9

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE WALDHAUSEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA:

LUIS RODRIGO GALLARDO CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MAX NEUMANN COTO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2001

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

El teorema de Waldhausen

realizado por Luis Rodrigo Gallardo Cruz

con número de cuenta 9225975-0, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Max Neumann Coto
Propietario	Dr. Carlos Prieto de Castro
Propietario	Dr. Mario Eudave Muñoz
Suplente	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer
Suplente	Dr. Antonio Lascurain Orive

Consejo Departamental de Matemáticas

DRA. LOURDES ESTEVA PERALTA

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

El Teorema de Waldhausen

A Max. Por su paciencia.
A Adriana.

Índice General

Introducción

Las 3-variedades son espacios topológicos que localmente se ven como $\mathbb{R}^3$ y que, por lo tanto, son modelos para la forma del universo en que vivimos.

El problema de clasificación de las 3-variedades consiste en averiguar cómo son todas las posibles formas topológicas de éstas y distinguir entre ellas.

El primero en abordar este problema fue H. Poincare, quien a principios del siglo XX conjeturó que una 3-variedad que tenga los mismos grupos de homotopía que la esfera tridimensional debería ser homeomorfa a la esfera. Aunque la conjetura de Poincare aún no ha sido resuelta, la idea de usar los grupos de homotopía para clasificar las 3-variedades ha sido muy fructífera.

Knesser y Milnor demostraron que cada 3-variedad cerrada admite una descomposición en factores primos (variedades que no pueden descomponerse más) y que esta descomposición es única. El teorema de la esfera de Papakiriakopolous, junto con el teorema de Hurewicz muestran que para las 3-variedades primas con grupo fundamental infinito todos los grupos de homotopía estan determinados por π_1. Es natural entonces preguntarse si estas 3-variedades están determinadas por su grupo fundamental. (Se conocen ejemplos de 3-variedades primas con grupo fundamental finito –los espacios lente– en las que esto no sucede)

El teorema de Waldhausen dice que si la 3-variedad es prima y "suficientemente grande", en el sentido de que contiene una superficie cuyo grupo fundamental se inyecta en el grupo de la variedad, entonces el grupo fundamental efectivamente determina a la variedad.

El propósito de esta tesis es mostrar estos resultados de una forma accesible a quienes sólo tienen conocimentos básicos de topología algebráica y diferencial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades

Una **n-variedad** es un espacio métrico tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Una **n-variedad con frontera** es un espacio métrico tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ o al semiplano $\mathbb{R}^{n+}$. Una **subvariedad** es un subespacio topológico que es en si mismo una variedad. Decimos que una variedad M está encajada en otra variedad N si hay una función $f: M \to N$ tal que $f(M)$ es una subvariedad de N, y f es un homeomorfismo entre M y $f(M)$.

El **n-simplejo canónico** es la cerradura convexa en $\mathbb{R}^{n+1}$ de $n+1$ puntos en posición general. Un **n-simplejo** es un espacio homeomorfo al n-simplejo canónico.Una **cara** de un simplejo es un simplejo generado por un subconjunto de sus vértices.

Un **complejo simplicial** es una colección K de simplejos en algún $\mathbb{R}^n$, tal que: Si $\tau \in K$ y σ es una cara de τ, entonces $\sigma \in K$, y si $\tau_1, \tau_2 \in K$ y $\tau_1 \bigcap \tau_2 \neq \emptyset$, entonces $\tau_1 \bigcap \tau_2$ es una cara de ambos.

Llamamos **poliedro** a un subespacio de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a un complejo simplicial.

El **i-esqueleto** de K es el subcomplejo $K(i)$ formado por los simplejos de K con dimensión $\leq i$.

Una **variedad triangulada** es un poliedro homeomorfo a una variedad.

Teorema 1.1 (Moise). *Todas las variedades de dimensión menor o igual a 3 tienen una triangulación.*

Teorema 1.2. *Dos triangulaciónes diferentes para una variedad de dimensión menor o igual a 3 son equivalentes.*

Una función $f: M \to N$ entre dos variedades trianguladas es lineal a pedazos, o PL, si existen subdivisiones de las triangulaciones tales que f aplica a cada simplejo de M linealmente sobre un simplejo de N.

Teorema 1.3. *Toda función continua entre poliedros es homotópica a una función PL.*

Demostración. Sean M, N complejos, y sea $f: M \to N$ una función continua entre ellos.

La **estrella** de un simplejo σ en un poliedro es el conjunto de todos los simplejos del poliedro que contienen a σ, junto con sus caras. La denotamos como $\mathrm{ST}\,\sigma$.

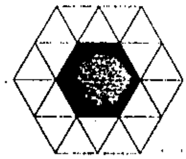


Figura 1.1: La estrella de un vértice

Subdividamos la triangulación de M hasta que la imagen de la estrella de cada vértice de M esté contenida en la estrella de un vértice de N. Esto es posible puesto que los interiores de las estrellas de N forman una cubierta abierta de N. Si subdividimos la triangulación de M hasta que el diámetro de las estrellas de sus vértices sea menor que el número de Lebesgue de las estrellas de los vértices de N obtendremos la propiedad pedida.

Construiremos una nueva función $g: M \to N$ como sigue: Para cada n-simplejo σ en M, consideremos al conjunto $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de vértices de σ, y tomemos uno de ellos, digamos a v_i. La estrella de v_i está contenida en la estrella de un vértice q_i en N. Si está contenido en varias, tomamos uno arbitrario, y definimos $g(v_i) = q_i$. Así $g(V)$ es un conjunto de vértices de N. Como cada v_j está en σ, σ está en $\mathrm{ST}\, v_i$ para cada i. Entonces $f(\sigma)$ está en $\mathrm{ST}\, q_i$ para cada i, de modo que $\bigcap_i \mathrm{ST}\, q_i \neq \emptyset$, y por lo tanto, $\{q_i\}$ define un simplejo τ de N. Definimos $g: \sigma \to \tau$ como la extensión lineal de la función dada en los vértices. Repetimos este proceso sobre todos los simplejos de M, y obtenemos una función $g: M \to N$.

Por definición, g es lineal por pedazos. Veremos ahora que es homotópica a f. Para ver esto, basta mostrar que las imágenes de un punto $p \in M$ bajo f y bajo g están en el mismo triángulo de N, pues en este caso, definimos la homotopía como $H(p,t) = tg(p) + (1-t)f(p)$, donde el desplazamiento se da sobre el segmento rectilineo entre ambos puntos.

Ahora, para cualquier simplejo $\tau \in N$, que no esté contenido en otro simplejo de N, si $f(\sigma)\bigcap\tau \neq \emptyset$ entonces $g(V) \subset \tau$. Supongamos que no es así, y que $g(v_1) \notin \tau$. Entonces $f(\sigma)\bigcap\tau \neq \emptyset$ y $\tau \notin \mathrm{ST}\, g(v_1)$, así que $f(\sigma) \notin \mathrm{ST}\, g(v_1)$, lo que contradice la manera en que elegimos $g(v_1)$. De aquí deducimos que $g(\sigma) \subset \tau$, y por lo tanto, $g(\sigma)$ está contenido en la intersección de todos los simplejos de N que intersectan a $f(\sigma)$, de modo que para cada $p \in \sigma$, $f(p)$ y $g(p)$ están en el mismo simplejo de N.

■

1.1.1 Transversalidad

Dada una superficie triangulada F y una curva c en ella, decimos que c es **transversal** a la triangulación si no intersecta al 0-esqueleto, y todas las intersecciones de c con el 1-esqueleto se ven localmente como la intersección de los ejes de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que tenemos dos superficies G y F, una curva $c \subset G$ transversal a la triangulación y una función $f\colon F \to G$ lineal a pedazos. Entonces la preimagen de c es una unión de curvas en F.

Para ver esto, consideremos un simplejo σ en G tal que $\sigma\bigcap c \neq \emptyset$. Si σ es un 2-simplejo, la intersección consta de arcos y segmentos. La preimagen bajo f de σ es una colección de 2-simplejos en F, que son transformados de forma lineal, de modo que la preimagen de c consta de arcos o segmentos.

Si σ es un 1-simplejo, la intersección con c es un número finito de puntos. Y la preimagen de σ consta de 1 y 2-simplejos. En el caso de 1-simplejos, la preimagen de la intersección son puntos, y en el caso de 2-simplejos, son arcos.

Uniendo los pedazos de la intersección, que no puede tener puntos frontera, tenemos que la preimagen de c es una unión de curvas.

Consideremos ahora el caso de una 3-variedad triangulada M y una superficie $F \subset M$. F es transversal a la triangulación si no intersecta al 0-esqueleto, sus intersecciones con el 1-esqueleto se ven localmente como la intersección del plano xy con el eje z en $\mathbb{R}^3$ y sus intersecciones con el 2-esqueleto se ven localmente como la intersección de los planos xy y xz en $\mathbb{R}^3$.

Como en las superficies, si tenemos dos 3-variedades trianguladas M y N, una superficie $F \subset N$ transversal a la triangulación y una función $f: M \to N$ lineal a pedazos, entonces la preimagen de F es una unión de superficies en M.

De nuevo sólo necesitamos ver que pasa en las intersecciones con un simplejo $\sigma \subset N$.

Si σ es un 3-simplejo, su preimagen son 3-simplejos homeomorfos a él, por lo que la preimagen de la intersección es una unión de tramos de superficie.

Si σ es un 2-simplejo, su preimagen son 2-simplejos homeomorfos a él, o 3-simplejos proyectados linealmente. En el primer caso el resultado es automático. En el segundo, la preimagen de la intersección es la preimagen bajo proyección de una curva, es decir, discos.

Si σ es un 1-simplejo, su preimagen pueden ser 1-simplejos homeomorfos o 2 o 3-simplejos proyectados linealmente, y la intersección de c con σ son puntos aislados. De modo que la preimagen de la intersección son puntos, curvas o discos.

1.1.2 Funciones propias

Decimos que una función $f: M \to N$ entre dos variedades M y N es **propia** si $f^{-1}(\partial N) = \partial M$, es decir si la frontera, y sólo la frontera, de M va a dar a la frontera de N.

Cuando tenemos una función f PL, entre variedades orientables cerradas de la misma dimensión M y N, podemos definir el **grado** de dicha función. Hay dos maneras en que podemos hacerlo. La más sencilla es la siguiente: Sabemos que $H_n(M) = H_n(N) = \mathbb{Z}$, por lo que la función inducida por f entre estos grupos es de la forma $f_*(a) = ka$, $k \in \mathbb{Z}$. Definimos el grado de f como k. Es claro que esta definición es invariante bajo homotopía, pero no es muy claro cuál es su significado geométrico.

Emplearemos entonces esta otra definición: Puesto que f es PL, sabemos que la preimagen de un n-simplejo τ en la triangulación de N consta de un conjunto finito de n-simplejos $\{\sigma_i\}$ en M. Como M y N son orientables, inducen una orientación en τ y en cada uno de $\{\sigma_i\}$ y por tanto en $\{f(\sigma_i)\}$. Definiremos el grado de f como la suma $\sum_{\sigma_i} \pm 1$, donde escogemos el signo según si la orientación de $f(\sigma_i)$ es igual o no a la de τ.

Para que esta definición tenga sentido, necesitamos ver que no depende de τ, sino solamente de f. Tomemos entonces dos simplejos τ_1 y τ_2 en N, y veamos que la suma es la misma. Para esto, usaremos un segmento l que una los puntos centrales p_1 y p_2 de ambos simplejos, y que sea transversal a la triangulación. Como M es cerrada y f es PL, $f^{-1}(l)$ es una unión de segmentos, cuyos extremos son precisamente $f^{-1}p_1, p_2$.

