

00362



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

2
2y

FACULTAD DE CIENCIAS

"QUERATOPOGRAFIA LASER: TEORIA Y SIMULACION.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
MANUEL CAMPOS GARCIA



DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RUFINO DIAZ URIBE.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

269157

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Juan Manuel

AGRADECIMIENTOS

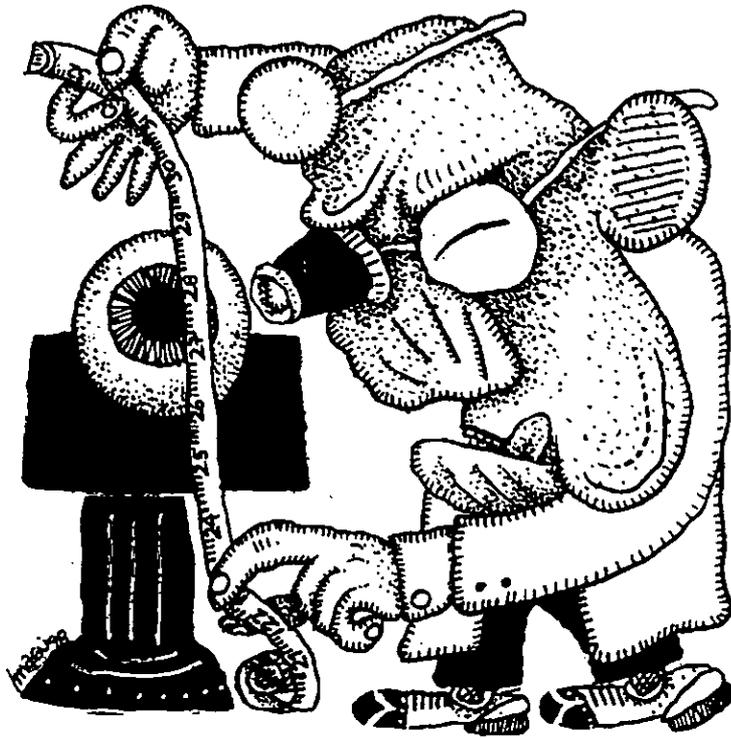
A mis padres por su apoyo en los momentos difíciles.

Al Dr. José Rufino Díaz Uribe por su confianza, apoyo y amistad.

A mis sinodales por sus valiosos comentarios y sugerencias.

A todos ¡ GRACIAS !

QUERATOPÓGRAFO LÁSER



CONTENIDO

	Página
<i>INTRODUCCIÓN GENERAL</i>	1
<i>ANTECEDENTES</i>	4
<i>CAPÍTULO 1: CONCEPTOS BÁSICOS.</i>	8
1.1. La Anatomía del Ojo.	-9
1.2. La Córnea.	10
1.2.1. Anatomía de la Córnea.	10
1.2.2. Forma de la Superficie Corneal.	11
1.3. Modelos Ópticos del Ojo Humano.	14
1.3.1. Puntos Cardinales de un Sistema Óptico Complejo.	14
1.3.2. Ojo Esquemático.	15
1.3.3. Ojo reducido.	17
1.4. La Óptica de los Errores Refractoros del Ojo.	18
1.5. Corrección del Estado Refractor del Ojo.	21
1.6. Técnicas Quirúrgicas Refractivas.	23
1.7. Conclusión.	24
<i>CAPÍTULO 2: SISTEMAS DE MEDICIÓN DE LA SUPERFICIE CORNEAL.</i>	25
2.1. El Queratómetro.	26
2.1.1. Principios Básicos de Operación.	26
2.1.2. El Oftalmómetro de Javal-Schiötz.	27
2.1.3. El Queratómetro (Bausch & Lomb Keratometer).	29
2.2. El Queratoscopio.	31
2.2.1. El Método de Gullstrand.	32
2.2.2. El Método de El Hage.	34
2.3. Técnicas Rasterestereográficas.	36

2.4. Técnicas Interferométricas	41
2.5. Nuevas Propuestas.	43
2.6. Conclusión.	44
CAPÍTULO 3: QUERATOPOGRAFÍA LÁSER: TEORÍA.	46
3.1. Deflectometría Láser.	47
3.2. Sistema Óptico del Queratopógrafo Láser.	48
3.3. Trazo Exacto de Rayos.	50
3.3.1. Ecuaciones de las Superficies Ópticas.	52
3.3.2. Representación Matemática de los Rayos.	53
3.3.3. Trazo de Rayos de Ida.	54
3.3.4. Trazo de Rayos de Regreso.	55
3.4. Cálculo de las Normales a la Superficie.	56
3.4.1. Sistema de Coordenadas para la Córnea.	56
3.4.2. Algoritmo para Obtener las Normales a la Superficie.	57
3.5. Reconstrucción de la Superficie.	62
3.6. Conclusión.	65
CAPÍTULO 4: QUERATOPOGRAFÍA LÁSER: SIMULACIÓN.	66
4.1. Simulación.	67
4.1.1. Superficies de Simulación.	68
4.1.2. Simulación del Ruido.	69
4.2. Resultados.	71
4.2.1. Superficie Parabólica sin Ruido.	71
4.2.2. Superficie Parabólica con Ruido.	75
4.2.3. Superficie con Variaciones sin Ruido.	79
4.2.4. Superficie con Variaciones con Ruido.	84
4.3. Conclusión.	87
CONCLUSIONES GENERALES.	89
APÉNDICE A: CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL QUERATOPÓGRAFO LÁSER.	91
A.1. Ecuaciones del Barrido en Queratografía Láser.	91
A.2. Características Físicas de los Componentes Ópticos del Queratopógrafo Láser.	94
APÉNDICE B: TRAZO EXACTO DE RAYOS.	97
B.1. Ley Vectorial de la Reflexión.	97
B.2. Ley Vectorial de la Refracción.	98
B.3. Trazo de Rayos de Ida.	100
B.4. Trazo de Rayos de Regreso.	105
B.5. Sistema de Coordenadas para la Córnea.	107
BIBLIOGRAFÍA.	110

INTRODUCCIÓN GENERAL

El reciente avance de las técnicas de cirugía refractiva para la corrección de defectos visuales ha hecho necesario el contar con sistemas de medición de la forma de la córnea de manera más eficiente, ya que la forma de la superficie corneal es determinante para la formación de la imagen sobre la retina. Cabe mencionar que de manera aproximada la superficie corneal proporciona alrededor del 70% del poder refractor del ojo por lo que es importante conocer su forma o topografía de la manera más precisa posible.

Dentro de las técnicas de cirugía refractiva se encuentran, por ejemplo, la queratotomía radiada, la queratomileusis o los procesos de esculpido de la córnea con láseres de excímero. Los defectos visuales más comunes son el queratocono, el astigmatismo, la miopía y la hipermetropía, aunque puede haber otro tipo de defectos que presentan mayor deformación de la superficie corneal.

Existen varios métodos para evaluar los defectos de la superficie corneal [1][2][3], el más aceptado clínicamente es el que utiliza el Disco de Plácido, el cual consiste en una serie de anillos concéntricos que al ser reflejados sobre la córnea la imagen obtenida nos da información sobre la forma de la superficie. Sin embargo, este método presenta algunos inconvenientes y sólo puede emplearse para evaluar córneas con deformaciones suaves, por lo que resulta impráctico emplearlo en córneas que presentan deformaciones mayores. Los demás métodos presentan problemas similares.

En el Laboratorio de Óptica Aplicada del Centro de Instrumentos se estudia un método alternativo para la evaluación de la superficie corneal (Queratopografía Láser); cuando ésta presenta deformaciones muy pronunciadas que los métodos convencionales no pueden medir. Aquí se ha implementado un dispositivo experimental el cual permite sensar la superficie de la córnea empleando las técnicas de Deflectometría Láser [2] desarrolladas originalmente para pruebas ópticas; éste método mide al ángulo de deflexión de un haz láser que incide sobre una superficie, la medición del ángulo permite conocer la superficie. Asimismo, se han desarrollado algoritmos para la adquisición de los datos y se han hecho algunas simulaciones sencillas [3], como la de evaluar

superficies de revolución descentradas; también se ha caracterizado el barrido estudiando los métodos de detección para determinar la posición del haz láser [4]. Sin embargo, lo anterior no resuelve el problema completamente. Dentro de los problemas que restan resolver se encuentran el aumentar la velocidad y la precisión del barrido ya que los movimientos del ojo pueden afectar los datos obtenidos y en consecuencia se puede tener información errónea de la superficie corneal. Otro de los problemas es que una vez obtenidos los datos experimentales del barrido, es necesario aumentar la velocidad de evaluación de la topografía corneal, esto para dar resultados en tiempo real. También falta conocer el límite de medición del método, la precisión, la repetibilidad y estudiar cómo afectan los errores aleatorios.

