117

01168 2g.

61

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

"Toma de decisiones con preferencias borrosas".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

P R E S E N T A :

L A U R A P L A Z O L A Z A M O R A

DIRIGIDA POR:

DRA. MAYRA STELLA TREJOS ALVARADO

México, D.F., Ciudad Universitaria 1999

CONTENIDO

1. Introducción	1
1.1 Objetivos	3
2. Marco teórico	4
2.1 Problemas multicriterio	4
2.2 La ayuda a la decisión multicriterio	4
2.3 El proceso de decisión	5
2.4 Conceptos básicos	6
2.5 El estado del arte	13
3. La modelación de preferencias	21
3.1 El modelo tradicional	22
3.2 Modelos de umbral	22
3.3 Modelos que permiten la no comparabilidad	23
3.4 Modelos de relaciones de preferencia borrosa	25
4. Los métodos PROMETHEE	28
4.1 Extensión de la noción de criterio	28
4.2 Relación valuada de sobreclasificación	32
4.3 Explotación para la ayuda a la decisión	33
4.4 Requisitos deseables en todo método multicriterio	42
5. Aplicación práctica	43
5.1 Un problema de selección de personal	43
6. Discusión y conclusiones	50
Referencias bibliográficas	53
Apéndice I : Análisis de componentes principales	
Apéndice II: Despliegue de resultados	

RESUMEN

El presente trabajo trata sobre el proceso de toma de decisiones con preferencias borrosas. Se exponen los modelos de preferencia tradicionales y los que utilizan relaciones binarias borrosas de preferencia. Utilizamos el método PROMETHEE de ayuda a la decisión multicriterio, para resolver un problema de selección de personal en una empresa de manufactura. La razón de utilizar este método de sobreclasificación es que nos permite considerar grados intermedios entre la indiferencia y la preferencia, ya que construye un índice borroso de preferencia para obtener los grados de preferencia sobre alternativas. De esta manera, se combinan los enfoques de sobreclasificación y de conjuntos borrosos, para tratar de modelar de una manera más realista las preferencias del decisor.

El enfoque PROMETHEE I proporciona un orden parcial de las alternativas y considera las posibles incomparabilidades entre éstas. En nuestra aplicación obtuvimos dos alternativas incomparables, aunque la diferencia entre los flujos positivos de sobreclasificación es tan pequeño, que no es significativo. Por otro lado, con PROMETHEE II obtuvimos un orden total de las alternativas. Se hizo un análisis de sensibibilidad de la prescripción dada al decisor, por medio del software PROMCALC (PROMETHEE Calculation), que incluye una herramienta que permite modificar los pesos asignados por el decisor y se encontró que la solución es estable.

Palabras clave : Toma de decisiones, preferencias borrosas, sobreclasificación, PROMETHEE.

1. INTRODUCCIÓN.

La versión formal de la teoría de decisiones incluye a la teoria de utilidad, y considera una decisión como una acción racional (Zimmermann 1987). La teoria de utilidad multicriterio se basa en la siguiente suposición fundamental: el decisor quiere maximizar la función de utilidad global U, resultado de agregar las utilidades u_{ij} de una alternativa a_i para los N criterios c_j en el problema de decisión. La utilidad $U(a_i)$ se expresa como:

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{N} w_j \, u_{ij},$$

donde w_j es una constante[1] que expresa la importancia relativa o peso asignado a cada criterio c_j, y u_{ij} es la utilidad de la alternativa a_i para el criterio c_j. La mejor alternativa es la que tenga el valor más grande de $U(a_i)$.(Van der Walle *et al* 1995) .

En la segunda mitad del siglo XX, la teoría de decisiones multicriterio ha sido testigo de nuevos paradigmas, especialmente en Europa, donde muchos grupos de investigación han desarrollado propuestas alternativas al modelo "soberano" de utilidad multiatributo: el enfoque de sobreclasificación, representado por los métodos ELECTRE, ejemplos tipicos de la tendencia actual, así como los métodos PROMETHEE y ORESTE, por mencionar algunos. (Fodor, J. C. y Roübens, M. 1994. Citado en Grabisch, M. 1996).

El principio del enfoque de relaciones de sobreclasificación es trabajar con el conjunto de pares de alternativas, para obtener una relación binaria sobre el conjunto de alternativas. De hecho, en el enfoque de sobreclasificación, los analistas tratan de construir una relación sobre el conjunto de alternativas para modelar, sólo la parte segura de las preferencias del decisor, dada la información disponible. En otras palabras, Se dice que una alternativa a sobreclasifica a la alternativa b, si los argumentos en favor de la preferencia de a sobre b (para todos los criterios) son significativos y aquellos en favor de la preferencia inversa no son muy fuertes. (Zimmermann 1987).

Aproximadamente hace dos décadas, surgieron nuevas metodologias de decisión multicriterio basadas en conjuntos borrosos (Ghotb 1995). Algunas de estas investigaciones abordan problemas de modelación y agregación de preferencias, y considera la preferencia una relación binaria borrosa sobre el conjunto de alternativas. Este tipo de relación puede surgir en situaciones de la vida real, cuando el decisor no tiene una idea clara de sus preferencias entre alternativas, es decir, no está seguro que

[1] w_j también se interpreta como tasa de sustitución.

prefiere la alternativa a sobre la alternativa b, o bien, cuando la decisión debe tomarla un grupo de decisores y cada uno tiene diferentes opiniones sobre la preferencia de a sobre b; en el caso en que una fracción del grupo haya votado por a, se considera el grado de preferencia de a sobre b .

Una situación interesante es la siguiente: aún cuando el decisor tenga preferencias borrosas, debe elegir una alternativa de un conjunto dado de alternativas factibles y tomar una decisión no ambigua, entonces surgen algunas preguntas, por ejemplo, ¿cómo generar decisiones no ambiguas por medio de preferencias borrosas? ¿estas relaciones de preferencia satisfacen las propiedades de racionalidad?, ¿existe algún conjunto de elementos no dominados? ¿de qué manera se puede enriquecer la relación de dominancia ?

Un problema de decisión es aquel en el que se considera un conjunto de acciones potenciales (decisiones factibles), entre las que el decisor debe elegir una única, considerada la mejor, o bien puede seleccionar un subconjunto de acciones consideradas "buenas", u ordenar las acciones, desde la "mejor" a la "peor" (Antún 1994).

En el proceso de solución a un problema de decisión, se distinguen dos etapas fundamentales:

1.-*Modelación*. En esta etapa se identifica el conjunto de puntos de vista PV= $\{1, \ldots, N\}$ $N \geq 2$, y se construye una familia de criterios $C= \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ a partir de la cual se modelan las preferencias del decisor con respecto a cada punto de vista.

2.- *Agregación*. En esta etapa se agregan los diferentes criterios en un modelo matemático, que se explota adecuadamente con el fin de proporcionar al decisor una propuesta de decisión (Espinosa 1996).

Este es un proceso complejo y sus etapas no son particularmente fáciles de trabajar. Cuando se hace un modelo matemático de un problema real, la relación de preferencia sobre el conjunto de alternativas, usualmente se obtiene a lo largo de consultas con el decisor y muy frecuentemente, el decisor no tiene una idea clara de sus preferencias sobre las alternativas. Cuando el decisor es un grupo y cada uno de los integrantes tiene una opinión diferente sobre la preferencia de una alternativa sobre otra, en el caso en que una fracción del grupo haya votado por la opción x y otra fracción por la opción y, entonces podría tomarse un grado de preferencia de una opción sobre la otra. Situaciones como éstas, hacen surgir la necesidad de estructuras de preferencia más amplias, que permitan grados intermedios, que puedan interpretarse como medidas de intensidad de preferencias.

Los modelos que representan las preferencias del decisor, tienen asociada una estructura de preferencia, tradicionalmente binaria, que hace comparaciones por pares de alternativas y dan como resultado una preferencia estricta o indiferencia (Guillén 1993). Esta estructura no considera grados intermedios entre la indiferencia y la preferencia. De esta manera, el enfoque de relaciones borrosas parece más adecuado, ya que utiliza la llamada *función de pertenencia*, cuyo valor determina el grado en que una alternativa es mejor que otra.

El propósito de este trabajo es hacer un análisis del proceso de decisiones con preferencias borrosas, que incluye los fundamentos teóricos y estructura matemática de las relaciones borrosas de preferencia. Para lograr esto se plantean los siguientes objetivos :

Objetivos :

1. Presentar un panorama general de la toma de decisiones multicriterio, resaltando los modelos tradicionales de representación de preferencias.
2. Exponer los modelos de relaciones de preferencia borrosa y enunciar sus propiedades, para verificar si cumplen con las propiedades clásicas de racionalidad.
3. Explicar en qué consiste el método PROMETHEE de ayuda a la decisión multicriterio que utiliza relaciones de preferencia borrosas.
4. Aplicar el método a un caso práctico, para verificar que cumple con los requisitos que debe reunir todo método de decisión multicriterio.

El trabajo consta de cinco capítulos y un apéndice, el capítulo 1 es introductorio y presenta únicamente algunas consideraciones importantes que motivan la realización de esta tesis. El capítulo 2 incluye los conceptos básicos de la toma de decisiones multicriterio y de los conjuntos borrosos y sus propiedades, también expone el estado del arte de la toma de decisiones con preferencias borrosas y de las aplicaciones del método PROMETHEE. El capítulo 3 abarca los distintos modelos de representación de preferencias e incluye los modelos de relaciones de preferencia borrosa y los axiomas que se cumplen. En el capítulo 4 se explica el enfoque PROMETHEE, además trata acerca de un módulo interactivo visual que complementa a la metodología PROMETHEE, llamado plano GAIA. En el capítulo 5 se aplica esta metodología a un problema de selección de personal en una empresa de manufactura. En el capítulo 6 presentamos las conclusiones del trabajo. El apéndice trata del análisis de componentes principales, que se utiliza en la modelación del plano GAIA, para obtener una representación geométrica de los flujos definidos por PROMETHEE.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Problemas multicriterio.

Un problema multicriterio consiste en

$$\text{Opt } \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x) \mid x \in A\}$$

donde A es el conjunto de posibles alternativas y $\{f_j(.), j=1, 2, \ldots, k\}$ un conjunto de funciones de evaluación (función objetivo o criterio). El decisor espera encontrar una solución x^* que optimice todos los criterios.

Este tipo de problemas usualmente no tienen una solución que optimice todos los criterios al mismo tiempo. Sin embargo, la mayoria de los problemas económicos, sociales, politicos, industriales, etc. son de naturaleza multicriterio. En muchos de los casos deben considerarse criterios tecnológicos, financieros, ecológicos y sociales, por lo que en este tipo de problemas no tiene sentido decidir tomando en cuenta la evaluación de un solo criterio.

La solución de un problema multicriterio no sólo depende de la naturaleza del problema, sino también depende de las preferencias del decisor.

2.2 La ayuda a la decisión Multicriterio.

La ayuda a la decisión multicriterio permite dar al decisor herramientas para resolver un problema de decisión donde intervienen muchos puntos de vista contradictorios entre sí. Algo que debe tenerse en cuenta cuando se tiene un problema es que, en general, no existe una solución que satisfaga simultáneamente todos los puntos de vista, por lo que el principal objetivo de la ayuda a la decisión multicriterio es precisamente "ayudar" a tomar mejores decisiones.

Existen varios enfoques relacionados con la ayuda a la decisión multicriterio:

- La teoria de utilidad multiatributo o multicriterio, de origen estadounidense, que trabaja con una estructura de preferencias que no permite ningún tipo de inconsistencia, ni incomparabilidad.
- Los métodos de sobreclasificación, de origen francés, donde se construye una relación binaria S, llamada relación de sobreclasificación, tal que dadas dos alternativas *a* y *b*, *a*S*b*, sí y sólo sí *a* es al menos tan buena como *b*. Estos métodos aceptan la no comparabilidad.
- Los métodos interactivos, en su mayoria desarrollados en el marco de la programación matemática multiobjetivo (Vincke, *et al* 1992), alternan las entrevistas con el decisor y los cálculos para ofrecer soluciones alternativas.

2.3 El proceso de decisión.

Los elementos básicos que intervienen en el proceso de decisión son:

- Un conjunto de acciones *A*, que es el conjunto de objetos, opciones, alternativas o decisiones factibles entre las que el decisor debe elegir para cumplir un objetivo determinado.
- Un conjunto de consecuencias, resultado de la elección de un curso de acción determinado.
- Un conjunto de criterios o puntos de vista, que el decisor toma en cuenta al evaluar las alternativas.

La definición del conjunto *A* de acciones es uno de los pasos más difíciles del procedimiento de toma de decisiones. *A* puede ser estable o evolutivo, es estable si se define a priori y no cambia a lo largo del proceso y es evolutivo, si el problema de decisión es de naturaleza cambiante o porque resulten situaciones que requieran que *A* sea modificado.

El conjunto de acciones *A* puede definirse por medio de:

- la lista de sus elementos si *A* es finito o numerable
- el establecimiento de las propiedades de sus elementos, si *A* es finito o infinito no numerable

Un criterio se denota como una función *f*, definida sobre el conjunto de acciones *A*, que toma sus valores en un conjunto totalmente ordenado y representa las preferencias del decisor de acuerdo con algún punto de vista. Un criterio puede ser:

- criterio verdadero.- Si la estructura de preferencia es un preorden completo.
- semi-criterio.- Si la estructura de preferencia es un semiorden.
- criterio a intervalos.- Si la estructura de preferencia es un orden a intervalos.
- pseudo-criterio.- Si la estructura de preferencia es un pseudo-orden .

Un problema de decisión multicriterio es una situación en la que, dado un conjunto de acciones *A* y una familia *F* de criterios sobre *A*, se desea (Vincke *et al* 1992):

1. Determinar un subconjunto de acciones considerado el mejor con respecto a *F* (problema de elección o problema tipo α).
2. Dividir *A* en subconjuntos de acuerdo a ciertas normas establecidas a priori (problema de clasificación o tipo β).
3. Ordenar las acciones de *A*, de la mejor a la peor (problema de ordenamiento o tipo γ).

En la solución de un problema de decisión, se distinguen 4 etapas (Antún 1994):

1. La definición de las acciones y la formulación del problema.
2. La determinación de los puntos de vista fundamentales del problema y la modelación de las preferencias.
3. La agregación de las preferencias de los diferentes puntos de vista.
4. La aplicación de algún procedimiento matemático para resolver el problema de decisión.

Estas etapas no son necesariamente consecutivas y podríamos reducirlas, sin pérdida de generalidad, a 2 etapas fundamentales: la modelación y la agregación de preferencias.

2.4 Conceptos básicos.

2.4.1 Relaciones binarias y órdenes

Una *relación binaria* R en un conjunto A, es un subconjunto de AxA, tal que:

$$R = \{ (a, b) | \ a \in A, \ b \in A, \ aRb \} \subset AxA$$

Si el par ordenado (a, b) pertenece a R, se pueden utilizar indistintamente las siguientes notaciones: $(a, b) \in R$ o aRb.

El complemento R^c, la inversa R^{-1}, y el dual R^d, se definen como sigue:

$$(a, b) \in R^c \Leftrightarrow (a, b) \notin R;$$
$$(a, b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R;$$
$$(a, b) \in R^d \Leftrightarrow (b, a) \notin R.$$

Nótese que $R^d = (R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$.

Como R, R^c, R^{-1} y R^d son subconjuntos de A^2, podemos utilizar la notación de la teoría de conjuntos como la unión, intersección, etc. Sean R y Q dos relaciones sobre A. R está contenida en Q ($R \subseteq Q$) si:

$$aRb \Rightarrow aQb, \ a, \ b \in A.$$

Definimos la unión $R \cup Q$, la intersección $R \cap Q$ y la composición RoQ de la siguiente manera:

$$a(R \cup Q)b \Leftrightarrow aRb \text{ o } aQb$$
$$a(R \cap Q)b \Leftrightarrow aRb \text{ y } aQb$$
$$a(RoQ)b \Leftrightarrow \exists \ c \in A\text{: } aRc \text{ y } cQb$$

Supongamos que R es una relación binaria sobre A. Podemos asociar un número del conjunto $\{0, 1\}$, llamado ***valuación*** y denotado como $R(a,b)$, para algún par (a, b) como sigue:

$$R(a,b) = \begin{cases} 1 & aRb \\ 0 & aR^c b \end{cases}$$

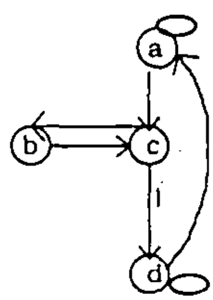
Cuando A es un conjunto finito, también podemos asociar a la relación R una matriz M^R, tomando a los componentes en $\boldsymbol{a}$ como filas y los componentes en $\boldsymbol{b}$ como columnas, para así obtener $R(a, b)$.

Ejemplo: Supongamos que $A = \{a, b, c, d\}$ y
$R=\{(a, a), (a, c), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d)\}$
entonces la matriz M^R está dada por:

	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	0	1

Toda relación binaria sobre el conjunto A puede representarse por medio de una gráfica dirigida (A, R), donde A es el conjunto de nodos y R es el conjunto de arcos. Existe un arco entre los nodos a y b si y sólo si aRb se satisface. Cuando aRa, existe un rizo (es decir, el arco sale y entra al nodo a).

Ejemplo: Representamos la relación del ejemplo anterior con la siguiente gráfica dirigida:



R puede satisfacer las siguientes propiedades:
1.- Transitividad, aRb y $bRc \Rightarrow aRc$, $\forall\ a, b, c \in A$;
2.- Simetria, $aRb \Rightarrow bRa$, $\forall\ a, b \in A$;
3.- Asimetría, $aRb \Rightarrow b\cancel{R}a$[2], $\forall\ a, b \in A$;
4.- Antisimetría, aRb y $bRa \Rightarrow a = b$ $\forall a, b \in A$;
5.- Reflexividad, aRa $\forall\ a \in A$;
6.- Irreflexividad, $a\cancel{R}a$ $\forall a \in A$;
7.- Transitividad negativa, $a\cancel{R}b$, $b\cancel{R}c \Rightarrow a\cancel{R}c$ $\forall$a, b, c $\in$ A;
8.- Comparabilidad, aRb o bRa o ambos, de forma equivalente, $a\cancel{R}b$ y $b\cancel{R}a$;

---

[2] $a\cancel{R}b$ indica la negación de la relación, o lo que es lo mismo $aR^c b$ o $(a, b) \in R^c$.

9.- Semitransitividad, aRb, $bRc \Rightarrow aRd$ o dRc $\forall$ $a, b, c, d \in A$.

Una relación R que sea comparable, no reflexiva y transitiva se conoce como una *relación de orden*. En particular, una relación asimétrica y transitiva, es un *orden estricto u orden parcial estricto*. Una relación comparable y transitiva es un *orden débil*. Un orden débil antisimétrico, se conoce como *orden lineal* u *orden simple*. Una relación reflexiva, simétrica y transitiva, se llama *relación de equivalencia*. Una relación reflexiva y transitiva, se conoce como *cuasiorden*. Una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica, es un *orden parcial*. Una relación asimétrica y negativa transitiva, se conoce como un *orden débil estricto*. Una relación R se dice que es *completa* si para algún a, $b \in$ A, se sigue que aRb o bRa. Una relación completa y transitiva se llama *preorden completo*.

2.4.2. Conjuntos borrosos (Fuzzy Sets, Bellman y Zadeh 1970)

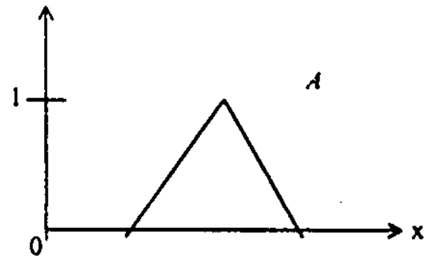
Entendemos por "borrosidad", un tipo de imprecisión que está asociado con los conjuntos borrosos, esto es, clases en las que no hay transición definida de un miembro de la clase a uno que no lo es (Bellman, Zadeh 1970). Un ejemplo clásico de este tipo de conjuntos es el siguiente: Sea A la clase de los hombres altos en una comunidad X, obviamente existen en X hombres definitivamente altos, y otros que no lo son, pero también existen hombres de estaturas intermedias entre los definitivamente altos y los no altos. El uso de los conjuntos borrosos, nos permite tomar en cuenta esos grados "intermedios" de pertenencia al conjunto.

En la teoría de conjuntos clásica, la transición entre la pertenencia y la no pertenencia de un elemento en un conjunto dado es abrupta y bien definida. Para un elemento en un conjunto borroso, esta transición puede ser gradual, ya que las fronteras de los conjuntos borrosos son ambiguas . Por tanto, ese grado de pertenencia se mide por medio de una función que intenta describir la vaguedad y la ambigüedad del conjunto. Esta función mapea los elementos de un conjunto borroso al universo de "valores de pertenencia", el intervalo [0, 1](Jamshidi *et al*).

Sea X una colección de objetos. Un conjunto borroso A en X es un conjunto de pares ordenados

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \}, \qquad x \in X$$

donde $\mu_A(x)$ determina el grado de pertenencia de x en A, y $\mu_A{:}X \rightarrow [0,1]$. Esta función se llama *función de pertenencia* del conjunto borroso A. Gráficamente :



Los grados de pertenencia reflejan un ordenamiento de los objetos en el universo de discurso, este ordenamiento es más importante que los valores de la función de pertenencia mismos (Dubois y Prade 1980).

La *intersección* de funciones de pertenencia $\mu(x, y)$ de un conjunto borroso, es un conjunto borroso de la forma:

$$\mu(x) = \inf_{y \in Y} \mu(x, y), \ \forall x \in X, \ y \in Y$$ [3]

La *unión* de $\mu(x, y)$ es un conjunto borroso de la forma:

$$\mu(x) = \sup_{y \in Y} \mu(x, y), \quad \forall x \in X, \ y \in Y.$$

La *diferencia* $A \backslash B$ de conjuntos borrosos, es el conjunto borroso de la forma:

$$\mu_{A \backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \text{cuando } \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

2.4.3. Relaciones y órdenes borrosos

Una *relación borrosa* en X, es un conjunto borroso $\mu_R: X \times X \rightarrow [0,1]$ con las siguientes propiedades:

1. Reflexiva

$$\mu(x, x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

2. Simétrica

$$\mu(x, y) = \mu(y, x), \quad \forall x, y, \in X.$$

3. Transitiva

$$\mu(x, y) \geq \sup_{z \in X} \min \{\mu(x, z), \mu(z, y)\}, \quad \forall x, y \in X.$$

4. Irreflexiva

$$\mu(x, x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

5. Antisimétrica

---

[3] $y \in Y$ es un parámetro

$$\mu(x, y) > 0 \Rightarrow \mu(y, x) = 0.$$

Una relación borrosa se llama *relación borrosa de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva. Se llama *relación borrosa de orden estricto* si es antireflexiva y transitiva. Una relación borrosa es un *orden parcial borroso* si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Una relación borrosa se llama *Cuasi-orden borroso*, si es reflexiva y transitiva.