Esto en general no es posible en variedades con frontera, por ejemplo, si mandamos el segmento sobre sí mismo, como en la figura 1.2 es claro que

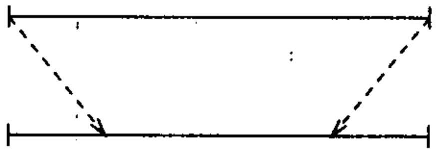


Figura 1.2: Una función sin grado definido.

no hay un grado bien definido. Sin embargo, consideremos el caso de una función propia. Dada cualquier variedad con frontera, su variedad doble es el resultado de pegar dos copias de la variedad identificando las fronteras correspondientes. Si tenemos una función propia entre dos variedades con frontera, ésta induce una función entre las variedades dobles. Como éstas últimas son cerradas, dicha función tiene un grado bien definido, lo que nos da un grado para la función original.

1.2 Topología Algebraica

Dos espacios topológicos M y N son **homotópicamente equivalentes** si hay funciones $f: M \to N$ y $g: N \to M$ tales que $f \circ g: N \to N$ es homotópica a $Id: N \to N$ y $g \circ f: M \to M$ es homotópica a $Id: M \to M$.

Se sigue que si M y N son homotópicamente equivalentes entonces para toda n $\pi_n(M) = \pi_n(N)$. El inverso también es cierto, pero sólo necesitaremos el siguiente resultado más débil.

Teorema 1.4. *Si M y N son complejos de dimensión m y n respectivamente, y tales que $\pi_1(M) = \pi_1(N)$ y $\pi_i(M) = \pi_i(N) = 0$ para toda i tal que $2 \leq i \leq \max\{m, n\}$ entonces M y N son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Definiremos una función $f: M \to N$ como sigue:

Sea T la triangulación de M. Sea S un árbol generador del 1-esqueleto de M. Definimos $f(T) = p_0 \in N$, donde p_0 es el punto base de $\pi_1(N)$.

Para cada arista $a \in T^{(1)} \setminus S$, hay un par de caminos γ_1 y γ_2 en S del punto base de M a los vértices de t. $\gamma_1 a \gamma_2$ es un lazo en M, de modo que existe un lazo α en N tal que $[\alpha] = [\gamma_1 a \gamma_2]$. Definimos $f(a) = \alpha$.

Para cada triángulo $t \in T^{(2)}$, consideremos la imagen de sus tres aristas a_1, a_2, a_3. Puesto que, si completamos con el camino en S del punto base a un vértice de t, el producto de las tres aristas es una curva trivial, $f(a_1 a_2 a_3)$ es una curva trivial en N, de modo que hay un disco inmerso en N que tiene por frontera a dicha curva. Definimos $f(t)$ como la imagen de ese disco.

Del mismo modo, para cada simplejo $\sigma \in T^{(n)}$, $n > 2$, tenemos que $\partial\sigma$ es una $n-1$ esfera en M. Como $\pi_{n-1}(N) = 0$, $f(\partial\sigma)$ es frontera de una n-bola inmersa en N, y definimos $f(\sigma)$ como esa bola.

Podemos definir del mismo modo una función $g: N \to M$. El teorema estará completo si demostramos que $f \circ g: M \to M$ es homotópica a la identidad.

Para ver esto, debemos definir una función $F: M \times I \to M$ tal que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = f(g(x))$. La triangulación de M nos da una división natural de $M \times I$ en prismas. F ya está definida en los extremos, hace falta extenderla al interior de $M \times I$. Lo haremos procediendo sobre los prismas de cada dimensión. Comenzamos con los de dimensión 1 y llamaremos q al punto base de $\pi_1(M)$. Cada uno de estos prismas es un segmento con extremos $(p, 0)$ y $(p, 1)$ en puntos de la triangulación de M. Como f manda todos estos puntos a q, también $f \circ g$ lo hace. Escogemos entonces como imagen del segmento el único camino sobre el árbol generador de la triangulación de M que une p con q.

Ahora para los de dimensión 2. Cada uno de éstos es un rectángulo r cuyos lados son: $(a, 0)$, $(a, 1)$, b y c, donde a es un vértice de la triangulación y b y c son prismas de los del paso anterior. Ahora bien, si llamamos γ_1 y γ_2 a los caminos por el árbol generador de q a los extremos de a tenemos que, por un lado, por la definición de f, $f(g(\gamma_i)) = q$, por lo que $f(g(\gamma_1 a \gamma_2^{-1})) = f(g(a)) = F(a, 0)$. Por otro lado, definimos $F(b) = \gamma_1$ y $F(c) = \gamma_2$, por lo que $F(b(a, 1)c^{-1}) = \gamma_1 a \gamma_2^{-1}$. Pero sabemos que $f \circ g$ induce la identidad en $\pi_1(M)$, por lo que $f(g(a)) \cong a$, es decir $F(b(a, 1)c^{-1}) \cong F(a, 0)$, de donde $\partial r \cong 0$, es decir $F(\partial r)$ es frontera de un disco inmerso en M, así que podemos definir $F(r)$ como dicho disco.

Para los prismas de dimensión i con $2 < i < \dim(M)$, tenemos que su frontera es una $(i-1)$-esfera. Como $\pi_{i-1}(M) = 0$, la imagen de dicha esfera bajo F es frontera de una i-bola en M, por lo que podemos definir la imagen del prisma como esa bola. ■

Como corolario de esto tenemos que si dos variedades tienen el mismo grupo fundamental, y sus grupos de homotopía superiores son cero, entonces ambas son homotópicamente equivalentes. Ejemplos de esto son todas las superficies, en las que cualquier función que induzca un isomorfismo de grupos fundamentales es automáticamente una equivalencia homotópica. Como resultado de esto tenemos que su grado es uno. Podemos generalizar esta última afirmación un poco. Supongamos que tenemos una función f entre dos superficies que induce una inyección entre los grupos fundamentales. Tomemos el espacio cubriente correspondiente al grupo imagen de f_*. Como f se levanta a este espacio cubriente como una función $\tilde{f}$ que induce un isomorfismo entre los grupos del dominio y la cubierta, sabemos que $\tilde{f}$ tiene grado 1, y por lo tanto f tiene grado igual al índice de la imagen de f_*.

Enunciaremos algunos teoremas sin dar su demostración.

Teorema 1.5 (Seifert-Van Kampen). *Sean $X = A\bigcup B$, con A, B y $A\bigcap B$ abiertos arcoconexos en X, y sean $i\colon A\bigcup B \to A$ y $j\colon A\bigcup B \to B$ las inclusiones naturales. Si $\pi_1(A) = \langle a_1, a_2, \ldots ; r_1, r_2, \ldots\rangle$, $\pi_1(B) = \langle b_1, b_2, \ldots ; s_1, s_2, \ldots\rangle$ y $\pi_1(A\bigcap B) = \langle c_1, c_2, \ldots ; t_1, t_2, \ldots\rangle$, entonces*

$$\begin{aligned}\pi_1(X) = \langle a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots ;\\ r_1, r_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots, i(c_1) = j(c_1), i(c_2) = i(c_2), \ldots\rangle.\end{aligned}$$

Teorema 1.6 (Mayer-Vietoris). *Sean A y B abiertos en X tales que $X = A\bigcup B$. Entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$\ldots \to H_{i+1}(X) \to H_i(A\cup B) \to H_i(A) \oplus H_i(B) \to H_i(X) \to \ldots .$$

Teorema 1.7 (Hurewicz). *Para cualquier complejo M, si $\pi_i(M) = 0$ para toda $i < n$ entonces $\pi_n(M)$ es la abelianización de $H_n(M)$*

En particular, la hipótesis es siempre cierta por vacuidad para $n = 1$. En el caso $n > 1$, puesto que $\pi_n(M)$ es abeliano, es isomorfo a $H_n(M)$.

Lema 1.8. *Sea F una hipersuperficie encajada en una variedad M, tal que $F \neq 0$ en $H_{n-1}(M)$. Supongamos que $F = kS$, para alguna $S \in H_{n-1}$. Entonces $k = \pm 1$.*

Demostración. Si F no separa a M, hay una curva c en M con número de intersección 1 con F. Si l es el número de intersección de c con S, por la ecuación tenemos que $1 = kl$, así que $k = l = \pm 1$.

Si F separa a M en componentes X y Y, ninguno de ellos puede tener como frontera a F, puesto que entonces se tendría que $F = 0 \in H_{n-1}(M)$. Entonces podemos trazar un arco de F a un punto en $\partial X \setminus F$ y otro del mismo punto en F a uno en $\partial Y \setminus F$. La unión de estos dos arcos nos da un arco en M que intersecta a F en un único punto, y el resultado se sigue de nuevo por un argumento de número de intersección. ∎

De hecho, este resultado es válido también para variedades no compactas, sustituyendo los arcos por arcos infinitos.

Lema 1.9. *Sea M un espacio topológico y $g\colon \widetilde{M} \to M$ un espacio cubriente y su función proyección. Entonces, para cualquier $n \geq 2$, $g_*\colon \pi_n(\widetilde{M}) \to \pi_n(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $[S] \in \pi_n(M)$ la clase de equivalencia de $S\colon S^n \to M$, una n-esfera en M. Como $\pi_1(S^n) = 0$, podemos levantar S a $\widetilde{S}\colon S^n \to \widetilde{M}$. $[\widetilde{S}] \in \pi_n(\widetilde{M})$ y por construcción $g([\widetilde{S}]) = [S]$, por lo que g_* es suprayectiva.

Ahora, sea $\widetilde{S}\colon S^n \to M$ tal que $g(\widetilde{S}(S^n))$ es trivial en M. Entonces existe una función $B\colon B^{n+1} \to M$ tal que $B|_{\partial B^{n+1}} = g(\widetilde{S})$. Como $\pi_1(B^{n+1}) = 0$, B se levanta a una función $\widetilde{B}\colon B^{n+1} \to \widetilde{M}$, y tal que $\widetilde{B}|_{\partial B^{n+1}} = \widetilde{S}$, de donde $\widetilde{S}(S^n)$ es trivial en $\widetilde{M}$, y g_* es inyectiva. ∎

Ejemplo. $\pi_n(S^1) = 0$ para cualquier $n \geq 2$, puesto que R es su espacio cubriente universal y $\pi_n(R) = 0$ para cualquier n.

Ejemplo. Para cualquier superficie compacta orientable F distinta de la esfera, y cualquier $n \geq 2$, $\pi_n(S) = 0$. Para ver esto, consideremos su espacio cubriente universal $\widetilde{F}$. Supongamos que $\pi_1(F)$ es finito. Entonces $H_1(F)$ también lo es. Se demostrará en el capítulo siguiente que entonces cualquier curva es separante (lema 2.7). Cortamos a F sobre una curva cualquiera. Obtenemos dos superficies con frontera y primera homología finita, que por el lema 2.6 son discos. Por lo tanto, nuestra superficie consta de dos discos pegados sobre una curva, y es orientable, por lo que es una esfera. Como esto es una contradicción, se deduce que $\pi_1(F)$ es infinito, y por lo tanto $\widetilde{F}$ no es compacto, por lo que $H_2(\widetilde{F}) = 0$, y como $\pi_1(\widetilde{F}) = 0$, por el teorema de Hurewicz $\pi_2(\widetilde{F}) = 0$. Como $\widetilde{F}$ es una superficie, $H_n(\widetilde{F}) = 0$, $\forall n \geq 3$, de modo que, aplicando de nuevo Hurewicz, $\pi_n(\widetilde{F}) = 0$, $\forall n \geq 3$, de donde $\pi_n(F) = 0$, $\forall n \geq 2$.