Ahora bien, el tema de tesis consistirá por un lado, en desarrollar la teoría de la Queratopografía Láser, así como de hacer algunas simulaciones para probar el sistema. Para lograr esto se plantean las siguientes metas:

1. Desarrollar los cálculos del trazado exacto de rayos a través del sistema.
2. Desarrollar los algoritmos y programación necesaria para el tratamiento de datos, para que a partir de éstos se tenga la información necesaria sobre la superficie de la córnea.
3. Realizar las simulaciones de córneas sobre superficies que no sean de revolución y presenten descentramientos, así como sobre superficies que tengan algunas deformaciones suaves, por ejemplo, el de una superficie que presente rugosidades cosenoidales.
4. Se estudiará teóricamente la resolución que pueda darnos el sistema.
5. Se estudiará cómo pueden afectar errores aleatorios al sistema; esto se logrará introduciendo en la posición del haz reflejado, en el detector, pequeños incrementos aleatorios y comparando la forma de la superficie calculada durante la simulación con la teoría.

Ahora bien, en este trabajo se discute ampliamente cómo fueron lográndose cada uno de los puntos anteriormente propuestos para el estudio de la queratopografía láser. Así, primeramente se plantean los antecedentes del problema con el propósito de tener un panorama general de la importancia de conocer con precisión la superficie anterior de la córnea. Posteriormente, en el capítulo uno se estudian los conceptos básicos concernientes a la formación de imágenes por el ojo humano los cuales incluyen desde su anatomía y sus principales enfermedades hasta las técnicas quirúrgicas empleadas en la actualidad, las cuales requieren de conocer con bastante precisión la topografía corneal. En el capítulo dos se describen los principales sistemas y técnicas de medición de la topografía corneal que se emplean en la actualidad. Como veremos en su momento, estas técnicas tienen inconvenientes en cuanto a la precisión con la que proporcionan la topografía corneal por lo que se hace importante el contar con una mejor técnica de evaluación. En el capítulo tres se describe con detalle en qué consiste la queratopografía láser y cómo con esta técnica es posible obtener la topografía corneal. Finalmente, en el capítulo cuatro se hace una simulación con superficies que presentan variaciones del tipo cosenoidal con el fin de hacer un análisis de la precisión del método; también se hace una simulación con estas mismas superficies pero agregando ruido, esto con el fin de estudiar los efectos del ruido en el queratopógrafo láser. Finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo.

Asimismo, hay que mencionar que como una consecuencia del estudio de la técnica de queratopografía láser para la evaluación de la topografía corneal, se han venido desarrollando, de manera paralela, técnicas alternativas para la medición de la topografía corneal, y en general para superficies ópticas convexas, que se realizan en menos de 1/100 de segundo y que cubren prácticamente toda la superficie corneal sin hacer la suposición de que esta superficie sea esférica. Estas técnicas en estudio tienen que ver con una generalización del disco de Plácido a tres dimensiones. Aquí se tienen dos propuestas: una de ellas se hace construyendo la pantalla de tal forma que en la imagen reflejada sobre la córnea se aprecie discos concéntricos usando para ello óptica paraxial [5][6], y en la otra se diseña la pantalla de tal forma que la imagen obtenida sea una malla cuadrada. En esta última se hace un trazo exacto de rayos para el diseño de la pantalla, y aunque este último diseño se desarrolló para probar en general superficies ópticas esféricas convexas, se puede aplicar también a la superficie corneal [7].

Cabe mencionar que este trabajo forma parte de un proyecto de investigación recientemente aprobado por CONACyT. El nombre del proyecto es "Queratopografía Láser" con número 2120G-PA, cuyo objetivo principal es el de integrar un sistema optoelectrónico y desarrollar la programación esencialmente necesaria para medir la topografía de la superficie anterior de la córnea humana por deflectometría láser; se pretende optimizar el sistema. El modelado posterior de la córnea ayudará a prever los efectos de las cirugías correctivas para una mejor decisión sobre el tratamiento a seguir con diferentes pacientes.

ANTECEDENTES

El sistema óptico del ojo lo componen principalmente la córnea y lente del cristalino; las superficies ópticas que componen estos elementos alteran la dirección de los rayos incidentes enfocándolos sobre la retina. Se sabe que la superficie de la córnea proporciona alrededor del 70 % del poder refractor del ojo sin acomodación y el cristalino proporciona el resto de este poder. Esto nos indica que la córnea es el principal elemento refractor del ojo humano por lo que es importante conocer su topografía con precisión.

Aunque desde hace mucho tiempo se han estudiado las características topográficas de la córnea, la verdad es que la forma de la superficie corneal permanece siendo un misterio en la actualidad. Los métodos desarrollados y diseñados en el pasado miden algunas de sus propiedades y hoy en día las ideas principales de estas técnicas se siguen empleando en la mayor parte de las aplicaciones médicas.

Asimismo, el modelo óptico del ojo empleado, ya sea el ojo esquemático o el ojo reducido [8][9], asume que las superficies ópticas del ojo son esféricas, y que sus centros de curvatura caen sobre el eje óptico del sistema; de manera más general, se asume que el perfil de la superficie anterior de la córnea en cualquier meridiano es una sección cónica [10]. Con este modelo óptico del ojo mediante un trazo de rayos paraxial es posible conocer la naturaleza de la imagen reflejada por la córnea la cual permite determinar el estado refractivo del ojo, donde, desde luego, los rasgos fundamentales en la determinación del estado refractor del ojo lo proporcionan el poder refractor de la córnea y la longitud del globo ocular. Por otra parte, si se contara con un modelo óptico adecuado del ojo, éste nos permitiría la evaluación de aberraciones en el sistema visual.

En óptica el concepto de medir la curvatura de una superficie esférica cóncava está más o menos bien establecido; esencialmente los métodos existentes hacen uso de las propiedades de enfocamiento de estas superficies [11]. Sin embargo, cuando se trata de medir la imagen reflejada por la córnea, se tiene que considerár que esta es una superficie convexa bastante esférica y

posiblemente, muy asimétrica; su radio de curvatura cambia a lo largo de distintos meridianos. Otro factor que hay que tomar en cuenta es el hecho de que el ojo se mueve constantemente y si a este movimiento se le agregan los movimientos de la cabeza y los debidos al pulso y la respiración, entonces se encuentra que la medición debe hacerse de manera muy rápida, dentro del intervalo de 1/60 de segundo [12]. Otro factor que complica las mediciones es el hecho de que la córnea cambia su forma durante el día, siendo más plana por las mañanas [12][13]. Asimismo, se encuentra que el proceso de acomodación afecta la curvatura de la córnea [8][12].

La naturaleza de la formación de imágenes por el ojo ha sido estudiada desde la antigüedad. El griego Galeno (130-200) suponía que un espíritu síquico se movía a través del nervio óptico por la retina y el cristalino y que era proyectado como un haz de rayos hacia el exterior a través de los ojos; este espíritu hacía que los objetos en el espacio fueran visibles. Una teoría más científica la aportó Alhazen (965-1039), que ya estudiaba los fenómenos de reflexión, refracción y las propiedades de las lentes. Suponía que la luz que emanaba de objetos luminosos era reflejada por objetos opacos los cuales se hacían visibles al ojo. También suponía que en el interior del ojo se formaba una imagen, pero debido a su desconocimiento de las propiedades refractivas del medio ocular fue incapaz de determinar la naturaleza de la imagen formada.

J. Kepler (1571-1630) dio una explicación del papel que juega la lente del cristalino en la formación de las imágenes y cómo los objetos del espacio eran proyectados sobre la retina para formar una imagen real invertida debido a la refracción en la córnea y el cristalino.

C. Sheiner (1573-1650) fue el primero en calcular algunas de las propiedades refractivas de los varios medios transparentes del ojo. Se dio cuenta que la formación de la imagen dependía de las curvaturas y el espaciado de las superficies refractivas y de los índices de refracción del medio ocular. Determinó el poder refractor del ojo suponiendo que la córnea era un espejo esférico convexo cuya imagen reflejada podría proveer una medida de la curvatura de la córnea. El procedimiento consistía en colocar una serie de esferas de varios diámetros cerca del ojo del paciente y comparando los tamaños de las imágenes de una ventana que tenía un marco en forma de cruz, obtenía de manera aproximada la curvatura de la parte esférica central de la superficie anterior de la córnea. A partir de entonces se consideró que la superficie de la córnea es una superficie esférica.

Huygens (1629-1695) fue el primero en intentar desarrollar un modelo óptico para el ojo, pero fracasó debido a la falta de información precisa sobre las propiedades biomecánicas de éste. En 1851 Laurance concibió el primer ojo esquemático [8][14].

