal{H}_0(\underline{d})$.

El caso $i \neq 1$, $j = 1$ se resuelve de manera similar al anterior.

Veamos que no es posible que $i = j = 1$, pues entonces, para $T = T_R(e_i W_0^1 e_j)$ y $M \in \mathcal{H}_0(\underline{d})$, tendríamos que $Ext_{T,R}(M, M) \neq 0$, lo que, debido al epimorfismo $r : Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \to Ext_{T,R}(M, M)$ de IV.23, contradice que $Ext_{\mathcal{A}}(M, M) = 0$.

■

Definición 21. *Sea D un anillo, x una variable y $\sigma : D \to D$ un automorfismo. El anillo de polinomios torcidos $D[x, \sigma]$ tiene como conjunto base a los polinomios formales de x sobre D, pero donde la acción por la derecha de D está dada por $xd = \sigma(d)x$.*

Proposición 22. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular pequeño y sea R semisimple (recordemos que en esta sección R siempre es $k-$minimal, y que por III.37 esto implica que $\mathcal{A}$ es aditivo). Sea $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$ la filtración de grado cero asociada a la triangularidad. Sea $W_0^{(1)}$ un $R-R-$sub-bimódulo de $e_i W_0^1 e_j$ tal que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$. Sea $T = T_R(W_0^{(1)})$. Sea $\underline{d}$ un vector tal que $(\underline{d})_i \neq 0$ o $(\underline{d})_j \neq 0$. Sea $e = e_i + e_j - e_i + e_j$, y $e' = 1 - e$. Si la familia $\mathcal{H}_1(\underline{d})$ tiene infinitas isoclases de inescindibles sucede una, y sólo una, de las siguientes situaciones:*

1. *Si $j = i$ entonces hay un bocs $\mathcal{A}_\theta = (R', W', \delta')$ triangular aditivo pequeño, y una única e$-$dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_\theta((\mathcal{H}_\theta)_0(\underline{d}'))$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d})$, donde F_θ es el funtor absorción.*
2. *Sea $i \neq j$. Hay un $T-$módulo generador G_0 y una única e$-$dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(\underline{d}')\right)$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d})$, para $X = G_0 \oplus e'R$. Además $\mathcal{A}_\theta^X = \left(R_0, W^X, \delta^X\right)$ es triangular aditivo y pequeño.*
3. *Sea $i \neq j$. Hay un $T-$módulo X que es $S-$triangular y de $k-$dimensión finita, y una única e$-$dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_1(\underline{d}')\right)$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d})$.*

   $\mathcal{A}_\theta^X = \left(S, W^X, \delta^X\right)$ es triangular aditivo y pequeño.

Demostración: Comencemos recordando que por III.37, $W_0^{(1)}$ es un sumando directo de $e_i W_0^1 e_j$ como $R-R$−bimódulos, luego podemos aplicar absorción. Por semisimplicidad de R tenemos que $Ext_{T,R}(\_,\_) = Ext_T(\_,\_)$.

Sea $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$. Por IV.34 $End_A(M) = D_M \oplus rad(End_A(M))$. Por IV.23 hay un epimorfismo $r : Ext_A(M,M) \to Ext_T(M,M)$ de $D_M - D_M^{op}$−bimódulos, así que $Ext_T(M,M)$ sólo puede ser trivial o simple como D_M−módulo.

Como $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, hay un morfismo de anillos $\iota : D_M \to End_T(M)$ dado por $\sigma((f^0, f^1)) = f^0$. Como D_M es una k−álgebra de división, y claramente la identidad va en la identidad, ι es inyectivo.

Tenemos entonces que la longitud de $Ext_T(M,M)$ como D_M−módulo izquierdo (derecho) es mayor o igual a la que tiene como $End_T(M)$ −módulo izquierdo (derecho), así que $Ext_{T,R}(M,M)$ sólo puede ser trivial o simple como $End_T(M)$ −módulo izquierdo (derecho).

Sea $c_M = \dim_k(D_M)$. Recordemos que por IV.36 $c_M(\underline{e - \dim}(M)) = \underline{\dim}(M)$.

Como se mostró en IV.31 hay isomorfismos $Ext_T(M,M) \cong Ext_{eTe}(eM,eM)$ y $End_T(M) \cong End_{eTe}(eM)$, por lo que generalmente sólo estudiaremos las propiedades de eM.

1. Sea $j = i$. Probemos que $W_0^{(1)}$ es de dimensión 1 en el anillo de división $eR = D$.

   Sea q_{eTe} la forma cuadrática del álgebra tensorial eTe. Tenemos que

   $q_{eTe}(eM) = \dim_k({}_D(eM,eM)) - \dim_k\left({}_D\left(W_0^{(1)} \otimes_D eM, eM\right)\right)$

   lo que claramente es negativo si $\dim_D\left(W_0^{(1)}\right) > 1$. Como también

   $q_{eTe}(eM) = \dim_k({}_{eTe}(eM,eM)) - \dim_k(Ext_{eTe}(eM,eM))$,

   tenemos entonces que la única manera de que $Ext_{eTe}(eM,eM)$ sea simple como D_M−módulo, es que $q_{eTe}(eM) \geq 0$, luego es necesario que $\dim_D\left(W_0^{(1)}\right) = 1$.

   Así que $W_0^{(1)} = D_M w = w D_M$ para $w \in W_0^{(1)} - \{0\}$, es decir que si fijamos a w obtenemos un automorfismo de álgebras $\sigma : D \to D$ definido por $wd = \sigma(d) w$:

   $\sigma(d_1 d_2) w = w d_1 d_2 = \sigma(d_1) w d_2 = \sigma(d_1)\sigma(d_2) w.$

   La identidad $I : D \to D$ y el isomorfismo de $D-D$−bimódulos $b : W_0^{(1)} \to Dx$ dado por $b(dw) = dx$, induce por la propiedad universal del álgebra tensorial un morfismo de k−álgebras $b' : eTe \to D[x,\sigma]$. Es inmediato que b' es biyectivo.

   Ahora bien, $D[x,\sigma]$ es uno de los dominios considerados en V.8 (véase 5.3.1 [CB2]), que parametrizan a los módulos regulares simples. De esto se sigue que casi todo objeto de $\mathcal{H}_1(\underline{d})$ es isomorfo a un objeto de $F_0(\mathcal{H}_0)$.

Puesto que $R = \times_{l=1}^{n} e_l R$ y $R_1 = \times_{l\neq i}^{n} e_l R \times eTe$, si $\underline{d} = (d_1, ..., d_i, ..., d_n)$ y $F_\theta(N) \cong M$ para $M \in \mathcal{H}(\underline{d})$ entonces $N \in \mathcal{H}_\theta(\underline{d}')$, donde el nuevo vector de $e-$dimensión es $\underline{d}' = (d_1, ..., d_{i-1}, 1, d_{i+1}, ..., d_n)$.

Por IV.29, para $N \in RepA_\theta$ y $F_\theta(N) = M$, hay una sucesión exacta corta:

$$Ext_{A_\theta}(N,N) \xrightarrow{(F_\theta)_*} Ext_A(M,M) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(M,M).$$

Puesto que F_θ es un isomorfismo de categorías tenemos que $End_{A_\theta}(N) = F_\theta^{-1}(D_M) \oplus rad(End_{A_\theta}(N))$, así que se induce una estructura de $D_M - D_M^{op}-$bimódulo en $Ext_{A_\theta}(N,N)$. Como $(F_\theta)_*$ es una transformación natural de bifuntores, tenemos que si $Ext_A(M,M)$ es simple como D_M-módulo, entonces $Ext_{T,R}(M,M)$ es simple como D_M-módulo si y sólo si $Ext_{A_\theta}(N,N) = 0$.

Luego $F_\theta((\mathcal{H}_\theta)_0(\underline{d}'))$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d})$.

2. Sea $j \neq i$. Supongamos que $Ext_{eTe}(eM, eM)$ es simple como D_M-módulo, luego es simple como $End_{eTe}(eM)-$módulo. Sabemos que eM es de la forma:

$$eM = (\lambda_1 M_1 \oplus ... \oplus \lambda_n M_n) \oplus (\mu_1 Z_1 \oplus ... \oplus \mu_m Z_m),$$

donde M_h es regular inescindible y Z_t es preyectivo inescindible, es decir, que es preproyectivo o preinyectivo. Como se vió en la prueba de IV.33 $Ext_{eTe}(M_h, M_h)$ es distinto de cero, y $Ext_{eTe}(M_h, Z_t)$ o $Ext_{eTe}(Z_t, M_h)$ es distinto de cero, luego de los isomorfismos de $End_{eTe}(M)-$módulos

$$Ext_{eTe}(eM, eM) \cong (\oplus_{h=1}^{n} \lambda_h Ext_{eTe}(eM, M_h)) \oplus (\oplus_{t=1}^{m} \mu_t Ext_{eTe}(eM, Z_t))$$
$$Ext_{eTe}(eM, eM) \cong (\oplus_{h=1}^{n} \lambda_h Ext_{eTe}(M_l, eM)) \oplus (\oplus_{t=1}^{m} \mu_t Ext_{eTe}(Z_t, eM))$$

y el que $Ext_{eTe}(eM, eM)$ sea simple se sigue que $eM \cong M_h$ para un único módulo regular, o que es suma de módulos preyectivos.

Supongamos que eM es regular. Consideremos a q, la forma cuadrática asociada a T, se cumple que

$$0 = q(eM) = \dim_k(End_{eTe}(eM)) - \dim_k(Ext_{eTe}(eM, eM)).$$

Luego, como $\dim_k(Ext_{eTe}(eM, eM)) = c_M$, tenemos que $End_{eTe}(eM) \cong D_M$, por lo que eM es regular simple.

Sea $N \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$. Por IV.36 y observación IV.2 $\underline{\dim}_R(M) = \frac{c_M}{c_N}(\underline{\dim}_R(N))$, por lo que se cumple que $q(eN) = 0$. Esto nos permite repetir el argumento anterior y concluir que $End_{eTe}(eN)$ es anillo de división, luego eN es inescindible, luego es regular simple.

Sea G_0 un módulo generador asociado a eTe, por V.8 casi todo simple regular eTe es de la forma $G_0 \otimes_O (O/m)$ con m un ideal maximal de O, y todos tienen endolongitud l, con l un entero fijo.

Sea $X = G_0 \oplus e'R$. Por V.10, V.11, III.25 y III.32 X es $O \times e'R-$completo y $O \times e'R-$triangular, así que existe un bocs $\mathcal{A}_\theta^X = (S_0, W^X, \delta^X)$ triangular, con $R_\theta = O \times e'R$, y una funtor fiel y pleno que es la composición de los funtores absorción y reducción $F_\theta F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \to Rep\mathcal{A}$.

Puesto que $(G_0)_O \cong O^l$, y $W^X \cong ((G_0)^* \otimes_R W \otimes_R G_0) \oplus (e'We')$, tenemos que W^X es finitamente generado como bimódulo. Además, si hay una filtración $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq \dots \subseteq W_0^r = W_0$, por III.37 $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$ como $R-R-$bimódulos. Basta verificar que la filtración de grado cero de $\mathcal{A}_\theta^X$, construida en III.31, es $X^* \otimes_R (W_0^{i+1}) \otimes_R X \cong (X^* \otimes_R W_0^i \otimes_R X) \oplus (X^* \otimes_R V_{i+1} \otimes_R X)$, luego $\mathcal{A}_\theta^X$ es triangular aditiva.

Por construcción, casi todo objeto de $\mathcal{H}_1(\underline{d})$ es isomorfo a un objeto de $F_X F_\theta(\mathcal{H}_\theta^X)$, pues son de la forma $(F_\theta F_X(M')) \cong ((G_0 \otimes_O (O/m)) \oplus e'R) \otimes_{S'} M'$ como $T-$módulos, así que aplicamos III.17.2

Sea $F_\theta F_X(M') = M$. Por IV.37 hay una sucesión exacta corta $(*)$

$$Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M', M') \xrightarrow{(F_\theta F_X)_*} Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \xrightarrow{r} Ext_T(M, M).$$

Como en el inciso anterior, de esta sucesión obtenemos que si $M' \in Rep\mathcal{A}_\theta^X$ es tal que $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$, entonces $M' \in (\mathcal{H}_\theta^X)_0$.

Veamos cual debe de ser el vector de $e-$dimensión de tal M' : sea $\underline{e-\dim}(M') = \underline{d}'$, y sea $S' = O/m \times e'R$ el anillo semisimple asociado. Sea $\underline{d} = (\underline{d}_1, \underline{d}_2)$ donde $\underline{d}_1$ es el vector correspondiente a e, y $\underline{d}_2$ es el vector correspondiente a e'. Para $\underline{d}'$ sea $\underline{d}' = (\underline{d}_1', \underline{d}_2')$ donde $\underline{d}_1'$ se corresponde al orden O, y $\underline{d}_2'$ se corresponde a $e'R$.

Tenemos que $M = (F_\theta F_X(M')) \cong ((G_0 \otimes_O (O/m)) \oplus e'R) \otimes_{S'} M'$ es isomorfo como $T-$módulo a un elemento de $\mathcal{H}_1(\underline{d})$, luego $\underline{d}_2 = \underline{d}_2'$, pues por fidelidad y plenitud $c_M = c_{M'}$. Recordemos que $End_{eTe}(eM) \cong D_M$, mientras que por otro lado $End_{eTe}(eM) \cong (O/m)$, y $(G_0 \otimes_O (O/m))$ tiene endolongitud l. Por lo tanto $\underline{d}'_1 = 1$.

Por III.43 y III.44 $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(1,\underline{d}'_2)\right) \subseteq \mathcal{H}(\underline{d})$.

Sea $M' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(1,\underline{d}'_2)$ y $M = (F_\theta F_X(M'))$, así que eM contiene módulos $eTe-$regulares simples, y como la endolongitud de cualquiera de tales módulos es l, tenemos que $End_{eTe}(eM) \cong D_{M'} \cong D_M$, luego $Ext_{eTe}(eM, eM)$ es simple como D_M módulo, y por $(*)$ eso implica que $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$.

3. Sea $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$. Prosigamos con la labor del inciso anterior suponiendo que $Ext_{eTe}(eM, eM)$ es D_M-simple, pero que ahora

$$eM = \mu_1 Z_1 \oplus \ldots \oplus \mu_m Z_m$$

donde Z_t es preyectivo inescindible. Probemos que sólo hay una cantidad finita de clases de isomorfía de preyectivos, que aparecen como sumandos directos de eM, para todos los $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$. Como en el inciso anterior tenemos los isomorfismos de $End_{eTe}(M)-$módulos

$$Ext_{eTe}(eM, eM) \cong \oplus_{t=1}^m \mu_t Ext_{eTe}(eM, Z_t)$$
$$Ext_{eTe}(eM, eM) \cong \oplus_{t=1}^m \mu_t Ext_{eTe}(Z_t, eM)$$

así que $Ext_{eTe}(eM, eM)$ simple implica que hay al menos un t_0 tal que $\mu_{t_0} = 1$. Puesto que hay un monomorfismo de anillos inducido

$$D_M \to End_{eTe}(eM)/rad(End_{eTe}(eM)) \cong \times_{t=1}^m End(\mu_t Z_t)$$

se induce un monomorfismo $D_M \to End\left(\mu_{t_0} Z_{t_0}\right)$. Puesto que el anillo de endomorfismos de un módulo preyectivo es $e_i R$ o $e_j R$, se sigue que $c_M \leq \max\{\dim_k(e_i R), \dim_k(e_j R)\}$. Por lo tanto $\underline{\dim}(M)$ está acotada, así que sólo aparece una cantidad finita de clases de isomorfía de módulos preyectivos.

Sea $X = (Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_m) \oplus e'R$. Por III.38 X es $S-$completo y $S-$triangular, así que existe un bocs $\mathcal{A}_\theta^X = \left(S, W^X, \delta^X\right)$ triangular, y un funtor fiel y pleno el cual es composición de los funtores absorción y reducción $F_\theta F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \to Rep\mathcal{A}$.

Por $(*)$, si $M' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)$ es tal que $M = F_\theta F_X(M')$, entonces $M' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0$.

Por IV.38, para cada $\underline{d}'$, hay una sola isoclase en $\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(\underline{d}')$. En III.44 vimos que las $e-$dimensiones de $Rep\mathcal{A}_\theta^X$ son enviadas linealmente en $e-$dimensiones de $RepA$ mediante una matriz de números enteros. Luego hay una cantidad finita de e−dimensiones $\underline{d}'$ que van en $\underline{d}$, así que sólo hay una cantidad finita de isoclases en $\mathcal{H}_1(\underline{d})$ tales que su $Ext_{eTe}(eM, eM)$ es D_M−simple.

Denotemos por $\mathcal{H}_1(\underline{d})^{\frown}$ a los objetos $M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})$ tales que $Ext_{eTe}(eM, eM) = 0$. Sean $M, N \in \mathcal{H}_1(\underline{d})^{\frown}$, como $\underline{e-\dim}(eM) = \underline{e-\dim}(eN)$, se sigue, por observación IV.2 y IV.33, que hay enteros c_N, c_M tales que $c_N(eM) \cong c_M(eN)$, es decir que aparecen las mismas clases de isomorfía de inescindibles en sus descomposiciones como eTe−módulos.

Sea $X = u_1 Z_1 \oplus u_2 Z_2 \oplus e'R$, donde u_i es 1 si $n_i \neq 0$ y cero en otro caso. Por III.38 este módulo es S_0−completo y S_0−triangular, así que existe un bocs $\mathcal{A}_\theta^X = (S, W^X, \delta^X)$ triangular y una composición de funtores absorción y reducción $F_\theta F_X : RepA_\theta^X \to RepA$ fiel y pleno. Por construcción, y III.17.2, todo elemento de $\mathcal{H}_1(\underline{d})$ es isomorfo a algún objeto de $\mathrm{Im}(F_\theta F_X)$.

Sea $M' \in RepA_\theta^X$, tal que $F_\theta F_X(M') \cong M \in \mathcal{H}_1(\underline{d})^{\frown}$. De la sucesión exacta $(*)$ tenemos que $Ext_{A_1^X}(M', M')$ es simple en $End_{A_1^X}(M')$, es decir que $M' \in (\mathcal{H}_\theta^X)_1$. Recíprocamente, si $N' \in (\mathcal{H}_\theta^X)_1$ entonces $Ext_{eTe}(F_\theta F_X(N'), F_\theta F_X(N')) = 0$, así que $F_\theta F_X(N') \in (\mathcal{H}_1)^{\frown}$.

Sea $\underline{e-\dim}(M') = \underline{d}'$.Por III.43 y III.44, todo objeto con e−dimensión $\underline{d}'$ va bajo $F_\theta F_X$ en un objeto con e−dimensión $\underline{d}$, luego $F_\theta F_X\left((\mathcal{H}_\theta^X)_1(\underline{d}')\right) \subseteq \mathcal{H}_1(\underline{d})^{\frown}$.

Sean $N \in \mathcal{H}_1(\underline{d})^{\frown}$ y $N' \in RepA_\theta^X$ tal que $F_\theta F_X(N') \cong N$. Sea $\underline{e-\dim}(N') = \underline{d}''$. Como vimos antes $c_N(eM) \cong c_M(eN)$, es decir, que si $eM = n_1 Z_1 \oplus n_2 Z_2$ y $eN = m_1 Z_1 \oplus m_2 Z_2$, entonces $c_N n_q = c_M m_q$. Luego $\underline{d}'' = \left(\frac{c_N}{c_M}\right)\underline{d}'$, pero, una vez más por III.44, eso sólo es posible si $c = 1$.

Observemos que para una e−dimensión $\underline{d}$ los tres casos presentados son ajenos; en el primero $i = j$ (se corresponde con un lazo), el segundo tiene forma cuadrática sobre T igual a cero y en el tercero la forma cuadrática es positiva.

■

Proposición 23. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular aditivo pequeño y $R = O_1 \times \ldots \times O_t \times S$. Sea $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ la filtración de grado cero asociada a la triangularidad. Sea $W_0^{(1)}$ un $R-R$−sub-bimódulo de $e_i W_0^1 e_j$ tal que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, y donde $i, j > t$. Sea $T = T_R(W_0^{(1)})$. Sea $\underline{d}$ un vector dimensión tal que $(\underline{d})_i \neq 0$ o $(\underline{d})_j \neq 0$. Entonces existe un T−módulo X el cual es S_0−completo y S_0−triangular tal que:*

Sea $\mathcal{A}_\theta^X = (S_0, W^X, \delta^X)$ el bocs asociado y $F_\theta F_X : RepA_\theta^X \to RepA$ la composición de los funtores reducción y absorción. $\mathcal{A}_\theta^X$ es triangular aditivo pequeño.

Hay una sola dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(\underline{d}')\right)$ cubre a $\mathcal{H}_0(\underline{d})$.

Demostración: Sea $e = 1 - (e_i + e_j - e_ie_j)$, como $i, j > t$, $e_iW_0^1e_j$ es un $S-S-$bimódulo. $W_0^{(1)}$ también lo es, y resulta sumando directo de $e_iW_0^1e_j$, por III.37 como $S-S-$bimódulo, luego también es sumando directo como $R-R-$bimódulo.

Sea $M \in \mathcal{H}_0(\underline{d})$. Por IV.23 hay un epimorfismo de bimódulos $r : Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \to Ext_{T,R}(M, M)$. Así que $Ext_{T,R}(M, M) = 0$, luego $Ext_{eTe,R}(eM, eM) = Ext_{eTe}(eM, eM) = 0$. Así que $i \neq j$.

Sea $N \in \mathcal{H}_0(\underline{d})$, como $\underline{e-\dim}(eM) = \underline{e-\dim}(eN)$, por IV.33, se sigue que hay enteros a, b tales que $a(eM) \cong b(eN)$, es decir que aparecen las mismas clases de isomorfía de inescindibles en sus descomposiciones como $eTe-$módulos. Sea ${}_{eTe}X$ la suma de representantes de las clases de isomorfía que aparecen en eM, luego

${}_{eTe}X \oplus (\oplus_{h=1}^t O_h)$ es un módulo $S_0 = O_1 \times ... \times O_t \times S'-$triangular.

Por construcción, para $M' \in RepA_\theta^X$ se cumple que $F_\theta F_X(M') \in \mathcal{H}$ sólo cuando $M' \in \mathcal{H}_\theta^X$.

Sea $M \in \mathcal{H}$ y sea $M' \in RepA_\theta^X$ tal que $F_\theta F_X(M') = M$. Por IV.37 tenemos una sucesión exacta corta

$$Ext_{A_\theta^X}(M', M') \overset{(F_\theta F_X)_*}{\longrightarrow} Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \overset{r}{\longrightarrow} Ext_T(M, M).$$

Luego $Ext_{A_1^X}(M', M') = 0$ si y sólo si $Ext_{\mathcal{A}}(M, M) = 0$, por lo que $M' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0$.

Sea $\underline{d} = (\underline{d}_1, \underline{d}_2)$, donde $\underline{d}_1$ es el vector correspondiente a e, y $\underline{d}_2$ es el vector correspondiente a $1-e$. Para $\underline{d}'$ sea $\underline{d}' = (\underline{d}_1', \underline{d}_2')$, donde $\underline{d}_1'$ se corresponde a e, y $\underline{d}_2'$ se corresponde a S'.

Sean $M, N \in \mathcal{H}_0(\underline{d})$, $N' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)(\underline{d}')$ y $M' \in \left(\mathcal{H}_\theta^X\right)(\underline{d}'')$ tales que $F_\theta F_X(N') \cong N$ y $F_\theta F_X(M') \cong M$. Claramente $\underline{d}_1 = \underline{d}_1' = \underline{d}_1''$.

Sea ${}_{eTe}X = Z_1 \oplus Z_2$. Como vimos antes hay enteros a, b tales que $a(eM) \cong b(eN)$, es decir, que si $eM = n_1Z_1 \oplus n_2Z_2$ y $eN = m_1Z_1 \oplus m_2Z_2$, entonces $an_q = bm_q$. Luego $\underline{d}_2'' = c\underline{d}_2'$, pero esto sólo es posible si $c = 1$.

■

Teorema 24. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular pequeño con R una $k-$álgebra minimal, semisimple y de $k-$dimensión finita. Sea k perfecto y $\mathcal{A}$ no salvaje. Entonces, para cada vector de e$-$dimensión $\underline{d}$ con una cantidad infinita de isoclases de inescindibles en $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$, hay un bocs triangular minimal $\mathcal{B} = (R_\mathcal{B}, W_\mathcal{B}, \delta_\mathcal{B})$ y un funtor $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ tal que:*

1. *$R_\mathcal{B} = O \times S$, donde O es un orden asociado a un módulo generador,*

2. *F es composición de los funtores eliminación de idempotentes, regularización y la composición de absorción y reducción,*

3. *hay una e–dimensión $\underline{d}_{\mathcal{B}} = (1, 0, \ldots, 0)$ tal que $F(\mathcal{H}_0(\mathcal{B})(\underline{d}_{\mathcal{B}}))$ cubre a $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$.*

Demostración: Sea $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ la descomposición de la unidad de R en idempotentes primitivos centrales ortogonales. Para $M \in rep\mathcal{A}$ sea $End_{\mathcal{A}}(M) = D_M \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ como en IV.34.1 y sea $c_M = \dim_k(D_M)$.

Los funtores de reducción son fieles y plenos, así que si F es un funtor de estos, $c_M = c_{F(M)}$.

Procedamos a resolver el problema.

Paso 1: Si $\underline{d}$ tiene ceros, podemos aplicar eliminación de idempotentes cuantas veces sea necesario hasta obtener una nueva e–dimensión sin ceros, digamos $\underline{d}_1$. Por utilización sucesiva de V.18 obtenemos un funtor $F_1 : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$, el cual es composición de funtores eliminación de idempotentes y tal que $F_1(\mathcal{H}_1(\mathcal{A}')(\underline{d}_1)) = \mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$. Por III.3.5, pues es suficiente que la propiedad se cumpla en un sólo objeto con e–dimensión $\underline{d}$, tenemos que $\|\underline{d}_1\|_0 = \|\underline{d}\|_0$.

Paso 2: De ser posible, aplicamos sucesivamente V.20.1 obteniéndose un funtor $F_2 : Rep\mathcal{A}'' \to Rep\mathcal{A}'$, el cual es composición de funtores regularización y el cual satisface que $F_2(\mathcal{H}_1(\mathcal{A}'')(\underline{d}_1)) = \mathcal{H}_1(\mathcal{A}')(\underline{d}_1)$. Observemos, por III.5, que para $M' \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}'')(\underline{d}_1)$ se cumple la desigualdad estricta $\|M''\|_0 < \|F_2(M'')\|_0$, luego $\|\underline{d}_1\|_0 < \|\underline{d}_1\|_0$.

Paso 3: Ahora tenemos que aplicar los funtores absorción y reducción. Si el módulo triangular X es de dimensión finita, por V.22.3 hay un bocs $\mathcal{A}_\theta^X = (S_0, W^X, \delta^X)$ y una única e–dimensión $\underline{d}_2$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_1(\underline{d}_2)\right)$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d}_1)$. Por III.8.3 y III.21 para $M \in \mathcal{H}_1\left(\mathcal{A}_1^X\right)(\underline{d}_2)$ se cumple la desigualdad estricta $\|\underline{d}_2\|_0 < \|\underline{d}_1\|_0$.

Repetimos estos tres pasos tantas veces como sea posible, como la norma va disminuyendo, esto ocurrirá un número finito de veces. Mediante este proceso no es posible llegar a un bocs minimal, pues en un bocs minimal toda conflación es equivalente a la trivial, es decir, el grupo de auto-extensiones es cero. Sea $\mathcal{B}_t = (R_t, W_t, \delta_t)$ el bocs en el que este proceso termina y sea $F_t : Rep\mathcal{B}_t \to Rep\mathcal{A}$ el funtor obtenido, y sea $\underline{d}_t$ la única e–dimensión para la cual $F_t(\mathcal{H}_1(\mathcal{B}_t)(\underline{d}_t))$ cubre a $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$.

De manera que debe llegar el momento en que empleamos absorción y reducción como en V.22.1-2. Sea $1_{R_t} = e + e'$, donde e es la suma de los idempotentes a considerar. Sea $\hat{W}_t = e'(W_t)_0 e'$ y en lugar de la norma cero consideramos a $\|\underline{d}_t\|_{\hat{W}_t} < \|\underline{d}_t\|_0$.

Al aplicar el funtor obtenemos un módulo generador G_0, con anillo de endomorfismos O, un anillo k–minimal $R = O \times e'R_t$, un bocs $\mathcal{B}_1 = (R_1, W_1, \delta_1)$ y una única $e-$dimensión $\underline{d}'$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(\underline{d}')\right)$ cubre a $\mathcal{H}_1(\underline{d})$. Además, si $\hat{W}_1 = e'(W_1)_0 e'$ tenemos de III.8.3 y III.21 que $\|\underline{d}'\|_{\hat{W}_1} = \|\underline{d}_t\|_{\hat{W}_t}$.

Por comodidad denotemos en todos los bocses que aparecerán, cuyos anillos son de la forma $O \times S_q$ con S_q semisimple, por $\hat{W}$ al $R-R-$sub-bimódulo de $(W_0)_q$ dado por $1_{S_q}(W_0)_q 1_{S_q}$.

Paso 4: Si $\underline{d}'$ tiene ceros, podemos aplicar el funtor eliminación de idempotentes cuantas veces sea necesario hasta obtener una nueva $e-$dimensión sin ceros, digamos $\underline{d}_1'$. Por utilización sucesiva de V.18 obtenemos un funtor $F_1' : Rep\mathcal{B}_2 \to Rep\mathcal{B}_1$, el cual es composición de funtores eliminación de idempotentes y tal que $F_1'(\mathcal{H}_0(\mathcal{B}_2)(\underline{d}_1')) = \mathcal{H}_0^X(\mathcal{B}_1)(\underline{d}')$. Por III.3.5 tenemos que $\|\underline{d}_1'\|_{\hat{W}} = \|\underline{d}'\|_{\hat{W}}$.

Por III.48, III.49, III.50, III.51 y III.52 ninguno de los bocses que aparecen pueden ser salvajes.

Paso 5: Así que si $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ es la filtración de grado cero asociada a la triangularidad de $\mathcal{B}_2$, y se tiene que $\delta(W_0^1) \neq 0$, podemos aplicar el funtor regularización como en V.20.1 o en V.20.2. Observemos, por III.5, que si empleamos V.20.1 disminuimos de manera estricta el valor de $\|\underline{d}_1'\|_{\hat{W}}$. La variante V.20.2 del funtor regularización sólo puede aplicarse de manera consecutiva un número finito de veces, de hecho, si n es el número de idempotentes primitivos y r es el número de submódulos de la filtración de grado cero, V.20.2 se puede utilizar a lo más n^2r veces consecutivamente.

Así que utilizamos regularización tantas veces como sea posible, y como ya observamos esto es un número finito, obteniéndose un funtor $F_2' : Rep\mathcal{B}_3 \to Rep\mathcal{B}_2$, el cual es composición de funtores regularización y el cual satisface que $F_2(\mathcal{H}_0(\mathcal{B}_3)(\underline{d}_1')) = \mathcal{H}_0(\mathcal{B}_2)(\underline{d}_1')$.

Paso 6: Luego, si no hemos llegado a un bocs minimal, hemos de aplicar los funtores absorción y reducción como en V.23 obteniéndose un bocs $\mathcal{B}^X$ y una única dimensión $\underline{d}_2'$ tal que $F_\theta F_X\left(\left(\mathcal{H}_\theta^X\right)_0(\underline{d}_2')\right)$ cubre a $\mathcal{H}_0(\underline{d}_1')$. Por III.8.3 y III.21 $\|\underline{d}_2'\|_{\hat{W}} < \|\underline{d}_1'\|_{\hat{W}}$.

Repitiendo estos pasos llegamos a un bocs $\mathcal{B}_n$ y un funtor $F_q : Rep\mathcal{B}_n \to Rep\mathcal{B}_f$ tales que hay una única $e-$dimensión $\underline{d}_q'$ para la cual $F_q\left(\mathcal{H}_0(\mathcal{B}_n)\left(\underline{d}_q'\right)\right)$ cubre a $\mathcal{H}_0(\mathcal{B}_t)(\underline{d}_t)$, y $\|\underline{d}_q'\|_{\hat{W}} = 0$.

Si este bocs no es minimal, como no es salvaje podemos aplicar V.20.2 hasta que obtenemos un bocs minimal $\mathcal{B}$, un funtor $F_l : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{B}_n$ y una dimensión $\underline{d}_\mathcal{B}$ tal que $F_l(\mathcal{H}_0(\mathcal{B})(\underline{d}_\mathcal{B}))$ cubre a $\mathcal{H}_0(\mathcal{B}_n)\left(\underline{d}_q'\right)$.

Ahora bien, por construcción $R_\mathcal{B} = O \times S$. Por minimalidad $\mathcal{H}_0(\mathcal{B})$ está constituida por una cantidad finita de objetos asociados a la parte semisimple, y casi todos al orden O. Luego casi todos tienen $e-$dimensión $(1, 0, \ldots, 0)$, por lo que podemos considerar $\underline{d}_\mathcal{B} = (1, 0, \ldots, 0)$.

La composición $F_t F_q F_l : Rep\mathcal{B} \to RepA$ satisface los incisos finales del enunciado.

■

Definición 25. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Un $A(\mathcal{A})-O-$bimódulo M será llamado parametrizador sobre una subcategoría $\mathcal{U}$ de $O-Mod$, si el funtor $M \otimes_O - : \mathcal{U} \to rep\mathcal{A}$ preserva inescindibles y clases de isomorfía, y si M como $O-$módulo es libre finitamente generado. A la imagen de dicho funtor la denotaremos por $\mathcal{Q}_M^{\mathcal{U}}$. A una familia $\mathcal{Q}$ que sea cubierta por $\mathcal{Q}_M^{\mathcal{U}}$ la llamaremos parametrizada por $\mathcal{U}$ mediante M.*

En lo siguiente $\mathcal{U}$ será la familia $\mathcal{H}(O-Mod)$, así que sólo utilizaremos la expresión "$\mathcal{Q}$ es parametrizada por M".

Corolario 26. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular pequeño, con R una $k-$álgebra mi-nimal, semisimple y de $k-$dimensión finita. Sea k perfecto y $\mathcal{A}$ no salvaje. Si la familia $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$ tiene infinitas isoclases entonces está parametrizada por un $A(\mathcal{A})-O-$bimódulo M, donde O es una localización de un orden asociado a un módulo generador.*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = (R_\mathcal{B}, W_\mathcal{B}, \delta_\mathcal{B})$ el bocs y $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ el funtor del teorema anterior.

Es claro que para $\underline{d}_\mathcal{B} = (1, 0, ..., 0)$ la familia $\mathcal{H}_0(\mathcal{B})(\underline{d}_\mathcal{B})$ es parametrizada por O, el cual es una localización de un orden asociado a un módulo generador.

Imitemos las argumentaciones de III.48 a III.52:

Sea $F' : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ el funtor eliminación de idempotentes o regularización y sea $\mathcal{Q}$ una subcategoría de $rep\mathcal{A}'$ parametrizada por un $A(\mathcal{A}') - O-$bimódulo M.

Sea $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ el epimorfismo correspondiente, el cual es un morfismo de bocses

Sea el $R'-$morfismo $\theta' : A(\mathcal{A}') \otimes_{R'} M \to M$ la estructura de $A(\mathcal{A}')-$módulo de M, y el $R-$morfismo $\theta : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M$ la $A(\mathcal{A})-$estructura inducida por η. Ahora bien, si $Y \in \mathcal{H}(O-Mod)$, entonces la $A(\mathcal{A}')-$estructura de $M \otimes_O Y$ está dada por $\theta' \otimes Id_Y$. Luego la $A(\mathcal{A})-$estructura inducida por η es $\theta_1 = \theta \otimes Id_Y$, es decir, $F'(M \otimes_O Y) \cong F'(M) \otimes_O Y$.

Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $F'((f^0, f^1)) = (f^0, f^1\eta)$. Luego, si $g : Y \to Y'$ es un morfismo en $\mathcal{H}(O-Mod)$ tenemos que

$F'(Id_M \otimes g, 0) = (Id_{F'(M)} \otimes g, 0)$.

Concluimos que hay un $A(\mathcal{A})-O-$bimódulo $F'(M)$, y que el funtor $F'(M) \otimes_O - : \mathcal{H}(O-Mod) \to rep\mathcal{A}$ es naturalmente isomorfo a $F'(M \otimes_O -)$, y puesto que F' es fiel y pleno, tenemos que $F'(M \otimes_O -)$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Luego la familia $F'(\mathcal{Q})$ es parametrizada por $F'(M)$, el cual por la derecha tiene la misma estructura que M.

Ahora sea $F_\theta F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \to Rep\mathcal{A}$ la composición de los funtores absorción y reducción.

Sea $\mathcal{Q}$ una subcategoría de $repA$ parametrizada por un $A\left(\mathcal{A}_\theta^X\right) - O$–bimódulo M.

Sea $\{x_i, \lambda_i, i \in I\}$ una base dual de X_S. Sea N un objeto en $Rep\mathcal{A}^X$ y $*$: $A\left(\mathcal{A}^X\right) \otimes_S N \to N$ su $A\left(\mathcal{A}^X\right)$ –estructura. Tenemos por III.15.1 que la $A\left(\mathcal{A}_1\right)$ –estructura de $F_X(N)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes n) = \sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i, x}(a) * n$$

para $a \in A(\mathcal{A}_1)$. Así que la $A(\mathcal{A}_1)$ –estructura de $F_X(M) \otimes_O Y$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes m) \otimes y = \left(\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i, x}(a) * m\right) \otimes y$$

y la $A(\mathcal{A}_1)$ –estructura de $F_X(M \otimes_O Y)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes (m \otimes y)) = \sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i, x}(a) * (m \otimes y) = \left(\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i, x}(a) * m\right) \otimes y$$

por lo que $F_X(M \otimes_O Y) \cong F_X(M) \otimes_O Y$.

Si $g : Y \to Y'$ es un morfismo en Σ tenemos por III.15.2 y III.15.3 que

$$F_X\left((Id_M \otimes g, 0)\right) = (Id_X \otimes Id_M \otimes g, 0) = (Id_{X \otimes M} \otimes g, 0).$$

Se sigue que $F_X(M) \otimes_O$ _ es naturalmente isomorfo a $F_X(M \otimes_O \_)$, y puesto que F_X es fiel y pleno, tenemos que $F_X(M \otimes_O \_)$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Como M_O y X_S son finitamente generados tenemos que $F_X(M)_O$ es finitamente generado, así que localizamos adecuadamente a O, lo que denotamos por $O\langle\alpha\rangle$, para que $F_X(M)_{O\langle\alpha\rangle}$ además sea libre. Luego $F_X(\mathcal{Q})$ es parametrizada por $F_X(M)_{O\langle\alpha\rangle}$. Como U es una equivalencia $UF_X(\mathcal{Q})$ es parametrizada por $F_\theta F_X(M)_{O\langle\alpha\rangle}$.

Las argumentaciones anteriores, y el que $F(\mathcal{H}_0(\mathcal{B})(\underline{d}_{\mathcal{B}}))$ cubre a $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$ permiten afirmar que hay una localización $O_{\langle\omega\rangle}$ y un $A(\mathcal{A}) - O_{\langle\omega\rangle}$–bimódulo M que parametrizan a $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$.

■

Capítulo VI
El bocs de Drozd.

Sea Λ una k–álgebra básica, con k un campo perfecto. En este capítulo consideramos la categoría de representaciones del bocs de Drozd $D(\Lambda)$ de Λ. Veremos que si $D(\Lambda)$ es salvaje entonces Λ es salvaje, y si Λ no es salvaje parametrizaremos una familia especial de módulos.

VI.1 El bocs de Drozd para Λ.

Proposición 1. *Sea ${}_RX$ un módulo S–admisible. Sea $\Gamma = ({}_R(X,X))^{op} = S \oplus B$. Hay un bocs asociado: el bocs de Drozd $\mathcal{D}(X) = (T, W_0 \oplus W_1, \delta)$ donde*

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^* & 0 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$$

W_0 y W_1 son $T-T$–bimódulos a través del producto usual de matrices. Para $\gamma \in B^*$ y $\mu(\gamma) = \sum_i \gamma_i^1 \otimes_S \gamma_i^2$ definimos

$\delta(T) = 0$

$$\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^1 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_i^2 & 0 \end{pmatrix}\right) - \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_i^1 & 0 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \gamma_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\delta\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} \gamma_i^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \gamma_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^1 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^2 \end{pmatrix}\right)$$

y extendemos δ a través de la regla de Leibnitz, lo que es posible por proposición II.6 (o equivalentemente por medio de la fórmula de la observación II.1) a $T_T(W_0 \oplus W_1)$.

Demostración: Por definición δ restringida a T, W_0 y W_1 es un morfismo de $T-T$–bimódulos de grado 1, al extender mediante la regla de Leibnitz nos queda un morfismo $T-T$–bimódulos de grado 1. Sólo resta verificar que $\delta^2 = 0$.

Por medio de la descomposición canónica del 1 de T en idempotentes centrales ortogonales, que denotaremos por $1 = e_1 + e_2$, podemos describir matricialmente a los $T-T$–bimódulos, por ejemplo sea M un $T-T$–bimódulo, luego

$$M \cong \begin{pmatrix} e_1Me_1 & e_1Me_2 \\ e_2Me_1 & e_2Me_2 \end{pmatrix}$$

donde cada e_iMe_j es un $S-S-$bimódulo y la estructura de $T-T-$bimódulo está dada por el producto matricial. Más aún, podemos representar un producto tensorial por

$$M \otimes_T N \cong \begin{pmatrix} e_1Me_1 & e_1Me_2 \\ e_2Me_1 & e_2Me_2 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} e_1Ne_1 & e_1Ne_2 \\ e_2Ne_1 & e_2Ne_2 \end{pmatrix} \cong$$

$$\begin{pmatrix} (e_1Me_1 \otimes_S e_1Ne_1) \oplus (e_1Me_2 \otimes_S e_2Ne_1) & (e_1Me_1 \otimes_S e_1Ne_2) \oplus (e_1Me_2 \otimes_S e_2Ne_2) \\ (e_2Me_1 \otimes_S e_1Ne_1) \oplus (e_2Me_2 \otimes_S e_2Ne_1) & (e_2Me_1 \otimes_S e_1Ne_2) \oplus (e_2Me_2 \otimes_S e_2Ne_2) \end{pmatrix}$$

En efecto, se tiene un isomorfismo de espacios vectoriales

$$M \otimes_T N = (\oplus_{i,j} e_iMe_j) \otimes_T (\oplus_{k,t} e_kNe_t) \to \oplus_{i,j,t} (e_iMe_j) \otimes (e_jNe_t)$$

inducido por la función $T-$balanceada

$$\left[\left(\sum\nolimits_{i,j} e_ime_j\right), \left(\sum\nolimits_{k,t} e_kne_t\right)\right] \to \sum\nolimits_{i,j,t} e_ime_j \otimes e_jne_t,$$

y la multiplicación por elementos de T es compatible con la notación matricial. Esto aplicado a W_1 nos da

$$W_1 \otimes_T W_1 \otimes_T W_1 \cong \begin{pmatrix} B^* \otimes_S B^* \otimes_S B^* & 0 \\ 0 & B^* \otimes_S B^* \otimes_S B^* \end{pmatrix}$$

más aún, se tiene que

$$(\delta \otimes_T Id)\, \delta\, [W_1] \cong \begin{pmatrix} (\mu \otimes_S Id)\, \mu\, (B^*) & 0 \\ 0 & (\mu \otimes_S Id)\, \mu\, (B^*) \end{pmatrix}$$
$$(Id \otimes_T \delta)\, \delta\, [W_1] \cong \begin{pmatrix} (Id \otimes_S \mu)\, \mu\, (B^*) & 0 \\ 0 & (Id \otimes_S \mu)\, \mu\, (B^*) \end{pmatrix}$$

por lo que de la coasociatividad de μ (ver corolario I.12) se sigue la coasociatividad de δ en W_1, y como muestra la observación II.1, esto implica que $\delta^2(W_1) = 0$.

Con el siguiente cálculo, donde $\gamma \in B^*$, $\mu(\gamma) = \sum_i \gamma_i^1 \otimes_S \gamma_i^2$, $\mu(\gamma_i^1) = \sum_j \gamma_{i,j}^{1,1} \otimes_S \gamma_{i,j}^{1,2}$ y $\mu(\gamma_i^2) = \sum_t \gamma_{i,t}^{2,1} \otimes_S \gamma_{i,t}^{2,2}$, vemos que $\delta^2(W_0) = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\delta^2\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&=\delta\left(\textstyle\sum_i\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^2&0\end{pmatrix}\right)\right)-\textstyle\sum_i\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^1&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)\right)\\
&=\left(\delta\otimes_T I-I\otimes_T\delta\right)\left(\textstyle\sum_i\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^2&0\end{pmatrix}\right)\right)\right)\\
&-\left(\delta\otimes_T I+I\otimes_T\delta\right)\left(\textstyle\sum_i\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^1&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)\right)\\
&=\textstyle\sum_{i,j}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_{i,j}^{1,1}\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_{i,j}^{1,2}\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^2&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&-\textstyle\sum_{i,t}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_{i,t}^{2,1}\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_{i,t}^{2,2}&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&+\textstyle\sum_{i,t}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_{i,t}^{2,1}&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_{i,t}^{2,2}&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&-\textstyle\sum_{i,j}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_{i,j}^{1,1}\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_{i,j}^{1,2}&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&+\textstyle\sum_{i,j}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_{i,j}^{1,1}&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_{i,j}^{1,2}&0\\ 0&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)\\
&-\textstyle\sum_{i,t}\left(\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^1&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_{i,t}^{2,1}&0\\ 0&0\end{pmatrix}\otimes_T\begin{pmatrix}\gamma_{i,t}^{2,2}&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)\right)
\end{aligned}
$$

por lo que utilizando la representación matricial y la coasociatividad de μ vemos que la cuenta anterior es cero.

■

Estudiemos a $Rep\mathcal{D}(X)$.

Proposición 2. *Sea $\mathcal{D}(X) = (T, W_0 \oplus W_1, \delta)$ el bocs de Drozd asociado al módulo ${}_RX$ el cual es $S-$admisible. Entonces:*

1. *$A = A(\mathcal{D}(X)) \cong \begin{pmatrix} S & 0 \\ B^* & S \end{pmatrix}$, por lo que podemos considerar a los objetos de $Rep\mathcal{D}(X)$ como ternas $H = (H_x, H_y, \Phi)$ donde H_x, H_y son $S-$módulos izquierdos, y $\Phi \in_S (B^* \otimes_S H_x, H_y)$ (ver* **[ARS]** *III.2).*

   Recordemos que un morfismo $f : H \to H'$ en $Rep\mathcal{D}(X)$ es un par (f^0, f^1), donde $f^0 \in_T (H, H')$ y $f^1 \in Hom_{A-A}(A \otimes_T W_1 \otimes_T A, Hom_k(H, H'))$, sujetos a las condiciones de la definición II.8. En este contexto las condiciones se enuncian como sigue:

   Para toda $\gamma \in B^*$ y $h_x \in H_x$ se cumple que

$$\Phi'(\gamma \otimes f^0(h_x)) = f^0(\Phi(\gamma \otimes h_x)) + f^1\left(\delta\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\right)[h_x].$$

2. *Denotemos por* (f_a^0, f_b^0) *a la imagen de* f^0 *bajo la composición*

$$_T\left(H,H'\right) \cong_S \left(H_x,H_x'\right) \times_S \left(H_y,H_y'\right) \cong_S \left(S^*\otimes H_x,H_x'\right) \times_S \left(S^*\otimes H_y,H_y'\right).$$

Así, si $\pi_S : \Gamma \to S$ *es la proyección canónica, y* $h = h_x + h_y$*, con* $h_x \in H_x$ *y* $h_y \in H_y$,

$$f^0(h) = f_a^0\left(\pi_S \otimes h_x\right) + f_b^0\left(\pi_S \otimes h_y\right)$$

Ahora, denotemos por (f_a^1, f_b^1) *a la imagen de* f^1 *bajo la composición*
$Hom_{A-A}\left(A\otimes_T W_1 \otimes_T A, \left(H,H'\right)_k\right) \cong Hom_{T-T}\left(W_1, \left(H,H'\right)_k\right)$
$\cong_T \left(W_1 \otimes_T H, H'\right) =_T \left(\left(e_1W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2\right)\otimes_T H, H'\right)$
$\cong_T \left(e_1W_1e_1 \otimes_T e_1H, e_1H'\right) \oplus_T \left(e_2W_1e_2 \otimes_T e_2H, e_2H'\right)$
$\cong_S \left(B^*\otimes_S H_x, H_x'\right) \times_S \left(B^*\otimes_S H_y, H_y'\right)$
Así, si $\gamma_1, \gamma_2 \in B^*$ *y* $h = h_x + h_y$*, con* $h_x \in H_x$ *y* $h_y \in H_y$,

$$f^1\left(\left(\begin{array}{cc}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_1\end{array}\right)\right)[h] = f_a^1\left(\gamma_1 \otimes h_x\right) + f_b^1\left(\gamma_2 \otimes h_y\right).$$

3. *Ya que* $\Gamma^* \cong S^* \oplus B^*$*, podemos extender a los morfismo anteriores para definir* $f_a \in_S \left(\Gamma^*\otimes_S H_x, H_x'\right)$ *como* (f_a^0, f_a^1) *y* $f_b \in_S \left(\Gamma^*\otimes_S H_y, H_y'\right)$ *como* (f_b^0, f_b^1)*. Además extendemos a* Φ *y* Φ' *a las funciones* $\Phi_0 \in_S \left(\Gamma^*\otimes_S H_x, H_y\right)$ *y* $\Phi_0' \in_S \left(\Gamma^*\otimes_S H_x', H_y'\right)$ *respectivamente, las cuales en* $S^*\otimes_S H_x$ *valen cero.*

   Entonces, el siguiente diagrama conmuta en $Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*$ *(por* $S-$*admisibilidad de* X *y por I.18.2* $Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*$ *es una categoría)*

$$\begin{array}{ccc} H_x & \xrightarrow{\Phi_0} & H_y \\ {\scriptstyle f_a}\downarrow & & {\scriptstyle f_b}\downarrow \\ H_x' & \xrightarrow[\Phi_0']{} & H_y'. \end{array}$$

Demostración: Por I.12 tenemos comultiplicaciones $\mu_0 : \Gamma^* \to \Gamma^* \otimes_S \Gamma^*$ y $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$. Teniendo en mente que $\Gamma^* = (S\oplus B, S)_S \cong (S,S)_S \oplus B^* \cong S \oplus B^*$, por simplificar la notación, a menudo supondremos que dichos sumandos están contenidos en Γ^*.