Lema 1.10. *Sea M una n-variedad triangulable y N un espacio topológico tal que $\pi_i(N) = 0$ para $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Sea $g: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ un homomorfismo. Entonces existe $f: M \to N$ continua tal que $f_* = g$. Decimos que f* ***realiza geométricamente*** *a g.*

Demostración. Escojo una triangulación de M. Construiremos a f definiéndola sucesivamente en cada dimensión de la triangulación. Primero tomo un árbol generador del 1-esqueleto. Definimos f en dicho árbol generador como función constante, mandándolo completo en el punto base de $\pi_1(N)$. El resto de las aristas del 1-esqueleto de M representan generadores de $\pi_1(M)$. Escojo un representante para cada generador de $\pi_1(N)$ y defino f en las aristas de M mandando la arista al lazo en N que representa su imagen en $\pi_1(N)$.

Para la dimensión 2, si D es una 2-celda en M, su frontera, completada con partes del árbol generador, es una curva nulhomotópica en M, así que su imagen bajo f es nulhomotópica, y por lo tanto es borde de un disco (no necesariamente encajado) en N, de modo que podemos extender f a D tomando dicho disco como su imagen.

Para la dimensión r. Una r-celda B en M tiene como frontera a una $(r-1)$-esfera. La imagen de dicha esfera bajo f (que ya está definida en el $(r-1)$-esqueleto) es una $(r-1)$-esfera inmersa en N. Como $\pi_{r-1}(N) = 0$, esta esfera es frontera de una r-bola inmersa en N, así que podemos extender f a B tomando esa bola como su imagen. ■

Un caso particular que emplearemos a menudo es el siguiente: Dada cualquier superficie o 3-variedad M y un homomorfismo $g: \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ hay una función $f: M \to S^1$ que realiza geométricamente a g.

Lema 1.11. *Si tenemos una función $f \times Id: X \times D^n \to Y \times D^n$, de un producto en otro, y una homotopía de la fibra del centro, $g_t: X \to Y$ entonces existe $F_t: X \times D^n \to Y \times D^n$ que extiende a la homotopía dada, es decir tal que $F_0 = f$, $F_t|X = g_t$, $F_t|X \times \partial D^n = Id$.*

Demostración. Definimos

$$F_t(x, d) = (g_{t(1-|d|)}(x), d),$$

que claramente cumple con las condiciones dadas. ■

Lema 1.12. *Sea $f: D^n \to D^n$ tal que, restringida a la frontera, es un homeomorfismo. Entonces existe $g: D^n \to D^n$ homotópica a f, tal que $g|_{\partial D^n} = f|_{\partial D^n}$ y g es un homeomorfismo de D^n en D^n.*

Demostración. Sea $H: D^n \times I \to D^n$, dada por

$$H(t,s) = \begin{cases} sf(\frac{t}{s}) & \text{si } |t| \le s \text{ y } s \neq 0. \\ |t|\, f(\frac{t}{|t|}) & \text{si } |t| \ge s \text{ y } |t| \neq 0. \\ 0 & \text{si } |t| = s = 0. \end{cases}$$

H es continua en los puntos distintos de $(0,0)$, porque estamos "pegando" funciones continuas. Para $(0,0)$ tenemos que dada $\varepsilon > 0$, si $|(t,s)| < \varepsilon$, entonces $|t| < \varepsilon$ y $|s| < \varepsilon$ así que

$$\left| sf\left(\frac{t}{s}\right)\right| \le s \left| f\left(\frac{t}{s}\right)\right| \le s < \varepsilon$$

y

$$\left| |t|\, f\left(\frac{t}{|t|}\right)\right| = |t| < \varepsilon,$$

así que en cualquier caso $|H(t,s)| < \varepsilon$, por lo que también es continua en dicho punto.

También, $H(t,1) = f(t)$, para cualquier $t \in D^n$.

Sea $g: D^n \to D^n$ tal que $g(t) = H(t,0)$. g coincide con f en ∂D^n, ya que si $|t| = 1$,

$$g(t) = H(t,0) = 1f\left(\frac{t}{1}\right) = f(t),$$

y por supuesto g y f son homotópicas. Basta entonces probar que g es un homeomorfismo. Es continua pues es la restricción de una función continua, así que sólo falta demostrar que tiene una inversa continua.

Como $f|_{S^{n-1}}$ es un homeomorfismo, tiene una inversa $f^{-1}: S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Sea $g': D^n \to D^n$ dada por

$$g'(t) = \begin{cases} |t|\, f^{-1}(\frac{t}{|t|}) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

g' es continua (el único punto problemático es el cero), y es una inversa para g. ■

Capítulo 2

Superficies

Todas las superficies a lo largo de este capítulo serán orientables. Por **curva** entenderemos una curva simple cerrada propiamente encajada en una superficie, y por **arco** a un arco propiamente encajado. Una curva c es **esencial** si no es homotópica a un punto. Denotaremos por $[c]$ a su clase de homotopía o de homología, según el contexto. Un arco es **esencial** si no es posible completarlo con un segmento de la frontera para hacer una curva trivial.

Cortar una superficie a lo largo de una curva es retirar de la superficie una vecindad regular abierta de la curva, de modo que, si identificáramos las fronteras de dicha vecindad regular, obtendríamos una superficie homeomorfa a la original.

Demostraremos primero algunos lemas generales sobre superficies. Comenzamos por los siguientes resultados:

Lema 2.1. *El grupo fundamental de una superficie con frontera es libre.*

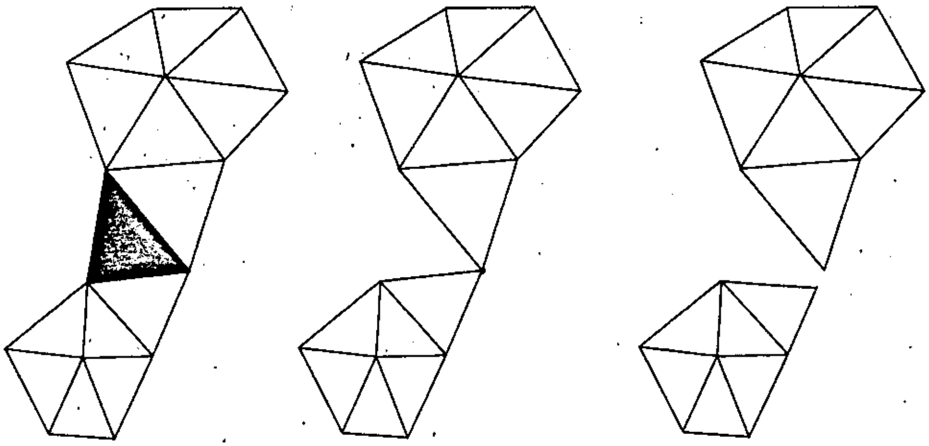
Demostración. Podemos, a partir de la frontera de la superficie, colapsar mediante una homotopía cada triángulo en ella. El resultado final es una gráfica, que tiene grupo fundamental libre. ■

Lema 2.2. *La única superficie compacta, con frontera y grupo fundamental trivial es el disco.*

Demostración. Demostraremos esto por inducción sobre el número de triángulos en la triangulación de la superficie. El resultado es trivial si se tiene un solo triangulo. Supongamos que es cierto para todas las superficies con menos de n triángulos y sea S una superficie compacta, con frontera, grupo fundamental trivial y una triangulación con n triángulos.

Sea σ un triangulo que intersecte a la frontera de S. Si $\sigma \bigcap \partial S$ consta únicamente de uno o dos lados de σ, $S \setminus \sigma$ es una variedad, y S es homeomorfa a ella. Por hipótesis de inducción, $S \setminus \sigma$ es un disco, y por lo tanto S es un disco.

Supongamos entonces que $\sigma \bigcap \partial S$ consta de un lado y un vértice v de σ. S es homotópico al poliedro P que resulta de colapsar σ a v, así que $\pi_1(P)$ es trivial. $P \setminus v$ es disconexo, puesto que si no lo fuera, tendríamos un arco entre dos puntos de la estrella de v que no pasa por v. Completando este arco con otro que sí pase por v tendríamos un lazo no trivial. Ahora bien, cada uno de los componentes de P es una variedad compacta con frontera, y ambos tienen grupo fundamental trivial (Seifert-Van Kampen), de modo que, por la hipótesis de inducción, ambos son discos. De modo que S consta de dos discos, pegados sobre lados adyacentes de un triangulo, y que solo se intersectan en un punto. Por lo tanto, S es un disco.



$\blacksquare$

Lema 2.3. *Si S es una superficie, y c es un componente de ∂S, entonces la inclusión de c en S induce una inyección $i_*: \pi_1(c) \to \pi_1(S)$, o S es un disco.*

Demostración. Si c es homeomorfa a $\mathbb{R}$, el lema es cierto. Supongamos entonces que es un círculo, y que $\pi_1(c)$ no inyecta en $\pi_1(S)$. Entonces $i_*(\pi_1(c)) = 0$, por que es imagen de $\mathbb{Z}$, y subgrupo de un grupo libre. Entonces la inclusión de c en S se levanta al cubriente universal $\tilde{S}$. Las preimágenes de c son fronteras de $\tilde{S}$. Entonces, como la frontera de $\tilde{S}$ es no vacía y $\pi_1(\tilde{S}) = 0$, $\tilde{S}$ es un disco, y por tanto S es un disco. ∎

Lema 2.4. *Cualquier curva trivial (simple) en una superficie S es frontera de un disco encajado en S*

Demostración. Sea c una curva simple trivial en una superficie S. c es separante, por que de no serlo, no sería 0 en homología. Supongamos que ninguna de las componentes es un disco. Entonces c no es trivial en ninguna de ellas, por el lema anterior. Pero entonces, aplicando el teorema de Van Kampen, tenemos que c no es trivial en S, lo cual es una contradicción, así que uno de los dos componentes es un disco. ∎

Ahora podemos demostrar que el grupo fundamental de una superficie cerrada nunca es libre. De hecho, ni siquiera puede ser el producto libre de dos grupos.

Teorema 2.5. *Sea G el grupo fundamental de una superficie cerrada S, y supongamos que $G = G_1 * G_2$. Entonces uno de G_1 o G_2 es trivial.*

Demostración. Supongamos que tenemos una descomposición $G = G_1 * G_2$. Sean A y B complejos simpliciales tales que $\pi_1(A) = G_1$, $\pi_1(B) = G_2$ y $\pi_2(A) = \pi_2(B) = 0$, y consideremos el complejo C obtenido al pegar A y B sobre un punto p. Como $\pi_1(E) = G$, podemos obtener una función PL $f: S \to E$ que induzca el isomorfismo de los grupos. Consideremos la preimagen de p. Como f es PL, y S es cerrada dicha preimagen está formada por curvas en S. Como f induce un isomorfismo de grupos fundamentales y $[p] = 0$, cada una de dichas curvas es trivial. Llamemos c a una de las preimágenes de p. c es frontera de un disco encajado D en S. $f(D)$ es un disco inmerso en C y $f(\partial D) = p$, lo que nos da una esfera inmersa en C. Pero $\pi_2(C) = 0$, por lo que dicha esfera es trivial. Entonces, podemos por medio de una homotopía deformar f de modo que $f(D) = p$, y deformando un poco más, eliminar a c de la preimagen de p. Procediendo de este modo, podemos eliminar todas las preimágenes de p, por lo que tendremos que $f(S)$ está contenido en uno de A o B, supongamos que en A. Como f nos da un isomorfismo de grupos fundamentales, tenemos que $\pi_1(A) = G$, y $\pi_1(B)$ es trivial. ∎

Lema 2.6. *Si una superficie conexa y compacta tiene primera homología finita y frontera no vacía, entonces es un disco.*

Demostración. Sea F la superficie. Si F no es un disco, entonces, como la frontera no es vacía, por el lema anterior $\mathbb{Z} \subset \pi_1(F)$. Entonces $\pi_1(F)$ es un grupo libre no trivial. Entonces $H_1(F)$ es infinita, pues es un grupo libre abeliano no trivial. ■

Lema 2.7. *La primera homología de una superficie F es infinita si y sólo si F tiene una curva o un arco no separante. Si n es el rango de la primera homología, cualquier colección de más de n curvas o arcos ajenos en F es separante.*

Demostración.

