00384 /

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ENCAJES DE HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :

M. EN C. GLORIA GUADALUPE ANDABLO REYES

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA.

ENCAJES DE HIPERESPACIOS

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X, se le llama *hiperespacio* a un espacio constituido por ciertos subconjuntos de X. Los hiperespacios más comunes son: $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$, $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$. A estos hiperespacios se les dota de la llamada métrica de Hausdorff que los convierte a su vez en continuos.

Con la métrica de Hausdorff los hiperespacios se convierten en espacios métricos y, en consecuencia, también resultan espacios topológicos. Los hiperespacios tienen también la estructura natural de la contención la que los convierte en espacios ordenados. Esta estructura de orden ha sido poco explotada.

En este trabajo abordamos la siguiente situación natural: Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ hiperespacios de los continuos X y Y respectivamente. Podemos entonces preguntarnos bajo que condiciones existe una función continua e inyectiva $h : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que si $A, B \in \mathcal{H}$ y $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. Es decir, bajo qué condiciones $\mathcal{H}$ puede encajarse en $\mathcal{K}$ respetando las estructuras topológicas y de orden de $\mathcal{H}$. A una tal h le llamaremos un *encaje ordenado* de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$.

Cuando X se puede encajar en Y. Es decir, cuando existe una función inyectiva $f : X \to Y$, entonces es muy fácil encajar ordenadamente a 2^X en 2^Y, a $C(X)$ en $C(Y)$ y a $F_n(X)$ en $F_n(Y)$. Esto se hace tomando la función inducida definida por $A \mapsto f(A)$. Es decir, a A se le envía a su imagen bajo f.

El converso de esta afirmacíon, no necesariamente es cierto. Por ejemplo, si S es una circunferencia y T es un espacio que tiene la forma de la letra T, entonces $C(S)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T)$ y sin embargo, S no puede encajarse en T.

En este trabajo, estudiamos ejemplos y condiciones bajo las cuales $C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$. En particular, caracterizamos a los continuos X que pueden ser encajados ordenadamente en $C(Y)$, cuando Y es un continuo hereditariamente indescomponible fijo. También probamos que 2^X puede ser encajado ordenadamente en 2^Y para todo continuo X y Y.

Finalmente, con respecto a los hiperespacios finitos, damos condiciones sobre n y m, bajo las cuales se tiene la siguiente implicación: si $F_n(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $F_m(Y)$, entonces X puede ser encajado en Y.

EMBEDDINGS OF HYPERSPACES

A *continuum* is a compact, connected, nondegenerate and nonempty metric space. Let 2^X (resp., 2^Y) be the hyperspace of nonempty closed subsets of X (resp. Y), let $C(X)$ (resp., $C(Y)$) be the hyperspaces of subcontinua of X (resp., Y) and let $F_n(X)$ (resp., $F_n(Y)$) be the hyperspace of nonempty closed subsets of X (resp., Y) which contains at most n elements. All of them are topologized with the Hausdorff metric.

Given two continua X and Y and two hyperspaces $H(X)$ and $K(Y)$ of X and Y, respectively, we say that $H(X)$ can be *orderly embedded* in $K(Y)$ provided that there exists a one-to-one continuous function h from $H(X)$ to $K(Y)$ such that, if A is contained in B, then $h(A)$ is contained in $h(B)$. In this case, h is called an *ordered embedding.*

The order given by inclusion on hyperspaces has been explicitly used only by a few authors.

When a continuum X can be embedded in a continuum Y by an embedding h from X to Y, there is a natural ordered embedding $2^h : 2^X \to 2^Y$ given by $2^h(A) = h(A)$ (the image of A under h). The map 2^h is called the *induced map* and has been largely studied. The restrictions 2^h from $C(X)$ to $C(Y)$ and 2^h from $F_n(X)$ to $F_n(Y)$ also are ordered embeddings.

The converse of this claim is not true. In fact, if S is the unit circle in the Euclidean plane and T is the space of the form of letter T. Then $C(S)$ can be orderly embedded in $C(T)$ and S cannot be embedded in T.

By other hand, it is known that $C([0,1])$ and $C(S)$ are 2-cells. Thus $C(S)$ can be embedded in $C([0,1])$. But, $C(S)$ cannot be orderly embedded in $C([0,1])$. Therefore there are continua X and Y such that $C(X)$ can be embedded in $C(Y)$ but $C(X)$ cannot be orderly embedded in $C(Y)$.

In this paper we study examples and conditions under which $C(X)$ can be orderly embedded in $C(Y)$. In particular we characterize the continua X that can be orderly embedded in $C(Y)$, when Y is a fixed hereditarily indecomposable continuum. We also prove that 2^X can be orderly embedded in 2^Y for every continua X and Y.

Finally, for hyperspaces of the form $F_n(X)$, we give conditions on n and m, under which the following implication holds. If $F_n(X)$ can be orderly embedded in $F_m(Y)$, then X can be embedded in Y.

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X, se le llama *hiperespacio* a un espacio que consta de ciertos subconjuntos de X. constituido por ciertos subconjuntos de X. Los hiperespacios más comunes son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \text{ y para cada } n \in \mathbb{N},$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

A estos hiperespacios se les dota de una métrica, que se llama *métrica de Hausdorff,* la cual los convierte a su vez en continuos.

En los libros [2] y [4] se hace un estudio muy completo de los diferentes aspectos que se han estudiado de los hiperespacios.

Con la métrica de Hausdorff los hiperespacios se convierten en espacios métricos y, en consecuencia, también resultan espacios topológicos. Los hiperespacios tienen también la estructura natural de la contención, la que los convierte en espacios ordenados. Esta estructura de orden ha sido poco explotada. Entre los artículos que la aprovechan podemos mencionar [8], [9], [10] y [11].

En este trabajo abordamos la siguiente situación natural: Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ hiperespacios de los continuos X y Y respectivamente. Podemos entonces preguntarnos bajo qué condiciones existe una función continua e inyectiva $h : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que si $A, B \in \mathcal{H}$ y $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. Es decir, bajo qué condiciones $\mathcal{H}$ puede encajarse en $\mathcal{K}$ respetando las estructuras topológicas y de orden de $\mathcal{H}$. A esta función h le llamaremos *encaje ordenado de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$*.

Cuando X se puede encajar en Y; es decir, cuando existe una función inyectiva $f : X \to Y$, entonces es muy fácil encajar ordenadamente a $C(X)$ en $C(Y)$ y a $F_n(X)$ en $F_n(Y)$. Esto se hace tomando la función inducida definida por $A \mapsto f(A)$. Es decir, a A le hacemos corresponder su imagen bajo f. El recíproco de esta afirmacíon no necesariamente es cierto. Por ejemplo, si S^1 es una circunferencia y T es un espacio que tiene la forma de la letra T, entonces $C(S^1)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T)$ y sin embargo, S^1 no puede ser encajado en T (ver Ejemplo 32).

Por ser un trabajo pionero, pudimos dar respuestas preferentemente en situaciones que involucran a los continuos más sencillos, como las gráficas finitas o los continuos hereditariamente indescomponibles, o, como en el caso de los hiperespacios de la forma $F_n(X)$, los resultados que obtuvimos fueron para números n más bien específicos. Esto no quiere decir que sólo se obtuvieron resultados sencillos. Si el lector quiere darse una idea de la gran dificultad que ofrece este tema, baste con que trate de resolver alguna del buen número de preguntas que dejamos sin resolver, o, tambíen basta con que trate de probar algunos de los resultados que presentamos, antes de leer la prueba que ofrecemos.

Este trabajo se divide en seis capítulos. En el Capítulo 1, incluimos los conceptos fundamentales de la Teoría de Hiperespacios que se requieren para la lectura de este trabajo.

En el Capítulo 2, introducimos el concepto de encaje ordenado y nos concentramos en la siguiente situación: dadas dos gráficas X, Y nos preguntamos bajo qué condiciones $C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$. Iniciamos el estudio de esta cuestión, presentando varios ejemplos que resultan muy interesantes. Por ejemplo, sea I un intervalo, en el ejemplo 36, probamos que a pesar de que $C(S^1)$ puede ser encajado en $C(I)$, no es posible encajar ordenadamente $C(S^1)$ en $C(I)$.

En el Capítulo 3, caracterizamos a los continuos X, tales que $C(X)$ pueden ser encajado ordenadamente en $C(Y)$, cuando Y es un continuo hereditariamente indescomponible fijo.

En el Capítulo 4, demostramos que 2^X puede ser encajado ordenadamente en 2^Y, donde X y Y son continuos cualesquiera. También caracterizamos a los continuos Y tales que 2^X puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$, para cualquier continuo X.

En el Capítulo 5, estudiamos a los encajes ordenados de hiperespacios finitos. Damos condiciones, sobre n y m, bajo las cuales se tiene la siguiente implicación. Si $F_n(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $F_m(Y)$, entonces X puede ser encajado en Y.

Finalmente en el Capítulo 6, demostramos que cuando X se puede encajar en Y; es decir, cuando existe una función inyectiva $f : X \to Y$, entonces $C(X)$ se puede ordenadamente en $C(Y)$ y $F_n(X)$ se puede encajar ordenadamente en $F_n(Y)$. También se demuestra que si $g : 2^X \to 2^Y$ es un encaje ordenado suprayectivo entonces X es homeomorfo a Y.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

A continuación introducimos los conceptos fundamentales en los que se sustenta el presente trabajo.

Definición 1. *Un continuo es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo.*

Recordemos que un espacio es *no degenerado* si contiene más de un punto.

Definición 2. *Un subcontinuo de un continuo X es un subconjunto conexo, no vacío y cerrado de X.*

Notemos que un subcontinuo puede ser degenerado.

1.2 Hiperespacios de un continuo X

Los hiperespacios de un continuo X, son espacios cuyos elementos son subconjuntos especiales de X.

Definición 3. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$

Notemos que el espacio 2^X es no degenerado. A continuación vamos a dotar a 2^X de una métrica. Vamos a denotar por d_X la métrica correspondiente al continuo X.

Definición 4. *Sea X un continuo con métrica d_X. Si $a \in X$ y $\varepsilon > 0$ entonces* *definimos la bola en* **X** *con centro en* a *y radio* ε, *como el conjunto*

$$B(a,\varepsilon)=\{x\in X : d(x,a)<\varepsilon\}.$$

Definición 5. *Sean* $A\in 2^X$ *y* $\varepsilon>0$. *Definimos la nube de* **A** *de radio* $\boldsymbol{\varepsilon}$, *como el conjunto*

$$N(\varepsilon,A)=\{x\in X : \textit{existe } a\in A \textit{ tal que } d_X(a,x)<\varepsilon\}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de las definiciones de $B(a,\varepsilon)$ y $N(\varepsilon,A)$.

Teorema 6. *Si* $A\in 2^X$ *y* $\varepsilon>0$. *Entonces*

$$N(\varepsilon,A)=\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon).$$

Así que, el conjunto $N(\varepsilon,A)$ es abierto en X. De hecho, si $p\in X$, entonces $N(\varepsilon,\{p\})=B(p,\varepsilon)$.

Definición 7. *Sean* $A,B\in 2^X$ *definimos la función* $H_X: 2^X\times 2^X\to[0,\infty)$ *por*

$$H_X(A,B)=\inf\{\varepsilon>0 : A\subset N(\varepsilon,B) \ y \ B\subset N(\varepsilon,A)\}$$

Por el Teorema 0.2 de [7] tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8. *La función* H_X *es una métrica para* 2^X.

Así pues, $(2^X,H_X)$ resulta ser un espacio métrico. Por el Teorema 4.6 de [6], la topología τ sobre 2^X, inducida por la *métrica de Hausdorff* H_X, es independiente de la métrica de X. Esto es, si d y e son dos métricas en X que inducen la misma topología sobre X, entonces la topología inducida en 2^X por la métrica H_X^d es idéntica a la inducida por la métrica H_X^e. Por lo que podemos decir, que la topología inducida en 2^X por la métrica de Hausdorff, depende únicamente de la topología de X.

Definición 9. *El espacio* 2^X *con la topología inducida por la métrica de Hausdorff* H_X, *es un hiperespacio de* X.

Por los resultados Teorema 0.8 y Teorema 1.9 de [7], tenemos que 2^X es un espacio compacto y conexo por trayectorias, respectivamente (independientemente de si X es conexo por trayectorias). Entonces 2^X es un continuo y podemos considerar su hiperespacio

$$2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

que resulta ser un continuo bajo la métrica de Hausdorff H_X^2 que se define en términos de H_X. Esto es, si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$ entonces

$$H_X^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathcal{A} \subset N^2(\varepsilon, \mathcal{B}) y\ \mathcal{B} \subset N^2(\varepsilon, \mathcal{A})\}.$$

A continuación vamos a presentar el hiperespacio de los subcontinuos de X, que se define como sigue

Definición 10. $C(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ es conexo}\}$.

Es claro que el espacio $C(X)$ es no degenerado y que la restricción de la métrica de Hausdorff H_X a $C(X)$, dota a éste de una estructura de espacio métrico, cuya topología depende únicamente de la topología de X.

Definición 11. *El espacio $C(X)$ con la topología relativa de 2^X es un hiperespacio de X.*

Por los resultados Teorema 0.8 y Teorema 1.12 de [7], tenemos que $C(X)$ es compacto y conexo por trayectorias, respectivamente (independientemente de si X es conexo por trayectorias). Por lo que $C(X)$ resulta ser un continuo y entonces podemos considerar sus hiperespacios

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(C(X)) = \{A \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo}\}$$

ambos dotados con la métrica de Hausdorff, H_X^2.

Finalmente presentamos el hiperespacio formado por los subconjuntos finitos de X.

Definición 12. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces definimos*

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ elementos}\}.$$

Notemos que $F_n(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además la restricción de la métrica de Hausdorff, H_X a $F_n(X)$, dota a éste de una estructura de espacio métrico.

Por otra parte, puesto que el hiperespacio 2^X de un continuo X es un espacio métrico, podemos hablar de la convergencia de sucesiones. Esto es, si $\{A_n\}_n$ es una sucesión en 2^X, decimos que $\{A_n\}_n$ *converge* a un elemento $A \in 2^X$, escribimos $A_n \to A$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_X(A_n, A) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$.

1.3 Funciones especiales

En la teoría de continuos existen funciones que involucran a los hiperespacios de un continuo X. Como ejemplos de estas funciones tenemos a las funciones de Whitney, a las funciones inducidas entre hiperespacios y los arcos ordenados.

Definición 13. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de 2^X. Una función de Whitney en $\mathcal{A}$ es una función continua $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ que satisface:*

i) $\mu(A) = 0$ *si y sólo si* $A \in \mathcal{A} \cap F_1(X)$,

ii) $\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A, B \in \mathcal{A}$ *y* $A \subsetneq B$,

iii) $\mu(X) = 1$.

En los Teoremas 0.50.1, 0.50.2 y 0.50.3 de [7], se construyen tres funciones de Whitney, las cuales existen en todos los hiperespacios. El papel fundamental que juega una función de Whitney es el de *medir* a los elementos de $\mathcal{A}$.

Definición 14. *Sean X y $\mathcal{A}$ como en la definición anterior. Un nivel de Whitney para $\mathcal{A}$ es cualquier subconjunto de $\mathcal{A}$ de la forma $w^{-1}(t)$, donde w es alguna función de*

Whitney para $\mathcal{A}$ y $t \in [0, w(X)]$.

A continuación vamos a estudiar a las funciones inducidas. Sean X y Y continuos, entonces tenemos el siguiente resultado que es fácil de demostrar.

Teorema 15. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si para cada $A \in 2^X$ definimos $2^f(A) = f(A)$, entonces $2^f(A) \in 2^Y$ y la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ así definida, es continua.*

Demostración. Como $2^f(A) = f(A) \subset Y$, $2^f(A)$ es un subconjunto no vacío de Y. Por otra parte, $f(A)$ es la imagen continua de un subconjunto compacto de X, así que $2^f(A) = f(A)$ resulta ser un subconjunto compacto de Y. Por lo que $2^f(A) \in 2^Y$. La continuidad de 2^f se sigue del Lema 13.3 de [5]. ■

A la función 2^f del teorema anterior, se le conoce como la *función inducida por f.*

Por otra parte, los arcos ordenados gozan de gran importancia en la teoría de los hiperespacios. Por ejemplo, la existencia de arcos ordenados resulta crucial para demostrar que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X, son conexos por trayectorias, independientemente de si X es conexo por trayectorias.

Definición 16. *Supongamos que $A, B \in C(X)$ y que $A \subsetneq B$. Un arco ordenado de* **A** *a* **B** *en $C(X)$ es una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ siempre que $s < t$.*

La existencia de los arcos ordenados queda garantizada por el Teorema 14.6 de [5].

1.4 Continuos especiales

Definición 17. *Un continuo X es descomponible si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios.*

Definición 18. *Un continuo X es hereditariamente descomponible si todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles.*

Definición 19. *Un continuo X es indescomponible si no es descomponible.*

En el Ejemplo 1.10 de [6], se construye un continuo indescomponible.

Definición 20. *Un continuo X es hereditariamente indescomponible si todos sus subcontinuos no degenerados son indescomponibles.*

Definición 21. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces el conjunto*

$$K(p) = \{x \in X : \textit{existe un subcontinuo propio } A \textit{de } X \textit{ tal que } \{p, x\} \subset A\}$$

es la ***composante de*** **p en X**.

El siguiente resultado referente a composantes de un continuo indescomponible, se demuestra en el Teorema 3-47 de [2].

Teorema 22. *Si X es un continuo indescomponible, entonces sus composantes son ajenas dos a dos.*

A continuación vamos a introducir los conceptos de n-celda y cubo de Hilbert. Denotemos por I al intervalo $[0, 1]$.

Definición 23. *Para $n \in \mathbb{N}$, una n-celda es un espacio que es homeomorfo a $I^n = \prod_{i=1}^{n} [0, 1]_i$. Una 1-celda es llamada un arco.*

Un *punto extremo* de un arco, J, es cualquiera de los dos puntos de J que son imagen de los puntos extremos del intervalo $[0, 1]$, bajo cualquier homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre J.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $Fr(I^n)$ la frontera de I^n; en otras palabras,

$$Fr(I^n) = \{(x_i)_{i=1}^n \in I^n : x_i = 0 \text{ ó } 1 \text{ para alguna } i\}.$$

Un espacio homeomorfo a $Fr(I^n)$ es llamado una $(n-1)$-*esfera*. Una 1-esfera es llamada una *curva cerrada simple*.

Definición 24. *Un cubo de Hilbert es un espacio que es homeomorfo a $I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$. Notemos que la métrica estándar, d_∞, para I^∞ se define como sigue:*

$$d_\infty((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|$$

para $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in I^\infty$.

Definición 25. *Una gráfica finita* **G**, *es un continuo que puede ser escrito como una unión finita de arcos, de tal manera que dos arcos cualesquiera son ajenos, o bien se intersectan en uno o en ambos de sus puntos extremos.*

Dada una gráfica finita G, suponemos que ya están elegidos los arcos mencionados en la Definición 25. A ellos les llamamos segmentos de G, los puntos extremos de los arcos son los *vértices de* G.

Definición 26. *El orden* $\mathbf{o}(\mathbf{v})$, *de un vértice* v *de una gráfica* G *se define por*

$$o(v) = \textit{el número de segmentos de la gráfica que contienen a } v.$$

Definición 27. *Un punto extremo de* **G** *es un vértice de orden* 1 *y un punto de ramificación de* G *es un vértice de orden mayor o igual que* 3.

Definición 28. *Un árbol,* T, *es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*

Para poder trabajar mejor, las gráficas finitas G que vamos a considerar en este trabajo satisfacen las siguientes condiciones:

- como todas las gráficas son espacios compactos de dimensión 1, por el Teorema V3 de [3], ellos pueden ser encajados en $\mathbb{R}^3$. Así que podemos considerar a G contenida en el cubo I^3.

- la métrica que le daremos a G no es la inducida por la métrica usual de I^3 sino que pensaremos que cada segmento de G es isométrico a $[0,1]$ y que la distancia entre dos puntos de G es la longitud del arco menor que los une.

También trabajaremos con algunas gráficas particulares como la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, los n-odos, etc., a éstas sí los consideraremos con la métrica inducida por el espacio $\mathbb{R}^m$ en el que están sumergidas.

Capítulo 2

Encajes ordenados para C(X)

2.1 Introducción

En este capítulo vamos a introducir el concepto de encaje ordenado para hiperespacios. Los resultados que se presentan en este capítulo están relacionados con el siguiente problema: ¿Para qué continuos X, Y, $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$?

