03061

Universidad Nacional Autónoma de México

U. A. C. P. y P. del C. C. H.

2

PROGRAMACION LINEAL BORROSA

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTADISTICA
E INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A

JOSE CONCEPCION ROMERO CORTES

MEXICO, D. F. 2002 [redacted]

CONTENIDO.

(I)

INTRODUCCION

EN EL AÑO DE 1965, LOFTI A. ZADEH INTRODUJO EL CONCEPTO DE CONJUNTO BORROSO O DIFUSO. A PARTIR DE ESE AÑO, EL NUMERO DE PUBLICACIONES SE HA INCREMENTADO NOTABLEMENTE, PRUEBA DE ESTO ES QUE EN ESE AÑO SE PUBLICARON DOS ARTICULOS Y DIEZ AÑOS DESPUES EL NUMERO DE ARTICULOS CLASIFICADOS COMO DE CONTENIDO BORROSO FUE DE 227.

EN MEXICO, LA INQUIETUD POR EL CONOCIMIENTO DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS O APROXIMACION MATEMATICA A LA BORROSIDAD, HA IDO COBRANDO IMPORTANCIA. LAS VISITAS DE LOFTI A. ZADEH Y DE ARNOLD KAUFMANN A NUESTRO PAIS CON PROPOSITO DE DIFUSION DEL CONCEPTO DE BORROSIDAD, HA GENERADO INTERES EN MATEMATICOS Y MATEMATICOS APLICADOS.

YA QUE EL CONCEPTO DE CONJUNTO BORROSO, CONSTITUYE UNA HERRAMIENTA MATEMATICA QUE PUEDE AYUDAR EN EL PROCESO DE TRATAR SITUACIONES DEL MUNDO REAL DEFINIDAS DE UNA MANERA IMPRECISA, VAGA, AMBIGUA, ENFERMA O DIFUSA, MERECE QUE SE LE DE LA DIMENSION Y DIFUSION QUE LE CORRESPONDE, YA QUE LAS MATEMATICAS CONVENCIONALES CONTRIBUYEN DE UNA MANERA MUY LIMITADA EN EL ANALISIS DE TALES SITUACIONES.

FUNDAMENTALMENTE LOS PROPOSITOS DE ESTE TRABAJO SON:

(*i*) REPASAR LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS, DISTINGUIENDOLA DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD PARA EVITAR CONFUSIONES POSTERIORES.

(*ii*) SEÑALAR ALGUNAS DE LAS APLICACIONES DE LOS CONJUNTOS BORROSOS, QUE DE UNA MANERA INCIPIENTE SE HAN EMPEZADO A GENERAR EN DIVERSOS CAMPOS DE LA ACTIVIDAD HUMANA, PRINCIPALMENTE ENFATIZANDO SU IMPORTANCIA EN LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

(*iii*) ESTUDIAR SUPERFICIALMENTE LA PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA Y PROFUNDIZAR EN LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA, ILUSTRANDOLA VIA UN EJEMPLO DE INVERSION. ADEMAS EFECTUAR ALGUNOS DE LOS ANALISIS MAS COMUNES, COMO LOS ESTUDIADOS EN PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL, FUNDAMENTALMENTE DUALIDAD Y SENSIBILIDAD. SE SELECCIONO LA PROGRAMACION LINEAL POR SER ESTA LA TECNICA DE INVESTIGACION DE OPERACIONES DE MAYOR APLICACION.

(II)

TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

II.1 NECESIDAD DE CONJUNTOS BORROSOS.- EL NACIMIENTO DE LOS CONJUNTOS BORROSOS O DIFUSOS (FUZZY SETS) FUE DEBIDA - EN PARTE, A LA NECESIDAD DE TRATAR PROBLEMAS REALES CON CLASES DE CONJUNTOS QUE ADMITEN DISTINTOS GRADOS DE PERTENENCIA O MEMBRECIA EN SUS ELEMENTOS. ADEMAS LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS NO SOLO PROVEE HERRAMIENTAS NUMERICAS, SINO TAMBIEN PROVEE A ESPECIALISTAS DE DIFERENTES CAMPOS CON UN MARCO CONCEPTUAL BASICO EN EL CUAL LOS PROBLEMAS SE FORMULAN DE UNA MANERA INSTRUCTIVA Y PERCEPTIVA. TALES METODOS PODRIAN ABRIR - NUEVOS HORIZONTES EN PSICOLOGIA, SOCIOLOGIA, CIENCIAS POLITICAS, FILOSOFIA, FILOLOGIA, ECONOMIA, INVESTIGACION DE OPERACIONES, CIENCIA DE LA ADMINISTRACION Y OTROS CAMPOS, Y SER BASE PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS SUPERIOES EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL A AQUELLOS CONCEBIDOS ACTUALMENTE. AUNQUE LA IDEA DE BORROSIDAD PUEDE PARECER ALGO ELUSIVA, RESULTA SER UN CONCEPTO PERFECTAMENTE TRATABLE MATEMATICAMENTE.

LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS, ES EN EFECTO UN PASO - HACIA UNA REAPROXIMACION ENTRE LA PRECISION DE LAS MATEMATICAS CLASICAS O CONVENCIONALES Y LA IMPRECISION ENCONTRADA EN EL MUNDO REAL. EN ESTE PUNTO ES BUENO CONSIDERAR QUE EL CEREBRO HUMANO PIENSA EN TERMINOS BORROSOS O DIFUSOS, ESTO ES,

EN TERMINOS IMPRECISOS. EL RAZONAMIENTO HUMANO ES GLOBAL O EN PARALELO, ES DIFUSO, EN CONTRAPOSICION AL RECONOCIMIENTO LOGICO Y SECUENCIAL EN LAS MAQUINAS.

LA NECESIDAD DE INCLUIR EL CONCEPTO DE CONJUNTO BORROSO DENTRO DEL MARCO DE LAS MATEMATICAS CLASICAS, SE HA PUESTO DE MANIFIESTO EN MUCHOS ARTICULOS Y YA INCLUSIVE EN LIBROS COMO LOS DE KAUFMANN Y ZADEH.

LA SIMPLICIDAD DEL CONCEPTO DE CONJUNTO BORROSO, HACE QUE PUEDA INCORPORARSE A LA LITERATURA MATEMATICA EXISTENTE DE UNA MANERA NATURAL.

II.2.- CONCEPTO MATEMATICO DE CONJUNTO BORROSO O DIFUSO.- EL PROPOSITO DE ESTE PUNTO ES EXPLORAR UN POSIBLE MARCO AXIOMATICO A PARTIR DEL CUAL SE DESPRENDA UNA TEORIA RIGUROSA DE BORROSIDAD. -- ADEMAS ESTABLECEREMOS CLARAMENTE LA DIFERENCIA ENTRE PROBABILIDAD Y BORROSIDAD, QUE EN NO POCAS OCASIONES SE HA CONFUNDIDO.

EN MUCHAS CLASES DE PROBLEMAS LA IMPRECISION (DIFERENTE A LA ALEATORIEDAD) ESTA IMPLICITA, EL PROBLEMA DE PATRON DE CLASIFICA CION FUE PRESENTADO POR PRIMERA VEZ DENTRO DEL CONTEXTO BORROSO -- MAS QUE ALEATORIO POR BELLMAN, ZADEH Y KALABA. POR OTRA PARTE EN PROBLEMAS DE ANALISIS DE SISTEMAS, ES COMUN TRATAR IMPRECISION POR EL USO DE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD. SIN EMBARGO, CADA VEZ SE PONE DE MANIFIESTO QUE EN EL CASO DE MUCHOS PROBLEMAS DEL MUNDO -- REAL QUE INVOLUCRAN SISTEMAS DE GRAN ESCALA TALES COMO SISTEMAS DE SERVICIOS A MASAS, SISTEMAS ECONOMICOS, SISTEMAS SOCIALES, ETC., - LA MAYOR FUENTE DE IMPRECISION DEBE SER ETIQUETADA POR "BORROSIDAD" MAS QUE POR "ALEATORIEDAD". POR BORROSIDAD, ENTENDEMOS EL TIPO DE IMPRECISION QUE ES ASOCIADA CON LA CARACTERISTICA DE TRANSICION -- SOSTENIDA DE MEMBRECIA A NO MEMBRECIA. LA NOCION DE CONJUNTO BORRO SO FUE INTRODUCIDA POR LOFTI A.ZADEH QUE DEFINIO ESTE COMO UNA FUNCION CARACTERISTICA GENERALIZADA, ESTO ES, UNA QUE VARIA UNIFOR MEMENTE ENTRE CERO Y UNO, MAS QUE MERAMENTE ASUMIENDO LOS VALORES DE CERO O UNO. DE HECHO COMO SE VERA LA TEORIA DE CONJUNTOS ORDI- NARIOS ES UN CASO ESPECIAL DE LA TEORIA DE CONJUNTOS DIFUSOS. LOS VALORES INTERMEDIOS ENTRE CERO Y UNO DAN GRADOS DE MEMBRECIA DE VA RIOS PUNTOS EN EL CONJUNTO, VALORES GRANDES IMPLICAN UN ALTO GRA- DO DE MEMBRECIA Y VICEVERSA. EJEMPLOS TIPICOS DE CONJUNTOS BORRO-

SOS SON:

i) EL CONJUNTO DE NUMEROS CERCANOS A 5.

ii) EL CONJUNTO DE LOS JOVENES.

iii) ADEMAS CONJUNTOS QUE SE CARACTERIZAN POR ACEPCIONES COMO:

iii.1) APROXIMADAMENTE IGUAL

iii.2) MUCHO MAS GRANDE QUE

iii.3) TANTO COMO

iii.4) EN LA VECINDAD DE X_0

ETC.

COMO SE OBSERVA ESTOS CONJUNTOS PRESENTAN LA CARACTERISTICA - DE QUE ESTAN VAGAMENTE DEFINIDOS, Y POR TANTO SON BORROSOS, Y POR CONSIGUIENTE SE LES PUEDE ASOCIAR UNA FUNCION QUE INDIQUE EL GRADO DE PERTENENCIA DE LOS ELEMENTOS DE LOS CONJUNTOS CONSIDERADOS. A CONTINUACION SE ESTABLECEN LOS CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS.

ESPACIO PATRON.- SEA Γ UN ESPACIO PATRON ABSTRACTO DE ELEMENTOS GENERICOS $\gamma \varepsilon \Gamma$. LA ACTUAL CONSTRUCCION DE Γ DEPENDERA DEL PROBLEMA PARTICULAR QUE SE ESTE MODELANDO DE MANERA ANALOGA A COMO SE CONSTRUYE EL ESPACIO MUESTRAL EN TEORIA DE LA PROBABILIDAD DEPENDIENDO DEL EXPERIMENTO ALEATORIO QUE SE CONSIDERE. POR EJEMPLO, SI ESTAMOS TRATANDO CON UN PROBLEMA DE RECONOCIMIENTO DE CARACTERES, ENTONCES Γ CONSIDERARIA TODOS LOS SIMBOLOS POSIBLES QUE SE ENCUENTREN. SI ESTUVIESEMOS CONSIDERANDO LA OPINION SUBJETIVA DE UN INDIVIDUO, ENTONCES Γ , EL ESPACIO PATRON, ESTARIA REPRESEN-

TADO POR LOS ESTADOS POSIBLES DE PENSAMIENTO DE AQUEL INDIVIDUO. LOS NUMEROS QUE CAEN EN LA VECINDAD DE X_o DE RADIO r ESTARIA --- - CONSTITUIDO POR LOS PUNTOS INTERIORES Y DE LA FRONTERA DE UN CIRCULO (ESFERA O HIPERESFERA) DE RADIO $\dot{r}$.

SUPONGAMOS QUE $\mathfrak{X}$ ES UNA TOPOLOGIA SORE I, ESTO ES, $\mathfrak{X}$ ES CERRADA BAJO INTERSECCIONES FINITAS Y UNIONES ARBITRARIAS Y CONTIENE AL VACIO Y A Γ (NUESTRA SELECCION DE $\mathfrak{X}$ COMO UNA TOPOLOGIA, MAS QUE UN ∇ - ALGEBRA, SE DISCUTE POSTERIORMENTE).

INTRODUZCAMOS UN NUEVO TIPO DE FUNCION DE CONJUNTOS SOBRE $\mathfrak{X}$. DEFINAMOS ∇ COMO UNA ESCALA SOBRE $\mathfrak{X}$ SI:

i) $\nabla(\phi) = o$, $\nabla(I) = 1$

ii) PARA CUALQUIER COLECCION ARBITRARIA DE CONJUNTOS A_α EN $\mathfrak{X}$ (FINITA, CONTABLE O NO CONTABLE)

$\nabla(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \sup_\alpha (A_\alpha)$

PODEMOS PENSAR DE LA ESCALA INICIALMENTE COMO ASIGNACION DE - UN GRADO DE MEMBRECIA A CADA PUNTO DEL ESPACIO PATRON Γ . ENTONCES LA ESCALA ASOCIADA CON ALGUN CONJUNTO A $\subset \mathfrak{X}$ ES MERAMENTE EL -- GRADO MAS FUERTE DE MEMBRECIA DE AQUELLOS PUNTOS EN A. EL AXIOMA (i) ASEGURA QUE EXISTE AL MENOS UN PUNTO EN Γ CON UN GRADO DE MEMBRECIA IGUAL A 1. LOS SIGUIENTES RESULTADOS SON DIRECTOS:

a) $o \leqq \nabla(A) \leqq 1$ PARA TODA $A \subset \mathfrak{X}$

b) SI $A \subset B$ ENTONCES $\nabla(A) \leqq \nabla(B)$

ADEMAS CONSIDERE LA SIGUIENTE DEFINICION:

SEAN $A, B \subset \mathfrak{X}$. ENTONCES LOS CONJUNTOS A Y B ESTAN DESRELACIONADOS SI $\nabla(A \cap B) = \min.(\nabla(A), \nabla(B))$

LA DEFINICION ANTERIOR SE PUEDE EXTENDER A MAS DE DOS CONJUNTOS:

SEAN $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathcal{G}$

SE DICE QUE SON MUTUAMENTE DESRELACIONADOS SI PARA ALGUNA PERMUTACION DE EL CONJUNTO $\{1, 2, \ldots, n\}$ DENOTADO POR $i_1, i_2, \ldots, i_K$,

$$\nabla(Ai_1 \wedge Ai_2 \wedge \ldots \wedge Aik) = \min\ (\ \nabla(Ai_1), \ldots, \nabla(Ai_K)\ )$$

PASEMOS A DEFINIR UNA VARIABLE BORROSA. UNA VARIABLE BORROSA X, ES UNA FUNCION REAL DEFINIDA SOBRE Γ TAL QUE:

$\{\gamma : X(\gamma) = x\} \subset \mathcal{G}$ PARA TODA $x \in R$

AHORA DEFINAMOS EL CONCEPTO DE FUNCION DE MEMBRECIA COMO UNA EXTENCION DE ∇ A LA RECTA REAL, VIA VARIABLE BORROSA,

LA FUNCION DE MEMBRECIA DE UNA VARIABLE BORROSA X, DENOTADA POR μ_x, ES UN MAPEO DE R A EL INTERVALO $[0,1]$ Y ESTA DADA POR

$\mu_x\ (x) = \nabla\{\gamma : X(\gamma) = x\}$ PARA TODA $x \in R$

ES BUENO NOTAR QUE:

$$\sup_x \mu_x\ (x) = \nabla(\bigvee_x\ (\gamma : X(\gamma) = x)\} = \nabla(\Gamma) = 1$$

PARA ESTABLECER LA DIFERENCIA ENTRE BORROSIDAD Y PROBABILIDAD --- (QUE EN NO POCAS OCASIONES SE CONFUNDE, ERRONEAMENTE POR CIERTO), SE TIENE QUE EN PROBABILIDAD, LA DISTRIBUCION ESTA DEFINIDA SOBRE UN ANILLO SOBRE CONJUNTOS SOBRE LA RECTA (ESTO ES, CONJUNTOS DE LA FORMA $(-\infty, x]$) QUE DETERMINA UNICAMENTE UNA PROBABILIDAD SOBRE - CONJUNTOS DE BOREL. LA DENSIDAD ES ENTONCES OBTENIDA COMO LA DERIVADA RADON-NIKODYM. MIENTRAS QUE CON EL CONCEPTO DE BORROSIDAD, - DADA LA NATURALEZA DE LA OPERACION SUPREMO, LA ESCALA (∇), NO --- - ES DETERMINADA UNICAMENTE POR SU EXTENSION A CONJUNTOS DE LA FORMA $(-\infty, x]$ ENTONCES LA FUNCION DE MEMBRECIA DEBE SER OBTENIDA DI---

RECTAMENTE POR EXTENDER ∇ A UN CONJUNTO DE PUNTOS UNICO. AL -- TRATAR CON CONJUNTOS DE ESTE TIPO EN R ES NECESARIO CONSIDERAR -- UNIONES NO CONTABLES. DE LO ANTERIOR, NOS HACE PENSAR DE LO CONVENIENTE DE CONSIDERAR $\mathcal{G}$ COMO UNA TOPOLOGIA MAS QUE UN ∇-ALGEBRA.

LO EXPRESADO EN EL PARRAFO ANTERIOR LO PODEMOS RESUMIR COMO SIGUE:

TEORIA DE LA PROBABILIDAD		TEORIA DE BORROSIDAD
ESPACIO MUESTRAL Ω	-----	ESPACIO PATRON Γ
∇-ALBEBRA DE EVENTOS, $\mathcal{F}$	-----	TOPOLOGIA DE SUBCONJUNTOS, $\mathcal{G}$
MEDIDA DE PROBABILIDAD P DEFINIDA SOBRE $\mathcal{F}$	-----	ESCALA ∇ DEFINIDA SOBRE $\mathcal{G}$
INDEPENDENCIA DE EVENTOS $P(A \wedge B) = P(A)\ P(B)$	-----	CONJUNTOS DESRELACIONADOS $\nabla(A \wedge B) = \min(\nabla(A), \nabla(B))$
PARA UNION DE COLECCION CONTABLE DE CONJUNTOS DISJUNTOS $P(\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$	-----	PARA UNION DE COLECCION ARBITRARIA DE CONJUNTOS $\nabla(\bigvee_{\alpha} A_\alpha) = \sup_{\alpha} \nabla(A_\alpha)$
VARIABLE ALEATORIA.- FUNCION MEDIBLE SOBRE Ω VALUADA EN LOS REALES	-----	VARIABLE BORROSA.- FUNCION SOBRE Γ VALUADA EN LOS REALES CUYA IMAGEN INVERSA DE PUNTOS UNICOS PERTENECE A $\mathcal{G}$.
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD ES OBTENIDA COMO LA EXTENSION P A LOS CONJUNTOS DE BOREL SOBRE LA RECTA REAL, LA	-----	LA FUNCION DE MEMBRECIA SE OBTIENE COMO UNA EXTENSION DE ∇ A CONJUNTOS DE PUNTOS UNICOS SOBRE LA RECTA REAL.

DENSIDAD DE PROBABILIDAD ES
LA DERIVADA DE LA FUNCION DE
DISTRIBUCION (RADON-NIKODYM)

LAS DIFERENCIAS ENUNCIADAS SE PUEDEN EXPLICAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS, SE PUEDE EMPLEAR PARA TRATAR CLASES CON FRONTERAS DEFINIDAS DE MANERA IMPRECISA: CLASES CUYOS MIEMBROS ADMITEN DISTINTOS GRADOS DE PERTENENCIA; CLASES EN LAS CUALES LO DIFUSO ES DEBIDO A LA FALTA DE CRITERIO EXACTO PARA CLASIFICAR LOS ELEMENTOS, MAS QUE A LA PRESENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS INVOLUCRADAS EN EL PROBLEMA, YA QUE POR OTRA PARTE LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD TRATA CON EVENTOS RESULTADO DE UNA EXPERIMENTACION QUE NO SE PUEDEN PREDECIR CON CERTEZA, ESTO ES, SE TRATA CON EXPERIMENTOS ALEATORIOS QUE SE CARACTERIZAN POR LO SIGUIENTE:

i) ES IMPOSIBLE CONOCER DE ANTEMANO UN RESULTADO PARTICULAR.

ii) ES POSIBLE CONOCER TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES DEL EXPERIMENTO.

iii) ES POSIBLE REPETIR EL EXPERIMENTO EN CONDICIONES HOMOGENEAS.

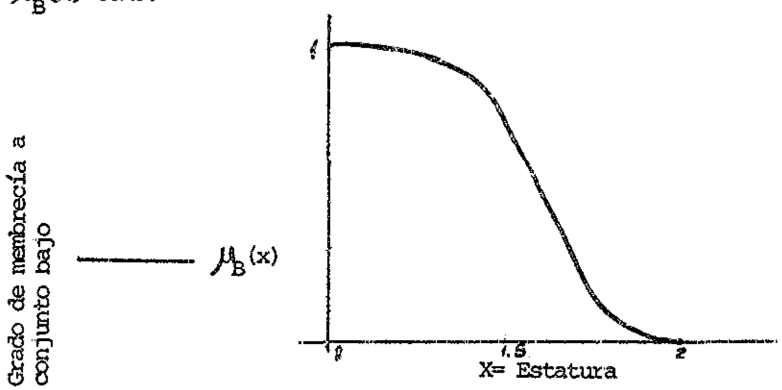
iv) LOS RESULTADOS QUE ARROJE EL EXPERIMENTO OCURREN EN FORMA ALEATORIA.

v) SE REQUIERE QUE EL EXPERIMENTO SEA IDEALIZADO.

ESTO ES, MIENTRAS EN EL CASO PROBABILISTICO HACEMOS CONSIDERACIONES DE ALGUNA CLASE PARA ESPECIFICAR UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD, Y POR CONSIGUIENTE QUE LAS CONDICIONES DE EXPERIMENTACION

DETERMINAN UNICAMENTE EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO, POR OTRO LADO EN EL CASO BORROSO HACEMOS CONSIDERACIONES FISICAS PARA PREDECIR EL RESULTADO.

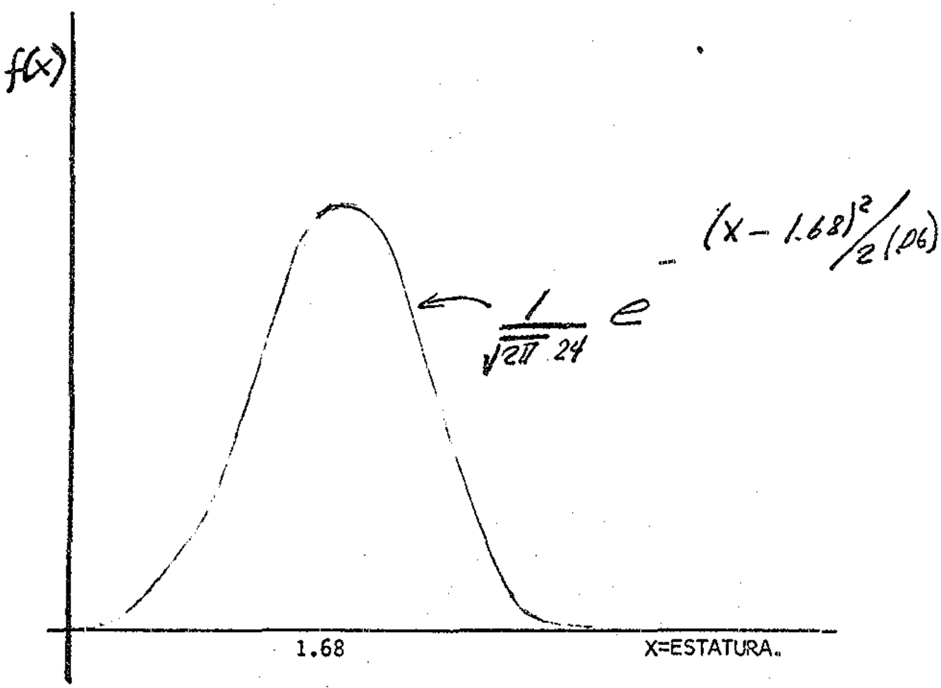
PARA ILUSTRAR LO ANTERIOR CONSIDEREMOS LOS HOMBRES DE 25 ANOS Y CLASIFIQUEMOSLOS DE ACUERDO A LA CARACTERISTICA BAJO, QUIZA PARA UNA PERSONA EL QUE UN INDIVIDUO MIDA 1.62 M LE PAREZCA BAJO MIENTRAS QUE A LA OTRA LE PAREZCA ALTO. ESTO ES, NO EXISTE UNA FRONTERA BIEN DEFINIDA QUE DELIMITE LOS HOMBRES ALTOS DE LOS BAJOS, SINO QUE ESTE CAMBIO OCURRE DE UNA MANERA SUAVE Y CONTINUA. SI DENOTAMOS POR $\mu_B(X)$ EL GRADO DE MEMBRECIA DE QUE UNA PERSONA CON ESTATURA X PERTENEZCA A LA CLASE BAJO. PODRIAMOS PENSAR EN LA GRAFICA DE $\mu_B(X)$ COMO:



O SEA $\mu_B(1)=1$, IMPLICA QUE UNA PERSONA DE 25 AÑOS QUE MIDE 1M. PERTENECE PERFECTAMENTE A LA CLASE DE LOS BAJOS, MIENTRAS QUE SI $\mu_B(2)=0$, SIGNIFICA QUE UNA PERSONA DE 2M. NO SE LE PUEDE CLASIFICAR COMO BAJA.

