/122

, 6

/10

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

(26)

K. guindo

PLANEACION FINANCIERA INTEGRAL DE LA CORPORACION

por

José Jesús Acosta Flores

Tesis presentada a la Universidad Nacional Autónoma de México como requisito Para la obtención del grado de Doctor en Ingeniería

México, D. F. 1976

A mi Madre, de quien todos sus
hijos estamos orgullosos, por su
entusiasmo y dedicación al haber
regresado a la escuela y obtenido
su Título de Cirujano Dentista.

CONTENIDO

Página

I. Conceptos Generales

I.1. Introducción 2
I.2. Definición de Conceptos 3
I.3. Estado Actual y Objetivo de la Tesis 5

II. Metodología

II.1. Modelos de Planeación de la Corporación 17
II.2. El Sistema 19
II.3. Subsistema de Información 19
II.4. El Modelo 22
II.5. Resolución del Modelo Utilizando el Algoritmo de Descomposición de Benders 38
II.6. Algoritmo para Resolver un Problema de Programación Mixta 45
II.7. Modelo Dinámico 46
II.8. Subsistema de Optimización 55

III. Algoritmo para Resolver un Problema de Programación Mixta

III.1. El Problema 60
III.2. Descripción del Algoritmo 61
III.3. Comparación con el Algoritmo de Lawler y Bell . 71
III.4. Lemas 72
III.5. Programación Entera Lineal Mixta 74
III.6. Programación Entera No Lineal Mixta 77
III.7. Reoptimización 78
III.8. Ejemplos 82

IV. Ejemplos

IV.1. Ejemplo 1 105
IV.2. Ejemplo 2 124

V. Conclusiones 164

Bibliografía 167

Apéndices

I. Programas

I.1. ACOST 1 176

CONTENIDO
(continuación)

Página

I.2. ACOST 2 182
I.3. Programa Dinámico 203

II. Teoría de la Utilidad

II.1. Introducción 207
II.2. Axiomas sobre Teoría de Utilidad de John Von Neumann y Oskar Morgenstern 210
II.3. Un Tratamiento Axiomático de Utilidad por Luce y Raiffa 212
II.4. Funciones Utilidad con un solo Atributo (Howard Raiffa) 216
II.5. Funciones Utilidad con varios Atributos (Howard Raiffa) 222

RESUMEN

La expansión de las empresas requiere de un plan de desarrollo estructurado. El plan requiere definir las inversiones que deben efectuarse, cuánto, cuándo y en qué. Para obtener el plan óptimo se han desarrollado modelos de planeación de inversiones. Recientemente en 1973, Hamilton y Moses desarrollaron un modelo que hace intervenir tanto las inversiones de capital como la creación y cancelación de deuda, emisión de bonos y acciones, reducción de capital y pago de dividendos en una corporación con varias subsidiarias, donde la central está encargada de coordinar los planes propuestos por ellas. El modelo trata el problema bajo certeza, pudiendo decirse que en general el problema es bajo incertidumbre. Hamilton y Moses se avocan al planteamiento y no tanto a la solución.

1. Esta tesis generaliza el modelo para incertidumbre.
2. Plantea la solución con el algoritmo de descomposición de Benders.
3. Propone y desarrolla un subalgoritmo para la solución del problema mixto. Es una generalización del de Lawler y Bell.
4. Este algoritmo es aplicable tanto para certeza como incertidumbre.

5. Se ha elaborado un caso al cual se ha aplicado la metodología propuesta.

6. La solución se propone bajo el enfoque de sistemas, estructurando la recolección de información, el modelo de optimización y el modelo dinámico.

7. Se desarrolló igualmente el software de apoyo, resultando en un paquete útil para casos de aplicación real.

RECONOCIMIENTO

Al mismo tiempo que el autor debe llevar la responsabilidad de las muchas imperfecciones serias que contenga este trabajo, él debe reconocer que mucho de lo que está bien se debe a otros. La versión presente de la Tesis incorpora innumerables mejoras en organización y presentación que fueron sugeridas por los integrantes del jurado para el examen general de conocimientos. Las críticas de los siguientes maestros fueron muy completas y de gran ayuda: M. en I. Ariel Kleiman B., M. en C. Carlos Gómez Figueroa y Dr. Víctor Gerez Greisser.

Se agradecen todas las facilidades prestadas por la Dirección General de Ingeniería de Sistemas, Secretaría de Obras Públicas, para la elaboración de esta investigación.

Mi agradecimiento a mi esposa la Lic. Dolores Robledo de Acosta por su ayuda en los aspectos de cómputo, donde intervinieron también los actuarios Carlos Ayala y Conrado Farías.

Las revisiones, orientaciones, comentarios, entusiasmo y apoyo del Director de Tesis, M. en I. Francisco J. Jauffred Mercado, fueron decisivos para la realización de este trabajo. Finalmente, el autor desea mencionar que se encuentra en deuda con el Dr. Felipe Ochoa Rosso, cuyas críticas y valiosas sugerencias sobre las primeras versiones de la Tesis, condujeron a cambios fundamentales en su contenido y organización, por ejemplo la inclusión de los Capítulos II y III.

CAPITULO

1

CONCEPTOS GENERALES

CAPITULO I

CONCEPTOS GENERALES

I.1. Introducción.

La teoría del financiamiento de la corporación se ha caracterizado por una confianza extensiva en los análisis complejos y sofisticados. Las personas que han contribuido a su desarrollo son numerosas y frecuentemente ha surgido cierta controversia sobre algunos aspectos particulares, por ejemplo Miller y Modigliani(27) establecen que, bajo ciertas condiciones, el costo del capital es independiente de la cantidad de deuda que se tenga, mientras que los teóricos tradicionales (7) aseveran que no, si la política de dividendos influye o no en el valor de las acciones (9), (40), y sobre si es apropiado o no incluir un factor de riesgo en la tasa de descuento, (3), (14).

Fundamentalmente se trata de responder las preguntas siguientes:

1. ¿Qué decisiones deberán tomarse para distribuir el presupuesto?
2. ¿Qué política de dividendos deberá seguir la organización?
3. ¿Cuánta deuda deberá tener la organización en su estructura de capital?
4. ¿Cuál es el costo del capital?

I.2. Definición de conceptos.

Se definen a continuación: el precio de una acción ordinaria, el valor de mercado de una organización, la incertidumbre, el rendimiento sistemático, el rendimiento no sistemático, la diversificación, el equivalente bajo certeza, el valor de mercado de la organización bajo incertidumbre, el riesgo financiero de las acciones, el costo del capital y la estructura de capital.

DEFINICION 1. Precio de una acción ordinaria. Es el valor presente de los dividendos que se percibirán por el hecho de poseer una acción más lo que se obtiene cuando ésta se vende.

DEFINICION 2. Valor de mercado de una organización, bajo certeza. Es el valor presente del pago total de dividendos.

DEFINICION 3. Incertidumbre. Es el desconocimiento del resultado de una decisión.

DEFINICION 4. Rendimiento sistemático. Es la parte del rendimiento total que tiene correlación perfecta con el rendimiento del mercado.

DEFINICION 5. Rendimiento no sistemático. Es la parte del rendimiento total que no tiene correlación con el rendimiento del mercado.

DEFINICION 6. <u>Diversificación</u>. Consiste en combinar valores cuyos rendimientos no están totalmente correlacionados de tal manera que la variancia del rendimiento no sistemático de la cartera disminuye sin disminuir el rendimiento total esperado.

DEFINICION 7. <u>Equivalente bajo certeza</u>. Es la mínima cantidad bajo certeza, que se está dispuesto a aceptar a cambio de una situación con incertidumbre que se posee.

DEFINICION 8. <u>Valor de mercado de una organización bajo incertidumbre.</u> Es el equivalente bajo certeza de la utilidad esperada del valor presente del pago total de dividendos.

DEFINICION 9. <u>Riesgo financiero de la acción</u>. Es el incremento en riesgo por acción, derivado de que lo que tiene la organización no es poseído totalmente por ella.

DEFINICION 10. <u>Costo del capital.</u> El costo de capital para una inversión es la máxima tasa de rendimiento que los inversionistas podrían obtener en cualquier otra parte en inversiones de riesgo equivalente. El costo de capital de la organización es un promedio ponderado de los costos de los proyectos individuales. Siendo los pesos los valores relativos de mercado de los proyectos.

DEFINICION 11. <u>Estructura de capital</u>. Es el cociente del pasivo entre el capital social, o sea lo que se adeuda entre el capital propio.

I.3. Estado actual y objetivo de la tesis.

I.3.1. Estado actual.

Un paso importante en los problemas de inversión de capital lo fue el procedimiento de Joel Dean (47), el cual consistía en calcular la tasa interna de rendimiento para cada proyecto de inversión,y ordenar estos proyectos en orden decreciente según este criterio. Se van aceptando los proyectos hasta que se agota el presupuesto o la tasa interna de rendimiento es menor que el costo del capital.

El procedimiento de Dean solo garantiza un resultado óptimo si se satisfacen las hipótesis que él establece: certeza perfecta, mercado perfecto de capital, funciones continuas de inversión y una independencia estricta de los proyectos de inversión.

Lorie y Savage (48) mostraron claramente porqué el criterio de la tasa de rendimiento debe fallar cuando: i) los proyectos que se están evaluando no son independientes; ii) el flujo de dinero de un proyecto tiene cambios en signo y iii) el presupuesto se encuentra limitado en más de un período de tiempo. Lorie y Savage fueron capaces de desarrollar procedimientos alternativos satisfactorios para los casos i) y ii), sin embargo, no tuvieron éxito con el caso iii).

Para el caso de un período de inversión, su procedimiento consistía en calcular el valor presente neto de cada proyecto y el valor presente de la inversión, hacer el cociente entre esas dos cantidades y ordenar los proyectos según ese cociente en orden descendente hasta agotar el presupuesto. Para el caso de varios períodos, su método consiste en calcular el valor presente neto de todos los proyectos y el valor presente de las inversiones en todos los períodos. Escoger un proyecto, y calcular el cociente del valor presente neto entre la inversión en un período, para todos los períodos. Se aceptan todos los proyectos cuya diferencia del valor presente neto menos la suma de los productos de la inversión en un período por su cociente correspondiente es mayor o igual que cero y se rechazan los que dicha diferencia la tengan negativa, siempre y cuando no se viole ninguna restricción presupuestal o queden sobrantes que puedan utilizarse en proyectos adicionales. Por lo anterior se ve que se trata de un método de ensayo y error.

Weingartner (54) encuentra que para proyectos indivisibles el procedimiento de Lorie-Savage no funciona ni para el caso de un solo período. El formula modelos tanto de programación lineal como de programación entera para resolver los problemas deterministas de proyectos dependientes, independientes, divisibles e indivisibles.

Se presenta ahora una clasificación que hace Ochoa (51) respecto a los modelos de selección óptima de inversiones.

Modelos de selección óptima de inversiones	Proyectos dependientes Independientes	Selección estática Selección dinámica	Modelos determinísticos Modelos estocásticos
	Un período de inversión Varios períodos de inversión	Proyectos de inversión contínua. Inversión discreta. Mixtos.	

Los proyectos dependientes pueden a su vez subdividirse en:

económicamente dependientes tecnológicamente dependientes operacionalmente dependientes	mutuamente exclusivos contingentes compuestos

Se consideran como proyectos económicamente dependientes aquellos para los cuales la erogación y recuperación total de proyectos individuales se ve afectada por la aceptación de otros proyectos.

Proyectos mutuamente exclusivos son aquellos que no pueden llevarse a cabo simultáneamente, por ejemplo diseños alternativos para un puente o la selección de entre diferentes sitios posibles para la localización de la cortina para una presa.

Proyectos contingentes son aquellos que solo tiene sentido invertir en ellos si se cuenta con la aprobación del otro (u otros) proyecto. Por ejemplo la inversión en una nueva planta no se puede hacer sin tener previamente la energía eléctrica disponible a través de otra inversión.

Proyectos compuestos son aquellos que constan de un proyecto principal y varios contingentes, de tal manera que el grupo puede considerarse como mutuamente exclusivo respecto a otros proyectos o grupos de proyectos.

En los modelos estáticos, la decisión de invertir se toma en un solo tiempo, y los proyectos seleccionados se inician simultáneamente. Por ejemplo, la inversión en proyectos a realizar en un solo ejercicio fiscal. En los modelos dinámicos es permisible diferir las inversiones a períodos posteriores en el horizonte de planeación.

Entonces, puede decirse que en cuanto un problema de inversión se define, el paso siguiente es formular un modelo matemático que represente la estructura esencial del problema y sea susceptible de resolverse mediante la aplicación de un cierto algoritmo computacional. El caso determinista se ha estudiado tanto en la formulación de modelos por Weingartner (48), Reiter (47), Ochoa (30), etc., como en la generación de algoritmos de cómputo por Dantzig (46), Bellman (45), Geoffrion (49), Balas (44), Lawler y Bell (22), Shapiro (53), Mao (25), Ochoa (30), Gomory (50), etc., en programación lineal, programación dinámica, programación entera, algoritmos de enumeración parcial y de ramificar y acotar.

Ahora se verá el caso con incertidumbre.

En primer lugar se analiza la aceptación o rechazo de un solo proyecto. Procedimientos crudos que se han utilizado en la práctica son el método del período de recuperación y del valor esperado.

Mao (25) concluye que es erróneo el utilizar el período de recuperación como criterio para aceptar o rechazar una inversión debido a que 1° el método considera como determinista lo que ocurre desde el inicio de la inversión hasta que se recupera ésta y 2° no considera lo que puede ocurrir después que se ha recuperado la inversión. Weingartner (55) concuerda con Mao, pero analiza el hecho que ha pesar de ser erróneo el método, en la práctica se utiliza con mucha frecuencia, y concluye que es debido a que el período de recuperación pueda considerarse como indicador de aspectos que le interesan mucho al inversionista (tiempo en que recupera su capital) por lo que aún cuando no deberá considerarse como criterio de selección si es conveniente introducirlo como restricción en métodos más elaborados. Mao analiza también el método del valor esperado, el cual es erróneo en todos los casos en que el inversionista no tiene aversión neutra al riesgo.

Formas más elaboradas para aceptar o rechazar un proyecto lo constituyen el enfoque de Hillier (15) quien obtiene la distribución de probabilidad del valor presente neto de la inversión o de su tasa interna de rendimiento por medios analíticos. Al año siguiente, 1964, Hertz (56) sigue el mismo enfoque de Hillier pero utilizando simulación para obtener la distribución de probabilidad. Aplicaciones de estos métodos se encuentran en Pouliquen (34) y Reutlinger (36).

Modelos para considerar varios proyectos. En primer lugar puede considerarse el modelo de Markowitz (57), quien utiliza la media y la variancia para obtener una frontera eficiente y para la selección, obtener aquella cuya utilidad esperada es máxima.

A continuación se tiene el modelo de Farrar (58), el cual matemáticamente coincide con el de Markowitz, pero no obstante ello, el enfoque es totalmente diferente. Markowitz utiliza la función objetivo para obtener la frontera eficiente haciendo variar el parámetro en ella, mientras que Farrar la deriva de una función utilidad cuadrática, maximizando la utilidad esperada. Un error que tuvo Farrar explica porqué pudo llegar a una función objetivo que depende de la media y la variancia. Schoner (59) corrigió el error de Farrar y mostró que cuando la función utilidad es exponencial negativa y la distribución normal, se llega a una función objetivo de ese tipo.

La función utilidad está basada en el trabajo de Von Neumann y Morgenstern (60) (Apéndices II.1 y II.2). Posteriormente Pratt (33) hace un análisis de las funciones utilidad dependiendo del comportamiento del inversionista.

A partir de este punto, puede decirse que existen tres tipos de trabajos desarrollados en problemas de inversión de capital bajo incertidumbre.

1° Maximización del valor esperado

2° Maximización de la utilidad esperada

3° Arboles de decisión y decisiones secuenciales.

Dentro del primer grupo se pueden citar los trabajos de: Näslund (61) quien utiliza la técnica de restricciones aleatorias, la cual consis te en sustituirlas por sus equivalentes bajo certeza.

Byrne, Charnes, Cooper y Kortanek quienes en (62) utilizan la técnica de restricciones aleatorias y en (63) una combinación de la técnica de restricciones aleatorias con programación lineal bajo incertidumbre. En la programación lineal bajo incertidumbre el problema se divide en dos etapas. Es necesario considerar lo que cuesta el que las restricciones sean violadas debido a la aleatoriedad.

Lo interesante de los trabajos dentro de este grupo es no tanto el hecho de que maximicen el valor esperado, lo cual es válido únicamente cuando la aversión al riesgo es neutra, sino la formulación de las restricciones y la técnica de solución.

Dentro del segundo grupo pueden considerarse los trabajos de: Hillier (64) quien maximiza la utilidad esperada, pero que en su trabajo no trata el tema de las restricciones y Adelson (65).

En el tercer grupo pueden citarse a Raiffa (35) Schlaifer (39) y Mao (25). Se considera el concepto de árboles de decisión para considerar las diferentes decisiones en el tiempo, las cuales están interrelacionadas, pero como criterio de selección se continúa maximizando la utilidad esperada.

En 1973, se tiene un modelo de optimización para la planeación financiera de la corporación de Hamilton y Moses (1[illegible]). Este modelo conjunta tanto los aspectos de selección de inversiones de capital como los financieros, pero es determinista. En este modelo se maximiza el rendimiento por acción. Como resultado se obtienen las inversiones que deben efectuarse y su forma de financiamiento.

I.3.2. Objetivo de la Tesis.

La motivación para el desarrollo de este trabajo fue la conveniencia de generalizar para incertidumbre el modelo de Hamilton y Moses. En esta tesis se ha hecho precisamente eso, manejando la función objetivo para diferentes comportamientos de aversión al riesgo.

Asimismo, se atacó el problema de la resolución bajo incertidumbre derivado del trabajo de Hamilton y Moses. Estos autores no hacen mayor énfasis en el método de solución de su modelo. Des de luego que su contribución grande fue la de modelar, pero no en el sentido de resolver, por lo tanto en esta tesis se ha dado especial énfasis al problema de solución. El método propuesto se aplica tanto al caso de certeza de Hamilton y Moses como al de incertidumbre presentado en el documento.

Se utilizó el algoritmo de partición de Benders (1), el cual utiliza un problema auxiliar que en cada iteración crece en el número de restricciones. El algoritmo de Benders se publicó en 1962, propone la descomposición de un problema mixto en un problema de programación lineal y otro que consiste de variables enteras y una variable continua irrestricta en signo, pero no da métodos de solución para este último problema.

Revisando la literatura, en la tesis doctoral de Ochoa Rosso (30), una posible solución es el considerar la variable contínua como entera y utilizar el algoritmo de González Zubieta, sin embargo, se considera necesario desarrollar un algoritmo ad hoc. Este algoritmo constituye una generalización al caso de programación entera de Lawler y Bell (22), ya que ellos resuelven el problema entero o binario, pero no consideran el problema mixto. Se propone también un mecanismo de reoptimización cuando nuevas restricciones se añaden al problema original.

CAPITULO

2

METODOLOGIA _ _ _ _ _

CAPITULO II

METODOLOGIA

II.1. Modelos de planeación de la corporación.

II.2. El sistema.

II.3. Subsistema de información.

II.4. El modelo.

II.4.1. Función objetivo.

1. Incertidumbre.
2. Preferencia del decisor.
3. Función objetivo cuando el decisor está buscando el riesgo.
4. Función objetivo cuando el decisor tiene neutralidad al riesgo.
5. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión creciente al riesgo.
6. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión constante al riesgo.
7. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión decreciente al riesgo.

II.4.2. Restricciones.

1. Restricciones de flujo de fondos.

2. De dependencia en las inversiones.
3. De financiamiento asociado con ciertas estrategias exclusivamente.
4. De pago anticipado de la deuda.
5. Referentes a la reducción de capital.

II.5. Resolución del modelo utilizando el algoritmo de descomposición de Benders.

II.6. Algoritmo para resolver un problema de programación mixta.

II.7. Modelo Dinámico.

II.8. Subsistema de optimización.

II.1. Modelos de Planeación de la Corporación.

Este es un campo donde el interés es creciente y el cambio dramático. Naylor y Schauland[29] identificaron en 1975 más de 2,000 corporaciones en los Estados Unidos, Canadá y Europa que estaban usando, desarrollando o planeando desarrollar un modelo de planeación de la corporación, siendo en 1969 menos de 100. Encontraron que los beneficios de la utilización de estos modelos en una muestra de 346 corporaciones fueron

Consideración de mayor número de alternativas	78%
Mejora en la calidad de las decisiones tomadas	72%
Planeación más efectiva	65%

Mejor comprensión de la empresa y su ámbito	50%
Decisiones más rápidas	48%
Información en el momento necesario	44%
Mejores pronósticos	38%
Ahorro en costo	28%

Una de esas aplicaciones es la realizada por Hamilton y Moses (12), (13). El estudio lo efectuaron para una corporación que cuenta con 50 subsidiarias, donde cada subsidiaria elabora anualmente planes, constando de diferentes conjuntos alternativos de estrategias, debiendo la central seleccionar de entre estos planes los que conduzcan al logro de los objetivos de la corporación.

Las estrategias las clasifican de la manera siguiente:

Estrategias de momento, las cuales reflejan la continuación de las actividades presentes.

Estrategias de desarrollo, reflejan los efectos incrementales de todos los cambios propuestos en las estrategias de momento.

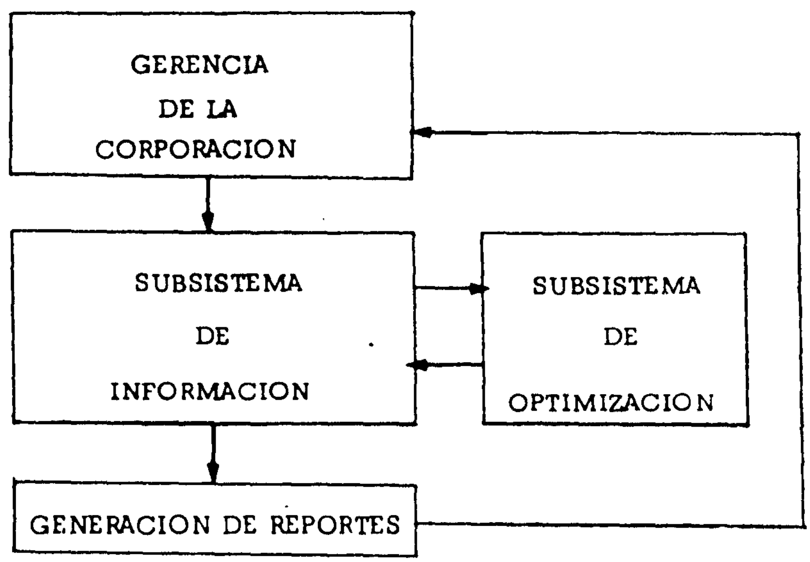
Estrategias financieras, reflejan las oportunidades alternativas para financiar las actividades existentes y las propuestas.

Estrategias para dejar de invertir, reflejan la descontinuación de una estrategia existente de momento, vendiéndola a un agente externo.

Estrategias de adquisición, reflejan formas alternativas de incorporar nuevas compañías.

II.2. El sistema.

Se sugiere un sistema integral que consta de los subsistemas de optimización y de información relacionados como se muestra en el siguiente diagrama.



Se analizarán cada uno de los subsistemas.

II.3. Subsistema de Información.

Consiste de dos fases, la de desarrollo y la de operación. La de desarrollo tiene tres etapas: la de planeación, evaluación y diseño.

FASE DE DESARROLLO			FASE DE OPERACION
a) Etapa de Planeación	b) Etapa de Evaluación	c) Etapa de Diseño	

FASE DE DESARROLLO

a) La etapa de planeación consiste en definir los datos requeridos en el subsistema de optimización y contestar las interrogantes siguientes:

1° ¿Será un modelo de planeación financiera a largo plazo?

2° ¿Si el modelo se desarrolla exitosamente la gerencia lo usará en su proceso de toma de decisiones?

Además en esta etapa la gerencia establecerá claramente el tipo de reportes que desea y la frecuencia de ellos (semanal, mensual o anual) y especificará cuándo necesita que el sistema esté operando integralmente.

b) En la etapa de evaluación se responderán las preguntas siguientes:

1° ¿Es factible hacer el subsistema?

2° ¿Quién lo desarrollará?

3° ¿Quién lo operará?

4° ¿Deberá ajustarse el subsistema al equipo de cómputo disponible?

5° ¿Cuánto costará en función de personal y tiempo de máquina?

6° ¿El valor de los beneficios potenciales excederá el costo para desarrollar y operar el subsistema?

c) Etapa de Diseño. En ella se

1° Identificarán las relaciones financieras y los insumos necesarios.

2° Especificarán las reglas especiales de decisión y

3° Establecerá la forma física en que los resultados se transmitirán a los otros subsistemas (impresa, en gráficas o por pantalla).

Fase de Operación

En esta fase el subsistema que se haya diseñado estará funcionando. Se recopilarán y procesarán el balance, el estado de pérdidas y ganancias, los cuadros de usos y fuentes de fondos para todas las estrategias, calendario de pagos, restricciones sobre el uso de los fondos y costo del financiamiento, función utilidad y distribuciones de probabilidad para enviar la información

4° ¿Deberá ajustarse el subsistema al equipo de cómputo disponible?

5° ¿Cuánto costará en función de personal y tiempo de máquina?

6° ¿El valor de los beneficios potenciales excederá el costo para desarrollar y operar el subsistema?

c) Etapa de Diseño. En ella se

1° Identificarán las relaciones financieras y los insumos necesarios.

2° Especificarán las reglas especiales de decisión y

3° Establecerá la forma física en que los resultados se transmitirán a los otros subsistemas (impresa, en gráficas o por pantalla).

Fase de Operación

En esta fase el subsistema que se haya diseñado estará funcionando. Se recopilarán y procesarán el balance, el estado de pérdidas y ganancias, los cuadros de usos y fuentes de fondos para todas las estrategias, calendario de pagos, restricciones sobre el uso de los fondos y costo del financiamiento, función utilidad y distribuciones de probabilidad para enviar la información necesaria al subsistema de optimización, el cual regresará los resultados que servirán para generar los reportes que la gerencia considere útiles para la toma de decisiones.

II.4. El modelo.

En este modelo se reflejará el rango completo de decisiones financieras, incluyendo el presupuesto interno del capital, adquisición de equipo, creación y cancelación de deuda, emisión de bonos y acciones, reducción de capital y pago de dividendos. Se trata de un modelo de programación mixta que selecciona los programas de financiamiento y de inversión óptimas en un horizonte de planeación.

Se deberá iniciar con la definición de los objetivos de la corporación, los que se traducirán en un conjunto de metas cuantificables y sus correspondientes medidas de efectividad. Podrían ser ganancia, porcentaje que se tiene del mercado, empleos generados, satisfacción del cliente, etc., algunos de los cuales están en conflicto. Existen varias formas de atacar este problema. Una es seleccionar el objetivo más importante, tomándolo en la función objetivo y los demás considerarlos como restricciones donde se obliga la satisfacción de niveles de aspiración; otra sería programación interactiva de metas y un tercer enfoque mediante la determinación de una función utilidad con atributos múltiples. (19), (20), (21) En este trabajo se recomienda este tercer enfoque utilizando el procedimiento de reducción que se presenta en el apéndice II.5. El procedimiento consiste en ir reduciendo la complejidad del problema: De un problema con incertidumbre y objetivos múltiples se pasa a uno determinista con objetivos múltiples y de ahí a uno con incertidumbre pero con un solo objetivo.

A continuación se considerará como si la corporación tuviera un solo objetivo, ya que de no ser así es posible reducir el problema a esa situación.

II.4.1. Función objetivo.

Se desea maximizar la utilidad esperada del valor presente neto de la organización. O sea

max z = utilidad esperada de {(ingreso de las estrategias) - (costo de la deuda a largo plazo) - (costo de la deuda a corto plazo) - (dividendos pagados a las acciones preferentes) + (cantidad que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda a largo plazo)} .

Al hablar de utilidad esperada se está conjuntando tanto la incertidumbre en los eventos como la preferencia del decisor. Pero para su análisis es conveniente considerarlas por separado, midiendo la incertidumbre con la probabilidad y la preferencia con la utilidad.

1. Incertidumbre.

Se considera como variable aleatoria $\tilde{a}_{ij}$, el ingreso de la estrategia j en el año i, donde $j = 1,\ldots,m$ e $i = 0,1,2,\ldots, n$, y las demás variables, costo de la deuda a largo plazo, costo de la deuda a corto plazo, dividendos pagados a las acciones preferentes y cantidad que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda a largo plazo, como deterministas.

Es necesario determinar la media μ_{ij} y la variancia σ^2_{ij} de $\tilde{a}_{ij}$.

Como $\tilde{a}_{ij} = f_{ij}\ (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_p)$

donde $\tilde{h}_1$ = precio del producto en el mercado

$\tilde{h}_2$ = demanda del producto

$\vdots$

$\tilde{h}_r$ = porcentaje del mercado al que se vende

Una manera de lograrlo es obtener la media y la variancia de las variables $\tilde{h}_r$ estimándolas directamente o a partir de su distribución de probabilidad. La distribución se puede obtener ajustando una curva a un histograma si se cuenta con datos, o bien obtenerla de manera subjetiva (34), (36), (38), o una combinación de datos y opinión de los expertos.

Sean m_r y S_r^2 la media y la variancia de la variable $\tilde{h}_r$.

Mediante una expansión de serie de Taylor multidimensional se puede hacer una aproximación de segundo orden (Sección 2.4.4. de Benjamín and Cornell (2)).

Así $$\mu_{ij} \doteq f_{ij}(m_1, m_2, \ldots, m_p) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial f_{ij}^2}{\partial h_r h_s} \Bigg|_{(m_1, \ldots, m_p)} \operatorname{cov}[h_r, h_s]$$

si los coeficientes de variación S_r/m_r y las no linealidades de f_{ij} no son grandes el segundo término es despreciable.

La aproximación de primer orden de la variancia de $\tilde{a}_{ij}$ es

$$\sigma_{ij}^2 \doteq \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial f_{ij}}{\partial h_r} \Bigg|_{(m_1, \ldots, m_p)} \frac{\partial f_{ij}}{\partial h_s} \Bigg|_{(m_1, \ldots, m_p)} \operatorname{cov}[h_r, h_s]$$

si las h_r son independientes, entonces

$$\sigma_{ij}^2 \doteq \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial f_{ij}}{\partial h_r} \Bigg|_{(m_1, \ldots, m_p)} S_r^2$$

Otra forma de obtener μ_{ij} y σ_{ij}^2 es agrupar las variables dependientes de tal manera que

$$f_{ij}(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_p) = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 + \cdots + \tilde{g}_q$$

Obtener las distribuciones de probabilidad de $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_q$ (para su obtención puede utilizarse lo expuesto en la sección 9.7 de Schlaifer (38)).

Teniendo la distribución de las variables g_r se calcula su me dia y su variancia, n_r y s_r

Entonces

$$\mu_{ij} = \sum_{r=1}^{q} n_r$$

y la variancia

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{r=1}^{q} \sum_{s=1}^{q} \operatorname{cov}\left[g_r, g_s\right]$$

si las variables g_r son independientes entonces:

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{r=1}^{q} s_r^2$$

Una tercer manera de obtener μ_{ij} y σ_{ij} es estimarlas directamente, como propone Hillier [15] .

Se considerará desde este momento que las μ_{ij} y σ_{ij} ya se han determinado.

El valor presente de la estrategia j es:

$VP_j = \sum_{i=0}^{n} \tilde{a}_{ij}/(1+r)^i$ donde r es la tasa de interés que refleja propiamente el valor del dinero en el tiempo para el inversionista.

Esperanza de VP_j . $\quad E\left[VP_j\right] = \sum_{i=0}^{n} \mu_{ij}/(1+r)^i$

Variancia de VP_j .

Siguiendo a Hillier (15) y a Mao (25) se considerarán tres casos.

a) las $\tilde{a}_{ij}$ son independientes

$$\sigma^2_{vp_j} = \sum_{i=0}^{n} \sigma^2_{ij} \;/\; (1+r)^{2i}$$

b) las a_{ij} tienen correlación perfecta

$$\sigma^2_{vp_j} = \left[\sum_{i=0}^{n} \sigma_{ij} \;/\; (1+r)^{i} \right]^2$$

c) un caso intermedio en que ni son independientes ni totalmente correlacionadas las variables a_{ij}

$$\sigma^2_{vp_j} = \sum_{i} \sum_{k} \operatorname{cov} \left[\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_{kj} \right] \;/\; (1+r)^{i+k}$$

Distribución de VP_j .

Puesto que VP_j es la suma ponderada de las variables aleatorias $\tilde{a}_{ij}$, su distribución será normal si las $\tilde{a}_{ij}$ son normales o se aproximará a la normal en caso que no lo sean aplicando el teorema del límite central. (Aún cuando la distribución no sea normal, las ecuaciones de $E(VP_j)$ y $\sigma^2_{vp_j}$ son válidas).

2. Preferencia del decisor.

Se considerará que la preferencia del decisor para diferentes eventos puede medirse utilizando una función utilidad basada en los axiomas de Von Neumann y Morgensten. (Apéndice II.2).

El comportamiento del decisor puede clasificarse como:

$$\begin{cases} \text{Búsqueda de riesgo} \\ \text{Neutralidad al riesgo} \\ \text{Aversión al riesgo} \begin{cases} \text{Aversión creciente} \\ \text{Aversión constante} \\ \text{Aversión decreciente} \end{cases} \end{cases}$$

Como a cada tipo de comportamiento le corresponde una función utilidad diferente se desarrollará su función objetivo correspondiente.

3. Función objetivo cuando el decisor está buscando el riesgo.

Función utilidad. $u(x) = x^2 + bx \quad b \geq 0,\ x \geq -\frac{b}{2}$

la utilidad esperada es $E\,u(x) = E(x^2) + b\,E(x)$

como $\sigma_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2$

entonces $E\,u(x) = \sigma_x^2 + (E(x))^2 + b\,E(x)$

$$= \sigma_x^2 + (E(x) + b)\ E(x)$$

luego la función objetivo será

$$\text{Max } Z = (\overline{E(x)} + b)\ E(x) + \sigma_x^2$$

donde $\overline{E(x)}$ = un estimador de $E(x)$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} E\left[VP_i\right] x_i - \sum_{t=1}^{n} 1/(1+r)^t \sum_{j} \sum_{p=1}^{t} g_{jp}\ (1 - r_{ct})$$

$$\left[Y_{jp} - (t-p)\, h_{jp}\, Y_{jp}\right] - \sum_{t=1}^{n} 1/(1+r)^t \sum_{\ell} \sum_{p=1}^{t} g_{\ell p}\,(1-r_{ct}) \left[w_{\ell p} - \right.$$

$$\left. - (t-p)\, h_{\ell p}\, w_{\ell p}\right] - \sum_{t=1}^{n} 1/(1+r)^t \sum_{k} \ell_{kt}\, (1-r_{ct})\, V_{kt} -$$

$$- \sum_{t=1}^{n} 1/(1+r)^t \sum_{p=1}^{t} b_p\, P_p + \sum_{t=1}^{n} 1/(1+r)^t \sum_{j} \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{q=p+1}^{t} g_{ip}\, ($$

$$(1-r_{cq})\, R_{jpq}$$

lo cual puede escribirse como

E (x) = A-B-C-D-E+F (las expresiones que permiten el cálculo de B,C,D,E y F se tomaron del modelo de Hamilton y Moses (12)).

donde A = Esperanza del valor presente neto del ingreso de las estrategias

B = Costo de la deuda a largo plazo en valor presente

C = Costo de la deuda a largo plazo en valor presente cuando ésta solo puede asignarse a determinados proyectos

D = Costo de la deuda a corto plazo en valor presente

E = Dividendos pagados a las acciones preferentes en valor presente

F = Cantidad en valor presente que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda.

$E(VP_i)$ = Esperanza del valor presente de la estrategia i.

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{no se implanta la estrategia } i. \\ 1 & \text{se implanta la estrategia } i. \end{cases}$$

r = tasa de interés que refleja el valor del dinero en el tiempo para el inversionista

g_{jp} = es la tasa de interés que se debe pagar a la fuente j por préstamos efectuados en el período p

r_{ct} = tasa de impuestos en el período t

Y_{jp} = préstamo a largo plazo de la fuente j en el período p

h_{jp} = fracción de Y_{jp} requerida como pago constante al principal en cada período

$g_{\ell p}$ = tasa de interés que se debe pagar a la fuente ℓ por el préstamo efectuado en el período p

$w'_{\ell p}$ = préstamo a largo plazo que solo puede utilizarse en la estrategia ℓ.

