1

00365 1 ej.

Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

6

LAS DIMENSIONES DE LAS REPRESENTACIONES INESCINDIBLES DE GRAFICAS.

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

(Matemáticas)

P r e s e n t a :

Luis Bernardo Morales Mendoza

México, D. F.

A mi madre.

CONTENIDO

Introducción..

Este trabajo se divide en dos partes, en la primera se clasifican las matrices de Cartan inescindibles en: de tipo positivo (Diagramas de Dynkin), de tipo cero (Diagramas de Dinkin extendidos) y estos en la sección 1.2. se clasifican y las de tipo negativo. En las demás secciones se estudian el àlgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ (donde A es una matriz de cartan) y sus raices, que como se vera en la segunda parte estas raices estan relacionadas con las dimensiones de las representaciones de gráficas y estas estan definidas por la matriz de cartan A.

En la sección 2.2. se ve que un objeto de dimensión α es inescindible en la categoria de representaciónes de la Gráfica (S, Ω) si y solamente si es un elemento cuasilibre del grupo G^{α} en la variedad algebraica $X = \bigoplus_{l \in S_1} Hom(V_{i(l)}, V_{f(l)})$ y en la sección 2.4

se demuestra que el número de orbitas cuasilibres de G^{α} en $V_1 \oplus V_2$ y $V_1 \oplus V_2^*$ son iguales, pero el reemplazo de uno de los sumandos de X por su representación contragrediente equivale el cambio de dirección de la flecha a lo largo de la arista correspondiente y con este resultado se demuestra el teorema principal del trabajo: Para $\alpha \notin \Delta_+$: toda representación de la gráfica (S, Ω) de dimensión α es escindible.

En el lema 2.2.7. se prueba que para raíces donde la matriz de cartan es de tipo cero existe un abierto denso en la variedad X consistiendo de elementos los cuales son suma de objetos inescindibles de dimensión proporsional a δ.

Sistemas de Raices

11.- Matrices de cartan. Consideraremos matrices cuadradas $n \times n$.

Dos matrices son equivalentes si una de ellas puede ser obtenida de la otra por alguna permutación de los indices

Una matriz es llamada escindible si ella es equivalente a una matriz de bloques diagonales de la forma $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$;

sino es llamada inescindible.

Una matriz $A = (a_{ij})$ es simetrizable si:

a) $a_{ij} = 0$, implica $a_{ji} = 0$

b) $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} = a_{i_1 i_k} \cdot a_{i_k i_{k-1}} \cdots a_{i_2 i_1}$ para todo conjunto de indices $i_1, \ldots, i_k$.

Una matriz $A = (a_{ij})$ es llamada de cartan si:

a) $a_{ii} = 2 \quad i = 1 \ldots n$

b) $-a_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ para $i \neq j$

c) $a_{ij} = 0$, implica $a_{ji} = 0$

Si A es una matriz de cartan inescindible simetrizable, entonces existe una unica $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots d_n) \cdot (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = b_{ji}$ son medios enteros ≤ 0 $i \neq j$ y b_{ii} son primos entre si.

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ dos matrices $n\times m$ $A\geqslant B$ $(A>B)$. si $a_{ij}\geqslant b_{ij}$ $(a_{ij}>b)$.

Lema 1.1.2.- Sea A una matriz de Cartan inescindible. Entonces

$$X\geqslant 0,\ X\neq 0,\ AX\geqslant 0 \Rightarrow X>0.$$

Dem.- Por una permutación de indices de la matriz A, podemos suponer que $x_i=0$ para $1\leq i\leq k$ y $x_i>0$ para $k<i\leq n$. Sea A' la matriz obtenida por dicha permutación. Así tenemos

$$A'X = A'(0,\cdots 0, x_{k+1},\cdots x_n) =$$

$$\left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{1j}x_j, \cdots, \sum_{j=k+1}^{n} a_{nj}x_j\right)\geqslant 0.$$ En particular $\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0$ para $i=1,\ldots k$; y

como cada $a_{ij}\leq 0$ para $1\leq i\leq k; k\leq j\leq n$ y los $x_j>0$ para $j>k$; tenemos que para estos indices $a_{ij}=0$ $(1\leq i\leq k,$ $k<j\leq n)$ y tambien $a_{ji}=0$ por ser A una matriz de Cartan. Por tanto A' es una matriz escindible, contradiciendo el hecho de que A es inescindible.

Lema.- 1.1.3.- Sea A una matriz $n\times n$ Entonces Existe $X>0$ tal que $AX<0$ y Existe $Y\geqslant 0$ $Y\neq 0$ tal que $A^t Y\geqslant 0$

Dem. [Ver]

Teorema. 1.- Sea A una matriz de Cartan inescindible. Entonces uno y sólo uno de los siguientes enunciados ocurre para A y para su transpuesta A'.

(P) $\det A \neq 0$; $AX \geqslant 0 \Rightarrow X > 0$ ó $X = 0$.

(Z) $\operatorname{rank} A = n-1$; Existe $X > 0$ tal que $AX = 0$ y además $AX \geqslant 0$, entonces $AX = 0$

(N) Existe $X > 0$ tal que $AX < 0$; $X \geqslant 0$ $AX \geqslant 0$, entonces $X = 0$.

Dem.- Supongamos que:

Existe $X \geqslant 0$ talque $AX \geqslant 0$ (1.1.2).

Probaremos que (P) ó (Z) ocurren.

Definamos el siguiente conjunto

$$K_A = \{X \mid AX \geqslant 0\}$$

Por lema 1.1.2 tenemos

$$K_A \cap \{X \geqslant 0\} \subset \{X > 0\} \cup \{0\} \quad (1.1.3)$$

claramente K_A es un cono (i.e. $X, Y \in K_A$ $X+Y \in K_A$, $\alpha \geqslant 0$ $\alpha X \in K_A$ $\alpha \in \mathbb{R}$).

Sea $X_0 \geqslant 0$ $X_0 \neq 0$ talque $AX_0 \geqslant 0$ existe por (1.1.2), así $X_0 \in K_A \cap \{X \geqslant 0\}$ y por (1.1.3) $X_0 > 0$.

Afirmamos que sólo uno de los siguientes enunciados ocurre:

$$K_A \subset \{X > 0\} \cup \{0\} \quad (1.1.4)$$

K_A es una linea (1.1.5)

En efecto: Supongamos que K_A es una linea; entonces $-X_0 \in K_A$ y $-X_0 < 0$ por tanto (1.1.4) no ocurre.

Ahora si $K_A \not\subset \{X > 0\} \cup \{0\}$ y K_A no es una linea. Entonces existe $Y \in K_A$ tal que $Y \not\geq 0$ (pues si $Y \geq 0$ por (1.1.3) $Y > 0$) y también existe $X_1 \in K_A$ linealmente independiente de X_0. En consecuencia tenemos que X_0, Y son linealmente independientes o dependientes. Si son independientes, y como $X_0 > 0$, $Y \not\geq 0$; existe $t \in]0,1[$ tal que $Z = tX_0 + (1-t)Y \in K_A$ y $Z \in \{X \geq 0\}$ con $Z \notin \{X > 0\}$ lo cual contradice (1.1.3). Si X_0, Y son dependientes, entonces X_1, Y son independientes. Si $X_1 \notin \{X \geq 0\}$, repetimos el argumento anterior para los vectores X_0 y X_1 que son linealmente independientes y si $X_1 \in \{X \geq 0\}$, por (1.1.3) $X_1 > 0$ y de nuevo repitiendo el mismo argumento con X_1 y Y, obtenemos una contradicción a (1.1.3). Luego la afirmación es cierta.

Hemos probado que si K_A es una linea; $AX_0 = 0$ y así obtenemos el caso (2); pero rank $A = n-1$. La segunda parte de (P) es identica a (1.1.4) y $\det A \neq 0$ ya que en caso contrario, existiría $Y \geq 0$ tal que $AY = 0$ y $A(-Y) = 0$ y $-Y \in \{X > 0\}$ lo cual no es posible. Entonces (1.1.4) implica (P).

Para ver que (P) o (Z) ocurren para A' tenemos que si existe $X \geq 0$ $X \neq 0$ tal que $AX \geq 0$, entonces

No existe $X \geq 0$ talque $AX \leq 0$ $AX \neq 0$ (1.1.5)

ya que si existiera tal X tendriamos que $-X \leq 0$ y $-X \in K_A$ y esto contradice (1.1.4) pues K_A no es una linea ($AX \neq 0$). Así (1.1.5) es cierto y por el lema 1.1.3.

$\exists\, Y \geq 0$ talque $A'Y \geq 0$, $Y \neq 0$ (1.1.6)

pues (1.1.5) implica $\nexists\, X > 0$ tal que $AX < 0$

Y de nuevo por lo de arriba y (1.1.6) tenemos que (P) o (Z) ocurren para A'.

Si (1.1.2) no es verdadera para A y A', entonces por lema 1.1.3, Existe $X > 0$ tal que $AX < 0$ y también para la transpuesta existe $X > 0$ tal que $A'X < 0$, claramente esto implica (N)

Por lema (1.1.3) (P) o (Z) son excluyentes con N y por (1.1.4) y (1.1.5) (P) y (Z) son mutuamente excluyentes (por diferencia de rangos)

Definición.- Con respecto a los casos (P), (Z) o (N) del teorema 1, decimos que la matriz de Cartan es de tipo positivo, cero o negativo respectivamente

Lema 1.1.4.- Si A es una matriz de Cartan inescindible tal que existe $X \geq 0$ para el cual $AX = 0$ $(X \neq 0)$, entonces A es de tipo cero

Dem.- Si existe un vector no cero $X \geq 0$ con $AX = 0$, entonces X cumple (1.1.2) y por consiguiente (1.1.4) o (1.1.5). Pero (1.1.4) no es posible porque del hecho de que $AX = 0$, tenemos que $\det A = 0$ y por lo tanto A es de tipo cero

Lema 1.1.5.- Si A es una matriz de Cartan de tipo positivo o de tipo cero, toda submatriz propia A_S de A es la suma directa de matrices de tipo positivo.

Dem.- Si A es una matriz de tipo positivo o de tipo cero, existe un vector $X = (x_1 \dots x_n)$ mayor que cero tal que $AX^T = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \geq 0$ $i = 1 \dots n$.

Sea X_S el vector formado por los x_i tal que $i \in S$. En consecuencia para cada $i \in S$, $\sum_{j \in S} a_{ij} x_j \geq 0$ (pues a la suma total se le quitar sumandos negativos). Así $A_S X_S \geq 0$ y $A_S X_S = 0$ únicamente $a_{ij} = 0$, para todo $i \in S$, $j \notin S$ ya que para $i \in S$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j =$

$$\underbrace{\sum_{j \in S} a_{ij} x_j}_{0} + \sum_{j \notin S} a_{ij} x_j = \sum_{j \notin S} a_{ij} x_j \geq 0, \text{ pero } x_j > 0$$

y $a_{ij} \leq 0$ (para $i \in S$ y $j \notin S$), por tanto $a_{ij} = 0$ para estos mismos índices, lo cual no puede ocurrir dado que A es una matriz inescindible (pues $a_{ij} = 0$ implica que $a_{ji} = 0$). Luego A no puede tener componentes de tipo negativo o de tipo cero.

Lema. 1.1.6.- Sea A una matriz de Cartan inescindible. Si A es de tipo positivo, ella no tiene ciclos. Si A es de tipo cero, ella no tiene ciclos o existe una matriz diagonal $D > 0$ tal que

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (1.1.8)$$

Dem.. Si A contiene un ciclo de longitud mayor que 2, entonces ella tiene una submatriz de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 & -b'_k \\ -b'_1 & 2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b'_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -b_{k-1} \\ -b_k & 0 & 0 & \cdots & -b'_{k-1} & 2 \end{bmatrix}, \quad b_i, b'_j > 0, \quad k > 2$$

Dado que A es de tipo positivo o de tipo negativo, por lema 1.1.5, B es de tipo positivo o de tipo **cero**; pero esto último ocurre solamente si A es de tipo cero y $B = A$.

Sea $y^T = (d_1, \dots d_n) > 0$ tal que $BY \geq 0$. Sea $\bar{B} = D^{-1} B D$, donde $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots d_n)$. En consecuencia

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & -b'_1 d_1^{-1} d_2 & 0 & \cdots & 0 & -b'_k d_1^{-1} d_k \\ -b_1 d_2^{-1} d_1 & 2 & -b_2 d_2^{-1} d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 d_3^{-1} d_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -b_{k-1} d_{k-1}^{-1} d_k \\ -b_k d_k^{-1} d_1 & 0 & 0 & \cdots & -b_{k-1} d_k^{-1} d_{k-1} & 2 \end{bmatrix}$$

Sea $E = (1 \dots 1)^T$, luego $\bar{B} E = D^{-1}(B D E)$
$= D^{-1}(BY) \geq 0$, ya que $BY \geq 0$ y $D^{-1} > 0$.
Claramente la suma de las coordenadas de $\bar{B} E$ es igual a la suma de los términos de $\bar{B}$. Del hecho de que $\bar{B} E \geq 0$, tenemos

$$2k - \sum_{i=1}^{k} (\bar{b}_i + \bar{b}'_i) \geq 0 \qquad (1.1.9)$$

pero $\bar{b}_i \bar{b}'_i = b_i d_i^{-1} d_{i+1} b'_i d'_{i+1} d_i = b_i b'_i \geq 1$ ya que A es una matriz de cartan; $\bar{b}'_i \geq \frac{1}{\bar{b}_i} > 0$ De (1.1.9) obtenemos:

$$2k \geq \sum(\bar{b}_i + \bar{b}'_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{b}_i + \frac{1}{\bar{b}_i}\right) =$$

$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\bar{b}_i^2 + 1}{\bar{b}_i}\right)$ sea $\bar{b}_t$ el menor de los $\bar{b}_i$ $(i = 1 \ldots k)$ luego $2k \geq k\left(\frac{\bar{b}_t^2 + 1}{\bar{b}_t}\right)$;

$2 \geq \frac{\bar{b}_t^2 + 1}{\bar{b}_t}$ $\quad 0 \geq -2\bar{b}_t + \bar{b}_t^2 + 1 = (\bar{b}_t - 1)^2$

de aquí $\bar{b}_t = 1$. En consecuencia $2(k-1) \geq \sum_{i \neq t} \frac{(\bar{b}_i^2 + 1)}{b_i}$. Iterando el mismo argumento encontramos que $\bar{b}_i = \bar{b}'_i = 1$ para todo i, es decir $\bar{B}$ tiene la forma (1.1.8). Así $\bar{B}$ es de tipo cero y además $\bar{B}E = 0$, pero $0 = \bar{B}E = D^{-1}(BDE) = D^{-1}(BY)$. Como $D^{-1} > 0$ diagonal y $BY \geq 0$ tenemos que $BY = 0$ luego B es de tipo cero por lema 1.1.4, por tanto B coincide con A, lo que demuestra que existe una matriz D = diagonal $(d_1, \ldots d_n)$ tal que

$D^{-1}AD = \bar{B}$ y $\bar{B}$ tiene la forma (1.1.8)

Lema 1.1.7. Si A es una matriz de Cartan inescindible de tipo positivo o de tipo cero ella es simetrizable.

Dem.- Por lema 1.1.6; A no tiene ciclos o $D^{-1}AD$ es una matriz de la forma (1.1.9), con D una matriz diagonal mayor que cero. En el primer caso para cualquier conjunto de indices $i_1, \ldots i_k$ con $k \geq 2$

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot a_{i_k i_1} = a_{i_1 i_k} \cdot a_{i_k i_1} \cdots a_{i_2 i_1}$$

pues si $k > 2$, ambos miembros de la igualdad son cero (A no tiene ciclos) si $k = 2$ es trivial ya que $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_1} = a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_1}$.

En el segundo caso; la matriz de la forma (1.1.9), claramente es simetrizable pues contiene fuera de la diagonal -1 o ceros

Por otro lado si $B = D^{-1}AD$ es simetrizable; A es simétrizable. En efecto:

$A = (a_{ij}) = DBD^{-1} = (d_i\, b_{ij}\, d_j^{-1})$. Luego

$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} = d_{i_1} b_{i_1 i_2} d_{i_2}^{-1} \cdot d_{i_2} \cdot b_{i_2 i_3} \cdot d_{i_3}^{-1} \cdots d_{i_k} b_{i_k i_1} d_{i_1}^{-1} = b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_k i_1} =$

$b_{i_1 i_k} \cdot b_{i_k i_{k-1}} \cdots b_{i_2 i_1} = d_{i_1} b_{i_1 i_k} \cdot d_{i_k}^{-1} d_{i_k} b_{i_k i_{k-1}}$

$d_{i_{k-1}}^{-1} \cdots d_{i_2} b_{i_2 i_1} d_{i_1}^{-1} = a_{i_1 i_k} \cdot a_{i_k i_{k-1}} \cdots a_{i_2 i_1}$

Por tanto en ambos casos; hemos demostrado que la matriz A es simetrizable.

1.2.. Matrices de Cartan Inescindibles de tipo cero. Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de Cartan $n\times n$. El diagrama $S(A)$ de Dynkin de A es la gráfica valuada, conteniendo n vertices $p_1,\dots,p_n$; los vertices p_j y p_i son unidos por $|a_{ij}|$ flechas, a cada de estas flechas se les llama la (j,i)-flecha. Para simplificar el diagrama: si $|a_{ij}|=|a_{ji}|=1$; solamente ponemos una linea de p_i a p_j. Si $|a_{ij}|>1$ pero $|a_{ji}|=1$, omitimos la (i,j) flecha.

Es claro que los diagramas determinan a la matriz de Cartan salvo una permutación de indices. También es claro que si la matriz es inescindible el diagrama correspondiente es conexo.

Ahora sea A una matriz de Cartan inescindible de tipo cero. Luego existe $x=(x_1,\dots x_n)>0$ con cada x_i entero tal que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0 \quad i=1\dots n \qquad (1.2.1)$$

Como $a_{ii}=2$ y $a_{ij}\leq 0$ $(i\neq j)$; tenemos que

$$\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j=2x_i \qquad (1.2.2)$$

A cada vertice p_j, le asignamos el número x_j. Entonces definimos el peso de cada (j,i) flecha como el número x_j/x_i. Por el teorema 1, todos los vectores X tal que $AX = 0$ son linealmente dependientes, por tanto el peso de cada flecha es independiente del vector escogido.

Obsevación.. La propiedad (c) implica que si existe una flecha de peso w, entonces existe una flecha de peso $1/w$.

De (1.2.2) tenemos

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \frac{x_j}{x_i} = 2 .$$

En consecuencia para cada vertice p_i, la suma de los pesos de todas las (j,i)-flechas es igual a 2. Por tanto si encontramos los diagramas conexos los cuales satifacen lo anterior; hemos determinado las matrices de Cartan inescindibles de tipo cero (salvo una permutación de indices)

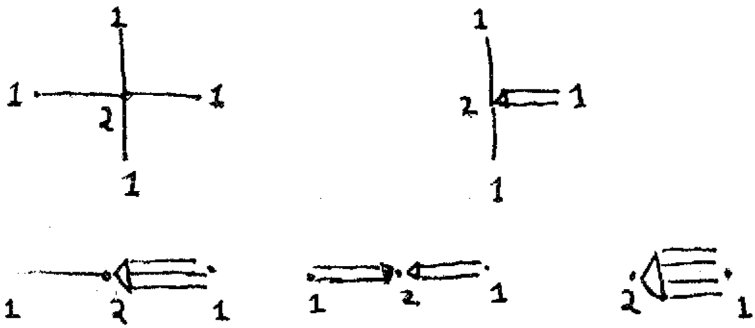
De la observación de arriba: si w es un peso de una flecha, tenemos $\frac{1}{2} \leq w \leq 2$ Luego existen a lo mas 4 flechas arribarse a cada vertice.

De lo anterior no existe un peso con valor entre $\frac{3}{2}$ y 2 ya que si existe hay al menos otro y este es mayor o igual a $1/2$ y así la soma de estos es mayor que 2, lo cual es imposible. Y de la observación de arriba no existen pesos con valores entre $1/2$ y $2/3$.

No hay pesos entre $4/3$ y $3/2$ pues si existe hay al menos otro arribando a este vertice y este debia de estar entre $1/2$ y $3/2$ lo cual no es posible. De la observación tenemos que no existen pesos entre $2/3$ y $4/3$

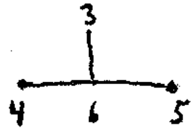
Nuestra información acerca de los pesos demuestra que:

1.- Si existen 4 flechas arribando a un vertice, el unico caso es que cada peso sea $1/2$ o sea $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2$:

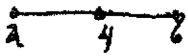


2.- Si existen 3 flechas arribando a un vertice, los unicos casos posibles son: $1/2 + 1/2 + 1$; $1/2 + 2/3 + 5/6$ $1/2 + 3/4 + 3/4$ y $2/3 + 2/3 + 2/3$.