En 1820 F. Cuignet proporcionó un método para estudiar las imágenes reflejadas por la superficie corneal. En su sistema, se iluminaba un objeto que era colocado frente al ojo del paciente. El haz, el objeto y el paciente eran colocados de manera que el observador pudiera ver la imagen del objeto reflejada en la córnea. Cualquier distorsión de la imagen era indicativa de una anomalía en la topografía, la cual era interpretada cualitativamente por el observador. Dentro de las desventajas de su técnica oftalmoscópica, se encontraba primeramente la dificultad de alinear al paciente, observador y objeto de tal forma que la imagen siempre estuviera centrada sobre el eje visual del paciente y segundo, era difícil para el observador apreciar distorsiones pequeñas de la topografía corneal.

Helmholtz, en 1856, inventó el oftalmómetro o queratómetro, el cual mide el radio de curvatura de una porción de la superficie de la córnea. Javal y Schiötz refinaron el queratómetro

incorporando al dispositivo de Helmholtz un prisma Wollaston para producir un sistema de doble refracción el cual producía dos haces de luz en lugar de uno [15][16]. Los principios básicos de estos instrumentos siguen siendo utilizados en la actualidad; sin embargo, en los queratómetros estándar no es sencillo obtener lecturas de la periferia de la córnea y en consecuencia no proporcionan una apreciación real de la topografía corneal. Además estos dispositivos sólo son precisos para superficies esféricas.

En 1827 Brewster sugirió un medio práctico para medir la periferia de la superficie de la córnea. En 1847 Goode usó estas ideas para establecer un método para realizar las mediciones de la periferia; sus intentos fueron refinados en 1880 por A. Plácido, resultando en el llamado disco de Plácido. Este dispositivo consistía de una pantalla plana perforada en el centro sobre la cual se pintan círculos igualmente espaciados, que colocada frente al ojo del paciente y observando a través del agujero se podía observar una imagen de los anillos reflejada por la córnea. Si ésta era esférica, los anillos aparecían circulares y concéntricos, si era astigmática, los anillos aparecían elípticos. Las distorsiones de la topografía corneal se manifestaban como desviaciones de la forma de la imagen de los anillos, o de su grado de concentricidad, o ambas cosas. Aunque era posible alinear este dispositivo, no era preciso ya que no podía amplificar las imágenes de los anillos y en consecuencia era incapaz de detectar pequeñas distorsiones en la topografía de la córnea, además de que era una técnica muy cualitativa.

En 1893 Gullstrand aplicó la fotografía en la queratoscopia. La superficie anterior de la córnea reflejaba los anillos del disco de Plácido los cuales se fotografiaban y las imágenes de estos anillos se interpretaban como curvas de nivel [17]. Conforme las líneas se encuentran más cerca una de otra, la pendiente es más pronunciada, y viceversa. Ahora se sabe que esto es incorrecto pues la relación de alturas no es directa. También, refinó el ojo esquemático el cual está compuesto por seis superficies refractoras esféricas: dos para la córnea y cuatro para la lente del cristalino. También, con el fin de realizar mediciones más cuantitativas desarrolló un método que usa un microscopio para determinar la distancia entre dos puntos sobre una fotografía queratoscópica (queratografía); la medición era convertida a radios de curvatura. Sin embargo, el método era un gran consumidor de tiempo lo cual lo hacía impráctico para los oftalmólogos. Esta fue la razón principal del por qué la estimación de la topografía corneal estaba casi totalmente confinada a la queratometría. Otra desventaja presentada se debía a la anatomía de la cara ya que hace difícil obtener buenas reflexiones de los anillos en la zona periférica, debido principalmente a que las imágenes obtenidas se ensombrecían.

En los años cincuenta se cuantificaban las queratografías comparándolas con fotografías de esferas de radios de curvatura conocidos. Si los anillos correspondientes coincidían, esa porción de la queratografía tenía el mismo radio de curvatura de la esfera. Con estos comparadores era posible determinar la curvatura de aproximadamente el 43% de la superficie corneal, en comparación con el 6% de la determinada por los queratómetros.

Los queratoscopios actuales, que se basan en la teoría desarrollada por Gullstrand, sólo difieren en la forma de su pantalla. Algunos siguen empleando la pantalla plana de Plácido, otros usan una pantalla, también con anillos, en forma de cono y otros de forma cilíndrica. Estos últimos diseños con el fin de abarcar mayor área de la superficie corneal [1][11][18]. Asimismo, también cambian en el número de anillos, por ejemplo el *keratometer* emplea 12 anillos y el *Corneal Modeling System* emplea 31 anillos [19]. Sin embargo, a pesar de todas estos nuevos diseños, permanecen sus principales deficiencias: esto es, el centro y la periferia permanecen sin poderse

medir ya que la imagen se oscurece debido al contorno del rostro. Adicionalmente, como estos dispositivos dependen de la reflectividad de la superficie corneal, cualquier anomalía aquí reduce la calidad de la imagen. Defectos epiteliales, úlceras en el estroma o cicatrices limitan el análisis; superficies altamente irregulares causan que los anillos reflejados se traslapen haciendo imposible un análisis cuantitativo [12][18][19].

Los dispositivos más comunes empleados para la evaluación de la topografía corneal en vez de proporcionar la forma de la superficie corneal, proporcionan un mapa topográfico de potencia dióptrica o mapa dióptrico. Estos son:

- a) El *queratómetro* [1][15][16], el cual emplea sólo cuatro puntos de la parte central de la superficie corneal para evaluar la curvatura central de la córnea midiendo para ello el tamaño de la imagen reflejada por la superficie corneal.
- b) El *queratoscopio* [1][12][17][18][19], el cual está basado en el disco de Plácido mide más área que el queratómetro pero no da información del centro y la periferia.

Como la topografía de la superficie de la córnea es la que define las propiedades ópticas y no los mapas dióptricos, se han desarrollado métodos que proporcionan información más o menos precisa de la superficie corneal; sin embargo, estos métodos resultan ser poco prácticos para las aplicaciones oftalmológicas. Dentro de éstos se encuentran:

- a) Las *técnicas interferométricas* [13][20], que extraen la información de la topografía corneal a partir de un patrón de interferencia formado por reflexión de la córnea de un haz coherente monocromático que se hace interferir con un haz de referencia. El patrón de interferencia es capturado y digitalizado; ajustando los datos obtenidos a un polinomio que proporciona la forma del frente de onda se obtiene la información de la forma de la superficie corneal.
- b) Las *técnicas rasterestereográficas* [21][22][23], que extraen la información a partir de una malla cuadrada calibrada proyectada sobre la película de lágrima de la córnea a la cual se le aplica previamente fluoresceína. La reflexión difusa de la malla es capturada, digitalizada y los puntos obtenidos son comparados con otros puntos obtenidos con una malla de referencia para calcular la topografía corneal. Estas técnicas son tan nuevas que poco se sabe de su precisión y utilidad.

Si bien los métodos y dispositivos desarrollados hasta ahora para la evaluación de la topografía corneal proporcionan información importante sobre algunos rasgos del sistema óptico del ojo, el desarrollo reciente de las técnicas de cirugía refractiva [1][24][25] y el diseño de lentes de contacto [1][26] hacen que las suposiciones sobre la topografía corneal sean inadecuadas debido principalmente a que estos métodos queratorefractivos demandan directamente la evaluación precisa de toda la superficie corneal, en particular la zona intermedia y la conflictiva zona periférica [1].

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo se discuten brevemente sobre los aspectos básicos que tienen que ver con la naturaleza de la formación de imágenes por el ojo humano. Desde hace mucho tiempo se ha venido estudiando con detalle su anatomía y se han logrado caracterizar sus principales defectos. Asimismo, se ha podido establecer que la córnea es el principal elemento refractor del ojo humano y que cualquier corrección recae principalmente en la posibilidad de modificar permanentemente la superficie corneal. Las técnicas quirúrgico refractivas de la actualidad empleadas para tal tarea, demandan un conocimiento de la topografía corneal con bastante precisión para así poder realizar la corrección y dar un diagnóstico oftalmológico adecuado, al mismo tiempo que requieren conocer sobre los posibles efectos colaterales o posibles complicaciones que se presentan antes, durante y después de la cirugía. Asimismo, se han propuesto modelos matemáticos del ojo los cuales son ampliamente empleados para estudiar la formación de imágenes

1.1. La Anatomía del Ojo.

En cuanto a la formación de imágenes se refiere, el ojo humano se puede comparar con una cámara fotográfica ya que contiene un sistema de lentes compuesto por la córnea y la lente del cristalino, una abertura variable llamada iris y una película sensitiva llamada retina. La figura 1.1 muestra un diagrama simplificado del ojo [9].