- Si hay una curva no separante, entonces, tomando dos puntos en una vecindad regular de un intervalo de dicha curva, uno en cada lado del intervalo, entonces, como la curva no separa, hay un arco que los une sin tocar a la curva inicial, completo ese arco con un pequeño segmento dentro de la vecindad regular y tengo una curva que corta en un único punto a la curva original, es decir, tiene número de intersección uno con ella. Entonces, el múltiplo n de esta última curva tiene número de intersección n, así que no puede ser homóloga a cero. Entonces esta curva es de orden infinito, entonces H_1 es infinito.

- Si H_1 es infinito, hay un epimorfismo de $\pi_1(F)$ sobre $\mathbb{Z}$. Realizamos este epimorfismo por medio de una función PL de F en S^1. Tomemos la preimagen de un punto $v \in S^1$. Dicha preimagen es una colección de curvas y arcos en F, siempre que v no sea un vértice en la triangulación de S^1.

  Sea c una preimagen del generador de $\pi_1(S^1)$. Como el número de intersección módulo 2 del generador canónico en S^1 con v es uno, entonces el número de intersección módulo 2 de c con $f^{-1}(v)$ es uno.

  Entonces alguno de los componentes de $f^{-1}(v)$ intersecta un número impar de veces a c, lo que quiere decir que no separa a F, pues una curva separante tiene número de intersección cero con cualquier otra.

Para demostrar la segunda afirmación, considérese una colección C con m curvas o arcos ajenos y tal que $M \setminus \bigcup C$ es conexo. Para cada $c_i \in C$, podemos tomar una curva cerrada d_i que corte una sola vez a c_i, y que no toca a ninguna otra c_j.

Entonces la colección $\{d_i\}$ es una colección de m curvas linealmente independientes en $H_1(M)$, porque cada una tiene números de intersección linealmente independientes con las curvas de C, y por lo tanto $m \leq \text{rango}\, H_1(M)$. ■

Lema 2.8. *Toda superficie cerrada con grupo fundamental no trivial tiene una curva cerrada no separante.*

Demostración. Quitemos un pequeño disco de la superficie. Nos queda una superficie F' con frontera y grupo fundamental no trivial. Por lo tanto, F' tiene una curva o un arco no separantes. Si hay un arco no separante, sus extremos están en la frontera del disco que quitamos. Completandolo con un subarco de dicha frontera, obtengo una curva cerrada en F no separante. Y si F' tenía una curva cerrada no separante, esa misma es una curva cerrada no separante en F. ■

Curvas Normales

Teorema 2.9. *Para cada superficie compacta F hay un número k tal que, para cualquier colección C de curvas ajenas, no triviales con más de k elementos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ hay un par de ellas c_i, c_j que son paralelas, es decir encierran un producto (un anillo).*

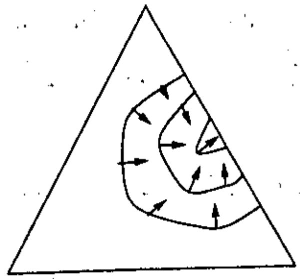
Demostración. Para esto, primero llevo las curvas a una forma 'normal', como sigue:

Fijamos una triangulación de la superficie. Tomamos una curva c_i de la colección y nos fijamos en un triángulo T que intersecte a c_i. c_i no está contenida en el interior del triángulo, porque es esencial. Tomamos un componente de la intersección. Por la afirmación anterior, intersecta a la frontera de T. Nos fijamos en uno de sus extremos.

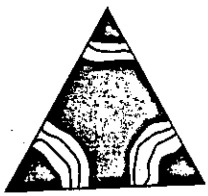
Si el otro extremo está en el mismo lado del triángulo ese lado del triángulo no puede ser parte de la frontera de la variedad, por que entonces c_i tendría frontera, y eso no es cierto, pues es una curva cerrada. Entonces puedo 'deslizar' este segmento de c_i hacia el triángulo adyacente, eliminando este componente de la intersección. Eliminamos todos los arcos de este tipo.

Ahora tenemos solo arcos que unen lados distintos del triángulo, que sustituimos por segmentos rectilineos que unan los mismos puntos.

Después de simplificar así a todas las curvas tenemos lo siguiente:



Para cada triángulo , la colección C lo separa en varios componentes. Llamaremos 'bueno' a un componente que sea una banda $(I \times I)$. Obsérvese que solo puedo tener 4 componentes 'malos': Las esquinas y el centro.



■ Zonas 'malas'

Por lo tanto, puesto que cada componente de $F \setminus \bigcup C$ debe ocupar por lo menos una parte de un triangulo, si hay t triángulos en la triangulación, a lo mas $4t$ componentes tienen partes 'malas'.

Entonces, si $\beta_1 =$ rango H_1 y $k \geq 4t + \beta_1 + 1$, cuando mucho β_1 de las curvas son separantes, de modo que $F \setminus \bigcup C$ tiene por lo menos $4t + 1$ componentes. De estos, por lo menos uno debe estar formado únicamente por partes 'buenas'. Como F es orientable, este componente debe ser un anillo, de modo que sus fronteras (que son curvas de la colección) son paralelas. Así que en la colección hay por lo menos dos curvas paralelas. ■

Superficies con jerarquías

Definición 2.1. *Una jerarquía en una superficie F es una sucesión de superficies $F = F_0, F_1, \ldots, F_n = \bigcup$ discos tal que cada F_i es el resultado de cortar F_{i-1} a lo largo de una curva o un arco esencial.*

Lema 2.10. *Toda superficie compacta orientable con frontera tiene una jerarquía.*

Demostración. Dada F una superficie compacta con frontera, construimos una cadena de superficies $F = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ como sigue:

$F_0 = F$.

Para cada $i > 0$:

- Si F_i tiene un único componente en la frontera, pero no es un disco, entonces $H_1(F_i)$ es infinito. En tal caso, por el lema 2.7, hay un arco o una curva no separantes en F_i. Si hay una curva no separante también hay un arco no separante, pues en tal caso, si elijo un punto en la curva, puedo trazar dos arcos, a y a' que vayan de ese punto a puntos distintos en la frontera, y que salgan cada uno de un "lado" de la curva. Pero entonces la unión de a y a' es un arco que tiene número de intersección 1 con la curva, y por lo tanto es no separante. En cualquier caso F_i tiene un arco no separante; sea c_i ese arco.

- Si F_i tiene más de un componente en la frontera, sea c_i un arco entre dos de esas componentes. Obsérvese que c_i es no separante.

Ahora podemos definir F_{i+1} como F_i cortada sobre c_i.

Si este proceso termina, la última superficie debe ser un disco, lo que nos daría una jerarquía para F.

Supongamos entonces que el proceso puede continuar indefinídamente, es decir, que tenemos una cadena infinita de superficies. Como cada corte del segundo tipo disminuye el número de componentes en la frontera, cualquier subcadena consecutiva de este tipo es finita, así que hay una subcadena $F_{i_1} \supset F_{i_2} \supset \ldots$ infinita, donde cada F_{i_j} tiene un solo componente en la frontera.

Si d_i es una copia paralela de la frontera de F_i, $\{d_{i_j}\}$ es una colección de curvas cerradas, ajenas, no triviales en F, así que deben haber 2, digamos d_{i_k} y d_{i_l}, $k < l$, paralelas.

Pero entonces $d_{i_{k+1}}$ tiene un componente paralelo a d_{i_k}, pues queda encerrada entre d_{i_k} y d_{i_l}. Pero entonces podemos deslizar c_k en F_k para que no toque a $d_{i_{k+1}}$. Y entonces c_k separa a F_k, pues está contenida en un anillo, y une dos puntos en un mismo componente de la frontera del mismo. Por lo tanto el proceso debe terminar, y por lo tanto F tiene una jerarquía. ∎

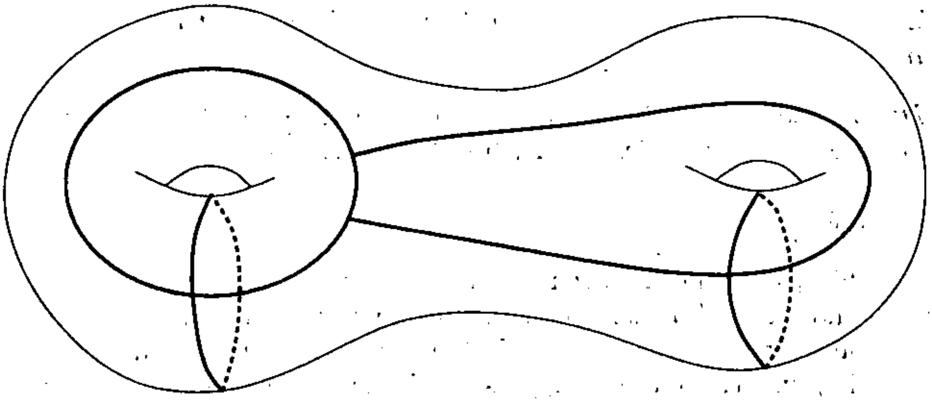


Figura 2.1: Cortando sobre estas curvas obtenemos una jerarquía para un toro doble

Lema 2.11. *Toda superficie cerrada orientable con grupo fundamental no trivial tiene una jerarquía.*

Demostración. Sea F la superficie. Por el lema 2.8, F tiene una curva cerrada no separante en su interior. Si cortamos sobre esa curva, obtenemos una superficie con frontera F', que por el lema anterior, tiene una jerarquía $F' = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n$. Entonces $F \supset F' \supset \cdots \supset F_n$ es una jerarquía para F. ∎

Obsérvese que aunque la definición no lo requiere, podemos pedir que en toda jerarquía cada corte sea no separante, y que todos los cortes, excepto quizá el primero sean sobre arcos con sus extremos sobre los arcos anteriores.

2.1 El teorema de Waldhausen para superficies

Teorema 2.12 (Waldhausen). *Si M y N son superficies compactas con frontera no vacia, y existe $f: M \to N$ continua y propia tal que $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es un isomorfismo, y $f|_{\partial M}: \partial M \to \partial N$ es un homeomorfismo, entonces f es propiamente homotópica a un homeomorfismo, y la homotopía es constante en la frontera.*

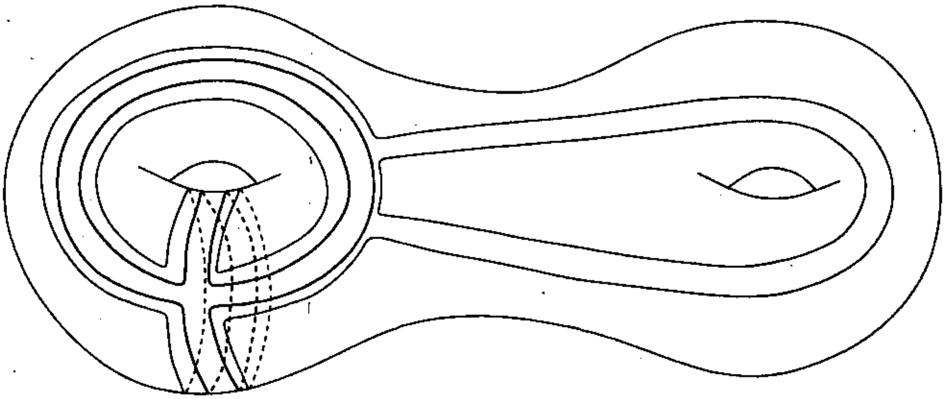


Figura 2.2: Copias paralelas de la frontera de cada corte

Demostración. Como N es compacta, tiene una jerarquía, procederemos por inducción sobre la longitud de esta.