Observemos que

$$\Phi_0'(I\otimes f_a)(\pi_S\otimes\gamma\otimes h_x)=0=f_b(I\otimes\Phi_0)(\gamma\otimes\pi_S\otimes h_x)$$

para cualquier γ en Γ^*, por lo que, siguiendo las fórmulas de I.14 obtenemos

$$\begin{array}{l}\Phi_0'(I\otimes f_a)(\mu_0\otimes I)(\pi_S\otimes h_x)=\Phi_0'(I\otimes f_a)(\pi_S\otimes\pi_S\otimes h_x)=0\\ f_b(I\otimes\Phi_0)(\mu_0\otimes I)(\pi_S\otimes h_x)=f_b(I\otimes\Phi_0)(\pi_S\otimes\pi_S\otimes h_x)=0\end{array}$$

Ahora un cálculo auxiliar, donde $h\in H$, $e_1h=h_x\in e_1H=H_x$, $e_2h=h_y\in e_2H=H_y$

$$\begin{array}{rl} & f^1\left(\delta\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma&0\end{pmatrix}\right)\right)[h]\\ = & \sum_i f^1\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\right)\left[\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^1&0\end{pmatrix}(e_1h)\right]\\ & -\sum_i\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma_i^1&0\end{pmatrix}\left(e_2f^1\left(\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)[e_1h]\right)\\ = & \sum_i f^1\left(\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\gamma_i^1\end{pmatrix}\right)[\Phi(\gamma_i^2\otimes h_x)]-\sum_i\Phi'\left(\gamma_i^1\otimes e_2f^1\left(\begin{pmatrix}\gamma_i^2&0\\ 0&0\end{pmatrix}\right)[h_x]\right).\end{array}$$

En H_y' lo anterior es igual a

$$\begin{array}{rl} & \sum_i f_b^1[\gamma_i^1\otimes\Phi_0(\gamma_i^2\otimes h_x)]-\sum_i\Phi_0'(\gamma_i^1\otimes f_a^1(\gamma_i^2\otimes h_x))\\ = & \sum_i f_b^1((Id\otimes\Phi_0))[\gamma_i^1\otimes\gamma_i^2\otimes h_x]-\sum_i\Phi_0'(Id\otimes f_a^1)(\gamma_i^1\otimes\gamma_i^2\otimes h_x)\\ = & f_b^1(Id\otimes\Phi_0)(\mu\otimes Id)(\gamma\otimes h_x)-\Phi_0'(Id\otimes f_a^1)(\mu\otimes Id)(\gamma\otimes h_x).\end{array}$$

Entonces la identidad

$$0=-\Phi'(\gamma\otimes f^0(h_x))+f^0(\Phi(\gamma\otimes h_x))+f^1\left(\delta\left(\begin{pmatrix}0&0\\ \gamma&0\end{pmatrix}\right)\right)[h_x]$$

donde $h_x\in H_x$ y $\gamma\in B^*$, se cumple si y sólo se cumplen las identidades

$$\begin{array}{rcl}0&=&-\Phi_0'(\gamma\otimes f_a^0(\pi_S\otimes h_x))+f_b^0(\pi_S\otimes\Phi_0(\gamma\otimes h_x))\\ &&+f_b^1(I\otimes\Phi_0)(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x)-\Phi_0'(I\otimes f_a^1)(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x)\\ &=&-\Phi_0'(I\otimes f_a^0)(\gamma\otimes\pi_S\otimes h_x)-\Phi_0'(I\otimes f_a)(\pi_S\otimes\gamma\otimes h_x)\\ &&-\Phi_0'(I\otimes f_a^1)(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x)\\ &&+f_b^0(I\otimes\Phi_0)(\pi_S\otimes\gamma\otimes h_x)+f_b^1(I\otimes\Phi_0)(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x)\\ &&+f_b(I\otimes\Phi_0)(\gamma\otimes\pi_S\otimes h_x)\\ &=&-\Phi_0'(I\otimes f_a)(\gamma\otimes\pi_S\otimes h_x+\pi_S\otimes\gamma\otimes h_x+(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x))\\ &&+f_b(I\otimes\Phi_0)(\pi_S\otimes\gamma\otimes h_x+(\mu\otimes I)(\gamma\otimes h_x)+\gamma\otimes\pi_S\otimes h_x).\end{array}$$

Por I.14, esta expresión es igual a

$$-\Phi_0'(I \otimes f_a)(\mu_0 \otimes I)(\gamma \otimes h_x) + f_b(I \otimes \Phi_0)(\mu_0 \otimes I)(\gamma \otimes h_x)$$

lo que, por definición I.17.3 es la composición en $Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*$. Es decir

$$\left(-\Phi_0' \circledast f_a + f_b \circledast \Phi_0\right)(\gamma \otimes h_x) = 0.$$

Esto significa que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*$:

$$\begin{array}{ccc} H_x & \xrightarrow{\Phi_0} & H_y \\ f_a \downarrow & & f_b \downarrow \\ H_x' & \xrightarrow[\Phi_0']{} & H_y' \end{array}$$

■

Definición 3. *Sea C una categoría, definimos $Morph(C)$ de la siguiente manera:*

1. *Los objetos son los morfismos $f : Y \to Z$ en C;*
2. *Los morfismos de $f : Y_1 \to Y_2$ en $f' : Y_1' \to Y_2'$ son parejas (g_1, g_2) de morfismos en C, $g_i : Y_i \to Y_i'$ para $i = 1, 2$, tales que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow \\ Y_1' & \xrightarrow{f'} & Y_2' \end{array}$$

conmuta.

Proposición 4. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible Sea $\Gamma = (_R(X,X))^{op} = S \oplus B$. Sea $\mathcal{D}(X) = (T, W_0 \oplus W_1, \delta)$ el bocs de Drozd asociado. Hay un funtor fiel y pleno*

$$G : Rep\mathcal{D}(X) \to Morph\left(Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*\right)$$

dado por $G(H) = (H_x, H_y, \Phi_0)$ *y* $G(f) = (f_a, f_b)$ *(como en VI.2).*

Más aún G *es un isomorfismo entre* $Rep\mathcal{D}(X)$ *e* $\operatorname{Im} G$. *La imagen de* G *es la subcategoría plena de* $Morph\left(Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*\right)$ *constituida por aquellas ternas en que* $\Phi(S^* \otimes H_x) = 0$.

Demostración: La proposición VI.2 prueba que G está bien definido. Sean $(f^0, f^1) : H \to H'$ y $(g^0, g^1) : H' \to H''$ morfismos en $Rep\mathcal{D}(X)$. Por definición, $(gf)^0 = g^0 f^0$ y

$$\begin{aligned}(gf)^1\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) &= g^0 f^1\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) + g^1\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) f^0 \\ &\quad + \sum_i g^1\left(\begin{pmatrix}\gamma_i^1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) f^1\left(\begin{pmatrix}\gamma_i^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(gf)^1\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\right) &= g^0 f^1\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\right) + g^1\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\right) f^0 \\ &= + \sum_i g^1\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma_i^1\end{pmatrix}\right) f^1\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma_i^2\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

para $\gamma \in B^*$ y $\mu(\gamma) = \sum_i \gamma_i^1 \otimes_S \gamma_i^2$.
Queremos ver que G preserva la composición gf, es decir que:

$$(g_a \circledast f_a, g_b \circledast f_b) = \left((gf)_a, (gf)_b\right).$$

Siguiendo la notación de VI.2 y I.14 tenemos que

$$\begin{aligned}&(gf)_a(\pi_S \otimes h_x) = (gf)_a^0(1 \otimes h_x) = (gf)^0(h_x) = g^0\left(f^0(h_x)\right) = g_a^0\left(1 \otimes f_a^0(1 \otimes h_x)\right) \\ &= g_a\left(\pi_S \otimes f_a(\pi_S \otimes h_x)\right) = g_a(Id \otimes f_a)(\mu_0 \otimes Id)(\pi_S \otimes h_x) = (g_a \circledast f_a)(\pi_S \otimes h_x).\end{aligned}$$

De la misma manera se verifica que $(gf)_b(\pi_S \otimes h_y) = (g_b \circledast f_b)(\pi_S \otimes h_y)$.
Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}& (gf)_a^1(\gamma \otimes h_x) \\ = \;& (gf)^1\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)[h_x] \\ = \;& g^0\left[f_a^1(\gamma \otimes h_x)\right] + g_a^1\left[\gamma \otimes f^0(h_x)\right] + \sum_i g_a^1\left[\gamma_i^1 \otimes f_a^1(\gamma_i^2 \otimes h_x)\right] \\ = \;& g_a^0\left[\pi_S \otimes f_a^1(\gamma \otimes h_x)\right] + g_a^1\left[\gamma \otimes f_a^0(\pi_S \otimes h_x)\right] + \sum_i g_a^1\left[\gamma_i^1 \otimes f_a^1(\gamma_i^2 \otimes h_x)\right] \\ = \;& g_a(Id \otimes f_a)(\pi_S \otimes \gamma \otimes h_x) + g_a(Id \otimes f_a)(\gamma \otimes \pi_S \otimes h_x) \\ & + g_a(Id \otimes f_a)\left(\sum_i \gamma_i^1 \otimes \gamma_i^2 \otimes h_x\right) \\ = \;& g_a(Id \otimes f_a)(\mu_0 \otimes Id)(\gamma \otimes h_x) = (g_a \circledast f_a)(\gamma \otimes h_x).\end{aligned}$$

De la misma manera se verifica que $(gf)_b(\gamma \otimes h_x) = (g_b \circledast f_b)(\gamma \otimes h_x)$.

Por lo que tenemos un funtor $G : Rep\mathcal{D}(X) \rightarrow Morph\left(Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*\right)$. En efecto, hemos demostrado que G preserva composiciones, y puesto que por construcción es fiel y pleno, eso implica que las identidades van en identidades.

■

Lema 5. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible con S semisimple y $_RX$ finitamente generado. Sea $\Gamma = (End_R(X))^{op}$. Para cada par H, H' en $S - Mod$ hay un isomorfismo natural de bimódulos*

$$\Psi :_S \left(\Gamma^* \otimes H, H'\right) \rightarrow_R \left(X \otimes_S H, X \otimes_S H'\right),$$

el cual induce una equivalencia de categorías

$$G' : Morph\left(Tens_{(S-Mod)}\Gamma^*\right) \rightarrow Morph\left(Induc_{(S-Mod)}X\right)$$

dada por
$G'((H_x, H_y, \Phi)) = (X \otimes_S H_x, X \otimes_S H_y, \Psi(\Phi))$, *y* $G'(f_a, f_b) = (\Psi(f_a), \Psi(f_b))$.

Demostración: Por I.21.1 $S - Mod$ es $X-$reducible, es decir que existe un isomorfismo natural de bimódulos $\Psi :_S \left(\Gamma^* \otimes H, H'\right) \rightarrow_R \left(X \otimes_S H, X \otimes_S H'\right)$ que induce una equivalencia de categorías $\Psi : Tens_{(S-Mod)}\Gamma^* \rightarrow Induc_{(S-Mod)}X$.

Es inmediato que el funtor Ψ induce una equivalencia G' como en el enunciado.

■

Definición 6. *Diremos que un anillo R es radical-escindible si $R = S \oplus rad(R)$ como $S - S-$bimódulos para alguna subálgebra semisimple S de R.*

Corolario 7. *Sea $_RX$ un módulo de $k-$dimensión finita. Sea $\Gamma = (_R(X,X))^{op}$ y sea $\Gamma = S \oplus N$ la descomposición provista por III.38. Sea $\Psi :_S \left(\Gamma^* \otimes_S H, H'\right) \rightarrow_R \left(X \otimes_S H, X \otimes_S H'\right)$ como en el lema anterior. Entonces hay un funtor fiel y pleno*

$$F = G'G : Rep\mathcal{D}(X) \rightarrow Morph\left(Induc_{(S-Mod)}X\right).$$

Además, un objeto $(X \otimes_S H_x, X \otimes_S H_y, \phi)$ está en la imagen de F si y sólo si $\phi \in_R (X \otimes_S H_x, X \otimes_S H_y)$ es la imagen bajo Ψ de algún $\Phi \in_S (N^* \otimes_S H_x, H_y)$.

Entonces, dada una base dual finita $\left\{\rho_j, \gamma_j \mid j \in J\right\}$ de N_S, tenemos, para $h_x \in H_x$ y $x \in X$, que:

$$\phi(x \otimes h_x) = \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes \Phi\left(\gamma_j \otimes h_x\right).$$

Demostración: La última fórmula aparece como consecuencia de III.15.2.
■

Definición 8. 1. *Sea k un campo perfecto y Λ una k–álgebra de dimensión finita. Por el teorema III.38, ${}_\Lambda X =_\Lambda \Lambda$ es un módulo S–completo y S–triangular, donde*

$$\Lambda \cong \Gamma = (End_\Lambda (X))^{op} = S \oplus N,$$

con $N = rad\Gamma$. Llamaremos a ${}_\Lambda X$ el Λ–módulo (completo triangular) regular, el cual tiene un bocs de Drozd $\mathcal{D}_\Lambda = \mathcal{D}(X)$ asociado.

2. *Sea $P'(\Lambda)$ la subcategoría plena de $\Lambda - Mod$ formada por los Λ–módulos proyectivos.*

3. *Sea $P(\Lambda)$ la subcategoría plena de $\Lambda -$ mod formada por los Λ–módulos proyectivos de k–dimensión finita.*

4. *Sea $P_1'(\Lambda)$ la subcategoría plena de $Morph(P'(\Lambda))$ formada por los morfismos $\phi : P \to Q$ tales que $\phi(P) \subseteq radQ$.*

5. *Sea $P_1(\Lambda)$ la subcategoría plena de $Morph(P(\Lambda))$ formada por los morfismos $\phi : P \to Q$ tales que $\phi(P) \subseteq radQ$.*

Teorema 9. *Si k es un campo perfecto y Λ es una k–álgebra de dimensión finita, hay una equivalencia de categorías*

$$rep\mathcal{D}_\Lambda \to P_1(\Lambda),$$

donde $\mathcal{D}_\Lambda$ es el bocs de Drozd del Λ–módulo regular.

Demostración: Como en el teorema III.38, tenemos que

$$\Lambda \cong \Gamma = (End_\Lambda (X))^{op} = S \oplus N,$$

donde $N = rad\Gamma$. El isomorfismo envia cada $\lambda \in \Lambda$ en $\mu_\lambda : \Lambda \to \Lambda$, donde $\mu_\lambda(x) = x\lambda$. En consecuencia, si $\gamma = \mu_\lambda \in rad\Gamma$, es decir, si $\lambda \in rad\Lambda$, entonces $\mathrm{Im}\,\gamma = \Lambda\lambda \subseteq \Lambda rad\Lambda = rad\Lambda$.

Veamos que cualquier objeto de $P(\Lambda)$ se puede escribir como $X \otimes_S H$ donde $H \in S -$ mod. Si $1 = e_1 + \ldots + e_n$ es la descomposición del 1 de Λ en idempotentes primitivos ortogonales, y denotamos por $\hat{e}_i$ a la imagen de e_i en $\Lambda / rad\Lambda$, entonces $\Lambda\hat{e}_i \cong (\Lambda \otimes_S S)\hat{e}_i = \Lambda \otimes_S S\hat{e}_i$ así que $\oplus_{i\in I}\Lambda\hat{e}_i \cong \oplus_{i\in I}(\Lambda \otimes_S S)\hat{e}_i \cong \Lambda \otimes_S (\oplus_{i\in I} S\hat{e}_i)$. Se sigue que $P_1(\Lambda) \subseteq Morph(Induc_{S-\mathrm{mod}} X)$.

Por corolario VI.7 se sigue que $F : rep\mathcal{D}(X) \to P_1(\Lambda)$ es una equivalencia de categorías.
■

Proposición 10. *Sea ${}_RX$ un módulo de $k-$dimensión finita y sea k perfecto. Por III.38 hay una descomposición $\Gamma = (End_R(X))^{op} = S \oplus N$, con $N = rad\Gamma$, y X es $S-$completo y $S-$triangular. Entonces el bocs de Drozd asociado $\mathcal{D}(X)$ es triangular aditivo.*

Demostración: Consideremos la filtración $\{0\} = rad^{n+1}\Gamma \subsetneq rad^n\Gamma \subsetneq \ldots \subsetneq rad\Gamma = N$. Puesto que S es semisimple y de dimensión finita, por III.37 hay $S-S-$bimódulos N_i tales que $N^n = N_n$, $N^i = N^{i+1} \oplus N_i$. Los N_i son proyectivos y f.g. como $S-$módulos derechos, además $N_nN = NN_n = 0$ y $N_iN + NN_i \subseteq N_n \oplus \ldots \oplus N_{(i+1)}$, luego, por III.28, tenemos que $\mu(N_n^*) = 0$ y que $\mu(N_i^*) \subseteq (N_1^* + \ldots + N_{i-1}^*) \otimes_S (N_1^* + \ldots + N_{i-1}^*)$. Recordemos que

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N^* & 0 \end{pmatrix} \text{ y } W_1 = \begin{pmatrix} N^* & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix},$$

así que tenemos nuevas filtraciones

$$0 \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_1^* & 0 \end{pmatrix} \subseteq \ldots \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \oplus_{j\le i}N_j^* & 0 \end{pmatrix} \subseteq \ldots \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N^* & 0 \end{pmatrix} = W_0$$
$$0 \subseteq \begin{pmatrix} N_n^* & 0 \\ 0 & N_n^* \end{pmatrix} \subseteq \ldots \subseteq \begin{pmatrix} \oplus_{j\le i}N_j^* & 0 \\ 0 & \oplus_{j\le i}N_j^* \end{pmatrix} \subseteq \ldots \subseteq \begin{pmatrix} N^* & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix} = W_1.$$

Recordemos que δ está dada por $\delta(T) = 0$ y

$$\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^1 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_i^2 & 0 \end{pmatrix}\right) - \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_i^1 & 0 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \gamma_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$\delta\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} \gamma_i^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \gamma_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right) = \sum_i \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^1 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i^2 \end{pmatrix}\right)$$

donde $\mu(\gamma) = \sum_i \gamma_i^1 \otimes_S \gamma_i^2$, luego $\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_1^* & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$, $\delta\left(\begin{pmatrix} N_1^* & 0 \\ 0 & N_1^* \end{pmatrix}\right) = 0$, así que

$$\delta\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \oplus_{j\le i}N_j^* & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \oplus_{j\le i-1}N_j^* \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \oplus_{j\le i-1}N_j^* & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$\oplus \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \oplus_{j\le i-1}N_j^* & 0 \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \oplus_{j\le i-1}N_j^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

y

$$\delta\left(\begin{pmatrix} \oplus_{j\leq i}N_j^* & 0 \\ 0 & \oplus_{j\leq i}N_j^* \end{pmatrix}\right) \subseteq \begin{pmatrix} \oplus_{j\leq i-1}N_j^* & 0 \\ 0 & \oplus_{j\leq i-1}N_j^* \end{pmatrix} \otimes_T \begin{pmatrix} \oplus_{j\leq i-1}N_j^* & 0 \\ 0 & \oplus_{j\leq i-1}N_j^* \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue la triangularidad aditiva de $\mathcal{D}(X)$.
■

VI.2 De $\mathcal{D}_\Lambda$ en Λ.

Sea Λ una $k-$ álgebra básica de dimensión finita, k un campo perfecto y $\mathcal{D}_\Lambda$ el bocs asociado a Λ. Sean $P_1, \ldots, P_r$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismos de los proyectivos inescindibles de Λ con $\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_r$.

Definición 11. *Sea $M \in mod\Lambda$ un $\Lambda-$módulo no proyectivo. Por $\varphi(M)$ se denotará a la presentación proyectiva minimal, la cual está en $P_1(\Lambda)$. Por $\beta(M)$ denotaremos al objeto de $rep\mathcal{D}_\Lambda$ al cual equivale. Si*
$\varphi(M) = P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0 = \amalg_{i=1}^r m_i P_i \to \amalg_{i=1}^r n_i P_i \to M \to 0$
definimos

$$\underline{\dim}\varphi(M) = (m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r).$$

Observación VI.1: Por ser k un campo perfecto, del teorema de Wedderburn-Malcev tenemos que

$$(End_\Lambda(P_i, P_i))^{op} \cong D_i \oplus rad((End_\Lambda(P_i, P_i))^{op})$$

como $D_i - D_i-$bimódulos, con D_i un anillo de división. Sea $S_i = P_i/rad(P_i)$.
De la sucesión exacta

$$0 \to_\Lambda (P_i, rad(P_i)) \to End_\Lambda(P_i, P_i) \to End_\Lambda(P_i, S_i) \to 0$$

y de que $rad(End_\Lambda(P_i, P_i)) =_\Lambda (P_i, rad(P_i))$ se sigue que
$D_i \cong (_\Lambda(P_i, S_i))^{op} \cong (End_\Lambda(S_i))^{op}$. Luego $\dim_k(D_i) = \dim_k(End_\Lambda(S_i))$.
Como S_i es un módulo simple tenemos que $\dim_k(End_\Lambda(S_i)) = \dim_k(S_i)$.
Sea $c_i = \dim_k(D_i) = \dim_k(End_\Lambda(S_i)) = \dim_k(S_i)$.
Luego, si $\underline{\dim}\varphi(M) = (m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r)$, entonces de la construcción de la equivalencia entre $rep\mathcal{D}_\Lambda$ y $P_1(\Lambda)$ se sigue que

$$\underline{\dim}\beta(M) = (c_1 m_1, \cdots, c_r m_r, c_1 n_1, \cdots, c_r n_r).$$

Observación VI.2: Sea $M \in mod\Lambda$ un módulo inescindible, y sea $D_M = End_\Lambda(M) / rad(End_\Lambda(M))$. Puesto que D_M actúa en $topM$, y D_M es un anillo de división, tenemos que si $c_M = \dim_k(D_M)$ y $\underline{\dim}\beta(M) = (c_1 m_1, \cdots, c_r m_r, c_1 n_1, \cdots, c_r n_r)$, entonces c_M divide a $c_i n_i$ para $i \in \{1, .., r\}$.

Por otra parte tenemos que $D_{DTr(M)} \cong D_M$, y que por IV.1.11 de [**ARS**] $socDtr(M) \cong \amalg_{i=1}^r m_i (P_i / radP_i)$, es decir que $D_{DTr(M)}$ actúa en $socDtr(M)$ y que por ello c_M divide a $c_i m_i$ para $i \in \{1, ..., r\}$. Esto nos permite introducir el siguiente concepto.

Definición 12. *Sea $M \in mod\Lambda$ un módulo inescindible. Si*
$\underline{\dim}\varphi(M) = (m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r)$, *definimos el vector de M de coordenadas normalizadas como*

$$n - \underline{\dim}(M) = \frac{1}{c_M}(c_1 m_1, \cdots, c_r m_r, c_1 n_1, \cdots, c_r n_r)$$

donde $c_M = \dim_k(End_\Lambda(M) / rad(End_\Lambda(M)))$ *y* $c_i = \dim_k(P_i / rad(P_i))$.

Recordemos que en $rep\mathcal{D}_\Lambda$ hay una función $q_{\mathcal{D}_\Lambda}$ (ver II.12), y que si $M' \in rep\mathcal{D}_\Lambda$, por IV.22

$$q_{\mathcal{D}_\Lambda}(M') = \dim_k(End_{\mathcal{D}_\Lambda}(M')) - \dim_k(Ext_{\mathcal{D}_\Lambda}(M', M')).$$

Definición 13. *Sean $M, N \in mod\Lambda$. Definimos*

$$\delta(M, N) = dim_k Hom_\Lambda(N, DtrM) - dim_k Hom_\Lambda(topM, socDtrN).$$

Proposición 14. *Sea $M \in mod\Lambda$. Entonces*

$$\dim_k\left(Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(M), \varphi(M))\right) - q_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(M)) = \delta(M, M).$$

Demostración: Sean $P_0(M) = \amalg_{i=1}^r n_i P_i$, $P_1(M) = \amalg_{i=1}^r m_i P_i$, tales que $\varphi(M) = P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$.
Denotemos $\langle M, Z\rangle = dim_k Hom_\Lambda(M, Z)$, por 4.3 de [**ARS**] tenemos

$$\langle M, Z\rangle - \langle Z, DtrM\rangle = \langle P_0(M), Z\rangle - \langle P_1(M), Z\rangle.$$

De la sucesión exacta $0 \to \Omega Z \to P_0(Z) \to Z \to 0$ se tiene

$$0 \to \langle P_i(M), \Omega Z\rangle \to \langle P_i(M), P_0(Z)\rangle \to \langle P_i(M), Z\rangle \to 0$$

lo cual implica,

$$\langle P_i(M), \Omega Z\rangle - \langle P_i(M), P_0\,(Z)\rangle + \langle P_i(M), Z\rangle = 0$$

De manera similiar, es exacta

$$0 \to \Omega^2 Z \to P_1\,(Z) \to \Omega Z \to 0,$$

y esto implica,

$$\langle P_i(M), \Omega^2 Z\rangle - \langle P_i(M), P_1\,(Z)\rangle + \langle P_i(M), \Omega Z\rangle = 0$$

De la prueba de 1.3 [B] se obtiene que:

$$\dim_k \left(Hom_{P_1(\Lambda)}\left(\varphi\left(M\right), \varphi\left(M\right)\right)\right) = \langle M, N\rangle + \langle P_0(M), \Omega M\rangle + \langle P_1(M), \Omega^2 M\rangle$$

Tenemos las identidades:

$$\begin{aligned}
\langle P_1(M), P_0(M)\rangle &= \dim_k\left(radHom_\Lambda P_1\left(M\right), P_0\left(M\right)\right) + \textstyle\sum_{i=1}^r m_i n_i c_i\\
\langle P_0(M), P_0(M)\rangle &= \dim_k\left(radHom_\Lambda P_0\left(M\right), P_0\left(M\right)\right) + \textstyle\sum_{i=1}^r n_i^2 c_i\\
\langle P_1(M), P_1\left(M\right)\rangle &= \dim_k\left(radHom_\Lambda P_1\left(M\right), P_1\left(M\right)\right) + \textstyle\sum_{i=1}^r m_i^2 c_i.
\end{aligned}$$

Por otra parte

$q_{D(\Lambda)}\left(\beta\left(M\right)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \dim_k\left({}_T\left(\beta\left(M\right), \beta\left(M\right)\right)\right) - \dim_k\left({}_T\left(W_0 \otimes_T \beta\left(M\right), \beta\left(M\right)\right)\right)\\
&+ \dim_k\left({}_T\left(W_1 \otimes_T \beta\left(M\right), \beta\left(M\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dim_k\left({}_S\left(\beta\left(M\right)_1, \beta\left(M\right)_1\right)\right) + \dim_k\left({}_S\left(\beta\left(M\right)_0, \beta\left(M\right)_0\right)\right)\\
&- \dim_k\left({}_S\left(N^* \otimes_S \beta\left(M\right)_1, \beta\left(M\right)_0\right)\right)\\
&+ \dim_k\left({}_S\left(N^* \otimes_S \beta\left(M\right)_1, \beta\left(M\right)_1\right)\right) + \dim_k\left({}_S\left(N^* \otimes_S \beta\left(M\right)_0, \beta\left(M\right)_0\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{i=1}^r m_i^2 c_i + \sum_{i=1}^r n_i^2 c_i\\
&- dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M))
\end{aligned}$$

$+dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_1(M)) + dim_k radHom_\Lambda(P_0(M), P_0(M))$

$= \langle P_1(M), P_1(M)\rangle + \langle P_0(M), P_0(M)\rangle - dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M))$
$= \langle P_1(M), P_1(M)\rangle + \langle P_0(M), P_0(M)\rangle - \langle P_1(M), P_0(M)\rangle + \sum_{i=1}^{r} m_i n_i c_i$

Por IV.1.11 de [**ARS**] $socDtrM \cong \amalg_{i=1}^{r} m_i (P_i / radP_i)$, de esto se sigue que $\sum m_i n_i c_i = \langle topM, socDtrM\rangle$, por lo que

$\dim_k \left(Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(M), \varphi(M))\right) - q_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(M))$
$= \langle M, M\rangle + \langle P_0(M), \Omega M\rangle + \langle P_1(M), \Omega^2 M\rangle$
$-(\langle P_1(M), P_1(M)\rangle + \langle P_0(M), P_0(M)\rangle - \langle P_1(M), P_0(M)\rangle + \langle topM, socDtrM\rangle)$

$= \langle M, M\rangle + \langle P_1(M), P_0(M)\rangle - \langle topM, socDtrM\rangle$
$+ (\langle P_1(M), \Omega^2 M\rangle - \langle P_1(M), P_1(M)\rangle) + (\langle P_0(M), \Omega M\rangle - \langle P_0(M), P_0(M)\rangle)$

$= \langle M, M\rangle + \langle P_1(M), P_0(M)\rangle - \langle topM, socDtrM\rangle - (\langle P_1(M), \Omega M\rangle + \langle P_0(M), M\rangle)$

$= \langle M, M\rangle - \langle P_0(M), M\rangle + \langle P_1(M), M\rangle - \langle topM, socDtrM\rangle$

$= \langle M, DtrM\rangle - \langle topM, socDtrM\rangle$.
■

Corolario 15. *Sea* $M \in mod\Lambda$. *Entonces* $\dim_k (Ext_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(M), \beta(M))) = \delta(M, M)$.

Demostración: Basta recordar que $rep\mathcal{D}_\Lambda$ y $P_1(\Lambda)$ son equivalentes, así que $\dim_k \left({}_{P_1(\Lambda)}(\varphi(M), \varphi(M))\right) = \dim_k \left({}_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(M), \beta(M))\right)$.
■

Lema 16. *Si* Λ *es una* $k-$*álgebra de dimensión finita, entonces* $P_1(\Lambda)$ *es una categoría de Krull-Schmidt. El funtor conúcleo*

$$cok : P_1(\Lambda) \to \Lambda - \text{mod}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *cok es denso.*
2. *cok es pleno y refleja isomorfismos.*
3. *cok conserva inescindibles que no son de la forma* $P \to 0$, *con* P *proyectivo.*

Demostración: Como $rep\mathcal{D}_\Lambda \cong P_1(\Lambda)$, por II.27, $P_1(\Lambda)$ es una categoría de Krull-Schmidt.

Puesto que todo $M \in \Lambda - \text{mod}$ tiene cubierta proyectiva ([ARS]) *cok* es denso. El segundo inciso se obtiene de las propiedades de las presentaciones proyectivas.

Sea $x = P \to Q$, con $Q \neq 0$, un inescindible de $P_1(\Lambda)$, por lo que $cok(x) \neq 0$. Como x es inescindible el anillo $End_{P_1(\Lambda)}(x)$ es local, es decir que todo endomorfismo de x es isomorfismo o nilpotente. Sea

$$cok : End_{P_1(\Lambda)}(x) \to End_\Lambda(cok(x)),$$

el epimorfismo de anillos canónico. Sean $g \in Hom_{P_1(\Lambda)}(x,x)$ y $cok(g) = f$, es claro que f es o un isomorfismo o un morfismo nilpotente, luego, si f es idempotente y no es isomorfismo $f = 0$.

■

Lema 17. *Sean $F : rep\mathcal{D}_\Lambda \to P_1(\Lambda)$, la equivalencia de categorías construida en VI.9, y sean $cok : P_1(\Lambda) \to \Lambda - \text{mod}$ y $Cok : P_1'(\Lambda) \to \Lambda - Mod$ los funtores conúcleo. Sean Q una $k-$álgebra y M un $A(\mathcal{D}_\Lambda) - Q-$bimódulo. Sean $\phi = F(M)$ y $M_0 = Cok(\phi)$.*

Entonces el funtor $M_0 \otimes_Q$ _ es naturalmente isomorfo a la composición

$$Q - \text{mod} \xrightarrow{M\otimes_Q -} A(\mathcal{D}_\Lambda) - \text{mod} \xrightarrow{E} rep\mathcal{D}_\Lambda \xrightarrow{F} P_1(\Lambda) \xrightarrow{cok} \Lambda - \text{mod}$$

Demostración: Como en VI.2 M tiene asociados los $S - Q-$bimódulos M_x, M_y y un $S-$homomorfismo $\Phi : N^* \otimes_S M_x \to M_y$. Sea

$$(X \otimes_S M_x, X \otimes_S M_y, \phi : X \otimes_S M_x \to X \otimes_S M_y)$$

la imagen de (M_x, M_y, Φ) bajo el funtor F de VI.7. Por el mismo corolario, si $\{\gamma_j, \rho_j \mid j \in J\}$ es una base dual finita de N, entonces $\phi(x \otimes m_x) = \sum_{j\in J} \rho_j(x) \otimes \Phi(\gamma_j \otimes m_x)$.

Sea Y un $Q-$módulo, no es difícil verificar que la terna asociada a $M \otimes_Q Y$ es $(M_x \otimes_Q Y, M_y \otimes_Q Y, \Phi \otimes Id)$. Así que si

$$(X \otimes_S M_x \otimes_Q Y, X \otimes_S M_y \otimes_Q Y, \phi' : X \otimes_S M_x \otimes_Q Y \to X \otimes_S M_y \otimes_Q Y)$$

es la imagen de bajo el funtor F de VI.7, por fórmula de VI.7,

$$\phi'(x\otimes m_x\otimes y)=\sum_{j\in J}\rho_j(x)\otimes(\Phi\otimes Id)\left(\gamma_j\otimes m_x\otimes y\right)=(\phi\otimes Id)(x\otimes m_x\otimes y).$$

Así que tenemos isomorfismos de $\Lambda-$módulos

$$\begin{array}{ccccc} X\otimes_S M_x\otimes_Q Y & \overset{\phi\otimes Id}{\to} & X\otimes_S M_y\otimes_Q Y & \overset{\pi\otimes Id}{\to} & Cok(\phi)\otimes_Q Y \\ \downarrow & \phi' & \downarrow & \pi' & \downarrow \\ X\otimes_S M_x\otimes_Q Y & \to & X\otimes_S M_y\otimes_Q Y & \to & cok(\phi'). \end{array} \quad (*)$$

Sea $g:Y\to Z$ un $Q-$morfismo. Tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} X\otimes_S M_x\otimes_Q Y & \overset{\phi\otimes Id}{\to} & X\otimes_S M_y\otimes_Q Y & \overset{\pi\otimes Id}{\to} & Cok(\phi)\otimes_Q Y \\ \downarrow^{I\otimes I\otimes g} & \phi\otimes Id & \downarrow^{I\otimes I\otimes g} & \pi\otimes Id & \downarrow^{I\otimes g} \\ X\otimes_S M_x\otimes_Q Z & \to & X\otimes_S M_y\otimes_Q Z & \to & Cok(\phi)\otimes_Q Z. \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} X\otimes_S M_x\otimes_Q Y & \overset{\phi'_Y}{\to} & X\otimes_S M_y\otimes_Q Y & \overset{\pi'}{\to} & cok(\phi'_Z) \\ \downarrow^{I\otimes I\otimes g} & \phi'_Z & \downarrow^{I\otimes I\otimes g} & \pi' & \downarrow^{cok(I\otimes I\otimes g)} \\ X\otimes_S M_x\otimes_Q Z & \to & X\otimes_S M_y\otimes_Q Z & \to & cok(\phi'_Z). \end{array}$$

Por $(*)$ tenemos que los dos diagramas son isomorfos, luego el funtor $M_0\otimes_Q\_$ es naturalmente isomorfo a $cok(FE(M\otimes_Q\_))$.

■

Proposición 18. *(V.9 [Z]) Sea M' un $k\langle x,y\rangle-$bimódulo, tal que $M'=k\langle x,y\rangle\oplus k\langle x,y\rangle\oplus k\langle x,y\rangle$ como módulo derecho y*

$$T_{M'}(x)=\begin{pmatrix}0 & 1_{k\langle x,y\rangle} & 0\\ 0 & 0 & 1_{k\langle x,y\rangle}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ T_{M'}(y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\ x&0&0\\ 0&y&0\end{pmatrix}.$$

El funtor $G'=M'\otimes_{k\langle x,y\rangle}\_:\Sigma\to\Sigma$ satisface que

1. *Si $Y=G'(X)$, entonces Y no es un módulo simple;*

2. G' *conserva inescindibles;*

3. G' *refleja isomorfismos.*

Proposición 19. *Si el bocs $\mathcal{D}_\Lambda$ es salvaje, entonces Λ es salvaje.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{D}_\Lambda$ es un bocs salvaje, entonces existe un $A(\mathcal{D}_\Lambda) - k\langle x,y\rangle$ −bimódulo M, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, tal que el funtor $H = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_ : \Sigma \to Rep\mathcal{D}_\Lambda$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $G' : \Sigma \to \Sigma$ el funtor definido en la proposición anterior, y sea $G = HG' : \Sigma \to Rep\mathcal{D}_\Lambda$ la composición de ambos. Por VI.18 G preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $F : rep\mathcal{D}_\Lambda \to P_1(\Lambda)$ la equivalencia de categorías de VI.9.

Veamos que ocurre con la composición

$$C : \Sigma \xrightarrow{G'} \Sigma \xrightarrow{H} rep\mathcal{D}(\Lambda) \xrightarrow{F} P_1(\Lambda) \xrightarrow{cok} mod\Lambda.$$

1. Es claro que $FHG' = FG$ conserva inescindibles, y que en su imagen no hay objetos simples, luego, por VI.16.3 C preserva inescindibles.

2. Por VI.16.2 *cok* refleja isomorfismos, luego C refleja isomorfismos.

Por VI.17 esto prueba que Λ es salvaje.
■

Definición 20. *Sea M un $\Lambda - O-$bimódulo. Sea U una subcategoría plena de $\Lambda-$mod. Diremos que U es parametrizada por M, si el funtor $M \otimes_O \_ : O - \text{mod} \to repA$ preserva inescindibles y clases de isomorfía, M como $O-$módulo es libre finitamente generado y casi toda clase de isomorfía de U está en* $\text{Im}(M \otimes_O \_)$.

Teorema 21. *Si Λ no es salvaje, y la familia $\mathcal{U}_{\underline{d}}$ de $\Lambda-$módulos L tales que*

$$\delta(L,L) = \dim_k (End_\Lambda(L) / rad(End_\Lambda(L))) \text{ y } n - \underline{\dim}(L) = \underline{d},$$

tiene infinitas isoclases, entonces es parametrizada por un $\Lambda - O_{(\gamma)}-$bimódulo, donde O es un dominio asociado a un $\Lambda-$módulo genérico.

Demostración: Sea $\varphi(L)$ es la presentación proyectiva minimal y $\beta(L)$ el elemento de $\mathcal{D}_\Lambda$ al que equivale. Sea

$$D_L = Hom_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(L), \beta(L)) / rad(Hom_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(L), \beta(L)))$$

lo que es isomorfo, vía el funtor de VI.7, a

$$Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(L), \varphi(L)) / rad\left(Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(L), \varphi(L))\right)$$

y sea $c_L = \dim_k(D_L)$.
Por otra parte también tenemos que

$$\begin{gathered}\dim_k\left(Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(L), \varphi(L)) / rad\left(Hom_{P_1(\Lambda)}(\varphi(L), \varphi(L))\right)\right) = \\ \dim_k(End_\Lambda(L) / rad(End_\Lambda(L))).\end{gathered}$$

Por VI.15 $\dim_k(Ext_{\mathcal{D}_\Lambda}(\beta(L), \beta(L))) = \delta(L, L)$, así que si $L \in \mathcal{U}_{\underline{d}}$, entonces $\beta(L) \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$.

Por V.26 $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})(\underline{d})$ es parametrizada por un $A(\mathcal{D}_\Lambda) - O_{(\beta)}$−bimódulo M. Sea $(X \otimes_S M_y / X \otimes_S M_x)$ el $\Lambda - O_{(\beta)}$−bimódulo de VI.17, el cual es finitamente generado como $O_{(\beta)}$−módulo. Localizando una vez más obtenemos un $\Lambda - O_{(\gamma)}$−bimódulo libre y finitamente generado tal que parametriza a $\mathcal{U}_{\underline{d}}$.

■

Bibliografía

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo. "Representation Theory of Artin Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] J. Boza. "Algoritmos de reducción en la teoría de representaciones de coálgebras", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias UNAM, México, 1996.

[BBP] R. Bautista, J. Boza, E. Pérez. "Reduction Functors and Exact Structures for Boxes", enviado a Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

[BZ] R.Bautista, R. Zuazua. "Morita equivalence and reduction algorithms for representations of coalgebras", Canadian Math. Soc., Conference Proc., Vol 18, 1996.

[$CB1$] W.W. Crawley-Boevey. "On tame algebras and bocses", Proc. London Math. Soc. 3(56), 1988.

[$CB2$] W.W. Crawley-Boevey. "Regular Modules for Tame Hereditary Algebras", Proc. London Math. Soc. 1989.

[$CB3$] W.W. Crawley-Boevey. "Tame Algebras and Generic Modules", Proc. London Math. Society, Vol. 63, 1989, (241-265).

[$CB4$] W.W. Crawley-Boevey. "Matrix problems and Drozd's theorem", Topics in Algebra, Banach Center Publ., Vol 26, Part 1, Warsaw, 1990.

[$CB5$] W.W. Crawley-Boevey. "Modules of Finite Length over their Endomorphism Rings", Representations of Algebras and Related Topics, London Mathematical Society Lecture Note Series 168, Cambidge Univ. Press1992, (127-184).

[Co] P. M. Cohn. "Algebra", John Wiley & Sons, 1989.

[DK] Y. A. Drozd y V. M. Kirichenko. "Algebras de dimensión finita", Universidad de Kiev 1980.

[DR] V. Dlab & C. M. Ringel. "Indecomposable representations of graphs and algebras", Memoirs of the American Mathematical Society Number, Vol. 6, Number 173, July 1976.

[$DRSS$] P. Drexler, I. Reiten, S. O. Smalo, O. Solberg. "Exact categories and vector space categories, appendix by B. Keller", Universidad de Bielefeld.

[GR] P. Gabriel, A. Roiter. "Representations of finite dimensional algebras", Encyclopedia of the Mathematical Sciencies, Vol. 73, Springer 1992.

[*K*] M. Kleiner. "Induced modules and comodules and representations of BOCS's and DGC's", Lecture Notes in Mathematics 903, Springer, Berlín, 1981, (168-185).

[*Ke*] B. Keller. "Chain complexes and stable categories appendix A", Manuscripta Mathematica 67, 1990, (379-417).

[*LRS*] F. Larrión, G. Raggi, L. Salmerón. "Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones", Aportaciones Matemáticas, SMM, 1995.

[*M*] S. MacLane. "Homology", Springer-Verlag, Nueva York, 1967.

[*Ma*] P. Malcolmson. "Construction of universal matrix localisation", Springer Lecture Notes 951, 1982, (117-132).

[*MR*] J. C. McConnell, J. C. Robson. "Noncommutative Noetherian Rings", Pure and Applied Mathematics, a Wiley-Interscience series of texts, monographs & tracts, 1987.

[*P*] Claudio Procesi. "Rings with Polynomial Identities", Marcel Dekker, Inc., Vol. 17 en Pure and Applied Mathematics, 1973.

[*R*] I. Reiner. "Maximal Orders", Academic Press Inc., 1975.

[*Ri*1] Claus M. Ringel. "Representations of $k-$species and bimodules", J. of Algebra, 41, 1976, (269-302).

[*Ri*2] Claus M. Ringel. "The spectrum of a finite dimensional algebra", Proceedings of a conference on Ring Theory, Antwerp 1978, Dekker, New York, 1979.

[*Ri*3] Claus M. Ringel. "Infinite dimensional representations of finite dimensional hereditary algebras", Proceedings of a conference on Ring Theory, Antwerp 1978, Dekker, New York, 1979.

[*Ro*] Louis H. Rowen. "Ring Theory I & II", Academic Press Inc., Volúmenes 127 y 128 en Pure and Applied Mathematics, 1989.

[*Sc*] A. H. Schofield. "Representations of rings over skew fields", London Mathematical Society Lecture Notes Series 92, Cambridge University Press, 1985.

[*Si*] L. Silver. "Nonconmutative Localisations and Applications" J. Algebra 7, 1967, (44-76).

[Sw] Moss E. Sweedler. "Hopf Algebras", W.A. Benjamin Inc., 1969.

[Z] Rita Zuazua. "Arboles algorítmicos en la teoría de bocses", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias UNAM, 1999.

Capítulo II
Bocses y su categoría de representaciones.

II.1 Álgebras tensoriales y morfismos diferenciales.

Definición 1. *Sea R un anillo y W un $R-R-$bimódulo. El álgebra tensorial $T_R(W)$, de W sobre R, es el álgebra graduada sobre los números naturales:*

$$T_R(W) = R \oplus W \oplus W^{\otimes 2} \oplus W^{\otimes 3} \oplus \cdots \oplus W^{\otimes q} \oplus \cdots$$

donde el producto de $r = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \in W^{\otimes n}$ y $s = w_1^{'} \otimes \cdots \otimes w_m^{'} \in W^{\otimes m}$ está dado por $rs = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_1^{'} \otimes w_2^{'} \otimes \cdots \otimes w_m^{'} \in W^{\otimes(n+m)}$.

Lema 2. *(Propiedad Universal del álgebra tensorial). Sea R un anillo y W un $R-R-$bimódulo. Entonces, para cada $R'-$álgebra A', i.e. para cada morfismo de anillos $\rho : R' \to A'$, y cada par de morfismos $\varphi_0 : R \to R'$ de anillos, $\varphi_1 : W \to A'$ de $R-R-$bimódulos, existe un único morfismo $\varphi : T_R(W) \to A'$ de anillos tal que $\varphi_{|W} = \varphi_1$ y $\varphi_{|R} = \rho\varphi_0$.*

Definición 3. *Si $W = W_0 \oplus W_1$ como $R-R-$bimódulos entonces tenemos una nueva graduación para el álgebra tensorial $T_R(W)$ definida en elementos homogéneos como:*

1. *$gr(w) = 0$ si $w \in W_0 \cup R$,*
2. *$gr(w) = 1$ si $w \in W_1$,*
3. *$gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = \sum_{i=1}^{s} gr(w_i)$.*

En la situación anterior diremos que W es graduado. Definiremos $[T_R(W)]_i$ como el $R-R-$bimódulo generado por los elementos homogéneos de grado i.

Lema 4. *Sea $W = W_0 \oplus W_1$ como $R-R-$bimódulos, entonces*

1. *Hay un isomorfismo $A = T_R(W_0) \cong [T_R(W)]_0$ inducido por el morfismo canónico $T_R(W_0) \to T_R(W)$. Más aún $T_R(W) \cong [T_R(W)]_0 \oplus T'$ como $R-R-$bimódulos.*
2. *Hay un isomorfismo $T_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A) \cong T_R(W)$, inducido por el morfismo canónico de $A \otimes_R W_1 \otimes_R A$ en $T_R(W)$, el cual es de $R-$álgebras y de $A-A-$bimódulos.*

3. *La restricción del isomorfismo del inciso anterior induce un isomorfismo* $V = A \otimes_R W_1 \otimes_R A \cong [T_R(W)]_1$.

4. *La restricción del isomorfismo del segundo inciso induce un isomorfismo* $V^{\otimes n} = V \otimes_A \dots \otimes_A V \cong [T_R(W)]_n$.

Demostración:

1. Por el lema II.2 $Id_R : R \to R$ y la inclusión $j : W_0 \to T_R(W)$ inducen un morfismo de anillos $\eta : T_R(W_0) \to T_R(W)$. A su vez, Id_R y la proyección $\pi_0 : W \to W_0$ inducen un morfismo de anillos $\eta_1 : T_R(W) \to T_R(W_0)$. Claramente $\eta_1\eta_{|R} = Id_R$ y $\eta_1\eta_{|W_0} = Id_{W_0}$, por lo que $\eta_1\eta = Id_{T_R(W_0)}$, así que $T_R(W_0)$ es isomorfa a su imagen bajo η, es decir a $[T_R(W)]_0$, y ésta es un sumando directo de $T_R(W)$.

2. Sea $\mathcal{F} = T_{T_R(W_0)}(T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0))$. Sean $j_1 : W_0 \to T_R(W_0)$ y $j_2 : T_R(W_0) \to \mathcal{F}$ las inclusiones canónicas, y sea $\sigma : W_1 \to \mathcal{F}$ el morfismo definido como $\sigma(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Por lema II.2 los morfismos Id_R y $(j_2 j_1, \sigma) : W_0 \oplus W_1 \to \mathcal{F}$ inducen un morfismo $\nu : T_R(W) \to \mathcal{F}$ de anillos.

   Por el primer inciso $T_R(W)$ es una $T_R(W_0)-$álgebra vía el morfismo η. Sea $m' : T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0) \to T_R(W)$ el morfismo $m(\eta \otimes j \otimes \eta)$, donde $j : W_1 \to T_R(W)$ es la inclusión canónica y m es la multiplicación $T_R(W) \otimes_R T_R(W) \otimes_R T_R(W) \to T_R(W)$. Claramente m es un morfismo de $T_R(W_0) - T_R(W_0)-$bimódulos, así que por lema II.2 se induce un morfismo de anillos $\nu_1 : \mathcal{F} \to T_R(W)$.

   Es claro que $\nu_1\nu_{|R} = Id_R$ y que $\nu_1\nu_{|W_0} = Id_{W_0}$, por otra parte, para $w \in W_1$, tenemos que $\nu_1\nu(w) = 1w1 = w$; luego $\nu_1\nu = Id_{T_R(W)}$.

   Por construcción $\nu_{1|T_R(W_0)} = \eta$, por ello $\nu\nu_{1|T_R(W_0)} = \nu_{|[T_R(W)]_0}\eta = Id_{T_R(W_0)}$. Además, para $w \in W_1$, tenemos que $\nu\nu_1(1 \otimes w \otimes 1) = \nu(w) = 1 \otimes w \otimes 1$, luego $\nu\nu_{1|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)} = Id_{|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)}$. Se sigue que $\nu\nu_1 = Id_{\mathcal{F}}$.

3. Por el inciso anterior hay un isomorfismo $\nu_1 : \mathcal{F} \to T_R(W)$. Por su construcción se tiene que $\nu_1(T_R(W_0) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)) = [T_R(W)]_1$, luego

   $\nu_{1|T_R(W_0)\otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0)}$ es un isomorfismo de $A - A-$bimódulos.

4. Como antes, de la construcción del isomorfismo $\nu_1 : \mathcal{F} \to T_R(W)$ se tiene que $\nu_1(V^{\otimes n}) = [T_R(W)]_n$, así que $\nu_{1|V^{\otimes n}}$ es un isomorfismo de $A - A-$bimódulos.