POR OTRO LADO CONSIDEREMOS LAS ESTATURAS (X VARIABLE ALEATORIA) DE LAS PERSONAS DE 25 AÑOS, Y SEA P(X) SU FUNCION DE DISTRIBU

CION, DIGAMOS SUPONGAMOS QUE X-N(1.68,.06), QUE GRAFICAMENTE SE---RIA:



AQUI LOS ESTABLECIMIENTOS QUE PODEMOS HACER SON DEL TIPO:

i) CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNA PERSONA DE 25 AÑOS SELECCIONADA AL AZAR MIDA ENTRE 1.4 Y 1.75 M.?

ii) QUE PROCIENTO DE LOS HOMBRES DE 25 AÑOS MIDEN ABAJO DE - 1.65 M.?

O SEA MIENTRAS QUE EN EL PRIMER CASO SE CLASIFICAN A LOS INDIVIDUOS, EN FUNCION DE SU ESTATURA VIA $\mu_B(X)$, EN EL SEGUNDO SE - SEÑALA LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE EVENTOS, ESTO ES, SE PRE-

DICE LA OCURRENCIA DE EVENTOS CON CIERTA PROBABILIDAD. EN EL CASO BORROSO $\mu_B(X)$ ES MERAMENTE SUBJETIVA, EN EL CASO PROBABILISTICO P(X) SE CONSTRUYE A PARTIR DE ESTIMACIONES DE μ, ∇^2. EN EL CASO BORROSO NO PUEDO INVESTIGAR A PREGUNTAS COMO LAS SEÑALADAS EN i) ii) PERO AL REVES EN EL CASO PROBABILISTICO SI SE PUEDEN HACER CONSIDERACIONES DEL TIPO PROBABILIDAD DE UN CONJUNTO BORROSO, COMO LA DEFINE LOFTI A ZADEH: $P(B)=\int_{\text{rango}} \mu_B \, dP = E\,\mu_B$

FINALMENTE DEFINIMOS TRANSFORMACIONES DE VARIABLES BORROSAS SOLO CON EL AFAN DE COMPLETES.

SUPONGA QUE g ES UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL Y EN ADICION SUPONGAMOS QUE X ES UNA VARIABLE BORROSA DEFINIDA SOBRE EL ESPACIO PATRON $(\Gamma, \mathfrak{A}, \nabla)$. SE SIGUE QUE $g(X):\Gamma \to R$ Y AUN MAS QUE $\{g(X)=x\} \subset \mathfrak{A}$ YA QUE PODEMOS ESCRIBIR:

$\{g(X)=x\}=V_{u\in g^{-1}(x)} \{X=u\}$ DONDE LA NOTACION DE LA DERECHA SE INTERPRETA COMO LA UNION SOBRE TODOS LOS CONJUNTOS $\{X=u\}$ TAL QUE $g(u) = X$.

LUEGO, SE SIGUE QUE $g(X)$ ES UNA VARIABLE BORROSA SOBRE $(\Gamma, \mathfrak{A}, \nabla)$ Y OBTENEMOS: $\mu_{g(x)}(x) = \nabla\{g(X)=x\} = \nabla\{V_{u\in g^{-1}(x)} \{\chi=u\}\}$

$= \sup_{u\in g^{-1}(x)} \nabla\{\chi=u\} = \sup_{u\in g^{-1}(x)} \mu_X(u)$

QUE ES EXACTAMENTE LA DEFINICION DE TRANSFORMACION DE UN CONJUNTO BORROSO DADA POR LOFTI A ZADEH EN SU ARTICULO ORIGINAL "FUZZY SETS", INFORMATION AND CONTROL (1965).

ADEMAS SI g ES INVERTIBLE ENTONCES OBTENEMOS LA EXPRESION SIMPLE: $\mu_{g(x)}(x)=\mu_X(g-1(x))$

CONSIDERO QUE LOS ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS,

ESTA COMPRENDIDA EN LOS PARRAFOS ANTERIORES, OPERACIONES Y OTRAS - TRANSFORMACIONES PARA NUESTROS FINES NO SE NECESITAN, AUNQUE MU--- CHAS DE ESAS SE PUEDEN CONSTRUIR O GENERAR PARTIENDO DE LO VISTO.

LOS CONCEPTOS VERTIDOS APARECEN EN CONTEXTOS MAS SENCILLOS - Y QUIZA MENOS FORMALES, SIN EMBARGO, EL ENFOQUE ASUMIDO FUE PARA ESTABLECER CONSIDERACIONES PROBABILISTICAS.

(III)

APLICACIONES A CONJUNTOS BORROSOS.

LA APLICACION DE METODOS BASADOS EN LA LOGICA FORMA DUAL - PARA DESCRIBIR UN FENOMENO DEL MUNDO REAL ES LIMITADA. ESTO RE-- SULTA PARTICULARMENTE OBVIO, CUANDO SISTEMAS SOCIALES O HUMANISTI- COS SON MODELADOS MATEMATICAMENTE, ENTONCES SURGEN PROBLEMAS DE -- PRECISION DEL FORMALISMO MATEMATICO QUE ES EMPLEADO PARA DESCRIBIR FENOMENOS O REALACIONES MAL DEFINIDAS, VAGAS O SUBJETIVAS.

LO ANTERIOR FUE EL MOTIVO PARA QUE LOFTI A. ZADEH SUGIRIERA - EN 1965, EL CONCEPTO DE CONJUNTO DIFUSO O BORROSO ORIGINALMENTE IN TENTADO SER APLICADO EN EL AREA DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES Y -- PROCESOS DE INFORMACION, ADEMAS LO MOTIVO AL CONSIDERAR QUE CUANDO LA COMPLEJIDAD DE LOS SISTEMAS SE INCREMENTA NUESTRA HABILIDAD PA- RA HACER ESTABLECIMIENTOS PRECISOS Y SIGNIFICATIVOS ACERCA DE SU - COMPORTAMIENTO DISMINUYE HASTA EL PUNTO QUE PRECISION Y SIGNIFICAN CIA SE CONVIERTEN EN CARACTERISTICAS MUTUAMENTE EXCLUSIVAS.

A CONTINUACION SE MENCIONAN ALGUNAS GENERALIZACIONES Y MODIFI CACIONES A CONCEPTOS Y TEORIAS CLASICAS VIA TEORIA DE CONJUNTOS BO RROSOS.

EN LA LOGICA FORMAL SE ANALIZA LA LOGICA DE CONCEPTOS VAGOS - DESDE PUNTOS DE VISTA SEMANTICO Y SINTACTICO.

SE HA ESTUDIADO TRABAJO AXIOMATICO SOBRE ASPECTOS SEMANTICOS DE LENGUAJES FORMALES RESPECTO A CONJUNTOS BORROSOS. PARTIENDO DE LA FUNCIONALIDAD VALEDERA DE LA INTERSECCION Y UNION DESARROLLAN

UN SISTEMA AXIOMATICO QUE PROVEE OPERADORES SEMANTICOS MIN Y MAX - SUGERIDOS POR LOFTI A. ZADEH. SE HA ENCONTRADO QUE EL OPERADOR - MIN ES UNA APROXIMACION ACEPTABLE AL COMPORTAMIENTO HUMANO CUANDO COMBINA CONJUNTOS BORROSOS EN EL SENTIDO ESTRICTO DE LA "LOGICA" - "Y". AUNQUE EXISTE TAMBIEN EL OPERADOR PRODUCTO QUE SE CONSIDERA QUE COMBINADO CON EL MIN (MEDIANTE UNA APROXIMACION QUE PARECE SER LA MEDIA GEOMETRICA) RESULTA AD-HOC EN EL PROCESO DE TOMA DE DECI-SIONES HUMANO.

EN TOPOLOGIA,NOS PODEMOS REFERIR AL CAPITULO ANTERIOR AUNQUE - EXISTEN IMPORTANTES RESULTADOS QUE NO CONSIDERERAMOS POR BREVEDAD.

EN ALGEBRA, SE HAN ANALIZADO ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y OPERA-DORES BORROSOS.

EN TEORIA DE LA PROBABILIDAD, LAS CUESTIONES DE INTERRELACIO-NES LOGICAS Y FILOSOFICAS ENTRE BORROSIDAD Y PROBABILIDAD TODAVIA NO PARECEN CONTESTARSE CONTUNDENTEMENTE, ASI COMO DIFERENCIAS EN-- TRE ESTAS TEORIAS, AUNQUE EXISTEN BUENOS ARTICULOS AL RESPECTO Y - ASI POR EJEMPLO LOFTI A ZADEH COMBINA EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD - CON EL DE BORROSIDAD. EL CONSIDERA FUNCIONES DE DENSIDAD DE PRO-- BABILIDAD DE VARIABLES BORROSAS O EVENTOS BORROSOS. GAINES, KO-HANT Y NURMI ESTABLECEN CIERTAS RELACIONES Y DIFERENCIAS LOGICAS - Y METOLOGICAS ENTRE ESTOS DOS CONCEPTOS. NAHMIAS DESARROLLO UN - OPERADOR SOBRE VARIABLES BORROSAS DISCRETAS SEMEJANTE A LA CONVOLU CION EN PROBABILIDAD Y HA LLEGADO A RESULTADOS INTERESANTES.

GEARING DISCUTE METODOS DE PREDICCION PARA INFORMACION BORROSA BA-SADA EN ANALISIS BAYESIANOS. YA SE HABLA DE LA TEORIA DE LA POSI

BILIDAD, SUGERIDA POR LOFTI A. ZADEH, RELACIONADA CON LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS.

EN TEORIA DE JUEGOS, SE HA TRABAJADO SOBRE LA NOCION DE UNA COALICION BORROSA EN JUEGOS DE n PERSONAS, Y EXISTEN OTROS RESULTADOS.

EN INVESTIGACION DE OPERACIONES PARECE QUE EXISTE POCO TRABAJO COMPARADO CON LA POTENCIALIDAD QUE EL CONCEPTO DE BORROSIDAD PUEDE DEPARARLE. SIN EMBARGO, ALGUNOS RESULTADOS EMPIEZAN A PUBLICARSE, PROBLEMAS DIFICILES DE TRATAR CON TECNICAS TRADICIONALES DE INVESTIGACION DE OPERACIONES HAN SIDO ENFOCADAS BORROSAMENTE CON BUENOS RESULTADOS. ASI, POR EJEMPLO, EL PROBLEMA DE VECTOR MAXIMO HA SIDO TRATADO VIA CONJUNTOS BORROSOS, EN TEORÍA DE DECISIONES EL USO DE BORROSIDAD HA ORIGINADO LA TEORIA DE DECISIONES NORMATIVAS. RICHARD BELLMAN Y LOFTI A. ZADEH, DESCRIBEN DECISIONES BORROSAS, COMO SITUACIONES EN LAS CUALES TANTO LOS OBJETIVOS COMO LAS RESTRICCIONES SON DE NATURALEZA BORROSA. LAS ACCIONES QUE ESTAN CONTENIDAS EN LOS OBJETIVOS Y RESTRICCIONES, CONSTITUYEN DECISIONES, PERO NO SOLO SE HAN PLANTEADO PROBLEMAS EN TERMINOS BORROSOS, SINO QUE SE HAN DESARROLLADO ALGORITMOS PARA DETERMINAR DECISIONES CONVENIENTES EN EL CONTEXTO BORROSO, Y ASI EXISTEN AUTORES QUE CONSIDERAN FUNCIONES DE PREFERENCIA BORROSA Y DISEÑAN CONCEPTOS BORROSOS FUERA DE RANGO Y POR OTRO LADO HAY

AUTORES EN PROGRAMACION MATEMATICA PARA TRATAR ESTOS PROBLEMAS DE DECISION, ESTE ULTIMO ENFOQUE ES EL QUE TRATAREMOS EN ESTA TESIS, FUNDAMENTALMENTE CONSIDERANDO EL TRATAMIENTO ANALITICO DE ASAI Y TANAKA, Y SUPONIENDO FUNCIONES DE MEMBRECIA LINEALES Y HACIENDO VALIDO EL OPERADOR MIN, PARA ENTONCES RESOLVER ESTOS MODELOS USANDO ALGORITMOS TRADICIONALES DE PROGRAMACION MATEMATICA, COMO LO HACEN RODDER Y HANS-J ZIMMERMAN, Y EXISTEN OTROS AUTORES, A SU VEZ, COMO NEGOITA, QUE CONSIDERAN LA TOMA DE DESICIONES EN AMBITOS DIFUSOS BAJO VARIOS ASPECTOS.

ALGUNOS DE LOS ASPECTOS MENCIONADOS ARRIBA HAN SIDO APLICADOS A PROBLEMAS DE ANALISIS DE CRITERIOS MULTIPLES, TOMA DE DECISIONES EN GRUPO Y EL PROBLEMA DEL VECTOR MAXIMO EN PROGRAMACION LINEAL.

EN OTRA AREA COMO EN RECONOCIMIENTO DE PATRONES, COMO EN INVESTIGACIONES CRIMINALES DONDE TESTIGOS DESCRIBEN BORROSAMENTE AL CRIMINAL Y SE GENERA UN PERFIL BORROSO DEL SOSPECHOSO. EN EL MANEJO DE PERSONAL, EN LA ASIGNACION DE PERSONAS QUE SON CARACTERIZADAS POR PERFILES DIFUSOS A TRABAJOS O TAREAS QUE CORRESPONDEN A ESA DESCRIPCION BORROSA.

EN CUESTIONES DE LENGUAJE, PARTIENDO DE QUE EL LENGUAJE DEL HOMBRE ES EN MUCHO DE NATURALEZA BORROSA, ENTONCES UNA -

AREA DE MUCHO INTERES DE LA APLICACION DE CONJUNTOS BORROSOS ES EN CUESTIONES DE LINGUISTICA, DE RAZONAMIENTO APROXIMADO, DE LENGUAJES BORROSOS DE COMPUTACION, INTELIGENCIA ARTIFI--- CIAL, CONTROL DIFUSO, ROBOTS CON MODELO DE LENGUAJE Y RAZO-- NAR HUMANO CON BASE A TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS, Y YA LOS CONTROLADORES DE DISEÑO BORROSO COBRAN INTERES EN CONTROL - MILITAR Y EN PROCESOS INDUSTRIALES, EN GENERAL EN CUESTIONES DE TEORIA DE SISTEMAS Y CONTROL EXISTE UNA RICA BLIBLIOGRA-- FIA DE CONTENIDO BORROSO.

EN CIENCIAS SOCIALES, LA INFLUENCIA DE CONJUNTOS BORRO- SOS SE HA DEJADO SENTIR EN LA CONSTRUCCION DE MODELOS DE OR- GANIZACIONES Y ENTONCES ANALIZAR Y SIMULAR SU COMPORTAMIENTO. LAS INTERRELACIONES FORMALES E INFORMALES DEL HOMBRE DENTRO - DE INSTITUCIONES Y GRUPOS, SE EMPIEZA A PLANTEAR BORROSAMENTE.

EN CIENCIAS MEDICAS, EL COMPORTAMIENTO DE BORROSIDAD SE CONSIDERA QUE PUEDE AYUDAR EN PATRONES DE RECONOCIMIENTO, -- DIAGNOSIS, ETC.

EN PSICOLOGIA, LA SITUACION ES QUIZA AL REVES DE LO PLAN TEADO CON ANTERIORIDAD, PUES ES MAS BIEN LA PSICOLOGIA LA QUE PUEDE INFLUIR EN LA INTERPRETACION DE PROCESOS BORROSOS DE DI- GAMOS TOMA DE DECISIONES, COMPORTAMIENTO DE ORGANIZACIONES, - PROCESOS MENTALES, PENSAMIENTO GLOBAL, PENSAMIENTO EN PARALE- LO, ETC.

EL SEGUIR MENCIONANDO APLICACIONES DE LA TEORIA DE CON-- JUNTOS BORROSOS EN DIFERENTES AREAS, LLEVARIA MUCHO ESPACIO, CONSIDERO QUE LAS MENCIONADAS SON REPRESENTATIVAS Y ESTIMU--- LANTES PARA EL INICIADOR EN CUESTIONES QUE SE ETIQUETEN POR BORROSIDAD.

(IV)

PROGRAMACION MATEMATICA.

MUCHOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION REQUIEREN LA MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE UNA FUNCION OBJETIVO DADA SUJETA A UN CONJUNTO DE RESTRICCIONES Y A UN CONJUNTO DE COTAS SOBRE LAS VARIABLES.

MATEMATICAMENTE LO QUE SE DESEA ES:

EXTREMIZAR $y(x)$ CON RESPECTO A X SUJETA A:

$$\begin{array}{ll} g_i(x) \leqq 0 & i = 1, 2, \ldots, k \\ g_i(x) \geqq 0 & i = k+1, k+2, \ldots, \ell \\ g_i(x) = 0 & i = \ell+1, \ell+2, \ldots, m \end{array} \qquad \rightarrow \text{IV 1}$$

Y $A \leqq X \leqq B$

DONDE A Y B SON VECTORES CUYAS COMPONENTES REPRESENTAN LAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR, RESPECTIVAMENTE, DE LAS COMPONENTES DE X.

NOTESE QUE NO NECESITAMOS DISTINGUIR ENTRE LOS DOS TIPOS DE DESIGUALDAD EN LAS RESTRICCIONES YA QUE UNA RESTRICCION CON ($\geqq$) PUEDE SIEMPRE CONVERTIRSE EN UNA RESTRICCION CON ($\leqq$) SIMPLEMENTE MULTIPLICANDO AMBOS LADOS DE LA EXPRESION POR UN SIGNO MENOS. OBSERVAMOS ADEMAS QUE EL NUMERO DE RESTRICCIONES CON (=) DEBE SER MENOR QUE EL NUMERO DE VARIABLES; DE OTRA MANERA LAS VARIABLES ESTARAN UNICAMENTE DETERMINADAS POR LAS RESTRICCIONES (SI $m-\ell=n$) O SOBRE ESPECIFICADAS ($m-\ell>n$). EL NUMERO DE RESTRICCIONES CON DESIGUALDAD ES IRRESTRICTO.

PROBLEMAS DE ESTE TIPO SON CONOCIDOS COMO PROBLEMAS DE PROGRAMACION MATEMATICA. ALGUN VECTOR X QUE SATISFACE TODAS LAS RESTRICCIONES Y ACOTAMIENTOS ES LLAMADA UNA SOLUCION FACTIBLE AL PRO-

BLEMA DE PROGRAMACION. EN GENERAL EXISTE UN NUMERO INFINITO DE SOLUCIONES FACTIBLES A UN PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA -- ADECUADAMENTE FORMULADO. LA SOLUCION FACTIBLE QUE OPTIMIZA -- LA FUNCION OBJETIVO ES LLAMADA LA SOLUCION FACTIBLE OPTIMA (A - MENUDO REFERIDA ESPECIFICAMENTE COMO LA SOLUCION FACTIBLE MAXIMA O SOLUCION FACTIBLE MINIMA).

EL VECTOR SOLUCION FACTIBLE OPTIMA X_o ES FRECUENTEMENTE RE-FERIDO COMO VECTOR SOLUCION O VECTOR POLITICA.

LA DESCRIPCION ANTERIOR CORRESPONDE, COMO SE SEÑALO, A LA -- PROGRAMACION MATEMATICA, TERMINO GENERICO QUE COMPRENDE LAS PRO-GRAMACIONES EXISTENTES, SIN EMBARGO PARA LOS EFECTOS DE ESTA TE-SIS, NOS UBICAREMOS EN LA PROGRAMACION MATEMATICA LLAMADA PROGRA-MACION LINEAL, QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE, ASI COMO SE SEÑA-LA EL ALGORITMO DE BUSQUEDA DE SOLUCION. DADO QUE ESTE ALGORIT-MO LO UTILIZAREMOS PARA ENCONTRAR SOLUCION AL PROBLEMA DE PROGRA-MACION LINEAL BORROSA, MERECE ESTUDIARLO CUIDADOSAMENTE.

IV.1) PROGRAMACION LINEAL.- CONSIDERESE EL SIGUIENTE PROBLE-MA DE PROGRAMACION MATEMATICA, LLAMADA PROGRAMACION LINEAL.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ext.} \quad Z = CX \\ \text{S.A.} \\ \qquad Ax = b \\ \qquad X \geqq o \end{array}} \quad \rightarrow \text{IV 2}$$

DONDE: A_{mxn}, X_{nx1}, C_{1xn}, O_{nx1}, b_{mx1}, Z_{1x1}.

POR CONVENIENCIA LA EXT=MAX, SIN EMBARGO EL CASO EXT=MIN -- SE SOLUCIONA DE MANERA ANALOGA O DE LA SOLUCION DEL CASO ANTERIOR.

AHORA SEÑALEMOS COMO DAR SOLUCION AL PROBLEMA PLANTEADO USANDO EL METODO SIMPLEX.

SI EXISTE UNA SOLUCION FACTIBLE A IV.2, ENTONCES EXISTE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE, ADEMAS SI EXISTE UNA SOLUCION OPTIMA, - UNA DE LAS SOLUCIONES FACTIBLES BASICAS SERA OPTIMA Y POR ULTIMO SI TENEMOS UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE QUE NO ES OPTIMA, ENTONCES, SI LA DEGENERACION NO OCURRE, ES POSIBLE, POR CAMBIAR UN VECTOR EN LA BASE CADA VEZ (ESTO ES, POR ASIGNAR UNA VARIABLE EN LA SOLUCION BASICA EL VALOR DE CERO Y ASIGNARLE A OTRA, NO EN LA SOLUCION BASICA, UN VALOR POSITIVO), ALCANZAR EN UN NUMERO FINITO - DE PASOS UNA SOLUCION BASICA OPTIMA, O DEMOSTRAR QUE LA FUNCION - OBJETIVO PUEDE SER ARBITRARIAMENTE GRANDE.