Si la jerarquía tiene longitud 1, entonces N es un disco. Entonces M tiene grupo fundamental 0 y frontera no vacía, y por tanto es un disco. Y ya sabemos que una función entre dos discos que es un homeomorfismo en la frontera es propiamente homotópica a un homeomorfismo y la homotopía es constante en la frontera.

Supongamos cierto el teorema cuando N tiene una jerarquía de longitud n:

Supongamos que la jerarquía de N tiene longitud $n+1$. Sea c el arco con el que empieza la jerarquía.

Por transversalidad, $f^{-1}(c)$ es una colección de curvas o arcos.

Supongamos que $d_j \in f^{-1}(d)$ es una curva. Como $f(d_j)$ está contenida en un arco, es trivial. Y como f_* es un isomorfismo, d_j es trivial. Entonces d_j es frontera de un disco D en M.

Como $f(d_j)$ es trivial en c, es frontera de un disco E inmerso en c. Como E y $f(D)$ tienen frontera común, entre ambos nos dan una esfera inmersa en N. Pero $\pi_2(N) = 0$, es decir dicha esfera es trivial, o sea que $f(D)$ es homotópico a E relativo a ∂N.

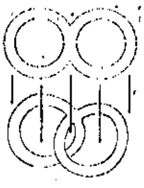
Entonces podemos lograr que $f(D) \subset c$. Por conexidad, una pequeña vecindad regular de D cae en un solo lado de una vecindad regular de c. Entonces podemos "empujar" $f(D)$ hacia ese lado, eliminando D (y d_j) de

$f^{-1}(c)$.

Así que podemos suponer que cada componente de $f^{-1}(c)$ es un arco. Como $f|\partial N$ es un homeomorfismo, y $c\bigcap\partial N$ tiene 2 puntos, $f^{-1}(c)\bigcap\partial M$ tiene dos puntos, es decir, $f^{-1}(c)$ es un solo arco a.

Una función de I en I que preserva la frontera es homotópica a un homeomorfismo de I. (Esto es un caso especial del lema 1.12.) Entonces podemos deformar f de modo que $f|a$ sea un homeomorfismo de a en c. Si cortamos ambas superficies sobre a y c respectivamente, obtenemos un par de superficies que cumplen con todas las hipótesis del teorema, y como la jerarquía de la segunda tiene longitud n, la función entre ellas es propiamente homotópica a un homeomorfismo. Volviendo a pegar sobre a y c, obtenemos un homeomorfismo entre M y N. ■

Ejemplo. El teorema no es cierto si f no es propia. Por ejemplo, consideremos las superficies de la figura. Es claro que la función descrita induce un isomorfismo de grupos fundamentales, sin embargo, las superficies no son homeomorfas, pues tienen distinto número de componentes en la frontera.



Corolario 2.13. *Cualquier superficie compacta orientable con grupo fundamental $\mathbb{Z}$ es homeomorfa a un anillo.*

Demostración. Sea F nuestra superficie. Demostramos en el ejemplo en la página 8 que $\pi_n(F) = \pi_n(S^1 \times I) = 0$ para cualquier $n \geq 2$, por lo que ambas superficies son homotópicamente equivalentes. De aquí deducimos que $H_2(F) = 0$, y por lo tanto $\partial F \neq \emptyset$. Llamemos c a un componente de ∂F.

Mostraremos ahora que la inclusión $i\colon c \to F$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales $i_*\colon \pi_1(c) \to \pi_1(F)$. Para ver esto, supongamos primero que i_* no es inyectiva. Entonces F sería un disco, y su grupo fundamental sería 0.

Tenemos entonces que $i_*([c]) = n[a]$, donde a es el generador de $H_1(F)$ y $n \neq 0$. Cómo c es una curva simple, n debe ser 1, y por lo tanto i_* es suprayectiva.

Sabiendo esto, podemos pedir que la función f que realiza la equivalencia homotópica entre F y $S^1 \times I$ sea propia. De donde se deduce que $f_*([c]) \neq 0$ en $H_1(F)$, pues su imagen no lo es. Y entonces, F tiene por lo menos 2 componentes en su frontera.

Ahora, en cualquier superficie G, rango $H_1(G) \geq$ (componentes de ∂G) $-$ 1. Esto es cierto ya que, si fijamos una de dichas componentes, y tomamos un arco de ella a cada una de las demás, veremos que las clases de homología de dichas componentes son linealmente independientes en $H_1(G)$.

De esta forma, puesto que rango $H_1(F) = 1$, ∂F tiene cuando mucho dos componentes. Si combinamos este resultado con el anterior, tenemos que ∂F tiene exactamente 2 componentes.

Así que podemos suponer que cada una de las componentes de ∂F tiene como imagen a una de las componentes de $\partial(S^1 \times I)$. Y modificando un poco la función, podemos hacerla propia. Además, puesto que la restricción de f a ∂F induce un isomorfismo en los grupos fundamentales, podemos hacer que sea un homeomorfismo entre las fronteras. Aplicando ahora el teorema anterior, tenemos el resultado deseado. ∎

Armados con este corolario, podemos ahora demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *Sean M y N superficies cerradas orientables, con $\pi_1(N)$ no trivial, y tales que existe una función $f: M \to N$ continua que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Entonces f es homotópica a un homeomorfismo.*

Para demostrar este teorema utilizaremos resultados de Álgebra, en particular dos corolarios de los teoremas de forma normal para productos amalgamados y para extensiones HNN. Como estos resultados se salen del tema de este trabajo, sólo los enunciamos aquí, y remitimos al lector interesado a [3].

2.1.1 Productos Amalgamados y Extensiones HNN

Sean

$$G = < x_1, \ldots; r_1, \cdots >$$

y

$$H = < y_1, \ldots ; s_1, \cdots >$$

grupos con sus presentaciones, y sean $A < G$ y $B < H$ subgrupos tales que existe un isomorfismo $\Phi\colon A \to B$. El **producto amalgmado** de G y H sobre A es el grupo $G *_A H$ con presentación

$$G *_A H = < x_1, \ldots, y_1, \ldots ; r_1, \ldots, s_1, \ldots, a = \Phi(a), a \in A > .$$

Se puede demostrar que esta definición es independiente de las presentaciones elegidas para G y H.

Esta construcción tiene interes para nosotros porque si X y Y son espacios topológicos tales que $\pi_1(X) = G$ y $\pi_1(Y) = H$, y hay subespacios U, W de X y Y respectivamente, tales que U es homemomorfo a W y $\pi_1(U) = \pi_1(W) = A$, entonces, por el teorema de Seifert-Van Kampen, el grupo fundamental del espacio resultante de identificar U con W es $G *_A H$. La propiedad algebráica que nos interesa es la siguiente: Dado cualquier producto

$$g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_n h_n = 1 \in G *_A H,$$

tal que $g_i \in G$ y $h_i \in H$, se cumple que alguna $g_i \in A$ o alguna $h_i \in B$.

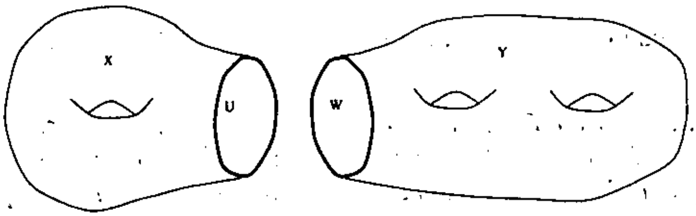


Figura 2.3: La interpretación geométrica del producto amalgamado.

Otra construcción geométrica que nos interesa es la de identificar dos copias de un subespacio W dentro de un espacio X. Algebráicamente esto corresponde a tener un grupo G y dos subgrupos A y B, con un isomorfismo $\Phi\colon A \to B$ entre ellos. La construcción resultante se llama la **extensión Higman-Neumann-Neumann** (HNN) de G relativa a A y B, y se define como

$$G* = < x_1, \ldots, t; r_1, \ldots, t^{-1} a t = \Phi(a), a \in A > .$$

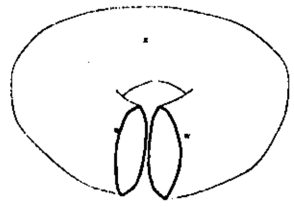


Figura 2.4: La interpretación geométrica de la extensión HNN.

Intuitivamente la t proviene del lazo extra que añadimos al espacio al identificar dos subespacios dentro de el.

Como en el caso anterior, tenemos una propiedad algebraica que nos interesa en particular: Dado un producto

$$g_0 t^{\epsilon_1} g_1 t^{\epsilon_2} \dots t^{\epsilon_n} g_n = 1 \in G*$$

existe un subproducto $t^{-1} g_i t$ con $g_i \in A$ o $t g_j t^{-1}$ con $g_j \in B$.

Procedemos ahora a la demostración del teorema.

Demostración. Como $\pi_1(N) \neq 0$, hay una curva simple no trivial $c \in N$. $f^{-1}(c)$ está compuesta de curvas simples en M.

Si $f^{-1}(c)$ tiene componentes triviales, podemos modificar f para eliminarlos como en el teorema anterior.

Para cada componente no trivial d de $f^{-1}(c)$, $f_*([d]) = n[c]$. Como $f|d_*$ es inyectiva, $n \neq 0$. Como f_* es un isomorfismo, esto significa que $[d] = n[q]$, para alguna $[q] \in \pi_1(M)$. Pero como d es una curva simple, $n = 1$, de modo que $f_*([d]) = [c]$, y $f|d$ es homotópica a un homeomorfismo de d en c. Modificamos f en una vecindad de d para que $f|d$ sea homeomorfismo.

Como f es un isomorfismo en el grupo fundamental, lo es en la primera homología. En particular, eso dice que dos cualesquiera de las preimágenes de c son homólogas en M, y por lo tanto separan M.

Demostraremos adelante que dos de estás preimágenes deben ser paralelas. Suponiendo esto, llamemos d_1 y d_2 a dichas preimágenes, y L al anillo que bordean en M. Tomemos un arco a en L que una los puntos base de d_1 y d_2. La imagen bajo f de a es un lazo en $\pi_1(c)$. Si construimos una función $g: L \to c$ tal que $g|d_i = f|d_i$ y tal que la $g(a)$ sea homotópica a $f(a)$, tendremos que g es homotópica a $f|L$. Podemos por lo tanto sustituir $f|L$ por g.

Ya que c es no trivial en N, después de aplicar el paso anterior suficientes veces, llegamos a que $f^{-1}(c)$ es una sola curva no trivial d en M, y tal que $f|d$ es un homeomorfismo de d en c.

Cortando ambas variedades por dichas curvas, obtenemos un par de superficies con frontera, y una función entre ambas que es un homeomorfismo entre las fronteras, y que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Aplicando el teorema anterior, dicha función es propiamente homotópica a un homeomorfismo. Si volvemos a pegar las variedades sobre d y c respectivamente, obtenemos la homotopía deseada.

Sólo falta demostrar que si c tiene más de una preimagen, dos deben ser paralelas. Usaremos el método de "cazar arcos".

Llamemos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a las preimágenes de c. Sea $p \in c$ el punto base para $\pi_1(N)$, y $p_1, \ldots, p_n$ la preimágenes de p. Tomaremos $\pi_1(M)$ con base en p_1

Sea a' un arco entre p_1 y p_2. $f(a')$ es una curva cerrada en N. Como f_* es sobre, hay una curva b en M tal que $f_*(b) = (f_*(a'))^{-1}$. Sea a el arco resultante de unir b y a'. La imagen de a bajo f es trivial en N. Después de poner a a en posición general respecto a $\{d_i\}$, podemos modificarlo para que sus únicas intersecciones ocurran en los $\{p_i\}$. Modifiquemos también a para que la cantidad de intersecciones con los d_i sea mínima.