Para el caso $1/2 + 2/3 + 5/6 = 3/6 + 4/6 + 5/6$:

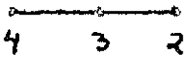


Completemos el diagrama: Por el vertice 3 no pueden arribar mas flechas pues el peso de la única es $6/3 = 2$. Ahora por el vertice 4, tenemos $6/4 + 2/4 = 2$



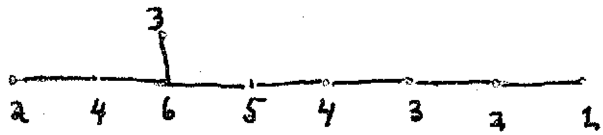
; para el vertice 2 ya no arriban mas flechas. De igual forma para el vertice 5, obtenemos $6/5 + 4/5 = 2$:

para el vertice 3: $4/3 + 2/3 = 2$,



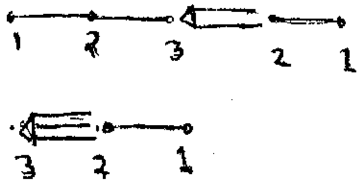
para el vertice 2: $3/2 + 1/2 = 2$;

y así para el vertice 1 ya no arriban mas flechas. En consecuencia el diagrama es:

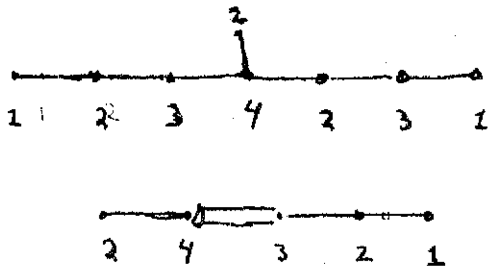


Ahora para el expresión $2/3 + 2/3 + 2/3$:

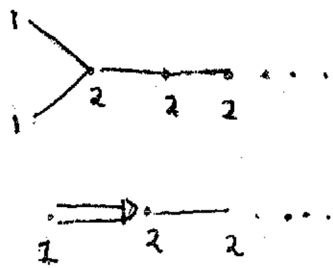
también para esta misma expresión:



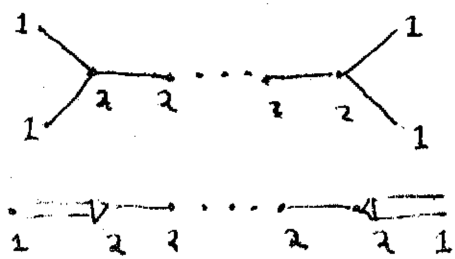
Para el caso $1/2 + 3/4 + 3/4 = 2/4 + 3/4 + 3/4$:

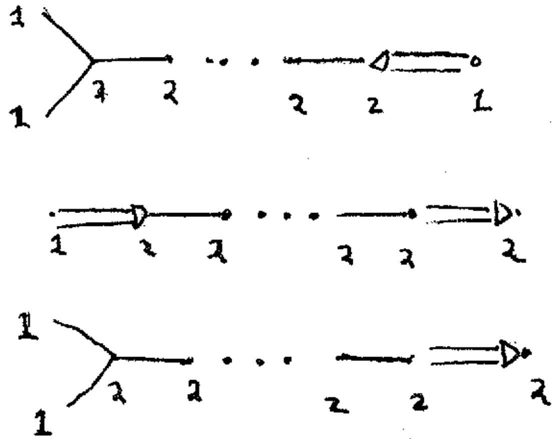


Para $1/2 + 1/2 + 1 = 1/2 + 1/2 + 2/2$:

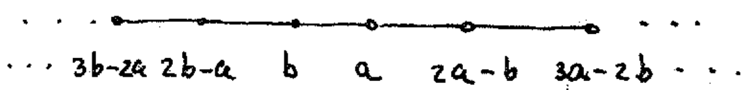


Luego de estos dos diagramas obtenemos:

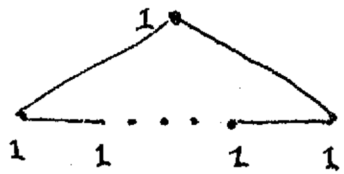


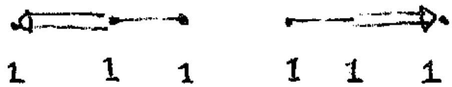


3.- Todos los demás diagramas tienen a lo mas dos flechas arribando a cada vertice ya que si hay un vertice que le arriben mas de dos flechas este diagrama sería uno de los casos anteriores. Así si a/b es el peso de una flecha el diagrama es



Si $a \neq b$, entonces de un lado los números que aparecen en los vertices crecen y del otro lado decrecen, por tanto el diagrama es infinito y así la matriz no sería finita. Ahora si $a = b$, tenemos:


1
1 1 1 1


1 1 1 1 1 1

1.3.- Algebras de Kac-Moody. En esta sección consideramos álgebras de Lie y espacios vectoriales sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$, mientras no se diga lo contrario

Definición.- Una descomposición de una álgebra de Lie $\mathcal{G}$ en una suma directa de subespacios

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_i \qquad (1.3.1)$$

con las siguientes propiedades es llamada una graduación de $\mathcal{G}$.

1.- $\dim \mathcal{G}_i < \infty$

2.- $[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}$

Una álgebra de Lie $\mathcal{G}$ con la graduación (1.3.1) es llamada graduada si

3.- $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ genera $\mathcal{G}$.

Al subespacio $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, se le llama parte local de $\mathcal{G}$.

De 2.-, tenemos que $\mathcal{G}_0$ es una subalgebra de Lie de $\mathcal{G}$, y también podemos definir una representación de $\mathcal{G}_0$ en el espacio $\mathcal{G}_n$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathcal{G}_0 &\longrightarrow \operatorname{End}(\mathcal{G}_n) \\ x &\longrightarrow \operatorname{ad} x \end{aligned}$$

donde $\varphi_n(x)\, y = [x, y]$.

Dos álgebras de Lie graduadas son consideradas isomorfas si existe un isomorfismo $\Phi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, que preserva la graduación en el sentido que $\Phi(\mathcal{G}_i) = \mathcal{G}_{\phi(i)}$, donde ϕ es un endomorfismo del grupo de los enteros. Por un morfismo de dos álgebras de Lie graduadas significamos un morfismo que preserva la graduación.

Definición.- Un álgebra de Lie graduada (1.3.1) es llamada transitiva si

4.- para $x \in \mathcal{G}_i$ $i \geq 0$, $[x, \mathcal{G}_{-i}] = 0$ implica $x=0$

5.- para $x \in \mathcal{G}_i$ $i \leq 0$, $[x, \mathcal{G}_i] = 0$ implica $x=0$

Definición Sea $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ una suma directa de espacios de dimensión finita. Supongamos que siempre que $|i+j| \leq 1$, se puede definir una operación bilineal anticonmutativa : $\mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j \to \mathcal{G}_{i+j}$ $((x, y) \longrightarrow [x, y])$ y también que la identidad de Jacobi es verdadera para cualquier triada de vectores, previendo que todos los conmutadores que ocurren en esta igualdad estan definidos. Entonces a $\hat{\mathcal{G}}$ se le llama un álgebra de Lie local.

Transitividad y homomorfismos de álgebras de Lie locales son definidas como para las álgebras de Lie graduadas.

Definición.- Un álgebra de Lie graduada $\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_i$ con parte local, es llamada máxima (respectivamente mínima) si para cualquier otra álgebra de Lie graduada $\mathcal{G}'$ y todo isomorfismo de las partes locales de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ pueden ser extendidos a un epimorfismo de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}'$ (de $\mathcal{G}'$ en $\mathcal{G}$)

Proposición 1.3.1.- Sea $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ una álgebra de Lie local. Entonces existe una álgebra de Lie graduada máxima y mínima cuyas partes locales son isomorfas a $\hat{\mathcal{G}}$.

Dem.- Sea $F\hat{\mathcal{G}}$ el álgebra de Lie libre generada por el espacio $\hat{\mathcal{G}}$, $\hat{I}$ el ideal de $F\hat{\mathcal{G}}$, generado por los elementos $[x,y]-z$ tales que $x, y, z \in \hat{\mathcal{G}}$ y $[x,y]=z$ en $\hat{\mathcal{G}}$. Sea $\tilde{\mathcal{G}} = F\hat{\mathcal{G}}/\tilde{I}$ y denotemos por $\tilde{\mathcal{G}}_{-1}$, $\tilde{\mathcal{G}}_0$, $\tilde{\mathcal{G}}_1$, las imagenes de los espacios $\mathcal{G}_{-1}$, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ respectivamente bajo el natural homomorfismo π de $F\hat{\mathcal{G}}$ en $\tilde{\mathcal{G}}$.

Sea $\tilde{\mathcal{G}}_-$ (resp. $\tilde{\mathcal{G}}_+$) la sobalgebra de $\tilde{\mathcal{G}}$ generada por el espacio $\tilde{\mathcal{G}}_{-1}$ ($\tilde{\mathcal{G}}_1$). Afirmamos que:

a) $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_- \oplus \tilde{\mathcal{G}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{G}}_+$ y las subalgebras $\tilde{\mathcal{G}}_-$ y $\tilde{\mathcal{G}}_+$ son libremente generadas por los espacios $\tilde{\mathcal{G}}_{-1}$ y $\tilde{\mathcal{G}}_1$ respectivamente.

b) El álgebra de Lie local $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$ es isomorfa a $\hat{\mathfrak{g}}$.

En particular si $\tilde{\mathfrak{g}}_i = \tilde{\mathfrak{g}}_1^{\,i}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_{-i} = \mathfrak{g}_{-1}^{\,i}$ entonces $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathfrak{g}}_i$. es un álgebra de Lie graduada máxima con parte local $\hat{\mathfrak{g}}$. Ya que si $\mathfrak{g}' = \oplus \mathfrak{g}_i$ otra álgebra de Lie graduada con parte local h y esta local isomorfa a $\hat{\mathfrak{g}}$, por definición de algebra de Lie graduada h, genera $\mathfrak{g}'$, entonces como $F\hat{\mathfrak{g}}$ es libre existe $\Theta : \mathbb{F}\hat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ tal que $\Theta(\hat{\mathfrak{g}}) = h$, Θ homomorfismo de algebras de Lie. Sea $x, y, z \in \hat{\mathfrak{g}}$, $\Theta([x,y]-z) = [\Theta(x), \Theta(y)] - \Theta(z) = [x,y]-z$ en $\hat{\mathfrak{g}}$, luego $\Theta(\hat{I}) = 0$. Así Θ induce un homomorfismo de $\hat{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{g}'$ y como $\mathfrak{g}'$ es generada por h y $\Theta(\hat{\mathfrak{g}}) = h$ este es un epimorfismo por tanto $\tilde{\mathfrak{g}}$ es un álgebra de Lie graduada máxima con parte local $\hat{\mathfrak{g}}$.

Sea $T = T(\mathfrak{g}_{-1}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_i$ el algebra tensorial sobre el espacio $\mathfrak{g}_{-1}$. A cada elemento de $\hat{\mathfrak{g}}$ le asociamos una transformación lineal φ de T como sigue:

i) $y \in \mathfrak{g}_{-1}$: $\varphi(y)a = y \otimes a \quad a \in T$

ii) $z \in \mathfrak{g}_0$: $\varphi(z)1 = 0$; $\varphi(z)a = [z,a]$ $a \in \mathfrak{g}_{-1} \subset T$; $\varphi(z)(a_1 \otimes a_2) = \varphi(z)a_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes \varphi(z)a_2$;

$a_1, a_2 \in T$

iii) $x \in \mathcal{G}_1$: $\varphi(x)1 = 0$; $\varphi(x)(a_1 \otimes a_2) = \varphi[x, a_1]a_2 + a_1 \otimes \varphi(x)a_2$; $a_1 \in \mathcal{G}_{-1} \subset T$, $a_2 \in T$.

Entonces podemos definir una transformación lineal $\Phi : F\hat{\mathcal{G}} \to \mathrm{End}(T)$ (por el parrafo anterior)

Probaremos las relaciones

1) $\varphi[y, z] = \varphi(y)\varphi(z) - \varphi(z)\varphi(y)$

2) $\varphi[y, x] = \varphi(y)\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(y)$

3) $\varphi[z, x] = \varphi(z)\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(z)$.

$(x \in \mathcal{G}_1, y \in \mathcal{G}_{-1}, z \in \mathcal{G}_0)$ por inducción sobre el grado de los elementos del álgebra tensorial T. Para elementos del campo es trivial.

Sea $a_1 \in \mathcal{G}_{-1}$, $a_2 \in T$, $a = a_1 \otimes a_2$, entonces $\varphi(z)\varphi(y)a = \varphi(z)(y \otimes a) = [z, y] \otimes a + y \otimes \varphi(z)a$; $\varphi(y)\varphi(z)a = y \otimes \varphi(z)a$; por tanto $\varphi[y, z] = \varphi(y)\varphi(z) - \varphi(z)\varphi(y)$. La formula 1) es cierta.

De nuevo $\varphi(y)\varphi(x)a = y \otimes \varphi(x)a$

$\varphi(x)\varphi(y)a = \varphi(x)(y \otimes a) = \varphi[x, y]a + y \otimes \varphi(x)a$

por tanto

$$\varphi[x, y]a = (\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x))a$$

Finalmente: $\varphi(z)\varphi(x)(a_1 \otimes a_2) = \varphi(z)\varphi[x, a_1]a_2 + \varphi(z)(a_1 \otimes \varphi(x)a_2) = \varphi(z)\varphi[x, a_1]a_2 + [z, a_1] \otimes \varphi(x)a_2 + a_1 \otimes \varphi(z)\varphi(x)a_2$;

$\varphi(x)\varphi(z)(a_1 \otimes a_2) = \varphi(x)(\varphi(z)a_1 \otimes a_2) + \varphi(a_1 \otimes \varphi(z)a_2) = \varphi[x, [z, a_1]]a_2 + [z, a_1] \otimes$.

$\otimes \varphi(x) a_2 + \varphi[X, a_1] \varphi(z) a_2 + a_1 \otimes \varphi(x) \varphi(z) a_2$

por hipótesis de inducción

$\varphi(z)\varphi(X) - \varphi(X)\varphi(z)(a_1 \otimes a_2) = \varphi(z)\,\varphi[X, a_1] a_2$

$+ [z, a_1] \otimes \varphi(X) a_2 + a_1 \otimes \varphi(z)\varphi(x) a_2 -$

$\varphi[X, [z,a]] a_2 - [z, a_1] \otimes \varphi(x) a_2 - \varphi[X, a]$

$- \varphi(z) a_2 - a_1 \otimes \varphi(X)\varphi(z) a_2 =$

$\varphi[z, [X, a_1]] - \varphi[X, [z,a]] a_2 + a_1 \otimes \varphi[z, x] a_2$

$= \varphi\{z, [X, a_1]\} + \varphi\{X, [a_1, z]\} a_2 + a_1 \otimes \varphi[z, X] a_2$

$= \varphi[[z, x], a_1] a_2 + a_1 \otimes \varphi[z, x] a_2$ pero $[z, X]$

$\in \mathcal{G}_{-1}$ lo anterior es igual a

$\varphi[z, x](a_1 \otimes a_2)$ lo que demuestra 3).

De las formulas 1), 2) y 3), tenemos que Φ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Y además si $[X,Y] - Z$ es un generador de $\tilde{I}$, entonces $\varphi([X,Y] - Z) = [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi(Z)$ (en $End(T)$) $= \varphi([X, Y] - Z)$ (en $\hat{\mathcal{G}}$) luego $\varphi([X,Y] - Z) = 0$ así $\varphi(\tilde{I}) = 0$. En consecuencia Φ induce una representación $\tilde{\Phi}$ del álgebra de Lie $\hat{\mathcal{G}}$

Si le proporsionamos al álgebra asociativa T, la estructura usual de álgebra de Lie, obtenemos un álgebra de Lie la cual es libremente generada por el subespacio $\mathcal{G}_{-1}$ [ver 5].

Por otro lado sean $y_1, y_2 \in \mathcal{G}_{-1}$

$\varphi[y_1, y_2]\cdot 1 = [\varphi(y_1), \varphi(y_2)]\cdot 1 = \varphi(y_1)\varphi(y_2)\cdot 1 - \varphi(y_2)\varphi(y_1)\cdot 1$
$= y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1$

Afirmamos que $\tilde{g}_{-1}$ es libremente generada por $\hat{g}_{-1}$. En efecto, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{g}_- \arrow[r] & F\hat{g}/\hat{I} \arrow[r, "\bar{\phi}"] & \mathrm{End}(T) \arrow[d, "\varphi(\ )\cdot 1"] \\
 & \tilde{g}_{-1} \arrow[u, hook] \arrow[ul, leftrightarrow] & T \\
 & & g_{-1} \arrow[u, hook] \arrow[ul, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

Como $\tilde{g}_{-1} = \pi(g_{-1})$; π es epi. Veamos que también es mono. Sea $x \in g_{-1}$, $\pi(x) \in \tilde{g}_{-1}$; $\bar{\phi}(\pi(x))\cdot 1$
$= \phi(x)\cdot 1 = \varphi(x) = x$, luego es mono. Así $g_{-1} \simeq \tilde{g}_{-1}$.

Del diagrama anterior, tenemos que existe un homomorfismo de $\tilde{g}_-$ en T. Por tanto si h es una álgebra, $h' \subset h$ y $h' \simeq \tilde{g}_{-1}$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{g}_- \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
h \arrow[rr, dashed, "t"] & & T \\
h' \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \tilde{g}_{-1} \arrow[uu, hook] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & g_{-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(si demostramos que existe h: que hace conmutativo el cuadro de la izquierda esta es única pues $\tilde{g}_-$ es generada por $\tilde{g}_{-1}$)

y así existe $t: T \to h$ (pues T es libremente generado por $\mathfrak{g}_{-1}$) y si definimos $h = t \circ f$, obtenemos que $h(\hat{\mathfrak{g}}_{-1}) = t(\mathfrak{g}_{-1}) = h'$, lo que demuestra que $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ es libremente generada por $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$.

Intercambiando los papeles de los espacios $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ en la representación ϕ, obtenemos una representación ϕ_1 del álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ en el álgebra tensorial $T(\mathfrak{g}_1)$; y de nuevo aplicando el anterior argumento vemos que $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ es libremente generada por el espacio $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ y π es un isomorfismo de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ en $\tilde{\mathfrak{g}}_1$

La suma de los espacios $\tilde{\mathfrak{g}}_-$, $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ es directa en efecto sean $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_-$, $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$ y $z \in \tilde{\mathfrak{g}}_+$; $w = x + y + z = 0$, entonces $\phi(w) = (\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)) \cdot 1 = x = 0$, de la misma forma $\phi_1(w) \cdot 1 = 0 + 0 + z = 0$, luego $z = 0$. Así hemos demostrado a).

Por la introducción, si es necesario, del álgebra de Lie local $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ en el álgebra de Lie local $\hat{\mathfrak{g}}' = \mathfrak{g}'_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, donde $\mathfrak{g}'_{-1} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus V$; $[V, \mathfrak{g}_1] = 0$, $[\mathfrak{g}_0, V] = R(\mathfrak{g}_0)(V) \subset V$ con la representación R de $\mathfrak{g}_0$ en V fiel (tal representación existe por el teorema de Ado-Iwasawa) podemos asumir que $\ker \tilde{\phi} \cap \mathfrak{g}_0 = 0$, ya que construimos ϕ' de $\mathfrak{g}$ en $T(\mathfrak{g}'_{-1})$ de la sig. forma

$\varphi' = \varphi$ en $\mathcal{G}_{-1}$, $x \in \mathcal{G}_1$; $\varphi'(x)(a+v) = \varphi(x)a + [x, v]$ $= \varphi(x)a + 0$. $z \in \mathcal{G}_0$, $\varphi'(z) \cdot 1 = 0$; $\varphi'(z)(a+v)$ $= [z, a] + [z, v]$ con $a \in T(\mathcal{G}_{-1})$, $v \in V$.

Ahora si $z \in \mathcal{G}_0$ y $\varphi(z)(a+v) = 0$ para todo $a+v \in \mathcal{G}'_{-1}$, tenemos en particular que $\varphi(z) \cdot v = 0$, pero como la representación es fiel $z = 0$ por tanto $\ker \phi' \cap \mathcal{G}_0 = 0$. Por otro lado φ' cumple las relaciones 1), 2) y 3) por ejemplo $\varphi'(z)\varphi'(x)(a+v) = \varphi(z)\varphi(x)a$; $\varphi'(x)\varphi'(z)$ $= \varphi(x)(\varphi(z)a + [a, v]) = \varphi(x)\varphi(z)a$ por tanto $\varphi'[z, x] = \varphi'(z)\varphi'(x) - \varphi'(x)\varphi'(z)$. En consecuencia tenemos que $I \cap \mathcal{G}_0 = 0$, pues $I \subset \ker \phi'$ y Π es un isomorfismo de $\mathcal{G}_0$ en $\tilde{\mathcal{G}}_0$, luego b) es verdadera. Por tanto el álgebra de Lie graduada $\tilde{\mathcal{G}}$ es máxima con parte local isomorfa a $\hat{\mathcal{G}}$. Entre los ideales $\mathcal{I} = \bigoplus \mathcal{I}_i$ homogenios cuya intersección con $\hat{\mathcal{G}}$ sea cero existe un único ideal máximo $\mathcal{I}$ (Pues la suma de estos es otro de ellos). Así el álgebra de Lie graduada $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{I}$ es mínima con parte local $\hat{\mathcal{G}}$. En efecto como $\mathcal{I} \cap \hat{\mathcal{G}} = 0$, luego tiene como parte local a $\hat{\mathcal{G}}$. Ahora si $\mathcal{G}'$ es un algebra de Lie graduada con parte local isomorfa a $\hat{\mathcal{G}}$; existe un epimorfismo $\psi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}'$ y como $\ker\psi$ $\subset \mathcal{I}$ por ser ideal homogenio y no intersecta a $\hat{\mathcal{G}}$, luego $\mathcal{G}' = \operatorname{Im}\psi \cong \tilde{\mathcal{G}}/\ker\psi \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}/\mathcal{I}$ epi.

Lema 1.3.1. Un algebra de Lie graduada $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_i$ mínima con parte local transitiva, es transitiva.