$h_{\ell p}$ = fracción de $w_{\ell p}$ requerida como pago constante al principal en cada período.

ℓ_{kt} = tasa de interés que se debe pagar a la fuente k por el préstamo a corto plazo del período t

V_{kt} = préstamo a corto plazo de la fuente k en el período t

b_p = dividendo que se paga por acción preferente en el período p

P_p = número de acciones preferentes emitidas en el período p

R_{jpq} = cantidad que se paga anticipadamente en el período q de la deuda a largo plazo del período p y fuente j

y $$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}\left[VP_j\, ,\, VP_k\right] x_j\; x_k \;;$$

si las estrategias son independientes entonces:

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{VP_j}^2 \; x_j$$

4. Función objetivo cuando el decisor tiene neutralidad al riesgo.

Función utilidad $u(x) = x$ (Apéndice II.4)

Función objetivo $\max Z = E(x)$

donde $E(x)$ es la misma que en el inciso anterior.

5. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión creciente al riesgo.

Función utilidad $u(x) = -x^2 + ax + c \qquad x \leq a$

se calcula su función de aversión local al riesgo [apéndice II.4]

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$$u'(x) = -2x + a$$

$$u''(x) = -2$$

$$r(x) = \frac{2}{a - 2x}$$

Puede verse que mientras mayor sea la cantidad de dinero, x, es mayor la aversión al riesgo $r(x)$, por lo que se considera que $u(x)$ representa efectivamente un comportamiento de aversión creciente al riesgo.

$$E\ u(x) = -E(x^2) + a E(x) + c$$

$$= -\sigma_x^2 - (E(x))^2 + a E(x) + c$$

luego la función objetivo será:

$$\max \ z = (a - \overline{E(x)})\ E(x) - \sigma_x^2 + c$$

donde $\overline{E(x)}$, $E(x)$, y σ_x^2 ya están definidas en el inciso 3.

6. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión constante al riesgo.

Función utilidad: $u(x) = -\exp(-x/c)$ (Apéndice II.4; se excluye $u(x) = x$ puesto que se consideró en el inciso 4).

Considerando $f_x(x_0)$ la función densidad normal por lo expuesto en el inciso 1.

$$E\,u(x) = \int_{x_0=-\infty}^{\infty} u(x_0)\ f_x(x_0)\ dx_0 =$$

$$= -1/(\sqrt{2\pi}\ \sigma_x) \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \exp(-x_0/c)\exp(-[x_0 - E(x)]^2/2\sigma_x^2)\,dx_0 =$$

$$= -1/(\sqrt{2\pi}\ \sigma_x) \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \exp(-x_0/c - x_0^2/2\ \sigma_x^2 - (E(x))^2/2\ \sigma_x^2 +$$

$$+ 2x_0\ E(x)/2\ \sigma_x^2)\,dx_0 =$$

$$= -1/(\sqrt{2\pi}\ \sigma_x) \int_{x_0=-\infty}^{\infty} \exp\left[(-1/2\ \sigma_x^2)\left\{(x_0 + \frac{\sigma_x^2}{c} - E(x))^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \sigma_x^4/c^2 + 2\ E(x)\ \sigma_x^2/c\right\}\right]\ dx_0 =$$

$$= -\exp(\sigma_x^2/2c^2 - E(x)/c)$$

$$\max\ E\,u(x) = \max\left[-\exp(\sigma_x^2/2c^2 - E(x)/c)\right] =$$

$$= \min\left[\exp(\sigma_x^2/2c^2 - E(x)/c)\right] =$$

$$= \min\ (\sigma_x^2 / 2c^2 - E(x)/c) =$$

$$= \max\ (E(x)/c - \sigma_x^2 / 2c^2)$$

si $c > 0$ la función objetivo será

$$\max\ z = E(x) - \sigma_x^2 / 2c$$

7. Función objetivo cuando el decisor tiene aversión decreciente al riesgo.

Función utilidad: $u(x) = (x + b)^{-2}$ $x > -b$.

Mediante una expansión en serie de Taylor

$$u(x) = (E(x) + b)^{-2} + (x - E(x)) \left.\frac{d\,u(x)}{dx}\right|_{E(x)} +$$

$$+ \left[(x - E(x))^2 / 2\right] \left.\frac{d^2 u(x)}{dx^2}\right|_{E(x)} + \cdots$$

Tomando los dos primeros términos de la serie y obteniendo la esperanza

$$E\,u(x) \doteq 1 / ((E(x))^2 + 2\,b\,E(x) + b^2)$$

luego la función objetivo será:

$$\min\ z = (\overline{E(x)} + 2\,b)\ E(x)$$

Si se toman los tres primeros términos se mejora la aproximación

$$E\,u(x) = (E(x) + b)^{-2} + 3\,\sigma_x^2\ (E(x) + b)^{-4}$$

por lo que la función objetivo será ahora:

$$\max \ z = (\overline{E(x)} + b)^{-4} \left[(\overline{E(x)} + 2b) \ E(x) + 3 \sigma_x^2 \right]$$

II.4.2. Restricciones.

1. Restricciones de flujo de fondos.

En este tipo de restricciones se especifica que la cantidad neta al final de cada período t, z_t, deberá ser mayor o igual que cero con una posibilidad de al menos α, es decir:

$$P_r (z_t \geq 0) \geq \alpha \qquad t = 1, \ldots, n$$

Ahora bien, $P_r (z_t \geq 0) = P_r ((z_t - \bar{z}_t) / D_t \geq (0 - \bar{z}_t) / D_t)$ donde $\bar{z}_t$ es el valor esperado de z_t y D_t es la desviación estándar de z_t .

donde

$$\bar{z}_1 = - \sum_j \mu_{1j} x_j - d_1 \ S_0 - d_1 \ (S_1^* - S_1) -$$

$$- \sum_k \ell_{k\ell} (1 - r_{c\ell}) \ V_{k\ell} - \sum_{p=0}^{1} b_p \ p_p - \sum_j (g_{j1} \Upsilon_{j1} \ (1 - r_{c1}) + h_{j1} \ \Upsilon_{j1}) - \sum_i (g_{i1} \omega_{i1} (1 - r_{c1}) + h_{i1} \omega_{i1}) -$$

$$- C_1 \ S_1 + S_1^* + P_1 + \sum_k V_{k\ell} + \sum_m \Upsilon_{m\ell} + \sum_j \omega_{j\ell}$$

y en general

$$\bar{z}_t = -\sum_j {}_{tj} x_j - d_t S_0 - \sum_{p=1}^{t} d_t (S_p^* - S_p) - \sum_k V_k (t-1) -$$

$$- \sum_k {}_{kt} (1 - r_{ct}) V_{kt} - \sum_{p=0}^{t} b_p p_p -$$

$$- \sum_j \sum_{p=1}^{t} (g_{jp} \; Y_{jp} (1 - r_{ct}) \; (1 - (t-p) \; h_{jp}) + h_{jp} \; Y_{jp} \,))$$

$$- \sum_i \sum_{p=1}^{t} (\,(g_{ip} \; W_{ip} (1 - r_{ct}) \; (1 - (t-p)) \; h_{ip}) + h_{ip} \; W_{ip} \,))$$

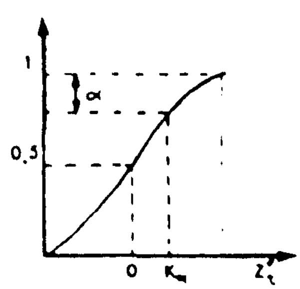
$$- \sum_j \sum_{p=1}^{t-1} R_{jpt} - C_t S_t + S_t^* + \sum_k V_{kt} + \sum_m Y_{mt} +$$

$$+ p_t + \sum_j W_{jt} + \sum_j \sum_{p=1}^{t-1} \; \sum_{q=p+1}^{t} (1 - r_{ct}) \; g_{ip} \; R_{jpq} + \bar{z}_{t-1}$$

Se supondrá que $\sum a_{ij} \; x_j$ tiene una distribución normal, luego

$z_t^* = (z_t - \bar{z}_t) \,/\, D_t$ tendrá distribución normal estándar.

Así $\quad P_r \; (z_t^* = K \quad) =$



De la figura es posible observar que para valores menores que K_α la probabilidad aumenta.

De manera que para tener $P_r\ ((z_t - \bar{z}_t) / D_t \geq - \bar{z}_t / D_t) \geq \alpha$

basta con que se cumpla que $- \bar{z}_t / D_t \leq K\alpha$

luego las restricciones quedarán como

$$\bar{z}_t - K_{\alpha_t} D_t \geq 0 \qquad\qquad t = 1, \ldots, n$$

donde $D_t = \sqrt{\sum_j \sigma_{tj}^2 \ x_j}$

La notación adicional a la que se tiene en la sección 3 de II.4.1 es

- a_{jt} = Flujo de dinero en el período t de la estrategia j (positivo si es un requerimiento)
- S_t^* = Número de acciones ordinarias que se emiten en el período t
- d_t = Pago de dividendos a una acción ordinaria en el período t
- S_0 = Número de acciones ordinarias en el período cero
- S_p = Número de acciones en que se reduce el capital en el período p
- c_t = Costo de reducir el capital en una acción ordinaria en el período t
- α_t = Probabilidad mínima para que se cumpla la restricción en el tiempo t
- z_t = Cantidad neta al final del período t

2. Restricciones de dependencia en las inversiones.

Las estrategias pueden ser mutuamente exclusivas, en cuyo caso la restricción será:

$$\sum_{i \in M} x_i \leq 1 \quad \text{donde} \quad M = \left\{ i \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{las estrategias } i \text{ son} \\ \text{mutuamente exclusivas} \end{array} \right\}$$

Pueden ser contingentes, es decir que solo tienen sentido si otra estrategia se adopta:

$x_i - x_j \leq 0$ impide la implantación de i a menos que se decida la implantación de j.

Las variables x_i son binarias, como se había mencionado anteriormente. Según sea la dependencia entre las inversiones, así serán las restricciones que será necesario formular.

3. Restricciones de financiamiento asociado con ciertas estrategias exclusivamente.

Existen ocasiones en que las instituciones solo otorgan préstamos si éstos se destinan exclusivamente a un cierto tipo de actividad, en este caso las restricciones serán

$$w_{\ell p} \leq \lambda_\ell \lambda_{\ell p} \quad \forall \ell, p$$

donde $\lambda_{\ell p}$ es la cantidad máxima de financiamiento para la estrategia ℓ en el período p.

4. Pago anticipado de la deuda.

Es necesario asegurar que el pago anticipado total en el horizonte de planeación no excede la cantidad que se adeuda.

$$\sum_{q=p+1}^{n} R_{jpq} \leq Y_{jp}\left[1-(n-p)\, h_{jp}\right] \qquad \forall p,\, j$$

5. Restricciones referentes a la reducción de capital.

$$S_1 + H_1 = H_0$$

$$S_t - S^{*}_{t-1} + H_t - H_{t-1} = 0 \qquad t = 1, \ldots, n$$

donde

S_t = Cantidad de acciones en que se reduce el capital social en el período t

S^{*}_t = Cantidad de acciones que se emiten en el período t

H_t = Capital social en el período t

y

$$H_t \geq H_{t\ \text{mín}}$$

donde

$H_{t\ \min}$ = es el mínimo capital social que se considera conveniente.

II.5. Resolución del modelo utilizando el algoritmo de descomposición de Benders.

Como se describió en II.4 el modelo es de programación mixta, variables contínuas y enteras binarias. Un método para resolver lo es el de descomposición de Benders(1). En este método se resuelve en forma alternativa un problema de programación lineal y otro de programación mixta con una sola variable continua.

Cuando el decisor tiene neutralidad al riesgo o aversión constante, la solución aplicando el algoritmo de Benders es directa. Cuando el decisor está buscando el riesgo, tiene aversión creciente o decreciente, se requiere una estimación de $\overline{E(x)}$. Por supuesto el valor de $\overline{E(x)}$ deberá ser igual al valor que se calcula de $E(x)$ en la solución subsecuente del modelo, pero raras veces ocurrirá esto. Generalmente, el valor calculado en una solución provee un estimador razonable de $E(x)$ para el ensayo siguiente. Normalmente se requieren pocas iteraciones para reducir la diferencia entre los dos a un valor aceptable.

A continuación se presenta el método de descomposición de Benders, utilizando su notación.

El problema es

$$\max \left\{ C^T x + f(y) \,\middle|\, Ax + F(y) \leq b, x \in R_p, y \in S \right\}$$

donde

x: es un vector de variables continuas

R_p: espacio euclidiano de p dimensiones

R_q: espacio euclidiano de q dimensiones

y: variables enteras

S : es un subconjunto de R_q

A : matriz de $m \times p$

$f(y)$: función escalar con dominio igual a S

$F(y)$: función vectorial con dominio igual a S

b : vector fijo en R_m

c : vector fijo en R_q.

Se define C como

$$C = \left\{ (u_0, u) \mid A^T u - c u_0 \geq 0, \; u_0 \geq 0, \; u \geq 0 \right\}$$

Q^0 es un subconjunto de C

$$G(Q^{\nu}) = \bigcap_{(u_0, u) \in Q^{\nu}} \left\{ (x_0, y) \mid u_0 x_0 + u^T F(y) - u_0 f(y) \leq u^T b, \; y \in S \right\}$$

M: es una constante tal que todos los vértices de

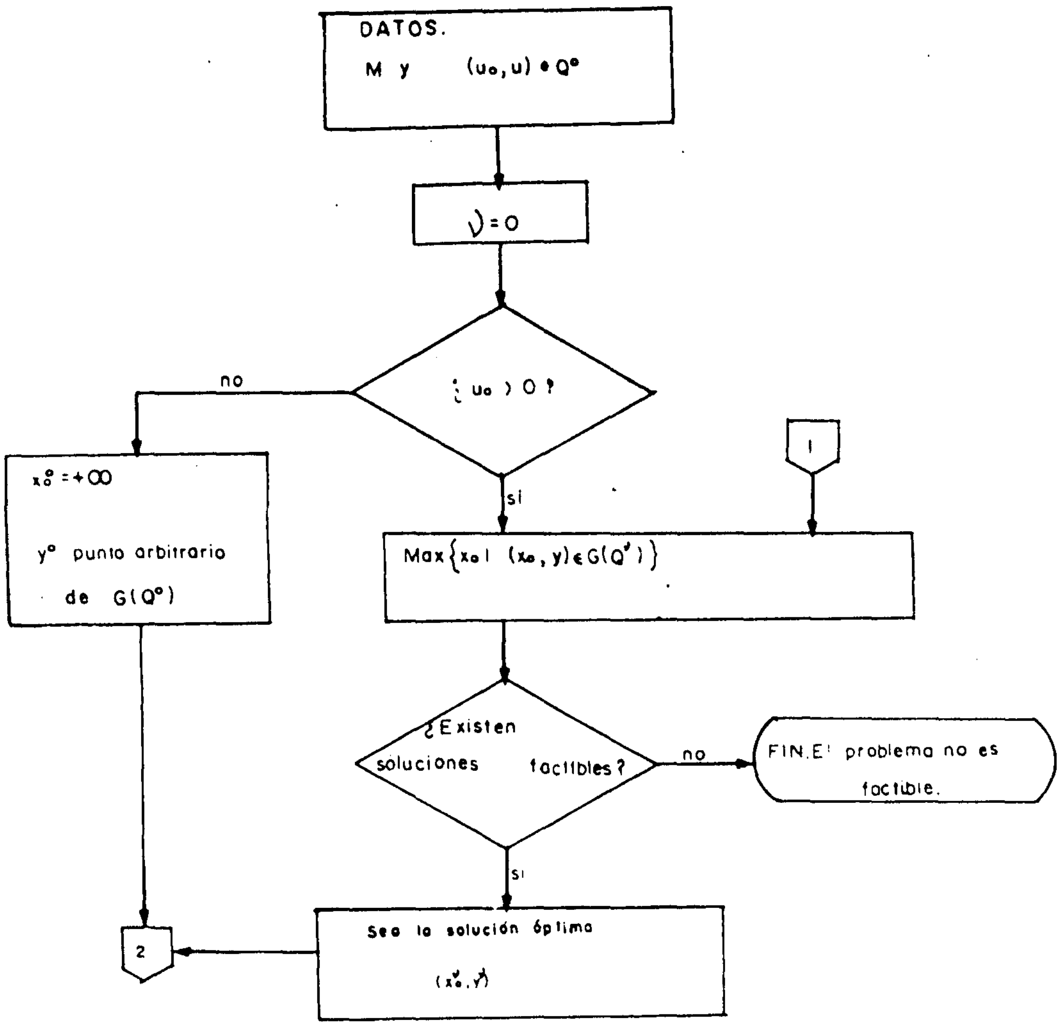
$$\left\{ u \mid A^T u \geq c, \; u \geq 0 \right\}$$

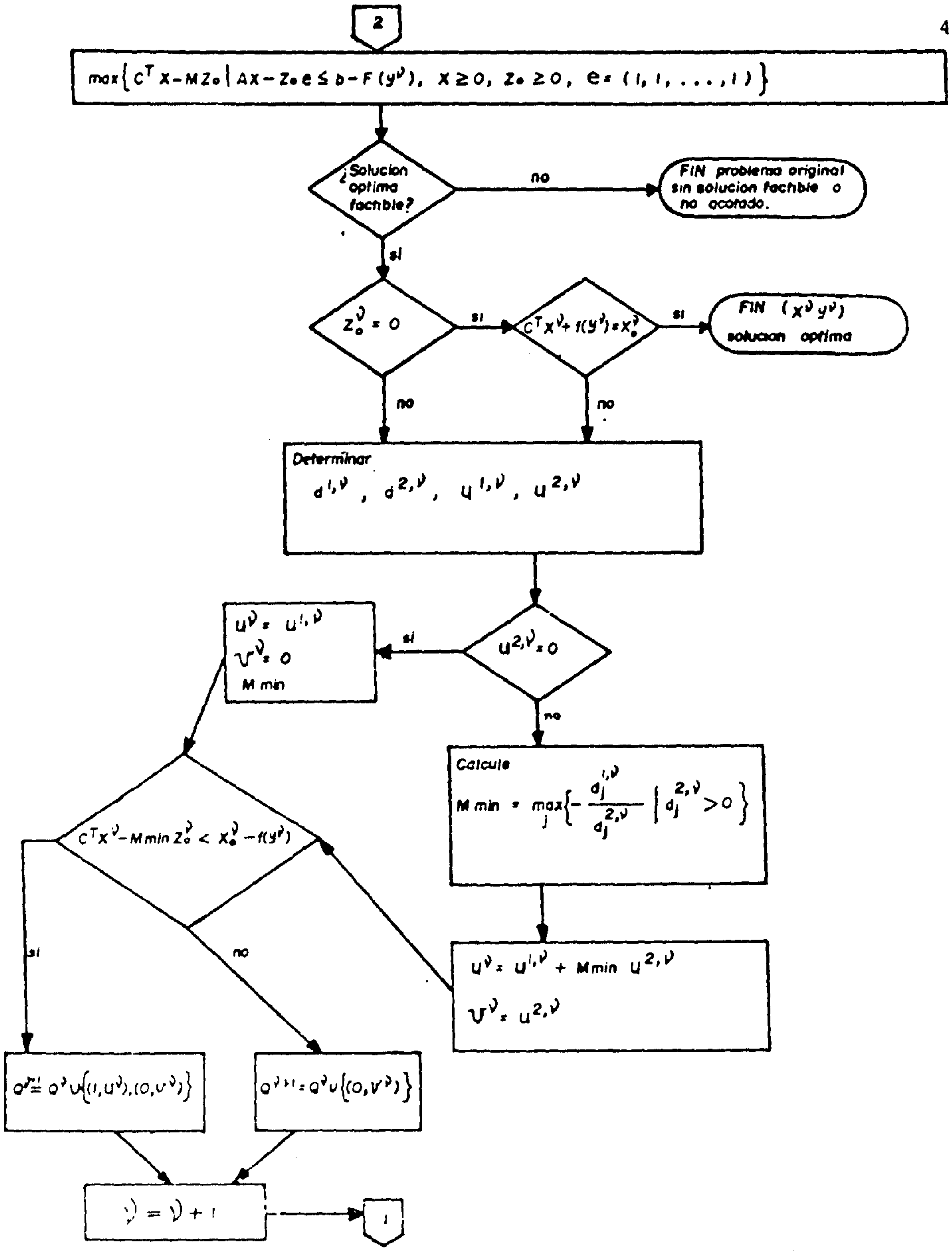
estén contenidos en la región $\left\{ u \mid e^T u \leq M, \; u \geq 0 \right\}$ donde e es el vector cuyas componentes son todas igual a la unidad.

$d^{1,\nu}$: es el renglón de las $z_j - c_j$, en la tabla óptima del simplex, cuando $c^T x - M z_0$ se sustituye por $c^T x$

$d^{2,\nu}$: es el renglón de las $z_j - c_j$, en la tabla óptima del simplex, cuando $c^T x - M z_0$ se sustituye por $- z_0$

Este método de Benders se presenta mediante su diagrama de flujo.




2
$\max\{C^T X - M Z_0 \mid AX - Z_0 e \leq b - F(y^\nu),\ X \geq 0,\ Z_0 \geq 0,\ e = (1, 1, \ldots, 1)\}$
¿Solucion optima factible?
no
FIN problema original sin solucion factible o no acotado.
si
$Z_0^\nu = 0$
si
$C^T X^\nu + f(y^\nu) = X_0^\nu$
si
FIN $(X^\nu y^\nu)$ solucion optima
no
no
Determinar
$d^{1,\nu}$, $d^{2,\nu}$, $u^{1,\nu}$, $u^{2,\nu}$
$u^{2,\nu} = 0$
si
$u^\nu = u^{1,\nu}$
$v^\nu = 0$
M min
no
Calcule
$M\,min = \max_j \left\{ -\frac{d_j^{1,\nu}}{d_j^{2,\nu}} \;\middle|\; d_j^{2,\nu} > 0 \right\}$
$u^\nu = u^{1,\nu} + M\,min\ u^{2,\nu}$
$v^\nu = u^{2,\nu}$
$C^T X^\nu - M\,min\, Z_0^\nu < X_0^\nu - f(y^\nu)$
si
no
$Q^{\nu+1} = Q^\nu \cup \{(1, u^\nu), (0, v^\nu)\}$
$Q^{\nu+1} = Q^\nu \cup \{(0, v^\nu)\}$
$\nu = \nu + 1$
1

Ejemplo

$$\max \quad z = X_1 + 2X_2 + 4y_1 + 3y_2 + 2y_1 y_2$$

S.A.

$$4X_1 + 5X_2 + y_1 - y_2 \leq 10$$
$$X_2 - 3y_1 + 2y_2 - 5y_1 y_2 \leq 30$$

$X_1, X_2 \geq 0, \quad y_j = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall j$

$$C = [1,2] \qquad f(y) = 4y_1 + 3y_2 + 2y_1 y_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F(y) = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ -3y_1 + 2y_2 - 5y_1 y_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$C = \left\{ (u_0, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} 4u_1 - u_0 \geq 0 \\ 5u_1 + u_2 - 2u_0 \geq 0 \\ u \geq 0, \; u_0 \geq 0 \end{array} \right\} \qquad Q^0 = \{u_0 = 1, \; u = (1,0)\}$$

max X_0

s.a.

$$X_0 + y_1 - y_2 - 4y_1 - 3y_2 - 2y_1 y_2 \leq 10$$
$$X_0 - 3y_1 - 4y_2, - 2y_1 y_2 \leq 10$$

Solución $y_1^0 = 1 \quad y_2^0 = 1 \quad X_0^0 = 19$

Ahora

$$\max \quad X_1 + 2X_2 - 3Z_0$$

s.a.

$$4X_1 + 5X_2 - Z_0 \leq 10$$

$$X_2 - Z_0 \leq 36$$

$$X_1, X_2, Z_0 \geq 0$$

X_1	X_2	X_3	X_4	Z_0	b	V.b.	θ
4	5*	1		-1	10	X_3	2
	1		1	-1	36	X_4	6
-1	-2			3			
.8	1	0.2		-.2	2	X_2	
-.8		-0.2	1	-.8	34	X_4	
.6		0.4		2.6	4.0		

$Z_0^0 = 0 \qquad c^T X^0 + f(y^0) = 4 + 9 = 13 < X_0^0 = 19$

por lo que la solución no es óptima.

$d^{1,0} = [.6,0,0.4,0,-0.4] \qquad u^{1,0} = [0.4, 0]$

$d^{2,0} = [0,0,0,0,1] \qquad u^{2,0} = [0,0]$

como $C^T X^0 = 4$ es menor que $X_0^0 - f(y^0) = 19 - 9 = 10$

$$Q^1 = Q^0 \cup \{(1,0.4,0) \ , \ (0,0,0)\}$$

$$\nu = 0. + 1 = 1$$

max X_0

s.a.

$$X_0 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_1 y_2 \leq 10$$

$$X_0 + 0.4y_1 - 0.4y_2 - 4y_1 - 3y_2 - 2y_1 y_2 \leq 4$$

max X_0

s.a.

$$X_0 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_1 y_2 \leq 10$$

$$X_0 \quad - 3.6y_1 - 3.4y_2 - 2y_1 y_2 \leq 4$$

Solución $y_1^1 = 1,\ y_2^1 = 1 \qquad X_0^1 = 13$

El problema de programación lineal queda igual que el anterior por lo que la solución es $X_1^1 = 0 \qquad X_2^1 = 2\ ,\ Z_0^1 = 0$

$$C^T X^1 + f\ (y^1) = 4 + 9 = 13 = X_0^1$$

Termina el algoritmo y la solución óptima es $X_1 = 0,\ X_2 = 2$

$y_1 = 1,\ y_2 = 1$

$Z = 13$

II.6. Algoritmo para resolver un problema de programación mixta.

Como puede verse del inciso anterior, es necesario contar con un algoritmo para resolver un problema mixto de variables binarias y una variable continua. Se presenta este algoritmo en el capítulo III.

II.7. Modelo Dinámico.

Este modelo es de simulación. Los modelos de simulación pueden hacerse tan complejos y detallados como el tiempo, el dinero y la paciencia lo permitan. Desafortunadamente no puede decirse lo mismo respecto a modelos de optimización. Pero como sugieren De Neufville y Marks (5) es conveniente utilizar optimización y simulación como herramientas complementarias en vez de competitivas. Este es el enfoque que se le da en este trabajo, donde el modelo dinámico complementa al modelo anterior de optimización.

Para desarrollar este modelo se utilizarán la notación y la estructura de los modelos dinámicos de Jay W. Forrester (8).

Se definen a continuación las variables principales.

1. Activo circulante.

Se considera que el activo circulante en el tiempo K es igual al que se tenía en el tiempo J más el dinero que ingresa ya sea por aumento del capital o préstamos a corto y largo plazo o ingreso de las estrategias en el período JK, menos compras de activo fijo, pagos de la deuda a corto y largo plazo e intereses, pago de dividendos y costo de la reducción de capital. Quedán do por tanto

ACI.K = ACI.J + (DT) (PCL.JK + IES.JK + EAC.JK - CAF.JK

- PDCL.JK - PDI. JK - CAC.JK)

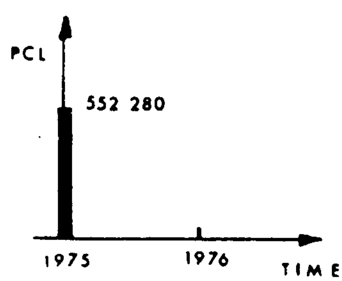
Donde DT es el intervalo de tiempo entre cálculos sucesivos.

PCL = Préstamos a corto y a largo plazo.

PCL.KL = TABHL (PCLT, TIME.K , 1975, 1976,1)

PCLT = 552 280/0

En este caso, se trata de una tabla donde en el eje de las abscisas se tiene el tiempo y en el eje de las coordenadas la cantidad que ingresa por concepto de préstamos en los diferentes puntos de tiempo. Es un insumo que viene del modelo de optimización.



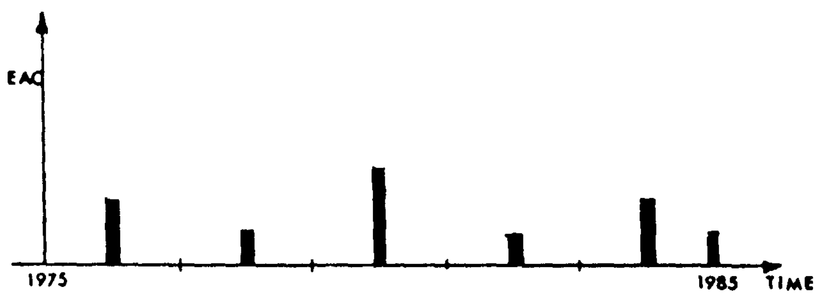
IES = Ingreso de las estrategias

IES.KL = NØRMRN (A.K, B.K)

Con esta ecuación durante el tiempo KL se tiene la generación de números aleatorios con distribución normal de media A y desviación estándar B que varían en el tiempo. Las cantidades A y B son datos que proporciona el modelo de optimización.

EAC = Emisión de acciones.

Esta ecuación también está especificada mediante una tabla, cuya abscisa es el tiempo de 1975 a 1985 y su ordenada EAC, las acciones que se sugiere se emitan en el modelo de optimización.



CAF = Compras de activo fijo.

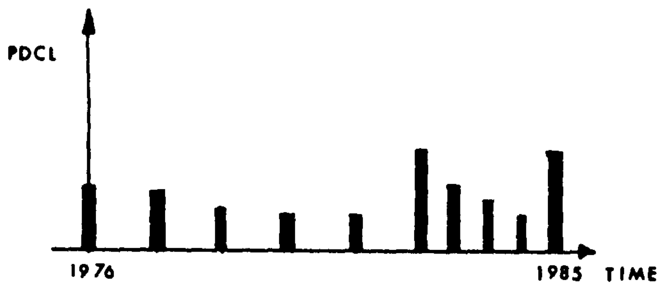
CAF.KL = PULSE (C, 1975, D)

Esta ecuación representa la compra de activo fijo cuyo costo es C y que se remplaza cada D años.

PDCL = Pago de la deuda a corto y largo plazo

PDCL. KL = TABHL (PDCLT, TIME.K, 1976, 1985, 1)

Se trata de una tabla donde se sitúan los pagos de la deuda más los intereses especificados por el modelo de optimización.



PDI = pago de dividendos.

PDI.KL = CLIP (0, ZDI.K, 0, ZDI.K)

donde

ZDI.K = KDI * UTI.K

El pago de dividendos se está considerando como un porcentaje de la utilidad si ésta es positiva, cero en caso contrario. La función CLIP compara 0 con ZDI y hace

$$PDI = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \geq ZDI \\ ZDI & \text{si} \quad 0 < ZDI \end{cases}$$

CAC = Reducción de capital. Se define como una tabla cuyos datos provienen del modelo de optimización.

2. Activo fijo.

El activo fijo, AFI, en el tiempo K se considera igual al activo fijo que se tenía en el tiempo J más las nuevas adquisiciones menos la depreciación durante el período JK. Es decir

AFI.K = AFI.J + (DT) (CAF.JK - DEP.JK)

CAF es una variable que representa las nuevas adquisiciones, la cual se definió en el inciso anterior.

DEP = Depreciación.

DEP.KL = AFI.K/VU

la depreciación se considera igual al activo fijo, AFI, dividido entre su vida útil, VU.

3. Pasivo.

El pasivo es la cantidad que adeuda la corporación, la cual va variando en el tiempo, disminuyendo en cuanto se hacen pagos e incrementándose en cuanto se contraen nuevos compromisos.

PCF.K = D1.K + D2.K + D3.K + D4.K

Donde en D1, D2, D3 y D4 se lleva el registro de lo que se adeuda con las diferentes fuentes de financiamiento.

4. Capital social.

El capital social, CSO, en el tiempo K es igual al que se tenía en el tiempo J más la emisión de nuevas acciones o la reducción de capital durante el período JK. Es decir,

CSO.K = CSO.J + (DT) (EAC.JK - CAC.JK)

5. Capital Contable.

El capital contable, CCO, es igual al activo circulante, ACI, más activo fijo, AFI, menos el pasivo, PCF.

O sea, CCO.K = ACI.K + AFI.K - PCF.K

6. Utilidad.

La utilidad es igual al capital contable menos el capital social.

UTI.K = CCO.K - CSO.K

7. Dividendos pagados.

Los dividendos pagados son una acumulación en valor presente de los dividendos que se pagan durante todos los períodos

DPA.K = DPA.J + (DT)(PDI.JK/EXP((TIME.J - 1975)* LOGN (1 + CCA.J)))

Donde

LOGN ()	es la función logaritmo natural
EXP ()	es la función exponencial
PDI	pago de dividendos definida en el inciso 1
CCA	es el costo del capital, definido como

CCA.K = (I1*D1.K + I2* D2.K + I3*D3.K + I4*D4.K + CSO.K*KI)/(CSO.K + PCF.K)

Siendo I1, I2, I3, I4 y KI constantes que corresponden a las tasas de interés de la deuda y del capital propio.

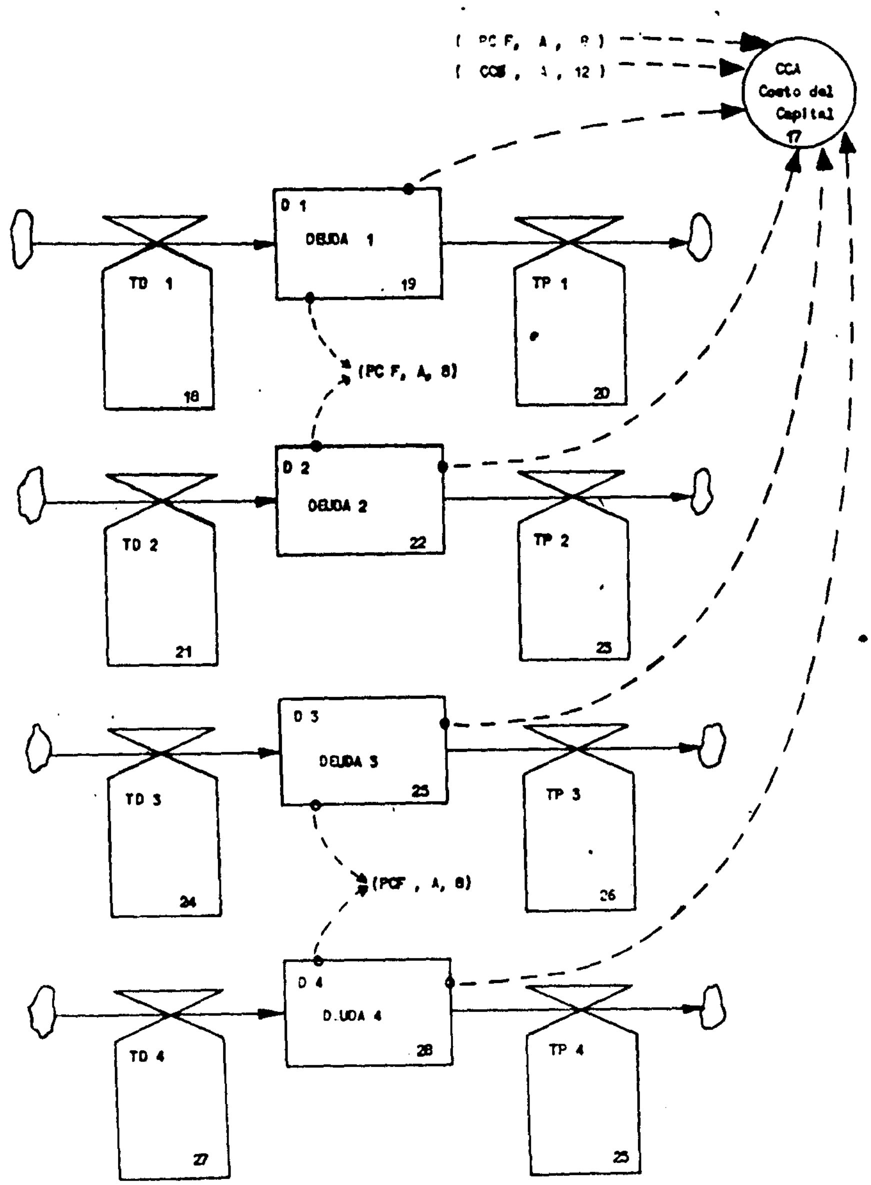
PCF es el pasivo y CSO el capital social definidos en los incisos 3 y 4 respectivamente.