Si una relación R es una relación borrosa, entonces su *inversa* R^{-1} se define por medio de la función de pertenencia:

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x), \qquad \forall x, y, \in X.$$

la *relación complemento*, se define como:

$$\mu_{R^c}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$$

y la relación dual:

$$\mu_{R^d}(x, y) = 1 - \mu_R(y, x)$$

Diremos que una relación borrosa $\mu(x, y)$ es *débilmente lineal* si

$$\mu(x, y) = 0 \Rightarrow \mu(y, x) > 0,$$

y es *fuertemente lineal* si

$$\mu(x, y) \geq \mu(y, x) \Rightarrow \mu(x, y) = 1 \text{ y } \mu(x, y) \leq \mu(y, x) \Rightarrow \mu(y, x) = 1.$$

2.4.4. t-normas y t-conormas

Las normas triangulares (t-normas) se estudian originalmente en la teoría de los espacios métricos probabilísticos, en ese marco se ha probado que son excelentes herramientas cuando se trabaja con la desigualdad del triángulo (Butnariu y Klement 1990). A continuación definiremos las t-normas y las t-conormas, que se han utilizado para modelar la intersección y la unión de conjuntos borrosos, respectivamente (Grabisch *et al* 1995).

Una operación binaria $T:[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se llama *t-norma* si satisface $\forall\ x, y, z, x', y' \in [0, 1]$:

a) $T(0, 0) = 0$, $T(x, 1) = T(1, x) = x$, (condiciones de frontera)
b) $T(x, y) = T(y, x)$ (conmutatividad)
c) $x \leq y$, $x' \leq y' \Rightarrow T(x, x') \leq T(y, y')$ (monótonamente creciente)
d) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (asociatividad)

A continuación se dan algunos ejemplos de t-normas:

1. $T(x, y) = xy$
2. $T(x, y) = \max(0, x+y-1)$
3. $T(x, y) = \min(x, y)$

Una t-norma T es *continua*, si como función T es continua sobre el intervalo unitario.

Una t-norma T se dice *Arquimediana*, si T es continua y para $x \in (0,1)$, $T(x, x) < x$. Una t-norma arquimediana es *estricta* si T es estrictamente creciente sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, por ejemplo $T(x, y) = xy$.

Para definir la unión de conjuntos borrosos, usaremos el concepto de t-conorma. Una operación binaria S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una *t-conorma* si:

1. $S(1, 1) = 1$, $S(0, x) = S(x, 0) = x$,
2. $S(x, y) = S(y, x)$
3. $x \leq y, x' \leq y' \Rightarrow S(x, x') \leq S(y, y')$,
4. $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$.

Si A y B son dos subconjuntos borrosos de X, entonces

$$\mu_{A \cup B}(\omega) = S(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)).$$

Una t-conorma es continua, si como función S es continua sobre el intevalo unitario. Una t-conorma se dice *arquimediana*, si para $x \in (0, 1)$, $S(x, x) > x$.

Como ejemplos de t-conormas tenemos:

a) $S(x, y) = \min(1, x+y)$
b) $S(x, y) = x + y - xy$
c) $S(x, y) = \max(x, y)$

Por último, cuando S y T son tales que:

$$T(x, y) = 1 - S(1-x, 1-y)$$

o

$$S(x, y) = 1 - T(1-x, 1-y),$$

se dice que T y S son duales (es decir, S es la t-conorma dual de T).

2.4.5. Negaciones

El complemento de un subconjunto borroso A puede generalizarse de la siguiente manera:

$$\mu_{A^c}(\omega) = N(\mu_A(\omega)),$$

donde N: [0, 1] → [0, 1] es un operador no creciente, N(0) = 1, y N(1) = 0. N se llama *negación.*

Una negación N es *estricta*, si además es continua y decreciente. Es *involutiva* si

$$N(N(x))=x, \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

se dice que una negación es fuerte si es estricta e involutiva.

Algunos ejemplos de negaciones son lo siguientes:

a) $N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

c) $N(x) = 1 - x$

Si T es una t-norma, *S* una t-conorma y *N* una negación, el sistema (*T*, *S*, *N*) se llama triada de De Morgan[4]

2.4.6. Antisimetría y asimetría

La antisimetría y la asimetría dependen del tipo de conjunción que se utiliza en la modelación. De hecho, la antisimetría clásica equivale a:

$$a \neq b \Rightarrow (a, b) \notin R \cap R^{-1}$$

mientras que la asimetría se cumple si y sólo si:

$$(a, b) \notin R \cap R^{-1}$$

por tanto, damos la siguiente definición: Una relación borrosa *R* sobre A es t-antisimétrica si

$$a \neq b \Rightarrow T(R(a, b), R(b, a)) = 0$$

R es t-asimétrica si

$$T(R(a, b), R(b, a)) = 0 \quad \forall\ a, b \in A.$$

[4] En la Teoría de conjuntos ordinaria, las leyes de De Morgan son: $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

2.5 El estado del arte.

La teoria de los conjuntos borrosos se inicia en la década de los 60's con L. Zadeh, a partir de esa fecha se ha desarrollado en una gran variedad de direcciones, encontrando aplicaciones en campos tan diversos como la taxonomia, topologia, lingüistica, teoria de autómatas, lógica, teoria de control, psicologia, teoria de juegos, reconocimiento de patrones, medicina, leyes, análisis de decisión, entre otros (Zadeh 1975).

Esta teoria se basa en el concepto de conjunto borroso, esto es, clases de objetos en los que no hay transición definida de un miembro de la clase a uno que no lo es. De aquí que se introduce el concepto de función de pertenencia, que determina el grado de pertenencia del objeto en el conjunto.

La aplicación a la teoría de decisiones se reporta en la literatura a partir de 1970, con el artículo de Bellman y Zadeh, "Decision-Making in a Fuzzy Environment", donde se analiza el proceso de decisión en el que los objetivos y las restricciones se definen como conjuntos borrosos en el espacio de alternativas, aunque el sistema bajo control no necesariamente es borroso. Una decisión borrosa se presenta como la intersección de los objetivos y las restricciones, es decir, dados un objetivo borroso G y una restricción C, una decisión borrosa D es un conjunto borroso tal que

$$D = G \cap C$$

y la función de pertenencia de D es,

$$\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C.$$ [5]

Una decisión maximal se define como un punto en el espacio de alternativas, en el que la función de pertenencia alcanza su valor máximo. De manera general, sea una decisión borrosa representada por su función de pertenencia μ_D. Sea K el conjunto de puntos en el espacio de alternativas en los que μ_D alcanza su máximo, entonces el conjunto definido como:

$$\mu_{D^M}(x) = \begin{cases} \text{Max}\ \mu_D(x) & \text{para } x \in K \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

se dice que es la decisión óptima (μ_D^M representa la función de pertenencia de la decisión maximal). Estos conceptos se ilustran con ejemplos que involucran procesos de decisión multietapas, en los que el sistema bajo control puede ser determinístico o estocástico.

[5] $\wedge$ representa al conectivo lógico de la conjunción $\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$.

Con respecto a la modelación y agregación de preferencias borrosas, una gran cantidad de autores han tratado el tema:

Orlovsky (1978), aborda el problema de encontrar un conjunto de soluciones eficientes que podría ayudar al decisor en su proceso de elección y estudia algunas de las propiedades de las relaciones de preferencia borrosa, que permiten introducir el conjunto de alternativas no dominadas. Define una relación borrosa de preferencia estricta

$$\mu_P(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) & \text{para } \mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

P sólo contiene elementos (x, y) en el que el elemento x domina estrictamente a y y R representa una relación de preferencia no estricta. El conjunto de elementos no dominados se sugiere como solución al problema de toma de decisiones y lo expresa por medio de las relaciones de preferencia no estricta de la siguiente manera:

$$\mu_{ND}(x) = 1 - \sup_{y \in X}\{\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y), 0\}$$

el valor de $\mu_{ND}(x)$ representa el grado al cual el elemento x no está dominado por ninguno de los elementos del conjunto de alternativas X.

Dubois y Prade (1980), publican una monografía de investigación sobre la teoría de los conjuntos borrosos y sus aplicaciones. Su trabajo se basa en la compilación de alrededor de 550 publicaciones en inglés, francés y alemán de 1965 a 1978, y contiene tópicos especiales de sistemas dinámicos, investigación de operaciones, control, reconocimiento de patrones, toma de decisiones, teoría de juegos, inteligencia artificial, robótica, etc. La publicación se propone únicamente como un compendio de investigación.

Ovchinnikov (1981), estudia la estructura de relaciones binarias borrosas de preferencia e indiferencia y perfila las formas de usar sus resultados en la teoría de la elección racional. Describe completamente las relaciones borrosas de equivalencia en términos de particiones borrosas y establece todas las posibles relaciones lógicas entre varias propiedades de transitividad de las preferencias borrosas. Recordemos que una relación borrosa sobre un conjunto X es una equivalencia si se cumplen las propiedades de reflexividad, simetria y transitividad. En la teoría tradicional, toda relación de equivalencia R sobre un conjunto X, define una partición de X en clases de equivalencia. El conjunto de todas las clases de equivalencia es el llamado *conjunto cociente* X/R. Por otro lado, cada partición de un conjunto X define una relación de equivalencia sobre X. Existe un mapeo suprayectivo $\pi: X \to X/R$, conocido como el *mapeo* *canónico*. La relación de equivalencia R es el *kernel* del mapeo canónico y las clases de equivalencia son los elementos de la imagen inversa del conjunto cociente. Ovchinnikov define los análogos borrosos de estas nociones y establece sus propiedades. Define a la preferencia borrosa R como una relación conexa y reflexiva sobre X e interpreta el valor $R(x, y)$ de la función de pertenencia como el grado de "definitividad" de la aserción "el elemento x no es peor que el elemento y". Las propiedades de conexidad y reflexividad son necesarias para la existencia de funciones de elección construidas a partir de las preferencias.

Siskos (1982), modela las preferencias del decisor por medio de una relación de sobreclasificación borrosa, que se obtiene a través de la agregación de un sistema de funciones utilidad aditivas, estimadas por medio de métodos de regresión ordinal que analizan la relación de preferencia R. Los datos para el método de estimación del modelo de preferencias del decisor consisten en una relación de orden débil de preferencia R sobre un conjunto de acciones de referencia A, y de las evaluaciones multicriterio $g(a)$, $a \in A$, para cada una de las acciones. Lo que propone Siskos en su trabajo es la utilización de esta información para estimar las utilidades aditivas con respecto a ciertas restricciones dadas. Su procedimiento de estimación usa técnicas especiales de programación lineal para obtener soluciones consistentes entre la relación de orden débil R y las utilidades estimadas. Cada utilidad se estima de manera óptima minimizando una función de error y se evalúa más tarde por medio de un indicador de correlación de orden entre R (orden débil inicial) y R^* (orden débil dado por la utilidad). El indicador que se utiliza es la τ de Kendall que se define como:

$$\tau = 1 - \frac{4\, d_k(R, R^*)}{m(m-1)}$$

donde $d_k(R, R^*) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|R_{ij} R^*_{ij}\right|$ es la distancia de Kendall.

Martel, D'Avignon y Couillard (1986), utilizan una relación de sobreclasificación borrosa, que se caracteriza por un grado de credibilidad calculado a partir de dos índices: un índice de confianza y un índice de duda. La relación de sobreclasificación usa el concepto de distribución de probabilidad, que toma en cuenta la naturaleza aleatoria del fenómeno en estudio.

Ponsard (1986), presenta un modelo que toma en cuenta la naturaleza subjetiva y cualitativa de las relaciones entre el conjunto de bienes y los posibles comportamientos del consumidor, este modelo aplica la teoría de ecuaciones de relaciones borrosas. Ponsard se enfoca en el análisis multicriterio del comportamiento del consumidor cuando el decisor actúa en un espacio borroso y manifiesta una actitud de imprecisión. En su modelo, las relaciones entre el espacio de bienes y el consumidor se expresan con relaciones de preferencia borrosas que, bajo ciertas condiciones, definen funciones de utilidad borrosas. El equilibrio del consumidor es resultado de un cálculo económico borroso: maximizar la función utilidad borrosa con una restricción de recursos elástica, lo mismo sucede para el productor. El objetivo de este enfoque es aplicar un análisis multidimensional a la exploración del proceso de toma de decisiones del consumidor en un contexto borroso. En su trabajo analiza 3 etapas del proceso de decisión que llama:

1.- Tratamiento de la información
2.- Evaluación de las características
3.- Comportamiento revelado

De forma general, define 3 conjuntos; un conjunto de bienes X, un conjunto de características Y y un conjunto de estados de satisfacción o posibles comportamientos Z, y 3 relaciones binarias borrosas:

$$A = \{ (x_i, y_k), \mu_A;\ \forall\ x_i \in X, \forall\ y_k \in Y: \mu_A(x_i, y_k) \in [0, 1]\}$$
$$B = \{ (y_k, z_j), \mu_B;\ \forall\ y_k \in Y, \forall\ z_j \in Z: \mu_B(y_k, z_j) \in [0, 1]\}$$
$$C = \{ (x_i. z_j) , \mu_C;\ \forall\ x_i \in X, \forall\ z_j \in Z: \mu_C(x_i, z_j) \in [0, 1]\}$$

Cada una de estas relaciones corresponde con una etapa del proceso de decisión. Por ejemplo, A se explica a partir de la apreciación particular del consumidor de un bien dado x_i. El tratamiento de los datos depende de la percepción y de la comprensión de la información disponible relacionada con el espacio de bienes. También depende de la experiencia y del aprendizaje. De aquí, a x_i le corresponde un y_k en un cierto grado $\mu(x_i, y_k)$. De manera más simple se tiene

$$\mu_A(x_i, y_k) = a_{ik}.$$

a_{ik} significa que el consumidor tiene un juicio acerca de la evaluación asignada al bien x_i para la característica y_k. Para B se tiene que

$$\mu_B = (y_k, z_j) = b_{kj},$$

b_{kj} se interpreta como la evaluación asignada a la característica y_k para el estado de satisfacción (o posible comportamiento) z_j asociado en la apreciación del consumidor. Esto es, la actitud del consumidor con respecto a las características de los bienes y su lugar de abastecimiento nos dirige a la evaluación de esas características. Finalmente, para C tenemos

$$\mu_C(x_i, z_j) = c_{ij}.$$

El comportamiento revelado explica que cierto bien x_i puede ser materia de un posible comportamiento. Asi c_{ij} es la evaluación del bien x_i con respecto al posible comportamiento z_j del consumidor.

Roubens (1989), introduce una generalización de las llamadas *relaciones binarias valuadas*[6] y las funciones de elección basadas en normas triangulares de relaciones binarias valuadas. Examina un enfoque de toma de decisiones en grupo en el que la preferencia colectiva se forma a partir de las preferencias individuales y considera el problema de encontrar un subconjunto de "mejores" alternativas. En el contexto de las relaciones binarias valuadas, una función de elección es un mapeo

$$C(X): X \rightarrow [0,1]$$

y $C(X)(y) \in [0, 1]$ es el grado al que una alternativa $y \in X$ es el "mejor" elemento en el conjunto X. C(X) (y) se denota brevemente como C(y). Las funciones de elección propuestas presentan algunas propiedades interesantes como concordancia, independencia de alternativas irrelevantes, recompensa por dominancia estricta y herencia.

Recientemente Barret, Pattanaik y Salles (1990), introdujeron reglas alternativas para la generación de conjuntos de elección a partir de relaciones borrosas de preferencia débil. Tratan sobre las propiedades de racionalidad de varias funciones de elección basadas en preferencias, es decir, reglas para inducir la elección a partir de preferencias borrosas. Las preferencias borrosas no están restringidas a satisfacer la propiedad de transitividad, por lo tanto todas las funciones de elección que se discuten violan algunas propiedades que han sido consideradas como propiedades básicas de la elección "racional". Por otro lado, si las preferencias borrosas admisibles se restringen a ser órdenes borrosos, sólo una de las funciones de elección, basadas en las preferencias propuestas, satisface todas las propiedades de racionalidad consideradas.

Ovchinnikov y Roubens (1991), extienden los conceptos de Orlovsky (1978), Ovchinnikov (1981) y Roubens (1989). Introducen una noción general de una relación valuada de preferencia estricta y establecen la propiedad de transitividad de esta relación, que además satisface las condiciones de independencia de alternativas irrelevantes y asociación positiva. También estudian una clase de relaciones de preferencia estricta valuadas definidas por medio de normas triangulares y funciones negación. Estos conceptos forman un fundamento metodológico para muchos problemas de modelación de preferencias, incluyéndose a la agregación de preferencias borrosas, la definición de funciones de elección basadas en comparaciones por pares, ordenamiento de alternativas en ambiente borroso, etc. Estos mismos autores desarrollan otro trabajo en 1992, donde en esta ocasión utilizan preferencias débiles, estrictas y relaciones de indiferencia y no comparabilidad borrosas, y su objetivo es hacer una generalización de los modelos clásicos.

---

[6] Roubens considera una relación valuada como un mapeo $R: X \times X \rightarrow [0, 1]$, $R(x, y)$ denota la imagen del par (x,y).

Perny y Roy (1992), introducen una relación de sobreclasificación borrosa y muestran cómo ésta contribuye a la modelación, análisis y justificación de preferencias, dentro del contexto de la ayuda a la decisión multicriterio. Definen los llamados sistemas relacionales de preferencias, modelos muy sofisticados de relaciones de sobreclasificación, que involucran a las relaciones de indiferencia, preferencia, incomparabilidad, sobreclasificación y no preferencia.

Fodor (1992), propone un enfoque axiomático de las relaciones borrosas de preferencia estricta (P), indiferencia (I) e incomparabilidad (J). Establecen un sistema de ecuaciones funcionales que representan las conexiones entre P, I y J, es decir,

$$P = R \cap R^{d},$$
$$I = R \cap R^{-1}$$
$$J = R^{c} \cap R^{d}$$

y concluye que este sistema no tienen solución para las propiedades clásicas. Propone las condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de la solución del sistema y al final, hacen una comparación de sus resultados con los reportados por Ovchinnikov y Roubens (1991). Basándose en estos resultados Fodor y Roubens (1994), abordan el problema de definir P, I y J en términos de R e introducen modelos para las operaciones sobre conjuntos que preserven las propiedades clásicas de las relaciones de preferencias, tanto como sea posible.

Pirlot (1995), caracteriza un procedimiento que transforma relaciones de preferencia valuadas sobre un conjunto de alternativas en relaciones de preferencia bien definidas, este procedimiento ordena las alternativas en orden decreciente de acuerdo con su carácter minimal. Entre otros resultados, caracteriza de manera similar otro procedimiento llamado "leximin" e investiga otras dos familias de procedimientos cuya intersección es el procedimiento "Min".

Ghotb y Warren (1995), comparan el proceso de jerarquización analítica (AHP) de Saaty, con una metodología de decisión borrosa, que utiliza variables lingüísticas que se traducen a conjuntos borrosos. Hacen el estudio de un caso en un Hospital donde desean saber si se debe implementar un nuevo sistema de almacenamiento de imágenes radiológicas basado en tecnología digital o se sigue utilizando el sistema existente de almacenamiento en película. Se implementaron las dos metodologías bajo las mismas condiciones para comparar los beneficios para el hospital asociados con cada sistema. Se compararon los siguientes aspectos de la aplicación:

1.- Nivel relativo de preferencia para cada alternativa

2.- Sensibilidad de los métodos a los posibles cambios en las normas del Hospital representadas como pesos diferentes .

Perny y Roy (1992), introducen una relación de sobreclasificación borrosa y muestran cómo ésta contribuye a la modelación, análisis y justificación de preferencias, dentro del contexto de la ayuda a la decisión multicriterio. Definen los llamados sistemas relacionales de preferencias, modelos muy sofisticados de relaciones de sobreclasificación, que involucran a las relaciones de indiferencia, preferencia, incomparabilidad, sobreclasificación y no preferencia.

Fodor (1992), propone un enfoque axiomático de las relaciones borrosas de preferencia estricta (P), indiferencia (I) e incomparabilidad (J). Establecen un sistema de ecuaciones funcionales que representan las conexiones entre P, I y J, es decir,

$$P = R \cap R^d,$$
$$I = R \cap R^{-1}$$
$$J = R^c \cap R^d$$

y concluye que este sistema no tienen solución para las propiedades clásicas. Propone las condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de la solución del sistema y al final, hacen una comparación de sus resultados con los reportados por Ovchinnikov y Roubens (1991). Basándose en estos resultados Fodor y Roubens (1994), abordan el problema de definir P, I y J en términos de R e introducen modelos para las operaciones sobre conjuntos que preserven las propiedades clásicas de las relaciones de preferencias, tanto como sea posible.

Pirlot (1995), caracteriza un procedimiento que transforma relaciones de preferencia valuadas sobre un conjunto de alternativas en relaciones de preferencia bien definidas, este procedimiento ordena las alternativas en orden decreciente de acuerdo con su carácter minimal. Entre otros resultados, caracteriza de manera similar otro procedimiento llamado "leximin" e investiga otras dos familias de procedimientos cuya intersección es el procedimiento "Min".

Ghotb y Warren (1995), comparan el proceso de jerarquización analítica (AHP) de Saaty, con una metodología de decisión borrosa, que utiliza variables lingüísticas que se traducen a conjuntos borrosos. Hacen el estudio de un caso en un Hospital donde desean saber si se debe implementar un nuevo sistema de almacenamiento de imágenes radiológicas basado en tecnología digital o se sigue utilizando el sistema existente de almacenamiento en película. Se implementaron las dos metodologías bajo las mismas condiciones para comparar los beneficios para el hospital asociados con cada sistema. Se compararon los siguientes aspectos de la aplicación:

1.- Nivel relativo de preferencia para cada alternativa

2.- Sensibilidad de los métodos a los posibles cambios en las normas del Hospital representadas como pesos diferentes .

3.- La dificultad de clasificación asociada a cada método.

El objetivo es maximizar todos los beneficios para el hospital, considerando todos los costos y la tasa de sustitución intangible. Para alcanzar esta meta se definió un índice de beneficio llamado "New Sistem Superiority Margin" (SSM), donde SSM es un porcentaje usado para comparar los resultados de las dos metodologias.

Una aplicación interesante es la que publican Liang y Wang (1994), donde utilizan un método de toma de decisiones multicriterio para un problema de selección de personal. En éste, primero se agregan las evaluaciones lingüísticas de los decisores acerca de pesos de criterios subjetivos y su clasificación, para obtener un índice borroso de adecuación. Además, combinando las evaluaciones de las clasificaciones objetivas y subjetivas, se obtienen los valores de la clasificación final para la evaluación de adecuación del personal. Proponen un algoritmo para la selección de personal bajo múltiples criterios, utilizando la teoría de los conjuntos borrosos y una estructura de análisis jerárquica de dos niveles. El primer nivel es para evaluar la importancia "borrosa" de varios criterios subjetivos. El segundo nivel es para asignar pesos a los candidatos para cada criterio subjetivo.

Otro trabajo que utiliza relaciones borrosas de preferencias es el de Turksen y Willson (1995), donde se proponen probar la validez predictiva y el pronóstico de mercados compartidos de un modelo de preferencias borrosas. Este modelo puede aplicarse a problemas de "marketing" que utilizan análisis conjunto; la flexibilidad de este modelo y la robustez de los resultados en presencia de atributos lingüísticos, permite utilizar el modelo en situaciones en las que el análisis conjunto no podría usarse.

Grabisch (1995), (1996), presenta una síntesis sobre la aplicación de las integrales borrosas como herramienta innovadora para la agregación de criterios en problemas de decisión. Después de observar que las herramientas tradicionales de agregación de criterios tienen sus desventajas, se propone el uso de la integral borrosa, específicamente se propone tomar $\mathcal{H} = \mathcal{F}\mu$, donde $\mathcal{H}$ es el operador de agregación, $\mathcal{F}$ es una integral borrosa y μ es una medida borrosa, definida sobre el conjunto de criterios $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$. La medida borrosa representa pesos sobre los criterios , ya sea en criterios individuales (por medio de $\mu(\{X_i\})$ o en un grupo de criterios (por ejemplo, $\mu(\{X_1, X_2, X_4\})$: este es el punto clave de la integral borrosa, que permite expresar la interacción entre los criterios.