Como cada intersección es transversal, $f(a)$ atraviesa c en cada una de ellas. Si c es separante, esto quiere decir que $f(a)$ consta de lazos alternadamente a uno y otro lado de c. Por el teorema de forma normal para productos amalgamados esto quiere decir que alguno de esos lazos es homotópico a uno en c.

Si c no es separante, obtenemos el mismo resultado, esta vez usando el teorema para extensiones HNN.

Supongamos (renumerando si es necesario) que el sublazo de $f(a)$ que pertenece a $\pi_1(c)$ une d_1 con d_2. Componiendo el subarco de a con una curva adecuada en d_1, obtenemos un arco b entre d_1 y d_2 que no toca a ninguna otra preimagen de c y cuya imagen bajo f es una curva trivial.

Fijamos el punto base de M como p_1. Entonces $\pi_1(d_2) = d^{-1}\pi_1(d_1)d$, de donde $\pi_1(d_2) = \pi_1(d_1)$. Tomamos el espacio cubriente $\widetilde{M}$ de M correspondiente a $\pi_1(d_1)$. Por la ecuación anterior, sabemos que d_2 se levanta a dicho espacio cubriente.

Como $M \setminus (d_1 \bigcup d_2)$ es disconexo, $\widehat{M} \setminus (\widehat{d_1} \bigcup \widehat{d_2})$ también lo es. Tomemos una componente $\widetilde{L}$ de $\widetilde{M}$ que contenga la preimagen de b.

Como $\pi_1(\widetilde{d}_1) \subset \pi_1(\widetilde{L}) \subset \pi_1(\widetilde{M})$, $\pi_1(\widetilde{L}) = \mathbb{Z}$, y $\widetilde{L}$ es un anillo, por el teorema de cobordismo. Y como $\partial\widetilde{L}$ mapea en $\{d_1, d_2\}$ con índice 1, $\widetilde{L}$ mapea en una componente L de $M \setminus (d_1 \bigcup d_2)$ con índice 1, así que dicha componente es un anillo, y d_1 es paralelo a d_2. ∎

Ejemplo. La hipótesis de que el grupo fundamental sea infinito no se puede eliminar, pues el teorema no es cierto para la esfera. La función constante $f: S^2 \to S^2$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales, pero como S^2 no es contraible, f no es homotópica a un homeomorfismo.

Corolario 2.15. *Si M y N son superficies compactas, $\pi_1(M)$ no es trivial, y $f: M \to N$ es una función continua y propia tal que $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es inyectiva, entonces f es propiamente homotópica a una función cubriente $M \mapsto N$, o M es un anillo y f es propiamente homotópica a una función $g: M \to \partial N$.*

Demostración. Sea $\tilde{N}$ es espacio cubriente de N correspondiente al subgrupo $f_*(\pi_1(M))$. f se levanta a una función $\tilde{f}: M \to \tilde{N}$ tal que $\tilde{f}_*$ es un isomorfismo.

Sea c un componente de ∂M. Como f es propia, $\tilde{f}$ también es propia, así que $\tilde{f}(c) \subset \partial N$. Como M no es un disco, c no es trivial en M, así que su imagen tampoco lo es. Entonces $\tilde{f}(c) = nd$, con d un componente de la frontera de N. Pero entonces, $c = ne$ con e alguna curva en M. Como C es simple, esto sólo puede ser si $n = 1$, así que $\tilde{f}$ puede deformarse a ser un homeomorfismo en cada componente de ∂M.

Si dos componentes de ∂M tienen la misma imagen, cazando arcos como en la demostración del teorema 2.14, vemos que son paralelas. Entonces M es un anillo, y podemos deformar $\tilde{f}$ a una función $\tilde{g}: M \to \partial\tilde{N}$. Entonces f es homotópica a la proyección de $\tilde{g}$.

Si cada componente de ∂M tiene distinta imagen, entonces el grado de $\tilde{f}$ es 1, puesto que cada componente de dichas imágenes tiene una sola preimagen. Pero entonces cada componente de $\partial\tilde{N}$ tiene preimagen, así que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo entre las fronteras de M y $\tilde{N}$. Entonces $\tilde{f}$ es homotópica a un homeomorfismo $\tilde{g}: M \to \tilde{N}$, y f es homotópica a la proyección de dicho homeomorfismo, que es una transformación cubriente. ∎

homotópica. Así que el problema de clasificarlas se convierte en el de resolver la conjetura de Poincare y encontrar todas las acciones libres de grupos sobre la 3-esfera. Este es un problema difícil, que está lejos de ser resuelto.

2) El que trataremos aquí, grupo fundamental infinito. Como M es irreducible $\pi_2(M) = 0$. Si tomamos al cubriente universal $\tilde{M}$, este tiene $\pi_1(\tilde{M}) = \pi_2(\tilde{M}) = 0$, (porque también es irreducible), por lo que $\pi_3(\tilde{M}) = H_3(\tilde{M})$. Pero como $\tilde{M}$ es una 3-variedad no compacta $H_3(\tilde{M}) = H_4(\tilde{M}) = \cdots = 0$. De donde, por el teorema de Hurewicz (1.7), $\pi_3(\tilde{M}) = \pi_4(\tilde{M}) = \cdots = 0$. Se sigue que $\pi_3(M) = \pi_4(M) = \cdots = 0$. Esto quiere decir que toda la estructura algebraica de la variedad está en su grupo fundamental, y sugiere que este último debería determinarla completamente. El resto de este capítulo se dedicara a explorar un caso en el que es así.

Como otra aplicación de estas ideas, considerese el caso de una función $f: M \to N$ continua que induce una inyección entre $\pi_1(M)$ y $\pi_1(N)$, donde N y M son irreducibles y ∂N es no vacía. Entonces podemos decir que ∂M es no vacía. Para ver esto, consideremos el espacio cubriente $\widetilde{N}$ de N correspondiente al subgrupo $f_*(\pi_1(M))$. Por el argumento utilizado en el párrafo anterior, sabemos que M y $\widetilde{N}$ son homotópicamente equivalentes. En particular, $H_3(M) \cong H_3(\widetilde{N})$, así que ambas son cerradas o ambas tienen frontera. Pero $\widetilde{N}$ es espacio cubriente de una variedad con frontera, y por lo tanto tiene frontera. De donde deducimos que $\widetilde{M}$ tiene frontera y por lo tanto M tiene frontera.

Teorema 3.12. *Sea F una superficie orientable encajada en una 3-variedad irreducible M, de forma que $\pi_1(F)$ se inyecta en $\pi_1(M)$. Supongamos que hay un grupo G que es isomorfo al grupo fundamental de una superficie y tal que $\pi_1(F) < G < \pi_1(M)$. Entonces $G = \pi_1(F)$.*

Demostración. Tomemos el espacio cubriente $\widetilde{M}$ de M correspondiente a G. Como $\pi_1(F) < G$, el encaje de F en M se levanta a $\widetilde{M}$. Pero $\widetilde{M}$ es irreducible, por ser cubierta de una 3-variedad irreducible, y tiene grupo fundamental infinito, por lo que es homotópicamente equivalente a una superficie S, tal que $\pi_1(S) = G$. Componiendo el encaje de F en $\widetilde{M}$ con la equivalencia homotópica, tenemos una función entre dos superficies que inyecta el grupo fundamental, por lo que su grado k es el índice de $\pi_1(F)$ en $G = \pi_1(S)$, que no es cero. Regresando a $\widetilde{M}$, tenemos que $[F] = kS'$, donde S' es el generador de $H_2(\widetilde{M})$. Pero F está encajado en $\widetilde{M}$, por lo que $k = 1$. De modo que el índice de $\pi_1(F)$ en G es uno, es decir $\pi_1(F) = G$. ∎

Lema 3.13. *Si una variedad compacta, orientable, con frontera tiene primera homología finita, entonces su frontera consta de esferas.*

Demostración. Supongamos que no es así. Sea M una variedad así, y sea F una superficie en ∂M distinta de una esfera. En F hay dos curvas, a y b, con número de intersección 1. Como $H_1(M)$ es finita, hay enteros m y n tales que $n[a] = m[b] = 0$. Entonces hay superficies S y S' inmersas en M tal que $n[a] = \partial S$ y $m[b] = \partial S'$. Consideremos $S \bigcap S'$. Como es la intersección de dos superficies, consta de curvas cerradas o de arcos que van de una frontera a la otra. Entonces $\partial(S \bigcap S')$ tiene un número par de puntos. Pero $\partial(S \bigcap S') = \partial S \bigcap \partial S' = a \bigcap b$; que consta de un solo punto. Esto es una contradicción, y por lo tanto, el teorema es cierto. ∎

Lema 3.14. *Si una variedad compacta, orientable, irreducible, con frontera no vacía tiene primera homología finita, entonces es una bola.*

Demostración. Por el lema anterior, su fontera consta de esferas, y como la variedad es irreducible, una cualquiera de ellas es frontera de una bola. ∎

Lema 3.15. *Una 3-variedad M tiene primera homología infinita si y sólo si contiene una superficie propiamente encajada no separante.*

Demostración. Si hay una superficie F no separante, como en la demostración del lema 2.7, hay una curva c que la corta en un solo punto. Esta curva no puede tener rango finito, puesto que cualquier múltiplo nc tiene número de intersección n con F. Por lo tanto c tiene grado infinito y $H_1(M)$ es infinito.

Si la primera homología es infinita, hay un epimorfismo $f_* : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$. Lo realizamos por medio de una función continua $f : M \to S^1$ y consideramos un punto $p \in S^1$. $f^{-1}(p)$ es una colección de superficies en M. Sea c una curva tal que $[f(c)]$ es el generador de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Puesto que el número de intersección de p con $f(c)$ es 1, el número de intersección de $f^{-1}(p)$ con c es 1. De modo que algún componente de $f^{-1}(p)$ tiene número de intersección impar con c, y por lo tanto es no separante. ∎

3.3 Teorema de Waldhausen

Una 3-variedad orientable M es **Haken** si hay una sucesión de 3-variedades $M = M_0, M_1, \ldots, M_n = \bigcup$ 3-bolas, tales que cada M_i es el resultado de cortar M_{i-1} sobre una superficie bilateral incompresible propiamente encajada, F_i, distinta de S^2.

Lema 3.16. *Si N es una 3-variedad compacta irreducible con frontera entonces N es Haken.*

Demostración. Construimos inductivamente la siguiente sucesión de 3-variedades:

$M_0 = M$.

Para cada $i \geq 1$: Si ∂M es compresible, sea F_i un disco de compresión.

Si ∂M_{i-1} es incompresible, $H_1(M_{i-1})$ es infinito, así que hay una superficie con frontera propiamente encajada F_i no separante.

En cualquier caso, sea M_i el resultado de cortar M_{i-1} sobre F_i.

Obsérvese que este proceso puede continuarse siempre que la frontera de M_j no sea una unión de esferas. En este caso, como M_j es irreducible, es una unión de bolas, así que ya tendríamos la jerarquía buscada.

Necesitamos demostrar que no podemos continuar indefinidamente con este proceso. Supongamos que sí. Tenemos entonces una sucesión infinita de superficies F_i. Debe de haber una subsucesión infinita F_{i_k} en la que cada superficie sea incompresible en M. De no ser así, se tendría que a partir de cierta N, todas las F_i con $i > N$ serían discos de compresión de ∂M_{i-1}. Pero esto no puede ser, porque cada compresión disminuye el género de la frontera, por lo que solo se puede hacer un número finito de veces.