Dadas dos gráficas, X, Y, nos preguntamos ¿Bajo qué condiciones $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$? Es posible que se pueda probar que si $\dim C(X) = n$, entonces $C(X)$ puede encajarse en $\mathbb{R}^n$. Si esto fuera verdad, tendríamos que si $\dim C(X) = n = \dim C(Y)$, entonces $C(X)$ podría encajarse en $C(Y)$. Pero esto no es posible para encajes ordenados, pues $\dim C([0,1]) = 2 = \dim C(S^1)$ pero $C(S^1)$ no puede encajarse ordenadamente en $C([0,1])$, como veremos en el Ejemplo 36. Sólo tenemos algunos cuantos teoremas generales para encajes ordenados (ver Teoremas 43, 44, 48 y 50). En este capítulo ofrecemos muchos ejemplos ilustrativos, de su lectura se puede ver que estamos ante algunos problemas de difícil solución.

2.2 Definición de encaje ordenado para C(X)

Sean X, Y continuos. Sean $C(X)$ y $C(Y)$ los respectivos hiperespacios de X y Y.

Definición 29. *Una función $g : C(X) \to C(Y)$ es un encaje ordenado si g es una función continua e inyectiva tal que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En este caso, diremos que $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$.*

2.3 Ejemplos de encajes ordenados para C(X)

En esta sección vamos a demostrar que a pesar de que $C(S^1)$ puede encajarse en $C(I)$, no es posible que $C(S^1)$ pueda encajarse ordenadamente en $C(I)$. A continuación vamos a presentar encajes ordenados entre parejas de hiperespacios bien específicos.

Definición 30. *Un n-odo simple es un conjunto T_n, que es la unión de n segmentos $I_1, I_2, ..., I_n$ tales que comparten un punto común v (llamado el vértice de T_n) el cual es un punto extremo de cada I_i y que satisface que $I_i \cap I_j = \{v\}$ siempre que $i \neq j$. Al 3-odo simple se le llama triodo simple.*

Denotemos por S^1 la circunferencia de radio uno centrada en el origen en $\mathbb{R}^2$. Usaremos el siguiente modelo específico para T_n : Sea $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^n$, denotemos por pq al segmento que los une y $pq = p$ en el caso en que $p = q$. Definimos entonces $T_n = \bigcup_{i=1}^{n} \Theta(10e_i)$, donde Θ denota al origen de $\mathbb{R}^n$. Usaremos el símbolo d_n para denotar la distancia de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 31. *Sea X una compactación métrica del rayo $(0, 1]$ tal que el residuo de X es un arco J. Entonces $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_3)$.*

Asumamos que $(0, 1] \subset X$, entonces $X = J \cup (0, 1]$. Puesto que J es un arco, podemos suponer que tiene un orden. Como J es un retracto absoluto, existe una retracción $r : X \to J$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Sea $p : X \to [0, 1]$ dada por

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x \in J, \\ x & \text{si } \ x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Entonces p es una función continua. Sea $\varphi : J \to [0, 1]$ un homeomorfismo. Ahora, para $A \in C(X)$, tomamos $x_A = \max p(A)$ y $y_A = \max \varphi(r(A))$. Notemos que en $C(X)$ tenemos tres tipos de subcontinuos, a saber, si $A \in C(X)$ entonces, $A \subset (0,1]$ o bien $A \subset J$ o bien A es de la forma $p^{-1}([0,a])$ para alguna $a \in (0,1]$, $(a = x_A)$. Ahora, si $A \subset (0,1]$, entonces A está completamente determinada por $\mu(A)$ y x_A. Si $A \subset J$ entonces A queda determinada por $\mu(A)$ y y_A. Por último, si A es de la forma $A = p^{-1}([0,x_A])$, entonces A queda determinada $\mu(A)$ y x_A.

Entonces por lo discutido arriba definimos $f : C(X) \to C(T_3)$ por

$$f(A) = \Theta[x_A e_1] \cup \Theta[y_A e_2] \cup \Theta[\mu(A) e_3].$$

La continuidad de f se sigue de la continuidad de las funciones x_A, y_A y $\mu(A)$.

Probemos ahora que f es inyectiva. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $f(A) = f(B)$ entonces $x_A = x_B$, $y_A = y_B$ y $\mu(A) = \mu(B)$ entonces, por la discusión de arriba, $A = B$.

Finalmente, si $A \subset B$, entonces $x_A \leq x_B$, $y_A \leq y_B$ y $\mu(A) \leq \mu(B)$. Por lo que, $f(A) \subset f(B)$.

Por tanto hemos demostrado que $C(X)$ puede encajarse en $C(T_3)$.

Ejemplo 32. *$C(S^1)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_3)$.*

Sea $l : C(S^1) \to [0, 2\pi]$ la función que a cada subcontinuo de S^1 le asigna su longitud. Sea $m : C(S^1) - S^1 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $m(A) =$ *punto medio de* A. Notemos que si $A \in C(S^1) - S^1$, entonces A está completamente determinado por su punto medio $m(A)$ y su longitud $l(A)$.

Escribamos $m(A) = (x_A, y_A)$. Entonces definimos $f : C(S^1) - S^1 \to C(T_3)$ por

$$f(A) = \Theta[(1 + x_A + l(A))e_1] \cup \Theta[(1 + y_A + l(A))e_2] \cup \Theta[l(A)e_3].$$

La continuidad de f se sigue de la continuidad de las funciones l y m.

Veamos que f es inyectiva. Para esto supongamos que $f(A) = f(B)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + x_A + l(A) &= 1 + x_B + l(B) \\ 1 + y_A + l(A) &= 1 + y_B + l(B) \\ l(A) &= l(B) \end{aligned}$$

Así pues, $l(A) = l(B)$ y $m(A) = m(B)$ Por tanto, $A = B$. Lo que demuestra que f es inyectiva.

Finalmente, vamos a demostrar que, si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$. Notemos que, si $A \subset B$ entonces $l(A) \leq l(B)$. Sea l' la longitud del arco más pequeño en S^1 que une a $m(A)$ con $m(B)$. Sea C la mitad del arco B que contiene a $m(A)$. En el caso en que $m(A) = m(B)$, tomamos como C a cualquiera de las dos mitades de B. Entonces, C contiene al arco que une a $m(A)$ con $m(B)$ y a una de las dos mitades del arco A.

De aquí que $l' + \frac{l(A)}{2} \leq \frac{l(B)}{2}$. Entonces

$$2|x_A - x_B| \leq 2d_2(m(A), m(B)) \leq 2l' \leq l(B) - l(A).$$

De modo que

$$1 + x_A + l(A) \leq 1 + x_B + l(B).$$

Similarmente,

$$1 + y_A + l(A) \leq 1 + y_B + l(B).$$

Además, puesto que $l(A) \leq l(B)$, concluimos que $f(A) \subset f(B)$. Por tanto, hemos demostrado que $f : C(S^1) - S^1 \to C(T_3)$ es un encaje ordenado.

Ahora bien, definimos $g : C(S^1) \to C(T_3)$ por

$$g(A) = \begin{cases} \Theta[(2+2\pi)e_1] \cup \Theta[(2+2\pi)e_2] \cup \Theta[2\pi e_3], & \text{si} \quad A = S^1, \\ \Theta[((2+2\pi)\frac{l(A)}{2\pi} + (1 - \frac{l(A)}{2\pi})(1 + x_A + l(A)))e_1] \cup & \\ \Theta[((2+2\pi)\frac{l(A)}{2\pi} + (1 - \frac{l(A)}{2\pi})(1 + y_A + l(A)))e_2] \cup \Theta[l(A)e_3], & \text{si} \quad A \neq S^1. \end{cases}$$

Puesto que g es el resultado de ajustar linealmente f, entonces f resulta ser continua e inyectiva. En efecto, puesto que el ajuste es lineal, g es claramente continua en $C(S^1)-\{S^1\}$. Ahora, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(S^1)-\{S^1\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = S^1$, entonces $\lim_{n\to\infty} l(A_n) = 2\pi$. De manera que $\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(S^1)$.

Por otra parte, sean $A, B \in C(S^1)$ tales que $g(A) = g(B)$. Supongamos que $A = S^1$. Entonces, como $l(A) = l(B)$, tenemos que $B = S^1$. Así que $A = B$. Supongamos ahora que $A \neq S^1$. Entonces, puesto que $l(A) = l(B)$, tenemos que $B \neq S^1$ y que $1 + x_A + l(A) = 1 + x_B + l(B)$, $1 + y_A + l(A) = 1 + y_B + l(B)$. Por lo que $f(A) = f(B)$. Entonces, como f es inyectiva, tenemos que $A = B$. Por tanto g es inyectiva.

De este modo, sólo resta demostrar que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. Puesto que

$$(1 - \frac{l(B)}{2\pi})((1 + x_B + l(B)) - (1 + x_A + l(A))) \geq 0,$$

tenemos que

$$(1 + x_B + l(B)) - \frac{l(B)}{2\pi}(1 + x_B + l(B)) \geq (1 + x_A + l(A)) - \frac{l(B)}{2\pi}(1 + x_A + l(A))$$

De modo que

$$\begin{aligned}
(2+2\pi)\tfrac{l(A)}{2\pi} + (1 - \tfrac{l(A)}{2\pi})(1 + x_A + l(A)) &= (1 + x_A + l(A)) + [(2+2\pi) - (1 + x_A + l(A))]\tfrac{l(A)}{2\pi} \\
&\leq (1 + x_A + l(A)) + [(2+2\pi) - (1 + x_A + l(A))]\tfrac{l(B)}{2\pi} \\
&= (1 + x_A + l(A)) - (1 + x_A + l(A))\tfrac{l(B)}{2\pi} + (2+2\pi)\tfrac{l(B)}{2\pi} \\
&\leq (1 + x_B + l(B)) - (1 + x_B + l(B))\tfrac{l(B)}{2\pi} + (2+2\pi)\tfrac{l(B)}{2\pi} \\
&= (1 + x_B + l(B)) + [(2+2\pi) - (1 + x_B + l(B))]\tfrac{l(B)}{2\pi} \\
&= (2+2\pi)\tfrac{l(B)}{2\pi} + (1 - \tfrac{l(B)}{2\pi})(1 + x_B + l(B))
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$(2+2\pi)\frac{l(A)}{2\pi} + (1 - \frac{l(A)}{2\pi})(1 + y_A + l(A)) \leq (2+2\pi)\frac{l(B)}{2\pi} + (1 - \frac{l(B)}{2\pi})(1 + y_B + l(B)).$$

Puesto que $l(A) \leq l(B)$, entonces $g(A) \subset g(B)$. Por tanto, hemos demostrado que $C(S^1)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_3)$. ■

Los siguientes tres ejemplos de encajes ordenados que presentamos, se obtienen de extensiones apropiadas del encaje ordenado que vimos en el ejemplo anterior.

Sea P el espacio que consta de S^1 y el segmento, $J = [1,2] \times \{0\}$. Denotemos por $q = (1,0)$ a la intersección de J y S^1. A este espacio le llamaremos *paleta*.

Ejemplo 33. *$C(P)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_4)$.*

Sea T_3 el triodo simple que se obtiene de T_4 al eliminar el segmento $\Theta 10e_4 - \{\Theta\}$. Como ya demostramos, $C(S^1)$ puede ser encajado ordenamente en $C(T_3)$, mediante la aplicación $g : C(S^1) \to C(T_3)$ dada por

$$g(A) = \begin{cases} \Theta((2+2\pi)e_1) \cup \Theta((2+2\pi)e_2) \cup \Theta((2\pi)e_3), & \text{si} \quad A = S^1, \\ \Theta([(2+2\pi)\frac{l(A)}{2\pi} + (1-\frac{l(A)}{2\pi})(1+x_A+l(A))]e_1) \cup & \\ \Theta([(2+2\pi)\frac{l(A)}{2\pi} + (1-\frac{l(A)}{2\pi})(1+y_A+l(A))]e_2) \cup \Theta(l(A)e_3), & \text{si} \quad A \neq S^1. \end{cases}$$

Donde, si $A \in C(S^1) - S^1$, entonces $m(A) = (x_A, y_A)$ denota su punto medio y $l(A)$ su longitud.

Consideremos ahora los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A \in C(P) : A \in C(S^1) \text{ o bien } q \in A\} \\ \mathcal{B} &= C(J) \end{aligned}$$

Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función que a cada arco rectificable de $\mathbb{R}^2$ le asigna su longitud ($L(\Theta) = 0$ y $L(\{p\}) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$). Definimos entonces $f : C(P) \to C(T_4)$ por

$$f(A) = \begin{cases} g(A \cap S^1) \cup \Theta[L(A \cap J)e_4], & \text{si} \quad A \in \mathcal{A}, \\ \Theta[(2-d(q,A))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(A)e_4], & \text{si} \quad A \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

En general, la intersección no es una función continua de $C(X) \times C(X)$ en $C(X)$. Pero es fácil ver que, para este ejemplo, las funciones de $\mathcal{A}$ en $C(T_4)$, dadas por $A \mapsto g(A \cap S^1)$

y $A \mapsto L(A \cap J)$ son continuas. De aquí que f es continua en $\mathcal{A}$. Similarmente f es continua en $\mathcal{B}$.

Por otra parte, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A \in C(J) : q \in A\}$. Luego, si $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ entonces $L(A \cap S^1) = 0$, $x_{A \cap S^1} = 1$, $y_{A \cap S^1} = 0$ y $d(q, A) = 0$. Así que,

$$\begin{aligned} g(A \cap S^1) \cup \Theta[L(A \cap J)e_4] &= \Theta[2e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(A)e_4] \\ &= \Theta[(2 - d(q, A))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(A)e_4] \end{aligned}$$

esto muestra que las dos definiciones de f coinciden en $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por tanto, f es una función bien definida y continua en $C(P)$.

Ahora vamos a demostrar que f es inyectiva. Para ello tomemos $A, B \in C(P)$ y supongamos que $f(A) = f(B)$. Consideremos entonces los siguientes casos

Caso 1. $A, B \in \mathcal{A}$.

Entonces

$$g(A \cap S^1) \cup \Theta[L(A \cap J)e_4] = g(B \cap S^1) \cup \Theta[L(B \cap J)e_4].$$

Así pues, $g(A \cap S^1) = g(B \cap S^1)$ y $L(A \cap J) = L(B \cap J)$. Supongamos primero que $A \in C(S^1)$, entonces $L(A \cap J) = L(B \cap J) = 0$. Así pues, $B \in C(S^1)$. Como g es inyectiva, $A = B$.

Supongamos ahora que $q \in A$. Entonces, como g es inyectiva, $A \cap S^1 = B \cap S^1$. Así pues, $q \in B$. Por lo que $L(A \cap J) = L(B \cap J)$. Lo cual implica que $A \cap J = B \cap J$. Por tanto, $A = B$. Lo que concluye la discusión sobre el Caso 1.

Caso 2. $A, B \in \mathcal{B}$.

Entonces $2 - d(q, A) = 2 - d(q, B)$ y $L(A) = L(B)$. Por lo que $d(q, A) = d(q, B)$ y $L(A) = L(B)$, entonces $A = B$.

Caso 3. $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Entonces

$$g(A \cap S) \cup \Theta[L(A \cap J)e_4] = \Theta[(2 - d(q, B))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(B)e_4].$$

Como en el lado izquierdo de la igualdad debe aparecer $\Theta[l(A \cap S^1)e_3]$ y en el lado derecho no aparece, tenemos que $l(A \cap S^1) = 0$. Esto implica que $A \subset J$. Es decir, $A \in \mathcal{B}$ y entonces tenemos de nuevo el Caso 2.

Ahora vamos a demostrar que $A \subset B$ implica $f(A) \subset f(B)$. Primero supongamos que $A \in \mathcal{A}$. Entonces $B \in \mathcal{A}$. Luego, $A \cap S^1 \subset B \cap S^1$ y $A \cap J \subset B \cap J$. Por lo que $g(A \cap S^1) \subset g(B \cap S^1)$ y $L(A \cap J) \leq L(B \cap J)$. Por tanto,

$$g(A \cap S^1) \cup \Theta[L(A \cap J)e_4] \subset g(B \cap S^1) \cup \Theta[L(B \cap J)e_4].$$

Así pues, $f(A) \subset f(B)$.

Supongamos ahora que $A \in \mathcal{B}$. Si $B \in \mathcal{A}$, entonces $q \in B$. Luego, como

$$g(\{q\}) = \Theta[2e_1] \cup \Theta e_2$$

tenemos que

$$\Theta[(2 - d(q, A))e_1] \cup \Theta e_2 \subset g(\{q\}) \subset g(B \cap S^1).$$

Por otra parte, puesto que $A \subset B \cap J$, entonces $\Theta[L(A)e_4] \subset \Theta[L(B \cap J)e_4]$. Por lo que

$$\Theta[(2 - d(q, A))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(A)e_4] \subset g(B \cap S^1) \cup \Theta[L(B \cap J)e_4].$$

Así pues, $f(A) \subset f(B)$.

Si $B \in \mathcal{B}$, entonces $2 - d(q, A) \leq 2 - d(q, B)$ y $L(A) \leq L(B)$. Por lo que

$$\Theta[(2 - d(q, A))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(A)e_4] \leq \Theta[(2 - d(q, B))e_1] \cup \Theta e_2 \cup \Theta[L(B)e_4].$$

Así pues, $f(A) \subset f(B)$.

Por tanto, $C(P)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_4)$. ■

Problema. ¿Se puede encajar ordenadamente $C(P)$ en $C(T_3)$?

Respecto a este problema, se puede ver en Ejemplo 5.3 de [5], que $C(P)$ puede encajarse en $\mathbb{R}^3$ y entonces en $C(T_3)$.

Para nuestro siguiente ejemplo, consideremos S_1 y S_2 las circunferencias de radio uno centradas en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente. Tomemos $X = S_1 \cup S_2$ y denotemos por p a la intersección $S_1 \cap S_2$.

Ejemplo 34. *$C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_6)$.*

Consideremos los triodos simples T_3 y T_3' que constan de los segmentos $\Theta[10e_1]$, $\Theta[10e_2]$, $\Theta[10e_3]$ y $\Theta[10e_4]$, $\Theta[10e_5]$, $\Theta[10e_6]$, respectivamente.

Para $i = 1, 2$, sea $f_i : S_i \to S^1$ dada por $f_i(x, y) = ((-1)^{i+1}(x + 1), y)$. Claramente f_i es un homeomorfismo. Sean $f_i^* : C(S_i) \to C(S^1)$ los homeomorfismos inducidos, es decir, $f_i^*(A) = f_i(A)$ (la imagen bajo f_i de A), vea el Teorema 15. Definimos $g_1 : C(S_1) \to C(T_3)$ por $g_1(A) = g(f_1^*(A))$ y $g_2 : C(S_2) \to C(T_3')$ dada por $g_2(A) = \varphi^*(g(f_2^*(A)))$, donde $\varphi^* : C(T_3) \to C(T_3')$ es el homeomorfismo inducido por la función $\varphi : T_3 \to T_3'$ dada por $\varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xe_4 + ye_5 + ze_6$.

Observemos que en X existen tres tipos de subcontinuos, a saber: los que están completamente contenidos en S_1, los que están completamente contenidos en S_2 y los que tienen a p. Consideremos entonces los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= C(S_1), \\
\mathcal{C}_2 &= C(S_2) \text{ y} \\
\mathcal{C}_3 &= \{A \in C(X) : p \in A\}.
\end{aligned}$$

Puesto que $p = \Theta$ y $g_1(\{p\}) = \Theta[2e_1] \cup \Theta e_2$, $g_2(\{p\}) = \Theta[2e_4] \cup \Theta e_5$. Definimos entonces

$g : C(X) \to C(T_6)$ por

$$g(A) = \begin{cases} g_1(A) \cup g_2(\{p\}), & \text{si} \quad A \in \mathcal{C}_1, \\ g_1(\{p\}) \cup g_2(A), & \text{si} \quad A \in \mathcal{C}_2, \\ g_1(A \cap S_1) \cup g_2(A \cap S_2), & \text{si} \quad A \in \mathcal{C}_3. \end{cases}$$

La continuidad de g se sigue de la continuidad de las funciones g_1 y g_2, y de las siguientes observaciones: $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{p\}$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{A \in \mathcal{C}(S_1) : p \in A\}$ y $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{A \in \mathcal{C}(S_1) : p \in A\}$. Luego, si $A \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$, entonces $g_1(A \cap S_1) \cup g_2(A \cap S_2) = g_1(A) \cup g_2(\{p\})$ y, si $A \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, entonces $g_1(A \cap S_1) \cup g_2(A \cap S_2) = g_1(\{p\}) \cup g_2(A)$.