Es evidente que la teoría de los conjuntos borrosos ha estado presente en los últimos 30 años en el desarrollo de técnicas y metodologias para la solución de problemas prácticos de casi cualquier disciplina, y la teoría de decisiones no podía ser la excepción.

2.5.1. Aplicaciones del Método PROMETHEE.

La literatura reporta varias aplicaciones interesantes de los métodos PROMETHEE:

D'Avignon *et al* (1983) analizó la eficiencia de diferentes servicios en algunos hospitales canadienses, por medio de los métodos PROMETHEE, con el propósito de dar más apoyo a aquellas áreas que brinden el mejor servicio.

Dujardin (1984) utilizó los métodos ELECTRE y PROMETHEE para comparar diferentes proyectos educativos con el propósito de evitar ciertas fallas en escuelas secundarias en Bélgica.

Du Bois *et al* (1989), desarrollan un sistema de ayuda al diagnóstico médico en casos complicados, al que llaman MEDICIS. Este sistema consta de 2 subsistemas: un módulo de control, utilizado por el experto para introducir las bases teóricas del diagnóstico y un módulo de consulta dedicado a cada aplicación médica, que explota las bases teóricas del primer módulo. MEDICIS sigue un proceso de razonamiento lógico que no recurre a factores de certeza. Finalmente, utiliza el método PROMETHEE I para explotar los resultados obtenidos y generar un preorden parcial sobre las patologías.

Briggs *et al* (1990), aplican el enfoque PROMETHEE-GAIA al problema del manejo de desperdicios nucleares. La publicación se basa en un estudio de caso, donde la toma de decisiones se enfrenta con la elección de un método de financiamiento que se adapte a varios escenarios de tiempo posibles para la disposición de los desperdicios, y a algunos sitios seleccionados para la construcción de un depósito geológico.

Una aplicación muy reciente es la que publican Al-Shemmeri *et al* (1997), en la que desarrollan un sistema de ayuda a la decisión para la planeación estratégica del uso eficiente del agua en Jordania. Se estableció un conjunto de objetivos nacionales que deberían contemplar los proyectos de uso eficiente del agua. Se utilizó en enfoque PROMETHEE para obtener un ordenamiento de las diferentes opciones que podrían satisfacer lo objetivos de la nación. Finalmente se estableció un sistema de monitoreo que utiliza una técnica llamada desarrollo/productividad.

Estas aplicaciones son muestra de que los métodos PROMETHEE son bien aceptados y utilizados ampliamente en diferentes disciplinas que enfrentan cotidianamente problemas multicriterio.

3. LA MODELACIÓN DE PREFERENCIAS.

La etapa de modelación es indispensable en la toma de decisiones, ya que en ésta, además de definir las alternativas, se establece el conjunto de criterios de decisión a partir del cual el decisor podrá evaluar las diferentes alternativas.

En la teoría clásica, cuando el decisor debe comparar entre dos acciones x e y puede (Vincke *et al* 1992):

i) preferir x a y: xPy

ii) ser indiferente a ellas: xIy

iii) no las puede comparar: xJy

estas tres relaciones {P,I,J} están definidas sobre el conjunto de alternativas y la mayoría de los trabajos de modelación de preferencias las incluyen.

Se dice que {P,I,J} conforma una *estructura de preferencia* sobre el conjunto de alternativas si :

a) P es asimétrica, $xPy \Rightarrow y \not P x$

b) I es simétrica , $xIy \Rightarrow yIx$, y reflexiva, xIx

c) J es irreflexiva , $x \not J x$, y simétrica, $xJy \Rightarrow yJx$

d) sólo una de las siguientes se cumple: xPy, yPx, xIy, xJy.

Esta estructura de preferencias, refleja que el decisor está completamente seguro de la preferencia de un objeto sobre otro, si el primero es suficientemente mejor que el segundo, de otro modo, es incapaz de discriminar entre ellos y se declara indiferente (French 1988), esto da como resultado una preferencia estricta o una indiferencia.

Una relación binaria R, se considera una relación de preferencia débil si :

$$aRb \Rightarrow \text{“}a \text{ no es peor que } b\text{”}.$$

Esta definición implica que R es una relación reflexiva (aRa se cumple $\forall a \in A$).

La estructura de preferencia {P, I, J} puede definirse en términos de R de la siguiente manera :

$$aPb \Leftrightarrow aRb \text{ y } b \not R a$$
$$aIb \Leftrightarrow aRb \text{ y } bRa$$
$$aJb \Leftrightarrow a \not R b \text{ y } b \not R a.$$

Haciendo uso de la teoría de conjuntos, las expresiones anteriores pueden escribirse como :

$$P = R \cap R^d \quad (1)$$
$$I = R \cap R^{-1} \quad (2)$$
$$J = R^c \cap R^d \quad (3)$$

{P, I, J} se relacionan de la siguiente manera :

$$P \cup I = R \quad (4)$$
$$P \cap I = \varnothing \quad (5)$$
$$P \cap J = \varnothing \quad (6)$$
$$I \cap J = \varnothing \quad (7)$$
$$P \cup I \cup P^{-1} = R \cup R^{-1} \quad (8)$$

Cabe mencionar que (4) es equivalente a

$$P \cup J = R^d \quad (9)$$

además como I, J son simétricas y P es asimétrica : $I=I^{-1}$, $J=J^{-1}$ y $P \cap P^{-1} = \varnothing$.
Por último

$$P \cup P^{-1} \cup I \cup J = A x A \quad (10)$$

3.1. El modelo tradicional

El enfoque tradicional consiste en convertir un problema de decisión en un problema de optimización, donde se pretende maximizar una función f definida sobre el conjunto de alternativas, de tal forma que,
$\forall\ a,\ b \in A$

$$aPb \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$
$$aIb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

en este modelo no se permite la incomparabilidad, es decir, J es vacío; además, I y P son transitivas, puesto que I es una relación de equivalencia y P es un orden débil. Una estructura de preferencia con estas características es un preorden completo.

3.2. Modelos de umbral

Cuando el decisor no percibe la diferencia entre dos alternativas o se rehusa a declarar la preferencia de una alternativa sobre la otra, se introducen los llamados "modelos de umbral", que contradicen la transitividad de la indiferencia del modelo tradicional.

La estructura de preferencias para este modelo es un semiorden, donde P es transitiva. El modelo se representa por:

$$aPb \Leftrightarrow f(a) > f(b) + q$$
$$aIb \Leftrightarrow |f(a) - f(b)| \leq q$$

$\forall$ a, b, $\in A$ y q es un umbral positivo. Esta estructura tampoco permite la no comparabilidad y satisface las siguientes condiciones: $\forall$ $a, b, c, d \in A$

$$aPb,\ bIc \text{ y } cPd \Rightarrow aPd$$
$$aPb,\ bPc \text{ y } aId \Rightarrow dPc$$

Existen algunas otras estructuras de preferencias basadas en el modelo del umbral con ciertas variaciones, pero ninguno de ellos permite la incomparabilidad. La no comparabilidad surge cuando se agregan opiniones contradictorias, lo que ocurre a menudo en los problemas de decisión multicriterio.

3.3. Modelos que permiten la no comparabilidad

Entre estos modelos podemos encontrar a las estructuras de *orden parcial*, que surgen cuando se presenta un problema de tipo γ sin restricciones, y se caracterizan por:

$$a \neq b \Rightarrow aIb$$
$$aPb \text{ y } bPc \Rightarrow aPc$$

$\forall$ $a, b, c \in A$. Existe una función real f tal que

$$aPb \Rightarrow f(a) > f(b).$$

También se encuentran las estructuras de *preorden parcial*, que surgen cuando se presenta un problema del tipo γ con restricciones, y se caracterizan por el hecho de que P es transitiva, I es intransitiva y

$$aPb \text{ y } bIc \Rightarrow aPc$$
$$aIb \text{ y } bPc \Rightarrow aPc$$

en este caso, existe una función real f tal que

$$aPb \Rightarrow f(a) > f(b),\ aIb \Rightarrow f(a) = f(b).$$

Los métodos que utilizan relaciones de sobreclasificación para modelar las preferencias del decisor, también permiten la no comparabilidad, sólo que en lugar de obtener una función que ordena las acciones de la mejor a la peor, se construye una relación de sobreclasificación S que no necesariamente es completa o transitiva. La mayoría de estos métodos involucran la noción de pesos de criterios para representar la importancia relativa de los criterios (Vincke *et al* 1992).

Generalmente una relación de sobreclasificación es una relación binaria sobre el conjunto A de acciones y se define de la siguiente manera :

- aSb (a sobreclasifica a b) significa que el analista tiene suficientes razones para admitir que, para el decisor, la alternativa a es al menos tan buena como la alternativa b o por lo menos a no es peor que b (por lo que a puede ser indiferente o preferida a b).

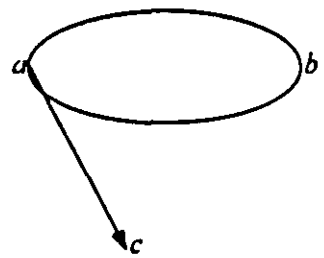
- $a\not S b$ (a no sobreclasifica a b) significa que los argumentos en favor de la proposición "a es al menos tan buena como b" se consideran insuficientes.

En consecuencia, la sobreclasificación simple entre dos acciones, corresponde a la situación en la que una acción es preferida a otra ; la doble sobreclasificación implica que las dos acciones son indiferentes ; y la no sobreclasificación significa que las dos acciones son incomparables

Para la modelación de preferencias por medio de relaciones binarias de sobreclasificación, se define aRb que se interpreta como "a es al menos tan buena como b" y se consideran las siguientes situaciones (Antún 1994):

- preferencia, $aPb \Leftrightarrow aRb,\ b\not R a$
- indiferencia, $aIb \Leftrightarrow aRb,\ bRa$
- incomparabilidad, aJb ($a\not R b,\ b\not R a$)

Gráficamente se tiene :



aIb
aPc
bJc

Consideremos n relaciones de sobreclasificación parciales S_j asociadas a los n criterios del conjunto F y una relación binaria S que agregue los criterios. Se supone que S cumple las siguientes propiedades:

a) S es reflexiva. Observe que

- aSb y $b\not S a$ no se puede interpretar como "a se prefiere estrictamente a b".
- S no es necesariamente un relación transitiva.

b) Para cualesquiera alternativas a,b y c, S satisface

$$aSb \wedge bD_F c \Rightarrow aSc$$

$$aD_F b \wedge bSc \Rightarrow aSc$$

donde D_F es la relación de dominancia definida por

$$aD_F b \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) \quad \forall j \in F$$

por lo tanto se tiene $aD_F b \Rightarrow aSb$.

c) Finalmente, si $g_j(a) = g_j(b) \quad \forall j \neq k$ entonces $aSb \Leftrightarrow aS_k b$

esta condición puede plantearse como sigue :

$$\text{si } aI_j b \quad \forall j \neq k, \text{ entonces } aSb \Leftrightarrow aS_k b$$

$$aS_j b \quad \forall j \in F \Rightarrow aSb$$

La expresión formal y la naturaleza de las condiciones que se deben satisfacer para validar la afirmación *aSb* son influenciadas por muchos factores, tales como:

- El grado de significancia de los criterios considerados en *F*.
- La naturaleza de conceptos básicos usados: concordancia, discordancia, tasa de sustitución, intensidad de preferencia, etc.
- La naturaleza de la información entre criterios que se requiere.
- La fuerza de los argumentos requeridos, por ejemplo: hablar de la alternativa más fuerte, digamos "*a*", podríamos pensar que "*a* domina a *b*", sin embargo, el concepto de sobreclasificación es más interesante porque argumentos mas débiles pueden ser suficientes para considerar la relación dada porque la relación binaria *S* es más rica que la relación *D*. (Cano 1997).

3.4. Modelos de relaciones de preferencia borrosa

Todos los modelos descritos anteriormente suponen una relación de preferencia única, es decir, el decisor no tiene grados de preferencia. Cuando el decisor distingue entre preferencias "fuertes" y "débiles", se necesita introducir una estructura de preferencia más amplia, que permita grados intermedios entre la preferencia y la indiferencia. Para esto, representamos la relación de preferencia como un conjunto borroso, en donde el valor de la función de pertenencia $\mu(x, y)$ puede interpretarse de dos formas: la primera interpretación se entiende como intensidad de preferencia. Por ejemplo, $\mu(x, y) = 1$ significa que x es mucho más preferido a y, mientras que $\mu(x, y) = 0.6$, significa que x es ligeramente preferido a y. En la segunda interpretación $\mu(x, y)$ representa el grado al que la preferencia de x sobre y es verdadera. Por ejemplo, $\mu(x, y) = 1$ significa que no hay ninguna duda de que x es preferido a y, mientras que $\mu(x, y) = 0.6$ significa que la preferencia de x sobre y es dudosa (Nakamura 1990).

La noción de preferencia borrosa generaliza la noción booleana de orden parcial, y juega un papel importante en la toma de decisiones. En la literatura se han utilizado diferentes nociones de preferencia borrosa y se diferencian entre ellas por el tipo de transitividad que usan (Kundu 1995).

Las relaciones borrosas de preferencia estricta y de indiferencia (Orlovski 1978) se definen como :

1. Indiferencia borrosa. $R^c = R \cap R^{-1}$
2. Preferencia estricta borrosa. $R^s = R \setminus (R \cap R^{-1}) = R \setminus R^{-1}$

las funciones de pertenencia para ambas relaciones son:

$$\mu_{R^c}(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\}$$

$$\mu_{R^s}(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) & \text{si } \mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Existen otras formas de definir una relación de preferencia estricta borrosa:

i) (Ovchinnikov 1981)

$$\mu_{R^s}(x,y) = \begin{cases} \mu_R(x,y) & \text{si } \mu_R(x,y) > \mu_R(y,x) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

ii) (Ovchinnikov y Roubens 1991). Sea T una norma triangular que satisface la condición $a + b \leq 1 \Rightarrow T(a, b) = 0$, para todo a, $b \in [0,1]$ entonces

$$\mu_{R^s} = T(\mu_R(x, y), 1 - \mu_R(y, x)) = T(\mu_R(x, y), \mu_{R^d}(x, y)) .$$

Todas estas relaciones de preferencia son asimétricas y transitivas, dado que R es una relación de preferencia transitiva. También cumplen con la definición clásica: $aPb \Leftrightarrow aRb$ y bRa.

Una relación borrosa de sobreclasificación es una relación más fina que la relación de sobreclasificación determinística, ya que proporciona la *credibilidad* de la sobreclasificación de una acción sobre otra. Es decir, esta relación es un subconjunto borroso del conjunto AxA de pares de alternativas, que se caracteriza por una función de pertenencia d(AxA) llamada grado de credibilidad (Roy 1977) de la relación de sobreclasificación. Los valores más grandes del grado de credibilidad corresponden a situaciones de preferencia o de indiferencia, mientras que los valores más bajos implican incomparabilidad entre las acciones, por ejemplo : dado el conjunto borroso

$$\left\{ \frac{0.8}{(a,b)}, \frac{0.7}{(b,a)}, \frac{0.9}{(a,c)}, \frac{0.1}{(c,a)}, \frac{0.3}{(b,c)}, \frac{0.0}{(c,b)} \right\}$$

definido para aIb, aPc y bJc, es una relación de sobreclasificación borrosa.

3.4.1. Axiomas para las relaciones borrosas de preferencia.

Para definir las relaciones borrosas de preferencia, indiferencia y no comparabilidad (P, I, J) se proponen los siguientes axiomas (Fodor y Roubens 1994) :

- Independencia de la alternativa irrelevante.- Para cualesquiera dos alternativas a, b, los valores $\mathcal{P}(a, b)$, $\mathrm{I}(a, b)$ y $\mathrm{J}(a, b)$ dependen sólo de los valores de $R(a, b)$ y $R(b, a)$.

De acuerdo con este axioma, existen 3 funciones p, i, j $:[0,1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que :

$$\mathcal{P}(a, b)= p(R(a, b), R(b, a)),$$
$$\mathrm{I}(a, b)= i(R(a, b), R(b, a)),$$
$$\mathrm{J}(a, b)= j(R(a, b), R(b, a)).$$

- Principio de asociación positiva.- Las funciones $p(x, \mathrm{n}(y))$, $i(x, y)$, $j(\mathrm{n}(x),\mathrm{n}(y))$ son no decrecientes respecto a ambos argumentos.
- Simetria.- $i(x, y)$ y $j(x, y)$ son funciones simétricas.

Estos axiomas permiten definir adecuadamente a la estructura $\{\mathcal{P},\mathrm{J},\mathrm{I}\}$ de tal forma que se preserve la relación clásica $R=\mathcal{P}\cup\mathrm{I}$.

Podria pensarse que los axiomas anteriormente enunciados no son necesarios del todo, ya que lo que se requiere es usar t-normas en (1), (2) y (3). Desafortunadamente el resultado no es tan evidente.

Sea (T, S, n) una triada de De Morgan continua y n una negación estricta. De acuerdo con (1), (2) y (3), tenemos que :

$$\mathcal{P}(a, b)= T(R(a, b), n(R(b, a))), \quad (11)$$
$$\mathrm{I}(a, b)= T(R(a, b), T(b, a)) \quad (12)$$
$$\mathrm{J}(a, b)= T(n(R(a, b)), n(R(b, a))) \quad (13)$$

PROPOSICION. (Fodor y Roubens 1994)
No existe una triada de De Morgan tal que $\mathcal{P}\cup\mathrm{I}=R$ se cumpla si se definen $\mathcal{P}$ e I como :

$$\mathcal{P}(a, b)= T(R(a, b), N(R(b, a))),$$
$$\mathrm{I}(a, b)= T(R(a, b), T(b, a)) \quad .$$

4. LOS MÉTODOS PROMETHEE.

Los métodos PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations) forman parte de los llamados métodos de sobreclasificación, que constan principalmente de dos fases:

a) La construcción de una relación de sobreclasificación y
b) La explotación de esta relación para asistir al decisor (Brans y Vincke 1985).

Este método se basa principalmente en extensiones de la noción de criterio, que el decisor puede construir fácilmente. Se utilizan generalmente para resolver problemas de ordenamiento (o tipo γ). Los métodos PROMETHEE incluyen los siguientes pasos:

Paso 1. Enriquecimiento de la estructura de preferencia .- Este es el paso más importante, ya que se introduce la noción de criterio generalizado para tomar en cuenta las amplitudes de las desviaciones entre las evaluaciones.
Paso 2. Enriquecimiento de la relación de dominancia.- Se construye una relación valuada de sobreclasificación, que toma en cuenta todos los criterios. Para cada par de alternativas, se obtiene el grado de preferencia de una alternativa sobre otra.
Paso 3. Explotación para la ayuda a la decisión.- El enfoque PROMETHEE ofrece principalmente cuatro posibilidades para resolver un problema de decisión. PROMETHEE I da un orden parcial que considera todas la posibles incomparabilidades entre las alternativas ; PROMETHEE II da un orden completo ; las versiones III y IV de los métodos PROMETHEE son extensiones de los anteriores(I y II respectivamente); PROMETHEE V es útil para resolver problemas de selección de alternativas dado un conjunto de restricciones y da un ordenamiento como el de PROMETHEE II; por otro lado, PROMETHEE VI da al decisor alguna información adicional acerca del problema multicriterio al que se enfrenta (Brans y Mareschal 1994a, 1994b, 1997).

4.1 Extensión de la noción de criterio.

La noción clásica de criterio implica una "estructura de preferencia {I, P}" sobre A. Sea f un criterio, entonces:

$$aPb \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$
$$aIb \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

donde P e I denotan preferencia e indiferencia respectivamente. Esta manera de modelar las preferencias del decisor, no distingue desviaciones pequeñas entre $f(a)$ y $f(b)$, además de que la indiferencia, debe ser transitiva; en general, estos supuestos no son muy realistas. Por ejemplo, el famoso caso de las tazas de café, donde una tiene un grano de azúcar mas que la otra, una tercera taza tiene un grano más de azúcar que la

4. LOS MÉTODOS PROMETHEE.

Los métodos PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations) forman parte de los llamados métodos de sobreclasificación, que constan principalmente de dos fases:
a) La construcción de una relación de sobreclasificación y
b) La explotación de esta relación para asistir al decisor (Brans y Vincke 1985).

Este método se basa principalmente en extensiones de la noción de criterio, que el decisor puede construir fácilmente. Se utilizan generalmente para resolver problemas de ordenamiento (o tipo γ). Los métodos PROMETHEE incluyen los siguientes pasos:

Paso 1. Enriquecimiento de la estructura de preferencia .- Este es el paso más importante, ya que se introduce la noción de criterio generalizado para tomar en cuenta las amplitudes de las desviaciones entre las evaluaciones.
Paso 2. Enriquecimiento de la relación de dominancia.- Se construye una relación valuada de sobreclasificación, que toma en cuenta todos los criterios. Para cada par de alternativas, se obtiene el grado de preferencia de una alternativa sobre otra.
Paso 3. Explotación para la ayuda a la decisión.- El enfoque PROMETHEE ofrece principalmente cuatro posibilidades para resolver un problema de decisión. PROMETHEE I da un orden parcial que considera todas la posibles incomparabilidades entre las alternativas ; PROMETHEE II da un orden completo ; las versiones III y IV de los métodos PROMETHEE son extensiones de los anteriores(I y II respectivamente); PROMETHEE V es útil para resolver problemas de selección de alternativas dado un conjunto de restricciones y da un ordenamiento como el de PROMETHEE II; por otro lado, PROMETHEE VI da al decisor alguna información adicional acerca del problema multicriterio al que se enfrenta (Brans y Mareschal 1994a, 1994b, 1997).

4.1 Extensión de la noción de criterio.

La noción clásica de criterio implica una "estructura de preferencia {I, P}" sobre A. Sea f un criterio, entonces:

$$aPb \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$
$$aIb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

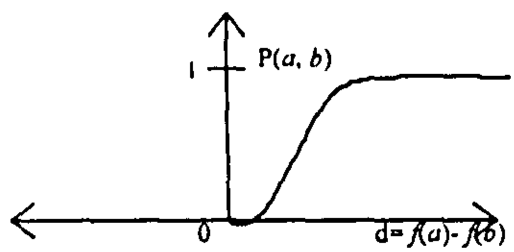
donde P e I denotan preferencia e indiferencia respectivamente. Esta manera de modelar las preferencias del decisor, no distingue desviaciones pequeñas entre $f(a)$ y $f(b)$, además de que la indiferencia, debe ser transitiva; en general, estos supuestos no son muy realistas. Por ejemplo, el famoso caso de las tazas de café, donde una tiene un grano de azúcar mas que la otra, una tercera taza tiene un grano más de azúcar que la segunda y asi para k tazas, como la indiferencia se considera transitiva, el decisor seria indiferente entre una taza de café con un grano de azúcar y una con k granos, al ser k lo suficientemente grande, esta suposición se torna estricta y absurda.