Obsérvese que $M_{i_k} \subset M_{i_{k-1}}$. Sean $\{G_{kj}\}$ las componentes de ∂M_{i_k} que no son parte de $\partial M_{i_{k-1}}$. Estos son cuando mucho dos. Para ver esto, considerese la vecindad regular V_k de F_{i_k} en M_{i_k}. Como F_{i_k} es bilateral en M_{i_k}, $\partial V_k \backslash \partial M_{i_k}$ tiene dos componentes. Como desde cualquier punto de las G_{kj} puedo llegar a F_{i_k}, debo tocar a una de las dos componentes de $\partial V_k \setminus \partial M_{i_k}$, de modo que hay cuando mucho dos G_{kj}.

Tenemos entonces una colección infinita $\{G_{kj}\}_{k,j}$ de superficies cerradas en M, de modo que, por el teorema 2.9, hay dos de ellas que son paralelas. Tenemos dos posibilidades:

1. Las paralelas son G_{k1} y G_{k2} para alguna k. En este caso, M_{ik} es homeomorfa a $G_{k1} \times I$. Pero un producto es Haken, puesto que una superficie siempre tiene una jerarquía, y podemos cortar el producto sobre cilindros cuya base son las curvas de la jerarquía de la superficie. Por lo tanto M es Haken.

2. Las paralelas son G_{ru} y G_{sv}, con $r < s$. Como $M_{i_s} \subset M_{i_r}$, G_{ru} y G_{sv} son paralelas en M_{i_r}. Entonces, F_{i_r+1} está contenida en un producto, pero solo toca a una de las fronteras del mismo, por lo que debe ser

separante. Esto es una contradicción a la manera en la que escogimos, lo que demuestra que el proceso de cortar a M debe terminar, y por lo tanto M es Haken.

■

Ejemplo. El exterior (en S^3) de un nudo no trivial es Haken.

Sabemos por teoria de nudos que un nudo es no trivial si y sólo si su exterior no es un toro sólido. Tomemos el exterior de un nudo, y supongamos que no es Haken. Esto quiere decir que la frontera es compresible. Si cortamos sobre un disco de compresión, obtenemos una variedad irreducible, cuya frontera es una esfera, es decir, la variedad es una bola. De modo que la variedad original (antes de cortar), es un toro sólido, y el nudo es trivial.

Una variedad es **suficientemente grande** si tiene una superficie incompresible propiamente encajada.

Lema 3.17. *Si M es una 3-variedad cerrada, irreducible, suficientemente grande, entonces es Haken.*

Demostración. Sea F_1 la superficie incompresible encajada en M. Cortando sobre esta superficie, obtenemos una o dos variedades irreducibles con frontera, que por el lema anterior tienen una jerarquía, de donde obtenemos una jerarquía para la variedad original. ■

Ejemplo. Si tomamos el exterior de dos nudos no triviales y los identificamos por su frontera obtenemos una variedad suficientemente grande. La superficie incompresible es precisamente la frontera común, que debe ser incompresible por que de otro modo el disco de compresión nos diria que uno de los dos lados es un toro sólido, o sea que uno de los nudos es trivial.

Ejemplo. Un espacio cubriente finito de una variedad suficientemente grande es suficientemente grande.

Demostración. Sea M la variedad sufucientemente grande y $(\widetilde{M}, g)$ un espacio cubriente finito. Sea F una superficie incompresible propiemente encajada en M. $\widetilde{F} = g^{-1}(F)$ es una superficie, pues g tiene índice finito. Como $(g \circ i)_* : \widetilde{F} \to M$, $i_* : \pi_1(\widetilde{F}) \to \pi_1(\widetilde{M})$ es inyectiva, por lo que $\widetilde{M}$ es suficientemente grande. ■

Teorema 3.18 (Waldhausen). *Si M y N son variedades orientables, compactas e irreducibles, con frontera no vacia, y existe $f: M \to N$ propia tal que $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es un isomorfismo, y $f|_{\partial M}: \partial M \to \partial N$ es un homeomorfismo, entonces f es propiamente homotópica a un homeomorfismo $M \mapsto N$.*

Demostración. Puesto que M y N son irreducibles y tienen frontera no vacía, son Haken. Como $f: M \to N$ es una función propia que induce un isomorfismo entre $\pi_1(M)$ y $\pi_1(N)$, f tiene grado 1. Queremos demostrar que es posible deformar f continuamente hasta convertirla en un homeomorfismo. Procederemos por inducción sobre la longitud de la jerarquía de N.

Si es 0:

N es una 3-bola, entonces $\pi_1(N) = 0$, así que $\pi_1(M) = 0$. Como $\partial N \neq \emptyset$, y $f_{\partial M}: \partial M \to \partial N$ es homeomorfismo, ∂M es una esfera. Dicha esfera debe ser frontera de una bola, pues M es irreducible. Por lo tanto, M es una bola.

Entonces f es una función de la bola en la bola que restringida a la frontera es un homeomorfismo de S^2 y por lo tanto, por el lema 1.12, f es propiamente homotópica a un homeomorfismo de la bola en la bola que coincide con f en S^2.

Ahora supongamos que el teorema es cierto para variedades cuya jerarquía tiene longitud n y supongamos que la jerarquía de N tiene longitud $n + 1$.

Sea F la primera superficie de la jerarquía. Podemos suponer que $\partial F \neq \emptyset$. Triangulando adecuadamente, tenemos que $f^{-1}(F)$ es una 2-variedad compacta en M, es decir es un conjunto finito de superficies ajenas.

Si $G \subset f^{-1}(F)$ es una componente compresible, sea D un disco de compresión. La imagen de D es un disco en N, por lo que la imagen de ∂D es una curva inmersa en F que es trivial en N. Entonces, como F es incompresible, hay un disco inmerso en F con dicha frontera. Este disco es homotópico a la imagen de D, pues $\pi_2(N) = 0$. Utilizamos esta homotopía para deformar a f en una vecindad de D, de forma que $f(D) = D' \subset F$. Después, aplastamos la imagen de una vecindad $D \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ de D, para que caiga toda en D'. Ahora empujamos el centro de dicha vecindad hacia afuera de F, eliminando a D de la preimagen de F, es decir, cortando a G sobre D.

Como cada vez que efectuamos uno de estos cortes el genero del componente cortado disminuye, el proceso termina tras un número finito de pasos

Si algún componente S de $f^{-1}(F)$ es una esfera, esta es trivial en M, porque M es irreducible. Entonces es frontera de una bola $B \subset M$. Por otro lado, $f(S) \subset F$, y como $\pi_2(F) = 0$, $f(S)$ es frontera de una bola B' inmersa en F. Como $\pi_3(M) = 0$, B' es homotópica a $f(B)$. Podemos por tanto modificar f de modo que $f(B) = B' \subset F$. Tomamos una vecindad regular de B en M suficientemente pequeña, de modo que su imagen este contenida en una vecindad producto de F. La vecindad de B, por conexidad, cae de un solo lado de F. Si "empujamos" B hacia ese lado, la eliminaremos de la preimagen de F. En particular, $f^{-1}(F)$ tiene una esfera menos.

Ahora $f^{-1}(F)$ es una colección de superficies incompresibles en M.

Como f tiene grado 1, es sobre, de modo que $f^{-1}(F) \neq \emptyset$.

Ya que $f|\partial M$ es un homeomorfismo, $\partial f^{-1}(F)$ y ∂F tienen el mismo número de componentes. Consideremos una componente G de $f^{-1}(F)$. Puesto f_* induce una inyección de $\pi_1(G)$ en $\pi_1(F)$, el corolario 2.15 dice que G no es cerrada. Como el grado de f es 1, es sobre, en particular $\partial F = f(\partial G)$. Pero como $f|\partial G$ es homeomorfismo, manda componentes de ∂G en componentes de ∂F. Esto quiere decir que ∂G tiene por lo menos tantos componentes como ∂F. Por lo tanto, G tiene todos los componentes de $\partial f^{-1}(F)$. Como ningun componente es cerrado, tenemos que $G = f^{-1}(F)$.

Podemos entonces aplicar el teorema de Waldhausen para superficies a G y F, para obtener una homotopía de $f|G : G \to F$ a un homeomorfismo, que podemos extender a una vecindad producto de G en M. Tenemos entonces que F y G son homeomorfas, y que f restringida a ellas es precisamente un homeomorfismo.

Si ahora cortamos M y N por estas superficies, obtenemos dos variedades M' y N' y una función f' que cumplen las hipótesis del teorema, y tales que N' tiene una jerarquía de longitud n. Entonces f' es propiamente homotópica a un homeomorfismo. Como no se modifica a f' en la frontera de las variedades, podemos volver a pegar por las superficies que obtuvimos, por lo que f es propiamente homotópica a un homeomorfismo. ■

Corolario 3.19. *Si M es una 3-variedad compacta e irreducible, y tal que*

$$\pi_1(M) = \pi_1(F),$$

donde F es una superficie, entonces $M \cong F \times I$.

Demostración. Consideremos el espacio cubriente universal de M, que denotamos $\widetilde{M}$. Sabemos que $\pi_1(\widetilde{M}) = 0$, y como M es irreducible, $\pi_2(\widetilde{M}) = \pi_2(M) = 0$. Entonces $\pi_3(\widetilde{M}) = H_3(\widetilde{M})$. Pero como $\pi_1(M)$ es infinito, $\widetilde{M}$ no es compacto, por lo que $H_3(\widetilde{M}) = 0$. Así que $\pi_4(\widetilde{M}) = H_4(\widetilde{M})$. Y como $\widetilde{M}$ es una 3-variedad, $H_4(\widetilde{M}) = 0$. Continuando de este modo, tenemos que

$\pi_i(\widetilde{M}) = 0$ para cualquier i, por lo que $\pi_i(M) = 0$ para cualquier $i \geq 2$. El mismo argumento nos dice que esto también es cierto para $F \times I$, por lo que tenemos que $\pi_1(M) = \pi_1(F \times I)$, y por lo tanto M es homotópicamente equivalente a $F \times I$ y por lo tanto a F.

De aquí sabemos que $H_3(M) \cong H_3(F) \cong 0$, por lo que $\partial M \neq \emptyset$.

Sea S un componente de ∂M. Afirmamos que la inclusión $i: S \to M$ induce un isomorfismo $i_*: \pi_1(S) \to \pi_1(M)$. Para demostrar esto, mostramos primero que i_* es inyectiva. Supongamos que no lo es, entonces S es compresible en M. Sea D un disco de compresión. Si D es separante, induce una separación de $\pi_1(M)$ como un producto libre $G_1 * G_2$, donde cada G_i es el grupo de uno de los componentes de $M \setminus D$. Si D no es separante, induce una separación de $\pi_1(M)$ como producto libre de $\mathbb{Z}$ con el grupo de $M \setminus D$. En cualquier caso, tendríamos expresado a $\pi_1(M)$, que es el grupo de una superficie cerrada, como producto libre de dos grupos, por lo que aplicando el teorema 2.5 sabemos que uno de los dos grupos es trivial. Entonces una de las dos partes en que separamos a M tiene grupo fundamental trivial, y como es irreducible, es una bola, por lo que su frontera, que consta de una parte de S junto con D, es una esfera, así que D no es un disco de compresión, e i_* es inyectiva.

Para ver que es sobre, consideremos la composición de i con una equivalencia homotópica g de M a F. $g \circ i$ es una función entre dos superficies cerradas que induce una inyección de grupos fundamentales, así que es homotópica a una función cubriente, por lo que $(g \circ i)_*([S])$ es un múltiplo del generador de $H_2(F)$, y por lo tanto $i_*([S])$ es un múltiplo del generador de $H_2(M)$. Pero como S está encajada en M, S no puede representar un múltiplo propio de ninguna clase de homología, por lo que $g \circ i$ tiene grado 1, de donde $(g \circ i)_*$, así como i_* son sobre.

Entonces podemos pedir que la equivalencia homotópica $f: M \to F \times I$ sea propia. Así que $[f(S)] \neq 0$ en $H_2(F)$, y por lo tanto $[S] \neq 0$ en $H_2(M)$, lo que nos dice que S no es el único componente de ∂M.