Desde el punto de vista fisiológico, el ojo humano es una extensión especializada del cerebro y se encuentra conectado a través del nervio óptico. El ojo, que tiene una forma globular irregular, está compuesto externamente por un tejido parecido al cuero llamado esclera y en la parte frontal por una pequeña protuberancia transparente llamada córnea, la cual está compuesta por un tejido avascular transparente multicapa. La córnea es el principal elemento refractor del ojo humano.

La córnea está seguida por una cámara que contiene un líquido nutriente transparente llamado humor acuoso y que es producido por el cuerpo ciliar. Cerca de la parte trasera de la cámara que contiene al humor acuoso se encuentra el iris. El iris está hecho de tejido elástico delgado con una abertura central llamada pupila, y se encuentra rodeado por un músculo circular llamado esfínter. La parte posterior de este tejido está formado de células pigmentadas las cuales actúan como absorbedores de luz. El propósito del iris es controlar la cantidad de luz que penetra al ojo.

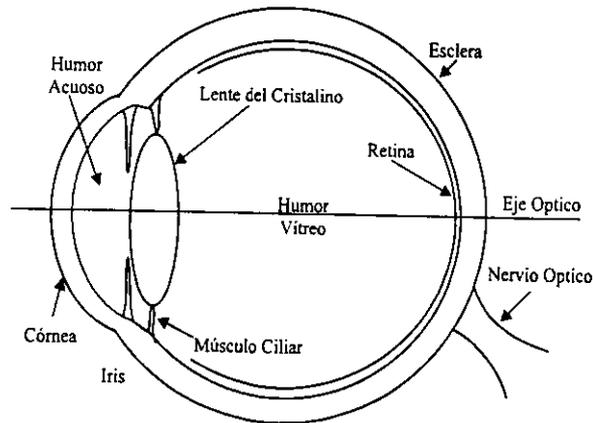


Figura 1.1. Sección transversal del ojo.

Atrás del iris y del humor acuoso se encuentra la lente del cristalino, la cual está compuesta de un material altamente proteico y está encerrada por una membrana delgada llamada cápsula de la lente que se encuentra conectada a la parte muscular del cuerpo ciliar a través de la zónula.

El cuerpo ciliar es muy importante para la salud y funcionamiento del ojo; es la fuente del humor acuoso y hogar de las fibras musculares llamadas músculos ciliares que causan el enfocamiento del ojo, proceso que recibe el nombre de acomodación. Cuando los músculos ciliares se contraen, el radio de la lente cristalina disminuye enfocando al ojo para observar objetos cercanos. Cuando los músculos ciliares se relajan, el ojo se enfoca para observar objetos lejanos. Cuando la

lente del cristalino envejece, se hace menos flexible, y en consecuencia la habilidad de acomodación se va perdiendo.

La lente del cristalino está seguida de una cámara oscura, la cual está hecha con una sustancia transparente gelatinosa llamada humor vítreo. En la parte posterior, entre el humor vítreo y la esclera hay una capa delgada de tejido nervioso llamada retina. La retina es un tejido nervioso compuesto por fotorreceptores llamados conos y bastones, y es responsable de la recolección de luz enfocada sobre ella por la córnea y el cristalino; esta información luminosa es convertida a señales eléctricas que se envían al cerebro para interpretación y construcción de imágenes. Los conos y bastones no se encuentran distribuidos uniformemente sobre la retina. La retina se divide en dos zonas generales: la parte central, que percibe las imágenes con más agudeza y que se encuentra compuesta por muchos conos y pocos bastones, es llamada el área macular y es responsable de la detección de formas y del color; el centro de la mácula, la fovea, es donde ocurre la mejor visión, esto es, es muy sensible a detalles finos; el resto de la retina, dominada por bastones, llamada periferia, es más sensible a las intensidades bajas de luz y a la detección de movimientos.

1.2. La Córnea.

1.2.1. Anatomía de la Córnea.

La córnea es realmente una estructura compleja. Sus componentes anatómicas básicas como su espesor, radio de curvatura, y regularidad superficial juegan un papel importante en su topografía. Como la córnea es la parte más externa del ojo y proporciona el mayor poder dióptrico, una modificación del poder dióptrico de todo el ojo puede lograrse cambiando la forma de la superficie corneal. La córnea está hecha de un tejido similar al de la esclera con dos excepciones, es transparente y no contiene vasos sanguíneos. La córnea está constituida por cinco capas [27] (figura 1.2): el epitelio, la capa de Bowman, el estroma, el descemto y el endotelio. El espesor de la córnea varía desde 0.5 mm en su parte central hasta 1 mm en la periferia.

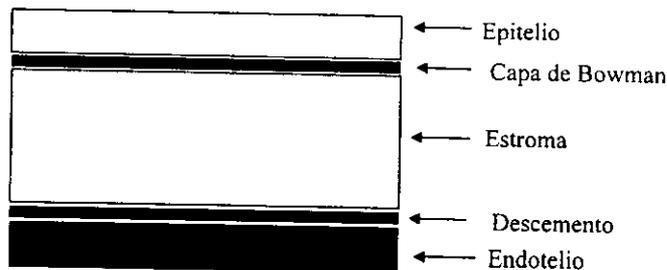


Figura 1.2. Sección transversal de la córnea.

El epitelio está compuesto de cuatro a seis capas celulares cuyo espesor es de aproximadamente 50 μm que corresponde al 10% del espesor de la parte central de la córnea. Las células epiteliales proporcionan a la córnea una superficie suave y reflejante que mantiene a la

lágrima. Como las células epiteliales crecen rápidamente al ser removidas, el espesor del epitelio no puede ser mantenido, y en consecuencia, no puede lograrse alguna modificación en la forma de la superficie corneal intentando modificar esta capa.

Bajo el epitelio se encuentra la capa de Bowman con un espesor entre las 8 y 14 μm compuesta de un paquete denso de fibras de colágeno. El papel exacto que desempeña la capa de Bowman es aún desconocido, sin embargo, se cree que da estabilidad mecánica y juega un papel importante contra lesiones e infecciones. Asimismo se ha encontrado que cuando es removida, no se regenera por lo que es otra superficie que hay que descartar para la remodelación de la superficie corneal [24].

Bajo la capa de Bowman se encuentra la capa más ancha de aproximadamente 400 μm de espesor llamada estroma, la cual esta hecha de fibras de colágeno. Es en esta capa donde se hace la remodelación de la forma de la superficie corneal ya que puede mantenerse cualquier modificación del espesor.

Bajo el estroma, las dos capas restantes, el descemento y el endotelio, no juegan un papel importante en la remodelación de la superficie corneal, pero es necesaria su preservación ya que previenen de cualquier infección o lesión por medio de un intercambio de nutrientes con el resto de las capas de la córnea.

1.2.2. Forma de la Superficie Corneal.

El análisis topográfico de la córnea ha emergido recientemente como una parte importante del diagnóstico oftalmológico y posibles terapias a seguir. La razón más importante tiene que ver con los avances recientes en cirugía refractiva. Sin embargo, la información actual que se obtiene sobre la topografía corneal no es sobre toda la superficie y la que se da no es muy precisa debido a las suposiciones que se hacen acerca de su forma.

En realidad, la superficie anterior de la córnea es asimétricamente esférica, esto es, no tiene forma esférica ni de una esférica regular. De hecho ninguna córnea humana es esférica salvo tal vez un poco en la zona central donde habrá siempre algún grado de asimetría o astigmatismo. Por tal motivo, se trata de una superficie tan compleja que es difícil de representarla gráficamente y de tratarla ópticamente. A pesar de todo, y aunque se han efectuado varias simplificaciones para medir la topografía corneal, se han podido obtener algunos de sus rasgos importantes.

Una simplificación que ha sido útil para comprender la topografía corneal es considerar a la superficie anterior de la córnea como ópticamente equivalente a la sección de una lente toroidal o como la sección de una elipse [10][19][27]. En la mayor parte de las córneas normales la zona central es más curva que las zonas paracentral y periféricas y se dice que la córnea tiene forma prolata. La topografía opuesta raramente se da en córneas normales pero aparecen comúnmente después de efectuar una queratotomía radial; aquí la zona central es más plana que las zonas paracentral y periférica, esto es, tiene una forma oblata (ver figura 1.3).

Otra simplificación que tiene lugar es cuando la córnea se divide en zonas superficiales; por supuesto que ninguna de estas zonas es discreta ya que la superficie corneal es siempre continua. No

obstante, los oftalmólogos, con fines ópticos, han dividido la superficie en dos regiones principales, la zona óptica central y el resto de la superficie llamada la periferia. La zona óptica es la responsable de la formación de las imágenes en la fovea por medio de la pupila de entrada del ojo, su tamaño, forma y curvatura varía de individuo a individuo. El resto de la superficie corneal sirve como superficie refractante útil para visión periférica, para formación de imagen sobre la fovea cuando la pupila está muy dilatada, como estructura mecánica y como fuente de nutrientes.