Por otra parte, como g_1 y g_2 son inyectivas, g también lo es. En efecto, sean $A, B \in C(X)$ tales que $g(A) = g(B)$. Si $A \in \mathcal{C}_1$, entonces $B \in \mathcal{C}_1$, o bien $B \in \mathcal{C}_3$. Si $B \in \mathcal{C}_1$, como g_1 es inyectiva, $A = B$. Si $B \in \mathcal{C}_3$, entonces $g_1(A) = g_1(B \cap S_1)$ y $g_2(\{p\}) = g_2(B \cap S_2)$, como g_1 y g_2 son inyectivas, $A = B$. De manera similar llegamos a esta conclusión cuando $A, B \in \mathcal{C}_2$, $A \in \mathcal{C}_2$ y $B \in \mathcal{C}_3$ y cuando $A, B \in \mathcal{C}_3$.

Ahora vamos a demostrar que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En efecto, si $A \in \mathcal{C}_1$ entonces $B \in \mathcal{C}_1$ o bien $B \in \mathcal{C}_3$. Si $B \in \mathcal{C}_1$, como g_1 es un encaje ordenado, tenemos que $g(A) \subset g(B)$. Si $B \in \mathcal{C}_3$, entonces $A \subset B \cap S_1$ y $\{p\} \subset B \cap S_2$. Puesto que g_1 y g_2 son encajes ordenados, entonces $g_1(A) \subset g_1(B \cap S_1)$ y $g_2(\{p\}) \subset g_2(B \cap S_2)$. Así que $g(A) \subset g(B)$. De manera similar llegamos a esta conclusión cuando $A, B \in \mathcal{C}_2$, $A \in \mathcal{C}_2$ y $B \in \mathcal{C}_3$ y cuando $A, B \in \mathcal{C}_3$.

Por tanto hemos demostrado que $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_6)$. ■

Problema. Sea X como en el ejemplo anterior, ¿Puede ser $C(X)$ encajado ordenamente en $C(T_5)$?, ¿y en T_4?

Definamos $\lambda : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\lambda(t) = (\cos(t), sen(t))$. Sea $\sigma : [0, \infty) \to \sigma([0, \infty)) \subset \mathbb{R}^2$ definida por $\sigma(t) = (1 + \frac{1}{1+t})\lambda(t)$. Tomemos $S = \sigma([0, \infty))$. Entonces S es la espiral en $\mathbb{R}^2$, y $\sigma : [0, \infty) \to S$ es un homeomorfismo.

Sea X el continuo dado por $X = S^1 \cup S$.

Ejemplo 35. *$C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_4)$.*

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney para X. Sea $\psi : X \to S^1$ la proyección de X sobre S^1 dada por $\psi(z) = \frac{z}{|z|}$. Dada $A \in C(X)$, si $A \cap S \neq \emptyset$, sea $r_A = \sigma(\min \sigma^{-1}(A \cap S))$ y si $A \in C(S^1) - \{S^1\}$, sea $r_A \in \mathbb{R}$ tal que A es de la forma

$$A = \{(cos(t), sen(t)) : r_A \leq \theta \leq b\}$$

para alguna $b \in \mathbb{R}$. Para $A = S^1$ no se define r_A. Por último, para $A \in C(X)\backslash\{S^1\}$ vamos a denotar por $d(r_A, S^1)$ a la distancia entre S^1 y r_A. Sea $\psi(r_A) = (u_A, v_A)$.

Para definir el encaje de $C(X)$ en $C(T_4)$ vamos a utilizar las siguientes funciones. Sean $g_1, g_2 : C(S^1) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g_1(A) = \begin{cases} [(2+2\pi)\frac{l(\psi(A))}{2\pi} + (1 - \frac{l(\psi(A))}{2\pi})(1 + u_A + l(\psi(A)))], & \text{si} \quad \psi(A) \neq S^1, \\ 2 + 2\pi, & \text{si} \quad \psi(A) = S^1. \end{cases}$$

y

$$g_2(A) = \begin{cases} [(2+2\pi)\frac{l(\psi(A))}{2\pi} + (1 - \frac{l(\psi(A))}{2\pi})(1 + v_A + l(\psi(A)))], & \text{si} \quad \psi(A) \neq S^1, \\ 2 + 2\pi, & \text{si} \quad \psi(A) = S^1. \end{cases}$$

donde para cada $B \in C(S^1)$, $l(B)$ es la longitud de B.

Notemos que las funciones $A \mapsto 1 + u_A + l(\psi(A))$ y $A \mapsto 1 + v_A + l(\psi(A))$ son continuas e inyectivas de $C(S^1)\backslash\{S^1\}$ en $\mathbb{R}$. Además, sean $A, B \in C(S^1)\backslash\{S^1\}$ tales que $A \subset B$. Denotemos por l' la longitud del arco más pequeño en S^1 que une a $\psi(r_A)$ y $\psi(r_B)$ si $\psi(r_A) \neq \psi(r_B)$ ó $l' = 0$, en otro caso. Entonces $l' + l(\psi(A)) \leq l(\psi(B))$. Así que $|u_A - u_B| \leq l' \leq l(\psi(B)) - l(\psi(A))$. Por lo que $1 + u_A + l(\psi(A)) \leq 1 + u_B + l(\psi(B))$. Similarmente $1 + v_A + l(\psi(A)) \leq 1 + v_B + l(\psi(B))$. Finalmente, usando un argumento similar al usado para probar que g es un encaje ordenado en el Ejemplo 32, concluimos que $g_1(A) \leq g_1(B)$ y $g_2(A) \leq g_2(B)$.

Entonces definimos $f : C(X) \to C(T_4)$ por

$$f(A) = \begin{cases} \Theta(g_1(S^1)e_1) \cup \Theta(g_2(S^1)e_2) \cup \Theta((2+2\pi)e_3), & \text{si} \quad A = S^1, \\ \Theta[(1+\mu(A)d(r_A, S^1))g_1(A)e_1] \cup \Theta[(1+\mu(A)d(r_A, S^1))g_2(A)e_2] \cup & \\ \Theta(l(\pi(A))e_3) \cup \Theta(d(r_A, S^1)e_4), & \text{si} \quad A \neq S^1. \end{cases}$$

La continuidad de f en $C(X)\backslash\{S^1\}$ se sigue de la continuidad de las funciones de Whitney, longitud, distancia, g_1 y g_2. Ahora si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)\backslash\{S^1\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = S^1$, entonces $\lim_{n\to\infty} l(A_n) = 2\pi$ y $\lim_{n\to\infty} d(r_{A_n}, S^1) = 0$. De manera que $\lim_{n\to\infty} f(A_n) = f(S^1)$.

Para ver que f es inyectiva, supongamos que $f(A) = f(B)$. Si $A = S^1$ entonces $B = S^1$. En efecto, supongamos que $B \neq S^1$, como $f(A) = f(B)$, $d(r_B, S^1) = 0$ y $l(\psi(B)) = 2\pi$. Lo cual es una contradicción. Así que $B = S^1$. Supongamos ahora que $A \neq S^1$ y $B \neq S^1$, entonces

$$\begin{aligned} {[1+\mu(A)d(r_A, S^1)]g_1(A)} &= [1+\mu(B)d(r_B, S^1)]g_1(B) \\ {[1+\mu(A)d(r_A, S^1)]g_2(A)} &= [1+\mu(B)d(r_B, S^1)]g_2(B) \\ l(\psi(A)) &= l(\psi(B)) \\ d(r_A, S^1) &= d(r_B, S^1) \end{aligned}$$

Supongamos primero que $A \in C(S^1)$, entonces $d(r_B, S^1) = d(r_A, S^1) = 0$. Por lo que $B \in C(S^1)$, así que $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Entonces, $g_1(A) = g_1(B)$, $g_2(A) = g_2(B)$ y $l(A) = l(B)$. Por tanto, $g(A) = g(B)$ y, como g es inyectiva, concluimos que $A = B$.

Supongamos ahora que $A \in C(X)$ es tal que $d(r_A, S^1) > 0$ y $\psi(A) \subsetneqq S^1$. Entonces, dado que $d(r_A, S^1) = d(r_B, S^1)$ tenemos que $r_A = r_B$. Entonces, puesto que $\psi(A) \subsetneqq S^1$, $l(\psi(A)) = l(\psi(B))$ y $r_A = r_B$ concluimos que $A = B$.

Finalmente, supongamos que $A \in C(X)$ tal que $d(r_A, S^1) > 0$ y $\psi(A) = S^1$. Dado que $d(r_A, S^1) = d(r_B, S^1)$ tenemos que $r_A = r_B$. Además, $l(\psi(A)) = l(\psi(B)) = 2\pi$, pues $\psi(A) = S^1$. Así que, $[1+\mu(A)d(r_A, S^1)](2+2\pi) = [1+\mu(B)d(r_B, S^1)](2+2\pi)$. Esto implica que $\mu(A) = \mu(B)$. Por tanto, $r_A = r_B$ y $\mu(A) = \mu(B)$, así que $A = B$. Lo que demuestra que f es inyectiva.

Ahora veamos que, si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$. En efecto, sabemos que si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$, $d(r_A, S^1) \leq d(r_B, S^1)$, $g_1(A) \leq g_1(B)$ y $g_2(A) \leq g_2(B)$, lo que demuestra que $f(A) \subset f(B)$. Por tanto, concluimos que $C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_4)$. ■

Problema. Sea X el continuo del Ejemplo 35. ¿Es posible encajar ordenadamente a $C(X)$ en $C(T_3)$? Ya que $C(X)$ es homeomorfo a su cono (ver el Teorema 7.4 de [5]), entonces $C(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ y, por consiguiente, en $C(T_3)$.

Ejemplo 36. *$C(S^1)$ no puede ser encajado ordenadamente en $C(I)$.*

Sabemos que $C([0,1])$ y $C(S^1)$ son 2-celdas, donde $[0,1]$ es un elemento de la frontera de la 2-celda $C([0,1])$, mientras que S^1 no es un elemento de la frontera de $C(S^1)$ (ver Ejemplos 5.1 y 5.2 de [5]). Así $C(S^1)$ puede ser encajado en $C(I)$. Supongamos que existe una función $g : C(S^1) \to C(I)$ continua e inyectiva tal que, si $A \subset B$ entonces $g(A) \subset g(B)$. Entonces, $g(S^1)$ es un subarco de $[0,1]$ tal que $g(A) \subset g(S^1)$ para todo $A \in C(S^1)$. De este modo, g también es un encaje ordenado de $C(S^1)$ en $C(g(S^1))$. Así, podemos asumir que $g(S^1) = [0,1]$. Por tanto, g es un encaje de la 2-celda $C(S^1)$ en la 2-celda $C([0,1])$, que aplica un punto que no pertenece a la frontera de $C(S^1)$ en un punto que pertenece a la frontera de $C(I)$. Por tanto, esta contradicción prueba que $C(S^1)$ no puede ser encajado ordenadamente en $C(I)$. ■

Los siguientes ejemplos nos dicen que, si G es una gráfica finita, entonces siempre es posible encontrar una $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de tal manera que $C(G)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(T_n)$, donde T_n es, como hemos estado usando, un n-odo simple.

Ejemplo 37. *Sea T un árbol. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C(T)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_n)$.*

Supongamos que T es un árbol con m puntos de ramificación, $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Probaremos por inducción en m, lo siguiente. Sea $n = \sum_{i=1}^{m} o(v_i)$, entonces existe un encaje ordenado $f : C(T) \to C(T_n)$ tal que si $A \in C(T)$, entonces $v \in f(A)$, para todo $A \in C(T)$. Para hacer esto, cambiaremos ligeramente la definición de T_n, hagamos $T_n = \bigcup_{j=1}^{n} \Theta e_j$ y definamos $I_j = \Theta e_j$.

Veamos que el resultado es válido para $m = 1$. En este caso tomamos $n = o(v_1)$, por lo que $T = T_n$. Notemos que en $C(T)$ existen dos tipos de subcontinuos, los que contienen a $v_1 = \Theta$ y los que están contenidos en alguno de los segmentos, $I_1, I_2, ..., I_n$. Si $A \in C(T)$ tiene a v_1, entonces A queda determinada por las longitudes, $l(A \cap I_j)$, para $1 \leq j \leq n$. Sea $l : C(T) \to \mathbb{R}$ la función longitud. Si $A \in C(T)$ está contenido en algún I_j, entonces A queda determinada por $l(A \cap I_j)$, y por la distancia de A a v_1, $d(v_1, A)$. Entonces definimos $f_1 : C(T) \to C(T)$ por

$$f_1(A) = \bigcup_{j=1}^{n} \Theta \left[\left(\frac{1}{2}[1 + l(A \cap I_j) - \max(\{d(v_1, A \cap I_s) : s \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{j\}\} \cup \{0\})] \right) e_j \right]$$

Notemos que si $A \subset I_j$ para alguna $1 \leq j \leq n$, entonces $A \cap I_s = \emptyset$ para cada $s \in \{1, ..., n\} \backslash \{j\}$. Asumamos que $d(v_1, \emptyset) = -1$.

Dado que las funciones, de $C(X)$ a $\mathbb{R}$, dadas por $A \mapsto l(A \cap I_j)$ son continuas, f_1 es una función continua.

Para probar que f_1 es inyectiva, tomemos $A, B \in C(T)$ y supongamos que $f_1(A) = f_1(B)$. Como ya mencionamos, existen dos posibilidades para $A \in C(T)$, $v_1 \in A$ o bien A está contenido en I_j, para alguna $1 \leq j \leq n$. Supongamos primero que $v_1 \in A$. Entonces

$$f_1(A) = \bigcup_{j=1}^{n} \Theta \left[\left(\frac{1}{2}[1 + l(A \cap I_j)] \right) e_j \right],$$

por lo que

$$\frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_j) - \max(\{d(v, B \cap I_s) : s \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{j\}\} \cup \{0\})] \geq \frac{1}{2}$$

para cada j. Si $v_1 \notin B$, entonces podemos suponer que $B \cap I_1 = \emptyset$, así que

$\frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_1) - \max(\{d(v_1, B \cap I_s) : s \in \{2, ..., n\}\} \cup \{0\})] =$

$\frac{1}{2}[1 - \max(\{d(v, B \cap I_s) : s \in \{2, ..., n\}\} \cup \{0\})] < \frac{1}{2}$.

Este absurdo muestra que $v_1 \in B$ y por tanto,

$$f_1(B) = \bigcup_{j=1}^{n} \Theta\left[\left(\frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_j)]\right) e_j\right]$$

Dado que $f_1(A) = f_1(B)$, entonces

$$\frac{1}{2}[1 + l(A \cap I_j)] = \frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_j)]$$

para cada j, con $1 \leq j \leq n$. Luego, $l(A \cap I_j) = l(B \cap I_j)$ para cada j. Por tanto, $A = B$.

Ahora supongamos que A está contenido en $I_{j_0} - \{v_1\}$ para alguna $1 \leq j_0 \leq n$. Entonces,

$$\frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_{j_0}) - \max(\{d(v_1, B \cap I_s) : s \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{j_0\}\} \cup \{0\})] \geq \frac{1}{2}$$

y

$$\frac{1}{2}[1 + l(B \cap I_j) - \max(\{d(v, B \cap I_s) : s \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{j\}\} \cup \{0\})] < \frac{1}{2}$$

para $j \neq j_0$.

Entonces $v_1 \notin B$ y B está contenido en I_{j_0}. Luego, $l(A \cap I_{j_0}) = l(B \cap I_{j_0})$ y $d(v_1, A \cap I_{j_0}) = d(v_1, B \cap I_{j_0})$. Por tanto $A = B$.

Entonces sólo resta demostrar que, $A \subset B$ implica que $f_1(A) \subset f_1(B)$. En efecto, dado que $A \subset B$, $l(A \cap I_j) \leq l(B \cap I_j)$ y

$$\max(\{d(v_1, A \cap I_j) : 1 \leq j \leq n\} \cup \{0\}) \geq \max(\{d(v_1, B \cap I_j) : 1 \leq j \leq n\} \cup \{0\})$$

Luego, $\frac{1}{2}[1 + l(A \cap I_j) - \max(\{d(v_1, A \cap I_s) : s \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{j\}\} \cup \{0\})] \leq \frac{1}{2}[1+$

$l(B \cap I_j) - \max(\{d(v_1, B \cap I_s) : s \in \{1,2,...,n\} \backslash \{j\}\} \cup \{0\})]$. Por lo que $f_1(A) \subset f_1(B)$. Así pues, f_1 es un encaje ordenado, como deseábamos demostrar. Lo cual demuestra que el resultado es válido para el caso $m = 1$.

Supongamos ahora que el resultado es válido para $m-1$ y que $m \geq 2$. A continuación vamos a demostrar que el resultado es válido para m. Estamos considerando entonces que T es un árbol con m puntos de ramificación, v_1, $v_2, ..., v_m$. Podemos suponer que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes en el árbol T y podemos tomar un punto $t \in v_1v_2 - \{v_1, v_2\}$. Entonces t divide al árbol T en dos subárboles T' y T'' tales que $t = T' \cap T''$, cada uno de ellos tiene menos puntos de ramificación que T, los vértices de T se parten en dos conjuntos, los que quedan en T' y los que quedan en T'' y, para cada uno de ellos, su orden en el nuevo árbol es el mismo que tenía antes.

Sean $n_1 = \sum\limits_{v_i \in X_1} ord(v_i)$ y $n_2 = \sum\limits_{v_i \in X_2} ord(v_i)$. Sea Y_1 un n_1-odo simple y sea Y_2 un n_2-odo simple, con $Y = \bigcup\limits_{j=1}^{n_2} \Theta[10e_{i+n_1}]$. Entonces, por hipótesis inductiva, existen encajes ordenados $f' : C(T') \to C(Y_1)$ y $f'' : C(T'') \to C(Y_2)$, tales que $\Theta \in f'(A)$ para todo $A \in C(T')$ y $\Theta \in f''(B)$ para todo $B \in C(T'')$. Tomemos $n = n_1 + n_2$. Entonces definimos $f : C(T) \to C(T_n)$ por

$$f(A) = \begin{cases} f'(A) \cup f''(\{t\}), & \text{si } A \in C(T'), \\ f'(\{t\}) \cup f''(A), & \text{si } A \in C(T''), \\ f'(A \cap T') \cup f''(A \cap T''), & \text{si } t \in A. \end{cases}$$

Notemos que $C(T') \cap C(T'') = \{t\}$. Además si $t \in A$ y $A \in C(T')$, entonces $A \cap T'' = \{t\}$. Similarmente, si $t \in A$ y $A \in C(T'')$, entonces $A \cap T' = \{t\}$. Así que, por estas observaciones, y dado que f', f'' y la función unión son continuas, tenemos que f es una función continua.

La inyectividad de f se sigue de la inyectividad de f' y f'', y recordando que $f' : C(T') \to C(Y_1)$ y $f'' : C(T'') \to C(Y_2)$.

Por último, si $A \subset B$, entonces $f'(A) \subset f'(B)$ y $f''(A) \subset f''(B)$. Por lo que se sigue inmediatamente que $f(A) \subset f(B)$. Lo que demuestra que el resultado es válido también para m. Esto termina la inducción y la prueba de la afirmación. ■

Ejemplo 38. *Sean G una gráfica finita. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C(G)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_n)$.*

Sea G una gráfica que consta de m segmentos, $J_1, J_2, \ldots, J_m$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, consideremos los triodos simples T_3^i, que constan de los segmentos $\Theta(e_{3i-2})$, $\Theta(e_{3i-1})$, $\Theta(e_{3i})$.

Sea $J_i^* = J_i - \{\text{puntos extremos de } J_i\}$. Consideremos entonces el espacio cociente $S_i = G/G \setminus J_i^*$, es decir, S_i es el espacio que se obtiene de comprimir todo el conjunto cerrado $G \setminus J_i^*$ en un solo punto. Sea $\pi_i : G \to S_i$ la proyección natural. Puesto que π_i es una función continua para cada i, entonces la función inducida, $\pi_i^* : C(G) \to C(S_i)$ dada por $\pi_i^*(A) = \pi(A)$, resulta ser una aplicación continua tal que si $A \subset B$ entonces $\pi_i^*(A) \subset \pi_i^*(B)$.