8. Estructura financiera.

La estructura financiera, EFI, se considera como el cociente del pasivo entre el capital contable.

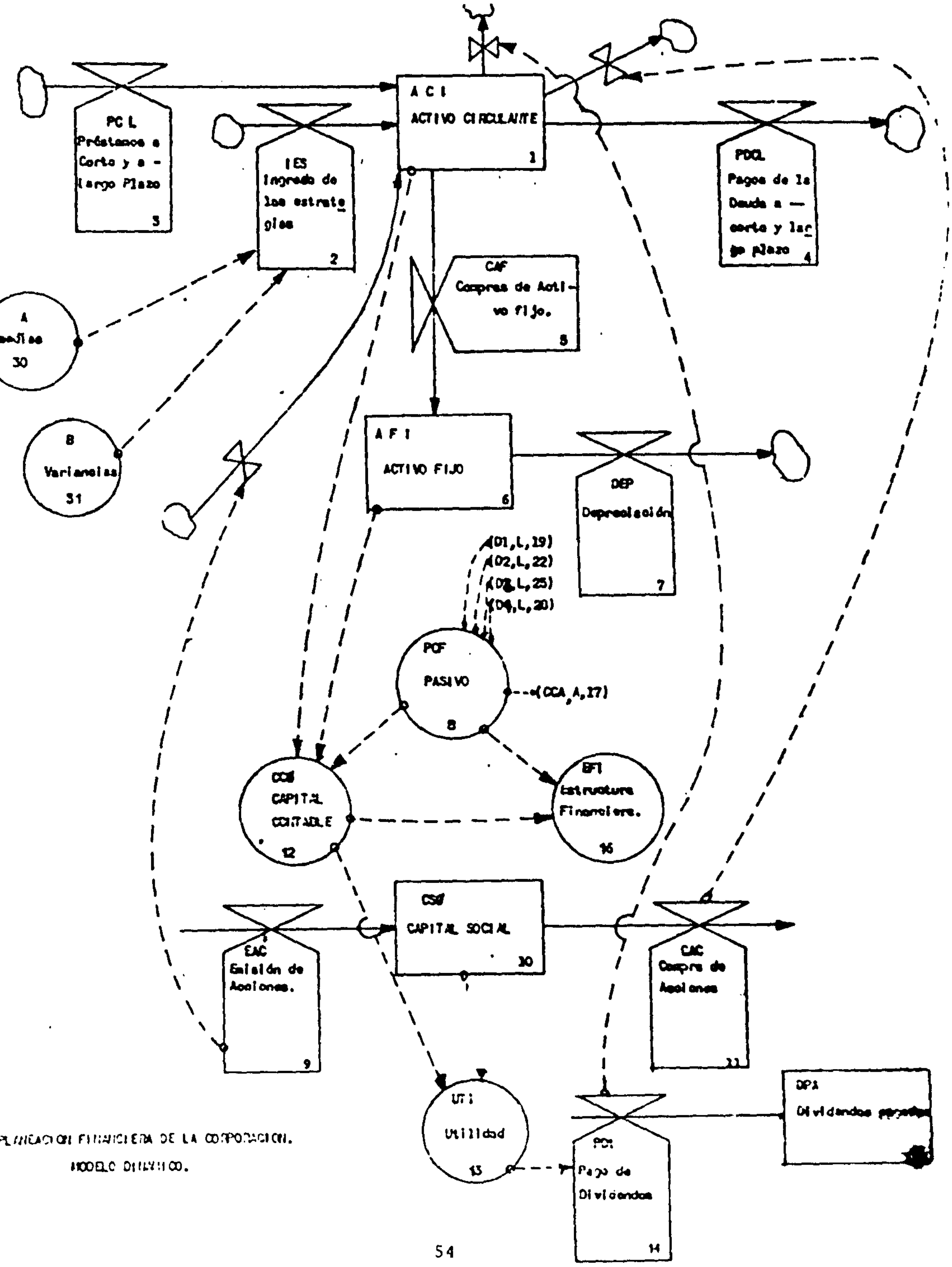
EFI.K = PCF.K / CCO.K

Se presenta a continuación el diagrama de flujo de este modelo dinámico.



PLANEACION FINANCIERA DE LA CORPORACION

MODELO DINAMICO



PLANEACION FINANCIERA DE LA CORPORACION.
MODELO DINAMICO.

II.8. Subsistema de Optimización.

Se trata de tener un sistema integral en el que lleguen los planes anuales de las compañías subsidiarias de la corporación, se perforen los datos en tarjetas, o bien lleguen ya los datos en cinta o en tarjeta y después de 10 minutos (se incluye lectura de datos, procesamiento e impresión de resultados) se cuente ya con la solución, es decir, los planes aceptados y cómo deberá ser el financiamiento.

Los datos necesarios son:

Proporcionados por cada Subsidiaria:

1. Esperanza y variancia del valor presente neto de cada estrategia
2. El ingreso esperado y la variancia anual de cada estrategia
3. Dependencia entre las estrategias propuestas

4. Activo circulante consolidado
5. Pasivo consolidado
6. Tasas de interés y forma de pago de las diferentes instituciones de crédito
7. Capital social de la corporación
8. Qué préstamos están asociados a qué estrategias
9. Tipo de aversión del presidente de la corporación

Estos datos son procesados por un programa A que calcula los coeficientes de la función objetivo y las restricciones, enviándose a la cinta No. 10.

A continuación se tiene otro programa ACOST1 que calcula los términos independientes de las restricciones, lee los coeficientes de la función objetivo y restricciones de la cinta 10 y todo lo registra en la cinta 8. Ciertos parámetros los envía a la cinta 12.

De la cinta 8 el programa MPSX de IBM lee los datos y resuelve el problema de programación lineal enviando sus resultados a la cinta 11.

Después de eso, funciona el programa ACOST2 que lee los resultados de 11 y 12, resuelve el problema de programación mixta y sigue la rutina del algoritmo de Benders, preguntando si se satisfacen las condiciones de optimalidad. En caso afirmativo, se imprimen resultados y éstos a su vez sirven de insumo al modelo dinámico para que éste efectúe una simulación y muestre en el tiempo el comportamiento de las variables que se considere de interés. (costo del capital, estructura financiera, activo, pasivo, utilidad, pago de dividendos, capital social, etc.). En caso negativo se generan nuevas restricciones, las que se envían a la cinta 12, se leen los coeficientes de la función objetivo y restricciones de la cinta 10, se calculan los nuevos términos independientes, enviándose esta información a la cinta 8, de donde la toma nuevamente el MPSX resolviendo otro problema de programación lineal, enviando resultados a la cinta 11, repitiéndose de ahí el proceso.

La única posibilidad de que no exista solución óptima es que el problema de programación lineal en la primera iteración no tenga solución factible o no esté acotado.

El MPSX utiliza 3 discos.

A continuación se presenta su diagrama de flujo simplificado.

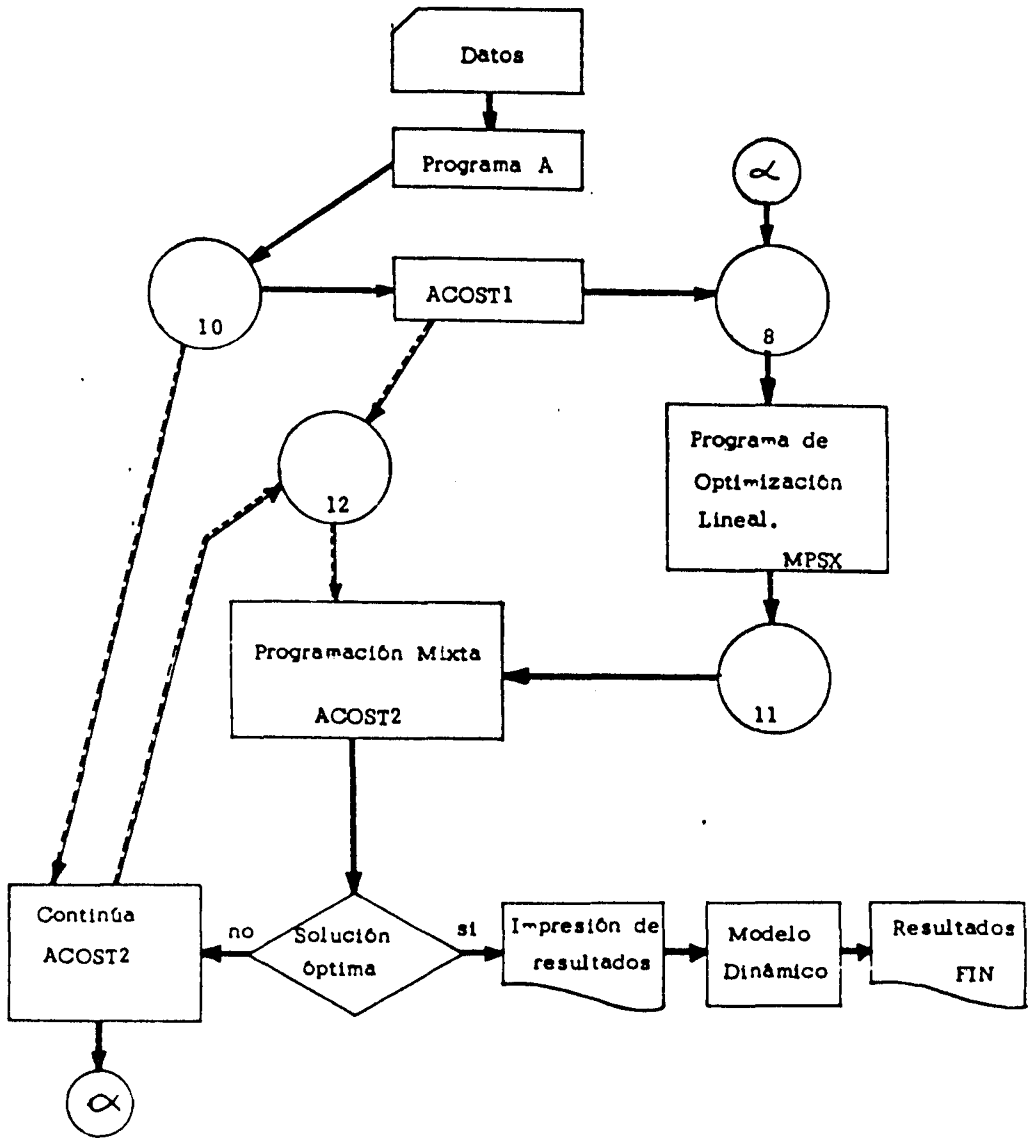


DIAGRAMA DE FLUJO SIMPLIFICADO

CAPITULO

3

ALGORITMO DE PROGRAMACION MIXTA

CAPITULO III

ALGORITMO PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROGRAMACION MIXTA

III.1. El problema.

En este capítulo se desarrollará un método simple, fácil de programar para resolver problemas de programación mixta con una función objetivo que es una variable continua y restricciones arbitrarias (pueden ser no convexas). El método es aplicable a cualquier problema que puede formularse de la manera siguiente:

$$\text{maximizar} \quad Z = X_0$$

sujeta a

$$-X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad i = p+1, \ldots, m$$

donde $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

y $y_j = 0$ ó 1 $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$-\infty < X_0 < \infty$$

y donde se aplica la restricción que cada una de las funciones g_{i1}, g_{i2}, $i = 1, \ldots, m$ son monotónicamente no decrecientes en cada una de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Este problema surge al aplicar el método de descomposición de Benders; recordando, ese método descompone el problema mixto en dos problemas que actúan en forma interactiva. Uno de ellos es de programación lineal y el otro de programación entera con una variable irrestricta que se maximiza, o sea que puede formularse como el problema cuyo método de solución se presenta en este trabajo. El método es esencialmente uno de enumeración parcial, estrechamente relacionado al método de Lawler y Bell (22) para resolver problemas de optimización discreta. Se dan a continuación 3 definiciones que son necesarias para el desarrollo del algoritmo.

Definición 1. Considerando vectores $\bar{y}$ de la forma $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ donde y_j es uno o cero, se dirá que $\bar{x} \leq \bar{y}$ si y únicamente si $x_j \leq y_j$ para toda j.

Definición 2. El ordenamiento numérico de estos vectores $\bar{y}$, se obtiene identificando con cada vector $\bar{y}$ el valor entero

$$n(\bar{y}) = y_1 2^{n-1} + y_2 2^{n-2} + \cdots + y_n 2^0$$

Definición 3. $\bar{y}^*$ es el primer vector que con el ordenamiento numérico sigue a $\bar{y}$ que tiene la propiedad que $\bar{y} \nleq \bar{y}^*$

III.2. Descripción del algoritmo.

III.2.1. Un problema simplificado.

Considérese inicialmente el problema siguiente:

maximizar $Z = X_0$

sujeta a

$$- X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

donde $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1$$

$$-\infty < X_0 < \infty$$

Cada una de las funciones g_{i1} y g_{i2} se suponen monotónicamente no decrecientes en cada una de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Este problema puede resolverse examinando cada uno de los 2^n vectores solución posibles en orden numérico, iniciando con $\bar{y} = (0,0,\ldots,0)$ y terminando con $(1,1,\ldots,1)$. Sin embargo, este proceso puede acortarse recurriendo a ciertas reglas, las cuales se establecen a continuación.

Al ir examinando la lista se mantiene un registro de la mejor solución hasta ese momento. Sea $\hat{y}$ esa solución y su Z correspondiente M. Sea $\bar{y}$ el vector que se está examinando. Las reglas siguientes indican las condiciones bajo las cuales ciertos vectores en el ordenamiento numérico pueden dejarse de examinar.

Regla 1. Si $g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y}) \geq M$ para alguna i no analice ninguno de los vectores $y, y+1, \ldots, y^* - 1$, o sea pase a y^*.

Justificación:

Como $-X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0$, el X_0 máximo corresponde

a $X_0 = \min_i \left| g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \right|$.

Debido a que g_{i1} y g_{i2} son monotónicamente no decrecientes $g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(y)$ constituye una cota superior a la diferencia $g_{i1}(y) - g_{i2}(y)$ en el intervalo $[y, y^* - 1]$. (véase figura 1.)

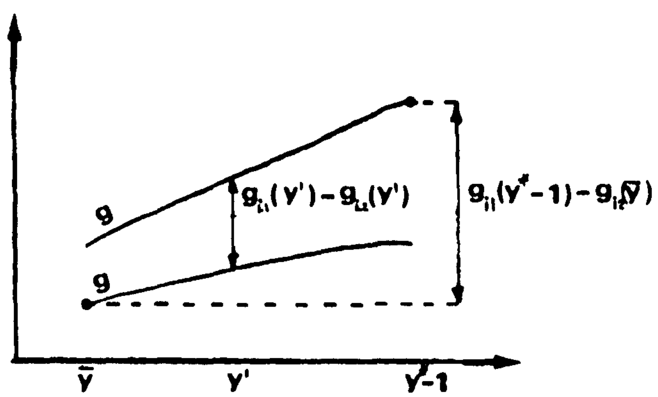


Fig. 1.

Luego puede escribirse

$$g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y}) \geq g_{i1}(y') - g_{i2}(y') \geq X'_0 \quad \forall y' \in [\bar{y}, y^* - 1]$$

donde $X'_0 = \min_i \left| g_{i1}(y') - g_{i2}(y') \right|$

si $M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(y) \implies M \geq X'_0 \quad \forall y' \in [\bar{y}, y^* - 1]$

o sea que no existe ningún vector y' en el intervalo $[y, y^* - 1]$ que pueda mejorar la solución que se tiene registrada, por lo cual es válido no analizar ningún vector en dicho intervalo y pasar directamente a y^*.

Regla 2. Si $M \geq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i, deje de analizar el vector $\bar{y}$ y pase al $\bar{y} + 1$.

Justificación: $X_0 \leq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \quad \forall i$

luego si $g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \leq M$ para alguna i, entonces $X_0 \leq M$, o sea que la solución $\bar{y}$, no mejora la ya existente.

Si no se cumple la regla 2, o sea que $M < g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \quad \forall i$ entonces $\hat{y} = \bar{y}$, $M = \min_i \{g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})\}$, y se pasa a $\bar{y} + 1$.

Se presentan los pasos del algoritmo y su diagrama de flujo.

Paso 1. Inicializar $\bar{y}$ y $y^* - 1$ haciendo $y_j = 0$, $(y^* - 1)_j = 1$ para toda j, ($(y^* - 1)_j$ es la j-ésima componente de $y^* - 1$). $y = \bar{y}$ y vaya al paso 2.

Paso 2. Calcular $M = \min_i \left| g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \right|$. Continúe con el paso 3.

Paso 3. Aplicación de la regla 1. Si $M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i, vaya al paso 7, si no, continúe con el paso 4.

Paso 4. Aplicación de la regla 2. Si $M \geq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i, vaya al paso 6; si no, continúe con el paso 5.

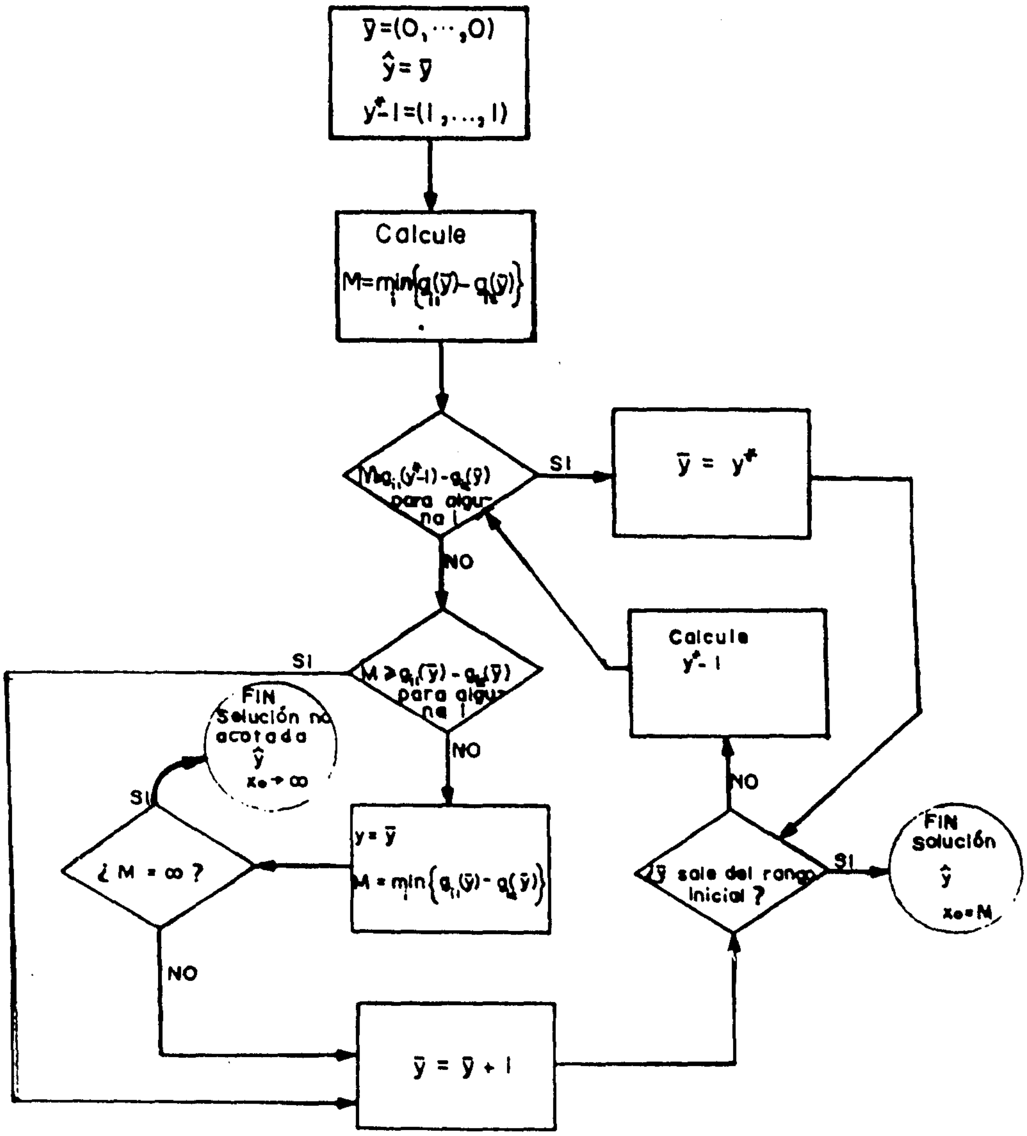
Paso 5. Haga $\hat{y} = \bar{y}$ y calcule $M = \min_i \left| g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \right|$, vaya al paso 9.

Paso 6. Cambie el valor de $\overline{y}$, aumentándolo en una unidad $\overline{y} = \overline{y} + 1$. Vaya al paso 8.

Paso 7. Haga $\overline{y} = y^*$, continuando en el paso 8.

Paso 8. Si $\overline{y}$ sale del rango $(0,\ldots,0)$ a $(1,\ldots,1)$ que se proporcionó en el paso 1, se tiene la solución óptima, siendo ésta $\hat{y}$ y $X_0 = M$; si no, calcule $y^* - 1$ y regrese al paso 3.

Paso 9. Si $M = \infty$ la solución es no acotada, $X_0 \rightarrow \infty$; si no, vaya al paso 6.



III.2.2. El problema original.

Se considera ahora el problema

maximizar $Z = X_0$

sujeto a

$$- X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad i = 1,\dots,p$$

$$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad i = 1,\dots, m-p$$

$\bar{y} = (y_1,\dots, y_n)$, $y_j = 0$ ó 1 $(j = 1,\dots, n)$

h_{i1}, h_{i2}, g_{i1} y g_{i2} son monotónicamente no decrecientes y $-\infty < X_0 < \infty$.

Nuevamente, este problema puede resolverse examinando cada uno de los 2^n vectores, en orden numérico, desde $(0,0,\dots,0)$ hasta $(1,1,\dots,1)$. Pero este proceso se acorta recurriendo a las reglas 1 y 2 de la sección anterior, que son aplicables a este problema, más una nueva regla:

Regla 3. Si $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i, no analice ninguno de los vectores $\bar{y}$, $\bar{y}+1,\dots, y^*-1$, o sea pase a y^*. (Esta es la regla 3 de Lawler y Bell (22)).

Justificación: Con respecto a los vectores en el intervalo $[\bar{y}, y^* - 1]$, $y^* - 1$ maximiza h_{i1} y $\bar{y}$ maximiza $-h_{i2}$. Entonces si $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$, no existe en ese intervalo ningún vector $\bar{y}$ tal que $h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) \geq 0$.

Se presentan a continuación los pasos que se han de seguir en el algoritmo y su diagrama de flujo.

Paso 1. Inicializar $\bar{y}$ y y^*-1 haciendo $y_j = 0$, $(y^*-1)_j = 1$ para toda j. $L=1$ y continúe en el paso 2.

Paso 2. Aplicación de la regla 3. Si $h_{i1}(y^*-1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i, vaya al paso 3. Si no, vaya al paso 4.

Paso 3. Si L es igual a 1 no existen soluciones factibles y se termina el algoritmo. Si no, haga $\bar{y} = y^*$ y vaya al paso 12.

Paso 4. Si L es igual a 3 vaya al paso 5, si no, vaya al paso 7.

Paso 5. Aplicación de la regla 1. Si M es mayor o igual que $g_{i1}(y^*-1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i, haga $\bar{y} = y^*$ y continúe en el paso 12; si no, vaya al paso 6.

Paso 6. Aplicación de la regla 2. Si M es mayor o igual que $g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i, haga $\bar{y} = \bar{y} + 1$, yendo al paso 12; si no, continúe en el paso 7.

Paso 7. Si $h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i, haga $\bar{y} = \bar{y} + 1$ y vaya al paso 8; si no, vaya al paso 10.

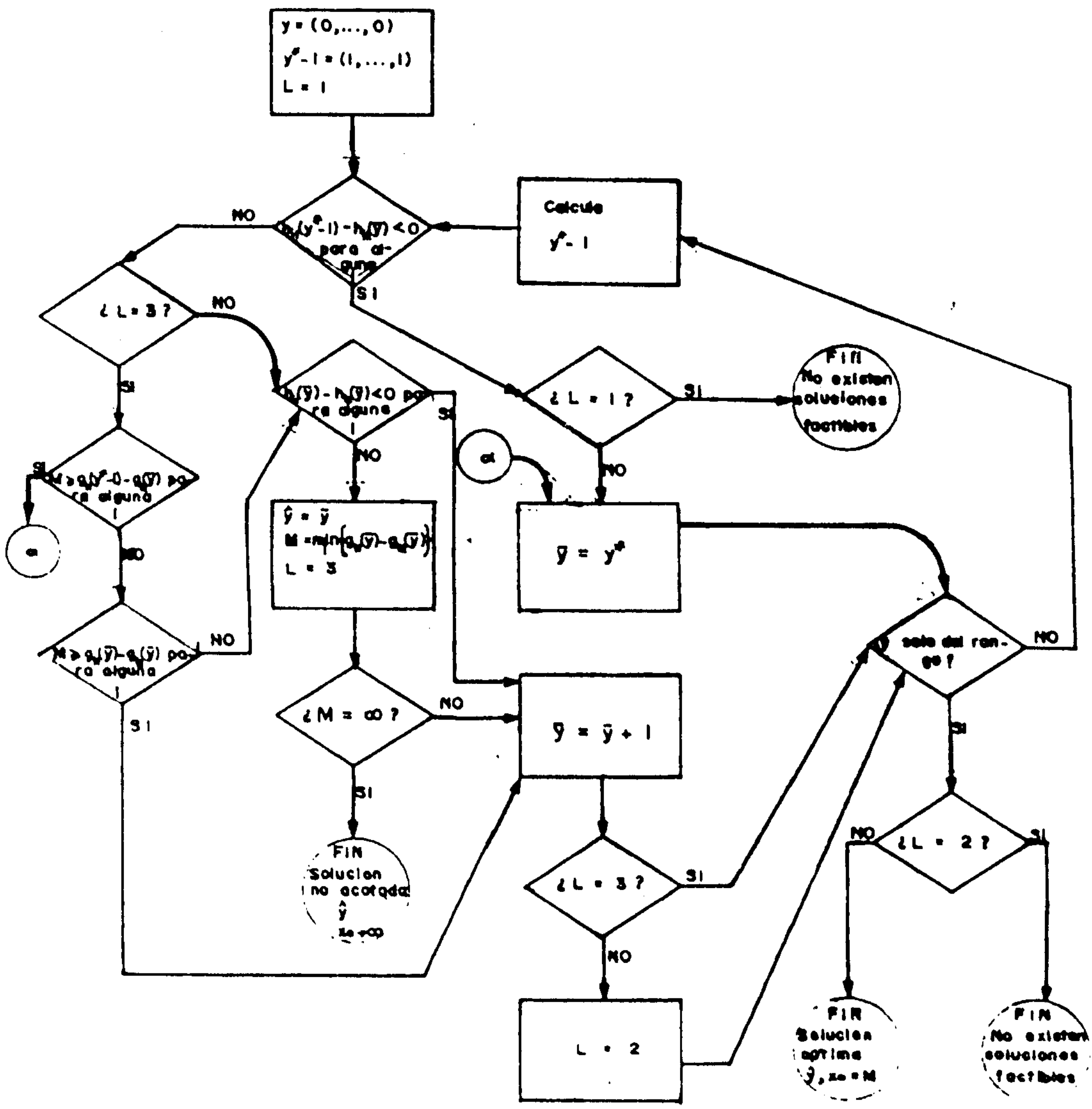
Paso 8. Si L es igual a 3 vaya al paso 12; si no, haga $L=2$ y continúe en el paso 12.

Paso 9. Calcule y^*-1 y continúe en el paso 2.

Paso 10. Haga $L=3$, $\hat{y}=\overline{y}$, calcule $M = \min_{i} \left\{ g_{i1}(\overline{y}) - g_{i2}(\overline{y}) \right\}$ y continúe en el paso 11.

Paso 11. Si $M = \infty$ la solución es no acotada, $X_0 \longrightarrow \infty$; si no, haga $\overline{y} = \overline{y} + 1$ y vaya al paso 8.

Paso 12. Si $\bar{y}$ sale del rango $(0,\ldots,0)$ a $(1,\ldots,1)$ que se proporcionó en el paso 1 y $L \neq 2$ se tiene la solución óptima, siendo ésta $\hat{y}$ y $X_0 = M$; si $L = 2$ no existen soluciones factibles, y si $\bar{y}$ no ha salido del rango, calcule $y^* - 1$ y regrese al paso 2.



III.3. Comparación con el algoritmo de Lawler y Bell.

Las diferencias esenciales del algoritmo desarrollado en esta tesis y el de Lawler y Bell para problemas de optimización discreta (22) son:

1. Lawler y Bell resuelven un problema donde todas sus variables son binarias y su algoritmo no puede resolver el problema con variables binarias y una variable continua irrestricta en signo, que es el que resuelve el algoritmo desarrollado en este trabajo.

2. Su problema es de minimización, mientras que el resuelto aquí es de maximización.

3. Su cota inicial M es igual a ∞, haciéndola corresponder a la solución $\hat{y}_0 = 1,\ \hat{y}_1 = \ldots = \hat{y}_n = 0$, mientras que aquí se trabaja en dos fases. En la fase I, cuando $L = 2$, se busca una solución factible inicial hasta que se encuentra una o bien la indicación que no existe ninguna. Habiendo encontrado la solución factible se pasa a la Fase II, que corresponde a $L = 3$, donde se optimiza.

4. Ellos no tienen la necesidad de localizar cuando la solución es no acotada, puesto que en programación binaria no existe esa posibilidad.

III.4. Lemas.

Lema 1. El paso 9 en la sección III.2.1. y el paso 11 en la sección III.2.2. del algoritmo, detectan cuando la solución es no acotada, al preguntar si M es igual a infinito.

Prueba. El problema que se tiene es el siguiente:

$$\max \quad Z = X_0$$

$$\text{s.a.} \quad X_0 \leq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

donde $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$; $y_j = 0$ ó 1 $(j = 1, \ldots, n)$, g_{i1} y g_{i2} son monotónicamente no decrecientes en cada variable y_j.

La solución no acotada no puede deberse a los vectores $\bar{y}$ pues to que estos se encuentran restringidos a estar dentro del rango $[(0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)]$. Luego la única posibilidad de tener la no acotación es cuando $X \longrightarrow \infty$. Eso ocurre solo cuando g_{i1} tiende a ∞ ó g_{i2} a $-\infty$. Puesto que $X_0 = \min_i \left\{g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})\right\}$ y en el algoritmo $M = \min_i \left\{g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})\right\}$, entonces cuando $M = \infty$, $X_0 \longrightarrow \infty$.

Lema 2. Excluyendo la solución no acotada, las demás soluciones del problema III.2.1. son factibles.

Prueba. La única restricción es que $X_0 = \min_i \left\{g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})\right\}$ por lo que, sea cual sea el valor de $\bar{y}$ siempre X_0 estará dentro del intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$, es decir, todas las soluciones son factibles.

Lema 3. El paso 3, cuando $L=1$ y el paso 12 cuando $L=2$ son las formas en el algoritmo de determinar que no existen soluciones factibles en el problema del inciso III.2.2.

Prueba. L es igual a uno solo en la primera iteración, es decir cuando $\bar{y}=(0,\ldots,0)$, $y^*-1=(1,\ldots,1)$ y $h_{i1}(y^*-1)-h_{i2}(\bar{y})<0$ para alguna i. Como h_{i1} y h_{i2} son monotónicamente no decrecientes en cada y_j, $h_{i1}((1,\ldots,1))$ es el valor máximo de h_{i1} y $h_{i2}((1,\ldots,1))$ es el valor mínimo de h_{i2}, luego si $h_{i1}(1,\ldots,1)-h_{i2}((0,\ldots,0))<0$ no existe ninguna solución $\bar{y}$ tal que $h_{i1}(\bar{y})-h_{i2}(\bar{y})\geq 0$ dentro del intervalo $\left[(0,\ldots,0),\ (1,\ldots,1)\right]$. Luego en el paso 3 cuando $L=1$ se tiene una condición suficiente para la no existencia de soluciones factibles.

Sin embargo, puede darse el caso en que $h_{i1}((1,\ldots,1))-h_{i2}((0,\ldots,0))\geq 0$ y no tener soluciones factibles. En este caso, inicialmente se hará $L=2$ y después quedará en un ciclo donde siempre $h_{i1}(y^*-1)-h_{i2}(\bar{y})<0$ para alguna i hasta que $\bar{y}$ sale del rango. Como no existen soluciones factibles, nunca cambia el valor de L y así cuando en el paso 12 se pregunta si $L=2$ y la respuesta es afirmativa, ésto indica la no existencia de soluciones factibles.

Lema 4. El algoritmo determina la solución óptima si existen soluciones factibles y ninguna está no acotada.

Prueba. El algoritmo inicia la enumeración de las 2^n soluciones posibles en (0,...0), aplica la regla 3 para eliminar intervalos donde no existen soluciones factibles hasta que encuentra una, de ahí continúa examinando intervalos, eliminando aquellos donde o no existen soluciones factibles (aplicación de la regla 3) ó no existen soluciones mejores a la que ya se tiene en registro. (aplicación de las reglas 1 y 2). En caso de encontrar una solución mejor a la ya registrada, ésta será sustituída, continuándose de esta manera hasta llegar a 1(0,...,0). Ahora bien, por el lema 1 se conocerá si la solución es no acotada y por el lema 3 si no existen soluciones factibles; siendo éstas, situaciones mutuamente exclusivas ya que $L = 1$ ó 2 ó 3. Por lo anterior, se considera que este algoritmo puede determinar la solución óptima si ésta existe.

III.5. Programación entera lineal mixta.

En este caso el problema es:

$$\max \quad Z = X_0$$

sujeto a

$$-X_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, y_j \geq 0 \qquad i = p+1, \ldots, m$$

donde las y_j son variables enteras no negativas y $-\infty < X_0 < \infty$.

III.5.1. Variables enteras con cota superior.

Puesto que cualquier variable entera no binaria y_j con cota superior v_j tiene la representación binaria

$$y_j = \sum_{k=0}^{k} 2^k y_{jk}$$

donde k es el entero más pequeño tal que $v_j \leq 2^{k+1} - 1$ y las variables y_{jk} son binarias, puede sustituirse y transformarse el problema de programación entera a programación binaria, quedando por tanto:

$$\max Z = X_0$$

sujeto a

$$-X_0 + \sum_j \sum_k b_{ijk} y_{jk} - \sum_j \sum_k c_{ijk} y_{jk} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, p)$$

$$\sum_j \sum_k b_{ijk} y_{jk} - \sum_j \sum_k c_{ijk} y_{jk} \geq 0 \quad (i = p+1, \ldots, m)$$

donde $y_{jk} = 0$ ó 1 $\forall j,k$ y $b_{ijk}, c_{ijk} \geq 0$ $\forall i,j,k$.

Evidentemente si $b_{ijk} > 0$ entonces $c_{ijk} = 0$ y si $c_{ijk} > 0$ entonces $b_{ijk} = 0$

considerando

$$\left.\begin{aligned} g_{i1}(\bar{y}) &= \sum_j \sum_k b_{ijk} y_{jk} \\ g_{i2}(\bar{y}) &= \sum_j \sum_k c_{ijk} y_{jk} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, p)$$

$$\left.\begin{aligned} h_{i1}(\bar{y}) &= \sum_j \sum_k b_{ijk}\, t_{jk} \\ h_{i2}(\bar{y}) &= \sum_j \sum_k b_{ijk}\, y_{jk} \end{aligned}\right\} \quad (i=p+1,\ldots,m)$$

siendo el problema max $Z = X_0$

$$\text{s.a.} \quad -X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad (i = 1,\ldots,p)$$

$$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad (i=p+1,\ldots,m)$$

$$\bar{y} = (y_{11},\ldots, y_{nk}), \text{ las } y_{jk} = 0 \text{ ó } 1 \quad (j=1,\ldots,n,\ k=0,\ldots,k)$$

g_{i1} y g_{i2} son monotónicamente no decrecientes con conjuntos de variables mutuamente exclusivos. Lo mismo para h_{i1} y h_{i2}.

Como se ve este problema es el de la sección III.2.2., por lo que puede resolverse por el algoritmo.

III.5.2. Variables enteras sin cota superior.

Cuando algunas variables enteras no tienen cota superior, un primer análisis puede hacerse viendo si para alguna de estas variables sus coeficientes a_{ij} y $b_{ij} \geq 0$ $\forall i$. Si esto es así, la solución no está acotada. Si no ocurre eso, se sugiere el procedimiento siguiente:

1° Suponer cotas v_j para cada variable y_j no acotada y resolver el problema como en III.5.1.