DADA ALGUNA SOLUCION BASICA, PERO NO OPTIMA, LA TEORIA DEL - SIMPLEX INDICA COMO OBTENER UNA NUEVA SOLUCION BASICA, CON EL NUEVO VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO AL MENOS TAN GRANDE COMO EL ANTERIOR, O COMO SE SEÑALO, QUE POR AÑADIR UN VECTOR A LA SOLUCION, - UNA SOLUCION NO ACOTADA INVOLUCRANDO TANTAS COMO $m+1$ VARIABLES POSITIVAS, EN ADICION A LA SOLUCION BASICA FACTIBLE X_B, USANDO LAS Yj Y $Zj - Cj$ PARA LOS VECTORES NO EN LA BASE DE TAL MANERA QUE SE DETERMINE LA NUEVA SOLUCION BASICA FACTIBLE, PARA ENCONTRAR ESTA, SELECCIONAMOS EL VECTOR TAL QUE $Zj - Cj<o$. SI ALGUNO DE ESTOS - VECTORES TIENE TODAS LAS $Yij \leq o$, $i = 1,2,\ldots, m$, ENTONCES EXISTE UNA SOLUCION NO ACOTADA. EN CASO CONTRARIO PODEMOS INSERTAR - ALGUN VECTOR aj CON $Zj - Cj<o$ Y OBTENER LA NUEVA SOLUCION BASICA FACTIBLE, CON EL NUEVO VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO AL MENOS DEL ORDEN QUE EL ORIGINAL. SIN EMBARGO NO ESTAMOS LIBRES PARA REMO--

VER CUALQUIER VECTOR DE LA BASE, SINO QUE ES ATENDIENDO A (10) COMO SE SEÑALA DESPUES. ADEMAS MANTENIENDO LA SUPOSICION DE QUE NO --- EXISTE DEGENERACION, EL MINIMO DE (10) ES UNICO (PERO SI NO ES EL - CASO, LA NUEVA SOLUCION BASICA SERA DEGENERADA). AUN MAS SI LA - DEGENERACION NO ESTA PRESENTE, EL NUEVO VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO SERA ESTRICTAMENTE MAYOR QUE EL ANTERIOR. LOS NUEVOS VALORES DE LAS VARIABLES BASICAS SERAN:

$$\hat{X}_{Bi} = X_{Bi\gamma} - X_{B\gamma} \frac{Y_{ij}}{Y_{\gamma j}} \quad , i \neq \gamma \qquad \rightarrow 1$$

$$\hat{X}_{B\gamma} = \frac{X_{B\gamma}}{Y_{\gamma j}}$$

Y EL NUEVO VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO SERA:

$$\hat{Z} = Z + \frac{X_{B\gamma}}{Y_{\gamma j}} (Cj - Zj) \qquad \rightarrow 2$$

EL SIGUIENTE PASO ES INVESTIGAR SI LA NUEVA SOLUCION BASICA FACTIBLE ES OPTIMA. PARA ESTO CALCULAMOS LOS NUEVOS $Zj - Cj$ --- QUE LOS DENOTAMOS POR $\hat{Z} - Cj$. SI NO ES EL OPTIMO REPETIMOS EL PROCESO Y COMPUTAMOS OTRA SOLUCION BASICA FACTIBLE CON LA CONSIGUIENTE MEJORA EN LA FUNCION OBJETO. PARA LOGRAR ESTO NECESITAMOS LAS NUEVAS Yj , DENOTADAS POR $\hat{Y}j$. SUPONGAMOS QUE INSERTAMOS α_K EN LA BASE Y REMOVEMOS $b\gamma$. ENTONCES EN FUNCION DE LA BASE ORIGINAL OBTENEMOS αj POR:

$$\alpha j = \sum_{i=1}^{m} Yijbi$$

SIN EMBARGO, REEMPLANZANDO $b\gamma$ POR α_K , SE TIENE:

$$b\gamma = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \gamma}}^{m} \frac{Yi\kappa}{Y\gamma\kappa} \quad bi + \frac{1}{Y\gamma\kappa} \alpha\kappa \qquad \rightarrow 3$$

ENTONCES:

$$\alpha j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq \gamma}}^{m} (Yij - Y\gamma j \frac{Yi\kappa}{Y\gamma\kappa}) bi + \frac{Y\gamma j}{Y\gamma\kappa} \alpha\kappa = \sum_{i=1}^{m} \hat{Y}ij\hat{b}i \quad \rightarrow 4$$

DONDE LAS $\hat{b}i$ CONSTITUYEN LA NUEVA BASE, ESTO ES:

$$\hat{b}i = bi \text{ , } i \neq \gamma$$

$$\hat{b}\gamma = \alpha\kappa \quad \rightarrow 5$$

Y ADEMAS,

$$\hat{Y}ij = Yij - Y\gamma j \frac{Yi\kappa}{Y\gamma\kappa} \text{ , } i \neq \gamma \quad \rightarrow 6$$

$$\hat{Y}\gamma j = \frac{Y\gamma j}{Y\gamma\kappa}$$

CON, $\hat{Z}j - Cj = \hat{C}_B \hat{Y}j - Cj = \sum_{i=1}^{m} \hat{C}_{Bi} \hat{Y}ij - Cj \quad \rightarrow 7$

Y $\hat{C}_{Bi} = C_{Bi}$, $i \neq \gamma$, $\hat{C}_{B\gamma} = C_K$, Y POR TANTO:

$$\hat{Z}j - Cj = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\gamma}}^{m} C_{Bi} (Yij - Y\gamma j \frac{Y\gamma\kappa}{Y\gamma\kappa}) + \frac{Y\gamma j}{Y\gamma\kappa} C_K - Cj \rightarrow 8$$

Y COMO $C_{B\gamma} (Y\gamma j - Y\gamma j \frac{Y\gamma\kappa}{Y\gamma\kappa}) = 0$

ENTONCES $\hat{Z}j - Cj = \sum_{i=1}^{m} C_{Bi} Yij - Cj - \frac{Y\gamma j}{Y\gamma\kappa} (\sum_{i=1}^{m} C_{Bi} Yi\kappa - C_K)$

$$\therefore \quad \hat{Z}j - Cj = Zj - Cj - \frac{Y\gamma j}{Y\gamma\kappa} (Z_K - C_K) \quad \rightarrow 9$$

LO EXPRESADO CONSTITUYE EL ALGORITMO DEL SIMPLEX, QUE A CONTINUACION SE RESUME:

SUPONGAMOS QUE SE TIENE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE X_B AL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL, CON Z EL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO, Y QUE, PARA TODA αj, LAS Yj Y $Zj - Cj$ CORRESPONDIENTES A ESTA SOLUCION BASICA FACTIBLE SON CONOCIDOS:

i) EXAMINE LAS $Zj - Cj$. EXISTEN LOS SIGUIENTES CASOS:

A) TODAS LAS $Zj - Cj \geq 0$. EN ESTE CASO, LA SOLUCION BASICA FACTIBLE

ES OPTIMA.

b) UNA O MAS DE LAS $Zj - Cj < o$, Y PARA AL MENOS UNA α_K PARA LA -- CUAL $Zj - Cj < o$, TODAS LAS $Yij \leq o$. ENTONCES EXISTE SOLUCION NO ACOTADA.

c) UNA O MAS DE LAS $Zj - Cj < o$, Y CADA UNA DE ESTAS TIENE $Yij > o$ PARA AL MENOS UNA i . SELECCIONAMOS ALGUNO DE ESTOS VECTORES, DIGAMOS α_K, E INSERTAMOSLO EN LA BASE.

ii) CUANDO i.c) OCURRE, EL VECTOR (EL γESIMO) A SALIR DE LA BASE SERA AQUEL TAL QUE CUMPLE CON:

$$\frac{X_{B_\gamma}}{Y_{\gamma K}} = \min_{i} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \, , \, Y_{ik} > o \right\} \rightarrow 10$$

ENTONCES LA COLUMNA γ ES REMOVIDA Y REEMPLAZADA POR α_K

iii) USANDO LAS EXPRESIONES SENALADAS PARA EL CALCULO DE $\hat{X}_B$, $\hat{Z}$, $\hat{Y}j$, $\hat{Z}j - Cj$, REGRESAMOS A (i).

EN AUSENCIA DE DEGENERACION, ESTE ALGORITMO PRODUCE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE OPTIMA EN UN NUMERO FINITO DE PASOS. COMO - SE MENCIONO, EL METODO SIMPLEX SE SEÑALO POR LA IMPORTANCIA QUE - JUEGA EN ESTA TESIS.

(V)

PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA

AQUI SE TRATARAN ALGUNOS RESULTADOS LIGADOS CON EL NUEVO PUNTO DE VISTA SOBRE OPTIMIZACION, EN EL CASO EN QUE LOS OBJETIVOS Y RESTRICCIONES SON VAGAMENTE FROMULADOS. LA VAGUEDAD RESULTA DE LAS FOMULACIONES DEL TIPO:

i) "APROXIMADAMENTE IGUAL"

ii) "MUCHO MAS GRANDE QUE"

iii) "TAN CERCANO COMO"

iv) "CUANDO MENOS IGUAL A"

v) "A LO MAS IGUAL QUE"

ETC.. DEFINIENDO SOBRE UN CONJUNTO DE ALTERNATIVAS X, UNA RELACION DE PREFERENCIA, LO ANTERIOR ADMITE MODELACION USANDO CONJUNTOS BORROSOS. UN PRIMER RESULTADO QUE SE PRESENTA ES LA REDUCCION DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA A UN PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICO CLASICO O CONVENCIONAL, PARA APROVECHAR LOS ALGORITMOS EXISTENTES.

LA PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA DE HECHO INTRODUCE NOVEDADES EN LOS CAMPOS DE ADMINISTRACION DE SISTEMAS ECONOMICOS, SI POR ADMINISTRAR ENTENDEMOS CUANDO MENOS PLANEAR Y CONTROLAR, Y CUANDO HABLAMOS DE NOVEDADES EN METODOS DE PLANEACION, IMPLICITAMENTE HABLAMOS DE NOVEDADES EN ADMINISTRACION DE SISTEMAS. ENTENDIENDO EL PROCESO DE PLANEACION COMO EL ESTABLECIMIENTO DE LAS MEJORES POSIBILIDADES DESPLEGADAS DE UNA ACTIVIDAD POR TOMAR EN CUENTA LOS RECUR-

SOS EXISTENTES, ESTO ES, SE BUSCA UNA SOLUCION OPTIMA CUANDO UN- OBJETIVO ES IMPLICADO QUE DEPENDE DE ALGUNAS VARIABLES POR TOMAR EN CONSIDERACION CIERTAS RESTRICCIONES. EN OTRAS PALABRAS, EL ESTABLECIMIENTO DE VALORES DE ALGUNAS VARIABLES OBLIGADAS A SATISFACER UN NUMERO DADO DE RESTRICCIONES Y QUE, ADEMAS, DEBERA MAXIMIZAR O MINIMIZAR UNA FUNCION, ESTO ES, EXTREMIZARLA.

COMO SE FORMULO EL PROCESO DE PLANEACION ESTA RELACIONADO CON EL PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA. EXISTE UN CANTIDAD DE LITERATURA DE METODOS DE PROGRAMACION MATEMATICA QUE POR TANTO ALGORITMIZAN EL PROCESO DE LA ADMINISTRACION. EN TODOS LOS CASOS, SIN EMBARGO, CUANDO HABLAMOS DE OBJETIVOS Y DE RESTRICCIONES, LOS SUPONEMOS CONOCIDOS. DESAFORTUNADAMENTE, LOS PROBLEMAS DE PLANEACION REAL NO SIEMPRE ESTAN BIEN DEFINIDOS, ESTO ES, MUY A MENUDO- LAS RESTRICCIONES Y/O LOS OBJETIVOS SON VAGAMENTE FORMULADOS. EN- NO POCAS OCASIONES LOS RECURSOS NO ESTAN CUANTIFICADOS PERFECTA-- MENTE, POR EJEMPLO, Y DE ALGUNA MANERA HABRA QUE "CUANTIFICARLOS", ESTO ES EQUIVALENTE A QUE ALGUNAS RESTRICCIONES ESTUVIERAN BORROSAMENTE DEFINIDAS.

LA FORMULACION: "EL NIVEL DE PRODUCCION SE DEBE MANTENER TANTO COMO SEA POSIBLE", ES CLASICA PARA EJEMPLIFICAR LA VAGUEDAD DE ESTABLECIMIENTOS COMUNES ENCONTRADOS EN PLANEACION, Y QUE EN - LA PROGRAMACION MATEMATICA CLASICA NO ES POSIBLE SOPORTAR TALES - ESTABLECIMIENTOS.

EN NO POCAS OCASIONES TAMBIEN, NO EXISTEN DATOS O SI -- LOS HAY SON INCOMPLETOS O ESTAN ERRADOS, Y AL APLICAR LA PROGRAMA

CION MATEMATICA CONVENCIONAL, LA SOLUCION "OPTIMA" QUIZA NO CORRESPONDA A LA EXTREMIZACION EN LA REALIDAD. EL NO CONTAR CON DATOS ES COMUN EN MEXICO, Y POR CONSIGUIENTE LOS MODELOS DE PROGRAMACION MATEMATICA ESTUDIADOS EN NUESTRAS UNIVERSIDADES AL NO PODERSE ALIMENTAR CON DATOS, SE QUEDAN EN MERAS FORMULACIONES TEORICAS QUE NO INTERESAN AL PROCESO ADMINISTRATIVO.

ESTE TRABAJO TRATA PRECISAMENTE CON MANIPULAR ESTAS FORMULACIONES VAGAS O AMBIGUAS, COMO MANEJAR LA FALTA DE DATOS O SUS ERRORES IMPLICITOS, CUANDO SE TRATA DE ALGORITMIZAR EL PROCESO ADMINISTRATIVO. EL PROBLEMA NO ES NUEVO, TAN ES ASI, QUE MUCHO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES, PARTICULARMENTE EN NUESTRO PAIS HA HECHO CRISIS AL TENER QUE ENFRENTARSE A SITUACIONES MAL DEFINI NIDAS, NO ESTOCASTICAS. EL ESTUDIANTE DE INVESTIGACION DE OPERACIONES COMPRENDE UN CONJUNTO DE TECNICAS Y MODELOS, QUE EN LA REALIDAD NO PUEDE HECHAR MANO DE ESTOS, PRECISAMENTE POR LO EXPUESTO ANTERIORMENTE.

LO ANTERIOR CORRESPONDE AL CONCEPTO DE TOLERANCIA EN PROGRAMACION MATEMATICA, AL MENOS PARA LOS CASOS CUANDO SE CONVIERTE EN INSTRUMENTO DE PLANEACION. QUIZA EN MEXICO DADA SU BASE DE DATOS LA PRESENTE PROGRAMACION MATEMATICA COADYUVE EN EL PROCESO DE PLANEACION, PRESENTE EN MUCHOS DE SUS TAREAS.

SEÑALADA LA IMPORTACIA DE LA PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA, PASEMOS A FORMALIZAR ESTA.

SEA $X=\{x\}$ QUE DENOTA UN CONJUNTO DE ALTERNATIVAS. UNA RESTRICCION BORROSA EN X ES DENOTADA POR C, QUE ES CARACTERIZADA

POR UNA FUNCION DE MEMBRECIA $\mu_C(x)$. SIMILARMENTE, UN OBJETIVO BORROSO EN X ES DENOTADO POR G, QUE ES CARACTERIZADO POR UNA FUNCION DE MEMBRECIA $\mu_G(x)$.

COMO UN EJEMPLO DE RESTRICCION BORROSA, OBSERVAMOS QUE SI -- UNA EMPRESA TIENE X PESOS COMO UN FONDO DE RESERVA, EL MONTO POSIBLE DE CAPITAL INVERTIDO DE LA EMPRESA DEBE SER SUBSTANCIALMENTE MAYOR O SUBSTANCIALMENTE MENOR QUE X PESOS, LO QUE IMPLICA -- QUE EL MONTO POSIBLE ES UN CONJUNTO DIFUSO. ANALOGAMENTE, LOS -- OBJETIVOS DE UNA EMPRESA PUEDEN SER BORROSOS MAS QUE PRECISOS EN NATURALEZA.

CONSIDEREMOS UNA DECISION DIFUSA D DEFINIDA COMO EL RESULTADO DE LA INTERSECCION DE C (RESTRICCIONES) Y G (OBJETIVOS) QUE ES CARACTERIZADA POR UNA FUNCION DE MEMBRECIA:

$\mu_D = \mu_C(x) \wedge \mu_G(x)$, DONDE $a \wedge b$ DENOTA $\min.\ [a,b]$. UNA DECISION OPTIMA ES DEFINIDA COMO UNA ALTERNATIVA EN X QUE MAXIMIZA $\mu_D(x)$.

EN LO QUE SIGUE, REFORMULAREMOS ESTE PROBLEMA USANDO EL CONCEPTO DE UN CONJUNTO NIVEL.

DEFINICION 1.- PARA α EN $[0, 1]$, UN CONJUNTO NIVEL α DE UNA - RESTRICCION C ES DENOTADO PRO $C\alpha$ Y ES UN CONJUNTO NO BORROSO EN X DEFINIDO POR $C\alpha = \{X \mid \mu_C(\chi) \geqq \alpha\} \leftrightarrow (1)$, DONDE X SE SUPONE UN ELE-- MENTO EN R^n.

LO ANTERIOR LO PODEMOS REFORMULAR MEDIANTE LA SIGUIENTE PROPOSICION.

PROROSICION 1.- $\sup_x \mu_D(x) = \sup_\alpha \{\alpha \wedge \max_{C\alpha} \mu_G(x)\} \leftrightarrow$ (2) DONDE

$\max\limits_{C\alpha}$ SIGNIFICA $\max\limits_{x \in C\alpha}$ Y EL DOMINIO ES DENSO EN UN ESPACIO NOR MADO.

DEMOSTRACION: CONSIDEREMOS $\sup\limits_{x} \mu_D(x) = \sup\limits_{x} \{\mu_c(x) \wedge \mu_G(x)\} = \gamma$

$\sup\limits_{\alpha} [\alpha \wedge \max\limits_{C\alpha} \mu_G(x)] = \gamma^1$

i) ASUMAMOS QUE $\gamma > \gamma^1$. $\exists$ Xn $\ni$ μ_D (Xn)= μ_C (Xn) $\wedge$ μ_G (Xn) $\geqq \gamma - \varepsilon$. ENTONCES Xn ε $C\gamma - \varepsilon$ Y $\mu_G(x_n) \geqq \gamma - \varepsilon$. SI

$[(\gamma - \varepsilon) \wedge \max\limits_{C\gamma-\varepsilon} \mu_G(x)] = \max\limits_{C\gamma-\varepsilon} \mu_G(x) \leqq \gamma^1$

SE MANTIENE, ENTONCES $\gamma - \varepsilon \leqq \mu_G(Xn) \leqq \gamma^1$. ESTO CONTRADICE

$\gamma > \gamma^1$. AHORA SI SUPONEMOS QUE:

$[(\gamma - \varepsilon) \wedge \max\limits_{C\gamma-\varepsilon} \mu_G(x)] = \gamma - \varepsilon$

SE MANTIENE, ESTO TAMBIEN CONTRADICE $\gamma > \gamma^1$

ii) AHORA ASUMAMOS QUE $\gamma < \gamma^1$ $\exists$ $\alpha n \ni \alpha n \wedge \max\limits_{C\alpha n} \mu_G(x) \equiv \gamma^1 - \varepsilon$

ENTONCES αn, $\max\limits_{C\alpha n} \mu_G(x) \geqq \gamma^1 - \varepsilon$

Y TOMAMOS UNA αn $\ni$ $\max\limits_{C\alpha n} \mu_G(x) = \mu_G(Xn)$

YA QUE $(\alpha n = \{x \mid \mu c\ (x) \geqq \alpha n \geqq \gamma^1 - \varepsilon > \gamma\}$

SE SIGUE QUE: $\gamma^1 - \varepsilon \leqq \mu_G$ (Xn) $< \gamma$

ESTO CONTRADICE QUE $\gamma < \gamma^1$.

DADAS n RESTRICCIONES $C^1, \ldots, C^n$, LA SIGUIENTE PROPOSICION PUEDE SER SIGNIFICATIVA.

PROPOSICION 2.- $\sup\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha n} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha n \wedge \max\limits_{C\alpha_1, \ldots, C\alpha n} \mu_G(x) =$ →(3)

$\sup\limits_{\alpha} \alpha \wedge \max\limits_{C\alpha^1 \ldots C\alpha^n} \mu_G(x)$

DEMOSTRACION: LA PROPOSICION ES PROBADA POR INDUCCION SOBRE n.

PRIMERO EN EL CASO DE DOS RESTRICCIONES DIFUSAS C^1, C^2, EXISTE

$\alpha_1 n, \alpha_2 n$ TAL QUE: $\sup\limits_{\alpha_1,\alpha_2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \max\limits_{C\alpha_1^1 \circ C\alpha_2^2} \mu_G(x) - \varepsilon \leqq \alpha_1 n \wedge \alpha_2 n \wedge \max\limits_{C^2_{1n} \circ C^2_{2n}} \mu_G(x)$

ASUMAMOS $\alpha_1 n < \alpha_2 n$. SE SIGUE A PARTIR DE ESTA SUPOSICION QUE:

$$\sup_{\alpha_1,\alpha_2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \max_{C\alpha_1^1 \circ C\alpha_2^2} \mu_G(x) - \varepsilon \leqq \alpha_{1n} \wedge \max_{C\alpha^1_{1n} C\alpha^2_{2n}} \mu_G(x) \leqq \alpha_1 \wedge \max_{C\alpha^1 \circ C\alpha^2_{2n}} \mu_G(x) \leqq$$

$$\sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha^1 \circ C\alpha^2} \mu_G(x)]$$

TAMBIEN, ES EVIDENTE QUE LA SIGUIENTE DESIGUALDAD:

$$\sup_{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \max_{C\alpha_1^1 \; C\alpha_2^2} \mu_G(x) \geqq \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha^1 \circ C\alpha^2} \mu_G(x)]$$

SE MANTIENE.

SIGUIENDO, EN EL CASO DE n RESTRICCIONES BORROSAS $C^1,\dots, C^n$ SUPONGAMOS QUE ESTA PROPOSICION SE MANTIENE PARA (n-1) RESTRICCIONES BORROSAS $C^1,\dots,C^{n-1}$. SE SIGUE A PARTIR DE ESTA SUPOSICION QUE:

$$\alpha_n \wedge \sup_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} [\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \max_{C\alpha_1^1 \circ \dots \circ C\alpha_n^n} \mu_G(x)] =$$

$$\alpha_n \wedge \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha^1 \circ \dots \circ C\alpha^{n-1} \; C\alpha_n^{n-1}} \mu_G(x)]$$

CONSIDERANDO $\sup\limits_{\alpha_n}$ EN LA ECUACION DE ARRIBA: $\sup\limits_{\alpha_n \dots \alpha_n} [\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \max\limits_{C\alpha_1^1 \circ \dots \circ C\alpha_n^n} \mu_G(x)]$

$$= \sup_{\alpha_n, \alpha} [\alpha_n \wedge \alpha \wedge \max_{C\alpha_1^1 \circ \dots \circ C\alpha_n^n} \mu_G(x)] = \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha^1 \circ \dots \circ C\alpha^n} \mu_G(x)]$$

SI n RESTRICCIONES BORROSAS $C^1_1,\dots C^n$ SON DADAS, EL CONJUNTO DE NIVEL α PUEDE ESTAR DEFINIDO POR $C\alpha^1 \wedge \dots \wedge C\alpha^n$.

EN LA PROGRAMACION MATEMATICA USUAL, EL CONJUNTO QUE SATISFACE — UNA RESTRICCION DADA ES CARACTERIZADO POR UNA FUNCION CARACTERIS- TICA FAMILIAR DE EL CONJUNTO. COMO SE DESCRIBIO ANTERIORMENTE, EL CONJUNTO DE LA RESTRICCIONES PUEDE SER DIFUSO EN MUCHOS PROBLEMAS PRACTICOS. TAMBIEN, UN OBJETIVO BORROSO PUEDE SER GENERALIZADO A PARTIR DE UNA FUNCION DE COMPORTAMIENTO; ENTONCES LA FUNCION DE -

MEMBRECIA DE UN OBJETIVO DIFUSO PUEDE SER DERIVADA A PARTIR DE -- UNA FUNCION DE COMPORTAMIENTO POR UNA NORMALIZACION QUE DEJE INALTERADO EL ORDEN LINEAL.

SEA LA FUNCION DE MEMBRECIA DE UN OBJETIVO BORROSO $\mu_G(x)$ CONSIDERARA COMO $f(x)$ QUE ES LA FORMA NORMALIZADA DE UNA FUNCION DE COMPORTAMIENTO DADA $\hat{f}(x)$ SOBRE $\overline{s(c)}$, $\overline{s(c)}$ = CERRADURA DE $s(c)=\{x \mid \mu_c(x)>0\}$ ENTONCES, $f(x) \varepsilon [0,1]$ Y $\max/s(c) f(x)=1$. SE SUPONE QUE $\mu c(x)$ Y $f(x)$ SON CONTINUAS Y QUE EXISTE UNA $X \ni \max\limits_{s(c)} \mu c(x)=1$ Y QUE $\overline{s(c)}$ ES UN CONJUNTO ACOTADO.

A PARTIR DE LA PROPOSICION 1, LA PROGRAMACION MATEMATICA DIFUSA PUEDE SER EQUIVALENTE A EL PROBLEMA:

DETERMINE LA PAREJA OPTIMA (α^*, x^*) TAL QUE:

$$\alpha^* \wedge f(x^*) = \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha} f(x)]$$

SI EL α^* OPTIMO PUEDE SER DETERMINADO, ESTE PROBLEMA PUEDE SER REDUCIDO A LA PROGRAMACION MATEMATICA CONVENCIONAL, YA QUE QUEDARIA SOLO POR DETERMINAR EL X^* OPTIMO TAL QUE EXTREMATICE $f(x)$ EN EL CONJUNTO $C\alpha^*$.

EN ORDEN A INVESTIGAR LAS PROPIEDADES DE ESTE PROBLEMA, SUPONGAMOS PRIMERO LO SIGUIENTE:

(i) $\max\limits_{C\alpha} f(x)$ ES α- CONTINUA, ESTO ES, SI $\lim\limits_{\alpha n \to \infty} C\alpha n = C\alpha$,

$$\lim_{\alpha n \to \infty} [\max_{C \alpha n} f(x)] = \max_{C\alpha} f(x)$$

(ii) EL OPTIMO α^* ES UNICO.

LOS SIGUIENTES LEMAS (1,2) Y TEOREMAS (1,2) PUEDEN SER DEMOSTRADOS BAJO ESTAS SUPOSICIONES.

LEMA 1.- α^* ES OPTIMA $\Longleftrightarrow \alpha^* = \max\limits_{C\alpha^*} f(x) \quad \to \quad (4)$

DEMOSTRACION: CÓMO EL LEMA 1 ES EVIDENTE EN EL CASO DE $\alpha^* = 1$, ES PROBADO SOLO CUANDO EL CONJUNTO $S_1 = \{ x \mid \mu_C(x) = \mu_G(x) = 1 \} = \phi$, CONJUNTO VACIO ES DENOTADO POR ϕ. TAMBIEN EL CASO $\alpha^* = o$ SE --- OMITE, POR SER VACIO.