Dem.- Supongamos que $\mathcal{G}$ no es transitiva y sea $x \neq 0$ $x \in \mathcal{G}_k$ $k \leq 0$ tal que $[x, \mathcal{G}_1] = 0$ sea $\hat{\mathcal{G}}$ la parte local de $\mathcal{G}$, como $\hat{\mathcal{G}}$ es transitiva, entonces $k \leq -2$.

$$J = \bigoplus_{l,t=0}^{\infty} (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_{-1})^l (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_0)^t x .$$

Claramente es una subálgebra de Lie de $\mathcal{G}$.

Afirmamos que J es un ideal. En efecto: $J \neq 0$ ya que $x \in J$. Por ser J una subalgebra y $\mathcal{G}$ es generada por $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, es suficiente ver que $[\mathcal{G}_i, J] \subset J$ para $i = -1, 0, 1$ (por Jacobi). La primera es trivial de la definicion de J. Para $y \in \mathcal{G}_0$ o $y \in \mathcal{G}_1$, demostraremos que $[y, (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_{-1})^l (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_0)^t x] \subset J$ por inducción sobre $l+t$.

Para $l+t=0$, $\mathrm{ad}\,y(x) \in \mathrm{ad}\,\mathcal{G}_0(x)$ si $y \in \mathcal{G}_0$ y $\mathrm{ad}\,y(x) = 0$ para $y \in \mathcal{G}_1$, en ambos casos estan en el ideal J.

Supongamos válido el resultado para cualquier número menor que $l+t$.

Si $l > 0$, sea $z \in (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_{-1})^l (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_0)^t x$, entonces $z = \mathrm{ad}\,f(w)$, donde $f \in \mathcal{G}_{-1}$, $w \in (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_{-1})^{l-1} (\mathrm{ad}\,\mathcal{G}_0)^t x$. por Jacobi tenemos $[y,z]=[y,[f,w]]=-[f,[w,y]]-[w,[y,f]]$ pero $[w,y]\in J$ por hipótesis de inducción y $\operatorname{ad} f[w,y]\in J$ pues $f\in \mathcal{G}_{-1}$ y también $[y,f]\in J$. ya que $-[y,f]=\operatorname{ad} f(y)$, $f\in\mathcal{G}_{-1}$ y como $w\in J$ $[w,[y,f]]\in J$.

Si $l=0$, $z\in(\operatorname{ad}\mathcal{G}_0)^t x$, $z=\operatorname{ad}h(w)$ con $h\in\mathcal{G}_0$ $w\in(\operatorname{ad}\mathcal{G}_0)^{t-1}x$ de nuevo

$$[y,z]=[y,[h,w]]=-[h,[w,y]]-[w,[y,h]]$$

y por hipótesis de inducción $[w,y]\in J$ así $[h,[w,y]]\in J$; $[y,h]\in J$ y como $w\in J$ $[w,[y,h]]\in J$; $[y,z]\in J$.

Hemos demostrado que J es un ideal no cero Es diferente de $\mathcal{G}$ pues no contiene $\mathcal{G}_1$. Los grados de cada elemento de J son menores o iguales a k (de hecho pueden ser k, $k-1$, $k-2,\dots$ con $k\leq -2$) y los elementos de $\mathcal{G}_{-1}\oplus\mathcal{G}_0\oplus\mathcal{G}_1$ tienen como grado -1, 0 ó 1, en consecuencia J no intersecta a $\mathcal{G}_{-1}\oplus\mathcal{G}_0\oplus\mathcal{G}_1$. De aquí tenemos que $\mathcal{G}/J$ es un álgebra de Lie graduada con parte local $\mathcal{G}_{-1}\oplus\mathcal{G}_0\oplus\mathcal{G}_1$ y claramente no existe un epimorfismo de $\mathcal{G}/J$ en $\mathcal{G}$, así $\mathcal{G}$ no es mínima lo cual es una contradicción por tanto $\mathcal{G}$ es transitiva.

Definición.. Sea $A=(a_{ij})$, $i,j=1\dots n$ una matriz de Cartan. Sean $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$ los espacios sobre los complejos, con base $\{f_i\}$, $\{h_i\}$, $\{e_i\}$ respectivamente $(i=1\dots n)$

En $\hat{\mathfrak{g}}(A)=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ definamos una estructura de álgebra de Lie local por las relaciones:

$$\begin{aligned} &[h_i,h_j]=0 \qquad [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i \\ &[h_i,e_j]=a_{ij}e_j \quad [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j \end{aligned} \qquad (1.3.1)$$

Al álgebra de Lie graduada mínima $\mathfrak{g}(A)=\oplus\,\mathfrak{g}_i$ con parte local $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ es llamada álgebra de Kac-Moody.

Lema.. 1.3.2.. El centro Z del álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ consiste de elementos de la forma $\sum k_i h_i$, donde $\sum a_{ij}k_i=0$ y el álgebra $\mathfrak{g}'(A)=\mathfrak{g}(A)/_Z$ con la graduación inducida es transitiva.

Dem.. Claramente los elementos $x=\sum k_i h_i$, donde $\sum a_{ij}k_i=0$ para $j=1\dots n$ estan en el centro Z, pues de las relaciones (1.3.2) $[x,\mathfrak{g}_{-1}]=0=[x,\mathfrak{g}_0]=[x,\mathfrak{g}_1]$.

Sea $x\neq 0$ elemento de Z, entonces $[x,h_j]=0$ para $j=1\dots n$, pero esto ocurre solamente si $x \in \mathcal{G}_0$ por tanto $x \in \sum k_i h_i$ y como $x \in Z$, $0 = [x, e_j] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} k_j e_j$, así $\sum a_{ij} k_i = 0$ para $j = 1 \ldots n$.

El álgebra $\mathcal{G}'(A) = \mathcal{G}(A)/_Z$ tiene como parte local $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1/_Z$ y de las relaciones (1.3.2) y del hecho que A en cada columna tiene almenos una componente diferente de cero, $\hat{\mathcal{G}}(A)/_Z$ es transitiva ya que $x \in \mathcal{G}_{-1}/_Z$ ó $x \in \mathcal{G}_0/_Z$; $[x, \mathcal{G}_1/_Z] = 0$, entonces $x = 0$ (La otra parte se demuestra de la misma forma). $\mathcal{G}'(A)$ es un álgebra de Lie graduada minima ya que $\mathcal{G}(A)$ lo es. En consecuencia por lema 1.3.1 $\mathcal{G}'(A)$ es un algebra transitiva pues su parte local $\hat{\mathcal{G}}(A)/_Z$ lo es.

1.4.- Sistemas de Raices. En el subespacio $\mathcal{G}_0$ del álgebra de Kac-Moody, $\mathcal{G}(A) = \oplus \mathcal{G}_i$, consideremos las transformaciones lineales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ definidas por

$$\alpha_i(h_j) = a_{ij} \quad j = 1, \ldots n.$$

Sea Γ el grupo libre abeliano con los generadores libres $\alpha_1, \ldots \alpha_n$.

Definición. Si $[e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}] \neq 0$, entonces el elemento de Γ $\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$ es llamado una raíz positiva del álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$; si $[f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}] \neq 0$, entonces $\alpha = -\alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_k}$ es una raíz negativa. Las raices $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ son llamadas simples. Denotamos por $\Delta = \Delta(A)$ al conjunto de todas las raices de $\mathcal{G}(A)$ y también de $\mathcal{G}'(A) = \mathcal{G}/_{Z}$ y por Π el conjunto de todas las raices simples.

El espacio lineal generado por todos los posibles vectores $[e_{i_1}, \ldots e_{i_k}]$, donde $\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$ es llamado el espacio raíz correspondiente a la raiz α y es denotado por $\mathcal{G}_\alpha$ al número $\dim \mathcal{G}_\alpha$ se le llama multiplicidad de la raíz α. Analogamente es definido $\mathcal{G}_{-\alpha}$.

Lema 1.4.1.- El álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$ puede ser medida en otra álgebra de Lie

$\mathcal{G}(A')$ con A' una matriz de Cartan no degenerada, así los generadores canónicos de $\mathcal{G}(A)$ estan contenidos en el sistema de generadores canonicos de $\mathcal{G}(A')$.

Dem.- Sea n el numero natural el cual no es un valor propio de la matriz A. Entonces la matriz

$$A' = \begin{bmatrix} A & -nE \\ & \\ -2E & 2E \end{bmatrix}$$ donde E es la

matriz unidad, satiface

1) Es no degenerada, pues $A'[X,Y] = [AX - nY, -2(X+Y)] = 0$, implica $AX = nX$; o sea $X=0$ y $Y=0$.

2) Hay una inyección $i: \mathcal{G}(A) \hookrightarrow \mathcal{G}(A')$ de álgebras de Lie. En efecto: Como el tamaño de A' es mayor que el de A, tenemos una inyección de $\mathcal{G}_i$ en $\mathcal{G}_i'$ $(i=-1,0,1)$ y además la estructura de álgebra de Lie local en $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, es compatible con la imagen de $\hat{\mathcal{G}}$, porque A' contiene a A como un bloque.

Toda raiz $\alpha = \sum k_i \alpha_i$ determina una transformación lineal en el espacio $\mathcal{G}_0$: $\alpha(h) = \sum k_i \alpha_i(h)$. Si $\det A \neq 0$ y $\alpha' = \sum k_i' \alpha_i$ $\alpha = \sum k_i \alpha_i$ dos raices diferentes, entonces determinan diferentes transformaciones, pues en caso contrario si $\alpha'(h_j)=\alpha(h_j)$ para $j=1,\ldots n$, tendríamos que el sistema $\sum a_{ij}x_i=0$ $j=1,\ldots n$ tiene solución no trivial: $k_1'-k_1, \ldots k_n'-k_n$ lo que contradice el hecho de que $\det A\neq 0$. Por lema 1.4.1. podemos conseguir lo anterior para toda álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$ introduciendo $\Delta(A)$ en el sistema de raíces $\Delta(A')$, de un álgebra de Lie $\mathcal{G}(A')$ con la matriz de Cartan A' no degenerada.

Lema.. 1.4.2.. El mapeo $e_i\to f_i$, $f_i\to e_i$, $h_i\to h_i$ $i=1\ldots n$, induce un automorfismo del álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$. Si $\alpha\in\Delta(A)$, entonces $-\alpha\in\Delta(A)$.

Dem.. Sea φ el mapeo inducido, claramente $\varphi\cdot\varphi=1$ y por la definición del producto de Lie en el álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$, tenemos que φ es un automorfismo, así si $\alpha\in\Delta(A)$ $\mathcal{G}_{-\alpha}=\varphi(\mathcal{G}_\alpha)\neq 0$ por tanto $-\alpha\in\Delta(A)$.

Lema 1.4.3.. Las siguientes relaciones son verdaderas:

$$[e_\alpha,e_\beta]=\begin{cases}\in\mathcal{G}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta\in\Delta(A)\\ =0 & \text{si } \alpha+\beta\notin\Delta(A)\end{cases}\qquad(1.4.1).$$

$$[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha \quad \text{si } h\in\mathcal{G}_0 \qquad (1.4.2.)$$

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(A)} \mathcal{G}_\alpha \qquad (1.4.3).$$

Dem.. sean $e_\alpha = [e_{i_1} \dots e_{i_k}]$, $e_\beta = [e_{j_1}, \dots, e_{j_t}]$, $[e_\alpha, e_\beta] = [e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_t}]$; si $\alpha + \beta$

es una raiz, claramente $[e_\alpha, e_\beta] \in \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$ y si no $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ (por la definición de raíz).

sea $\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$, la prueba de (1.4.2) será por inducción sobre k. si $k = 1$

$[h, e_{\alpha_1}] = \alpha(h) e_{\alpha_1}$. supongamos válido el resultado para k-1, entonces si $\alpha' = \alpha - \alpha_{i_k}$.

$[h, e_{\alpha'}] = \alpha(h) e_{\alpha'}$ y

$$[h, e_\alpha] = [h, [e_{\alpha'}, e_{i_k}]] = [e_{\alpha'}, [h, e_{i_k}]] + [[h, e_{\alpha'}], e_{i_k}] = \alpha_{i_k}(h)[e_{\alpha'}, e_{i_k}] + \alpha'(h)[e_{\alpha'}, e_{i_k}] = \alpha(h) e_\alpha.$$

Para probar la última relación, podemos suponer que $\det A \neq 0$. Veamos primero que la suma es directa, para esto supongamos que entre los vectores raices correspondientes a diferentes raices hay una relación lineal; tomemos la mas corta: $x = e_\alpha + e_\beta + \dots$. Como diferentes raices determinan diferentes transformaciones; existe $h \in \mathcal{G}_0$ tal que $\alpha(h) \neq \beta(h)$; luego:

$$0 = [h, e_\alpha] + [h, e_\beta] + \cdots = \alpha(h) e_\alpha + \beta(h) e_\beta + \cdots$$

restando el miembro derecho de la igualdad anterior con $= \alpha(h) e_\alpha + \alpha(h) e_\beta + \cdots$, obtenemos $(\beta(h) - \alpha(h)) e_\beta + \cdots = 0$ y esta es una dependencia lineal mas corta que χ, contradicción por tanto la suma es directa.

La igualdad se obtiene de la definición de los $\mathcal{G}_i$ y de los $\mathcal{G}_\alpha$ (con α una raíz).

En el espacio $L = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ introducimos las transformaciones lineales $\phi_1 \ldots \phi_n$ por:

$$\phi_i(\alpha_j) = a_{ij} \qquad j = 1 \ldots, n$$

Definimos los endomorfismos $r_1, \ldots r_n$ en L por: $r_i(\alpha) = \alpha - \phi_i(\alpha)\alpha_i \quad \alpha \in L \quad (1.4.4.)$

Claramente $\alpha_i(h_j) = \phi_i(\alpha_j)$.

Los endomorfismo r_i son reflexiones con respecto al hiperplano $\phi_i = 0$ y $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$

Definición. Al subgrupo $W = W(A)$ del grupo de automorfismos de L generado por las reflexiones $r_1, \ldots, r_n$ es llamado el grupo de Weyl.

Definamos la acción de W en el espacio $\mathcal{G}_0$ de la forma $r_i(h) = h - \alpha_i(h) h_i$ $i = 1, \ldots, n$

Lema. 1.4.4.- $(w\alpha)(wh) = \alpha(h)$, $\alpha\in\Gamma$, $h\in\mathcal{G}_0$

Dem.- $r_i \alpha_j r_i(h_k) = r_i\alpha_j(h_k - \alpha_i(h_k)h_i)$

$= (\alpha_j - a_{ij}\alpha_j)(h_k - a_{ik}h_i) = \alpha_j(h_k - a_{ik}h_i) -$

$- a_{ij}\alpha_i(h_k - a_{ik}h_i) = \alpha_j(h_k) - a_{ik}\alpha_j h_i -$

$a_{ij}\alpha_i(h_k) - a_{ij}a_{ik}\alpha_i(h_i) = \alpha_j(h_k) - (a_{ik}a_{ij}$

$- a_{ij}a_{ik} + 2a_{ij}a_{ik})h_i = \alpha_j(h_k).$

De lo anterior y de la definición del grupo de Weyl, tenemos: $(w\alpha)(wh) = \alpha(h)$.

Por inducción se puede demostrar las formulas:

$$[(ad\, e_i)^t e_j, f_i] = t(a_{ij} - t+1)(ad\, e_i)^{t-1} e_j$$
$$[(ad\, f_i)^t f_j, e_i] = t(a_{ij} - t+1)(ad\, f_i)^{t-1} f_j.$$

para $i\neq j$ y $t\in\mathbb{N}$.

Lema.. 1.4.5.- Para $i\neq j$;

$$E_{ij} = (ad\, e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0$$

$$F_{ij} = (ad\, f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0$$

Dem.- Como $E_{ij}\in\mathcal{G}_\mu$ y $\mu>0$, entonces para demostrar la primera ecuación es suficiente ver que $[E_{ij}, f_s] = 0$ para todo $s=1\dots n$ ya que $\mathcal{G}'(A)$ es transitiva por lema 1.3.1. (Pues $E_{ij}\notin Z$).

cuando $s\neq i$: $[e_i, f_s] = 0$, luego

$ad e_i \, ad f_i \, x = [e_i, [f_s, x]] = [f_s, [e_i, x]] + [x, [e_i, f_s]] = ad f_s \, ad e_i \, x$ i.e. $ad e_i$ y $ad f_s$ commutan y así $[E_{ij}, f_s]$

$$= [(ad e_i)^{-a_{ij}+1} e_j, f_s] = (ad e_i)^{-a_{ij}+1} ad f_s \, e_j,$$

entonces si $s \neq j$

$$[E_{ij}, f_s] = 0$$

Ahora si $s = j$ $[E_{ij}, f_s] = (ad e_i)^{-a_{ij}+1} h_j$ pero por (1.3.2) $ad e_i \, h_j = -a_{ij} e_i$ si $a_{ij} \neq 0$, entonces $-a_{ij} + 1 \geq 2$ y así $[E_{ij} f_s] =$ $-a_{ij} (-ad e_i)^{(-a_{ij}-1)} ad e_i \, e_i = -a_{ij} (-ad e_i)^{(-a_{ij}-1)} [e_i, e_i] = 0$. Si $a_{ij} = 0$, tenemos $[E_{ij}, f_s] = 0$.

Por último si $s = i$ tenemos que:

$$[(ad e_i)^{-a_{ij}+1} e_j, f_i] = (-a_{ij}+1)(a_{ij} - (a_{ij}+1-1)) \cdot (ad e_i)^{-a_{ij}} e_j = 0.$$

Lema 1.4.6.- Los endomorfismos $ad e_i$ y $ad f_i$ son localmente nilpotentes.

Dem.- Sea $\mathcal{G}'$ el subespacio de los $z \in \mathcal{G}(A)$ tal que existe un entero k_z con $(ad e_i)^{k} z = 0$. Demostraremos que $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

De la formula:

$$(ad\, e_i)^k [z_1, z_2] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [(ad\, e_i)^j z_1, (ad\, e_i)^{k-j} z_2]$$

tenemos que si $z_1, z_2 \in \mathfrak{g}'$ y $k = 2$ máximo de $\{k_{z_1}, k_{z_2}\}$, la anterior igualdad es igual a cero lo que dice que $\mathfrak{g}'$ es una subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Del lema 1.4.5, $\mathfrak{g}'$ contiene a los $\{e_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ y también a los f_j; $j = 1, \ldots n$, pues $[ad\, e_i, f_j] = 0$ y a los h_i ya que $h_i = [e_i, f_i]$. Por tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ (por ser $\mathfrak{g}'$ una subalgebra). Así $ad\, e_i$ es localmente nilpotente.

Lema.- 1.4.7. El sistema $\Delta(A)$ es invariante bajo el grupo de Weyl.

Dem.- Por lema 1.4.6.- los automorfismos $\exp(ad\, e_i)$ y $\exp(ad\, f_i)$ estan bien definidos. En consecuencia consideremos el automorfismo de $\mathfrak{g}$:

$$\sigma_i = \exp(ad\, e_i) \exp(ad - f_i) \exp(ad\, e_i)$$

$\sigma_i(h_i) = -h_i$ En efecto:

$$\exp(ad\, e_i)(h_i) = h_i + (ad\, e_i) h_i + \frac{(ad\, e_i)^2 h_i}{2!} + \cdots$$

$$= h_i - 2e_i$$

$$\exp(ad - f_i)(h_i - 2e_i) = h_i - 2e_i + ad - f_i (h_i - 2e_i) + \frac{(ad - f_i)^2 (h_i - 2e_i)}{2!} + \cdots$$

$= h_i - 2e_i - 2f_i - 2h_i + 4\frac{f_i}{2} = -h_i - 2e_i$

$\exp \operatorname{ad} e_i(-h_i - 2e_i) = -h_i - 2e_i + \operatorname{ad} e_i(-h_i - 2e_i)$
$+ \frac{(\operatorname{ad} e_i)^2(-h_i - 2e_i)}{2!} + \cdots = -h_i - 2e_i + 2e_i = h$

Ahora si $\alpha_i(h) = 0$, entonces de lo anterior y de que $\operatorname{ad} e_i(h) = -\alpha(h)e_i$; $\sigma_i(h) = h$. Luego $\sigma_i(h) = r_i(h)$ para $h \in \mathcal{G}_0$. De (1.4.2) $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$; aplicando σ_i obtenemos:
$[\sigma_i h, \sigma_i e_\alpha] = \alpha(h)\sigma_i e_\alpha = [r_i h, \sigma_i e_\alpha] = (r_i h)(r_i h)\sigma_i e_\alpha$
Como r_i es un automorfismo en $\mathcal{G}_0$, tenemos que $[h, \sigma_i e_\alpha] = (r_i\alpha)h\,\sigma_i e_\alpha$. Por otro lado $\sigma_i e_\alpha = X_{\beta_1} + X_{\beta_2} + \cdots$ aplicando h, obtenemos $[h, \sigma_i e_\alpha] = \beta_1(h)X_{\beta_1} + \beta_2(h)X_{\beta_2} + \cdots = r_i\alpha(h)X_{\beta_1} + r_i\alpha(h)X_{\beta_2} + \cdots$ sustituyendo $\sigma_i e_\alpha$. Entonces por lema 1.4.1. $r_i\alpha = \beta_1$ ya que h es arbitraria y así $\sigma_i e_\alpha = X_{r_i\alpha}$ o sea $\sigma_i \mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}_{r_i(\alpha)}$; y esto implica que σ_i es un automorfismo de álgebras de Lie graduadas. Luego si α es una raíz $r_i\alpha$ también es una raíz. Del hecho de que W es generado por las reflexiones $r_1 \ldots r_n$ obtenemos el lema.