2° Si todas las variables no acotadas y_j en la solución son menores que la cota v_j supuesta, se tiene la solución óptima. Si no es así, increméntese la cota de las variables no acotadas cuya $y_j = v_j$. Repítase el proceso hasta que el problema sea el óptimo, exista evidencia que no está acotado o el problema sea tan grande que no sea posible resolverlo.

III.6. Programación entera no lineal mixta.

Para el problema $\max \; Z = X_0$

$$\text{s.a.} \quad - X_0 + g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

$$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) \geq 0 \qquad (i = p+1, \ldots, m)$$

$\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, y_j enteras mayores o iguales a cero, $-\infty < X_0 < \infty$; g_{i1}, g_{i2}, h_{i1}, h_{i2}, funciones no lineales monótonicamente no decrecientes.

Como en el inciso anterior, si $y_j \leq v_j$ entonces se puede hacer la sustitución

$$y_j = \sum_{k=0}^{K} 2^k \, y_{jk}$$

donde K es el entero más pequeño tal que $v_j = 2^{k+1} - 1$ y las variables y_{jk} son binarias.

Con lo que se reduce al problema del inciso III.2.2., al cual es aplicable el algoritmo desarrollado.

III.7. Reoptimización.

En el método de descomposición de Benders, al actuar interactivamente el problema de programación lineal y el de programación entera mixta, se va modificando el problema de programación entera mixta agregando una nueva restricción en cada iteración. Por lo anterior se vió la necesidad de modificar el algoritmo para que cuando se agregara una nueva restricción, no se tuviera que iniciar el proceso desaprovechando cálculos anteriores.

La modificación que se sugiere es considerarlo como un método de ramificación y acotación, descartando totalmente aquellos nudos que son infactibles. La ramificación se hace considerando los intervalos $\left[\bar{y},\ y^{*}-1\right]$. Cada rama es uno de esos intervalos y su cota es $C = \min\limits_{i} \left\{ g_{i1}(y^{*}-1) - g_{i2}(\bar{y}) \right\}$. También se calcula X_0 del vector inicial $\bar{y}$.

Las reglas para cancelar nudos son:

Regla 1. Si M, la mejor solución hasta el momento de la comparación, es mayor o igual que la cota C de un nudo, cancélese temporalmente dicho nudo.

Justificación:

$g_{i1}(y^{*}-1) - g_{i2}(\bar{y})$ es una cota superior de $g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para toda $\bar{y}$ en el intervalo $\left[\bar{y},\ y^{*}-1\right]$. Por lo cual,

$C = \min\limits_{i} \left\{ g_{i1}(y^{*}-1) - g_{i2}(\bar{y}) \right\}$ será una cota superior de

$X_0 = \min\limits_{i} \left\{ g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y}) \right\}$ para toda $\bar{y}$ en el intervalo $\left[\bar{y}, y^{*}-1\right]$.

Así, si $M \geq C$, entonces $M \geq X_0$ y se puede afirmar que dentro del intervalo $\left[\bar{y}, y^{*}-1\right]$ no existe ninguna solución que mejore la ya existente. Se cancela temporalmente puesto que de una iteración a otra el valor de M puede cambiar haciendo que un nudo pase de inactivo a activo.

Regla 2. Si $h_{i1}(y^{*}-1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i no existen soluciones factibles dentro del intervalo $\left[\bar{y}, y^{*}-1\right]$. Cancele definitivamente el nudo.

Justificación: Esta es la regla 3 del inciso III.2.2., la cual ya se justificó. La razón por la cual se cancela definitivamente el nudo es que al agregar nuevas restricciones sin quitar las anteriores, no es posible que las soluciones infactibles se conviertan en factibles.

La estrategia para ramificar es hacerlo desde la cota más grande. Si al tener la solución $M = \infty$, ésta será no acotada, o si $M = -\infty$, no existirá ninguna solución factible.

Se presentan los pasos del algoritmo cuando se presenta en su forma de ramificar y acotar:

Paso 0. Considere la raíz como el nudo que comprende al intervalo $\left[(0,\ldots,0), (1,\ldots,1) \right]$, calcule su cota C, haga

$M = -\infty$ y vaya al paso 3.

Paso 1. Ramificar desde ese nudo para todos los intervalos $[\bar{y}, y^* - 1]$ que no se han cancelado definitivamente, y calcúlese su cota C. Continúe en el paso 2.

Paso 2. De los nudos activos que no se han etiquetado vaya a aquel cuya cota **C** sea mayor. Continúe en el paso 3.

Paso 3. Analizar si el nudo no tiene soluciones factibles, utilizando la regla 2. Si es así cancele definitivamente el nudo y vaya al paso 7. En caso de que no se cumpla la regla 2 continúe en el paso 4.

Paso 4. Si $M \geqq C$ cancele temporalmente el nudo y vaya a 7; si no, continúe en 5.

Paso 5. Analice si $\bar{y}$ es factible. En caso afirmativo, calcule X_0, etiquete el nudo con "$X_0 =$ " y vaya al paso 6. Si $\bar{y}$ no es factible, etiquete el nudo con YNEF y pase a 7.

Paso 6. Si M es menor que X_0 haga $M = X_0$ y continúe en 7. Si no, continúe en **7.**

Paso 7. Si en todos los nudos no cancelados $C \leqq M$, se tiene la solución óptima $\bar{y}$ en el nudo donde $M = X_0$. Si $C > M$ para algún nudo continúe en 8.

Paso 8. Si existen nudos activos sin etiqueta continúe en el paso 2; si no, seleccione de entre los nudos activos el que tenga su cota mayor y regrese al paso 1.

III.7.1. Reoptimización cuando se agrega una restricción del tipo $h_{N1}(\bar{y}) - h_{N2}(\bar{y}) \geq 0$.

Al árbol que se tiene de la solución anterior, déjense los valores de c, las etiquetas YNEF y los nudos cancelados definitivamente, y

a) analícense los nudos etiquetados con "X_0 = " para ver si continúan siendo factibles con la nueva restricción, todos aquellos que no lo sean, cámbieseles su etiqueta por YNEF. Hágase M igual al valor de X_0 máximo de entre los nudos etiquetados con "X_0 = "; si no existe ninguno entonces $M = -\infty$

b) a los nudos cancelados temporalmente quíteles la cancelación, quedando como activos y continúe en el paso 7 del algoritmo de ramificar y acotar.

III.7.2. Reoptimización cuando se agrega una restricción del tipo $-X_0 + g_{N1}(\bar{y}) - g_{N2}(\bar{y}) \geq 0$

En el árbol de la solución anterior, los nudos cancelados definitivamente continuarán estándolo. Los nudos etiquetados YNEF continuarán con su etiqueta. A los nudos cancelados temporalmente se les quitará su cancelación.

Los nudos no cancelados tendrán una cota **C** calculada como

$$C = \min \left\{ C \text{ anterior}, \; g_{N1}(y^* - 1) - g_{N2}(\bar{y}) \right\}$$

Los nudos etiquetados con "$X_0 =$ " conservarán su etiqueta, pero el valor X_0 se calculará como

$$X_0 = \min \left\{ X_0 \text{ anterior}, \; g_{N1}(\bar{y}) - g_{N2}(\bar{y}) \right\}$$

Hágase M igual al valor X_0 máximo entre los nudos etiquetados con "$X_0 =$ " y continúe en el paso 7 del algoritmo de ramificar y acotar.

III.8. Ejemplos.

Se presentará la solución de un ejemplo numérico para cada una de las secciones III.2.1., III.2.2., III.5., III.6. y III.7.

Ejemplo 1.

$$\text{Max } Z = X_0$$

sujeto a

$$- X_0 + (5y_1 + 4y_3 + 5y_1 y_2) + 30 - (3y_2 + 2y_1 y_3) \geq 0$$

$$- X_0 + (4y_1 y_2 + y_2 y_3) + 25 - (3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_1 y_3) \geq 0$$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Aplicando el algoritmo de la sección III.2.1. y siguiendo su diagrama de flujo, se tiene:

$\bar{y} = (0,0,0)$

$y^* - 1 = (1,1,1)$

$\boxed{\begin{array}{l} M = 25 \\ \hat{y} = (0,0,0) \end{array}}$

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿ $M \geq g_{j1}(\bar{y}) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = (0,0,1)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango inicial?. NO

$y^* - 1 = (0,0,1)$

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (0,1,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango inicial? NO

$y^* - 1 = (0,1,1)$

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango inicial? NO

$y^* - 1 = (1,1,1)$

¿$M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿$M \geq g_{j1}(\bar{y}) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,1)$

¿$\bar{y}$ sale del rango inicial? NO

$y^* - 1 = (1,0,1)$

¿ $M \geq g_j\ (y^* - 1) - g_{j2}\ (\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (1,1,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango inicial? NO

$y^* - 1 = (1,1,1)$

¿ $M \geq g_{j1}\ (y^* - 1) - g_{j2}\ (\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango inicial? SI

solución $\hat{y} = (0,0,0)$ $X_0 = 25$

Ejemplo 2.

$$\text{Max } Z = X_0$$

sujeto a

$$- X_0 + 3y_1 - 2y_1 y_2 \geq 0$$

$$- X_0 + y_1 + y_2 y_3 + 5y_4 \geq 0$$

$$1 - y_1 - y_2 \geq 0$$

$$1 \qquad -y_3 - y_4 \geq 0$$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1 \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

Para este ejemplo se aplicará el algoritmo de la sección III.2.2., puesto que existen restricciones del tipo $-X_0 + g_{i1}(\bar{Y}) - g_{i2}(\bar{Y}) \geq 0$ y del otro $h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) \geq 0$.

Se sigue su diagrama de flujo para obtener la solución:

$\bar{y} = (0,0,0,0)$

$y^* - 1 = (1,1,1,1)$

$L = 1$

¿ $h_{j1}(y^* - 1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? NO

¿$h_{j1}(\bar{y}) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (0,0,0,0),\ M = 0,\ L = 3}$

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (0,0,0,1)$ ¿ $L = 3$? SI

¿ y sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,1)$

¿$h_{j1}(y^* - 1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (0,0,1,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,1,1)$

¿ $h_{j1}(y^* - 1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1)$

¿ $h_{j1}(y^*-1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^*-1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1)$

¿ $h_{j1}(y^*-1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^*-1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿ $M \geq g_{j1}(\bar{y}) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿ $h_{j1}(\bar{y}) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

$$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (1,0,0,0),\ M = 1,\ L = 3}$$

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,0,1)$ ¿ $L = 3$? SI

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,1)$

¿ $h_{j1}(y^*-1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^*-1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿ $M \geq g_{j1}(\bar{y}) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? NO

¿ $h_{j1}(\bar{y}) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

$$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (1,0,0,1),\ M = 3,\ L = 3}$$

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,1,0)$ ¿ $L = 3$? SI

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,1)$

¿ $h_{j1}(y^* - 1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? NO

¿$L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{j1}(y^* - 1) - g_{j2}(\bar{y})$ para alguna j? SI

$\bar{y} = y^* = (1,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1)$

¿ $h_{j1}(y^* - 1) - h_{j2}(\bar{y}) < 0$ para alguna j? SI

¿ $L=1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? SI ; ¿ $L=2$? NO

FIN Solución $y_1 = 1,\ y_2 = y_3 = 0,\ y_4 = 1,\ X_0 = 3$

Ejemplo 3.

Max $Z = X_0$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&- X_0 + 8\, y_1 - 4.1\, y_2 \geq 0 \\
&- X_0 + 3\, y_3 - 0.5\, y_1 \geq 0 \\
&- X_0 + 5\, y_1 - 2\, y_2 \geq 0 \\
&6 - 2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq 0 \\
&y_1 \geq 1,\ y_2 \geq 1,\ y_3 \leq 3
\end{aligned}
$$

y_j enteras mayores o iguales a cero $(j = 1,2,3)$

Este ejemplo es de programación entera lineal mixta, por lo cual se hace la sustitución sugerida en la sección III.5.

$$y_1 = y_{01} + 2\,y_{11}$$

$$y_2 = y_{02} + 2\,y_{12}$$

$$y_3 = y_{03} + 2\,y_{13}$$

y el problema es ahora

Max $Z = X_0$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
-X_0 + 8\,y_{01} + 16\,y_{11} - 4.1\,y_{02} - 8.2\,y_{12} &\geq 0\\
-X_0 + 3\,y_{03} + 6\,y_{13} - 0.5\,y_{01} - y_{11} &\geq 0\\
-X_0 + 5\,y_{01} + 10\,y_{11} - 2\,y_{02} - 4\,y_{12} &\geq 0\\
6 - 2\,y_{01} - 4\,y_{11} - 2\,y_{02} - 4\,y_{12} - y_{03} - 2\,y_{13} &\geq 0\\
y_{01} + 2\,y_{11} - 1 &\geq 0\\
y_{02} + 2\,y_{12} - 1 &\geq 0\\
3 - y_{03} - 2\,y_{13} &\geq 0
\end{aligned}$$

$y_{kj} = 0$ ó 1 $(k=0,1\,;\, j=1,3)$

Utilizando el diagrama de flujo de la sección III.2.2.

$\overline{y} = (0,0,0,0,0,0)$

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1,1)$

$L = 1$

¿ $h_{i1}\,(y^* - 1) - h_{i2}\,(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? NO

¿$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (0,0,0,0,0,1)$

¿$L = 3$? NO

$L = 2$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,0,0,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,0,0,0,1,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,0,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,0,0,1,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,0,1,0,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿ $L = 3$? NO

¿ $h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (0,1,0,0,0,1)$

¿ $L = 3$? NO ; $L = 2$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,0,0,0,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿ $L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,0,1,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,0,0,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿ $L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,0,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿ $L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (0,1,1,0,0,0)$

¿ $\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? NO

¿ $h_{i1}(\overline{y}) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

$$\boxed{\hat{y} = \overline{y} = (0,1,1,0,0,0)\ ,\ M = -1,\ L = 3}$$

¿ $M = \infty$? NO

$\overline{y} = \overline{y} + 1 = (0,1,1,0,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿ $\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,0,0,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\overline{y} = y^* = (0,1,1,0,1,0)$

¿ $\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,0,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\overline{y} = y^* = (0,1,1,1,0,0)$

¿ $\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿L = 1? NO

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}\ (y^* - 1) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? NO

¿L = 3? SI

¿$M = g_{i1}\ (y^* - 1) - g_{i2}\ (\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$M = g_{i1}\ (\bar{y}) - g_{i2}\ (\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$h_{i1}\ (\bar{y}) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,0,0,0,1)$

¿L = 3? SI

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,0,0,1)$

¿$h_{i1}\ (y^* - 1) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? SI

¿L = 1? NO

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0,1,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,0,1,1)$

¿$h_{i1}\ (y^* - 1) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? SI

¿L = 1? NO

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,1,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,1,1,1)$

¿$h_{i1}\ (y^* - 1) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? NO

¿L = 3? SI

¿$M = g_{i1}\ (y^* - 1) - g_{i2}\ (\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$M = g_{i1}\ (\bar{y}) - g_{i2}\ (\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$h_{i1}\ (\bar{y}) - h_{i2}\ (\bar{y})$ 0 para alguna i? NO

$y = \bar{y} = (1,0,0,1,0,0)$ $M = -0.5$, $L = 3$

¿ $M = \infty$? NO

$y = y + 1 = (1,0,0,1,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,1,0,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\overline{y} = y^* = (1,0,0,1,1,0)$

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\overline{y} = y^* = (1,0,1,0,0,0)$

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\overline{y})$ para alguna i? NO

¿$M \geq g_{i1}(\overline{y}) - g_{i2}(\overline{y})$ para alguna i? SI

$\overline{y} = \overline{y} + 1 = (1,0,1,0,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,0,0,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿ $h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

$$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (1,0,1,0,0,1)\ ,\quad M = 3,\quad L = 3}$$

¿ $M = \infty$? NO

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,1,0,1,0)$

¿ $L = 3$? SI

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,0,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿ $L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,0,1,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿ $L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,1,0,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$\bar{y}^* - 1 = (1,1,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿ $M \geq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,1,0,0,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 - (1,1,0,0,0,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) = h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,1,0,0,1,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,0,0,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,1,0,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,0,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = (1,1,1,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? SI

¿$L = 1$? NO

$\bar{y} = y^* = 1\ (0,0,0,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? SI

¿$L = 2$? NO

FIN Solución óptima $\overline{y} = (1,0,1,0,0,1)$, $X_0 = 3$

Luego:

$y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 2,\quad X_0 = 3$

Ejemplo 4.

Programación entera no lineal mixta.

$$\text{Max } Z = X_0$$

$$\text{sujeto a:}\quad \begin{aligned} -X_0 + 3y_1 - 2y_1 y_2 &\geq 0 \\ -X_0 + y_1 + y_2 y_3 &\geq 0 \\ y_1 &\leq 3 \\ y_2 &\leq 2 \\ y_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

y_j = entero mayor o igual que cero.

Haciendo la transformación:

$y_1 = y_{01} + 2y_{11}$ donde $y_{kj} = 0$ ó 1 para $\forall\ k,j$

$y_2 = y_{02} + 2y_{12}$

el problema queda:

$$\text{Max } Z = X_0$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} -X_0 + 3y_{01} + 6y_{11} - 2(y_{01} + 2y_{11})(y_{02} + 2y_{12}) &= 0 \\ -X_0 + y_{01} + 2y_{11} + (y_{02} + 2y_{22})\, y_3 &\geq 0 \\ 3 - y_{01} - 2y_{11} &\geq 0 \\ 2 - y_{02} - 2y_{12} &\geq 0 \\ 1 - y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

donde todas las variables son binarias 0 ó 1.

Siguiendo el diagrama de flujo de la sección III.2.2.

$\bar{y} = (0,0,0,0,0)$

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1)$

$L = 1$

¿ $h_{i1} (y^* - 1) - h_{i2} (\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿ $L = 3$? NO

¿ $h_{i1} (\bar{y}) - h_{i2} (\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (0,0,0,0,0), \quad M = 0, \ L = 3}$

¿ $M = \infty$? NO

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (0,0,0,0,1)$

¿ $L = 3$? SI

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,0,1)$

¿ $h_{i1} (y^* - 1) - h_{i2} (\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿ $L = 3$? SI

¿ $M \geq g_{i1} (y^* - 1) - g_{i2} (\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (0,0,0,1,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,0,1,1)$

¿ $h_{i1} (y^* - 1) - h_{i2} (\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (0,0,1,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,0,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$M \geq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

$$\boxed{\hat{y} = \bar{y} = (0,1,0,0,0),\ M = 2,\ L = 3}$$

¿$M = \infty$? NO

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (0,1,0,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,0,0,1)$

¿h_{i1} $(y^* - 1) - h_{i2}$ $(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}$ $(y^* - 1) - g_{i2}$ $(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (0,1,0,1,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,0,1,1)$

¿h_{i1} $(y^* - 1) - h_{i2}$ $(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}$ $(y^* - 1) - g_{i2}$ $(\bar{y})$ para alguna i? SI

$y = y^* = (0,1,1,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (0,1,1,1,1)$

¿h_{i1} $(y^* - 1) - h_{i2}$ $(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}$ $(y^* - 1) - g_{i2}$ $(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,0,0)$

¿$\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1)$

¿h_{i1} $(y^* - 1) - h_{i2}$ $(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}$ $(y^* - 1) - g_{i2}$ $(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$M \geq g_{i1}$ $(\bar{y}) - g_{i2}$ $(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = \bar{y} + 1 = (1,0,0,0,1)$

¿$L=3$? SI . ¿ $\bar{y}$ sale del rango ? NO . $y^* - 1 = (1,0,0,0,1)$

¿ $h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,0,1,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,0,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (1,0,1,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,0,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? SI

$\bar{y} = y^* = (1,1,0,0,0)$

¿ $\bar{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$M \geq g_{i1}(\bar{y}) - g_{i2}(\bar{y})$ para alguna i? NO

¿$h_{i1}(\bar{y}) - h_{i2}(\bar{y}) < 0$ para alguna i? NO

$\boxed{\hat{y} = \overline{y} = (1,1,0,0,0),\ M = 3,\ L = 3}$

¿$M = \infty$? NO

$\overline{y} = \overline{y} + 1 = (1,1,0,0,1)$

¿$L = 3$? SI

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,0,0,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(y)$ para alguna i? SI

$\overline{y} = y^* = (1,1,0,1,0)$

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,0,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(y)$ para alguna i? SI

$\overline{y} = y^* = (1,1,1,0,0)$

¿$\overline{y}$ sale del rango? NO

$y^* - 1 = (1,1,1,1,1)$

¿$h_{i1}(y^* - 1) - h_{i2}(\overline{y}) < 0$ para alguna i? NO

¿$L = 3$? SI

¿$M \geq g_{i1}(y^* - 1) - g_{i2}(\overline{y})$ para alguna i? SI

$\overline{y} = y^* = 1\ (0,0,0,0,0)$

¿$\overline{y}$ sale del rango? SI

¿$L = 2$? NO

FIN. Solución $\hat{y} = (1,1,0,0,0)$ $M = 3$

Solución óptima:

$y_1 = 3$, $y_2 = y_3 = 0$, $X_0 = 3$.

Ejemplo 5. Reoptimización

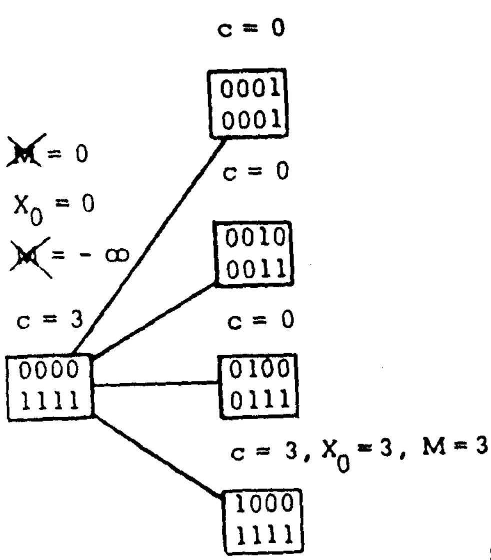
a) Max $Z = X_0$

sujeto a: $-X_0 + 3\,y_1 - 2\,y_1 y_2 \geq 0$

$1 \qquad - y_3 - y_4 \geq 0$

$y_j = 0$ ó 1 $(j = 1,\ldots,4)$

Se resuelve inicialmente el problema anterior utilizando el algoritmo de la sección III.7.

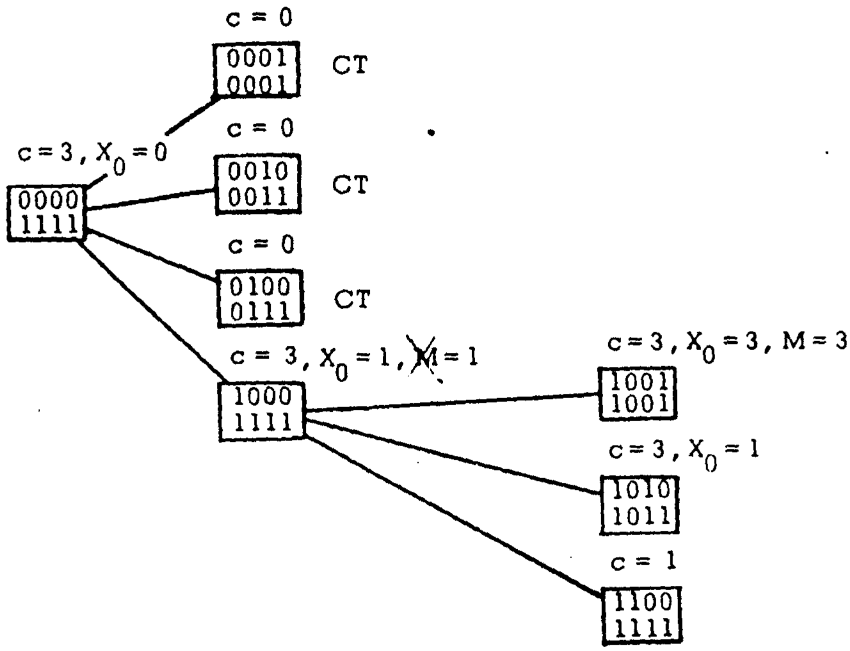


Solución: $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = y_4 = 0$

$X_0 = 3$

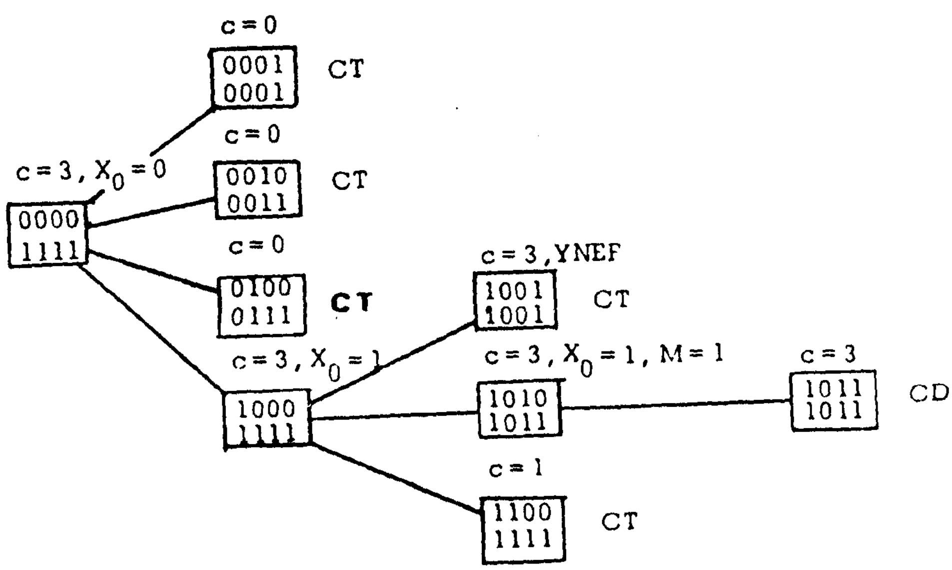
b) Se agrega ahora la restricción $-X_0 + y_1 + y_2\ y_3 + 5y_4 \geq 0$

El árbol es ahora



Solución $y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 1,\ X_0 = 3$

c) Se agrega ahora la restricción $\cdot\ 1 - y_1 - y_4 \geq 0$



Solución $y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0,\ X_0 = 1.$

CAPITULO

4

EJEMPLOS

CAPITULO IV

EJEMPLOS

En esta sección se han desarrollado dos ejemplos. En el primer ejemplo se resuelve un problema de programación mixta. Primero manualmente y después utilizando la computadora.

El segundo ejemplo considera una compañía que debe seleccionar su estrategia de inversión y su forma de financiamiento.

IV.1. Ejemplo No. 1

Se desea

$$\text{Max } Z = -Y_{11} - 2Y_{12} - 3V_{12} + 20Y_1 + 30Y_2$$

Sujeta a

$$-Y_{11} - V_{11} + Z_1 + 10Y_1 + 20Y_2 - Z_3 = 20$$

$$-Y_{12} - V_{12} + Z_2 - Z_1 + 5Y_1 + 10Y_2 - Z_4 = 0$$

$$Z_1 - 0.5Y_1 - 0.2Y_2 - Z_5 \leq 0$$

$$Z_2 - 0.6Y_1 - 0.3Y_2 - Z_6 \leq 0$$

$$Y_1 + Y_2 \leq 1$$

Las variables Y_1 y Y_2 son binarias y las demás contínuas mayores o iguales que cero.

IV.1.1. Solución manual.

Siguiendo el diagrama de flujo del método de Participación de Benders se tiene:

$X_0^0 = +\infty$

$Y = (0,0)$

$\text{Max } Z = -Y_{11} - 2Y_{12} - 2V_{11} \qquad - 3V_{12} - 1000\,(Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6)$

Sujeto a: $\quad -Y_{11} - V_{11} + Z_1 - Z_3 = 20$

$-Y_{12} - V_{12} + Z_2 - Z_1 - Z_4 = 0$

$Z_1 - Z_5 \leq 0$

$Z_2 - Z_6 \leq 0$

cuyos resultados son:

Y_{11}	Y_{12}	V_{11}	V_{12}	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	•	•	Z_9	Z_{10}	b		
-1		-1				-1		1		1		-1		20	Z_5	
-1	-1	-1	-1		1	-1	-1			1	1			20	Z_2	
-1	-1	-1	-1			-1	-1		1	1	1		-1	20	Z_6	
-1		-1		1		-1				1				20	Z_1	
2001	1002	2002	1003			3000	2000	·		-2000	-1000	1000	1000	- 40000		
1	2	2	3												$d^{1)}$	
2	1	2	1			3	2			-2	-1	1	1		$d^{2)}$	

$M \min = 0 \qquad u = (0,0,0,0)\,, \qquad v = (-2,-1,1,1)$

$(1,u) = (1,0,0,0,0)$

$(0,v) = (0,-2,-1,1,1)$

$\nu = 1$

$\text{Max } X_0$

Sujeto a: $\quad X_0 - 20\,Y_1 - 30\,Y_2 \leq 0$

$$-26.1\,Y_1 - 50.5\,Y_2 \leq -40$$

$$Y_1 + Y_2 \leq 1$$

Resultado $X_0^1 = 30 \quad Y = (0,1)$

El problema de programación lineal es ahora

$$\text{Max } Z = -Y_{11} - 2Y_{12} - 2V_{11} - 3V_{12} - 1000\,(Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6)$$

sujeto a:

$$-Y_{11} - V_{11} + Z_1 - Z_3 = 0$$

$$-Y_{12} - V_{12} + Z_2 - Z_1 - Z_4 = -10$$

$$Z_1 - Z_5 \leq 0.2$$

$$Z_2 - Z_6 \leq 0.3$$

obteniéndose:

Y_{11}	Y_{12}	V_{11}	V_{12}	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	.	.	Z_9	Z_{10}	b	
				1				-1				1		0.2	Z_1
	1		1		-1		1	1			-1	-1		9.8	Y_{12}
1		1				1		-1		-1		1		0.2	Y_{11}
					1				-1				1	0.3	Z_{10}
		1	1		2	999	998	999	1000	1	2	1		-19.8	

$C^T X \nu = -19.8$

$f(y) = 30$

Suma $= 10.2$

		1	1		2	-1	-2	-1		1	2	1	2		$d^{1\nu}$
						1	1	1	1						$d^{2\nu}$

$u = (1,2,1,0) \quad M_{min} = 2$

$-19.8 < 30 - 30$

$(1,u) = (1,1,2,1,0)$

Max X_0

Sujeto a:

$$X_0 - 20\,Y_1 - 30\,Y_2 \leq 0$$

$$-26.1\,Y_1 - 50\,Y_2 \leq -40$$

$$Y_1 + Y_2 \leq 1$$

$$X_0 - .5Y_1 + 9.8\,Y_2 \leq 20$$

$X_0^1 = 10.2 \quad Y = (0,1)$ Como $10.2 = 10.2$ FIN.

Y la solución óptima es:

$Y_{11}=0.2,\ Y_{12}=9.8,\ Z_1=0.2,\ Y_1=0,\ Y_2=1$

IV.1.2. Solución en la computadora.

1. El programa A envía a la cinta 10 los datos del problema de programación lineal, con excepción de los términos independientes.

2. El programa ACOSTI, el cual se desarrolló en esta tesis y se muestra en el apéndice I.1., hace $X_0=0.99 \times 10^{38}$, $\bar{y}=0\ (0,0)$ $k=0$, indicando con ello que no existen restricciones, hasta este momento, del tipo $-X_0+g_{11}(\bar{y})-g_{12}(\bar{y}) \geq 0$. $ks=1$, lo cual muestra que existe una restricción del tipo $h_{11}(\bar{y})-h_{12}(\bar{y}) \geq 0$, la cual es $1-y_1-y_2 \geq 0$, por lo que ASP = coeficientes positivos de las variables y término independiente positivo = (0,0,1) y ASN = coeficientes de las variables y término independiente negativos = (1,1,0).

   Calcula con $\bar{y}$ los términos independientes del problema de programación lineal. Lee de la cinta 10 los datos, pasándolos a la cinta 8 agregando los términos independientes.

   Escribe en la cinta 12, X_0, $\bar{y}$, k, ks, ASP y ASN.

3. El paquete MPSX de IBM lee los datos de la cinta 8, resuelve el problema de programación lineal y envía sus resultados a la cinta 11.

4. El programa ACOST2 (elaborado en esta tesis, se muestra en el apéndice I.2.) lee de la cinta 12 los valores de X_0, $\bar{Y}$, k, ks, ASP y ASN y los imprime. (ver C1 en las hojas impresas por la computadora).

En C2, lee los resultados de la cinta 11, los imprime hasta que encuentra que la solución es óptima. (En otros problemas, si no tuvieran soluciones factibles o fueran no acotados, aquí se habría detectado, terminándose por tanto el proceso).

En C3, se calcula el valor de Z, puesto que es diferente de cero, se determinan $d^{1,0}$, $d^{2,0}$, $u^{1,0}$, $u^{2,0}$.

Puesto que $u^{2,0}$ es diferente de cero, calcula M min y u^0 y v^0.

En C4, se imprimen los valores de u^0, v^0 y M min.

En C5, se presenta la solución del problema de programación lineal.

En C6, se generan dos nuevas restricciones

$$- X_0 + 20\,Y_1 + 30\,Y_2 \geq 0$$

$$26.09999996\,Y_1 + 50.4999999\,Y_2 - 40 \geq 0$$

En C7, se resuelve el problema de programación mixta con una variable continua irrestricta en signo y las demás binarias, utilizando el algoritmo desarrollado en el capítulo III.

Teniendo como solución $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$ y $X_0 = 30$.

Lee de la cinta 10 los datos del problema de programación li-

PAGE 7 - 76/168

PAGE 8 - 76/168

PAGE 9 - 76/168

PAGE 10 - 76/168

PAGE 11 - 76/168

PAGE 1 - 76/168

C3

PAGE 2 - 76/168

PAGE 3 - 76/168

NUMBER OF ELEMENTS ... INCLUDING SLACK ELEMENT

PAGE 4 76/168

PAGE 5 - 76/168

SCALE

ROWS NUMBER SIZE [illegible]

COLUMNS [illegible] MATRIX [illegible]

[illegible]

INVERT CALLED [illegible] ITERATION [illegible]

BASIS [illegible] TIME TAKEN 0.03

INVERSE [illegible]

PAGE [illegible]

[illegible]

FEASIBLE SOLUTION

[illegible]

PAGE [illegible]

[illegible]

112

C4

C5

SECTION ... (OPTIMAL)

ROW	..NAME..	AT	...ACTIVITY...	SLACK ACTIVITY	..LOWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	.DUAL ACTIVITY
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	NONE	NONE	1.00000
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.	[illegible]	[illegible]	2000.00000
3	[illegible]	[illegible]	.	.	.	.	1000.00000
4	[illegible]	[illegible]	.	.	NONE	.	1000.00000-
5	[illegible]	[illegible]	.	.	NONE	.	1000.00000-

PAGE 13

ROW	.COLUMN.	AT	...ACTIVITY...	..INPUT COST..	..LOWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	.REDUCED COST.
6	Y11	LL	.	1.00000-	.	NONE	2001.00000-
7	Y12	LL	.	[illegible]	.	NONE	1002.00000
8	Y21	LL	.	[illegible]	.	NONE	2002.00000-
9	Y22	LL	.	[illegible]	.	NONE	1003.00000-
10	Z1	[illegible]	[illegible]	.	.	NONE	.
11	Z2	[illegible]	[illegible]	.	.	NONE	.
12	Z3	LL	.	1000.00000-	.	NONE	2000.00000-
13	Z4	LL	.	1000.00000	.	NONE	2000.00000-
14	Z5	[illegible]	[illegible]	1000.00000	.	NONE	.
15	Z6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.	NONE	.

PAGE 14

C6

113

C7

Y1C C C [illegible]

Y2C C C [illegible]

Y... [illegible]

neal, calcula con $\bar{y}$ los términos independientes, enviando es ta información a la cinta 8.

Escribe en la cinta 12, X_0, $\bar{y}$, K, ks, ASP, ASN, AP, AN, donde AP son los coeficientes positivos y AN los negativos de las restricciones tipo $-X_0+g_1, (\bar{y})-g_{12}(y) \geq 0$. U, UN, US, USN son los valores de las variables duales. U y US positivos y UN y USN negativos.

5. El paquete MPSX de IBM lee los datos de la cinta 8, resuelve el problema de programación lineal y envía sus resultados a la cinta 11.