Recordemos que S^1 denota al círculo unitario de $\mathbb{R}^2$ que está centrado en el origen. Sea $\gamma_i : S_i \to S^1$ un homeomorfismo para cada i tal que $\gamma_i(G \setminus J_i^*) = (1, 0)$. Entonces, $\gamma_i^* : C(S_i) \to C(S^1)$ dada por $\gamma_i^*(C) = \gamma_i(C)$, es un homeomorfismo tal que si $C \subset D$ entonces $\gamma_i^*(C) \subset \gamma_i^*(D)$.

Como mostramos en el Ejemplo 32, existe un encaje ordenado $g_i : C(S^1) \to C(T_3^i)$ para cada i, donde T_3^i es el 3-odo $\Theta e_{3i-2} \cup \Theta e_{3i-1} \cup \Theta e_{3i}$.

Definimos la función $h_i : C(G) \to C(T_3^i)$ por la composición $h_i = g_i \circ \gamma_i^* \circ \pi_i^*$, esto es, $h_i(A) = g_i(\gamma_i(\pi_i(A)))$. La continuidad de las funciones h_i se sigue de la continuidad de las funciones g_i, γ_i y π_i. Claramente h_i es una función tal que $A \subset B$ implica $h_i(A) \subset h_i(B)$ para cada i.

Definimos entonces $h : C(G) \to C(T_{3m})$ dada por

$$h(A) = \bigcup_{i=1}^{m} h_i(A).$$

Claramente h es una función bien definida y tal que $A \subset B$ implica $h(A) \subset h(B)$.

La continuidad de la función h se sigue de la continuidad de las funciones h_i. Notemos que h así definida no es inyectiva. En efecto, sea J_i un arco de G con extremos p y q. Consideremos entonces $A = \{p\}$ y $B = \{q\}$. Claramente, $A \neq B$ pero $\pi_j(A) = \pi_j(B)$ para cada $j \neq i$. Así que $h(A) = h(B)$.

Vamos a solucionar este problema como sigue. Recordemos que en este trabajo estamos suponiendo que G está encajada en el cubo $\prod_{i=1}^{3} I_i$, donde $I_i = [0,1]$ para $i = 1, 2, 3$ (ver comentario después de la Definición 28).

Consideremos entonces las proyecciones $p_i : \prod_{i=1}^{3} I_i \to I_i$, para cada i. Sea T_3^{m+1} el triodo simple que consta de los segmentos $\Theta[e_{3m+1}]$, $\Theta[e_{3m+2}]$ y $\Theta[e_{3(m+1)}]$. Entonces definimos $p : C(G) \to C(T_3^{m+1})$ por $p(A) = \bigcup_{i=1}^{3} \Theta[p_i(A)e_{3m+i}]$.

Finalmente, definimos $f : C(G) \to C(T_{3(m+1)})$ por

$$f(A) = h(A) \cup p(A).$$

Claramente f es una función bien definida y tal que $A \subset B$ implica que $f(A) \subset f(B)$. La continuidad de la función f se sigue de la continuidad de las funciones h, p y unión.

Así que sólo resta demostrar que f es inyectiva. Sean $A, B \in C(G)$ tales que $A \neq B$. Si $A, B \in F_1(G)$, claramente $p(A) \neq p(B)$. Por lo que $f(A) \neq f(B)$.

Supongamos ahora que B es no degenerado y que existe $b \in B \backslash A$. Puesto que $b \in G \backslash A$ y B es un continuo no degenerado, existe todo un subarco de B que no intersecta a A. En particular, podemos elegir $b \in B \backslash A$, tal que b no es un punto de ramificación de G.

Sea $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $b \in J_l$. Entonces, $\pi_l(b) \neq \pi_l(a)$ para toda $a \in A$, ya que $b \in B \backslash A$ y b no es punto extremo de J_l. Así que $\pi_l(B) \neq \pi_l(A)$. Por lo que $\pi_l^*(B) \neq \pi_l^*(A)$. Como γ_l^* y g_l son inyectivas, entonces $g_l(\gamma_l^*(\pi_l^*(B)) \neq g_l(\gamma_l^*(\pi_l^*(A)))$. Esto es, $h_l(B) \neq h_l(A)$. Por lo que $h(B) \neq h(A)$. Por tanto, $f(B) \neq f(A)$. Lo que demuestra que f es inyectiva y concluye la demostración del teorema. ■

Notemos que el hecho de que una gráfica finita, G, contenga curvas cerradas simples, aumenta considerablemente el orden del vértice del n-odo, T_n, para el que $C(G)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_n)$.

Problema. Encontrar un algoritmo para, dado un árbol X, determinar la mínima $n \in \mathbb{N}$ tal que $C(X)$ pueda ser encajado ordenadamente en $C(T_n)$.

2.4 Encajes ordenados y continuos que contienen n-odos

La siguiente definición es una generalización del concepto de n-odo simple

Definición 39. *Un n-odo ($2 \leq n < \infty$) es un continuo X, para el cual existe un subcontinuo Z, tal que $X - Z = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \neq \emptyset$ para cada i, y siempre que $i \neq j$, E_i y E_j están mutuamente separados. Un 3-odo es llamado un triodo.*

El siguiente resultado caracteriza a los continuos que contienen n-odos usando encajes ordenados.

Teorema 40. *Sea Y un continuo. Entonces $C(T_n)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$ si y sólo si Y contiene n-odos.*

Demostración. Supongamos primero que $g : C(T_n) \to C(Y)$ es un encaje ordenado. Puesto que T_n es un n-odo simple, por el Teorema 70.1 de [5], $C(T_n)$ contiene n-celdas. Dado que g es un encaje, $C(T_n)$ es homeomorfo a $g(C(T_n))$. Así pues, $g(C(T_n))$ contiene n-celdas. Luego, puesto que $g(C(T_n))$ es un subcontinuo de $C(Y)$, $C(Y)$ contiene n-celdas. Por tanto, de nuevo por el Teorema 70.1 de [5], Y contiene n-odos.

Supongamos ahora que Y contiene n-odos. Sea $I^n = \prod_{i=1}^{n}[0,1]_i$ una n-celda. Para definir un encaje ordenado $g : C(T_n) \to C(Y)$ vamos a definir primero dos aplicaciones, $g_1 : C(T_n) \to I^n$ y $g_2 : I^n \to C(Y)$.

De nuevo cambiamos ligeramente la definición de T_n, lo escribimos así: $T_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Theta e_i$, y hacemos $I_i = \Theta e_i$. Notemos que en $C(T_n)$ existen dos tipos de elementos, los que tienen a Θ y los que están contenidos en alguno de los segmentos, I_i, para $1 \leq i \leq n$ Sea $L : C(T_n) \to \mathbb{R}$ la función longitud. Si $A \in C(T_n)$ tiene a Θ, entonces A queda determinada por las n longitudes, $L(A \cap I_i)$, para $1 \leq i \leq n$. Ahora, si $A \in C(T_n)$ está contenido en I_i, para alguna $1 \leq i \leq n$, entonces A queda determinada por $L(A \cap I_i)$ y la distancia de A a Θ, $d(\Theta, A)$. Entonces definimos $g_1 : C(T_n) \to I^n$ por

$$g_1(A) = \left(\frac{1}{2}[1 + L(A \cap I_i) - \max(\{d(v, A \cap I_j) : j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}\} \cup \{0\})]\right)_{i=1}^{n}$$

En forma similar al argumento dado en el Ejemplo 37, se muestra que g_1 es una función continua e inyectiva.

Ahora vamos a definir una aplicación $g_2 : I^n \to C(Y)$. Sea Z un n-odo contenido en Y. Entonces, por 12.20 de [5], podemos escribir $Z = \bigcup_{i=i}^{n} Z_i$, donde Z_i es un continuo para cada i, $M = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$ es un continuo, $Z_i - M \neq \emptyset$ para cada i, y $Z_i \cap Z_j = M$ siempre que $i \neq j$.

Consideremos ahora arcos ordenados, $\alpha_i : [0,1] \to C(Z_i)$ tales que $\alpha_i(0) = M$ y $\alpha_i(1) = Z_i$. Entonces definimos $g_2 : I^n \to C(Y)$ por

$$g_2((t_i)_{i=1}^{n}) = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(t_i)$$

g_2 es una función continua ya que las funciones α_i y la función unión son continuas.

Probemos ahora que g_2 es inyectiva. Para ello supongamos que $(t_i)_{i=1}^{n} \neq (r_i)_{i=1}^{n}$. Entonces existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $t_{i_0} \neq r_{i_0}$. Como α_{i_0} es inyectiva, entonces $\alpha_{i_0}(t_{i_0}) \neq \alpha_{i_0}(r_{i_0})$. Supongamos que $\alpha_{i_0}(t_{i_0}) \subsetneq \alpha_{i_0}(r_{i_0})$. Entonces tomemos $p \in \alpha_{i_0}(r_{i_0}) \setminus \alpha_{i_0}(t_{i_0})$. Como $\alpha_{i_0}(0) = M$, podemos suponer que $p \in Z_{i_0} - M$. Puesto que $Z_i \cap Z_j = M$ si $i \neq j$, entonces $p \notin \bigcup_{i \neq i_0} Z_i$. Por lo que $p \notin \bigcup_{i \neq i_0} \alpha(t_i)$. Así que $p \notin \bigcup_{i=1}^{n} \alpha(t_i)$. Por lo que $\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(t_i) \neq \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i(r_i)$. Lo que implica que $g_2((t_i)_{i=1}^{n}) \neq g_2((r_i)_{i=1}^{n})$. Esto demuestra que g_2 es inyectiva.

Finalmente definimos $g = g_2 \circ g_1$, esto es, $g : C(T_n) \to C(Y)$ está dada por

$$g(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{1}{2}[1 + l(A \cap I_i) - \max(\{d(v, A \cap I_j) : j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}\} \cup \{0\})]\right)$$

g es continua e inyectiva pues g_1 y g_2 lo son. Entonces sólo resta demostrar que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En efecto, dado que $A \subset B$, $L(A \cap I_i) \leq L(B \cap I_i)$ y $\max\{d(v, A \cap I_i) : 1 \leq i \leq n\} \geq \max\{d(v, B \cap I_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Luego, $-\max\{d(v, A \cap I_i) : 1 \leq i \leq n\} \leq -\max\{d(v, B \cap I_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Y como cada α_i es un arco ordenado concluimos que $g(A) \subset g(B)$. Así pues, g es un encaje ordenado, como deseábamos demostrar. Lo que concluye la demostración del teorema. ■

Capítulo 3

Encajes ordenados y continuos hereditariamente indescomponibles

3.1 Introducción

Un continuo es hereditariamente indescomponible si todos sus subcontinuos no degenerados son indescomponibles (ver Definición 20). En este capítulo, vamos a dar una caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles, usando encajes ordenados.

3.2 Caracterización de los continuos hereditariamente indescomponibles

Definición 41. *Un conjunto $\mathcal{A} \subset C(X)$ es llamado una anticadena si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$ implican $A = B$.*

Definición 42. *Un arco ordenado largo en 2^X, es un arco ordenado α, tal que $\alpha(0) \in F_1(X)$ y $\alpha(1) = X$*

Los siguientes resultados caracterizan a los continuos X, tales que $C(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$, donde Y es hereditariamente indescomponible.

Teorema 43. *Sea Y un continuo hereditariamente indescomponible. Si existe un encaje ordenado $g : C(X) \to C(Y)$ entonces*

(a) X es un continuo hereditariamente indescomponible,

(b) $g(F_1(X))$ es una anticadena compacta que intersecta a todo arco ordenado largo en $C(g(X))$.

Demostración. (a) Por el Lema 1.61 de [7], basta demostrar que dados $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$, existe un único arco en $C(X)$ con extremos A y B. Supongamos por el contrario que existen A,$B \in C(X)$ con $A \neq B$ para los cuales existen al menos dos arcos distintos, $\alpha, \beta \subset C(X)$ tales que, $\alpha(0) = \beta(0) = A$ y $\alpha(1) = \beta(1) = B$. Puesto que g es un encaje, $g(A) \neq g(B)$ y puesto que α, β son arcos distintos, $g \circ \alpha$ y $g \circ \beta$ también son arcos distintos en $C(Y)$. Además, $g \circ \alpha(0) = g \circ \beta(0) = g(A)$ y $g \circ \alpha(1) = g \circ \beta(1) = g(B)$. Esto contradice el Lema 1.61 de [7], pues Y es un continuo hereditariamente indescomponible. Por tanto, dados $A, B \in C(X)$ con $A \neq B$, existe un único arco en $C(X)$ con extremos A y B. Entonces de nuevo por el Lema 1.61 de [7], X es un continuo hereditariamente indescomponible.

(b) Puesto que $F_1(X)$ es un compacto y g es continua, entonces $g(F_1(X))$ es compacto. Para demostrar que $g(F_1(X))$ es una anticadena necesitamos mostrar la siguiente

Afirmación 1. *Si $p, q \in X$ y $p \neq q$ entonces $g(\{p\}) \not\subseteq g(\{q\})$.*

Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces, existen $p, q \in X$ tales que $p \neq q$ y $g(\{p\}) \subset g(\{q\})$. Por otra parte, $\{p\}, \{q\} \in C(X)$ con $\{p\} \neq \{q\}$ entonces, por el Teorema 14.9 de [5], existe un arco $\alpha \subset C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = \{q\}$. Además, por el inciso (a), X es hereditariamente indescomponible. Luego, por el Corolario 1.62 de [7], tenemos que

(i) α es un arco ordenado, o bien

(ii) $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$, donde α_1 y α_2 son arcos ordenados tales que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \cup\alpha$

Obviamente α no puede ser un arco ordenado, así que se debe satisfacer (ii). Escribamos $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Puesto que g es un encaje ordenado, $g \circ \alpha_1$ y $g \circ \alpha_2$ son arcos ordenados en $C(Y)$ tales que, $g \circ \alpha_1(0) = g(\{p\})$, $g \circ \alpha_1(1) = g(\cup\alpha)$, $g \circ \alpha_2(0) = g(\{q\})$ y $g \circ \alpha_2(1) = g(\cup\alpha)$.

Consideremos la función $\beta : [0,1] \to C(Y)$, dada por

$$\beta = \begin{cases} g \circ \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g \circ \alpha_2(2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, β así definido es una función continua e inyectiva tal que $\beta(0) = g \circ \alpha_1(0) = g(\{p\})$ y $\beta(1) = g \circ \alpha_2(0) = g(\{q\})$. Puesto que Y es un continuo hereditariamente indescomponible, por el Lema 1.61 de [7], existe un único arco con extremos $g(\{p\})$ y $g(\{q\})$, que además resulta ser ordenado pues $g(\{p\}) \subset g(\{q\})$. Pero β no es un arco ordenado pues,

$$\beta(\tfrac{1}{2}) = g \circ \alpha_1(1) = \cup\alpha$$
$$\beta(1) = g \circ \alpha_2(0) = g(\{q\})$$

Así $\beta(1) \subset \beta(\frac{1}{2})$. Esto contradice el Lema 1.61 de [7]. Puesto que la contradicción se obtiene de suponer que existen $p, q \in X$ con $p \neq q$, tales que $g(\{p\}) \subset g(\{q\})$, entonces la Afirmación 1 queda demostrada.

Demostremos ahora que $g(F_1(X))$ es una anticadena. Sean $A, B \in g(F_1(X))$, entonces existen $r, s \in X$ tales que $A = g(\{r\})$ y $B = g(\{s\})$ y supongamos que $g(\{r\}) \subset g(\{s\})$. Como ya demostramos arriba, si $\{r\} \neq \{s\}$ tendríamos que $g(\{r\}) \not\subset g(\{s\})$. Lo que sería absurdo, entonces $\{r\} = \{s\}$. Así $g(\{r\}) = g(\{s\})$, es decir, $A = B$. Lo que demuestra que $g(F_1(X))$ es una anticadena.

Probemos que $g(F_1(X))$ intersecta a todo arco ordenado largo en $C(g(X))$. Primero probaremos que para toda $y \in g(X)$ existe $x \in X$ tal que $y \in g(\{x\})$. Lo que es equivalente a demostrar

Afirmación 2. $\bigcup\limits_{x \in X} g(\{x\}) = g(X)$.

Dado que $g(\{x\}) \subset g(X)$, para toda $x \in X$, entonces $\bigcup_{x\in X} g(\{x\}) \subset g(X)$. Como

$$\{g(\{x\}) \in C(Y) : x \in X\}$$

es un subcontinuo de $C(Y)$ entonces, por el Lema 1.43 de [7], tenemos que $\bigcup_{x\in X} g(\{x\})$ es un subcontinuo de $g(X)$. Dada $u \in X$, $g(\{u\}) \subset \bigcup_{x\in X} g(\{x\})$, y como Y es hereditariamente indescomponible, todo arco ordenado de $g(\{u\})$ a $g(X)$ pasa por $\bigcup_{x\in X} g(\{x\})$. Tomemos $p, q \in X$ en diferentes composantes, K_p y K_q. Puesto que X es hereditariamente indescomponible, $K_p \cap K_q = \emptyset$ (ver Teorema 22). Consideremos ahora, $\alpha_p, \alpha_q \subset C(X)$, arcos ordenados largos que inician en $\{p\}$ y $\{q\}$, respectivamente. Entonces $\alpha_p \cap \alpha_q = \{X\}$. En efecto, si existiera $A \subsetneqq X$ tal que $A \in \alpha_p \cap \alpha_q$, entonces, puesto que A es un subcontinuo propio de que X que contiene a p y q, se tiene que $q \in K_p$, lo que contradice el que $K_p \cap K_q = \emptyset$. Por lo que $\alpha_p \cap \alpha_q = \{X\}$, como deseábamos.

Por otra parte, $g \circ \alpha_p$ y $g \circ \alpha_p$ son arcos ordenados en $C(g(X))$ tales que, $g \circ \alpha_p(0) = g(\{p\})$, $g \circ \alpha_q(0) = g(\{q\})$ y $g \circ \alpha_p(1) = g \circ \alpha_q(1) = g(X)$. Además, como ya demostramos arriba $g \circ \alpha_p$ y $g \circ \alpha_q$ pasan por $\bigcup_{x\in X} g(\{x\})$. Esto es, existen $s, t \in [0,1]$ tales que

$$g \circ \alpha_p(s) = g \circ \alpha_q(t) = \bigcup_{x\in X} g(\{x\}).$$

Puesto que g es inyectiva, $\alpha_p(s) = \alpha_q(t)$; entonces $\alpha_p(s) = \alpha_q(t) = X$. Por tanto,

$$g(X) = \bigcup_{x\in X} g(\{x\}).$$

Lo que demuestra la Afirmación 2.

Ahora, sean $y \in g(X)$ y α un arco ordenado de $\{y\}$ a $g(X)$. Por lo que ya vimos, existe $x \in X$ tal que $y \in g(\{x\}) \subset g(X)$. Como Y es hereditariamente indescomponible, $g(\{x\}) \in \alpha([0,1])$. Esto termina la prueba de (b) y la del teorema. ■

Teorema 44. *Sea Y un continuo hereditariamente indescomponible. Si $\mathcal{A}$ es una anticadena compacta y conexa que intersecta todo arco ordenado de $C(Y)$, entonces* *(a)* existe un encaje ordenado $g : C(\mathcal{A}) \to C(Y)$,

(b) $g(C(\mathcal{A})) = \{B \in C(Y) : \textit{existe } A \in \mathcal{A} \textit{ tal que } A \subset B\}$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{B} \in C(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{B} \in C(C(Y))$. Por el Lema 1.43 de [7], $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ es un subcontinuo de Y.

Entonces definimos $g : C(\mathcal{A}) \to C(Y)$ por

$$g(\mathcal{B}) = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$$

Claramente g está bien definida. Además, por el Lema 1.48 de [7], tenemos que g es continua.

Probemos que g es inyectiva. Supongamos por el contrario que existen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in C(\mathcal{A})$ tales que $g(\mathcal{B}) = g(\mathcal{C})$ y $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$. Como $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$, podemos suponer que existe $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que $C_0 \notin \mathcal{B}$. Tomemos $c \in C_0$, puesto que

$$\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$$

existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $c \in B_0$. Entonces, $\{c\} \subset B_0$ y $\{c\} \subset C_0$, por lo que existen arcos ordenados, $\beta, \gamma \subset C(Y)$ tales que $\beta(0) = \gamma(0) = \{c\}$, $\beta(1) = \gamma(1) = Y$ y $\beta(r) = B_0$, para alguna $r \in [0, 1]$ y $\gamma(t) = C_0$, para alguna $t \in [0, 1]$.