Definición 5. *Una diferencial* $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ *es un morfismo de* $R-R-$*bimódulos tal que:*

1. $\delta\left(\left[T_R(W)\right]_i\right) \subseteq \left[T_R(W)\right]_{i+1}$

2. *Regla de Leibnitz: si r, s son homogéneos, entonces*

$$\delta(rs) = \delta(r)s + (-1)^{gr(r)} r\delta(s);$$

Observación II.1: Por el lema II.4 podemos considerar a una diferencial como un morfismo de $R-R-$bimódulos

$$\delta : (A \oplus V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots) \to (A \oplus V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots)$$

el cual cumple que $\delta(A) \subseteq V$ y $\delta\left(V^{\otimes i}\right) \subseteq V^{\otimes(i+1)}$, así como la regla de Leibnitz. Usaremos libremente ambas interpretaciones de δ.

De la regla de Leibnitz se obtiene la fórmula para elementos homogéneos:

$$\delta\left(\otimes_{i=1}^{n} w_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\left(\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)\right)}\left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^{n} w_t\right)\right).$$

Podemos apreciar de esta fórmula que la diferencial está totalmente determinada por su definición sobre W_0 y W_1.

Si x, y son elementos homogéneos tales que $\delta^2(x) = 0$ y $\delta^2(y) = 0$ entonces
$\delta^2(x \otimes y) = \delta\left(\delta(x) \otimes y + (-1)^{gr(x)} x \otimes \delta(y)\right)$
$= \delta^2(x) \otimes y + (-1)^{gr(\delta(x))}\delta(x) \otimes \delta(y) + (-1)^{gr(x)}\delta(x) \otimes \delta(y) + (-1)^{gr(x)} x \otimes \delta^2(y)$
$= 0$
por lo que es necesario y suficiente que $\delta^2(W) = 0$ para que $\delta^2 = 0$.

Nótese que $\delta^2\left(\left[T_R(W)\right]_0\right) = 0$ si y sólo si δ es coasociativo en $\left[T_R(W)\right]_1$, es decir, $(\delta \otimes Id)\,\delta$ y $(Id \otimes \delta)\,\delta$ coinciden sobre $\left[T_R(W)\right]_1$.

Proposición 6. *[I.3 Z] Para definir una diferencial $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$, es suficiente con tener un morfismo de $R-R-$bimódulos $\delta_0 : W \to T_R(W)$ tal que:*

1. $\delta_0(W_0) \subseteq \left[T_R(W)\right]_1$ *y*

2. $\delta_0(W_1) \subseteq \left[T_R(W)\right]_2$.

II.2 Bocses y su categoría de representaciones.

Definición 7. *Un bocs es una terna $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ donde R es una $k-$álgebra, $W = W_0 \oplus W_1$ es un $R-R-$bimódulo graduado y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es una diferencial tal que $\delta^2 = 0$. El bocs tiene asociados la $k-$álgebra*

$$[T_R(W)]_0 \cong T_R(W_0) = A = A(\mathcal{A})$$

y el $A(\mathcal{A}) - A(\mathcal{A})$ –bimódulo

$$[T_R(W)]_1 \cong A \otimes_R W_1 \otimes_R A = V = V(\mathcal{A}).$$

Definición 8. *La categoría de representaciones del bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ denotada por $Rep\mathcal{A}$, tiene por objetos a las representaciones del álgebra $A(\mathcal{A})$.*

Así que si M y N son dos representaciones de $\mathcal{A}$, un morfismo $f : M \to N$ en $Rep\mathcal{A}$ consiste de un par de morfismos $f = (f^0, f^1)$ tal que:

1. $f^0 \in Hom_R(M, N)$;
2. $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M, N))$;
3. *Para toda $a \in A$ y $m \in M$ se tiene:*

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a))[m]$$

Dados dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$ en $Rep\mathcal{A}$, su composición $gf = ((gf)^0, (gf)^1)$ se define como:

$$\begin{array}{rcl} (gf)^0 & = & g^0 f^0 \\ (gf)^1(v) & = & g^0 f^1(v) + g^1(v) f^0 + \sum g^1(v_i^1) f^1(v_i^2) \end{array}$$

donde $v \in V(\mathcal{A})$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

Nótese que la composición de morfismos entre representaciones de bocses está bien definida, pues la última suma se obtiene de aplicar la composición:

$$\begin{array}{ccccc} T_R(W) & \hookleftarrow & V(\mathcal{A}) & & Hom_k(M, L) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta} & & \uparrow^{c} \\ T_R(W) & \hookleftarrow & V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} V(\mathcal{A}) & \xrightarrow{g^1 \otimes f^1} & Hom_k(N, L) \otimes_{A(\mathcal{A})} Hom_k(M, N) \end{array}$$

donde c es la composición de funciones.

Una verificación detallada del hecho de que $Rep\mathcal{A}$ es una categoría puede verse en (I 22 [Z]). Denotaremos por $rep\mathcal{A}$ a la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ cuyos objetos son las representaciones de $\mathcal{A}$ de dimensión finita sobre k.

Observación II.2:

1. Si $f = (f^0, f^1)$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$, entonces f^0 es un isomorfismo en $R - Mod$.

2. Notemos que toda pareja $(f^0, 0)$ con $f^0 \in Hom_A(M, N)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, así que hay una inmersión densa de $A - Mod$ en $Rep\mathcal{A}$. En particular, esto nos dice que $Rep\mathcal{A}$ es una categoría aditiva.

3. Sean $M, N \in Rep\mathcal{A}$. Para que un par de morfismos $f^0 \in Hom_R(M, N)$ y $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V, (M, N)_k)$ sea un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, es necesario y suficiente que $wf^0(m) - f^0(wm) = f^1(\delta(w))[m]$, donde $w \in W_0$ y $m \in M$. Para convencernos de la suficiencia, usemos la fórmula de la observación II.1 en $w_1 \otimes ... \otimes w_n$, donde $w_i \in W_0$:

$$\begin{aligned}
& f^1(\delta(w_1 \otimes ... \otimes w_n))[m] \\
= \; & f^1\left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right)[m] \\
= \; & \sum_{j=1}^n \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right)\left(f^1(\delta(w_j))\right)\left[\left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right) m\right] \\
= \; & \sum_{j=1}^n \left(\otimes_{l=1}^{j} w_l\right) f^0\left(\left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right) m\right) - \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) f^0\left(\left(\otimes_{t=j}^n w_t\right) m\right) \\
= \; & (w_1 \otimes ... \otimes w_n) f^0(m) - f^0((w_1 \otimes ... \otimes w_n) m).
\end{aligned}$$

Por linealidad el resultado se extiende a todo $a \in A(\mathcal{A})$.

Definición 9. *Sean R y R' $k-$álgebras, $W = W_0 \oplus W_1$ un $R-R-$bimódulo graduado y $W' = W_0' \oplus W_1'$ un $R' - R'-$bimódulo graduado. Sea una pareja (η_R, η_W) con $\eta_R : R \to R'$ un morfismo de $k-$álgebras y $\eta_W : W \to W'$ un morfismo de $R - R-$bimódulos, donde la estructura de $R - R-$bimódulo de W' está inducida por η_R. Cuando $\eta_W(W_0) \subseteq W_0'$ y $\eta_W(W_1) \subseteq W_1'$ diremos que el par es graduado.*

Nótese que un par graduado induce un morfismo de álgebras graduadas $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$, donde la graduación es la de la definición II.3. Otra forma de expresar esto es que $\eta(A(\mathcal{A})) \subseteq A(\mathcal{A}')$ y $\eta(V(\mathcal{A})^{\otimes i}) \subseteq V(\mathcal{A}')^{\otimes i}$.

Definición 10. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses. Definimos un morfismo de bocses $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ como un morfismo de $k-$álgebras*

$$\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$$

el cual cumple que:

1. *preserva la graduación, es decir que*

$$\eta([T_R(W)]_i) \subseteq [T_{R'}(W')]_i$$

para toda $i \geq 0$;

2. *conmuta con las diferenciales, es decir que*

$$\delta'\eta = \eta\delta.$$

Lema 11. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses y η un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$. Entonces η induce un funtor $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$. Además, si η es suprayectivo tenemos que:*

$$F_\eta (M') = F_\eta (N') \text{ implica que } M' = N', \text{ y que } F_\eta \text{ es fiel,}$$

es decir, que F_η es un encaje.

Demostración: Por II.4 podemos identificar $A(\mathcal{A})$ con $[T_R(W)]_0$ y $V(\mathcal{A})$ con $[T_R(W)]_1$, así como $A(\mathcal{A}')$ con $[T_{R'}(W')]_0$ y $V(\mathcal{A}')$ con $[T_{R'}(W')]_1$.

Por definición η induce un morfismo de $k-$álgebras graduadas

$$\eta^0 : A(\mathcal{A}) \to A(\mathcal{A}');$$

e induce un morfismo de $A(\mathcal{A}) - A(\mathcal{A})-$bimódulos

$$\eta^1 : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}').$$

Si $M' \in Rep\mathcal{A}'$ definimos $F_\eta(M')$ como M' con la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo inducida por η^0.

Si $f = (f^0, f^1) : M' \to N'$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $F_\eta(f) = \left((F_\eta(f))^0, (F_\eta(f))^1\right)$ está dado por

$$\begin{array}{c}(F_\eta(f))^0 = f^0 \text{ como } k-\text{transformación lineal y} \\ (F_\eta(f))^1 = f^1\eta^1.\end{array}$$

Veamos que $F_\eta(f) : F_\eta(M) \to F_\eta(N)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Sea $a \in A(\mathcal{A})$ y $m \in M'$, entonces

$$\begin{aligned} a\left((F_\eta(f))^0(m)\right) - (F_\eta(f))^0(am) &= \eta^0(a)f^0(m) - f^0(\eta^0(a)m) \\ &= f^1\left(\delta'(\eta^0(a))\right)[m] \\ &= f^1(\eta^1(\delta(a)))[m] \\ &= (F_\eta(f))^1(\delta(a))[m]. \end{aligned}$$

En particular, si $r \in R \subsetneq A(\mathcal{A})$, la identidad anterior se convierte en

$$r\left((F_\eta(f))^0(m)\right) - (F_\eta(f))^0(rm) = (F_\eta(f))^1(\delta(r))[m] = 0.$$

Por lo tanto $(F_\eta(f))^0$ es un R-morfismo y $F_\eta(f)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

Es claro que $F_\eta((Id_M, 0)) = (Id_{F_\eta(M)}, 0)$. Sean $f = (f^0, f^1) : L' \to M'$ y $g = (g^0, g^1) : M' \to N'$ morfismos en $Rep\mathcal{A}'$, es inmediato que

$$(F_\eta(gf))^0 = (F_\eta(g))^0 (F_\eta(f))^0.$$

Para $v \in V(\mathcal{A})$ sea $\delta(v) = \sum v_i^1 \otimes v_i^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}&(F_\eta(g) F_\eta(f))^1(v)\\ &= (F_\eta(g))^0 (F_\eta(f))^1(v) + (F_\eta(g))^1(v)(F_\eta(f))^0 + \sum (F_\eta(g))^1(v_i^1)(F_\eta(f))^1(v_i^2)\\ &= g^0(f^1\eta)(v) + (g^1\eta)(v) f^0 + \sum (g^1\eta)(v_i^1)(f^1\eta)(v_i^2).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\delta' \eta(v) = \eta\delta(v) = \eta\left(\sum v_i^1 \otimes v_i^2\right) = \sum \eta(v_i^1) \otimes \eta(v_i^2)$$

Así que

$$\begin{aligned}(F_\eta(gf))^1(v) &= g^0 f^1(\eta(v)) + g^1(\eta(v)) f^0 + \sum g^1(\eta(v_i^1)) f^1(\eta(v_i^2))\\ &= (F_\eta(g) F_\eta(f))^1(v).\end{aligned}$$

Se sigue que $F_\eta(gf) = F_\eta(g) F_\eta(f)$.

Si η es suprayectivo, entonces el funtor $A(\mathcal{A}') - Mod \to A(\mathcal{A}) - Mod$ inducido por η^0 es un encaje pleno [Si]. Luego $F_\eta(M') = F_\eta(N')$, lo que es una igualdad como $A(\mathcal{A})$-módulos, ocurre si y sólo si $M' = N'$ como $A(\mathcal{A}')$-módulos. η^0 también induce un epimorfismo $A(\mathcal{A}) \otimes_k (A(\mathcal{A}))^{op} \to A(\mathcal{A}') \otimes_k (A(\mathcal{A}'))^{op}$, por lo que tenemos para $M', N' \in Rep\mathcal{A}'$, $F_\eta(M') = M$ y $F_\eta(N') = N$ que

$$Hom_{A(\mathcal{A}')-A(\mathcal{A}')}(V(\mathcal{A}'), (M', N')_k) = Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}'), (M, N)_k).$$

Y a su vez, el epimorfismo η^1 induce una inyección

$$Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}'), (M, N)_k) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), (M, N)_k).$$

■

Observación II.3: Si η es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ y η' es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}''$ entonces $\eta'\eta$ es un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}''$. Más aún, $F_{\eta'\eta} = F_{\eta'} F_\eta$.

II.3 Normas.

Definición 12. *Sea $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs.*

1. *Si U es un $R-R$–bimódulo, definimos*
   $\|\text{-}\|_U : rep\mathcal{A} \to Z \cup \{\infty\}$ *como* $\|M\|_U = \dim_k (Hom_R (U \otimes_R M, M))$.
   Por simplicidad $\|\text{-}\| = \|\text{-}\|_R$, $\|\text{-}\|_0 = \|\text{-}\|_{W_0}$ *y* $\|\text{-}\|_1 = \|\text{-}\|_{W_1}$.

2. *Definimos* $q_\mathcal{A} : rep_0\mathcal{A} \to Z$, *donde* $rep_0\mathcal{A} = \{M \in rep\mathcal{A} \mid \|M\|_0, \|M\|_1 < \infty\}$, *como*

$$q_\mathcal{A}(M) = \|M\| - \|M\|_0 + \|M\|_1.$$

Cuando alguna de las funciones anteriores aparezca en un enunciado, estaremos suponiendo que está definida.

Definición 13. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, y supongamos que $R = D_1 \times \ldots \times D_n$ es una descomposición en producto de k–álgebras de división, es decir, que hay una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ en idempotentes ortogonales, primitivos y centrales. En tal caso, para $M \in Rep\mathcal{A}$ definimos su R–vector dimensión como el vector $(d_1, \ldots, d_n)$, donde $d_i = \dim_{D_i}(e_i M)$. Denotaremos a este vector como $\underline{\dim}_R M$.*

Lema 14. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs, tal que $R = D_1 \times \ldots \times D_n$ es una descomposición en producto de k–álgebras de división, y sea $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ la descomposición asociada. Para un $R-R$–bimódulo U y un objeto $M \in rep\mathcal{A}$ con $\underline{\dim}_R M = (d_1, \ldots, d_n)$, tenemos que*

$$\|M\|_U = \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i U e_j).$$

Luego, si $M \in rep_0\mathcal{A}$ entonces

$$q_\mathcal{A}(M) = \textstyle\sum_i d_i^2 \dim_k (e_i R) - \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i W_0 e_j) + \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i W_1 e_j).$$

Demostración: La primera de las fórmulas se sigue de las identidades

$$\begin{aligned} \|M\|_U &= \dim_k (Hom_R (U \otimes_R M, M)) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \dim_k \left(Hom_{e_i R}\left(e_i U e_j \otimes_{e_j R} e_j M, e_i M\right)\right) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} d_j \dim_k (Hom_{e_i R}(e_i U e_j, e_i M)) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (Hom_{e_i R}(e_i U e_j, e_i R)) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i R) \dim_{e_i R}(e_i U e_j) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i U e_j). \end{aligned}$$

Luego, $\|M\| = \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k (e_i R e_j) = \sum_i d_i^2 \dim_k (e_i R)$, así que por definición de $q_\mathcal{A}(M)$ se obtiene la segunda fórmula.

■

Lema 15. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sean $M, N \in Rep\mathcal{A}$ tales que $\|M\|_0 = 0$. Entonces $M \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$ si y sólo si $M \cong N$ en $R - Mod$.*

Demostración: Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$, por observación II.2.1, f^0 es un isomorfismo de $R-$módulos.

Si $M \cong N$ en $R - Mod$, entonces $\|N\|_0 = 0$. Luego, si $g : N \to M$ es un morfismo de $R-$módulos entonces $(g, 0)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Así que, si $f^0 : M \to N$ es un isomorfismo de $R-$módulos y $g^0 : N \to M$ es su inversa, tenemos los morfismos $(f^0, 0) : M \to N$ y $(g^0, 0) : N \to M$ en $Rep\mathcal{A}$, los cuales son inversos entre sí.

■

II.4 Isomorfismos y una reformulación de *RepA*.

El siguiente resultado nos ayudará a estudiar los morfismos en $Rep\mathcal{A}$.

Lema 16. *Sean R una $k-$álgebra, A y B $R-$álgebras, $M \in A - Mod$, $N \in B - Mod$ y U un $R - R-$bimódulo. Entonces hay un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{B-k}(B \otimes_R U \otimes_R A \otimes_A M, N) & \xrightarrow{\beta_0} & Hom_{R-k}(U \otimes_R M, N) \\ \downarrow^{\sigma_1} & & \downarrow^{\sigma_2} \\ Hom_{B-A}(B \otimes_R U \otimes_R A, Hom_k(M, N)) & \xrightarrow[\beta]{} & Hom_{R-R}(U, Hom_k(M, N)) \end{array}$$

donde los isomorfismos verticales son los de adjunción ([M] Cor. V.3.2),

$$\beta_0 : Hom_{B-k}(B \otimes_R U \otimes_R A \otimes_A M, N) \to Hom_{R-k}(U \otimes_R M, N)$$

está definido por $\beta_0(f)(u \otimes m) = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$, con inversa
$\beta_0^{-1}(h)(b \otimes u \otimes a \otimes m) = bh(u \otimes am)$; y finalmente

$$\beta : Hom_{B-A}(B \otimes_R U \otimes_R A, Hom_k(M, N)) \to Hom_{R-R}(U, Hom_k(M, N))$$

está definido por $\beta(f)(u) = f(1 \otimes u \otimes 1)$, con inversa
$\beta^{-1}(h)(b \otimes u \otimes a) = bh(u)a$.

Demostración: Las pruebas son cálculos rutinarios, tan sólo veamos que
$\sigma_2(\beta_0(f))(u)[m] = \beta_0(f)(u \otimes m) = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$ y que
$\beta(\sigma_1(f))(u)[m] = (\sigma_1(f)(1 \otimes u \otimes 1))[m] = f(1 \otimes u \otimes 1 \otimes m)$,
es decir, el diagrama conmuta.

■

Corolario 17. *Hay un diagrama conmutativo de isomorfismos naturales:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) & \xrightarrow{\beta_0} & Hom_{R-k}\left(W_1\otimes_R M,N\right) \\ \downarrow^{\sigma_1} & & \downarrow^{\sigma_2} \\ Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right) & \xrightarrow[\beta]{} & Hom_{R-R}\left(W_1,Hom_k(M,N)\right) \end{array}$$

donde los isomorfismos verticales son los de adjunción,

$$\beta_0 : Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) \to Hom_{R-k}\left(W_1\otimes_R M,N\right)$$

está definido por $\beta_0(f)(w\otimes m) = f(1\otimes w\otimes 1\otimes m)$, *con inversa* $\beta_0^{-1}(h)(a\otimes w\otimes a'\otimes m) = ah(w\otimes a'm)$; *y finalmente*

$$\beta : Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right) \to Hom_{R-R}\left(W_1,Hom_k(M,N)\right)$$

está definido por $\beta(f)(w) = f(1\otimes w\otimes 1)$, *con inversa* $\beta^{-1}(h)(a\otimes w\otimes a') = ah(w)a'$.

Observación II.4: Sea $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs y sean M,N objetos de $Rep\mathcal{A}$, tenemos el isomorfismo de adjunción:

$$\sigma_1 : Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}\left(V(\mathcal{A}),Hom_k(M,N)\right).$$

Este isomorfismo nos permite reinterpretar la categoría $Rep\mathcal{A}$ como la siguiente categoría isomorfa $\underline{Rep\mathcal{A}}$:

$\underline{Rep\mathcal{A}}$ tiene por objetos los $A(\mathcal{A})$ –módulos.

Si M y N son dos objetos de $\underline{Rep\mathcal{A}}$ un morfismo $f : M \to N$ en $\underline{Rep\mathcal{A}}$ consiste de un par de morfismos $f = (f^0, f^1)$ tal que:

1. $f^0 \in Hom_R(M,N)$;
2. $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M,N\right)$;
3. Para toda $a \in A$ y $m \in M$ se tiene:

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a)\otimes m).$$

Dados dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$ en $\underline{Rep\mathcal{A}}$, su composición $gf = ((gf)^0,(gf)^1)$ se define como:

$$\begin{array}{lcl}(gf)^0 & = & g^0 f^0 \\ (gf)^1(v\otimes m) & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1(v\otimes f^0(m)) + \sum g^1(v_i^1 \otimes f^1(v_i^2\otimes m))\end{array}$$

donde $v \in V(\mathcal{A})$, $m \in M$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

En efecto, la regla de asociación ϑ : $\underline{Rep}\mathcal{A} \to Rep\mathcal{A}$ tal que $\vartheta(M) = M$, para $M \in ModA(\mathcal{A})$, y tal que $\vartheta((f^0, f^1)) = (\overline{f^0, \sigma_1}(f^1))$, si $(f^0, f^1) \in Hom_{\underline{Rep}\mathcal{A}}(M, N)$, envía la composición de morfismos de $\underline{Rep}\mathcal{A}$ en la composición de morfismos de $Rep\mathcal{A}$:

Sean $f = (f^0, f^1) \in Hom_{\underline{Rep}\mathcal{A}}(L, M)$ y $g = (g^0, g^1) \in Hom_{\underline{Rep}\mathcal{A}}(M, N)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}(\vartheta(g)\vartheta(f))^1(v)[m] & = & \left(\vartheta(g)^0\vartheta(f)^1(v) + \vartheta(g)^1(v)\vartheta(f)^0\right)[m] \\ & & + \left(\sum \vartheta(g)^1(v_i^1)\vartheta(f)^1(v_i^2)\right)[m] \\ & = & (g^0\sigma_1(f^1)(v) + \sigma_1(g^1)(v)f^0 + \sum \sigma_1(g^1)(v_i^1)\sigma_1(f^1)(v_i^2))[m] \\ & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1(v\otimes f^0(m)) + \sum \sigma_1(g^1)(v_i^1) f^1(v_i^2\otimes m) \\ & = & g^0 f^1(v\otimes m) + g^1(v\otimes f^0(m)) + \sum g^1(v_i^1 \otimes f^1(v_i^2\otimes m)) \\ & = & (gf)^1(v\otimes m) \\ & = & (\vartheta(gf))^1(v)[m].\end{array}$$

Se sigue que $\underline{Rep}\mathcal{A}$ es una categoría y que ϑ es un isomorfismo de categorías. A menudo identificaremos a $Rep\mathcal{A}$ con $\underline{Rep}\mathcal{A}$ vía ϑ, en los siguientes capítulos.

II.5 Bocses triangulares y bocses de Kleiner-Roiter.

En esta sección usaremos los isomorfismos de II.16 y II.17, así como la equivalencia de categorías señalada en la observación II.4.

Notación: Si W es un $R-R-$bimódulo y W' es un subconjunto de W, denotaremos por $\langle W' \rangle_R$ al $R-R-$sub-bimódulo de W generado por W'. Sea A un $R-$álgebra y A' un subconjunto de A, denotaremos por $\langle A' \rangle^A$ a la $R-$subálgebra de A generada por A'.

Siempre que H y G sean $R-$sub-bimódulos de $T_R(W)$, denotaremos por $H\hat{\otimes}_R G$ a la imagen del morfismo natural $\eta : H \otimes_R G \to T_R(W)$ dado por $\eta(h\otimes g) = h \otimes g$.

Si η es inyectivo a menudo identificamos $H\hat{\otimes}_R G$ con $H \otimes_R G$.

Definición 18. *Diremos que un bocs* $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ *es* ***triangular*** *si existen* $R-R-$*sub-bimódulos* $W_0^0, W_0^1, ..., W_0^r$ *de* W_0, *y* $R-R-$*sub-bimódulos* $W_1^0, W_1^1, ..., W_1^s$ *de* W_1 *tales que:*

1. $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$.

2. $\delta(W_0^i) \subseteq A_{i-1}\hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{i-1}$, *para* $i \geq 1$, *donde* $A_{i-1} = \left\langle W_0^{i-1} \right\rangle^{A(A)}$.

3. $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq W_1^2 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$.

4. $\delta(W_1^i) \subseteq \left\langle W_1^{i-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A})} \hat{\otimes}_R \left\langle W_1^{i-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A})}$, *para* $i \geq 1$. *Esto es decir que* $\delta(W_1^i)$ *está contenido en el* $R-R$*–sub-bimódulo de* $[T_R(W)]_2$ *generado por* W_0 *y* W_1^{i-1}.

Si $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$ *como* $R-R$*–bimódulos para* $i \in \{1, ..., r-1\}$ *diremos que* $\mathcal{A}$ *es un bocs* ***triangular aditivo.***

Lema 19. *Sean* $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ *un bocs triangular,* $M \in Rep\mathcal{A}$, *y* $f = (f^0, f^1)$ *un elemento de* $End_{\mathcal{A}}(M)$. *Entonces* f *es nilpotente si y sólo si* f^0 *es nilpotente.*

Demostración: Denotemos $f^{(n)} = \left(\left(f^{(n)}\right)^0, \left(f^{(n)}\right)^1\right)$. Si hay un entero n tal que $f^{(n)} = (0,0)$, entonces $\left(f^{(n)}\right)^0 = (f^0)^n = 0$ prueba que f^0 es nilpotente.

Ahora supongamos que existe un entero m tal que $\left(f^{(m)}\right)^0 = (f^0)^m = 0$. Veamos que podemos decir acerca de la parte de grado 1, para $n \geq m$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 de la condición de triangularidad.

Para $w' \in W_1^1$ se tiene, pues $\delta(w') = 0$, que

$$\left(f^{(2m)}\right)^1(w') = \left(f^{(m)}\right)^0\left(f^{(m)}\right)^1(w') + \left(f^{(m)}\right)^1(w')\left(f^{(m)}\right)^0 = 0.$$

Si para $w \in W_1^j$ y t natural, se cumple que $\left(f^{(tm)}\right)^1(w) = 0$ entonces para $w' \in W_1^{j+1}$ se tiene, donde $\delta(w') = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^1$, que

$$\begin{aligned}\left(f^{((t+1)m)}\right)^1(w') &= \left(f^{(tm)}\right)^0\left(f^{(m)}\right)^1(w') + \left(f^{(tm)}\right)^1(w')\left(f^{(m)}\right)^0 \\ &\quad + \textstyle\sum_i \left(f^{(tm)}\right)^1(v_i^1)\left(f^{(m)}\right)^1(v_i^2) \\ &= \textstyle\sum_i \left(f^{(tm)}\right)^1(v_i^1)\left(f^{(m)}\right)^1(v_i^2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $v_i^1 \in \left\langle W_1^j \right\rangle_{A(\mathcal{A})}$. Luego $f^{((s+1)m)} = (0,0)$, es decir, f es nilpotente.

■

Observación II.5: Como antes sea $A_i = \langle W_0^i \rangle^{A(\mathcal{A})}$. Hay propiedades adicionales a la triangularidad que son muy útiles; consideremos, para $i \in \{1, ..., r-1\}$, que:

1.- $A_i \cong T_R(W_0^i)$ bajo el epimorfismo canónico.

2.- El morfismo canónico de $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

2^{op}.- El morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

3.- El morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo.

4.- $A_{i+1} = A_i \oplus T_i$ como $R-R$-bimódulos.

Si el bocs es triangular aditivo las propiedades anteriores se cumplen, pues en tal caso $A(\mathcal{A}) = T_R(W_0) \cong T_R(W_0^i) \oplus T_i = A_i \oplus T_i$.

Otra posibilidad de que se cumplan las condiciones 1, 2, 2^{op} y 3, es que W_1 y W_0 sean planos por ambos lados, y W_0^i sea plano como $R-$módulo derecho (izquierdo) para $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. En tal caso, si $\iota : W_0^i \to W_0$ es la inclusión, hay monomorfismos

$$W_0^i \otimes_R W_0^i \xrightarrow{Id \otimes \iota} W_0^i \otimes_R W_0 \xrightarrow{\iota \otimes Id} W_0 \otimes_R W_0$$

e inductivamente monomorfismos

$$W_0^i \otimes_R (W_0^i)^{\otimes n} \xrightarrow{Id \otimes (\iota \otimes \ldots \otimes \iota)} W_0^i \otimes_R (W_0)^{\otimes n} \xrightarrow{\iota \otimes Id} W_0 \otimes_R (W_0)^{\otimes n}$$

por lo que $A_i \cong T_R(W_0^i)$. Como W_1 y W_0 son planos por ambos lados se siguen las condiciones 2, 2^{op} y 3.

En el lema II.20 se usan las condiciones 1 y 2, pero pudo usarse la 3 en lugar de la 2 y obtener el mismo resultado mediante una prueba análoga. Similarmente en el lema II.21 se puede sustitir 2^{op} con 3, y obtener el mismo resultado mediante una prueba análoga.

Lema 20. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular, donde $W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r$ es la filtración de grado cero asociada a la triangularidad, y se cumple para $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ que el epimorfismo canónico de $T_R(W_0^i)$ en A_i es un isomorfismo, así como que el morfismo canónico de $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo. Supongamos que M es un $R-$módulo izquierdo, que $N \in RepA$, y que tenemos morfismos $f^0 \in_R (M, N)$ y $f' \in Hom_{R-R}(W_1, (M,N)_k)$. Si f^0 es una $R-$retracción, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre M tal que (f^0, f^1) es un morfismo en RepA, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$.*

Demostración: Recordemos los isomorfismos

$$\begin{array}{lll}
\sigma_2 & : & Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N) \to Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N)) \\
(\beta_0)^{-1} & : & Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N) \to Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} M, N\right) \\
\sigma_1 & : & Hom_{A(\mathcal{A})-k}\left(V(\mathcal{A}) \otimes_{A(\mathcal{A})} M, N\right) \to Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N))
\end{array}$$

de II.17, podemos considerar que $f' \in Hom_{R-k}(W_1 \otimes_R M, N)$, y como se mencionó en la observación II.4, resolver el problema en Rep$\mathcal{A}$. Sea $\theta_2 : A(\mathcal{A}) \otimes_R N \to N$ el $R-$morfismo que le da la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo a N. Puesto que $A(\mathcal{A})$ es un álgebra tensorial, este morfismo está determinado por su valor en $W_0 \otimes_R N$.

Teniendo en mente la primera condición de triangularidad, definiremos inductivamente los $R-$morfismos $\theta_1^i : W_0^i \otimes_R M \to M$. Por la propiedad universal del álgebra tensorial, estos últimos determinan de manera única $R-$morfismos $\hat{\theta}_1^i : T_R(W_0^i) \otimes_R M \to M$. Sean $j_i : W_0^i \to W_0$ y $j_i^{i+1} : W_0^i \to W_0^{i+1}$ las inclusiones canónicas. Es rutinario verficar la conmutatividad del siguiente diagrama para $i \in \{0, ..., r-1\}$:

$$\begin{array}{ccc}
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) & = & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \\
{}^{\alpha_i}\uparrow & h_i' & \uparrow^{\alpha_{i+1}} \\
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i & \to & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_{i+1} \\
{}^{b_i}\uparrow & h_i & \uparrow^{b_{i+1}} \\
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) & \to & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R\left(W_0^{i+1}\right)
\end{array}$$

donde todos los morfismos son canónicos. Como $T_R(W_0^0) = A_0 = R$ es un $R-R-$sumando directo de $A(\mathcal{A})$ tenemos que α_0 es inyectivo y que b_0 es isomorfismo. Luego, teniendo en cuenta lo anterior y las hipótesis del lema, para $i \in \{0, ..., r-1\}$ tenemos que α_i es inyectivo, por lo que h_i' también lo es, y puesto que b_i es isomorfismo entonces h_i es inyectivo. Recordemos que $\delta\left(W_0^{i+1}\right) \subseteq A_i \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_i$, así que δj_{i+1} se factoriza como $\alpha_i \delta_{i+1}'$ para un morfismo de $R-R-$bimódulos $\delta_{i+1}' : W_0^{i+1} \to A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A_i$. Definamos $\delta_{i+1} : W_0^{i+1} \to A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i)$ como $b_i^{-1}\delta_{i+1}'$. Luego tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} b_{i+1} \delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} &= \alpha_{i+1} \delta_{i+2}' j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+1} \\
&= \alpha_i \delta_{i+1}' = \alpha_i b_i \delta_{i+1} = \alpha_{i+1} h_i' b_i \delta_{i+1} \\
&= \alpha_{i+1} b_{i+1} h_i \delta_{i+1},
\end{aligned}$$

y como $\alpha_{i+1} b_{i+1}$ es inyectivo, se cumple que $\delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = h_i \delta_{i+1}$ para $i \in \{0, ..., r-2\}$.

Por el lema II.16 podemos definir el $A(\mathcal{A})-$morfismo $f_0' : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^0) \otimes_R M \to N$ como $f_0'(a \otimes w \otimes r \otimes m) = \theta_2(a \otimes f'(w \otimes rm))$, para $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$, $r \in R$ y $m \in M$.

Sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $f^0 q = Id_N$. Sean $w \in W_0^1$ y $m \in M$, tenemos un $R-$morfismo

$$\theta_1^1(w \otimes m) = q\left[\theta_2(j_1(w) \otimes f^0(m)) - f_0'(\delta_1(w) \otimes m)\right].$$

Como decíamos antes, obtenemos $\hat{\theta}_1^1 : T_R(W_0^1) \otimes_R M \to M$, y a partir de este $R-$morfismo se construye, por II.16, el $A(\mathcal{A})-$morfismo $f_1' : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^1) \otimes_R M \to N$: si $a \in A(\mathcal{A})$, $a' \in T_R(W_0^1)$, $w \in W_1$ y $m \in M$ entonces

$$f_1'(a \otimes w \otimes a' \otimes m) = \theta_2\left(a \otimes f'\left(w \otimes \hat{\theta}_1^1(a' \otimes m)\right)\right).$$

Inductivamente, definimos,

$$\theta_1^{i+1} = q\left[\theta_2(j_{i+1} \otimes f^0) - f_i'(\delta_{i+1} \otimes Id_M)\right]$$

y, por II.16, definimos el $A(\mathcal{A})-$morfismo $f_{i+1}' : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R\left(W_0^{i+1}\right) \otimes_R M \to N$, como

$$f_{i+1}' = \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^{i+1}\right).$$

En r pasos obtenemos los morfismos

$$\theta_1 = \hat{\theta}_1^r : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M \text{ y } f_r' \in Hom_{A(\mathcal{A})-k}(V(\mathcal{A}) \otimes_R M, N).$$

Consideremos el isomorfismo de $T_R(W_0^i) - T_R(W_0^i)-$bimódulos $\zeta_1^i : T_R(W_0^i) \to T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} T_R(W_0^i)$ dado por $\zeta_1^i(t) = t \otimes 1$, y el morfismo de $T_R(W_0^i) - k-$bimódulos $\zeta_2^i : T_R(W_0^i) \otimes_R M \to M$ dado por $\zeta_1^i(t \otimes m) = tm$. Es claro que la composición

$$\begin{array}{c} A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle Id \otimes \zeta_1^i \otimes Id} \\ A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} T_R(W_0^i) \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle Id \otimes \zeta_2^i} \\ A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} M, \end{array}$$

es un isomorfismo de $A(\mathcal{A}) - k-$bimódulos. Luego, los morfismos f_i' determinan de manera única morfismos $f_i : A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \otimes_{T_R(W_0^i)} M \to N$, dados por $f_i(a \otimes w \otimes a' \otimes m) = f_i'(a \otimes w \otimes a' \otimes m)$.

Observemos que $(f_1')_{|A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^0) \otimes_R M} = f_1'(h_0 \otimes Id_M) = f_0'$, así que

$$\begin{aligned} \theta_1^2(j_1^2 \otimes Id_M) &= q\left[\theta_2(j_2 j_1^2 \otimes f^0) - f_1'(\delta_2 j_1^2 \otimes Id_M)\right] \\ &= q\left[\theta_2(j_1 \otimes f^0) - f_1'(h_0\delta_1 \otimes Id_M)\right] \\ &= q\left[\theta_2(j_1 \otimes f^0) - f_0'(\delta_1 \otimes Id_M)\right] \\ &= \theta_1^1. \end{aligned}$$

En general, el que $f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) = f'_i$ implica que

$$\begin{aligned}
\theta_1^{i+2}\left(j_{i+1}^{i+2} \otimes Id_M\right) &= q\left[\theta_2\left(j_{i+2}j_{i+1}^{i+2} \otimes f^0\right) - f'_{i+1}\left(\delta_{i+2}j_{i+1}^{i+2} \otimes Id_M\right)\right] \\
&= q\left[\theta_2(j_{i+1} \otimes f^0) - f'_{i+1}(h_i\delta_{i+1} \otimes Id_M)\right] \\
&= q\left[\theta_2(j_{i+1} \otimes f^0) - f'_i(\delta_{i+1} \otimes Id_M)\right] \\
&= \theta_1^{i+1}.
\end{aligned}$$

Sea $\tilde{j}_i^{i+1} : T_R(W_0^i) \to T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ el morfismo inducido por j_i^{i+1}. Si se cumple que $\theta_1^{i+1}\left(j_i^{i+1} \otimes Id_M\right) = \theta_1^i$ entonces $\hat{\theta}_1^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_M\right) = \hat{\theta}_1^i$; como además $h_i = Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \tilde{j}_i^{i+1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) &= \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_M\right)\right) \\
&= \theta_2\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes f'\right)\left(Id_{A(\mathcal{A})} \otimes Id_{W_1} \otimes \hat{\theta}_1^i\right) \\
&= f'_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $w \in W_0$ y $m \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta_2(w \otimes f^0(m)) - f^0(\theta_1(w \otimes m)) &= \theta_2(w \otimes f^0(m)) \\
&\quad - f^0\left(q\left[\theta_2(w \otimes f^0(m)) - f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes m)\right]\right) \\
&= f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes m) \\
&= f'_r(h_{r-1} \otimes Id_M)(\delta_r(w) \otimes m) \\
&= f'_r(\delta(w) \otimes m) = f_r(\delta(w) \otimes m)
\end{aligned}$$

luego $(f^0, f_r) : M \to N$ es un morfismo en $\underline{Rep\mathcal{A}}$ (ver observación II.4), así que $(f^0, f^1) : M \to N$, con $f^1 = \sigma_1(f_r)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

■

Lema 21. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular, donde $W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq W_0^2 \subseteq ... \subseteq W_0^r$ es la filtración de grado cero asociada a la triangularidad, y se cumple para $i \in \{1, ..., r-1\}$ que el epimorfismo canónico de $T_R(W_0^i)$ en A_i es un isomorfismo, así como que el morfismo canónico de $A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ en $A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ es inyectivo. Supongamos que $M \in Rep\mathcal{A}$, que N es un $R-$módulo izquierdo y que tenemos morfismos $f^0 \in_R (M, N)$ y $f' \in Hom_{R-R}(W_1, (M, N)_k)$. Si f^0 es una $R-$sección, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre N tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$.*

Demostración: Como en el lema anterior traslademos el problema a <u>RepA</u>. Sea $\theta_1 : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M$ el $R-$morfismo que le da la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo a M. Puesto que $A(\mathcal{A})$ es un álgebra tensorial, este morfismo está determinado por su valor en $W_0 \otimes_R M$.

Teniendo en mente la primera condición de triangularidad, es decir, considerando a una filtración $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$, definiremos inductivamente los $R-$morfismos $\theta_2^i : W_0^i \otimes_R N \to N$. Por la propiedad universal del álgebra tensorial, estos últimos determinan de manera única $R-$morfismos $\hat{\theta}_2^i : T_R(W_0^i) \otimes_R N \to N$. Sean $j_i : W_0^i \to W_0$ y $j_i^{i+1} : W_0^i \to W_0^{i+1}$ las inclusiones canónicas. Es rutinario verficar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) & = & A(\mathcal{A}) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \\
{\scriptstyle \alpha_i} \uparrow & {\scriptstyle h_i'} & \uparrow {\scriptstyle \alpha_{i+1}} \\
A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) & \to & A_{i+1} \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \\
{\scriptstyle b_i} \uparrow & {\scriptstyle h_i} & \uparrow {\scriptstyle b_{i+1}} \\
T_R(W_0^i) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) & \to & T_R\left(W_0^{i+1}\right) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})
\end{array}$$

donde todos los morfismos son canónicos. Los argumentos son los mismos del lema anterior: como α_i es inyectivo tenemos que h_i' también lo es, y puesto que b_i es isomorfismo entonces h_i es inyectivo. Como $\delta\left(W_0^{i+1}\right) \subseteq A_i \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_i$, tenemos que δj_{i+1} se factoriza como $\alpha_i \delta_{i+1}'$ para un morfismo de $R-R-$bimódulos $\delta_{i+1}' : W_0^{i+1} \to A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$. Definamos $\delta_{i+1} : W_0^{i+1} \to T_R(W_0^i) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A})$ como $b_i^{-1}\delta_{i+1}'$. Luego tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1} b_{i+1} \delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} &= \alpha_{i+1} \delta_{i+2}' j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = \delta j_{i+1} \\
&= \alpha_i \delta_{i+1}' = \alpha_i b_i \delta_{i+1} = \alpha_{i+1} h_i' b_i \delta_{i+1} \\
&= \alpha_{i+1} b_{i+1} h_i \delta_{i+1},
\end{aligned}$$

y como $\alpha_{i+1} b_{i+1}$ es inyectivo, se cumple que $\delta_{i+2} j_{i+1}^{i+2} = h_i \delta_{i+1}$ para $i \in \{0, ..., r-2\}$.

Por el lema II.16 podemos definir el $R-$morfismo $f_0' : T_R(W_0^0) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to N$ como $f_0'(r \otimes w \otimes a \otimes m) = rf'(\theta_1(w \otimes am))$, para $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$, $r \in R$ y $m \in M$.

Sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $qf^0 = Id_M$. Sean $w \in W_0^1$ y $m \in M$, tenemos un $R-$morfismo

$$\theta_2^1(w \otimes n) = f^0(\theta_1(j_1(w) \otimes q(n))) + f_0'(\delta_1(w) \otimes q(n)).$$

Luego obtenemos $\hat{\theta}_2^1 : T_R(W_0^1) \otimes_R N \to N$, y a partir de este $R-$morfismo se construye el $T_R(W_0^1)-$morfismo $f_1' : T_R(W_0^1) \otimes_R W_1 \otimes_R A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to N$: si $a' \in T_R(W_0^1)$, $a \in A(\mathcal{A})$, $w \in W_1$ y $m \in M$ entonces

$$f_1'(a'\otimes w\otimes a\otimes m)=\hat{\theta}_2^1(a'\otimes f'(w\otimes\theta_1(a\otimes m)))$$

Inductivamente, definimos,

$$\theta_2^{i+1}=(f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_i'(\delta_{i+1}\otimes q))$$

y, por lema II.16, el $T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ –morfismo $f_{i+1}':T_R\left(W_0^{i+1}\right)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M\to N$ como

$$f_{i+1}'=\hat{\theta}_2^{i+1}\left(Id_{T_R(W_0^{i+1})}\otimes f'\right)\left(Id_{T_R(W_0^{i+1})}\otimes Id_{W_1}\otimes\theta_1\right).$$

En r pasos obtenemos los morfismos

$$\theta_2=\hat{\theta}_2^r:A(\mathcal{A})\otimes_R N\to N \text{ y } f_r'\in Hom_{A(A)-k}(V(\mathcal{A})\otimes_R M,N).$$

Como en la prueba del lema anterior, tenemos isomorfismos de bimódulos $\left(Id\otimes\zeta_2^i\right)\left(Id\otimes\zeta_1^i\otimes Id\right)$:
$T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M\to T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M$
inducidos por $\zeta_1^i:A(\mathcal{A})\to A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})}A(\mathcal{A})$ dado por $\zeta_1^i(a)=a\otimes 1$, y $\zeta_2^i:A(\mathcal{A})\otimes_R M\to M$ dado por $\zeta_1^i(a\otimes m)=am$. Luego, los morfismos f_i' determinan de manera única morfismos $f_i:T_R(W_0^i)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_{A(\mathcal{A})} M\to N$, dados por $f_i(a'\otimes w\otimes a\otimes m)=f_i'(a'\otimes w\otimes a\otimes m)$.
Observemos que $(f_1')_{|T_R(W_0^0)\otimes_R W_1\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R M}=f_1'(h_0\otimes Id_M)=f_0'$, así que

$$\begin{aligned}\theta_2^2(j_1^2\otimes Id_N) &= (f^0\theta_1(j_2j_1^2\otimes q)+f_1'(\delta_2j_1^2\otimes q))\\ &= (f^0\theta_1(j_1\otimes q)+f_1'(h_0\delta_1\otimes q))\\ &= (f^0\theta_1(j_1\otimes q)+f_0'(\delta_1\otimes q))\\ &= \theta_2^1.\end{aligned}$$

En general, el que $f_{i+1}'(h_i\otimes Id_M)=f_i'$ implica que

$$\begin{aligned}\theta_2^{i+2}\left(j_{i+1}^{i+2}\otimes Id_N\right) &= \left(f^0\theta_1\left(j_{i+2}j_{i+1}^{i+2}\otimes q\right)+f_{i+1}'\left(\delta_{i+2}j_{i+1}^{i+2}\otimes q\right)\right)\\ &= \left(f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_{i+1}'(h_i\delta_{i+1}\otimes q)\right)\\ &= (f^0\theta_1(j_{i+1}\otimes q)+f_i'(\delta_{i+1}\otimes q))\\ &= \theta_2^{i+1}.\end{aligned}$$

Sea $\tilde{j}_i^{i+1} : T_R(W_0^i) \to T_R\left(W_0^{i+1}\right)$ el morfismo inducido por j_i^{i+1}. Si $\theta_2^{i+1}\left(j_i^{i+1} \otimes Id_N\right) = \theta_2^i$, entonces $\hat{\theta}_2^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_N\right) = \hat{\theta}_2^i$, luego $f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) = f'_i$, pues tenemos que $h_i = \tilde{j}_i^{i+1} \otimes Id_{W_1} \otimes Id_{A(\mathcal{A})}$, así que

$$\begin{aligned} f'_{i+1}(h_i \otimes Id_M) &= \hat{\theta}_2^{i+1}\left(\tilde{j}_i^{i+1} \otimes f'\right)\left(Id_{A_{i+1}} \otimes Id_{W_1} \otimes \theta_1\right) \\ &= \hat{\theta}_2^i\left(Id_{A_{i+1}} \otimes f'\right)\left(Id_{A_{i+1}} \otimes Id_{W_1} \otimes \theta_1\right) \\ &= f'_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $w \in W_0$ y $m \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_2(w \otimes f^0(m)) - f^0(\theta_1(w \otimes m)) &= f^0\theta_1(w \otimes q(f^0(m))) + f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes q(f^0(m))) \\ &\quad - f^0(\theta_1(w \otimes m)) \\ &= f'_{r-1}(\delta_r(w) \otimes m) \\ &= f'_r(h_{r-1} \otimes Id_M)(\delta_r(w) \otimes m) \\ &= f'_r(\delta(w) \otimes m) = f_r(\delta(w) \otimes m) \end{aligned}$$

luego $(f^0, f_r) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ (ver observación II.4), así que $(f^0, f^1) : M \to N$, con $f^1 = \sigma_1(f'_r)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

■

Observación II.6: Como ya vimos en II.17, hay un isomorfismo

$$\beta : Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N)) \to Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N))$$

que nos indica que todo morfismo en $Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N))$ está totalmente determinado por su evaluación en W_1. Por esto, en lugar de un enunciado como "entonces existe una estructura tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $f^1(w) = f'(w)$ para $w \in W_1$", directamente usaremos "entonces existe una estructura tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$".

Definición 22. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular. Diremos que $\mathcal{A}$ es un bocs de Kleiner-Roiter, o bocs K-R, si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Sea M un R−módulo izquierdo y $N \in Rep\mathcal{A}$. Sean $f^0 \in_R (M,N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1, (M,N)_k)$. Si f^0 es un R−isomorfismo, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})$−módulo izquierdo sobre M tal que (f^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.*

2. *Sea $M \in RepA$ y N un $R-$módulo izquierdo. Sea $f^0 \in_R (M,N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1,(M,N)_k)$. Si f^0 es un $R-$isomorfismo, entonces existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre N tal que (f^0,f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.*

Lema 23. *Sean $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs K-R y $f = (f^0,f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, tal que f^0 es una $R-$retracción. Entonces existe en $Rep\mathcal{A}$ un morfismo $h = (Id_M, h^1) : M' \to M$ tal que $fh = (f^0,0)$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado uno asociada a la triangularidad, y sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $f^0q = Id_N$. Podemos elegir a h de tal manera que si $f^1\left(W_1^j\right) = 0$ entonces, para $w \in W_1^{j+1}$, $h^1(w) = -qf^1(w)$.*

Demostración: Sea M^1 igual a M como $R-$módulo. Definamos el $R-R-$morfismo $h_1' : W_1 \to (M^1,M)_k$ como $h_1'(w)[m] = -q(f^1(w)[m])$, el cual está bien definido pues $f^1(wr) = f^1(w)r$ para todo $r \in R$.

Por II.22.1 hay una $A(\mathcal{A})-$estructura en M^1, y un morfismo $h_1 = (Id_M, h_1^1) : M^1 \to M$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que para $w \in W_1$ y $m \in M$ se cumple que $h_1^1(w)[m] = -q(f^1(w)[m])$. Supongamos que $f^1\left(W_1^j\right) = 0$, luego para $w \in W_1^{j+1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(fh_1)^1(w)[m] &= f^0(h_1^1(w)[m]) + f^1(w)[Id_M(m)] \\
&= f^0(-q(f^1(w)[m])) + f^1(w)[m] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Similarmente construyamos inductivamente, para $i \geq 2$, morfismos $h_i : (Id_M, h_i^1) : M^i \to M^{i-1}$ en $Rep\mathcal{A}$, a partir de q y $fh_1...h_{i-1} : M^{i-1} \to N$. Entonces, $h_i'(w)[m] = -q\left((fh_1...h_{i-1})^1(w)[m]\right)$ para $w \in W_1$ y $m \in M$. A lo más en $s-j$ pasos obtenemos un morfismo $h = h_1...h_{t-1}h_t$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $fh = (f^0,0)$.