6. Interviene nuevamente ACØST2.

   En C8, lee de la cinta 12 X_0, $\bar{y}$, K, KS, ASP, ASN, AP, AN, U, UN, US, USN, imprimiendo estos valores.

   En C9, lee e imprime los resultados de la cinta 11 hasta que encuentra que la solución es óptima.

   En C10, se calcula el valor de Z, puesto que es igual a cero, se compara $C^T X^1 + f(\bar{y})$ con X_0. Ya que son diferentes, se determinan $d^{1,1}$, $d^{2,1}$, $u^{1,1}$, $u^{2,1}$.

   Ya que $u^{2,1}$ es igual a cero, solo interesa u^1.

   En C11, se imprimen los valores de u^1.

   En C12, se presenta la solución del problema de programacion lineal.

C8

C9

SCALE = [illegible]

[illegible]

C 10

[illegible]

SCALE
MATERIA1 ASSIGNED TO MATERIA1
MATERIA2 ASSIGNED TO MATERIA2
MATERIA3 ASSIGNED TO MATERIA3
MATERIA4 ASSIGNED TO MATERIA4
[illegible] ASSIGNED [illegible]
[illegible] ASSIGNED [illegible]
[illegible] ASSIGNED [illegible]
[illegible] ASSIGNED [illegible]
SCRATCH1 ASSIGNED TO SCRATCH1
SCRATCH2 ASSIGNED TO SCRATCH2
[illegible] MAXIMUM POSSIBLE [illegible]

[illegible]

C II

C 12

```
MPSX-PIP13   EXECUTOR. MPSX RELEASE 1 MOD LEVEL 3                      PAGE  10 - 76/160
...
MPSX-PIP13   EXECUTOR. MPSX RELEASE 1 MOD LEVEL 3                      PAGE  11 - 76/160
SOLUTION  (OPTIMAL)
TIME =  0.01 MINS. ITERATION NUMBER =   5
        ...NAME...   ...ACTIVITY...   DEFINED AS
        FUNCTIONAL                     FUNC
        RESTRAINTS                     [illegible]
MPSX-PIP13   EXECUTOR. MPSX RELEASE 1 MOD LEVEL 3                      PAGE  12 - 76/160
SECTION 1 - ROWS
 NUMBER ...ROW.. AT ...ACTIVITY... SLACK ACTIVITY ..LOWER LIMIT. ..UPPER LIMIT. .DUAL ACTIVITY
                                                                    NONE       1.00000
                                                      .               .        1.00000-
                                                  10.00000-    10.00000-       2.00000-
                                                    NONE          .20000       1.00000-
                                                    NONE          .10000          .
MPSX-PIP13   EXECUTOR. MPSX RELEASE 1 MOD LEVEL 3                      PAGE  13 - 76/160
SECTION 2 - COLUMNS
 NUMBER .COLUMN. AT ...ACTIVITY... ..INPUT COST.. ..LOWER LIMIT. ..UPPER LIMIT. .REDUCED COST.
                                                       .            NONE           .
                                                       .            NONE           .
                                                       .            NONE        1.00000-
                                                       .            NONE        1.00000-
                                                       .            NONE           .
                                                       .            NONE        2.00000-
                                                       .            NONE      999.00000-
                                                       .            NONE      999.00000
                                                       .            NONE      999.00000
                                                       .            NONE     1000.00000-
MPSX-PIP13   EXECUTOR. MPSX RELEASE 1 MOD LEVEL 3                      PAGE  14 - 76/160
```

C 13

C 14

119

En C13, se genera una nueva restricción

$-X_0 + 0.5\, y_1 - 9.80000001\, y_2 + 20 \geq 0$

En C14 se resuelve el problema de programación mixta con una variable continua irrestricta en signo,y las demás binarias.

Dando como solución $y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ X_0 = 10.2$

A continuación lee de la cinta 10 los datos del problema de programación lineal, calcula con $\overline{y}$ los términos independientes, enviando esta información a la cinta 8.

Se escriben en la cinta 12 los valores de X_0, $\overline{y}$, K, KS, ASP, ASN, AP, AN, U, UN, US, USN.

7. El paquete MPSX de IBM lee los datos de la cinta 8, resuelve el problema de programación lineal y envía sus resultados a la cinta 11.

8. Toma el control ACOST2.

   En C15, lee de la cinta 12 X_0, $\overline{y}$, K, KS, ASP, ASN,AP, AN, U, UN, US, USN, imprimiendo estos valores.

   En C16, lee e imprime los resultados de la cinta 11 hasta que encuentra que la solución es óptima.

   En C17 calcula el valor Z, el cual es igual a cero. Compara $C^T X^2 + f(\overline{y})$ con X_0. Puesto que son iguales, termina el procedimiento y escribe que "la solución es la óptima".

   Los valores de las variables continuas en la solución óptima se

C 15

PAGE 1 - 76/168

PAGE 2 - 76/168

PAGE 3 - 76/168

PAGE 4 - 76/168

PAGE 5 - 76/168

C 16

RECORDS ......1 ITERATION 2

RECORDS ......1 TIME TAKEN 0.030

PAGE 76/168

122

```
TIPE #      C1 PINS.
TIPE #      01 PINS.        PRICING  7
SCALE #     .CCCCC-
ITEM        MEER  VECTOR  VECTOR  REDUCED   FUNCTION
NUMBER      NORT    LET     IN      COST      VALUE
M  :          1      .      10    .CC569-  15.8000-
OPTIMAL     [illegible]
MPSX-PII       EXECUTION. MPSX  RELEASE 1  MOD LEVEL 3              PAGE    7 -  76/168
               [illegible]
MPSX-PII       EXECUTION. MPSX  RELEASE 1  MOD LEVEL 3              PAGE    8 -  76/168
               RESO1       RESO2        RESO3       V11        V12        Z2          Z3           Z4          1.....1
 FUNCR         1.CCCCC-    [illegible]  1.CCOCO-    1.00000-   1.00000-   2.C0000-    555.CCOCO-   558.5CCCC-  FUNCR
 RESO4          .           .            .           .          .         1.00000      .            .          RESO4
 V11           1.CCCCC      .           1.30000     1.00000     .          .          1.CCOCC       .          V11
 V12            .          1.00000-     1.00000-     .         1.00000    1.00000-     .           1.0CCCC     V12
 Z1             .           .           1.CCOCO      .          .          .           .            .          Z1
MPSX-PII       EXECUTION. MPSX  RELEASE 1  MOD LEVEL 3              PAGE    9 -  76/168
               Z5          Z6           DEFINE                                                               2.....1
 FUNCR         555.CCCCC   1CC0.0CCC    [illegible]   FUNCR
 RESO4          .          1.00CCC       .0C000       RESO4
 V11           1.CCCCC-     .            .0000        V11
 V12           1.CCCCC      .           [illegible]   V12
 Z1            1.CCCCC      .            .2CCCC       Z1
MPSX-PII       EXECUTION. MPSX  RELEASE 1  MOD LEVEL 3              PAGE   10 -  76/168
WRITE
TIPE #      1
  EAS       [illegible]
MPSX-PII       EXECUTION. MPSX  RELEASE 1  MOD LEVEL 3              PAGE   11 -  76/168
SELECTION   OPTIMAL)
                          [illegible]
4031
      12  Z3        11       .       1000.00000-      .        NONE     999.00000-
4032
      13  Z4        11       .       1000.00000-      .        NONE     998.00000-
4033
      14  Z5        11       .       1000.00000-      .        NONE     999.00000-
4034
      15  Z6        11       .       1000.00000-      .        NONE    1000.00000-
4034
4035
   11.000    5.100    [illegible]    20.000    15.000                           .
# SELECCION ES LA OPTIMA
```

C17

encuentran en C16, siendo éstos

$Y_{11} = 0.2,\ Y_{12} = 9.8,\ Z_1 = 0.2$

los valores de las variables discretas están en C14, siendo éstos

$Y_1 = 0,\ Y_2 = 1,\ X_0 = 10.2$

IV.2. Ejemplo No. 2

Se trata de un ejemplo hipotético, en el que la Compañía Fres, S. A., tiene la concesión para explotar los yacimientos mineros de Naica que se localizan en la parte centro-sur del estado de Chihuahua aproximadamente a 110 kilómetros al sureste de la capital del estado.

La explotación se efectúa utilizando el sistema de corte y relleno. El costo total en la mina es de $65.00/tonelada extraída.

En la planta de beneficio de la misma compañía se tratan por el método de flotación selectiva 45,000 toneladas de mineral por mes, provenientes exclusivamente de las minas de Naica.

Mensualmente se obtiene un total aproximado de 3,500 toneladas de concentrados de plomo con las leyes siguientes

Gramos/ton		%			
Oro	Plata	Plomo	Zinc	Cobre	Hierro
1.09	19	64.9	3.90	4.13	6.89

Los concentrados de zinc que salen de la planta mensualmente su man aproximadamente 2,700 toneladas con los valores siguientes:

Gramos/ton		%			
Oro	Plata	Plomo	Zinc	Cobre	Hierro
0.27	71	1.20	53.7	0.70	8.75

La planta de beneficio opera con un costo aproximado de $59.00 por tonelada de mineral, el cual se desglosa a continuación:

	Mano de obra	Material	Energía eléctrica	Total
Sección de quebradoras	2.00	2.48	1.52	6.00
Sección de molinos	1.00	9.00	6.52	16.52
Sección de flotación	5.00	18.00	3.48	26.48
Abastecimiento de agua, muestreo y ensayes, supervisión presa de jales y oficinas	7.48	1.52	1.00	10.00
	15.48	31.00	12.52	59.00

PROYECTOS DE INVERSION.

Las posibilidades de inversión de la Cía. pueden agruparse en dos temas: uno referente a un complejo industrial en Naica y el otro a un yacimiento de Tungsteno en Sonora. Se describen a continuación.

I) Se propone la formación de un complejo industrial compuesto por cuatro fábricas, como sigue:

1) Unidad productora de zinc

2) Unidad productora de ácido sulfúrico

3) Fábrica de amoniaco

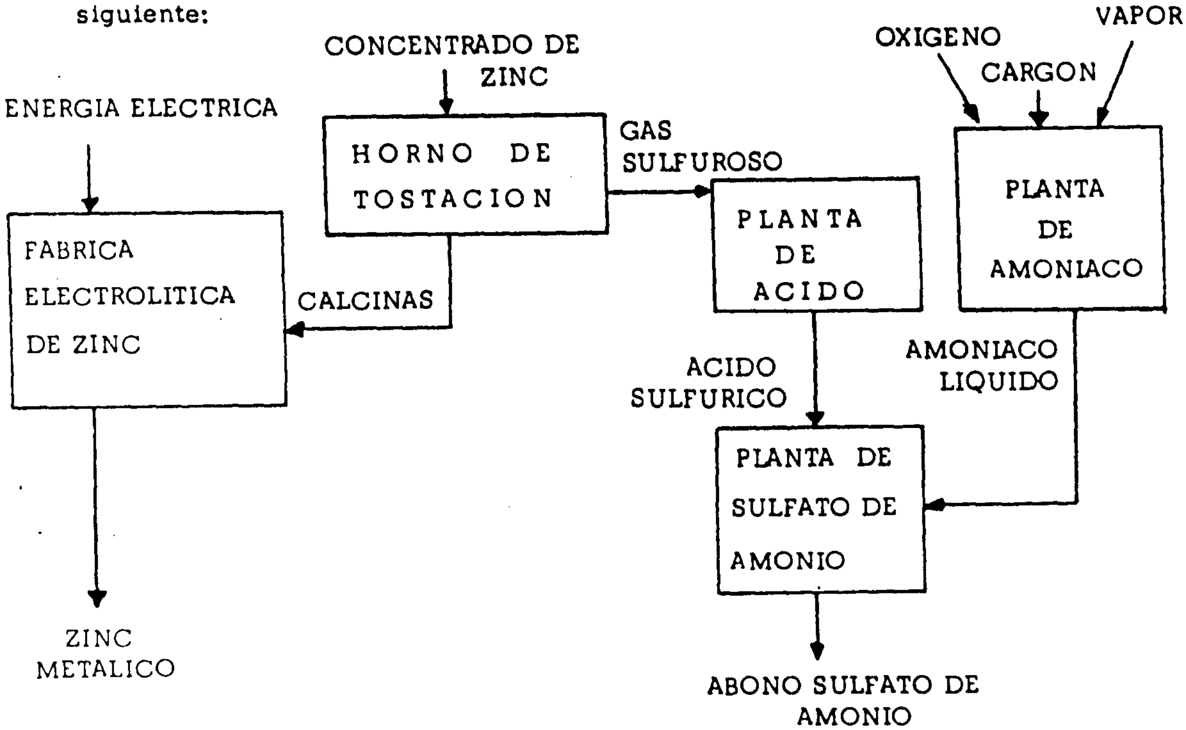
4) Fábrica de abonos, en la que el amoniaco se combina con el ácido sulfúrico para producir sulfato de amonio.

Los concentrados de zinc contienen azufre que es necesario eliminar antes de proceder a la separación del zinc. La eliminación se realiza en un proceso de tostación mediante el cual el azufre se desprende en forma de gas sulfuroso. La disipación de este último en la atmósfera crea serios problemas. Este inconveniente se soluciona aprovechando los gases de la tostación para producir ácido sulfúrico. La disponibilidad de ácido sulfúrico y las necesidades de abonos nitrogenados llevaron a abordar el estudio de una planta de sulfato de amonio.

Se tratarán de producir diariamente 50 toneladas de zinc metálico. La capacidad de la fábrica de ácido permitirá aprovechar todos los gases sulfurosos resultantes en la producción de zinc; la fábrica de abonos, para convertir el ácido y el amoniaco en sulfato de amonio, trabajará a razón de 269 toneladas por día.

Después de hacer la tostación de los concentrados, éstos se lixivian para producir una solución de zinc que a su vez se somete a un proceso electrolítico a fin de recuperar el ácido y producir zinc metálico.

El complejo industrial se explica esquemáticamente en la figura siguiente:



La inversión necesaria se especifica en el cuadro siguiente:

Fábrica de zinc	180 millones de pesos
Planta de ácido sulfúrico	52 millones de pesos
Planta de amoníaco	120 millones de pesos
Planta de sulfato de amonio	13 millones de pesos

los gastos de producción son: .

Fábrica de:	Producción diaria (ton)	Costo por tonelada
Zinc	50	$ 720.00
Acido sulfúrico	205	60.00
Amoníaco	73	760.00
Sulfato de amonio	269	110.00

II) La compañía posee el yacimiento de San Antonio en Sonora a 140 kilómetros de Hermosillo. Actualmente se ha detenido la explotación del tungsteno en ese yacimiento porque se trabajaría con pérdida. La compañía La Perla desea adquirirlo pagando $ 500,000.00.

Los estudios geológicos muestran que existe una probabilidad de 0.5 de tener 100,000 ton con una ley de 1% de tungsteno, 500,000 con una ley del 0.5% y 4'000,000 con una ley del 0.25%; una probabilidad de 0.25 que se tengan 300,000 toneladas con ley del 1%, 500,000 con ley del 0.5% y 3'800,000 con ley del 0.25%; y una probabilidad de 0.25 de tener 1'000,000 de toneladas con ley del 1%, 2'000,000 de toneladas con ley del 0.5% y 3'600,000 con ley del 0.25%.

Se ha llegado a una decisión, la cual no puede modificarse por este estudio, que establece vender San Antonio o continuar la explotación, pero de ninguna manera seguir con la situación actual.

Se ha calculado también que para continuar la explotación es necesaria la siguiente inversión.

Mina	2 millones de pesos
Bombeo	3 millones de pesos
Socavón y locomotora	5 millones de pesos
Planta de beneficio	48 millones de pesos
Campamento	7 millones de pesos
Total	65 millones de pesos

El costo de operación es de $61.00/ton extraída.

Se desea desarrollar la planeación estratégica de esta empresa Fres, S.A., por lo que se ha llamado a la Compañía Consultora Plafin, S.A., la cual inició el estudio con el subsistema de información.

1°. ETAPA DE PLANEACION

I) Se le preguntó a la gerencia qué era lo que deseaba. La compañía Fres, S.A., especificó claramente que lo que quería era un reporte que estableciera:

1. Las decisiones de inversión
2. Las fuentes de financiamiento, las cantidades necesarias y la fecha en que se deben tener
3. El costo del capital.

La frecuencia de los reportes debe ser anual, pero debe tener la flexibilidad suficiente para analizar las alternativas posibles de inversión y financiamiento que pueden surgir.

II) Además, la gerencia necesita que el sistema esté operando integralmente dentro de cuatro meses.

III) Los datos que se requieren son el estado de Fres, S.A., las inversiones alternativas, tiempo de instalación y puesta en marcha, precio y demanda de la producción, fuentes de financiamiento, curva de preferencia y la determinación de cuales variables se considerarán como deterministas y cuáles como aleatorias. Esta información pasará al subsistema de optimización, el cual generará los datos para poder elaborar los reportes que se requieren.

2°. ETAPA DE EVALUACION

Los desarrollará la Cía. Plafin, S.A.

Costo de desarrollo $ 200,000.00

Costo de operación 1,000.00/mes. Plafin, S.A., entrenará al personal de Fres, S.A., para que opere el sistema.

En este punto el gerente de Fres, S.A., consideró que los beneficios potenciales serían mayores que el costo, por lo que se prosiguió con el estudio.

3°. ETAPA DE DISEÑO

Se especifica que los reportes del sistema serán impresos. Los datos de entrada, decisiones sugeridas y acciones tomadas se guardarán en un disco del que se pueden recuperar o modificar en cuanto se tenga nueva información.

4°. ETAPA DE OPERACION

Los datos que se han recopilado son:

i) De la empresa Fres, S.A.

BALANCE GENERAL AL 31 DE DICIEMBRE DE 1974.

ACTIVO

Circulante:		
Caja y Bancos	$	500,000.00
Cuentas por cobrar		7'000,000.00
Inventarios		5'000,000.00
	$	12'500,000.00
Fijo:		
Terrenos	$	2'000,000.00
Edificio		1'000,000.00
Maquinaria		5'000,000.00
	$	8'000,000.00
Total	$	20'500,000.00

PASIVO

Circulante:		
Préstamos Bancarios	$	2'000,000.00
Proveedores y Cuentas por Pagar		2'000,000.00
	$	4'000,000.00
A largo Plazo:		6'000,000.00

CAPITAL

Capital Social	$	6'000,000.00
Reserva Legal		600,000.00
Utilidades Acumuladas		3'900,000.00
	$	10'500,000.00
Total	$	20'500,000.00

El préstamo a largo plazo se tiene con una tasa de interés del 6% y un plazo de 6 años para pagarlo.

ESTADO DE RESULTADOS DE LA CIA. FRES, S.A.

Durante el año de 1974

Venta de concentrados

Plomo	27,258 ton a $ 614.00/ton	=	16'902,192
Zinc	17,400 ton a $3,814.00/ton	=	66'363,600
			83,265,792

Costos

Mina	540,000 ton a $65.00/ton	35'100,000
Planta	540,000 ton a $59.00/ton	31'860,000
Gastos administrativos		6'000,000
Gastos generales		4'000,000
		76'960,000
Utilidad		6'305,752

Es conveniente aclarar en este punto que el cálculo aproximado de 3,500 ton/mes de concentrados de plomo con una ley del 64.9% proporciona al año 3,500 x .649 x 12 = 28,036.8 ton, el cual es un valor cercano a las 27,258 ton que se obtuvieron realmente. La misma situación se tiene respecto al zinc, donde 2,700 x .537 x 12 = 17,398.8

Trabajando a esta capacidad, se estima que las reservas de mineral durarán:

8 años con probabilidad de 0.1
7 años con probabilidad de 0.6
6 años con probabilidad de 0.3

Se entrevistó al gerente de Fres, S.A., para determinar su función utilidad. Se encontró que tiene aversión constante al riesgo, por lo que su función utilidad es de tipo exponencial (apéndice II.4.), estimándose como $u(x) = \exp\left[-X/1000\right]$ donde x tiene como unidades miles de pesos.

Si se decide realizar el proyecto 1 de inversión se venderá maquinaria por un valor de $ 4'000,000.00.

ii) El tiempo de instalación y puesta en marcha de los proyectos será de un año.

iii) Las fuentes de financiamiento serán: emisión de acciones ordinarias y preferentes, bancos para préstamos a corto plazo y financieras para los préstamos a largo plazo. (Comisión de Fomento Minero, Banco Minero, Nacional Financiera, etc.).

iv) Se ha analizado que los costos pueden considerarse como variables deterministas y que los productos tienen gran demanda en el mercado internacional, por lo que ésta no será un factor limitante en la producción. Los precios de venta del zinc, plomo, tungsteno, ácido sulfúrico, amoníaco y sulfato de amonio se consideran como variables aleatorias.

Se presentan a continuación la media y la variancia que se ha estimado para los años 1975 a 1985 de los precios de venta.

	$/ton Zinc		$/ton Plomo		$/ton Tungsteno		$/ton Acido Sulfúrico		$/ton Amoniaco		$/ton Sulfato de Amonio	
	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2
1975	3814	16	614	4	44700	333	280	2	882	5	1630	10
1976	3900	18	615	5	45400	350	281	2	885	5	1635	11
1977	4000	21	616	6	46100	383	282	3	890	7	1640	12
1978	4100	25	617	6	46700	417	283	3	895	7	1650	12
1979	4100	27	619	7	47300	500	284	4	900	8	1670	13
1980	4150	28	620	7	47900	600	285	4	920	8	1695	14
1981	4200	33	623	8	48600	717	286	5	930	9	1710	15
1982	4250	37	629	8	49200	833	287	5	940	9	1740	16
1983	4300	42	638	9	49900	883	291	6	950	10	1760	16
1984	4300	45	654	10	50600	966	298	6	955	10	1780	17
1985	4500	67	675	11	51300	1000	310	7	960	11	1800	18

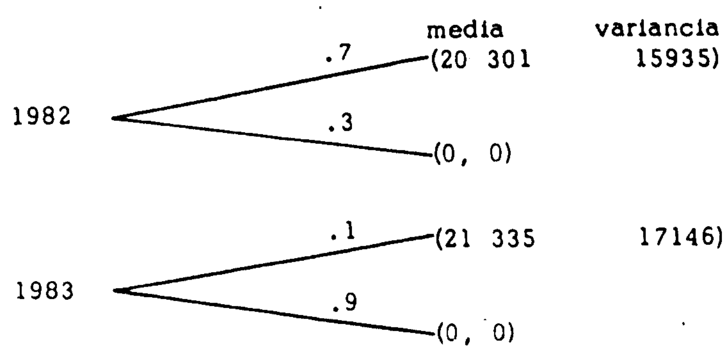
PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION.

Se procederá ahora a determinar los flujos de dinero de las diferentes estrategias.

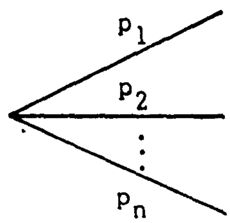
A. <u>Estrategia de momento</u>. Si se continúa con la situación actual se tendrán las medias y variancias para los años de 1975 a 1980 en miles de pesos.

	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Media miles \$	8500	13340	14863	16630	18398	18452	13349
Variancia (miles \$)^2	0	7816	9164	10815	12027	13376	13678

Puesto que existe incertidumbre sobre las reservas de mineral para los años 1982 y 1983 se tiene la situación siguiente



Para la obtención de la media y la variancia se efectúan los cálculos siguientes:



(μ_1, σ_1^2)

(μ_2, σ_2^2)

(μ_n, σ_n^2)

La media μ es igual a $\mu = E(\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i$

y la variancia $\sigma^2 = \sigma_\mu^2 + E(\sigma_i^2)$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^2 - \mu^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \sigma_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i (\mu_i^2 + \sigma_i^2) - \mu^2$$

Así

	media	variancia
1982	14 211	86 558 580
1983	2 134	40 965 981
	miles de \$	(miles de \$)^2

B. Estrategias de desarrollo. Son las siguientes:

i) Fábrica de zinc y Fábrica de ácido sulfúrico.

Inicio en 1975

	75	76	77	78	79	80	81	82	83
Media	223500	69426	71000	72812	74627	74702	69647	45208	7789
Variancia	0	19013	20361	27611	28822	35770	36073	875906043	546021203

Inicio en 1976.

	75	76	77	78	79	80	81	82	83
Media	8500	218660	71000	72812	74627	74702	69647	45208	7789
Variancia	0	7816	20361	27611	28822	35770	36073	875906043	546021203

Inicio en 1977

	75	76	77	78	79	80	81	82	83
Media	8500	13340	217137	72812	74627	74702	69647	45208	7789
Variancia	0	7816	9164	27611	28822	35770	36073	875906043	546021203

ii) Fábrica de amoníaco.

	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
Media	120000	3250	3330	3464	3597	3730	4263	4529	4796	5062	5195
Variancia	0	3549	3549	4969	4969	5679	5679	6389	6389	7099	7099

iii) Fábrica de zinc, fábrica de ácido sulfúrico, fábrica de amoníaco y fábrica de sulfato de amonio.

Inicio en 1975.

	75	76	77	78	79	80	81	82	83
Media	356500	178336	180324	182555	185277	187241	184205	128034	19672
Variancia	0	104218	115207	126498	127709	138698	148642	7025886675	3482984083

Inicio en 1976

Media

8500	351660	180324	182555	185277	187241	184205	128034	19672
75	76	77	78	79	80	81	82	83

Variancia

0	7816	115207	126498	127709	138698	148642	7025886675	3482984083

Inicio en 1977

Media

8500	13340	350137	182555	185277	187241	184205	128034	19672
75	76	77	78	79	80	81	82	83

Variancia

0	7816	9164	126498	127709	138698	148642	7025886675	3482984083

iv) Explotar el yacimiento de Tungsteno de San Antonio.

Media

65000	115287	77750	44750	33975	34725	35475	36350	30950	25500	26200
1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985

Variancia

0	843084906	2189982500	1593907500	408916875	419491875	430201875	442867500	113467500	53280000	60000000

SUBSISTEMA DE OPTIMIZACION

i) Función objetivo. **Se desea maximizar la utilidad esperada del valor presente neto de la organización.**

Max Z = Utilidad esperada de {(ingreso de las estrategias) - (costo de la deuda a largo plazo) - (costo de la deuda a corto plazo) - - (dividendos pagados a las acciones preferentes) + (cantidad que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda a largo plazo)}

Puesto que la función utilidad del presidente de la compañía es de tipo exponencial y la distribución de probabilidad del valor presente neto de las estrategias puede considerarse como normal, puede aplicarse la función objetivo de la sección II.4.1.

$$\text{Max } Z = E(x) - \sigma_x^2/2c$$

la cual queda como

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{10} \left[E\left[VP_i \right] - \sigma_{VP_i}^2/2c \right] X_i$$ - (costo de la deuda a largo plazo) - (costo de la deuda a corto plazo) - (dividendos pagados a las acciones preferentes) + (cantidad que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda a largo plazo).

Haciendo $EC_i = E\left[VP_i \right] - \sigma_{VP_i}^2 /2c$, se calcularán para cada una de las variables X_i.

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{continuar con la situación actual} \\ 0 & \text{no continuar} \end{cases}$$

$$EC_1 = E(VP_1) - \sigma^2_{VP_1}/2C = 80{,}310 - (24\ 424\ 000/20\ 000) =$$

$$= 80\ 310 - 1\ 211 = 68\ 099$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{instalación de las fábricas de zinc y ácido sulfúrico en 1975} \\ 0 & \text{no se efectúa dicha instalación} \end{cases}$$

$$EC_2 = 82\ 191$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{instalación de las fábricas de zinc y ácido sulfúrico en 1976} \\ 0 & \text{no se efectúa la instalación} \end{cases}$$

$$EC_3 = 56\ 992$$

$$X_4 = \begin{cases} 1 & \text{instalación de las fábricas de zinc y de ácido sulfúrico en 1977} \\ 0 & \text{no se efectúa la instalación} \end{cases}$$

$$EC_4 = 34\ 413$$

$$X_5 = \begin{cases} 1 & \text{instalación de la fábrica de amoníaco en 1975} \\ 0 & \text{no se efectúa la instalación} \end{cases}$$

$$EC_5 = -\ 97\ 931$$

$$X_6 = \begin{cases} 1 & \text{fábricas de zinc, ácido sulfúrico, amoníaco y sulfato de amonio en 1975} \\ 0 & \text{no se efectúan dichas irversiones} \end{cases}$$

$$EC_6 = 359\ 300$$

$$X_7 = \begin{cases} 1 & \text{fábricas de zinc, ácido sulfúrico, amoníaco y sulfato de amonio en 1976} \\ 0 & \text{no se efectúan dichas inversiones} \end{cases}$$

$EC_7 = 315\ 800$

$$X_8 = \begin{cases} 1 & \text{fábricas de zinc, ácido sulfúrico, amoníaco y sulfato de amonio en 1927} \\ 0 & \text{no se efectúan dichas inversiones} \end{cases}$$

$EC_8 = 154\ 100$

$$X_9 = \begin{cases} 1 & \text{se vende San Antonio a la Cía. La Perla} \\ 0 & \text{no se vende} \end{cases}$$

$EC_9 = 500$

$$X_{10} = \begin{cases} 1 & \text{se explota el yacimiento de tungsteno de San Antonio} \\ 0 & \text{no se efectúa} \end{cases}$$

$EC_{10} = 67\ 510$

Se continúa calculando los demás integrantes de la función objetivo:

$$(\text{costo de la deuda a largo plazo}) = \sum_{j} \sum_{t=1}^{11} \sum_{p=1}^{t} g_{jp} (1 - {}^{r}ct) \left[Y_{jp} - (t-p)\, h_{jp}\, Y_{jp} \right] / (1+r)^t$$

donde

g_{jp} - es la tasa de interés que se debe pagar a la fuente j por préstamos efectuados en el período p.

${}^{r}ct$ - tasa de impuestos en el período t.

Y_{jp} - préstamo a largo plazo de la fuente j en el período p.

h_{jp} - fracción de Y_{jp} requerida como pago constante al principal en cada período.

r - costo del capital.

Se tienen los datos siguientes:

t	g_{1t}	g_{2t}	g_{3t}	g_{4t}	g_{5t}	h_{1t}	h_{2t}	h_{3t}	h_{4t}	h_{5t}	r_{ct}
1	0.04	0.03	0.08	0.09	0.05	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.05
2	0.04	0.03	0.08	0.09	0.06	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.05
3	0.05	0.04	0.07	0.09	0.07	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.05
4	0.05	0.04	0.07	0.09	0.05	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.06
5	0.06	0.05	0.06	0.09	0.06	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.06
6	0.06	0.05	0.06	0.09	0.07	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.06
7	0.05	0.06	0.05	0.09	0.05	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.07
8	0.07	0.06	0.05	0.09	0.06	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.07
9	0.07	0.07	0.04	0.09	0.07	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.07
10	0.05	0.07	0.04	0.09	0.05	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.08
11	0.08	0.08	0.06	0.09	0.06	0.20	0.10	.067	.067	0.10	0.08

Como existe una fuente que presta exclusivamente para llevar a cabo la estrategia 10 hay que sumar además

$$\sum_{t=1}^{11} \sum_{p=1}^{t} g_{10,p}\,(1 - rct) \left[w_{10p} - (t-p)\, h_{10p}\, w_{10p} \right]$$

donde

g_{10p} - es la tasa de interés que se debe pagar a la fuente 10 por el préstamo efectuado en el período p.

W_{10p} - préstamo a largo plazo que solo puede utilizarse en la estrategia 10.

h_{10p} - fracción de W_{10p} requerida como pago constante al principal en cada período.

Teniéndose como datos

t	$g_{10,p}$	$h_{10,r}$
1	.06	0.10
2	.06	0.10
3	.06	0.10
4	.06	0.10
5	.06	0.10
6	.06	0.10
7	.06	0.10
8	.06	0.10
9	.06	0.10
10	.06	0.10
11	.06	0.10

$$(\text{costo de la deuda a corto plazo}) = \sum_{t=1}^{11} \sum_{k=1}^{3} ekt\ (1-r_{ct})\ V_{kt}$$

siendo e_{kt} - tasa de interés que se debe pagar a la fuente k por el préstamo a corto plazo del período t.

V_{kt} - préstamo a corto plazo de la fuente k en el período t.

t	e_{1t}	e_{2t}	e_{3t}
1	0.10	0.06	0.04
2	0.10	0.06	0.05
3	0.11	0.06	0.06
4	0.11	0.08	0.07
5	0.12	0.08	0.07
6	0.12	0.08	0.07
7	0.13	0.10	0.07
8	0.13	0.10	0.08
9	0.14	0.10	0.08
10	0.14	0.11	0.08
11	0.14	0.11	0.09

(Dividendos pagados a las acciones preferentes) = $\sum_{t=1}^{11} \sum_{p=1}^{t} b_p \, p_p$

donde

b_p - dividendo que se paga por acción preferente en el período p.

p_p - número de acciones preferentes de \$1,000 emitidas en el período p.

en este caso se considera $b_p = 0.06$ $\quad P = 1, \ldots, 11$

(cantidad que se obtiene al pagar anticipadamente la deuda) =

$$\sum_{t=1}^{11} \sum_{j=1}^{5} \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{q=p+1}^{t} g_{jp} \, (1 - r_{cq}) \, R_{jpq}$$

donde R_{jpq} = cantidad en miles de pesos que se paga anticipadamente en el período q de la deuda a largo plazo del período P y fuente j.

RESTRICCIONES.

Se requiere encontrar una solución de tal manera, que la probabilidad que las restricciones se verifiquen cuando se conozca el valor de las variables aleatorias sea al menos una cierta cantidad establecida.

a) Restricciones de flujo de fondos.

$$\sum_j a_{j1} x_j + d_1 S_0 + d_1 (S_1^* - S_1) + \sum_k e_{k1} (1 - r_{c1}) V_{k1} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{1} b_p P_p + \sum_j (g_{j1} Y_{j1} (1 - r_{c1}) + h_{j1} Y_{j1}) +$$

$$+ \sum_i (g_{i1} W_{i1} (1 - r_{c1}) + h_{i1} W_{i1}) + c_1 S_1 + Z_1 =$$

$$= S_1^* + P_1 + \sum_k V_{k1} + \sum_m Y_{m1} + \sum_j W_{j1} \sum_j a_{j2} X_j + \qquad (1)$$

$$+ d_2 S_0 + \sum_{p=1}^{2} d_2 (S_p^* - S_p) + \sum_k V_{k1} + \sum_j e_{k2} (1 - r_{c2}) V_{k2} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{2} b_p P_p + \sum_j \sum_{p=1}^{2} \left\{ (q_{jp} Y_{jp} (1 - r_{c2})(1 - (2 - p) h_{jp}) + h_{jp} Y_{jp}) \right\} +$$

$$+ \sum_i \sum_{p=1}^{2} \left\{ (g_{ip} W_{ip} (1 - r_{c2})(1 - (2 - p) h_{ip}) + h_{ip} W_{ip}) \right\} +$$

$$+\sum_j R_{j12} + c_2 S_2 + Z_2 = S_2^* + P_2 + \sum_k V_{k2} + \sum_m Y_{m2} +$$

$$+\sum_j (1-r_{c2})\, g_{j1} R_{j12} + Z_1 \qquad (2)$$

y en general para el período t.

$$\sum_j a_{jt} X_j + d_t S_0 + \sum_{p=1}^{t} d_t (S_p^* - S_p) + \sum_k V_k (t-1) +$$

$$+\sum_k e_{kt} (1-r_{ct}) V_{kt} + \sum_{p=0}^{t} b_p P_p + \sum_j \sum_{p=1}^{t} \Big\{$$

$$\left\{ (g_{jp} Y_{jp} (1-r_{ct})(1-(t-p)\, h_{jp}) + h_{jp} Y_{jp} \right\} +$$

$$+\sum_i \sum_{p=1}^{t} \left\{ (g_{ip} W_{ip}\, (1-r_{ct})\, (1-(t-p)\, h_{ip}) + h_{ip} W_{ip}) \right\} +$$

$$+\sum_j \sum_{p=1}^{t-1} R_{jpt} + c_t S_t + Z_t = S_t^* + P_t + \sum_k V_{kt} +$$

$$+\sum_m Y_{mt} + \sum_j W_{jt} + \sum_j \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{q=p+1}^{t} (1-r_{ct})\, g_{jp} R_{jpq} + Z_{t-1}$$

donde

a_{jt} - flujo neto de dinero en el período t de la estrategia j (positivo si es un requerimiento) en miles de pesos.