Ahora, si existiera $s \in [0, 1]$ tal que $C_0 = \beta(s)$, entonces $B_0 \subset C_0$ o bien $C_0 \subset B_0$. Dado que $B_0, C_0 \in \mathcal{A}$, entonces cualquiera de las dos contenciones implicaría $B_0 = C_0$, que es falso pues $C_0 \notin \mathcal{B}$. Por tanto, $C_0 \neq \beta(s)$ para toda $s \in [0, 1]$. Por lo que β y γ son arcos ordenados distintos. Lo que contradice el que Y sea hereditariamente indescomponible. Puesto que esta contradicción se obtiene de suponer que $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$, entonces concluimos que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Finalmente probaremos que si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in C(\mathcal{A})$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ entonces $g(\mathcal{B}) \subset g(\mathcal{C})$. En efecto, sea $b \in \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que, $b \in B$. Puesto que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$. Entonces $B \subset \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$, por tanto $b \in \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}\}$. Así pues, $g(\mathcal{B}) \subset g(\mathcal{C})$.

Por tanto, hemos demostrado que g encaja ordenadamente a $C(\mathcal{A})$ en $C(Y)$.

(b) Sea g como en el inciso (a). Primero vamos a demostrar que $g(\mathcal{A}) = Y$. Según la definición de g, lo que debemos demostrar es

$$\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} = Y.$$

Claramente $\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} \subset Y$.

Ahora, sea $y \in Y$. Sea $\alpha \subset C(Y)$ un arco ordenado largo tal que $\alpha(0) = \{y\}$. Por hipótesis, $\mathcal{A}$ es una anticadena que intersecta todo arco ordenado largo en $C(Y)$, por tanto, $\alpha(s) \in \mathcal{A}$ para alguna $s \in [0,1]$. Puesto que $y \in \alpha(s) \in \mathcal{A}$, podemos concluir que $Y \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Por tanto, $g(\mathcal{A}) = Y$.

Denotemos $\mathcal{W} = \{B \in C(Y) : \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } A \subset B\}$. A continuación vamos a demostrar que $g(C(\mathcal{A})) \subset \mathcal{W}$. Sea $M \in g(C(\mathcal{A}))$ entonces existe $\mathcal{M} \in C(\mathcal{A})$ tal que $g(\mathcal{M}) = M$. Elegimos un elemento $A \in \mathcal{M} \subset \mathcal{A}$. Entonces $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{M}\} = g(\mathcal{M}) = M$. De manera que $A \subset M$. Así, $M \in \mathcal{W}$.

Ahora probaremos que $\mathcal{W} \subset g(C(\mathcal{A}))$. Sea $M \in \mathcal{W}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset M$. Luego, $\{A\} \in \mathcal{A}$. Así que existe un arco ordenado α en $C(\mathcal{A})$ tal que $\alpha(0) = \{A\}$ y $\alpha(1) = \mathcal{A}$. Entonces $g \circ \alpha$ es un arco ordenado en $C(Y)$ tal que $g \circ \alpha(0) = A$ y $g \circ \alpha(1) = g(\mathcal{A}) = Y$, como lo demostramos arriba. Puesto que Y es un continuo hereditariamente indescomponible, $g \circ \alpha$ es el único arco en $C(Y)$ con extremos A y Y. Entonces, $g \circ \alpha(s) = M$ para alguna $s \in [0,1]$. Puesto que $\alpha(s) \in C(\mathcal{A})$, hemos demostrado que $M \in g(C(\mathcal{A}))$. Así pues, $\mathcal{W} \subset g(C(\mathcal{A}))$. Por tanto, $\mathcal{W} = g(C(\mathcal{A}))$. ∎

Corolario 45. *Sea Y un continuo hereditariamente indescomponible y sea X un continuo. Entonces $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$ si y sólo si existe un subcontinuo Y' de Y tal que X es homeomorfo a un subcontinuo $\mathcal{A}$ de $C(Y')$ que es una anticadena e intersecta a todo arco ordenado largo de $C(Y')$.*

3.3 Existencia de una anticadena en $C(X)$ que intersecta a todo arco ordenado largo y que no es un nivel de Whitney

En el Teorema 1.2 de [4] se demuestra que si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo del hiperespacio $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$, entonces $\mathcal{A}$ es un nivel de Whitney de $C(X)$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es una anticadena que intersecta a todo arco ordenado largo de $C(X)$. Cabría entonces la pregunta de si podemos cambiar, en el corolario anterior, las condiciones impuestas a $\mathcal{A}$ por la de ser un nivel de Whitney para $C(Y')$. En el siguiente ejemplo mostraremos que eso no es posible. En concreto, vemos que, para todo continuo X, existe una anticadena $\mathcal{A}$ de $C(X)$ que intersecta a todo arco ordenado largo y que no es un nivel de Whitney.

Sea X un continuo y $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Sea $p \in X$, entonces definimos $w : C(X) \to [0,1]$ por

$$w(A) = \mu(A \cup \{p\})$$

Observemos que si $A, B \in C(X)$ y $A \subset B$, entonces $w(A) \leq w(B)$. En efecto, puesto que $A \cup \{p\} \subset B \cup \{p\}$ y μ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(A \cup \{p\}) \leq \mu(B \cup \{p\})$. Por tanto, $w(A) \leq w(B)$.

Como μ es una función continua, w también lo es. Luego, puesto que $[0,1]$ y $C(X)$ son espacios compactos, podemos elegir $q \in X$ tal que $w(\{x\}) \leq w(\{q\})$, para toda $x \in X$. Denotemos $s = w(\{q\})$ y consideremos

$$\mathcal{A} = w^{-1}(s) = \{A \in C(X) : w(A) = s\}$$

Dada $x \in X \backslash \{p\}$, $w(\{x\}) = \mu(\{x,p\}) > 0$, así que $s > 0$. Y como $w(\{p\}) = 0$, concluimos que $\{p\} \notin \mathcal{A}$.

Probemos $\mathcal{A}$ es una anticadena. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$. Entonces, por definición de $\mathcal{A}$, $w(A) = w(B) = s$. Esto es, $\mu(A \cup \{p\}) = \mu(B \cup \{p\})$ y $A \cup \{p\} \subset B \cup \{p\}$. Por tanto, $A \cup \{p\} = B \cup \{p\}$. Luego, si $p \in A$, entonces $B \subset A$ y así $A = B$. Supongamos ahora que $p \notin A$. Como A y $\{p\}$ son cerrados en $C(X)$ entonces, A y $\{p\}$ están separados. Luego, puesto que B es conexo, $B \subset A$ o bien $B = \{p\}$. Como $A \cup \{p\} \neq \{p\}$ concluimos que $A = B$.

Ahora veremos que $\mathcal{A}$ es una anticadena que intersecta a todo arco ordenado largo en $C(X)$. Sea $\alpha \subset C(X)$ un arco ordenado largo tal que $\alpha(0) = \{x\}$. Dado que w es continua y

$$\begin{aligned} w(\alpha(0)) &= w(\{x\}) \leq w(q) = s, \\ w(\alpha(1)) &= w(X) = 1, \end{aligned}$$

entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $r \in [0,1]$ tal que $w(\alpha(r)) = s$. Por tanto, $\alpha(r) \in \mathcal{A}$. Como α es un arco ordenado largo arbitrario, entonces hemos demostrado que $\mathcal{A}$ intersecta a todo arco ordenado largo en $C(X)$.

Vamos a demostrar que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $C(X)$. Puesto que $\mathcal{A}$ es la imagen inversa de un cerrado bajo una función continua, $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Puesto que $C(X)$ es compacto, $\mathcal{A}$ es compacto.

Consideremos los siguientes subconjuntos de $C(X)$

$$\mathcal{B} = w^{-1}([0,s]) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C} = w^{-1}([s,1])$$

Afirmación 1. *$\mathcal{B} = \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \bigcup\{\alpha \subset C(X) : \alpha$ es un arco ordenado tal que $\alpha(0) \in F_1(X)$, $\alpha(1) \in \mathcal{A}\}$*

En efecto, sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces $w(B) \leq s$. Así que existe un arco ordenado largo $\alpha \subset C(X)$ tal que, $B = \alpha(t_0)$ para alguna $t_0 \in [0,1]$. Puesto que $\mathcal{A}$ intersecta a todo arco ordenado largo en $C(X)$, entonces existe $t_1 \in [0,1]$ tal que $\alpha(t_1) \in \mathcal{A}$. Como $B \in w^{-1}([0,s])$, entonces $t_0 \leq t_1$. Si $t_1 = 0$, entonces $t_0 = 0$. De manera que $B = \alpha(0) \in \mathcal{D}$.

Supongamos entonces que $t_1 > 0$. Definimos entonces $\beta : [0,1] \to C(X)$ por $\beta(s) = \alpha(t_1 s)$. Dado que α es un arco ordenado, β también lo es. Además $\beta(0) = \alpha(0) \in F_1(X)$, $\beta(1) = \alpha(t_1) \in \mathcal{A}$ y $\beta(\frac{t_0}{t_1}) = B$. Por tanto, $B \in \mathcal{D}$.

Ahora, tomemos $B \in \mathcal{D}$. Entonces existen un arco ordenado $\alpha \subset C(X)$ y un número $t_0 \in [0,1]$, tales que $\alpha(0) \in F_1(X)$, $\alpha(t_0) = B$ y $\alpha(1) \in \mathcal{A}$. Luego,

$$w(B) = w(\alpha(t_0)) \leq w(\alpha(1)) = s$$

Así pues, $0 \leq w(B) \leq s$. Luego, $B \in \mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$. Lo que demuestra la Afirmación 1.

Afirmación 2. *$\mathcal{C} = \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E} = \bigcup\{\alpha \subset C(X) : \alpha$ es un arco tal que $\alpha(0) \in \mathcal{A}$, $\alpha(1) = X\}$*

Sea $C \in \mathcal{C}$, entonces existe un arco ordenado largo $\alpha \subset C(X)$ tal que $\alpha(t_0) = C$, para alguna $t_0 \in [0,1]$. Puesto que $\mathcal{A}$ intersecta a todo arco ordenado largo, entonces $\alpha(t_1) \in \mathcal{A}$, para alguna $t_1 \in [0,1]$, con $t_1 \leq t_0$ pues $C \in \mathcal{C}$. Si $t_1 = 1$, entonces $t_0 = 1$ y $B = X = \alpha(1)$. Así que $C \in \mathcal{E}$. Supongamos entonces que $t_1 < 1$. Definimos entonces $\beta : [0,1] \to C(X)$ por $\beta(s) = \alpha(t_1 + (1-t_1)s)$. Es claro que β es un arco ordenado pues α lo es. Además, $\beta(0) = \alpha(t_1) \in \mathcal{A}$, $\beta(\frac{t_0 - t_1}{1 - t_1}) = \alpha(t_0) = C$ y $\beta(1) = \alpha(1) = X$. Por tanto, $B \in \mathcal{E}$.

Ahora, sea $C \in \mathcal{E}$. Entonces, existe un arco ordenado tal que $\alpha(t_0) = C$ para alguna $t_0 \in [0,1]$, $\alpha(0) \in \mathcal{A}$ y $\alpha(1) = X$. Luego, $w(C) = w(\alpha(t_0)) \geqslant w(\alpha(0)) = s$ y $w(C) = w(\alpha(t_0)) \leq w(\alpha(1)) = 1$. Por tanto, $C \in \mathcal{C}$. Así que $\mathcal{C} = \mathcal{E}$. Lo que demuestra la Afirmación 2.

Notemos que $F_1(X) \subset \mathcal{B}$. Por la Afirmación 1, $\mathcal{B}$ es la unión de conexos que intersectan a un subconjunto conexo fijo, $F_1(X)$, de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es conexo. Similarmente $\mathcal{C}$ es conexo.

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{A}$ es conexo. Para ello observemos que $C(X) = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Luego, por el Corolario 1.176 de [7], $C(X)$ es unicoherente. Así pues, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ es conexo. Por tanto, $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $C(X)$.

Finalmente, vamos a demostrar que $\mathcal{A} = w^{-1}(s)$ no es un nivel de Whitney. Supongamos lo contrario, entonces tendríamos que

$$\mathcal{A} = \{A \in C(X) : \nu(A) = r\}$$

para alguna función de Whitney ν y alguna $r \in [0,1]$. Pero $\{q\} \in \mathcal{A}$, entonces $\nu(\{q\}) = r$. Por lo que $r = 0$. Entonces deberíamos tener que $\mathcal{A} = F_1(X)$, pero esto no es posible pues $\{p\} \notin \mathcal{A}$. Por tanto, $\mathcal{A}$ no puede ser un nivel de Whitney.

Capítulo 4

Encajes ordenados para 2^X

4.1 Introducción

En este capítulo vamos a demostrar que dados dos continuos cualesquiera, X y Y, siempre es posible encajar ordenadamente a 2^X en 2^Y.

Así como también daremos las condiciones que debe satisfacer un continuo Y, para que dado un continuo X, 2^X pueda ser encajado ordenadamente en $C(Y)$.

4.2 Definición de encaje ordenado para 2^X

Sean X, Y continuos. Sean 2^X y 2^Y los respectivos hiperespacios de X y Y.

Definición 46. *Una función $g : 2^X \to 2^Y$ es un encaje ordenado si g es una función continua e inyectiva tal que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En este caso, diremos que 2^X puede encajarse ordenadamente en 2^Y.*

Definición 47. *Una función $g : 2^X \to C(Y)$ es un encaje ordenado si g es una función continua e inyectiva tal que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En este caso, diremos que 2^X puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$.*

4.3 Encajes ordenados para 2^X

A continuación presentamos el resultado que nos dice que dados dos continuos cualesquiera, X y Y, siempre es posible encajar ordenadamente a 2^X en 2^Y.

Teorema 48. *Si X, Y son continuos entonces 2^X puede encajarse ordenadamente en 2^Y.*

Demostración. Para la demostración de este teorema construiremos un par de encajes.

Primer paso. *Daremos un encaje de 2^X en el cubo de Hilbert.*

Puesto que X es un espacio métrico y compacto, existe un subconjunto denso y numerable $D \subset X$. Escribamos $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y denotemos por $m_n = \max\{d(d_n, x) : x \in X\}$. Definimos $h_1 : 2^X \to I^\infty$ por

$$h_1(A) = \left(1 - \frac{d(d_n, A)}{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

La continuidad de h_1 se sigue de la continuidad de las funciones $d(d_n, A)$.

Ahora probaremos que h_1 es inyectiva. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \neq B$, entonces demostraremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(d_{n_0}, A) \neq d(d_{n_0}, B)$. Dado que $A \neq B$, existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \notin B$, así $a_0 \in X \backslash B$. Puesto que $X \backslash B$ es abierto, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(a_0, \varepsilon_0) \subset X \backslash B$. Puesto que D es un subconjunto denso de X, tenemos que $B(a_0, \frac{\varepsilon_0}{2}) \cap D \neq \emptyset$.

Tomemos $d_{n_0} \in B(a_0, \frac{\varepsilon_0}{2}) \cap D$ y calculemos $d(d_{n_0}, A)$ y $d(d_{n_0}, B)$. Como $d(d_{n_0}, A) = \min\{d(a, d_{n_0}) : a \in A\} \leq d(a_0, d_{n_0})$ y puesto que $d(a_0, d_{n_0}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, tenemos que $d(d_{n_0}, A) < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Por otra parte, observemos que $B(d_{n_0}, \frac{\varepsilon_0}{2}) \subset B(a_0, \varepsilon_0)$. En efecto, sea $c \in B(d_{n_0}, \frac{\varepsilon_0}{2})$, entonces $d(a_0, c) \leq d(a_0, d_{n_0}) + d(d_{n_0}, c) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$. Por lo que $c \in B(a_0, \varepsilon_0)$. Dado que $B(a_0, \varepsilon_0) \subset X \backslash B$, entonces $B(d_{n_0}, \frac{\varepsilon_0}{2}) \subset X \backslash B$. Esto es, dado $b \in B$, $d(b, d_{n_0}) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Puesto que $d(B, d_{n_0}) = \min\{d(b, d_{n_0}) : b \in B\}$, tenemos que $d(d_{n_0}, B) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Así pues, hemos demostrado que $d(d_{n_0}, A) \neq d(d_{n_0}, B)$. Por tanto, $h_1(A) \neq h_1(B)$, lo que demuestra que h_1 es inyectiva.

Segundo paso. *Daremos un encaje del cubo de Hilbert en* 2^Y.

Sea $p \in Y$ entonces, por el Lema 14.11 de [5], existe una sucesión, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, de subcontinuos no degenerados, mutuamente ajenos de $Y - \{p\}$ tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = \{p\}$. Puesto que cada A_n es no degenerado, 2^{A_n} es conexo por trayectorias. Así pues, existe un arco ordenado, α_n, en 2^{A_n} para cada n. Observemos que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n([0,1])$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, vía la aplicación, $(t_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (\alpha_n(t_n))_{n=1}^{\infty}$, denotemos por f a tal homeomorfismo. Sea $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, en el Teorema 14.12 de [5], se demuestra que la aplicación $g : \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \to 2^Y$ dada por

$$g((B_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cup \{p\}$$

es un encaje. Entonces, definimos $h_2 : I^{\infty} \to 2^Y$ por $h_2 = g \circ f$, esto es,

$$h_2((t_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t_n) \right) \cup \{p\}$$

Puesto que g y f son encajes, h_2 también lo es. Lo que concluye la demostración del Segundo paso.

Finalmente, tomando los encajes $h_1 : 2^X \to I^{\infty}$ y $h_2 : I^{\infty} \to 2^Y$ definimos $h : 2^X \to 2^Y$ por $h = h_2 \circ h_1$, esto es,

$$h(A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{d(A, d_n)}{m_n} \right) \right) \cup \{p\}$$

Puesto que h es un encaje, sólo resta demostrar que si $A, B \in 2^X$ y $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. En efecto, $A \subset B$ implica que $\frac{d(B,d_n)}{m_n} \leq \frac{d(A,d_n)}{m_n}$, para cada n, así que $1 - \frac{d(A,d_n)}{m_n} \leq 1 - \frac{d(B,d_n)}{m_n}$, para cada n. Puesto que α_n es un arco ordenado para cada n, $\alpha_n \left(1 - \frac{d(A,d_n)}{m_n}\right) \subset \alpha_n \left(1 - \frac{d(B,d_n)}{m_n}\right)$. Así pues, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{d(A,d_n)}{m_n}\right) \cup \{p\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{d(B,d_n)}{m_n}\right) \cup \{p\}$. Por tanto, $h(A) \subset h(B)$. Lo que demuestra que h encaja ordenadamente a 2^X en 2^Y. ■

4.4 Cuando 2^X puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$

El abanico armónico es el continuo que se obtiene al tomar el cono sobre el compacto $W = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{N}\}$. Denotemos por I_i al segmento de W que une a 0 con $c_i \in W$, con $c_0 = 0$. Denotaremos por D_w, al subespacio del abanico armónico definido como $D_w = \{\frac{1}{i}z : i \in \mathbb{N} \text{ y } z \in I_i\}$.

Teorema 49. *Si X es un continuo, entonces 2^X puede encajarse ordenadamente en $C(D_w)$.*

Demostración. Denotemos por Θ al vértice de D_w, $\Theta = (0,0)$. Deseamos definir una aplicación continua e inyectiva de 2^X a $C(D_w)$ tal que si $A, B \in 2^X$ y $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. Puesto que X es un espacio métrico y compacto, existe un subconjunto denso y numerable D de X. Escribamos $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y denotemos por $m_n = \max\{d(x, d_n) : x \in X\}$. Definimos $h : 2^X \to C(Y)$ por

$$h(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Theta\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{d(A, d_n)}{m_n}\right)(1, \frac{1}{n})\right]$$

donde $\Theta[k(1, \frac{1}{n})]$ denota al segmento en $\mathbb{R}^2$ que une a los puntos Θ y $k(1, \frac{1}{n})$. La demostración de que h es un encaje es similar a la que se hizo en el teorema anterior. Así que sólo resta demostrar que, si $A, B \in 2^X$, y $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. En efecto, $A \subset B$ implica que $\frac{1}{m_n} d(B, d_n) \leq \frac{1}{m_n} d(A, d_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $1 - \frac{1}{m_n} d(A, d_n) \leq 1 - \frac{1}{m_n} d(B, d_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que, $\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{m_n} d(A, d_n)\right) \leq \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{m_n} d(B, d_n)\right)$. Así pues, $h(A) \subset h(B)$.