Lema 1.4.8.- El conjunto $\Delta^+ - \{\alpha_i\}$ es invariante bajo r_i. (Δ^+ = raíces positivas).

Dem.- Sea $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha_i\}$;

$\beta = \sum_{\gamma \in \Pi} k_\gamma \gamma$ con $k_\gamma \geq 0$ enteros. Como β no es proporsional a α_i, entonces $k_\gamma \neq 0$ para algun $\gamma \neq \alpha_i$ Pero este coeficiente de γ en $r_i(\beta) = \beta - \phi_i(\beta)\alpha_i$ es el mismo k_γ luego $r_i(\beta) \in \Delta^+ - \{\alpha_i\}$.

Lema 1.4.9. El conjunto $\Delta^+(A)$ es unicamente definido por las siguientes propiedades:

i) $\Pi \subset \Delta^+(A) \subset \Gamma^+$; $2\alpha \notin \Delta^+$ si $\alpha \in \Pi$.

ii) si $\alpha \in \Delta^+(A)$ y $\alpha \neq \alpha_i \in \Pi$, entonces $\alpha + k\alpha_i \in \Delta^+$ si y sólo si $-p \leq k \leq q$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $p - q = \phi_i(\alpha)$

Dem.- i) Claramente de la definición de los $\mathfrak{g}_\alpha$, tenemos $\Pi \subset \Delta^+(A) \subset \Gamma^+$; $\mathfrak{g}_{2\alpha_i} = 0$ ya que $\mathfrak{g}_{2\alpha_i}$ es el sobespacio generado por los vectores $[e_i, e_i] = 0$. Por tanto $2\alpha_i$ no es una raiz.

ii) Por lema 1.4.2 es suficiente demostrarlo para $\alpha > 0$. Es obio que existe p máximo para el cual $\alpha - p\alpha_i \in \Delta(A)$ ($p \geq 0$). Dividimos el conjunto Σ de todas las raices de la forma $\alpha + k\alpha_i$ en "progresiones".

$$\Sigma_s = \{\alpha + p_s\alpha_i,\ \alpha + (p_s+1)\alpha_i, \dots, \alpha + q_s\alpha_i\}$$

donde $-p = p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 \leq \dots$ tales que $\alpha + (p_s - 1)\alpha_i$; $\alpha + (q_s+1)\alpha_i$ no son raices.

$$ad\, e_i(\mathcal{G}_{\alpha + k\alpha_i}) \subset \mathcal{G}_{\alpha+(k+1)\alpha_i}$$

$$ad\, f_i(\mathcal{G}_{\alpha + k\alpha_i}) \subset \mathcal{G}_{\alpha+(k-1)\alpha_i}$$

Entonces cada subespacio $\bigoplus_{k=p_s}^{q_s} \mathcal{G}_{\alpha + k\alpha_i}$ es invariante bajo el automorfismo

$$\sigma_i = \exp(ad\, e_i)\exp(ad\, {-f_i})\exp(ad\, e_i).$$

Luego del hecho $\sigma_i(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{G}_{r_i(\alpha)}$ (lema 1.4.7), tenemos que cada Σ_s es invariante bajo r_i ($\sigma(\mathcal{G}_{\alpha+k\alpha_i}) = \mathcal{G}_{r_i(\alpha+k\alpha_i)}$ $\subset \bigoplus_{k=p_s}^{q_s} \mathcal{G}_{\alpha+k\alpha_i}$ y $\mathcal{G}_{r_i(\alpha+k\alpha_i)} \neq 0$ por tanto $r_i(\alpha + k\alpha_i) \in \Sigma_s$. El conjunto $\{\alpha + t\alpha_i \mid t \in \mathbb{R}\}$ es invariante bajo r_i, ($r_i(\alpha + t\alpha_i) = \alpha - (\phi_i(\alpha) + t)\alpha_i$) y es una reflexión con respecto al punto

$$\gamma = \alpha - \tfrac{1}{2}[\alpha(h_i)\alpha_i] \text{ ya que } r_i(\gamma) =$$

$$= \alpha - \phi_i(\alpha)\alpha_i + \frac{\alpha(h_i)}{2}\alpha_i = \alpha - \left(\alpha(h_i) + \frac{\alpha(h_i)}{2}\right)\alpha_i$$

$= \alpha - \frac{1}{2}\alpha(h_i)\alpha_i$ La progresión Σ_s debe de contener con cada raíz la raíz "simétrica" con respecto a γ, en efecto $r_i(\alpha + k\alpha_i)$ $= \alpha - (\alpha(h_i) + k)\alpha_i$.

Así si $q_1 = q = -\alpha(h_i) - p$, tenemos que $\Sigma = \Sigma_1$. En consecuencia

$$\alpha - p\alpha_i,\ \alpha - (p-1)\alpha_i \ldots \alpha,\ \alpha + \alpha_i \ldots \alpha + q\alpha_i$$

son raices.

1.5.- Raices Reales e Imaginarias. Decimos que una raíz α es real si $w(\alpha)$ es una raíz simple para algún $w \in W$; todas las otras raices son llamadas imaginarias. Claramente α y $-\alpha$ son ambas reales o ambas imaginarias, ya que $-w(\alpha) = w(-\alpha)$ y por lema 1.4.2.. Denotamos por Δ^{re}, Δ^{re}_{+}, Δ^{im} y Δ^{im}_{+} los conjuntos de todas las raices reales, reales positivas, imaginarias e imaginarias positivas respectivamente.

El estudio de los sistemas de raices pueden ser estudiados sin perdida de generalidad con la suposición de que la matriz A es inescindible. En efecto si $A_1, .., A_s$ son los bloques inescindibles de A; entonces el álgebra de Lie $\mathcal{G}(A)$ es isomorfa a la suma directa de las $\mathcal{G}(A_i)$; $\Delta(A)$ es la unión disjunta de los $\Delta(A_i)$ y $W(A)$ es el producto directo de los $W(A_i)$ y $W(A_i)$ actua trivialmente en $\Delta(A_j)$ para $i \neq j$ ya que $\phi_i(\alpha_j) = a_{ij} = 0$ y así $r_i(\alpha_j) = \alpha_j$.

Definición. Denotemos por K al conjunto de vectores $\alpha = \sum_i c_i \alpha_i \in L$ satifaciendo las siguientes propiedades:

i) Uno de los c_i es no negativo; $c_i \geq 0$, si $S(A) - \{P_i\}$ contiene una componente conexa de tipo negativo.

ii) $\phi_i(\alpha) = \sum_j a_{ij}c_j \leq 0 \quad i=1,\dots n$

Al conjunto K le llamamos la Camara Fundamental.

Lema.. 1.5.1.. Si $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \in K$. Entonces $c_i \geq 0$ para todo $i = 1,\dots,n$

Dem.. Supongamos lo contrario es decir existen P' y P'' tales que $c_i < 0$ para $i \in P''$, así

$$\alpha = \beta - \gamma, \text{ donde } \beta = \sum_{i\in P'} c_i\alpha_i \ , \ \gamma = \sum_{j \in P''} -c_j\alpha_j$$

claramente P' y P'' son subdiagramas de $S(A)$ sin vertices en común y P' es la unión de subdiagramas de tipo positivo o de tipo cero ya que $P' \subset S(A) - P_j$ para cada $j \in P''$ y así si P' tiene componente de tipo negativo, entonces $c_j \geq 0$ para este $P_j \in P''$ (definición de K). contradiciendo la elección de P''.

Por la definición de K $\phi_i(\alpha) \leq 0$ para todo $P_i \in P'$ pues $\phi_i(\alpha) = \sum a_{ij} c_j \leq 0$, luego $\phi_i(\beta) - \phi_i(\gamma) \leq 0$ pero como $P_i \notin P''$

$$\phi_i(\gamma) = \sum_{P_j \in P''} a_{ij}(-c_j) \leq 0 \ (\ a_{ij} \leq 0 \quad -c_j \leq 0$$

para $j \in P''$) En consecuencia $\phi_i(\beta) \leq \phi_i(\gamma) \leq 0$ para todo $i \in P'$. Luego P' es de tipo cero y $\phi_i(\beta) = 0$ para todo $i \in P'$. Como la matriz A es inescindible, existe $i \in P'$ tal que $\phi_i(\gamma) = \sum_{j\in P''} a_{ij}(-c_j) < 0$ pues existe $j \in P''$ tal que $a_{ij} < 0$. Así para este $i \in P'$ $(c_i > 0)$ $\phi_i(\alpha) = \phi_i(\beta) - \phi_i(\gamma) > 0$, contradiciendo que $\alpha \in K$.

Lema 1.5.2.- a) El conjunto Δ_+^{im} es W-invariante; si $\alpha \in \Delta_+^{im}$, entonces $w(\alpha) \in K$ para algún $w \in W$. Si la matriz es de tipo cero; $K = 0$

b) Si la matriz es de tipo cero, entonces $K = \mathbb{R}_+ \cdot \delta$, donde $\delta = \sum a_i \alpha_i$ siendo los a_i los números que aparecen montados en los vertices de las graficas de la sección 1.3.

c) Si la matriz es de tipo negativo, entonces K es un cono solido

d) Si $\alpha \in \Delta^{re}$, entonces existe una sucesión $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ tal que $r_{i_s}, \ldots, r_{i_1}(\alpha) \in \Gamma_+ - \Pi$ para todo $1 \leq s \leq k$ y $r_{i_k} \cdots r_{i_1}(\alpha) \in \Pi$.

Dem.. Sea $\alpha \in \Delta_+^{im}$, entonces $r_i(\alpha) \in \Delta_+ - \Pi$ para $i = 1 \ldots n$. Ahora $r_i(\alpha) \in \Delta_+^{im}$ ya que si no existe $w \in W$ tal que $w \cdot r_i(\alpha) \in \Pi$, contradiciendo de que $\alpha \in \Delta_+^{im}$.

Por otro lado como $\alpha \in \Delta^+$ es evidente que cumple con la definición de K. Entre los elementos $w(\alpha)$, $w \in W$, tomemos el de menor peso β. Entonces $\phi_i(\beta) \leq 0$ para cada i pues si para algún $\phi_i(\beta) > 0$: $r_i(\beta) = \beta - \phi_i(\beta)\alpha_i$ tendría menor peso que β lo que demuestra que $\beta \in K$.

Si existe $\alpha \in K$, diferente de cero, entonces $q_i(\alpha) \leq 0$ $i=1\cdots n$ o sea $A(\alpha) \leq 0$, luego $A(-\alpha) \geq 0$ y $-\alpha > 0$ contradiciendo de que $\alpha \in K$ (lema 1.5.1.)

b) supongamos que $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \in K$ por lema 1.5.1 $c_i > 0$ para $i=1\cdots n$ y como la matriz es de tipo cero $q_i(\alpha) = 0$ para $i=1\ldots n$ y por la sección 1.3, tenemos que los c_i son los mismos números que aparecen montados en los vertices de los diagramas excepto por un factor positivo

c) Es claro del teorema 1

d) si $\alpha \in \Delta_+^{re} - \Pi$, entonces existe $w = r_{i_k}\cdots r_{i_1}$ tal que $w(\alpha) \in \Pi$ y $r_{i_s}\cdots r_{i_1}(\alpha) \notin \Pi$ $1 \leq s < k$ (escogiendo k el minimo)

Definición Para un elemento $\alpha = \sum k_i\alpha_i \in \Gamma$. Llamamos soporte de α al subdiagrama del diagrama de Dynkin $S(A)$, consistiendo de los vertices p_i para los cuales $k_i \neq 0$ y todas las aristas que unen estos vertices.

Lema 1.5.3. Si $\alpha \in K \cap \Gamma$ y el soporte de α es un diagrama conexo. Entonces $\alpha \in \Delta_+^{im}$.

Dem.. Por lema 1.5.1, si $\alpha = \sum k_i\alpha_i \in K \cap \Gamma$; $\alpha \in \Gamma_+$. El conjunto $\Omega = \{\gamma \in \Delta_+ \mid \alpha - \gamma \in \Gamma_+\}$ es no vacio ya que contiene alguna raíz simple α_j ; $\alpha - \alpha_j = \sum_{i \neq j} k_i \alpha_i + (k-1)\alpha_j \in \Gamma_+$.

Sea $\beta = \sum m_i \alpha_i$ el elemento de peso máximo de Ω (existe pues Ω es acotado con respecto al peso pues en caso contrario podríamos encontrar $\gamma \in \Omega$ tal que $\alpha - \gamma \notin \Gamma_+$). Primero probaremos que $\alpha \in \Delta_+$. Supongamos lo contrario, entonces $\alpha \neq \beta$ pues $\beta \in \Delta_+$. Como $K \neq 0$, entonces por lema 1.5.2, la matriz de Cartan es de tipo cero o negativo, pero por lema 1.4.9. existe $\alpha_j \in \Pi$ tal que $\beta + \alpha_j \in \Delta_+$ (ya que si para todo i, $\beta + \alpha_i \notin \Delta_+$, entonces $-p_i \leq 1 \leq q_i$ no sería cierto, luego $q_i = 0$, de aquí

$\phi_i(\alpha) = p_i$ positivo, contradicción de que la matriz de Cartan sea de tipo cero o negativo).

En consecuencia

$$P = \{ p_i \in S(A) \mid k_i = m_i \} \neq \emptyset \quad (1.5.1).$$

En efecto: $\beta + \alpha_j \in \Delta_+$ y $\alpha - (\beta + \alpha_j) =$

$\sum_{i \neq j} (k_i - m_i)\alpha_i + (k_j - m_j - 1)\alpha_j$. Y por la definición de Ω, tenemos que $k_i \geq m_i$ (pues $\beta \in \Omega$ y $\alpha - \beta \in \Gamma_+$). Ahora si $P = \emptyset$ es decir $k_i > m_i$; $i = 1, \ldots n$, tenemos que

$\alpha - (\beta + \alpha_j) \in \Gamma_+$ y claramente $\beta + \alpha_j$ es de peso mayor que β, contradicción a la elección de β, luego $P \neq \emptyset$.

$$\beta + \alpha_i \notin \Delta_+ \quad \text{si } k_i > m_i \qquad (1.5.2.)$$

Ya que si $k_i > m_i$ y $\beta + \alpha_i \in \Delta_+$ por el parrafo anterior $\beta + \alpha_i \in \Omega$ de peso mayor que β. y de nuevo una contradicción.

Sea R una componente conexa del subdiagrama (soporte α) $- P$

sea $\beta' = \sum_{i: p_i \in P} m_i \alpha_i$; $\beta'' = \beta - \beta'$

De (1.5.2) y lema 1.4.9. ii) obtenemos que $\phi_i(\beta) \geq 0$ para $p_i \in R$ ya que para $p_i \in R$

$k_i > m_i$ y $\beta + \alpha_i \notin \Delta_+$, luego 1 no cumple $-p \leq 1 \leq q$ o sea $q = 0$, luego del hecho de que $\phi_i(\beta) = p - q = p \geq 0$, tenemos lo deseado. también

$$\phi_i(\beta'') = \phi_i\Big(\sum_{j\ p_j \notin P} m_j \alpha_j\Big) = \sum m_j \phi_i(\alpha_j)$$

pero $\phi_i(\alpha_j) \leq 0$ para $i \neq j$ y como $m_j \geq 0$, obtenemos que $\phi_i(\beta'') \leq 0$ para $p_i \in R$. Como el soporte de α es conexo, entonces existe $p_t \in R$ tal que $\phi_t(\alpha_j) < 0$, y de lo anterior $\phi_t(\beta'') < 0$. Por tanto $\phi_t(\beta')$ $= \phi_t(\beta) - \phi_t(\beta'') \geq 0$ para $p_t \in R$ y $\phi_t(\beta') > 0$.

$$\text{Así}\quad \left(\phi_i(\beta)\right)_{i\in R} = \left(\phi_i(\alpha_j)\right)_{i,j\in R}\begin{pmatrix} m_{i_1} \\ \vdots \\ m_{i_k} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{y}$$

diferente de cero. Luego por el teorema 1, R es un diagrama de tipo positivo

Sea $\alpha' = \sum_{i: p_i \in R} (k_i - m_i)\alpha_i$

Como el soporte de $\alpha'(R)$ es una componente conexa del soporte $\alpha - \beta$, obtenemos que $\phi_i(\alpha') = \phi_i(\alpha - \beta)$ para $p_i \in R$ pero $\phi_i(\alpha) \leq 0$ para todo i ya que $\alpha \in K$, $\phi_i(\beta) \geq 0$ para $p_i \in R$ por lo anterior. Por tanto $\phi_i(\alpha') = \phi_i(\alpha) - \phi_i(\beta) \leq 0$ para $p_i \in R$. Esto contradice el hecho de que R es un diagrama de tipo positivo. Así hemos probado que $\alpha \in \Delta_+$.

El elemento 2α también cumple todas las hipotesis del lema por tanto $2\alpha \in \Delta_+$. Pero para toda raíz real α el elemento 2α no es raíz por lema 1.4.9. i) así $\alpha \in \Delta_+^{im}$.

Proposición 1.5.1.- Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de Cartan inescindible $n\times n$. Sea M el conjunto de elementos $\alpha=\sum k_i\alpha_i \in \Gamma_+$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) $\sum_j a_{ij}k_j \leq 0 \quad i=1\dots n$

(ii) α tiene soporte conexo

Entonces $\Delta_+^{im} = \bigcup_{w\in W} w(M)$

Dem.- Sea $\beta\in \bigcup w(M)$; $\beta=w(\alpha)$ con $\alpha\in M$ y así $\alpha=w^{-1}(\beta)$ pero $\alpha\in K\cap\Gamma_+$ ya que su soporte es conexo y le podemos quitar un vertice y el subdiagrama que queda tiene una componente conexa de tipo negativo $(a_{ij})\begin{pmatrix}k_{i_1}\\ \vdots\\ k_{i_s}\end{pmatrix}\lneq 0$ con $i_1>0$. Luego $w^{-1}(\beta)$ $\in K\cap\Gamma_+$ por lema 1.5.3 $w^{-1}(\beta)\in\Delta_+^{im}$. Luego $\beta\in\Delta_+^{im}$ por lema 1.5.2. Por tanto $\bigcup w(M)\subset\Delta_+^{im}$.

Reciprocamente, $\alpha\in\Delta_+^{im}$, luego por lema 1.5.2., $w(\alpha)\in K$ para algún $w\in W$ y como α es una raíz, tiene soporte conexo y así $\alpha=ww^{-1}(\alpha)\in\bigcup w(M)$.

Proposición 1.5.2.- Si $\alpha\in\Delta^{im}$, entonces $\mathbb{Q}\alpha\cap\Gamma\subset\Delta^{im}$.

Dem.- Por lema 1.5.2. Δ_+^{im} es W-invariante y existe $w \in W$ tal que ($w(\alpha)$ es una raíz) $w(\alpha) \in K$, luego $\beta = w(\alpha) \in \Delta^{im} \cap K$ y tiene soporte conexo por ser $w(\alpha)$ una raíz. En consecuencia todo elemento $\gamma \in \mathbb{Q}\beta \cap \Gamma$ tiene soporte conexo pues $\gamma = q\, w(\alpha)$, luego $\gamma \in \Delta^{im}_{+}$ por lema 1.5.3; $q\,w(\alpha) \in \Delta^{im}_{+}$ o sea $q\alpha \in \Delta^{im}_{+}$. Para el caso de $\alpha \in \Delta^{im}_{-}$ aplicamos lo anterior para $-\alpha$ que es una raíz positiva contenida en Δ^{im}_{+}.

Proposición 1.5.3.- a) Si A es una matriz de Cartan inescindible de tipo cero, entonces $\Delta^{im}_{+} = \mathbb{N}\delta$ donde δ es el vector definido en lema 1.5.2 b)

b) Si A es una matriz de Cartan inescindible de tipo negativo, entonces existe una raíz imaginaria positiva α tal que $\varphi_i(\alpha) < 0$ $i = 1 \ldots n$

Dem. a) Sea $\beta = m\delta \in \mathbb{N}\cdot\delta \subset K \cap \Gamma$ por lema 1.5.2 b), por otro lado $\beta = m\cdot\delta$ tiene soporte conexo ($= S(A)$, A inescindible), luego por lema 1.5.3; $\beta \in \Delta^{im}_{+}$.

Recíprocamente: supongamos $\beta \notin \Delta^{im}_{+}$ entonces por lema 1.5.3; β no tiene soporte conexo o $\beta \notin K \cap \Gamma$, pero estas dos proposiciones nos lleva a una contradicción si $\beta \in \mathbb{N}\delta \subset K \cap \Gamma$ y así β tiene soporte conexo

b) Por teorema 1; existe $X=(c_1,\dots c_n)>0$ tal que $AX<0$, si $\alpha=c_1\alpha_1+\dots+c_n\alpha_n$, claramente $\phi_i(\alpha)<0$ $i=1,\dots,n$. Como la matriz es inescindible, $S(A)$ es conexo y como $c_i\neq 0$ $i=1\dots n$, el soporte de $\alpha = S(A)$, luego $\alpha\in M\subset\Delta_+^{im}$ por proposición 1.5.1

Definición. Una raíz α es llamada extrictamente imaginaria. si α es una raíz imaginaria y para toda raíz real β; $\alpha+\beta$ o $\alpha-\beta$ es una raíz. Denotamos por Δ_+^{sim} al conjunto de todas las raices extrictamente imaginarias.