Superficie anterior de la
córnea

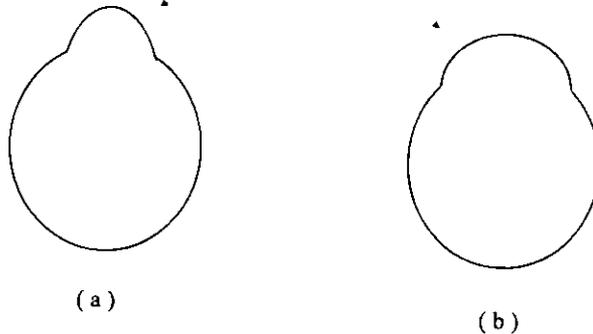


Figura 1.3. Forma simplificada de la superficie anterior de la córnea que se puede ver como una superficie elíptica, a) de forma prolata, b) de forma oblata.

Una de las dificultades actuales más importantes para la medición de la topografía corneal se encuentra cuando se tiene que decidir qué punto de la superficie corneal se debe tomar como el ápice. Para los oftalmólogos el ápice de una córnea normal es el punto más elevado de la superficie corneal. El ápice cae muy cerca del eje óptico, pero para ciertas aplicaciones se puede considerar que cae sobre éste. Sin embargo, para estados patológicos de la córnea, como el queratocono [25] o después de realizar una cirugía refractiva, el ápice se desplaza produciendo una difícil alineación lo cual es crucial en los dispositivos actuales empleados para medir la topografía corneal.

Con fines anatómicos, también se divide a la superficie corneal en cuatro zonas: la zona óptica central, la zona intermedia paracentral, la zona de transición periférica y la zona límbica [13][24][25], figura 1.4. La zona central tiene aproximadamente entre 3 y 4 mm de diámetro y es también llamada zona apical, capa corneal, zona óptica o zona esférica central; estos términos intentan designar a esta región como la más esférica, simétrica y ópticamente más importante. La zona paracentral es un anillo de aproximadamente entre 4 y 7 mm de diámetro y que también recibe el nombre de zona media, intermedia o periférica media. Las zonas anatómicas central y paracentral son muy importantes para el diseño de lentes de contacto debido a que es en estas zonas donde se hace el ajuste de las lentes. La zona periférica es un anillo de aproximadamente entre 7 y 11 mm de diámetro. Esta es el área donde las córneas normales son más planas y se vuelven más asféricas. Finalmente, la zona del limbo es un anillo de aproximadamente 0.5 mm de anchura que termina en la esclera.

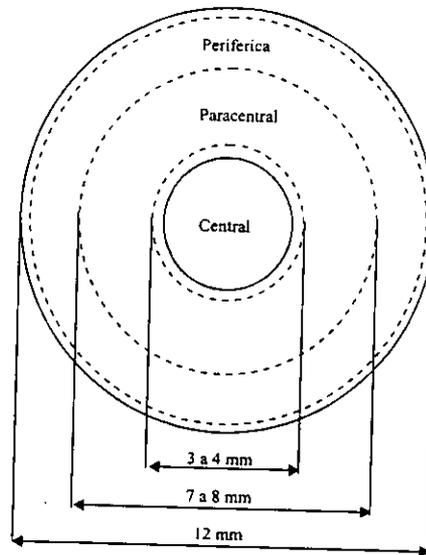


Figura 1.4. Zonas anatómicas de la superficie corneal.

Por otra parte, las posiciones sobre la superficie corneal son designadas mediante meridianos, que no son más que líneas que se extienden sobre el diámetro de la córnea de un punto sobre el limbo hacia el punto opuesto y que tienen un centro común, por ejemplo, \overline{AC} en la figura 1.5. Los meridianos son designados de 0° a 180° , en sentido contrario al de las manecillas del reloj midiendo desde las 3:00 en punto, para ambos ojos. Sin embargo, como sobre la superficie de la córnea no se puede identificar un punto norte-sur sobre un meridiano de manera única, entonces se tienen que designar con semimeridianos, o lo que es lo mismo, en coordenadas polares, por ejemplo, \overline{OA} en la figura 1.5.

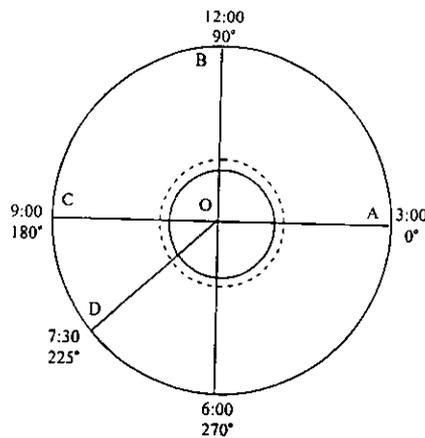


Figura 1.5. Terminología que describe las posiciones sobre la superficie corneal.

1.3. Modelos Ópticos del Ojo Humano.

En general, cada ojo tiene distintas características anatómicas, sin embargo, se pueden hacer modelos útiles que permiten los cálculos y modificaciones necesarias para la corrección de defectos refractivos. El sistema óptico del ojo no es un sistema simple en el cual se puede hacer trazos de rayos y estudiar la formación de imágenes con facilidad. Más aún, si las mediciones se hacen sobre un ojo vivo. Sin embargo, mediante modelos del ojo simples se han medido algunas características de la formación de imágenes. Asimismo, con estos modelos es posible determinar la naturaleza de algunos de los errores refractivos del ojo y diseñar elementos ópticos para corregirlos, por ejemplo, anteojos, lentes de contacto o lentes intraoculares [8][14][26].

1.3.1. Puntos Cardinales de un Sistema Óptico Complejo.

Para estudiar con mayor precisión la formación de imágenes con el sistema óptico del ojo, hay que comenzar por considerar que éste es un sistema óptico complejo, por lo que es necesario contar con un modelo óptico adecuado que se aproxime lo más posible al sistema óptico real del ojo.

En una primera aproximación, es posible considerar que cualquier meridiano de la córnea se puede representar como el perfil de una superficie esférica convexa cuyo poder refractor está en función del radio de curvatura y el índice de refracción de la córnea; los dispositivos actuales para la medición de la topografía corneal basan sus diseños en estas ideas.

En óptica, las características paraxiales de un sistema óptico complejo pueden determinarse reduciendo al sistema a seis puntos cardinales [8][14][28]: dos puntos focales, dos puntos principales y los dos puntos nodales, figura 1.6. De la figura podemos observar que las distancias focales de un sistema óptico se miden desde los dos vértices externos del sistema óptico, obteniéndose la distancia focal posterior F' y anterior F , respectivamente.

Si extendemos los rayos incidentes y emergentes, el lugar geométrico que une a estas intersecciones, en la aproximación paraxial, formará los planos principales del sistema óptico, los cuales son considerados como planos conjugados de magnificación unitaria. La intersección de los planos principales con el eje óptico del sistema constituyen el primero y segundo puntos principales, H y H' , respectivamente.

Ahora bien, existe un rayo incidente que al salir del sistema habrá sido desplazado pero seguirá siendo paralelo al rayo incidente, las extensiones de estos rayos nos proporcionan los dos puntos nodales, N y N' , que por formar el mismo ángulo respecto al eje óptico se dice que tienen magnificación angular unitaria. Si los índices de refracción de los dos medios anterior y posterior al sistema óptico son iguales, entonces los puntos nodales coinciden con los puntos principales. Por lo contrario, como en el caso de la córnea, si los índices de refracción son distintos, los puntos nodales no coincidirán con los puntos principales.

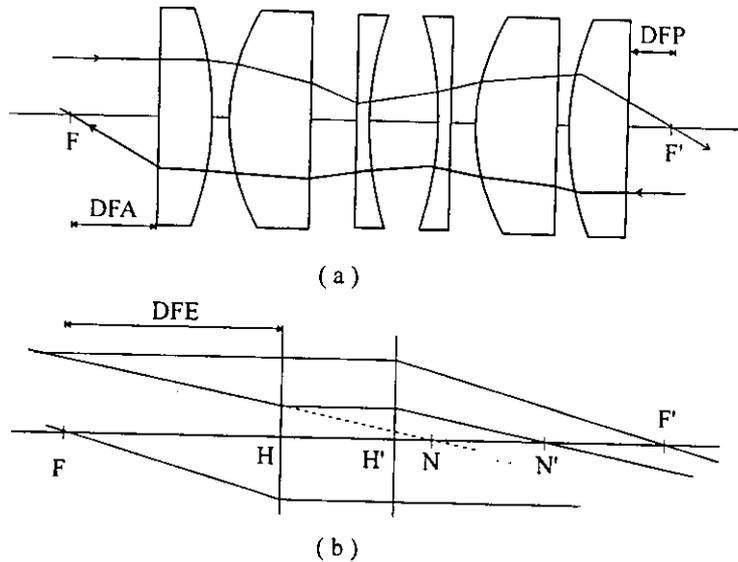


Figura 1.6. Puntos cardinales de un sistema óptico complejo. a) Sistema óptico (DFA y DFP son las distancias focales anterior y posterior, respectivamente). b) Puntos cardinales (DFE es la distancia focal efectiva).