YA QUE $o < \alpha^* < 1$ SE SUPONE OPTIMO,

$$(\alpha^* + \Delta\alpha) \wedge \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) - \alpha^* \wedge \max_{C\alpha^*} f(x) < o \leftrightarrow \qquad (5)$$

(i) $\Delta \geqq o$; YA QUE α^* ES OPTIMA,

$$(\alpha^* + \Delta\alpha) \wedge \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) = \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad (6)$$

SE SIGUE DE ECUACIONES (5) Y (6)

$$\max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) \leqq \alpha^* \wedge \max_{C\alpha^*} f(x)$$

YA QUE $\alpha^* \wedge \max_{C\alpha^*} f(x) \leqq \alpha^*$, PARA $\forall \Delta\alpha \geqq o$ SE MANTIENE QUE:

$$\text{mas}_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) \leqq \alpha^*$$

ENTONCES SE SIGUE QUE: $\lim_{\Delta\alpha \to o} \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) = \max_{C\alpha^*} f(x) \leqq \alpha^* \leftrightarrow (7)$

(ii) $\Delta\alpha \leqq o$; SI SE SUPONE QUE:

$$\alpha^* + \Delta\alpha > \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) \geqq \max_{C\alpha^*} f(x)$$

ESTA SUPOSICION ES UNA CONTRADICCION A LA OPTIMALIDAD O UNICIDAD DE α^*. ENTONCES LA SIGUIENTE DESIGUALDAD ES DERIVADA A PARTIR - DE LA ECUACION (5):

$$\alpha^* + \Delta\alpha \leqq \alpha \wedge \max_{C\alpha^*} f(x)$$

YA QUE LA DESIGUALDAD DE ARRIBA SE MANTIENE PARA $\forall \Delta\alpha \leqq o$

$$\lim_{\Delta\alpha \to o} (\alpha^* + \Delta\alpha) = \alpha^* \leqq \max_{C\alpha^*} f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad (8)$$

ENTONCES LA ECUACION (4) SE SIGUE A PARTIR DE LAS ECUACIONES (7) Y (8). AHORA SUPONGAMOS QUE LA ECUACION (4) SE CUMPLE. PARA

$$\forall \Delta\alpha \geqq 0,\ (\alpha^* + \Delta\alpha)\ \Lambda \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) - \alpha^*\ \Lambda \max_{C\alpha^*} f(x)$$

$$\leqq \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) - \max_{C\alpha^*} f(x) \leqq 0 \qquad \leftrightarrow (9)$$

TAMBIEN, PARA $\forall\ \Delta\alpha \leqq 0$,

$$(\alpha^* + \Delta\alpha)\ \Lambda \max_{C\alpha^* + \Delta\alpha} f(x) - \alpha^*\ \Lambda \max_{C\alpha^*} f(x) \leqq \Delta\alpha \leqq 0 \qquad \leftrightarrow (10)$$

SE SIGUE A PARTIR DE ECUACIONES (9) Y (10) QUE LA ECUACION (7) SE CUMPLE PARA $\forall\ \Delta\alpha$. ENTONCES α^* ES OPTIMA.

TEOREMA 1.- $\sup_{\alpha} \left[\alpha\ \Lambda \max_{C\alpha} f(x)\right] = \max_{T} f(x) \qquad \leftrightarrow (11)$

DONDE $T = \{\, x \mid f(x) - \mu_c(x) = 0 \,\}$

DEMOSTRACION: SUPONGAMOS DEL LEMA 1 QUE:

$$\sup_{\alpha} \left[\alpha\ \Lambda \max_{C\alpha} f(x)\right] = \alpha_1^* = f(x_1^*) \qquad \text{Y}$$

$$\max_{T} f(x) = f(x_2^*)$$

(i) SI SUPONEMOS QUE $f(x_1^*) = \alpha^* < f(x_2^*)$, SE CUMPLE QUE:

$$f(x_1^*) = \mu_c(x_2^*).$$

YA QUE PODEMOS TOMAR $\mu_c(x_2^*) = \alpha_2$, ESTO ES UNA CONTRADICCION DE QUE LA PAREJA (α^*, x^*) ES OPTIMA.

(ii) SI SE SUPONE QUE $f(x_2^*) < f(x_1^*) = \alpha_1$, ENTONCES:

$$\mu_c(x_1^*) \neq f(x_1^*).$$

YA QUE $\mu_c(x_1^*) \geqq \alpha_1^*$, PUEDE SER SUPUESTO EN GENERAL QUE:

$$\mu_c(x_1^*) > f(x_1^*).$$

YA QUE EXISTE UNA $\alpha_1^1 > \alpha_1^*$ TAL QUE $\mu_c(x_1^*) = \alpha_1^1$ Y $x_1^* \in C\alpha_1^1$, - SE SIGUE QUE $\alpha_1^1\ \Lambda \max_{C\alpha^1} f(x) = f(x_1^*)$. ESTO ES UNA CONTRADICCION A LA UNICIDAD DE α_1^* .

SE SIGUE DE (i) Y (ii) QUE $f(x_1^*) = f(x_2^*)$.

A PARTIR DEL TEOREMA ANTERIOR, LA PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA PUEDE SER REDUCIDA A UN CASO CONVENCIONAL.

LA INFORMACION DUAL DE ESTE PROBLEMA PUEDE SER DEFINIDA POR:

$$\inf_{\alpha}(\alpha \vee \max_{C\alpha} f(x))$$

DONDE $a \vee b = \max[a,b]$.

LEMA 2.- α^* ES OPTIMA PARA LA FORMA DUAL SI

$$\alpha^* = \max_{C\alpha^*} f(x) \qquad \leftrightarrow \quad (12)$$

LA PRUEBA ES SIMILAR A LA DEL LEMA 1-

TEOREMA 2- $\inf_{\alpha}[\alpha \vee \max_{C\alpha} f(x)] = \sup_{\alpha} | \alpha \wedge \max_{C\alpha} f(x) \qquad \leftrightarrow \quad (13)$

DEMOSTRACION: A PARTIR DEL LEMA 1 Y 2, OBTENEMOS

$$\inf_{\alpha} [\alpha \vee \max_{C\alpha} f(x)] = \alpha_1^* = \max_{C\alpha^*} f(x)$$

$$\sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max_{C\alpha} f(x)] = \alpha_2^* = \max_{C\alpha_2^*} f(x)$$

SE SUPONE QUE $\alpha_1^* > \alpha_2^*$, SE SIGUE QUE $\max_{C\alpha_1^*} f(x) \leqq \max_{C\alpha_2^*} f(x)$. ENTONCES ESTO ES UNA CONTRADICCION A LA SUPOSICION.

PREVIAMENTE SE SUPUSO QUE (i) Y (ii) SE SATISFACEN. AHORA, --- DERIVAREMOS LAS CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE α^* SEA UNICO Y - α-CONTINUO.

DEFINICION 3.- $f(x)$ ES BORROSA FUERTEMENTE CONVEXA <=> PARA TODA PAREJA DE PUNTOS X_1, X_2 EN $\overline{S(C)}$ $f(x)$ SATISFACE LA DESIGUALDAD: $f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) > f(X_1) \wedge f(X_2)$

PARA $0 < \lambda < 1$.

TEOREMA 3.- SI $\max_{C\alpha} f(x)$ ES α CONTINUA Y $f(x)$ ES BORROSA FUERTEMENTE CONVEXA, α^* ES UNICA.

DEMOSTRACION: SI $S_1 = \{x | f(x) = \mu_C(x) = 1\} \neq \phi$.

ES EVIDENTE QUE α^* ES UNICA. AHORA PROBEMOS EL TEOREMA PARA CUANDO $S_1 = \phi$.

SUPONGAMOS QUE EXISTEN DOS SOLUCIONES OPTIMAS α_1^*, α_2^* Y QUE $\alpha_1^* > \alpha_2^*$, ESTO ES, $\alpha_1^* \wedge \max_{C\alpha_1^*} f(x) = \alpha_2^* \wedge \max_{C\alpha_2^*} f(x)$.

PODEMOS CONSIDERAR AHORA LOS SIGUIENTES TRES CASOS:

(i) $\alpha_1^* = \max_{C\alpha_2^*} f(x)$

(ii) $\alpha_2^* = \max_{C\alpha_2^*} f(x)$

(iii) $\max_{C\alpha_1^*} f(x) = \max_{C\alpha_2^*} f(x)$

CASO (i) YA QUE $\alpha_2^* \geqq \max_{C\alpha_2^*} f(x) \geqq \alpha_1^*$, ESTO CONTRADICE $\alpha_1^* > \alpha_2^*$

CASO (ii) PARA $\forall\ \Delta\alpha > 0 \ni \alpha_1^* - \Delta\alpha > \alpha_2^*$, LA SIGUIENTE DESIGUALDAD SE DEBE SATISFACER:

$$(\alpha_1^* - \Delta\alpha) \wedge \max_{C\alpha_1^* - \Delta\alpha} f(x) \leqq \alpha_2^*$$

DERIVAMOS LA SIGUIENTE DESIGUALDAD:

$$\max_{C\alpha_1^* - \Delta\alpha} f(x) \leqq \alpha_2^* = \max_{C\alpha_1^*} f(x) \qquad \leftrightarrow \qquad (14)$$

A PARTIR DE LA SUPOSICION DE QUE $S_1 = \phi$, $\alpha_1^* < 1$ Y PARA $\forall\ X \varepsilon\ C\alpha_1^*$, $f(x) \neq 1$. ENTONCES PODEMOS SELECCIONAR $\Delta\alpha > 0$ TAL QUE PARA $\forall\ X\varepsilon\ C\alpha_1^* - \Delta\alpha$, $f(x) \neq 1$ POR LA SUPOSICION DE α CONTINUA. YA QUE $C\alpha_1^* - \Delta\alpha$ ES UN CONJUNTO CERRADO Y ADEMAS $f(x)$ ES BORROSA - FUERTEMENTE CONVEXA, LA X^* OPTIMA TAL QUE $f(x)$ ES EXTREMATIZADA EN $C\alpha_1^* - \Delta\alpha$ ESTA CONTENIDA EN LA FRONTERA DE $C\alpha_1^* - \Delta\alpha$. TAMBIEN, YA QUE $\mu_c(x)$ ES CONTINUA, UNA X TAL QUE ESTE CONTENIDA EN LA FRONTERA DE $C\alpha_1^* - \Delta\alpha$ NO PUEDE ESTAR CONTENIDA EN LA FRONTERA DE

$C\alpha_1^*$. ENTONCES A PARTIR DE LA CONVEXIDAD FUERTE BORROSA DE ---- $f(x)$, $\max_{C\alpha_1^* - \Delta\alpha} f(x) > \max_{C\alpha_1^*} f(x)$, PERO ESTO CONTRADICE LA ECUACION (14).

CASO (iii) YA QUE $\alpha_1^* \geqq \max_{C\alpha_1^*} f(x)$ Y $\alpha_2^* \geqq \max_{C\alpha_2^*} f(x)$, ES EVIDENTE QUE $f(x) \neq 1$ PARA $\forall x \varepsilon C\alpha_1^*$ Y $\forall x \varepsilon C\alpha_2^*$. ENTONCES SE SIGUE DE (ii) QUE: $\max_{C\alpha_2^*} f(x) > \max_{C\alpha_1^*} f(x)$. ESTO CONTRADICE LA SUPOSICION DE (iii).

TEOREMA 4.- SI $\mu_c(x)$ ES BORROSA FUERTEMENTE CONVEXA $\max_{C\alpha} f(x)$ ES α CONTINUA.

DEMOSTRACION: LA VECINDAD DE X_1 ES DENOTADA POR $O_\varepsilon(X_1)$. SELECCIONECE $X_2 \varepsilon O_\varepsilon(X_1)$ TAL QUE $X_1 \neq X_2$. SI SE SUPONE QUE $\mu_c(X_1) = \alpha_1$, $\mu_c(X_2) = \alpha_2$ Y $\alpha_1 > \alpha_2$, A PARTIR DE LA CONVEXIDAD FUERTEMENTE BORROSA DE $\mu_c(X)$ PODEMOS SELECCIONAR α^1 TAL QUE $\alpha_1 = \mu_c(X_1) > \alpha^1 > \mu_c(X_2) = \alpha_2$. ENTONCES PODEMOS SELECCIONAR α^1 TAL QUE $X_1 \varepsilon C\alpha^1$ Y $X_2 \notin C\alpha^1$, YA - QUE $X_1 \varepsilon C\alpha_1$ Y $X_2 \varepsilon C_{\alpha 2} \setminus C_{\alpha 1}$ DONDE $C\alpha_2 \setminus C\alpha_1$ SIGNIFICA LA DIFERENCIA DE $C_{\alpha 2}$ A $C_{\alpha 1}$.

DENOTEMOS LA FRONTERA DE $C\alpha$ POR $\widetilde{C\alpha}$. SELECCIONEMOS $\forall \chi_2$ TAL QUE $X_1 \varepsilon \widetilde{C\alpha}$ Y $\chi_2 \notin \widetilde{C}_y \chi_2 \varepsilon O_\varepsilon(X_1)$. SI χ_2 ES UN PUNTO INTERIOR DE $C\alpha$, PODEMOS OBTENER $C\alpha + \Delta\alpha$ TAL QUE X_2 $C\alpha + \Delta\alpha$ Y X_1 $C\alpha + \Delta\alpha$. TAMBIEN SI X_2 ES UN PUNTO EXTERIOR DE $C\alpha$, PODEMOS OBTENER $C\alpha - \Delta\alpha$ TAL QUE $X_2 \varepsilon C\alpha - \Delta\alpha$ Y $X_1 \varepsilon C\alpha - \Delta\alpha$. ENTONCES $C\alpha$ PUEDE SER LIBREMENTE -- APROXIMADO POR $C\alpha^1$ EN EL SENTIDO DE ARRIBA. YA QUE $f(x)$ ES CONTINUA, EXISTE UN $\Delta\alpha$ PARA $\forall \delta > 0$ TAL QUE: $/\max_{C\alpha} f(x) - \max_{C\alpha + \Delta\alpha} f(x)/ < \delta$

DE LO ANTERIOR, ADEMAS, PODEMOS ESTABLECER LO SIGUIENTE: SI -

EXISTE $\{ C_{\alpha\eta} \} \not\supseteq C$ TAL QUE C_α PUEDA SER LIBREMENTE APROXIMADO POR $C_{\alpha\eta} \varepsilon \{C_{\alpha\eta}\}$, $\max_{C_\alpha} f(x)$ ES α -CONTINUA.

AHORA SE TRATARA DE DAR UN ALGORITMO Y EJEMPLICARLO. COMO SE ESTABLECIO EN LOS TEOREMAS Y LEMAS ANTERIORES SI α- CONTINUA Y α^* UNICA SE SATISFACEN, LA PROGRAMACION MATEMATICA BORROSA PUEDE CONTINUAR HASTA LOGRAR UNA SOLUCION USANDO PROGRAMACION MATEMATICA CONVENCIONAL. POR EJEMPLO, SI $\mu_C(x)$ Y $f(x)$ SON FUERTEMENTE BORROSAS CONVEXAS, ENTONCES α- CONTINUIDAD Y α^*-UNICIDAD SE SATISFACEN. PERO ESTAS CONDICIONES SON IMPRACTICAMENTE ESTRICTAS. VAMOS SOLAMENTE A ASUMIR α- CONTINUIDAD Y RESOLVEREMOS ESTE PROBLEMA POR UN ALGORITMO.

SEA S^* UN CONJUNTO DE NIVEL OPTIMO α^*. ENTONCES $\max_{C_{\alpha^*}} f(x) = \gamma$ PARA $\forall \alpha^* \varepsilon S^*$ DE ACUERDO A LA α-CONTINUIDAD, DONDE $\gamma = \sup_{\alpha} [\alpha \wedge \max f(x)]$. YA QUE $\forall \alpha^* \geqq \gamma$, SE MANTIENE QUE $\max_{C_\gamma} f(x) \geqq \gamma$. CONSECUENTEMENTE, SE SIGUE QUE $\gamma \varepsilon S^*$ Y $\gamma = \max_{C_\gamma} f(x)$.

DEL HECHO ANTERIOR, α, SE SATISFACE QUE LA RELACION $\alpha = \max_{C_\alpha} f(x)$, ES OPTIMA. ENTONCES TENEMOS EL SIGUIENTE ALGORITMO PARA OBTENER LA PAREJA OPTIMA

ALGORITMO:

(i) SUPONGA $\forall \alpha_1$ PARA $\kappa = 1$

(ii) COMPUTE $f_\kappa = \max_{C_{\alpha\kappa}} f(x)$.

(iii) COMPUTE $\varepsilon_\kappa = \alpha_\kappa - f_\kappa$. SI $/\varepsilon_\kappa/ > \varepsilon$, VAYA A (iv). SI $/\varepsilon_\kappa/ < \varepsilon$, VAYA A (v).

(iv) SEA $\alpha_\kappa + 1 = \alpha_\kappa - \gamma_\kappa \varepsilon_\kappa$ Y VAYA A (ii), REEMPLAZANDO κ

POR $(\kappa + 1)$ DONDE $\gamma\kappa$ ES SELECCIONADO TAL QUE $\gamma\kappa \geqq 0$ Y $0 \leqq \alpha\ \kappa + 1 \leqq 1$.

(v) SEA $\alpha^* = \alpha\kappa$ Y DECIDA EL OPTIMO X^* TAL QUE $f(x^*) = \max_{C\alpha^*} f(x)$.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE EJEMPLO DE PROGRAMACION LINEAL BORROSA, PARA ILUSTRAR EL ALGORITMO ANTERIOR. LA EXPRESION DE LA PROGRAMACION LINEAL ES:

$$E.\ Z = C^1X, \quad AX \leqq b, \ X \geqq 0$$

LA EXPRESION DE LA PROGRAMACION LINEAL DIFUSA ES:

$$\underset{\sim}{Z} = \frac{c^1 x}{\nu}, \ A\ x \underset{\sim}{\leqq} b, \ x \geqq 0$$

DONDE $\nu = \max_{s(c)} c^1 x$ E IMPLICA UNA RESTRICCION BORROSA.

CONSIDEREMOS LA SIGUIENTE SITUACION PARA ILUSTRAR NUMERICAMENTE LO ANTERIOR:

CONSIDERESE LA FABRICACION DE DOS DIFERENTES PRODUCTOS, X_1 Y X_2 POR TRES PROCESOS I, II Y III. EL PROBLEMA ES DETERMINAR EL MONTO OPTIMO DEL PRODUCTO X_1 Y X_2, NOMINALMENTE, X_1 Y X_2 REQUERIDAS PARA MAXIMIZAR $\alpha \wedge \max_{C\alpha} f(x)$, DONDE $f(x)$ ES UNA FUNCION DE GANANCIA. EL NUMERO DE HORAS DE TRABAJO DISPONIBLES DURANTE UN MES PARA CADA PROCESO, EL NUMERO DE HORAS DE TRABAJO REQUERIDAS PARA CADA UNIDAD Y LA FUNCION GANANCIA SE DAN A CONTINUACION:

	ARTICULO		
PROCESO	X_1	X_2	
I	2	0	80
II	0	1	30
III	4	5	200
GANANCIA	2	1	MAX

CONSIDERENCE LAS SIGUIENTES FUNCIONES DE MEMBRECIA, CORRESPONDIENTES AL TIEMPO EXTRA DE TRABAJO POR MES

$$\mu_{c_1}(t) = \begin{cases} 1 - .2t, & 0 \leqq t \leqq 5 \\ 0 & , \quad 5 \end{cases}$$

$$\mu_{c_2}(t) = \begin{cases} 1 - .02, t & 0 \leqq t \leqq 5\ 0 \\ 0 & , \quad 50 < t \end{cases}$$

EL PROBLEMA PLANTEADO EN TERMINOS DE PROGRAMACION LINEAL -- CONVENCIONAL QUEDA COMO:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2$$

SUJETA A:

$$\begin{aligned} 2X_1 &\leqq 80 \\ X_2 &\leqq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 &\leqq 200 \\ X_1, X_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

MIENTRAS QUE EL PLANTEAMIENTO EN PROGRAMACION LINEAL BORROSA ES:

$$\text{Max} \quad \begin{aligned} f_1(x) &= .02174\ X_1 + .01087\ X_2 \\ f_2(x) &= .013\ X_1 + .0065 X_2 \end{aligned}$$

SUJETA A:

$$\begin{aligned} 2X_1 &\underset{\sim}{\leqq} 80 \\ X_2 &\underset{\sim}{\leqq} 30 \\ 4X_1 + 5X_2 &\underset{\sim}{\leqq} 200 \\ X_1, X_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

DONDE $\nu_1 = 92, \quad \nu_2 = 125$

$$\overline{S(C_1)} = \{ X \mid 2X_1 \leqq 85, X_2 \leqq 35, 4X_1 + 5X_2 \leqq 205 \}$$

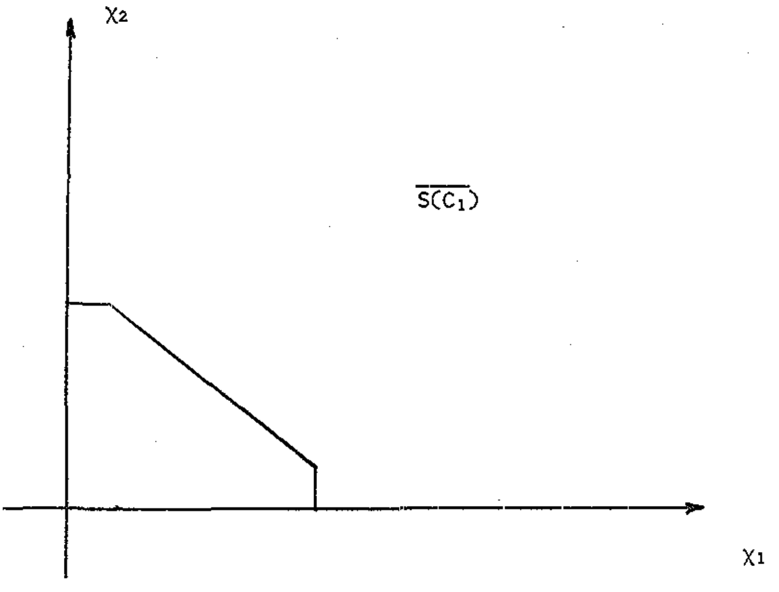
$$\overline{S(C_2)} = \{ X \mid 2X_1 \leqq 130, X_2 \leqq 80, 4X_1 + 5X_2 \leqq 250 \}$$

Y POR TANTO:

$$f_1 = \frac{2X_1 + X_2}{\nu_1} ,$$

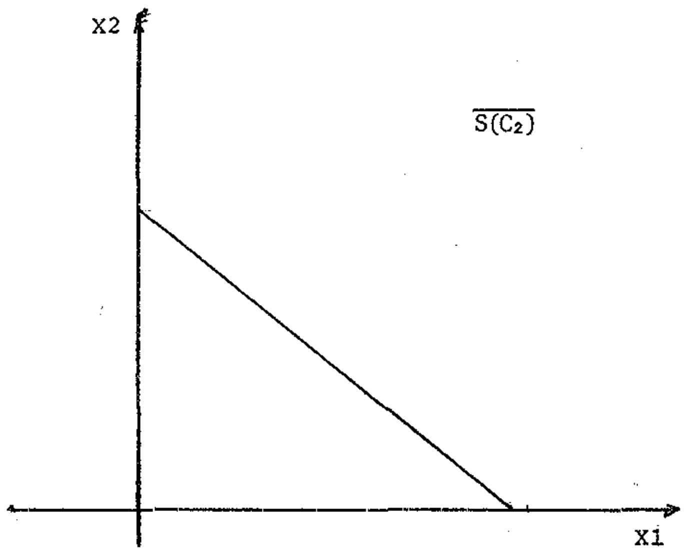
$$f_2 = \frac{2X_1 + X_2}{\nu_2}$$

LAS CERRADURA $\overline{S(C_1)}$ Y $\overline{S(C_2)}$ SE CONSTRUYERON A PARTIR DE LAS RESTRICCIONES Y LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS $\mu_{C_1}(t)$, Y $\mu_{C_2}(t)$. LOS VALORES DE ν_1 Y ν_2 SE OBTIENEN POR INSPECCION DE LAS GRAFICAS SIGUIENTES:



$$\therefore \ \nu_1 = \max_{\overline{S(C_1)}} \ (2\,X_1 + X_2) = 92$$

ANALOGAMENTE



$$\nu_2 = \max_{\overline{S(C_2)}} (2X_1 + X_2) = 1.25$$

AHORA RESOLVAMOS EL PROBLEMA LINEAL BORROSO, UTILIZANDO EL ALGORITMO ALUDIDO.