S_t^* - número de acciones ordinarias emitidas en el período t con valor de \$1,000 cada una

P_t - número de acciones preferentes de \$1,000 emitidas en el período t.

V_{kt} - préstamo a corto plazo de la fuente k en el período t (en miles de pesos)

Y_{et} - préstamo a largo plazo de la fuente e en el período t (en miles de pesos)

W_{jt} - préstamo en miles de pesos exclusivamente para la estrategia j.

d_t - pago de dividendo a una acción oridinaria.

S_0 - número de acciones ordinarias en el período cero.

S_p - número de acciones en que se disminuye el capital en el período P.

e_{kt} - interés que se debe pagar a la fuente k por el préstamo a corto plazo del período t.

r_{ct} - tasa de impuestos en el período t.

b_p - dividendos que se pagan por acción preferente.

g_{jp} - tasa de interés que se debe pagar a la fuente j por préstamos, en el período p.

h_{jp} - fracción de Y_{jp} requerida como pago constante al principal en cada período.

R_{jpq} - cantidad en miles de pesos de la deuda a largo plazo de la fuente j que se inició en el período p y que voluntariamente se reembolsa en el período $q > p$.

c_t - costo de la reducción de capital en una acción oridinaria.

α_t - probabilidad mínima para que se cumpla la restricción t.

Z_t - cantidad neta al final del período t.

Se especifica que la cantidad neta al final de cada período t, Z_t, deberá ser mayor o igual que cero con una probabilidad de al menos 0.95, es decir:

$$P_r(Z_t \geq 0) \geq 0.95 \qquad t = 1,\ldots,11$$

Por la sección II.4.2. las restricciones para que se cumpla la condición anterior son:

$$\bar{Z}_t \geq 1.645 \quad D_t$$

$$\bar{Z}_t = -\sum_{j=1}^{10} \mu_{tj}\, X_j - d_t\, S_0 - \sum_{p=1}^{t} d_t\, (S_p^* - S_p) -$$

$$-\sum_k V_k\, (t-1) - \sum_k e_{kt}\, (1-r_{ct})\, V_{kt} - \sum_{p=0}^{t} b_p\, P_p -$$

$$-\sum_j \sum_{p=1}^{t} \left\{ g_{jp}\, Y_{jp}\, (1-r_{ct})\, (1-(t-p)+h_{jp}\, Y_{jp}) \right\} -$$

$$-\sum_i \sum_{p=1}^{t} \left\{ (g_{ip}\, W_{ip}\, (1-r_{ct})\, (1-(t-p)\, h_{ip}) + h_{ip}\, W_{ip}) \right\} -$$

$$-\sum_j \sum_{p=1}^{t-1} R_{jpt} - c_t\, S_t + S_t^* + \sum_k V_{kt} + \sum_m Y_{mt} + P_t +$$

$$+\sum_j W_{jt} + \sum_j \sum_{p=1}^{t-1} \sum_{q=p+1}^{t} (1-r_{ct})\, g_{jp}\, R_{jpq} + \bar{Z}_{t-1}$$

y

$$D_t = \sqrt{\sum_j \sigma_{tj}^2\, X_j}$$

b) Restricciones de dependencia en las inversiones

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_6 + X_7 + X_8 = 1$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 1$$

$$X_9 + X_{10} = 1$$

c) Financiamiento asociado a X_{10}

$$W_{10p} \leq \lambda_{10p}\, X_{10}$$

donde λ_{10p} es la cantidad **máxima de financiamiento para la** estrategia 10 en el período P.

P	λ^{10}_{p}
1	30 000
2	25 000
3	30 000
4	25 000
5	30 000
6	5 000
7	5 000
8	5 000
9	10 000
10	10 000

d) Pago anticipado de la deuda. Es necesario asegurar que el pago anticipado total en el horizonte de planeación no excede la cantidad de deuda que se tiene al final del período 11.

$$\sum_{q=p+1}^{11} R_{1pq} \leq Y_{1p} \left[1-(11-p)\, h_{1p} \right] \qquad P = 8,\ 9,\ 10$$

$$\sum_{q=p+1}^{11} R_{2pq} \leq Y_{2p} \left[1-(11-p)\, h_{2p} \right] \qquad P = 3, \ldots, 10$$

$$\sum_{q=p+1}^{11} R_{3pq} \leq Y_{3p} \left[1-(11-p)\, h_{3p} \right] \qquad P = 1, \ldots, 10$$

$$\sum_{q=p+1}^{11} R_{4pq} \leq Y_{4p} \left[1-(11-p)\, h_{4p} \right] \qquad P = 1, \ldots, 10$$

$$\sum_{q=p+1}^{11} R_{5pq} \leq Y_{5p} \left[1-(11-p)\, h_{5p} \right] \qquad P = 3,\ldots, 10$$

También se tienen restricciones respecto al número de acciones que se pueden retirar, estas son:

$$S_1 + H_1 = 500$$

$$S_2 - S_1^* + H_2 - H_1 = 0$$

$$S_3 - S_2^* + H_3 - H_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$S_{11} - S_{10}^* + H_{11} - H_{10} = 0$$

III.2. Resultados.

Los reportes finales son:

La Cía. Fres, S.A., deberá:

1° Invertir en las fábricas de zinc, ácido sulfúrico, amoníaco y sulfato de amonio en 1975.

2° Explotar el yacimiento de Tungsteno de San Antonio.

3° Préstamos a corto plazo.

	FUENTE		
Año	1	2	3
1975	500	500	500
	(miles de pesos)		

4° Préstamo a largo plazo.

Pedir a la fuente 1 en 1975, 550 780 miles de pesos.

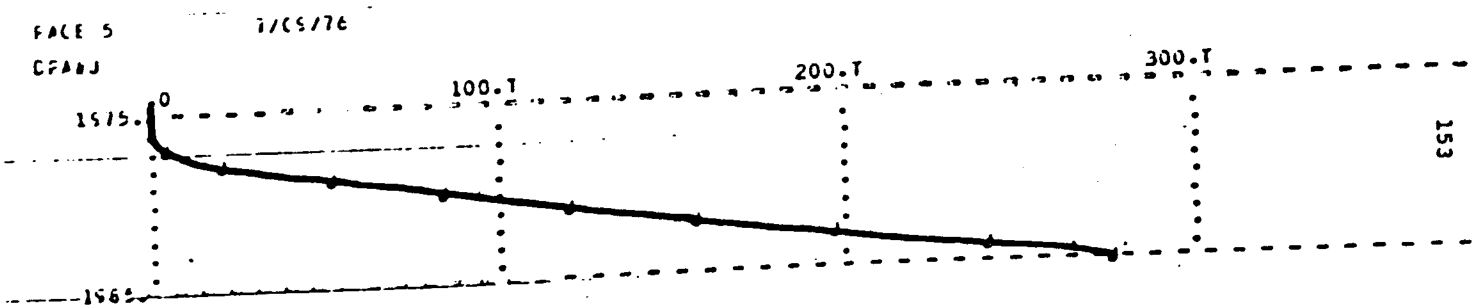
5° Pagos a las fuentes de financiamiento (sin intereses)

	Fuente Corto Plazo			Fuente Largo Plazo
Año	1	2	3	1
1975				
1976	500	500	500	110156
1977				110156
1978				110156
1979				110156
1980				110156
	(miles de pesos)			

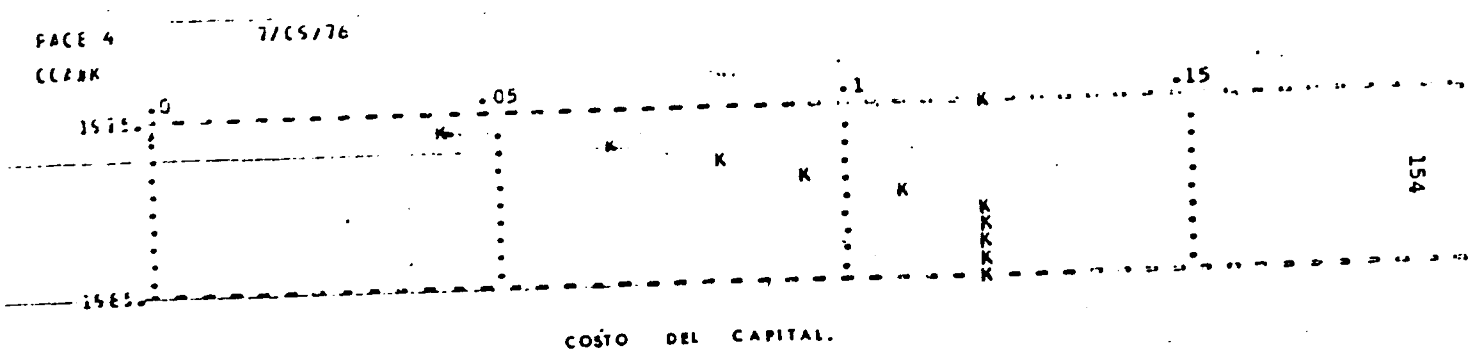
6° Pago de intereses.

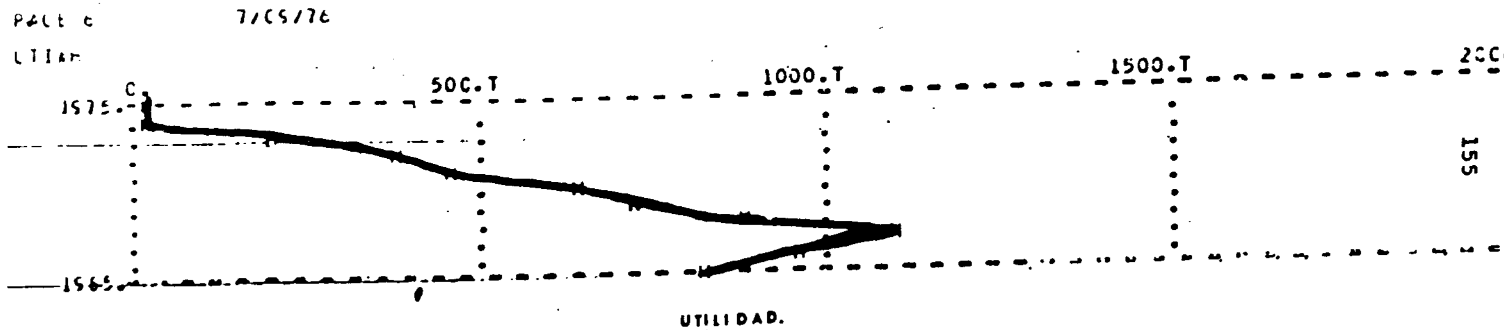
Año	Fuente 1 Largo Plazo
1976	22 031.2
1977	17 624.96
1978	13 218.72
1979	8 812.48
1980	4 406.24
	(miles de pesos)

7° Se presentan a continuación gráficas que muestran en el tiempo el desarrollo simulado de la empresa, obtenidas utilizando el modelo dinámico de la corporación.



DIVIDENDOS PAGADOS.

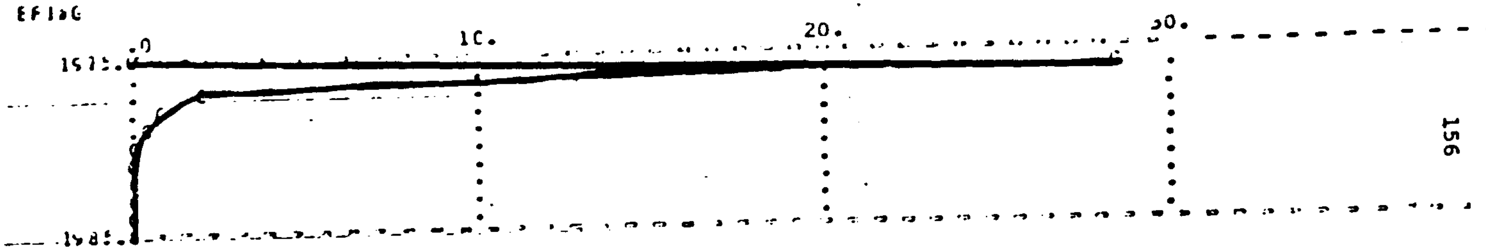

FACE 4
7/05/76
CCA#K
.0
.05
.1
.15
K
KKKKK
COSTO DEL CAPITAL.



PAGE 6
7/05/76
0.
500.T
1000.T
1500.T
1575.
1565.
UTILIDAD.

PAGE 7 7/05/76

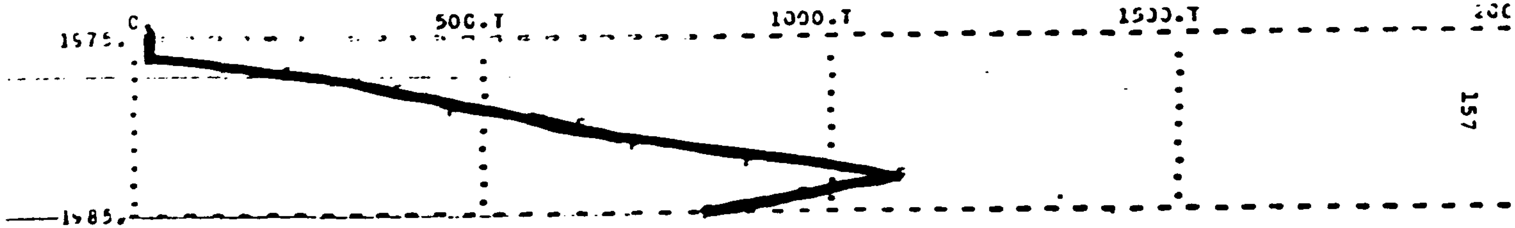
EFIaG



ESTRUCTURA FINANCIERA.

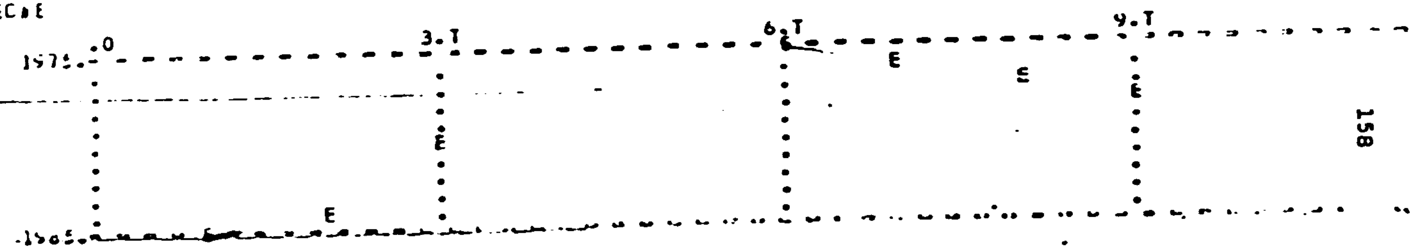
PAGE 6 7/09/76

CCCAF



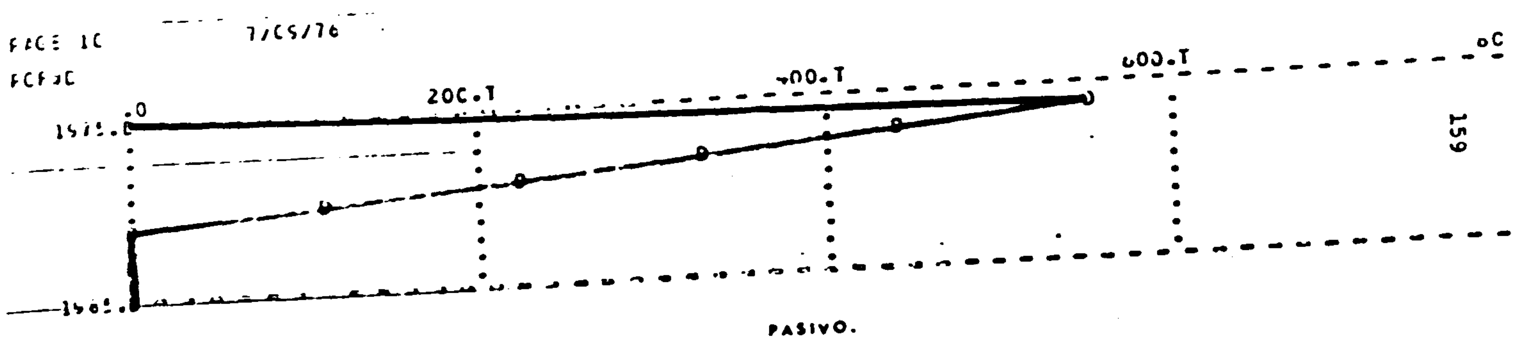
CAPITAL CONTABLE.

CSCAE



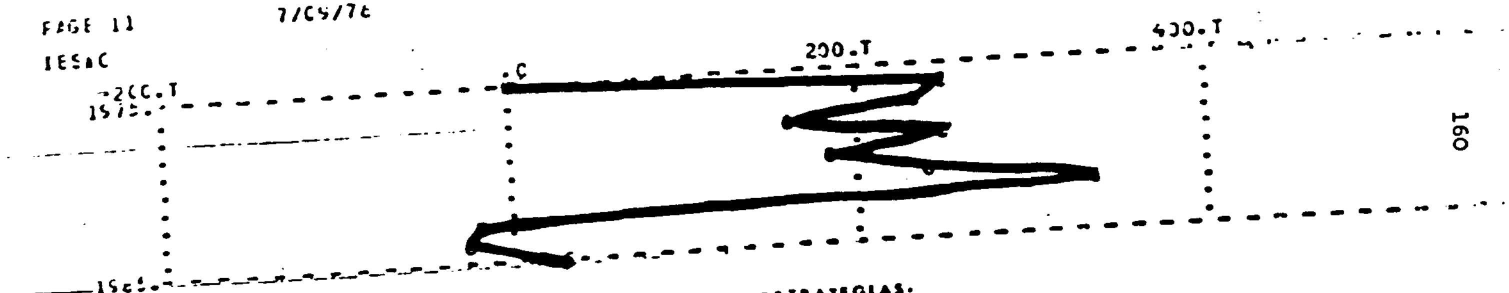
CAPITAL SOCIAL.

158


0
200.T
400.T
600.T
oC
PASIVO.

PAGE 11   7/09/76

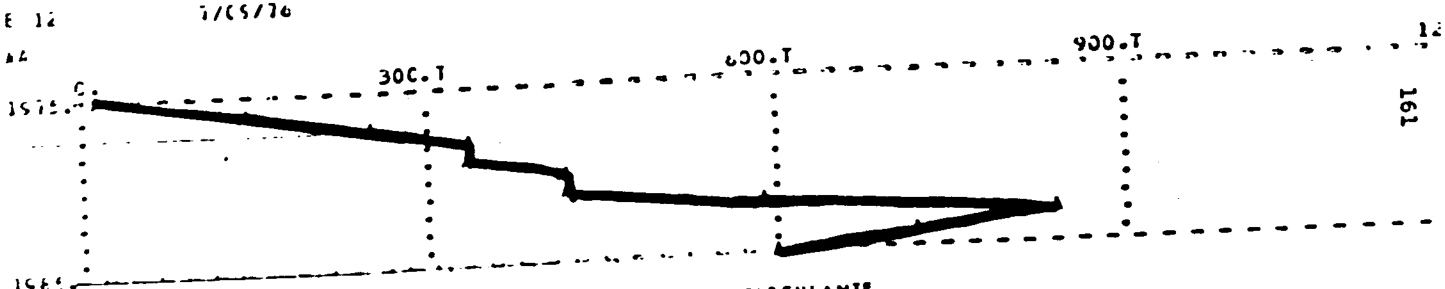
IESAC



INGRESO DE LAS ESTRATEGIAS.

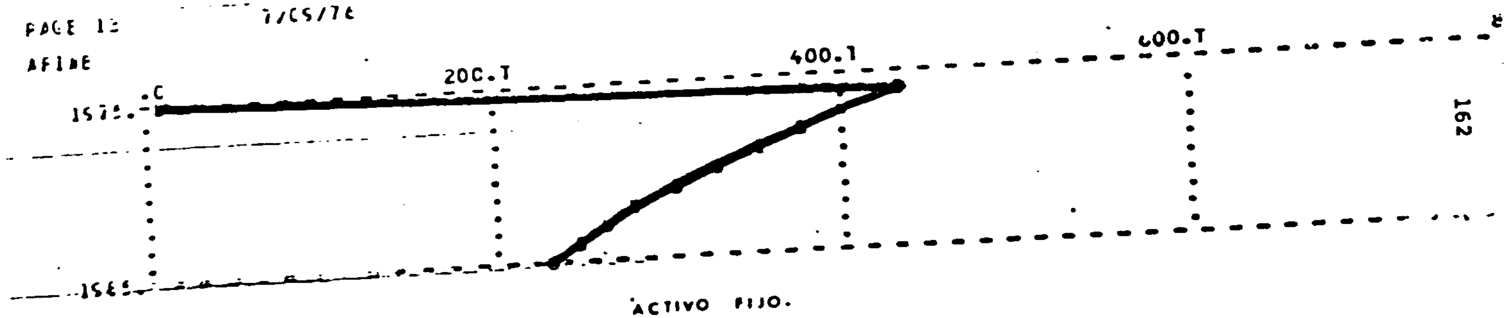
160

ACIAA



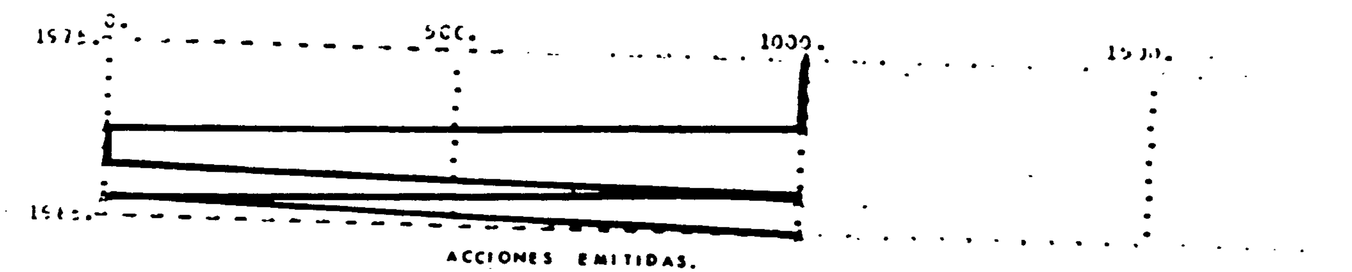
ACTIVO CIRCULANTE.

PAGE 13 7/05/76
AFINE



PAGE 14 7/05/76

EAC.A



CAPITULO

5

CONCLUSIONES

CAPITULO V

CONCLUSIONES

En el estudio presente se ha incluido la aversión al riesgo del decisor (considerando a éste una sola persona, o bien un grupo donde existe una persona cuya decisión será la que se llevará a cabo si el grupo no logra llegar a un acuerdo común) mediante el uso de una función utilidad.

Claramente la función utilidad de un decisor es diferente si se encuentra en dos empresas de distinto tamaño, por lo que en la obtención de esta función de preferencia se ha considerado implícitamente el factor tamaño de la empresa.

La incertidumbre se ha considerado al cuantificarla mediante probabilidades. (las posibilidades se determinan utilizando registros históricos, o la opinión de las personas que tienen amplia experiencia sobre las variables aleatorias de interés, o combinación de datos y opiniones).

Se ha conceptualizado a la empresa y a las fuentes de financiamiento como un sistema, donde el objetivo ha sido maximizar el valor de la organización, utilizando como medida de efectividad el dinero en valor presente neto, se generaron las alternativas de solución, se evaluaron estas alternativas y para seleccionar la solución que se sugiere se utilizó el criterio de escoger la que condujera a la utilidad esperada máxima, al utilizar el criterio de selección se concluyó que no es necesario incluir medidas sobre la forma en que termina la incertidumbre en el tiempo, ya que este factor no proporciona información adicional a la existente, que permita tomar decisiones.

Se ha desarrollado un ejemplo hipotético, pero los programas que se han elaborado para la generación de los datos y la metodología permiten la utilización de este trabajo en aplicaciones prácticas a corporaciones que tienen varias subsidiarias con organización descentralizada y que anualmente proponen sus planes o estrategias para una revisión por parte de la corporación. De esta manera se ha realizado un esfuerzo para lograr una contribución de tipo social en nuestro medio.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

1. Benders J. F. "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming" Numerische Mathematik 4, 238-252 (1962)

2. Benjamin and Cornell "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. Mc. Graw Hill, 1970

3. Bierman Harold "Capital Structure and Financial Decisions" in Financial Research and Management Decisions edited by Robichek, Wiley, 1967

4. De Neufville and Stafford "Systems Analysis for Engineers and Managers" Mc. Graw Hill, 1971

5. De Neufville and Marks "Systems Planning and Design" Prentice Hall, 1974

6. Drake Alvin W. "Fundamentals of Applied Probability Theory" Mc. Graw Hill, 1967

7. Durand David "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment: Comment" American Economic Review 49 (September 1959)

8. Forrester Jay W. "Industrial Dynamics" The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961

9. Gordon Myron "The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation" Irwin, 1962

10. Grant Eugene, Ireson Grant "Principles of Engineering Economy" Ronald Press Company, 1964

11. Guía para el uso de Procedimientos catalogados del Sistema MPSX. Dirección General de Ingeniería de Sistemas. Departamento de Sistemas de Computación, SOP

12. Hamilton and Moses "An Optimization Model for Corporate Financial Planning" Operations Research 21 (1973)

13. Hamilton and Moses "A Computer Based Corporate Planning Systems" Management Science. Vol. 21 No. 2 1974

14. Hax and Wigg "Decision Analysis in Capital Investment" Sloan Management Review. Vol. 17 No. 2 Winter 1976.

15. Hillier Frederick "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments" Management Science. Vol. 9. April 1963

16. Himmelstine Aguilar Carlos "Planificación de una Industria Minera". Tesis para grado de Maestría en Ingeniería, División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería. UNAM. 1975

17. Hillier and Lieberman "Introduction to Operations Research" Holden-Day, Inc. 1967

18. Jauffred, Moreno y Acosta "Métodos de Optimización" Programación Lineal, Gráficas. Representaciones y Servicios de Ingeniería. 1971

19. Keeney Ralph L. "Multidimensional Utility Functions: Theory, Assessment and Application" Operations Research Center Technical Report No. 43, Cambridge, Mass., MIT, 1969

20. Keeney Ralph L. "Utility Functions for Multiattributed Consequences" Management Science, Vol. 18 (1972)

21. Keeney Ralph L. "An Ilustrated Procedure for Assessing Multiattributed Utility Functions" Sloan Management Review. Vol. 14 No. 1, Fall 1972

22. Lawler and Bell "A Method for Solving Discrete Optimization Problems" Operations Research, Vol. 16 No. 2, 1968

23. Mack Ruth P. "Planning on Uncertainty" Wiley, 1971

24. Manual de Proyectos de Desarrollo Económico. Naciones Unidas. 1967

25. Mao James "Quantitative Analysis of Financial Decisions" Mc. Millan. 1969

26. Mathematical Programming System Extended. Linear and Separable Programming - Program Description. Manual H20-0968 - IBM. 1971

27. Modigliani Franco and Merton H. Miller "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment" American Economic Review 48, June 1958

28. Naylor and Vernon "Microeconomics and Decision Models of the Firm" Harcourt Brace, 1969

29. Naylor Thomas and Schauland Horst "A Survey of Users of Corporate Planning Models" Management Science. Vol. 22 No. 9, May, 1976

30. Ochoa Rosso Felipe "Applications of Discrete Optimization Techniques to Capital Investment and Network Synthesis Problems Sc. D. Thesis, MIT, Cambridge, Mass., 1969

31. Organick E.I. "A Fortran IV Primer" Addison Wesley. 1966

32. Pogue Gerald, Kishore Lall "Corporate Finance: An Overview" Sloan Management Review. Massachusetts Institute of Technology. Vol. 15 No. 3, 1974

33. Pratt John "Risk Aversion in the Small and in the Large" Econometrica. January, 1964

34. Pouliquen Y. Louis "Risk Analysis in Project Appraisal" International Bank for Reconstruction and Development, 1970

35. Raiffa Howard "Decision Analysis" Modules 1-10 Encyclopedia Británica. 1973

36. Reutlinger Shlomo "Techniques for Project Appraisal Under Uncertainty" International Bank for Reconstruction and Development, 1970

37. Raiffa H. "Decision Analysis: **Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty" Addision Ewsley, 1968**

38. Raiffa H. "Preferences for Multi-Attributed Alternatives" The RAND Corporation, Memorandum RM-5868-DOT/RC, 1969

39. Schlaifer Robert O. "Analysis of Decisions Under Uncertainty" Mc. Graw Hill, 1969

40. Solomon Ezra "The Theory of Financial Management" Columbia University Press, 1963

41. Vajda S. "Probabilistic Programming" Academic Press, 1972

42. Zettergren Lars "Financial Issues in Strategic Planning" Long Range Planning. Vol. 8 No. 3, June, 1975

43. Gershefski, George W. "Corporate Models-The State of the Art," Management Science, Vol. 16, No. 6 (February, 1970)

44. Balas E. "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with 0-1 Variables" Op. Res 13, 517-549 (1965)

45. Bellman "Dynamic Programming" Princeton Univ. Press, 1957

46. Dantzig G.B. "Linear Programming and Extensions" Princeton University Press, 1963

47. Dean Joel "Capital Budgeting" Columbia University Press, 1951

48. Lorie and Savage "Three Problems in Rationing Capital" Journal of Business, XXVIII, No. 4 (Oct. 1955)

49. Geoffrion A. "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming" Operations Research 17, 1969

50. Gomory R.E. "All Integer Programming Algorithm" IBM Research Report, RC-189, Jan, 1960

51. Ochoa Rosso Felipe "Aplicaciones de la Teoría de Optimización a la Selección de Inversiones", Ingeniería Civil No. 156, Enero, febrero 1970

52. Reiter, S. "Choosing an Investment Program Among Interdependent Projects" Review of Economic Studies. January, 1963

53. Shapiro J. F. "Dynamic Programming Algorithms for the Integer Programming Problem I. The Integer Programming Problem Viewed as a Knapsack Type Problem" Operations Research, 16, 1, January-February, 1968

54. Weingartner H. Martin "Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems", Markham Publishing Company, 1967

55. Weingartner H. Martin "Some new views on the Payback Period and Capital Budgeting Decisions" en "Studies in Budgeting" editado por Byrnes, Charnes, Cooper, Davis, Gilford. North Holland Company, 1971

56. Hertz, David B. "Risk Analysis in Capital Investment" Harvard Business Review. XLII, January-February, 1964.

57. Markowitz "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments" Wiley, 1959

58. Farrar Donald E. "The Investment Decision Under Uncertainty" Prentice Hall, 1962

59. Schoner Bertram. Letter in Management Science 13 (August 1967)

60. Von Neumann and Morgenstern "Theory of Games and Economics Behavior" Princeton University Press, 1944

61. Näslund Bertil "A Model of Capital Budgeting under Risk" en "Studies in Budgeting" North Holland Publishing Company, 1971

62. Byrne, Charnes, Cooper, Kortanek "A chance-constrained approach to capital budgeting with portfolio type payback and liquidity constraints and horizon posture controls" North Holland Publishing Company, 1971 en "Studies in Budgeting".