Lema.- 1.5.5. Si $\alpha\in\Delta_+^{im}$ y α no pertenece a todas las imagenes de los hiperplanos $\phi_i=0$ $i=1\dots n$ bajo el grupo W, entonces $\alpha\in\Delta_+^{sim}$.

Dem.- Sea $\alpha\in\Delta_+^{im}$ y supongamos que $\alpha\notin\Delta_+^{sim}$, luego existe una raíz real β tal que $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$ no son raices, luego para algun $i\in\{1\dots n\}$ $w(\alpha)+w(\beta)=\alpha-\alpha_i$ y $w(\alpha)+\alpha_i$ no son raices, pero del lema 1.4.9. ii); $\phi_i\,w(\alpha)=p-q=0-0=0$. Entonces $r_i(w(\alpha))=w(\alpha)$ o sea α pertenece a la imagen de los hiperplanos $\phi_i=0$ bajo el grupo W.

Lema 1.5.6 supongamos que para todos dos subdiagramas disjuntos de $S(A)$ uno de ellos es de tipo positivo. Entonces todo $\alpha \in K \cap \Gamma$ tiene soporte conexo

Dem.- Supongamos que $\alpha = \beta + \gamma$; los soportes P y P' de β y γ respectivamente son disjuntos y P es un subdiagrama de tipo positivo. Entonces por teorema 1. $\phi_i(\alpha) > 0$ para algún i tal que $i \in P$, ya que en caso contrario P sería de tipo cero o negativo. Si α no tiene soporte conexo; $\phi_i(\gamma) = 0$ y así $\phi_i(\alpha) = \phi_i(\beta) + \phi_i(\gamma) > 0$ pero esto contradice el hecho de que $\alpha \in K$.

1.6.- Forma Bilineal Invariante. Sea A una matriz de Cartan simetrizable y

$$A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots d_n)(b_{ij})$$

Introducimos una forma bilineal en Γ por

$$(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij} \quad i,j = 1 \ldots n \quad (1.6.1)$$

Lema.. 1.6.1.. a) La forma $(,)$ es W-invariante

b) Una raíz α es real si y sólo si $(\alpha, \alpha) > 0$

c) Una raíz α es imaginaria si y sólo si $(\alpha, \alpha) \leq 0$

d) Una raíz α es isotrópica si y sólo si ella es W-equivalente a una raíz imaginaria de un subdiagrama conexo de tipo cero del diagrama $S(A)$.

Dem.. a) $(r_i(\beta), r_i(\beta)) = (\beta - \phi_i(\beta)\alpha_i, \beta - \phi_i(\beta)\alpha_i) = (\beta, \beta) + \phi_i^2(\beta)(\alpha_i, \alpha_i) - 2\phi_i(\beta)(\alpha_i, \beta) = (\beta, \beta) - \phi_i(\beta)(\phi_i(\beta) b_{ii} - 2(\alpha_i, \beta))$

$$= (\beta, \beta) + \phi_i(\beta)\left(2\frac{\phi_i(\beta)}{d_i} - 2(\alpha_i, \beta)\right) \text{ si}$$

$$\beta = \sum k_j \alpha_j; \quad = (\beta, \beta) + 2\phi_i(\beta)\left(\sum_j k_j \frac{a_{ij}}{d_i} - \sum_j k_j b_{ij}\right)$$

$$= (\beta, \beta) + 2\phi_i(\beta)\left(\sum k_j\left(\frac{a_{ij}}{d_i} - b_{ij}\right)\right.$$ pero del

lema 1.1.1. $a_{ij} = d_i b_{ij}$ y en consecuencia

el segundo sumando es cero y de aquí
$(r_i\beta, r_i\beta) = (\beta,\beta)$.

b) $\Rightarrow$) Sea α una raíz real, luego existe $w\in W$ t.q. $w(\alpha)\in\Pi$ y como $(\ ,\ )$ es W-invariante tenemos que

$$(\alpha,\alpha) = b_{ii} > 0$$

c) $\Rightarrow$) si $\alpha\in\Delta^{im}$, por lema 1.5.2. $w(\alpha)\in K$ para algún $w\in W$ y por a) $(\alpha,\alpha) = (w(\alpha), w(\alpha))$
si $\beta = w(\alpha)\in K$; $\beta = \sum k_i\alpha_i$; (α_i,β)

$$= k_1(\alpha_i,\alpha_1) + \cdots + k_n(\alpha_i,\alpha_n) = k_1 b_{i1} + \cdots + k_n b_{in}$$

$$= k_1\frac{a_{i1}}{d_i} + \cdots + k_n\frac{a_{in}}{d_i} = \Big(\sum_j k_j d_{ij}\Big) d_i^{-1} =$$

$d_i^{-1}\,\phi_i(\beta)\le 0$ para $i=1\ldots n$, Así que
$(\beta,\beta) = \sum k_i(\alpha_i,\beta)\le 0$ pues $k_i\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$

Ahora el recíproco de b). Supongamos que $\alpha\in\Delta^{re}$, entonces $(\alpha,\alpha)\le 0$, luego $\alpha\in\Delta^{re}$. El recíproco de c) si $(\alpha,\alpha)\le 0$ y α es una raíz, entonces $\alpha\notin\Delta^{re}$ por b) y así $\alpha\in\Delta^{im}$.

d) $\Rightarrow$) si $(\alpha,\alpha)=0$, entonces por c) $\alpha\in\Delta^{im}$, por lema 1.5.2. existe $w\in W$ tal que $\beta=w(\alpha)\in K$. Sea P el soporte de β, entonces $\beta = \sum_{i:\alpha_i\in P} k_i\alpha_i$

y $(\beta,\beta) = (\alpha,\alpha) = \sum_{i:\alpha_i\in P} k_i(\beta,\alpha_i) = 0$, donde

$k_i > 0$ $i = 1 \dots n$ y como en la demostración de c) $(\beta, \alpha_i) \leq 0$, luego $(\beta, \alpha_i) = 0$ es decir $\phi_i(\beta) = 0$ para $i : P_i \in P$, así por lema 1.1.4, P es un diagrama de tipo cero. Por tanto α es W-equivalente a una raíz imaginaria de soporte conexo de tipo cero

d) $\Leftarrow$) si $\alpha = w(\beta)$, donde β es una raíz imaginaria de soporte de tipo cero, entonces por la proposición 1.5.3 a) $\beta = m(\sum a_i \alpha_i) = mS$ con $m \in N$, luego $(\beta, \beta) = m^2(\sum a_i \alpha_i, \sum a_i \alpha_i)$

$$= m^2 \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum m^2 a_i \sum a_j b_{ji} = 0$$

por la sección 1.3. y así $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 0$.

Definición.- Decimos que una matriz de Cartan A es tipo hiperbólico si ella es inescindible simetrizable de tipo negativo.

Lema 1.6.2. Sea A una matriz de Cartan de tipo positivo, cero o hiperbólico.

a) si $\alpha \in \Gamma$, $(\alpha, \alpha) \leq 1$, entonces $\alpha \in \Gamma_+$ o $-\alpha \in \Gamma_+$.

b) si $\alpha \in \Gamma$, $(\alpha, \alpha) = 1$, entonces α es una raíz real.

Dem.- a) supongamos que $\alpha = \beta - \gamma$, donde $\beta, \gamma \in \Gamma_+$ y los soportes P, P' de β, γ respectivamente no tienen vertices en común.

$$1 \geq (\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) + 2(-\beta, \gamma)$$

Los tres sumandos son enteros no negativos. Como P y P' son de tipo positivo o de uno de ellos es de tipo positivo y él otro de tipo cero y ellos son juntados por una arista; luego al menos dos de los sumandos son positivos. Esto contradice. a).

b) Por a) $\alpha \in \Gamma_+$ o $-\alpha \in \Gamma_+$ Supongamos que $\alpha \in \Gamma_+$. Además para todo $w \in W$, $(w(\alpha), w(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$, de nuevo $w(\alpha) \in \Gamma_+$ o $-w(\alpha) \in \Gamma_+$. Entre los elementos $W(\alpha) \cap \Gamma_+$ tomemos β de peso mínimo. Como $(\beta, \beta) = 1$; $\emptyset_i(\beta) > 0$ para algún i. Por tanto si suponemos que $\beta \neq \alpha_i$, entonces $r_i(\beta) \in \Gamma_+$ y peso de β > peso de $r_i(\beta)$, luego $\beta = \alpha_i$.

Proposición 1.6.1.. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de Cartan de tipo positivo, cero o de tipo hiperbólico.

a) Un elemento $\alpha \in \Gamma$ es una raíz imaginaria si y sólo si $(\alpha, \alpha) \leq 0$

b) Si suponemos que A es una matriz simétrica, entonces $\alpha \in \Gamma$ es una raíz real si y solo si $(\alpha, \alpha) = 1$.

Dem.- a) $\Rightarrow$) por lema 1.6.1.c)

$\Leftarrow$) Sea $\alpha \in \Gamma$ tal que $(\alpha, \alpha) \leq 0$ por lema 1.5.3 podemos suponer que $\alpha \in \Gamma_+$ y que $W(\alpha) \subset \Gamma_+$ ya que $(w(\alpha), w(\alpha)) \leq 0$. Sea β

un elemento en $W(\alpha)$ de peso mínimo. Entonces $\phi_i(\beta) \leq 0$, pues $(\beta,\beta) \leq 0$ para $i = 1 \cdots n$ y como A es de tipo positivo, cero o hiperbólico $\beta \in K \cap \Gamma_+$ por lema 1.5.6 β tiene soporte conexo por tanto por lema 1.5.3. $\beta \in \Delta_+^{im}$. Pero como $\alpha = W(\beta) \in \Delta^{im}$, α es una raíz imaginaria.

b) $\Rightarrow$) si A es una matriz simetrica, entonces $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ para toda raíz simple α_i y por tanto $(\alpha, \alpha) = 1$ para toda raíz real α.

$\Leftarrow$) si $\alpha \in \Gamma$, $(\alpha, \alpha) = 1$, por lema 1.6.2 b) α es una raíz real.

Representación de Gráficas

2.1. Gráficas Orientadas: Sea S una gráfica conexa finita. Sea $S_0 = \{P_1, P_2, \cdots P_n\}$ el conjunto de vertices de S. Dos vertices pueden estar conectados por una o varias aristas pero se excluyen los lazos.

Asociamos con S una matriz de Cartan simétrica $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \cdots, n$ como sigue: $-a_{ij} = -a_{ji}$ es el número de aristas conectando P_i con P_j en S si $i \neq j$ y $a_{ii} = 2$; Claramente esta es una biyección entre las gráficas conexas finitas y las matrices de Cartan simétricas inescindibles; S es el diagrama de Dynkin $S(A)$ de la matriz A.

Una orientación Ω de la gráfica S es dar para cada arista $\ell \in S_1$, el punto inicial $i(\ell) \in S_0$ y el punto final $f(\ell) \in S_0$ indicándola por una flecha $i(\ell) \longrightarrow f(\ell)$.

Dada una orientación Ω y un vertice P_i, definimos una nueva orientación $\check{r}_i \Omega$ de S, cambiando la dirección de todas las flechas conteniendo el vertice P_i.

Definimos un vertice fuente (o pozo) de una gráfica orientada (S, Ω) si todas las aristas que lo contengan lo tienen como punto inicial (o punto final)

Definición - Sea (S,Ω) una gráfica orientada. Definimos una categoría $\mathcal{M}(S,\Omega)$ como sigue: Un objeto de $\mathcal{M}(S,\Omega)$ es una colección (V,ϕ) de espacios vectoriales de dimensión finita V_p, $p\in S_0$ sobre un campo $\mathbb{F}$; y transformaciones lineales $\phi_\ell : V_{i(\ell)} \to V_{f(\ell)}$

para toda arista $\ell \in S_1$. Un morfismo $\varphi : (V,\phi) \to (V',\phi')$ es una colección de transformaciones lineales $\varphi_p : V_p \to V'_p$, $p\in S_0$ tal que para toda arista $\ell \in S_1$, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V_{i(\ell)} \arrow[r, "\phi_\ell"] \arrow[d, "\varphi_{i(\ell)}"'] & V_{f(\ell)} \arrow[d, "\varphi_{f(\ell)}"] \\
V'_{i(\ell)} \arrow[r, "\phi'_\ell"] & V'_{f(\ell)}
\end{tikzcd}$$

conmuta

Una clase de equivalencia de objetos isomorfos de la categoría $\mathcal{M}(S,\Omega)$ es llamada una representación de la gráfica orientada.

La suma directa de objetos (V',ϕ') y (V'',ϕ'') es el objeto (V,ϕ), donde: $V_p = V'_p \oplus V''_p$ y $\phi_\ell = \phi'_\ell \oplus \phi''_\ell$, $p\in S_0$; $\ell \in S_1$.

Un objeto (V,ϕ) es llamado inescindible si no puede ser expresado como suma directa de dos objetos no triviales.

Claramente todo objeto de la categoria $\mathfrak{M}(S,\Omega)$ es isomorfo a la suma directa de objetos inescindibles y esta descomposición es única salvo isomorfismo. Los ejemplos simples de objetos inescindibles son los objetos $U^{(i)}$; $i=1,2,\dots n$ los cuales estan definidos como sigue:

$(U^{(i)})_{p_j} = 0$ para $i \neq j$ $(U^{(i)})_{p_i} = \mathbb{F}$ y $\phi_\ell = 0$ para toda $\ell \in S_1$.

Sea Γ el grupo libre abeliano con un sistema fijo de generadores libres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; sea Γ_+ el semigrupo de Γ generado por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Sea $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\} \subset \Gamma_+$ el conjunto.

La dimensión de los objetos $U=(U,\phi)$ es el elemento $\dim U = \sum_i (\dim U_{p_i})\alpha_i \in \Gamma_+$.

Introducimos una forma bilinear $(\,,\,)$ en Γ por: $(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$, $i,j = 1,2,\dots n$ (2.1.1).

Esta forma es llamada Forma de Tits. Definimos reflexiones ortogonales r_i $i=1, 2, \dots n$ por:

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i \qquad (2.1.2)$$

en Γ. Notamos que las formolas (1,6.1) y (1.4.4) coinciden con (2.1.1) y (2.1.2) ya que la matriz es simétrica.

Sea M el subconjunto de Γ_+ consistiendo de los $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$ los cuales tienen soporte conexo, y satifacen las desigualdades: $\sum_j a_{ij}k_j \leq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $\Delta_+^{re} = \{\alpha \in \Gamma_+ \mid$ existe la sucesion $i_1, i_2, \ldots i_k$ tal que $r_{i_k}\cdots r_{i_2}r_{i}(\alpha) \in \Pi$, $r_{i_s}, \ldots r_{i_1}(\alpha) \in \Gamma_+ - \Pi$ para $1 \leq s < k\}$ y

$$\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(M) \quad y \quad \Delta_+ = \Delta_+^{re} \cup \Delta_+^{im}$$ (W es el grupo de Weyl).

Lema. 2.1.1.- a) El conjunto Δ_+ satiface las siguientes propiedades y es definido unicamente por ellas.

(i) $\Pi \subset \Delta_+ \subset \Gamma_+ \qquad 2\alpha_i \notin \Delta_+ \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) para $\alpha = \sum_j k_j\alpha_j \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}$

$\alpha + k\alpha_i \in \Delta_+$ si y sólo si $-p \leq k \leq q$ donde $p, q \in \mathbb{Z}_+$ y $p - q = \sum_j a_{ij}k_j$.

b) Para $\alpha \in \Delta_+$ se tiene:

$\alpha \in \Delta^{re}$ si y sólo si $(\alpha,\alpha) = 1$ y $\alpha \in \Delta^{im}_{+}$ si y sólo si $(\alpha,\alpha) \leq 0$.

c) Si $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in \Gamma_+$ y $\sum_j a_{ij} k_j = 0$ $i = 1, 2, \ldots n$.
Entonces S es uno de los diagramas de la sección 1.2 (correspondiendo a la matriz simétrica) y $\alpha = k \sum_i a_i \alpha_i \in \Delta_+$, donde $k \in \mathbb{N}$ y los a_i son los números que aparecen montados en los diagramas.

d) Si $\alpha \in \Delta_+$ y $(\alpha,\alpha) = 0$, entonces S contiene un subdiagrama de la sección 1.2. tal que α es W-equivalente a una de las raices de este subdiagrama descrito en c)

e) Si S es una gráfica de tipo hiperbólico y $\alpha \in \Gamma_+$, entonces $\alpha \in \Delta^{re}_{+}$ si y solamente si $(\alpha,\alpha) = 1$ y $\alpha \in \Delta^{im}_{+}$ si y solamente si $(\alpha,\alpha) \leq 0$

Dem. – a) Se sigue del lema 1.4.10.

b) De la prop. 1.6.1, c) se sigue del lema 1.5.2. b), d) de la proposición 1.6.1 igual e)

2.2.. Representaciones Inescindible de Gráficas. Consideremos una gráfica orientada (S, Ω) con n vertices $p_1, p_2, \dots p_n$. Fijemos $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in \Gamma_+$ y la colección de espacios vectoriales $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_n}$ sobre el campo $\mathbb{F}$, de dimensiones $k_1, k_2, \dots, k_n$ respectivamente. Denotemos por $\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega)$ el conjunto de todos los objetos U de $\mathfrak{M}(S, \Omega)$ tales que $U_{p_i} = V_{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Se tiene un isomorfismo canónico de espacios vectoriales:

$$\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega) = \bigoplus_{l \in S_1} \mathrm{Hom}(V_{i(l)}, V_{f(l)}) \simeq \bigoplus_{l \in S_1} (V_{i(l)}^* \otimes V_{f(l)}) \quad (2.2.1).$$

Sea $G^\alpha = GL_{k_1} \times GL_{k_2} \times \dots \times GL_{k_n} / C$ donde $C = \{(t \cdot 1_{V_1}, \dots, t \cdot 1_{V_n}), t \in \mathbb{F}^*\}$. La acción del grupo GL_{k_i} en V_{p_i} induce una operación del grupo $GL_{k_1} \times GL_{k_2} \times \dots \times GL_{k_n}$ en el espacio $\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega)$, el grupo C actua trivialmente. Por tanto obtenemos una representación lineal del grupo G^α en el espacio $\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega)$.

Claramente dos objetos de $\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega)$ son isomorfos si y sólo si ellos pertenecen a la misma orbita de G^α en $\mathfrak{M}^\alpha(S, \Omega)$.

Como $\dim \mathfrak{M}^{\alpha}(S,\Omega) = \sum_{i \to j} -a_{ij} k_i k_j$; $\dim G^{\alpha} = \sum k_i^2 - 1$ y A es una matriz simétrica, tenemos:

$$\dim \mathfrak{M}^{\alpha}(S,\Omega) - \dim G^{\alpha} = 1 - (\alpha,\alpha) \quad (2.2.2).$$

Por otra parte el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G^{α} actua en $\mathfrak{M}^{\alpha}(S,\Omega)$ por la regla

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(\phi_\ell) = (-\phi_\ell \, g_{i(\ell)} + g_{f(\ell)} \, \phi_\ell)$$

Pues $(g_1, g_2, \cdots g_n)(\varphi_i \otimes v_j) = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \cdot \varphi_i \otimes v_j + \varphi_i \otimes (g_1, g_2, \cdots g_n) \cdot v_j = -\varphi_i \, g_i \otimes v_j + \varphi_i \otimes g_j v_j$.

Pero por el isomorfismo (2.2.1) tenemos lo deseado.

Definición.- Sea G un grupo algebraico lineal operando en una variedad álgebraica X. Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de G. Para un punto x de X denotamos por G_x (o $\mathcal{G}_x$) el estabilizador de G en x (o el álgebra de Lie de G_x). Llamamos al punto x (y a la orbita de x) libre si $G_x = e$; infinitamente libre si $\mathcal{G}_x = 0$ y cuasilibre si G_x no contiene toros $\mathbb{F}$-split no triviales.

Lema 2.2.1.- a) Las siguientes propiedades de $U \in \mathfrak{M}^{\alpha}(S,\Omega)$ son equivalentes.

(i) U es un objeto inescindible.

(ii) End $\mathcal{U}$ no contienen elementos no escalares semi-simples split.

(iii) $\mathcal{U}$ es un punto casilibre del grupo lineal G^{α}.

(iv) $\mathcal{Y}_{\alpha}$ no contiene toros $\mathbb{F}$-split no ceros

a) Las siguientes propiedades son equivalentes

(i) End $\mathcal{U} = \mathbb{F}$

(ii) $\mathcal{U}$ es un punto libre del grupo lineal G^{α}

(iii) $\mathcal{U}$ es un punto infinitamente libre.