1.3.2. Ojo Esquemático.

Allvar Gullstrand (1862-1930), quien efectuó varias mediciones de los distintos medios oculares, aplicó las ideas de los puntos cardinales al sistema óptico del ojo resultando en lo que se conoce como el ojo esquemático de Gullstrand [8][9][14]. Este contiene seis superficies refractoras, dos para la córnea y cuatro para la lente del cristalino, figura 1.7. Gullstrand fue nominado en 1910 y 1911 para el premio Nobel de Física. En 1911 el comité del premio Nobel de Física sugirió entregar a Gullstrand el premio por su trabajo en óptica geométrica. En el mismo año, el comité del premio Nobel de Fisiología y Medicina tuvo la misma idea y recomendó a Gullstrand para el premio Nobel en medicina por su trabajo del estudio de la anatomía del ojo y su relación con la formación de imágenes. Gullstrand declinó el Premio Nobel de Física para aceptar el Premio Nobel de Medicina en 1911.

En la tabla 1.1 se dan los detalles sobre las características del ojo esquemático desarrollado por Gullstrand [9][14]. En este modelo se ha supuesto que la superficie anterior y posterior de la córnea, así como las superficies de la lente del cristalino, son superficies esféricas que se encuentran centradas sobre el eje óptico. El ojo esquemático proporciona información sobre los índices de refracción del medio ocular, los radios de curvatura de las superficies refractivas y la posición de las superficies oculares.

	Sin acomodación	Máxima acomodación
Índice de Refracción		
Córnea		
Humor Acuoso y vítreo	1.376	1.376
Lente del cristalino	1.336	1.336
Lente central equivalente	1.386	1.386
Lente central equivalente	1.406	1.406
Posición (mm)		
Superficie anterior de la córnea	0	0
Superficie posterior de la córnea	+0.5	+0.5
Superficie anterior de la lente	+3.6	+3.2
Superficie anterior de la lente central equivalente	+4.146	+3.8725
Superficie posterior de la lente central equivalente	+6.565	+6.5275
Superficie posterior de la lente	+7.2	+7.2
Radios de curvatura (mm)		
Superficie anterior de la córnea	+7.7	+7.7
Superficie posterior de la córnea	+6.8	+6.8
Superficie anterior de la lente	+10.0	+5.33
Superficie anterior de la lente central equivalente	+7.911	+2.655
Superficie posterior de la lente central equivalente	-5.76	-2.655
Superficie posterior de la lente	-6.0	-5.33
Poder Refractor (D)		
Superficie anterior de la córnea	+48.83	+48.83
Superficie posterior de la córnea	-5.88	-5.88
Superficie anterior de la lente	+5.0	+9.375
Superficie anterior de la lente central equivalente	+2.53	+7.53
Superficie posterior de la lente central equivalente	+3.47	+7.53
Superficie posterior de la lente	+8.33	+9.375
Sistema corneal		
Potencia equivalente (D)	+43.05	+43.05
Posición del punto principal primario	-0.0496	-0.0496
Posición del punto principal secundario	-0.0506	-0.0506
Sistema de la lente		
Potencia equivalente (D)	+19.11	+33.06
Posición del punto principal primario	+5.678	+5.145
Posición del punto principal secundario	+5.808	+5.255
Sistema óptico del ojo completo		
Potencia equivalente (D)	+58.64	+70.57
Posición del punto principal primario	+1.348	+1.772
Posición del punto principal secundario	+1.602	+2.086
Posición del punto focal primario	-15.707	-12.397
Posición del punto focal secundario	+24.387	+21.016
Longitud focal primaria	-17.055	-14.169
Longitud focal secundaria	+22.785	+18.930
Posición del punto nodal primario	+7.08	+6.53
Posición del punto nodal secundario	+7.33	+6.85
Posición de la fovea	+23.9	+23.9
Posición del punto cercano (mm)	---	-102.3

Tabla 1.1. Ojo esquemático de Gullstrand.

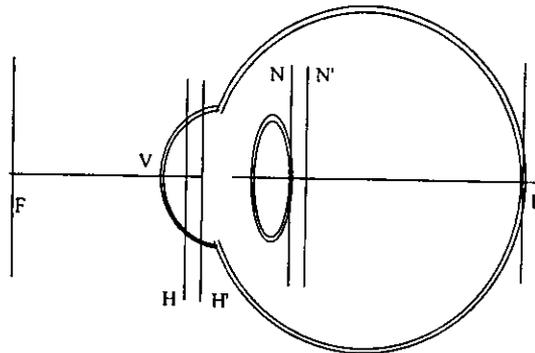


Figura 1.7. Puntos cardinales del ojo esquemático de Gullstrand. Los puntos principales H y H' están localizados a 1.384 mm y 1.602 mm del vértice de la córnea, respectivamente. Aquí, $FH=N'F'=17.055$ mm y $H'F'=FN=22.785$ mm. La razón $H'F'/FH$ es igual al índice de refracción del humor vítreo.

1.3.3. Ojo Reducido.

Una mayor simplificación del sistema óptico del ojo la proporciona el ojo reducido de Laurance [8][9][14] (tabla 1.2) en el cual sólo se considera una superficie refractora cuyo vértice coincide con el plano principal y cuyos puntos nodales caen en el centro de curvatura de la superficie, figura 1.8.

Distancia de la córnea a la parte frontal de la lente	3.6 mm
Espesor de la lente	3.6 mm
Radio de Curvatura de la Córnea	8 mm
Radio de Curvatura de la Superficie frontal de la lente	10 mm
Radio de Curvatura de la Superficie posterior de la lente	6 mm
Índices de refracción del Humor acuoso	1.333
Índices de refracción de la Lente	1.45
Índices de refracción del Humor vítreo	1.333

Tabla 1.2. Ojo reducido de Laurance.

La justificación de este modelo recae en el hecho de que los dos puntos principales se encuentran separados solo una fracción de milímetro y se superponen durante la acomodación; lo mismo sucede con los puntos nodales. En resumen, Laurance combinó los dos puntos principales y los dos puntos nodales en un punto principal y un punto nodal, respectivamente. Con este modelo, el tamaño de las imágenes sobre la retina son fáciles de determinar ya que el punto nodal se encuentra en el centro de curvatura de la superficie refractora.

Cabe mencionar que los datos proporcionados por estos modelos del ojo no son específicos de una persona en particular (no hay un ojo esquemático para cada persona en particular), sino más bien, son modelos geométricos que permiten el estudio de la formación de imágenes por el ojo de manera sencilla. Las superficies del ojo no son esféricas, más bien, distan mucho de ello, los índices de refracción proporcionados son valores promedio y no se considera que la lente del cristalino tiene

un índice de refracción que varía con la altura respecto al eje y profundidad. Sin embargo, son muy útiles para comprender los principios básicos de la formación de imágenes por el ojo, además de que se emplean para determinar el poder refractor del ojo.

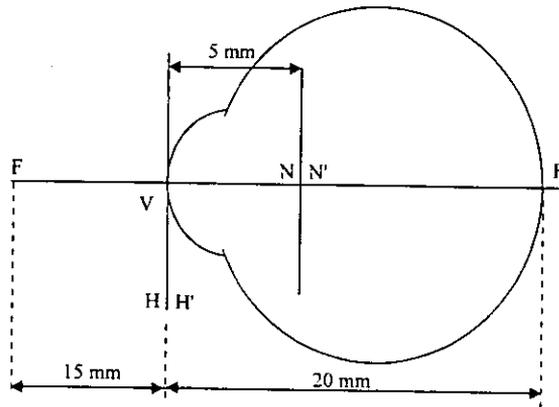


Figura 1.8. Ojo reducido de Laurance.

1.4. La Óptica de los Errores Refractoros del Ojo.

Actualmente, se describe la óptica de los errores refractoros del ojo suponiendo, de manera simple, que la superficie corneal es una superficie esférica para un ojo normal o una superficie toroidal para un ojo con astigmatismo. En la mayoría de las aplicaciones médicas lo que se calcula es el poder refractor del ojo, que está relacionado con la curvatura corneal, sobre meridianos particulares de la superficie. Asimismo, los cálculos que se desarrollan para conocer y corregir estos errores refractivos, requieren del desarrollo de modelos ópticos del ojo adecuados, como el ojo esquemático o el ojo reducido.