63. Byrne, Charnes, Cooper, Kortanek "C^2 and LPU^2 combinations for treating different risks and uncertainties in capital budgets" en "Studies in Budgeting" Publishing Company, 1971

64. Hillier Frederick S. "A basic approach to the evaluation of risky interrelated investments" en "Studies in Budgeting" Publishing Company, 1971

65. Adelson R.M. "Criteria for Capital Investment: An Approach Through Decision Theory" Operational Research Quarterly 16 (March 1965)

APENDICES

APENDICE I

P R O G R A M A S

176

PROGRAMA ACOST 1

```
0001            DIMENSION JAHS(23)
0002            DIMENSION ASP(11,5),ASN(11,5)
0003            INTEGER Y(11)
0004            DOUBLE PRECISION XCAL
0005            DATA IAHS/JAHS 6/
0006            N=85
0007      4020  FORMAT(3X,'ACNA',D12.4,11I1,2I2,1CDA)
0008      4022  FORMAT(1X,I2,'ASP',11F10.3,17X)
0009      4023  FORMAT(1X,I2,'ASN',11F10.3,17X)
0010            N=0
0011            XCAL=.5953
0012            DO 2000 IN=1,10
0013      2000  Y(IN)=0
0014            Y(2)=1
0015            Y(11)=1
0016       350  CONTINUE
0017            [illegible] 12
0018            WRITE(12,4020)XCAL,Y,N,N
0019            DO 4025 I=1,11
0020            DO 4025 KL=1,5
0021            ASP(I,KL)=0
0022            ASN(I,KL)=0
0023      4025  CONTINUE
0024            ASP(1,1)=1
0025            ASP(11,2)=1
0026            ASP(1,3)=1
0027            ASP(2,3)=1
0028            ASP(5,3)=1
0029            ASP(4,3)=1
0030            ASP(6,3)=1
0031            ASP(7,3)=1
0032            ASP(6,3)=1
0033            ASP(11,4)=1
0034            ASP(9,5)=1
0035            ASP(10,5)=1
0036            ASN(1,1)=1
0037            ASN(2,1)=1
0038            ASN(3,1)=1
0039            ASN(4,1)=1
0040            ASN(6,1)=1
0041            ASN(7,1)=1
0042            AS[illegible]
0043            [illegible]
0044            ASN(6,2)=1
0045            ASN(7,2)=1
0046            A[illegible]
0047            ASN(1[illegible])=1
0048            ASN([illegible])=1
0049            ASN([illegible])=1
0050            ASN(11,5)=1
0051            DO 4024 KL=1,5
0052            WRITE(12,4022) KL,(ASP(I,KL),I=1,11)
0053            WRITE(12,4023) KL,(ASN(I,KL),I=1,11)
0054      4024  CONTINUE
0055            [illegible]*Y(2)+19013*Y(3)+7815*Y(4)+7816*Y(5)+3549*Y(6)+10.218*Y(7)+
               1[illegible]*Y(8)+7816*Y(9)+[illegible]3C[illegible]*Y(11)
0056            [illegible]*Y(2)+23361*Y(3)+20361*Y(4)+9164*Y(5)+3549*Y(6)+115207*Y(7)
               1+115207*Y(8)+9164*Y(9)+21[illegible].E04*Y(11)
0057            [illegible]*Y(2)+27611*Y(3)+27611*Y(4)+27611*Y(5)+4969*Y(6)+
               112649[illegible]*Y(7)+12649[illegible]*Y(8)+12649[illegible]*Y(9)+159[illegible]0.E0[illegible]*Y(11)
0058            [illegible]1.027*Y(2)+28822*Y(3)+28822*Y(4)+28822*Y(5)+4969*Y(6)+
               1[illegible]*Y(7)+[illegible]*Y(8)+[illegible]*Y(9)+[illegible].E03*Y(11)
0059            [illegible]1337[illegible]*Y(2)+35770*Y(3)+35770*Y(4)+[illegible]*Y(6)+138678*Y(7)+
               1138[illegible]*Y(8)+138[illegible]*Y(9)+35770*Y(5)+[illegible]1.E03*Y(11)
0060            [illegible]*Y(2)+34073*Y(3)+34073*Y(4)+34073*Y(5)+5679*Y(6)+
               11[illegible]*Y(7)+1.0[illegible]2*Y(8)+1.0[illegible]2*Y(9)+33201.E03*Y(11)
0061            [illegible]5.E02*Y(2)+[illegible]75[illegible].E03*Y(3)+875904.E03*Y(4)+875904.E03*Y(5)
               1+[illegible]*Y(6)+702588.E04*Y(7)+702588.E04*Y(8)+702588.E04*Y(9)+
               2[illegible]67.E03*Y(11))
0062            [illegible].E0[illegible]*Y(2)+[illegible]021.E03*Y(3)+546021.E03*Y(4)+546021.E03*Y(5)
               1+[illegible]*Y(6)+346298.E04*Y(7)+346298.E04*Y(8)+346298.E04*Y(9)+
               2112[illegible]67.E03*Y(11))
0063            [illegible]*Y(6)+5326.E04*Y(11)
```

```
      W1(=75...*Y(5)*6.E5/Y(11))
      IF(W1.LE.0.0) GO TO 410
      W1=1.44*W1**0.5
      GO TO 411
  410 W1=0
  411 IF(W2.LE.0.0) GO TO 420
      W2=1.64*W2**0.5
      GO TO 421
  420 W2=0
  421 IF(W3.LE.0.0) GO TO 430
      W3=1.64*W3**0.5
      GO TO 431
  430 W3=0
  431 IF(W4.LE.0.0) GO TO 440
      W4=1.64*W4**0.5
      GO TO 441
  440 W4=0
  441 IF(W5.LE.0.0) GO TO 450
      W5=1.64*W5**0.5
      GO TO 451
  450 W5=0
  451 IF(W6.LE.0.0) GO TO 460
      W6=1.64*W6**0.5
      GO TO 461
  [illegible]
  [illegible]
  500 W10=0
  501 [illegible]*Y(5)+120000*Y(6)+356500*
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]-13340*Y(5)-2250*Y(6)-173336
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]*Y(5)-3330*Y(6)-180324
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]12*Y(5)-3664*Y(6)-182555
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]7*Y(5)-3597*Y(6)-185277
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]2*Y(5)-3730*Y(6)-187241
     [illegible]*Y(11))
     1*Y(7)-[illegible]*Y(5)-4463*Y(6)-184205
     [illegible]*Y(11))
     [illegible]*Y(5)-4529*Y(6)-128034
     [illegible]*Y(11))
     1-Y(7)-126034*Y(8)-[illegible]*Y(5)-4756*Y(6)-15672*Y(7)-
     [illegible]*Y(11))
     115672*Y(8)-15672*Y(9)-30550*Y(11))
      W10=[illegible]*Y(11)
      W11=[illegible]-26220*Y(11)
      W1=W1+500
      [illegible]
      [illegible]
      W11=[illegible]500*Y(11)
```

```
FORTRAN IV G LEVEL  [illegible]        MAIN        DATE = 76162        17/27/17        PAGE 0003

0128          TIN2=[illegible]*Y(1,1)
0129          TIN3=[illegible]*Y(1,1)
0130          TIN4=[illegible]*Y(1,1)
0131          TIN5=[illegible]*Y(1,1)
0132          TIN6=[illegible]*Y(1,1)
0133          TIN7=[illegible]*Y(1,1)
0134          TIN8=[illegible]*Y(1,1)
0135          TIN9=[illegible]*Y(1,1)
0136          TIN10=[illegible]*Y(1,1)
0137    3024  READ(5,3021)JHMS
0138    3021  FORMAT([illegible])
0139          WRITE(6,3021)JHMS
0140          IF(JHMS.[illegible]JHMS(I))GO TO 3023
0141          GO TO 3024
0142    3023  CONTINUE
0143          WRITE(6,510)H1C
0144          WRITE(6,511)H2C
0145          WRITE(6,512)H3C
0146          WRITE(6,513)H4C
0147          WRITE(6,514)H5C
0148          WRITE(6,515)H6C
0149          WRITE(6,516)H7C
0150          WRITE(6,517)H8C
0151          WRITE(6,518)H9C
0152          WRITE(6,519)H10C
0153          WRITE(6,520)S1
0154          WRITE(6,521)S2
0155          WRITE(6,522)S3
0156          WRITE(6,523)S4
0157          WRITE(6,524)S5
0158          WRITE(6,525)S6
0159          WRITE(6,526)S7
0160          WRITE(6,527)S8
0161          WRITE(6,528)S9
0162          WRITE(6,529)S10
0163          WRITE(6,530)S11
0164          WRITE(6,535)TIN1
0165          WRITE(6,536)TIN2
0166          WRITE(6,537)TIN3
0167          WRITE(6,538)TIN4
0168          WRITE(6,539)TIN5
0169          WRITE(6,540)TIN6
0170          WRITE(6,541)TIN7
0171          WRITE(6,542)TIN8
0172          WRITE(6,543)TIN9
0173          WRITE(6,544)TIN10
0174          WRITE(6,2021)
0175          WRITE(6,2022)
0176          WRITE(6,2023)
0177          WRITE(6,2024)
0178          WRITE(6,2025)
0179          WRITE(6,2026)
0180          WRITE(6,2027)
0181          WRITE(6,2028)
0182          WRITE(6,2029)
0183          WRITE(6,2030)
0184          WRITE(6,2031)
0185          WRITE(6,2032)
0186          WRITE(6,2033)
0187          WRITE(6,2034)
0188          WRITE(6,2035)
0189          WRITE(6,2036)
0190          WRITE(6,2037)
0191          WRITE(6,2038)
0192          WRITE(6,2039)
0193          WRITE(6,2040)
0194          WRITE(6,2041)
0195          WRITE(6,2042)
0196          WRITE(6,2043)
0197          WRITE(6,2044)
0198          WRITE(6,2045)
0199          WRITE(6,2046)
0200          WRITE(6,2047)
```

FORTRAN IV G LEVEL 21 MAIN DATE = [illegible] [illegible] PAGE 0004

181

```
0347 ... 0394   FORMAT(...)   [illegible]
                WRITE(6,2127)
           2127 FORMAT(...NDATA...,7X)
                CALL EXIT
0398            END
```

182

PROGRAMA ACOST 2

184

FORTRAN IV G LEVEL 21 MAIN DATE = 75175 21/10/41 PAGE 0001

```
      DOUBLE PRECISION NOPS,[illegible]
      DOUBLE PRECISION A(11,30),[illegible],X(13,30)
      DOUBLE PRECISION SOLU,OPTI,SOLUT,[illegible]
      DOUBLE PRECISION MAIN,[illegible],U2(13)
      DOUBLE PRECISION CTAND,ALPHA,IUPH,[illegible],ZE1(20),Z0,CIA,DIB
      [illegible]
      DOUBLE PRECISION SFS(20),[illegible]
      DOUBLE PRECISION ASN(11,30),[illegible](11,30),USN(11,30),U(30),US(30),[illegible],VO
      DOUBLE PRECISION ALNH
      DOUBLE PRECISION [illegible](11,30),ASP(11,30)
      DIMENSION Y(11),[illegible]
      INTEGER Y,[illegible],YASTPU
      DATA [illegible]
      [illegible]ASP,[illegible]ASPo,oASNo/
      DATA NCS,NOSA,NUN/[illegible]
      DATA [illegible]
      [illegible]
      DATA SCLO,OPTI,[illegible]/SOLUTION,OPTIMAL,[illegible]/
      DATA [illegible]
 2117 FORMAT([illegible],20A4,1X)
 2127 FORMAT(5X,3A1,125X)
 2127 FORMAT([illegible])
 2127 FORMAT(/X,A1,125X)
 2125 FORMAT(2X,D13.5,A1,55X)
 2125 FORMAT(83X,F13.5,A1,31X)
 2131 FORMAT(6X,2A1,125X)
 2132 FORMAT(88X,F13.5,A1,31X)
 4CC2 FORMAT(133X)
 4CC3 FORMAT(2X,A4,25A5)
 4C13 FORMAT([illegible])
 4014 FORMAT(1X,I2,oUN o,11F10.3,17X)
 4015 FORMAT(1X,I2,oU o,11F10.3,17X)
 4016 FORMAT(1X,I2,oASPo,11F10.3,17X)
 4017 FORMAT(1X,I2,oASNo,11F10.3,17X)
 4018 FORMAT(1X,I2,oUSNo,11F10.3,17X)
 4019 FORMAT(1X,I2,oUS o,11F10.3,17X)
 4020 FORMAT(3X,[illegible],I11,2I2,100X)
 [illegible]
 4025 FORMAT(3X,[illegible],I11,2I2,100X)
 4026 FORMAT(1X,o4C24o)
 4027 FORMAT(1X,o4027o)
 [illegible]
 [illegible]
 [illegible]
 [illegible]
 [illegible]
 4033 FORMAT(1X,o4033o)
 4034 FORMAT(1X,o4034o)
 4035 FORMAT(1X,o4035o)
 4036 FORMAT(1X,o4036o)
 4037 FORMAT(1X,o4037o)
 4038 FORMAT(1X,o4038o)
 4039 FORMAT(1X,o4039o)
 4040 FORMAT(1X,o4040o)
 4041 FORMAT(1X,o4041o)
 4043 FORMAT(1X,o4043o)
 4044 FORMAT(1X,o4044o)
 4045 FORMAT(1X,o4045o)
 4046 FORMAT(1X,o4046o)
 4047 FORMAT(1X,D13.5,2X,2I2)
 4049 FORMAT(3A,A3,127X)
      [illegible]
      [illegible]
      [illegible]
      REWIND 12
 6001 READ(12,4049,END=6002)NCX
      IF(NOX.NE.NON) GO TO 6001
      BACKSPACE 12
      READ(12,4025,END=6002)NCX,ACAL,Y,K,KS
 6002 [illegible]
      CALL ACO(KS,NASP,ASP)
      CALL ACO(KS,NASN,ASN)
      IF(K.EQ.0) GO TO 6CC3
```

```
0074            CALL ACDIN,[illegible],AR)
0075            CALL ACDIN,[illegible],AR)
0076            CALL ACP(A,NC,U)
0077            CALL ACP(N,NCN,U)
0078            CALL ACP(AS,NCS,US)
0079            CALL ACP[illegible]
0080      0003  DO 0004 I=1,150
0081            DO 0004 J=1,5
0082            CS(I,J)=0.
0083            CSA(I,J)=0.
0084      0004  CONTINUE
0085            REWIND 11
0086      2110  READ(11,2111) NO,SOLUT,OPTIM,DES
0087            [illegible]
0088            IF(SOLUT.[illegible].SOLU)GO TO 2112
0089            IF(OPTIM.[illegible].OPTI)GO TO 2115
0090            WRITE(6,2112) OPTIM
0091      2112  FORMAT(1X,'LA SOLUCION ES',A7)
0092            GO TO 545
0093      2115  CONTINUE
0094      2001  [illegible]Y(2)[illegible]Y(3)[illegible]Y(4)[illegible]Y(5)[illegible]Y(6)[illegible]
                [illegible]Y(10)[illegible]Y(11)
0095      2124  [illegible]
0096            IF([illegible])GO TO 2124
0097            [illegible]
0098            [illegible]
0099            [illegible]
0100            [illegible]
0101      2121  [illegible]
0102            [illegible]
0103            [illegible] TO 2121
0104            [illegible] TO 2121
0105            [illegible]
0106            [illegible]
0107            [illegible]
0108            DO 2120 [illegible]
0109            [illegible]
0110            [illegible]
0111            IF([illegible])GO TO 4011
0112            WRITE(11,6020)
0113            GO TO 4012
0114      4011  BACKSPACE 11
0115            WRITE(6,6032)
0116      4012  READ(11,2122) TIT(2)
0117            [illegible]TIT(2)
0118      2122  CONTINUE
0119            IF([illegible])GO TO 2128
0120            WRITE(6,6033)
0121            [illegible](CTANG[illegible])
0122            [illegible](CTANG[illegible])
0123            WRITE([illegible]) DIA,DIN,AUAC,EPS,CTANU
0124      6052  FORMAT([illegible])
0125            IF([illegible])GO TO 2126
0126            [illegible] TO 2127
0127            WRITE(6,2127)
0128      2127  FORMAT([illegible]SOLUCION ES LA OPTIMA')
0129            GO TO 545
0130      2126  CALL CAVI([illegible],U2)
0131            DO [illegible]
0132            IF([illegible])GO TO [illegible]
0133      [illegible]  CONTINUE
0134            [illegible]
0135      7C03  [illegible]
0136            WRITE(6,6034)
0137            [illegible]TANG[illegible]
0138      2037  IF(CTANG[illegible])2002,2016,2016
0139      2002  IF([illegible])GO TO 2011
0140            WRITE(6,6036)
0141            [illegible]
0142            [illegible]
0143            DO 2150 INP=1,150
0144            U(INP,K)=U1(INP)+MMIN*U2(INP)
0145            V(INP,K)=[illegible]U2(INP)
```

185

```
 2050 CONTINUE
      CALL CALC2(U,K,U0,A)
      CALL CALC4(V,KS,V0,B)
      DO 7001 IT=1,11
      [illegible] A(IT,K)
 2002 [illegible]
      [illegible](IT,K)
      IF(ECU.GT.0)GO TO 2003
      [illegible](IT,K)
      [illegible](IT,K)=0
      GO TO 2004
 2003 [illegible](IT,K)=A(IT,K)
      [illegible](IT,K)=0
 2004 [illegible]
      IF([illegible].GT.0)GO TO 2005
      WRITE(6,[illegible])
      ASP(IT,KS)=0
      ASN(IT,KS)=-B(IT,KS)
      GO TO 7001
 2005 ASP(IT,KS)=B(IT,KS)
      WRITE(6,[illegible])
      ASN(IT,KS)=0
 7001 CONTINUE
      DO 2021 IT=1,130
      WRITE(6,6333)
      DEFOU(IT,K)
 2006 IF([illegible].GT.0) GO TO 2007
      UN(IT,K)=-U(IT,K)
      U(IT,K)=0
      GO TO 2008
 2007 UN(IT,K)=0
      WRITE(6,4040)
 2008 DEFV(IT,KS)
      IF([illegible].GT.0.)GO TO 2009
      US(IT,KS)=0
      USN(IT,KS)=-V(IT,KS)
      GO TO 2021
 2009 [illegible](IT,KS)=V(IT,KS)
      WRITE(6,4041)
      USN(IT,KS)=0
 2021 CONTINUE
      GO TO 1
 2016 IF(L.EQ.1) GO TO 2019
      WRITE(6,4037)
      KS=KS+1
      DO 2055 IMP=1,136
      V(IMP,KS)=U2(IMP)
 2055 CONTINUE
      CALL CALCA(V,KS,V0,B)
      DO 2018 IU=1,11
      DEFV(IU,KS)
      IF([illegible].GT.0)GO TO 2017
      ASP(IU,KS)=0
      ASN(IU,KS)=-B(IU,KS)
      GO TO 2018
 2017 ASP(IU,KS)=B(IU,KS)
      WRITE(6,4042)
      ASN(IU,KS)=0
 2018 CONTINUE
      DO 2013 IM=1,136
      DEFV(IM,KS)
      IF([illegible].GT.0.)GO TO 2012
      US(IM,KS)=0
      USN(IM,KS)=-V(IM,KS)
      GO TO 2013
 2012 US(IM,KS)=V(IM,KS)
      USN(IM,KS)=0
 2013 CONTINUE
      GO TO 1
 2011 [illegible]
      GO TO 2137
 2011 WRITE(6,4044)
      K=K+1
```

```
      [illegible]
 2013 [illegible]
      IF([illegible]) GO TO 2014
      UN(I,K)= U(I,K)
      U(I,K)=0
      GO TO 2015
 2014 US(I,K)=0
      [illegible](16,4044)
 2015 CONTINUE
      [illegible]
 2025 WRITE(6,2020)
 2020 FORMAT(1X,'EL PROGRAMA TIENE EL PESOS UN ERROR')
      GO TO 595
      [illegible]
      DO 1440 I=1,11
      Y=[illegible]
      Y1(I)=0
 1440 CONTINUE
      [illegible]
      [illegible] 132,11
      Y=SIMU(I)=1
      [illegible]
      YASTN=[illegible]
  595 DO 600 JT=1,AN
      U(JT)=G(Y-STPL,AP,L,JT)-G(Y,AN,UN,JT)
      IF([illegible](JT)) GO TO 30
  600 CONTINUE
      DO 610 J=1,AL
      [illegible](J)=H(Y-STPU,ASP,J)-H(Y,ASN,J)
      [illegible] GO TO 30
  610 CONTINUE
      IF(NS.EQ.5) GO TO 630
      DO 620 J=1,AS
      U[illegible](J)=G(YASTPU,ASP,LS,J)-G(Y,ASN,USN,J)
      IF([illegible](J).LT.0) GO TO 50
  620 CONTINUE
  630 DO 640 J=1,AL
      [illegible]
      IF(US(J).LT.0) GO TO 51
  640 CONTINUE
      [illegible](NS.[illegible]5) GO TO 660
      DO 650 J=1,AS
      [illegible](J)=G(Y,ASP,LS,J)-G(Y,ASN,USN,J)
      IF(US(J).LT.0) GO TO 51
  650 CONTINUE
  660 DO 670 J=1,AN
      [illegible](J)=G(YASTPU,AP,U,J)-G(YASTPL,AN,UN,J)
      IF([illegible].GE.U(J))GO TO 40
  670 CONTINUE
      DO 680 J=1,AL
      [illegible](J)=H(YASTPL,ASP,J)-H(YASTPL,ASN,J)
      IF(US(J).LT.0) GO TO 40
  680 CONTINUE
      IF([illegible].5) GO TO 700
      DO 690 J=1,AS
      US(J)=G(YASTPU,ASP,LS,J)-G(YASTMU,ASN,USN,J)
      IF(US(J).LT.0) GO TO 40
```

```
  725 [illegible]
  7[illegible]     [illegible]
      Y[illegible]
   5C CONTINUE
      [illegible] 710 J=1,N
      [illegible] (YASI[illegible])
  710 CONTINUE
      [illegible]
      IF([illegible].1) GO TO 730
      DO 720 J=2,N
      [illegible] D(J)
  720 CONTINUE
  730 [illegible]
  7[illegible] [illegible]
      [illegible] YASI[illegible],AN,CN,J)
  740 CONTINUE
      [illegible]
      IF([illegible].1) GO TO 760
      DO 750 J=2,N
      IF([illegible]D(J)) [illegible]D(J)
  75[illegible] CONTINUE
  [illegible] IF([illegible]) GO TO 5C
      IF([illegible].1) GO TO [illegible]
   51 DO 60 J=1,11
      N=1[illegible]J
      IF(Y(N).[illegible]) GO TO 70
   60 CONTINUE
   70 Y(N)=1
      IF(N.[illegible].11) GO TO 81
      [illegible]
      DO [illegible] J=JK,11
      Y(J)=0
   8C CONTINUE
      WRITE(6,940)Y
  940 FORMAT(//10X,[illegible],11I2)
   81 IF(Y(1).[illegible]) GO TO 5C
      WRITE(6,103)[illegible]
  [illegible] [illegible] RESULT [illegible]
      DO 103 I=1,10
      WRITE(6,101) I,Y[illegible]
  101 FORMAT(//10X,[illegible],2X,11)
  103 CONTINUE
  1C[illegible] [illegible] 11)
   5C [illegible] J=1,1[illegible]
      N=1[illegible]J
      [illegible]
   51 CONTIN[illegible]
   52 Y[illegible]
      IF(JN[illegible].11) GO TO 81
      JK=JN+1
      DO 53 J=JK,11
      Y(J)=0
   53 CONTINUE
      WRITE(6,920)Y
  920 FORMAT(//10X,[illegible],11I2)
      GO TO 81
   9C DO 770 J=1,N
      D(J)=G(Y,AP,[illegible]) G(Y,AN,CN,J)
      IF([illegible].D(J)) GO TO 5[illegible]
  770 CONTINUE
      DO 780 I=1,11
      Y[illegible]=Y[illegible]
  78C CONTINUE
      [illegible]
      DO 790 J=1,N
      D(J)=G(Y,AP,[illegible])-G(Y,AN,CN,J)
      IF([illegible].D(J)) [illegible]D(J)
  79C CONTINUE
      [illegible] 735
      [illegible]
      [illegible]
      IF(Y(1K).[illegible]) [illegible]
   91 CONTINUE
```

FORTRAN IV G LEVEL 21 [illegible] DATE = 76175 21/10/41 PAGE 0006

```
0363        52 MAIN
0364           [illegible]
0365           [illegible]
0366        53 CONTINUE
0367           IF[illegible]GO TO 595
0372           [illegible]
0373           YASTR[illegible]
0373        54 CONTINUE
0374           WRITE(6,953)YASTRO
0375       930 FORMAT(//[illegible])
0376           GO TO 57
0377       110 [illegible]
0378           [illegible]
0379       590 CONTINUE
0380           [illegible]
0381           [illegible]
0382           WRITE(12,9023)[illegible]
0383           CALL ACOS[illegible]
0384           CALL AC[illegible](AS,AASA,ASN)
0385           CALL ACOS(A,XAP,AP)
0386           CALL [illegible]
0387           CALL ACO[illegible]
0388           CALL ACO[illegible](A,SOA,OA)
0389           CALL [illegible]
0390           CALL ACOF(AS,ACSA,CSN)
0391         6 [illegible]
0392           [illegible]104218*Y(7)+
           [illegible]
0393           [illegible]115207*Y(2))
           [illegible]*Y(1))
0394           [illegible]*Y(6)+
           [illegible].E0*Y(1))
0395           [illegible]*Y(6)+
           [illegible].E0*Y(1))
0396           [illegible]13690*Y(7)+
           [illegible]*Y(1))
0397           [illegible]
           [illegible].E03*Y(1))
0398           [illegible]875906.E03*Y(5)
           [illegible]702506.E0*Y(9)+
           [illegible]*Y(1))
0399           [illegible]540021.E03*Y(3)
           [illegible].E0*Y(9)+
           [illegible]
0400           [illegible]
0401           [illegible]
0402           [illegible]GO TO 410
0403           [illegible](A1**3.5)
0404           [illegible]
0405           [illegible]
0406           [illegible]
0407           [illegible]
0408           [illegible]
0409       421 [illegible]GO TO 430
0410           [illegible](A3**3.5)
0411           [illegible]
0412           [illegible]
0413           [illegible]
0414           [illegible]GO TO 440
0415           [illegible]
0416           [illegible]
0417       440 [illegible]
0418       441 [illegible]GO TO 450
0419           [illegible](A5**3.5)
0420           [illegible]
0421       450 [illegible]
0422       451 [illegible]GO TO 460
0423           [illegible](A6**3.5)
0424           [illegible]
0425       460 [illegible]
0426       461 [illegible]GO TO 470
0427           [illegible](A7**3.5)
```

189

```
0426          GO TO 471
0429      470 F(6)=0
0430      471 IF(F(6).LE.0.0)GO TO 460
0431          F(6)=1.0-F(6)**(-0.5)
0432          GO TO 481
0433      460 F(6)=0
0434      481 IF(F(7).LE.0.0)GO TO 490
0435          F(7)=1.0-F(7)**0.5
0436          GO TO 491
0437      490 F(7)=0
0438      491 IF(F(8).LE.0.0)GO TO 500
0439          F(8)=1.0-F(8)**(-0.5)
0440          GO TO 501
0441      500 F(8)=0
0442      501 V1=-[illegible]*Y(2)+223500*Y(3)-[illegible]500*Y(4)-[illegible]500*Y(5)+123000*Y(6)+356500*
             1Y(7)-[illegible]*Y(8)-85[illegible]*Y(9)-5[illegible]0*Y(10)+65000*Y(11)
0443          V2=-[illegible]*Y(2)-[illegible]*Y(3)+21[illegible]*Y(4)-[illegible]*Y(5)-3250*Y(6)-178336
             1*Y(7)+351[illegible]*Y(8)-[illegible]*Y(9)-11[illegible]*Y(11)
0444          V3=-14[illegible]*Y(2)-71[illegible]*Y(3)-71[illegible]*Y(4)+217137*Y(5)-[illegible]*Y(6)-130324
             1*Y(7)-1[illegible]*Y(8)+[illegible]*Y(9)-[illegible]*Y(11)
0445          V4=-[illegible]*Y(2)-72[illegible]*Y(3)-72[illegible]*Y(4)-72[illegible]*Y(5)-3404*Y(6)-142555
             1*Y(7)-142555*Y(8)-142555*Y(9)-[illegible]750*Y(11)
0446          V5=-10390*Y(2)-7[illegible]*Y(3)-7[illegible]*Y(4)-7[illegible]*Y(5)-3[illegible]*Y(6)-185277
             1*Y(7)-185277*Y(8)-185277*Y(9)-35975*Y(11)
0447          V6=-18[illegible]*Y(2)-[illegible]*Y(3)-[illegible]*Y(4)-[illegible]*Y(5)-[illegible]730*Y(6)-1872[illegible]
             1*Y(7)-18[illegible]*Y(8)-1[illegible]*Y(9)-3[illegible]725*Y(11)
0448          V7=-13[illegible]*Y(2)-[illegible]*Y(3)-[illegible]*Y(4)-[illegible]*Y(5)-[illegible]*Y(6)-184205
             1*Y(7)-[illegible]*Y(8)-[illegible]*Y(9)-[illegible]475*Y(11)
0449          V8=-1[illegible]*Y(2)-45208*Y(3)-45208*Y(4)-45208*Y(5)-4529*Y(6)-128034
             1*Y(7)-[illegible]*Y(8)-[illegible]*Y(9)-[illegible]*Y(11)
0450          V9=-[illegible]*Y(2)-77[illegible]*Y(3)-77[illegible]*Y(4)-77[illegible]*Y(5)-[illegible]*Y(6)-1[illegible]*Y(7)-
             115[illegible]72*Y(8)-1[illegible]*Y(9)-3055C*Y(11)
0451          V10=-5062*Y(6)-2[illegible]*Y(11)
0452          V11=-5155*Y(6)-26200*Y(11)
0453          S1=V1
0454          S2=V2
0455          S3=V3
0456          S4=V4
0457          S5=V5
0458          S6=V6
0459          S7=V7
0460          S8=V8
0461          S9=V9
0462          S10=V10
0463          S11=V11
0464          [illegible]*Y(11)
0465          [illegible]*Y(11)
0466          [illegible]*Y(11)
0467          [illegible]*Y(11)
0468          [illegible]*Y(11)
0469          [illegible]*Y(11)
0470          [illegible]*Y(11)
0471          [illegible]*Y(11)
0472          [illegible]*Y(11)
0473          [illegible]*Y(11)
0474     3022 READ(1,3021)JAMS
0475     3021 FORMAT(2A6)
0476          WRITE(6,3021)JAMS
0477          IF(JAMS.EQ.JAMS(1))GO TO 3023
0478          GO TO 3022
0479     3023 CONTINUE
0480          WRITE(6,510)H1C
0481          WRITE(6,511)H2C
0482          WRITE(6,512)H3C
0483          WRITE(6,513)H4C
0484          WRITE(6,514)H5C
0485          WRITE(6,515)H6C
0486          WRITE(6,516)H7C
0487          WRITE(6,517)H8C
0488          WRITE(6,518)H9C
0489          WRITE(6,519)H10C
0490          WRITE(6,520)S1
0491          WRITE(6,521)S2
```

190

```
0492 WRITE(8,522)S3
0493 WRITE(8,523)S4
0494 WRITE(8,524)S5
0495 WRITE(8,525)S6
0496 WRITE(8,526)S7
0497 WRITE(8,527)S8
0498 WRITE(8,528)S9
0499 WRITE(8,529)S10
0500 WRITE(8,530)S11
0501 WRITE(8,535)TIA1
0502 WRITE(8,536)TIA2
0503 WRITE(8,537)TIA3
0504 WRITE(8,538)TIA4
0505 WRITE(8,539)TIA5
0506 WRITE(8,540)TIA6
0507 WRITE(8,541)TIA7
0508 WRITE(8,542)TIA8
0509 WRITE(8,543)TIA9
0510 WRITE(8,544)TINEG
0511 WRITE(8,2021)
0512 WRITE(8,2022)
0513 WRITE(8,2023)
0514 WRITE(8,2024)
0515 WRITE(8,2025)
0516 WRITE(8,2026)
0517 WRITE(8,2027)
0518 WRITE(8,2028)
0519 WRITE(8,2029)
0520 WRITE(8,2030)
0521 WRITE(8,2031)
0522 WRITE(8,2032)
0523 WRITE(8,2033)
0524 WRITE(8,2034)
0525 WRITE(8,2035)
0526 WRITE(8,2036)
0527 WRITE(8,2037)
0528 WRITE(8,2038)
0529 WRITE(8,2039)
0530 WRITE(8,2040)
0531 WRITE(8,2041)
0532 WRITE(8,2042)
0533 WRITE(8,2043)
0534 WRITE(8,2044)
0535 WRITE(8,2045)
0536 WRITE(8,2046)
0537 WRITE(8,2047)
0538 WRITE(8,2048)
0539 WRITE(8,2049)
0540 WRITE(8,2050)
0541 WRITE(8,2051)
0542 WRITE(8,2052)
0543 WRITE(8,2053)
0544 WRITE(8,2054)
0545 WRITE(8,2055)
0546 WRITE(8,2056)
0547 WRITE(8,2057)
0548 WRITE(8,2058)
0549 WRITE(8,2059)
0550 WRITE(8,2060)
0551 WRITE(8,2061)
0552 WRITE(8,2062)
0553 WRITE(8,2063)
0554 WRITE(8,2064)
0555 WRITE(8,2065)
0556 WRITE(8,2066)
0557 WRITE(8,2067)
0558 WRITE(8,2068)
0559 WRITE(8,2069)
0560 WRITE(8,2070)
0561 WRITE(8,2071)
0562 WRITE(8,2072)
0563 WRITE(8,2073)
0564 WRITE(8,2074)
```

192

```
0565      WRITE(6,2075)
0566      WRITE(6,2076)
0567      WRITE(6,2077)
0568      WRITE(6,2078)
0569      WRITE(6,2079)
0570      WRITE(6,2080)
0571      WRITE(6,2081)
0572      WRITE(6,2082)
0573      WRITE(6,2083)
0574      WRITE(6,2084)
0575      WRITE(6,2085)
0576      WRITE(6,2086)
0577      WRITE(6,2087)
0578      WRITE(6,2088)
0579      WRITE(6,2089)
0580      WRITE(6,2090)
0581      WRITE(6,2091)
0582      WRITE(6,2092)
0583      WRITE(6,2093)
0584      WRITE(6,2094)
0585      WRITE(6,2095)
0586      WRITE(6,2096)
0587      WRITE(6,2097)
0588      WRITE(6,2098)
0589      WRITE(6,2099)
0590      WRITE(6,2100)
0591      WRITE(6,2101)
0592      WRITE(6,2102)
0593      WRITE(6,2103)
0594      WRITE(6,2104)
0595      WRITE(6,2105)
0596      WRITE(6,2106)
0597      WRITE(6,2107)
0598      WRITE(6,2108)
0599      WRITE(6,2109)
0600      WRITE(6,2110)
0601      WRITE(6,2111)
0602      WRITE(6,2112)
0603      WRITE(6,2113)
0604      WRITE(6,2114)
0605      WRITE(6,2115)
0606 2021 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0607 2022 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0608 2023 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0609 2024 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0610 2025 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0611 2026 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0612 2027 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0613 2028 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0614 2029 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],62X)
0615 2030 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0616 2031 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0617 2032 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0618 2033 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0619 2034 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0620 2035 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0621 2036 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0622 2037 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0623 2038 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0624 2039 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0625 2040 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0626 2041 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0627 2042 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0628 2043 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0629 2044 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0630 2045 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0631 2046 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0632 2047 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0633 2048 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0634 2049 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,[illegible],61X)
0635 2050 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,'PACC10',8X,'530',47X)
0636 2051 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,'PACC10',8X,'530',47X)
0637 2052 FORMAT(4X,'TER[illegible]NOE',3X,'PACC10',8X,'530',47X)
```

193

[illegible]

FORTRAN IV G LEVEL 21 MAIN DATE = 7[illegible] 21/187[illegible] PAGE [illegible]

```
[illegible]
0713      [illegible]
[illegible]
0717      [illegible] FORMAT([illegible]
[illegible]
0728      [illegible] FORMAT([illegible]
[illegible]
0730      [illegible]
[illegible]
0733   [illegible]27 FORMAT([illegible]A[illegible])
0734      [illegible] CALL [illegible]
0735          END
```

```
0001          DOUBLE PRECISION FUNCTION [illegible]
0002          DOUBLE PRECISION A(11,30),U(30,33)
0003          INTEGER Y
0004          DIMENSION Y(11)
0005          T1 [illegible] *Y(2)+ [illegible] *Y(3)+ [illegible] *Y(4)+ [illegible] *Y(5)+ [illegible] *Y(6)+ [illegible] *Y(7)+
             [illegible]
0006          IF(T1.LE.0)GO TO 310
0007          T10=1.649*U(1,J)*(T1**0.5)
0008          GO TO 111
0009      310 T10=0
0010      111 T2= [illegible] *Y(2)+ [illegible] *Y(3)+ [illegible] *Y(4)+ [illegible] *Y(5)+ [illegible] *Y(6)+115207*Y(7)
             1+115207*Y(8)+ [illegible] *Y(9)+21 [illegible] .E0*Y(11)
0011          IF(T2.LE.0)GO TO 120
0012          T20= [illegible] **0.5)
0013          GO TO 121
0014      120 T20=0
0015      121 T3= [illegible] *Y(2)+27611*Y(3)+27611*Y(4)+27611*Y(5)+ [illegible] *Y(6)+
             1 [illegible] *Y(7)+ [illegible] *Y(8)+ [illegible] *Y(9)+ [illegible] .E3*Y(11)
0016          IF(T3.LE.0)GO TO 130
0017          T30=1.649*U(3,J)*(T3**0.5)
0018          GO TO 131
0019      130 T30=0
0020      131 T4= [illegible] *Y(2)+ [illegible] 22*Y(3)+ [illegible] 22*Y(4)+ [illegible] 22*Y(5)+ [illegible] *Y(6)+
             1127709*Y(7)+127709*Y(8)+127709*Y(9)+ [illegible] .E03*Y(11)
0021          IF(T4.LE.0)GO TO 140
0022          T40=1.649*U(4,J)*(T4**0.5)
0023          GO TO 141
0024      140 T40=0
0025      141 T5= [illegible] *Y(2)+ [illegible] *Y(3)+ [illegible] *Y(4)+ [illegible] *Y(6)+ [illegible] *Y(7)+
             1 [illegible] .E03*Y(11)
0026          IF(T5.LE.0)GO TO 150
0027          T50=1.649*U(5,J)*(T5**0.5)
0028          GO TO 151
0029      150 T50=0
0030      151 T6= [illegible] *Y(2)+ [illegible] 73*Y(3)+ [illegible] 73*Y(4)+ [illegible] 73*Y(5)+ [illegible] *Y(6)+
             1 [illegible] *Y(7)+ [illegible] 42*Y(8)+ [illegible] 42*Y(9)+ [illegible] .E03*Y(11)
0031          IF(T6.LE.0)GO TO 160
0032          [illegible]
0033          GO TO 161
0034      160 T60=0
0035      161 T7= [illegible] *Y(3)+ [illegible] .E03*Y(4)+ [illegible] .E03*Y(5)
             1 [illegible] *Y(8)+ [illegible] .E04*Y(9)+
             [illegible] *Y(11)
0036          IF(T7.LE.0)GO TO 170
0037          [illegible]
0038          GO TO 171
0039      170 [illegible]
0040      171 [illegible] 021.E03*Y(4)+ [illegible] 021.E03*Y(5)
             1 [illegible] .E04*Y(8)+ [illegible] .E04*Y(9)+
             [illegible] *Y(11)
0041          IF( [illegible] )GO TO [illegible]
0042          T80= [illegible] **0.5)
0043          GO TO 181
0044      180 T80=0
0045      181 T9= [illegible] .E0*Y(11)
0046          IF(T9.LE.0)GO TO 190
0047          T90=1.649*U(9,J)*(T9**0.5)
0048          GO TO 191
0049      190 T90=0
0050      191 T10= [illegible] .E07*Y(11)
0051          IF(T10.LE.0)GO TO 200
0052          T100=1.649*U(10,J)*(T10**0.5)
0053          GO TO 201
0054      200 T100=0
0055      201 G=A(1,J)*Y(2)+A(2,J)*Y(3)+A(3,J)*Y(4)+A(4,J)*Y(5)+A(5,J)*Y(6)+A(6
             1,J)*Y(7)+A(7,J)*Y(8)+ [illegible] *Y(9)+A(9,J)*Y(10)+A(10,J)*Y(11)+T10+T20
             2+T30+T40+T50+T60+T70+T80+T90+T100+A(11,J)
0056          RETURN
0057          END
```

TaC80

```
FORTRAN IV G LEVEL 21                 H                    DATE = 76175          21/10/41            PAGE 0001

  0001                DOUBLE PRECISION FUNCTION H(Y,A,J)
  0002                DOUBLE PRECISION A(11,30)
  0003                INTEGER Y
  0004                DIMENSION Y(11)
  0005                H=A(1,J)+Y(2)*A(2,J)+Y(3)*A(3,J)+Y(4)*A(4,J)+Y(5)*A(5,J)+Y(6)*A(6,
                     [illegible]
  0006                RETURN
  0007                END
```

196

FORTRAN IV G LEVEL 21 [illegible] DATE = [illegible] 21/107/1 PAGE 0001

```
0001      [illegible]
0002      [illegible]
0003    2 FORMAT([illegible])
0004      [illegible]
0005      [illegible]
0006    1 CONTINUE
0007    3 RETURN
0008      END
```

```
0001          SUBROUTINE ALOFIA(NASP,ASP)
0002          DOUBLE PRECISION ASP(156,30)
0003        2 FORMAT(1X,I2,A3,I2/A)
0004        6 FORMAT(6X,8D10.3,4A)
0005        3 DO 1 I=1,K
0006          WRITE(6,2) IE,NASE
0007          WRITE(6,6)(ASP(I,J),J=1,150)
0008        1 CONTINUE
0009        5 RETURN
0010          END
```