Por tanto hemos demostrado que 2^X puede encajarse ordenadamente en $C(D_w)$. ■

El siguiente resultado es muy interesante pues nos dice qué condiciones debe satisfacer un continuo, Y, para que dado un continuo X, 2^X pueda ser encajado ordenadamente en

$C(Y)$.

Teorema 50. *Sean X, Y continuos. Entonces 2^X puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$ si y sólo si Y contiene ∞-odos.*

Demostración. Supongamos primero que 2^X puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$. Por el Teorema 48, 2^X contiene cubos de Hilbert. Entonces $C(Y)$ contiene cubos de Hilbert. Así, Y contiene ∞-odos.

Ahora supongamos que Y contiene ∞-odos. Para demostrar que 2^X puede ser encajado ordenadamente en $C(Y)$, vamos a contruir un par de encajes.

Primer paso. *Daremos un encaje de 2^X en el cubo de Hilbert.*

Puesto que X es un espacio métrico y compacto, existe un subconjunto denso y numerable, $D \subset X$. Escribamos $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ y denotemos por $m_n = \max\{d(x, d_n) : x \in X\}$. Como ya demostramos en el Teorema 7, la función $g_1 : 2^X \to I^\infty$ dada por

$$g_1(A) = \left(1 - \frac{d(A, d_n)}{m_n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

resulta ser un encaje.

Segundo Paso. *Daremos un encaje del cubo de Hilbert en $C(Y)$.*

Sea Z un ∞-*odo* contenido en Y. Entonces existe $W \in C(Z)$ tal que $Z \backslash W$ tiene una infinidad de componentes, W_n, para $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 1. $W \cap W_n^- \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Dado que, para cada n, W_n es una componente de $Z \backslash W$, por el Teorema de Golpes en la Frontera (ver Teorema 20.1 de [7]), tenemos que $Fr(Z \backslash W) \cap W_n^- \neq \emptyset$, para cada n. Esto es, $(Z \backslash W)^- \cap W \cap W_n^- \neq \emptyset$, para cada n. Por lo que $W_n^- \cap W \neq \emptyset$, para cada n. Lo que demuestra la Afirmación 1.

Afirmación 2 $W \cup W_k = W \cup W_k^-$, *para toda* $k \in \mathbb{N}$

Es claro que, $W \cup W_k \subset W \cup W_k^-$. Entonces, sólo resta demostrar que $W_k^- \subset W \cup W_k$. Claramente, $W_k^- = [W \cap W_k^-] \cup [Y \backslash W \cap W_k^-]$. Vamos a demostrar que $(Y \backslash W) \cap W_k^- = (Z \backslash W) \cap W_k^-$. En efecto, claramente $(Y \backslash W) \cap W_k^- \supset (Z \backslash W) \cap W_k^-$. Luego, como $Z \in$

$C(Y)$, $W_k^- \subset Z$ y así $(Y\backslash W) \cap W_k^- \subset (Z\backslash W \cap W_k^-)$. Por otra parte, como W_k es cerrado en $Z\backslash W$, entonces $W_k \supset Z\backslash W \cap W_k^-$. Por tanto, $W_k^- \subset W \cup W_k$. Así que la Afirmación 2 queda demostrada.

Sea $\mu : C(Z) \to [0,1]$ una función de Whitney, entonces

Afirmación 3 *Existe una sucesión de subcontinuos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(Z)$, *con* $A_n \subset W \cup W_n$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$W \neq A_n, \textit{para toda } n \in \mathbb{N},$$
$$W \subset A_n, \textit{para toda } n \in \mathbb{N}, \text{ y}$$
$$\mu(A_n) \leq \mu(W) + \tfrac{1}{n}$$

Construimos la sucesión deseada como sigue

a) Si $\mu(W \cup W_n) \leq \mu(W) + \frac{1}{n}$ entonces, tomamos $A_n = W \cup W_n$, el cual es un continuo por las Afirmaciones 1 y 2.

b) Si $\mu(W \cup W_n) > \mu(W) + \frac{1}{n}$ entonces, como $W \cap W_n^- \neq \emptyset$ para cada n, existe un arco ordenado $\alpha_n \subset C(W \cup W_n)$ tal que $\alpha_n(0) = W$ y $\alpha_n(1) = W \cup W_n$. Entonces consideremos la función $\mu \circ \alpha_n : [0,1] \to [0, \mu(Z)]$. Como $\mu \circ \alpha_n$ es una función continua, satisface el Teorema del Valor Intermedio. Por otra parte, notemos que $\mu \circ \alpha_n(0) = \mu(W)$ y $\mu \circ \alpha_n(1) = \mu(W \cup W_n) > \mu(W) + \frac{1}{n}$ ordenado. Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t_n \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_n(t_n)) = \mu(W) + \frac{1}{n}$. Como α_n es un arco ordenado para toda n, tenemos que $W = \alpha_n(0) \subset \alpha_n(t_n)$. Por tanto, tomamos $A_n = \alpha_n(t_n)$.

Lo que concluye la demostración de la Afirmación 3.

Afirmación 4. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(Z)$ como en la Afirmación 3. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = W$.

Sabemos que $W \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Para este ε, sea $\delta > 0$ la garantizada por el Teorema 1.28 de [7]. Luego, para este δ, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$. Puesto que $|\mu(A_n) - \mu(W)| < \frac{1}{n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $|\mu(A_n) - \mu(W)| < \frac{1}{N}$, para toda $n \geq N$. Entonces, $W \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $|\mu(A_n) - \mu(W)| < \delta$, para toda $n \geq N$. Por tanto, por el Teorema 1.28 de [7], tenemos que $H_Z(A_n, W) < \varepsilon$, para toda

$n \geq N$. Por lo que $\lim_{n\to\infty} A_n = W$.

Ahora, puesto que cada A_n es no degenerado, existe un arco ordenado, α_n, en $C(A_n)$, para cada n que conecta a W con A_n. Entonces, por la Afirmación 4, la función $g_2 : I^\infty \to C(Y)$ dada por

$$g_2((t_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha(t_n)\right) \cup W$$

es un encaje, como se demuestra en el Teorema 14.12 de [5].

Finalmente, tomando los encajes $g_1 : 2^X \to I^\infty$ y $g_2 : I^\infty \to C(Y)$, definimos $g : 2^X \to C(Y)$ por $g = g_2 \circ g_1$, esto es,

$$g(A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{d(d_n, A)}{m_n}\right)\right) \cup W$$

que resulta ser un encaje ordenado como se demuestra en el Teorema 48. Lo que concluye la demostración del teorema. ■

Capítulo 5

Encajes ordenados para $F_n(X)$

5.1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar encajes ordenados en hiperespacios finitos. Los resultados que presentamos se relacionan con el siguiente problema. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$. Si $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_m(Y)$, para alguna n, entonces ¿X puede encajarse en Y?

5.2 Definición de encaje ordenado para $F_n(X)$

Definición 51. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una función $g : F_n(X) \to F_m(Y)$ es un encaje ordenado si g es una función continua e inyectiva tal que $A \subset B$ implica que $g(A) \subset g(B)$. En este caso, diremos que $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_m(Y)$.*

5.3 Cuando $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_n(Y)$

Sea $A \in F_n(X)$, vamos a denotar por $|A|$ a la cardinalidad del conjunto A.

Teorema 52. *Sean X, Y continuos. Si $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_n(Y)$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces X puede encajarse en Y.*

Demostración. Vamos a demostrar el resultado por inducción sobre n. Veamos primero que el resultado es válido para $n = 1$. Supongamos entonces que existe un encaje $g : F_1(X) \to F_1(Y)$. Puesto que X es homeomorfo a $F_1(X)$ y Y es homeomorfo a $F_1(Y)$, vía la aplicación $x \to \{x\}$, entonces X puede encajarse en Y.

Supongamos ahora que el resultado es válido para n. Veamos ahora que el resultado es válido para $n+1$. Supongamos entonces que $g : F_{n+1}(X) \to F_{n+1}(Y)$ es un encaje ordenado. Por la hipótesis inductiva es suficiente demostrar que $g(F_n(X)) \subset F_n(Y)$. Supongamos que $g(F_n(X)) \not\subset F_n(Y)$. Esto es, supongamos que existe $A \in F_n(X)$ tal que $|g(A)| = n+1$. Tomemos $p \in X - A$. Entonces $A \subsetneqq A \cup \{p\}$, puesto que g es un encaje ordenado, $|g(A \cup \{p\})| \geq n+2$. Lo cual es una contradicción puesto que $g(F_{n+1}(X)) \subset F_{n+1}(Y)$. Por tanto, $g(F_n(X)) \subset F_n(Y)$. Entonces, por la hipótesis de inducción, concluimos que X puede encajarse en Y. Lo que termina la demostración del teorema. ■

5.4 Cuando $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_{n+1}(Y)$

Teorema 53. *Sean X, Y continuos. Si $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_{n+1}(Y)$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, entonces X puede encajarse en Y.*

Demostración. Vamos a demostrar el resultado por inducción sobre n. Veamos primero que el resultado es válido para $n = 2$. Supongamos entonces que existe un encaje ordenado $g : F_2(X) \to F_3(Y)$. Demostraremos que X puede encajarse en Y. Empecemos demostrando la siguiente afirmación.

Afirmación 1. $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$.

Supongamos que esta afirmación es falsa, entonces existe $p \in X$ tal que $|g(\{p\})| = 3$. Elijamos $q \in X - \{p\}$. Como g es un encaje ordenado, tenemos que $g(\{p\}) \subsetneqq g(\{p, q\})$, así $|g(\{p,q\})| \geq 4$, lo que contradice que $g(F_2(X)) \subset F_3(Y)$ y demuestra la afirmación.

Si $g(F_1(X)) \subset F_1(Y)$, entonces $F_1(X)$ se puede encajar en $F_1(Y)$ y ya terminamos.

Supongamos entonces que $g(F_1(X)) \not\subseteq F_1(Y)$. Esto es, supongamos que existe un $p_0 \in X$ tal que $|g(\{p_0\})| = 2$.

Consideremos el siguiente conjunto

$P = \{p \in X : |g(\{p\})| = 2\}$

Veamos que P es un subconjunto abierto de X. En efecto, observemos que por la Afirmación 1, $F_1(P) = g^{-1}(F_4(Y) \setminus F_1(Y)) \cap F_1(X)$. Como $F_1(Y)$ es compacto y X es homeomorfo a $F_1(X)$, vía el homeomorfismo $x \to \{x\}$, que envía a P sobre $F_1(P)$, concluimos que P es un subconjunto abierto de X.

Afirmación 2. *Si $p, r \in P$ y $p \neq r$, entonces* $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| = 1$.

En efecto, sabemos que $|g(\{p\})| = |g(\{r\})| = 2$ y como g es inyectiva, $g(\{p\}) \neq g(\{r\})$, por lo que $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| \leq 1$. Supongamos que $g(\{p\}) \cap g(\{r\}) = \emptyset$, entonces $|g(\{p\}) \cup g(\{r\})| = 4$, y puesto que g es un encaje ordenado $g(\{p\}) \cup g(\{r\}) \subset g(\{p,r\})$. Así que $|g(\{p,r\})| \geq 4$, lo que contradice que $g(F_2(X)) \subset F_3(Y)$. Por tanto, $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| = 1$.

Afirmación 3. Existe $x \in X$ tal que $x \in g(\{p\})$, para todo $p \in P$.

Fijemos $r \in P$ y escribamos $g(\{r\}) = \{x, y\}$. Sea $s \in P \setminus \{r\}$. Entonces podemos suponer que $x \in g(\{s\})$, escribamos $g(\{s\}) = \{x, z\}$. Aseguramos que $x \in g(\{p\})$ para todo $p \in P$. Si existiera un elemento $t \in P$ tal que $x \notin g(\{t\})$, por la Afirmación 2, $g(\{t\})$ sería de la forma $g(\{t\}) = \{y, z\}$, pues $g(\{t\})$ debe coincidir con $g(\{r\})$ y $g(\{s\})$ en un elemento. Puesto que P es un subconjunto abierto y no vacío de X, $P \setminus \{r, s, t\}$ es infinito. Dada $u \in P \setminus \{r, s, t\}$, por la Afirmación 2, alguno de los elementos x ó y no pertenece a $g(\{u\})$. Si $x \notin g(\{u\})$, como $g(\{u\})$ coincide con cada uno de los conjuntos $g(\{r\})$ y $g(\{s\})$ en un elemento, $g(\{u\}) = \{y, z\}$. Si $y \notin g(\{u\})$, comparando $g(\{u\})$ con $g(\{r\})$ y $g(\{t\})$, obtenemos que $g(\{u\}) = \{x, z\}$. Así pues, hemos demostrado que $\{g(\{q\}) : q \in P \setminus \{r, s, t\}\} = \{g(\{s\}), g(\{t\})\}$. Esto es absurdo pues $P \setminus \{r, s, t\}$ es infinito y g es inyectiva. Por tanto, $x \in g(\{p\})$ para todo $p \in P$.

Por la Afirmación 3, dada $p \in P$ existe $f_p \in Y$ tal que $g(\{p\}) = \{x, f_p\}$.

Si $X = P$, entonces definimos $h : X \to Y$ por $h(p) = f_p$. Mostraremos que h es un encaje. En efecto, sea $p \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, d_Y(h(p), x)\}$. Por la continuidad de g en $\{p\}$, existe $\delta > 0$ tal que, si $H_X(\{p\}, \{q\}) < \delta$, entonces $H_Y(g(\{p\}), g(\{q\})) < \varepsilon_1$. Es decir, $H_Y(\{x, h(p)\}, \{x, h(q)\}) < \varepsilon_1$. Entonces existe $z \in \{x, h(q)\}$ tal que $d_Y(h(p), z) < \varepsilon_1$. Por la elección de ε_1, $z = h(q)$. Así que $d_Y(h(p), h(q)) < \varepsilon_1$, cuando $d_X(p, q) < \delta$. Esto prueba que h es continua. Por otra parte, sean $p, r \in P$, con $p \neq r$ y supongamos que $h(p) = h(r)$, entonces, por definición de g, tenemos que $f_p = f_r$ y, así $g(\{p\}) = g(\{r\})$, por lo que $p = r$. Por tanto, hemos demostrado que $h : X \to Y$ es un encaje.

Supongamos ahora que $X \neq P$, puesto que $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$, entonces $X = P \cup Q$, donde

$Q = \{q \in X : g(\{q\}) \in F_1(Y)\}$

Sea $r \in Fr(P)$. Como P es un subconjunto abierto de X, entonces $r \notin P$ y así $r \in Q$. Luego, existe una sucesión $\{r_n\}_n \subset P$ tal que $r_n \to r$. Puesto que g es continua, entonces $g(\{r_n\}) \to g(\{r\})$, de donde $g(\{r\}) = \{x\}$, pues $x \in g(\{r_n\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $s \in P$. Entonces $g(\{s\}) = \{x, f_s\}$ y así $g(\{r, s\}) \supset \{x, f_s\}$. Como g es inyectiva, $g(\{r, s\}) = \{x, f_s, z\}$, para alguna $z \in Y$, $z \neq x, f_s$. Consideremos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d_Y(z, g(\{s\}))$, puesto que $\{r_n\} \to \{r\}$ y $\{r_n, s\} \to \{r, s\}$, entonces para este ε_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_Y(g(\{r_n\}), g(\{r\})) < \varepsilon_0$, $H_Y(g(\{r_n, s\}), g(\{r, s\})) < \varepsilon_0$ y $d_X(r, r_n) < d_X(r, s)$ para toda $n \geq N$. Tomemos $t = r_N$, puesto que $t \in P$, tenemos que $g(\{t\}) = \{x, f_t\}$, con $d_Y(x, f_t) < \varepsilon_0$ y $t \neq s$. Puesto que g es un encaje ordenado, $g(\{s, t\}) \supset \{x, f_s, f_t\}$. Por otra parte, dado que $H_Y(g(\{s, t\}), g(\{s, r\})) < \varepsilon_0$, existe $w \in g(\{s, t\})$ tal que $d_Y(z, w) < \varepsilon_0$.

Veamos que $w \neq x, f_s, f_t$. En efecto, por la elección de ε_0 tenemos que $d_Y(z, x) \geq 2\varepsilon_0$, $d_Y(z, f_s) \geq 2\varepsilon_0$ y $d_Y(z, f_t) \geq d_Y(z, x) - d_Y(x, f_t) \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$. De modo que $w \neq x, f_s, f_t$. Por lo que, $g(\{s, t\})$ tiene los cuatro puntos x, f_s, f_t, w, que son distintos dos a dos, lo cual es imposible pues contradice el que $g(F_2(X)) \subset F_3(Y)$. Así, concluimos que $Q = \emptyset$. Por tanto $X = P$. Lo que demuestra que la afirmación es válida para $n = 2$.

Supongamos ahora que la afirmación es válida para n. Veamos entonces que la afirmación es válida para $n+1$. Supongamos entonces que $g: F_{n+1}(X) \to F_{n+2}(Y)$ es un encaje ordenado. Por la hipótesis inductiva es suficiente demostrar que $g(F_n(X)) \subset F_{n+1}(Y)$. Supongamos que $g(F_n(X)) \not\subset F_{n+1}(Y)$. Esto es, supongamos que existe $A \in F_n(X)$ tal que $|g(A)| = n+2$. Tomemos $p \in X - A$. Entonces $A \subsetneqq A \cup \{p\}$, así que $|g(A \cup \{p\})| \geq n+3$. Lo cual es una contradicción puesto que $g(F_{n+1}(X)) \subset F_{n+2}(Y)$. Por tanto, $g(F_n(X)) \subset F_{n+1}(Y)$. Entonces, por la hipótesis de inducción, concluimos que X puede encajarse en Y. Lo que concluye la demostración del teorema. ■.

5.5 Cuando $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_{n+2}(Y)$

Teorema 54. *Sean X y Y continuos. Si existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, tal que $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_{n+2}(Y)$, entonces X se puede encajar en Y.*

Demostración. Vamos a demostrar el resultado usando inducción sobre n. Veamos primero que el resultado es válido para $n = 3$. Supongamos entonces que existe un encaje ordenado $g: F_3(X) \to F_5(Y)$. Si $g(F_1(X)) \subset F_1(Y)$, entonces $F_1(X)$ se puede encajar en $F_1(Y)$ y ya terminamos. Supongamos entonces que $g(F_1(X)) \not\subset F_1(Y)$. Empecemos demostrando las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $g(F_2(X)) \subset F_4(Y)$

En efecto, supongamos que existe $A \in F_2(X)$ tal que $|g(A)| = 5$ y tomemos $p \in X \setminus A$, entonces $A \subsetneqq A \cup \{p\}$. Puesto que g es un encaje ordenado tenemos que $g(A) \subsetneqq g(A \cup \{p\})$, y así $|g(A \cup \{p\})| \geq 6$, pero esto es absurdo pues $g(A \cup \{p\}) \in F_5(Y)$, por tanto, la afirmación queda demostrada.

Afirmación 2. $g(F_1(X)) \subset F_3(Y)$

Supongamos que esta afirmación es falsa, entonces existe $p \in X$ tal que $|g(\{p\})| = 4$. Elijamos $q \in X - \{p\}$. Como g es un encaje ordenado, tenemos que $g(\{p\}) \subsetneqq g(\{p, q\})$, así $|g(\{p, q\})| \geq 5$, lo que contradice la Afirmación 1 y demuestra la Afirmación 2.

Demostraremos el resultado por casos

Caso 1. *Supongamos que existe* $p_0 \in X$ *tal que* $|g(\{p_0\})| = 3$.

Consideremos el siguiente conjunto

$P = \{p \in X : |g(\{p\})| = 3\}$

Veamos que P es un subconjunto abierto de X. En efecto, observemos que por la Afirmación 2, $F_1(P) = g^{-1}(F_5(Y)\backslash F_2(Y)) \cap F_1(X)$. Como $F_2(Y)$ es compacto y X es homeomorfo a $F_1(X)$, vía el homeomorfismo $x \mapsto \{x\}$, que envía a P sobre $F_1(P)$, concluimos que P es un subconjunto abierto de X.

Afirmación 3. *Si* $p, r \in P$ *y* $p \neq r$, *entonces* $|g(\{p\} \cap g(\{r\})| = 2$

En efecto, sabemos que $|g(\{p\})| = |g(\{r\})| = 3$ y como g es inyectiva, $g(\{p\}) \neq g(\{r\})$, por lo que $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| \leq 2$. Supongamos que $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| \leq 1$, entonces $|g(\{p\}) \cup g(\{r\})| \geq 5$, y puesto que g es un encaje ordenado $g(\{p\}) \cup g(\{r\}) \subset g(\{p, r\})$. Así que $|g(\{p, r\})| \geq 5$, lo que contradice la Afirmación 1. Por tanto $|g(\{p\}) \cap g(\{r\})| = 2$.