Para tomar en cuenta estas desviaciones y las escalas de los criterios, se asocia a cada criterio un criterio generalizado, para esto, se define la función de preferencia P: $A \times A \rightarrow [0,1]$, donde $P(a, b)$ da el grado de preferencia de la alternativa a sobre la alternativa b para el criterio $f(.)$ (Brans y Mareschal 1994a). En muchos de los casos se puede suponer que $P(a, b)$ está en función de la desviación $d= f(a) - f(b)$, $0 \leq P(a, b) \leq 1$, es decir

$$P(a, b) = P(d[a, b]) \quad a, b \in A$$

$P(a, b) \approx 0$[7] si $d \leq 0$, indica que no hay preferencia ni indiferencia,
$P(a, b) \approx 1$ si $d >> 0$, indica preferencia fuerte,
$P(a, b) = 1$ si $d >> 0$, indica preferencia estricta.

P tiene que ser una función no decreciente de d, con la siguiente forma:



Entonces se define el criterio generalizado asociado a $f(.)$ como el par $(f(.), P(.))$.

Los métodos PROMETHEE requieren que se asocie un criterio generalizado a cada criterio f_j, $j=1, \ldots, k$. Se proponen 6 tipos de criterios generalizados que cubren la mayoría de los casos que ocurren en las aplicaciones prácticas. Para cada criterio, sólo se tienen que identificar pocos parámetros (máximo 2).

Sea $x= f(a) - f(b)$ y $H(x)$ una función tal que :

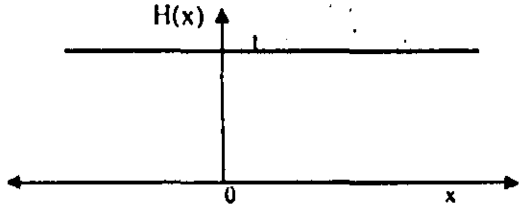
$$H(x) = \begin{cases} P(a,b) & x \geq 0 \\ P(b,a) & x \leq 0 \end{cases}$$

- Criterio tipo I (criterio usual).- Sea $p(x)$

[7] $\approx$ se lee "se aproxima a"

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases}$$

a y b son indiferentes sólo cuando $f(a) = f(b)$, cuando no se cumple esta igualdad, se dice que el decisor tiene una preferencia estricta por la acción que tiene el valor más grande, su función de preferencia es igual a 1 y H(x) está dada por la siguiente figura:

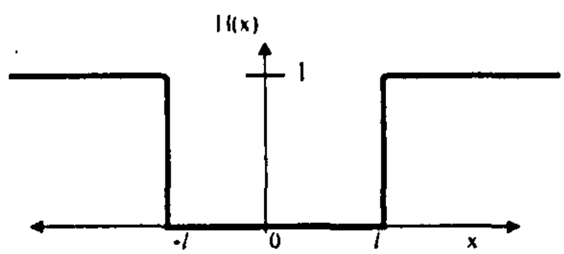


Para este tipo de criterio no es necesario definir ningún tipo de parámetro; de hecho, este tipo no incluye una extensión, sólo le da al decisor la oportunidad de usar el criterio en su sentido usual, cuando así se requiere.

- Criterio tipo II (cuasicriterio).- Sea p(x)

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq l \\ 1 & x > l \end{cases}$$

a y b son indiferentes siempre que la diferencia entre $f(a)$ y $f(b)$ no exceda a l; en caso contrario, la preferencia se vuelve estricta. Este tipo de criterio enfatiza la noción de semiorden y sólo debe definirse el parámetro l. H(x) está dada por:

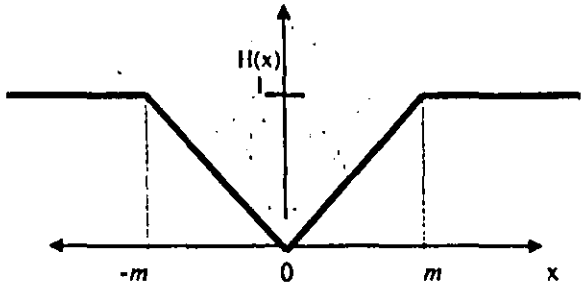


- Criterio tipo III (criterio con preferencia lineal).- Sea $p(x)$

$$p(x) = \begin{cases} x/m & x \leq m \\ 1 & x \geq m \end{cases}$$

Esta extensión, permite que la preferencia de a sobre b sea progresiva, para desviaciones progresivamente grandes entre $f(a)$ y $f(b)$. La intensidad de preferencia crece linealmente hasta que la desviación es igual a m, después de este valor la preferencia es estricta. Para este criterio, sólo debe definirse el valor de m, partir del cual se considera la preferencia estricta.

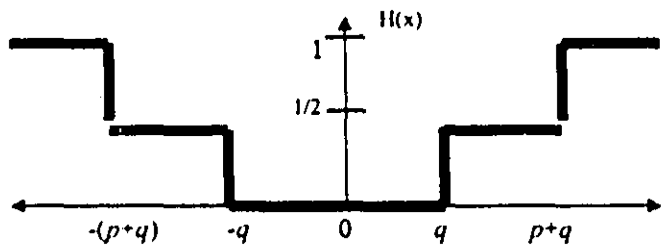
En este caso H(x) está dado por la siguiente figura:



- Criterio tipo IV (criterio de nivel).- Sea $p(x)$

$$p(x)=\begin{cases}0 & x\leq q\\ 1/2 & q<x\leq q+p\\ 1 & x>q+p\end{cases}$$

En este caso, *a* y *b* se consideran indiferentes cuando la desviación entre $f(a)$ y $f(b)$ no excede a *q*; entre *q* y *q+p* la preferencia es débil, después de este valor la preferencia se vuelve estricta. Esta extensión puede compararse con el pseudo-criterio de Roy, aunque aquí se considera la preferencia débil como una intensidad y no como una indecisión entre la preferencia estricta y la indiferencia. Los parámetros que debe fijar el decisor son *p* y *q*. H(x) tiene la siguiente forma:

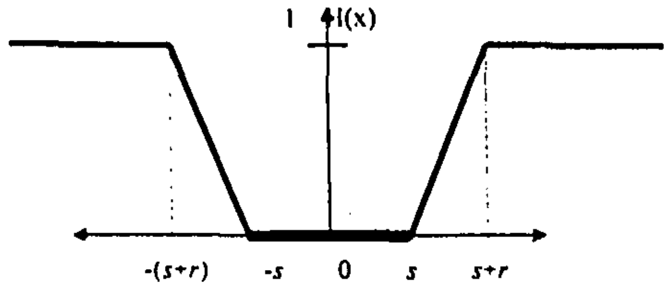


- Criterio tipo V (criterio con preferencia lineal y área de indiferencia).- Consideremos $p(x)$:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\leq s\\ {}^{(x-s)}/_{r} & s\leq x\leq s+r\\ 1, & x\geq s+r\end{cases}$$

Si la desviación entre $f(a)$ y $f(b)$ no excede a *s*, al decisor le son completamente indiferentes las alternativas *a* y *b*. Después de *s*, la preferencia aumenta progresivamente hasta llegar a *s+r*; sólo se tienen que definir 2 parámetros, *s* y *r*.

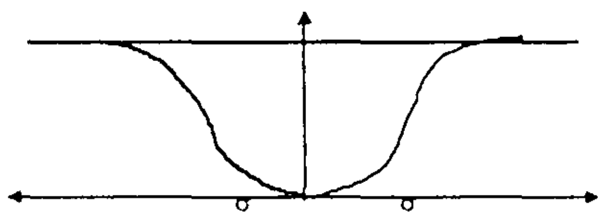
H(x) tiene la siguiente forma:



- Criterio tipo VI (criterio Gaussiano).- Sea $p(x)$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2\sigma^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Para este tipo de criterio, la preferencia del decisor continua creciendo con la desviación x. El valor de σ significa la distancia entre el origen y el punto de inflexión de la curva y se determina de acuerdo con la distribución normal de la estadística. H(x) tiene la siguiente forma:



4.2 Relación valuada de sobreclasificación

Supongamos que en un problema multicriterio se especifican, para cada criterio f_j, una función de preferencia P_j y un peso w_j. El índice de preferencia se define como:

$$\pi: A \times A \rightarrow [0,1]$$

$$\pi(a,b) = \frac{\sum_{j=1}^{k} w_j P_j(a,b)}{\sum_{j=1}^{k} w_j}$$

$\pi(a, b)$ representa la intensidad de preferencia del decisor de la alternativa a sobre la alternativa b, al considerar simultáneamente todos los criterios. Este índice define una relación valuada de sobreclasificación sobre A.

$\pi(a, b)$ cumple las siguientes propiedades:

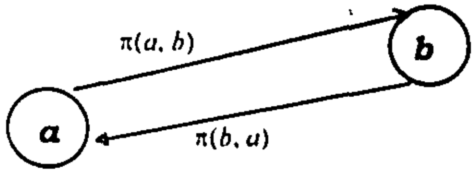
i) $\pi(a, a)=0$

ii) $0\leq \pi(a, b) \leq 1$, para todo a, $b \in$ A

$\pi(a, b) \approx 0$ indica preferencia débil de a sobre b

$\pi(a, b)\approx 1$ indica preferencia fuerte de a sobre b.

Para cada par de alternativas a, $b \in A$, se calculan los valores de $\pi(a,b)$ y $\pi(b, a)$, y se construye la relación valuada de sobreclasificación sobre A.



Gráfica de sobreclasificación

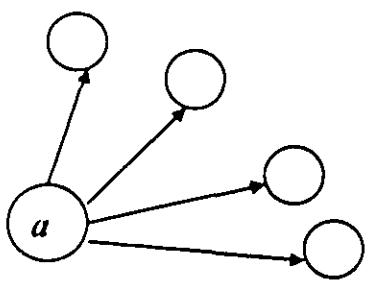
En la gráfica los nodos son las alternativas o acciones en A, los arcos toman el valor de $\pi(a, b)$.

4.3 Explotación para la ayuda a la decisión.- Cada alternativa se compara con las (n-1) alternativas restantes en A. El enfoque PROMETHEE define para cada $a \in A$:

- El flujo saliente (o flujo positivo de sobreclasificación) como:

$$\Phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \in A} \pi(a,b)$$

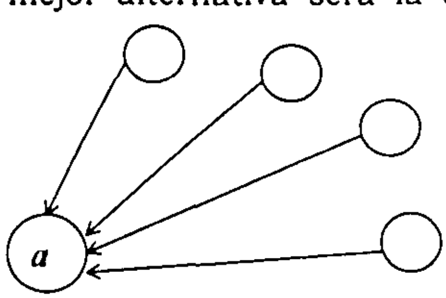
expresa qué tanto sobreclasifica una alternativa a las otras. $\phi^{+}(a)$ representa la potencia de a; la mejor alternativa es la que tiene el valor más grande de ϕ^{+}. Gráficamente tendría la siguiente forma



- El flujo entrante (o flujo negativo de sobreclasificación) como :

$$\Phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \in A} \pi(b,a)$$

expresa qué tanto está sobreclasificada una alternativa por las demás. $\phi^{-}(a)$ representa la debilidad de a. La mejor alternativa será la que tenga el menor valor de ϕ^{-}. Gráficamente:



A partir de los flujos de sobreclasificación positivo y negativo, se deducen dos ordenamientos, denotados como (P^+, I^+) y (P^-, I^-) respectivamente:

- aP^Ib (a es preferido a b) si:

$$\phi+(a) > \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) < \phi-(b) \text{ ó}$$
$$\phi+(a) = \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) < \phi-(b) \text{ ó}$$
$$\phi+(a) > \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) = \phi-(b)$$

- aI^Ib (a y b son indiferentes) si y sólo si:

$$\phi+(a) = \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) = \phi-(b),$$

- aJ^Ib (a y b son incomparables) si:

$$\phi+(a) > \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) > \phi-(b) \text{ ó}$$
$$\phi+(a) < \phi+(b) \text{ y } \phi-(a) < \phi-(b).$$

Esta es la estructura de orden parcial que da PROMETHEE I. Los resultados de la comparación por pares son las siguientes:

1. aPb: La potencia más alta de a está asociada a la debilidad más baja de a. La información dada por ambos flujos de sobreclasificación es consistente y puede considerarse confiable.
2. aIb: ambos flujos son iguales.
3. aJb: La potencia más alta de una alternativa está asociada a la debilidad más baja de otra. Esto sucede cuando la alternativa a es mejor sobre un conjunto de criterios en los que b es débil, y recíprocamente, b es buena sobre otro conjunto de criterios en los que a es débil. Como la información correspondiente a los flujos no es consistente, el método no puede decidir cuál es la mejor alternativa, en tal caso, la responsabilidad de decidir cae sobre el decisor.

Si el decisor requiere un orden completo de las alternativas, se puede considerar el flujo neto de sobreclasificación, definido como:

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

que es el balance entre los flujos positivo y negativo. La mejor alternativa será la que tenga el flujo neto mayor. Entonces se define el orden completo que da PROMETHEE II:

$$aP^{II}b \Leftrightarrow \phi(a) > \phi(b)$$
$$aI^{II}b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$$

así, todas las alternativas son comparables. Cabe mencionar que aunque no queda ninguna incomparabilidad, la información resultante es muy discutible, ya que se ha perdido parte importante de la información al considerar la diferencia entre los flujos positivo y negativo.

PROMETHEE V: Optimización con restricciones.

El PROMETHEE V es una extensión del PROMETHEE II, que trata con problemas de selección de alternativas dado un conjunto de restricciones. Este método es particularmente útil cuando el conjunto de alternativas está segmentado en bloques y deben cumplirse varias restricciones dentro de los bloques de alternativas y entre ellos.

Consideremos un problema multicriterio y supongamos que el decisor tiene que seleccionar un subconjunto de p alternativas ($0 \leq p \leq n$) sujeto a varias restricciones. Entonces se asocian las siguientes variables booleanas:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ es seleccionada} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

El procedimiento de PROMETHEE V incluye los siguientes pasos:

1. Primero se considera el problema multicriterio sin restricciones . Se calcula el flujo neto ϕ y se da el ordenamiento de PROMETHEE II.
2. Se construye un programa lineal 0-1 para tomar en cuenta las restricciones adicionales:

$$Max \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ri} x_i \approx \beta_r, \quad r = 1,\ldots,m,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n$$

donde $\approx$ se cumple para $\geq$, $\leq$, ó $=$.

Los coeficientes de la función objetivo son los valores del flujo neto de sobreclasificación. Lo que se pretende es recolectar tantos flujos de sobreclasificación como sea posible dentro del subconjunto de alternativas seleccionado. Las restricciones que deben satisfacer las alternativas seleccionadas pueden referirse a restricciones de mercado, inversión, ganancias, cardinalidad, etc.

El programa 0-1 puede resolverse utilizando los métodos clásicos, como por ejemplo ramificación y acotamiento.

4.3.1. El plano GAIA.

Los métodos PROMETHEE se apoyan en una herramienta denominada plano GAIA (Geometrical Analysis for Interactive Aid), que consiste de un módulo interactivo visual que los complementa. El plano GAIA proporciona información gráfica acerca del carácter conflictivo de los criterios y acerca del impacto de los pesos sobre la decisión final. Los

PROMETHEE I Y II son métodos prescriptivos, mientras que GAIA los complementa de una manera gráfica y mucho más descriptiva .

El análisis GAIA se basa en el análisis de lo flujos netos para cada criterio, que se obtienen por medio de la descomposición del flujo neto global.

a. Descomposición del flujo neto global.

De acuerdo con las definiciones de los flujos de sobreclasificación positivo y negativo y el índice de preferencia tenemos que:

$$\phi(a) = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{b\in A}\left[P_j(a,b) - P_j(b,a)\right]w_j \qquad (14)$$

en consecuencia

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^{k}\phi_j(a)w_j \qquad (15)$$

si

$$\Phi_j(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\left[P_j(a,b) - P_j(b,a)\right] \qquad (16)$$

$\phi_j(a)$ es el flujo neto monocriterio que se obtuvo al considerar el criterio $f_j(.)$. Entonces, cada alternativa puede caracterizarse por sus k flujos netos monocriterio

$$\alpha(a):\left\{\phi_1(a),\phi_2(a),\dots,\phi_k(a)\right\}$$

que pueden representarse como un punto $\alpha(a)$ en un espacio k-dimensional $\mathbb{R}^k$.

b. El plano GAIA.

Consideremos la matriz $M_{n \times k}$ de los flujos netos monocriterio de todas las alternativas

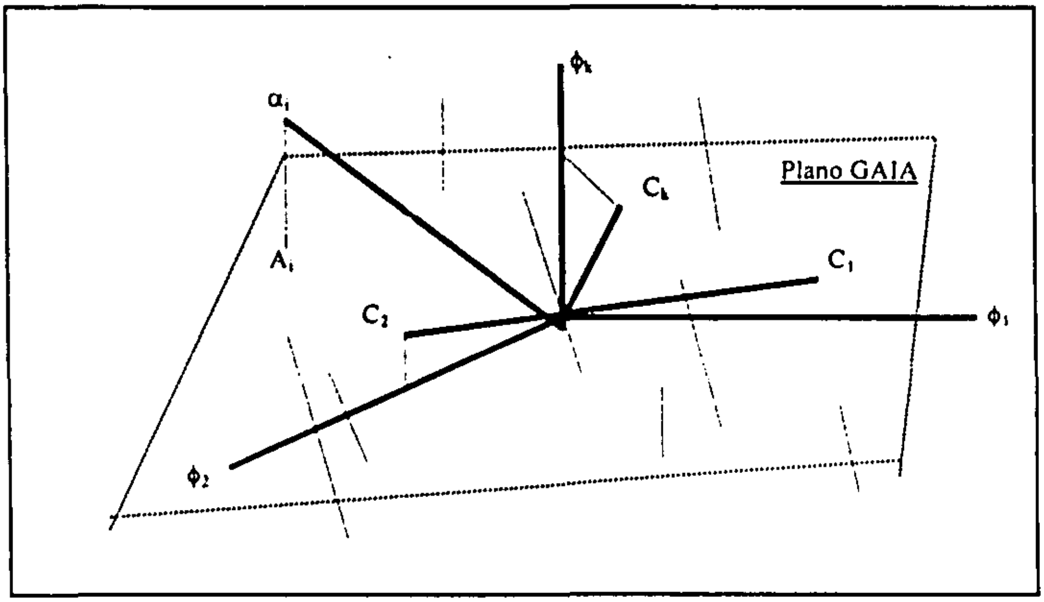
	$\phi_1(.)$	$\phi_2(.)$	...	$\phi_k(.)$
a_1	$\phi_1(a_1)$	$\phi_2(a_1)$	...	$\phi_k(a_1)$
a_2	$\phi_1(a_2)$	$\phi_2(a_2)$	...	...
...	...	...	...	...
a_n	$\phi_1(a_n)$	$\phi_2(a_n)$	...	$\phi_k(a_n)$

la información que contiene la matriz es muy útil, ya que toma en cuenta los grados de preferencia que considera PROMETHEE en el paso de criterio generalizado.

Por lo que el conjunto de n alternativas puede representarse por medio de n puntos en el espacio k-dimensional $\mathbb{R}^k$, que se obtienen a partir de :

$$\sum_{a \in A} \phi_j(a) = 0$$

Como el número de criterios casi siempre es mayor que 2, es casi imposible ver la posición relativa de los puntos de manera clara. Por tanto, se proyecta la información que se incluye en el espacio k-dimensional sobre un plano, donde los ejes coordenados representan a los criterios y los puntos representan a las alternativas.



De acuerdo con las técnicas del Análisis de Componentes Principales[8], el plano GAIA queda definido por medio de dos eigenvectores que corresponden a los eigenvalores más grandes de la matriz de covarianza M'M de los flujos netos monocriterio.

A la cantidad de información que preserva GAIA después de la proyección se le llama δ. Brans y Mareschal (1997) reportan que en todas las aplicaciones con las que han trabajado, δ ha sido mayor al 60% y en la mayoría de éstas mayor al 80%. Estos resultados hacen evidente que, en la práctica, el plano GAIA es confiable para dar información sobre la estructura de los problemas multicriterio. Aunque se debe ser cuidadoso con la pérdida de información.

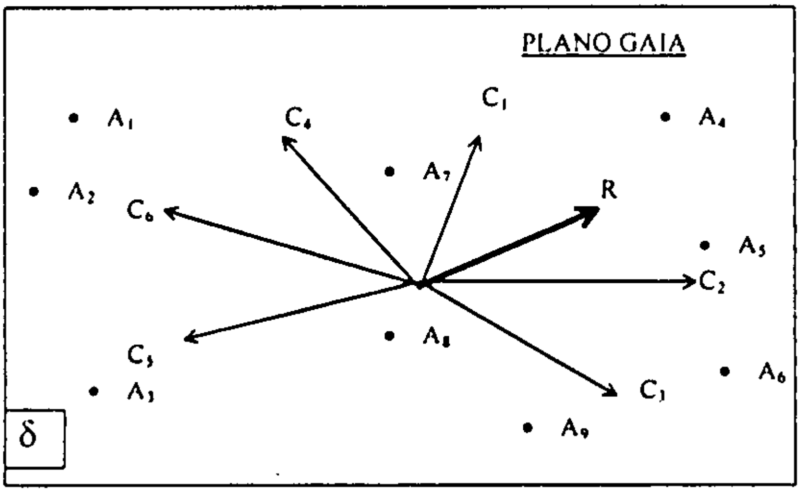
[8] Ver apéndice I

c. <u>Despliegue gráfico de las alternativas y criterios</u>.

Después de la proyección, se obtienen n puntos que representan a las alternativas en el plano GAIA. Sean A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n estos puntos. Además la proyección de los vectores unitarios de los ejes resulta en k vectores que representan a los criterios. Sean C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_k los ejes criterio. Entonces, se enuncian las siguientes propiedades:

1. El eje criterio más grande en el plano GAIA, es el que discrimina las acciones de manera mas fuerte.
2. Los criterios que expresan preferencias similares sobre el conjunto de alternativas, se representarán por ejes orientados en la misma dirección.
3. Los criterios que expresan preferencias conflictivas, se representarán por ejes orientados en direcciones opuestas.
4. Los criterios independientes se representarán por ejes ortogonales entre sí.
5. Las alternativas que sean "buenas" en un criterio particular, se representarán por puntos localizados en la dirección del eje de ese criterio.
6. Las alternativas similares se representarán por puntos localizados uno muy cerca de otro.

Por ejemplo, observemos la siguiente figura:



los criterios $f_2(.)$ y $f_3(.)$ expresan preferencias similares y están en conflicto con los criterios $f_4(.)$, $f_5(.)$ y $f_6(.)$, mientras que los criterios $f_1(.)$ y $f_3(.)$ son más bien independientes. Las alternativas a_1, a_2 y a_3 son mejores en los criterios $f_4(.)$, $f_5(.)$ y $f_6(.)$, mientras que a_4, a_5 y a_6 son mejores en $f_2(.)$ y $f_3(.)$; a_4 es mejor en $f_1(.)$ y $f_3(.)$ y a_9 es mejor en $f_3(.)$ pero malo en $f_1(.)$, a_7 y a_8 no son ni buenos ni malos en todos los criterios.

Aunque el plano GAIA incluye sólo un porcentaje de la información (δ), es una herramienta gráfica muy útil en el análisis de la estructura de los problemas multicriterio.

d. El eje de decisión π.