Observemos que para $w \in W_1^{j+1}$ e $i \geq 2$ se cumple que $h_i^1(w)[m] = 0$ y $h_1^1(w) = -qf^1(w)$. Sean $w \in W_1^{j+1}$ y $\delta(w) = \sum_l v_l^1 \otimes v_l^2$, si para $w \in W_1^{j+1}$, $i \geq 1$ y $g_i = h_1...h_i$ se tiene que $g_i^1(w) = -qf^1(w)$, entonces

$$(g_ih_{i+1})^1(w) = Id_M h_{i+1}^1(w) + g_i^1(w)\, Id_M + \textstyle\sum_l g_i^1(v_l^1)\, h_{i+1}^1(v_l^2) = g_i^1(w) = -qf^1(w).$$

Así que, para $w \in W_1^{j+1}$, tenemos que $h^1(w) = -qf^1(w)$.

■

Lema 24. *Sean $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ un bocs K-R y $f = (f^0,f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ tal que f^0 es una $R-$sección. Entonces existe en $Rep\mathcal{A}$ un morfismo $h = (Id_N, h^1) : N \to N'$ tal que $hf = (f^0,0)$. Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 asociada a la triangularidad, y sea $q : N \to M$ un $R-$morfismo tal que $qf^0 = Id_M$. Podemos elegir a h de tal manera que si $f^1\left(W_1^j\right) = 0$ entonces para $w \in W_1^{j+1}$ y $n \in N$ se cumple que $h^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.*

Demostración: Sea N^1 igual a N como $R-$módulo. Definamos el $R-$morfismo $h'_1 : W_1 \to (N, N^1)_k$ como $h'_1(n)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.

Por II.22.2 hay una $A(\mathcal{A})-$estructura en N^1, y un morfismo $h_1 = (Id_N, h_1^1) : N \to N^1$ en $RepA$ tal que para $w \in W_1$ y $n \in N$ se cumple que $h_1^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$. Supongamos que $f^1\left(W_1^j\right) = 0$, luego, para $w \in W_1^{j+1}$ y $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned}(h_1 f)^1(w)[m] &= Id_N(f^1(w)[m]) + h_1^1(w)[f^0(m)] \\ &= f^1(w)[m] + f^1(w)[-q(f^0(m))] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Similarmente construyamos inductivamente, para $i \geq 2$, morfismos $h_i : (Id_M, h_i^1) : M^i \to M^{i-1}$ en $RepA$, a partir de q y $h_{i-1}...h_1 f : M \to N^{i-1}$. Entonces, $h'_i(w)[n] = (h_{i-1}...h_1 f)^1(w)[-q(n)]$ para $w \in W_1$ y $m \in M$. A lo más en $s - j$ pasos obtenemos un morfismo $h = h_t h_{t-1}...h_1$ en $RepA$ tal que $hf = (f^0, 0)$.

Observemos que para $w \in W_1^{j+1}$, $n \in N$ e $i \geq 2$ se cumple que $h^i(w)[m] = 0$, así que como en el lema anterior probamos que, para $w \in W_1^{j+1}$, se cumple que $h_1^1(w)[n] = f^1(w)[-q(n)]$.

■

Lema 25. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en RepA. Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y f^0 es un isomorfismo entonces f es un isomorfismo.*

Demostración: Si f^0 es un isomorfismo, por lema II.23, existe un morfismo $h = (I, h^1) : M' \to M$ en $RepA$ tal que $fh = (f^0, 0)$. Sea g^0 la inversa de f^0. Como f^0 es un morfismo en $A(\mathcal{A}) - Mod$, entonces $g = (g^0, 0) : N \to M'$ es un morfismo en $RepA$, luego $fhg = (Id_N, 0)$. Similarmente, por lema II.24 existe un morfismo $t = (Id_N, t^1) : N \to N'$ en $RepA$ tal que $tf = (f^0, 0)$, y tenemos que $s = (g^0, 0) : N' \to M$ es un morfismo en $RepA$, luego $stf = (Id_M, 0)$. Por asociatividad de la composición se sigue que $hg = st = f^{-1}$.

■

Proposición 26. *(Kleiner-Roiter) Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Entonces los idempotentes se dividen en RepA.*

Demostración: Sea $e = (e^0, e^1) : M \to M$ un idempotente en $RepA$. Si $e^1 = 0$, entonces e^0 es un morfismo en $A(\mathcal{A}) - Mod$, por lo que se divide. Luego, para mostrar que todo idempotente se divide, es suficiente con encontrar un isomorfismo h tal que $(heh^{-1})^1 = 0$. Sea $0 = W_1^0 \subsetneq W_1^1 \subsetneq ... \subsetneq W_1^s = W_1$ la filtración de grado uno dada por la triangularidad. Sea n el número máximo con la propiedad de que hay un isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $(heh^{-1})^1 (W_1^n) = 0$. Si $n = s$ se tiene el enunciado. En caso contrario, $e^1 (W_1^n) = 0$ y $e^1 \left(W_1^{n+1}\right) \neq 0$. Luego, para $w \in W_1^{n+1}$ tenemos que

$$e^1 (w) = (ee)^1 (w) = e^0 e^1 (w) + e^1 (w) e^0.$$

De esto se sigue que $e^0 e^1 (w) e^0 = e^0 e^1 (w) e^0 + e^0 e^1 (w) e^0$, es decir que $e^0 e^1 (w) e^0 = 0$. Sea M' igual a M como $R-$módulo e $I : M \to M'$ la identidad como $R-$módulos. Sea $h^1 \in Hom_{R-R} (W_1, (M, M'))$ dado por $h^1 = (2Ie^0 - I) e^1$. Por II.22.2, existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo en M' tal que $h = (I, h^1) : M \to M'$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Por II.25, h es un isomorfismo, y claramente, $h^{-1} = (I^{-1}, v)$. Puesto que $0 = (h^{-1}h)^1$, tenemos para $w \in W_1^{n+1}$ que $I^{-1}h^1 (w) + v (w) I = 0$. Luego se cumple que

$$\begin{aligned}
&(heh^{-1})^1 (w) = h^1 (w) (eh^{-1})^0 + h^0 (eh^{-1})^1 (w) \\
&= h^1 (w) e^0 I^{-1} + I (e^0 v (w) + e^1 (w) I^{-1}) \\
&= (2Ie^0 - I) e^1 (w) e^0 I^{-1} + Ie^0 (-I^{-1} h^1 (w) I^{-1}) + Ie^1 (w) I^{-1} \\
&= -Ie^1 (w) e^0 I^{-1} + Ie^0 (-2e^0 + Id_M) e^1 (w) I^{-1} + Ie^1 (w) I^{-1} \\
&= -Ie^1 (w) e^0 I^{-1} - 2Ie^0 e^1 (w) I^{-1} + Ie^0 e^1 (w) I^{-1} + Ie^1 (w) I^{-1} \\
&= I (-e^1 (w) e^0 - e^0 e^1 (w) + e^1 (w)) I^{-1} = 0
\end{aligned}$$

contradiciendo la maximalidad de n, luego $n = s$.

■

Corolario 27. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Entonces $rep\mathcal{A}$ es una categoría de Krull-Schmidt.*

Demostración: El enunciado afirma que $rep\mathcal{A}$ es aditiva y esbelta, y cada objeto es una suma de directa finita de inescindibles, cada uno de ellos con álgebra de endomorfismos local. Por la observación II.2.2 se tiene la aditividad de la categoría. Por el lema anterior, y el hecho de que los objetos son de dimensión finita, se sigue el resto de las propiedades.

■

El corolario nos permite, por (3.3 [GR]), afirmar que hay unicidad, salvo orden e isomorfismo, en la descomposición en sumandos directos inescindibles de un objeto de $rep\mathcal{A}$. En particular, $M \in rep\mathcal{A}$ es inescidible si y sólo si $End_{\mathcal{A}} (M)$ es local.

Definición 28. *Si $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs, la siguiente fórmula, para $M, N \in R - Mod$,*

$$\tau_{\mathcal{A}} (M, N) = Hom_R (M, N) \times Hom_{R-R} (W_1, (M, N)_k)$$

determina un bifuntor $\tau_A(\_,?)$ sobre $R-Mod$. Si $\mathcal{A}'=(R',W',\delta')$ es otro bocs y $F: Rep\mathcal{A}'\to Rep\mathcal{A}$ es un functor, diremos que F está enmarcado por el par (F_0,η_F) si

1. $F_0 : R'-Mod \to R-Mod$ *es un funtor;*
2. $\eta_F : \tau_{\mathcal{A}'}(M',N') \to \tau_A(F_0(M'),F_0(N'))$ *es una transformación natural en* $M',N'\in R'-Mod$;
3. ${}_RF(M')=F_0({}_{R'}M')$, *para todo* $M'\in Rep\mathcal{A}'$;
4. $F((f^0,f^1))=\eta_F((f^0,f^1))$, *para todo* $(f^0,f^1)\in Hom_{\mathcal{A}'}(M',N')$.

Observación II.7: Para construir los funtores de reducción, a menudo construimos F_0 y η_F, damos estructura de $A(\mathcal{A})$ −módulo $F(M')$ a $F_0(M')$ y luego definimos F en morfismos de acuerdo al inciso cuatro de la anterior definición.

Lema 29. *Sean $\mathcal{A}=(R,W,\delta)$ y $\mathcal{A}'=(R',W',\delta')$ bocses, y sea η un morfismo de bocses de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}'$ tal que $\eta(W_1)\subseteq W_1'$. En tal caso, el funtor $F_\eta: Rep\mathcal{A}'\to Rep\mathcal{A}$ de II.11 está enmarcado por un par (F_0,η_F). Además, si η es suprayectiva y $\eta(W_1)=W_1'$, entonces η_F es inyectiva.*

Demostración: Sea $F_0: R'-Mod\to R-Mod$ el funtor inducido por $\eta_{|R}: R\to R'$, el cual es fiel. Por construcción de F_η se sigue el tercer axioma de la definición anterior.

Para $f_0\in Hom_{R'}(M',N')$ y $f_1\in Hom_{R'-R'}(W_1',(M',N')_k)$, definimos $\eta_F((f_0,f_1))=(g_0,g_1)$ como:

1. g_0 es f_0 considerado como R−morfismo, es decir, $g_0=F_0(f_0)$.
2. Hay una inyección

   $$\alpha_{M',N'} : Hom_{R'-R'}(W_1',(M',N')_k)\to Hom_{R-R}(F_0(W_1'),(F_0(M'),F_0(N'))_k),$$

   y un homomorfismo

   $$\begin{aligned}\left(\eta_{|W_1}\right)^* : Hom_{R-R}(F_0(W_1'),(F_0(M'),F_0(N'))_k)\to\\ Hom_{R-R}(W_1,(F_0(M'),F_0(N'))_k),\end{aligned}$$

   el cual es inyectivo cuando $\eta_{|W_1}$ es suprayectivo. Luego, definimos a g_1 como $\left(\eta_{|W_1}\right)^*(\alpha_{M',N'}(f_1))$.

No es difícil verificar que η_F es natural en M', N'.

Además, por lema II.17 todo morfismo $f^1 \in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M, N))$ está determinado por su evaluación en W_1, luego, para $(f^0, f^1) \in Hom_{\mathcal{A}'}(M', N')$ tenemos que $F((f^0, f^1)) = \eta_F((f^0, f^1))$.

■

Lema 30. *Sean* $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ *y* $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ *bocses triangulares y sea* $F : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ *un funtor enmarcado por* (F_0, η_F). *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. F *es pleno;*

2. η_F *es inyectiva.*

3. *Sea* $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$, *si* f_0 *es un* $R'-$*isomorfismo entonces* g_0 *es un* $R-$*isomorfismo.*

4. *Si* $M_0' \in R' - Mod$ *y* $M' \in Rep\mathcal{A}'$ *con* $F_0(M_0') = F_0(M')$, *entonces* M_0' *admite una estructura de* $A(\mathcal{A}')$ *−módulo y, con esa estructura,* $F({}_{\mathcal{A}'}M_0') = F(M')$.

5. *Sean* $N \in \operatorname{Im} F$ *y* $M \in Rep\mathcal{A}$ *tal que como* $R-$*módulo* $M \in \operatorname{Im} F_0$. *Se cumple que:*

   (a) *Si* $\eta_F((f_0, f_1)) : M \to N$ *es un isomorfismo en* $Rep\mathcal{A}$ *entonces* $M \in \operatorname{Im} F$.

   (b) *Si* $\eta_F((f_0, f_1)) : N \to M$ *es un isomorfismo en* $Rep\mathcal{A}$ *entonces* $M \in \operatorname{Im} F$.

En caso de cumplirse todas las condiciones, tendremos que si $\mathcal{A}$ *es un bocs K-R entonces* $\mathcal{A}'$ *es un bocs K-R.*

Demostración: Sean $M' \in R' - Mod$ y $N' \in RepB$. Denotemos $M = F_0(M')$ y $N = F(N')$.

Consideremos morfismos $f_0 \in_{R'} (M', N')$ y $f_1 \in Hom_{R'-R'}(W_1', (M', N')_k)$ tales que f_0 es un $R'-$isomorfismo. Luego, si $(g_0, g_1) = \eta_F((f_0, f_1))$, por el tercer inciso g_0 es un $R-$isomorfismo. Como $\mathcal{A}$ es un bocs K-R existe una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo izquierdo sobre M, denotemos por ${}_{\mathcal{A}}M$ a este objeto, tal que $(g_0, g_1) :_{\mathcal{A}} M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y g_0 es un isomorfismo, por II.25 ${}_{\mathcal{A}}M$ es isomorfo a N, así que por el inciso 5.2 ${}_{\mathcal{A}}M = F(M'')$ para algún $M'' \in Rep\mathcal{A}'$.

Por el cuarto inciso M' admite una $A(\mathcal{A}')-$estructura para la cual $F({}_{\mathcal{A}'}M') = F(M'') =_{\mathcal{A}} M$.

Por plenitud de F hay un morfismo $h = (h^0, h^1) :_{\mathcal{A}'} M' \to N'$ tal que $F((h^0, h^1)) = (g_0, g_1)$, luego $\eta_F((f_0, f_1)) = \eta_F((h^0, h^1))$. Por inyectividad de η_F tenemos que $h^0 = f_0$ y $h^1 = f_1$.

La prueba del axioma II.22.2 es dual.

■

II.6 Producto de bocses.

Lema 31. *Sean R una $k-$álgebra, e un idempotente central de R y W un $R-R-$bimódulo. Sean $e' = 1 - e$, $T = T_R(W)$ y $L, N \in T - Mod$. Entonces:*

1. *Hay morfismos de $k-$álgebras graduadas $\eta : T \to T_{eR}(eWe)$ y $\sigma : T_{eR}(eWe) \to T$ tales que $\eta\sigma = Id_{T_{eR}(eWe)}$.*
2. *Si $eWe' \oplus e'We = 0$ entonces $T \cong eT \times e'T \cong T_{eR}(eWe) \times T_{e'R}(e'We')$.*
3. *Si $T \cong eT \times e'T$ entonces $Hom_T(L, N) \cong Hom_{eT}(eL, eN) \times Hom_{e'T}(e'L, e'N)$.*
4. *Si $T \cong eT \times e'T$ entonces $Ext_T(N, L) \cong Ext_{eT}(eN, eL) \times Ext_{e'T}(e'N, e'L)$.*

Demostración: El morfismo de $k-$álgebras $\eta_R : R \to eR$ y el morfismo de $R - R-$bimódulos $\eta_W : W \to eWe$ inducen, por lema II.2, un único morfismo de $k-$álgebras $\eta : T \to T_{eR}(eWe)$. Similarmente hay un morfismo de $k-$álgebras $\sigma_{eR} : eR \to R$, y un morfismo de $eR - eR-$bimódulos $\sigma_{eWe} : eWe \to W$ que inducen, por lema II.2, un único morfismo de $k-$álgebras $\sigma : T_{eR}(eWe) \to T$. Puesto que $\eta_R\sigma_{eR} = Id_{eR}$ y $\eta_W\sigma_{eWe} = Id_{eWe}$ tenemos que $\eta\sigma = Id_{T_{eR}(eWe)}$, comprobándose el primer inciso.

Análogamente podemos construir morfismos de $k-$álgebras $\eta' : T \to T_{e'R}(e'We')$ y $\sigma' : T_{e'R}(e'We') \to T$ tales que $\eta'\sigma' = Id_{T_{e'R}(e'We')}$.

Si $eWe' \oplus e'We = 0$, una rápida verificación en generadores prueba que $\sigma'\eta' + \sigma\eta = Id_T$, $\eta'\sigma = 0$ y $\eta\sigma' = 0$.

Es claro que $\operatorname{Im}\sigma \subseteq eTe$ y que $\operatorname{Im}\sigma' \subseteq e'Te'$, luego $\operatorname{Im}\sigma = eTe$ y $\operatorname{Im}\sigma' = e'Te'$, así que e y e' son centrales en T.

El tercer inciso se sigue de la centralidad y ortogonalidad de e y e'.

Puesto que $L \cong eL \oplus e'L$ y $N \cong eN \oplus e'N$ como $T-$módulos, tenemos que

$$Ext_T(N, L) \cong Ext_T(eN, eL) \oplus Ext_T(e'N, eL) \oplus Ext_T(eN, e'L) \oplus Ext_T(e'N, e'L).$$

Como las sucesiones exactas de $T-$módulos de la forma

$$0 \to eL \to M \to e'N \to 0$$

y

$$0 \to e'L \to M \to eN \to 0$$

se dividen, tenemos que

$$Ext_T(N,L) \cong Ext_T(eN,eL) \oplus Ext_T(e'N,e'L) \cong Ext_{eT}(eN,eL) \times Ext_{e'T}(e'N,e'L)$$

■

Definición 32. *Sean $\mathcal{A}_1 = (R_1, W^1, \delta_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (R_2, W^2, \delta_2)$ bocses. El bocs producto de $\mathcal{A}_1$ por $\mathcal{A}_2$, denotado por $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, es la terna (R, W, δ) donde $R = R_1 \times R_2$ es la $k-$álgebra producto de R_1 por R_2, $W = W^1 \oplus W^2$, donde $W_i = W_i^1 \oplus W_i^2$, para $i \in \{0,1\}$, y cada W_i^j tiene la estructura natural de $R - R-$bimódulo determinada por su estructura de $R_j - R_j-$bimódulo, y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es la diferencial que se obtiene extendiendo, de acuerdo con el lema II.31, el morfismo de $R-$bimódulos*

$$W = W^1 \oplus W^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}} T_{R_1}(W_1) \oplus T_{R_2}(W_2) \cong T_R(W).$$

Proposición 33. *Sean $\mathcal{A}_1 = (R_1, W^1, \delta_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (R_2, W^2, \delta_2)$ bocses. Entonces*

$$Rep\mathcal{A}_1 \times Rep\mathcal{A}_2 \cong Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Demostración: Sean e_1 y e_2 los idempotentes canónicamente asociados a $R = R_1 \times R_2$. Por el lema II.31.2 tenemos que hay un isomorfismo de $k-$álgebras $\sigma_1 \times \sigma_2 : T_{e_1R}(e_1We_1) \times T_{e_2R}(e_2We_2) \to T_R(W)$, el cual también puede ser considerado como un isomorfismo de $R-R-$bimódulos $\sigma_1 \oplus \sigma_2 : T_{e_1R}(e_1We_1) \oplus T_{e_2R}(e_2We_2) \to T_R(W)$. Más aún, para $j \in \{1,2\}$, tenemos que σ_j es un morfismo de $A(\mathcal{A}_j)-$álgebras.

Para $j \in \{1,2\}$ hay, siguiendo la notación del lema anterior, los morfismos de $k-$álgebras

$$\begin{array}{ccc} T_R(W) & \xrightarrow{\eta_j} & T_{R_1}(W^j) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta_j} \\ T_R(W) & \xrightarrow{\eta_j} & T_{R_1}(W^j). \end{array}$$

Los morfismos de $k-$álgebras mostrados inducen morfismos de bocses

$$F_{\eta_j}: Rep\mathcal{A}_j \longrightarrow Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Por II.11 cada uno de estos funtores es un encaje.

Definamos ahora funtores

$$F_{\sigma_j}: Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \longrightarrow Rep\mathcal{A}_j.$$

Sean $M, N \in Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ y $f = (f^0, f^1): M \longrightarrow N$ un morfismo en $Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Sean $A = A(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ y $V = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Definimos $F_{\sigma_j}(M) = e_jM$ como R_j-módulo. Notemos que e_jM tiene una estructura canónica como $A(\mathcal{A}_j)-$módulo, pues, por el lema anterior, $T_R(W) \otimes_R e_jM \cong T_{R_j}(W^j) \otimes_{R_j} e_jM$.

También por el lema anterior tenemos que $f^0 \cong f_1^0 \times f_2^0$ donde $f_j^0: e_jM \to e_jN$ es el R_j-morfismo obtenido por restricción de f^0.

Por otra parte $f^1\sigma_j: V(\mathcal{A}_j) \to (M, N)_k$ es un morfismo de $A(\mathcal{A}_j)-A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos, el cual induce de manera canónica un morfismo de $A(\mathcal{A}_j) - A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos $f_j^1: V(\mathcal{A}_j) \to (e_jM, e_jN)_k$.

Así que definimos $F_{\sigma_j}(f) = \left(f_j^0, f_j^1\right)$.

Por construcción de δ tenemos diagramas conmutativos de $A(\mathcal{A}_j)-A(\mathcal{A}_j)-$bimódulos

$$\begin{array}{ccc} T_R(W) & \xleftarrow{\sigma_j} & T_{R_1}(W^j) \\ \downarrow^{\delta} & & \downarrow^{\delta_j} \\ T_R(W) & \xleftarrow{\sigma_j} & T_{R_1}(W^j). \end{array}$$

Luego, para $a \in A(\mathcal{A}_j)$ y $m_j \in e_jM$, se cumple que

$$\begin{aligned} f_j^1(\delta_j(a))[m_j] &= f_j^1\left(\eta_j\delta\sigma_j(a)\right)[m_j] = f^1(\delta\sigma_j(a))[m_j] \\ &= \sigma_j(a)f^0(m_j) - f^0(\sigma_j(a)m_j) \\ &= af_j^0(m_j) - f_j^0(am_j). \end{aligned}$$

De la construcción de F_{η_j} y F_{σ_j} es inmediato que $F_{\sigma_j}F_{\eta_j} = Id_{RepA_j}$ y, para $i \neq j$, que $F_{\sigma_i}F_{\eta_j} = 0_{RepA_i}$.

También es fácil convencerse de que $(F_{\sigma_1} \times F_{\sigma_2})\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right) = Id_{RepA_1 \times RepA_2}$, luego F_{σ_j} es un funtor, y $\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right) : RepA_1 \times RepA_2 \to Rep(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ es un isomorfismo de categorías.

■

Capítulo III
Funtores de Reducción.

Dado un bocs $\mathcal{A}$, entenderemos por un funtor de reducción a un funtor fiel y pleno $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$, donde $\mathcal{B}$ es un bocs que en cierto sentido es más simple que $\mathcal{A}$. El propósito de este capítulo es describir explícitamente a cuatro funtores de reducción y obtener algunas de sus propiedades importantes. Dichos funtores son: Eliminación de idempotentes, Regularización, Absorción y Reducción.

III.1 Eliminación de idempotentes y regularización.

Lema 1. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea (η_R, η_W), con $\eta_R : R \to R'$ un morfismo de $k-$álgebras y $\eta_W : W \to W' = W'_0 \oplus W'_1$ un morfismo de $R-R-$bimódulos, un par graduado como en la definición II.9. Sea $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ el morfismo de álgebras graduadas inducido. Supongamos que η_R y η_W son suprayectivos y*

$$\eta(\delta(\ker \eta_W)) = 0.$$

Entonces:

1. *Existe δ' tal que $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ es un bocs y η es un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es triangular entonces $\mathcal{A}'$ es triangular.*

Demostración:

1. Si η_R y η_W son morfismos suprayectivos entonces el morfismo de álgebras graduadas $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ también. Por construcción, $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ es un morfismo homogéneo de grado cero multiplicativo.

   La hipótesis nos asegura la existencia de un morfismo de $R' - R'-$bimódulos δ'_0, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\delta} & T_R(W) \\ \downarrow^{\eta_W} & \delta'_0 & \downarrow^{\eta} \\ W' & \to & T_{R'}(W') . \end{array}$$

Se cumple que $\delta_0'(W_0') \subseteq [T_{R'}(W')]_1$ y $\delta_0'(W_1') \subseteq [T_{R'}(W')]_2$ pues η es homogéneo de grado cero. Luego, podemos aplicar la proposición II.6 y asegurar la existencia de una diferencial $\delta' : T_{R'}(W') \to T_{R'}(W')$. Por la fórmula de la observación II.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta'\eta\left(\otimes_{i=1}^{n} w_i\right) \\
= \ & \delta'\left(\otimes_{i=1}^{n}\eta\left(w_i\right)\right) \\
= \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(\eta(w_l))}\left(\otimes_{l=1}^{j-1}\eta\left(w_l\right)\right)\otimes\delta'\eta\left(w_j\right)\otimes\left(\otimes_{t=j+1}^{n}\eta\left(w_t\right)\right)\right) \\
= \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(\eta(w_l))}\left(\otimes_{l=1}^{j-1}\eta\left(w_l\right)\right)\otimes\eta\delta\left(w_j\right)\otimes\left(\otimes_{t=j+1}^{n}\eta\left(w_t\right)\right)\right) \\
= \ & \eta\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)}\left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right)\otimes\delta\left(w_j\right)\otimes\left(\otimes_{t=j+1}^{n} w_t\right)\right)\right) \\
= \ & \eta\delta\left(\otimes_{i=1}^{n} w_i\right),
\end{aligned}$$

luego $\delta'\eta = \eta\delta$.

Finalmente notemos que $\left(\delta'\right)^2\eta = \eta\delta^2 = 0$ implica que $\left(\delta'\right)^2 = 0$, pues η es un morfismo suprayectivo.

2. Sean $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W_0$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq W_1^2 \subseteq \ldots \subseteq W_1^s = W_1$ las filtraciones que hacen triangular a $\mathcal{A}$.

   Tenemos entonces que

   - $0 = \eta\left(W_0^0\right) \subseteq \eta\left(W_0^1\right) \subseteq \ldots \subseteq \eta\left(W_0^r\right) = \eta\left(W_0\right) = W_0'$.
   - $\delta'\left(\eta\left(W_0^i\right)\right) = \eta\left(\delta\left(W_0^i\right)\right) \subseteq \eta\left(A_{i-1}\hat{\otimes}_R W_1\hat{\otimes}_R A_{i-1}\right)$ $= \eta\left(A_{i-1}\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(W_1\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(A_{i-1}\right)$, lo que es la propiedad buscada, pues $\eta\left(A_{i-1}\right)$ es la subálgebra de $A(\mathcal{A}')$ generada por $\eta\left(W_0^{i-1}\right)$.
   - $0 = \eta\left(W_1^0\right) \subseteq \eta\left(W_1^1\right) \subseteq \ldots \subseteq \eta\left(W_1^s\right) = \eta\left(W_1\right) = W_1'$
   - $\delta'\left(\eta\left(W_1^i\right)\right) = \eta\left(\delta\left(W_1^i\right)\right) \subseteq \eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\hat{\otimes}_R\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)$ $= \eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\hat{\otimes}_{R'}\eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right)$, lo que es la propiedad buscada, pues
     $\eta\left(\left\langle W_1^{i-1}\right\rangle_{A(\mathcal{A})}\right) = \left\langle\eta\left(W_1^{i-1}\right)\right\rangle_{A(\mathcal{A}')}$.

   Así que $\mathcal{A}'$ es triangular.

■

Proposición 2. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ y $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ bocses. Sea η un morfismo del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$ inducido por el par graduado (η_R, η_W), donde η_R y η_W son morfismos suprayectivos. Entonces:*

1. *Hay un encaje $F_\eta : RepA' \to RepA$.*

2. *La imagen de F_η es una subcategoría de $RepA$ constituida por aquellos objetos M que son anulados por $R \cap \ker \eta$ y por $W_0 \cap \ker \eta$.*

3. *F_η está enmarcado por el par (F_0, η_F), donde $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ es el funtor restricción de escalares vía $\eta_R : R \to R'$, y $\eta_F((f_0, f_1)) = \left(f_0, f_1 \eta_{|W_1}\right)$.*

4. *Sean $M, N \in \operatorname{Im} F_\eta$, si para todo morfismo $(g^0, g^1) : M \to N$ en $RepA$ se satisface que*

$$g^1 (W_1 \cap \ker \eta) = 0,$$

entonces F_η es pleno.

5. *Si F_η es pleno y se cumple el axioma II.30.5, entonces el que $\mathcal{A}$ sea un bocs K-R implica que $\mathcal{A}'$ es un bocs K-R.*

Demostración:

1. Sea F_η como en el lema II.11, es decir, si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $RepA'$ entonces $(F_\eta(f))^0$ es f^0 considerado como R–morfismo, y $(F_\eta(f))^1 = f^1 \eta^1$. Como η es suprayectivo, del mismo lema se sigue que F_η es un encaje.

2. Sea $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ el funtor del tercer inciso. Es claro que la imagen de F_0 consta de los R–módulos anulados por $\ker \eta_R$.

   Sea $M \in RepA'$, por construcción de F_η tenemos que M es un $A(\mathcal{A})$–módulo con

$$am = \eta(a) m,$$

   donde $m \in M$ y $a \in A(\mathcal{A})$. Luego, es claro que $\ker \eta_R$ y $W_0 \cap \ker \eta_W$ anulan a ${}_AM = F_\eta(M)$.

   Ahora supongamos que $M \in RepA$ es anulado por $\ker \eta_R$ y que $W_0 \cap \ker \eta_W$. Como η_R es suprayectivo, el funtor F_0 es un encaje pleno, cuya imagen consiste de los R–módulos anulados por $\ker \eta_R$. De modo que ${}_RM$ se obtiene por restricción de escalares de un módulo ${}_{R'}M$.

   Ahora bien, la acción del álgebra $T_R(W_0)$ sobre M determina un morfismo de $R - R$–bimódulos

$$\theta \in Hom_{R-R}\left(W_0, (M,M)_k\right) \cong Hom_{R-k}\left(W_0 \otimes_R M, M\right).$$

Sea $\eta_W^0 : W_0 \to W_0'$ la restricción de η_W. Entonces, $\ker \eta_W^0 = W_0 \cap \ker \eta_W$. La hipótesis de que $\ker \eta_W^0$ anula a M significa que $\theta\left(\ker \eta_W^0\right) = 0$. Luego existe θ'', morfismo de $R-R$-bimódulos, tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\eta_W^0} & W_0' \\ \downarrow^{\theta} & & \downarrow^{\theta''} \\ (M,M)_k & = & (M,M)_k \end{array}$$

Sea $\theta' : W_0' \to (M,M)_k$ el morfismo de $R'-R'$-bimódulos que corresponde a θ'' bajo el morfismo identidad

$$Hom_{R'-R'}\left(W_0', (M,M)_k\right) = Hom_{R-R}\left(W_0', (M,M)_k\right).$$

Este morfismo θ' determina una estructura de $T_{R'}\left(W_0'\right)$-módulo sobre ${}_{R'}M$ tal que $F_\eta\left({}_{\mathcal{A}'}M\right) = {}_{\mathcal{A}}M$.

3. Se sigue del lema II.30.

4. Sea $g = \left(g^0, g^1\right) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, donde $F_\eta\left({}_{\mathcal{A}'}M\right) = {}_{\mathcal{A}}M$ y $F_\eta\left({}_{\mathcal{A}'}N\right) = {}_{\mathcal{A}}N$. Sea $\eta_W^1 : W_1 \to W_1'$ la restricción de η_W, luego $W_1 \cap \ker \eta = \ker \eta_W^1$.

   Como η_R es suprayectiva, tenemos que

$$Hom_{R-R}\left(W_1', (M,N)_k\right) = Hom_{R'-R'}\left(W_1', ({}_{R'}M, {}_{R'}N)_k\right).$$

   Dada la hipótesis de este inciso hay un isomorfismo

$$\left(\eta_W^1\right)^* : Hom_{R-R}\left(W_1', (M,N)_k\right) \to Hom_{R-R}\left(W_1, (M,N)_k\right),$$

   es decir, que $g^1_{|W^1} = f_1 \eta_W^1$ para algún f_1 en $Hom_{R'-R'}\left(W_1', ({}_{R'}M, {}_{R'}N)_k\right)$. Sea β el isomorfismo de II.17, construimos el par $\left(g^0, \beta^{-1}\left(f_1\right)\right)$, donde g^0 es visto como morfismo de R'-módulos.

   Veamos que $f = \left(g^0, \beta^{-1}\left(f_1\right)\right) : {}_{\mathcal{A}'}M \to {}_{\mathcal{A}'}N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$. Sea $a' \in A\left(\mathcal{A}'\right)$, $m \in M$ y $\eta(a) = a'$ para algún $a \in A(\mathcal{A})$, entonces

$$\begin{aligned} a'(g^0(m)) - g^0(a'm) &= a(g^0(m)) - g^0(am) \\ &= g^1(\delta(a))[m] \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos, para $\delta(a) = \sum_i a_i^1 \otimes w_i \otimes a_i^1$ con $w_i \in W_1$ y $a_i^1, a_i^2 \in A(\mathcal{A})$, que

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(f_1)(\delta'(\eta(a)))[m] &= \beta^{-1}(f_1)(\eta\delta(a))[m] \\ &= \beta^{-1}(f_1)\left(\sum_i \eta(a_i^1) \otimes \eta(w_i) \otimes \eta(a_i^2)\right)[m] \\ &= \sum_i \eta(a_i^1)(f_1\eta_W^1)(w_i)[\eta(a_i^2)m] \\ &= \sum_i \eta(a_i^1)\left(g_{|W^1}^1\right)(w_i)[\eta(a_i^2)m] \\ &= g^1\left(\sum_i \eta(a_i^1) \otimes w_i \otimes \eta(a_i^2)\right)[m] \\ &= g^1(\delta(a))[m]. \end{aligned}$$

Así, f es un $A(\mathcal{A}')$ –morfismo y $F_\eta(f) = g$. Luego F_η es pleno.

5. Hemos demostrado la inyectividad de η_F, y es claro que se cumple el axioma II.30.3. Como F_0 es un encaje pleno, se cumple II.30.4. Las hipótesis de este inciso son II.30.1 y II.30.5, por lo que del lema II.30 se sigue el enunciado.

■

Teorema 3. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea e un idempotente de R tal que y $eR(1-e) = (1-e)Re = 0$. Entonces:*

1. *Existen un bocs $\mathcal{A}_e = (eRe, eWe, \delta_e)$, y un encaje pleno $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ que llamaremos* **eliminación de idempotentes.**
2. *La imagen de F_e es la subcategoría plena constituida por aquellos objetos M tales que $(1-e)M = 0$.*
3. *Si $\mathcal{A}$ es triangular (aditivo) entonces $\mathcal{A}_e$ es triangular (aditivo).*
4. *Si $\mathcal{A}$ es K-R entonces $\mathcal{A}_e$ es K-R.*
5. *Si $M' \in rep\mathcal{A}_e$ y $\hat{W}$ es un $R-R$–subbimódulo de W_0, entonces $\|M'\|_{e\hat{W}e} = \|F_e(M')\|_{\hat{W}}$ y $q_{\mathcal{A}_e}(M') = q_{\mathcal{A}}(F_e(M'))$.*

Demostración: Sean $e_1 = e$ y $e_2 = (1-e)$. En general, esta descomposición de la unidad de R en idempotentes induce descomposiciones de $R-R$–bimódulos

$$\begin{aligned} W_0 &= e_1W_0e_1 \oplus e_1W_0e_2 \oplus e_2W_0e_1 \oplus e_2W_0e_2 \text{ y} \\ W_1 &= e_1W_1e_1 \oplus e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2. \end{aligned}$$

Sean $A = A(\mathcal{A})$, $R' = e_1Re_1$, $W_0' = e_1W_0e_1$, $W_1' = e_1W_1e_1$ y $W' = e_1W_1e_1$. Las proyecciones $\eta_R : R \to R'$ y $\eta_W : W \to e_1We_1$ son, gracias a que $eR(1-e) = (1-e)Re = 0$, un morfismo de anillos y un morfismo de $R-R$–bimódulos respectivamente, es decir, forman un par graduado. Luego hay un morfismo de k–álgebras $\eta : T_R(W) \to T_{e_1Re_1}(e_1We_1)$.

Se cumplen las hipótesis del lema III.1 pues

$\eta(\delta(W_0 \cap \ker \eta_W))$

$= \eta(\delta(e_1W_0e_2 \oplus e_2W_0e_1 \oplus e_2W_0e_2))$

$\subseteq \eta\left(\left[e_1A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_2\right] \oplus \left[e_2A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_1\right] \oplus \left[e_2A\hat{\otimes}_RW_1\hat{\otimes}_RAe_2\right]\right) = 0,$

y por otro lado

$\eta(\delta(W_1 \cap \ker \eta_W))$

$= \eta(\delta(e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2))$

$\subseteq \eta\left(\left[e_1V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_2\right] \oplus \left[e_2V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_1\right] \oplus \left[e_2V(\mathcal{A})\hat{\otimes}_RV(\mathcal{A})e_2\right]\right)$

$= 0.$

Así que por III.1.1 hay un bocs $\mathcal{A}' = (e_1Re_1, e_1We_1, \delta')$, y un morfismo η del bocs $\mathcal{A}$ en el bocs $\mathcal{A}'$. Luego, por III.2, existe un encaje $F_e = F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$.

Por III.2.2 la imagen de F_e se compone de aquellos objetos $M \in Rep\mathcal{A}$ que son anulados por $R \cap \ker \eta$ y por $W_0 \cap \ker \eta$. Ahora bien, es claro que un R–módulo M es anulado por $R \cap \ker \eta$ si y sólo si $e_2M = 0$. Más aún, si $e_2M = 0$ entonces $W_0 \cap \ker \eta$ anula a M. Esto prueba que la imagen de F_e es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $e_2M = 0$.

Por observación II.2.1 $\operatorname{Im} F_e$ es cerrada bajo isomorfismos en $Rep\mathcal{A}$.

Más aún, si $M, N \in \operatorname{Im} F_\eta$ y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, tenemos que, para $w \in e_1W_1e_2 \oplus e_2W_1e_1 \oplus e_2W_1e_2 = W_1 \cap \ker \eta$ y $m \in M$

$$f^1(w)[m] = e_1(f^1(w)[e_1m]) = f^1(e_1we_1)[m] = 0.$$

Así que se cumple la condición III.2.4, por lo que F_e es pleno.

Por III.1.2 la triangularidad de $\mathcal{A}$ implica la de $\mathcal{A}'$.

Ahora bien, si $\mathcal{A}$ triangular aditivo, y $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$ como $R-R$–bimódulos para $i \in \{1, ..., r-1\}$, entonces $e_1W_0^{i+1}e_1 = e_1W_0^ie_1 \oplus e_1V_ie_1 = \eta(W_0^i) \oplus e_1V_ie_1$, por lo que $\mathcal{A}_e$ es triangular aditivo.

Como $\operatorname{Im} F_e$ es cerrada bajo isomorfismos en $Rep\mathcal{A}$ se sigue cumple el axioma II.30.5, así que por III.2.5, si $\mathcal{A}$ un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_e$ es un bocs K-R.

Sea $F_e(M') = M$. Tenemos que

$$\|M\| = \dim_k({}_R(M, M)) = \dim_k({}_{e_1Re_1}(M, M)) = \dim_k({}_{e_1Re_1}(M', M')) = \|M'\|.$$

Para $\hat{W}$ un $R-R$–subbimódulo de W se cumple que $\hat{W} \cap \ker \eta = e_1\hat{W}e_2 \oplus e_2\hat{W}e_1 \oplus e_2\hat{W}e_2$, luego

$$\begin{aligned}
\|M\|_{\hat{W}} &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}\otimes_R M, M\right)\right)\\
&= \dim_k\left({}_R\left(\left(\left(\hat{W}\cap\ker\eta\right)\oplus e_1\hat{W}e_1\right)\otimes_R M, M\right)\right)\\
&= \dim_k\left({}_R\left(\left(\hat{W}\cap\ker\eta\right)\otimes_R M, M\right)\right)+\dim_k\left({}_R\left(e_1\hat{W}e_1\otimes_R M, M\right)\right)\\
&= 0+\dim_k\left({}_{e_1Re_1}\left(e_1\hat{W}e_1\otimes_{e_1Re_1} M', M'\right)\right)\\
&= \|M'\|_{e_1\hat{W}e_1}.
\end{aligned}$$

Por las identidades anteriores se sigue que $M'\in rep_0\mathcal{A}_e$ si y sólo si $M\in rep_0\mathcal{A}$, y que

$$q_A(M)=\|M\|-\|M\|_0+\|M\|_1=\|M'\|-\|M'\|_0+\|M'\|_1=q_{\mathcal{A}_e}(M').$$

■

Teorema 4. *Sea $\mathcal{A}=(R,W,\delta)$ un bocs. Sean*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & W_0^{(1)} & \to & W_0 & \xrightarrow{\pi_0} & W_0^{(2)} & \to & 0\\
0 & \to & W_1^{(1)} & \to & W_1 & \xrightarrow{\pi_1} & W_1^{(2)} & \to & 0
\end{array}$$

sucesiones exactas de $R-R$–bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right)=W_1^{(1)}$. Entonces:

1. *Existe un bocs $\mathcal{A}_r=\left(R,W_0^{(2)}\oplus W_1^{(2)},\delta_r\right)$, y un encaje pleno $F_r: Rep\mathcal{A}_r\to Rep\mathcal{A}$ al que llamaremos* **regularización.** *Si $M'\in rep\mathcal{A}_r$ entonces $F_r(M')\in rep\mathcal{A}$.*

2. *La imagen de F_r es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $W_0^{(1)}$ anula a M.*

3. *Si $\mathcal{A}$ es triangular entonces $\mathcal{A}_r$ es triangular.*

4. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R.*

5. *Sea $\mathcal{A}$ triangular y $0=W_0^0\subseteq W_0^1\subseteq\ldots\subseteq W_0^r=W_0$ una de las filtraciones asociada a la triangularidad. Si $\mathcal{A}$ es triangular aditivo y $W_0^{(1)}\subseteq W_0^1$, entonces $\mathcal{A}_r$ es triangular aditivo.*

Demostración: La identidad $\eta_R : R \to R$ y el epimorfismo $\eta_W = \pi_0 \oplus \pi_1 : W_0 \oplus W_1 \to W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)} = W^{(2)}$ forman un par graduado. Sea $\eta : T_R(W) \to T_R\left(W^{(2)}\right)$ el morfismo de $k-$álgebras inducido. La hipótesis del lema III.1 se sigue de que $\eta\left(\delta\left(W_0^{(1)}\right)\right) = \eta\left(W_1^{(1)}\right) = 0$, y de que
$\eta\left(\delta\left(W_1^{(1)}\right)\right) = \eta\left(\delta^2\left(W_0^{(1)}\right)\right) = 0$. Luego hay un bocs $\mathcal{A}' = (R, W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)}, \delta')$ y η es un morfismo de bocses. Por III.2.1, $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ es un encaje. Denotemos a este caso particular de F_η como F_r, y a $\mathcal{A}'$ como $\mathcal{A}_r$.

Por III.2.2, la imagen de F_r está constituida por aquellos objetos de $Rep\mathcal{A}$ que son anulados por $W_0^{(1)}$.

Sean $M = F_r(M')$, $N = F_r(N')$ y $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$. Puesto que para todo $w \in W_1^{(1)}$ existe $a \in W_0^{(1)}$ tal que $\delta(a) = w$, se tiene para toda $m \in M$ la identidad $f^1(w)[m] = f^1(\delta(a))[m] = af^0(m) - f^0(am) = 0$, pues M y N son anulados por $W_0^{(1)}$. Luego se cumple la condición de lema III.2.4, por lo que F_r es pleno.

La triangularidad de $\mathcal{A}$ implica la triangularidad de $\mathcal{A}_r$ por III.1.2.

Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Sean $M \in Rep\mathcal{A}$ y $N = F_r(N')$. Supongamos que $f^0 \in_R (M, N)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}\left(W_1^{(2)}, (M,N)_k\right)$ son tales que $(f^0, f^1\pi_1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$. Por observación II.2.1 f^0 es un isomorfismo. Tenemos para $a \in W_0^{(1)}$ que

$$f^0(am) = af^0(m) - f^1\eta(\delta(a))[m] = -f^1(0)[m] = 0,$$

luego $W_0^{(1)}$ anula a M, así que $M \in \operatorname{Im} F_r$.

Similarmente, si $f^0 \in_R (N, M)$ y $f^1 \in Hom_{R-R}\left(W_1^{(2)}, (N,M)_k\right)$ son tales que $(f^0, f^1\pi_1) : N \to M$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$. Tenemos para $a \in W_0^{(1)}$ que

$$af^0(n) = f^0(an) + f^1\eta(\delta(a))[n] = f^1(0)[n] = 0$$

luego $W_0^{(1)}$ anula a M, así que $M \in \operatorname{Im} F_r$.

Con esto hemos verificado el axioma II.30.5. Por III.2.5 $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R.

Demostremos el último inciso. Como se vió en la prueba de III.1.2, la filtración en grado cero asociada a $\mathcal{A}_r$ es $0 = \eta(W_0^0) \subseteq \eta(W_0^1) \subseteq ... \subseteq \eta(W_0^r) = \eta(W_0) = W_0'$. Si para cada $i \in \{1, ..., r-1\}$ hay una descomposición como $R-R-$bimódulos $W_0^{i+1} = W_0^i \oplus V_i$, entonces $W_0^{i+1} = W_0^1 \oplus V_1 \oplus ... \oplus V_i$ como $R-R-$bimódulos. Luego, si $W_0^{(1)} \subseteq W_0^1$ entonces $\eta\left(W_0^{i+1}\right) = \left(W_0^1 / W_0^{(1)}\right) \oplus V_1 \oplus ... \oplus V_i$, así que $\eta\left(W_0^{i+1}\right) = \eta\left(W_0^i\right) \oplus V_i$.

■

Proposición 5. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ el funtor regularización como en el teorema anterior. Sean $\hat{W}$ un $R-R$–sub-bimódulo de W, $\hat{W}^{(2)} = \eta\left(\hat{W}\right)$, $\hat{W}^{(1)} = \left(\ker\eta \cap \hat{W}\right)$, $M' \in Rep\mathcal{A}_r$ y $F_r(M') = M$. Si para $\hat{W}$ se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0 \ (*)$$

entonces $\|M'\|_{\hat{W}} \leq \|F_r(M')\|_{\hat{W}^{(2)}}$, y la desigualdad estricta se obtiene si y sólo si ${}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$.

Si para cada $\hat{W} \in \{R, W_0, W_1\}$ se tienen sucesiones exactas como $(*)$, entonces $q_{\mathcal{A}_r}(M') \geq q_{\mathcal{A}}(F_r(M'))$, obteniéndose la igualdad si y sólo si $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es biyectivo.

Si R es semisimple, para todo $R-R$–bimódulo $\hat{W}$ la sucesión $(*)$ es exacta.

Demostración: De la sucesión exacta

$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|M\|_{\hat{W}} &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W} \otimes_R M, M\right)\right) \\ &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) + \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ &\geq \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) = \|M'\|_{\hat{W}^{(2)}}. \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\dim_k\left({}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) = 0$.

Ahora supongamos la existencia de sucesiones exactas similares para R, W_0 y W_1.

El epimorfismo $\delta \otimes I : W_0^{(1)} \otimes_R M \to W_1^{(1)} \otimes_R M$ induce un monomorfismo ${}_R\left(W_1^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)$, luego

$$\begin{aligned} &\dim_k\left({}_R(W_0 \otimes_R M, M)\right) - \dim_k\left({}_R\left(W_0^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ = \ &\dim_k\left({}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) \geq \dim_k\left({}_R\left(W_1^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ = \ &\dim_k\left({}_R(W_1 \otimes_R M, M)\right) - \dim_k\left({}_R\left(W_1^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right), \end{aligned}$$

por lo que $q_{\mathcal{A}}(M) \leq q_{\mathcal{A}_r}(M')$, y la igualdad se obtiene sólo si $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es biyectivo.

Si R es semisimple, se tienen, para cualquier $R-R$–bimódulo $\hat{W}$, las sucesiones exactas

$$0 \to \hat{W}^{(1)} \to \hat{W} \to \hat{W}^{(2)} \to 0$$
$$0 \to \hat{W}^{(1)} \otimes_R M \to \hat{W} \otimes_R M \to \hat{W}^{(2)} \otimes_R M \to 0$$
$$0 \to_R \left(\hat{W}^{(2)} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W} \otimes_R M, M\right) \to_R \left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \to 0$$

■

Lema 6. *Sea R una $k-$álgebra semisimple y sean M, N un par de $R-$módulos, entonces $(M,N)_k$ es un $R-R-$bimódulo inyectivo.*

Demostración: Sea $0 \to V \to W \to Z \to 0$ una sucesión exacta arbitraria de $R-R-$bimódulos. Por la semisimplicidad de R se tienen las sucesiones exactas
$0 \to V \otimes_R M \to W \otimes_R M \to Z \otimes_R M \to 0$ de $R-k-$bimódulos y
$0 \to_R (Z \otimes_R M, N)_k \to_R (W \otimes_R M, N)_k \to_R (V \otimes_R M, N)_k \to 0$ de grupos.
Aplicando el isomorfismo de adjunción se sigue que la sucesión

$$0 \to_R (Z,(M,N)_k)_R \to_R (W,(M,N)_k)_R \to_R (V,(M,N)_k)_R \to 0$$

también es exacta.

■

Proposición 7. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sean $0 \to W_0^{(1)} \to W_0 \to W_0^{(2)} \to 0$ y $0 \to W_1^{(1)} \to W_1 \to W_1^{(2)} \to 0$ sucesiones exactas de $R-R-$bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = W_1^{(1)}$. Supongamos que*

1. *R es semisimple o que*
2. *$W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ como $R-R-$bimódulos.*

Si $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ es el funtor regularización asociado, entonces $M \in Rep\mathcal{A}$ es isomorfo a un objeto de $\operatorname{Im} F_r$ si y sólo si es anulado por $(\ker\delta) \cap W_0^{(1)}$.

Demostración: Sea M' igual a M considerado como $R-$módulo. Si $(\ker\delta) \cap W_0^{(1)}$ anula a M, entonces podemos definir un morfismo de $R-R-$bimódulos $f_1^1 : W_1^{(1)} \to (M', M)_k$ mediante la fórmula $f^1(\delta(a))[m] = am$. Si R es semisimple, por el lema anterior, podemos extender f_1^1 a $f^1 : W_1 \to (M', M)_k$. Si $W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ extendemos f_1^1 a f^1 definiendo $f^1((w_1, w_2)) = f_1^1(w_1)$. De II.22.1 y II.25 se sigue que hay un isomorfismo $f = (Id, f^1) : M' \to M$ en $Rep\mathcal{A}$. Por construcción tenemos que si $w \in W_0^{(1)}$ entonces $wId(m) = Id(wm) + f^1(\delta(w))[m] = Id(wm) + wId(m)$, por lo tanto $wm = 0$, es decir, $W_0^{(1)}$ anula a M'. Así que, por III.4.2 M' está en $\operatorname{Im} F_r$.