Dem i)$\Rightarrow$ii) supongamos que $A = (A_i) \in$ End $\mathcal{U}$ es un elemento no escalar semisimple split. Sean $a_1, \ldots, a_d$ todos los elementos diferentes de las matrices diagonales $A_1, \ldots, A_n$. Definamos $V_{a_j}^{(i)} = \{ v \in V_i \mid A_i v = a_j v \}$ subespacio de V_i. Entonces $V_i = V_{a_1}^{(i)} \oplus \cdots \oplus V_{a_d}^{(i)}$. Para cada a_j sea $(V_{a_j}, \phi^{(a_j)})$ la representación de la gráfica (S, Ω) tal que $(V_{a_j})_i = V_{a_j}^{(i)}$ y $\phi_\ell^{(a_j)} = \phi_\ell : V_{a_j}^{i(\ell)} \longrightarrow V_{a_j}^{f(\ell)}$ (ya que $v \in V_{a_j}^{i(\ell)}$,

$$A_{f(\ell)} \phi_\ell(v) = \phi_\ell A_{i(\ell)} v = a_j \phi_\ell(v) \quad \text{o sea}$$

$\phi_\ell(v) \in V_{a_j}^{f(\ell)}$. En consecuencia $\phi_\ell = \mathrm{diag}(\phi_\ell^{(a_1)}, \ldots, \phi_\ell^{(a_d)})$. Por tanto $V = V^{(a_1)} \oplus \cdots \oplus V^{a_d}$ y $\phi_\ell = \phi_\ell^{(a_1)} \oplus \cdots \oplus \phi_\ell^{(a_d)}$. Contradicción de i)

ii) $\Rightarrow$ iii) Supongamos que V no es un punto casi libre entonces G_{ϕ_ℓ}; donde ϕ_ℓ es la imagen de V; contiene un toro $\mathbb{F}$-split no trivial y como $G_{\phi_\ell}(\phi_\ell) = (\phi_\ell)$, entonces $g(\phi_\ell) = g_{f(\ell)}^{-1}\,\phi_\ell\, g_{i(\ell)} = \phi_\ell$ o

sea $\phi_\ell\, g_{i(\ell)} = g_{f(\ell)}\,\phi_\ell$ condición para que $g \in \operatorname{End} V$. Luego $\operatorname{End} V$ contiene un elemento no escalar semisimple split (uno del toro $\mathbb{F}$-split).

ii) $\Rightarrow$ iv) Podemos considerar $\mathcal{G}_V \subset \operatorname{End} V$ ya que $\mathcal{G}_V \cdot (\phi_\ell) = 0$ y $A(\phi_\ell) = (-\phi_\ell\, A_{i(\ell)} + A_{f(\ell)}\,\phi_\ell) = 0$ o sea $\phi_\ell\, A_{i(\ell)} = A_{f(\ell)}\,\phi_\ell$. Así si $\mathcal{G}_V$ contiene un toro $\mathbb{F}$-split no cero, tenemos como ii $\Rightarrow$ iii) que existe un elemento en $\operatorname{End} V$ no escalar semisimple split.

iii) $\Rightarrow$ i) Supongamos que U es cardible, entonces el proyector de V es un elemento no escalar semisimple que se deriva de $\operatorname{End} V$

iv) $\Rightarrow$ ii) Supongamos que existe un elemento semisimple split no escalar en $\operatorname{End} U$, luego G_U tiene un toro $\mathbb{F}$-split no cero el generado por A.

Lo que queda de la demostración es trivial.

Lema. 2.2.2. Sea G un grupo algebraico actuando en un espacio X. Sea $A \in \mathcal{G}$ (álgebra de Lie de G) supongamos que $X_1 = \{x \in X \mid A \in \mathcal{G}_x\}$ subvariedad de X es tal que el mapeo operación $\phi: G \times X_1 \to X$ tiene imagen densa y separable. Entonces suponiendo que $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$; exisun punto lizo $x \in X_1$ tal que el conjunto de valores propios diferentes de cero (con sus multiplicidades) del endomorfismo A en $\mathcal{T}(X)_x$ pertenecen al conjunto de valores propios de ad A en $\mathcal{G}$, y el rango $A^k \leq$ rango $(\operatorname{ad} A)^k$ para todo k.

Dem.- Existe un punto $x \in X_1$ el cual es lizo en X y en X_1 para el cual el mapeo ϕ es lizo en el punto (e, x), es decir $\operatorname{Im}(d\,\phi_{(e,x)}) = \mathcal{T}_x(X)$.

Por otra parte para $c \in G$ definimos:

$\phi_c : X_1 \to X$ por $x \to c \cdot x$; para $x \in X$

$\phi_x : G \to X$ por $c \to c \cdot x$.

Calculemos $d\,\phi_{(e,x)}(B, \omega) = (B, \omega)\,\phi^*$

pero $\phi^* f = \sum g_i \otimes h_i$, donde $f \in K[X]$, $g_i \in K[G]$, $h_i \in K[X_1]$. Por tanto

$$(B,\omega)\ \phi^*(f) = \sum (B g_i)\, h_i(x) + \sum g_i(e)(\omega h_i)$$

$$= B\left(\sum g_i\, h_i(x)\right) + \omega\left(\sum g_i(e)\, h_i\right) =$$

$$= B(\phi_x^*(f)) + \omega(f) = (d\,\phi_x)_e B(f) +$$

$(d\,1)_x\, \omega(f)$ En consecuencia

$$d\,\phi_{(e,x)} = (d\,\phi_x)_e + (d\,1_{X_1})_x \quad (2.2.3)$$

Afirmamos que para cada $B \in \mathcal{G}$

$$B(x) = (d\,\phi_x)_e\, B.$$

En efecto: $(d\,\phi_x)_e B(f) = B(f\,\phi_x)$

pero $f \cdot \phi_x(c) = f(c \cdot x)$, con $f \in K[X]$. Por otro lado $B(x) = (B \cdot \psi^*)(x)$; donde ψ es la representacion de G en X inducida por la actuación, para $f \in K[\mathrm{End}(X)]$, $\psi^*(f) = f \cdot \psi$ y como $\psi(c)(x) = \phi_x(c)$, tenemos que $B(x) = (d\,\phi_x)_e B$

Así $\mathrm{Im}(d\,\phi_x) = \mathfrak{g}(x)$. Y como $X_1 = \ker A$ obtenemos de la igualdad (2.2.3)

$$T_x(X) = \mathrm{Im}\, d\,\phi_{(e,x)} = \mathfrak{g}(x) + \ker A.$$

Ahora definamos $\pi : \mathfrak{g} \to T_x(X)$ por $u \to u(x)$ luego $\pi(\mathrm{ad}A(u)) = d\phi_x [A, u] = [d\phi_x(A), d\phi_x(u)]$
$= d\phi_x A \cdot d\phi_x u - d\phi_x u \cdot d\phi_x A = d\phi_x A \cdot d\phi_x u -$
$d\phi_x u \cdot A(x) = d\phi_x A \cdot d\phi_x u = A\,\pi(u)$ es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{ad}A"'] & T_x(X) \arrow[d, "A"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"'] & T_x(X)
\end{tikzcd}$$

Podemos considerar que todos los vectores propios de A en $T_x(X)$ estan en $\mathfrak{g}(x)$ (en efecto $A(z+y) = \lambda(z+y)$, $A^2(z) = \lambda(A(z))$; donde $y \in \ker A$, $z \in \mathfrak{g}(x)$)

Como $\mathrm{ad}\,A(\ker\Pi) \subset \ker\Pi$ (ya que $\Pi\cdot\mathrm{ad}\,A(u) = A\cdot\Pi(u) = 0$), inducimos

$$\overline{\mathrm{ad}\,A} : \mathcal{G}/_{\ker\Pi} \longrightarrow \mathcal{G}/_{\ker\Pi}$$ y además

el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}/_{\ker\Pi} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{ad}A}"'] & \mathcal{G}(x) \arrow[d, "A"] \\
\mathcal{G}/_{\ker\Pi} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{G}(x)
\end{tikzcd}$$

Por tanto $\mathrm{ad}\,A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ donde B_1, B_2 son las matrices de $\mathrm{ad}\,A$ restringidas a $\ker\Pi$, y A en $\mathcal{G}(x)$ respectivamente. En consecuencia se tiene el lema demostrado.

Sea G un grupo algebraico actuando en un espacio vectorial V. Sea X la unión de todas las orbitas de dimensión fija d'. Claramente X es G-invariante. Supongamos que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_s$; U_i abiertos en X. Entonces Y es cerrado en X si y sólo si $Y \cap U_i$ es cerrado en U_i, $i = 1, \ldots, s$. En efecto: En un sentido es claro. Si $Y \cap U_i$ es cerrado en U_i $i = 1 \ldots s$, entonces $X - Y$

$$= \bigcup_{i=1}^{s} U_i - Y = \bigcup_{i=1}^{s} (U_i - Y) = \bigcup_{i=1}^{s} (U_i - U_i \cap Y).$$

pero $U_i - U_i \cap Y$ es abierto en U_i, luego abierto en X y así $X - Y$ es abierto. En consecuencia Y es cerrado en X.

Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie del grupo algebraico G; $\mathcal{G}$ actua en X como álgebra de Lie. Sea $\mathcal{G}_n$ los elementos de $\mathcal{G}$ tales que son nilpotentes, claramente $\mathcal{G}_n$ es un cerrado de $\mathcal{G}$. Además tenemos que si $x \in X$, $\dim \mathcal{G}_x = \dim G_x = \dim V - d' = d$.

Consideremos $\Lambda^d \mathcal{G}$ y $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathcal{G})$. Como se sabe el espacio d-Grassmaniano de d-subespacios de $\mathcal{G}$; $\Gamma_d(\mathcal{G})$ es un cerrado de $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathcal{G})$ [ver].

Lema 2.2.3. - $Z = \{(x, y) \mid x \in y\}$ es un cerrado de $\mathcal{G} \times \Gamma_d(\mathcal{G})$.

Dem. - sea $g_1 \dots g_n$ una base de $\mathcal{G}$, entonces los $g_{i_1} \wedge \dots \wedge g_{i_d}$ con $i_1 < \dots < i_d$ forman una base de $\Lambda^d \mathcal{G}$. Denotemos por $\Gamma_d(\mathcal{G})_{g_{i_1} \wedge \dots \wedge g_{i_d}}$ a los puntos en $\mathbb{P}(\Lambda^d \mathcal{G})$ cuyas coordenadas con respecto a $g_{i_1} \wedge \dots \wedge g_{i_d}$ sean no cero. Es suficiente demostrar que los conjuntos $Z \cap (\mathcal{G} \times \Gamma_d(\mathcal{G})_{g_{i_1} \wedge \dots \wedge g_{i_d}})$ son cerrados en $\mathcal{G} \times \Gamma_d(\mathcal{G})_{g_{i_1} \wedge \dots g_{i_d}}$.

Basta considerar el caso en que $g_1 \wedge \dots g_d$

$= g_{i_1}\wedge\cdots\wedge g_{i_d}$. Entonces si $y \in G_d(\mathcal{G})_{g_1\wedge\cdots\wedge g_d}$

$y = g_1\wedge\cdots\wedge g_d + \sum \pm a_{ij}\, g_1\wedge\cdots\wedge \hat{g}_i \wedge\cdots\wedge g_d \wedge g_j + \cdots$, con $y = u_1\wedge\cdots\wedge u_d$, $u_i = g_i + \sum_{j>d} a_{ij} v_j$.

Por tanto $x \in y$ si y solamente si $x, u_1, \ldots, u_d$ son linealmente dependientes es decir

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{d+1} & a_{1d+1} & & a_{nd+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{1n} & & a_{nn} \end{bmatrix} \leq d$$

En consecuencia (x,y) es una raíz de un polinomio y así Z es cerrado.

Corolario $Z_n = Z \cap (\mathcal{G}_n \times G_d(\mathcal{G}))$ es un cerrado de $\mathcal{G}\times G_d(\mathcal{G})$

Dem.- Intersección de cerrados.

Lema 2.2.4.- $R = \{(x,y)\in Z_n \mid$ existe una componente irreducible Z_1 de y_n; $x\in Z_1$, $\dim Z_1 \geq d-1\}$ es un cerrado de Z_n.

Dem.- Sea $Z_n = Y_1 \cup\cdots\cup Y_s$; Y_i componentes irreducibles. Sea $p: Z_n \longrightarrow G_d(\mathcal{G})$ la proyección; para cada Y_i;

$p/_{Y_i}: Y_i \longrightarrow p(Y_i)$ es un morfismo dominante de variedades irreducibles. Para $(x,y)\in Y_i$; $p(x,y)=y$; $p^{-1}(y)\cap Y_i=(y_n,y)\cap Y_i$.

Sea Z la componente de máxima dimension de $p_i^{-1}(p_i(x,y))$, pasando por (x,y). Entonces

$T_i=\{(x,y)\in Y_i \mid \dim Z\geq d-1\}$ es un cerrado en Y_i [ver I. Pero $Z\subset(y_n,y)\cap Y_i \subset (y_n,y)\simeq y_n$. así Z se puede considerar una componente irreducible de y_n; luego $T_i\subset R$.

Recíprocamente. Sea $(x,y)\in R$; $(x,y)\in Z_n$, existe Z una componente irreducible de y_n, $x\in Z$ y por otro lado existe $i\in\{1\ldots s\}$ tal que $(x,y)\in Y_i$; del mapeo (y_n,y) en y_n, obtenemos que (Z,y) es una componente irreducible de $(y_n,y)=p^{-1}(y)$, que contiene al punto (x,y), por tanto $(Z,y)\cap Y_i$ es irreducible, entonces $(Z,y)\cap Y_i=(Z,y)$. Por otra parte $\dim Z=\dim(Z,y)=\dim(Z,y)\cap Y_i\geq d-1$, lo que dice que $(x,y)\in T_i$. Así hemos demostrado que $R=\bigcup_{i=1}^{s}T_i$ cerrado en Z_n.

Lema 2.2.5. Sea Λ una $\mathbb{F}$-álgebra, M un Λ-módulo. Entonces si $\dim \mathrm{End}(M)=d$.

$\dim(\mathrm{End}(M))_n=d-1$ si y solo si $\mathrm{End}(M)$ es local ($\mathbb{F}$ algebraicamente cerrado).

Dem.- Supongamos que $\dim(\mathrm{End}(M))_n = d-1$ sabemos que $M = n_1 N_1 \oplus \cdots \oplus n_s N_s$ (N_i son Λ-módulos inescindibles). Sea $\mathcal{K}_M$

$$= \mathrm{End}(M) = \begin{bmatrix} A_{n_1} & & * \\ & \ddots & \\ * & & A_{n_s} \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}_M / \mathrm{rad}\, \mathcal{K}_M .$$

$x \in \mathcal{K}_M$; $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{A}_{n_s} \end{bmatrix}$.

Si x es nilpotente, $\varphi(x)$ es también nilpotente, luego

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{A}_{n_s} \end{bmatrix}$$ lo es

entonces $\bar{A}_{n_1} \dots \bar{A}_{n_s}$ son también nilpotentes por tanto $\bar{A}_{n_i}^m \in \mathrm{rad}(\mathcal{K}_{N_i})$, así

A_{n_i} es nilpotente ($i = 1 \dots s$).

El conjunto $\mathcal{K}_M^1 = \{x \mid A_{n_i}$ son nilpotentes $i = 1 \dots s\}$ es un cerrado en $\mathcal{K}_M$, y además $\dim \mathcal{K}_M^1$

$= \sum \dim \mathrm{End}(n_i N_i)_n + \sum \dim \mathrm{Hom}(n_i N_i, n_j N_j)$

$\leq \sum (\dim \mathrm{End}(n_i N_i) - 1) + \sum \dim \mathrm{Hom}(n_i N_i, n_j N_j)$

$= \dim \mathcal{K}_M - s$. Como $\mathrm{End}(M)_n \subset \mathcal{K}_M^1$ y

$d - 1 \leq \dim \mathrm{End}(M)_n \leq \dim \mathcal{K}_M^1 \leq d - s$ por tanto $s=1$ es decir $M = n_1 N_1$. Así:

$$ {}^{n}\mathcal{K}_M \xrightarrow{\varphi} {}^{n}\mathcal{K}_M / \mathrm{rad}\, {}^{n}\mathcal{K}_M = M_{n_1}(\mathbb{F}) \xrightarrow{tr} \mathbb{F} \longrightarrow 0 $$

Sea $W = \ker(tr \cdot \varphi) \subset {}^{n}\mathcal{K}_M$ subespacio por tanto variedad irreducible, con $\dim W = \dim {}^{n}\mathcal{K}_M - 1 = d-1$. Claramente $({}^{n}\mathcal{K}_M)_n \subset W$. Sea Y_1 la componente irreducible de $({}^{n}\mathcal{K}_M)_n$ de dimensión $d-1$, luego

$({}^{n}\mathcal{K}_M)_n = W$. Ahora supongamos que $n_1 \geq 2$, entonces existe $x = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \in ({}^{n}\mathcal{J}_M)_n = W$

y $x^n = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por

tanto $n_1 = 1$ y así M es inescindible o sea $\mathrm{End}(M)$ es un anillo local.

Supongamos que $\mathrm{End}(M)$ es local, entonces $\mathrm{End}(M) / \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(M)$ es un anillo con división y como $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado $\mathrm{End}(M) / \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(M) \cong \mathbb{F}$ y así

$\dim \mathrm{rad}\,\mathrm{End}(M) = d-1$; como $1_M \notin (\mathrm{End}(M))_n$, $\dim (\mathrm{End}(M))_n = d-1$.

Observación. Como sabemos: si $x \in \mathcal{M}^d(S,\mathcal{R})$, $End_\Lambda(x) = \mathcal{G}_x$, donde Λ es la $\mathbb{F}$-álgebra asociada a la gráfica S y x es un Λ-módulo [ver 5]. Así para este caso por lema anterior:

$\dim (\mathcal{G}_x)_u = d-1$ si y sólo si $\mathcal{G}_x$ es un anillo local (con $\dim \mathcal{G}_x = d$).

Proposición 2.2.1.. $\Psi : X \to \mathcal{G}_d(\mathcal{G})$ definido por $\Psi(x) = \hat{\mathcal{G}}_x \in \mathcal{G}_d(\mathcal{G})$ es un morfismo de variedades.

Dem.. Describamos primero los $\mathcal{G}_x$. La acción de $\mathcal{G}$ en V define una transformación lineal

$$\phi : V \to End(V).$$

Tomemos como antes $g_1 \cdots g_n$ una base de $\mathcal{G}$. Sea $X_i = \{x \in X \mid$ la coordenada i-esima de x es diferente de cero$\}$; $\phi(A) = (\phi_{ij}(A))$ la matriz de $\phi(A)$ con respecto a una base $e_1, \cdots e_n$ de V. Los $\phi_{ij} : \mathcal{G} \to \mathbb{F}$ son transformaciones lineales. Con respecto a la base escogida para $\mathcal{G}$, tenemos que $\phi_{ij}(A) = c_{ij} \cdot [A]$, en donde $c_{ij} \in \mathbb{F}^n$ y $[A]$ son las coordenadas de A con respecto a la base $g_1 \cdots g_n$. Ahora si $x \in X_i$ pongamos.

$$U_{(x,i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & x_i & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (b_{ij}^{(i)}(x)).$$

Entonces $A \in \mathcal{Y}_\chi$ si y sólo si $0 = \phi(A) \cdot \chi$ $= \phi(A)\, U_{(x,i)}(e_i)$ si y sólo si

$$\sum_s (c_{ts} \cdot A)\, b_{si}^{(i)}(x) = 0 \quad t = 1 \ldots n$$

Sean $a_t(x) = \sum_s c_{ts}\, b_{si}^{(i)}(x)$. estos son polinomios en X. Por tanto $A \in \mathcal{Y}_\chi$ si y sólo si $a_1(x) \cdot A = \cdots = a_n(x) \cdot A = 0$.

sea $V_{(x,i)} = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{bmatrix}$; $V_{(x,i)}$ determina una transformación lineal de $\mathcal{Y}$ en $\mathbb{F}^n$.
$V_{(x,i)} = (b_1^{(i)}(x) \ldots b_m^{(i)}(x))$ con $b_j^{(i)}(x)$ las columnas de $V(x,i)$.

Sea N la colección de vectores de la forma $(i_1, \ldots i_{n-d})$ con $i_1 < i_2 \cdots < i_{m-d}$, $i_j \in \{1, \ldots m\}$. Para $\beta \in N$ definamos

$U_{(\beta i)} = \{x \mid b_{i_1}^{(i)}(x) \ldots b_{i_{m-d}}^{(i)}(x)$ son linealmente independientes con $B=(i_1,\dots i_{m-d})\}$.

$x\in U_{(B,i)}$ si y sólo si $\operatorname{rank}(b^{(i)}_{i_1}(x)\dots b^{(i)}_{i_{m-d}}(x)) =$ $m-d$, luego algún menor (que es un polinomio en x), es diferente de cero. En consecuencia $U_{(B,i)}$ es un abierto en X. Afirmamos:

$$X=\bigcup_{i}\bigcup_{B\in T} U_{(B,i)}$$

En efecto: sea $x\in X$, entonces existe $x_i\neq 0$ coordenada i-esima. Por otro lado

$\dim(\ker V_{(x,i)})=d$, luego existen

$b^{(i)}_{i_1}(x),\dots,b^{(i)}_{i_{m-d}}(x)$ linealmente independientes. Sea $B=(i_1,\dots i_{m-d})$, entonces $x\in U_{(B,i)}$.

Probemos que

$\Psi|_{U_{(B,i)}}: U_{(B,i)}\longrightarrow G_d(\mathcal{Y})$ es un morfismo.

En efecto si $x\in U_{(B,i)}$; $b^{(i)}_{i_1}(x)\dots b^{(i)}_{i_{m-d}}(x)$ son linealmente independientes.

Sea $N-B=\{j_1,\dots,j_d\mid j_1<\dots<j_d\}$, para $\mu=1,\dots d$ se tiene

$$b_{j_\mu}(x)=\lambda_{1\mu}(x)\,b^{(i)}_{i_1}(x)+\dots+\lambda_{m-d\,\mu}(x)\,b^{(i)}_{i_{m-d}}(x)$$

los $\lambda_{k\mu}(x)$ son polinomios en x y definidos en $U_{(x,i)}$.

Pongamos $v_u(x) = \lambda_{1u}(x)\, g_{i_1} + \cdots + \lambda_{m-d\,u}(x)\, g_{i_{m-d}} - g_{j_u}$.