De acuerdo con (15), el flujo neto de una alternativa es el producto escalar entre el vector de los flujos netos monocriterio y del vector de pesos.

$$\begin{cases} a_i : (\phi_1(a_i), \phi_2(a_i), \ldots, \phi_k(a_i)) \\ w : (w_1, w_2, \ldots, w_k) \end{cases}$$

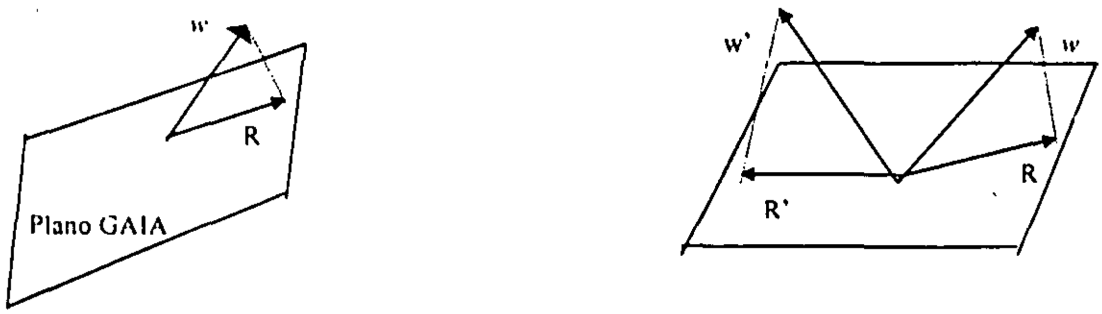
Esto significa que el flujo neto de a_i, también es la proyección de α_i sobre w en el espacio k-dimensional y las proyecciones de todos los α_i's, (i=1, 2, ..., n) sobre w proporcionan el ordenamiento de PROMETHEE II. Obviamente w es un eje de decisión que puede representarse en el plano GAIA por la proyección del vector unitario a lo largo de w, π es esta proyección y se llama eje de decisión PROMETHEE.

Si π es largo , el eje de decisión tiene fuerte poder de decisión y se invita al decisor a seleccionar alternativas localizadas tan alejadas como sea posible, en esa dirección.

Si π es corto , el eje de decisión PROMETHEE no tiene fuerte poder de decisión. En este caso, el vector w es casi ortogonal al plano GAIA. Esto significa que de acuerdo a los pesos, los criterios son muy conflictivos y debe seleccionarse alguna solución muy cercana al origen.

Para pesos modificados, las posiciones de los criterios y las alternativas permanecen sin cambio. El vector de pesos w parece una proyección del eje de decisión, que el decisor puede mover de acuerdo a sus preferencias en favor de un criterio en particular. Cuando se modifican los pesos, tanto la proyección, como el eje de decisión PROMETHEE se mueven, de tal forma que el decisor puede ver claramente en el plano GAIA las consecuencias de la decisión.

La proyección del el eje de decisión (w) y el eje de decisión PROMETHEE (π) y el plano GAIA, son un herramienta sumamente útil para el análisis de sensibilidad. Después de finalizar la decisión, se recomienda al decisor simular diferentes distribuciones de pesos. La situación puede apreciarse fácilmente el plano GAIA. Para cada distribución de pesos, las alternativas recomendadas se localizan en la dirección del eje de decisión PROMETHEE.



Esta figura muestra la proyección del eje de decisión w y el movimiento de los ejes que permiten utilizar el plano GAIA como herramienta para el análisis de sensibilidad.

PROMETHEE VI.

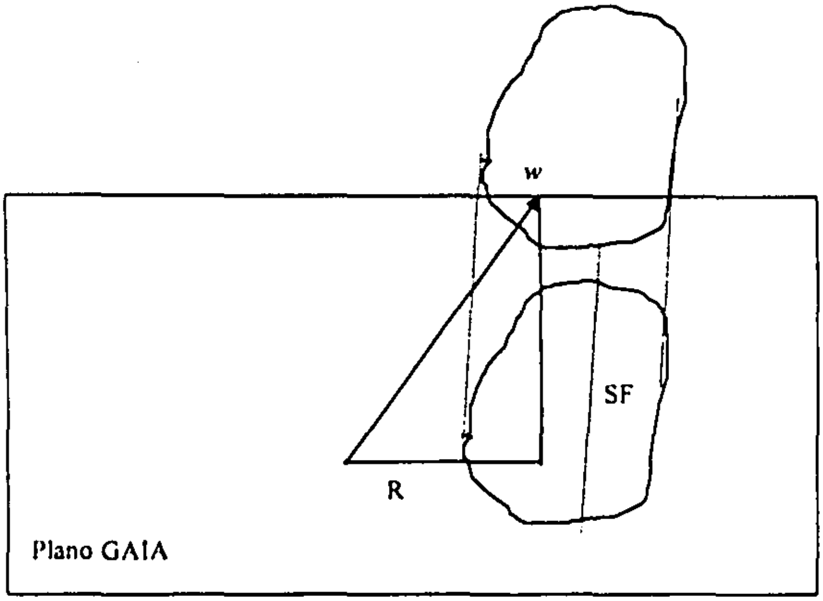
PROMETHEE VI es una herramienta que ofrece al decisor alguna información sobre su propia concepción del problema multicriterio. Le permite analizar , de acuerdo con sus preferencias, si el problema al que se enfrenta es un problema difícil o fácil de resolver.

Es indudable que los pesos juegan un papel crucial en un problema multicriterio. En muchos casos, el decisor está indeciso o inseguro de dar valores precisos a los pesos . Su inseguridad puede deberse a varios factores: indeterminación, incertidumbre, falta de control sobre la situación real, etc. Sin embargo, el decisor puede tener en mente un orden de magnitud para los pesos, de tal forma que, a pesar de sus dudas, puede dar algunos intervalos que incluyan los valores correctos para los pesos. Sean

$$w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad j=1, 2, \ldots, k \quad (17)$$

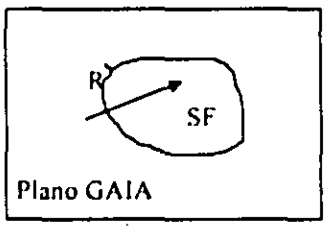
estos intervalos, donde w_j^- y w_j^+ son los límites inferior y superior respectivamente del peso del criterio $f_j(.)$.

Consideremos el conjunto de todos los puntos extremos de los vectores unitarios asociados a todos los vectores de pesos permitidos de acuerdo con (17). Este conjunto limita una región en el espacio k-dimensional, a la proyección de esta región sobre el plano GAIA ; Brans y Mareschal (1997) le llaman "Espacio de libertad" (Space of freedom, SF).

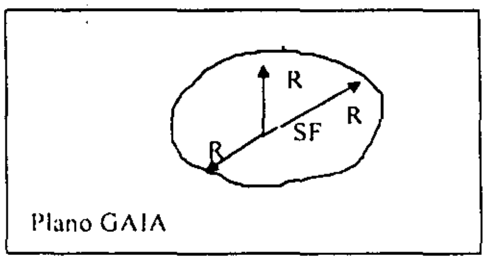


Pueden ocurrir dos situaciones:

1. El espacio de libertad no incluye al origen del plano GAIA. En este caso, cuando los pesos se modifican dentro de los intervalos el eje de decisión PROMETHEE π, permanece orientado en la misma dirección y todas las alternativas localizadas en la misma dirección son buenas para todos los pesos permitidos. Entonces el problema multicriterio es fácil de resolver.



2. Por el contrario, si el espacio de libertad incluye el origen, el eje de decisión PROMETHEE puede tomar cualquier orientación dependiendo del valor de los pesos. En este caso, las soluciones pueden obtenerse en todas las direcciones del plano GAIA para los pesos permitidos. Entonces, se vuelve más difícil tomar la decisión final, así el decisor se enfrenta a un problema multicriterio difícil de resolver de acuerdo con sus preferencias e indecisiones.



El grado de dificultad de un problema multicriterio puede apreciarse visualmente evaluando la posición del espacio de libertad con respecto al origen en el plano GAIA. Este procedimiento se llama PROMETHEE VI.

La metodologia PROMETHEE-GAIA ha sido implementada en un software llamado PROMCALC [9] escrito en turbo pascal.

4.4 Características deseables en un método multicriterio.

El propósito de los métodos de sobreclasificación es enriquecer la relación de dominancia. En la literatura (Brans y Mareschal 1990, 1994) se han formulado algunos requisitos para establecer una relación de dominancia adecuada:

1. Deben considerarse las desviaciones entre las amplitudes de los valores de los criterios. A pesar de que se tiene esta información; no se utiliza eficientemente.
2. Deben eliminarse completamente todos los efectos de la escala.
3. En el caso de comparaciones por pares de alternativas, no deben excluirse las imcomparabilidades.
4. Un problema multicriterio no es un problema bien definido matemáticamente. Usualmente, no hay una solución que optimice al mismo tiempo todos los criterios. Por tanto, un método adecuado debe ser "simple", en otras palabras entendible para el decisor y no únicamente cumplir el papel de una caja negra que proporciona la solución, sin que el decisor entienda cómo se obtuvo.
5. Un método adecuado no debe incluir parámetros que no tengan un significado claro para el decisor, de otra manera los parámetros dan de nuevo el efecto de la caja negra.
6. Es importante para el decisor tener la oportunidad de apreciar los criterios que expresan preferencias iguales, opuestas o independientes. Por lo que un método adecuado debe permitir el análisis de los criterios en conflicto.

En el siguiente capítulo se utilizará el enfoque PROMETHEE en la solución de un problema de decisión y se verificará si cumple con estos requisitos .

[9] PROMethee CALCulation

5. APLICACIÓN PRÁCTICA

5.1 Un problema de selección de personal

La selección de personal es un proceso complejo que implica equiparar las cualidades y conocimientos de los solicitantes. Para las empresas públicas o privadas ha sido un asunto de suma importancia asegurar que se contrate a la gente mejor preparada y que se ubique según sus aptitudes y conocimientos.

En la selección de personal se consideran muchos atributos individuales como: habilidad en la organización, personalidad, creatividad, estabilidad emocional, liderazgo, aptitudes generales. etc. Estos atributos pueden ser clasificados en dos categorías:
a) Atributos subjetivos.- Tienen definiciones cualitativas como personalidad, liderazgo, experiencia, etc.
b) Atributos objetivos.- Pueden evaluarse cuantitativamente, por ejemplo, conocimiento relacionado con el trabajo, habilidad analitica, aptitudes generales, etc. (Liang y Wang 1994).

Los individuos responsables de tomar la decisión sobre la selección, deben poseer información adecuada y confiable para fundamentarla. Para la selección de personal se han realizado varios acercamientos enfocados al diseño y evaluación de exámenes de selección, esto puede ser de gran ventaja siempre que los requisitos del empleo puedan cuantificarse. Otra manera de seleccionar personal es por medio de una entrevista. En este proceso, los juicios de los decisores o entrevistadores son subjetivos y las escalas de calificación tienen efectos en la validez de los resultados.

En este capítulo aplicamos el enfoque PROMETHEE a un problema de selección de personal. El método define un índice borroso de preferencia que representa la intensidad de la preferencia de una alternativa sobre otra.

5.1.2. Descripción del problema.

Tornos Automáticos FERSA necesita contratar a un Ingeniero Industrial. Después de una preselección, quedan cuatro candidatos A_1, A_2, A_3 y A_4 para una evaluación adicional y posteriormente seleccionar al mejor candidato. Se requiere que los candidatos cumplan con ciertos requisitos : que tengan conocimientos de procesos de producción en serie (tornos automáticos), ISO900 y QS9000 ; manejo de MS ACCESS y MS OFFICE e inglés, estos cuatro requisitos se evalúan por medio de exámenes de conocimientos, además de un examen psicométrico y una entrevista donde se evalúa su facilidad de palabra, don de mando y su experiencia en el ramo. Como requisito adicional, se les pide que elaboren una propuesta de un manual de normas y procedimientos para el control de calidad. A los criterios de selección les llamamos : C_1 Procesos, C_2 Calidad, C_3 Computación, C_4 Inglés, C_5 Personalidad, C_6 Experiencia, C_7 Facilidad de palabra, C_8 Don de mando, C_9 Capacidad en la solución de problemas, C_{10} Manual.

Las escalas de calificaciones van del 0 al 100, aunque la calificación mínima para la preselección es 70.

Utilizaremos los métodos PROMETHEE I y II, para obtener un orden parcial y un orden total respectivamente, y analizar la diferencia entre las elecciones.

La siguiente tabla muestra las evaluaciones de los candidatos bajo los distintos criterios y los tipos de criterios con sus respectivos parámetros, que consideran las desviaciones entre las evaluaciones y nos permiten definir la función de preferencia para cada criterio :

criterios	**peso**		**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**tipo**	**parámetros**
C_1	1	*max*	100	90	90	80	II	l=10
C_2	1	*max*	80	85	70	75	II	l=10
C_3	0.6	*max*	95	75	80	90	I	
C_4	0.2	*max*	75	75	75	75	I	
C_5	0.5	*max*	95	80	85	90	VI	σ=5
C_6	0.6	*max*	90	90	95	100	I	
C_7	0.7	*max*	80	85	90	90	I	
C_8	0.7	*max*	80	85	90	80	I	
C_9	0.8	*max*	75	80	90	80	I	
C_{10}	0.8	*max*	75	100	80	85	I	

Los pesos para cada criterio fueron asignados por el decisor, mediante una entrevista se determinaron los tipos de criterios así como los valores de los parámetros. Los pesos son positivos y el peso más grande representa al criterio más importante, aunque debemos considerar pesos normalizados tal que :

$$\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$

los pesos normalizados son los siguientes :

C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**	**C_8**	**C_9**	**C_{10}**
1/6.9	1/6.9	.6/6.9	.2/6.9	.5/6.9	.6/6.9	.7/6.9	.7/6.9	.8/6.9	.8/6.9

El paso siguiente es calcular los índices de preferencia de acuerdo con la siguiente ecuación :

$$\pi(a,b)=\frac{\sum_{j=1}^{k} w_j P_j(a,b)}{\sum_{j=1}^{k} w_j}$$

$P_j(a, b)$ se obtiene a partir del paso de extensión de criterio, es decir , P_j se obtiene de la desviación $d= f(a)-f(b)$ y $P(a, b)$ da el grado de preferencia de la alternativa *a* sobre la alternativa *b* .

La tabla de índices de preferencia es la siguiente :

Alternativas	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**
A1	0.00	0.16	0.15	0.26
A2	0.43	0.00	0.26	0.22
A3	0.52	0.52	0.00	0.22
A4	0.42	0.34	0.32	0.00

Se explica detalladamente el cálculo de los π_{ij} : se toma el elemento 1,2 de la matriz anterior, $\pi_{1,2}=0.16$ es el resultado de la comparación de la alternativa 1 con la alternativa 2 sobre todos los criterios. En el criterio C_1, $x= d= f(a)- f(b) =10$, además C_1 es un cuasicriterio, por lo que $p(x)= 0$ para $x\leq 10$; para C_2 ocurre lo mismo, ya que C_2 también es un cuasicriterio, $d=10$ y $p(x)= 0$; C_3 es un criterio usual, $d=20$ y $p(x)= 1$, resumimos la información obtenida al comparar la alternativa 1 contra la alternativa 2 sobre todos los criterios en la siguiente tabla :

$\pi_{1,2}$

Criterio	**Tipo**	**parámetro**	***d(a, b)***	***w_j***	***p(a, b)***
C_1	cuasicriterio	$l=10$	10	1	0
C_2	cuasicriterio	$l=10$	10	1	0
C_3	usual		2	0.6	1
C_4	usual		0	0.2	0
C_5	Gaussiano	$\sigma=5$	15	0.5	0.989
C_6	usual		0	0.6	0
C_7	usual		-5	0.7	0
C_8	usual		-5	0.7	0
C_9	usual		-5	0.8	0
C_{10}	usual		-30	0.8	0
			$\sum_{j=1} w_j =$	6.9	

Ahora, de acuerdo con la fórmula :

$$\pi_{1,2}=\frac{(0.6)(1)+(0.5)(0.989)}{6.9}=\frac{1.0945}{6.9}=0.159\approx 0.16$$

de la misma manera se obtienen los demás indices de preferencia, al efectuar la comparación por pares de alternativas.

Una vez calculados los índices de preferencia, se procede a calcular los flujos de sobreclasificación para cada alternativa, por medio de las ecuaciones

$$\Phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \in A}\pi(a,b)$$

$$\Phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b \in A}\pi(b,a)$$

Por ejemplo, para A_1,

$\phi^{+}(A_1) = (0.16 + 0.15 + 0.26)/3 = 0.57/3 = 0.19$ y

$\phi^{-}(A_1) = (0.43 + 0.52 + 0.42)/3 = 1.37/3 = 0.46$

la tabla de flujos de sobreclasificación es la siguiente :

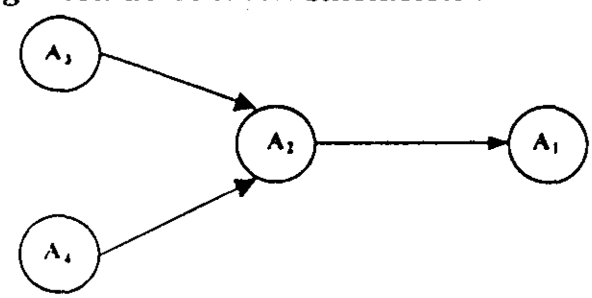
Acciones	**$\phi^{+}(a_i)$**	**$\phi^{-}(a_i)$**
A_1	0.19	0.46
A_2	0.30	0.33
A_3	0.42	0.24
A_4	0.35	0.23

y la mejor alternativa es aquella que tenga el menor ϕ^{-} y el mayor ϕ^{+}.

El ordenamiento de las alternativas se deduce a partir de los flujos de sobreclasificación. PROMETHEE I da un orden parcial de las alternativas. Entonces, de acuerdo con los ordenamientos (P^{+}, I^{+}) y (P^{-}, I^{-}) :

A_3PA_1, A_3PA_2, A_2PA_1, A_4PA_1, A_4PA_2

de esta manera, el orden parcial que da el método puede ilustrarse con la siguiente gráfica de sobreclasificiación :

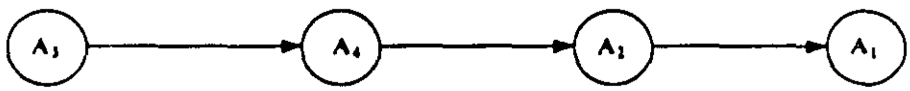


en este caso todas las alternativas A_3 y A_4 son incomparables y la relación obtenida es transitiva. De acuerdo con PROMETHEE I, la responsabilidad de elegir entre 3 y 4 la tiene el decisor, aunque tomando en cuenta que el flujo positivo de sobreclasificación más alto lo tiene la alternativa 3, además la diferencia entre el flujo negativo de sobreclasificación de las alternativas 3 y 4 es mínima, por lo que podemos decir que A_3 es la mejor alternativa.

Ahora consideremos a PROMETHEE II, que nos da un orden total. Para esto necesitamos calcular los flujos netos que resultan de la diferencia entre el flujo positivo y el flujo negativo ($\phi = \phi^+ - \phi^-$) :

Alternativa	$\phi = \phi^+(a) - \phi^-(a)$
A_1	-0.27
A_2	-0.03
A_3	0.18
A_4	0.12

sólo A_3 y A_4 tienen flujos netos positivos, lo que quiere decir que son más dominantes que dominados ; la mejor alternativa será la que tenga el flujo neto mayor. Así, el orden total se puede representar con la siguiente figura :



Como podemos observar, comparando los resultados obtenidos con PROMETHEE I y PROMETHEE II, existe una pequeña diferencia entre las gráficas de sobreclasificación, ya que en la primera hay alternativas incomparables y en la segunda, aunque parece proporcionar una solución óptima, hubo pérdida de información al obtener el orden total. Cabe mencionar que podemos despreciar la supuesta incomparabilidad, dado que no es significativa. Con estos resultados, podemos dar una prescripción al decisor y la persona idónea para ocupar el puesto es el aspirante número 3.

Obviamente los ordenamientos obtenidos con PROMETHEE I Y II están influenciados por los pesos asignados a los criterios. PROMCALC incluye una herramienta que permite modificar los pesos y observar como cambia el orden de las alternativas que nos proporciona PROMETHEE II, esta herramienta se llama "The walking weights". La siguiente figura muestra la distribución de los pesos original para cada criterio. Si el decisor no tiene en mente pesos predeterminados para cada criterio, esta herramienta sirve como un análisis de sensibilidad para verificar la estabilidad de la recomendación dada al decisor.