Supongamos que hay un isomorfismo $(f^0, f^1) : M \to N = F_r(N')$. Por III.4.2 $W_0^{(1)}$ anula a N, y por observación II.2.1 f^0 es un isomorfismo. Sea $w \in (\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$, entonces

$$f^0(wm) = wf^0(m) - f^1(\delta(w))[m] = 0$$

implica que $(\ker \delta) \cap W_0^{(1)}$ anula a M.

■

III.2 Absorción.

Proposición 8. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs tal que $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$ y $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, entonces:*

1. *Hay un nuevo bocs $\mathcal{A}_\theta = (R', W', \delta')$, donde*

$$R' = T_R\left(W_0^{(1)}\right), \; W_0' = R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R', \; W_1' = R' \otimes_R W_1 \otimes_R R',$$

y un isomorfismo de bocses θ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_\theta$.

2. *El funtor asociado por II.11 $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$, al que en este caso llamaremos* **absorción**, *es un isomorfismo de categorías.*

3. *Sea $\hat{W}_0$ un sub-bimódulo de W_0 tal que $\hat{W}_0 = \hat{W}_0^{(1)} \oplus \hat{W}_0^{(2)}$, donde $\hat{W}_0^{(1)} \subseteq W_0^{(1)}$ y $\hat{W}_0^{(1)} \subseteq W_0^{(2)}$, y sean $M' \in Rep\mathcal{A}_\theta$ y $M = F_\theta(M')$. Entonces se cumple que $\|M'\|_{T\otimes_R \hat{W}_0^{(2)} \otimes_R T} \leq \|M\|_{\hat{W}}$, con desigualdad estricta si y sólo si ${}_R\left(\hat{W}^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$, y $q_{\mathcal{A}_1}(M') \geq q_{\mathcal{A}}(M)$.*

4. *Si $\mathcal{A}$ es triangular entonces $\mathcal{A}_\theta$ es triangular.*

5. *Si $\mathcal{A}$ es K-R entonces $\mathcal{A}_\theta$ es K-R.*

Demostración:

1. Sea $\theta_R : R \to R'$ la inclusión, el cual es un morfismo de anillos. Sean los morfismo de $R-R-$bimódulos $\theta_W^{0,1} : W_0^{(1)} \to R'$, el cual es la inclusión canónica, $\theta_W^{0,2} : W_0^{(2)} \to R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R'$, dado por $\theta_W^{0,2}(w) = 1 \otimes w \otimes 1$, y $\theta_W^1 : W_1^{(1)} \to R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'$, dado por $\theta_W^1(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Por lema II.2 estos morfismos inducen un único morfismo de anillos $\theta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$.

   Consideremos los morfismos canónicos $\vartheta_{R'} : R' \to T_R(W_0)$, de anillos, $\vartheta_{W'}^0 : R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R' \to T_R(W)$ y $\vartheta_{W'}^0 : R' \otimes_R W_1 \otimes_R R' \to T_R(W)$ de $R-R-$bimódulos. Por lema II.2 estos morfismos inducen un único morfismo de anillos $\vartheta : T_{R'}(W') \to T_{A(\mathcal{A})}(A(\mathcal{A}) \otimes_R W_0 \otimes_R A(\mathcal{A})) = \mathcal{F}$.

   Es un cálculo rutinario verificar que $\vartheta\theta_{|R} = Id_R$, que $\vartheta\theta_{|W_0}$ es la inclusión canónica de W_0 en $\mathcal{F}$, y que para $w \in W_1$ se tiene $\vartheta\theta(w) = 1 \otimes w \otimes 1$. Luego $\vartheta\theta = \nu : T_R(W) \to \mathcal{F}$ es el isomorfismo de anillos construido en el lema II.4.2, así que θ es inyectivo.

   Tampoco es difícil convencerse de que θ es suprayectivo y que preserva la graduación, es decir que

$$\theta([T_R(W)]_i) = [T_{R'}(W')]_i.$$

   Definamos $\delta' = \theta\delta\theta^{-1}$, así que δ' es un morfismo de $R-R-$bimódulos. Es claro que δ' es de grado 1, que cumple la regla de Leibnitz, y que $(\delta')^2 = 0$.

   Mostremos ahora que δ' es un morfismo de $R'-R'-$bimódulos. Sea $z = \theta(\otimes_{i=1}^n w_i)$ la imagen de un elemento homogéneo de $T_R(W)$, sean $n_2, n_1 \in \{1, ..., n\}$ tales que $n_2 > n_1$, y $w_i \in W_0^{(1)}$ para $i \in \{1, ..., n_1\} \cup \{n_2, ..., n\}$. Puesto que $\delta(w_i) = 0$ y $gr(w_i) = 0$ para $i \in \{1, ..., n_1\} \cup \{n_2, ..., n\}$, por la fórmula de la observación II.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \delta'\theta(\otimes_{i=1}^n w_i) \\
= \; & \theta\delta(\otimes_{i=1}^n w_i) \\
= \; & \theta\left(\sum_{j=1}^n \left((-1)^{\left(\sum_{l=1}^{j-1} gr(w_l)\right)} \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\sum_{j=(n_1+1)}^{n_2-1} \left((-1)^{\left(\sum_{l=(n_1+1)}^{j-1} gr(w_l)\right)} \left(\otimes_{l=1}^{j-1} w_l\right) \otimes_R \delta(w_j) \otimes_R \left(\otimes_{t=j+1}^n w_t\right)\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \delta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \left(\otimes_{n_2}^n w_t\right)\right) \\
= \; & \theta\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \theta\delta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \theta\left(\otimes_{n_2}^n w_t\right) \\
= \; & \theta\left(\otimes_{l=1}^{n_1} w_l\right) \otimes_R \delta'\theta\left(\otimes_{i=(n_1+1)}^{n_2-1} w_i\right) \otimes_R \theta\left(\otimes_{n_2}^n w_t\right),
\end{aligned}$$

por lo que δ' es un morfismo de $R' - R'$–bimódulos, luego es una diferencial.

Puesto que θ es un isomorfismo de k–álgebras que preserva la graduación y conmuta con las diferenciales, es un isomorfismo de bocses.

2. Por II.11 existen los encajes $F_\theta : RepA_\theta \to RepA$ y $F_{\theta^{-1}} : RepA \to RepA_\theta$. Es inmediato que $F_{\theta^{-1}} = F_\theta^{-1}$.

3. Sean Z un $R - R$–bimódulo y $M \in RepA$. Notemos que R es un subanillo de R', y que $\theta_{|R} = Id_R$, por lo que ${}_R\left(F_\theta^{-1}(M)\right) = {}_R(M)$, así que tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} {}_{R'}\left(R' \otimes_R Z \otimes_R R' \otimes_{R'} F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right) &\cong {}_R\left(Z \otimes_R F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right) \\ &= {}_R(Z \otimes_R M, M). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|F_\theta^{-1}(M)\|_{R'\otimes_R \hat{W}^{(2)}\otimes_R R'} &= \dim_k\left({}_{R'}\left(R' \otimes_R \hat{W}_0^{(2)} \otimes_R R' \otimes_{R'} F_\theta^{-1}(M), F_\theta^{-1}(M)\right)\right) \\ &= \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}_0^{(2)} \otimes_R M, M\right)\right) \\ &= \|M\|_{\hat{W}} - \dim_k\left({}_R\left(\hat{W}_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right), \end{aligned}$$

por lo que $\|F_\theta^{-1}(M)\|_{R'\otimes_R \hat{W}_0^{(2)}\otimes_R R'} \leq \|M\|_{\hat{W}_0}$, y la desigualdad estricta se obtiene si y sólo si ${}_R\left(\hat{W}_0^{(1)} \otimes_R M, M\right) \neq 0$.

Sea $\phi : W_0^{(1)} \otimes_R M \to M$ el R–morfismo determinado por la estructura de R'-–módulo de $F_\theta^{-1}(M) = M'$. Se tiene una función k–lineal

$$\alpha : {}_R(M, M) \to {}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right) \text{ definida como } \alpha(f) = f\phi - \phi(I \otimes f).$$

Como el núcleo de α es ${}_{R'}(M', M')$ se sigue que

$$\dim_k({}_R(M, M)) \leq \dim_k({}_{R'}(M', M')) + \dim_k\left({}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right)$$

y por lo tanto que

$q_{A_\theta}(M') - q_A(M)$

$= \dim_k({}_{R'}(M', M')) + \dim_k\left({}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R M, M\right)\right) - \dim_k({}_R(M, M)) \geq 0.$

4. Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es triangular, y sean $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq ... \subseteq W_0^r = W_0$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ las filtraciones asociadas. Sea $\pi_0 : W_0 \to W_0^{(2)}$ el epimorfismo canónico, y sean $(W')_0^i = \langle \theta(\pi_0(W_0^i)) \rangle_{R'}$, para $i \in \{0, ..., r\}$, y $(W')_1^j = \langle \theta(W_1^j) \rangle_{R'}$ para $j \in \{0, ..., s\}$. Entonces tenemos las filtraciones:

$$0 = (W')_0^0 \subseteq (W')_0^1 \subseteq ... \subseteq (W')_0^r = R' \otimes_R W_0^{(2)} \otimes_R R',$$
$$0 = (W')_1^0 \subseteq (W')_1^1 \subseteq ... \subseteq (W')_1^s = R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'.$$

La R'-subálgebra de $A(\mathcal{A}_\theta)$ generada por $(W')_0^i$ será denotada por A'_{i+1}. Nótese que A'_{i+1} está generada por $\theta\left(W_0^{(1)} + (W_0^i)^{(2)}\right)$, por lo que contiene a la subálgebra generada por $\theta(W_0^i)$. Sea A_i la R-subálgebra de $A(\mathcal{A})$ generada por W_0^i, entonces tenemos que $\langle \theta(A_i) \rangle_{R'} \subseteq A'_i$. Por fin, podemos verificar las propiedades de las nuevas filtraciones:

- $\delta'\left((W')_0^i\right) = \left\langle \delta'\theta\left((W_0^i)^{(2)}\right)\right\rangle_{R'} = \left\langle \theta\delta\left((W_0^i)^{(2)}\right)\right\rangle$
  $\subseteq \langle \theta(A_{i-1}\hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{i-1}) \rangle_{R'} \subseteq \langle A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} W_1 \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1} \rangle_{R'}$
  $= A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} (R' \otimes_R W_1 \otimes_R R') \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1} = A'_{i-1} \hat{\otimes}_{R'} W'_1 \hat{\otimes}_{R'} A'_{i-1}$.
- Denotemos por $W'(j)$ al $A(\mathcal{A}_\theta) - A(\mathcal{A}_\theta)$-sub-bimódulo generado por $(W')_1^j$. Luego
  $\delta'\left((W')_1^j\right) = \langle \delta'\theta(W_1^j) \rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})} \hat{\otimes}_R \langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\right\rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right) \hat{\otimes}_{R'} \theta\left(\langle W_1^{j-1} \rangle_{A(\mathcal{A})}\right)\right\rangle_{R'}$
  $\subseteq \left\langle (W')_1^{j-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A}_\theta)} \hat{\otimes}_{R'} \left\langle (W')_1^{j-1} \right\rangle_{A(\mathcal{A}_\theta)}$.

5. Sea $F_0 : R' - Mod \to R - Mod$ el funtor restricción inducido por $\theta_{|R} : R \to R'$. Sean $M, N \in R' - Mod$ y consideremos las funciones $f_0 \in_{R'} (M, N)$ y $f_1 \in Hom_{R'-R'}(W'_1, (M, N)_k)$. Como antes hay un isomorfismo

$$Hom_{R'-R'}(R' \otimes_R W_1 \otimes_R R', (M, N)_k) \cong Hom_{R-R}(W_1, (F_0(M), F_0(M))_k).$$

Si $g_0 = F_0(f_0)$, y g_1 es la imagen de f_1 bajo el isomorfismo anterior, entonces no es difícil verificar que $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$ es una función inyectiva y que (F_0, η_F) enmarcan a F_θ. Es claro que si f_0 es un isomorfismo entonces g_0 es un isomorfismo. La condición II.30.5 se sigue de $\operatorname{Im} F_\theta = Rep\mathcal{A}$. La condición II.30.4 se obtiene de la existencia de F_θ^{-1}. Luego, por II.30, si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R entonces $\mathcal{A}_\theta$ es un bocs K-R.

$\blacksquare$

III.3 Construcción del bocs $\mathcal{A}^X$ y del funtor reducción $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$

Definición 9. *Sean R y S $k-$álgebras. El módulo ${}_RX$ es llamado $S-$admisible si*

1. $\Gamma = ({}_R(X,X))^{op}$ *contiene a S como una subálgebra;*
2. Γ *contiene un ideal bilátero B tal que*

$$\Gamma = S \oplus B$$

   como $S-S-$bimódulos; y

3. X_S *y* B_S *son proyectivos y finitamente generados.*

Recordemos que si B_S es proyectivo y finitamente generado, por el corolario I.12, hay un morfismo de $S-S-$bimódulos μ coasociativo, es decir que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B^* & \xrightarrow{\mu} & B^* \otimes_S B^* \\ \downarrow^{\mu} & & \downarrow^{\mu\otimes 1} \\ B^* \otimes_S B^* & \xrightarrow{I\otimes\mu} & B^* \otimes_S B^* \otimes_S B^* \end{array}$$

En los siguientes lemas estaremos considerando un módulo ${}_RX$ que sea $S-$admisible. Consideremos la evaluación $v : X \otimes_S B \to X$, dada por $v(x\otimes\rho) = \rho(x)$, la cual es un morfismo de $R-S-$bimódulos. Por lema I.9, como en la observación I.1, v induce el morfismo de $S-R-$bimódulos $a = \phi_2^{-1}v^* : X^* \longrightarrow B^* \otimes_S X^*$, tal que $a(\lambda) = \sum_i \gamma_i \otimes \lambda_i$ es el único elemento de $B^* \otimes_S X^*$ que satisface $\sum_i \gamma_i(\lambda_i(x)\rho) = \lambda(\rho(x))$, para todo $x \in X$ y toda $\rho \in B$.

Lema 10. $(\mu \otimes I)\, a = (I \otimes a)\, a$.

Demostración: El siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_S B \otimes_S B & \xrightarrow{I\otimes m} & X \otimes_S B \\ \downarrow^{v\otimes I} & & \downarrow^{v} \\ X \otimes_S B & \xrightarrow{v} & X \end{array}$$

pues $v\,(I\otimes m)\,(x\otimes\rho_1\otimes\rho_2)=v\,(x\otimes(\rho_2\cdot\rho_1))=\rho_2\cdot\rho_1\,(x)$ y
$v\,(v\otimes I)\,(x\otimes\rho_1\otimes\rho_2)=v\,(\rho_1\,(x)\otimes\rho_2)=\rho_2\,(\rho_1\,(x))$. Así que por I.11 también el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a"] & B^*\otimes_S X^* \arrow[d, "\mu\otimes I"] \\
B^*\otimes_S X^* \arrow[r, "I\otimes a"'] & B^*\otimes_S B^*\otimes_S X^*
\end{tikzcd}$$

■

Consideremos nuevamente a la evaluación, pero ahora vista como el morfismo $R-S-$bimódulos $v':X\to(B,X)_S$ dado por $v'(x)\,[\rho]=\rho\,(x)$. Por el lema I.5 hay un isomorfismo de bimódulos $\Phi_2^{-1}:(B,X)_S\to X\otimes_S B^*$, por lo que se induce un morfismo $\hat{e}:X\to X\otimes_S B^*$ tal que $\hat{e}\,(x)=\sum_t x_t\otimes\gamma_t$ es el único elemento de $X\otimes_S B^*$ que satisface $\sum_t x_t\gamma_t\,(\rho)=\rho\,(x)$ para toda ρ en B.

Lema 11. $(\hat{e}\otimes I)\,\hat{e}=(I\otimes\mu)\,\hat{e}$.

Demostración: Sean los isomorfismos naturales de bimódulos $\Phi:((B,X)_S)\otimes_S B^*\to(B,(B,X)_S)_S$, $\Phi_2:X\otimes_S B^*\to(B,X)_S$, $\Phi_3:X\otimes_S(B\otimes_S B)^*\to(B\otimes_S B,X)_S$ y $\phi_2:B^*\otimes_S B^*\to(B\otimes_S B)^*$ construidos en I.5 y I.9.

Por naturalidad de los isomorfismos considerados conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\hat{e}"] \arrow[d, equal] & X\otimes_S B^* \arrow[r, "I\otimes\mu"] \arrow[d, equal] & X\otimes_S B^*\otimes_S B^* \\
X \arrow[r, "\hat{e}"] \arrow[d, equal] & X\otimes_S B^* \arrow[r, "I\otimes m^*"] & X\otimes_S(B\otimes_S B)^* \arrow[u, "I\otimes\phi_2^{-1}"'] \\
X \arrow[r, "v'"] & (B,X)_S \arrow[r, "(m,I)"] \arrow[u, "\Phi_2^{-1}"'] & (B\otimes_S B,X)_S. \arrow[u, "\Phi_3^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Si $\tau:(B,(B,X)_S)_S\to(B\otimes_S B,X)_S$ es el isomorfismo de adjunción, entonces, para $u\in(B,X)_S$ tenemos que $\tau\,((I,v')\,(u))\,(\rho_1\otimes\rho_2)=[((I,v')\,(u))\,(\rho_1)]\,[\rho_2]=\rho_2\,(u\,(\rho_1))$.

Por otra parte, $((m,I)\,(u))\,(\rho_1\otimes\rho_2)=u\,(\rho_2\cdot\rho_1)$. Luego, si $u=v'(x)$ tenemos que $\rho_2\,(u\,(\rho_1))=\rho_2\,(\rho_1\,(x))=u\,(\rho_2\cdot\rho_1)$ así que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} v' \arrow[r, "(m,I)"] \arrow[d, "(I,v')"] & (B\otimes_S B,X)_S \arrow[d, equal] \\
(B,(B,X)_S)_S \arrow[r, "\tau"] & (B\otimes_S B,X)_S
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.
Por naturalidad, también el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
(B,X)_S \arrow[r, "{(I,v')}"] \arrow[d, "\Phi_2^{-1}"] & (B,(B,X)_S)_S \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
X \otimes_S B^* \arrow[r, "v' \otimes I"] \arrow[d, equal] & (B,X)_S \otimes_S B^* \arrow[d, "\Phi_2^{-1} \otimes I"] \\
X \otimes_S B^* \arrow[r, "\hat{e} \otimes I"] & X \otimes_S B^* \otimes_S B^*.
\end{tikzcd}
$$

A su vez, la conmutatividad de

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes_S B^* \otimes_S B^* \arrow[r, "\Phi_2 \otimes I"] \arrow[d, "I \otimes \phi_2"] & (B,X)_S \otimes_S B^* \arrow[d, "\Phi"] \\
X \otimes_S (B \otimes_S B)^* \arrow[d, "\Phi_3"] & (B,(B,X)_S)_S \arrow[d, equal] \\
(B \otimes_S B, X)_S & (B,(B,X)_S)_S \arrow[l, "\tau"']
\end{tikzcd}
$$

se sigue de que

$$
\begin{aligned}
\tau\left(\Phi \cdot (\Phi_2 \otimes I)(x \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_2)\right)[\rho_1 \otimes \rho_2] &= \tau\left(\Phi \cdot (x\gamma_1(\_) \otimes \gamma_2)\right)[\rho_1 \otimes \rho_2] \\
&= \tau\left((x\gamma_1(\_))\,\gamma_2(\_)\right)[\rho_1 \otimes \rho_2] \\
&= x\gamma_1\left(\gamma_2(\rho_1)\,\rho_2\right),
\end{aligned}
$$

y de que

$$
\begin{aligned}
(\Phi_3 \cdot (I \otimes \phi_2))(x \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_2)[\rho_1 \otimes \rho_2] &= \Phi_3\left(x \otimes \gamma_1(\gamma_2(\_)\,\_)\right)[\rho_1 \otimes \rho_2] \\
&= x\gamma_1\left(\gamma_2(\rho_1)\,\rho_2\right).
\end{aligned}
$$

Por fin podemos ver que

$$
\begin{aligned}
(I \otimes \mu)\,\hat{e} &= \left(I \otimes \phi_2^{-1}\right) \cdot \Phi_3^{-1} \cdot (m, I) \cdot v' \\
&= \left(I \otimes \phi_2^{-1}\right) \cdot \Phi_3^{-1} \cdot \tau \cdot (I, v') \cdot v' \\
&= \left(\Phi_2^{-1} \otimes I\right) \cdot \Phi^{-1} \cdot (I, v') \cdot v' = (\hat{e} \otimes I) \cdot \Phi_2^{-1} \cdot v' \\
&= (\hat{e} \otimes I)\,\hat{e}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 12. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Sea $\hat{e}: X \to X \otimes_S B^*$ el morfismo de $S-R-$bimódulos inducido por la evaluación $v': X \to (B,X)_S$ dada por $v'(x)[\rho] = \rho(x)$. Sea $a: X^* \longrightarrow B^* \otimes_S X^*$ el morfismo de $S-R-$bimódulos inducido por la evaluación $v: X \otimes_S B \to X$, dada por $v(x \otimes \rho) = \rho(x)$. Sean $\{\rho_j, \gamma_j \mid j \in J\}$ y $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ bases duales finitas de B_S y X_S respectivamente. Entonces:*

1. *Si $e = -\hat{e}$ y $x \in X$, entonces*

$$e(x) = -\sum \rho_j(x) \otimes \gamma_j.$$

2. *Si $\lambda \in X^*$ tenemos que:*

$$a(\lambda) = \sum_{i,j} \lambda(\rho_j(x_i)) \gamma_j \otimes \lambda_i.$$

Demostración: Para probar el primer inciso recordemos que por la fórmula del lema I.5.2

$$\hat{e}(x) = \Phi_2^{-1}(v'(x)) = \sum v'(x)[\rho_j] \otimes \gamma_j = \sum \rho_j(x) \otimes \gamma_j.$$

Resolvamos ahora el segundo inciso. Si $\lambda \in X^*$ entonces

$$v^*(\lambda)[x \otimes \rho] = \lambda(v(x \otimes \rho)) = \lambda(\rho(x)),$$

así que, por fórmula I.9.2, se sigue que

$$a(\lambda) = \phi_2^{-1}(v^*(\lambda)) = \sum_i \lambda(\_(x_i)) \otimes \lambda_i.$$

Puesto que para $\gamma \in B^*$ se cumple $\sum_j \gamma(\rho_j)\gamma_j = \gamma$, tenemos que:

$$a(\lambda) = \sum_{i,j} \lambda(\rho_j(x_i)) \gamma_j \otimes \lambda_i.$$

■

Definición 13. *Sean R y S anillos, W un $R-R-$bimódulo y X un $R-S-$bimódulo, tal que X_S es proyectivo y finitamente generado. Por I.5.2, $\Phi_2: X \otimes_S X^* \to (X,X)_S$ es un isomorfismo de bimódulos, por lo que si $\Phi_2^{-1}(Id_X) = \sum_i x_i \otimes \lambda_i$, entonces $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ es una base dual de X_S. Como $Id_X \in_R (X,X)_S$ se cumple por I.5.1 que $\sum_i x_i \otimes \lambda_i \in (X \otimes_S X^*)^R$. Podemos definir entonces el morfismo de $S-S-$bimódulos*

$$\alpha: X^* \otimes_R T_R(W) \otimes_R X \to T_S(X^* \otimes_R W \otimes_R X)$$

en elementos homogéneos como $\alpha(\lambda \otimes r \otimes x) = \lambda(rx)$ *y*
$\alpha(\lambda \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes x)$
$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{(n-1)}} \lambda \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \lambda_{i_1} \otimes w_2 \otimes x_{i_2} \otimes \lambda_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_{(n-1)}} \otimes \lambda_{i_{(n-1)}} \otimes w_n \otimes x.$
Por comodidad, para $w \in T_R(W)$, *denotaremos* $\alpha(\lambda \otimes w \otimes x)$ *como* $\alpha_{\lambda,x}(w)$. *Notemos que*

$$\alpha_{\lambda,x}(w \otimes w') = \sum_i \alpha_{\lambda,x_i}(w) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(w'),$$

para $w, w' \in T_R(W)$, $\lambda \in X^*$ *y* $x \in X$. *De ello se sigue que* $gr(w) = gr(\alpha_{\lambda,x}(w))$, *para* $w \in T_R(W)$.

Proposición 14. *Sea* $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ *un bocs. Sea* ${}_RX$ *un módulo* S*–admisible. Entonces* $\mathcal{A}^X = (S, W_0^X \oplus W_1^X, \delta^X)$ *es un bocs, donde* $W_0^X = X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X$, $W_1^X = B^* \oplus (X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X)$, *y donde* δ^X *se obtiene de extender mediante la regla de Leibnitz su definición en* $W^X = B^* \oplus (X^* \otimes_R W \otimes_R X)$:
$\delta^X(\lambda \otimes w \otimes x) = a(\lambda) \otimes w \otimes x + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes e(x)$, *y*
$\delta^X(\gamma) = \mu(\gamma)$, *si* $\gamma \in B^*$.

En particular, si $t \in T_R(W)$ *es un elemento homogéneo,* $\lambda \in X^*$ *y* $x \in X$ *se cumple que*

$$\delta^X(\alpha_{\lambda,x}(t)) = (a \otimes I)(\alpha_{\lambda,x}(t)) + \alpha_{\lambda,x}(\delta(t)) + (-1)^{gr(t)}(I \otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(t)).$$

Demostración: Teniendo en mente el lema II.4, se deriva que $\delta^X(W_0^X) \subseteq [T_S(W^X)]_1$ y $\delta^X(W_1^X) \subseteq [T_S(W^X)]_2$, así que por II.6 podemos extender δ^X mediante la regla de Leibnitz. Por observación II.1 basta con ver que $(\delta^X)^2(W^X) = 0$ para probar que δ^X al cuadrado es cero. Recordemos que $(\mu \otimes I)a = (I \otimes a)a$ y que $(e \otimes I)e = -(I \otimes \mu)e$.

Sea $\gamma \otimes \lambda \otimes w \otimes x$ un elemento de $B^* \otimes_S X^* \otimes_R W \otimes_R X$, donde $\gamma \in B^*$, $\lambda \in X^*$, $w \in W$ y $x \in X$. Por la fórmula de la observación II.1, y por el hecho de que γ es de grado 1 en $T_S(W^X)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X(\gamma \otimes \lambda \otimes w \otimes x) \\
= \; & \delta^X(\gamma) \otimes \lambda \otimes w \otimes x - \gamma \otimes \delta^X(\lambda \otimes w \otimes x) \\
= \; & \mu(\gamma) \otimes \lambda \otimes w \otimes x - \gamma \otimes (a(\lambda) \otimes w \otimes x + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w))) \\
& -\gamma \otimes \left((-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes e(x)\right) \\
= \; & (\mu(\gamma) \otimes \lambda - \gamma \otimes a(\lambda)) \otimes w \otimes x - \gamma \otimes \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) \\
& + (-1)^{gr(w)+1} \gamma \otimes \lambda \otimes w \otimes e(x).
\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda \in X^*$, $w \in W$, $x \in X$, $I_1 = Id_{X^*}$, e $I_2 = Id_{B^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X (a(\lambda) \otimes w \otimes x) \\
= \; & ((\mu \otimes I_1 - I_2 \otimes a) a(\lambda)) \otimes w \otimes x \\
& - (I_2 \otimes \alpha)(a(\lambda) \otimes \delta(w) \otimes x) + (-1)^{gr(w)+1} a(\lambda) \otimes w \otimes e(x) \\
= \; & - (I_2 \otimes \alpha)(a(\lambda) \otimes \delta(w) \otimes x) + (-1)^{gr(w)+1} (a(\lambda) \otimes w \otimes e(x))
\end{aligned}$$

Sea ahora $\lambda \otimes w \otimes x \otimes \gamma$ un elemento de $X^* \otimes_R W \otimes_R X \otimes_S B^*$, donde $\gamma \in B^*$, $\lambda \in X^*$, $w \in W$ y $x \in X$. Por la fórmula de la observación II.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X (\lambda \otimes w \otimes x \otimes \gamma) \\
= \; & \delta^X (\lambda \otimes w \otimes x) \otimes \gamma + (-1)^{gr(\lambda \otimes w \otimes x)} \lambda \otimes w \otimes x \otimes \delta^X (\gamma) \\
= \; & \left(a(\lambda) \otimes w \otimes x + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes e(x)\right) \otimes \gamma \\
& + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes x \otimes \mu(\gamma) \\
= \; & a(\lambda) \otimes w \otimes x \otimes \gamma + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) \otimes \gamma \\
& + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes (e(x) \otimes \gamma + x \otimes \mu(\gamma)).
\end{aligned}$$

Luego, si $\lambda \in X^*$, $w \in W$, $x \in X$, $I_1 = Id_{X^*}$, e $I_2 = Id_{B^*}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^X (\lambda \otimes w \otimes e(x)) \\
= \; & a(\lambda) \otimes w \otimes e(x) + (\alpha \otimes I_2)(\lambda \otimes \delta(w) \otimes e(x)) \\
& + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes (e \otimes I_2 + I_1 \otimes \mu) e(x) \\
= \; & a(\lambda) \otimes w \otimes e(x) + (\alpha \otimes I_2)(\lambda \otimes \delta(w) \otimes e(x)).
\end{aligned}$$

Recordemos que $\sum_i x_i \otimes \lambda_i$ es la imagen de Id_X bajo el isomorfismo $X \otimes_S X^* \cong (X,X)_S$ del lema I.5.2, y así $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ es una base dual de X_S. Sean $I' = Id_X$ e $I'' = Id_{X^*}$. Usando las fórmulas III.12.1 y III 12.2 se sigue que

$$\begin{aligned}
(I' \otimes a)\left(\textstyle\sum_h x_h \otimes \lambda_h\right) &= \textstyle\sum_{i,j,h} x_h \otimes \lambda_h \left(\rho_j(x_i)\right) \gamma_j \otimes \lambda_i \\
&= \textstyle\sum_{i,j,h} x_h \lambda_h \left(\rho_j(x_i)\right) \otimes \gamma_j \otimes \lambda_i \\
&= \textstyle\sum_{i,j} \rho_j(x_i) \otimes \gamma_j \otimes \lambda_i \\
&= -(e \otimes I'')\left(\textstyle\sum_i x_i \otimes \lambda_i\right)
\end{aligned} \qquad (*)$$

Usemos esta identidad para demostrar que

$$\delta^X (\alpha_{\lambda,x}(t)) = (a \otimes I)(\alpha_{\lambda,x}(t)) + \alpha_{\lambda,x}(\delta(t)) + (-1)^{gr(w)} (I \otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(t)),$$

donde $t = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$ es un elemento homogéneo de $W^{\otimes n}$, $\lambda \in X^*$ y $x \in X$. Hagamos la prueba por inducción sobre n.

Para $n=1$ el resultado se sigue por definición de δ^{X}.

Supongamos cierto el resultado para un $n-1$ dado, y sea $t = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n-1} \otimes w_n = t' \otimes w_n$. En tal caso tenemos que

$$\begin{aligned}
& \delta^{X}\left(\alpha_{\lambda,x}\left(t' \otimes w_n\right)\right) \\
= \; & \delta^{X}\left(\textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right) \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left(\delta^{X}\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \delta^{X}\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right)\right] \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left((a\otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[(I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \delta^{X}\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right)\right] \\
= \; & \textstyle\sum_i \left[\left((a\otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right)\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[(I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) \otimes \lambda_i \otimes w_n \otimes x\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \left[\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes a\left(\lambda_i\right) \otimes w_n \otimes x\right] \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left[\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right) + (-1)^{gr(w_n)} \lambda_i \otimes w_n \otimes e(x)\right]
\end{aligned}$$

Por la fórmula $(*)$ y se cancelan los sumandos intermedios y obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_i \left[\left((a\otimes I)\left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right)\right) + \alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right)\right)\right] \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \textstyle\sum_i \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left[\left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right) + (-1)^{gr(w_n)} \lambda_i \otimes w_n \otimes e(x)\right] \\
= \; & (a\otimes I)\,\alpha_{\lambda,x}(t) \\
& + \textstyle\sum_i \left(\alpha_{\lambda,x_i}\left(\delta\left(t'\right)\right) \otimes \alpha_{\lambda_i,x}\left(w_n\right) + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} \alpha_{\lambda,x_i}\left(t'\right) \otimes \left(\alpha_{\lambda_i,x}\left(\delta\left(w_n\right)\right)\right)\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_n)} (I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right) \\
= \; & (a\otimes I)\,\alpha_{\lambda,x}(t) \\
& + \alpha_{\lambda,x}\left(\delta\left(t'\right) \otimes w_n + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_{n-1})} t' \otimes \delta\left(w_n\right)\right) \\
& + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_n)} (I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right)
\end{aligned}$$

Lo que por regla de Leibnitz es igual a

$$(a\otimes I)\,\alpha_{\lambda,x}(t) + \alpha_{\lambda,x}\left(\delta(t)\right) + (-1)^{gr(w_1\otimes\cdots\otimes w_n)} (I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda,x}(t)\right)$$

Podemos ver ahora que

$$\begin{aligned}
&\left(\delta^{X}\right)^{2}(\lambda\otimes w\otimes x)\\
= {}& \delta^{X}\left(a(\lambda)\otimes w\otimes x+\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+(-1)^{gr(w)}\lambda\otimes w\otimes e(x)\right)\\
= {}& -(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(-1)^{gr(w)+1}(a(\lambda)\otimes w\otimes e(x))\\
&+(a\otimes I)\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))+\alpha_{\lambda,x}(\delta(\delta(w)))+(-1)^{gr(w)+1}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))\\
&+(-1)^{gr(w)}(a(\lambda)\otimes w\otimes e(x))+(-1)^{gr(w)}(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x))\\
= {}& -(I_2\otimes\alpha)(a(\lambda)\otimes\delta(w)\otimes x)+(a\otimes I)\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\\
&+(-1)^{gr(w)+1}(I\otimes e)(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))+(-1)^{gr(w)}(\alpha\otimes I_2)(\lambda\otimes\delta(w)\otimes e(x))\\
= {}& 0
\end{aligned}$$

Con esto hemos comprobado que tenemos un nuevo bocs.

■

Construyamos ahora un funtor $F_X : Rep\ \mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$. Mantendremos la base dual $\{x_i,\lambda_i \mid i\in I\}$ de X_S fijada en III.13 y, desde ahora, fijamos también una base dual finita $\{\rho_j,\gamma_j \mid j\in J\}$ de B_S.

Definición 15. *Para $M\in Rep\ \mathcal{A}^X$, definimos $F_X(M)=X\otimes_S M$ como $R-$módulo. Recordemos que $A^X = A(\mathcal{A}^X) = T_S(X^*\otimes_R W_0\otimes_R X)$. La siguiente composición proporciona una estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo a $F_X(M)$, a la que denotaremos por $\cdot$*

$$\begin{array}{c}
A(\mathcal{A})\otimes_R X\otimes_S M\\
\downarrow{\scriptstyle\tau}\\
X\otimes_S X^*\otimes_R A(\mathcal{A})\otimes_R X\otimes_S M\\
\downarrow{\scriptstyle I\otimes\alpha\otimes I}\\
X\otimes_S A^X\otimes_S M\\
\downarrow{\scriptstyle I\otimes *}\\
X\otimes_S M
\end{array}$$

donde $\tau(a\otimes x\otimes m)=\sum_i x_i\otimes\lambda_i\otimes a\otimes x\otimes m$, y $*: A^X\otimes_S M\to M$ es la estructura de A^X-módulo de M, así que

1. $a\cdot(x\otimes m)=\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(a)*m.$

   Puesto que las funciones son aditivas y $\sum_i rx_i\otimes\lambda_i=\sum_i x_i\otimes\lambda_i r$, por I.5.1, nos basta con checar que

$$\begin{aligned}
1_R\cdot(x\otimes m) &= \textstyle\sum_i x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,x}(1_R)*m\\
&= \textstyle\sum_i x_i\otimes\lambda_i(x)*m\\
&= \textstyle\sum_i x_i\lambda_i(x)\otimes m\\
&= x\otimes m
\end{aligned}$$

   y que

$$\begin{aligned} a' \cdot (a \cdot (x \otimes m)) &= \left(a' \cdot \left(\sum_h x_h \otimes \alpha_{\lambda_j,x}(a) * m\right)\right) \\ &= \sum_{i,h} x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x_h}(a') * \left(\alpha_{\lambda_h,x}(a) * m\right) \\ &= \sum_{i,h} x_i \otimes \left(\alpha_{\lambda_i,x_h}(a') \otimes \alpha_{\lambda_h,x}(a)\right) * m \\ &= \sum_i x_i \otimes \left(\alpha_{\lambda_h,x}(a' \otimes a)\right) * m \\ &= (a' \otimes a) \cdot (x \otimes m). \end{aligned}$$

Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $RepA^X$ definimos, para $w \in V(\mathcal{A})$, $x \in X$ y $m \in M$:

2. $(F_X(f))^0 [x \otimes m] = x \otimes f^0(m) + \sum_j \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m]$ *y*
3. $(F_X(f))^1 (w)[x \otimes m] = \sum_i x_i \otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]$.

Teorema 16. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Entonces se tiene un funtor $F_X : RepA^X \to RepA$ dado por las fórmulas de III.14, III.15.1, III.15.2 y III.15.3 al cual llamaremos funtor* **reducción** *con respecto a X.*

Además, F_X está enmarcado por un par (F_0, η_F), donde $F_0 = X \otimes_S -$, y η_F está definida de la siguiente manera: si $f_0 \in_S (M, N)$, $f_1 \in Hom_{S-S}(W_1^X, (M, N)_k)$, $\eta_F((f_0, f_1)) = (g_0, g_1)$, $w \in W_1$ y $m \in M$, entonces

1. $g_0[x \otimes m] = x \otimes f_0(m) + \sum_j \rho_j(x) \otimes f_1(\gamma_j)[m]$,
2. $g_1(w)[x \otimes m] = \sum_i x_i \otimes f_1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]$.

Demostración: Sea $f = (f^0, f^1) : M \to N$ un morfismo en $RepA^X$, claramente $(F_X(f))^0$ es un morfismo de $R-$módulos. Veamos que $F_X(f)$ es un morfismo en $RepA$, así que sean $w \in V(\mathcal{A})$, $x \in X$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned} & (F_X(f))^0 [w \cdot (x \otimes m)] \\ = \ & (F_X(f))^0 \left[\sum_i x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(w) * m\right] \\ = \ & \sum_i x_i \otimes f^0(\alpha_{\lambda_i,x}(w) * m) + \sum_{i,j} \rho_j(x_i) \otimes f^1(\gamma_j)[\alpha_{\lambda_i,x}(w) * m]; \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} & w \cdot (F_X(f))^0 [x \otimes m] \\ = \ & w \cdot \left(x \otimes f^0(m) + \sum_j \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m]\right) \\ = \ & \sum_i x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(w) * f^0(m) + \sum_{i,j} x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w) * f^1(\gamma_j)[m]. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
& w\cdot\left(F_X(f)\right)^0[x\otimes m]-\left(F_X(f)\right)^0[w\cdot(x\otimes m)]\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes\left[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*f^0(m)-f^0\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m\right)\right]\\
& +\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}*f^1\left(\gamma_j\right)[m]\\
& -\textstyle\sum_{i,j}\rho_j\left(x_i\right)\otimes f^1\left(\gamma_j\right)\left[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m\right].
\end{aligned}$$

Por comodidad, sean $\sum_{i,j} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)*f^1\left(\gamma_j\right)[m]=E$ y $\sum_{i,j}\rho_j\left(x_i\right)\otimes f^1\left(\gamma_j\right)\left[\alpha_{\lambda_i,x}(w)*m\right]=H$; así que, como f es un morfismo en $RepA^X$, y w es de grado 1, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\delta^X\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)\right)[m]+E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left((a\otimes I)\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)+\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w))\right)[m]\\
& +\textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left((-1)^{gr(w)}(I\otimes e)\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)\right)[m]+E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w))\right)[m]\\
& +\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes f^1\left(\sum_h\lambda_i\left(\rho_j\left(x_h\right)\right)\gamma_j\otimes\alpha_{\lambda_h,x}(w)\right)[m]\\
& -\textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\sum_j\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\otimes\gamma_j\right)[m]\\
& +E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w))\right)[m]\\
& +\textstyle\sum_{i,j,h} x_i\lambda_i\left(\rho_j\left(x_h\right)\right)\otimes f^1\left(\gamma_j\right)\left[\alpha_{\lambda_h,x}(w)*m\right]\\
& -\textstyle\sum_{i,j} x_i\otimes\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)*f^1\left(\gamma_j\right)[m]\\
& +E-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w))\right)[m]\\
& +\textstyle\sum_{h,j}\rho_j\left(x_h\right)\otimes f^1\left(\gamma_j\right)\left[\alpha_{\lambda_h,x}(w)*m\right]-H\\
= & \textstyle\sum_i x_i\otimes f^1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(\delta(w))\right)[m],
\end{aligned}$$

con lo que se comprueba que $F_X(f)$ es un morfismo en $RepA$.

Es fácil ver que $F_X\left(\left(Id_M,0\right)\right)=\left(Id_{F_X(M)},0\right)$.

Sean $f:M\rightarrow N$, $g:N\rightarrow L$ morfismos en $RepA^X$. Verifiquemos que $F_X(gf)=F_X(g)F_X(f)$. Veamos primero que coinciden las primeras componentes; sean $x\in X$ y $m\in M$:

$$\begin{aligned}
& \left(F_X(gf)\right)^0[x\otimes m]=x\otimes(gf)^0(m)+\textstyle\sum_j\rho_j(x)\otimes(gf)^1\left(\gamma_j\right)[m]\\
& =x\otimes(gf)^0(m)+\textstyle\sum_j\rho_j(x)\otimes\left[g^0f^1(\gamma_j)[m]+g^1(\gamma_j)\left[f^0(m)\right]+\sum_h g^1(\gamma^1_{j,h})f^1(\gamma^2_{j,h})[m]\right]
\end{aligned}$$

donde $\delta(\gamma_j)=\mu\left(\gamma_j\right)=\sum_h\gamma^1_{j,h}\otimes\gamma^2_{j,h}$.

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}&(F_X(g))^0(F_X(f))^0[x\otimes m]=(F_X(g))^0\left(x\otimes f^0(m)+\textstyle\sum_j \rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m]\right)\\&=x\otimes (gf)^0(m)+\textstyle\sum \rho_j(x)\otimes g^0f^1(\gamma_j)[m]\\&+\textstyle\sum \rho_j(x)\otimes g^1(\gamma_j)[f^0(m)]\\&+\textstyle\sum_{h,j}\rho_h\rho_j(x)\otimes g^1(\gamma_h)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]\end{aligned}$$

y recordemos que $(1\otimes\mu)(-e)=(-e\otimes 1)(-e)$, luego las expresiones son iguales, por lo que en la primera componente la composición va en la composición.

Veamos que ocurre en la segunda componente; tenemos, usando la definición de composición en $RepA$, que para $w\in V(\mathcal{A})$, $x\in X$ y $m\in M$:

$$\begin{aligned}&(F_X(g)F_X(f))^1(w)[x\otimes m]\\&=(F_X(g))^0(F_X(f))^1(w)[x\otimes m]+(F_X(g))^1(w)\left[(F_X(f))^0(x\otimes m)\right]\\&+c\left((F_X(g))^1\otimes(F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x\otimes m]\end{aligned}$$

donde $c:(X\otimes_S N, X\otimes_S L)\otimes_{A(A)}(X\otimes_S M, X\otimes_S N)\to(X\otimes_S M, X\otimes_S L)$ es el morfismo composición,

$$\begin{aligned}&=(F_X(g))^0\left(\textstyle\sum x_i\otimes f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]\right)\\&+(F_X(g))^1(w)\left[x\otimes f^0(m)+\textstyle\sum\rho_j(x)\otimes f^1(\gamma_j)[m]\right]\\&+c\left((F_X(g))^1\otimes(F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x\otimes m]\\&=\textstyle\sum_i x_i\otimes g^0f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]+\textstyle\sum_{i,j}\rho_j(x_i)\otimes g^1(\gamma_j)[f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]]\\&+\textstyle\sum_i x_i\otimes g^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[f^0(m)]+\textstyle\sum_{i,j}x_i\otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right]\\&+c\left((F_X(g))^1\otimes(F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x\otimes m]\end{aligned}$$

Mientras que la segunda componente de la imagen de la composición es

$$\begin{aligned}&(F_X(gf))^1(w)[x\otimes m]=\textstyle\sum x_i\otimes(gf)^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]\\&=\textstyle\sum x_i\otimes\left(g^0f^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[m]+g^1(\alpha_{\lambda_i,x}(w))[f^0(m)]\right)\\&+\textstyle\sum x_i\otimes\left(c^X(g^1\otimes f^1)\left(\delta^X(\alpha_{\lambda_i,x}(w))\right)[m]\right),\end{aligned}$$

donde $c^X:(N,L)\otimes_{A(A^X)}(M,N)\to(M,L)$ es el morfismo composición. Usando las fórmulas III.12.1 y III.12.2 se sigue que:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum x_i\otimes\left(c^X(g^1\otimes f^1)\left(\delta^X(\alpha_{\lambda_i,x}(w))\right)[m]\right)\\&=\textstyle\sum_{i,h,l}x_i\otimes g^1\left(\lambda_i(\rho_l(x_h))\gamma_l\right)[f^1(\alpha_{\lambda_h,x}(w))[m]]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\textstyle\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right] \\
&+\textstyle\sum_{i,j,t} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,x_j}(w_t^1)\right)\left[f^1\left(\alpha_{\lambda_j,x}(w_t^2)\right)[m]\right] \\
&=\textstyle\sum_{i,h,l} x_i\lambda_i(\rho_l(x_h)) \otimes g^1(\gamma_l)\left[f^1\left(\alpha_{\lambda_h,x}(w)\right)[m]\right] \\
&+\textstyle\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right] \\
&+c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x \otimes m] \\
&=\textstyle\sum_{h,l} \rho_l(x_h) \otimes g^1(\gamma_l)\left[f^1\left(\alpha_{\lambda_h,x}(w)\right)[m]\right] \\
&+\textstyle\sum_{i,j} x_i \otimes g^1\left(\left(\alpha_{\lambda_i,\rho_j(x)}\right)(w)\right)\left[f^1(\gamma_j)[m]\right] \\
&+c\left((F_X(g))^1 \otimes (F_X(f))^1\right)(\delta(w))[x \otimes m],
\end{aligned}
$$

donde $\delta(w) = \sum_t w_t^1 \otimes w_t^2$, pues $\sum_i x_i\lambda_i = Id_X$, comprobándose por ello la identidad.

Por construcción de F_X este funtor estará enmarcado por (F_0, η_F) si y sólo si η_F es una transformación natural.

Sean $M, N, M', N' \in S - Mod$, $u : M' \to M$ y $v : N \to N'$ S–morfismos y $I \otimes u : X \otimes_S M' \to X \otimes_S M$, $I \otimes v : X \otimes_S N \to X \otimes_S N'$ los R–morfismos inducidos.

Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccc}
\tau_{A^X}(M,N) & \overset{\eta_F}{\longrightarrow} & \tau_A(X \otimes_S M, X \otimes_S N) \\
\downarrow^{(u^*,(u^*)_*)} & & \downarrow^{((I\otimes u)^*,((I\otimes u)^*)_*)} \\
\tau_{A^X}(M',N) & \overset{\eta_F}{\longrightarrow} & \tau_A(X \otimes_S M', X \otimes_S N).
\end{array}
$$

Para verificar esto sea $(f_0, f_1) \in \tau_{A^X}(M,N) = Hom_S(M,N) \times Hom_{S-S}(W_1, (M,N)_k)$. Tenemos que

$$
\eta_F(u^*, (u^*)_*)[(f_0, f_1)] \;=\; \eta_F[(f_0u, u^*f_1)] \;=\; (h_0, h_1)
$$

está dada, para $w \in W_1$, $x \in X$ y $m' \in M'$ por

$$
\begin{aligned}
h_0(x \otimes m') &= x \otimes f_0u(m') + \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes u^*\left(f_1(\gamma_j)\right)[m'] \\
&= x \otimes f_0u(m') + \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes f_1(\gamma_j)[u(m')]
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{array}{rcl} h_1(w)[x\otimes m'] & = & \sum_i x_i \otimes u^*\left(f_1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)\right)[m'] \\ & = & \sum_i x_i \otimes f_1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)[u(m')]. \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rcl} \left((I\otimes u)^*, ((I\otimes u)^*)_*\right)\eta_F\left[(f_0,f_1)\right] & = & \left((I\otimes u)^*, ((I\otimes u)^*)_*\right)[g_0,g_1] \\ & = & \left(g_0(I\otimes u), (I\otimes u)^* g_1\right), \end{array}$$

y tenemos, para $w\in W_1$, $x\in X$ y $m'\in M'$, que

$$\begin{array}{rcl} g_0(I\otimes u)[x\otimes m'] & = & g_0[x\otimes u(m')] \\ & = & x\otimes f_0(m') + \sum_j \rho_j(x)\otimes f_1\left(\gamma_j\right)[u(m')] \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \left((I\otimes u)^* g_1\right)(w)[x\otimes m'] & = & g_1(w)(I\otimes u)[x\otimes m'] \\ & = & \sum_i x_i\otimes f_1\left(\alpha_{\lambda_i,x}(w)\right)[u(m')]. \end{array}$$

Luego $\eta_F\left(u^*, (u^*)_*\right) = \left((I\otimes u)^*, ((I\otimes u)^*)_*\right)\eta_F$.
Similarmente probamos la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \tau_{A^X}(M,N) & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X\otimes_S M, X\otimes_S N) \\ \downarrow^{(v_*,(v_*)^*)} & & \downarrow^{\left((I\otimes v)_*,\left((I\otimes v)_*\right)^*\right)} \\ \tau_{A^X}(M,N') & \xrightarrow{\eta_F} & \tau_A(X\otimes_S M, X\otimes_S N'). \end{array}$$

■

Lema 17. *Sean $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs, ${}_RX$ un módulo $S-$admisible y $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor reducción asociado. Entonces:*

1. *Si $M_0' \in S-Mod$ es tal que $X \otimes_S M_0'$ admite una estructura de $T_R(W_0)-$módulo, módulo al que llamaremos M, entonces M_0' admite una única estructura de $T_S(W_0^X)-$módulo, lo que denotaremos por M', tal que $F_X(M') = M$.*

   Sean $\upsilon : X^* \otimes_R X \to S$ la evaluación, y $\sigma : S \otimes_S M_0' \to M_0'$ el isomorfismo canónico, entonces la estructura $*$ de M' está determinada por la estructura $\cdot$ de M por la fórmula:

   $$(\lambda \otimes w \otimes x) * m = \sigma(\upsilon \otimes Id)(\lambda \otimes w \cdot (x \otimes m))$$

   para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $m \in M_0'$.