Pero cualquier conjunto de $\#(\partial M) - 1$ componentes de la frontera de una 3-variedad es linealmente independiente, ya que si tomamos una combinación de ellas igual a cero, existe una función propia de una 3-variedad en M tal que la frontera de la variedad cae en los componentes escogidos de la frontera de M. Pero como es propia, el grado está definido. Y como no toca a una de las componentes de ∂M, es cero. De modo que los coeficientes de la combinación lineal son cero.

Así que, como rango $H_2(M) = 1$, ∂M tiene a lo mas 2 componentes. Combinando este resultado con el anterior, tenemos que ∂M tiene exactamente 2 componentes.

La imagen de cada una de las componentes de la frontera es homotópica a la frontera de $F \times I$. Modificando f, podemos mandar cada uno de los componentes de ∂M a un componentes distinto de $\partial F \times I$. Como f es isomorfismo de grupos fundamentales, f restringida a cada componente de la frontera es una inyección entre los subgrupos correspondientes. Aplicando el argumentos usado en la demostración de Waldhausen, f restringida a cada componente de la frontera es homotópica a un homeomorfismo.

Obtenemos así una función entre M y $F \times I$ que induce un isomorfismo en los grupos fundamentales y que es un homeomorfismo en la frontera. Aplicando el teorema de Waldhausen obtenemos el resultado deseado. ∎

Ahora podemos demostrar el teorema de Waldhausen para variedades cerradas:

Teorema 3.20 (Waldhausen). *Sean M y N variedades cerradas, irreducibles, N suficientemente grande y tales que $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$, y existe una función $f: M \to N$ continua tal que f_* es un isomorfismo. Entonces f es homotópica a un homeomorfismo entre M y N.*

Demostración. Sea $F \in N$ una superficie incompresible. Modificando si es necesario a f para que sea transversal a F, tenemos que $f^{-1}(F)$ es una colección de superficies en M. Si alguna de estas superficies no es incompresible, modificamos f cortando por discos de compresión y eliminamos esferas por los métodos usados en teoremas anteriores. Tenemos entonces que $f^{-1}(F)$ es una colección de superficies incompresibles en M. Sea G una de dichas superficies. Como $i_*: \pi_1(G) \to \pi_1(M)$ y $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ son inyectivas, $(f|G)_*: \pi_1(G) \to \pi_1(F)$ es inyectiva, por lo que $f|G$ es homotópica a un mapeo cubriente de G en F. Entonces, $f(G)$ representa un múltiplo de $[F]$ en $H_2(N)$, y por lo tanto, G es un múltiplo de una clase de homología en M. Pero como G está encajada, no es un múltiplo mayor que 1, de donde G es homeomorfa a F.

Supongamos que hay más de una superficie en $f^{-1}(F)$. Basaremos $\pi_1(N)$ en un punto $p \in F$, y $\pi_1(M)$ en una de sus preimágenes. Tomemos un arco a que una esa preimagen con otra. $f(a)$ es un lazo en N. Como f_* es sobre, existe un lazo b en M tal que $f_*([b]) = [f(a)]^{-1}$. Entonces el arco c compuesto por b seguido por a cumple que $f_*([c]) = 0$.

Arreglamos c para que intersecte a $f^{-1}(F)$ transversalmente y en preimágenes de p. Entonces $f(c)$ es un producto de lazos, alternadamente a uno y otro lado de F, que en total representan el elemento trivial en $\pi_1(N)$.

Si F es separante, induce una separación de $\pi_1(N)$ como producto amalgamado. Como los sublazos están a lados alternados de F, sus clases de homotopía están alternadamente en uno y el otro de los factores del producto amalgamado. De modo que el producto total puede ser trivial sólo si uno de los sublazos está en el subgrupo representado por F. Componiendo entonces el subarco correspondiente con un lazo adecuado en una preimagen de F, obtenemos un arco d entre dos preimágenes de F, F_1 y F_2, cuya imagen bajo f es trivial y que no toca a ninguna otra preimagen.

Como F_1 y F_2 son homólogas (salvo signo), separan a M en varias componentes. Consideremos la componente M' que contiene a d. La inclusión de $\pi_1(F_1)$ y $\pi_1(F_2)$ en $\pi_1(M')$ es la misma, ya que $f(d)$ es trivial.

En caso de que F no sea separante, induce una estructura en $\pi_1(N)$ de extensión HNN de otro grupo, y el argumento anterior se aplica casi intacto.

Tomemos el espacio cubriente $\widetilde{M}$ de M' correspondiente a $\pi_1(F_1)$. $\widetilde{M}$ es una 3-variedad con frontera cuyo grupo fundamental es el de una superficie. Como es el espacio cubriente de una variedad irreducible, $\widetilde{M}$ es irreducible, de donde $\pi_n(\widetilde{M}) = 0$ para cualquier $n \geq 2$, y por lo tanto, $\widetilde{M}$ es homotópicamente equivalente a la superficie, así que $H_2(\widetilde{M}) = \mathbb{Z}$. Como F_1 y F_2 son componentes de la frontera de M' y ambas se levantan a $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}$ tiene por lo menos dos fronteras. Como $H_2(\widetilde{M})$ tiene un solo generador, $\widetilde{M}$ tiene cuando mucho 2 fronteras, es decir las preimagenes de F_1 y F_2 son precisamente las fronteras de $\widetilde{M}$. Ambas son homólogas, puesto que sólo pueden representar al generador de $H_2(\widetilde{M})$. De modo que $[\partial(\widetilde{M})] = [F_1 \bigcup F_2] = 0$, así que $\widetilde{M}$ es compacto.

Aplicamos entonces el teorema anterior a $\widetilde{M}$, y deducimos que es homeomorfa a el producto de una superficie por un intervalo. Y como en F_1 y F_2 la función cubriente tiene grado uno, $\widetilde{M}$ es un espacio cubriente de M' de grado uno, es decir es homeomorfo a M', por lo que F_1 y F_2 son paralelas y $M' \cong F \times I$.

Tomemos una vecindad regular V de M' en M. $V \setminus M'$ es disconexa. Como f es transversal a F_1 y F_2, cada uno de los componentes de $V \setminus M'$ está en el lado contrario a F que M', y por lo tanto, ambas están al mismo lado. Como también $f(M') \cong F$, podemos modificar f para que $f(M') = F$. Podemos ahora empujar toda la imagen hacia el lado de F donde están las componentes de $V \setminus M'$, eliminando así dos componentes de la preimagen de F.

No podemos eliminar a todas las superficies, porque f tiene grado uno, así que no es posible que ningún subconjunto tenga preimagen vacía, de modo que, repitiendo suficientes veces el proceso anterior, debemos terminar con un único componente en $f^{-1}(F)$.

Entonces, tenemos una superficie encajada en M que va de manera homeomorfa en F. Si cortamos a M y a N sobre estas superficies, tendremos un par de variedades con frontera. Aplicamos el teorema de Waldhausen a ellas, y obtenemos un homeomorfismo que coincide con f en la frontera de las variedades. Podemos entonces volverlas a pegar, con lo que obtenemos un homeomorfismo entre M y N. ∎

Corolario 3.21. *Si M es compacta, N es Haken, ambas son orientables, irreducibles y con frontera incompresible, y existe una función $f: M \to N$ propia tal que $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es un isomorfismo, entonces f es propiamente homotópica a un homeomorfismo $M \mapsto N$, o M es un producto, y f es propiamente homotópica a una función $g: M \to \partial N$.*

Demostración. N y M son ambas cerradas o ambas con frontera, ya que son irreducibles y tienen el mismo grupo fundamental. Si son cerradas, f es, por vacuidad, un homeomorfismo en la frontera, así que el teorema de Waldhausen dice que f es homotópica a un homeomorfismo.

Si M tiene frontera, consideremos un componente F de la misma. Como f es propia, $f(F) \subset \partial N$. Como f_* es inyectiva, $f|F$ es homotópica a una función cubriente de un componente S de ∂N. Pero si el grado de la función cubriente es n, la imagen de la clase $[F]$ en $H_2(M)$ es la clase $[nS]$ en $H_2(N)$ y por lo tanto $[F] = nf_*^{-1}([S])$. Pero F esta encajada, por lo que $n = 1$. Así que f es homotópica a un homeomorfismo en cada componente de la frontera. Si f induce una biyección entre las componentes de la frontera, Waldhausen nos daría el resto, así que veamos que pasa si no.

Supongamos que 2 componentes en ∂M tienen la misma imagen bajo f. Entonces, usando los métodos que usamos en la demostración del teorema de Waldhausen, estas 2 componentes son paralelas, así que M es un producto, y puesto que sus dos fronteras ya tienen ambas la misma imagen, podemos deformar f, para obtener f' tal que $f'(M) \subset \partial N$.

Como f manda componentes distintos de ∂M en componentes distintos de ∂N, el índice en cada componente de $\partial N \bigcap f(M)$ es uno, pues ya vimos que cada componente de ∂M va a uno en ∂N bajo un homeomorfismo, y ningún otro punto en M cae en ∂N, pues f es propia. Pero el índice es el mismo en cualquier punto del dominio, así que el índice en ∂N es uno, y $f|\partial M$ es sobre, y por tanto biyectiva. ■

Corolario 3.22. *Si M es compacta y $\pi_1(M) \neq 0$, N es Haken, ambas son orientables, irreducibles y con frontera incompresible, y existe $f: M \to N$ propia tal que $f_*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ es un monomorfismo, entonces f es propiamente homotópica a una función cubriente $M \mapsto N$, o M es un producto $F \times S^1$, y f es propiamente homotópica a una función $g: M \to \partial N$.*

Demostración. Como el grupo de una variedad cerrada irreducible no puede inyectarse en el grupo de una variedad con frontera, M y N son ambas cerradas o ambas tienen frontera.

Consideremos el espacio cubriente $\widetilde{N}$ de N correspondiente a $\pi_1(M)$. f se levanta a $\widetilde{f}: M \to \widetilde{N}$, que es propia e induce un isomorfismo entre $\pi_1(M)$ y $\pi_1(\widetilde{N})$.

Por un argumento idéntico al usado en el corolario anterior, podemos deformar $\widetilde{f}$ para que sea un homeomorfismo en cada componente de ∂M.

Si el índice de $\widetilde{f}$ es cero, hay por lo menos dos componentes de ∂M con la misma imagen, así que, aplicando el argumento ya conocido, podemod deducir que M es un producto, y $\widetilde{f}$ puede ser deformada a una función $\widetilde{g}: M \to \partial\widetilde{N}$, que compuesta con la función cubriente nos da el resultado buscado.

Si el índice de $\widetilde{f}$ no es cero, $\widetilde{N}$ es compacto, porque una función de un espacio compacto a uno que no lo es no puede ser sobre. Entonces podemos aplicar el corolario anterior para obtener un homeomorfismo $\widetilde{g}: M \to \widetilde{N}$, que compuesto con la proyección de $\widetilde{N}$ en N nos da la función cubriente deseada. ■

Bibliografía

[1] Hempel, John. *3-Manifolds*, tomo 86 de *Annals of Mathematical Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[2] Lefschetz, Solomon. *Introduction to Topology*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1949.

[3] Lyndon, Roger C. y Schupp, Paul E. *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[4] Massey, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Harbrace College Math Series. Harcourt, Brace and World, Nueva York, 1967.

[5] Rolfsen, D. *Knots and Links*. Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.

[6] Scott. 'Seis Conferencias en la Universidad de Maryland.' Notas Mimeografiadas.

[7] Scott. 'Notas de un Curso de 3-variedades Impartido en la Universidad de Michigan.' Notas Manuscritas.

[8] Vick, James W. *Homology Theory. An introduction to Algebraic Topology*. Academic, Nueva York, 1973.