Ahora consideremos a PROMETHEE II, que nos da un orden total. Para esto necesitamos calcular los flujos netos que resultan de la diferencia entre el flujo positivo y el flujo negativo ($\phi = \phi^{+} - \phi^{-}$) :

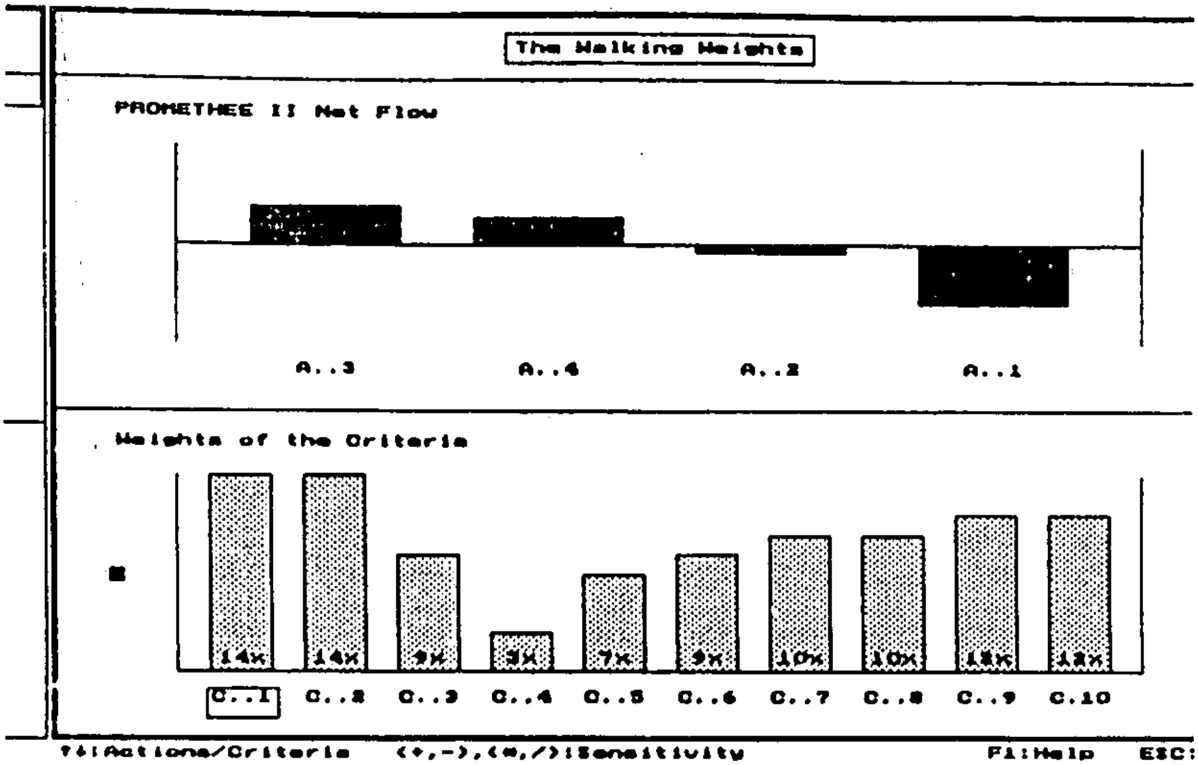
Alternativa	$\phi = \phi^{+}(a) - \phi^{-}(a)$
A_1	-0.27
A_2	-0.03
A_3	0.18
A_4	0.12

sólo A_3 y A_4 tienen flujos netos positivos, lo que quiere decir que son más dominantes que dominados ; la mejor alternativa será la que tenga el flujo neto mayor. Así, el orden total se puede representar con la siguiente figura :

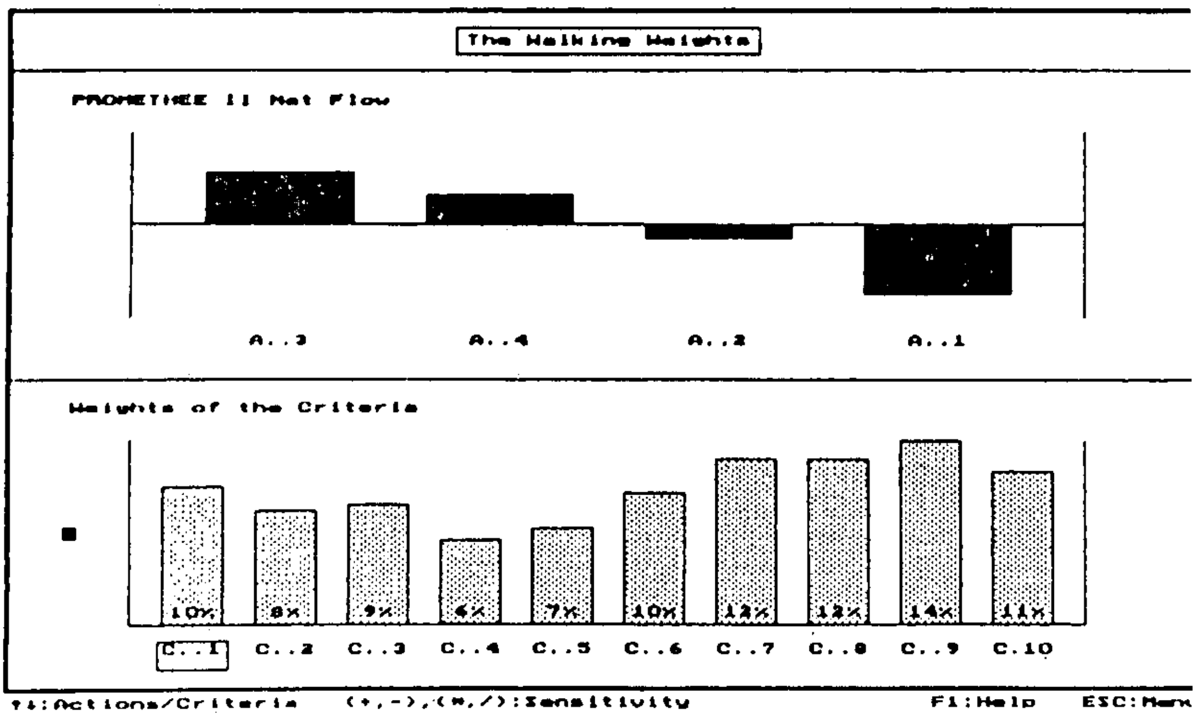
$$A_3 \longrightarrow A_4 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1$$

Como podemos observar, comparando los resultados obtenidos con PROMETHEE I y PROMETHEE II, existe una pequeña diferencia entre las gráficas de sobreclasificación, ya que en la primera hay alternativas incomparables y en la segunda, aunque parece proporcionar una solución óptima, hubo pérdida de información al obtener el orden total. Cabe mencionar que podemos despreciar la supuesta incomparabilidad, dado que no es significativa. Con estos resultados, podemos dar una prescripción al decisor y la persona idónea para ocupar el puesto es el aspirante número 3.

Obviamente los ordenamientos obtenidos con PROMETHEE I Y II están influenciados por los pesos asignados a los criterios. PROMCALC incluye una herramienta que permite modificar los pesos y observar como cambia el orden de las alternativas que nos proporciona PROMETHEE II, esta herramienta se llama "The walking weights". La siguiente figura muestra la distribución de los pesos original para cada criterio. Si el decisor no tiene en mente pesos predeterminados para cada criterio, esta herramienta sirve como un análisis de sensibilidad para verificar la estabilidad de la recomendación dada al decisor.

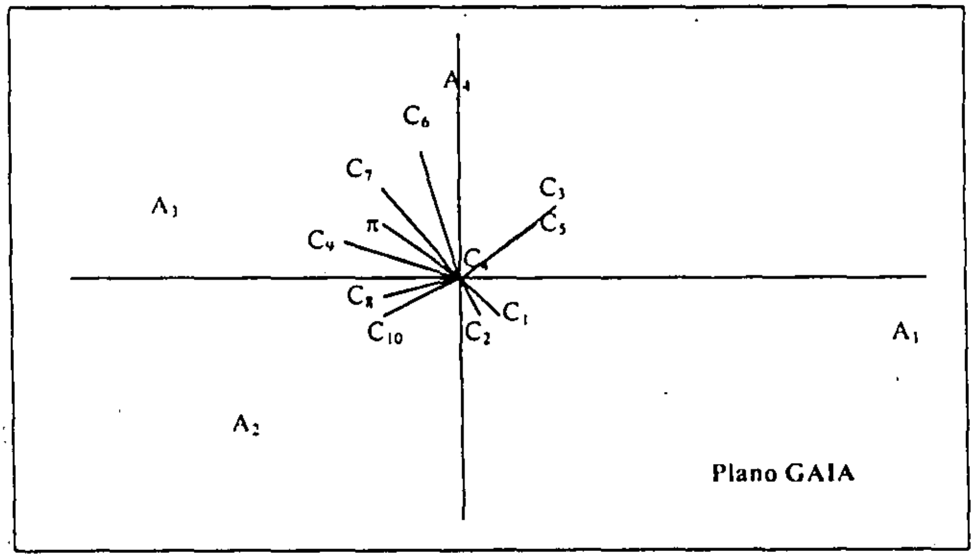


Observemos como se preserva el ordenamiento de PROMETHEE II al cambiar los pesos, es decir la alternativa 3 sigue dominando a las demás.



Este análisis de sensibilidad no fue requerido por el decisor, únicamente se hizo la prueba para verificar que la recomendación dada al decisor fuera estable.

La información relativa al problema de decisión incluye 10 criterios que pueden representarse en un espacio de10 dimensiones. El plano GAIA se obtiene proyectándola en un plano, de tal forma que haya la mínima pérdida de información. Las alternativas se representan por los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4, y los criterios por los ejes C_1 a C_{10}. El carácter conflictivo de los criterios puede apreciarse en la siguiente figura : los criterios que están orientados en la misma dirección indican preferencias similares y los criterios conflictivos están en direcciones opuestas.



Observamos que la mayoría de los criterios (C_6, C_7 y C_9) están orientados hacia A_3, que es la mejor alternativa, esto indica que el aspirante 3 es particularmente bueno en solucionar problemas, tiene experiencia suficiente y facilidad de palabra. El candidato 4 también es una buena opción, aunque el flujo total de esta alternativa es ligeramente menor al flujo total de la alternativa 3. El eje π muestra la dirección en la que se encuentra la mejor decisión de acuerdo con los pesos asignados a cada criterio. De esta manera, se exhorta al decisor a considerar las alternativas localizadas en esa dirección.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La introducción de relaciones de preferencia basadas en los conjuntos borrosos, que consideran el grado de preferencia y las intensidades de preferencia de una alternativa sobre otra, enriquecen la información que se obtiene a lo largo del proceso de decisión y amplían la estructura de preferencias, admitiendo la posibilidad de que existan incomparabilidades entre las alternativas. Aunado a esto, no necesariamente se debe cumplir el axioma de transitividad, lo que relaja de manera considerable los supuestos de racionalidad.

Los métodos clásicos, como los de la teoría de utilidad, sólo permiten la preferencia o la indiferencia entre alternativas y no incluyen grados intermedios entre una y otra. Esta manera de modelar es tan "axiomática" que ha dejado de ser realista. A pesar, de que los métodos de sobreclasificación han sido criticados por su falta de fundamentos axiomáticos, porque en general los modelos de preferencia que se usan no tienen propiedades notables tales como la transitividad o la completitud, la situación es diferente al hablar de PROMETHEE, puesto que las relaciones borrosas de sobreclasificación que se construyen cumplen con estas propiedades "estructurales", dado que se puede obtener un ordenamiento parcial de las alternativas o un ordenamiento total.

Se utilizaron los métodos PROMETHEE I y II para resolver un problema de selección de personal en una empresa de manufactura. Los métodos dan al decisor la oportunidad de apreciar los criterios que expresan preferencias iguales, opuestas o independientes. Por lo que son métodos que permiten el análisis de los criterios en conflicto y proporcionan "buenas soluciones". Los métodos PROMETHEE se apoyan en una herramienta interactiva de modelación visual denominada plano GAIA (Geometrical Analysis for Interactive Aid), que complementa a los métodos de una manera gráfica y mas bien descriptiva, por lo que es posible hacer un análisis de sensibilidad visual, que se basa en la modificación de los pesos y se recomienda hacerlo antes de finalizar el proceso de decisión.

PROMETHEE I generaliza al caso valuado o (borroso) la idea de declarar que a es preferido a b si a "vence" más alternativas que b y es "vencido" por menos alternativas. Aunque se debe enfatizar que al introducir los flujos de positivo y negativo de sobreclasificación, el método hace uso de las propiedades cardinales de las valuaciones de las alternativas, lo que se convierte en una desventaja cuando las comparaciones de las evaluaciones tienen un significado ordinal. En general el método requiere de evaluaciones numéricas. Cada escala cualitativa (por ejemplo, muy bueno, bueno, malo, muy malo, etc.) tiene que transformarse en una numérica, aunque hay que mencionar que con esto se eliminan los efectos de escala. Bouyssou (1992) sugiere la investigación de procedimientos ordinales, donde sólo importa el orden de las evaluaciones.

En conclusión, encontramos que al utilizar preferencias borrosas se incluye la posibilidad de existan alternativas no comparables, lo que en un problema real suele ocurrir a menudo, o bien que el decisor pueda definir intervalos o "umbrales " de preferencia o indiferencia. En la práctica modelar las preferencias del decisor no es una tarea fácil, incluso las entrevistas con el decisor para definir los tipos de criterios y sus respectivos parámetros, la asignación de pesos y la recomendación final es un trabajo arduo que requiere por parte del analista conocimiento del método, experiencia y mucha paciencia. Po otro lado, se requiere que el decisor tenga un poco de formación matemática, puesto que el significado de los parámetros no es tan claro como se desea, aquí el papel del analista es muy importante, puesto que debe darle la información necesaria al decisor para facilitar esta tarea y la confianza suficiente en el proceso. Al final se resolvieron satisfactoriamente los pequeños detalles que surgen en las consultas con el decisor.

Otro resultado por demás satisfactorio, es que se logró sembrar el interés por la utilización de las técnicas multicriterio en problemas de decisión. En general, en nuestro país las toma de decisiones multicriterio es una disciplina poco conocida, por lo que las técnicas de solución a problemas reales tampoco son utilizadas. el enfoque multicriterio más utilizado en nuestro país es la teoria de utilidad, perteneciente a la escuela norteamericana. Los métodos de sobreclasificación son prácticamente desconocidos, se han hecho varios esfuerzos en la DEPFI y en el Instituto de Ingeniería por difundir el uso de estas técnicas y por hacer investigación en este campo. Esta tesis es producto de esos esfuerzos.

Por otro lado, la aplicación de la teoría de los conjuntos borrosos se ha difundido bastante, pero existen pocos antecedentes de la aplicación a la teoría de decisiones. Considero que el hecho de incursionar en una línea de investigación poco explotada y el conocimiento que se adquiere en el proceso de documentación y aplicación del método propuesto, que cumple con dos características de interés profesional : es un método de sobreclasificación y además utiliza relaciones de preferencia borrosas, es el aporte principal del trabajo. Se considera que los objetivos planteado en un principio se cumplieron satisfactoriamente.

Sin embargo, aun queda mucho por hacer, existen todavia muchos problemas abiertos como la modelación de preferencias, la asignación de pesos, la agregación de preferencias, la relación de dominancia, entre otros.

Se encontraron ciertas dificultades a lo largo del proceso. En primer lugar, la falta de bibliografía, hubo necesidad de comprar algunos artículos y un libro especializado en la toma de decisiones con preferencias borrosas, además fue necesario comunicarse con el autor del método para solicitarle información sobre PROMETHEE, puesto que la que se tenía disponible fue insuficiente para terminar con el trabajo. La falta de conocimiento acerca del enfoque PROMETHEE retrasó un poco la aplicación práctica. Además, la versión del software PROMCALC con la que se trabajó sólo admitía un mínimo de evaluaciones, por lo que no se aplicó a un problema más grande.

Agradecimiento

Como un último comentario quiero agradecer al Dr. J.P. Brans (autor de los métodos PROMETHEE), por enviarme los artículos y publicaciones sobre la metodología y la versión estudiantil del software PROMCALC, al Dr. Servio Tulio Guillén por sus dudas y valiosos comentarios y al maestro Arturo Fuentes Zenón por su asesoría en la estructura de la tesis. Sin esta invaluable ayuda hubiera sido practicamente imposible concluirla, de hecho hubiera sido difícil empezar. A la Dra. Mayra Trejos, por la confianza y la comprensión que ha demostrado. A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA, UNAM), por aceptarme como becaria adscrita al proyecto IN500696 del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica. Finalmente al Lic. Fco. Javier Sahagún Sánchez, agradezco las facilidades otorgadas para aplicar la metodología PROMETHEE en su empresa. Los datos utilizados en la aplicación práctica se obtuvieron gracias a su colaboración. A Benito Sánchez Lara por hacerse cargo de mis trámites de titulación, mil gracias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Shemmeri, T., B. Al-Kloub, A. Pearman (1997). Computer Aided Decision Support System for Water Strategic Planning in Jordan. *European Journal of Operational Research* **102** (1997) 445-472.

Antún, J. (1994). *Toma de Decisiones Multicriterio: El Enfoque ELECTRE.* Series del Instituto de Ingeniería D-38. UNAM, México.

Bana e Costa, C. (1990). *Readings in Multiple Criteria Decision Aid.* Springer-Verlag, Lisboa (1990).

Barret, C., K. Pattanaik, M. Salles (1990). On Choosing Rationally when Preferences are Fuzzy. *Fuzzy Sets and Systems,* **34** (1990) 197-212.

Bellman, R., L. Zadeh (1970). Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Science.* **17** (1970) B141-B164.

Bouyssou, D. (1995). A note on the "Min in Favor" Choicre Procedure for Fuzzy Preference Relations. P.M. Pardalos et al. (eds.), *Advances in Multicriteria Analysis* (1995) 9-16.

Bouyssou, D. (1996). Outranking Relations : Do They Have Special Properties ?. *Journal of Multicriteria Decision Analysis,* **5**(1996) 99-111.

Brans, J.P., (1994). *The Space of Freedom of The Decision-Maker or Modelling the Human Brain.* Documento de Trabajo del Centrum Voor Statistiek en Operationell Onderzoek, VUB. CSOOTW/265 (1994).

Brans, J.P., P. Vincke (1985). A Preference Ranking Organization Method (the PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision Making). *Management Science* **31**(1985) 647-656.

Brans, J.P, B. Mareschal (1990). The PROMETHEE Methods for MCDM; The PROMCALC, GAIA and BANKADVISER Software. En: *Readings in*

Multiple Criteria Decision Aid. Editado por: C.A. Bana e Costa. Springer-Verlag, Lisboa (1990).
216-251.

Brans, J.P., B. Mareschal (1994a). The PROMCALC & GAIA Decision Support System for Multicriteria Decision Aid. *Decision Support Systems* **12**(1994) 297-310.

Brans, J.P., B. Mareschal (1994b). The PROMETHEE-GAIA Decisión Support System for Multicriteria Investigations. *Investigación Operativa* **4** (1994) 107-117.

Brans, J.P., B. Mareschal (1997). *Multicriteria Decision Aid The PROMETHEE-GAIA Solution.* Documento de Trabajo del Centrum Voor Statistiek en Operationell Onderzoek, VUB. STOOTW/278 (1997).

Brans, J.P., C. Macharis, B. Mareschal (1997). *The GDSS PROMETHEE Procedure.* Documento de rabajo del Centrum Voor Statistiek en Operationell Onderzoek, VUB. STOOTW/277 (1997).

Briggs, T., P.L. Kunsch, B. Mareschal (1990). Nuclear Waste Management: An Application of the Multicriteria PROMETHEE Methods. *European Journal of Operational Research* **44**(1990) 1-10.

Butnariu, D., E. P. Klement. (1990). Triangular Norms and Some Applications to Measure and Game Theory. En: *Fuzzy Approach to Reasoning and Decision-Making.* Editado por: Vilém Novak Jaroslav.

Cano, G. (1997). Modelado de Preferencias Multicriterio Mediante una Función de Valor Cardinal. Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM (1997).

D'Avignon, G., M. Turcotte, L. Beaudry, Y. Duperre (1983). Degré de Spécialisation des Hôpitaux de Quebec. Université Laval, Quebec.

Dubois, D., H. Prade (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press. New York.

Dubois, D, H. Prade, R. Yager (1997). Fuzzy Information Engineering: A guide Tour of Applications (1997). John Wiley and Sons.

Du Bois, Ph., J. P. Brans, F. Cantraine, B. Mareschal (1989). MEDICIS : An Expert System for Computer Aided Diagnosis using the PROMETHEE Multicriteria Method. *European Journal of Operational Research* **39**(1989) 284-292.

Dujardin, J. M. (1984). Une Evaluation Multicritère de Projets de Remédiation à L'échec dans L'enseignement Secondaire Belge. XIX Meeting of the European Working Group on Multiple Criteria Decision Aid, Liège. Marzo 1994.

Espinosa, R. (1996). *Métodos de Ayuda a la Decisión Multicriterio.* Documentos de trabajo. Depto. de Matemáticas, ITAM. México.

French, S. (1988). *Decision Theory.* Alsted Press- Wiley, New York.

Fodor, J., (1992). An axiomatic Approach to Fuzzy Preference Modelling. *Fuzzy Sets and Systems* **52** (1992), 47-52.

Fodor, J. M. Roubens (1994). Valued Preference Structures. *European Journal of Operational Research* **79** (1994) 277-286.

Fodor, J., M. Roubens, (1994). *Fuzzy Preference Modelling and Multi-Criteria Decision Aid.* Kluwer, Dordrecht.

Ghotb, F., L. Warren. (1995). A Case Study Comparison of the Analitic Hierarchy Process and a Fuzzy Decision Methodology. *The Engineering Economist* **4**(1995), No. **3**. 233-246.

Grabisch, M. (1995). Fuzzy Integral in Multicriteria Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems* **69** (1995) 279-298.

Grabisch, M. H.T. Nguyen, E.A. Walker (1995). *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference.* Kluwer Academic Publishers.

Grabisch, M. (1996). The Application of Fuzzy Integrals in Multicriteria Decision Making. *European Journal of Operational Research* **89** (1996) 445-456.

Gottwald, S. (1996). Fundamentals of Fuzzy Relation Calculus. En *Fuzzy Modelling: Paradigms and Practice.* Editado por Witold Pedrycz. Kluwer Academic Publishers. 25-47.

Guillén, S. (1993). Relaciones Valuadas de Preferencia en la Toma de Decisiones Multicriterio. Tesis Doctoral, DEPFI, UNAM (1993).

Jamshidi, M., N. Vadiee, T.J. Ross (1993). Fuzzy Logic and Control: Software and Hardware Applications. (1993) 10,16-28, 32-36. Prentice Hall

Kaufmann, A. (1986). On the Relevance of Fuzzy Sets for Operations Research. *European Journal of Operational Research* **25** (1986). 330-335.

Kitainik, L. (1993). *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations: Towards a Unified Theory.* Kluwer Academic Publishers.

Kundu, S. (1995). Min-Transitivity of Fuzzy Leftness Relationship and Its Application to Decision Making. En: Fuzzy Logics for the Applications to Complex Systems: Proceedings of the International Joint Conference of CFSA/IFIS/SOFT'95 on Fuzzy Theory and Applications. Editado por: Weiling Chang y Jonathan Lee (1995). World Scientific Publishing Co.

Liang, G-S., M-J. Wang (1994). Personnel Selection Using Fuzzy MCDM Algorithm. *European Journal of Operational Research* **78** (1994). 22-33.

Martel, J-M., G. D'Avignon, J. Couillard. (1986). A Fuzzy Outranking Relation in Multicriteria Decision Making. *European Journal of Operational Research* **25** (1986).258-271.

Mareschal, B. (1986). Stochastic Multicriteria Decision Making and Uncertainty. *European Journal of Operational Research* **26**(1986) 58-64.

Mareschal, B. (1988). Geometrical Representations for MCDA. *European Journal of Operational Research* 34(1988), 69-77.

Nakamura, K. (1990). On the Nature of Intransitivity in Human Preferential Judgments. En: *Fuzzy Approach to Reasoning and Decision-Making*. Editado por Vilém Novak Jaroslav.

Orlovsky, S. (1978). Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation. *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978). 155-167.

Ovchinnikov, S. (1981). Structure of Fuzzy Binary Relations. *Fuzzy Sets and Systems* **6** (1981). 169- 195.

Ovchinnikov, S., M. Roubens. (1991). On Strict Preference Relations. *Fuzzy Sets and Systems* **43** (1991). 319- 326.

Ovchinnikov, S. M. Roubens. (1992). On Fuzzy Strict Preference, Indiference, and Incomparability Relations. *Fuzzy Sets and Systems* **49** (1992). 15- 20.

Pedrycz, W. (1996). *Fuzzy Modelling: Paradigms and Practice* . Kluwer Academic Publishers.

Perny, P., B. Roy. (1992). The Use of Fuzzy Outranking Relations in Preference Modelling. *Fuzzy Sets and Systems* **49** (1992). 33-53.

Pirlot, M. (1995). A Characterization of "Min" as a Procedure for Exploiting Valued Preference Relations and Related Results. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, **4**(1995), 37-56.

Ponsard, C. (1986). Spatial Fuzzy Consumer's Decision Making: A Multicriteria Analysis. *European Journal of Operational Research* **25** (1986). 235-246.

Roubens, M. (1989). Some Properties of Choice Functions Based on Valued Binary Relations. *European Journal of Operational Research* **40** (1989). 309-321.

Roy, B. (1977). Partial Preference Analysis and Decision Aid : The Fuzzy Outranking Relation Concept. En : *Conflicting Objetives in Decisions.* Eds. D.E. Bell, R.L. Keeney y H. Raiffa. Wiley New York.

Roy, B. (1989). The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods. Documentos de *LAMSADE* **53**(1989). Universidad de París.

Siskos, J. (1982). A Way to Deal with Fuzzy Preferences in Multi-Criteria Decision Problems. *European Journal of Operational Research* **10** (1982). 314- 324.

Stevens, S. (1959). La Medición y el Hombre. Suplementos del Seminario de Problemas Científicos y Filosóficos UNAM **19**(1959).

Terano, T., K. Asai, M. Sugeno (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications. Academic Press.* Londres.

Trejos, M. (1991). Método de Relaciones Binarias de Sobreclasificación que usa una Familia de Funciones Utilidad. Tesis Doctoral, DEPFI, UNAM. (1991).

Turksen, I.B., I.A. Willson. (1995). A Fuzzy Set Model for Market Share and preference Prediction. *European Journal of Operational Research* **82** (1995). 39-52.

Van der Walle, B., B. De Baets, E. Kerre. (1995). Fuzzy Multi- Criteria Analysis of Cutting Techniques in a Nuclear Reactor Dismantling Project. *Fuzzy Sets and Systems* **74** (1995). 115-126.