(i) SEAN $\varepsilon = .01 \qquad \alpha_1 = .8 \qquad \gamma = .5$

(ii) COMPUTAMOS $\bar{z}_1 = \max\limits_{C\alpha_1} f_1(x) = \max\limits_{C.8} f_1(x) =$

$$= \max_{\{t \mid 1-.2t \geq .8\}} f_1(x) = \max_{\{t \mid 0 \leq t \leq 1\}} f_1(x)$$

EQUIVALENTE:

$$\text{Max } f_1(x) = .02174X_1 + .01087X_2$$

SUJETA A:

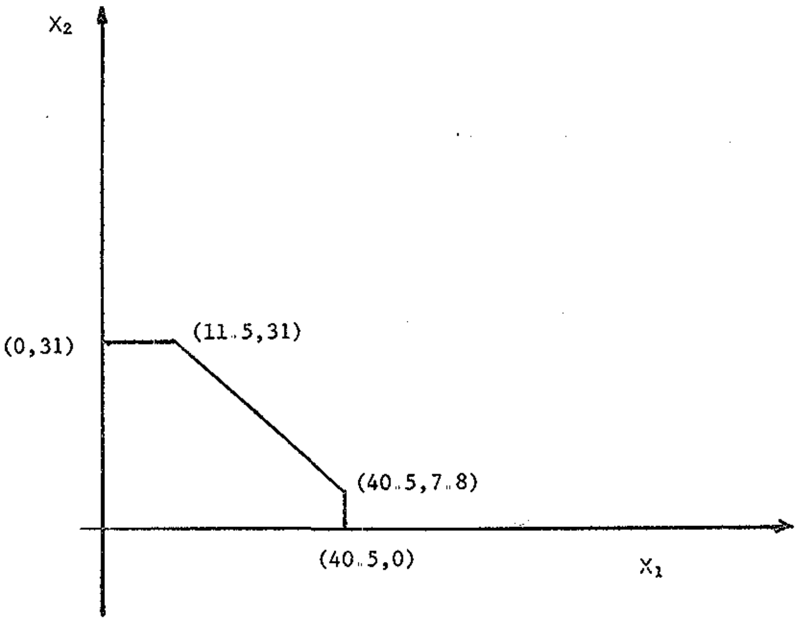
$$2X_1 \leqq 80 + 1$$

$$X_2 \leqq 30 + 1$$

$$4X_1 + 5X_2 \leqq 200 + 1$$

$$X_1, X_2 \geqq 0$$

QUE ES UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL, Y PODEMOS UTILIZAR EL METODO SIMPLEX, PARA ENCONTRAR LA SOLUCION, SIN EMBARGO, DADO QUE SOLO EXISTEN DOS VARIABLES (X_1 , X_2) ENTONCES INSPECCIONANDO LAS GRAFICAS ENCONTRAREMOS LA SOLUCION:



$\therefore \quad X_1 = 40.5$

$X_2 = 7.8$

$f_1(x) = 9653$

(iii) $\varepsilon_1 = .8 - .9653 = -.1653$

COMO $|-1653| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(iv) $\alpha_2 = .8 - .5(-1653) = 88265$, NOS VAMOS A (ii)

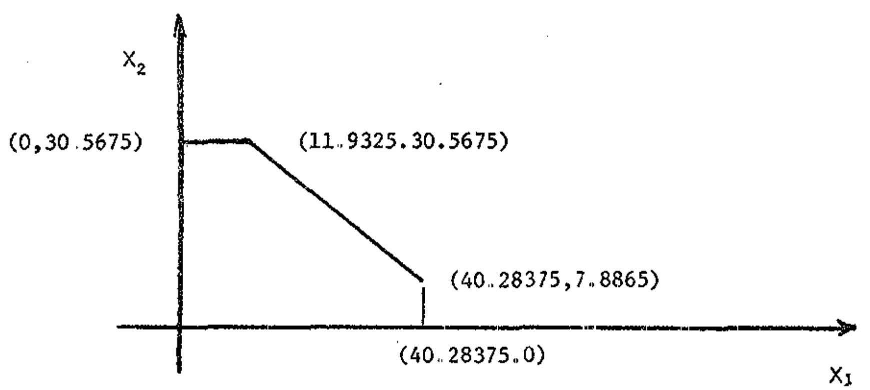
(v) $\not\# = \max_{C\alpha_2} f_2(x) = \max_{C.88265} f_2(x) = \max_{\{\varepsilon \mid 1-.2t \geqq .88265\}} f_2(x)$

$= \max_{\{t \mid o \leqq t \leqq .5675\}} f\ (x)$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } f_1(x) = .02174X_1 + .01087X_2 \\ \text{SUJETA A:} \\ 2X_1 \leqq 80.5675 \\ X_2 \leqq 30.5675 \\ 4X_1 + 5X_2 \leqq 200.5675 \\ X_1, X_2 \geqq o \end{array}}$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 40.28375$

$X_2 = 7.8865$

$f_1(x) = .9615$

(iii) $\varepsilon_2 = .8865 - 9615 = -.075$

COMO $|-.075| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(iv) $\alpha_3 = .8865 - .5\,(-.075) = .924$, NOS VAMOS A (ii)

(ii) $t_3 = \max_{C\alpha_3} f_1(x) = \max_{C_{.924}} f_1(x) = \max_{\{t|\ 1-.2t \geqq .924\}} f_1(x) = \max_{\{t|\, o \leqq t \leqq .38\}} f_1(x)$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\text{Max } f_1(x) = .02174X_1 + .01087X_2$$

SUJETA A:

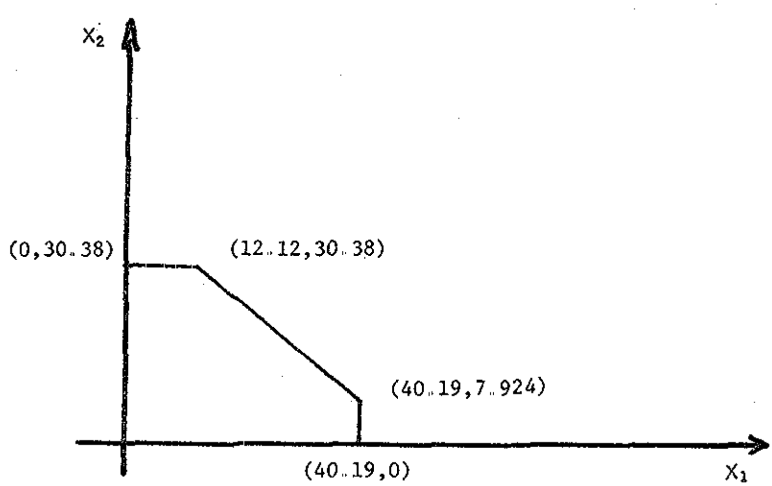
$$2X_1 \leqq 80.38$$

$$X_2 \leqq 30.38$$

$$4X_1 + 5X_2 \leqq 200.38$$

$$X_1,\ X_2 \geqq 0$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 40.19$

$X_2 = 7.924$

$f_1(x) = .9598$

(iii) $\varepsilon_3 = .924 - .9598 = -.0358$

COMO $|-.0358| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

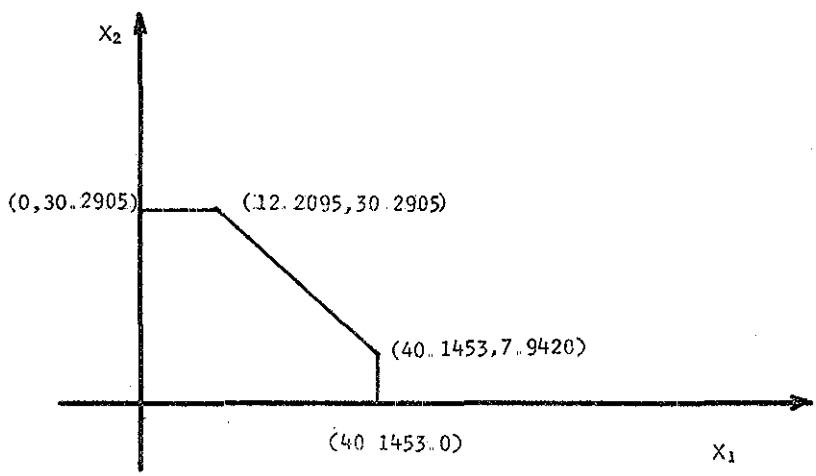
(iv) $\alpha_4 = .924 - .5\,(-0358) = .9419$, NOS VAMOS A (ii)

$$(ii)\Xi_4 = \max_{C\alpha_4} f_1(x) = \max_{C.9419} f_1(x) = \max_{\{t|1-.2t \geqq .9419\}} f_1(x) = \max_{\{t|o \leqq t \leqq .2905\}} f_1(x)$$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Max } f_1(x) = .02174X_1 + .01087X_2 \\ &\text{SUJETA A:} \\ &\quad 2X_1 \leqq 80.2905 \\ &\quad X_2 \leqq 30.2905 \\ &\quad 4X_1+5X_2 \leqq 200.2905 \\ &\quad X_1,\ X_2 \geqq o \end{aligned}}$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 40.14$

$X_2 = 7.9461$

$f_1(x) = .959$

(iii) $\varepsilon_4 = .9419 - .959 = -.0171$

COMO $|-.0171| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(iv) $\alpha_5 = .9419 - .5(-.0171) = .95045$, NOS VAMOS A (ii)

(ii) $\not{f}_5 = \max\limits_{C\alpha_5} f_1(x) = \max\limits_{C_{.95045}} f_1(x) = \max\limits_{\{t|1-.2t \geqq .95045\}} f_1(x) = \max\limits_{\{t|0 \leqq t \leqq .24775\}} f_1(x)$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\text{Max } f_1(x) = .2174\, X_1 + .01087 X_2$$

SUJETA A:

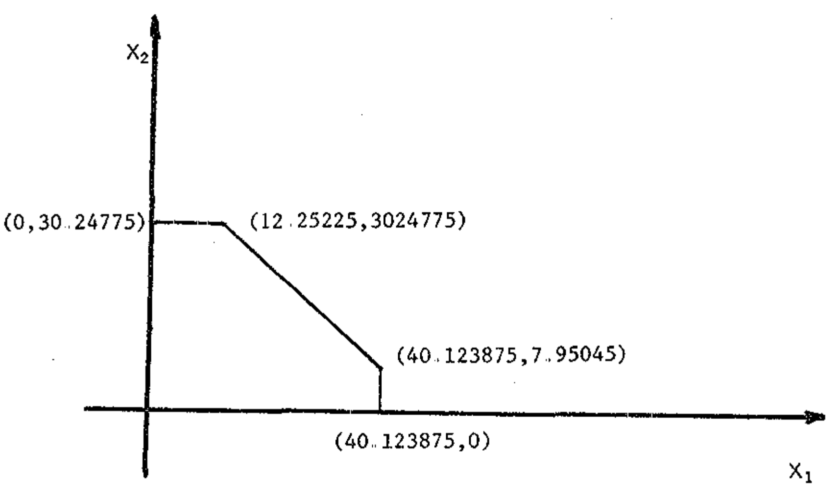
$$2X_1 \leqq 80.24775$$

$$X_2 \leqq 30.24775$$

$$4X_1 + 5X_2 \leqq 200.24775$$

$$X_1,\ X_2 \geqq 0$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 40.124$

$X_2 = 7.95$

$f_1(x) = .95867$

(iii) $\varepsilon_5 = .95045 - .95867 = -.00822$

COMO $|-.00822| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(v) $\alpha^* = \alpha_5 = .95045$ CON $X^* = (X_1^*, X_2^*) = (40.124, 7.95)$

$t^* = .24775$, $f(x^*) = .95867$ $\therefore$ $f_1(x^*) = c1x^* = 88.2$

ANALOGAMENTE LA EXTREMATIZACION SOBRE $t_2(x)$ QUEDARIA COMO:

(i) SEAN $\varepsilon = .01$, $\alpha_1 = .8$ Y $= .5$

(ii) COMPUTAMOS $\not{z}_2 = \max_{C\alpha_1} f_2(x) = \max_{C.8} f_2(x) =$

$= \max_{\{t|1-.2t \geqq .8\}} f_2(x) = \max_{\{t|0 \leqq t \leqq 10\}} f_2(x)$

EQUIVALENTEMENTE:

$$\text{Max } f_2(x) = .0153X_1 + .0077X_2$$

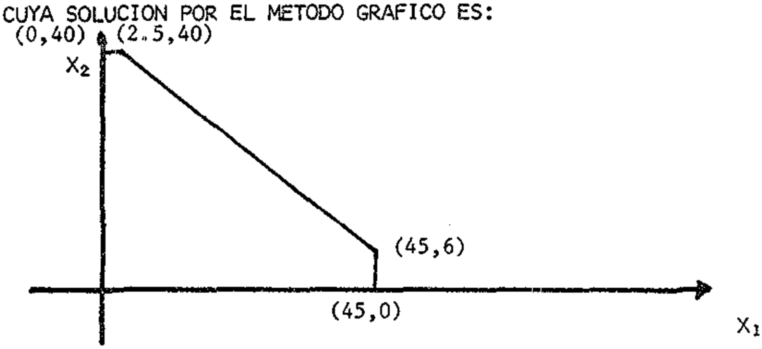
SUJETA A:

$$2X_1 \leqq 90$$

$$X_2 \leqq 40$$

$$4X_1 + 5X_2 \leqq 210 \qquad X_1, X_2 \geqq 0$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 45$

$X_2 = 6$

$f_2(x) = .7212$

(iii) $\varepsilon_1 = .8 - .7212 = .0788$

COMO $|.0788| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(iv) $\alpha_2 = .8 - .5(.0788) = .7606$, NOS VAMOS A (ii)

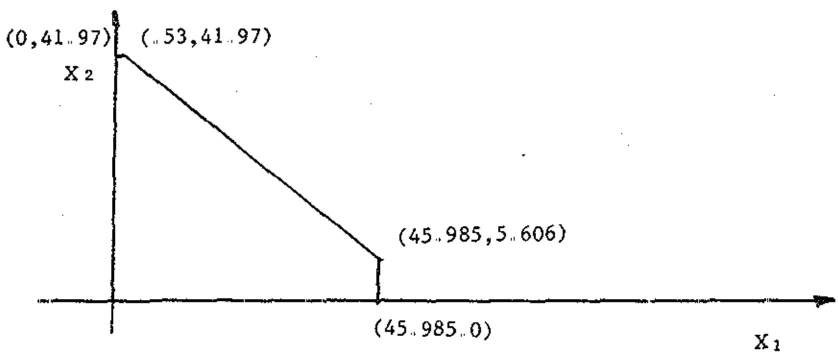
(ii) $$\not{z}_2 = \max_{C_{\alpha_2}} f_2(x) = \max_{C_{.7606}} f_2(x) \quad \{t \mid 1 - .02t \geq .7606\}$$

$$= \max_{\{t \mid 0 \leq t \leq 11.97\}} f(x)$$

EQUIVALENTEMENTE

$$\boxed{\begin{array}{l} \max f_2(x) = 0.15X_1 + .0077X_2 \\ \text{SUJETA A:} \\ \quad 2X_1 \leq 91.97 \\ \quad X_2 \leq 41.97 \\ 4X_1 + 5X_2 \leq 211.97 \\ X_1 \quad X_2 \geq 0 \end{array}}$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 45.985$

$X_2 = 5.606$

$f_2(X) = .7329$

(iii) $\varepsilon_2 = .7606 - .7329 = .0276$

COMO $|.0276| > .01$, NOS VAMOS A (iv)

(iv) $\alpha_3 = .7606 - .5(.0276) = .7468$, NOS VAMOS A (ii)

(ii) $\cancel{f}_2 = \max\limits_{C_{\alpha_3}} f_2(X) = \max\limits_{C_{.7468}} f_2(X) = \max\limits_{\{t \mid 0 \leq t \leq 12.66\}} f_2(X)$

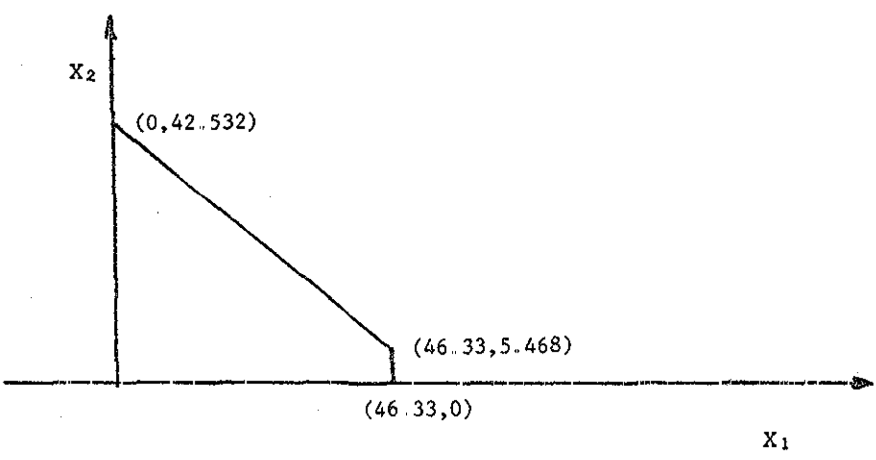
EQUIVALENTE

$$\max f_2(X) = .015X + .0077X$$

SUJETA A:

$$2X_1 \leqq 92.66$$
$$X_2 \leqq 42.66$$
$$4X_1 + 5X_2 \leqq 212.66$$
$$X_1, X_2 \geqq 0$$

CUYA SOLUCION POR EL METODO GRAFICO ES:



$X_1 = 46.33$

$X_2 = 5.468$

$f_2(X) = .737$

(iii) $\varepsilon_2 = .7468 - .737- = .0098$

COMO $|.0098| < .01$, NOS VAMOS A (v)

(v) $\alpha_2^* = .7468$ CON $X^* = (X_1^*, X_2^*) = (46.33, 5.468)$

$t^* = 12.66$, $f_2(X^*) = .737 \therefore \hat{f}_2(X^*) = C^1X^* = 98.128$

Y POR TANTO LA SOLUCION AL PROBLEMA ES:

$\alpha_1^* = .95045$ $X^* = (X_1^*, X_2^*) = (40.124, 7.975)$

$t^* = .24775$ $f_1(X^*) = 95867 \therefore \hat{f}_1(X^*) = 88.2$

$\alpha_2^* = .7468$ $X^* = (X_1^*, X_2^*) = (46.33, 5.468)$

$t^* = 12.66$ $f_2(X^*) = .737 \therefore \hat{f}_2(X^*) = 98.128$

(VI)

PROGRAMACION LINEAL BORROSA.

DE LAS TECNICAS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES LA MAS USADA ES LA PROGRAMACION LINEAL, POR LAS MUCHAS VENTAJAS QUE PRESENTA.

DADA ESTA IMPORTANCIA, EL OBJETIVO FUNDAMENTAL DE ESTA TESIS ES TRATAR DE EXPONER DE UNA MANERA SENCILLA LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA, AUNQUE SE EJEMPLIFICO EN EL CAPITULO ANTERIOR, EN ESTE CAPITULO SE TRATARA DE UNA MANERA CLARA Y GENERAL Y QUE CORRESPONDE EN MUCHO AL MODELO CLASICO Y ALGORITMOS ORDINARIOS.

LO TRATADO AQUI, SE HA OBTENIDO PRINCIPALMENTE DE LOS AUTORES HANS-J ZIMMERMANN Y ARNOLD KAUFFMANN, SOBRE TODO EL PRIMERO QUE PARECE SER EL QUE MAS HA TRABAJADO AL RESPECTO.

LA PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL, YA FUE TRATADA EN EL CAPITULO (V), Y POR TANTO PASEMOS DIRECTAMENTE AL TRATAMIENTO DE LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA, PRIMERAMENTE COMENTANDO ALGUNOS PUNTOS QUE SON IMPORTANTES EN LA TOMA DE DECISIONES EN AMBIENTES DIFUSOS QUE AUNQUE YA SE TOCO ANTERIORMENTE AQUI SE HARA ENFASIS.

EN LA TOMA DE DECISIONES CONVENCIONAL USUALMENTE LA PENSAMOS COMO UNA SITUACION DE DECISION CONSISTENTE DE:

i) UN CONJUNTO POSIBLE DE ACTIVIDADES, QUE A MENUDO SE LLAMA UN CONJUNTO DE RESTRICCIONES. CADA ACTIVIDAD PRODUCE UN CIERTO RESULTADO QUE ES ENTONCES EVALUADO EN TERMINOS DE UTILIDAD POR

ii) UNA FUNCION OBJETIVO, QUE USUALMENTE SE TIENE QUE EXTREMIZAR (MAXIMIZAR O MINIMIZAR).

LA DECISION ES NORMALMENTE DEFINIDA COMO AQUELLA QUE SATIS-- FACE LAS RESTRICCIONES EN SU CONJUNTO Y EXTREMIZAR LA FUNCION OB JETIVO.

EN UNA SITUACION DE DECISION EN UN AMBIENTE BORROSO TANTO LAS RESTRICCIONES COMO LA FUNCION(ES) OBJETIVO PUEDEN SER CONJUNTOS - BORROSOS, CARACTERIZADOS POR SU FUNCION DE MEMBRECIA, Y LA DECI-- SION ES EL CONJUNTO BORROSO DE TODAS LAS ACTIVIDADES QUE SON --- MIEMBROS DEL CONJUNTO DE RESTRICCIONES BORROSAS Y DE LOS CONJUN-- TOS DIFUSOS QUE CARACTERIZAN A LA FUNCION(ES) OBJETIVO, ESTO ES, LA "DECISION" ES LA INTERSECCION DE TODOS LOS CONJUNTOS DIFUSOS INVOLUCRADOS (EN RESTRICCIONES Y FUNCION(ES) OBJETIVO). DEBE -- SER NOTADO QUE, EN CONTRASTE A LA TEORIA DE DECISIONES CONVENCIO- NAL, EXISTE UNA SIMETRIA COMPLETA DE RESTRICCIONES Y FUNCIONES -- OBJETIVO.

LA INTERSECCION DE CONJUNTOS BORROSOS NO INTERACTIVOS O DES-- RELACIONADOS DEFINIDA POR LOFTI **A** ZADEH ES:

SEAN A Y B DOS CONJUNTOS BORROSOS CON FUNCION DE MEMBRECIA $\mu_A(x)$ $\mu_B(x)$ RESPECTIVAMENTE, ENTONCES LA FUNCION DE MEMBRECIA DE LA INTERSECCION $A \wedge B$ ES:

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \operatorname{Min}\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

PARA ILUSTRAR ESTA DEFINICION CONSIDEREMOS LOS SIGUIENTES --- EJEMPLOS:

FUNCION OBJETIVO: " X DEBE SER SUBSTANCIALMENTE MAYOR QUE -- 10", CARACTERIZADA POR SU FUNCION DE MEMBRECIA:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 , & x < 10 \\ (1 + (x-10)^{-2})^{-1}, & X \geq 0 \end{cases}$$

RESTRICCION: " X DEBE ESTAR EN LA VECINDAD DE 11", CARACTERI

ZADA POR LA FUNCION DE PERTENENCIA:

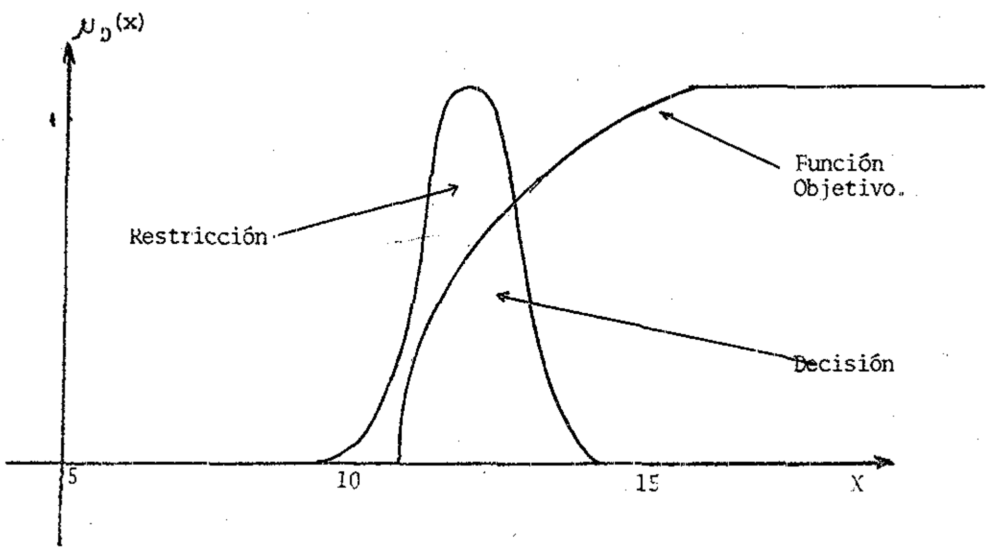
$\mu_C(x) = ((1 + (x - 11)^4)^{-1} \quad \forall x \in R$

LA FUNCION DE MEMBRECIA DE LA DECISION D SERA:

$\mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_c(x)$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \text{Min } |((1 + (x-10)^{-2})^{-1}, \ (1 + (x-11)^4)^{-1}|, \\ \\ \text{CUANDO} \quad X \geqq 0 \\ \\ \text{O CUANDO} \quad X < 10 \end{cases}$$

LO ANTERIOR SE PUEDE VISUALIZAR VIA LA SIGUIENTE GRAFICA:



COMO OTRO EJEMPLO CONSIDERE LA SIGUIENTE SITUACION IMPORTANTE:

LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA LA PODEMOS ESTUDIAR DENTRO DEL CONTEXTO ANTERIOR, ESTO ES, USANDO EL OPERADOR MIN AUNQUE TAMBIEN SE PUEDE ESTUDIAR CONSIDERANDO EL OPERADOR PRODUCTO.