FORTRAN IV G LEVEL 21 ACC DATE = 76175 21/10/41 PAGE 0001

```
0001          SUBROUTINE ACC(K,NASP,ASP)
0002          DOUBLE PRECISION ASP(11,30)
0003        2 FORMAT(1A,I2,A3,11D10.3,I7))
0004          REWIND 12
0005        3 DO 1 IP=1,8
0006        4 READ(12,2,END=5)IA,NOX,(ASP(I,IP),I=1,11)
0007          IF(NOX.NE.NASP) GO TO 4
0008          IF(IA.NE.IP) GO TO 4
0009          WRITE(6,2)IA,NOX,(ASP(I,IP),I=1,11)
0010        1 CONTINUE
0011        5 RETURN
0012          END
```

```
      SUBROUTINE APRINT(ASP,[illegible])
      [illegible] ASP([illegible])
    2 FORMAT([illegible])
    3 FORMAT(1X,A4,6D1[illegible])
      [illegible]
      [illegible]
    4 READ (12,2) IA,NCA
      IF([illegible]) GO TO 4
      IF(IA.NE.IP) GO TO 4
      READ (12,3)(ASP(I,M),I=1,136)
      WRITE (6,2) IA,NCA
      WRITE (6,3)(ASP(I,M),I=1,136)
    1 CONTINUE
    5 RETURN
      END
```

200

```
0001    SUBROUTINE CALCA(C,A,B0,R)
0002    DOUBLE PRECISION A(11,50),U(136,50),U0
0003    [illegible]
0004    [illegible]
0005    [illegible]
0006    [illegible]
0007    [illegible]
0008    [illegible]
0009    [illegible]
0010    [illegible]
0011    [illegible]
0012    [illegible]
0013    [illegible]
0014    [illegible]
0015    [illegible]
0016    [illegible]
```

201

```
0001          SUBROUTINE CAVI(Y,U1,U2)
0002          DOUBLE PRECISION  TRANC, THAN, NAMEC(8), F(8), CTE, ARRAY(46,8)
0003          DOUBLE PRECISION  SARRAY(46), D1(46), RECP(500), GUARD(8), Y
0004          DOUBLE PRECISION V(8)
0005          DOUBLE PRECISION LOCON(137),W1(137),W2(137),U1(136),U2(136)
0006          INTEGER S(8), SIGNO, [illegible], ZETA, M, [illegible]
0007          INTEGER WRIT, ISCH, ALFA
0008          INTEGER TRECE
0009          INTEGER CERO
0010          DIMENSION A(30)
0011          DATA TRAN,SIGNO,ZETA,EME /'TRANCU','-','Z','M'/
0012          DATA WRIT, CERO/'WRIT','0'/
0013          DATA NUMO, PIPES /'1','3'/
0014          DATA [illegible]
0015          DATA IQUIPO,IBLAN /'[illegible]',' '/
0016       65 FORMAT (5A,A1)
0017          REWIND 11
0018          READ (5,1) CTE
0019        1 FORMAT (F13.0)
0020          READ (5,200) LOCON
0021      200 FORMAT(1[illegible])
0022          [illegible]
0023          DO 5  I = 1,500
0024          RECP(I) = 0.0
0025        5 CONTINUE
0026          DO 205 I = 1,137
0027          W1(I) = 0.0
0028          W2(I) = 0.0
0029      205 CONTINUE
0030        9 READ (11,10,END=[illegible]) TRANC, A
0031       10 FORMAT (1X,A8,30A4)
0032          WRITE (6,10)  TRANC, A
0033          IF ( TRANC .NE. THAN) GO TO 9
0034          READ(11,20)  NRCH
0035       20 FORMAT (13X,A4)
0036          IF(NRCH.NE.NUMO) GO TO 9
0037       25 READ(11,30)
0038       30 FORMAT (1X)
0039       35 READ(11,40) (NAMEC(I),I=1,8)
0040       40 FORMAT (14X,A8,7(6X,A8))
0041          WRITE (6,40) (NAMEC(I),I=1,8)
0042       36 READ(11,31) IPRON
0043       31 FORMAT (124X,A4)
0044          IF (IPRON .NE. IRQUAD) GO TO [illegible]
0045          BACKSPACE 11
0046          READ(11,50) F(1),S(1),F(2),S(2),F(3),S(3),F(4),S(4),F(5),S(5),
             1F(6),S(6),F(7), S(7), F(8), S(8)
0047       50 FORMAT ( 9X,8(F13.5,A1))
0048          WRITE(6,50) F(1),S(1),F(2),S(2),F(3),S(3),F(4),S(4),F(5),S(5),
             1F(6),S(6),F(7), S(7), F(8), S(8)
0049          DO 2 I=1,46
0050          SARRAY(I) = 0.0
0051          DO 2  J=1,8
0052          ARRAY(I,J) = 0.0
0053          GUARD(J) = 0.0
0054        2 CONTINUE
0055          DO  55 I = 1,8
0056          IF (S(I) .EQ. SIGNO)  F(I) = -F(I)
0057       55 CONTINUE
0058          K = 0
0059       95 READ(11,61) P
0060       61 FORMAT(A1,[illegible])
0061          IF (M .EQ. EME) GO TO 100
0062          BACKSPACE 11
0063          READ(11,60)P,Z,NU,NT,NUM,V(1),S(1),V(2),S(2),V(3),S(3),V(4),S(4),
             1V(5),S(5),V(6),S(6),V(7),S(7),V(8),S(8)
0064       60 FORMAT (1X,A1,A1,A1,A1,A4,8(F13.5,A1))
0065          WRITE(6,60)P,Z,NU,NT,NUM,V(1),S(1),V(2),S(2),V(3),S(3),V(4),S(4),
             1V(5),S(5),V(6),S(6),V(7),S(7),V(8),S(8)
0066          K = K + 1
0067          DO 70  I = 1,8
0068          IF (S(I) .NE. SIGNO) V(I) = -V(I)
0069       70 CONTINUE
```

```
      IF (K .NE. CHIAR) GO TO 53
      IF (NT .EQ. IBLANK) GO TO 55
      IF(NO.GT.MJAC) GO TO 74
      IF (NT .NE. PTHES) GO TO 75
      GO TO 59
   75 DO 80 I = 1,6
      ARRV(M,I) = V(I)
   80 CONTINUE
      GO TO 59
  100 DO 110 J = 1,6
      DO 110 I = 1,NC
      SARRV (J) = SARRV(J) + ARRV(I,J)
  110 CONTINUE
      DO   I = 1,6
      D1(I) = SARRV(I)*CTE - F(I)
      DO 210 J = 1,137
      IF (CMND(J) .NE. NAME(I)) GO TO 210
      W1(J) = D1(I)
      W2(J) = SARRV(I)
  210 CONTINUE
      IF (SARRV(I) .LE. 0.0 ) GO TO 120
      KEEP(L) = 1-D1(I)/SARRV(I)
      GUARD(I) = KEEP(L)
      WRITE (6,130) D1(I), SARRV(I), GUARD(I), NAME(I)
  130 FORMAT (1H0,3F20.5,3X,A4)
  120 L = L +1
      READ(1,135) ESCR
  135 FORMAT (1X,A4)
      IF (ESCR .EQ. WAIT) GO TO 140
      BACKSPACE 11
      READ(11,43,END=140) (NAMEC(I),I=1,6)
      WRITE (6,40) (NAMEC(I),I=1,6)
      GO TO 46
  140 Y = 100000.0
      DO 150 I = 1,500
      Y = AMIN1( Y , KEEP(I))
  150 CONTINUE
      DO 1001 IW=1,136
      IP=IW+1
      U1(IP)=W1(IP)
      U2(IP)=W2(IP)
      PRINT(6,4) U1(IW),U2(IW)
    4 FORMAT(1X,2F13.5)
 1001 CONTINUE
      WRITE (6,160) Y
  160 FORMAT (1H1,'VALOR MAXIMO DE -D1/S2 = ',2X,F13.5)
      GO TO 5
 9999 RETURN
      END
```

PROGRAMA DINAMICO

```
PAGE 1          1/07/76

NOTE  PLANEACION FINANCIERA DE LA CORPORACION
L     ACI.K=ACI.J+(DT)(PCL.JK+IES.JK+EAC.JK-CAP.JK-PDI.JK-CAC.JK-         1
X     PDCL.JK)  ACTIVO CIRCULANTE
N     ACI=12500
R     IES.KL=MORM=N(A.K,B,K)  INGRESO DE LAS ESTRATEGIAS                   2
R     PCL.KL=TABHL(PCLT,TIME.K,1975,1976,1) PRESTAMOS A CORTO Y A LARGO PLAZO  3
R     PDCL.KL=TABHL(PDCLT,TIME.K,1976,1980,1)                              4
NOTE       K  PAGO DE LA DEUDA A CORTO Y A LARGO PLAZO MAS INTERESES
T     PDCLT=133787/127781/123375/118968/114562
T     PCLT=552280/0
R     CAP.KL=PULSE(+421500,1975,100)  COMPRAS DE ACTIVO FIJO               5
L     AFI.K=AFI.J+(DT)(CAP.JK-DEP.JK)  ACTIVO FIJO                         6
N     AFI=6000
R     DEP.KL=AFI.K/15  DEPRECIACION                                        7
A     PCF.K=D1.K+D2.K+D3.K+D4.K     PASIVO                                 8
R     EAC.KL=TABHL(EACT,TIME.K,1975,1985,1)  EMISION DE ACCIONES           9
T     EACT=1000/1000/1000/1000/1000/0/0/0/1000/0/1000
L     CSO.K=CSO.J+(DT)(EAC.JK-CAC.JK)  CAPITAL SOCIAL                      10
N     CSO=5000
R     CAC.KL=TABHL(CACT,TIME.K,1977,1985,1)  COMPRA DE ACCIONES            11
T     CACT=0/6000/0/2000/0/0/0/1000/0
A     CCO.K=ACI.K+AFI.K-PCF.K  CAPITAL CONTABLE                            12
A     UTI.K=CCO.K-CSO.K   UTILIDAD                                         13
R     PDI.KL=CLIP(0,ZDI.K,0,ZDI.K)  PAGO DE DIVIDENDOS                     14
A     ZDI.K=P01*UTI.K
C     P01=0.10
L     DPA.K=DPA.J+(DT)(PDI.JK/EXP((TIME.J-1975)*LOGN(1+CCA.J))) DIV.PAGADOS  15
N     DPA=0
A     EFI.K=PCF.K/CCO.K  ESTRUCTURA FINANCIERA                             16
A     CCA.K=(I1*D1.K+I2*D2.K+I3*D3.K+I4*D4.K+CCO.K*K1)/(CCO.K+PCF.K)  COSTO  17
NOTE  DEL CAPITAL
C     I1=0.10
C     I2=0.04
C     I3=0.06
C     I4=0.04
C     K1=0.12
R     TD1.KL=PULSE(500,1975,100)                                           18
L     D1.K=D1.J+(DT)(TD1.JK-TP1.JK)                                        19
R     TP1.KL=PULSE(500,1976,100)                                           20
R     TD2.KL=PULSE(500,1975,100)                                           21
L     D2.K=D2.J+(DT)(TD2.JK-TP2.JK)                                        22
R     TP2.KL=PULSE(500,1976,100)                                           23
R     TD3.KL=PULSE(500,1975,100)                                           24
L     D3.K=D3.J+(DT)(TD3.JK-TP3.JK)                                        25
R     TP3.KL=PULSE(500,1976,100)                                           26
R     TD4.KL=PULSE(550760,1975,100)                                        27
L     D4.K=D4.J+(DT)(TD4.JK-TP4.JK)                                        28
R     TP4.KL=PULSE(110156,1976,1)-PULSE(110156,1981,1)                     29
A     A.K=TABHL(TIE,TIME.K,1976,1984,1)+TABHL(TIE2,TIME.K,1976,1985,1)     30
T     TIE=178336/180324/182555/185277/187241/184205/128034/1967
X     2
T     TIE2=115287/77750/44750/33575/34725/35475/36350/30950/25500
X     /26200
A     B.K=TABHL(TIEB,TIME.K,1976,1985,1)                                   31
T     TIEB=25000/46000/39000/20000/20000/20000/80000/59000/23000/7700
N     D1=0      D1=DEUDA1(5)
N     D2=0      D2=DEUDA2(5)
N     D3=0      D3=DEUDA3(5)
```

PAGE 2 7/07/76

```
N          CARD       D=DELOAN=ST
U          TIME=1975
PLOT  CCA=K
PLOT  DPA=J
PLOT  LTI=H
PLOT  EPI=G
PLOT  CCO=F
PLOT  CSO=E
PLOT  PCF=L
PLOT  TES=C
PLOT  ACI=A
PLOT  AFI=B
PRINT ACI,AFI,TES,PCF,CSO,CCO,EPI,LTI,DPA,CCA
SPEC  DT=1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=1
RUN
```

LENGTH SET TO 1515.

APENDICE II

TEORIA DE LA UTILIDAD

II.- TEORIA DE LA UTILIDAD.

II.1.- Introducción.

Los matemáticos Daniel Bernoulli y Gabriel Cramer fueron los primeros en desarrollar la hipótesis de que el hecho que los individuos no están dispuestos a aceptar loterías aún cuando éstas actuarialmente sean mejor que los juegos justos refleja utilidad marginal decreciente. Ni Bernoulli - ni Cramer sugirieron un método para medir las funciones utilidad, no obs-- tante uno puede sentir que ellos tuvieron la idea sobre la cual la teoría de utilidad moderna se desarrolló.

Alfred Marshall fue consciente de la contribución de Daniel Bernoulli pero él tampoco obtuvo una teoría general de utilidad numérica. Sin embargo, él sugirió que la utilidad de una mercancia específica puede medirse si el precio de la mercancia representa muy poco en el presupuesto del individuo. Esto es porque el individuo racional compra las cantidades de todos los bienes que igualan la relación de las utilidades marginales de dos bienes cualesquiera a la relación de sus precios; por consiguiente, se puede tomar una mercancía la cual tenga poco peso en el presupuesto del individuo y se puede seleccionar el agregado de todos los otros bienes (llamado "dinero") como la otra mercancía, postulando que el pequeño peso de la primer mercancía asegurará que la utilidad marginal del dinero permanece constante independientemente de cuánto de esta mercancía particular se adquiere. Entonces la utilidad marginal de la mercancía pequeña puede me dirse en téminos de una unidad la cual se define como la utilidad marginal del dinero al individuo. El método es inaplicable a bienes en general, porque la utilidad marginal del dinero no es independiente de cuánto se gasta en un artículo que represente una gran porción del presupuesto del consumidor. Entonces, en general, la utilidad marginal del dinero no puede usarse como una unidad constante de medida. Marshall y muchos de sus contemporáneos postularon un concepto de utilidad numérica, pero este fué esencialmente intuitivo, introspectivo pero no operacional.

El concepto de curvas de indiferencia ha sido definido operacionalmente. Fué utilizado para propósitos analíticos específicos y limitados por F.Y. Edgeworth, Vilfredo Pareto e Irving Fisher. La función de indiferencia fué la herramienta central de la teoría de utilidad ordinal elaborada por J. R. Hicks y R.G.D. Allen (1934). Este enfoque implica el axioma de la clasificación completa y transitiva de las utilidades mediante las relaciones $\leq$ y $\geq$.

Frank P. Ramsey de Kings College, Cambridge, sugirió que la utilidad y la probabilidad eran cardinalmente sujetas a medición y que estas medidas podrían estar basadas en la observación de las selecciones de individuos en situaciones bajo riesgo. Ramsey murió a la edad de 26 años y no presentó su enfoque por medio de axiomas. La teoría probabilista de utilidad fué desarrollada por Von Neumann y Morgenstern en

Princeton (1944). Frederick Mosteller y Philip Nogee fueron los pioneros en la medida experimental de utilidad.

II. 2.- Axiomas sobre teoría de utilidad de John Von Neumann y Oskar Morgenstern.

Se considera un sistema U de entidades u, v, w, ... En U se da una relación $u > v$ y para cualquier número α, ($o < \alpha < 1$) una operación $\alpha u + (1 - \alpha) v = w$

Estos conceptos satisfacen los siguientes axiomas:

A. $u > v$ es un ordenamiento completo de U. (escriba $u < v$ cuando $v > u$)

esto significa:

A.a. Para dos u, v cualesquiera una y únicamente una de las tres relaciones siguientes sucede: $u = v$, $u > v$, $u < v$

A.b. $u > v$, $v > w$ implica $u > w$.

B. Ordenando y combinando.

B.a. $u < v$ implica que $u < \alpha u + (1 - \alpha) v$

B.b. $u > v$ implica que $u > \alpha u + (1 - \alpha) v$

B.c. $u < w < v$ implica la existencia de un α con

$$\alpha u + (1 - \alpha) v < w$$

B.d. $u > w > v$ implica la existencia de un α tal que

$$\alpha u + (1 - \alpha) v > w$$

C. Algebra de combinar. ($o \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$)

C.a. $\alpha u + (1 - \alpha) v = (1 - \alpha) v + \alpha u$

C.b. $\alpha (\beta u + (1 - \beta) v) + (1 - \alpha) v = \gamma u + (1 - \gamma) v$ donde $\gamma = \alpha\beta$.

Puede mostrarse que estos axiomas implican la existencia de una correspondencia $u \longrightarrow \ell = V(u)$ (donde u es la utilidad y le corresponde el número ℓ que se calcula como $V(u)$) con las propiedades

i) $u > v$ implica $V(u) > V(v)$

II) $V(\alpha u + (1 - \alpha) v) = \alpha V(u) + (1 - \alpha) V(v)$

Si dos de tales correspondencias existen $u \rightarrow \ell = V(u)$

$u \rightarrow \ell' = V'(u)$

entonces $\ell' = \phi(\ell)$

donde $\phi(\ell)$ debe ser una función lineal

$$\ell' = \phi(\ell) = w_0 \ell + w_1$$

donde w_0, w_1 son números fijos con $w_0 > 0$.

Se enfatiza que se están considerando exclusivamente las utilidades experimentadas por una persona. Que estas consideraciones no implican nada respecto a la comparación de utilidades que pertenecen a individuos diferentes.

II.-3.- Un tratamiento Axiomático de Utilidad por R. Duncan Luce y Howard Raiffa.

Se considerarán boletos de lotería como mecanismos que pro-porcionan los premios $A_1, A_2, \ldots A_r$ como resultados con probabilidades conocidas. Si las probabilidades son $p_1, p_2, \ldots p_r$, donde cada $p_i \geq 0$ y la suma es 1, entonces la lotería correspondiente se representa como $(p_1 A_1 , p_2 A_2 , \ldots, p_r A_r)$.

HIPOTESIS 1. (Ordenamiento de alternativas). El ordenamiento de "preferencia o indiferencia", $\succsim$, sucede entre dos premios cualquiera y es transitivo. Formalmente, para cualquier A_i y A_j sucede ó $A_i \succsim A_j$ ó $A_j \succsim A_i$; y si $A_i \succsim A_j$ y $A_j \succsim A_k$ entonces $A_i \succsim A_k$.

HIPOTESIS 2. (Reducción de loterías compuestas).
Cualquier lotería compuesta es indiferente a una lotería simple con A_1 $A_2, \ldots, A_r$ como premios, calculándose sus probabilidades de acuerdo con el cálculo ordinario de probabilidad. En particular, si

$$L^{(i)} = (P_1^{(i)} A_1 , P_2^{(i)} A_2 , \ldots, P_r^{(i)} A_r), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, S$$

entonces

$$(q_1 L^{(1)}, q_2 L^{(2)}, \ldots, q_s L^{(s)}) \qquad (P_1 A_1, P_2 A_2, \ldots, P_r A_r)$$

donde

$$P_i = q_1 P_i^{(1)} + q_2 P_i^{(2)} + \ldots q_s P_i^{(s)}$$

HIPOTESIS 3. (Continuidad). Si $A_1 \succ A_i \succ A_r$, entonces - cada premio A_i es indiferente a algún boleto de lotería que tiene A_1 y A_r. Es decir, existe un número u_i tal que A_i es indiferente a $[u_i A_1, 0A_2, \ldots, 0A_{r-1}, (1-u_i) A_r)]$ Por conveniencia, se escribe $A_i \sim [u_i A_1, (1-u_i) A_r] = \tilde{A}_i$ pero nótese que A_i y $\tilde{A}_i$ son dos entidades completamente diferentes.

HIPOTESIS 4. (Sustitución) En cualquier lotería L, $\tilde{A}_i$ puede sustituirse por A_i, esto es $(P_1 A_1, \ldots p_i A_i, \ldots, p_r A_r) \sim (p_1 A_1, \ldots, p_i \tilde{A}_i, \ldots, p_r A_r)$

HIPOTESIS 5. (Transitividad). Las relaciones de preferencia e indiferencia entre boletos de lotería son transitivas.

HIPOTESIS 6. (Monotonicidad). Una lotería $[pA_1, (1-p) A_r]$ es preferida o indiferente a $[p' A_1, (1-p^1) A_r]$ si y únicamente si $p \geq p^1$.

A continuación se presentan algunas falacias comunes.

FALACIA 1. $(p_1 A_1, \ldots, p_r A_r)$ es preferida a $(p_1^1 A_1, \ldots, p_r^1 A_r)$ porque la utilidad de la primera $p_1 u_1 + \ldots + p_r u_r$ es mayor que la utilidad de la última $p_1^1 u_1 + \ldots + p_r^1 u_r$.

La falacia sucede aquí porque una alternativa tiene una utilidad mayor que otra debido a que la primera se prefiere sobre la segunda y no el razonamiento inverso.

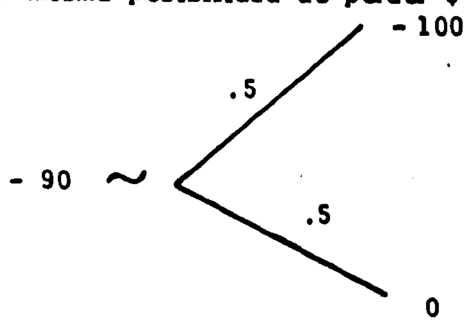
FALACIA 2. Suponga que $A \succ B \succ C \succ D$ y que las utilidades de estas alternativas satisfacen $u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$ entonces $(\frac{1}{2} B, \frac{1}{2} C)$ deberá ser preferida a $(\frac{1}{2} A, \frac{1}{2} D)$ porque, no obstante que ellas tienen la misma utilidad esperada, la primera tiene la variancia en utilidad mas pequeña.

Esta es una interpretación completamente equivocada de la noción de utilidad que resulta nuevamente de no aceptar que las preferencias preceden a las utilidades. Toda la información de preferencias se da en el valor esperado de la utilidad en particular, la variancia de utilidades no tiene ningún significado.

FALACIA 3. Suponga que $A \succ B \succ C \succ D$ y que la función utilidad tiene la propiedad que $u(A) - u(B) > u(C) - u(D)$ entonces el cambio de B a A se prefiere más que el de D a C.

Si se considera cómo se construyó la función utilidad a partir de preferencias entre pares de alternativas, no entre pares de pares de alternativas, es claro que la aseveración de arriba no está justificada. Esto no significa que uno no deberá considerar construir una teoría de utilidad que sea capaz de comparar diferencias en utilidad. Lo que se desea enfatizar es que la teoría presente no permite tales comparaciones.

Suponga por ejemplo que una persona, debido a su aversión al riesgo, reportó que él sería indiferente entre pagar \$ 90.00 ahora ó jugar una lotería con la misma posibilidad de perder \$ 100.00 ó nada.



su respuesta podría resumirse diciendo que sus utilidades para \$ 0, - \$ 90. y -\$100 son 1, 1/2 y 0. Sin embargo, no estaríamos dis-- puestos a decir que pasar de -\$100 a -\$90 es tan agradable como ir de - \$90 a \$ 0.

FALACIA 4. Las comparaciones interpersonales en utilidad son posibles.

Ya que ni el cero ni la unidad de una escala de utilidad están determinados, no tiene sentido en esta teoría comparar utilidades entre dos personas.

II. 4. Funciones utilidad con un solo atributo.

1o. Notación.

l : una lotería

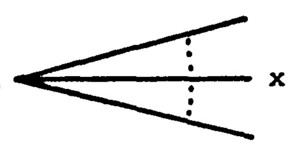
$\tilde{x}$: una variable aleatoria

$u(\tilde{x})$: utilidad de esa variable

$E\,u(\tilde{x})$: utilidad esperada de una lotería

Equivalente bajo certeza. Es la mínima cantidad por la cual estamos dispuestos a vender una loteria que poseemos. Un equivalente bajo certeza corresponde a una lotería determinada.

Si $s \sim l$:



entonces:

equivalente bajo certeza de $l = s = u^{-1}\, E\, u(\tilde{x})$

Equivalencia estratégica. Se dice que dos funciones utilidad son estratégicamente equivalentes, $u_1 \sim u_2$, si se cumple que:

a) los equivalentes bajo certeza calculados con una función utilidad son iguales a los calculados con la otra, o sea,

$$u_1^{-1}\, E\, u_1(x) = u_2^{-1}\, E\, u_2(\tilde{x}) \quad , \quad \forall x.$$

b) Una función utilidad es una transformación lineal de la otra,

$$u_2\ (x) = a + b\ u_1\ (x) \qquad b > 0,\ \forall x.$$

la condición a) implica la b) y viceversa.

<u>Aversión local al riesgo.</u> Se define como el negativo del cociente de la segunda derivada de la función utilidad entre su primera derivada.

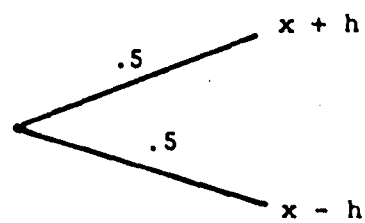
$$r\ (x) = -\frac{u''\ (x)}{u'\ (x)} = -\frac{d}{d_x}\left[\ l_n\ u'\ (x)\right]$$

Se dan a continuación dos teoremas omitiéndose su demostración.

<u>Teorema 1</u>. Dos funciones utilidad son estratégicamente equivalentes si y únicamente si tienen igual aversión local al riesgo.

$$\left[u_1 \sim u_2\right] <=> \left[r_1 = r_2\right]$$

Considérese ahora la lotería $l_{x\ h}$:



$\sim x - \pi_{xh}$

Ahora bien como el equivalente bajo certeza es igual al valor esperado menos la prima de riesgo.

Como el valor esperado de la lotería es x, la prima de riesgo es $\pi_{x\ h}$.

Teorema 2 . $\lim_{h \to 0} \frac{\pi_{xh}}{h^2} = \frac{1}{2} r(x)$

2o. Aversión constante al riesgo. Se considera que una persona tiene aversión constante al riesgo cuando la prima de riesgo de una lotería - permanece constante no obstante que el capital aumente o disminuya.

Teorema 3. Cada una de las siguientes condiciones implica a las - otras tres:

a) $\pi_{x\,h}$ no depende de x.

b) $r(x) = 2 \lim_{h \to 0} \frac{\pi_{xh}}{h^2}$ = constante.

c) $u(x)$ es $\begin{cases} \text{lineal} & \sim x \\ \text{exponencial negativo} & \sim -e^{-x/c} \end{cases}$

d) $EC\left\{\tilde{x} + A\right\} = EC(\tilde{x}) + A$

Equivalente bajo certeza de $\tilde{x} + A$ es $EC\left\{\tilde{x} + A\right\}$.

El teorema anterior es de utilidad puesto que si se conoce que una persona se comporta según las condiciones a) ó d), automáticamente se conoce que su aversión al riesgo es constante y que su función utilidad es ó x ó $-e^{\frac{-x}{c}}$.

Si no se comporta según el valor esperado entonces su función utilidad será $u(x) = -e^{\frac{-x}{c}}$ y para tenerla completamente determinada hará falta calcular la constante c.

3o. Aversión decreciente al riesgo. Se considera que una persona tiene aversión decreciente al riesgo cuando la prima de riesgo de una lotería disminuye en cuanto aumenta su capital.

Se consideran a continuación algunas de las funciones utilidad más comunes que representan aversión decreciente al riesgo. La lista no es exhaustiva.

u (x)	restricciones	r (x)	rango donde la aversion a riesgo es decreciente.
$\log(x+b)$		$\frac{1}{x+b}$	$x > -b$
$(x+b)^c$	$0<c<1$	$-\frac{(c-1)}{x+b}$	$x > -b$
$(x+b)^{-c}$	$c>0$	$\frac{c+1}{x+b}$	$x > -b$
$x + c\log(x+b)$	$c>0$	$\frac{c}{(x+b)(x+c+b)}$	$x > -b$
$-e^{-ax} - be^{-cx}$	$a, b, c, > 0$	$\frac{a^2 e^{-ax} + bc^2 e^{-cx}}{a e^{-ax} + bce^{-cx}}$	

AVERSION PROPORCIONAL AL RIESGO CONSTANTE. Se dice que una persona tiene aversión proporcional al riesgo constante etc. cuando la inversión no depende del capital que puede ser invertido.

Teorema 4. Si en cualquier clase de inversiones el plan de inversión óptima no depende de la cantidad que puede ser invertida y si su función u de aversión al riesgo está "bien comportada", entonces $-x\frac{u''(x)}{u'(x)}$ es constante .

(Por "bien comportada" se entiende que u es dos veces diferenciable y existe el $\lim_{x \to 0} -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$)

<u>Corolario.</u> Para una función u con aversión al riesgo, los tres incisos siguientes son equivalentes:

i) $x\,r(x)$ es constante

ii) $u(x) \sim \log x$, ó x^{1-c} para $0 < c < 1$

ó $-x^{-(c-1)}$ para $c > 1$

iii) el plan óptimo de inversión es independiente del capital.

Dado que quien toma las decisiones desea utilizar una función utilidad con riesgo proporcional constante, él puede determinar operacionalmente el parámetro c apropiado de la siguiente manera:

Se le pide que compare las dos opciones.

Opción 1 : status quo ó sea X_o con certeza.

Opción 2 : una lotería 50 - 50 en la cual ó dobla esa cantidad a $2x_o$ ó la reduce a ex_o.

Si él es indiferente entre la opción 1 y la 2 cuando $e = \frac{1}{2}$ entonces $c = 1$ ó $u(x) \sim \log x$.

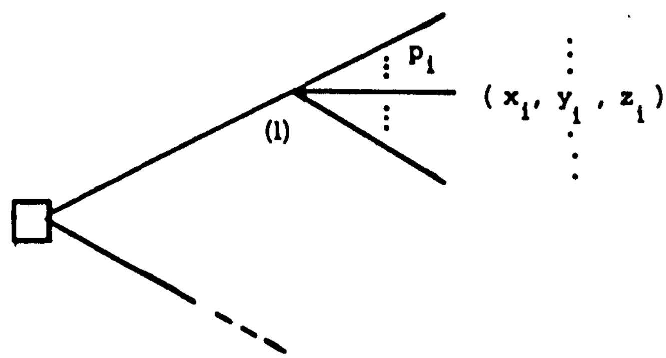
Si es infiferente cuando $e > \frac{1}{2}$ entonces $c > 1$ ó $u(x) \sim -x^{1-c}$

Si es indiferentes cuando $e < \frac{1}{2}$ entonces $o < c < 1$ ó $u(x) \sim x^{1-c}$

II. 5 .- Funciones utilidad con varios atributos

1o. Procedimiento de reducción.

Considérese el siguiente problema



Paso 1) Escoja valores base y^o, z^o

Paso 2) Encuentre x_i^1 tal que $V(x_i, y_i, z_i) =$
$V(x_i^1, y^o, z^o)$ $\forall\ i$

donde $V(x_i, y_i, z_i)$ es la función valor (determinada cuando no existe incertidumbre).

entonces $(x_i, y_i, z_i) \sim (x_i^1, y^o, z^o)$

Paso 3) Obtener la función utilidad condicional de la variable x dados y^o y z^o fijos.

Sea $u(x_i^1 \mid y^o, z^o) = u_i$

Paso 4) Calcule

$\bar{u} = p_1 u_1 + \ldots + p_i u_i + \ldots + p_n u_n$

Paso 5) Encuentre $\hat{x}$ tal que

$$u\ (\hat{x} \mid y^{o},\ z^{o}) = \bar{u}$$

Conclusión: 1 $(\hat{x},\ y^{o},\ z^{o})$

De esta manera se pueden comparar las diferentes loterías y seleccionar aquella cuya $\hat{x}$ sea mayor si el problema es de maximización.

2o. Forma aditiva de una función utilidad

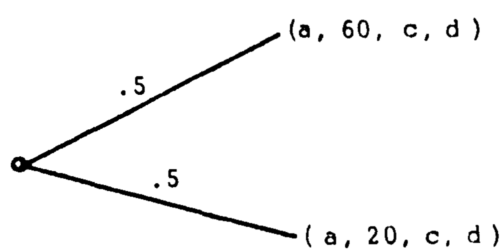
Las propiedades que son condiciones necesarias y suficientes para que la utilidad tenga forma aditiva son :

1. Independencia en utilidad de 1er. orden.
2. Independencia preferencial por pares
3. Marginalidad por pares.

Propiedad 1. Independencia en utilidad de 1er. orden es que cada atributo sea independiente en utilidad de los otros.

Ejemplo:

$(a,\ \hat{x}_2,\ c,\ d) \sim$



¿ $\hat{x}_2$ depende de los valores a, c y d ? Si no, es independiente en utilidad de a, c, y d.

Propiedad 2. Independencia preferencial por pares existe cuando en dos atributos cualesquiera los intercambios en valor no dependen de los niveles de los otros atributos.

Ejemplo.

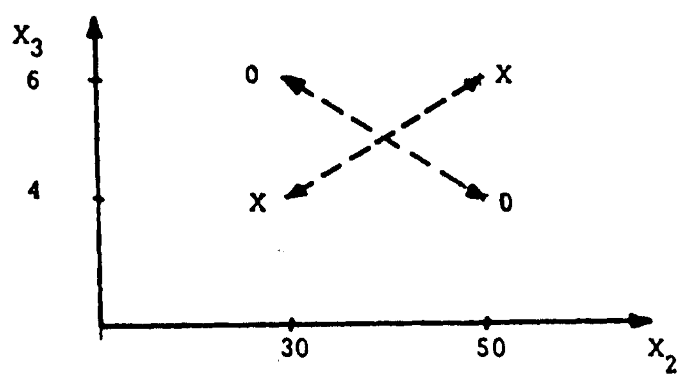
$$(a_1\ x_2,\ 6,\ d) \sim (a,\ 40,\ 5,\ d)$$

x_2 no debe depender ni de a ni de d para que exista independencia - preferencial entre los 2° y 3° atributos respecto al 1° y 4°.

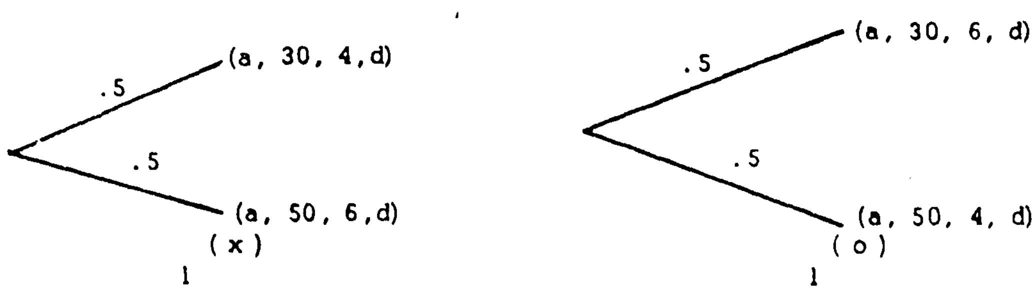
Propiedad 3. Marginalidad por pares.

Ejemplo: Considere cuatro atributos.

Tenga fijos los componentes 1 y 4 en a y d .



Compare



Para que se tenga marginalidad por pares $\ell^{(\alpha)}$ debe ser indiferente con $l^{(o)}$.

Si se cumplen las tres propiedades anteriores es legítimo usar una función utilidad de tipo aditivo.

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_1 u_1(x_1) + \ldots + \lambda_n u_n(x_i)$$

reduciéndose el problema a calcular las $u_i(x_i)$ como funciones utilidad de un solo atributo, y las λ_i por cualquiera de los métodos existentes.