Vincke, Ph., M. Gassner, B.Roy. (1992). *Multicriteria Decision-Aid.* John Wiley and Sons.

Zadeh, L. (1975). Calculus of Fuzzy Restrictions. En: *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Eds. L. Zadeh, K-S. Fu, K. Tanaka, M. Shimura. Academic Press.

Zimmermann, H. (1987). *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems.* Kluwer Academic Publishers.

Zimmermann, H. (1996). *Fuzzy Sets Theory and Its Applications.* 3ra. Edición. Kluwer Academic Publishers

Zimmermann, H. (1997). Operators in Models of Decision Making. En: Fuzzy Information Engineering: A Guided Tour of Applications. Kluwer Academic Publishers.

APENDICE I . Análisis de Componentes Principales

En los métodos PROMETHEE se genera un criterio generalizado, que incluye una función de preferencia para cada criterio. Esto permite definir los flujos de preferencia monocriterio para los que se puede obtener una representación geométrica, utilizando el análisis de componentes principales (Mareschal y Brans 1988).

Recordemos que cada acción a_i (i=1, 2, ..., n) del conjunto $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ puede caracterizarse por el vector $\alpha_i=\{\phi_1(a_1), \ldots, \phi_k(a_k)\}$. Los α_i serán utilizados para representar geométricamente las preferencias del decisor. Definimos :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(a_1) & \phi_2(a_1) & \ldots & \phi_k(a_1) \\ \phi_1(a_2) & \phi_2(a_2) & \ldots & \phi_k(a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_1(a_n) & \phi_2(a_n) & \ldots & \phi_k(a_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

esta matriz contiene la mayoria de la información acerca de cómo compara el decisor cada acción con las demás, bajo cada criterio. Cada acción a_i se caracteriza por la fila α_i y puede representarse por un punto $A_i \in \mathbb{R}^k$. Las A_i's quedan centradas en el origen O. Como no es posible visualizar el espacio k-dimensional, la mayoria de las veces, se propone construir una representación bidimensional de las n acciones.

Primero debemos encontrar un vector unitario $u \in \mathbb{R}^k$ tal que las proyecciones de los vectores α_i sobre u sean óptimos (criterio de minimos cuadrados). Por tanto, si P_i es la proyección de α_i, la suma $\sum_{i=1,n} |A_i P_i|^2$ debe minimizarse, de forma equivalente $\sum_{i=1,n} |OP_i|^2$ debe maximizarse.

Como $|OP_i| = \alpha_i u$, el problema se reduce a :

$$\begin{cases} max & u'Cu \\ s.a. & u'u = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

donde $C = \phi'\phi$ [1].

La función Lagrangiana asociada es :

$$L(u,\lambda) = u'Cu - \lambda(u'u - 1), \qquad (2)$$

así que, debe resolverse el siguiente sistema :

$$Cu = \lambda u, \qquad u'u = 1 \qquad (3)$$

[1] C/n es la matriz de covarianza de las ϕ_i's

Como C es simétrica y definida positiva, sus eigenvalores son números reales no negativos. Sea λ_1 el eigenvalor más grande . Como

$$u'Cu = \lambda,$$

u debe ser el eigenvector unitario asociado a λ_1.

Si consideramos el segundo eigenvalor más grande λ_2 y su eigenvector unitario asociado v, es fácil verificar que u y v son ortogonales y que (u, v) define el mejor plano sobre el que pueden proyectarse los n puntos de $\mathbb{R}^k$.

Además tenemos que :

$$\sum_{i=1}^{n} |OA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|^2 = TrC = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \qquad (4)$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} |OP_i|^2 = u'Cu = \lambda_1, \quad \sum_{i=1}^{n} |OQ_i|^2 = v'Cv = \lambda_2, \qquad (5)$$

donde P_i y Q_i, $i=1, 2, \ldots, n$, son respectivamente las proyecciones de los n puntos A_i sobre los vectores u_i y v ; la cantidad

$$\delta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j} \qquad (6)$$

define el porcentaje de la información que se preserva (inercia total) (4) explicada por el plano (u, v).

Las coordenadas P_i y Q_i de las proyecciones de los n puntos sobre u y v respectivamente son :

$$\begin{cases} OP_i = \alpha_i' u \\ OQ_i = \alpha_i' v \end{cases} \qquad (7)$$

De manera general, las coordenadas de las proyecciones de algún vector $x \in \mathbb{R}^k$ en el plano (u, v) están dados por $x'u$ y $x'v$.

Cada acción a_i caracterizada por el punto $A_i \in \mathbb{R}^k$, tendrá la proyección $\hat{\alpha}_i(\alpha_i' u, \alpha_i' v)$ sobre el plano (u, v).

Representación de los criterios.

Sea $\hat{\gamma}_j$ la proyección en el plano (u, v) del vector unitario $e_j \in \mathbb{R}^k$ tal que sus componentes son : $(e'_j u = u_j,\ e'_j v = v_j)$, donde u_j es el j-ésimo componente de u y v_j es el j-ésimo componente de v. Además, el plano (u, v) se obtuvo tomando el máximo de $u'Cu+v'V$ que es igual a :

$$max(u'Cu+v'Cv)=\sum_{j=1}^{k}C_{jj}\left\|\hat{\gamma}_j\right\|^2+2\sum_{p=1}^{k}\sum_{q\neq p}C_{pq}(\hat{\gamma}_p\hat{\gamma}_q)=\lambda_1+\lambda_2 \quad (8)$$

donde :

- C_{jj} es el j-ésimo elemento de la diagonal de C, y es n veces la varianza del flujo monocriterio $\phi_j(.)$;
- $\left\|\hat{\gamma}_j\right\|$ es la longitud de $\hat{\gamma}_j$ ($\left\|\hat{\gamma}_j\right\|^2=u_j^2+v_j^2$)
- C_{pq} es n veces la covarianza entre $\phi_p(.)$ y $\phi_q(.)$;
- ($\hat{\gamma}_p\hat{\gamma}_q$) es el producto escalar de estos vectores ($u_pu_q+v_pv_q$).

Se elige el plano (u, v) cuando se maximice la suma anterior, usualmente un C_{jj} grande induce a un $\left\|\hat{\gamma}_j\right\|^2$ grande ; y un C_{pq} grande inducirá a un ($\hat{\gamma}_p.\hat{\gamma}_q$) grande.

Por tanto, la varianza más grande de $\phi_j(.)$ que proporcione la longitud más grande de $\hat{\gamma}_j$ determinará al plano (u, v). Esto es, si la varianza de $\phi(.)$ es grande esto significa que el criterio j diferencia fuertemente las acciones entonces el ángulo entre el j-ésimo eje de $\mathbb{R}^k$ y el plano (u, v) será pequeño. Por el contrario, si la varianza de $\phi_j(.)$ es igual a cero, $\phi_j(a_i)=0$, $\forall\ a\in A$, (esto significa que las acciones son indiferentes de acuerdo al criterio j) y $\left\|\hat{\gamma}_j\right\|=0$.

En conclusión, la longitud de $\hat{\gamma}_j$ representa "cómo discrimina las acciones el criterio j" y la calidad de representación de este criterio en el plano (u, v).

Ahora consideremos la distribución de los k vectores $\hat{\gamma}_j$ en el plano. Los criterios p y q para los que las preferencias del decisor son casi equivalentes, se representarán en el plano (u, v) por medio de dos vectores $\hat{\gamma}_p$ y $\hat{\gamma}_q$ con direcciones similares, y los criterios conflictivos se representarán por medio de vectores con direcciones opuestas. Por tanto, las posiciones de los vectores $\hat{\gamma}_j$ proporcionan al decisor una descripción cualitativa del conjunto de criterios. Además es posible considerar bloques de criterios cercanos orientados en la misma dirección y por tanto que expresan el mismo tipo de preferencias. También los criterios conflictivos se representan de manera adecuada.

Consideremos los ejes definidos por :

$$w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_k)' \quad (9)$$

y el vector unitario asociado **e** :

$$e = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} w_i^2}} \sum_{i=1}^{k} w_i e_i \quad (10)$$

como :

$$\sum w_i \phi_i(a) = \phi(a), \quad \text{y} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\alpha_i w = \phi(a_i). \quad (11)$$

así que las proyecciones de los puntos A_i sobre el vector $w$proporcionan los flujos netos de las acciones correspondientes. Los flujos totales o flujos netos dan el orden completo de PROMETHEE II. A la proyección de **e** en el plano *(u, v)* se le llamará eje de decisión PROMETHEE II y se denota como $\hat{\pi}$.

APENDICE II. Despliegue de Resultados

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

Criterion	C..1	C..2	C..3	C..4	C..5
Min/Max	max	max	max	max	max
Type	2	2	1	1	6
Weight	1.00	1.00	0.60	0.20	0.50
Actions					
A..1	100.00	80.00	95.00	75.00	95.00
A..2	90.00	85.00	75.00	75.00	80.00
A..3	90.00	70.00	80.00	75.00	85.00
A..4	80.00	75.00	90.00	75.00	90.00

F1 : Help - F7,F9 : Actions - F8,F10 : Criteria - Ins/Del - ESC : Stop

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

Criterion	C..6	C..7	C..8	C..9	C.10
Min/Max	max	max	max	max	max
Type	1	1	1	1	1
Weight	0.60	0.70	0.70	0.80	0.80
Actions					
A..1	90.00	80.00	80.00	75.00	75.00
A..2	90.00	85.00	85.00	80.00	100.00
A..3	95.00	90.00	90.00	90.00	80.00
A..4	100.00	90.00	80.00	80.00	85.00

F1 : Help - F7,F9 : Actions - F8,F10 : Criteria - Ins/Del - ESC : Stop

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

Descriptive Statistics

Criterion		Minimum	Maximum	Average	St.Dev.
C..1:	max	80.00	100.00	90.00	7.07
C..2:	max	70.00	85.00	77.50	5.59
C..3:	max	75.00	95.00	85.00	7.91
C..4:	max	75.00	75.00	75.00	0.00
C..5:	max	80.00	95.00	87.50	5.59
C..6:	max	90.00	100.00	93.75	4.15
C..7:	max	80.00	90.00	86.25	4.15
C..8:	max	80.00	90.00	83.75	4.15
C..9:	max	75.00	90.00	81.25	5.45
C.10:	max	75.00	100.00	85.00	9.35

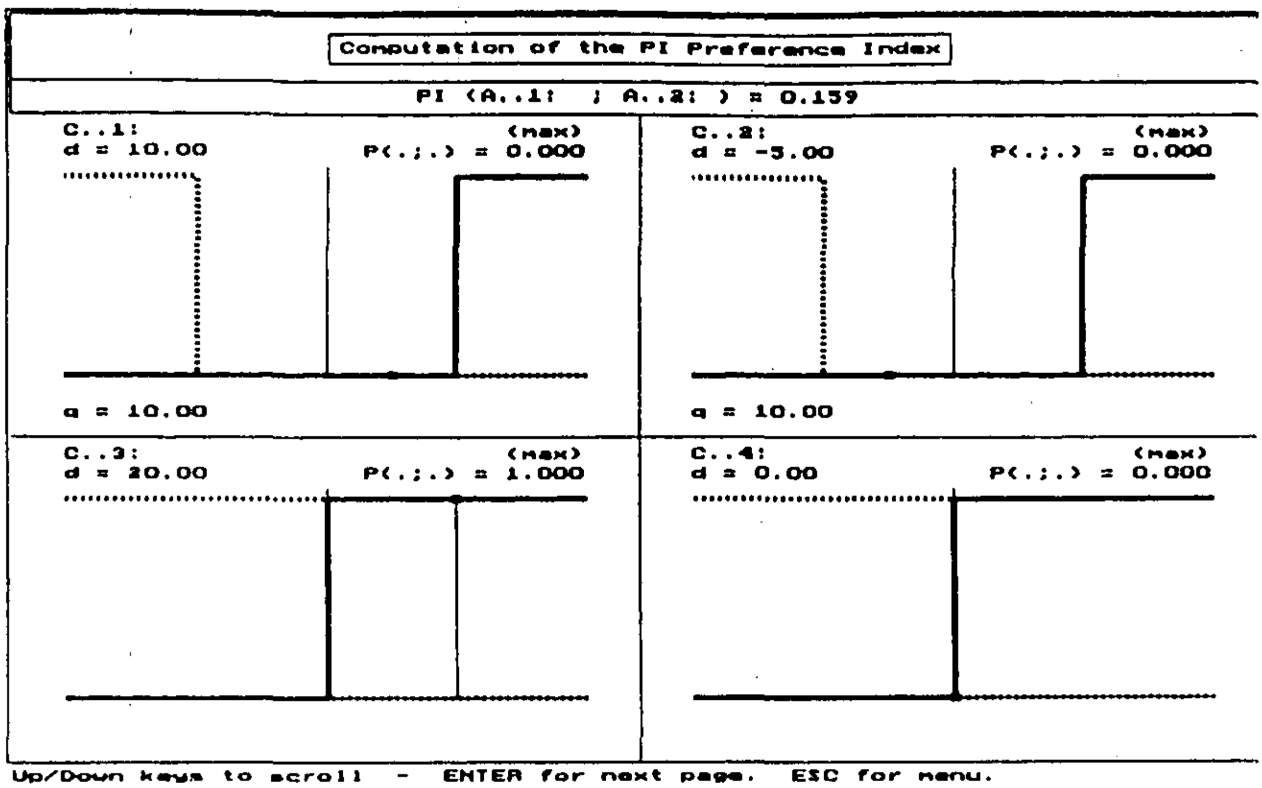
ENTER for next page. ESC for menu.

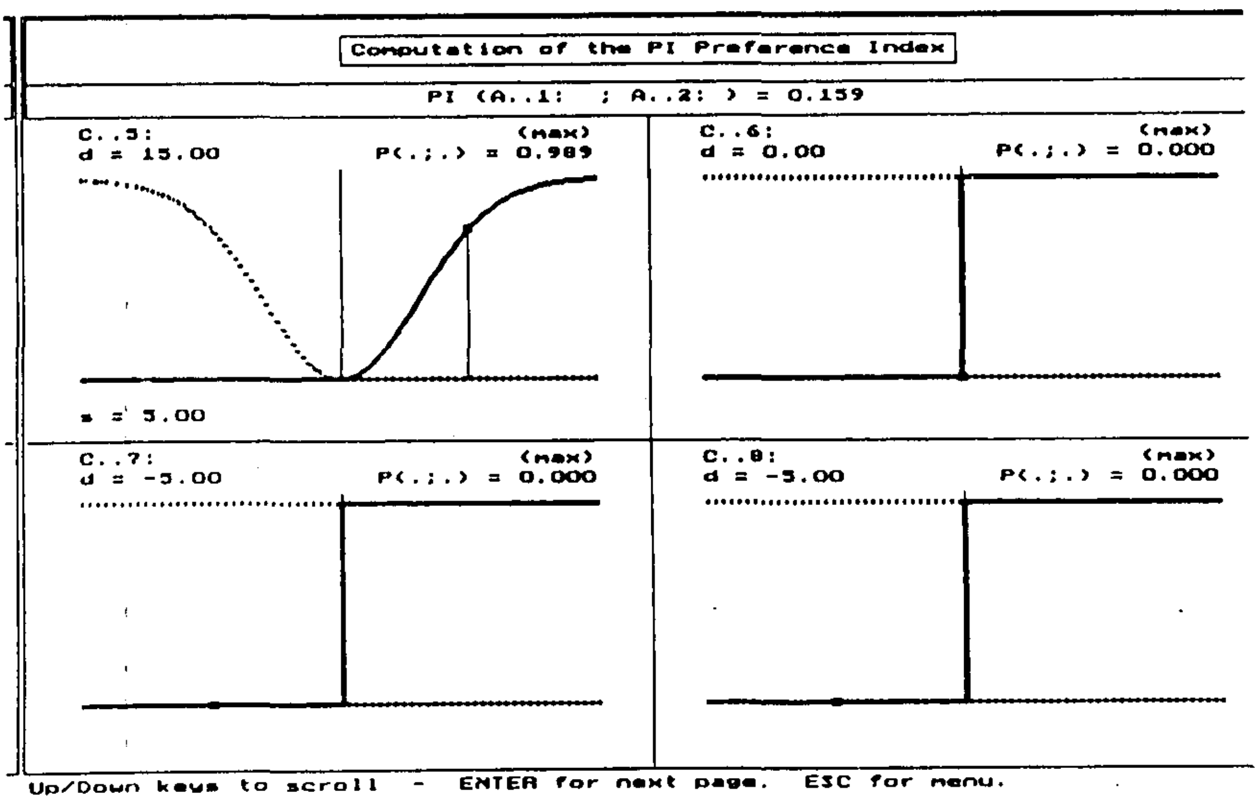
PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PI Preference Indices

Actions	A..1	A..2	A..3	A..4
A..1:	0.00	0.16	0.15	0.26
A..2:	0.43	0.00	0.26	0.22
A..3:	0.52	0.52	0.00	0.22
A..4:	0.42	0.34	0.32	0.00

Select index and press ENTER to detail computation. ESC for menu.


Computation of the PI Preference Index
PI (A..1: ; A..2:) = 0.159
C..1:
(max)
d = 10.00
P(.;.) = 0.000
q = 10.00
C..2:
(max)
d = -5.00
P(.;.) = 0.000
q = 10.00
C..3:
(max)
d = 20.00
P(.;.) = 1.000
C..4:
(max)
d = 0.00
P(.;.) = 0.000
Up/Down keys to scroll - ENTER for next page. ESC for menu.

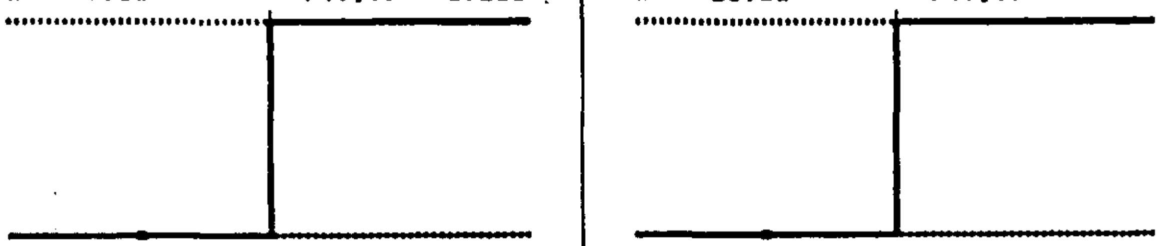

Computation of the PI Preference Index
PI (A..1: ; A..2:) = 0.159
C..5:
(max)
d = 15.00
P(.;.) = 0.989
s = 5.00
C..6:
(max)
d = 0.00
P(.;.) = 0.000
C..7:
(max)
d = -5.00
P(.;.) = 0.000
C..8:
(max)
d = -5.00
P(.;.) = 0.000
Up/Down keys to scroll - ENTER for next page. ESC for menu.

Computation of the PI Preference Index

PI (A..1: ; A..2:) = 0.159

C..9: (max)
d = -5.00 P(.;.) = 0.000

C.10: (max)
d = -25.00 P(.;.) = 0.000



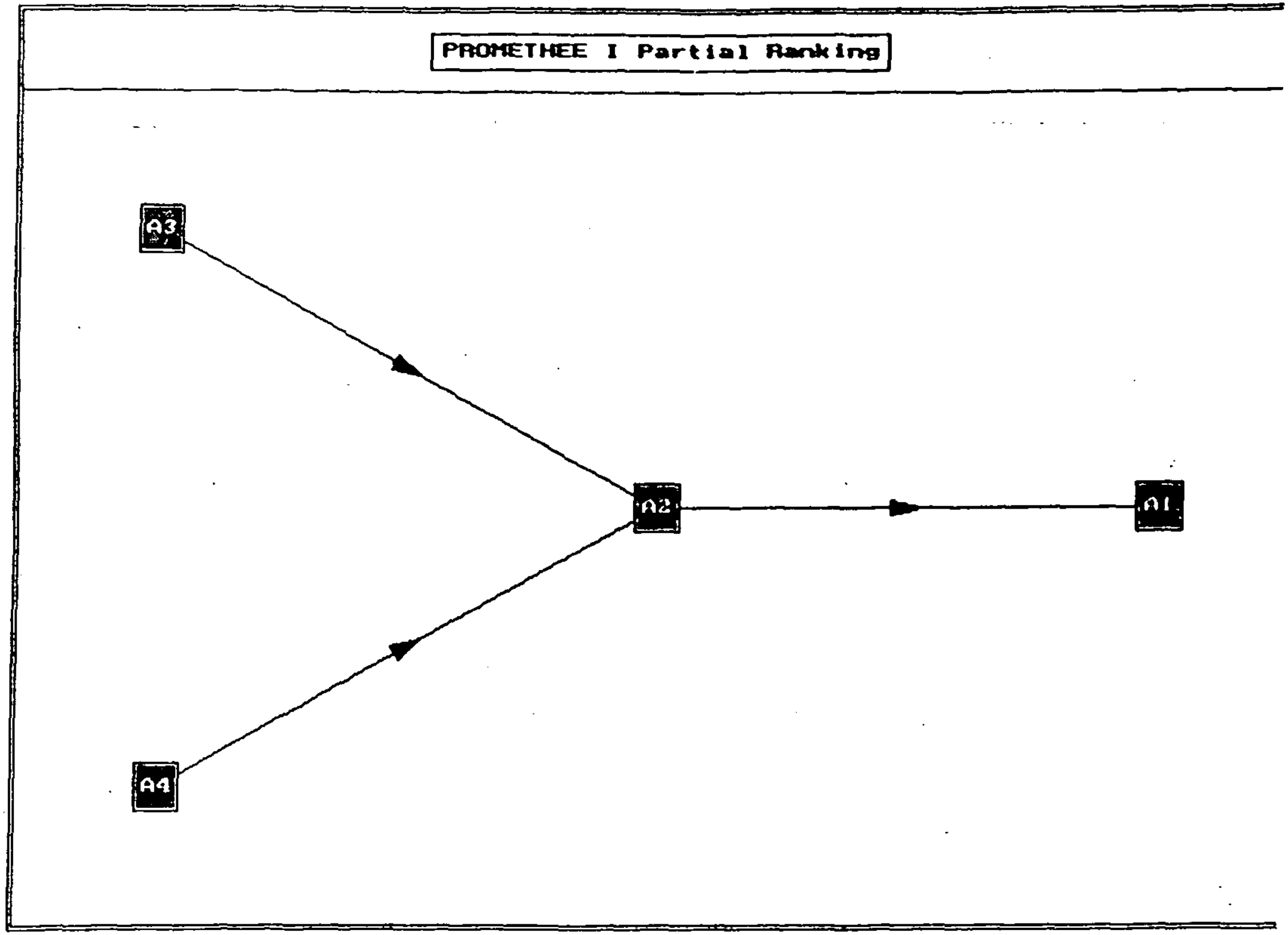
Up/Down keys to scroll - ENTER for next page. ESC for menu.

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

Preference Flows

Actions	Leaving	Rank	Entering	Rank	Net Flow	Rank
A..1:	0.18954	4.0	0.45894	4.0	-0.26940	4.0
A..2:	0.30435	3.0	0.33930	3.0	-0.03495	3.0
A..3:	0.42013	1.0	0.24295	2.0	0.17718	1.0
A..4:	0.35889	2.0	0.23173	1.0	0.12717	2.0

ESC for menu.



ENTER for next page. ESC for menu.