RECORDANDO, EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL CLASICO ESTA DADO POR:

$$\boxed{\begin{array}{lll} & \text{Max} \quad C'X & C,\ X \in R^{n} \\ \text{SUJETA A:} & & \\ & Ax \leqq b & b \in R^{m},\ (A)m,n \\ & X \geqq o & \end{array}} \qquad \text{VI.1}$$

AHORA CONSIDEREMOS EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL BORROSA:

$$\boxed{\begin{array}{lll} & \underset{\sim}{\text{Max}} \quad C'X & \\ \text{SUJETA A:} & & \\ & a_i^1 X \underset{\sim}{\leqq} bi & ,\ i = 1,\dots,m, \\ & d_j^1 X \leqq b_j^1 & ,\ j = m_1 + 1,\dots,m_1+m_2 \\ & X \geqq o & ,\quad m_1 + m_2 = m \end{array}} \qquad \text{VI.2}$$

DONDE C, aj, dj SON VECTORES COLUMNA CON n COMPONENTES Y (bi), (b_j^1) VECTORES COLUMNA DEL LADO DERECHO CON m_1 Y m_2 COMPONENTES RESPECTIVAMENTE.

EL PROBLEMA ANTERIOR SE PUEDE PARAFRASEAR COMO SIGUE:

"TOME UNA DECISION $X \geqq o$ TAL QUE:

i) EL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO C^1X "EXCEDA AL MENOS" EL NIVEL DE ASPIRACION PREDETERMINADO bo.

ii) LAS RESTRICCIONES $a_i^1 x \leqq bi$, j=1,2,3,....,m,

DEBEN SATISFACERSE "TANTO COMO SEA POSIBLE".

iii) LAS RESTRICCIONES $\overset{1}{dj}\ X \leqq b'j$, $j= m_1+1,\ldots,m_1+ m_2$ DEBEN SATISFACERSE ESTRICTAMENTE".

ESTOS IMPERATIVOS SON ESTABLECIDOS MATEMATICAMENTE COMO SIGUE:

PARA LAS PRIMERAS m_1 RESTRICCIONES $\overset{1}{ai}X \leqq bi$, EL TOMADOR DE DECISIONES ESTA PREPARADO PARA TOLERAR VIOLACIONES, ti, HASTA $Pi > o$.

ENTONCES TODAS LAS DECISIONES $X \geqq o$ SON FACTIBLES SI ELLAS TIENEN LA PROPIEDAD SIGUIENTE:

$$ai' x \leqq bi + ti \ ,ti \leqq Pi, \ J = 1, \ldots, m_1$$
$$\overset{1}{dj}\ x \leqq \overset{1}{bj} \qquad , \ j= m_1 + 1,\ldots,m_1 + m_2$$

AUNQUE EL TOMADOR DE DECISIONES TOLERA VIOLACIONES DE $\overset{1}{ti}$ HASTA $\overset{1}{Pi}$ EL NO ES INDIFERENTE A LA MAGNITUD DE ti, LA MAS GRANDE ti TENDRA EL MENOR GRADO DE MEMBRECIA DE SATISFACCION. ESTE GRADO DE SATISFACCION PUEDE SER DEFINIDO POR $\mu i(x)$, DONDE:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1- \dfrac{ti}{Pi} & , \ \overset{1}{ai}\ x = bi + ti \ \ y \ ti \geqq o \ ; \ i=1,\ldots, m_1 \\ 1 & , \ \overset{1}{ai}\ x \leqq bi \end{cases}$$

μ_i ES LA FUNCION DE MEMBRECIA DE EL CONJUNTO BORROSO DE SOLUCIONES FACTIBLES CON RESPECTO A LA IESIMA RESTRICCION Y — $\mu_i(x)$ PUEDE SER ENTENDIDA COMO UNA MEDIDA DEL ESTABLECIMIENTO BORROSO" X SATISFACE $\overset{1}{ai}\ x \leqq bi$ TANTO COMO SEA POSIBLE".

ANALOGAMENTE DEFINIMOS LA FUNCION DE PERTENENCIA DE LA FUNCION OBJETIVO:

$$\mu_o(x) = \begin{cases} \dfrac{1-to}{Po} & , \quad C^1X = bo - to \quad , \; to \geqq o \\ 1 & , \quad C^1X \geqq bo \end{cases}$$

DONDE po ES LA MAXIMA VIOLACION ACEPTABLE DE EL NIVEL DE - ASPIRACION bo.

POR TANTO EL SIGUIENTE ESTABLECIMIENTO SE MANTIENE:

$$\bigwedge_{0 \leqq i \leqq m_1} \; \bigwedge_{x} \; \mu_i(x) \; \varepsilon \; [o,1] \quad <=> \quad o \leqq ti \leqq Pi$$

Y $\mu_i(x) = o$ SI $ti = Pi$, ESTO ES, LA DECISION X CAUSA UNA VIOLACION MAXIMA ACEPTABLE Pi. Y $\mu_i(x) = 1$ SI $ti = 0$, ESTO ES, LA DECISION - X NO CAUSA VIOLACION DE $a^1_i X \leqq bi$ o $C^1X \geqq bo$

ENTONCES FORMULANDO VI.3 CON LAS μ_i's NORMALIZADAS

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{Max } \mu(x) = \min\limits_{o \leq i \leq m,} \mu_i(x) & & & \\ & & & \\ \text{SUJETA A:} & & & \\ Ax - t \leqq b & , \; A = (ai^1) & , \; b = (bi) & \\ t \leqq p & , \; t = (ti) & , \; P = (Pi) & \\ Dx \leqq b & , \; D = (dj^1) & , \; b = (bj^1) & \\ X, t \geqq o & , \; \text{con } i = o, \ldots, m, & & \\ & \quad j = m \; + , \ldots, m \; + m & & \end{array}} \qquad \text{VI.3}$$

DENOTEMOS:

$$\lambda = \mu(x) = \min_{o \leq i \leq m_1} \mu_i \; (x) = \min_{o \leq i \leq m_1} (1 - \frac{ti}{Pi})$$

$$\lambda \leqq j - \frac{ti}{Pi} \qquad\qquad \lambda \; Pi + ti \leqq Pi \quad i = o, \ldots, m_1$$

ENTONCES LA FORMULACION VI.3 QUDARA COMO"

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \text{Max } \lambda \\ \text{SUJETA A:} & \lambda \; p + t \leqq p \\ & Ax \; - t \leqq b \\ & \qquad t \leqq b \\ & Dx \qquad \leqq b^1 \\ & \lambda \in R, \; x, \; t \; \geqq o \end{array}} \qquad \text{VI.4}$$

DONDE ESTE PROBLEMA CORRESPONDE A UN PLANTEAMIENTO DE PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL Y SE PUEDE RESOLVER POR EL METODO SIMPLEX, OBTENIENDOSE λmax, X^0 , t^0 . Y POR TANTO PODEMOS ESTUDIAR DUALIDAD, ANALISIS DE SENSIBILIDAD, PROGRAMACION PARAMETRICA, ETC. EN EL CONTEXTO BORROSO, EN EL APENDICE I SE TOCARA ALGO AL RESPECTO.

COMO ILUSTRACION NUMERICA CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL BORROSA,

$$\begin{array}{l} \underset{\sim}{\text{Max}}\ Z = 24\,X_1 + 10\,X_2 \\ \text{S.A.} \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \underset{\sim}{\leqq} 2 \\ \quad 6X_1 + X_2 \underset{\sim}{\leqq} 3 \\ \quad X_1,\ X_2 \geqq 0 \end{array} \qquad \text{VI.5}$$

SUPONGAMOS QUE ESTAMOS DISPUESTOS A QUE LA PRIMERA RESTRICCION SE VIOLE HASTA + 1 Y QUE LA SEGUNDA HASTA + 1.5, ADEMAS QUE NUESTRO NIVEL DE ASPIRACION SEA DE 14.8, Y to = 1, ESTO ES, QUE ESTAMOS DISPUESTOS A QUE NUESTRA Z ASUMA ALGUN VALOR ENTRE 13.8 Y 14.8. EL PROBLEMA LO PODEMOS AHORA REESCRIBIR COMO:

$$\begin{array}{l} \text{Maxz} = 24X_1 + 10X_2 \underset{\sim}{\geqq} 14.8 \\ \text{S.A.} \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \underset{\sim}{\leqq} 2 \\ \quad 6X_1 + X_2 \underset{\sim}{\leqq} 3 \\ \quad X_1,\ X_2 \geqq 0 \end{array} \qquad \text{VI.6}$$

QUEDANDO FINALMENTE COMO:

$$\begin{array}{l} \text{Max } \lambda \\ \text{S.A.} \end{array}$$

$$
\begin{array}{|ll|}
\lambda + t_0 \leq 1 & \\
\lambda + t_1 \leq 1 & \\
1.5\,\lambda + t_2 \leq 1.5 & \\
3X_1 + 2X_2 - t_1 \leq 2 & \\
6X_1 + X_2 - t_2 \leq 3 & \\
24X_1 + 10X_2 + t_0 \geq 14.8 & \\
X_1,\ X_2 \geq 0 & t_0 \leq 1 \\
\lambda,\ t_1,\ \geq 0 & t_1 \leq 1 \\
t_2,\ t_0 \geq 0 & t_2 \leq 1.5 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{VI.7}
$$

LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA ASOCIADAS A LAS RESTRICCIONES Y FUNCION OBJETIVO SE ILUSTRAN A CONTINAUCION.

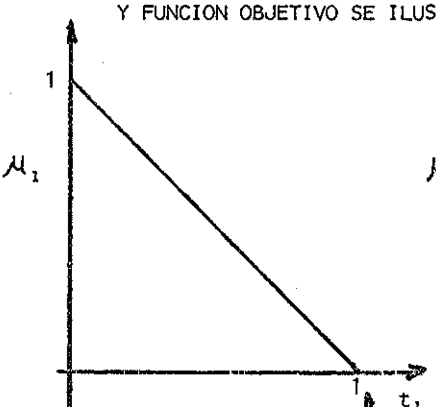


FIG. (a)

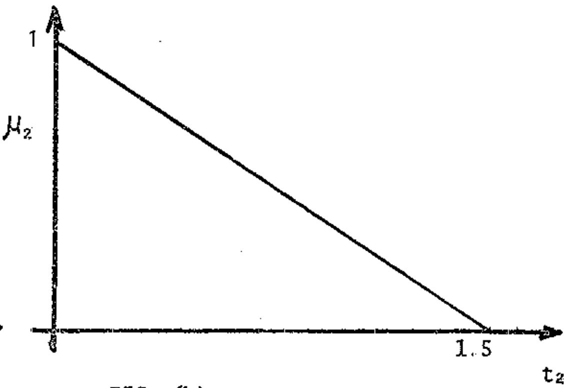


FIG. (b)

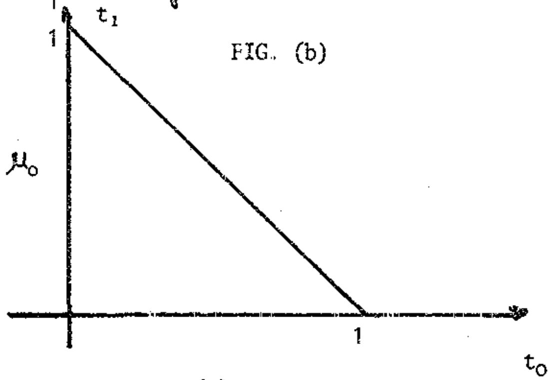


FIG. (C)

DE LA *FIGURA (a)* SE OBSERVA QUE EL DESEO DEL TOMADOR DE DECISIONES ES QUE LA PRIMERA RESTRICCION DE VI.5 NO SE VIOLE (LA FUNCION DE MEMBRECIA ASUME 1 EN $t = 0$). SIN EMBARGO SUS PREFERENCIAS PARA ADMISION A VIOLACION, ESTAN DISPUESTAS EN EL GRAFICO. QUE COMO SE OBSERVA EN $t = 1$ LA FUNCION DE MEMBRECIA ES 0, ESTO ES, QUE EL DECISOR NO DESEARIA QUE LA RESTRICCION EN CUESTION SE VIOLARA HASTA UNO, O SEA QUE EL MIEMBRO DERECHO ASUMIERA EL VALOR DE 3. LOS PUNTOS INTERMEDIOS SE INTERPRETAN DE MANERA SIMILAR, LAS OTRAS GRAFICAS SE INTERPRETAN DE FORMA ANALOGA.

RESOLVIENDO VI.7 SE TIENE:

$$\lambda^0 = .90$$

$$t_0^0 = .10$$

$$t_1^0 = .10$$

$$t_2^0 = .15$$

$$X_1^0 = .4667$$

$$X_2^0 = .35$$

CUYA INTERPRETACION ES LA SIGUIENTE:

$\lambda^0 = .90$ LA SATISFACCION TOTAL, ESTO ES, RESTRICCIONES Y FUNCION OBJETIVO SE SATISFACEN SIMULTANEAMENTE EN ESE GRADO (RECORDANDO QUE $0 \leq \lambda \leq 1$)

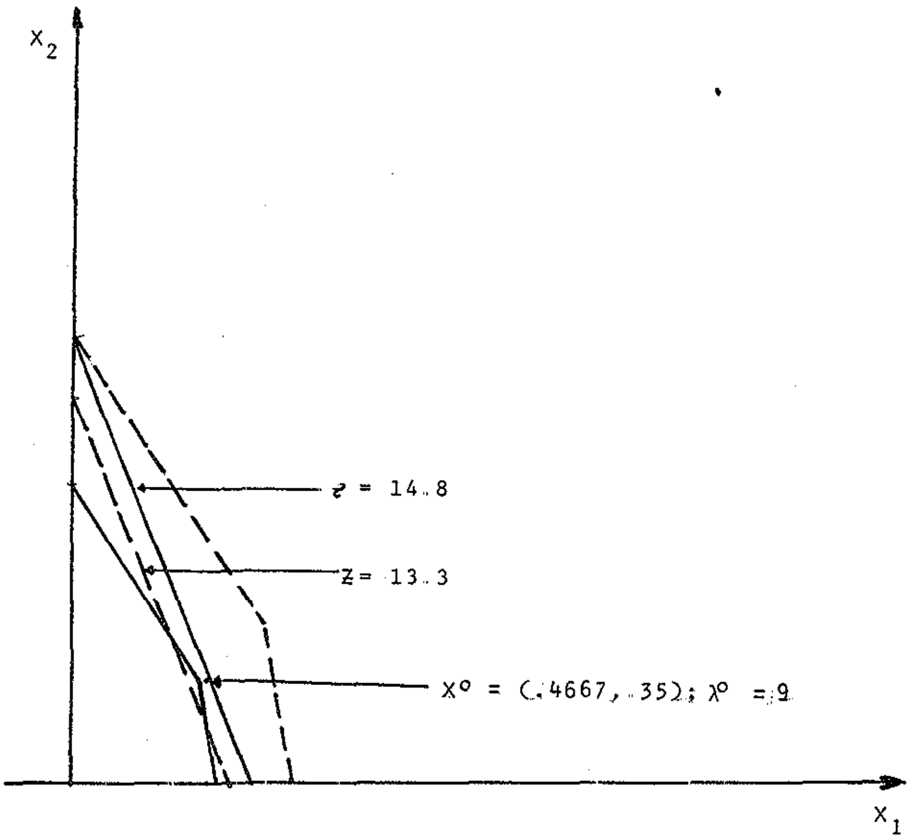
$t_0^0 = .1$, ESTO ES, $Z = 24X_1 + 10X_2 + t_0 \underset{\sim}{\geq} 14.8$

HACE QUE $Z = 14.7008$

$t_1^0 = .1$, ESTO ES, LA PRIMERA RESTRICCION QUE SE VIOLO EN t_1^0, O SEA EL MIEMBRO DERECHO ALCANZA EL VALOR DE 1.9

$t_1^0 = .15$, CUYA INTERPRETACION ES ANALOGA A LA ANTERIOR.

GRAFICAMENTE EL PROBLEMA VI.5, QUEDA COMO:



x_2
z = 14.8
Z= 13.3
X^o = (.4667, .35); λ^o = .9
x_1

(VII)

UNA APLICACION A LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA.

COMO UNA ILUSTRACION CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE PROBLEMA DE INVERSION:

SEA Iij LA INVERSION REQUERIDA DEL TIPO j DENTRO DE LA --- CLASE i DE INVERSIONES Y SEA Rij EL RETORNO CORRESPONDIENTE A LA INVERSION Iij, ADEMAS SEA Yij LA VARIABLE DE DECISION QUE TOMARA EL VALOR DE 1 SI LA Iij SE SELECCIONA Y TOMARA EL VALOR O EN CA- SO CONTRARIO. SEA Mi EL MONTO DISPONIBLE A INVERTIR EN LAS CLASES DE INVERSION i. ADEMAS M REPRESENTA LA CANTIDAD TOTAL DISPONI-- BLE PARA INVERTIR EN TODOS LOS PLANES CONSIDERADOS. EL PLANTEA-- MIENTO EN PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL QUEDA COMO:

$$\text{Maxz} = \sum_{ij} Yij\ Rij$$

SUJETA A:

$$\sum_{1}^{ni} Iij\ Yij \leqq M_1 \qquad \text{VII.1}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1}^{nk} Ikj\ Ykj \leqq Mk$$

$$\text{con } Yij \text{ binaria } \forall\ i = 1,\ldots,k \quad , \quad j = 1,2,\ldots,ni$$

PERO SUPONGAMOS QUE EL INVERSIONISTAS ESTA DISPUESTO A ACEP-- TAR UN NIVEL DE ASPIRACION DE rM , Y ADEMAS ESTARIA DISPUESTO A - INVERTIR MAS QUE Mi EN LA RESTRICCION i DE ACUERDO A UNA FUNCION SUBJETIVA (DE PREFERENCIAS) DEL INVERSIONISTA. EL PROBLEMA AHORA SE PUEDE PLANTEAR EN TERMINOS DE PROGRAMACION LINEAL BORROSA, EN EL SIGUIENTE CONTEXTO SIMBOLICO:

$$\underset{\sim}{\text{Max}}\ Z = \sum_{ij} Yij\ \ Rij$$

SUJETA A:

$$\sum_{1}^{ni} Iij\ Yij \underset{\sim}{\leqq} M_1 \qquad \text{VII.2}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1}^{nk} Ikj\ Ykj \leqq Mk$$

$$\sum_{ij} Iij\ Yij \leqq M$$

con Yij binaria ; $i=1,2,\ldots, k$; $j=1,2,\ldots,n_k$

EL PROBLEMA AHORA ES TRANSFORMAR VII.2 A UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL CLASICO Y PARA ELLO PRIMERAMENTE SUPONGAMOS QUE LAS FUNCIONES DE MEMBRECIA PARA LA FUNCION OBJETIVO Y RESTRICCIONES SON $\mu o(y)$ Y $\mu_\ell(y)$, RESPECTIVAMENTE, ENTONCES EL PROBLEMA QUEDA PLANTEADO COMO:

VII.3

$$\text{Max}z= \sum_{ij} Yij\ Rij \geqq rM\text{-}to;\ to \leqq P_0 \quad \text{(NIVEL DE ASPIRACION= } rM)$$

SUJETA A:

$$\sum_{1}^{ni} Iij\ Yij \leqq M_1 + t_1 \quad ;\ t_1 \leqq P_1$$

$$\sum_{1}^{nk} Ikj\ Ykj \leqq Mk + tk;\quad tk \leqq Pk$$

$$\sum_{ij} Iij\ Yij \leqq M \quad ;\quad \text{con Yij binarias Y } i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,ni$$

CON FUNCIONES DE PERTENENCIA:

$$\mu_G(y) = \begin{cases} 1-\dfrac{to}{Po} & ,\ Z = rM\text{-}\ to \text{ con } to \geqq o \\ 1 & ,\ Z \geqq r\ M \end{cases}$$

$$\mu_i(y) = \begin{cases} 1-\dfrac{ti}{Pi} & ,\ \sum_{j} Yij\ Iij = Mi + ti \\ 1 & ,\ \sum_{j} Yij\ Iij \leqq Mi \end{cases}$$

para $i - 1,2,\ldots,k$ j $j = 1,2,\ldots,n_k$

Y FINALMENTE TRANSFORMAMOS VII.3 AL SIGUIENTE PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL:

$$\text{Max } \lambda$$

SUJETA A:

$$\lambda P_0 + t_0 \leqq P_0 \quad ; \quad t_0 \leqq P_0$$

$$\lambda P_1 + t_1 \leqq P_1 \quad ; \quad t_1 \leqq P_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\lambda P_k + tk \leqq Pk \quad ; \quad tk \leqq Pk$$

$$-\sum_{ij} Yij\ Rij - to \leqq -rM$$

$$\sum_{1}^{ni} Iij\ Yij - ti \leqq M_1 \qquad \text{VII.4}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1}^{nk} Ikj\ \ Ykj - tk \leqq Mk$$

$$\sum_{ij} Yij\ Iij \leqq M$$

con Yij binaria, esto es, toma valores o,1

$\lambda \geqq o,\ \ ti \geqq o$

$i= 1,2,\ldots, k \ ; \ j= 1,2,\ldots,ni$

AL PROBLEMA ANTERIOR PODEMOS APLICAR ALGORITMOS CONVENCIONALES Y OBTENER LA SOLUCION OPTIMA Yij^* $i= 1,2,\ldots,k$; $j= 1,2,\ldots,ni$; Z^*, t^*, λmax

DONDE Yij^* ASUME EL VALOR CERO SI LA INVERSION Iij NO SE DEBE CONSIDERAR Y TOMA EL VALOR UNO SI LA INVERSION Iij SI SE DEBE ADOPTAR.

ti^* = HASTA CUANTO SE VIOLO LA IESIMA RESTRICCION, ESTO ES, - HASTA CUANDO SE INCREMENTO LA CANTIDAD Mi DISPONIBLE PARA INVERSIONES CLASE i .

Z^* = RETORNO MAXIMO

λmax = GRADO DE MEMBRECIA DE LA SOLUCION TOMANDO EN CUENTA -- FUNCIONES DE MEMEBRECIA DEL OBJETIVO Y RESTRICCIONES.

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE EJEMPLO:

INVERSIONES (EN W PESOS)

i \ j	1	2
1	20	15
2	29	18

RETORNOS (EN W PESOS)

j \ i	1	2
1	4	2.8
2	5.6	3.1

DISPONIBILIDAD INICIAL DE INVERSION

(EN W PESOS)

i	1	2
	18	25

TOLERANCIAS

i	0	1	2
	.5	2	8

CON rM=bo=8 Y M=50

EL PROBLEMA EN FORMA CONVENCIONAL QUEDARA PLANTEADO COMO SI--
GUE:

$$\text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.8\ Y_{12} + 5.6\ Y_{21} + 3.1\ Y_{22}$$

SUJETA A:

$$20\ Y_{11} + 15\ Y_{12} \leqq 18$$

$$29\ Y_{21} + 18\ Y_{22} \leqq 25 \qquad \text{VII.5}$$

con $Y_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$i, j = 1,2$

EL PROBLEMA VII.5 EN FORMA BORROSA QUEDA COMO:

$$\widetilde{\text{MaxZ}} = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15Y_{12} \lesssim 18$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} \lesssim 25 \qquad \text{VII.6}$$

$$20Y_{11} + 15Y_{12} + 29Y_{21} + 18Y_{22} \lesssim 50$$

$$\text{con} \quad Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{para} \begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2 \end{array}$$

ESTE PROBLEMA VII.6 SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\text{Max } \lambda$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15\,Y_{12} - t_1 \lesssim 18$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} - t_2 \lesssim 25$$

$$4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22} + t_o \gtrsim 8$$

$$.5\lambda + t_o \lesssim .5$$

$$2\lambda + t_1 \lesssim 2 \qquad \text{VII.7}$$

$$8\lambda + t_2 \lesssim 8$$

$$t_o \lesssim .5$$

$$t_1 \lesssim 2$$

$$t_2 \lesssim 8$$

$$\text{con} \quad Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{para} \begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2 \end{array}$$

$$t_o, t_1, t_2, \lambda \gtrsim 0$$

CUYA SOLUCION ES:

$$\lambda^{\circ} = .5$$

$$t_0^{\circ} = 0$$

$$t_1^{\circ} = 0$$

$$t_2^{\circ} = 4$$

$$Y_{11}^{\circ} = Y_{22}^{\circ} = 0$$

$$Y_{12}^{\circ} = Y_{21}^{\circ} = 1$$

$$Z^{\circ} = 8.4$$

SIGNIFICA QUE LAS INVERSIONES CONVENIENTES SON LAS (1,2) Y - (2,1), QUE LA CANTIDAD DISPUESTA A INVERTIR INICIALMENTE DE 25 SE INCREMENTO A 29, PRODUCIENDO UN RETORNO DE 8.4 QUE EXCEDE A 8 Y ADEMAS EL PROGRAMA SE CUMPLE EN SU TOTALIDAD EN UN .5.