2. *Sea $F_0 = X \otimes_R - : S - Mod \to R - Mod$. Entonces $\operatorname{Im} F_X$ es la subcategoría plena de $RepA$ cuyos objetos, como $R-$módulos, están en $\operatorname{Im} F_0$.*

3. *Sean $N, N' \in Rep\mathcal{A}^X$. Si $F_X(N) = F_X(N')$ como $A(\mathcal{A})-$módulos y $N = N'$ como $S-$módulos, entonces $N = N'$ como $A(\mathcal{A}^X)-$módulos.*

Demostración: Sea M_0' como en el primer inciso. Puesto que υ es un $S-S-$morfismo y σ es un $S-$morfismo, $* : W_0^X \otimes_S M_0' = X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X \otimes_S M_0' \to M_0'$ es un $S-$morfismo. Sea $*'$ la imagen de $*$ bajo el isomorfismo

$$_S\left(W_0^X \otimes_S M_0', M_0'\right) \cong Hom_{S-S}\left(W_0^X, (M_0', M_0')_k\right).$$

Por lema II.2, hay un único morfismo de anillos

$$*' : A\left(\mathcal{A}^X\right) = T_S\left(W_0^X\right) \to (M_0', M_0')_k,$$

al que por el isomorfismo

$$Hom_{S-S}\left(A\left(\mathcal{A}^X\right), (M_0', M_0')_k\right) \cong_S \left(A\left(\mathcal{A}^X\right) \otimes_S M_0', M_0'\right)$$

le corresponde un único $S-$morfismo $*$, es decir una estructura de $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo sobre M_0'. Denotemos por M' tal $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo.

Para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $m \in M_0'$ tenemos, si $\cdot'$ denota la estructura de $A(\mathcal{A})-$módulo de $F_X(M')$, es decir la inducida por el funtor, y $w \cdot (x \otimes m) = \sum_h x_h \otimes m_h$ es la estructura original de M, que

$$\begin{array}{rcl} w \cdot' (x \otimes m) & = & \sum_i x_i \otimes (\lambda_i \otimes w \otimes x) * m \\ & = & \sum_i x_i \otimes \sigma (v \otimes Id) (\lambda_i \otimes w \cdot (x \otimes m)) \\ & = & \sum_{i,h} x_i \otimes \lambda_i (x_h) m_h \\ & = & \sum_{i,h} x_i \lambda_i (x_h) \otimes m_h \\ & = & \sum_h x_h \otimes m_h \end{array}$$

por lo que $F_X(M') = M$. Es decir que cada objeto de $Rep\mathcal{A}$ que como $R-$módulo está en $\operatorname{Im} F_0$ pertenece a $\operatorname{Im} F_X$.

Supongamos ahora que $N \in Rep\mathcal{A}^X$ y que $*$ es su estructura como $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo. Sea $*'$ la estructura como $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo inducida por $F_X(N) = M$ en ${}_SN$, y denotemos a este objeto de $Rep\mathcal{A}^X$ como N'. Tenemos, para $\lambda \in X^*$, $w \in W_0$, $x \in X$ y $n \in N$, que

$$\begin{array}{rcl} (\lambda \otimes w \otimes x) *' n & = & \sigma (v \otimes Id) (\lambda \otimes w \cdot (x \otimes n)) \\ & = & \sigma (v \otimes Id) (\lambda \otimes (\sum_i x_i \otimes (\lambda_i \otimes w \otimes x) * n)) \\ & = & (\sum_i \lambda (x_i) \lambda_i \otimes w \otimes x) * n \\ & = & (\lambda \otimes w \otimes x) * n. \end{array}$$

Es decir que $N = N'$. Esto prueba que hay una única estructura de $A\left(\mathcal{A}^X\right)-$módulo sobre ${}_SN$ tal que su imagen bajo F_X es M. Otra forma de expresar esto es el enunciado del tercer inciso.

■

Corolario 18. *La categoría $R-Mod$ es claramente isomorfa a $Rep\mathcal{C}$ para el bocs $\mathcal{C} = (R, 0, 0)$. Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible. Entonces hay un bocs*

$$\mathcal{C}^X = \left(S, W^{\mathcal{C}}, \delta^{\mathcal{C}}\right)$$

donde $W_0^{\mathcal{C}} = 0$, $W_1^{\mathcal{C}} = B^*$ y $\delta^{\mathcal{C}}$ es la diferencial inducida por la comultiplicación $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$, y tenemos un funtor de reducción $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R-Mod$.

Observación III.1: Llamaremos a $\mathcal{C}^X$ el bocs canónico asociado a X. Si $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ es un bocs y ${}_RX$ es un módulo $S-$admisible, la proyección $\eta_1 : W^X \to B^*$, y la inyección $\sigma_1 : B^* \to W^X$, junto con la identidad $1_S : S \to S$, determinan pares graduados $(1_S, \eta_1)$ y $(1_S, \sigma_1)$ que inducen morfismos de álgebras graduadas

$$T_S(B^*) \underset{\sigma}{\overset{\eta}{\leftrightarrows}} T_S(W^X)$$

tales que $\delta^X \sigma = \sigma \delta^C$, $\delta^C \eta = \eta \delta^X$ y $\eta\sigma = Id_{T_S(B^*)}$.
Tenemos entonces morfismos de bocses

$$\mathcal{C}^X \underset{\sigma}{\overset{\eta}{\leftrightarrows}} \mathcal{A}^X$$

tales que $\eta\sigma = Id$, lo cual determina funtores

$$Rep\mathcal{C}^X \underset{F_\eta}{\overset{F_\sigma}{\leftrightarrows}} Rep\mathcal{A}^X$$

tales que $F_\sigma F_\eta = Id_{Rep\mathcal{C}^X}$. Así, las representaciones del bocs canónico $\mathcal{C}^X$ yacen entre las del bocs inducido $\mathcal{A}^X$.

Describamos a los funtores en cuestión.

Para $M, N \in Rep\mathcal{C}^X$ y un morfismo $f = (f^0, f^1) : M \to N$, se tiene que $F_\eta(M) = M$, pues bajo la estructura de $A(\mathcal{A}^X)$ $-$módulo inducida, $F_\eta(M)$ es anulada por W_0^X, que $(F_\eta(f))^0 = f^0$, y que $(F_\eta(f))^1 = f^1\eta_1$.

Para $M, N \in Rep\mathcal{A}^X$ y un morfismo $f = (f^0, f^1) : M \to N$, se tiene que $F_\sigma(M) =_S M$, que $(F_\sigma(f))^0 = f^0$, y que $(F_\sigma(f))^1 = f^1_{|B^*}$.

Finalmente notemos que conmuta el diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} Rep\mathcal{A}^X & \xrightarrow{F_\sigma} & Rep\mathcal{C}^X \\ \downarrow^{F_X} & u & \downarrow^{F_X^C} \\ Rep\mathcal{A} & \to & R-Mod \end{array}$$

donde $u((f^0, f^1)) = f^0$.

Definición 19. *Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible. Diremos que X es $S-$completo si el funtor $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ es fiel y pleno.*

Teorema 20. *Sean $\mathcal{A} = (R, W_0 \oplus W_1, \delta)$ un bocs y ${}_RX$ un módulo $S-$completo. Entonces:*

1. *Sea (F_0, η_F), como en el teorema III.16, el par que enmarca al funtor F_X,* entonces η_F es biyectiva.

2. *El funtor reducción $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ es fiel y pleno.*

Demostración: Sean $L, M \in S - Mod$ y sea $u_0 : X \otimes_S L \to X \otimes_S M$ un $R-$morfismo. Como ${}_RX$ es $S-$completo, se sigue que existe un único morfismo $g = (g^0, g^1) : L \to M$ en $Rep\mathcal{C}^X$, tal que $u_0 = F_X^{\mathcal{C}}(g)$, es decir que

$$u_0(x \otimes l) = x \otimes g^0(l) + \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_j)[l].$$

Nótese que todo par (g_0, g_1), donde $g_0 \in_S (L, M)$, $g_1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$.

Sea $\sigma : S \otimes_S M \to M$ el isomorfismo canónico, y sea $v : X^* \otimes_R X \to S$ la evaluación; ambos son morfismos de bimódulos.

Definimos, para $\lambda \in X^*$, $w \in W_1$, $x \in X$ y $l \in L$,

$\varrho_1 : Hom_{R-R}(W_1, (X \otimes_S L, X \otimes_S M)_k) \to Hom_{S-S}(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L, M)_k)$
como

$\varrho_1(u_1)(\lambda \otimes w \otimes x)[l] = \sigma(v \otimes I)(\lambda \otimes u_1(w)[x \otimes l])$,

y

$\varrho_2 : Hom_{S-S}(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L, M)_k) \to Hom_{R-R}(W_1, (X \otimes_S L, X \otimes_S M)_k)$
como

$\varrho_2(h)(w)[x \otimes l] = \sum x_i \otimes h(\alpha_{\lambda_i, x}(w))[l]$.

Tenemos entonces, que

$$\begin{aligned} \varrho_2\varrho_1(u_1)(w)[x \otimes l] &= \textstyle\sum x_i \otimes (\varrho_1(u_1)(\alpha_{\lambda_i, x}(w)))[l] \\ &= \textstyle\sum x_i \otimes \sigma(v \otimes I)(\lambda_i \otimes u_1(w)[x \otimes l]) \\ &= u_1(w)[x \otimes l], \end{aligned}$$

pues $\sum x_i \lambda_i(y) = y$ para todo $y \in X$, y

$$\begin{aligned} \varrho_1\varrho_2(h)(\lambda \otimes w \otimes x)[l] &= \sigma(v \otimes I)(\lambda \otimes (\varrho_2(h)(w))[x \otimes l]) \\ &= \sigma(v \otimes I)(\lambda \otimes \textstyle\sum x_i \otimes h(\alpha_{\lambda_i, x}(w))[l]) \\ &= h(\lambda \otimes w \otimes x)[l], \end{aligned}$$

pues $\sum_i \lambda(x_i)\lambda_i = \lambda$ para todo $\lambda \in X^*$.

Luego ϱ_1 es inversa de ϱ_2. Estas biyecciones inducen una biyección ϱ, recordando la notación de II.28, entre

$\tau_{A^X}(L, M)$

$= \left\{ (g_0, g_1, h) \mid \begin{array}{l} g_0 \in_S (L, M), g_1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k) \\ h \in Hom_{S-S}(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X, (L, M)_k) \end{array} \right\},$

y

$\tau_A(X \otimes_S L, X \otimes_S M)$

$= \{(u_0, u_1) \mid u_0 \in_R (X \otimes_S L, X \otimes_S M), u_1 \in_R (W_1, (X \otimes_S L, X \otimes_S M)_k)\}$.

Es inmediato que $\varrho = \eta_F$, donde η_F es como en el teorema III.16.

Sea $u = (u^0, u^1) : X \otimes_S L \to X \otimes_S M$ un morfismo en $RepA$. Por III.17 podemos definir una estructura de A^X-módulo sobre L y sobre M. Sea (f^0, g^1, h) la única terna que bajo η_F va en (u^0, u^1). Denotemos por $f^1 : W_1^X \to (L, M)_k$ al morfismo de $A^X - A^X-$bimódulos que se obtiene de (g^1, h) al aplicar los isomorfismos de II.17.

Afirmamos que $f = (f^0, f^1) : L \to M$ es un morfismo en $RepA^X$.

Por observación II.2.3 basta con probar la fórmula de la definición de morfismo para $w \in W_0$, para lo que tenemos que

$$w \cdot (u^0(x \otimes l)) - u^0(w \cdot (x \otimes l)) = u^1(\delta(w))[x \otimes l]$$

o, equivalentemente,

$$w \cdot \left(x \otimes f^0(l) + \textstyle\sum_j \rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_j)[l]\right) - \left(I \otimes f^0 + \textstyle\sum_j \rho_j \otimes g^1(\gamma_j)\right)(w \cdot (x \otimes l)) \\ = u^1(\delta(w))[x \otimes l].$$

Así que, para $\lambda \in X^*$, tenemos por fórmula III.17.2 que

$$\begin{array}{rl} & (\lambda \otimes w \otimes x) * f^0(l) - f^0((\lambda \otimes w \otimes x) * l) \\ = & \sigma(v \otimes I)[\lambda \otimes w \cdot (x \otimes f^0(l)) - (I \otimes I \otimes f^0)(\lambda \otimes w \cdot (x \otimes l))] \\ = & \sigma(v \otimes I)[\lambda \otimes u^1(\delta(w))[x \otimes l]] \\ & +\sigma(v \otimes I)\left[\left(I \otimes \sum_j (\rho_j \otimes g^1(\gamma_j))\right)(\lambda \otimes w \cdot (x \otimes l))\right] \\ & -\sigma(v \otimes I)\left[\sum_j \lambda \otimes w \cdot (\rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_j)[l])\right] \\ = & f^1(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w)))[l] \\ & +\sum_j \sigma(v \otimes I)\left[(I \otimes g^1(\gamma_j))((\lambda\rho_j) \otimes w \cdot (x \otimes l))\right] \\ & -\sum_j \sigma(v \otimes I)\left[\lambda \otimes w \cdot (\rho_j(x) \otimes g^1(\gamma_j)[l])\right]. \end{array} \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & f^1\left(\delta^X(\lambda\otimes w\otimes x)\right)[l] \\ = \; & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+f^1(a(\lambda)\otimes w\otimes x)[l]+f^1(\lambda\otimes w\otimes e(x))[l], \end{aligned}$$

lo que por III.12 es igual a

$$\begin{aligned} & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+f^1\left(\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\gamma_j\otimes\lambda_i\otimes w\otimes x\right)[l] \\ & -f^1\left(\textstyle\sum_j\lambda\otimes w\otimes\rho_j(x)\otimes\gamma_j\right)[l], \end{aligned}$$

y por ser f^1 un morfismo de A^X-A^X-bimódulos equivale a

$$\begin{aligned} & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)g^1\left(\gamma_j\right)\left[(\lambda_i\otimes w\otimes x)*l\right] \\ & -\textstyle\sum_j\left(\lambda\otimes w\otimes\rho_j(x)\right)*g^1\left(\gamma_j\right)[l] \\ = \; & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_{i,j}\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)g^1\left(\gamma_j\right)\left[\sigma(v\otimes I)\left(\lambda_i\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right] \\ & -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right) \end{aligned}$$

y por ser g^1 un morfismo de $S-S-$bimódulos lo anterior es

$$\begin{aligned} & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_j\left[\sigma(v\otimes I)\left[\left(I\otimes g^1\left(\gamma_j\right)\right)\left(\sum_i\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\lambda_i\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right]\right] \\ & -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right), \end{aligned}$$

y puesto que $\sum_i\lambda\left(\rho_j(x_i)\right)\lambda_i=\lambda\rho_j$, tenemos que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} & f^1\left(\alpha_{\lambda,x}(\delta(w))\right)[l]+\textstyle\sum_j\left[\sigma(v\otimes I)\left[\left(I\otimes g^1\left(\gamma_j\right)\right)\left(\left(\lambda\rho_j\right)\otimes w\cdot(x\otimes l)\right)\right]\right] \\ & -\textstyle\sum_j\left(\sigma(v\otimes I)\left(\lambda\otimes w\cdot\left(\rho_j(x)\otimes g^1\left(\gamma_j\right)[l]\right)\right)\right), \end{aligned}$$

lo que es el resultado de (1), luego f es un morfismo en $RepA^X$, y consecuentemente F_X es fiel y pleno.

■

Proposición 21. *Sean $\mathcal{A}=(R,W,\delta)$ un bocs y ${}_RX$ un módulo $S-$completo. Sea $F_X: RepA^X\to Rep\mathcal{A}$ el funtor reducción correspondiente. Si $M\in repA^X$ y X tiene $k-$dimensión finita entonces $F_X(M)\in rep\mathcal{A}$. Sea $\hat{W}$ un $R-R-$sub-bimódulo de W_0, se cumple que $\|M\|_{X^*\otimes_R\hat{W}\otimes_R X}=\|F_X(M)\|_{\hat{W}}$ y $q_{A^X}(M)=q_{\mathcal{A}}(F_X(M))$.*

Demostración: De la proposición I.7.2 se sigue que

$${}_S\left(X^*\otimes_R\hat{W}\otimes_R X\otimes_S M,M\right)\cong_R\left(\hat{W}\otimes_R X\otimes_S M,X\otimes_S M\right)$$

y que

$${}_S\left(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X \otimes_S M, M\right) \cong_R \left(W_1 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M\right),$$

por lo que $\|M\|_{X^* \otimes_R \hat{W} \otimes_R X} = \|F_X(M)\|_{\hat{W}}$.
Como ${}_RX$ es un módulo $S-$completo hay $k-$isomorfismos

$${}_R\left(X \otimes_S M, X \otimes_S M\right) \cong_{RepC^X} \left(X \otimes_S M, X \otimes_S M\right) \cong_S (M, M) \oplus_S \left(B^* \otimes_S M, M\right).$$

Luego

$$\begin{aligned}
q_A\left(F_X(M)\right) &= \dim_k\left({}_R\left(X \otimes_S M, X \otimes_S M\right)\right) - \dim_k\left({}_R\left(W_0 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M\right)\right) \\
&\quad + \dim_k\left({}_R\left(W_1 \otimes_R X \otimes_S M, X \otimes_S M\right)\right) \\
&= \dim_k\left({}_S(M, M)\right) + \dim_k\left({}_S\left(B^* \otimes_S M, M\right)\right) \\
&\quad - \dim_k\left({}_S\left(X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X \otimes_S M, M\right)\right) \\
&\quad + \dim_k\left({}_S\left(X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X \otimes_S M, M\right)\right) \\
&= q_{A^X}(M).
\end{aligned}$$

■

Lema 22. *Sea ${}_RX$ un módulo $S-$admisible, entonces $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$ es equivalente a $RepC^X$.*

Demostración: Teniendo en mente a I.17.3 y III.18 definamos un funtor $G_1 : Tens_{S-Mod}\Gamma^* \to RepC^X$.

En objetos $G_1(M) = M$.

Puesto que $\Gamma = S \oplus B$, sean $\pi_S : \Gamma \to S$ y $\pi_B : \Gamma \to B$ las proyecciones canónicas, y $\pi_B^* : B^* \to \Gamma^*$ el monomorfismo inducido.

Consideremos los isomorfismos naturales de bimódulos

$${}_S\left(\Gamma^* \otimes_S L, M\right) \cong_S \left(S^* \otimes_S L, M\right) \oplus_S \left(B^* \otimes_S L, M\right) \cong_S (L, M) \oplus_S \left(B^*, (L, M)_k\right)_S.$$

Podemos asociar a cada $f' \in_S \left(\Gamma^* \otimes_S L, M\right)$ el morfismo imagen bajo la sucesión anterior de isomorfismos, esto es : $G_1(f') = (f^0, f^1) = f$ definido como $f^0(l) = f'(\pi_S \otimes l)$ y $f^1(\gamma')[l] = f'(\pi_B^*(\gamma') \otimes l)$ para $\gamma' \in B^*$.

Sean las comultiplicaciones $\mu_0 : \Gamma^* \to \Gamma^* \otimes_S \Gamma^*$ y $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$. Por I.14 $\mu_0(\pi_S) = \pi_S \otimes \pi_S$, y si para $\gamma' \in B^*$ denotamos $\gamma = \pi_B^*(\gamma')$, entonces $\mu_0(\gamma) = \pi_S \otimes \gamma + \gamma \otimes \pi_S + \mu(\gamma')(\pi_B \otimes \pi_B)$.

Ahora sea $g' \in_S \left(\Gamma^* \otimes_S M, N\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(G_1\left(g' \circledast f'\right)\right)^0(l) &= \left[g'\left(Id \otimes f'\right)\left(\mu_0 \otimes Id\right)\right]\left(\pi_S \otimes l\right) \\
&= g'\left(Id \otimes f'\right)\left(\pi_S \otimes \pi_S \otimes l\right) = g'\left(\pi_S \otimes f'\left(\pi_S \otimes l\right)\right) \\
&= g^0\left(f^0(l)\right) = \left(G_1(g')\right)^0\left(G_1(f')\right)^0(l).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\gamma = \pi_B^*(\gamma')$ y $\mu(\gamma') = \sum_i \gamma_i^1 \otimes \gamma_i^2$

$$\begin{aligned}
&(G_1(g' \circledast f'))^1(\gamma)[l] \\
&= g'(Id \otimes f')(\mu_0 \otimes Id)(\gamma \otimes l) \\
&= g'(Id \otimes f')[(\pi_S \otimes \gamma + \gamma \otimes \pi_S + \mu(\gamma')(\pi_B \otimes \pi_B)) \otimes l] \\
&= g^0 f^1(\gamma)[l] + g^1(\gamma)[f^0(l)] + \textstyle\sum_i g^1(\pi_B^*(\gamma_i^1)) f^1(\pi_B^*(\gamma_i^2))[l] \\
&= (gf)^1(\gamma)[l]
\end{aligned}$$

Por lo que composiciones van en composiciones. Si $1_M : M \to M$ es la identidad de M en $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$, $m \in M$ y $\gamma' \in B^*$, entonces

$$\begin{aligned}
(G_1(1_M))^0(m) &= 1_M(\pi_S \otimes m) = \pi_S(1_\Gamma)m = \pi_S(1_S)m = m \\
(G_1(1_M))^1(\gamma')[m] &= 1_M(\pi_B^*(\gamma') \otimes m) = \gamma'\pi_B(1_\Gamma)m = 0,
\end{aligned}$$

es decir, $G_1(1_M) = (Id, 0)$. Hemos comprobado que G_1 es un funtor.

Ahora definamos un funtor $G_2 : Rep\mathcal{C}^X \to Tens_{S-Mod}\Gamma^*$.

En objetos $G_2(M) = M$. Si $f = (f^0, f^1) : L \to M$ es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$ definimos el morfismo $G_2(f) = f' : \Gamma^* \otimes_S L \to M$ como $f'((s\pi_S, \pi_B^*(\gamma')) \otimes l) = f^0(sl) + f^1(\gamma')[l]$.

Puesto que $G_2(G_1(f')) = f'$ y $G_1(G_2(f)) = f$, tenemos que G_2 es un funtor y es inverso de G_1.

■

Proposición 23. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Si S es semisimple y X es finitamente generado como $R-$módulo entonces X es $S-$completo.*

Demostración: Consideremos a $F_X^{\mathcal{C}} : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ y el funtor del lema anterior $G_1 : Tens_{S-Mod}\Gamma^* \to Rep\mathcal{C}^X$. Por corolario I.21.1 $S - Mod$ es $X-$reducible.

Recordemos que $\Gamma = S \oplus B$. Sea $\{\rho_j', \gamma_j' \mid j \in \{2, ..., m\}\}$ una base dual de B_S. Sean $\pi_S : \Gamma \to S$ y $\pi_B : \Gamma \to B$ las proyecciones canónicas, $\pi_B^* : B^* \to \Gamma^*$ el monomorfismo inducido e $\iota_B : B^* \to \Gamma^*$ la inyección canónica. Definiendo $\gamma_j = \pi_B^*(\gamma_j')$, $\rho_j = \iota_B(\rho_j')$ para $j \in \{2, ..., m\}$, $\gamma_1 = \pi_S$ y $\rho_1 = (1_S, 0)$ obtenemos que $\{\rho_j, \gamma_j \mid j \in \{1, ..., m\}\}$ es una base dual de Γ_S. Como en I.21.1 tenemos el isomorfismo natural de $S - S-$bimódulos que preserva composiciones

$$\Psi = \Psi_2\Psi_1^{-1} :_S (\Gamma^* \otimes_S L, M) \to_R (X \otimes_S L, X \otimes_S M)$$

el cual para $f' \in_S (\Gamma^* \otimes_S L, M)$ está dado por

$$\begin{aligned}\Psi(f')[x\otimes l] &= \textstyle\sum_j \rho_j(x)\otimes f'(\gamma_j\otimes l)\\ &= x\otimes f'(\pi_S\otimes l)+\textstyle\sum_{j\geq 2}\rho_j(x)\otimes f'(\gamma_j\otimes l)\\ &= x\otimes (G_1(f'))^0(l)+\textstyle\sum_{j\geq 2}\rho_j(x)\otimes (G_1(f'))^1(\gamma_j)[l]\\ &= F_X^{\mathcal{C}}(G_1(f'))[x\otimes l].\end{aligned}$$

Es decir, el funtor inducido por Ψ entre $Tens_{S-Mod}\Gamma^*$ e $Induc_{S-Mod}X \subsetneq R-Mod$ es igual a $F_X G_1$. Puesto que Ψ y G_1 son fieles y plenos tenemos que F_X es fiel y pleno. ■

Proposición 24. *Sean ${}_RX_i$ módulos S_i−completos, para $i\in\{1,2\}$. Supongamos que si $i\neq j$ entonces ${}_R\left(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j\right)=0$. Entonces el R−módulo $X=X_1\oplus X_2$ es $S_1\times S_2$−completo.*

Demostración: Tenemos los isomorfismos de álgebras

$$({}_R(X,X))^{op}\cong\begin{pmatrix} S_1^{op}\oplus B_1^{op} & 0\\ 0 & S_2^{op}\oplus B_2^{op}\end{pmatrix}^{op}\cong\begin{pmatrix} S_1\oplus B_1 & 0\\ 0 & S_2\oplus B_2\end{pmatrix}$$

Sea $S=S_1\times S_2$. Tenemos el isomorfismo de $S-S$−bimódulos

$$\begin{pmatrix} S_1\oplus B_1 & 0\\ 0 & S_2\oplus B_2\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} S_1 & 0\\ 0 & S_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$

luego X es S−admisible. De hecho, $Rep\mathcal{C}^X\cong Rep\left(\mathcal{C}^{X_1}\times\mathcal{C}^{X_2}\right)$. Por proposición II.32, y usando su notación, tenemos un isomorfismo de categorías $F_{\eta_1}\times F_{\eta_2}: Rep\mathcal{C}^{X_1}\times Rep\mathcal{C}^{X_2}\to Rep\mathcal{C}^X$.

Dada la hipótesis, podemos asegurar la existencia de un isomorfismo de categorías $\vartheta: Induc_{S_1-Mod}X_1\times Induc_{S_2-Mod}X_2\to Induc_{S-Mod}X$, dado en objetos como $\vartheta((X_1\otimes M_1, X_2\otimes M_2))=((X_1\otimes M_1)\oplus(X_2\otimes M_2))$, y en morfismos, digamos para $f_1: X_1\otimes M_1\to X_1\otimes N_1$ y $f_2: X_2\otimes M_2\to X_2\otimes N_2$, como $\vartheta((f_1,f_2))=f_1\oplus f_2$.

Afirmamos que el siguiente diagrama de funtores conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Rep\mathcal{C}^{X_1}\times Rep\mathcal{C}^{X_2} & \xrightarrow{F_{\eta_1}\times F_{\eta_2}} & Rep\mathcal{C}^X\\ \downarrow{\scriptstyle F^{\mathcal{C}}_{X_1}\times F^{\mathcal{C}}_{X_2}} & & \downarrow{\scriptstyle F_X}\\ Induc_{S_1-Mod}X_1\times Induc_{S_2-Mod}X_2 & \xrightarrow{\vartheta} & Induc_{S-Mod}X\end{array}$$

Para $M_1 \in S_1 - Mod$ y $M_2 \in S_2 - Mod$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(M_1, M_2) & = & \vartheta\left(X_1 \otimes M_1, X_2 \otimes M_2\right) \\ & = & (X_1 \otimes M_1) \oplus (X_2 \otimes M_2) \cong X \otimes (M_1 \oplus M_2) \end{array}$$

y

$$F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(M_1, M_2) = F_X\left(M_1 \oplus M_2\right) = X \otimes (M_1 \oplus M_2).$$

Sea $\left\{x^1_j, \lambda^1_j \mid j \in \{1, ..., n\}\right\}$ una base dual de $(X_1)_{S_1}$ y $\left\{x^2_j, \lambda^2_j \mid j \in \{n+1, ..., l\}\right\}$ una base dual de $(X_2)_{S_2}$, entonces su unión se puede identificada con $\{x_j, \lambda_j \mid j \in \{1, ..., l\}\}$ una base dual de X. Similarmente si $\{\rho^1_h, \gamma^1_h \mid h \in \{1, ..., s\}\}$ es una base dual de B_1y $\{\rho^2_h, \gamma^2_h \mid h \in \{s+1, ..., t\}\}$ es una base dual de B_2, entonces su unión puede ser identificada con $\{\rho_h, \gamma_h \mid h \in \{1, ..., t\}\}$ una base dual de B.

Por otra parte, si $f_1 = (f^0_1, f^1_1) : M_1 \to N_1$ es un morfismo en $RepC^{X_1}$ y $f_2 = (f^0_2, f^1_2) : M_2 \to N_2$ es un morfismo en $RepC^{X_2}$, tenemos, para $x \in X$, $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$, que

$$\begin{array}{rl} & \left(F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^0 [x \otimes (m_1 + m_2)] \\ = & x \otimes \left(f^0_1 \oplus f^0_2\right)(m_1 + m_2) \\ & + \sum_{h=1}^t \rho_h(x) \otimes \left(f^1_1(e_1\gamma_h) \oplus f^1_2(e_2\gamma_h)\right)[m_1 + m_2] \\ = & x \otimes \left(f^0_1(m_1) + f^0_2(m_2)\right) \\ & + \sum_{h=1}^t \rho_h(x) \otimes f^1_1(e_1\gamma_h)[m_1] + \sum_{h=1}^t \rho_h(x) \otimes f^1_2(e_2\gamma_h)[m_2] \\ = & \left(xe_1 \otimes f^0_1(m_1) + \sum_{h=1}^s \rho^1_h(xe_1) \otimes f^1_1(\gamma^1_h)[m_1]\right) \\ & + \left(xe_2 \otimes f^0_2(m_2) + \sum_{h=s+1}^t \rho^2_h(xe_2) \otimes f^1_2(\gamma^2_h)[m_2]\right) \\ = & \left(\vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^0 [x \otimes (m_1 + m_2)]. \end{array}$$

Similarmente verificamos, donde $w \in W_1$, que

$$\begin{array}{rl} & \left(F_X\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 (w)[x \otimes (m_1 + m_2)] \\ = & \sum_{j=1}^l x_i \otimes \left(\left(F_{\eta_1} \times F_{\eta_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 (\lambda_i \otimes w \otimes x)[m_1 + m_2] \\ = & \left(\sum_{j=1}^l x_i \otimes f^1_1(\lambda_i \otimes e_1 w \otimes x)[m_1]\right) \\ & + \left(\sum_{j=1}^l x_i \otimes f^1_2(\lambda_i \otimes e_2 w \otimes x)[m_2]\right) \\ = & \left(\sum_{j=1}^n x^1_i \otimes f^1_1\left(\lambda^1_i \otimes we_1 \otimes e_1 x\right)[m_1]\right) \\ & + \left(\sum_{j=n+1}^l x^2_i \otimes f^1_2(\lambda_i \otimes we_2 \otimes e_2 x)[m_2]\right) \\ = & \left(\vartheta\left(F^C_{X_1} \times F^C_{X_2}\right)(f_1 \times f_2)\right)^1 [x \otimes (m_1 + m_2)]. \end{array}$$

Se sigue que F_X es fiel y pleno.

■

Corolario 25. *Sean $_{R_i}X_i$ módulos S_i-completos, para $i \in \{1,2\}$. Entonces $X = X_1 \oplus X_2$ es un $R_1 \times R_2-$módulo $S_1 \times S_2-$completo.*

Demostración: A través de las proyecciones $\pi_i : R_1 \times R_2 \to R_i$ los X_i adquieren estructura de $R_1 \times R_2-$módulo. Es claro que si $i \neq j$ entonces $_{R_1 \times R_2}\left(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j\right) = 0$, por lo que aplicamos la proposición anterior.

■

III.4 Preservación de triangularidad.

En esta sección veremos condiciones sobre X, un módulo $S-$admisible, para que la construcción $\mathcal{A}^X$ preserve triangularidad.

Definición 26. *Sea $_RX$ un módulo $S-$admisible, diremos que X es $S-$triangular si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $B = B_1 \oplus ... \oplus B_n$ como $S-S-$bimódulos, y $B_nB = BB_n = 0$ y $B_iB + BB_i \subseteq B_n \oplus ... \oplus B_{(i+1)}$.
2. $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_m = X$ como $R-S-$bimódulos. Además pediremos que como $S-$módulos, $X_{i+1} = X_i \oplus L_{i+1}$, para $i \geq 0$.
3. Para todo $\rho \in B$, y para cada $i \geq 1$, se tiene que $\rho(X_i) \subseteq X_{i-1}$.

Lema 27. *Sea $_RX$ un módulo $S-$triangular, y consideremos los mapeos $a : X^* \to B^* \otimes_S X^*$ y $e : X \to X \otimes_S B^*$. Entonces tenemos que:*

1. $e(X_1) = 0$. Para $i \geq 2$ se cumple que $e(X_i) \subseteq X_{i-1} \otimes_S B^*$.
2. Para $i \in \{0, 1, ..., m\}$ definimos $Y_{m-i} = \{\lambda \in X^* \mid \lambda(X_i) = 0\}$. Entonces Y_i es un $S-R-$subbimódulo de X^* y que $a(Y_i) \subseteq B^* \otimes_S Y_{i-1}$, para $i \geq 1$. En particular, $a(Y_1) = 0$.

Demostración:

1. Por III.12.1 tenemos que

$$e(X_i) = -\sum \rho_j(X_i) \otimes \gamma_j \subseteq X_{(i-1)} \otimes_S B^*.$$

2. Sea $\lambda \in Y_{m-n}$, como X_n es un $R-$módulo tenemos que $(s\lambda r)(X_n) = s(\lambda(rX_n)) = s0 = 0$, por lo que Y_{m-n} es un $S-R-$bimódulo.

   Por hipótesis $X = \oplus_{i=1}^{m} L_i$ como $S-$módulos derechos. Sea $\{x_{i,t}, \lambda'_{i,t} \mid t \in \{1, ..., j_i\}\}$ una base dual de L_i. Sean $\pi_i : X \to L_i$ las proyecciones canónicas y $\lambda_{i,t} = \lambda'_{i,t}\pi_i$, entonces $\{x_{i,t}, \lambda_{i,t} \mid i \in \{1, ..., m\}, t \in \{1, ..., j_i\}\}$ es una base dual de X. Observemos que si $\lambda \in Y_{m-n}$ entonces $\lambda(\rho(x)) = 0$ para todo $x \in X_{n+1}$. Luego, para $\rho \in B$, tenemos que $\lambda(\rho(x_{l,t})) \neq 0$ sólo puede cumplirse cuando $l > n+1$. Usando III.12.2 se tiene que, para $\lambda \in Y_{m-n}$,

$$a(\lambda) = \sum_{i,t,j} \lambda\left(\rho_j(x_{i,t})\right)\gamma_j \otimes \lambda_{i,t} = \sum_{i>n+1}\sum_{t,j} \lambda\left(\rho_j(x_{i,t})\right)\gamma_j \otimes \lambda_{i,t}.$$

   Como $\lambda_{i,t}(X_{n+1}) = 0$ cuando $i > n+1$, se sigue que los elementos $\lambda_{i,t}$ que aparecen en la expresión anterior de $a(\lambda)$, están en Y_{m-n-1}, por lo que se cumple el enunciado.

■

Lema 28. *Sea ${}_RX$ un módulo $S-$triangular y $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$ como en I.12. Entonces $\mu(B_1^*) = 0$ y $\mu(B_i^*) \subseteq (B_1^* + ... + B_{i-1}^*) \otimes_S (B_1^* + ... + B_{i-1}^*)$ para $i > 1$.*

Demostración: Sea $\{\rho_{i,t}, \gamma'_{i,t} \mid t \in \{1, ..., j_i\}\}$ una base dual de B_i^*, $i \in \{1, ..., n\}$. Sean $\pi_i : B \to B_i$ las proyecciones canónicas, y sea $\gamma_{i,t} = \gamma'_{i,t}\pi_i$, entonces tenemos que $\{\rho_{i,t}, \gamma_{i,t} \mid i \in \{1, ..., m\}, t \in \{1, ..., j_i\}\}$ es una base dual de B^*. Por I.9 tenemos isomorfismos

$$\oplus_{i,j}(B_i^* \otimes B_j^*) \cong \oplus_{i,j}(B_j \otimes B_i)^* \cong (B \otimes B)^*.$$

Recordemos de la observación I.1 que la comultiplicación está dada por $\mu(\gamma) = \sum_m \gamma_m^1 \otimes \gamma_m^2$, tal que éste es el único elemento que cumple que $\sum_m \gamma_m^1(\gamma_m^2(\rho_2)\rho_1) = \gamma(\rho_1 \cdot \rho_2)$, para todo $\rho_1, \rho_2 \in B$. Si $\gamma \in B_1^*$, entonces $\gamma(\rho_1 \cdot \rho_2) = 0$, por lo que $\mu(\gamma) = 0$, luego $\mu(B_1^*) = 0$. Como $B_iB + BB_i \subseteq B_n + ... + B_{(i+1)}$ se sigue que si $\gamma \in B_i^*$, entonces $\gamma(\rho_1 \cdot \rho_2) = 0$ cuando ρ_1 o ρ_2 pertenece a B_j, para $j \geq i$. Así que, de la definición de ϕ_2 en I.9, deducimos que en $\sum_m \gamma_m^1 \otimes \gamma_m^2$ no hay elementos de $B_n^* + ... + B_i^*$.

■

Corolario 29. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y ${}_RX$ un módulo $S-$triangular. Entonces $\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R.*

Demostración: Por definición $\mathcal{C}^X = (S, W^C, \delta^C)$, donde $(End_R(X))^{op} = \Gamma = S \oplus B^*$, $W_0^C = 0$, $W_1^C = B^*$ y δ^C es la diferencial inducida por la comultiplicación $\mu : B^* \to B^* \otimes_S B^*$. Por el lema anterior $\mathcal{C}^X$ es un bocs triangular. Como $W_0^C = 0$, cualquier par de morfismos (q^0, q^1), donde $q^0 \in_S (L, M)$ y $q^1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$, luego $\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R.

■

Lema 30. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y ${}_RX$ un módulo $S-$completo y $S-$triangular. Sea $f = (f^0, f^1) : L \to M$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$ y sea $(u^0, u^1) = F_X(f)$.*

1. *Entonces f^0 es una $S-$sección (retracción) si y sólo si u^0 es una $R-$sección (retracción). En particular, f^0 es un $S-$isomorfismo si y sólo si u^0 es un $R-$isomorfismo.*

2. *Sea $g = (g^0, g^1) : M \to N$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}^X$ y sea $(v^0, v^1) = F_X(g)$. Si*

$$0 \to X \otimes_S L \xrightarrow{u^0} X \otimes_S M \xrightarrow{v^0} X \otimes_S N \to 0$$

es una sucesión exacta que se divide en $R - Mod$ entonces

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es una sucesión exacta que se divide en $S - Mod$.

Demostración: Sea $\mathcal{C}^X = (S, W^C, \delta^C)$. Puesto que $W_0^C = 0$, cualquier par de morfismos (q^0, q^1), donde $q^0 \in_S (L, M)$ y $q^1 \in Hom_{S-S}(B^*, (L, M)_k)$, es un morfismo en $Rep\mathcal{C}^X$.

Sea $F_X^C : Rep\mathcal{C}^X \to R - Mod$ el funtor de III.18. Como en observación III.1 sea $f' = F_\sigma(f) = \left(f^0, f^1_{|B^*}\right)$. Del diagrama conmutativo de funtores, de la misma observación, se sigue que $u^0 = F_X^C(f')$.

Puesto que X es $S-$completo tenemos que F_X^C es fiel y pleno.

Sea $q^0 \in_S (M, L)$ tal que $q^0 f^0 = Id_L$, por el corolario III.29 $Rep\mathcal{C}^X$ es un bocs K-R, así que por II.24 existe un morfismo $h = (Id, h^1) : M \to M'$ en $Rep\mathcal{C}^X$ tal que $hf' = (f^0, 0)$, luego $(q^0, 0)\, hf' = (Id_L, 0)$. En tal caso $Id_{X \otimes L} = F_X^C((q^0, 0)\, hf') = F_X^C((q^0, 0)\, h)\, u^0$. Esto prueba que si f^0 es una $S-$sección entonces u^0 es una $R-$sección.

Sea $v^0 : X \otimes_S M \to X \otimes_S L$ tal que $v^0 u^0 = Id_{X \otimes L}$. Hay un único morfismo $q = (q^0, q^1) : M \to L$ de $Rep\mathcal{C}^X$ tal que $F_X^C(q) = v^0$. Luego, $Id_{X \otimes L} = v^0 u^0 = F_X^C(q)\, F_X^C(f') = F_X^C(qf')$.

Entonces $(Id_L, 0) = qf' = \left(q^0 f^0, (qf')^1\right)$. Se sigue que si u^0 es una $R-$sección entonces f^0 es una $S-$sección.

De manera similar se prueba que u^0 es una $R-$retracción si y sólo si f^0 es una $S-$retracción.

Vayamos al último inciso.

Supongamos que hay $R-$morfismos $q : X \otimes_S M \to X \otimes_S L$ y $p : X \otimes_S N \to X \otimes_S M$ tales que $qp = 0$, $v^0 u^0 = 0$, $qu^0 = Id_{X \otimes_S L}$, $v^0 p = Id_{X \otimes_S N}$ y $pv^0 + u^0 q = Id_{X \otimes_S M}$.

Como F_X^C es fiel y pleno, hay morfismos únicos $(q^0, q^1) : M \to L$ y $(p^0, p^1) : N \to M$ tales que $F_X^C((q^0, q^1)) = q$ y $F_X^C((p^0, p^1)) = p$. Así que, por fidelidad y plenitud, obtenemos que

$(q^0, q^1)(p^0, p^1) = (0, 0)$, luego $q^0 p^0 = 0$,

$(g^0, g^1)(f^0, f^1) = (0, 0)$, luego $g^0 f^0 = 0$,

$(q^0, q^1) f' = (Id_L, 0)$, luego $q^0 f^0 = Id_L$,

$g'(p^0, p^1) = (Id_N, 0)$, luego $g^0 p^0 = Id_N$, y

$f'(q^0, q^1) + (p^0, p^1) g' = (Id_M, 0)$, luego $f^0 q^0 + p^0 g^0 = Id_M$.

Entonces,

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es exacta que se divide en $S - Mod$.

■

Proposición 31. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $_RX$ un módulo $S-$admisible. Entonces se satisface lo siguiente:*

1. *Si $\mathcal{A}$ es triangular y $_RX$ es $S-$triangular, entonces $\mathcal{A}^X$ es triangular.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y $_RX$ es $S-$triangular y completo, entonces $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.*

Demostración: Consideremos las filtraciones $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \ldots \subseteq W_0^r = W$ y $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \ldots \subseteq W_1^s = W_1$ que hacen triangular al bocs $\mathcal{A}$. Sean $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n = B$, $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_m = X$ y $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_m = X^*$ como en III.26 y III.27. Para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq u \leq r$, $0 \leq j \leq m$ consideremos los $S-S-$sub-bimódulos de $X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X$ de la forma

$$W_0'((i, u, j)) = \langle \lambda \otimes w \otimes x \mid \lambda \in Y_i, w \in W_0^u, x \in X_j \rangle_S = Y_i \hat{\otimes}_S W_0^u \hat{\otimes}_S X_j.$$

Denotaremos por $\left(W_0'\right)^h$ al $S-S-$sub-bimódulo generado por todos los $W_0'((i, u, j))$ tales que $i + 2mu + j \leq h$.

La filtración previa induce una filtración:

$$0 = (W_0')^0 \subseteq (W_0')^1 \subsetneq \dots \subseteq (W_0')^q = X^* \otimes_R W_0 \otimes_R X.$$

Para $0 \leq i \leq m$, $0 \leq t \leq s$, $0 \leq j \leq m$, consideremos los $S-S-$sub-bimódulos de $X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X$ de la forma

$$W_1'((i,t,j)) = \langle \lambda \otimes w \otimes x \mid \lambda \in Y_i, w \in W_1^t, x \in X_j \rangle_S = Y_i \hat{\otimes}_S W_1^t \hat{\otimes}_S X_j.$$

Denotaremos por $(W_1')^l$ al $S-S-$subbimódulo generado por todos los $W_1'((i,t,j))$ con $i + 2mt + j \leq l$.

Sea $W_1'(d) = \oplus_{i \leq d} B_i^*$ para $1 \leq d \leq n$, y $W_1'(0) = 0$. Recordemos que $W_1^X = (X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X) \oplus B^*$. Se induce la filtración

$$0 = W_1'(0) \subseteq W_1'(1) \subseteq \dots \subseteq W_1'(n) \subsetneq (W_1')^1 \oplus B^* \subsetneq \dots \subseteq (W_1')^p \oplus B^* = W_1^X.$$

Afirmamos que las dos filtraciones presentadas hacen que $\mathcal{A}^X$ sea triangular.

Sea A_h' la subálgebra de $A(\mathcal{A}^X)$ generada por $(W_0')^h$, y A_u la subálgebra de $A(\mathcal{A})$ generada por W_0^u.

Recordemos de III.14 que

$\delta^X(\lambda \otimes w \otimes x) = a(\lambda) \otimes w \otimes x + \alpha_{\lambda,x}(\delta(w)) + (-1)^{gr(w)} \lambda \otimes w \otimes e(x)$, y $\delta^X(\gamma) = \mu(\gamma)$ si $\gamma \in B^*$.

Así que aplicando III.27 obtenemos, para $i + 2mu + j \leq h$, con $h, i, j > 0$, $\lambda \in Y_i$ y $x \in X_j$, que

$$\begin{aligned}
&\delta^X(W_0'(i,u,j)) \\
&\subseteq B^* \hat{\otimes}_S W_0'(i-1,u,j) + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}) + W_0'(i,u,j-1) \hat{\otimes}_S B^* \\
&\subsetneq W_1^X \hat{\otimes}_S A_{h-1}' + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}) + A_{h-1}' \hat{\otimes}_S W_1^X \\
&\subseteq A_{h-1}' \hat{\otimes}_S W_1^X \hat{\otimes}_S A_{h-1}' + \alpha_{\lambda,x}(A_{u-1} \hat{\otimes}_R W_1 \hat{\otimes}_R A_{u-1}) . \ (*)
\end{aligned}$$

Ahora bien, sean $w_1, \dots, w_q, w_1', \dots, w_p' \in W_0^{u-1}$ y $v \in W_1$. Tenemos por III.13 que

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\lambda,x}(w_1 \otimes \dots \otimes w_q \otimes v \otimes w_1' \otimes \dots \otimes w_p') \\
&= \textstyle\sum_{z_k} \lambda \otimes w_1 \otimes x_{z_1} \otimes \lambda_{z_1} \otimes \dots \otimes \lambda_{z_q} \otimes w_q \otimes x_{z_q} \otimes \lambda_{z_q} \otimes v \otimes \dots \otimes \lambda_{z_{p+q}} \otimes w_p' \otimes x.
\end{aligned}$$

Luego

$$gr\left(\lambda_{z_k}\otimes w_k\otimes x_{z_k}\right)\leq m+2m\left(u-1\right)+m\leq 2mu<h.$$

Así que $(*)$ está contenida en $A'_{h-1}\hat{\otimes}_S W_1^X\hat{\otimes}_S A'_{h-1}$.

Consideremos la parte de grado uno. Sea $W_1'[d]$ el $A(\mathcal{A}^X)-A(\mathcal{A}^X)-$subbimódulo de B^* generado por $W_1'(d)$, es decir que $W_1'[d]=\left\langle W_1'(d)\right\rangle_{A(\mathcal{A}^X)}$. Por III.27 tenemos que

$$\begin{aligned}&\delta^X\left(W_1'(d)\right)=\delta^X\left(\oplus_{i\leq d}B_i^*\right)\subseteq\left(B_1^*+\ldots+B_{d-1}^*\right)\otimes_S\left(B_1^*+\ldots+B_{d-1}^*\right)\\&\subseteq W_1'[d-1]\,\hat{\otimes}_S W_1'[d-1].\end{aligned}$$

Sean $\left(W_1'\right)[l]=\left\langle\left(W_1'\right)^l\oplus B^*\right\rangle_{A(\mathcal{A}^X)}$ y $W_1(t)=\langle W_1^t\rangle_{A(\mathcal{A})}$. Para $i+2mt+j\leq l$, con $h,i,j>0$, $\lambda\in Y_i$ y $x\in X_j$ tenemos, por III.26, que

$$\begin{aligned}&\delta^X\left(W_1'(i,t,j)\right)\\&\subseteq B^*\hat{\otimes}_S W_1'(i-1,t,j)+\alpha_{\lambda,x}\left(\delta\left(W_1^t\right)\right)+W_1'(i,t,j-1)\,\hat{\otimes}_S B^*\\&\subseteq B^*\hat{\otimes}_S\left(W_1'\right)[l-1]+\alpha_{\lambda,x}\left(W_1(t-1)\,\hat{\otimes}_R W_1(t-1)\right)+\left(W_1'\right)[l-1]\,\hat{\otimes}_S B^*\\&\subseteq\left(W_1'\right)[l-1]\,\hat{\otimes}_S\left(W_1'\right)[l-1]+\alpha_{\lambda,x}\left(W_1(t-1)\,\hat{\otimes}_R W_1(t-1)\right)\\&\subseteq\left(W_1'\right)[l-1]\,\hat{\otimes}_S\left(W_1'\right)[l-1]+\left(X^*\hat{\otimes}_S W_1^{t-1}\hat{\otimes}_S X\right)\hat{\otimes}_S\left(X^*\hat{\otimes}_S W_1^{t-1}\hat{\otimes}_S X\right).\ (**)\end{aligned}$$

Para $\lambda\in X^*$, $x\in X$ y $w\in W_1^{t-1}$ tenemos que

$$gr\left(\lambda\otimes w\otimes x\right)\leq m+2m\left(t-1\right)+m\leq 2mt<h.$$

Así que $(**)$ está contenida en $\left(W_1'\right)[l-1]\,\hat{\otimes}_S\left(W_1'\right)[l-1]$.

Con esto hemos comprobado la triangularidad de $\mathcal{A}^X$.

Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ es un bocs K-R y que ${}_RX$ es $S-$triangular y completo.

En la III.20 vimos que F_X es fiel y pleno, y que si (F_0,η_F) es el par de III.16 que enmarca a F, entonces η_F es biyectiva.

Por III.30 tenemos que si $\eta_F\left((f^0,f^1)\right)=(g^0,g^1)$, entonces g^0 es un $R-$isomorfismo si y sólo si f^0 es un $S-$isomorfismo.

Por III.17.1 se cumple el axioma II.30.4.