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PROMETHEE I Partial Ranking Detailed

A..3: is preferred to the following actions :
A..1: , A..2: .

A..3: is dominated by the following actions :
no action !

Press a key to continue...

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PROMETHEE I Partial Ranking Detailed

A..4: is preferred to the following actions :
A..1: , A..2: .

A..4: is dominated by the following actions :
no action !

Press a key to continue...

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PROMETHEE I Partial Ranking Detailed

A..2: is preferred to the following actions :
A..1: .

A..2: is dominated by the following actions :
A..3: , A..4: .

Press a key to continue...

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PROMETHEE I Partial Ranking Detailed

A..1: is preferred to the following actions :
no action !

A..1: is dominated by the following actions :
A..2: , A..3: , A..4: .

Press a key to continue...

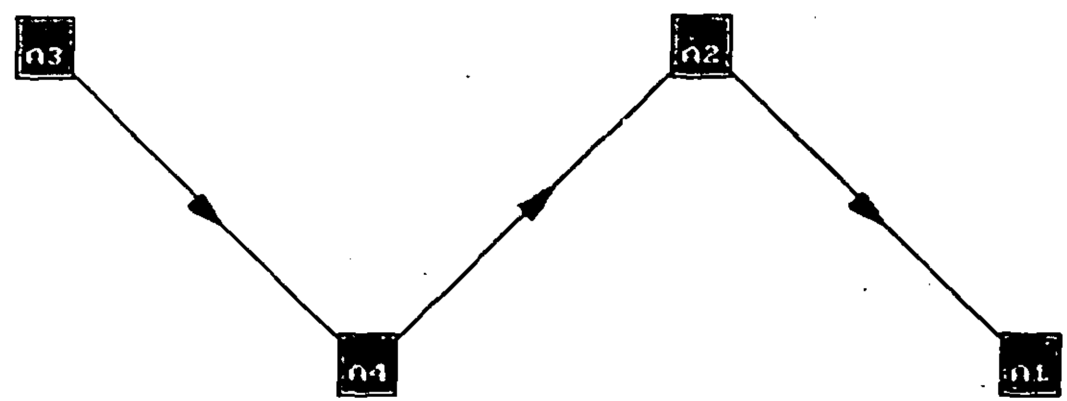
PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

PROMETHEE II Complete Ranking

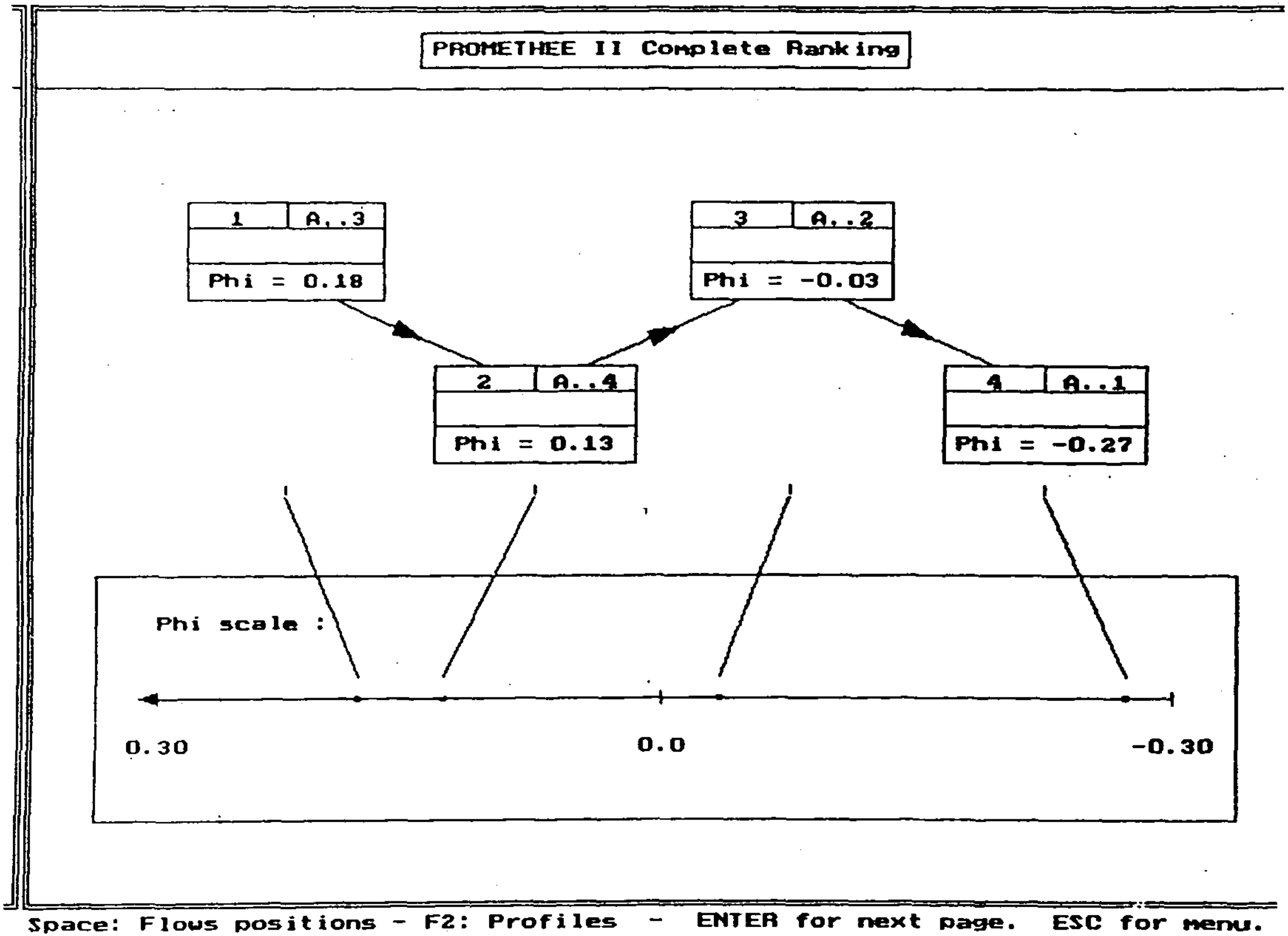
Rank	Action	Net Flow
1	A..3:	0.17718
2	A..4:	0.12717
3	A..2:	-0.03495
4	A..1:	-0.26940

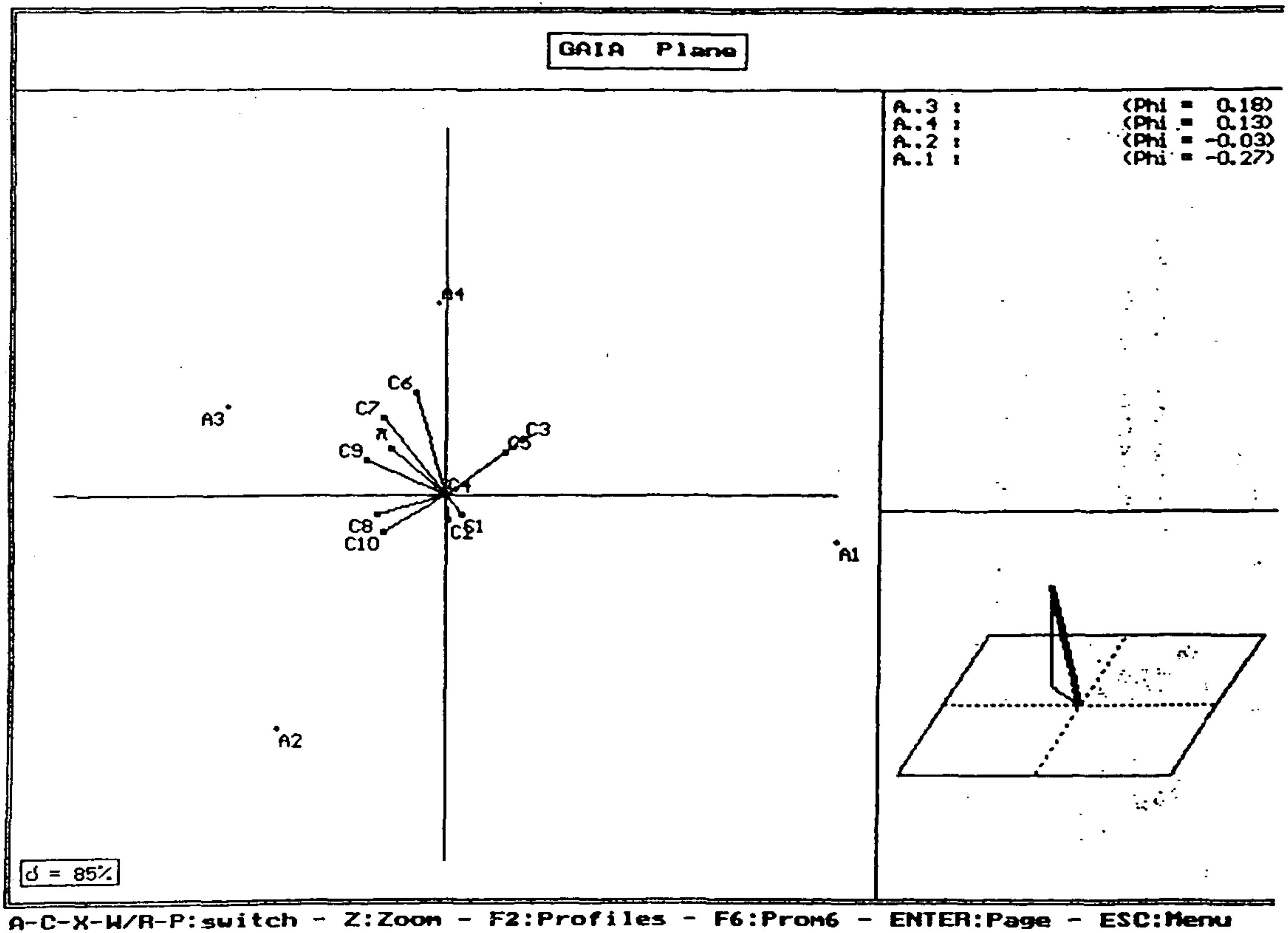
ENTER for next page. ESC for menu.

PROMETHEE II Complete Ranking



ENTER for next page. ESC for menu.


PROMETHEE II Complete Ranking
1
A..3
Phi = 0.18
2
A..4
Phi = 0.13
3
A..2
Phi = -0.03
4
A..1
Phi = -0.27
Phi scale :
0.30
0.0
-0.30
Space: Flows positions - F2: Profiles - ENTER for next page. ESC for menu.


GAIA Plane
A..3 : (Phi = 0.18)
A..4 : (Phi = 0.13)
A..2 : (Phi = -0.03)
A..1 : (Phi = -0.27)
A4
C6
C7
A3
π
C9
C3
C5
C4
C8
C10
C2
C1
A1
A2
δ = 85%
A-C-X-W/R-P:switch - Z:Zoom - F2:Profiles - F6:Prom6 - ENTER:Page - ESC:Menu

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

GAIA Eigenvalues

#	Value	Cumul.	%	Cumul.%	Select.
1	1.9917	1.9917	56.19	56.19	--> u
2	1.0067	2.9984	28.40	84.60	--> v
3	0.5459	3.5443	15.40	100.00	
4	0.0000	3.5443	0.00	100.00	
5	0.0000	3.5443	0.00	100.00	
6	0.0000	3.5443	0.00	100.00	
7	-0.0000	3.5443	-0.00	100.00	
8	-0.0000	3.5443	-0.00	100.00	
9	-0.0000	3.5443	-0.00	100.00	
10	-0.0000	3.5443	-0.00	100.00	
Total	3.5443	3.5443	100.00	100.00	

ENTER for next page. ESC for menu.

PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

GAIA Scores for the Actions

Action	u	v
A..1:	2.31298	-0.29478
A..2:	-0.98765	-1.47290
A..3:	-1.28039	0.56131
A..4:	-0.04494	1.20637

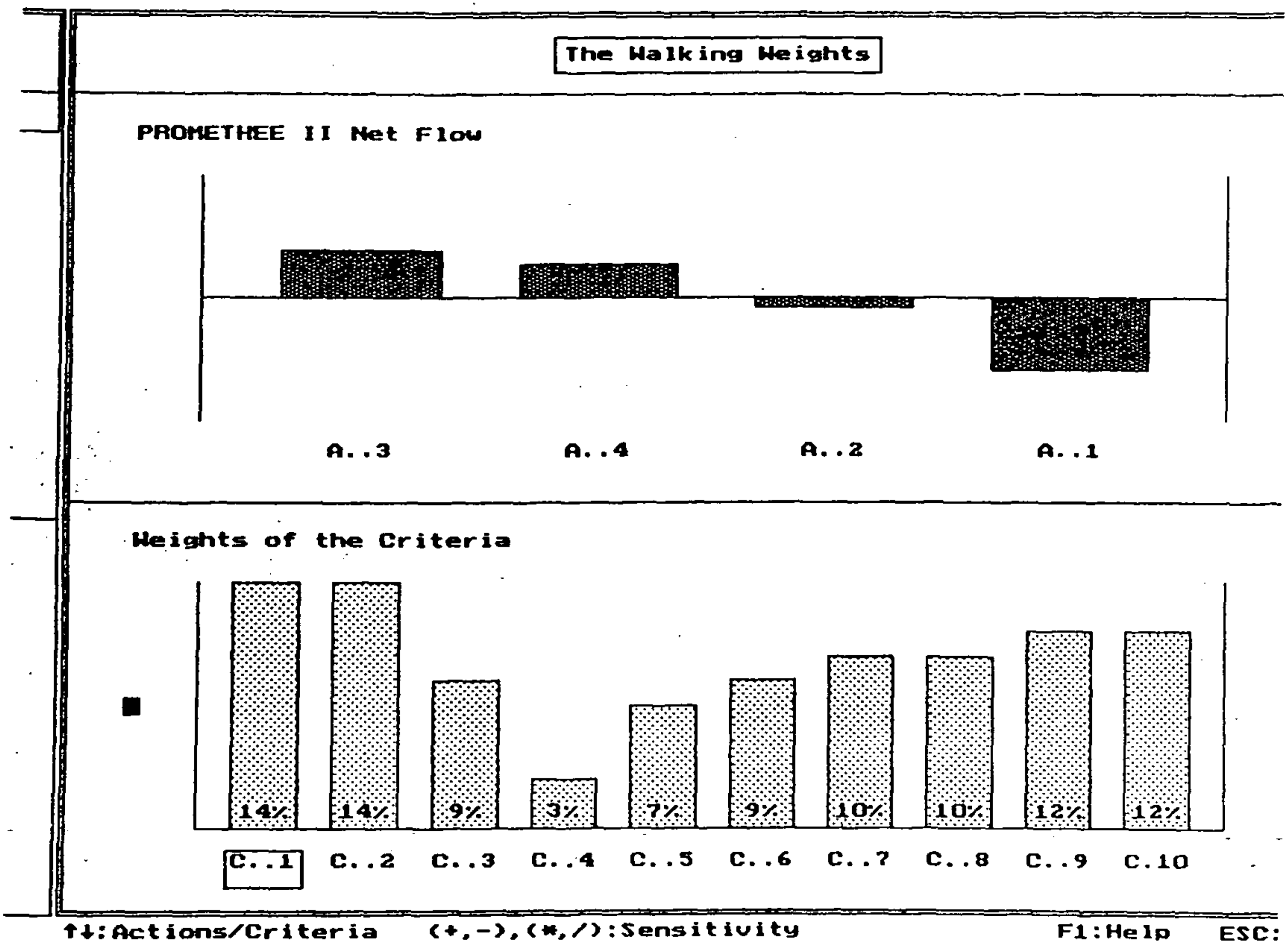
ENTER for next page. ESC for menu.

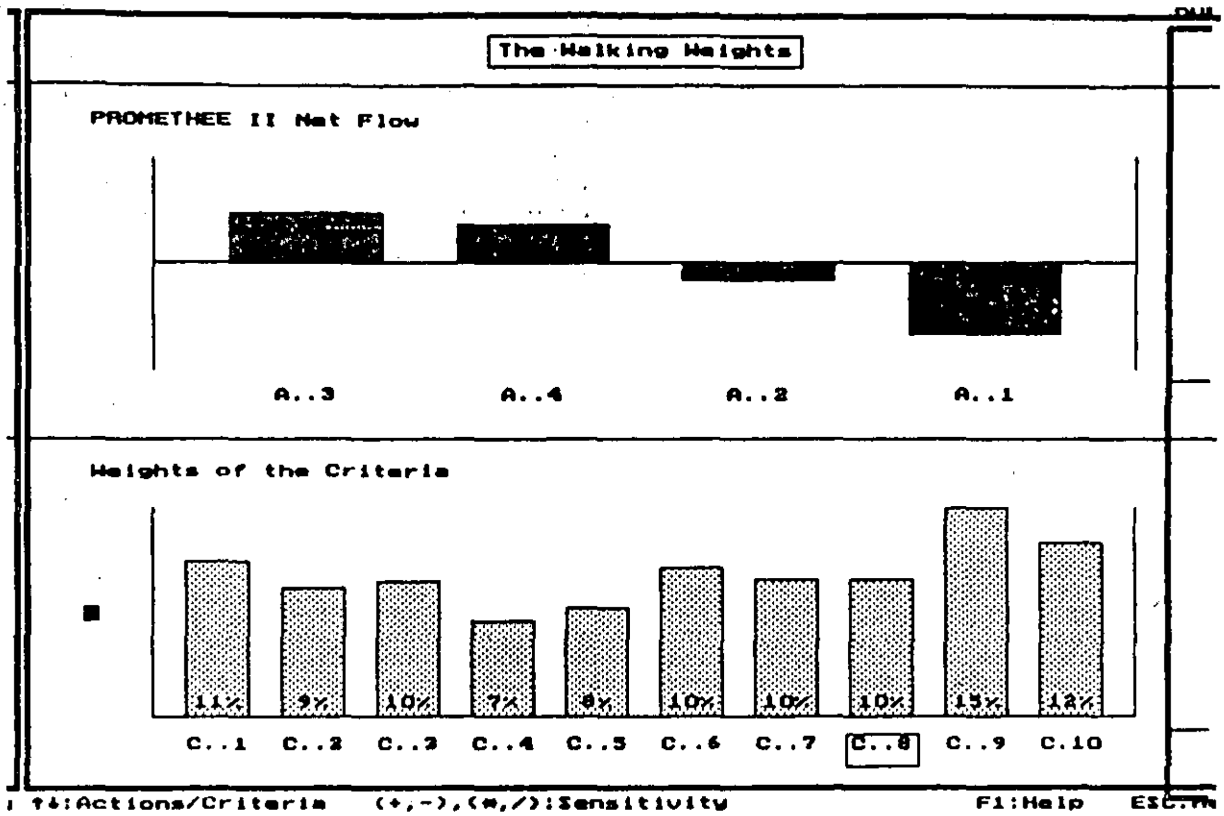
PROMCALC & GAIA V.3.4 STUDENT — C.S.O.O. - V.U.B. - 03/1994

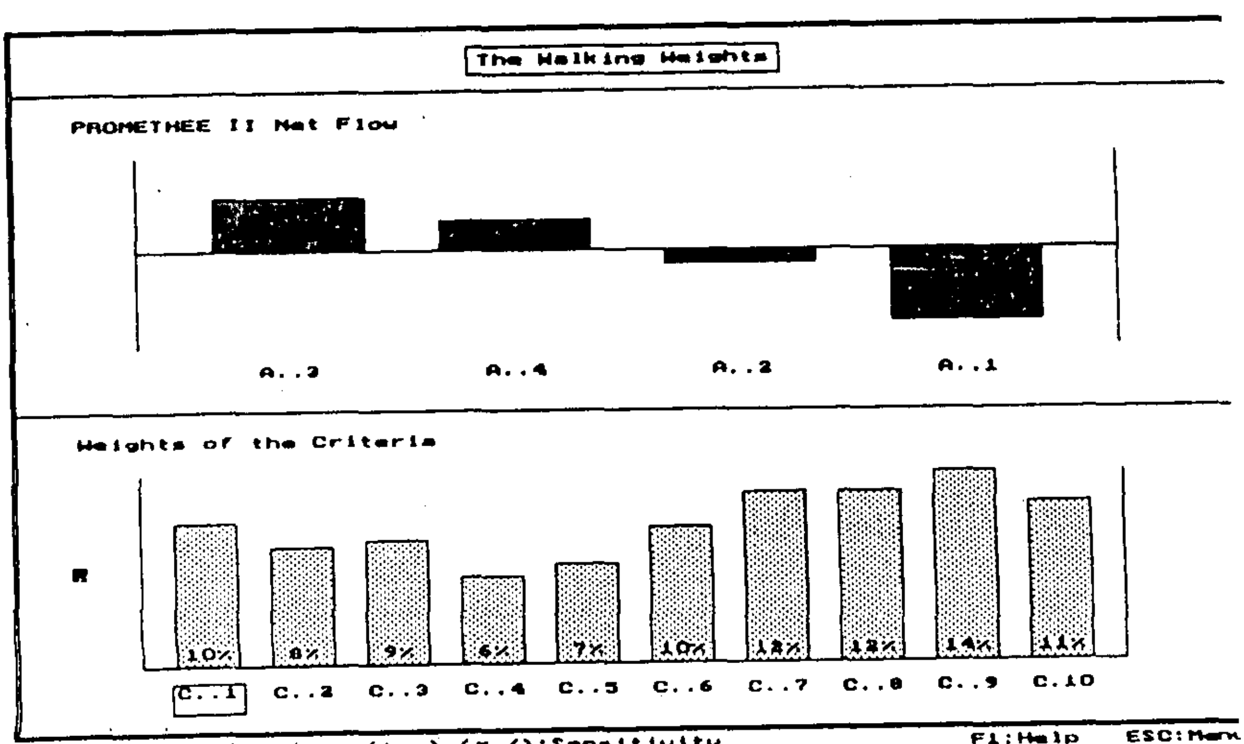
GAIA Scores for the Criteria

Criterion	u	v
C..1:	0.09866	-0.12427
C..2:	0.01225	-0.16839
C..3:	0.46599	0.34598
C..4:	0.00000	0.00000
C..5:	0.35501	0.26531
C..6:	-0.17012	0.63871
C..7:	-0.35991	0.48779
C..8:	-0.39183	-0.13346
C..9:	-0.45105	0.21260
C.10:	-0.36261	-0.23918

ENTER for next page. ESC for menu.


The Walking Weights
PROMETHEE II Net Flow
A..3
A..4
A..2
A..1
Weights of the Criteria
14%
14%
9%
3%
7%
9%
10%
10%
12%
12%
C..1
C..2
C..3
C..4
C..5
C..6
C..7
C..8
C..9
C.10
↑↓:Actions/Criteria
(+,-),(*,/):Sensitivity
F1:Help
ESC:


The Walking Weights
PROMETHEE II Net Flow
A..3
A..4
A..2
A..1
Weights of the Criteria
11%
9%
10%
7%
8%
10%
10%
10%
15%
12%
C..1
C..2
C..3
C..4
C..5
C..6
C..7
C..8
C..9
C.10
↑↓:Actions/Criteria
(+,-),(*,/):Sensitivity
F1:Help


The Walking Weights
PROMETHEE II Net Flow
A..3
A..4
A..2
A..1
Weights of the Criteria
10%
8%
9%
6%
7%
10%
12%
12%
14%
11%
C..1
C..2
C..3
C..4
C..5
C..6
C..7
C..8
C..9
C.10
↑↓:Actions/Criteria
(+,-),(*,/):Sensitivity
F1:Help
ESC:Men