Afirmación 4. *Existen* $x, y \in Y$ *tales que* $x \neq y$ *y* $\{x, y\} \subset g(\{p\})$ *para toda* $p \in P$.

Sea $r \in P$. Escribamos $g(\{r\}) = \{x, y, z\}$. Dada $s \in P\backslash\{r\}$ por la Afirmación 3, $g\{r\}$ y $g\{s\}$ coinciden en dos elementos. Supongamos por ejemplo que $g(\{s\}) = \{x, y, w\}$. Si existiera un elemento $t \in P$ tal que $y \notin g(\{t\})$, por la Afirmación 3, $g(\{t\})$ sería de la forma $g(\{t\}) = \{x, z, w\}$, pues $g(\{t\})$ debe coincidir con $g(\{r\})$ en dos elementos. Puesto que P es un subconjunto abierto y no vacío de X, $P\backslash\{r, s, t\}$ es infinito. Dada $u \in P\backslash\{r, s, t\}$, por la Afirmación 3, alguno de los elementos x, y o z no pertenece a $g(\{u\})$. Si $x \notin g(\{u\})$, como $g(\{u\})$ coincide con cada uno de los conjuntos $g(\{r\})$ y $g(\{t\})$ en dos elementos, tenemos que $y, z, w \in g(\{u\})$. De manera que $g(\{u\}) = \{y, z, w\}$. Si $y \notin g(\{u\})$, procediendo en forma similar, comparando $g(\{u\})$ con $g(\{r\})$ y $g(\{s\})$, obtenemos que $g(\{u\}) = \{x, w, z\}$.

Finalmente, si $z \notin g(\{u\})$, comparando $g(\{u\})$ con $g(\{r\})$ y $g(\{t\})$, obtenemos que $g(\{u\}) = \{x, y, w\}$. Así, hemos demostrado que $g(\{u\})$ sólo puede tomar tres valores. Esto es imposible pues $P\backslash\{r, s, t\}$ es infinito y g es inyectiva. Esta contradicción muestra que $y \in g(\{t\})$ para toda $t \in P$. Similarmente, $x \in g(\{t\})$ para toda $t \in P$. Con esto concluimos la demostración de la Afirmación 4.

Por la Afirmación 4, dada $p \in P$, existe $f_p \in Y$ tal que $g(\{p\}) = \{x, y, f_p\}$.

Si $X = P$, entonces definimos $h : X \to Y$ por $h(p) = f_p$. Mostraremos que h es un encaje. En efecto, sea $p \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, d_Y(h(p), x), d_Y(h(p), y)\}$. Por la continuidad de g en $\{p\}$, existe $\delta > 0$ tal que, si $H_X(\{p\}, \{q\}) < \delta$, entonces $H_Y(g(\{p\}), g(\{q\})) < \varepsilon_1$. Es decir, $H_Y(\{x, y, h(p)\}, \{x, y, h(q)\}) < \varepsilon_1$. Entonces existe $z \in \{x, y, h(q)\}$ tal que $d_Y(h(p), z) < \varepsilon_1$. Por la elección de ε_1, $z = h(q)$. Así que $d_Y(h(p), h(q)) < \varepsilon_1$ cuando $d_X(p, q) < \delta$. Esto prueba que h es continua. Por otra parte, sean $p, r \in P$, con $p \neq r$ y supongamos que $h(p) = h(r)$, entonces, por definición de g, tenemos que $f_p = f_r$ y, así $g(\{p\}) = g(\{r\})$, por lo que $p = r$. Por tanto, hemos demostrado que $h : X \to Y$ es un encaje.

Ahora probaremos que, de hecho, $X = P$ y con esto concluiremos el Caso 1. Supongamos entonces que $X \neq P$, puesto que $g(F_1(X)) \subset F_3(Y)$, entonces $X = P \cup Q$, donde

$Q = \{q \in X : g(\{q\}) \in F_2(Y)\} = X \backslash P$

Sea $u \in Fr(P)$, entonces existe una sucesión $\{u_n\}_n \subset P$ tal que $u_n \to u$. Puesto que g es continua, $g(\{u_n\}) \to g(\{u\})$, y dado que $g(\{u_n\}) = \{x, y, f_{u_n}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\{x, y\} \subset g(\{u\})$, y como P es abierto, $u \in Q$. De manera que $g(\{u\}) = \{x, y\}$. Fijemos $p \in P$, entonces $g(\{p\}) = \{x, y, f_p\}$. Por lo que $g(\{p, u\}) \supset \{x, y, f_p\}$, pero g es un encaje, así que $g(\{p, u\}) = \{x, y, f_p, w\}$, para alguna $w \in Y$, $w \neq x, y, f_p$. Consideremos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} d_Y(w, \{x, y, f_p\})$, puesto que $\{u_n\} \to \{u\}$ y $\{u_n, p\} \to \{u, p\}$, entonces para este ε_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_Y(g(\{u_n\}), g(\{u\})) < \varepsilon_0$, $d_X(u, u_n) < d_X(u, p)$ y $H_Y(g(\{u_n, p\}), g(\{u, p\})) < \varepsilon_0$, para toda $n \geq N$. Tomemos $s = u_N$, puesto que $s \in P$, tenemos que $g(\{s\}) = \{x, y, f_s\}$. Luego, como g es un encaje ordenado, $g(\{p, s\}) \supset \{x, y, f_p, f_s\}$. Por otra parte, dado que $H_Y(g(\{p, s\}), g(\{p, u\})) < \varepsilon_0$, existe $z \in g(\{p, s\})$ tal que $d_Y(z, w) < \varepsilon_0$.

Veamos que $z \notin \{x, y, f_p, f_s\}$. En efecto, por la elección de ε_0, tenemos que $d_Y(x, w) \geq 2\varepsilon_0$, $d_Y(y, w) \geq 2\varepsilon_0$, y $d_Y(f_p, w) \geq 2\varepsilon_0$ por lo que $z \notin \{x, y, f_p\}$. Por otra parte, $H_Y(\{x, y, f_s\}, \{x, y\}) < \varepsilon_0$, así que $f_s \in B(x, \varepsilon_0)$ o bien $f_s \in B(y, \varepsilon_0)$, supongamos que $f_s \in B(x, \varepsilon_0)$, entonces $d_Y(f_s, w) \geq d_Y(w, x) - d_Y(x, f_s) \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$, por lo que $z \neq f_s$, y así $g(\{p, s\}) = \{x, y, f_p, f_s, z\}$; es decir, $|g(\{p, s\})| = 5$, lo cual es imposible pues contradice la Afirmación 1. Llegamos a la misma contradicción si suponemos que $f_s \in B(y, \varepsilon_0)$. Por tanto, $Q = \emptyset$ y así $X = P$.

Caso 2. *Supongamos que* $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$.

Consideremos el siguiente conjunto

$P = \{p \in X : |g(\{p\})| = 2\}$

Para ver que P es un subconjunto abierto de X, observemos que, por la Afirmación 2, y puesto que estamos suponiendo que $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$, entonces $F_1(P) = g^{-1}(F_5(Y) \backslash F_1(Y)) \cap F_1(X)$ y por argumentos similares a los dados en el Caso 1 concluimos que P es un subconjunto abierto de X.

Este caso se subdivide a su vez en dos más

Caso 2A. *Supongamos que existen* $p_1, p_2 \in P$, *con* $p_1 \neq p_2$ *tales que* $g(\{p_1\}) \cap g(\{p_2\}) = \emptyset$.

Afirmación 5. *Si* $r \in P$, *entonces* $g(\{r\}) \cap g(\{p_1\}) \neq \emptyset$ *o bien* $g(\{r\}) \cap g(\{p_2\}) \neq \emptyset$.

Supongamos por el contrario que existe $r \in P$ tal que $g(\{r\}) \cap g(\{p_1\}) = \emptyset$ y $g(\{r\}) \cap g(\{p_2\}) = \emptyset$. Como g es un encaje ordenado y $|g(\{r\}) \cup g(\{p_1\}) \cup g(\{p_2\})| = 6$, tenemos que $|g(\{r, p_1, p_2\})| \geq 6$, que es una contradicción pues $g(\{r, p_1, p_2\}) \in F_5(Y)$ y así queda demostrada la Afirmación 5.

Consideremos entonces los siguientes subconjuntos de X

$P_1 = \{p \in P : g(\{p\}) \cap g(\{p_1\}) \in F_1(Y)\} \cup \{p_1\}$

$P_2 = \{p \in P : g(\{p\}) \cap g(\{p_2\}) \in F_1(Y)\} \cup \{p_2\}$

Entonces, por la Afirmación 5, $P = P_1 \cup P_2$.

Afirmación 6. $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Supongamos que $g(\{p_1\}) = \{x_1, y_1\}$ y que $g(\{p_2\}) = \{x_2, y_2\}$. Si sucediera que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, entonces existiría $r \in P_1 \cap P_2$, supongamos por ejemplo que $g(\{r\}) = \{x_1, x_2\}$. Sabemos que $g(\{p_1, p_2\}) = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Luego, como g es inyectiva y $g(\{p_1, p_2, r\}) \supset \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, entonces $g(\{p_1, p_2, r\}) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z\}$ para alguna $z \in Y$, $z \neq x_1, x_2,$

y_1, y_2. Tomemos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d_Y(z, \{x_1, x_2, y_1, y_2\}), d_Y(x_1, y_1), d_Y(x_1, y_2), d_Y(x_1, x_2), d_Y(x_2, y_1), d_Y(x_2, y_2), d_Y(y_1, y_2)\}$. Por la continuidad de g en r, existe $\delta_0 > 0$ tal que $H_X(\{r\}, \{r'\}) < \delta_0$ implica que $H_Y(g(\{r\}), g(\{r'\})) < \varepsilon_0$ y $H_Y(g(\{p_1, p_2, r\}), g(\{p_1, p_2, r'\})) < \varepsilon_0$.

Como P es abierto en X, $B(r, \delta_0) \cap P - \{r\} \neq \emptyset$. Tomemos $r' \in B(r, \delta_0) \cap P - \{r\}$, entonces por la Afirmación 5, $g(\{r'\}) \cap g(\{p_1\}) \neq \emptyset$ o bien $g(\{r'\}) \cap g(\{p_2\}) \neq \emptyset$. Puesto que, por la elección de ε_0, $y_1 \notin g(\{r'\})$ y $y_2 \notin g(\{r'\})$, entonces $x_1 \in g(\{r'\})$ o bien $x_2 \in g(\{r'\})$. Supongamos, por ejemplo, que $g(\{r'\}) = \{x_1, w\}$, para alguna $w \in Y$, donde $w \neq x_1, x_2, y_1, y_2$ y $w \in B(x_2, \varepsilon_0)$. Entonces $g(\{p_1, p_2, r'\}) \supset \{x_1, x_2, y_1, y_2, w\}$. Por otra parte, $H_Y(g(\{p_1, p_2, r\}), g(\{p_1, p_2, r'\})) < \varepsilon_0$. Así que existe $z' \in g(\{p_1, p_2, r'\})$ tal que $d_Y(z, z') < \varepsilon_0$. Por la elección de ε_0, tenemos que $z' \notin \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Además $d_Y(z, w) \geq d_Y(z, x_2) - d_Y(x_2, w) > 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$, así que $z' \neq w$. Por tanto $g(\{p_1, p_2, r'\})$ contiene al conjunto de seis elementos $\{x_1, x_2, y_1, y_2, w, z'\}$, que contradice el que $g(F_3(X)) \subset F_5(Y)$. Dado que esta contradicción se obtiene de suponer que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, concluimos que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Mostremos ahora que P_1 y P_2 son subconjuntos abiertos de X. Veamos que P_1 es un abierto. En efecto, sea $r \in P_1$. Puesto que $g(\{r\}) \cap g(\{p_1\}) \in F_1(Y)$, podemos suponer que $g(\{r\}) = \{x_1, z\}$, para alguna $z \in Y$. Puesto que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $z \neq x_1, x_2, y_2$. Consideremos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d_Y(x_1, x_2), d_Y(z, x_2), d_Y(x_1, y_2), d_Y(z, y_2)\}$ y sea $\delta > 0$ el correspondiente a ε_0, según la continuidad de g en $\{r\}$. Sabemos que P es un subconjunto abierto de X y $r \in P$, luego podemos suponer que $B(r, \delta) \subset P$. Demostremos que $B(r, \delta) \subset P_1$. Sea $s \in B(r, \delta)$, entonces $s \in P$ y $H_Y(g(\{r\}), g(\{s\})) < \varepsilon_0$, si sucediera que $g(\{s\}) \cap g(\{p_2\}) \neq \emptyset$, digamos que $x_2 \in g(\{s\})$, esto implicaría que $d_Y(x_1, x_2) < \varepsilon_0$ o bien $d_Y(z, x_2) < \varepsilon_0$ lo que contradice la elección de ε_0. Llegaríamos a la misma contradicción si suponemos que $y_2 \in g(\{s\})$. Por tanto $g(\{s\}) \cap g(\{p_2\}) = \emptyset$ y, por la Afirmación 5, $s \in P_1$ y así $B(r, \delta_0) \subset P_1$. Lo que demuestra que P_1 es un subconjunto abierto de X. Análogamente se demuestra que P_2 es un subconjunto abierto de X.

Afirmación 7. *Existen $x, y \in Y$, $x \neq y$, tales que $x \in g(\{r\})$ para todo $r \in P_1$ y $y \in g(\{t\})$ para todo $t \in P_2$.*

Por la Afirmación 5, dada $r \in P_1 \backslash \{p_1\}$ tenemos que $g(\{r\})$ y $g(\{p_1\})$ coinciden en un elemento. Supongamos por ejemplo que $g(\{r\}) = \{x_1, w\}$. Si existiera $s \in P_1$ tal que $x_1 \notin g(\{s\})$, por la Afirmación 5, $g(\{s\})$ sería de la forma $g(\{s\}) = \{y_1, z\}$, pues $g(\{s\})$ debe coincidir con $g(\{p_1\})$ en un elemento. Mostraremos que podemos suponer que $w \neq z$. En efecto, si sucediera que $w = z$, entonces consideramos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d_Y(x_1, y_1), d_Y(w, y_1)\}$. Sea $\delta_0 > 0$ el correspondiente a ε_0, según la continuidad de g en $\{r\}$. Puesto que P_1 es un subconjunto abierto de X, tenemos que $B(r, \delta_0) \cap (P_1 - \{r\}) \neq \emptyset$. Tomemos $r' \in B(r, \delta_0) \cap (P_1 - \{r\})$, por la elección de ε_0, $y_1 \notin g(r')$, así $g(r') = \{x_1, w'\}$ con $w' \neq w, z$. Por tanto, podemos suponer que $w \neq z$. Por otra parte, como g es inyectiva y $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, tenemos que $w, z \notin \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ y, así $|g(\{p_2\}) \cup g(\{r\}) \cup g(\{s\})| = 6$. Por tanto, como g es un encaje ordenado, $|g(\{p_2, r, s\})| \geq 6$, lo que contradice el que $g(\{p_2, r, s\}) \in F_5(Y)$. Esta contradicción muestra que $x_1 \in g(\{r\})$ para todo $r \in P_1$. De manera similar se demuestra que existe $y \in Y$ tal que $y \in g(\{t\})$ para todo $t \in P_2$. Esto concluye la demostración de la Afirmación 7.

Por la Afirmación 7, dadas $r \in P_1$ y $t \in P_2$, existen $f_r, h_t \in Y$ tales que $g(\{r\}) = \{x, f_r\}$ y $g(\{t\}) = \{y, h_t\}$.

Supongamos ahora que $X \neq P$, puesto que $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$, entonces $X = P \cup Q$, donde

$Q = \{q \in X : g(\{q\}) \in F_1(Y)\} = X \backslash P$

Sea $r \in Fr(P)$, como P es un subconjunto abierto de X, entonces $r \notin P$ y así $r \in Q$. Luego, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = r$. Como g es continua entonces $\lim\limits_{n \to \infty} g(\{r_n\}) = g(\{r\})$. Puesto que $r_n \in P_1$ o bien $r_n \in P_2$ entonces $g(\{r\}) = \{x\}$ o bien $g(\{r\}) = \{y\}$.

Supongamos, por ejemplo, que $g(\{r\}) = \{x\}$. Sean $p \in P_1$ y $s \in P_2$, entonces $g(\{p, s\}) = \{x, y, f_p, h_s\}$ y así $g(\{p, s, r\}) \supset \{x, y, f_p, h_s\}$, pero g es inyectiva, por lo que $g(\{p, s, r\}) = \{x, y, f_p, h_s, z\}$ para algún $z \in Y$, con $z \neq x, y, f_p, h_s$. Consideremos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d_Y(x, y), d_Y(x, h_s), d_Y(x, z), d_Y(y, z), d_Y(f_p, z), d_Y(h_s, z)\}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n \neq p$, $H_Y(g(\{r_n\}), g(\{r\})) < \varepsilon_0$ y $H_Y(g(\{r_n, p, s\}), g(\{r, p, s\})) < \varepsilon_0$

para toda $n \geq N$. Observemos que, por la elección de ε_0, $x \in g(\{r_n\})$ para toda $n \geqslant N$. Tomemos $r' = r_N$, entonces $g(\{r'\}) = \{x, f_{r'}\}$, con $d(f_{r'}, x) < \varepsilon_0$. Por otra parte, $f_{r'} \neq y$, pues $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Como g es inyectiva, $f_{r'} \neq f_p$; y por la elección de ε_0, tenemos que $f_{r'} \neq h_s$. Así pues, $g\{p, s, r'\}) \supset \{x, y, f_p, h_s, f_{r'}\}$.

Puesto que $H_Y(g(\{p,s,r\}),g\{p,s,r'\})) < \varepsilon_0$, existe $z' \in g(\{p,s,r'\})$ tal que $d_Y(z,z') < \varepsilon_0$. Pero por la elección de ε_0, $z' \neq x, y, f_p, h_s$. Además tenemos que $d_Y(z, f_{r'}) \geq d_Y(z,x) - d_Y(f_{r'}, x) \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$, y así $z' \neq f_{r'}$. Como g es un encaje ordenado $g(\{p,s,r'\}) \supset \{x, y, f_p, h_s, f_{r'}, z'\}$ que es una contradicción pues $g\{p,s,r'\}) \in F_5(Y)$. Puesto que esta contradicción se obtiene de suponer que $X \neq P$, concluimos que $X = P$. Por otra parte, puesto que X es conexo y P_1, P_2 son abiertos y no vacíos. Entonces debemos tener $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, pero esto contradice la Afirmación 6. Por tanto el Caso 2A no es posible.

Caso 2B. $g(\{p\}) \cap g(\{q\}) \in F_1(Y)$ *para cualesquiera* $p \neq q$ en P.

Afirmación 8. *Existe* $x \in X$ *tal que* $x \in g(\{p\})$ *para todo* $p \in P$.

Fijemos $r \in P$ y escribamos $g(\{r\}) = \{x, y\}$. Sea $s \in P \backslash \{r\}$. Entonces podemos suponer que $x \in g(\{s\})$. Aseguramos que $x \in g(\{p\})$ para todo $p \in P$. Supongamos que esto no ocurre y sea $p \in P$ tal que $x \notin g(\{p\})$. Entonces escribimos $g(\{s\}) = \{x, y_1\}$. Como $g(\{p\})$ debe intersectar a $g(\{r\})$ y a $g(\{s\})$, entonces $g(\{p\}) = \{y, y_1\}$. Si $q \in P$, entonces $g(\{q\})$ debe intersectar a $g(\{r\})$, $g(\{s\})$ y $g(\{p\})$. Si $x \notin g(\{q\})$, entonces $g(\{q\}) = \{y, y_1\}$. Si $y \notin g(\{q\})$, entonces $g(\{q\}) = \{x, y_1\}$. Si $y_1 \notin g(\{q\})$, entonces $g(\{q\}) = \{x, y\}$. Como $g(\{q\})$ tiene dos elementos, entonces alguno de los puntos x, y ó y_1 no pertenece a $g(\{q\})$. Hemos probado que $\{g(\{q\}) : q \in P\} = \{g(\{r\}), g(\{r\}), g(\{p\})\}$. Esto es absurdo pues P es infinito y g es inyectiva. Por tanto, $x \in g(\{p\})$ para toda $p \in P$.

Por la Afirmación 8, dada $p \in P$ existe $f_p \in Y$ tal que $g(\{p\}) = \{x, f_p\}$.