Claramente $v_u(x) \in \ker V_{(x,c)} = \mathcal{G}_x$, para $u = 1, \ldots, d$. Por tanto

$$\mathcal{G}_x = v_1(x) \wedge \cdots \wedge v_d(x) = \sum_j q_j(x)\, q_j \, ;$$

donde $q_j(x)$ son polinomios en X. En consecuencia φ es un morfismo.

Lema 2.2.6.– $\varphi_1 : X \longrightarrow \mathcal{G} \times G_d(\mathcal{G})$, definido por $x \longrightarrow (0, \varphi(x)) = (0, \hat{\mathcal{G}}_x)$ (por la lema 2.2.1 es un morfismo de variedades). Entonces $T = \{x \in X \mid \mathcal{G}_x$ es local$\} = \varphi_1^{-1}(R)$. Por tanto es cerrado en X.

Dem.– $\varphi_1(T) \subset R$ ya que $0 \in (\mathcal{G}_x)_u$ y por la observación del lema 2.2.5; $\dim (\mathcal{G}_x)_u = d-1$ y como $(\mathcal{G}_x)_u$ es un subespacio, es irreducible.

Recíprocamente. Sea $x \in \varphi_1^{-1}(R)$, entonces $\varphi_1(x) = (0, \hat{\mathcal{G}}_x) \in R$ y existe una componente Z irreducible de $(\mathcal{G}_x)_u$ tal que $\dim Z \geq d-1$, así $\dim (\mathcal{G}_x)_u = d-1$ pues $1 \notin (\mathcal{G}_x)_u$. Lo que demuestra que $x \in T$, pues $\mathcal{G}_x$ es local.

Observación.– En el caso de que $V = \mathfrak{M}^{\alpha}(\mathfrak{o}, \mathfrak{R})$ y X la unión de órbitas de dimensión i del grupo G^{α} en V tenemos del lema 2.2.1 que $\{x\in X \mid \mathcal{Y}_x$ es local$\} = M_{ind}\cap X$.

Lema 2.2.7. Sea (S,Ω) una gráfica orientada. Supongamos que $\alpha=\sum k_i\alpha_i\in M$ (i.e. $\alpha\in\Gamma_+$), α tiene soporte conexo y $\sum_j a_{ij}k_j \leq 0$ para $i=1,\dots,n$. ($\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}$)

Denotemos por $\mathcal{M}_0^\alpha$ a la unión de todas las órbitas de dimensión máxima de G^α en $\mathcal{M}^\alpha(S,\Omega)$.

a) Si el soporte de α no es de tipo cero, entonces $\mathcal{M}_{ind}^\alpha \supset \mathcal{M}_0^\alpha$.

b) Si el soporte de α es de tipo cero, entonces $\alpha=k\delta$ y $\mathcal{M}^\alpha(S,\Omega)$ contiene un subconjunto abierto denso y todo objeto del cual es suma de objetos inescindibles de dimensión proporsional a δ.

Dem.- Podemos suponer que el soporte de $\alpha = S$ ya que soporte(α) es conexo, $\dim V_{k_i}=k_i$ y así soporte(α) es un subdiagrama de $S(A)$ que consiste de los vertices p_i para los cuales $k_i\neq 0$. Entonces si hay $k_i\neq 0$, un objeto (u,ϕ) de $\mathcal{M}^\alpha(S,\Omega)$ puede ser visto como un objeto de $\mathcal{M}^\alpha(\text{sop}\,\alpha,\Omega)$ pues $U_i=0$ y $\varphi_i=0$ y además u es inescindible en $\mathcal{M}^\alpha(S,\Omega)$ si y sólo si lo es en $\mathcal{M}(\text{sop}\,\alpha,\Omega)$.

Para demostrar el lema aplicamos el lema 2.2.3. al grupo algebraico lineal $G = G^\alpha$ operando en el espacio vectorial $X = M^\alpha(S, \mathcal{R})$

El álgebra de Lie de G es el cociente del álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{k_n}$ por un ideal central de dimensión 1.

Si probamos que $\mathcal{M}^\alpha_{ind}$ es un conjunto denso en X, se tiene a) ya que $\mathcal{M}^\alpha_{ind} \cap \mathcal{M}_0$ es denso en $\mathcal{M}_0$; pues si Y es un abierto en $\mathcal{M}_0$, también Y es abierto en X ($\mathcal{M}_0$ es abierto en X) y

$$Y \cap \mathcal{M}^\alpha_{ind} = Y \cap (\mathcal{M}^\alpha_{ind} \cap \mathcal{M}^\alpha_0) \neq \phi$$

Entonces como $\mathcal{M}^\alpha_{ind} \cap \mathcal{M}^\alpha_0$ es cerrado en $\mathcal{M}^\alpha_0$ por la observación del lema 2.2.6, tenemos que

$$\mathcal{M}^\alpha_0 = \overline{\mathcal{M}^\alpha_{ind} \cap \mathcal{M}^\alpha_0} = \mathcal{M}^\alpha_{ind} \cap \mathcal{M}^\alpha_0 \subset \mathcal{M}^\alpha_{ind}.$$

Así supongamos que $\mathcal{M}^\alpha_{ind}$ no es un conjunto denso en X, esto quiere decir que X contiene un subconjunto X_0 abierto denso (pues X es irreducible), consistiendo de objetos escindibles. En consecuencia para todo elemento $x \in X_0$, existe $p = (g_1, \cdots g_n) \in End(x) \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ tal que

$p^2 = p \quad p \neq 0, 1$; donde g_i es el proyector de $\mathcal{U}_{k_i}$. Luego existe un número finito de p's en $\check{\mathcal{G}}$, salvo conjugación, sean estos $p_1 \dots p_s$. Como $p \in End(x)$, entonces $p \cdot (x) = (x_\ell \, g_{i(\ell)} - g_{f(\ell)} \, x_\ell) = 0$ y

así $x \in \ker p$. Por otro lado para $p = (c_i g_i c_i^{-1})$ con $c_i \in GL_{k_i}$, y si $p.(x_\ell)$

$$= \left[x_\ell (c_{i(\ell)} g_{i(\ell)} c_{i(\ell)}^{-1}) - (c_{f(\ell)} g_{f(\ell)} c_{f(\ell)}^{-1}) x_\ell \right] = 0$$

entonces $\left[(c_{f(\ell)}^{-1} x_\ell \, c_{i(\ell)}) g_{i(\ell)} - g_{f(\ell)} (c_{f(\ell)}^{-1} x_\ell \, c_{i(\ell)}) \right]$

$= 0$. Esto nos dice que si $p = c p_i c^{-1}$ y $x \in \ker p$, entonces $c x \in \ker p_i$; donde $c \in G^\alpha$. Por tanto $x \in G \cdot \ker p_i$ o sea $X = \overline{X_0} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \overline{G \cdot \ker p_i}$ pero como X es irreducible, existe $j \in \{1 \dots s\}$ tal que $X = \overline{G \cdot \ker p_j}$. Sea A la imagen del tal $p_j = (g_1 \dots g_n)$ en el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ del grupo G^α. Sea m_i el número de valores propios de g_i iguales a uno y $m_i' = k_i - m_i$ los valores propios iguales a cero. Sea $\beta = \sum m_i \alpha_i \in \mathbb{N}_t$, claramente del hecho de que $p \neq 1, 0$; $\beta \neq 0, \alpha$. El mapeo $G \times \ker A \longrightarrow X$ es denso y separable.

Así del lema 3.2.2, existe un punto $x \in X$ tal que $A \in \mathcal{U}_x$ y rango $A \leq$ rango ad $A|_{\mathcal{U}}$.

Como $A \cdot x = (x_\ell g_{i(\ell)} - g_{f(\ell)} x_\ell)$, entonces:

$$\text{rang}\, A|_X = -\sum_{i \neq j} a_{ij} m_i m_j \quad \text{y rango ad } A|_{\mathcal{U}} = 2 \sum m_i m_i'.$$

De las formulas anteriores obtenemos

$$0 \leq \text{rango ad}A - \text{rango}\, A = \sum_{i,j} a_{ij} m_i m_j'$$

Pero $\sum_j m_j m_j' k_j^{-1} \left(\sum_i a_{ij} k_i\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{m_i}{k_i} - \frac{m_j}{k_j}\right)^2 k_i k_j$

$$= \sum m_j m_j' k_j^{-1} \left(\sum_{i,j} a_{ij} k_i\right) - \sum_{i,j} a_{ij} m_i m_j + \frac{1}{2} \sum a_{ij} \frac{m_i^2}{k_i} k_j$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{m_j}{k_j} k_i = \sum_j m_j \left(\sum_i a_{ij} k_i\right) - \sum_j \frac{m_j^2}{k_j} \left(\sum_i a_{ij} k_i\right)$$

$$- \sum_{i,j} a_{ij} m_i m_j + \sum a_{ij} \frac{m_i^2}{k_i} k_j = \sum_{i,j} a_{ij} m_j k_i -$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} m_i m_j = \sum a_{ij} m_j (m_i - k_i) = \sum a_{ij} m_j m_i' \geq 0$$

El primer sumando de la primera igualdad es no positivo por hipótesis del lema y el segundo es no positivo pues $a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ y para $i = j$ el sumando correspondiente es cero. Por tanto ambos son ceros. Como S es conexo para $i, j = 1, \ldots n$ existen $a_{1 i_2}, \ldots a_{i_{k_j} j}$ todos diferentes de cero, luego del hecho de que si $a_{ij} \neq 0$ $m_i/k_i = m_j/k_j$ $(i \neq j)$ tenemos: $\frac{m_1}{k_1} = \frac{m_{i_2}}{k_{i_2}} = \cdots = \frac{m_j}{k_j}$ para $j = 2, \ldots n$

en consecuencia $\frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} = \cdots = \frac{m_n}{k_n}$ como $\beta \neq 0$;

$m_i = \frac{m_1 k_i}{k_1}$ $i = 1, \ldots n$ tenemos $\beta = \sum m_i \alpha_i$

$= \sum_i \frac{m_1}{k_1} k_i \alpha_i = k\alpha$, luego β es proposional

a α y así todos los m_i y m_i' son no ceros, por tanto $\sum_i a_{ij} k_i = 0$ $j = 1 \ldots n$, lo que contradice que el soporte de α no sea de tipo cero. Por tanto M^α_{ind} es un conjunto denso en X.

Para demostrar b) si M^α_{ind} es denso terminamos pues todo elemento de $M^\alpha_{ind} \cap M_0 = M_0$ (abierto); tiene dimensión $k\delta$. Si M_{ind} no es denso, existe un abierto denso X_0 en X tal que cada $x \in X_0$, existe $p = (g_1 \cdots g_n) \in End(x)$ (proyector). Si m_i es el número de valores propios correspondientes a 1 de g_i, entonces $\beta = \dim p(x) = \sum m_i \alpha_i$. En consecuencia x es la suma de objetos de dimensión un múltiplo de δ ya que β es un múltiplo de $\alpha = k\delta$ por ser α de soporte de tipo cero

2.3.- Funtores Reflexión.- Sea $\pi(n)$ la representación natural del grupo GL_n en el espacio de dimension n, $\mathbb{F}^n$. Sea Π_1 y Π_2 algunas representaciones de un grupo G en los espacios vectoriales V_1 y V_2 respectivamente, y sea $\dim V_1 = k_1$. Consideremos la representación $\Pi_+ = (\Pi_1^* \otimes \pi(n)) \oplus (\Pi_2 \otimes 1)$ del grupo $G \times GL_n$ en el espacio

$$V_n^+ = \mathrm{Hom}(V_1, \mathbb{F}^n) \oplus V_2 \simeq (V_1^* \otimes \mathbb{F}^n) \oplus V_2$$

(Π^* denota la representación contragradiente de Π) y la representación $\Pi_- = (\pi(n)^* \otimes \Pi_1) \oplus (1 \otimes \Pi_2)$. del grupo $GL_n \times G$ en el espacio

$$V_n^- = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n, V_1) \oplus V_2 \simeq (\mathbb{F}^{n*} \otimes V_1) \oplus V_2 .$$

Sean los conjuntos

$$V_{n,m}^+ = \{ u = u_1 \oplus u_2 \in V_n^+ \mid \dim \ker u_1 = m \}$$

$$V_{n,m}^- = \{ u = u_1 \oplus u_2 \in V_n^- \mid \dim \operatorname{coker} u_1 = m \}.$$

Tomemos $u = u_1 \oplus u_2 \in V_{n,m}^+$ y escogamos un isomorfismo $t : \ker u_1 \simeq \mathbb{F}^m$ esto nos da una inyección de $R^+(u_1) : \mathbb{F}^m \hookrightarrow V_1$; denotemos por $R^+(u) = R^+(u_1) + u_2 \in V_m^-$. Por otra parte $\operatorname{coker} R^+(u_1) = V_1 / \mathrm{Im}\, R^+(u_1) =$

$V_1/\mathbb{F}^m$. Por tanto dim coker $R^+(u_1) = k-m$ es decir $R^+(u) \in V^-_{n,k-m}$. Sea $\mathcal{O}$ una orbita del grupo $G \times GL_n$ en la variedad $V^+_{n,m}$ y sea $u \in \mathcal{O}$ un representante de esta orbita y consideremos la orbita de $R^+(u)$ del grupo $GL_m \times G$ en la variedad $V^-_{n,k-m}$, esta orbita no depende del isomorfismo tomado, pues si $t_1 : \mathbb{F}^m \simeq \ker u_1$ es otro y $R^+_1(u_1) : \mathbb{F}^m \hookrightarrow V_1$, entonces $R^+(u_1) = t \cdot i$ y $R^+_1(u_1) = t_1 \cdot i$, enconsecuencia existe

$(g, 1) \in GL_m \times G$ talque $R^+(u) = \pi^-(g, 1)(R^+_1(u))$. también no depende del representante u pues si tomamos otro $u' = u'_1 + u'_2 \in \mathcal{O}$, $u = \pi^+(g, c)u'$ donde $(g, c) \in G \times GL_n$ y de la misma forma podemos encontrar (c', g') $\in GL_m \times G$ talque $\pi^-(g^{-1}c')u = u'$. Denotemos a esta orbita por $R^+(\mathcal{O})$. Así hemos definido una función del conjunto de orbitas del grupo $G \times GL_n$ en la variedad $V^+_{n,m}$ al conjunto de orbitas del grupo $GL_m \times G$ en la variedad $V^-_{m,k-m}$.

Analogamente para $u = u_1 \oplus u_2 \in V^-_{n,m}$ y un isomorfismo coker $u_1 \simeq \mathbb{F}^m$, obtenemos un epimorfismo $R^-(u_1) : V_1 \to V_1/\operatorname{Im} u_1 \simeq \mathbb{F}^m$

denotamos por $R^-(U) = R^-(U_1) + U_2$; $\ker R^-(U_1) = \operatorname{Im} U_1$, pero $\dim(\operatorname{Im} U_1) = \dim V_1 - m = k-m$ por tanto $R^-(U) = R(U_1) + U_2 \in V^+_{m\,k-m}$. Como antes obtenemos un mapeo R^- del conjunto de orbitas del grupo $GL_n \times G$ en la variedad $V^-_{n,m}$ en el conjunto de orbitas del grupo $G \times GL_m$ en la variedad $V^+_{m,k-m}$.

Sea $U = U_1 + U_2 \in V^+_{n,m}$; fijamos un isomorfismo $V_1/_{\ker U_1} \simeq \mathbb{F}^{k-m}$. Esto da un epimorfismo $T^+(U_1) : V_1 \longrightarrow \mathbb{F}^{k-m}$, entonces $T^+(U) = T(U_1) + U_2 \in V^+_{k-m,m}$ pues $\dim \ker T^+(U_1) = \dim \ker U_1 = m$.

De nuevo esto da un mapeo T^+ del conjunto de orbitas del grupo $G \times GL_n$ en la variedad $V^+_{n,m}$ al conjunto de orbitas del mismo grupo en la variedad $V^+_{k-m\,m}$.

Similarmente para $U = U_1 + U_2 \in V^-_{n,m}$ fijamos un isomorfismo $\operatorname{Im} U_1 \simeq \mathbb{F}^{k-m}$ (pues $\operatorname{coker} U_1 = V/_{\operatorname{Im} U_1}$) y obtenemos una inclusión $T^-(U_1) : \mathbb{F}^{k-m} \longrightarrow V_1$, luego $T^-(U) = T^-(U_1) + U_2 \in V^-_{k-n,m}$. Esto da un mapeo T^- de las orbitas del grupo $GL_n \times G$

de la variedad $V^-_{n,m}$ en el conjunto de orbitas del mismo grupo en la variedad $V^-_{k-n,m}$.

Lema 2.3.1.- Sea $\mathcal{O}$ (o $\mathcal{O}'$) una orbita del grupo $GL_n \times G$ (o $G \times GL_n$) en $V^+_{n,m}$ (o $V^-_{n,m}$). Entonces se tiene $R^-R^+(\mathcal{O}) = T^+(\mathcal{O})$; $R^+R^-(\mathcal{O}') = T^-(\mathcal{O})$ En particular suponiendo que $k = n-m$ se tiene

$$R^-R^+(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \quad R^+R^-(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$$

Dem.- Sea $u \in \mathcal{O}$, entonces tenemos $R^-R^+(u) = R^-R^+(u_1) + u_2$ donde

$$V_1 \xrightarrow{R^-R^+(u_1)} \operatorname{coker} R^+(u_1) \left(= V_1/\ker u_1\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^{k-m}$$

y $\quad T^+(u) = T^+(u_1) + u_2$

$$V_1 \xrightarrow{T^+(u_1)} V_1/\ker u_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^{k-m}.$$

Por consiguiente $\mathcal{O}_{R^-R^+(u_1)} = \mathcal{O}_{T(u_1)}$ y así $R^-R^+(\mathcal{O}) = T^+(\mathcal{O})$ de forma análoga $R^+R^-(\mathcal{O}) = T^+(\mathcal{O})$ y también si $k = n-m$

$V_1/\ker u_1 \cong \mathbb{F}^n$ y $\quad V_1 \xrightarrow{T^+(u_1)} \mathbb{F}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^n$

pues $\ker u_1 = \mathbb{F}^{n-k}$ y así $\mathcal{U}_{T_1^+(u)} = \mathcal{U}_u$.

Lema 2.3.2.. Sea (S, Ω) una gráfica orientada y sea p_i un vertice admisible de esta gráfica. Entonces existen Funtores

$$R_i^+ \,(o\ R_i^-) : \mathcal{M}(S,\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(S, \bar{r}_i(\Omega)).$$

si p_i es un pozo (o una fuente respectivamente). Con las siguientes propiedades (Para el caso de que p_i sea un pozo; de forma equivalente si p_i es una fuente.)

a) $R_i^+(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}') = R_i^+(\mathcal{U}) \oplus R_i^+(\mathcal{U}')$

b) Sea $\mathcal{U}$ un objeto inescindible de $\mathcal{M}(S,\Omega)$. Entonces hay dos posibilidades

1.- $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(i)}$ y $R_i^+(\mathcal{U}^{(i)}) = 0$

2.- $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}^{(i)}$, $R_i^+(\mathcal{U})$ es un objeto inescindible; $R_i^- R_i^+(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ y

$$\dim R_i^+(\mathcal{U}) = r_i(\dim \mathcal{U}) \in \Gamma_+ .$$

Dem.- Supongamos que p_i es un pozo (Para una fuente la demostración es identica).

Sean $n = k_i$, $V_1 = \bigoplus_{\substack{l \in S,\ f(l) = p_i}} V_{i(l)}$

$$V_2 = \bigoplus_{\substack{l \in S,\ f(l) \neq p_i}} \operatorname{Hom}(V_{i(l)}, V_{f(l)}).$$

$$G = GL_{k_1} \times \cdots \times GL_{k_{i-1}} \times GL_{k_{i+1}} \times \cdots \times GL_{k_n}.$$

claramente

$$V_n^+ = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^n, V_1) \oplus V_2 = \mathcal{M}(S, \Omega)$$

$$V_m^- = \mathrm{Hom}(V_1, \mathbb{F}^n) \oplus V_2 = \mathcal{M}(S, \hat{r}_i \Omega)$$

Así $R^+ : V^+_{n,m} \longrightarrow V^-_{m\ k-m}$

$R^- : V^-_{n,m} \longrightarrow V^+_{m\ k-m}$ son los functo-

res deseados. En efecto:

Para $u_1 \oplus u_2 \in V_n^+$; $u_1 \oplus u_2 = \underset{\substack{\ell \in S_1 \\ f(\ell) = p_i}}{(\phi'_\ell)} \oplus \underset{\substack{\ell \in S_1 \\ f(\ell) \neq p_i}}{(\phi_\ell)}$

$R^+(u_1 \oplus u_2) = R^+(\phi'_\ell) \oplus (\phi_\ell)$, y

$$\mathbb{F}^m \xrightarrow{\ \sim\ } \overset{R^+(\phi'_\ell)}{\mathrm{Ker}(\phi'_\ell)} \hookrightarrow \bigoplus_{f(\ell) = p_i} V_{i(\ell)}$$

por tanto $R^+(V, \phi) = (W, g)$ donde

$$W_{p_j} = V_{k_j} \quad \text{si } j \neq i$$

$$V_{p_i} = \mathbb{F}^m \simeq \mathrm{ker}(\phi'_\ell) \quad f(\ell) = p_i$$

y $\quad g_\ell = \phi_\ell \quad$ si $f(\ell) \neq p_i$

$$g_\ell = R^+(\phi'_\ell) : \mathbb{F}^m \hookrightarrow \bigoplus_{f(\ell) = p_i} V_{i(\ell)}$$

Aplicando R^-,

$$\underset{f(\ell)=p_i}{R^-(R^+(\phi'_\ell))} \oplus \underset{f(\ell)\neq p_i}{(\phi_\ell)} \quad \text{y tenemos}$$

$$\begin{array}{c} R^- R^+(\phi'_\ell) \\ \mathbb{F}^m \simeq \ker(\phi'_\ell) \hookrightarrow \bigoplus_{f(\ell)=p_i} V_{i(\ell)} \twoheadrightarrow \bigoplus_{f(\ell)=p_i} V_{i(\ell)} \Big/ \ker(\phi'_\ell) \simeq \mathbb{F}^{k-m}. \end{array}$$

Por tanto

$$R^-(W,g) = (H,h) \quad \text{donde}$$

$$H_{p_j} = W_{p_j} = V_{p_j} \quad \text{si } j \neq i$$

$$H_{p_i} = \mathbb{F}^{k-m} \simeq \operatorname{coker} R^+(\phi'_\ell) = \bigoplus V_{i(\ell)} \Big/ \ker(\phi'_\ell)$$

y $h_\ell = g_\ell = \phi_\ell$ si $f(\ell) \neq p_i$

$h_\ell = R^- R^+(\phi_\ell)$ si $f(\ell) = p_i$.