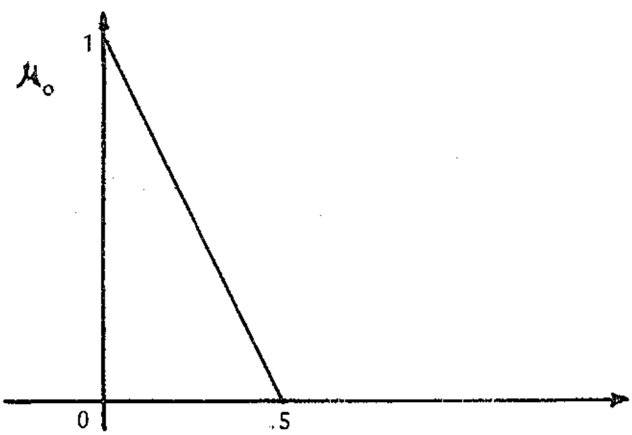
NOTESE QUE LAS FUNCIONES DE MEMBRECIA INVOLUCRADAS SON:

$$\mu_o = \begin{cases} 1-\dfrac{to}{.5} , & 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22} = 8-to \\ & \text{con } to \geqq o \\ 1 , & 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22} \geqq 8 \end{cases}$$

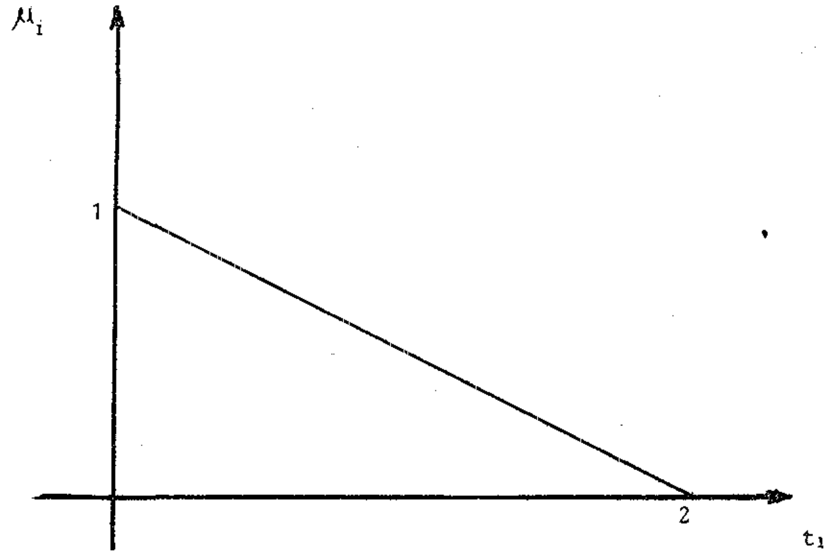
$$\mu_1 = \begin{cases} 1 - \frac{t_1}{2} & , \quad 20Y_{11} + 15Y_{12} = 18 + t_1 \text{ con } t_1 \geqq 0 \\ 1 & , \quad 20Y_{11} + 15Y_{12} \leqq 18 \end{cases}$$

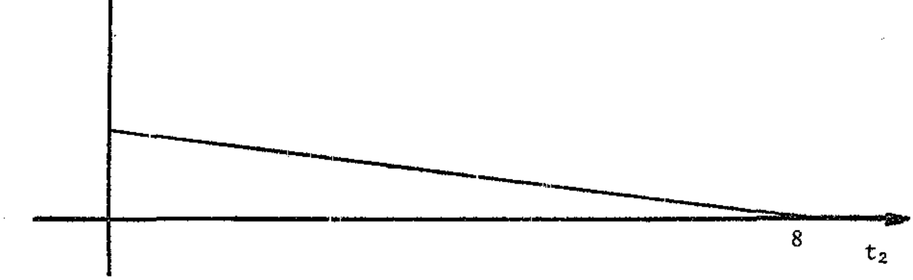
$$\mu_2 = \begin{cases} 1 - \frac{t_2}{8} & , \quad 29Y_{21} + 18Y_{22} = 25 + t_2 \text{ con } t_2 \geqq 0 \\ 1 & , \quad 29Y_{21} + 18Y_{22} \leqq 25 \end{cases}$$

QUE GRAFICAMENTE SON:



to


μ_1
1
2
t_1


μ_2
8
t_2

EN ESTE PUNTO HARE UNA LEVE DIGRESION, QUE CONSIDERO IMPORTANTE CONSIGNAR. EXISTE UNA DIFERENCIA NOTABLE ENTRE LA PROGRAMACION LINEAL CONVENCIONAL Y LA BORROSA, QUE FUNDAMENTALMENTE RADICA EN QUE LA PROGRAMACION LINEAL DIFUSA:

(a) EXISTE UN NIVEL DE ASPIRACION FIJO RESPECTO AL VALOR DE Z.

(b) SE CONTEMPLA LA POSIBILIDAD DE VIOLACION DE LAS RESTRICCIONES.

(c) EXISTEN FUNCIONES DE MEMBRECIA ASOCIADAS A (a) Y (b).

RESPECTO AL PUNTO (b) PUDIERA CONFUNDIRSE CON UN ANALISIS PARAMETRICO, PERO REALMENTE SON DOS SITUACIONES DIFERENTES, YA QUE EN EL ANALISIS ALUDIDO EL TOMADOR DE DECISIONES NO TIENE ALGUNA PREFERENCIA EN LOS AUMENTOS O DISMINUCIONES DE LAS b_i, SINO QUE ES INDIFERENTE O LES DA UN PESO UNIFORME A LAS VARIACIONES DE ESTOS LADOS DERECHOS. POR OTRO LADO EN PROGRAMACION LINEAL DIFUSA LOS AUMENTOS O DISMINUCIONES DE LOS LADOS DERECHOS SON ATENDIENDO A FUNCIONES DE MEMBRECIA O SEA QUE LAS VARIACIONES DE LAS b_i NO OCURREN CON IGUAL PESO, SINO ATENDIENDO A UNA FUNCION DE PREFERENCIAS DEL TOMADOR DE DECISIONES. PARA ILUSTRAR LO ANTERIOR CONSIDERESE EL SIGUIENTE EJEMPLO, PARECIDO AL TRATADO ANTERIORMENTE.

$$\text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15Y_{12} \leqq 18$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} \leqq 25 \qquad \text{VII.8}$$

$$Yij = \begin{cases} 0 & i = 1,2 \\ 1 & j = 1,2 \end{cases}$$

CUYA SOLUCION ES:

$$Y^{o}_{11} = Y^{o}_{21} = o$$

$$Y^{o}_{12} = Y^{o}_{22} = 1$$

$$Z^{o} = 5.9$$

CONSIDERESE AHORA EL PROBLEMA:

$$\text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15Y_{12} \leqq 18 + t_1$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} \leqq 25 + t_2$$

$$t_1 + t_2 \leqq 7 \qquad \text{VII.9}$$

$$\text{con} \quad Yij = \begin{cases} o \\ 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array}$$

$$t_1, \; t_2 \equiv o$$

CUYA SOLUCION ES:

$$Y^{0}_{11} = Y^{0}_{21} = 1$$

$$Y^{0}_{12} = Y^{0}_{22} = 0$$

$$t^{0}_{1} = 3$$

$$t^{0}_{2} = 4$$

$$Z^{0} = 9.6$$

EL EQUIVALENTE BORROSO A VII.9 SERA:

$$\text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15Y_{12} \lesssim 18$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} \lesssim 25 \qquad \text{VII.10}$$

$$Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}$$

QUE QUEDA COMO:

$$\text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

S.A.

$$20Y_{11} + 15Y_{12} \leqq 18 + t_1$$

$$29Y_{21} + 18Y_{22} \leqq 25 + t_2 \qquad \text{VII.11}$$

$$7\lambda + t_1 \leqq 7$$

$$(7-t_1)\ \lambda + t_2 \leqq (7 - t_1)$$

$$\lambda,\ Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}$$

$$t_1,\ t_2 \geqq 0$$

CUYA SOLUCION ES:

$$\overset{0}{t_1} = 2$$

$$\overset{0}{t_2} = 4$$

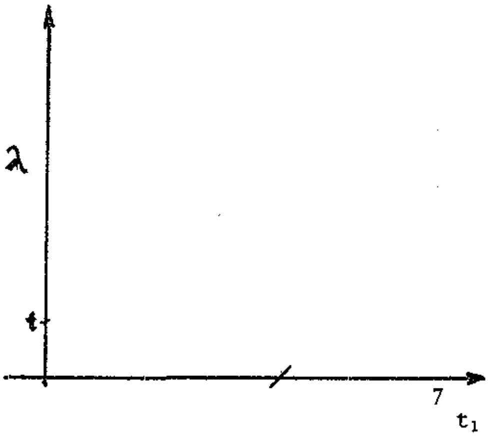
$$Y^0_{11} = Y^0_{21} = 1$$

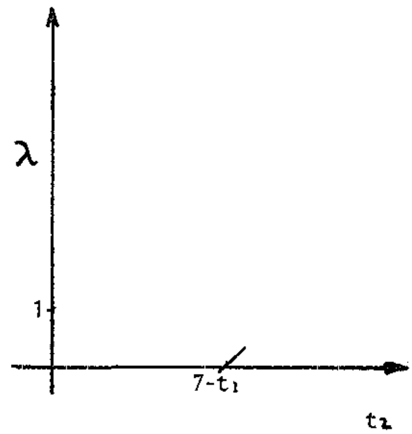
$$Y^0_{12} = Y^0_{22} = 0$$

$$Z^0 = 9.6$$

$$\lambda^0 = 0$$

GRAFICAMENTE LAS FUNCIONES DE MEMBRECIA ASOCIADAS A t_1 Y t_2 SON:





FINALMENTE EL CASO BORROSO SERA:

$$\boxed{\begin{aligned} & \text{Max}Z = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22} \\ & \text{S.A.} \\ & 20Y_{11} + 15Y_{12} \tilde{\leq} 18 \\ & 29Y_{21} + 18Y_{22} \tilde{\leq} 25 \\ & 20Y_{11} + 15Y_{12} + 29Y_{21} + 18Y_{22} \tilde{\leq} 50 \\ & Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix} \end{aligned}} \qquad \text{VII.12}$$

QUEDANDO COMO:

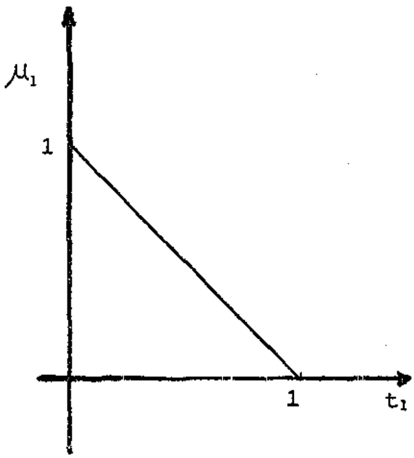
$$\text{Max } Z = 4Y_{11} + 2.8Y_{12} + 5.6Y_{21} + 3.1Y_{22}$$

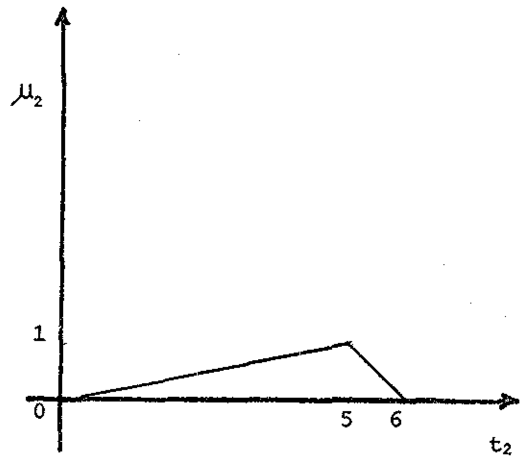
S.A.

$$
\begin{aligned}
&20Y_{11} + 15Y_{12} \leq 18 + t_1 \\
&29Y_{21} + 18Y_{22} \leq 25 + t_2 + YM \\
&29Y_{21} + 18Y_{22} \leq 25 + t_2 + (1-Y)M \\
&\lambda + t_1 \leq 1 \\
&t_1 \leq 1 \\
&5 - \lambda - t_2 \leq YM \\
&t_2 \leq 5 + YM \\
&\lambda + t_2 \leq 6 + (1-Y)M \\
&t_2 \leq 6 + (1-Y)M \\
&t_2 \geq 5 - (1-Y)M \\
&\lambda_1\ t_1,\ t_2 \geq 0 \\
&Y,\ Yij = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}
\end{aligned}
\tag{VII.13}
$$

con M muy grande.

DONDE LAS FUNCIONES DE MEMBRECIA CONSIDERADAS SON DE LA --
FORMA:





Y LA SOLUCION ESTA DADA POR:

$$Z^0 = 8.4$$

$$t_1^0 = 0$$

$$t_2^0 = 4$$

$$Y^0 = 0$$

$$Y_{11}^0 = Y_{21}^0 = 0$$

$$Y_{21}^0 = Y_{12}^0 = 1$$

$$\lambda^0 = .8$$

(VIII)

CONCLUSIONES

CON EL AFAN DE DAR PRECISION AL CONOCIMIENTO, SE HA INTENTADO AJUSTAR AL MUNDO REAL, MODELOS MATEMATICOS PROPIOS DE LAS CIENCIAS "DURAS", COMO SON LA FISICA Y LA QUIMICA, PERO MUCHISIMOS ASPECTOS DE LA REALIDAD NO ADMITEN TALES MODELOS. POR ESTA RAZON SE HA BUSCADO ALGUN REFINAMIENTO EN EL CONCEPTO FUNDAMENTAL EN MATEMATICAS, QUE ES EL DE CONJUNTOS, A TRAVES DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS.

LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS ES UN ACERCAMIENTO ENTRE LA MATEMATICA CLASICA Y LA SUTIL IMPRECISION DEL MUNDO REAL. SE ESPERA QUE LOS METODOS DE ESTUDIO, GENERADOS POR ESTA TEORIA, ABRAN NUEVOS CAMINOS EN LAS CIENCIAS CITADAS EN CAPITULOS ANTERIORES.

EL NACIMIENTO DE LA TEORIA DE CONJUNTOS BORROSOS FUE DEBIDO EN PARTE, A LA NECESIDAD DE TRATAR PROBLEMAS REALES CON CLASES DE CONJUNTOS QUE ADMITEN DISTINTOS GRADOS DE MEMBRECIA EN SUS ELEMENTOS.

EL GRAN IMPULSO QUE HA RECIBIDO ESTA TEORIA EN ULTIMOS AÑOS LA HA FUNDAMENTADO EN TAL FORMA QUE LOS INVESTIGADORES QUE SE ENFRENTAN A LOS DIVERSOS PROBLEMAS QUE PRESENTA NUESTRA SOCIEDAD, DEBIERAN PENSAR EN LA POSIBILIDAD DE UTILIZARLA COMO HERRAMIENTA EN SUS TRABAJOS.

ESTO NO SIGNIFICA QUE LA TEORIA ALUDIDA SE HAYA DESARROLLADO EN SU TOTALIDAD, PUES AUN FALTAN CONCEPTOS POR DEFINIR Y DESA--

RROLLAR, Y LOS CONCEPTOS EXISTENTES TODAVIA NO TOMAN SU FORMA FI--- NAL, LAS INTERRELACIONES ENTRE ESTA TEORIA Y OTRAS EXISTENTES PUE- DEN GENERAR ESTUDIOS INTERESANTES. POR EJEMPLO, LAS INTERRELACIO NES CON LA TEORIA DE LA OPTIMIZACION, CON LA DE LA PROBABILIDAD, - CON LA DE DECISIONES, ETC., SERIAN DE GRAN UTILIDAD.

SIN EMBARGO, SERIA MAS FRUCTIFERO, SOBRE TODO EN NUESTRO PAIS, SI EN VEZ DE REALIZAR INVESTIGACIONES TEORICAS SOBRE OTRAS PROPIE-- DADES DE ESTA TEORIA, SE INICIARA SU UTILIZACION EN UN PROYECTO ES- PECIFICO, EN EL TRANSCURSO DEL CUAL SE GENERARAN NUEVOS PROBLEMAS, - TANTO DE TIPO PRACTICO COMO DE TIPO TEORICO, COMO POR EJEMPLO, SI - $\lambda^o = 0$ Y NO BASICA, EFECTUAR ANALISIS DE SENSIBILIDAD, CUYOS RESUL TADOS SERIAN INMEDIATAMENTE APLICABLES Y UTILIZABLES EN INVESTIGA-- CIONES.

ALGO DE LO ANTERIOR QUIZA ME MOTIVO A HACER ESTA TESIS, ESTO ES, PRESENTAR UN INSTRUMENTO MATEMATICO ACTUAL, UTIL, SENCILLO, PO- DEROSO, AFIN A LAS PROBLEMATICAS PLANTEADAS EN NUESTRO PAIS DONDE,- COMO YA SE APUNTO, LA IMPRECISION SE GENERA POR MALA DEFINICION DE SITUACIONES, CARENCIA O MALA CALIDAD DE DATOS, QUE UTILIZADOS PARA ALIMENTAR MODELOS CLASICOS DE OPTIMIZACION NO GENEREN LAS RECOMENDA CIONES DESEABLES, ESTO ES, QUE EN OCASIONES LAS RECOMENDACIONES GE- NERADAS VIA EL MODELO CLASICO NO CORRESPONDEN A UNA OPTIMIZACION Y EN ALGUNOS CASOS NI SIQUIERA A UNA SOLUCION FACTIBLE REAL. CON - LA VISION Y EXPERIENCIA QUE TIENE EL DR. FELIPE OCHOA ROSSO AL SUGE RIRME EL TEMA DE TESIS, ME HA MOTIVADO DE TAL MANERA QUE LAS TECNI- CAS QUE HE APRENDIDO LAS PUEDO CONTEMPLAR TAMBIEN UN CONTEXTO BORRO SO, ESTO OBVIAMENTE, YA QUE LOS CONJUNTOS BORROSOS SON GENERLIZA--- CION DE LOS ORDINARIOS, Y POR ENDE LA MATEMATICA DIFUSA ES EXTEN

SION DE LA CLASICA.

DADO QUE DE LAS HERRAMIENTAS MAS USADAS EN LA INVESTIGACION - DE OPERACIONES ES LA PROGRAMACION LINEAL, ES AQUI DONDE SE PUSO EN- FASIS, Y COMO SE VIO EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL BORROSA ME-- DIANTE CIERTAS TRANSFORMACIONES CORRESPONDE A UNO DE PROGRAMACION - LINEAL CLASICA O CONVENCIONAL.

EN NO POCAS OCASIONES EL INVETIGADOR DE OPERACIONES CONCEP-- TUALIZA UNA REALIDAD Y TRATA DE MODELARLA, Y TAMBIEN EN MUCHAS OCA CIONES ESTA REALIDAD ES TAN COMPLEJA QUE SU CONCEPTUALIZACION ES - EN PARALELO Y PLASMARLA MATEMATICAMENTE ES DIFICIL Y EN OCASIONES IMPOSIBLE, UTILIZANDO EN NO POCAS OCASIONES COMO ULTIMO RECURSO - LA SIMULACION DE ESTA. EL INVESTIGADOR DE OPERACIONES AL SOLICI- TAR DATOS E INFORMACION EN EL AMBITO QUE SE DESENVUELVE O NO LA EN CUENTRA, O NO SE LA DAN, O SE LA PUEDEN DAR O CONSEGUIRLA PERO ES- TA PUEDE ESTAR INCOMPLETA O ERRADA. EL PODER INCOPORAR A LOS MO- DELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES EL CONOCIMIENTO O EXPERIEN-- CIA DE GENTE QUE HA VIVIDO Y SENTIDO PROBLEMATICAS DENTRO DEL SIS- TEMA EN QUE ACTUA, ES DIFICIL EN LOS MODELOS CONVENCIONALES, Y LOS INTENTOS Y DESARROLLOS HECHOS EN EL CAMPO SUBJETIVO HAN DEJADO MU- CHO QUE DESEAR, YA QUE NIVELES DE ASPIRACION COMPLICAN EL MODELO AL UTILIZAR MATEMATICA CLASICA, UN NUEVO ENFOQUE QUE PODRIA COADYUVAR EN ESTE PROCESO SERIA LA APROXIMACION MATEMATICA DE CONJUNTOS BO-- RROSOS.

LOS INCONVENIENTES Y PROBLEMAS SENALADOS SOLO SON ALGUNOS, PE RO FRECUENTES, A LOS QUE EL INVESTIGADOR DE OPERACIONES SE ENFRENTA A DIARIO Y DEBIDO A ESTO EN MEXICO SE A CAIDO EN MAYOR O EN MENOR -

GRADO EN LOS ESTEREOTIPOS SENALADOS POR BEER, STAFFORD EN SU EXTRAORDINARIO LIBRO CONTROL AND DECISION.

ADEMAS UTILIZANDO PROGRAMACION LINEAL BORROSA ES POSIBLE TRATAR Y RESOLVER PROBLEMAS COMPLICADOS COMO EL DEL VECTOR MAXIMO, PLANTEADO POR KUHN Y TUCKER, O EL DE LA SELECCION MEDIA EN PLANEACION PLANTEANDO POR CHARNES Y COOPER, ENTRE OTROS, QUE TRATADOS CON MATEMATICA CLASICA SON EXTREMADAMENTE COMPLICADOS Y EN OCASIONES INSOLUBLES.

LA TAREA DE DESARROLLAR UNA TEORIA GENERAL DE LA TOMA DE DECISIONES EN AMBIENTE BORROSO O DIFUSO, ES DE CONSIDERABLE MAGNITUD Y COMPLEJIDAD. LO VERTIDO EN ESTA TESIS ES MERAMENTE VISUALIZAR EL MARCO CONCEPTUAL DE TAL TEORIA EN EL CONTEXTO DE LA OPTIMIZACION.

EXISTEN MUCHAS FACETAS DE LA TEORIA DE TOMA DE DECISIONES EN AMBITOS BORROSOS QUE REQUIEREN MUCHA INVESTIGACION. ENTRE OTRAS ESTAN LA EJECUCION DE DECISIONES BORROSAS; EL CAMINO EN EL CUAL LOS OBJETIVOS Y LAS RESTRICCIONES DEBEN SER COMBINADOS CUANDO TIENEN DESIGUAL IMPORTANCIA O EXISTA INTERDEPENDENCIA; EL CONTROL DE LOS SISTEMAS BORROSOS Y SU EFECTO EN LA DECISION A TOMAR; CONTROL DE SISTEMAS EN LOS CUALES EL AMBITO DIFUSO ES PARCIALMENTE DEFINIDO POR EJEMPLIFICACION; Y LA TOMA DE DECISIONES EN AMBITOS MIXTOS, ESTO ES, ALEATORIOS Y BORROSOS.

COMO SE HA SENALADO EN EL CURSO DE ESTA TESIS, EL OBJETIVO ES LA DE SENALAR DE UNA MANERA CLARA E INTRODUCTORIA LA PROGRAMACION LINEAL DIFUSA, EL MODELO ESTUDIADO ES SIMPLE, AUNQUE INTERESANTE. MODELOS MAS DETALLADOS O QUE INVOLUCRAN UN GRADO MAYOR DE BORROSIDAD, POR EJEMPLO, AQUEL QUE CONSIDERA A TODOS LOS PARAMETROS (A, b, c) EN

EL CONTEXTO BORROSO, O QUE X SEA BORROSA, EN TALES CASOS SE NECESITAN CONSIDERAR CIERTAS DIFINICIONES Y PROPOSICIONES NO DIFICILES, PERO POR BREVEDAD SE OMITEN. O SEA QUE POR EJEMPLO EL PROBLEMA

$$\text{Max } \underset{\sim}{C}^{1} X \underset{\approx}{\geq} \underset{\sim}{b}o$$

SUJETA A:

$$AX \underset{\approx}{\geq} \underset{\sim}{b}$$

$$X \underset{\approx}{\geq} o$$

SE PUEDE RESOLVER, UNICAMENTE DEFINIENDO LOS CONJUNTOS BORROSOS SOBRE LOS PARAMETROS EN CUESTION, PARA MAS DETALLE VER POR EJEMPLO "FUZZY FUNCTION PROGRAMMING BASED ON FUZZY FUNCTION" DE HIDEO TANAKA Y KIYOJI ASAI DEL BULLETIN OF UNIVERSITY OF OSAKA - PREFECTURE, SERIES A, VOL. 29, Nº. 2 (1980). TAMBIEN EN ESTE ARTICULO SE TOCA $\underset{\sim}{X}$.