Si $X = P$, definimos $g : X \to Y$ por $h(p) = f_p$ que resulta ser un encaje como se demostró en el Caso 1.

Supongamos ahora que $X \neq P$, puesto que $g(F_1(X)) \subset F_2(Y)$, entonces $X = P \cup Q$, donde

$Q = \{q \in X : g(\{q\}) \in F_1(Y)\}$

Sea $r \in Fr(P)$, como P es un subconjunto abierto de X, entonces $r \notin P$ y así $r \in Q$. Luego, existe una sucesión $\{r_n\}_n \subset P$ tal que $r_n \to r$, como g es continua, entonces $g(\{r_n\}) \to g(\{r\})$, de donde $g(\{r\}) = \{x\}$, pues $x \in g(\{r_n\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $s_1 \in P$, entonces $g(\{s_1\}) = \{x, f_{s_1}\}$ y $g(\{r, s_1\}) \supset \{x, f_{s_1}\}$, pero g es inyectiva, así que $g(\{r, s_1\}) = \{x, f_{s_1}, z_1\}$, para alguna $z_1 \in Y$, $z_1 \neq x, f_{s_1}$. Consideremos $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\{d_Y(x, f_{s_1}), d_Y(x, z_1), d_Y(z_1, f_{s_1})\}$, para este ε_1 existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H_Y(g(\{r_n, r\}), g(\{r\}))$, $H_Y(g(\{r_n\}), g(\{r\})) < \frac{\varepsilon_1}{2}$, $r_n \neq s_1$ y $H_Y(g(\{s_1, r_n\}), g(\{s_1, r\})) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ para toda $n \geq N_1$. Sea $s_2 = r_{N_1}$, entonces $g(\{s_2\}) = \{x, f_{s_2}\}$, $f_{s_2} \in B(x, \frac{\varepsilon_1}{2})$ y $g(\{r, s_2\}) \supset \{x, f_{s_2}\}$.

Como g es inyectiva, $g(\{r, s_2\}) = \{x, f_{s_2}, z_2\}$, para alguna $z_2 \in Y$, $z_2 \neq x, f_{s_2}$ y $z_2 \in B(x, \frac{\varepsilon_1}{2})$. Puesto que $H_Y(g(\{s_1, s_2\}), g(\{s_1, r\})) < \frac{1}{2}\varepsilon_1$, entonces $g(\{s_1, s_2\}) = \{x, f_{s_1}, f_{s_2}, z_1'\}$, con $z_1' \in B(z_1, \frac{\varepsilon_1}{2})$ (más adelante veremos que $z_1' \in \{x, f_{s_1}, f_{s_2}\}$). Sea $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\min\{d(z_2, x), d(z_2, f_{s_2})\}$, y consideremos $\varepsilon_0 = \min\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\}$, para este ε_0 existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H_Y(g(\{r_n\}), g(\{r\})) < \varepsilon_0$, $r_n \neq s_1, s_2$ y $H_Y(g(\{s_2, r_n\}), g(\{s_2, r\})) < \varepsilon_0$, para toda $n \geq N_2$.

Tomemos $s_3 = r_{N_2}$, entonces $g(\{s_3\}) = \{x, f_{s_3}\}$, $f_{s_3} \in B(x, \varepsilon_0)$ y $g(\{s_2, s_3\}) \supset \{x, f_{s_2}, f_{s_3}\}$. Puesto que $H_Y(g(\{s_2, s_3\}), g(\{s_2, r\})) < \varepsilon_0$, entonces para $z_2 \in g(\{s_2, r\})$ existe $z_2' \in g(\{s_2, s_3\})$ tal que $d(z_2, z_2') < \varepsilon_0$, así $g(\{s_1, s_2, s_3\}) \supset \{x, f_{s_1}, f_{s_2}, f_{s_3}, z_1', z_2'\}$.

Veamos que $z_1' \neq x, f_{s_1}, f_{s_2}, f_{s_3}, z_2'$; en efecto, puesto que $d_Y(z_1, x) \geq 2\varepsilon_1$, $d_Y(z_1, f_{s_1}) \geq 2\varepsilon_1$, $d_Y(z_1, f_{s_2}) \geq d_Y(z_1, x) - d_Y(f_{s_2}, x) \geq 2\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\varepsilon_1$ y $d_Y(z_1, f_{s_3}) \geq d_Y(z_1, x) - d_Y(f_{s_3}, x) \geq 2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq 2\varepsilon_1 - \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, tenemos que $z_1' \neq x, f_{s_1}, f_{s_2}, f_{s_3}$. Por último, puesto que $d_Y(z_1, z_2) \geq d_Y(z_1, x) - d_Y(z_2, x) \geq 2\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\varepsilon_1$, entonces $d_Y(z_1', z_2') \geq d_Y(z_1, z_2) - d_Y(z_1, z_1') - d_Y(z_2', z_2) \geq \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 > 0$, por tanto $z_1' \neq z_2'$.

Veamos ahora que $z_2' \neq x, f_{s_1}, f_{s_2}, f_{s_3}$; en efecto, sabemos que $d_Y(z_2, x) \geq 2\varepsilon_0$, $d_Y(z_2, f_{s_1}) \geq d_Y(f_{s_1}, x) - d_Y(z_2, x) \geq 2\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\varepsilon_1 \geq 3\varepsilon_0$, $d_Y(z_2, f_{s_2}) \geq 2\varepsilon_2 \geq 2\varepsilon_0$, $d_Y(z_2, f_{s_3}) \geq d_Y(z_2, x) - d_Y(f_{s_3}, x) \geq 2\varepsilon_2 - \varepsilon_0 \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$. Por tanto, $z_2' \neq$

$x, f_{s_1}, f_{s_2}, f_{s_3}$. Por lo que, $|g(\{s_1, s_2, s_3\})| \geq 6$, lo cual es una contradicción y así concluimos que $Q = \emptyset$. Por tanto, $X = P$. Lo que concluye el análisis del Caso 2B.

Lo que concluye la demostración del teorema cuando $n = 3$.

Supongamos ahora que el resultado es válido para n. Demostremos que el resultado es válido para $n+1$. Para ello supongamos que existe un encaje ordenado $g : F_{n+1}(X) \to F_{n+3}(Y)$. Por la hipótesis inductiva es suficiente demostrar que $g(F_n(X)) \subset F_{n+2}(Y)$. Supongamos que esto no ocurre, entonces existiría $A \in F_n(X)$ tal que $|g(A)| = n + 3$. Tomemos $p \in X \backslash A$, entonces $A \subsetneq A \cup \{p\}$. Puesto que g es un encaje ordenado, $g(A) \subsetneq g(A \cup \{p\})$. Así pues, $|g(A \cup \{p\})| \geq n + 4$. Lo cual es una contradicción pues $g(F_{n+1}(X)) \subset F_{n+3}(Y)$. Así pues, $g(F_n(X)) \subset F_{n+2}(Y)$. Por tanto, según la hipótesis inductiva, X puede encajarse en Y. Lo que finalmente demuestra el teorema. ■

5.6 Existen continuos X y Y tales que $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_{2n}(Y)$ y X no puede encajarse en Y

A primera vista podría paracer que los Teoremas 52 y 53 son consecuencias del Teorema 54 (pues $F_n(Y) \subset F_{n+1}(Y) \subset F_{n+2}(Y)$). Pero observando se nota que en el Teorema 54 se usa que $n \geq 3$ y en el Teorema 53 se usa que $n \geq 2$. El siguiente ejemplo muestra que la cota usada en ambos resultados es la mínima. Se trata de un par de continuos X, Y tales que $F_n(X)$ puede ser encajado ordenadamente en $F_{2n}(Y)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y X no se puede encajar en Y. En particular, si $n = 1$, $F_1(X)$ se puede encajar ordenadamente en $F_2(Y)$. De modo que el Teorema 53, no es válido para $n = 1$. Además, si $n = 2$, $F_2(X)$ se puede encajar ordenadamente en $F_4(Y)$, así que el Teorema 54 no es válido para $n = 2$.

Ejemplo 55. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ existen continuos X, Y tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $F_n(X)$ puede ser encajado ordenamente en $F_{2n}(Y)$ y X no puede ser encajado en Y.*

Sean X y Y los siguientes continuos.

Claramente X no se puede encajar en Y. Primero necesitamos definir un encaje de $F_1(X)$ en $F_2(Y)$. Para ello vamos a considerar los homeomorfismos $f : S_i \to S_i'$, $i = 1, 2$, dados por $f_1(x,y) = (x+1, y+2)$ y $f_2(x,y) = (x-1, y+2)$. Notemos que $f_1((-1,0)) = f_2((1,0)) = (0,2)$. Denotemos por $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección en la primera coordenada y tomemos las funciones composición $p_i = p \circ f_i : S_i \to \mathbb{R}$. Definamos entonces $g : F_1(X) \to F_2(Y)$ por

$$g(\{z\}) = \begin{cases} \{f_1(z), (\frac{1}{2}p_1(z) - 1, -1)\}, & \text{si } z \in S_1, \\ \{f_2(z), (\frac{1}{2}p_2(z) + 1, -1)\}, & \text{si } z \in S_2, \\ \{(0, -2p(z)), (p(z), p(z))\}, & \text{si } z \in I_1, \\ \{(0, 2p(z)), (p(z), -p(z))\}, & \text{si } z \in I_2. \end{cases}$$

La continuidad de g se sigue de la continuidad de f_1, f_2 y p, y de los siguientes hechos, $F_1(S_1) \cap F_1(I_1) = \{(-1,0)\}$, $F_1(I_1) \cap F_1(I_2) = \{(0,0)\}$, y $F_1(I_2) \cap F_1(S_2) = \{(1,0)\}$, luego $\{f_1((-1,0)), (\frac{1}{2}p_1((-1,0)) - 1, -1)\} = \{(0,2), (-1,-1)\} = \{(0, -2p((-1,0))), (p((-1,0)), p((-1,0)))\}$, además $\{(0, -2p((0,0))), (p((0,0)), p((0,0)))\} = \{(0,0), (0,0)\} = \{(0, 2p((0,0))), (p((0,0)), -p((0,0)))\}$, y $\{f_2((1,0)), (\frac{1}{2}p_2((1,0)) + 1, -1)\} = \{(0,2), (1,-1)\} = \{(0, 2p((1,0))), (p((1,0)), -p((1,0)))\}$.

Esto implica la continuidad de g.

Ahora vamos a demostrar que g es inyectiva. De hecho vamos a demostrar que g tiene la siguiente propiedad: dado $z \in X$, existe $w \in g(\{z\})$ tal que w no pertenece a ningún otro conjunto de la forma $g(\{v\})$. Consideremos entonces los posibles casos.

Caso 1. Supongamos que $z \in S_1 - \{(-1,0)\}$.

Entonces $f_1(z) \in g(\{z\})$. En este caso hacemos $w = f_1(z) \in g(\{z\})$. Supongamos que $f_1(z) \in g(\{v\})$ para alguna $v \in X$. Observemos la definición de g. En los únicos casos en que ponemos puntos de $S_i' - \{(0,2)\}$ es en el primer renglón. De aquí que $v \in S_1$ y $g(\{v\}) = \{f_1(v), (\frac{1}{2}p_1(v) - 1, -1)\}$. Puesto que $f_1(z) \in S_1'$ y $(\frac{1}{2}p_1(v) - 1, -1) \notin S_1'$ entonces, $f_1(z) = f_1(v)$. Como f_1 es un homeomorfismo, $z = v$. Esto es, $\{z\} = \{v\}$.

Caso 2. Supongamos que $z \in S_2 - \{(1,0)\}$.

Este caso es similar al Caso 1.

Caso 3. Supongamos que $z \in I_1$.

En este caso hacemos $w = (p(z), p(z)) \in g(\{z\})$. Supongamos que $(p(x), p(x)) \in g(\{y\})$ para alguna $y \in X$. Observando otra vez la definición de g, notamos que sólo para los puntos de I_1 se tiene que su imagen bajo g intersecta a la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. De manera que $v \in I_1$. Así que $g(\{v\}) = \{(0, -2p(v)), (p(v), p(v))\}$. Luego, $(p(z), p(z)) = (0, -2p(v))$ o bien $(p(z), p(z)) = (p(v), p(v))$. Si se tiene la primera igualdad, $p(z) = p(v) = 0$ y así $z = v = (0, 0)$. Si la igualdad que se tiene es la segunda, $p(z) = p(v)$ y como $z, v \in I_1$, $z = v$. Por lo que $\{z\} = \{v\}$.

Caso 4. Supongamos que $z \in I_2$.

Este caso es similar al Caso 3.

Por tanto, g es inyectiva.

Ahora definimos $h : F_n(X) \to F_{2n}(Y)$ por

$$h(A) = \bigcup_{x \in A} g(\{x\})$$

La función h es continua pues g y la función unión lo son (ver Lema 1.48 de [7]). Para ver que h es inyectiva, tomemos $A, B \in F_n(X)$ y supongamos que $A \neq B$. Así pues, existe $z \in A$ tal que $z \notin B$.

Por lo que probamos arriba, existe $w \in g(\{z\})$ tal que w no pertenece a ningún otro conjunto de la forma $g(\{v\})$. En particular $w \notin \bigcup_{v \in B} g(\{v\})$. De manera que $w \in h(A) \setminus h(B)$. Por tanto $h(A) \neq h(B)$ y h es inyectiva.

Por otra parte, sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \subset B$. Puesto que $\bigcup_{z \in A} g(\{z\}) \subset \bigcup_{z \in B} g(\{z\})$, $h(A) \subset h(B)$. Por tanto h es un encaje ordenado, como deseábamos demostrar.

Problema. ¿Es $2n$ la mejor cota que se puede encontrar?

Es decir, supongamos que $F_n(X)$ se puede encajar ordenadamente en $F_m(Y)$, donde $n < m < 2n$: entonces, ¿necesariamente X se puede encajar en Y? Un caso particular e interesante de esta pregunta es: Supongamos que $n \geq 4$ y que $F_n(X)$ se puede encajar ordenadamente en $F_{n+3}(Y)$, ¿entonces X se puede encajar en Y? Observemos que como se argumentó al final del Teorema 54, para contestar afirmativamente esta pregunta basta hacerlo para $n = 4$.

Capítulo 6

Encajes ordenados inducidos y encajes ordenados suprayectivos

6.1 Introducción

En este capítulo vamos a demostrar que cuando X se puede encajar en Y; es decir, cuando existe una función continua e inyectiva $f : X \to Y$, entonces podemos encajar ordenadamente a $C(X)$ en $C(Y)$ y a $F_n(X)$ en $F_n(Y)$. Esto se hace tomando la función inducida definida por $A \mapsto f(A)$. Es decir, a A le hacemos corresponder su imagen bajo f.

También vamos a presentar un resultado muy interesante que nos dice que cuando existe un encaje ordenado suprayectivo entre los hiperespacios 2^X y 2^Y entonces los continuos X y Y son homeomorfos.

6.2 Encajes ordenados inducidos

Teorema 56. *Sean X, Y continuos. Si $f : X \to Y$ es un encaje entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ es un encaje ordenado.*

Demostración. Por el Teorema 15, 2^f es una función bien definida y continua.

Vamos a demostrar que 2^f es inyectiva. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. Supongamos que $b \in B \backslash A$. Si $f(b) \in f(A)$ entonces $f(b) = f(a)$ para alguna $a \in A$. Como f es inyectiva entonces $a = b$. Así que $b \in A$. Esta contradicción muestra que $f(b) \notin f(A)$. Por lo que $f(A) \neq f(B)$. Por tanto, $2^f(A) \neq 2^f(B)$. Lo que muestra que 2^f es inyectiva.

Finalmente, sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$. Vamos a probar que $f(A) \subset f(B)$. Sea $y \in f(A)$. Entonces $y = f(a)$ para alguna $a \in A$. Como $a \in B$, entonces $y \in f(B)$. Lo que demuestra que $2^f(A) \subset 2^f(B)$.

Por tanto, hemos demostrado que 2^f es un encaje ordenado. ■

Al encaje ordenado 2^f del Teorema 56, le llamaremos *encaje ordenado inducido por* f.

Corolario 57. *Sean X, Y continuos. Si X puede encajarse en Y entonces $C(X)$ puede encajarse ordenadamente en $C(Y)$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua e inyectiva. Notemos que si $A \in C(X)$, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de Y. Así que, $2^f|C(X) : C(X) \to C(Y)$. Puesto que, por el Teorema 56, 2^f es un encaje ordenado, la función restricción $2^f|C(X)$ también lo es. ■

El recíproco de esta afirmacíon no necesariamente es cierto. En el Ejemplo 32, mostramos que $C(S^1)$ puede encajarse ordenadamente en $C(T_3)$ y sin embargo, S^1 no puede ser encajado en T_3.

Corolario 58. Sean X, Y continuos. Si X puede encajarse en Y entonces $F_n(X)$ puede encajarse ordenadamente en $F_n(Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua e inyectiva. Notemos que si $A \in F_n(X)$ entonces $f(A) \in F_n(X)$. Así que $2^f|F_n(X) : F_n(X) \to F_n(Y)$. Por el Teorema 56, es claro que $2^f|F_n(X)$ es un encaje ordenado para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

6.3 Encajes ordenados suprayectivos

En [1] se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una aplicación dada es inducida. El siguiente es un resultado muy interesante fue demostrado por V. Newmann.

Teorema 59. (V. Newmann). Sean X y Y continuos. Supongamos que $g : 2^X \to 2^Y$ es un encaje ordenado *suprayectivo*. Entonces X y Y son homeomorfos.

Demostración. Puesto que X y Y son homeomorfos a $F_1(X)$ y $F_1(Y)$ respectivamente, entonces sólo resta probar que $g(F_1(X)) = F_1(Y)$.

Mostremos que $g^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$. Sea $B \in g^{-1}(F_1(Y))$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $B = g^{-1}(\{y\})$. Si $b \in B$, entonces $g(\{b\}) \subset g(B)$. Como $g(B) = \{y\}$, tenemos que $g(\{b\}) = g(B)$. Puesto que g es inyectiva, $B = \{b\}$. Por lo que $B \in F_1(X)$.

Puesto que $g^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$, tenemos que $F_1(Y) \subset g(F_1(X))$.

Consideremos el conjunto $A = \{x \in X : g(\{x\}) \in F_1(Y)\}$. Puesto que $F_1(A) = g^{-1}(F_1(Y)) \cap F_1(X)$, entonces $F_1(A)$ es un subconjunto cerrado de $F_1(X)$. Como A es homeomorfo a $F_1(A)$, tenemos que A es un subconjunto cerrado de X. Así que $A \in 2^X$.

Vamos a mostrar que $g(A) = Y$. Supongamos por el contrario que $g(A) \subsetneqq Y$. Entonces existe $y_0 \in Y \backslash g(A)$. Por lo que existe $x_0 \in X$ tal que $g(\{x_0\}) = \{y_0\}$. Así que $x_0 \in A$. Puesto que $g(\{x_0\}) \subset g(A)$, entonces $y_0 \in g(A)$. Esta contradicción demuestra que $g(A) = Y$.

Puesto que $g(A) = Y$, tenemos que $A = X$. En efecto, si $A \subsetneqq X$, entonces $g(A) \subsetneqq g(X)$, pues g es un encaje ordenado. Así que $Y \subsetneqq g(X)$. Esta contradicción muestra que $A = X$.

Por tanto, $g(\{x\}) \in F_1(Y)$ para toda $x \in X$. Así que $g(F_1(X)) \subset F_1(Y)$.

Por lo que $g(F_1(X)) = F_1(Y)$. Esto concluye la prueba del teorema.■

Bibliografía

[1] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces,* Bull. Polish Acad. Sci. Math., 40 (1998), 5-9.

[2] J.Hocking y G. S. Young, *Topology,* Dover Publications Inc., New York, 1988.

[3] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory,* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1948.

[4] Alejandro Illanes, *The space of Whitney levels,* Topology Appl., 40 (1991), 157-169.

[5] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[6] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1992.

[7] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

[8] M. van de Vel, *On generalized Whitney mappings,* Compositio Math., 52 (1984), 47-56

[9] M. van de Vel, *Invariant arcs, Whitney levels, and Kelley continua,* Trans. Amer. Math., Soc., 326 (1991), 749-771.

[10] L. E. Ward, Jr., *A note on Whitney maps,* Canad. Math. Bull., 23 (1980), 373-374.

[11] L. E. Ward, Jr., *Extending Whitney maps*, Pacific J. Math., 93 (1981), 465-469.