Definamos $i : R^- R^+(V,\phi) \longrightarrow (V,\phi)$

$i_{p_j} : V_{p_j} \longrightarrow V_{p_j}$ la identidad $j \neq i$

$$i_{p_i} : R^- R^+(V) \simeq \bigoplus_{f(\ell)=p_i} V_{i(\ell)} \Big/ \ker(\phi'_\ell) \hookrightarrow V_{p_i}$$

por

$$v_k + \ker(\phi'_\ell) \longrightarrow \sum_{\substack{\ell \in S_1 \\ f(\ell)=p_i}} \phi_\ell(v_{i(\ell)})$$

está bien definido pues.

$$i_{p_i}(\ker \iota\phi_\ell)) = 0$$

Para ver que ι es un morfismo es suficiente probar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
V_{i(\ell)} \arrow[r, "R^- R^+(\phi'_\ell)"] \arrow[d, "\iota = 1"'] & W = \mathbb{F}^{k-n} \simeq \operatorname{coker} R^+(\phi'_\ell) = \bigoplus V_{i(\ell)} / \ker(\phi'_\ell) \arrow[d, "i_{p_i}"] \\
V_{i(\ell)} \arrow[r, "\phi_\ell"'] & V_{p_\ell}
\end{tikzcd}$$

$i \cdot R^- R^+(\phi_\ell)(v) = \phi_\ell(v)$. En consecuencia

$$V \simeq R^- R^+(V) \oplus \tilde{V} \quad \text{donde } \tilde{V} = V / \operatorname{Im} i .$$

Demostación de b) si $\mathcal{U} = (V, \phi)$ es un objeto inescindible en $\mathcal{M}(S, \Omega)$, entonces V coincide con uno

Caso 1) $V = V/\operatorname{im} i$. Entonces $V_{p_j} = 0$

para $j \neq i$ y como V es inescindible $V \simeq \mathcal{U}^{(i)}$ y claramente $R^+(\mathcal{U}^{(i)}) = 0$.

Caso 2) si $V \simeq R^- R^+(V)$. Para ver que el objeto $W = R^+(V)$ es inescindible, construyamos un morfismo (de forma similar al) para p_i una fuente:

$$p : V \longrightarrow R^+R^-(V)$$

y así p nos da la descomposición

$$V = R^+R^-(V) \oplus \ker p.$$

si $W = W_1 \oplus W_2$. Entonces $V = R^-(W_1) \oplus R^-(W_2)$ y así uno de estos términos debe de ser cero (por ejemplo si $R^-(W_2) = 0$). Como $W = R^+(V)$, entonces

$$p : W \longrightarrow R^+R^-(W)$$ es un isomorfismo. Por tanto $p(W_2) \subset R^+R^-(W_2) = 0$ es decir $W_2 = 0$

La última parte del lema. Sea $U = U_1 \oplus U_2 \in \mathcal{M}(S, \Omega)$

$$r_i(\dim U) = r_i(\alpha) = \sum_j k_j \alpha_j - \Big(\sum_j a_{ij} k_j\Big)\alpha_i$$

$$= \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j + \Big(k_i - \sum_j a_{ij} k_j\Big)\alpha_i.$$

Por otro lado como $R^+(U)_{p_i} = \ker U_1$ y $\dim \ker U_1 = k_i - \dim \operatorname{Im} U_1$

$= k_i - (\sum_j a_{ij} k_j)$. Entonces $\dim R^+(U)$

$= \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j + (k_i - \sum_j a_{ij})\alpha_i$ Así $\dim R^+(U) = r_i(\dim U) \in \Gamma^+$.

2.4.. Dimensiones de Representaciones Irreducibles de Gráficas sobre campos finitos.

En esta sección el campo base $\mathbb{F}$ es un campo finito $\mathbb{F}_q$ de orden q.

Lema 2.4.1. Sea G un grupo lineal operando en un espacio vectorial $V \cong \mathbb{F}_q^n$ y sea V^* la representación contragradiente de G. Entonces el número de orbitas de G en V y V^* son iguales.

Dem.. Fijamos un caracter χ complejo multiplicativo de el grupo aditivo de $\mathbb{F}_q$. Denotemos por A y A^* los espacios vectoriales de funciones de V en $\mathbb{C}$ y V^* en $\mathbb{C}$ respectivamente. La transformada de Fourier $A \to A^*$ definida por

$$\hat{f}(\xi) = q^{-\frac{n}{2}} \sum_{v \in V} f(v)\, \chi(\xi(v)).$$

Entonces

$$\hat{\hat{f}}(w) = q^{-\frac{n}{2}} q^{-\frac{n}{2}} \sum_{\xi \in V^*} \sum_{v \in V} f(v)\, \chi(\xi(v)) \chi(w(\xi))$$

$$= q^{-n} \sum_{\xi \in V^*} \sum_{v \in V} f(v) (\chi(\xi(v+w))).$$

$$= q^{-n} \sum_{v' \in V} f(v'-w) \Big(\sum_{\xi \in V^*} \chi(\xi(v')) \Big).$$

Pero $\displaystyle \sum_{\xi \in V^*} \chi(\xi(v')) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} q^{n-1} \chi(\lambda),$

Para $v' \neq 0$. Pues para cada $\lambda \in \mathbb{F}_q$ hay q^{n-1} transformaciones lineales ξ tales que $\xi(v') = \lambda$ (completando v' a una base de V $v_1, v_2, \dots, v_n$ y para cada $v_i \neq v$, tenemos q funciones que mandan v_i en $\mathbb{F}_q$.

Por otro lado

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \chi(\lambda) = \frac{1}{q^n} \langle \chi, 1 \rangle = 0$$

para $v' = 0$, $\chi(\xi(0)) = \chi(0) = 1$. Así

$$\hat{\hat{f}}(w) = q^{-n}\Big(\sum f(v'-w)\, 0 + f(-w) \sum_{\xi \in V^*} \chi(\xi(0))$$

$$= q^{-n} f(-w)\, q^n = f(-w).$$

Resumiendo $\hat{\hat{f}}(v) = f(-v)$. Y f es G-invariante si y sólo si $\hat{f}$ lo es. En efecto: para $g \in G$, $f \in A$.

$$g \cdot \hat{f}(\xi) = \hat{f}(g^{-1}\xi) = \sum_{v \in V} f(v) \chi(g^{-1}\xi(v))$$

$$= \sum_{v \in V} f(v)\ \chi(\xi(g \cdot v)) \quad \text{si} \quad w = g v.$$

$$v = g^{-1} w \quad \text{y} \quad g \cdot \hat{f}(\xi) = \sum_{w \in g(V) = V} f(g^{-1} w) \chi(\xi(w))$$

$$= \sum_{w \in V} g \cdot f(w) \chi(\xi(w)) = \widehat{g \cdot f}(\xi)$$

Luego si $g \cdot f = f$, $g \cdot \hat{f} = \widehat{g \cdot f} = f$ y si $g \cdot \hat{f} = \hat{f}$, entonces $g \cdot f(v) = g \cdot \hat{\hat{f}}(-v) = \widehat{g \cdot \hat{f}}(-v) = \hat{\hat{f}}(-v) = f(v)$.

Para cada orbita $\mathcal{O}_v$ de G en V, le asociamos la función característica del conjunto $\mathcal{O}_v$, entonces es claro que $f_{\mathcal{O}_v}$ es G-invariante y si las orbitas son diferentes las funciones son linealmente independientes. Además cada función f es G-invariante $f(\mathcal{O}_v) =$ constante. Por tanto $f = \sum \lambda f_{\mathcal{O}_v}$ lo que demuestra que el número de orbitas de G en V y de G en V^*, es la dimensión del espacio de funciones G-invariantes de A y A^* respectivamente. En consecuencia el número de orbitas de G en V y G en V^* son iguales.

Lema 2.4.2.- Sea G un grupo algebraico lineal operando en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{F}_q$ y sea V^* la representación contragrediente. Sea T un toro $\mathbb{F}_q$-split fijo de G. Denotamos por $d(T,V)$ al número de orbitas de $G(\mathbb{F}_q)$ en $V(\mathbb{F}_q)$ tal que la clase conjugada de T en G es la clase conjugada de toro $\mathbb{F}_q$-split máximo de el estabilizador. Entonces $d(T,V)$

$= d(T, V^*)$. En particular el número de orbitas cuasilibres de $G(\mathbb{F}_q)$ en $V(\mathbb{F}_q)$ y en $V^*(\mathbb{F}_q)$ son iguales.

Dem.- si $T = \{e\}$; $d(T, V)$ es el número de orbitas cuasilibres ya que si $\mathcal{O}_x$ es una orbita de G en V, la clase conjugada de todos los toros $\mathbb{F}_q$-split máximos en G_x es e, entonces el estabilizador no tiene toros no triviales.

Probaremos el lema por inducción sobre $\dim V = n$. Para $n=0$ es trivial pue la única orbita en V y V^* es el cero. Fijamos T un toro $\mathbb{F}$-split $(\neq e)$ de G. Sean W y W' los subespacios de vectores fijos en V y V^* respectivamente bajo T. Sea $H = N_G(T)/T$, donde $N_G(T)$ es el normalizador de T en G. Como T actua trivialmente en W y W^*; el grupo H actua en W y W' Un punto $x \in W(\mathbb{F}_q)$ $(o\ W'(\mathbb{F}_q))$ es cuasilibre bajo H si y solamente si T es un toro split máximo en G_x. En efecto: Supongamos que T no es un toro máximo en G_x, entonces existe toro split $T' \supsetneq T$ en G_x; $N_{G_x}(T) \cap T'/T$ es un toro no trivial en H_x, por tanto

x no es cuasilibre de W bajo H. Ahora supongamos que x no es cuasilibre en W bajo H, entonces existe un toro split no trivial de H_x y este es de la forma T'/T, donde T' es un toro de G_x que contiene a T extrictamente, así T no es máximo.

También si x, y son puntos cuasilibres en W (o W') con respecto a H y si $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$, entonces $y = h \cdot x$ para algún h en H. En efecto: T y $T_1 = gTg^{-1}$ son toros $\mathbb{F}$-split máximos en G_y ya que T es máximo en G_x (por el parrafo anterior) y gTg^{-1} es máximo en $gG_xg^{-1} = G_{gx}$. Por otra parte sabemos que T y T_1 son conjugados por ser maximos, luego $T = g_1 T_1 g_1^{-1}$ para algún $g_1 \in G_y$ y $g_1 g \in N_G(T)$ pues $g_1 g \, T (g_1 g)^{-1} = T$. Sea h la imagen de $g_1 g$, luego $h \cdot x = g_1 g x = g_1 y = y$.

Probemos ahora que $d(T, V)$ y $d(T, V^*)$ es el número de orbitas cuasilibres del grupo $H(\mathbb{F}_q)$ en $W(\mathbb{F}_q)$ y $W'(\mathbb{F}_q)$ respectivamente. Sea $\mathcal{O}_z$ una orbita que cumple la hipótesis del lema, entonces tenemos que $T = T^{g}_{z}$, donde T_z es un toro

$\mathbb{F}_q$-split máximo en $G_{g.z}$ ($T(gz) =$
$= g T_z g^{-1}(gz) = gz$) y así $gz \in W$, por tanto $g.z$ es un punto cuasilibre de W bajo H. Entonces $\mathcal{O}_{gz} = \mathcal{O}_z$ es una orbita cuasilibre en W bajo la acción de H y esta orbita no depende del representante de la orbita $\mathcal{O}_z$ que escogimos inicialmente ya que si $y = gz$; entonces existe $h \in H$ tal que $y = h.z$ por tanto las orbitas de H en W $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_z$ (pues y, z son cuasilibres bajo H en W). Recíprocamente. Cada orbita $\mathcal{O}_x$ cuasilibre de H en W. La orbita de x en V bajo la acción de G, cumple la hipótesis del lema ya que T es un toro split máximo en el stabilizador

Como T es completamente reducible, la representación de H en W y W^* son contragradientes y como $\dim W < \dim V$, aplicamos la hipótesis de inducción para el grupo H operando en W y para el toro split trivial de H. Así $d(e, W) = d(e, W')$ pero como

$$d(T, V) = d(e, W) = d(T, V^*)$$

en consecuencia hemos demostrado que $d(T, V) = d(T, V^*)$ para todo toro split no trivial T. Para $T = \{e\}$, tenemos que

$d(e, V)$ = número de orbitas casi libres de G en V = número de orbitas de G en $V - \sum d(T, V)$, donde la sumatoria es tomada sobre todas las clases conjugadas de toros $\mathbb{F}_q$-split no triviales. En efecto cada orbita $\mathcal{O}_x$ que cumple la hipótesis del lema, para $t \neq e$ (toro no trivial), $T^G \neq e$; G_x, tiene un toro split no trivial por tanto la orbita no es casilibre. Del lema 2.4.1, tenemos que $d(e, V) = d(e, V^*)$.

Lema. 2.4.3.- Consideremos dos representaciones de un grupo algebraico lineal en V_1 y V_2. Sea T un toro $\mathbb{F}_q$-split en G. Entonces $d(T, V_1 \oplus V_2) = d(T, V_1 \oplus V_2^*)$. En particular el número de orbitas casilibres de $G(\mathbb{F}_q)$ en $V_1 \oplus V_2(\mathbb{F}_q)$ y $V_1 \oplus V_2^*(\mathbb{F}_q)$ son iguales.

Dem.- Aplicamos el lema 2.4.2 a todos los grupos lineales G_X, $X \in V$, operando en V_2 y V_2^*, obtenemos $d(T, V_2) = d(T, V_2^*)$ pero cada orbita de G en $V_1 \oplus V_2$ es la suma directa de una orbita de G en V_2 así $d(T, V_1 \oplus V_2) = d(T, V_1 \oplus V_2^*)$.

Denotemos por $N_d(S, \Omega)$ el número de representaciones inescindibles (sobre $\mathbb{F}_q$) de dimensión $\alpha \in \Gamma_+$ de la gráfica orientada (S, Ω)

Lema 2.4.4.- Supongamos que $\alpha \in \Gamma_+$, $\alpha \neq \alpha_i$ y $n_\alpha(S, \Omega) \neq 0$. Entonces $r_i(\alpha) \in \Gamma_+$ y $n_{r_i(\alpha)}(S, \Omega) \neq 0$. Además se tiene

$$n_\alpha(S, \Omega) = n_{r_i(\alpha)}(S, \Omega).$$

Dem.- para $l_1 \in S_1$ $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V_{i(l_1)}, V_{f(l)}), \mathbb{F}) \simeq \mathrm{Hom}(V^*_{i(l)} \otimes V_{f(l_1)}, \mathbb{F}) \simeq \mathrm{Hom}(V_{f(l)} \otimes V_{i(l)}, \mathbb{F})$ $\simeq \mathrm{Hom}(V^*_{i(l)}, V^*_{f(l)})$ y además el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,\mathrm{Hom}(V_{i(l)}, V_{f(l)}), \mathbb{F}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}\,\mathrm{Hom}(V_{i(l)}, V_{f(l)})\mathbb{F}) \arrow[d, "a"] \\
\mathrm{Hom}(V^*_{i(l)}, V^*_{f(l)}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(V^*_{i(l)}, V^*_{f(l)}).
\end{tikzcd}$$

Para cada $g \in G^\alpha$. Por tanto el número de G^α orbitas en $\mathrm{Hom}(V_{i(l)}, V_{f(l)})^*$ y en $\mathrm{Hom}(V^*_{i(l)}, V^*_{f(l)})$ son iguales. Así podemos considerar que el reemplazo de uno de los sumandos en (2.1.3) por la representación contragradiente corresponde al cambio de la dirección de la flecha a lo largo de la correspondiente arista. Cambiamos la orientación Ω por una nueva orientación Ω' de tal forma que p_i se combierta en un vertice admisible de (S, Ω'). Por los lemas 2.2.1 y 2.4.3, se tiene que:

$$n_\alpha(S,\Omega) = n_\alpha(S,\Omega'). \text{ Por lema } 2.3.2$$

se tiene: $r_i(\alpha) \in \Gamma_+$ y $n_\alpha(S,\Omega') = n_{r_i(\alpha)}(S, \hat{r}_i(\Omega'))$
y también por lema 2.4.3.:

$$n_{r_i(\alpha)}(S, \hat{r}_i(\Omega')) = n_{r_i(\alpha)}(S,\Omega).$$

y por último $n_\alpha(S,\Omega) = n_{r_i}(S,\Omega)$.

teorema. 2.4.1.- sea $\mathbb{F}_q$ el campo base. Sea (S,Ω) una gráfica orientada y $\alpha \in \Gamma_+$.

a) Para $\alpha \notin \Delta_+$, toda representación de dimensión α es escindible.

b) Para $\alpha \in \Delta_+^{re}$, existe una y sólo una representación inescindible de dimensión α.

c) $n_\alpha(S,\Omega)$ no depende de la orientación Ω de S.

Dem. a) Sea $\alpha \in \Delta_+$ y $\alpha \in \Delta_+^{re}$. Supongamos que $\mathcal{M}^\alpha(S,\Omega)$ contiene un objeto inescindible. Entonces por lema 2.4.4, $w(\alpha) \in \Gamma_+$ y $\mathcal{M}^{w(\alpha)}(S,\Omega)$ también contiene un objeto inescindible para todo $w \in W$ (grupo de Weyl). En los elementos de $W(\alpha)$, tomemos β de peso mínimo:

$$\beta = \sum_j k_j \alpha_j \; ; \quad \text{para cada } i = 1 \ldots, n$$

$$r_i(\beta) = \beta - \left(\sum_j a_{ij} k_j\right)\alpha_i = \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j +$$

$(k_i - \sum_j a_{ij} k_j)\alpha_i \in W(\alpha)$ pero de la minimalidad del peso de β, tenemos que

$$k_i - \sum_j a_{ij} k_j \geqslant k_i \; ; \text{ o sea } \sum_j a_{ij} k_j \leq 0$$

Y por otra parte el soporte de β es conexo ya que de otra forma todo objeto de $M^{\beta}(S,\Omega)$ sería escindible contradicción de que $M^{W(\alpha)}(S,\Omega)$ tiene un objeto inescindible. Por la proposición 1.5.1 $\beta \in M \subset \Delta_+^{im} \subset \Delta_+$ lo que contradice que $\alpha \notin \Delta$.

b) Para $\alpha \in \Delta_+^{re}$, existe una sucesión $i_1 \ldots i_s$ tal que $r_{i_s} \cdots r_{i_1}(\alpha) \in \Pi$ y $r_{i_t} \cdots r_{i_1}(\alpha) \in \Gamma_+ - \Pi$ para $1 \leq t < s$. Como existe una única representación de dimensión $\alpha_i \in \Pi$, el objeto $U^{(i)}$ el lema 2.4.4. implica que existe una única representación de dimensión α.

d) Se sigue de la demostración del lema 2.4.4.

Bibliografia

1.- Andreev, E. M., Vinberg, E. B., Elashvili, A. G; Orbits of Greatest Dimension of Semisimple linear Lie Groups, Functional Anal. Appl. 1, 257-261 (1967)

2.- Bernstein, I. N., Gelfand I. M; Ponomarev, V. A; Coxeter Functors and Gabriel's Theorem, Russian Math. Surveys 28, 17-32 (1973)

3.- Borel A., Linear Algebraic Groups, W.A. Benjamin, Inc.

4.- Humpleys J. E., Linear Algebraic Groups Springer-Verlag.

5.- Gabriel P; Auslander-Reiten and Representation. Finite Algebras, proceedings ICRA. Ottawa 1979.

6.- Jacobson N; Lie Algebras. Interc. tracts nº 10; J. Wiley and S.

7.- Kac V. G: simple Irreducible Graded Lie Algebras of Finite Growth. Math. USSR Izvestya 2. 1271-1311 (1974)

8.- —— Infinite Dimensional Lie Algebras an the Dederkin η-Function. Functional Anal. Appl. 8. 68-70 (1974)

9.- —— Infinite Root Sistems, Representation of Graphs and Invariant

Theory. Inventiones Math. 56. 57-92 (1980)
10.. Pearl. M; Matriz theory and Finite Mathematics; International Series in pure and Applied Mathematics McGraw Hill.
11.. Stephen Berman, Robert Moody & Maria Wonenburger; Cartan Matrices with Null Root and Finite Cartan Matrices; Indiana University Mathematics Journal Vol. 21 No. 12 (1972).