Cuando sobre un ojo fisiológicamente normal inciden rayos paralelos provenientes de un objeto en infinito y convergen sobre la retina en el foco principal y, además, no se ejerce acomodación, se dice que el ojo se encuentra en un estado emétrope, figura 1.9.a. Para que este estado ideal del ojo se mantenga, es necesario que exista una correlación entre la longitud del globo ocular, la forma de la superficie corneal y la forma de la lente del cristalino. Aunque la emetropía es un estado ópticamente normal, no lo es desde el punto de vista biológico donde el estado normal del ojo es la ametropía, en la cual rayos paralelos de luz no son enfocados exactamente sobre la retina cuando el ojo está sin acomodación. Existen tres defectos principales que pueden alterar el poder refractor del ojo; éstos son la hipermetropía, la miopía y el astigmatismo[8][9][28].

En la hipermetropía, comúnmente llamada vista lejana debido a que el paciente puede ver claramente objetos lejanos y no así objetos cercanos, rayos paralelos provenientes de un objeto en infinito se enfocan atrás de la retina, figura 1.9.c. En este caso, el poder refractor del ojo no es lo suficientemente grande o el globo ocular es muy corto. Este defecto puede ser corregido mediante acomodación, mientras la habilidad del ojo así lo permita, como en un ojo joven. Un ejemplo de un

ojo hipermetrope (miope) que no puede ser corregido mediante acomodación es cuando sufre de afaquia, que se da cuando la lente del cristalino es removida del ojo en cirugía de cataratas.

En la miopía, también llamada vista cercana debido a que el paciente puede ver con nitidez objetos cercanos y no puede observar con claridad objetos lejanos, rayos paralelos provenientes de un objeto en infinito se enfocan antes de la retina, figura 1.9.b. Este estado se debe generalmente a que el globo ocular es muy largo o existe un poder refractor muy grande. Este estado del ojo no puede ser corregido con acomodación pues este proceso reduce la distancia focal efectiva del ojo.

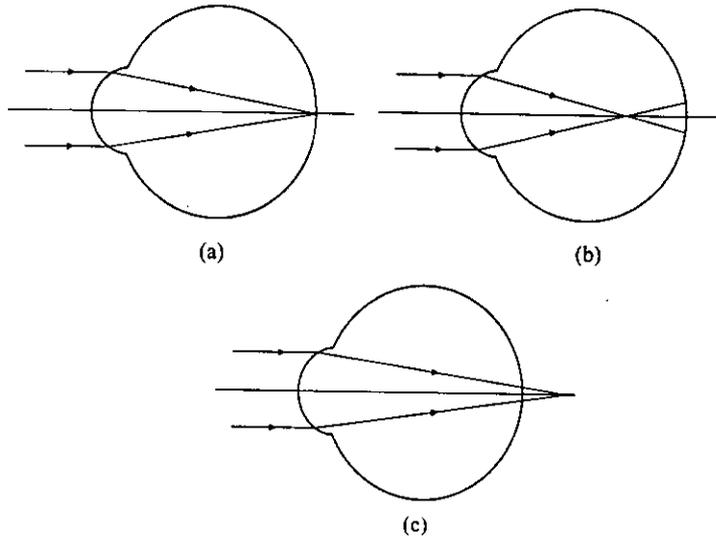


Figura 1.9. a) Emotropía: Un objeto en infinito es enfocado sobre la retina. b) Miopía: Un objeto en infinito es enfocado frente a la retina. c) Hipermetropía: Un objeto lejano es enfocado atrás de la retina.

El astigmatismo es una diferencia en poder refractor de un meridiano a otro. En general, se debe a la falta de simetría de la superficie corneal. El astigmatismo es regular si la superficie corneal se supone tiene forma toroidal y sus meridianos de máxima y mínima curvatura y se encuentran separados 90° . Si, por otra parte, no se encuentran separados 90° , la curvatura corneal no será axialmente simétrica y entonces el astigmatismo es irregular. Esta asimetría puede deberse principalmente a lesiones sobre la superficie corneal, enfermedades de la córnea que dejan cicatrices, queratocono y a ciertas anomalías congénitas [1][25].

El astigmatismo no existe por sí sólo, sino más bien está fuertemente asociado con la hipermetropía y la miopía dependiendo de que si el foco astigmático se encuentra atrás o delante de la retina. Si el meridiano de curvatura de la córnea de mayor potencia es vertical o se encuentra dentro de los 30° medidos respecto a la vertical, se dice que el astigmatismo es *con la regla*. Si el meridiano de curvatura de mayor potencia es horizontal o mayor a 30° respecto a la vertical, el astigmatismo es *contra la regla*.

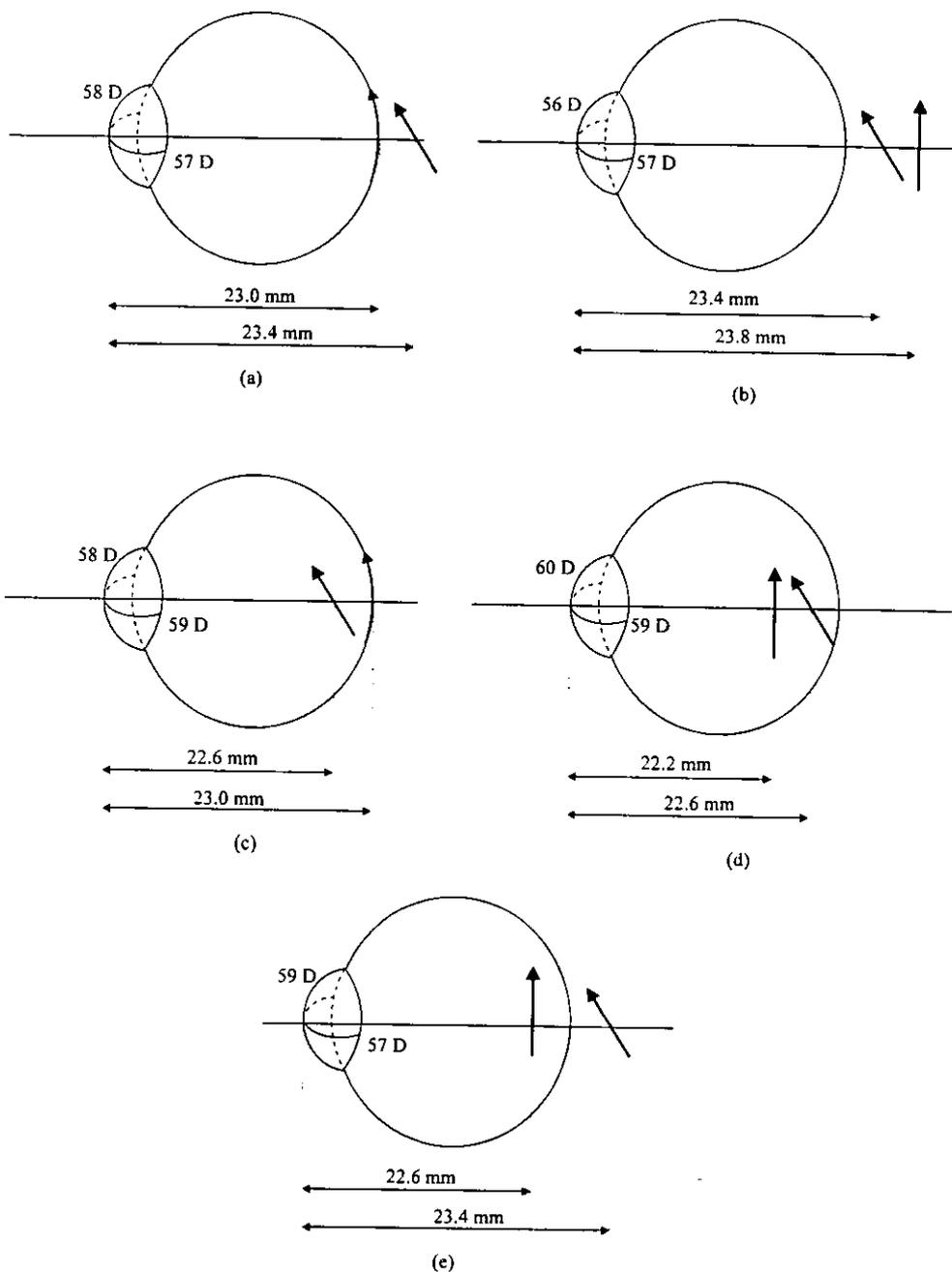


Figura 1.10. Astigmatismo. a) hipermetrope simple con la regla. b) hipermetrope compuesto contra la regla. c) miope simple contra la regla. d) miope compuesto con la regla. e) mezclado con la regla.