El axioma II.30.5 se cumple dado que η_F está definido en morfismos en la imagen de F_0, y si algún objeto en $\operatorname{Im}F_0$ también se encuentra en $Rep\mathcal{A}$, por III.17.1 está en $\operatorname{Im}F$.

Luego $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.

■

Corolario 32. *Sean* $_RX_i$ *módulos* S_i-*triangulares, para* $i \in \{1,2\}$. *Supongamos que si* $i \neq j$ *entonces* $_R\left(Induc_{S_i-Mod}X_i, Induc_{S_j-Mod}X_j\right) = 0$. *Entonces el* $R-$*módulo* $X = X_1 \oplus X_2$ *es* $S_1 \times S_2-$*triangular.*

Demostración: Como se prueba al principio de la prueba de III.24, X es $S_1 \times S_2-$admisible.

Sean $B_1 = (B_1)_1 \oplus ... \oplus (B_1)_{n_1}$ y $0 = (X_1)_0 \subseteq (X_1)_1 \subseteq ... \subseteq (X_1)_{m_1} = X_1$ la descomposición y la filtración asociada a X_1, y sean $B_2 = (B_2)_1 \oplus ... \oplus (B_2)_{n_2}$ y $0 = (X_2)_0 \subseteq (X_2)_1 \subseteq ... \subseteq (X_2)_{m_2} = X_2$ la descomposición y la filtración asociada a X_2. Sean $\underline{n} = \min(n_1, n_2)$, $n' = \max(n_1, n_2)$, $\underline{m} = \min(m_1, m_2)$ y $m' = \max(m_1, m_2)$. Si $\underline{n} = n_1$ entonces sea $i = 1$, $j = 2$, en caso contrario sea $i = 2$, $j = 1$. Similarmente, si $\underline{m} = m_1$ entonces sea $h = 1$, $l = 2$, en caso contrario sea $h = 2$, $l = 1$.

No es difícil verificar que la descomposición de $S - S-$bimódulos

$$B_1 \oplus B_2$$
$$= [(B_1)_1 \oplus (B_2)_1] \oplus ... \oplus \left[(B_1)_{\underline{n}} \oplus (B_2)_{\underline{n}}\right] \oplus \left[(B_i)_{\underline{n}} \oplus (B_j)_{\underline{n}+1}\right] \oplus ... \oplus \left[(B_i)_{\underline{n}} \oplus (B_j)_{n'}\right]$$

y la filtración

$$0 = [(X_1)_0 \oplus (X_2)_0] \subseteq [(X_1)_1 \oplus (X_2)_1] \subseteq ... \subseteq \left[(X_1)_{\underline{m}} \oplus (X_2)_{\underline{m}}\right] \subseteq ...$$
$$\subseteq \left[(X_h)_{\underline{m}} \oplus (X_l)_{\underline{m}+1}\right] \subseteq ... \subseteq \left[(X_h)_{\underline{m}} \oplus (X_l)_{m'}\right]$$

hacen que X sea $S_1 \times S_2-$triangular.

■

Corolario 33. *Sean* $_{R_i}X_i$ *módulos* S_i-*triangulares, para* $i \in \{1,2\}$. *Entonces* $X = X_1 \oplus X_2$ *es un* $R_1 \times R_2-$*módulo* $S_1 \times S_2-$*triangular.*

Necesitaremos algunos resultados de la teoría de anillos.

Definición 34. *(2.5.28[Ro]) Sea* R *una* $k-$*álgebra de dimensión finita. Decimos que* R *es separable si* $R \otimes_K L$ *es semisimple artiniana para toda extensión de campo* L *de* k.

Definición 35. *(5.3.6 [Ro]) Sean* C *una* k*-álgebra conmutativa y* R *una* $C-$*álgebra. Decimos que* R *es* $C-$*separable si* R *es proyectivo como* $R \otimes_C R^{op}-$*módulo.*

Teorema 36. *(5.3.18 [Ro])* R *es* $k-$*separable en el sentido de III.34 si y sólo si lo es en el sentido de III.35.*

Proposición 37. *Si R y S son $k-$álgebras semisimples de dimensión finita, con k un campo perfecto, entonces $R \otimes_k S$ es semisimple artiniana.*

Demostración: Por ejercicio 2.5.8 [**Ro**] se tiene que si k es perfecto y R es una $k-$álgebra semisimple artiniana, entonces R es $k-$separable. Por proposición 5.3.10 (ii) [**Ro**] se sigue que $R \otimes_k S$ es $k \otimes_k k-$separable, luego, por III.36 es semisimple artiniana.

■

Teorema 38. *Sea k un campo perfecto y R una $k-$álgebra. Sea X un $R-$módulo izquierdo de $k-$dimensión finita. Entonces X es $S-$triangular y $S-$completo, con $S \cong (End_R(X))^{op} / rad((End_R(X))^{op})$.*

Demostración: Por el Teorema de Wedderburn-Malcev (5.3.20 [**Ro**]) tenemos que $\Gamma = (End_R(X))^{op} = S \oplus rad((End_R(X))^{op})$ y que S es semisimple, luego por III.23 X es $S-$completo. Para obtener la $S-$triangularidad veamos que si $rad\Gamma$ tiene grado de nilpotencia $n+1$ entonces

1. Tenemos una filtración $0 \subseteq (rad\Gamma)^n \subseteq ... \subseteq rad\Gamma = B$. Por proposición III.37 tenemos que $S \otimes_k S^{op}$ es semisimple, luego hay $S-S-$bimódulos B_i tales que $B_n = (rad\Gamma)^n$, y los cuales satisfacen que $(rad\Gamma)^i = (rad\Gamma)^{i+1} \oplus B_i$. A fortiori los B_i son proyectivos y f.g. como $S-$módulos derechos. Tenemos que $B_nB = (rad\Gamma)^n(rad\Gamma) = 0$ y $BB_n = (rad\Gamma)(rad\Gamma)^n = 0$. Además,
$$\begin{aligned} B_iB + BB_i \subseteq (rad\Gamma)^i(rad\Gamma) + (rad\Gamma)(rad\Gamma)^i &= (rad\Gamma)^{i+1} \\ &= \oplus_{j=i+1}^{n} B_j. \end{aligned}$$

2. Sea $X_j = (rad\Gamma)^{(n+1-j)}(X)$ y $X_{n+1} = X$, entonces se cumple que $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_{n+1} = X$ como $R-S-$bimódulos, donde cada X_i es finitamente generado y proyectivo como $S-$módulo, y que como $S-$módulos, $X_{i+1} = X_i \oplus L_i$.

3. También es claro que para todo $\rho \in B$, y cada $i \geq 1$, se tiene que $\rho(X_i) \subseteq X_{(i-1)}$.

■

III.5 Endolongitud y funtores de reducción.

Definición 39. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs. Sea M un objeto de $Rep\mathcal{A}$ y $E_M = \{f^0 \mid (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M)\}$. Luego E_M es un subanillo de $End_R(M)$, y M es un E_M^{op}−módulo con acción $mf = f(m)$. Decimos que la endolongitud de M es la longitud que tiene como E_M^{op}−módulo, y la denotaremos por endolen(M).*

Definición 40. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R, esto es, por definición, una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ del uno de la k−álgebra R en suma de idempotentes ortogonales. Notemos que si $M \in Rep\mathcal{A}$, por definición de E_M^{op}, hay morfismos de anillos $\varphi_i : E_M^{op} \to (End_{e_iRe_i}(e_iM))^{op}$. Así que tiene sentido considerar la longitud l_i de e_iM como E_M^{op}−módulo. Denotaremos entonces,*

$$\underline{e - \dim} M = (l_1, ..., l_n).$$

Observación III.2: Notemos que si $M \cong N$, entonces $\underline{e - \dim} M = \underline{e - \dim} N$, pues por observación II.2.1, tenemos que si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un isomorfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces f^0 es un isomorfismo, así que una filtración como E_M^{op}−módulo de e_iM se corresponde de manera única, a través de f^0, a una filtración como E_N^{op}−módulo de e_iN.

Lema 41. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Sea $j \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon = 1 - e_j$, $\mathcal{A}_\varepsilon = (R_\varepsilon, W_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ el bocs asociado al funtor eliminación del idempotente ε : $F_\varepsilon : Rep\mathcal{A}_\varepsilon \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, $e' = (e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n)$ es un vector de idempotentes para R_ε y si $M' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$, tenemos:*

$$\underline{e' - \dim} M' = (l_1, ..., l_{j-1}, l_{j+1}, .., l_n) \text{ si y sólo si}$$
$$\underline{e - \dim} F_\varepsilon(M') = (l_1, ..., l_{j-1}, 0, l_{j+1}, ..., l_n).$$

Demostración: Por III.3.2 la imagen de F_ε es la subcategoría de $Rep\mathcal{A}$ constituida por aquellos objetos M tales que $e_jM = 0$, así que existe $M' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$ tal que $M \cong F_\varepsilon(M')$. Recordemos que M es M' considerado como R−módulo, y que si $f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}_\varepsilon}(M')$ entonces $(F_\varepsilon(f))^0$ no es más que f^0 visto como R−morfismo. Luego, para $i \neq j$,

$$e_iM'_1 \subseteq ... \subseteq e_iM'_n = e_iM'$$

es una $E_{M'}^{op}$−filtración si y sólo si es una E_M^{op}−filtración, por lo que se cumple el enunciado.

■

Lema 42. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Sea $\mathcal{A}_r = (R, W_r, \delta_r)$ el bocs asociado al funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, para cada $M' \in Rep\mathcal{A}_r$,*

$$\underline{e - \dim} M' = \underline{e - \dim} F_r (M').$$

Demostración: Similar al lema anterior.

■

Lema 43. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular y $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes para R. Supongamos que $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$, $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = 0$, $R' = T_R(W_0^{(1)})$. Sean entonces $\mathcal{A}_\theta = (R', W_\theta, \delta_\theta)$ el bocs asociado al funtor absorción F_θ : $Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$. Entonces, para cada $M' \in Rep\mathcal{A}_\theta$*

$$\underline{e - \dim} M' = \underline{e - \dim} F_\theta (M').$$

Demostración: Es inmediato que $(e_1, ..., e_n)$ es un vector de idempotentes de R'. Además, de la prueba de III.8.3 deducimos que ${}_RM' =_R F_\theta (M')$, por lo que $e_i M' = e_i F_\theta (M')$.

Como en las pruebas anteriores, si $f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}_\theta} (M')$ entonces $(F_\theta (f))^0$ no es más que f^0 visto como $R-$morfismo. Luego, para $i \neq j$,

$$e_i M'_1 \subseteq ... \subseteq e_i M'_n = e_i M'$$

es una $E_{M'}^{op}-$filtración si y sólo si es una $E_M^{op}-$filtración, por lo que se cumple el enunciado.

■

Proposición 44. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular con vector de idempotentes $e = (e_1, ..., e_n)$. Sea ${}_RX$ un módulo $S-$triangular donde $S = D_1 \times ... \times D_m$ con D_i una $k-$álgebra de división. Sea $e' = (e'_1, ..., e'_m)$ el vector de idempotentes para S asociado a la descomposición $S = D_1 \times ... \times D_m$, y sea $a_t^i = \dim_{D_i} (e_t X e'_i)$ para $t \in \{1, ..., n\}$ e $i \in \{1, ..., m\}$. Sea $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor de reducción asociado a X. Entonces, si $M' \in Rep\mathcal{A}^X$ tiene $\underline{e - \dim} M' = (l'_1, ..., l'_m)$, tendremos que*

$$\underline{e - \dim} F_X (M') = (\textstyle\sum_{i=1}^m a_1^i l'_i, ..., \sum_{i=1}^m a_n^i l'_i)$$

Demostración: Usando la notación y las fórmulas de III.15.2 y II.15.3 tenemos que si (f^0, f^1) es un automorfismo de M' en $Rep\mathcal{A}^X$, entonces $F_X ((f^0, f^1)) = (u^0, u^1)$ es un automorfismo de $M = F_X (M') = X \otimes_S M'$ en $Rep\mathcal{A}$, y que

$$u^0(x \otimes m) = x \otimes f^0(m) + \sum_j \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m].$$

Definimos, $r(x \otimes m) = \sum_j \rho_j(x) \otimes f^1(\gamma_j)[m]$. Así,

$$u^0 = I \otimes f^0 + r.$$

Sea $0 = X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^q = X$ la filtración de $R-S$–bimódulos considerada en la definición de S–triangularidad. Por comodidad usamos superíndices en lugar de subíndices. Recordemos que para toda $\rho \in B$, se cumple que $\rho(X^h) \subseteq X^{h-1}$, luego $r(e_tX^h \otimes_S M') \subseteq e_tX^{h-1} \otimes_S M'$ $(*)$. De esto se sigue que los $e_tX^h \otimes_S M'$ son E_M^{op}–módulos y $E_{M'}^{op}$–módulos. Más aún, de $(*)$ se sigue, para $h \in \{0, ..., q-1\}$, que

$$l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'/e_tX^h \otimes_S M'\right) = l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'/e_tX^h \otimes_S M'\right).$$

También por $(*)$ las sucesiones

$$0 \to e_tX^h \otimes_S M' \to e_tX^{h+1} \otimes_S M' \to \left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'/e_tX^h \otimes_S M'\right) \to 0$$

son exactas de E_M^{op}–módulos y exactas de $E_{M'}^{op}$–módulos. Luego, inductivamente demostramos que $l_{E_M^{op}}(e_tX^h \otimes_S M') = l_{E_{M'}^{op}}(e_tX^h \otimes_S M')$, para $h \in \{1, ..., q\}$: el caso $h = 1$ ya fue contemplado anteriormente, así que basta con ver que si suponemos cierto el enunciado para h, entonces, por las sucesiones exactas presentadas, tenemos que

$$\begin{aligned} l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'\right) &= l_{E_M^{op}}\left(e_tX^h \otimes_S M'\right) + l_{E_M^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'/e_tX^h \otimes_S M'\right) \\ &= l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^h \otimes_S M'\right) + l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'/e_tX^h \otimes_S M'\right) \\ &= l_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^{h+1} \otimes_S M'\right). \end{aligned}$$

Así que, para $h \in \{1, ..., q\}$

$$\begin{aligned} length_{E_{M'}^{op}}\left(e_tX^h \otimes_S M'\right) &= length_{E_M^{op}}\left(e_tX^h \otimes_S M'\right) \\ &= length_{E_M^{op}}\left(\oplus_{i=1}^m e_tX^h e_i' \otimes_S e_i'M'\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \dim_{D_i}\left(e_tX^h e_i'\right) length_{E_M^{op}}\left(e_i'M'\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \dim_{D_i}\left(e_tX^h e_i'\right) l_i'. \end{aligned}$$

Luego, $length_{E^{op}_{M'}}(e_tX \otimes_S M') = \sum_{i=1}^{m} a^i_t l'_i$.

∎

Observación III.3: Las condiciones de la proposición anterior son satisfechas cuando se cumplen las hipótesis de III.38 y R es básica.

Observación III.4: Consideremos a Z^n, $(l_1, ..., l_n)$ un elemento arbitrario de Z^n y las siguientes transformaciones:

$t_{F_{e_i}} : Z^n \to Z^{n+1}$ dada como $t_{F_{e_i}}((l_1, ..., l_n)) = (l_1, ..., l_{i-1}, 0, l_i, ..., l_n)$ para $i \in \{1, ..., n+1\}$,

$t_{F_r} : Z^n \to Z^n$ dada como la identidad,

$t_{F_\theta} : Z^n \to Z^n$ dada como la identidad,

$t_{F_X} : Z^n \to Z^m$ dada como $t_{F_X}((l_1, ..., l_n)) = (\sum_{i=1}^{n} a^i_1 l_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a^i_m l_i)$ para enteros a^i_j.

Lo que hemos mostrado de III.41 a III.44 es que

$$\begin{aligned}
t_{F_{e_i}}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_{e_j}(M'),\\
t_{F_r}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_r(M'),\\
t_{F_\theta}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_\theta(M'),\\
t_{F_X}(\underline{e-\dim}M') &= \underline{e-\dim}F_X(M').
\end{aligned}$$

III.6 Bocses salvajes.

Sea Σ la categoría de $k\langle x,y\rangle$ −módulos izquierdos de dimensión finita sobre k. Para motivar la siguiente definición véase 3.6 de [**LRS**].

Definición 45. *Decimos que el bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es de tipo de representación salvaje, o que es salvaje, si existe un $A(\mathcal{A}) - k\langle x,y\rangle$ −bimódulo M, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, tal que el funtor composición $G = E\left[M \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_\right]$: $\Sigma \to repA(\mathcal{A}) \to rep\mathcal{A}$, donde E denota la inmersión canónica, preserva inescindibles y clases de isomorfía. En lo sucesivo denotaremos a G simplemente como $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_$.*

Por supuesto que esta definición incluye el caso $\mathcal{A} = (R, 0, 0)$, y para el cual $Rep\mathcal{A} = R - Mod$.

Lema 46. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, y sea W'_0 un $R - R$−sumando directo de W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$. Sea M un objeto de $rep\mathcal{A}$ y A' la subálgebra $T_R(W'_0)$ de $A(\mathcal{A})$. Si M es inescindible como A'−módulo entonces es inescindible en $rep\mathcal{A}$.*

Demostración: Supongamos que M es inescindible como A'−módulo y que $f = (f^0, f^1) : M \to M$ es un morfismo idempotente en $rep\mathcal{A}$. Como $(f)^2 = f$ tenemos que $(f^0)^2 = f^0$. Por hipótesis $\delta(W'_0) = 0$, así que $f^0 \in End_{A'}(M)$, y como es idempotente, f^0 sólo puede ser la identidad o el morfismo cero. Si f^0 es un isomorfismo del lema II.25 se sigue que f es un isomorfismo, y así $f = Id_M$ en $repA$. Si $f^0 = 0$ por II.19 f es nilpotente, y por ser idempotente es el morfismo $(0,0)$.

■

Proposición 47. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, y sea W_0' un $R-R$–sumando directo de W_0, tal que $\delta\left(W_0'\right) = 0$. Sea A' la subálgebra $T_R(W_0')$ de $A(\mathcal{A})$. Si A' es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A' - k\langle x,y\rangle$ –bimódulo, el cual es finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, tal que el funtor $G_0 = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to repA'$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Hay una retracción de anillos $A(\mathcal{A}) \to A'$, así que se induce una retracción de funtores $r : A' - Mod \to A(\mathcal{A}) - Mod$ por V.1.2 de [M]. Luego hay un funtor $G = rG_0 : \Sigma \to rep\mathcal{A}$, dado en objetos como $G(Y) = r\left(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y\right) = r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$, y en morfismos g de Σ, como $F(g) = (r(G_0(g)), 0)$. Se cumple que $r(M)$ es finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, pues tiene la misma $k\langle x,y\rangle$ –estructura que M. Por el lema III.46, como r es retracción, se tiene que F preserva inescindibles.

Supongamos que $h = (h^0, h^1) : r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y \to r(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y'$ es un isomorfismo en $rep\mathcal{A}$, por observación II.2.1 h^0 es un isomorfismo. Como $\delta\left(W_0'\right) = 0$ se sigue que h^0 es un isomorfismo en $A' - Mod$, así que por hipótesis Y y Y' son isomorfos en Σ. Luego F preserva clases de isomorfía.

■

Proposición 48. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y (η_0, η_1), con $\eta_0 : R \to R'$ y $\eta_1 : W \to W'$, un par graduado como en III.1. Sea $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ el bocs inducido y $F' : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ el encaje asociado, como en III.2.1. Supongamos que F' es pleno. Luego, si $\mathcal{A}'$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A(\mathcal{A}') - k\langle x,y\rangle$ –bimódulo, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ –módulo, de manera tal que el funtor $G = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to rep\mathcal{A}'$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $\eta : T_R(W) \to T_{R'}(W')$ el epimorfismo inducido, el cual es un morfismo de bocses. Sea $\theta' : A(\mathcal{A}') \otimes_{R'} M \to M$ el R'–morfismo que da estructura de $A(\mathcal{A}')$ –módulo a M, y sea $\theta : A(\mathcal{A}) \otimes_R M \to M$ el R–morfismo que es la $A(\mathcal{A})$ –estructura inducida por η. Ahora bien, si $Y \in \Sigma$, entonces la $A(\mathcal{A}')$ –estructura de $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$ está dada por $\theta' \otimes Id_Y$. Luego la $A(\mathcal{A})$ –estructura inducida por η es $\theta_1 = \theta \otimes Id_Y$, es decir, $F'(G(Y)) \cong F'(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$.

Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}'$ entonces $F'((f^0, f^1)) = (f^0, f^1\eta)$. Luego, si $g : Y \to Y'$ es un morfismo en Σ tenemos que
$F'(G(g)) = F'(Id_M \otimes g, 0) = \left(Id_{F'(M)} \otimes g, 0\right)$.

Concluimos que hay un funtor $G_0 = F'(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to rep\mathcal{A}$ el cual es naturalmente isomorfo a $F'G$, y puesto que en el contexto de la hipótesis F' es fiel y pleno, tenemos que $F'G$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

■

Corolario 49. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ el funtor eliminación de idempotentes. Si $\mathcal{A}_e$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Corolario 50. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ el funtor regularización. Si $\mathcal{A}_r$ es salvaje entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Proposición 51. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$ el funtor absorción. Si $\mathcal{A}_\theta$ es salvaje, entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Se sigue de que F_θ es un isomorfismo de categorías.

■

Proposición 52. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y sea ${}_RX$ un módulo $S-$completo. Sea $F_X : Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ el funtor reducción asociado a X. Si $\mathcal{A}^X$ es salvaje, entonces $\mathcal{A}$ es salvaje.*

Demostración: Sea M un $A(\mathcal{A}^X) - k\langle x,y\rangle$ $-$bimódulo, finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ $-$módulo, de manera tal que el funtor $G = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \Sigma \to rep\mathcal{A}^X$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.

Sea $\{x_i, \lambda_i \mid i \in I\}$ una base dual finita de X_S. Sea N un objeto en $Rep\mathcal{A}^X$ y $* : A(\mathcal{A}^X) \otimes_S N \to N$ su $A(\mathcal{A}^X)$ $-$estructura. Tenemos por III.17.2 que la $A(\mathcal{A})$ $-$estructura de $F_X(N)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes n) = \textstyle\sum_i x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * n$$

para $a \in A(\mathcal{A})$. Así que la $A(\mathcal{A})$ $-$estructura de $F_X(M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes m) \otimes y = \left(\textstyle\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * m\right) \otimes y$$

y la $A(\mathcal{A})$ $-$estructura de $F_X\left(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y\right)$ está dada por

$$a \cdot (x \otimes (m \otimes y)) = \textstyle\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * (m \otimes y) = \left(\sum x_i \otimes \alpha_{\lambda_i,x}(a) * m\right) \otimes y$$

por lo que $F_X\left(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y\right) \cong F_X\left(M\right) \otimes_{k\langle x,y\rangle} Y$.
Si $g : Y \to Y'$ es un morfismo en Σ tenemos por III.15.2 y III.15.3 que

$$F_X\left(G\left(g\right)\right) = F_X\left(\left(Id_M \otimes g, 0\right)\right) = \left(Id_X \otimes Id_M \otimes g, 0\right) = \left(Id_{X \otimes M} \otimes g, 0\right).$$

Se sigue que hay un funtor $G_0 = F_X\left(M\right) \otimes_{k\langle x,y\rangle} \_ : \Sigma \to rep\mathcal{A}$, el cual es naturalmente isomorfo a $F_X G$, y puesto que F_X es fiel y pleno, tenemos que $F_X G$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Como $M_{k\langle x,y\rangle}$ y X_S son finitamente generados, tenemos que $F_X\left(M\right)_{k\langle x,y\rangle}$ es finitamente generado.
■

Capítulo IV
Estructuras exactas.

IV.1 Estructuras exactas y funtores exactos.

Recordemos que una categoría $\mathcal{C}$ es preaditiva si para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano, y para cada terna de objetos A, B, C en $\mathcal{C}$, la composición de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ es $Z-$bilineal. Si además $\mathcal{C}$ tiene sumas directas finitas, y objeto cero, entonces $\mathcal{C}$ es aditiva. En los siguientes nueve enunciados $\mathcal{C}$ será una categoría aditiva.

Definición 1. *Sea (i, d) una pareja de morfismos en $\mathcal{C}$ con composición*

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$$

Decimos que i es un núcleo de d si $di = 0$ y para todo morfismo $t : M \to Y$ tal que $dt = 0$, existe un único morfismo $s : M \to X$ tal que $t = is$. A su vez, d es conúcleo de i si $di = 0$ y si para todo morfismo $p : Y \to N$ tal que $pi = 0$, existe un único morfismo $q : Z \to N$ tal que $p = qd$.

Nótese que un núcleo es un monomorfismo, y un conúcleo es un epimorfismo. Más aún, para un morfismo dado, en caso de existir su núcleo éste es único salvo isomorfismo, y en caso de existir su conúcleo éste es único salvo isomorfismo.

Definición 2. *Sea (i, d) una pareja de morfismos en $\mathcal{C}$ con composición*

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z,$$

diremos que (i, d) es una pareja exacta si i es núcleo de d, y d es conúcleo de i.

Definición 3. *Un morfismo entre parejas exactas (i, d) e (i_0, d_0), es una terna (f, g, h) de morfismos que hacen conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{d} & Z \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ X_0 & \xrightarrow[i_0]{} & Y_0 & \xrightarrow[d_0]{} & Z_0 \end{array}$$

Definición 4. *Decimos que un morfismo entre parejas exactas es un isomorfismo si cada uno de los elementos de la terna es un isomorfismo.*

Luego, la relación de isomorfía es una relación de equivalencia.

Proposición 5. *Sea $(f, g, h) : (i, d) \to (i_0, d_0)$ un morfismo de parejas exactas:*

1. *Si f, h son monomorfismos, entonces g es un monomorfismo.*

2. *Si f, h son epimorfismos, entonces g es un epimorfismo.*

Demostración: Tengamos en mente el diagrama de la definición IV.3.

1. Sea $t : M \to Y$ tal que $gt = 0$, entonces $0 = d_0 gt = hdt$. Puesto que h es un monomorfismo, se sigue que $dt = 0$, y así existe un único $s : M \to X$ tal que $is = t$. Luego $0 = gt = gis = i_0 fs$, y como $i_0 f$ es un monomorfismo tenemos que $0 = s$ y que $t = 0$

2. Dual

■

Definición 6. *Una estructura exacta ε para la categoría $\mathcal{C}$ es una clase de parejas exactas ε cerrada bajo isomorfismos. Una conflación es una pareja exacta (i, d) en ε; en tal caso llamamos a i inflación y a d deflación.*

Definición 7. *([GR]) Una categoría exacta es un par $(\mathcal{C}, \varepsilon)$, donde ε es una estructura exacta para $\mathcal{C}$, que satisface el conjunto GR de axiomas siguiente:*

1. *La composición de dos deflaciones es una deflación.*

2. *Para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z_0, Z)$ y cada deflación $d : Y \to Z$, hay un $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y_0, Y)$ y una deflación $d_0 : Y_0 \to Z_0$ tal que $dg = fd_0$.*

3. *Las identidades son deflaciones, si dp es una deflación, entonces d es una deflación.*

4. *Las identidades son inflaciones, si pi es una inflación, entonces i es una inflación.*

Teorema 8. *(Keller) Sea $(f, g, h) : (i, d) \to (i_0, d_0)$ un morfismo de conflaciones. Si f y h son morfismos identidad, entonces g es un isomorfismo.*

Demostración: Es el paso 2, pag.31, de ([DRSS]).
■

Definición 9. *Consideremos el siguiente conjunto K de axiomas para un par $(\mathcal{C},\varepsilon)$:*

1. *1_0 es una deflación.*
2. *Composición de deflaciones es una deflación.*
3. *Para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z_0)$ y toda deflación $d_0 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y_0, Z_0)$ hay un pull-back*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{d} & Z \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y_0 & \xrightarrow{d_0} & Z_0 \end{array}$$

   donde d es una deflación.

4. *Para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X_0)$ y toda inflación $i \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ hay un pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X_0 & \xrightarrow{i_0} & Y_0 \end{array}$$

   donde i_0 es una inflación.

5. *Las retracciones en $\mathcal{C}$ tienen núcleos.*

Teorema 10. *(Keller [DRSS]) Para un par $(\mathcal{C},\varepsilon)$, los siguientes conjuntos de axiomas son equivalentes:*

1. *K*
2. *K^{op}*
3. *GR*
4. *GR^{op}*

Ahora construyamos una estructura exacta para $RepA$ cuando $\mathcal{A}$ es un bocs. Recordemos que por observación II.2.2 $RepA$ es una categoría aditiva.

Definición 11. *Si $\mathcal{A}$ es un bocs, denotaremos por $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ a la clase formada por aquellos pares de morfismos con composición,*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

tales que $gf = 0$ y la sucesión de $R-$módulos

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es exacta que se divide.

Probaremos que $(Rep\mathcal{A}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ es una categoría exacta, si $\mathcal{A}$ es un bocs K-R, pero primero veremos que $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ consta de pares exactos de $Rep\mathcal{A}$.

Lema 12. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs, entonces $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es cerrada bajo isomorfismos.*

Demostración: Sea (f, g) un elemento de $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, y consideremos el isomorfismo de parejas exactas

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_2"'] & N \arrow[d, "h_3"'] \\ L_0 \arrow[r, "u"'] & M_0 \arrow[r, "v"'] & N_0. \end{tikzcd}$$

Como $0 = h_3 gf = vuh_1$ y h_1 es un isomorfismo, tenemos que $vu = 0$. Por observación II.2.1 h_1^0, h_2^0 y h_3^0 son $R-$isomorfismos, así que (u^0, v^0) es exacta corta que se divide.

■

Definición 13. *Dos pares $(f, g), (f', g') \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$ son equivalentes, si y sólo si hay un isomorfismo h que hace conmutativo el siguiente diagrama en $Rep\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, equal] \\ L \arrow[r, "f'"'] & M' \arrow[r, "g'"'] & N. \end{tikzcd}$$

Lema 14. *(Ovsienko) Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Cada par $(f, g) \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$, en donde $f = (f^0, f^1)$, $g = (g^0, g^1)$ y*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N,$$

es equivalente a un par en ε_A de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M' \xrightarrow{(g^0,0)} N.$$

Demostración: Sea $x = ((f^0, f^1), (g^0, g^1))$ un elemento de ε_A.

Como f^0 es una R–sección, tenemos por II.24 un isomorfismo $h = (Id, h^1) : M \to M'$ tal que $hf = (f^0, 0)$, es decir que tenemos la equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{(f^0,f^1)} & M & \xrightarrow{(g^0,g^1)} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \xrightarrow[(f^0,0)]{} & M' & \xrightarrow[(g^0,\nu)]{} & N. \end{array}$$

De la misma manera, como g^0 es una R–retracción, por II.23 hay un isomorfismo $h = (Id, h^1) : M'' \to M$ tal que $gh = (g^0, 0)$, es decir que ahora tenemos la equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{(f^0,u)} & M'' & \xrightarrow{(g^0,0)} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \xrightarrow[(f^0,f^1)]{} & M & \xrightarrow[(g^0,g^1)]{} & N. \end{array}$$

Consideremos a todos los pares de ε_A equivalentes a x que son de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M' \xrightarrow{(g^0,\nu)} N$$

o de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,u)} M' \xrightarrow{(g^0,0)} N$$

Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq ... \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de grado 1 relacionada a la triangularidad. A un par $x' \in \varepsilon_A$ del primer tipo asociémosle el número $i_{x'}$, definido como el máximo valor para el que $\nu\left(W_1^i\right) = 0$, y a un par $x'' \in \varepsilon_A$ del segundo tipo, el número $j_{x''}$, definido como el máximo valor para el cual $u\left(W_1^j\right) = 0$. Sea n el máximo de todos los posibles valores $i_{x'}$ y $j_{x''}$, si $n = s$ el enunciado es cierto. Supongamos que $n < s$ y que $n = i_{x'}$ para algún par $x' \in \varepsilon_A$, como antes, por II.23 tenemos una equivalencia de pares de ε_A

$$\begin{array}{ccccc} L & \overset{(f^0,u)}{\rightarrow} & M' & \overset{(g^0,0)}{\rightarrow} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \underset{(f^0,0)}{\rightarrow} & M'' & \underset{(g^0,\nu)}{\rightarrow} & N \end{array}$$

para la cual $h^1(w) = -q\nu(w)$ cuando $w \in W_1^{i_{x'}+1}$, donde $q \in_R (N, M')$ es tal que $g^0 q = Id$. Puesto que $0 = ((g^0,\nu)(f^0,0))^1(w) = \nu(w) f^0$, tenemos que, para $w \in W_1^{i_{x'}+1}$

$$0 = (h(f^0,u))^1(w) = h^1(w) f^0 + Idu^1(w) = -q\nu(w) f^0 + u^1(w) = u^1(w),$$

lo que contradice la maximalidad de n. Si $n < s$ y $n = j_{x''}$ para algún par $x'' \in \varepsilon_{\mathcal{A}}$, como antes, tenemos una equivalencia de pares de $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, por II.24

$$\begin{array}{ccccc} L & \overset{(f^0,u)}{\rightarrow} & M' & \overset{(g^0,0)}{\rightarrow} & N \\ {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\ L & \underset{(f^0,0)}{\rightarrow} & M'' & \underset{(g^0,\nu)}{\rightarrow} & N \end{array}$$

para la cual $h^1(w) = u(w)(-q)$ cuando $w \in W_1^{j_{x''}+1}$, donde $q \in_R (M'', L)$ es tal que $qf^0 = Id$. Puesto que $0 = ((g^0,0)(f^0,u))^1(w) = g^0 u(w)$, tenemos que, para $w \in W_1^{j_{x''}+1}$

$$0 = ((g^0,\nu)h)^1(w) = g^0 h^1(w) + \nu(w) Id = g^0 u(w)(-q) + \nu(w) = \nu(w)$$

lo que contradice la maximalidad de n

■

Lema 15. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R y supongamos que*

$$L \overset{f^0}{\rightarrow} M \overset{g^0}{\rightarrow} N$$

es una sucesión exacta corta de $A(\mathcal{A})$–módulos, entonces en $Rep\mathcal{A}$: $(f^0, 0)$ es núcleo de $(g^0, 0)$, y $(g^0, 0)$ es un conúcleo de $(f^0, 0)$. Así que, $((f^0, 0), (g^0, 0))$ es un par exacto en $Rep\mathcal{A}$.

Demostración: Por observación II.2.2 $(f^0,0)$ y $(g^0,0)$ son morfismos en *RepA*.

Sea $h=(h^0,h^1):X\to M$ tal que $gh=0$. Luego existe un único $u^0\in_R(X,L)$ tal que $f^0u^0=h^0$, y para cada $v\in V(\mathcal{A})$ existe un único morfismo $u^1(v)\in(X,L)_k$ tal que $f^0u^1(v)=h^1(v)$.

Entonces, para cada $a\in A(\mathcal{A})$, se cumple que

$$f^0u^1(av)=h^1(av)=ah^1(v)=af^0(u^1(v))=f^0(au^1(v)),$$

luego, de la inyectividad de f^0 se sigue que $u^1(av)=au^1(v)$. Similarmente, se tiene que

$$f^0[(u^1(va))[x]]=h^1(va)[x]=h^1(v)[ax]=f^0[(u^1(v))[ax]]=f^0[(u^1(v)a)[x]]$$

implica que $u^1(va)=(u^1(v))a$. Por lo anterior $u^1\in Hom_{A(\mathcal{A})-A(\mathcal{A})}(V(\mathcal{A}),(X,L)_k)$. Como tenemos que f^0 es un morfismo de $A(\mathcal{A})-$módulos, luego

$$f^0(au^0(x)-u^0(ax))=af^0(u^0(x))-f^0(u^0(ax))=ah^0(x)-h^0(ax)=$$
$$h^1(\delta(a))[x]=f^0[u^1(\delta(a))[x]],$$

por lo tanto $au^0(x)-u^0(ax)=u^1(\delta(a))[x]$, por lo que $u=(u^0,u^1):X\to L$ es un morfismo en *RepA*, y como se vió en la construcción es único.

De manera análoga se prueba que $(g^0,0)$ es un conúcleo.

■

Corolario 16. *Si $\mathcal{A}$ un bocs K-R, $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es una estructura exacta sobre RepA.*

Lema 17. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Un morfismo $(g^0,g^1):M\to N$ en RepA es una deflación si y sólo si g^0 es una $R-$retracción.*

Demostración: Una implicación se sigue de la definición.

Si $g=(g^0,g^1)$ cumple que g^0 es una $R-$retracción, entonces por lema II.23 existe un isomorfismo $h=(Id,h^1):M'\to M$ tal que $gh=(g^0,0)$. Como $(g^0,0)$ es un morfismo en *RepA*, se sigue que g^0 es una $A(\mathcal{A})-$retracción. Sea f^0 el inverso derecho de g^0. Por lema IV.15 la primera línea del siguiente diagrama es conflación:

$$\begin{array}{ccccc}
K & \xrightarrow{(f^0,0)} & M' & \xrightarrow{(g^0,0)} & N \\
{\scriptstyle (Id,0)}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle (Id,0)}\downarrow \\
K & \xrightarrow[(f^0,f^1)]{} & M & \xrightarrow[(g^0,g^1)]{} & N.
\end{array}$$

Puesto que $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ es cerrado bajo isomorfismos, por IV.12, la segunda línea también es conflación.

■

Similarmente se prueba el resultado dual.

Lema 18. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs K-R. Un morfismo $(f^0, f^1) : L \to M$ en $Rep\mathcal{A}$ es inflación si y sólo si f^0 es una R−sección.*

Teorema 19. $(Rep\mathcal{A}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ *es una categoría exacta.*

Demostración: De los lemas anteriores se siguen los axiomas 11.1, 11.3 y 11.4 :

1. (11.1) : Si $g = (g^0, g^1) : M \to N$ y $h = (h^0, h^1) : N \to X$ son deflaciones, entonces g^0 y h^0 son R−retracciones, así que $h^0 g^0$ es una R−retracción, luego $hg = \left(h^0 g^0, (hg)^1\right)$ es una deflación.

2. (11.3) : Las identidades, las cuales son morfismos de la forma $(Id, 0)$, por IV.17 son deflaciones. Si dp es una deflación entonces $(dp)^0 = d^0 p^0$ es una R−retracción, así que d^0 es una R−retracción y d es una deflación.

3. (11.4) : Argumento dual.

Vamos a probar 11.2. Sean $f = (f^0, f^1) : Z_0 \to Z$ un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ y $d = (d^0, d^1) : Y \to Z$ una deflación. Puesto que d^0 es una R−retracción existe $q \in_R (Z, Y)$ tal que $d^0 q = Id_Z$. Luego, el R−morfismo $(d^0, -f^0) : Y \oplus Z_0 \to Z$ es una R−retracción, pues si consideramos el R−morfismo $\binom{q}{0} : Z \to Y \oplus Z_0$ obtenemos que $(d^0, -f^0)\binom{q}{0} = d^0 q = Id_Z$. Así que por IV.17, existe una conflación

$$N \xrightarrow{\binom{j_1}{j_2}} Y \oplus Z_0 \xrightarrow{(d,-f)} Z.$$

Así, $j = \binom{j_1}{j_2}$ es núcleo de $(d, -f)$. Luego, si $\binom{u}{v} : X \to Y \oplus Z_0$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ tal que $du = fv$, existe un único morfismo $p : X \to N$ en $Rep\mathcal{A}$ tal que $j_1 p = u$ y $j_2 p = v$, es decir, tenemos un pullback en $Rep\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{j_2} & Z_0 \\ {\scriptstyle j_1}\downarrow & d & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \to & Z. \end{array}$$

Como $(j, (d, -f))$ es una conflación, tenemos que $(j^0, (d^0, -f^0))$ es una sucesión corta exacta que se divide, luego

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{j_2^0} & Z_0 \\ j_1^0 \downarrow & d^0 & \downarrow f^0 \\ Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

es el pullback en $R-Mod$, por lo que j_2^0 es una R-retracción. Por IV.17 tenemos que j_2 es una deflación.

■

Observación IV.1: En el desarrollo anterior hemos construido el pullback en $RepA$, de manera dual podemos construir el pushout, el cual existe por IV.10.

Definición 20. *Denotaremos por* $Ext_{\mathcal{A}}(M,N)$ *a las clases de equivalencia bajo la equivalencia de conflaciones que principian en* N *y terminan en* M.

Como en el caso de las categorías abelianas se le puede dar a $Ext_{\mathcal{A}}(M,N)$ una estructura de k-espacio vectorial: el teorema IV.10, y la existencia del pullback y el pushout permiten imitar las pruebas de III.1 y III.2 de [M]. Más aún, $Ext_{\mathcal{A}}(?,\_)$ es un bifuntor sobre $RepA$, contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

Definición 21. *Sea* T *un álgebra y* R *una subálgebra de* T. *Si* $M,N \in T-Mod$ *entonces definimos a* $Ext_{T,R}(M,N)$ *como todos los elementos de* $Ext_T(M,N)$ *que restringidos a* R *se dividen.*

Proposición 22. *Sea* $\mathcal{A} = (R,W,\delta)$ *un bocs K-R. Sean* $L,N \in RepA$, *y denotemos por* $\theta_1 \in Hom_{R-R}(W_0,(L,L)_k)$ *y* $\theta_2 \in Hom_{R-R}(W_0,(N,N)_k)$ *los morfismos correspondientes a sus respectivas estructuras de* $A(\mathcal{A})$ *-módulos. Consideremos la siguiente sucesión:*

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow Hom_{\mathcal{A}}(N,L) \xrightarrow{\alpha} {}_R(N,L) \oplus Hom_{R-R}(W_1,(N,L)_k) \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} Hom_{R-R}(W_0,(N,L)_k) \xrightarrow{\gamma} Ext_{\mathcal{A}}(N,L) \rightarrow 0 \end{array}$$

donde $\alpha(f) = \alpha((f^0,f^1)) = (f^0,f^1)$, $\beta((f_0,f_1))(w)[n]$
$= \theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n]) - f_1(\delta(w))[n]$, *y definimos a* $\gamma(g)$ *como la clase de la conflación*

$$c_g = L \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} L \oplus N \xrightarrow{((0,1),0)} N$$

donde L y N conservan las respectivas estructuras de $A(\mathcal{A})$ −módulos, y a $L \oplus N$ le asociamos la estructura dada por

$$\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & g \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la sucesión es exacta.

En particular, para $M \in repA$ se tiene que

$$\dim_k (Hom_{\mathcal{A}}(M, M)) - \dim_k (Ext_{\mathcal{A}}(M, M)) = q_{\mathcal{A}}(M).$$

Demostración: La inyectividad de α es inmediata. El núcleo de β se compone de los morfismos (f_1, f_2) tales que $\theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n]) - f_1(\delta(w))[n] = 0$, los cuales son precisamente los morfismos $(f^0, f^1) \in_{RepA} (N, L)$, es decir, $\operatorname{Im}\alpha = Ker\beta$.

Cualquier sucesión $x \in Ext_{\mathcal{A}}(N, L)$ se divide en $R - Mod$, por lo que podemos suponer, gracias a IV.14, que un representante de x se escribe, en términos de $A(\mathcal{A})$ −módulos, como

$$L \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} L \oplus N \xrightarrow{((0,1),0)} N.$$

De esta manera tenemos que la estructura de $A(\mathcal{A})$ −módulo de $L \oplus N$ está determinada por un $\theta_3 \in Hom_{R-R}(W_0, (L \oplus N, L \oplus N)_k)$, lo que podemos escribir como $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_3^1 & \theta_3^2 \\ \theta_3^3 & \theta_3^4 \end{pmatrix}$. Entonces, para que $\binom{1}{0}$ y $(0,1)$ sean $A(\mathcal{A})$ −morfismos se debe cumplir que $\begin{pmatrix} \theta_3^1 \\ \theta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $(\theta_3^3, \theta_3^4) = (0, \theta_2)$, por lo que en realidad $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta' \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$

De aquí se sigue que $\gamma : Hom_{R-R}(W_0, (N, L)_k) \to Ext_{\mathcal{A}}(N, L)$ es suprayectiva.

Supongamos que las conflaciones c_g y $c_{g'}$ son equivalentes, esto es, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_g: & 0 & \to & L & \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} & L \oplus N & \xrightarrow{((0,1),0)} & N & \to & 0 \\ & & & \| & & h \downarrow & & \| & & \\ c_{g'}: & 0 & \to & L & \xrightarrow{\left(\binom{1}{0},0\right)} & L \oplus N & \xrightarrow{((0,1),0)} & N & \to & 0. \end{array}$$

Usando la conmutatividad del diagrama en *RepA*, es una comprobación directa ver que $h = \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, por lo que

$$\begin{pmatrix} \theta_1(w) & g'(w) \\ 0 & \theta_2(w) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{l}{n} - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1(w) & g(w) \\ 0 & \theta_2(w) \end{pmatrix}\left(\binom{l}{n}\right)$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\delta(w))\left[\binom{l}{n}\right] = 0$$

de lo cual se sigue que

$$\theta_1(w)[t(n)] + g'(w)[n] - t(\theta_2(w)[n]) - g(w)[n] - s(\delta(w))[n] = 0$$

es decir que $(g - g') = \beta((t,s))$, por lo que $\operatorname{Im}\beta = Ker\gamma$.
■

Proposición 23. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ la estructura exacta sobre $Rep\mathcal{A}$ definida en IV.11. Sea W_0^1 un sumando directo de W_0 como $R-R-$bimódulos, tal que $\delta(W_0^1) = 0$, y sea $T = T_R(W_0^1)$. Entonces tenemos un morfismo suprayectivo de $End_{\mathcal{A}}(L) - (End_{\mathcal{A}}(N))^{op}$ $-$bimódulos dado por la restricción*

$$r : Ext_{\mathcal{A}}(N, L) \to Ext_{T,R}(N, L).$$

Demostración: Sea $i : W_0^1 \to W_0$ la inclusión canónica. Consideremos las sucesiones de la proposición previa. Afirmamos que hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} {}_R(N,L) \oplus Hom_{R-R}(W_1, (N,L)_k) & \overset{\beta}{\to} & Hom_{R-R}(W_0, (N,L)_k) & \overset{\gamma}{\to} & Ext_{\mathcal{A}}(N,L) \\ {\scriptstyle (1,0)}\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\ {}_R(N,L) & \overset{\beta'}{\to} & Hom_{R-R}(W_0^1, (N,L)_k) & \overset{\gamma'}{\to} & Ext_{T,R}(N,L), \end{array}$$

donde las horizontales son sucesiones exactas y γ y γ' son suprayectivas. Las últimas afirmaciones se siguen de la proposición anterior, así que comprobemos la conmutatividad:

$\beta' \cdot (1,0)((f_0, f_1)) = \beta'(f_0) = g$ definida por $g(w)[n] = \theta_1(w)[f_0(n)] - f_0(\theta_2(w)[n])$, mientras que $i^* \cdot \beta((f_0, f_1)) = g_0$ está dada por

$$\begin{aligned} g_0(w)[n] &= \theta_1(i(w))[f_0(n)] - f_0(\theta_2(i(w))[n]) - f_1(\delta(i(w)))[n] \\ &= \theta_1(i(w))[f_0(n)] - f_0(\theta_2(i(w))[n]), \end{aligned}$$

luego conmuta el primer cuadro. Por otra parte,

$$\gamma' i^*(g) \;=\; L \overset{\binom{1}{0}}{\to} L \oplus N \overset{(0,1)}{\to} N$$

donde a $L \oplus N$ le asociamos la estructura dada por $\theta_3 = \begin{pmatrix} \theta_1 & g \cdot i \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$, y precisamente ésta es el resultado de $r(\gamma(g))$. Como $\gamma' i^*$ es un epimorfismo, se tiene que r es un epimorfismo.

Sea $x = ((f^0, 0), (g^0, 0))$ un representante de un elemento $Ext_{\mathcal{A}}(N, L)$. Por IV.19 y IV.14, si $u = (u^0, u^1) : N' \to N$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$ entonces hay un diagrama de pullback en $Rep\mathcal{A}$ y una equivalencia de conflaciones:

$$\begin{array}{cccccc}
x' : & L & \xrightarrow{((f')^0,0)} & M'' & \xrightarrow{((g')^0,0)} & N' \\
 & \| & f' & \downarrow^{v_2} & g' & \| \\
 & L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & N' \\
 & \| & (f^0,0) & \downarrow^{v_1} & (g^0,0) & \downarrow^{u^0} \\
x : & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N.
\end{array}$$

Sea $v_1 v_2 = v = (v^0, v^1)$. Como $\delta(W_0^1) = 0$ se sigue que v^0 y u^0 son $T-$morfismos. Luego, al aplicar r obtenemos el diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas en $T - Mod$:

$$\begin{array}{cccccc}
r(x') : & L & \xrightarrow{(f')^0} & M'' & \xrightarrow{(g')^0} & N' \\
 & \| & f^0 & \downarrow^{v^0} & g^0 & \downarrow^{u^0} \\
r(x) : & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N.
\end{array}$$

Sea $r(x)u^0$ el pullback de $r(x)$ por u^0 en $T - Mod$. Por lema III.1.3 de [M] existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccccc}
r(x') : & L & \xrightarrow{(f')^0} & M'' & \xrightarrow{(g')^0} & N' \\
 & \| & & \downarrow & & \| \\
r(x)u^0 : & L & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' \\
 & \| & f^0 & \downarrow & g^0 & \downarrow^{u} \\
r(x) : & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N.
\end{array}$$

Luego, $r(x')$ es equivalente a $r(x)u^0$. Hemos demostrado que si, para $y \in Ext_{T,R}(N, L)$ y $u = (u^0, u^1) \in End_{\mathcal{A}}(N)$, definimos la acción por la derecha como el pullback

yu^0 (¡compárese con la definición de E_M^{op} en III.39 !), entonces r es un morfismo de $(End_{\mathcal{A}}(N))^{op}$ –módulos.

Similarmente probamos que r es morfismo de $End_{\mathcal{A}}(L)$ –módulos.

■

Definición 24. *Un funtor $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bocses K-R, se dice que es exacto si envia conflaciones en conflaciones.*

Lema 25. *Sea $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ un funtor exacto. Entonces:*

1. *F induce una transformación natural de bifuntores*

$$F_* : Ext_{\mathcal{B}}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F(?), F(\_)).$$

2. *Si F es fiel y pleno entonces F_* es inyectiva.*

Demostración: La primera parte se realiza como en [M]. Para la segunda parte, consideremos la conflación en $Rep\mathcal{B}$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

La conflación

$$F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$$

se divide si y sólo si existe un morfismo $h : F(N) \to F(M)$ tal que $F(g)h = (I_{F(N)}, 0)$. Como F es pleno existe h' tal que $F(h') = h$. Como F es fiel tenemos que $gh' = (I_N, 0)$, así que la sucesión original se divide.