(IX)

APENDICE

IX.1) DUALIDAD BORROSA.- ANTERIORMENTE HABIAMOS FORMULADO -- LA PROGRAMACION LINEAL BORROSA COMO:

$$\begin{array}{l} \underset{\sim}{\text{Max}}\ c^t X \\ \text{SUJETA A:} \\ a_i^t x \underset{\sim}{\leqq} b_i \quad , \quad i = 1,\ldots,m_1 \\ d_j^t x \leqq b_j' \quad , \quad j = m_1+1,\ldots,m_1+m_2 \\ x \geqq 0 \quad , \quad m_1+m_2 = m \end{array} \qquad (A\ I)$$

QUE QUEDA TRANSFORMADO (MEDIANTE LAS μ_0 Y μ_i)

EN EL SIGUIENTE PROBLEMA DE PROGRAMACION CONVENCIONAL:

$$\begin{array}{l} \text{Max}\ \lambda \\ \text{SUJETA A:} \\ \lambda P + t \leqq P \quad \rightarrow \mathrm{I} \\ Ax - t \leqq b \quad \rightarrow \mathrm{II} \\ \qquad t \leqq P \quad \rightarrow \mathrm{III} \\ D\ \ x \leqq b^1 \quad \rightarrow \mathrm{IV} \\ \\ \lambda \varepsilon R, \quad x, t \geqq 0 \end{array} \qquad (A\ II)$$

AL PRIMAL ANTERIOR LE CORRESPONDE EL SIGUIENTE DUAL:

$$\text{Min} \quad Y_I^t P + Y_{II}^t b + Y_{III}^t P + Y_{IV}^t b^1$$

SUJETA A:

$$\begin{aligned} & Y_I^t P && = 1 \\ & Y_{II}^t A + Y_{IV}^t D && \geqq o \\ & Y_I^t E - Y_{II}^t E + Y_{III}^t E && \geqq o \\ & Y_i \geqq o , \quad i = I, \ldots, IV \end{aligned} \qquad \text{(A III)}$$

DONDE LAS $Y_I, \ldots, Y_{IV}$ SON VECTORES DE LAS VARIABLES DE EL DUAL Y DONDE $E_{m_1+1,\ m_1+1}$ CON $e_{ij} = \begin{cases} o & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

PARA $i = 1, \ldots, m_1+1$; $j = 1, 2, \ldots, m_1 + 1$

AUN MAS DADA EL PROBLEMA ANTERIOR SE PUEDE EXPRESAR COMO:

$$\text{Min} \quad 1 + Y_{II}^t b + Y_{III}^t P + Y_{IV}^t b^1$$

SUJETA A:

$$\begin{aligned} & Y_I^t P && = 1 \\ & Y_{II}^t A + Y_{IV}^t D && \geqq o \\ & Y_I^t E - Y_{II}^t E + Y_{III}^t E && \geqq o \\ & Y_i \geqq o \\ & \text{para} \quad i = I, II, III, IV \end{aligned} \qquad \text{(A IV)}$$

DADA QUE LA ESTRUCTURA DE (AI) ES UN CASO ESPECIAL DE LA PROGRAMACION LINEAL CONSIDEREMOS Y^{o}_{II} , Y^{o}_{IV} LAS VARIABLES OPTIMAS DUALES, QUE CORRESPONDEN POR TANTO A LOS PRECIOS SOMBRA, ESTO ES, $(Y^{o}_{II})_i$ ES EL INCREMENTO RELATIVO DEL GRADO DE SATISFACCION DEBIDO A LA VARIACION MARGINAL DE bi (SOBRE BASES FIJAS). POR TANTO ESTE ESTABLECIMIENTO PERMANECE INVARIABLE PARA EL CASO ESPECIAL EN QUE $\lambda^{o}=1$ LO QUE IMPLICA $t = o$ Y $\therefore$ $Y^{o}_{III} = o$ Y POR CONSIGUIENTE DE LA FUNCION OBJETIVO DEL DUAL SE TIENE:

$Y^{o}_{II}\, b + Y^{o}_{IV}\, b^{1} = o \rightarrow (*)$

LA CONDICION (*) SE PUEDE SATISFACER CUANDO:

i) $(Y^{o}_{II}, Y^{o}_{IV}) = 0$ O CUANDO

ii) $(Y^{o}_{II}, Y^{o}_{IV}) \neq o$

SI UNA COMPONENTE DE Y^{o}_{II} O Y^{o}_{IV} ES UN NUMERO POSITIVO, ESTE NUMERO NUNCA SIGNIFICARA UN INCREMENTO EN λ^{o} YA QUE UNA VARIACION MARGINAL DE SATISFACCION DEL LADO DERECHO DE LA RESTRICCION CAUSARA UN CAMBIO INMEDIATO DE BASE (DE OTRA MANERA λ^{o} PODRIA SER > 1, QUE CONTRAVENDRIA LOS SUPUESTOS DE QUE $o \leqq \lambda \leqq 1$, IMPLICITOS EN EL PRIMAL)

EN EL CASO (i) DADO QUE LA SOLUCION BASICA CONTIENE EL CERO ENTONCES SE TIENE UNA SOLUCION BASICA DEGENERADA.

LA INTERPRETACION ECONOMICA SIGNIFICA QUE NINGUNA TOLERANCIA SE NECESITA. EXISTE CAPACIDAD SIN USAR. ESTAS SOBRECAPACIDADES PODRIAN SER VENDIDAS (LA OPTIMALIDAD DE LA BASE ESTARIA GARANTIZADA) Y EL GRADO DE SATISFACCION PERMANECERIA IGUAL A 1 PARA LA DECISION OPTIMA.

UN INCREMENTO EN b, b^{1} SOLAMENTE AGRANDARIA EL CONJUNTO DE DECISIONES CON $\lambda^{o} = 1$.

EN (ii) SI UNA COMPONENTE DE Y^o_{IV} ES > o , SE TENDRIA QUE, LA DECISION OPTIMA X^o(EN EL PRIMAL) NO CAUSARIA NI HOLGURA NI VIOLACION A LA CORRESPONDIENTE RESTRICCION, DE TAL SUERTE QUE UN INCREMENTO EN CAPACIDADES NO TIENE SENTIDO, YA QUE $\lambda^o = 1$

POR OTRA PARTE SI ALGUNA COMPONENTE DE Y^o_{IV} ES > o , CORRESPONDE A UN CASO CLASICO, QUE POR HOLGURA COMPLEMENTARIA, EN LA CORRESPONDIENTE RESTRICCION DEL PRIMAL LA HOLGURA SERIA CERO Y POR TANTO NO TIENE SENTIDO INCREMENTAR b^1 YA QUE λ^o SE MANTENDRA INVARIABLEMENTE IGUAL A 1.

IX.2) ANALISIS DE SENSIBILIDAD.- RECORDEMOS A(II) NUEVAMENTE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad\qquad \text{Max } \lambda \\ \text{SUJETA A:} \\ \qquad\qquad \lambda P + t \leqq P \\ \qquad\qquad Ax - t \leqq b \\ \qquad\qquad\qquad t \leqq P \\ \qquad\qquad\quad D x \leqq b^1 \\ \qquad\qquad \lambda \varepsilon R, x, t \geqq o \end{array}} \qquad (A\ II)$$

CONSIDERAMOS LOS BLOQUES I Y III PARA NUESTRO ANALISIS YA QUE LOS OTROS BLOQUES EL ANALISIS CORRESPONDE AL CASO CONVENCIONAL.

PARA NUESTRO ANALISIS CONSIDEREMOS LOS CASOS:

i) $\lambda^o = 1$

ii) $o < \lambda^o < 1$

iii) $\lambda^o = 0$

CONSIDEREMOS:

i) $\lambda^o = 1$

DE (AII) SE VE OBVIAMENTE QUE I Y II SE SIGUEN CUMPLIENDO CUANDO EN LUGAR DE CONSIDERAR p ASUMAMOS $p^1 = p + \Delta p > o$, DONDE - $\Delta p > o$, YA QUE ($\lambda°$, X°, o) SEGUIRA SATISFACIENDO TRIVIALMENTE I Y II, ESTO ES SI $\lambda^0 = 1$

$$\lambda p + t \leqq p \implies p + t \leqq p \quad t \leqq o$$

Y COMO $\quad t \leqq p \quad$ Y $t \geqq o$ SE TIENE $t = o$.

$\therefore$ SI $p^1 = \Delta p + p$, I y II SE CONVERTIRAN EN:

$$\lambda p^1 + t \leqq p^1 \implies \lambda(p + \Delta p) + t \leqq p + \Delta p$$
$$t \leqq p^1 \implies t \leqq p + \Delta p$$

$$(p + \Delta p) + t \leqq p + \Delta p \implies t \leqq o$$

$$t \leqq p + \Delta p$$

PERO COMO $\quad t \geqq o$ y $\Delta p \geqq o \implies t = o$

EN RESUMEN SI $\lambda^0 = 1$ LA p LA PODEMOS INCREMENTAR LO QUE SE QUIERA PERMANECIENDO ESTA INVARIABLE, ADEMAS COMO LAS RESTRICCIONES II Y IV NO INVOLUCRAN p ENTONCES LAS SOLUCIONES ($\lambda°$, X°, o) PERMANECE IGUAL:

ii) CONSIDERAMOS AHORA EL CASO $o < \lambda < 1$

REFORMADO (A I) COMO:

$$\text{Max } \lambda$$

SUJETA A:

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \lambda \\ x \\ t \end{pmatrix} \leq \tilde{b}$$

CON $\lambda \varepsilon R$, $x \;\varepsilon Ro^m$, $t \varepsilon Ro^{m+1}$, con $Ro^\gamma = \{y \varepsilon r^\gamma / y \geqq o\}$ $\rightarrow$ A V

$\tilde{b} \varepsilon R^{3(m_1 + 1) + m_2}$, $A_{3(m_1 + 1) + m_2,\; n+1 + m+1}$

Y

$$\tilde{b}: = \begin{bmatrix} p \\ b \\ p \\ b^1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A}: = \begin{bmatrix} P_{m_1+1,1} & \Theta_{m_1+1,n} & E_{m_1+1,\, m_1+1} \\ \Theta_{m_1+1,1} & A_{m_1+1,n} & -E_{m_1+1,\, m_1+1} \\ \Theta_{m_1+1,1} & \Theta_{m_1+1,n} & E_{m_1+1,\, m_1+1} \\ \Theta_{m_2+1} & D_{m_2,n} & \Theta_{m_2,\, m_1+1} \end{bmatrix}$$

DONDE Θ Y E SON LAS MATRICES CERO E IDENTICA RESPECTIVAMENTE. AUN MAS SEA:

$$ej^{*}= (\overbrace{o,\ldots,\underset{j}{1},\ldots,o}^{m_1+2}, \overbrace{\Theta}^{m_1+1}, \overbrace{o,\ldots,\underset{2(m_1+1)+j}{1},\ldots,o}^{m_1+n}, \overbrace{\Theta}^{m_2})^T$$

Y POR TANTO $\bar{b}: = \tilde{b} + \Delta p . ej^{*}$ $\qquad \Delta p \varepsilon R$

ESTO ES ESTAMOS ANADIENDO Δp AL JESIMO COMPONENTE DEL VECTOR b

ADEMAS SEA

$$\bar{A}: = \tilde{A} + \begin{bmatrix} \Delta p . ej & \\ & \Theta_{3(m_1+1)+m_2,\, n+m_1+1} \\ \Theta_{2(m_1+1)+m_2+1,1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p} & \Theta & E \\ \Theta & A & -E \\ \Theta & \Theta & E \\ \Theta & D & \Theta \end{bmatrix}$$

DONDE b Y $\bar{A}$ SON EL VECTOR $\tilde{b}$ Y $\tilde{A}$ AUMENTADO POR $\Delta\rho$ EN SU JESIMA ENTRADA, ESTO ES, $ej: = (o,o,\ldots,o,\underset{j}{1},\ldots 0)^T$

SUPONGAMOS $\lambda°$ AL PROBLEMA AV Y SEA $\lambda°(\Delta\rho)$ LA SOLUCION OPTIMA AL PROBLEMA:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \lambda \\ \text{SUJETA A:} \\ \bar{A} \begin{pmatrix} \lambda \\ X \\ t \end{pmatrix} \leqq \bar{b} , \quad \lambda \varepsilon R,\ X,t \geqq o \end{array}} \rightarrow \text{A VI}$$

DADO QUE QUEREMOS DEFINIRLA RELACION FUNCIONAL $\lambda°(\Delta\rho)$, EN A VI, ESTO CORRESPONDE A UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL CON

PARAMETRIZACION SIMULTANEA, ESTO ES, TANTO EN $\tilde{b}$ COMO EN $\tilde{A}$ POR $\Delta\rho$.

COMO ESTAMOS SUPONIENDO $o < \lambda^{o} < 1$ ENTONCES $\lambda \neq o$ Y POR TANTO ES UNA VARIABLE BASICA, LUEGO LA PRIMERA COLUMNA DE $\tilde{A}$: ES COLUMNA DE LA BASE (B), SIENDO ESTA COLUMNA $(Po, \ldots, Pm_1, \Theta, \Theta, \Theta)^T$

AHORA COMO: $\overline{B} = B + \Delta\rho\vec{E}j$

CON

$$\tilde{E}j: = \begin{bmatrix} o & \\ \cdot & \\ \cdot & \Theta_{3(m_1+1)+m_2,\ 3(m_1+1)+m_2-1} \\ \cdot & \\ o & \\ 1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ o & \end{bmatrix} \leftarrow j$$

ENTONCES:

$$\lambda^o = C_B^T\ B^{-1}b \quad , \text{ SEA } B^{-1} = (\beta ij), \quad i,j = 1, \ldots, 3(m_1+1)+m_2$$

ADEMAS $\lambda^o(\Delta\rho) = C_{\overline{B}}^T\ \overline{B}^{-1}\ \overline{b}$ Y ANALOGAMENTE

DONDE $C_B = C_{\overline{B}}$, YA QUE NINGUN CAMBIO EN LAS COLUMNAS BASE SE EFECTUA. PERO COMO: $\overline{B} = B + \Delta\rho\tilde{E}j$

$$\overline{B} = B + \Delta\rho E j \qquad \text{ENTONCES } \overline{B} = B[E + B^{-1}\Delta\rho Ej]$$

$$\therefore \quad \overline{B}^{-1} = [E + B^{-1}\Delta\rho\vec{E}j]^{-1}B^{-1}$$

PERO COMO:

$$|E + B^{-1}\Delta\rho\ \tilde{E}j| = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & \beta_1 j\ \Delta\rho & \ldots & o \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ o & \ldots & 1+\beta\kappa j\ \Delta\rho & \ldots & o \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ o & \ldots & \beta mj\ \Delta\rho & \ldots & o \end{bmatrix}$$

DONDE $m = 3(m_1+1) + m_2$

$$\therefore \quad (E + B^{-1}\,\Delta\rho\,\tilde{E}j)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \frac{-\beta ij\ \Delta\rho}{1+\beta kj} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{1+\beta kj\ \Delta\rho} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & -\frac{\beta mj\ \Delta\rho}{1+\beta kj\ \Delta\rho} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta ij\ \Delta\rho + 1} - 1 \\ -\frac{\beta_2\ \Delta\rho}{\beta ij\ \Delta\rho+1} \\ \vdots \\ \frac{\beta_3 (m_1+1)+m_2, j\Delta\rho}{\beta ij\ \Delta\rho+1} \end{bmatrix} \quad \Theta_3 (m_1+1)+m_2, 3(m_1+1)+m_2-1 + E$$

$$= \qquad M \qquad + \qquad E$$

$$\therefore \quad \bar{\beta}^{-1} = (M + E)\ \beta^{-1}$$

$$\therefore \lambda^0\ (\Delta\rho) = C^T_\beta\, \bar{\beta}^{-1}\bar{b} = C^T_\beta\ (M + E)\ \beta^{-1}\bar{b} =$$

$$= C^T_\beta\ (M + E)\ \beta^{-1}(b + \Delta\rho\ ej^*)$$

$$= C^T_\beta\ \beta^{-1} b + C^T_\beta\ |M\beta^{-1} b + (M + E)\beta^{-1}\Delta\rho ej^*)$$

$$= \lambda^\circ + C^T_\beta\ |\ M\beta^{-1} b + (M + E)\ \beta^{-1}\Delta\rho ej^*)$$

$$\therefore \quad \Delta\lambda(\Delta\rho) = C_{\beta}^{T}\left[M\beta^{-1} b + (M + E)\ \beta^{-1} \Delta\rho\ ej^{*}\right]$$

ES EL CAMBIO DE λ CUANDO UNA COMPONENTE DE ρ PASA DE ρj A $(Pj + \Delta\rho)$.

FINALMENTE CONSIDEREMOS iii) $\lambda° = o$

iii.i) SI λ ES VARIABLE BASICA ENTONCES:

$$\lambda° \ (\Delta\rho) = C_{\beta}^{T} \left| M\beta^{-1} b + (M + E)\ \beta^{-1} \Delta\rho \ \ ej^{*} \right|$$

iii.ii) SI $\lambda°$ ES VARIABLE NO BASICA, NO TIENE SENTIDO EL -- PLANTEAMIENTO YA QUE EQUIVALDRIA A QUE NO EXISTA λ EN LA FUNCION OBJETIVO.

PARA ILUSTRAR LOS CONCEPTOS VERTIDOS DE DUALIDAD Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD, CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE EJEMPLO:

$$\text{Max } z = 24X_1 + 10X_2$$

S.A.

$$3X_1 + 2X_2 \leq 2$$

$$6X_1 + X_2 \leq 3 \qquad \rightarrow \text{A VII}$$

$$X_1,\ X_2 \geq o$$

con $bo = 14.8$

$to = 1$

$t_1 = 1$

$t_2 = 1.5$

con: $\lambda° = .9$, $t_0° = .1$, $t_1° = .1$, $t_2° = .15$, $X_1° = .4667$

$X_2 = .3500$

ENTONCES EL DUAL QUEDA COMO:

$$\text{Min } Z = \omega_1 + \omega_2 + 1.5\omega_3 + 2\omega_4 + 3\omega_5 - 14.8\,\omega_6$$

S.A.

$$\left.\begin{array}{lr}
\omega_1 + \omega_2 + 1.5\,\omega_3 & \geqq 1 \\
\omega_1 - \omega_6 & \geqq 0 \\
\omega_2 - \omega_4 & \geqq 0 \\
\omega_3 - \omega_5 & \geqq 0 \\
3\omega_4 + 6\omega_5 - 24\omega_6 & \geqq 0 \\
2\omega_4 + \omega_5 - 10\omega_6 & \geqq 0 \\
\omega_i \geqq 0 , \quad i=1,2,\ldots,6 &
\end{array}\right\} \text{A VIII}$$

CUYA SOLUCION ES:

$\omega^o_1 = .125$

$\omega^o_2 = .500$

$\omega^o_3 = .250$

$\omega^o_4 = .500$

$\omega^o_5 = .250$

$\omega^o_6 = .125$

$Z^o = .90$

AHORA CONSIDERESE LA SENSIBILIDAD CUANDO $\Delta\rho = 2.42$

SE TIENE QUE:

$\lambda^{o}(\Delta\rho) = .0232$

$\therefore\ \lambda^{o} = .9232$

$t_0^o = .2626$

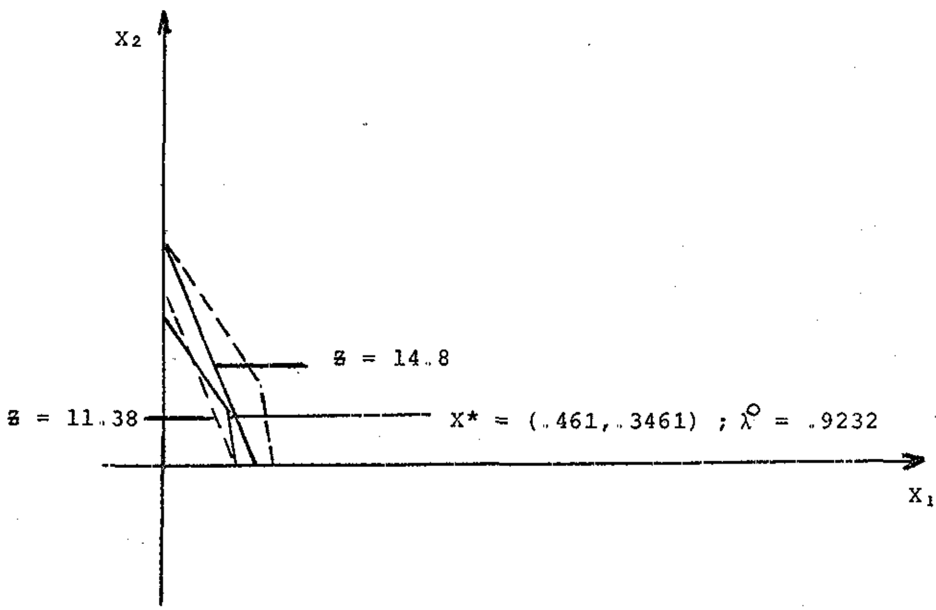
$t_1^o = .0768$

$t_2^o = .1152$

$X_1^o = .461$

$X_2^o = .3461$

GRAFICAMENTE SE TIENE



(X)

BIBLIOGRAFIA

1) BEER, STAFFORD (1966). "DECISION AND CONTROL". NEW YORK: WILEY.

2) GASS SAUL I. (1972). "PROGRAMACION LINEAL". MEXICO: CECSA.

3) GNEDENKO G. (1973). "THE THEORY OF PROBABILITY". MOSCOW: MIR PUBLISHERS.

4) GODOY EDUARDO Y KARP LIAN. (1979). "NOTA SOBRE LA - TEORIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS". ENEP. UNAM. - PROGRAMA DE INVESTIGACION.

5) HADLEY G. (1974). "LINEAR PROGRAMMING". USA: ADDISON WESLEY.

6) HAMACHER H., LEBERLING H. AND ZIMMERMAN HANS-J. (1978). - "SENSITIVITY ANALYSIS IN FUZZY LINEAR PROGRAMMING", FUZZY SETS AND SYSTEMS 1, 269-281.

7) KANDEE ABRAHAM, BYATT J. WILLIAM (1978). "FUZZY SETS, - FUZZY ALGEBRA AND FUZZY STATISTICS". PROCEEDINGS OF THE IEEE, VOL. 66. Nº. 12.

8) KAUFMANN, ARNOLD. (1975). "INTRODUCTION TO THE THEORY OF FUZZY SUBSETS". NEW YORK: ACADEMIC PRESS. INC.

9) MERCADO, R. ERNESTO. (1974). "OPTIMAL DESIGN AND OPERATION OF FUZZY SETS". Ph. D. DISERTARION PROPOSAL, UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA.

10) NAHMIAS, STEVEN (1976). "FUZZY VARIABLES". ORSA/TIMS. MIAMI, FLORIDA. USA.

11) NEGOITA C.V. AND SALURIA M. (1976). "ON FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING AND TOLERANCES IN PLANNING". ECONOMIC COMPUTATION AND ECONOMIC CYBERNETICS STUDIES AND RESEARCH, Nº. 3.

12) RALESCU D.A. AND NEGOITA C.V. (1974). "APLICATIONS OF THE FUZZY SETS TO SYSTEMS ANALYSIS". BUCARESTI-PIATA SCINTEII. ROMANIA: EDITURA TEHNICA. NR. 1.

13) SAGASTI FCO. R. AND MITROFF IAN I. (1973). "OPERATIONS RESEARCH OF GENERAL SYSTEMS THEORY". OMEGA, 1, Nº. 6, - 695-769.

14) TANAKA H., OKUDA T. AND ASAI K. (1975). "A FORMULATION OF DECISION PROBLEMS WITH FUZZY EVENTS AND FUZZY INFORMATION". XII INTERNATIONAL MEETING, TIMS, KYOTO, -- JAPAN.

15) TANAKA H. AND ISAI K. (1980). "FUZZY LINEAR PROGRAMMING BASED ON FUZZY FUNCTION". BULLETIN OF UNIVERSITY OF OSAKA PREFECTURE SERIES A, VOL. 29, Nº. 2.

16) TANAKA H. OKUDA T. AND ASAI K. (1974). "ON FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING". J. OF CYBERNETICS, 3, 4, 37-46.

17) WAGNER HARVEY M. (1960). "PRINCIPLES OF OPERATIONS RE-- SEARCH WITH APPLICATIONS TO MANAGERIAL DECISIONS". EN-- GLEWOOD CLIFFS, N.J.: PRENTICE HALL, INC.

18) YAGER, RONALD R. (1979). "FUZZY DECISION MAKING INCLUDING UNEQUAL OBJETIVES". INF. AND CONTROL.

19) ZADEH LOFTI A. AND BELLAMN RICHARD E. (1970). "DECISION-MAKING IN A FUZZY ENVIRONMENT". MANAGEMENT SCIENCE, VOL. 17, Nº. 4.

20) ZADEH, LOFTI A. (1965). "FUZZY SETS". INFORMATION AND CONTROL, VOL. 8, 338-353.

21) ZADEH, LOFTI A. (1973). "OUTLINE OF A NEW APPROACH TO THE ANALYSIS OF COMPLEX SYSTEMS AND DECISION PROCESSES". IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN AND CIBERNETICS, VOL. SMC-3, Nº. 1.

22) ZIMMERMANN, HANS-J. (1976). "DESCRIPTION AND OPTIMIZATION OF FUZZY SYSTEMS". INT. J. GENERAL SYSTEMS, VOL. 2, 209-215.

23) ZIMMERMANN, HANS-J. (1978). "FUZZY PROGRAMMING AND LINEAR PROGRAMMING WITH SEVERAL OBJETIVE FUNCTIONS". FUZZY SETS AND SYSTEMS I, 45-55.

24) ZIMMERMANN, HANS-J. (1978). "MEDIA SELECTION AND FUZZY LINEAR PROGRAMMING". OPL RES. SOC. VOL. 29, 11, 1071-1084.

25) ZIMMERMANN, HANS-J. (1979). "THEORY AND APPLICATIONS OF FUZZY SETS". K.B. HALEY, ED., OR'78. 1017-1033.