■

Lema 26. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sea $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$ un bocs como en III.1, de manera que el morfismo de bocses η es suprayectivo, por lo que $F_\eta : Rep\mathcal{A}' \to Rep\mathcal{A}$ es el encaje de III.2.*

1. *Si $\mathcal{A}'$ es K-R entonces F_η es exacto.*
2. *Supongamos que $\operatorname{Im} F_\eta$ es cerrada bajo extensiones en $A(\mathcal{A}) - Mod$. Si el par de morfismos con composición $(F_\eta(f), F_\eta(g))$ es una conflación, entonces es equivalente a la imagen, bajo F_η, de una conflación $(\underline{f}, \underline{g})$.*

Demostración: Sea $f = (f^0, f^1)$ en $RepA'$; el morfismo $(F_\eta(f))^0$ es precisamente el morfismo f^0 considerado como $R-$morfismo. Luego, para $f = (f^0, f^1) : L \to M$ y $g = (g^0, g^1) : M \to N$ en $RepA'$ tenemos que

$$0 \to L \xrightarrow{f^0} M \xrightarrow{g^0} N \to 0$$

es exacta que se divide si y sólo si

$$0 \to F_\eta(L) \xrightarrow{(F_\eta(f))^0} F_\eta(M) \xrightarrow{(F_\eta(g))^0} F_\eta(N) \to 0$$

es exacta que se divide. Por fidelidad tenemos que $(F_\eta(g))(F_\eta(f)) = 0$ si y sólo si $gf = 0$.

Supongamos que (f, g) es una conflación. Por IV.14 hay una conflación equivalente $(\underline{f}, \underline{g})$de la forma

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M' \xrightarrow{(g^0,0)} N$$

donde f^0 y g^0 son $A(\mathcal{A}')-$morfismos. Como $F_\eta(\underline{f}) = \left((F_\eta(\underline{f}))^0, 0\right)$ y $F_\eta(\underline{g}) = \left((F_\eta(\underline{g}))^0, 0\right)$, entonces $(F_\eta(\underline{f}))^0$ y $(F_\eta(\underline{g}))^0$ son $A(\mathcal{A})-$morfismos. Luego, por IV.15, $(F_\eta(\underline{f}), F_\eta(\underline{g}))$ es un elemento de $\varepsilon_\mathcal{A}$. Como F_η es un funtor $(F_\eta(\underline{f}), F_\eta(\underline{g}))$ es equivalente a $(F_\eta(f), F_\eta(g))$, así que también es una conflación.

Hemos probado que F_η es exacto.

Supongamos ahora que $(F_\eta(f), F_\eta(g))$ es una conflación. Por IV.14 hay una conflación equivalente de la forma

$$F_\eta(L) \xrightarrow{((F_\eta(f))^0,0)} M'' \xrightarrow{((F_\eta(g))^0,0)} F_\eta(N)$$

donde $(F_\eta(f))^0$ y $(F_\eta(g))^0$ son $A(\mathcal{A})-$morfismos. Por hipótesis del segundo inciso $M'' = F_\eta(M')$. Como $\eta_{|A(\mathcal{A}')}$ es un epimorfismo de anillos, por [Si] η induce un encaje pleno $A(\mathcal{A}') - Mod \to A(\mathcal{A}) - Mod$, así que hay una sucesión exacta corta en $A(\mathcal{A}') - Mod$ de la forma

$$L \xrightarrow{\underline{f}^0} M' \xrightarrow{\underline{g}^0} N$$

donde $\underline{f}^0$ y $\underline{g}^0$ vistos como $A(\mathcal{A})$ −morfismos son $(F_\eta(f))^0$ y $(F_\eta(g))^0$ respectivamente. Por IV.15, $(\underline{f},\underline{g}) = ((\underline{f}^0, 0), (\underline{g}^0, 0))$ es un elemento de $\varepsilon_{\mathcal{A}'}$, y por construcción su imagen es $(((F_\eta(f))^0, 0), ((F_\eta(g))^0, 0))$.

■

Proposición 27. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y $F_e : Rep\mathcal{A}_e \to Rep\mathcal{A}$ el funtor eliminación de idempotentes. Este funtor induce un isomorfismo natural de bifuntores*

$$(F_e)_* : Ext_{\mathcal{A}_e}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F_e(?), F_e(\_)).$$

Demostración: Por III.3.4 $\mathcal{A}_e$ es un bocs K-R. Por IV.26.1 F_e es exacto. Por IV.25.2 $(F_e)_*$ es una transformación natural inyectiva. Sea una conflación

$$F_e(L) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_e(N)$$

Por III.3.2 tenemos que la imagen de F_e es la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ formada por los objetos Q tales que $(1-e)Q = 0$. Puesto que como R−módulos $M \cong F_e(L) \oplus F_e(N)$, existe M' en $Rep\mathcal{A}_e$ tal que $F_e(M') = M$. Por IV.26.2 la conflación (f, g) proviene de una conflación en $Rep\mathcal{A}_e$, luego $(F_e)_*$ es suprayectiva.

■

Proposición 28. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R. Sean $0 \to W_0^{(1)} \to W_0 \to W_0^{(2)} \to 0$ y $0 \to W_1^{(1)} \to W_1 \to W_1^{(2)} \to 0$ sucesiones exactas de $R-R$−bimódulos, tales que $\delta\left(W_0^{(1)}\right) = W_1^{(1)}$. Entonces,*

1. *El funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$ induce una transformación natural inyectiva de bifuntores $(F_r)_* : Ext_{\mathcal{A}_r}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F_r(?), F_r(\_))$.*

2. *Sea $\delta_{|W_0^{(1)}}$ inyectivo. Si R es semisimple, o si $W_1 = W_1^{(1)} \oplus W_1^{(2)}$ como bimódulos, entonces $(F_r)_*$ es un isomorfismo.*

Demostración: Por III.4.4 $\mathcal{A}_r$ es un bocs K-R. Por IV.26.1 F_r es exacto. Por IV.25.2 $(F_r)_*$ es inyectiva.

Supongamos que $\delta_{|W_0^{(1)}}$ es inyectivo. Así, $(\ker\delta) \cap W_0^{(1)} = 0$ y, gracias a las hipótesis del segundo inciso, por III.7, F_r es un funtor denso. Consideremos ahora una conflación

$$F_r(L) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_r(N).$$

Entonces, existe M' en $RepA_r$ tal que $F_r(M') \cong M$, luego hay una conflación (f', g'), en la imagen de F_r, que es equivalente a (f, g). Por IV.26.2 la conflación (f', g') proviene de una conflación en $RepA_r$, luego $(F_r)_*$ es suprayectiva.

■

Lema 29. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, con $W_0^{(1)}$ un sumando directo de W_0 como $R-R-$bimódulos tal que $\delta(W_0^1) = 0$. Sea $T = T_R(W_0^1)$. El funtor absorción F_θ : $Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$ es exacto, e induce una sucesión exacta corta de $R-R-$bimódulos:*

$$0 \to Ext_{\mathcal{A}_\theta}(N, L) \xrightarrow{F_\theta} Ext_{\mathcal{A}}(F_\theta(N), F_\theta(L)) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(F_\theta(N), F_\theta(L)) \to 0$$

donde r es la restricción.

Demostración: Por III.8.4 $\mathcal{A}_\theta$ es un bocs K-R. Sea (f, g)un par de morfismos con composición en $Rep\mathcal{A}_\theta$:

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

Como F_θ es un isomorfismo de categorías se cumple que (f, g) es una pareja exacta si y sólo si $(F_\theta(f), F_\theta(g))$ es una pareja exacta.

Puesto que $(F_\theta(f))^0$ es f^0 considerado como $R-$morfismo, tenemos que F_θ envia conflaciones en conflaciones.

Por IV.23 r es un epimorfismo. Como su núcleo está constituido por aquellas conflaciones que consideradas como $T-$sucesiones se dividen, se sigue que $\ker r = \operatorname{Im} F_\theta$.

■

Lema 30. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R y sea $_RX$ un módulo $S-$triangular y $S-$completo. El funtor reducción F_X : $Rep\mathcal{A}^X \to Rep\mathcal{A}$ es exacto e induce un isomorfismo natural de bifuntores*

$$(F_X)_* : Ext_{\mathcal{A}^X}(?, \_) \to Ext_{\mathcal{A}}(F(?), F(\_)).$$

Demostración: Por III.31.2 $\mathcal{A}^X$ es un bocs K-R.

Sea

$$L \xrightarrow{(f^0,0)} M \xrightarrow{(g^0,0)} N$$

un representante del elemento z de $Ext_{\mathcal{A}^X}(N, L)$. La sucesión $F_X(z)$, por fórmulas III.15.2 y III.15.3, es de la forma

$$X \otimes_S L \overset{(I \otimes f^0, 0)}{\longrightarrow} X \otimes_S M \overset{(I \otimes g^0, 0)}{\longrightarrow} X \otimes_S N.$$

Como F_X es fiel y pleno, la última sucesión es una sucesión exacta corta en $A(\mathcal{A}) - Mod$, así que por IV.15 es una conflación. Luego, F_X es exacto.

Por III.25.2 $(F_X)_*$ es una transformación natural inyectiva.

Veamos que $(F_X)_*$ es suprayectiva. Sea x

$$X \otimes_S L \overset{(q^0, 0)}{\longrightarrow} E \overset{(h^0, 0)}{\longrightarrow} X \otimes_S N$$

una conflación en $Rep\mathcal{A}$. Puesto que en $R - Mod$ la sucesión se divide, tenemos un R–isomorfismo $\sigma : E \to X \otimes_S (L \oplus N)$. Luego, vía σ dotamos a $X \otimes_S (L \oplus N)$ de una estructura de $A(\mathcal{A})$–módulo, por lo que podemos considerar a σ un morfismo de $A(\mathcal{A})$–módulos.

Por III.17.1, ${}_S(L \oplus N)$ admite una estructura de $A(\mathcal{A}^X)$ –módulo, denotémosla por M, tal que $F_X(M) = X \otimes_S (L \oplus N)$.

Tenemos una equivalencia de conflaciones

$$\begin{array}{ccccccc}
x : & X \otimes_S L & \overset{(q^0,0)}{\longrightarrow} & E & \overset{(h^0,0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S N \\
& \| & & \downarrow{\scriptstyle (\sigma,0)} & & \| \\
x' : & X \otimes_S L & \overset{(\sigma q^0,0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S M & \overset{(h^0\sigma^{-1},0)}{\longrightarrow} & X \otimes_S N.
\end{array}$$

Tenemos entonces que existen morfismos únicos $f = (f^0, f^1) : L \to M$ y $g = (g^0, g^1) : M \to N$ en $Rep\mathcal{A}^X$ tales que $F_X((f^0, f^1)) = (\sigma q^0, 0) = u$, $F_X((g^0, g^1)) = (h^0\sigma^{-1}, 0) = v$ y $gf = 0$.

Por III.30 f^0 y g^0 determinan una S–sucesión exacta corta, luego (f, g) es una conflación cuya imagen es x'.

■

IV.2 representaciones sin auto-extensiones y con e-dim fija.

Lema 31. *Sean R una k–álgebra, W_0 un $R - R$–bimódulo y sea $1_R = e_1 + \dots + e_n$ una descomposición del 1 de R como suma de idempotentes ortogonales centrales. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, no necesariamente distintos, y sean $e = e_i + e_j - e_ie_j$ y $e' = 1 - e$. Finalmente, sean $W_0^{(1)}$ un $R - R$–subbimódulo de $e_iW_0e_j$, $T = T_R\left(W_0^{(1)}\right)$ y $L, N \in T - Mod$. Entonces:*

1. $End_T(L) \cong End_{eT}(eL) \times End_{e'T}(e'L) = End_{eT}(eL) \times End_{e'R}(e'L)$.

2. $Ext_T(N,L) \cong Ext_{eT}(eN,eL) \times Ext_{e'R}(e'N,e'L)$.

3. *Si R es semisimple entonces* $Ext_{T,R}(N,L) = Ext_T(N,L)$ *y* $Ext_T(N,L) \cong Ext_{eT}(eN,eL)$.

Demostración: Los enunciados 1 y 2 son consecuencia directa del lema II.31.
■

A menudo, al efectuar procesos de reducción sobre representaciones de bocses, nos veremos en la necesidad de utilizar bimódulos como $W_0^{(1)}$ en el corolario anterior. Nos interesará particularmente el caso $R = D_1 \times ... \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita sobre k, y W_0 finitamente generado sobre R. Para comprender sus propiedades apoyémonos en el estudio de las $k-$especies.

Proposición 32. *Sea Q una realización de la $k-$especie $\bullet_1 \to \bullet_2$, donde los vértices se corresponden a los anillos de división D_1 y D_2, ambos de dimensión finita sobre k, y asociada a la flecha se tiene el $D_1 - D_2-$bimódulo W. Sea $R = D_1 \times D_2$ y Λ el álgebra de Artin determinada por Q. Sea M una representación de dimensión finita de Λ, diferente de cero, tal que $Ext^1_\Lambda(M,M) = 0$. Si $M \cong \oplus_{i\in I} M_i$ es una descomposición en inescindibles tenemos que:*

1. *Todos los sumandos M_i son preproyectivos, o todos los sumandos M_i son preinyectivos.*

2. *Hay a lo más dos clases de isomorfía de sumandos.*

3. *En caso de que haya dos clases de isomorfía, estas se corresponden a clases contiguas en el carcaj de Auslander-Reiten de Λ.*

Demostración: De la proposición IV.1.9 (b) de [**ARS**] sabemos que $Dtr : \underline{\mathrm{mod}}\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\Lambda$ es una equivalencia de categorías con inversa $trD : \overline{\mathrm{mod}}\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}\Lambda$.

De p.135 [**ARS**] tenemos el isomorfismo funtorial (fórmula de Auslander-Reiten) $D(Ext^1_\Lambda(Y,X)) \cong \overline{Hom}(X, Dtr(Y))$ para $X, Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda$. En nuestro caso Λ es hereditaria, por ello tenemos que $\overline{Hom}(X, Dtr(Y)) = Hom(X, Dtr(Y))$.

Las representaciones de Λ han sido estudiadas en [**DR**]: de la proposición 2.4 del citado artículo tenemos que hay un proyectivo, al que llamaremos P_1, determinado por $\underline{\dim}_R P_1 = (0,1)$, y un inyectivo al que llamaremos I_2, determinado por $\underline{\dim}_R I_2 = (1,0)$. Además, hay otro proyectivo: P_2, y otro inyectivo: I_1. Salvo P_1 e I_2 todos los inescindibles tienen vectores dimensión sin ceros.

Observemos que para inescindibles $X, Y \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, se cumple que $Y \not\cong I_2$ implica $Hom_\Lambda(P_1, Y) \neq 0$, y que si $X \not\cong P_1$ entonces $Hom_\Lambda(X, I_2) \neq 0$.

Sea M un inescindible con $\underline{\dim}_R M = (a,b)$ y $a \neq 0$, claramente su cubierta proyectiva debe tener sumandos isomorfos a P_2, luego, $Hom_\Lambda(P_2, M) \neq 0$.

Similarmente, si $\underline{\dim}_R M = (a,b)$ y $b \neq 0$, entonces la envolvente inyectiva de M tiene sumandos directos isomorfos a I_1, luego $Hom_\Lambda(M, I_1) \neq 0$.

Veamos que si $M \cong \oplus M_i$ es una descomposición en módulos inescindibles y $Ext^1_\Lambda(M,M) = 0$, entonces ninguno de los M_i es regular, y si alguno es preproyectivo, entonces todos son preproyectivos, o si alguno es preinyectivo, entonces todos son preinyectivos:

1. Sea M_1 inescindible no preproyectivo y $M_2 = (trD)^n(P_i)$, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left(P_i, (Dtr)^{n+1}(M_1)\right) \neq 0.$$

2. Sea $M_1 = (Dtr)^n(I_i)$ y M_2 inescindible no preinyectivo, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) \cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left(M_2, (DTr)^{n+1}(I_i)\right) \cong_\Lambda \left((TrD)^{n+1}(M_2), I_i\right) \neq 0.$$

3. Si M es regular, $Ext^1_\Lambda(M,M) \neq 0$, pues su forma cuadrática es cero o negativa: véase **[DR]**.

Ahora analicemos las posibles combinaciones de preproyectivos:

1. Sea $M_1 = (trD)^n(P_i)$ y $M_2 = (trD)^m(P_j)$, con $n-1 > m \geq 0$ e $i,j \in \{1,2\}$ entonces

$$\begin{aligned} D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) &\cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left((trD)^m(P_j), (trD)^{n-1}(P_i)\right) \\ &\cong_\Lambda \left(P_j, (trD)^{n-1-m}(P_i)\right) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Sea $M_1 = (trD)^{n+1}(P_2)$ y $M_2 = (trD)^n(P_1)$, con $n \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned} D\left(Ext^1_\Lambda(M_1, M_2)\right) &\cong_\Lambda (M_2, Dtr(M_1)) \cong_\Lambda \left((trD)^n(P_1), (trD)^n(P_2)\right) \\ &\cong_\Lambda (P_1, P_2) \neq 0. \end{aligned}$$

3. Sea $M_1 = (trD)^{n+1}(P_i)$ y $M_2 = (trD)^n(P_i)$, con $n \geq 0$ e $i \in \{1,2\}$ entonces

$$D\left(Ext^1_\Lambda\left(M_1,M_2\right)\right)\cong_\Lambda\left(M_2,Dtr\left(M_1\right)\right)\cong_\Lambda\left(\left(trD\right)^n\left(P_i\right),\left(trD\right)^n\left(P_i\right)\right)$$
$$\cong_\Lambda\left(P_i,P_i\right)\neq 0.$$

Esto nos deja pocas opciones, es decir, si $Ext^1_\Lambda(M,M)=0$ y M sólo tiene sumandos preproyectivos, entonces M es una suma de un sólo preproyectivo inescindible, o a lo más tiene dos clases de isomorfía de sumandos preproyectivos inescindibles contiguos en el carcaj de Auslander-Reiten.

Un análisis similar nos proporciona el resultado dual, es decir que si $Ext^1_\Lambda(M,M)=0$ y M sólo tiene sumandos preinyectivos entonces M es suma de isomorfos a un sólo preinyectivo inescindible, o a lo más tiene dos clases de isomorfía de sumandos preinyectivos inescindibles contiguos en el carcaj de Auslander-Reiten.

■

Proposición 33. *Sea Q una realización de la k−especie $\bullet_1\to\bullet_2$, donde los vértices se corresponden a los anillos de división D_1 y D_2, ambos de dimensión finita sobre k, y asociada a la flecha se tiene el D_1-D_2−bimódulo W. Sea $R=D_1\times D_2$ y Λ el álgebra de Artin determinada por Q. Sean L,N representaciones de dimensión finita de Q, tales que $Ext^1_\Lambda(N,N)=0$ y $Ext^1_\Lambda(L,L)=0$, entonces ${}_\Lambda L\cong_\Lambda N$ si y sólo si ${}_RL\cong_R N$. Equivalentemente $\underline{\dim}_RL=\underline{\dim}_RN$ si y sólo si ${}_\Lambda L\cong_\Lambda N$.*

Demostración: Es claro que si $L\cong N$ entonces ${}_RL\cong_R N$. También es inmediato que $\underline{\dim}_RL=\underline{\dim}_RN$ si y sólo si ${}_RL\cong_R N$.

La siguiente parte de la prueba está basada en **[DR]** y en VIII.2 de **[ARS]**.

Sea $d_1=\dim_{D_1}(W)$ y $d_2=\dim_{D_2}(W)$, por la introducción de **[DR]** tenemos las siguientes transformaciones lineales de $\Re\times\Re$ en $\Re\times\Re$:

$s_1\left(\left(x_1,x_2\right)\right)=\left(-x_1+x_2d_1,x_2\right)$

$s_2\left(\left(x_1,x_2\right)\right)=\left(x_1,-x_2+x_1d_2\right)$

$c=s_1s_2$, $c^{-1}=s_2s_1$.

Observemos que $s_1^2=Id=s_2^2$.

A $c=s_1s_2$ se le conoce como transformación de Coxeter (pag. 8 **[DR]**). Asociados a esta transformación están los funtores $C^+=S_1^+S_2^+$ y $C^-=S_2^-S_1^-$, llamados funtores de Coxeter (pag. 19 **[DR]**). Por 2.4 **[DR]**, se relacionan de la siguiente manera: sea M una representación inescindible de Q, si M no es proyectivo entonces $\underline{\dim}_R\left(C^+\left(M\right)\right)=c\left(\underline{\dim}_R\left(M\right)\right)$, y si M no es inyectivo, $\underline{\dim}_R\left(C^-\left(M\right)\right)=c^{-1}\left(\underline{\dim}_R\left(M\right)\right)$. A su vez, por 2.1 **[DR]**, a los funtores S_1^+ y S_1^- se les asocia la transformación s_1, y a los funtores S_2^+ y S_2^- se les asocia la transformación s_2.

En la proposición 2.4 **[DR]** se prueba que un módulo es proyectivo inescindible si y sólo si es de la forma $P_t=S_{k_1}^-S_{k_2}^-...S_{k_{t-1}}^-F_{k_t}$ y es preinyectivo inescindible si y sólo si es de la forma $Q_t=S_{k_n}^+S_{k_{n-1}}^+...S_{k_{t+1}}^+F_{k_t}$. Luego 2.4 **[DR]** nos indica que $\underline{\dim}_RP_1=(0,1)$,

$\underline{\dim}_R I_2 = (1,0)$, $\underline{\dim}_R P_2 = s_2((1,0)) = (1, d_2)$ y $\underline{\dim}_R I_1 = s_1((0,1)) = (d_1, 1)$. Más aún, tenemos que

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(P_1)) = s_2 s_1((0,1)) = s_2((d_1,1)) = (d_1, d_1 d_2 - 1)$

$c(\underline{\dim}_R(I_2)) = s_1 s_2((1,0)) = s_1((1,d_2)) = (d_1 d_2 - 1, d_2)$

También tenemos:

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(I_1)) = s_2 s_1 s_1((0,1)) = s_2((0,1)) = (0,-1) = -\underline{\dim}_R P_1$

$c^{-1}(\underline{\dim}_R(I_2)) = s_2 s_1((1,0)) = s_2((-1,0)) = -(1,d_2) = -\underline{\dim}_R P_2$

$c(\underline{\dim}_R(P_1)) = s_1 s_2((0,1)) = s_1((0,-1)) = -(d_1,1) = -\underline{\dim}_R I_1$

$c(\underline{\dim}_R(P_2)) = s_1 s_2 s_2((1,0)) = s_1((1,0)) = (-1,0) = -\underline{\dim}_R I_2$.

Observemos que si ${}_RM \cong_R M'$ entonces $c^n(\underline{\dim}_R(M)) = c^n(\underline{\dim}_R(M'))$ para n en los enteros.

Por VIII.2.2 de **[ARS]** $c(\underline{\dim}_R(M)) = \underline{\dim}_R(Dtr(M))$ para M inescindible no proyectivo, y $c^{-1}(\underline{\dim}_R(M)) = \underline{\dim}_R(trD(M))$ para M inescindible no inyectivo.

Supongamos que $Ext^1_\Lambda(N,N) = 0$ y $Ext^1_\Lambda(L,L) = 0$. Por la proposición anterior si $L \cong \oplus L_i$ es una descomposición en inescindibles, entonces a lo más hay dos clases de isomorfía en los sumandos: todos preproyectivos o todos preinyectivos. Lo mismo ocurre para $N \cong \oplus N_i$. Así que si Λ no es de tipo de representación finito y ${}_RL \cong_R N$, tenemos que los sumandos de L son preproyectivos si y sólo si son preproyectivos los de N; de otra manera habría algún entero n tal que $c^n(\underline{\dim}_R(L)) < 0$ y $c^n(\underline{\dim}_R(N)) > 0$, o tal que $c^{-n}(\underline{\dim}_R(L)) < 0$ y $c^{-n}(\underline{\dim}_R(N)) > 0$, lo que es una contradicción.

Con esto en mente empecemos a comparar combinaciones de preproyectivos.

Sean $L = aL_1 \oplus bL_2$ y $N = \alpha N_1 \oplus \beta N_2$, donde L_1, L_2, N_1 y N_2 son inescindibles, por lo que ocurre alguna de las siguientes posibilidades:

1. $L_1 \cong (trD)^n(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^m(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

    - Si $m \neq n$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $m > n$, luego $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = c(\underline{\dim}_R(aP_1 + bP_2)) = -(\underline{\dim}_R(aI_1 + bI_2)) < 0$ y $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)) > 0$: contradicción.
    - Si $m = n$ entonces $\underline{\dim}_R(aP_1 + bP_2) = c^n(\underline{\dim}_R(L)) = c^n(\underline{\dim}_R(N)) = \underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)$, es decir que $(b, a + bd_2) = (\beta, \alpha + \beta d_2)$, lo cual sólo es posible si $a = \alpha$ y $b = \beta$.

2. $L_1 \cong (trD)^{n+1}(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^{m+1}(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

    - Si $m \neq n$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m > n$, luego $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = \underline{\dim}_R(aP_1) + c(\underline{\dim}_R(bP_2)) = (-b, a)$.
    Por otro lado $c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1)) + c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\beta P_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.

- Si $m = n$ tenemos que
$(-b, a) = c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = (-\beta, \alpha) = c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N))$, lo cual sólo es posible si $a = \alpha$ y si $b = \beta$.

3. $L_1 \cong (trD)^{n+1}(P_1)$, $L_2 \cong (trD)^n(P_2)$, $N_1 \cong (trD)^m(P_1)$ y $N_2 \cong (trD)^m(P_2)$

- Si $m < n$ entonces
$c^{m+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2)) = -(\underline{\dim}_R(\alpha I_1 + \beta I_2)) < 0$
$c^{m+1}(\underline{\dim}_R(L)) = c^{m-n}(\underline{\dim}_R(aP_1)) + c^{m+1-n}(\underline{\dim}_R(bP_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.
- Si $m = n$ entonces
$c^m(\underline{\dim}_R(L)) = c^{-1}(\underline{\dim}_R(aP_1)) + \underline{\dim}_R(bP_2) = a(d_1, d_1d_2 - 1) + b(1, d_2)$
$c^m(\underline{\dim}_R(N)) = \underline{\dim}_R(\alpha P_1) + \underline{\dim}_R(\beta P_2) = (0, \alpha) + \beta(1, d_2)$
es decir que se debe satisfacer que $a = (\beta - b)/d_1$, lo que implica que $\beta \geq b$, y se debe cumplir simultáneamente que $0 \leq \alpha = a(d_1d_2 - 1) + (b - \beta)d_2 = (\beta - b)\left(d_2 - \frac{1}{d_1} - d_2\right)$, lo cual es sólo posible si $\beta = b$, pero en tal caso $\alpha = a = 0$
- Si $m > n$ entonces
$c^{n+1}(\underline{\dim}_R(L)) = a(0, 1) - b\underline{\dim}_R(I_2) = (-b, a)$
$c^{n+1}(\underline{\dim}_R(N)) = c^{n+1-m}(\underline{\dim}_R(\alpha P_1 + \beta P_2))$ tiene primera componente positiva: contradicción.

Con esto concluimos el caso preproyectivo. Un análisis similar para el caso preinyectivo verifica la proposición.

■

Lema 34. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto. Sea $M \in rep\mathcal{A}$. Entonces:*

1. *Hay una descomposición $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ como $D-D-$bimódulos, con D una $k-$álgebra de división.*

2. *Supongamos que R es semisimple y $\|M\|_0 = 0$, entonces*

$$rad(End_{\mathcal{A}}(M)) = \{f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M) \mid f^0 = 0\},$$

y podemos elegir a D como:

$$D = \{f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M) \mid f^0 \neq 0, f^1 = 0\}.$$

Demostración: Por el Teorema de Wedderburn, 2.5.37 [Ro], $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ donde D es una subálgebra isomorfa a $End_{\mathcal{A}}(M)/rad(End_{\mathcal{A}}(M))$, luego, como M es inescindible, tenemos que D es un anillo de división.

Por II.19 $f = (f^0, f^1) \in rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ si y sólo si f^0 es nilpotente. Puesto que $\|M\|_0 = 0$, el que M sea inescindible en $Rep\mathcal{A}$ implica que es inescindible como $R-$módulo. Como R es semisimple, esto sólo deja dos posibilidades para $f = (f^0, f^1) \in End_{\mathcal{A}}(M)$: f^0 es un isomorfismo o $f^0 = 0$. Luego, si $f \in rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ entonces $f^0 = 0$.

Por II.25 $D = \{f = (f^0, 0) \in End_{\mathcal{A}}(M) \mid f^0 \neq 0\}$ es un anillo de división, y como $\|M\|_0 = 0$, se sigue que $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$.

■

Definición 35. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, y supongamos que hay una descomposición $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ en idempotentes ortogonales primitivos y centrales. En tal caso, para $M \in Rep\mathcal{A}$ definimos su vector dimensión como el vector $(d_1, ..., d_n)$, donde $d_i = \dim_k(e_i M)$. Denotaremos a este vector como $\underline{\dim}M$.*

Observación IV.2: Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs con $R = D_1 \times ... \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita. Sean $M, N \in rep\mathcal{A}$. Si $c_i = \dim_k(D_i)$ y $\underline{\dim}_R M = (d_1, ..., d_n)$ entonces $\underline{\dim}M = (d_1 c_1, ..., d_n c_n)$.

Luego, para q en los racionales tenemos que $q\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$ si y sólo si $q\underline{\dim}_R M = \underline{\dim}_R N$. Más aún, de la fórmula II.14 se sigue que si $q\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$ entonces $q^2\|M\|_U = \|N\|_U$.

Supongamos que en el bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ la $k-$álgebra R es de la forma $D_1 \times ... \times D_n \times O = S \times O$, donde una vez más cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita, pero O es un anillo arbitrario. Sea $f_1 + f_2 = 1_R$ la descomposición canónica de la unidad correspondiente a $R = S \times O$.

Si U es un $S - S-$bimódulo, este tiene una estructura canónica como $R - R-$bimódulo. En tal caso, para $M \in rep\mathcal{A}$, tenemos que

$$\|M\|_U = \dim_k({}_R(U \otimes_R M, M)) = \dim_k({}_S(U \otimes_S f_1 M, f_1 M)) = \sum_{i,j} d_i d_j \dim_k(e_i U e_j)$$

donde $\underline{\dim}_S(f_1 M) = (d_1, ..., d_n)$. Así que incluso en esta situación tendremos, para q racional, que si $q\underline{\dim}(f_1 M) = \underline{\dim}(f_1 N)$ entonces $q^2\|M\|_U = \|N\|_U$. Este resultado será usado en el capítulo 5.

Proposición 36. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto. Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ un vector de idempotentes ortogonales, primitivos y centrales para R. Sea $M \in rep\mathcal{A}$. Si $D_M = End_{\mathcal{A}}(M)/rad(End_{\mathcal{A}}(M))$ y $c_M = \dim_k(D_M)$ entonces*

$$c_M\left(\underline{\mathrm{e}-\mathrm{dim}}M\right)=\underline{\mathrm{dim}}M.$$

Demostración: Por el lema anterior, $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$. Por otra parte $D^{op} \cong (End_{\mathcal{A}}(M)/rad(End_{\mathcal{A}}(M)))^{op} \cong (E_M^{op}/rad(E_M^{op}))$, así que todo D^{op}–módulo es un E_M^{op}–módulo vía la proyección canónica. Los D^{op}–módulos son los E_M^{op}–módulos anulados por $rad(E_M^{op})$.

Puesto que cada E_M^{op}–módulo simple N es anulado por $rad(E_M^{op})$, $N \cong D$. Entonces, si $0 = L_0 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = e_iM$ es una E_M^{op}–serie de composición para e_iM, tenemos que $\dim_k(L_i) = c_M + \dim_k(L_{i-1})$, para $i = 1, .., n$. Se sigue que $\dim_k(L_n) = nc_M$. Esto es que $\dim_k(e_iM) = c_M length_{E_M^{op}}(e_iM)$.

■

Lema 37. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R, tal que k es un campo perfecto, y sea $M \in rep\mathcal{A}$ inescindible tal que $End_{\mathcal{A}}(M)$ es de k–dimensión finita. Por IV.34 $End_{\mathcal{A}}(M) = D \oplus rad(End_{\mathcal{A}}(M))$. Sea $W_0^{(1)}$ un $R-R$–sumando directo de W_0 tal que $\delta(W_0) = 0$, y sea $T = T_R(W_0)$. Sea $\mathcal{A}_\theta = (T, W', \delta')$ el bocs inducido y $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \to Rep\mathcal{A}$ el funtor absorción asociado. Sea ${}_TX$ es un módulo S–completo, $\mathcal{A}_\theta^X = (S, W^X, \delta^X)$ el bocs inducido y $F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \to Rep\mathcal{A}_\theta$ el funtor reducción asociado. Supongamos que $M_X \in rep\mathcal{A}_\theta^X$ es tal que $F_\theta F_X(M_X) = F_\theta(M_\theta) = M$, entonces hay una sucesión exacta corta de $D - D^{op}$–bimódulos*

$$Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X) \xrightarrow{(F_\theta F_X)_*} Ext_{\mathcal{A}}(F_\theta F_X(M_X), F_\theta F_X(M_X)) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(M, M)$$

donde r es el morfismo restricción de IV.23. En particular,

$$\dim_D(Ext_{\mathcal{A}}(M, M)) = \dim_D(Ext_{T,R}(M, M)) + \dim_D\left(Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X)\right).$$

Demostración: Por IV.29 hay una sucesión exacta corta

$$Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta) \xrightarrow{(F_\theta)_*} Ext_{\mathcal{A}}(M, M) \xrightarrow{r} Ext_{T,R}(M, M)$$

donde r es un morfismo suprayectivo de $D - D^{op}$–bimódulos. Como F_θ es fiel y pleno $End_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta) = D' \oplus rad(End_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta))$ donde $F_\theta(D') = D$. Luego, $Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta)$ tiene estructura de $D - D^{op}$–bimódulo vía el isomorfismo que hay entre D y D'. Puesto que $(F_\theta)_*$ es una transformación natural de bifuntores, es también un isomorfismo de $D - D^{op}$–bimódulos. De la misma manera se induce un isomorfismo de $D - D^{op}$–bimódulos

$(F_X)_* : Ext_{\mathcal{A}_\theta^X}(M_X, M_X) \to Ext_{\mathcal{A}_\theta}(M_\theta, M_\theta)$.

■

Teorema 38. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs K-R con $R = D_1 \times \ldots \times D_n$, donde cada D_i es una $k-$álgebra de división de dimensión finita. Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ el vector de idempotentes correspondiente a $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$, la descomposición canónica en idempotentes centrales ortogonales de R. Supongamos que k es perfecto y W_0 es de $k-$dimensión finita. Sean $L, N \in rep\mathcal{A}$ tales que $Ext_{\mathcal{A}}(N, N) = 0$ y $Ext_{\mathcal{A}}(L, L) = 0$. Si L y N son inescindibles, entonces $\underline{e-\dim}L = \underline{e-\dim}N$ si y sólo si $L \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$.*

Demostración: Por observación III.2, si $L \cong N$ en $Rep\mathcal{A}$ entonces $\underline{e-\dim}L = \underline{e-\dim}N$.

Sea $\preceq$ el orden lexicográfico en $Z \times Z$. Realizaremos la prueba de la suficiencia por inducción sobre $(\|L\|_0, \dim_k(W_0))$ con el orden $\preceq$.

Pero antes veamos que por IV.36 $\underline{\dim}L = c_L \underline{e-\dim}L$ y $\underline{\dim}N = c_N \underline{e-\dim}N$, así que por observación IV.2 $\|N\|_0 = \left(\frac{c_N}{c_L}\right)^2 \|L\|_0$.

Si $\|L\|_0 = 0$ entonces $End_R(L) = End_{A(\mathcal{A})}(L)$, así que L inescindible en $Rep\mathcal{A}$ implica que L es inescindible en $R-Mod$, por lo que L es de la forma $D_i = e_iR$. Similarmente concluimos que N es de la forma e_jR. Como las endolongitudes coinciden $i = j$.

Supongamos cierto el enunciado para todo bocs $\mathcal{A}' = (R', W', \delta')$, como en el enunciado, y todo par de inescindibles $L', N' \in rep\mathcal{A}'$ tales que $(\|L'\|_0, \dim_k(W_0')) \preceq (\|L\|_0, \dim_k(W_0))$. Supongamos ahora que $\|L\|_0 = n$ y $\dim_k(W_0) = m + 1$. Por triangularidad existe un $R-R-$subbimódulo $0 \neq W_0^1$ de W_0 tal que $\delta(W_0^1) \subseteq W_1$.

Si $\underline{e-\dim}L = (l_1, ..., l_{i-1}, 0, l_{i+1}, ..., l_n)$, por III.3 podemos usar eliminación de idempotentes: sean $\varepsilon = 1_R - e_i$, $\mathcal{A}_\varepsilon = (R_\varepsilon, W_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ y $F_\varepsilon : Rep\mathcal{A}_\varepsilon \to Rep\mathcal{A}$.

Por III.3.2 y III.41 hay objetos $L', N' \in Rep\mathcal{A}_\varepsilon$ tales que $F_\varepsilon(L') = L$ y $F_\varepsilon(N') = N$, los cuales cumplen que $\underline{e-\dim}L' = (l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n) = \underline{e-\dim}N'$. Puesto que $\dim_k((W_\varepsilon)_0) = \dim_k(\varepsilon W_0 \varepsilon) \leq \dim_k(W_0)$, al menos podemos suponer que en $\underline{e-\dim}L$ no hay ceros. Con esto en mente analicemos las diferentes posibilidades:

1. Sean $\delta_{|W_0^1}$ inyectivo y $\delta(W_0^1) = W_1^{(1)}$. Por III.4 tenemos un bocs

   $\mathcal{A}_r = \left(R, (W_0/W_0^1) \oplus \left(W_1/W_1^{(1)}\right), \delta_r\right)$ y el funtor regularización $F_r : Rep\mathcal{A}_r \to Rep\mathcal{A}$.

   Como $(\ker \delta) \cap W_0^1 = 0$, por III 7 F_r es denso. Sean $L', N' \in rep\mathcal{A}_r$ tales que $F_r(L') \cong L$, y $F_r(N') \cong N$.

   Por III.42 $\underline{e-\dim}L' = \underline{e-\dim}N'$. Como $\dim_k(W_0/W_0^1)$ es menor que $m + 1$, por hipótesis de inducción $L' \cong N'$. Como F_r es un funtor $L \cong N$.

2. Supongamos que $Ker(\delta) \cap W_0^1 \neq 0$, luego hay idempotentes primitivos centrales ortogonales e_i y e_j, donde i no necesariamente es distinto de j, tales que $e_i (Ker(\delta) \cap W_0^1) e_j \neq 0$. Por comodidad sea $W_0^{(1)} = e_i (Ker(\delta) \cap W_0^1) e_j$.

   Por III.37 tenemos una descomposición de $R-R-$bimódulos $W_0 = W_0^{(1)} \oplus W_0^{(2)}$.

   Sean $e = e_i + e_j - e_i e_j$, $e' = 1 - e$, $R' = e'R$, $T = T_R\left(W_0^{(1)}\right)$ y $T' = T_{eR}\left(W_0^{(1)}\right)$.

   Por lema II.31 $T' \cong eT$, y que $T \cong T' \times T_{e'R}\left(e' W_0^{(1)} e'\right) = T' \times e'R$.

   Por IV.23 hay un epimorfismo r, y corolario IV.31.3 un isomorfismo σ :

$$Ext_A(L,L) \overset{r}{\rightarrow} Ext_{T,R}(L,L) = Ext_T(L,L) \overset{\sigma}{\cong} Ext_{T'}(eL,eL).$$

   Por hipótesis $Ext_A(L,L) = 0$, así que $Ext_{T'}(eL,eL) = 0$. Como en $\underline{e-\dim}L$ no hay ceros, se sigue que $i \neq j$.

   Como vimos antes $c_N \underline{\dim}(L) = c_L \underline{\dim}(N)$, así que por IV.33 $c_N(eL) \cong c_L(eN)$ como $T'-$módulos, por lo que aparecen las mismas clases de isomorfía de inescindibles en sus descomposiciones. Por observación IV.2 $c_N(L) \cong c_L(N)$ como $T-$módulos.

   Sean $\oplus_{u=1}^q m_u X_u \cong eL$ y $\oplus_{u=1}^q n_u X_u \cong eN$ descomposiciones en suma de $T'-$módulos inescindibles, tales que si $u \neq u'$ entonces $X_u \ncong X_{u'}$. Sin pérdida de generalidad digamos que $\{i,j\} = \{n-1, n\}$, así que $e' = e_1' + e_2' + \ldots + e_{n-2}'$ es la descomposición canónica en idempotentes ortogonales, primitivos y centrales. Dado que $c_N(L) \cong c_L(N)$ como $T-$módulos, se sigue que $c_N m_u = c_L n_u$ y $c_N \dim_{D_h}(e_h' L) = c_L \dim_{D_h}(e_h' N)$, para $u \in \{1, \ldots, q\}$ y $h \in \{1, \ldots, n-2\}$.

   Sea ${}_T X = (\oplus_{u=1}^q X_u) \oplus R'$. Por III.23, III.25, III.33 y III.38 X es $S-$completo y $S-$triangular, donde $S = S' \times R'$, $S' = S_1 \times \ldots \times S_q$, y, como era de esperarse, $S_i \cong (End_{T'}(X_i) / rad(End_{T'}(X_i)))^{op}$.

   Sea $\mathcal{A}_\theta = (T, W', \delta')$ el bocs inducido por $W_0^{(1)}$ y sea $F_\theta : Rep\mathcal{A}_\theta \rightarrow Rep\mathcal{A}$ el correspondiente funtor absorción. Sea $\mathcal{A}_\theta^X = (S, W^X, \delta^X)$ el bocs inducido por X y sea $F_X : Rep\mathcal{A}_\theta^X \rightarrow Rep\mathcal{A}_\theta$ el correspondiente funtor reducción asociado a X.

   Sean $L_\theta = F_\theta^{-1}(L)$ y $N_\theta = F_\theta^{-1}(N)$. Puesto que como $T-$módulos $L_\theta \cong X \otimes_S ((\oplus_{u=1}^q m_u S_u) \oplus e'L)$ y $N_\theta \cong X \otimes_S ((\oplus_{u=1}^q n_u S_u) \oplus e'N)$, por III.17.1 hay objetos $L', N' \in Rep\mathcal{A}_\theta^X$ tales que $F_X(L') \cong L_\theta$ y $F_X(N') \cong N_\theta$.

   Sea $1_{S'} = \sum_{u=1}^q f_q$ la descomposición en idempotentes ortogonales centrales de S', por lo tanto $e'' = (f_1, \ldots, f_q, e_1, \ldots, e_{n-2})$ es un vector de idempotentes para $\mathcal{A}_\theta^X$.

Argumentando como antes tenemos que $m_u X_u \cong X_u \otimes (m_u S_u)$, luego $\dim_{S_u} f_u L' = m_u$.

$$\begin{aligned} c_N \underline{\dim}_S (L') &= c_N \left(m_1, ..., m_q, \dim_{D_1}(e'_1 L), ..., \dim_{D_{n-2}}\left(e'_{n-2} L\right)\right) \\ &= c_L \left(n_1, ..., n_q, \dim_{D_1}(e'_1 N), ..., \dim_{D_{n-2}}\left(e'_{n-2} N\right)\right) \\ &= c_L \underline{\dim}_S (N') \end{aligned}$$

Por fidelidad y plenitud de los funtores reducción y absorción $c_N = c_{N'}$ y $c_L = c_{L'}$, luego, por observación IV.2 y IV.36 $\underline{e'' - \dim} L' = \underline{e'' - \dim} N'$.

Por IV.37 hay un monomorfismo:

$$0 \rightarrow Ext_{A_\theta^X}(L', L') \overset{(F_\theta F_X)_*}{\rightarrow} Ext_A(F_\theta F_X(L'), F_\theta F_X(L')) \cong Ext_T(L, L).$$

Se sigue que $Ext_{A_\theta^X}(L', L') = 0$ y $Ext_{A_\theta^X}(N', N') = 0$.

Como $\underline{e - \dim} L$ no tiene ceros, ${}_R\left(W_0^{(1)} \otimes_R L, L\right) \neq 0$. Luego, por III.8.3 y III.21, tenemos que $\|L'\|_0 < n$, así que por hipótesis de inducción $L' \cong N'$, y así $L \cong N$.

■

Capítulo V
Familias parametrizadas de representaciones.

V.1 Subálgebras mansas y módulos generadores.

Definición 1. *Sea Q un anillo. Q es un anillo de cocientes si todo elemento regular de Q es una unidad. Un subanillo O de Q es un orden izquierdo si cada $q \in Q$ es de la forma ou^{-1} para $o, u \in O$. Un orden derecho es definido análogamente; y un orden izquierdo y derecho es un orden.*

Definición 2. *Sea Z un dominio entero conmutativo con campo de fracciones K. Un subanillo O de Q será llamado un orden clásico en Q sobre Z, o Z−orden en Q, si $Z \subseteq O$, $OK = Q$ y O es finitamente generado sobre Z.*

Definición 3. *Una $k-$álgebra R es minimal si existen idempotentes primitivos centrales ortogonales tales que $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$, y para toda $i \in \{1, ..., n\}$, el anillo e_iR es una $k-$álgebra de división de dimensión finita o un Z_i- orden para algún dominio entero conmutativo Z_i.*

Si $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es un bocs con R una $k-$álgebra minimal, y es tal que $W_0 = 0$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un bocs minimal.

Los órdenes considerados, denotados por O, estarán relacionados con el único módulo genérico asociado a un álgebra de Artin hereditaria de tipo de representación manso, llamémosla Λ, por lo que, entre otras, tendrán las siguientes características:

1. O es un dominio, es decir, es un anillo sin divisores de cero.
2. O es un dominio de ideales izquierdos principales, y un dominio de ideales derechos principales.
3. $Z(O)$, es decir el centro de O, es un dominio de Dedekind.
4. O es finitamente generado como $Z(O)-$módulo.
5. Casi todos los $\Lambda-$módulos regulares simples están en correspondencia biyectiva con los $O-$módulos simples.

[Sw] Moss E. Sweedler. "Hopf Algebras", W.A. Benjamin Inc., 1969.

[Z] Rita Zuazua. "Arboles algorítmicos en la teoría de bocses", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias UNAM, 1999.

Bibliografía

[*ARS*] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo. "Representation Theory of Artin Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[*B*] J. Boza. "Algoritmos de reducción en la teoría de representaciones de coálgebras", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias UNAM, México, 1996.

[*BBP*] R. Bautista, J. Boza, E. Pérez. "Reduction Functors and Exact Structures for Boxes", enviado a Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

[*BZ*] R.Bautista, R. Zuazua. "Morita equivalence and reduction algorithms for representations of coalgebras", Canadian Math. Soc., Conference Proc., Vol 18, 1996.

[*CB*1] W.W. Crawley-Boevey. "On tame algebras and bocses", Proc. London Math. Soc. 3(56), 1988.

[*CB*2] W.W. Crawley-Boevey. "Regular Modules for Tame Hereditary Algebras", Proc. London Math. Soc. 1989.

[*CB*3] W.W. Crawley-Boevey. "Tame Algebras and Generic Modules", Proc. London Math. Society, Vol. 63, 1989, (241-265).

[*CB*4] W.W. Crawley-Boevey. "Matrix problems and Drozd's theorem", Topics in Algebra, Banach Center Publ., Vol 26, Part 1, Warsaw, 1990.

[*CB*5] W.W. Crawley-Boevey. "Modules of Finite Length over their Endomorphism Rings", Representations of Algebras and Related Topics, London Mathematical Society Lecture Note Series 168, Cambidge Univ. Press1992, (127-184).

[*Co*] P. M. Cohn. "Algebra", John Wiley & Sons, 1989.

[*DK*] Y. A. Drozd y V. M. Kirichenko. "Algebras de dimensión finita", Universidad de Kiev 1980.

[*DR*] V. Dlab & C. M. Ringel. "Indecomposable representations of graphs and algebras", Memoirs of the American Mathematical Society Number, Vol. 6, Number 173, July 1976.

[*DRSS*] P. Drexler, I. Reiten, S. O. Smalo, O. Solberg. "Exact categories and vector space categories, appendix by B. Keller", Universidad de Bielefeld.

[*GR*] P. Gabriel, A. Roiter. "Representations of finite dimensional algebras", Encyclopedia of the Mathematical Sciencies, Vol. 73, Springer 1992.

[*K*] M. Kleiner. "Induced modules and comodules and representations of BOCS's and DGC's", Lecture Notes in Mathematics 903, Springer, Berlín, 1981, (168-185).

[*Ke*] B. Keller. "Chain complexes and stable categories appendix A", Manuscripta Mathematica 67, 1990, (379-417).

[*LRS*] F. Larrión, G. Raggi, L. Salmerón. "Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones", Aportaciones Matemáticas, SMM, 1995.

[*M*] S. MacLane. "Homology", Springer-Verlag, Nueva York, 1967.

[*Ma*] P. Malcolmson. "Construction of universal matrix localisation", Springer Lecture Notes 951, 1982, (117-132).

[*MR*] J. C. McConnell, J. C. Robson. "Noncommutative Noetherian Rings", Pure and Applied Mathematics, a Wiley-Interscience series of texts, monographs & tracts, 1987.

[*P*] Claudio Procesi. "Rings with Polynomial Identities", Marcel Dekker, Inc., Vol. 17 en Pure and Applied Mathematics, 1973.

[*R*] I. Reiner. "Maximal Orders", Academic Press Inc., 1975.

[*Ri*1] Claus M. Ringel. "Representations of k−species and bimodules", J. of Algebra, 41, 1976, (269-302).

[*Ri*2] Claus M. Ringel. "The spectrum of a finite dimensional algebra", Proceedings of a conference on Ring Theory, Antwerp 1978, Dekker, New York, 1979.

[*Ri*3] Claus M. Ringel. "Infinite dimensional representations of finite dimensional hereditary algebras", Proceedings of a conference on Ring Theory, Antwerp 1978, Dekker, New York, 1979.

[*Ro*] Louis H. Rowen. "Ring Theory I & II", Academic Press Inc., Volúmenes 127 y 128 en Pure and Applied Mathematics, 1989.

[*Sc*] A. H. Schofield. "Representations of rings over skew fields", London Mathematical Society Lecture Notes Series 92, Cambridge University Press, 1985.

[*Si*] L. Silver. "Nonconmutative Localisations and Applications" J. Algebra 7, 1967, (44-76).

[*Sw*] Moss E. Sweedler. "Hopf Algebras", W.A. Benjamin Inc., 1969.

[*Z*] Rita Zuazua. "Arboles algorítmicos en la teoría de bocses", Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias UNAM, 1999.