En el astigmatismo hipermetrope simple, el meridiano de potencia máxima es emetrópico y forma una imagen lineal de un punto sobre la retina. Si por ejemplo, este meridiano se encuentra a 90° , el astigmatismo es *con la regla* y se enfoca verticalmente sobre la retina, figura 1.10.a. Por otra parte, en el astigmatismo hipermetrope compuesto, ambos meridianos de potencia máxima y mínima son hipermetropes, figura 1.10.b. En el astigmatismo miope simple, el ojo es emetrópico en un meridiano. Por ejemplo, en la figura 1.10.c se muestra un ojo que presenta astigmatismo miope simple *contra la regla*. En el astigmatismo miope compuesto, ambos meridianos tienen potencia grande y en consecuencia las imágenes caerán frente a la retina. La figura 1.10.d muestra un caso de astigmatismo miope compuesto *con la regla*. En el astigmatismo mezclado, se tiene una componente miope y la otra hipermetrope; un ejemplo de astigmatismo mezclado *con la regla* se muestra en la figura 1.10.e. En la figura 1.10 se ha calculado la distancia focal correspondiente a cada meridiano usando la ecuación paraxial para refracción en una superficie esférica [28]

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

donde n_1 es el índice de refracción del medio donde se encuentra inmersa la superficie esférica, n_2 será el índice de refracción de la superficie corneal (que en este caso corresponde al valor dado en la tabla 1.2 correspondiente al modelo del ojo reducido), s_o es la distancia objeto, s_i es la distancia imagen y r es el radio de curvatura de la superficie anterior de la córnea. Luego si el objeto se encuentra en infinito, la distancia focal de la superficie corneal será

$$f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad r = \frac{n_2}{P}$$

donde P es el poder dióptrico y está dado por

$$P = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

1.5. Corrección del Estado Refractor del Ojo.

Basados en el hecho de que el poder refractor del ojo está determinado principalmente por la curvatura corneal y empleando principalmente el modelo reducido del ojo, se han podido corregir los casos más simples de los errores refractores del ojo mediante el uso de anteojos. Los anteojos no son más que lentes que se colocan frente al sistema óptico del ojo, formando así un sistema óptico más complicado. Las lentes de los anteojos se diseñan en tal forma que sus superficies son esféricas cuando no hay astigmatismo y toroidales o esferocilíndricas en presencia de astigmatismo [8][9].

Para estudiar qué tipo de lente es necesaria para corregir las ametropías, es necesario definir el punto lejano del sistema óptico del ojo. Para un ojo sin acomodación, se tiene que el punto objeto cuya imagen cae sobre la retina, es el punto lejano. En un ojo miope, el punto focal cae dentro del humor vítreo, por lo que para compensar este poder excesivo del ojo, los objetos deben traerse más cerca. Un objeto cercano envía luz divergente hacia el ojo, el cual va empujando la imagen hacia la retina. Cuando el grado de divergencia se empata con el poder excesivo del ojo, la imagen cae sobre

la retina; luego, la posición de este objeto constituye el punto lejano del ojo miope, figura 1.11.a. Como el punto lejano cae frente al ojo, para hacer que el ojo distinga objetos distantes, es necesario que éstos parezcan estar en el punto lejano en forma tal que alteren la luz incidente para que su divergencia sea tal que como si provinieran del punto lejano. Una lente esférica negativa cuyo punto focal coincida con el punto lejano del ojo miope corregirá este defecto.

En el caso de un ojo hipermetrope, el punto lejano es un punto objeto virtual que cae atrás del ojo. Como el ojo hipermetrope no tiene un gran poder refractor, luz colimada incidente parecerá enfocarse atrás de la retina. Con acomodación, el ojo hipermetrope puede ver claramente a lo lejos, lo que no puede ver bien, son los objetos cercanos. Para llevar esta imagen hacia la retina, la luz incidente deberá ser convergente o parezca enfocarse atrás del ojo, figura 1.11.b. Entonces, para que el ojo hipermetrope pueda ver claramente sin acomodación, es necesario colocar una lente positiva cuya distancia focal coincida con el punto lejano del ojo; así la imagen de un objeto distante se enfocará sobre la retina.

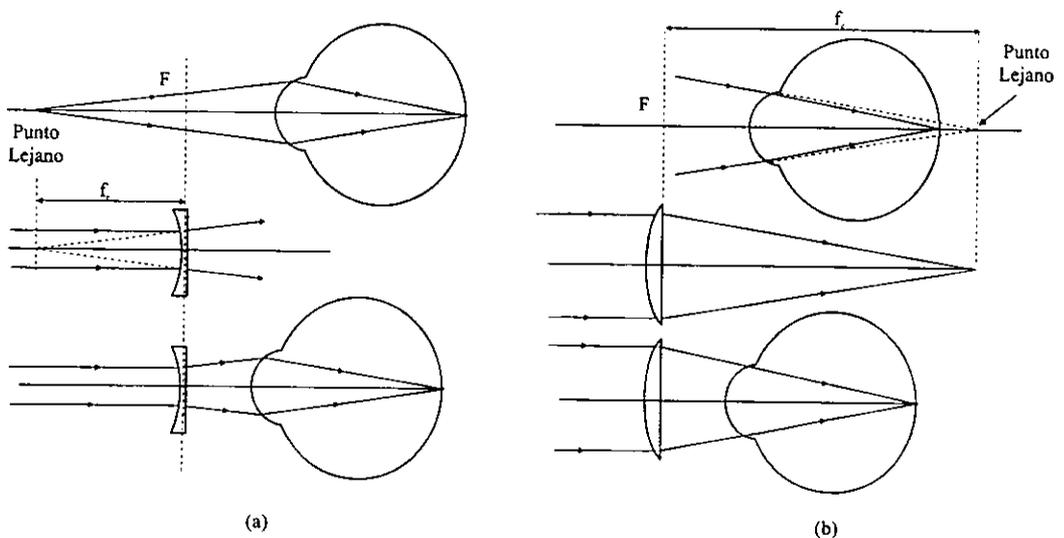


Figura 1.11 Corrección del estado refractor del ojo usando anteojos. a) Miopía. b) Hipermetropía.

Como el ojo astigmático regular tiene superficies refractivas de forma toroidal cuyos radios de curvatura son perpendiculares; para corregir este defecto se emplean lentes cilíndricas o toroidales en combinación con lentes esféricas, llamadas lentes esferocilíndricas. Para astigmatismo hipermetrope simple, la corrección puede lograrse con una lente cilíndrica positiva. Para astigmatismo hipermetrope compuesto, la corrección se efectúa usando una lente esférica positiva combinada con una lente cilíndrica positiva. Para astigmatismo miope simple, se usa una lente cilíndrica negativa. En el astigmatismo miope compuesto, una lente esférica y otra cilíndrica, ambas negativas, corregirán esta situación. Para astigmatismo compuesto una debe ser positiva y otra negativa.

Para un ojo con astigmatismo irregular, se tiene que la córnea es asimétrica, y como el diseño de los anteojos está basado en superficies esféricas o toroidales, éstas no pueden corregir apropiadamente esta condición asimétrica de la córnea, por ejemplo el queratocono. Una solución ideal para el caso de córneas irregulares y astigmatismo irregular es el uso de lentes de contacto rígidos que hacen que la superficie corneal tenga una forma esférica, además de que se mueven cuando el ojo lo hace, de tal manera que siempre estarán centradas.

1.6. Técnicas Quirúrgicas Refractivas.

Cuando los errores refractivos son tan pronunciados que es imposible corregirlos mediante el uso de anteojos o lentes de contacto, se hacen necesarias otras técnicas que permitan la corrección del sistema óptico del ojo. La cirugía refractiva intenta corregir estos defectos del ojo de manera permanente. Aunque han sido desarrolladas muchas técnicas tienen muchos inconvenientes y en consecuencia la corrección refractiva es inestable. Existen muchas técnicas quirúrgico refractivas, pero sólo nos interesan las que tienen que ver con la modificación de la superficie de la córnea, principal elemento refractor del ojo. Dentro de las más usadas se encuentran [1]:

i) La *queratotomía radial o astigmática (KR, KA)*, en la cual el procedimiento consiste en hacer incisiones desde la zona intermedia hacia el limbo. Se hacen de cuatro a ocho incisiones dependiendo de la corrección que se necesite. Aquí, la superficie de la córnea se hace más abombada en la periferia y más plana en el centro, cambiando en consecuencia su curvatura. Esta técnica es empleada para la corrección de miopía y astigmatismo. Cuando no hay astigmatismo las incisiones son simétricas; de otra forma, se hacen más incisiones cercanas al eje de menor potencia.

ii) *Epiqueratoplastia*. Aquí el procedimiento consiste en retirar un disco de la superficie corneal el cual tiene un diámetro de aproximadamente entre 7 y 8 mm. En el lugar que queda, se sutura otro disco lenticular proveniente de algún donador, obteniendo como resultado un cambio en la topografía corneal dependiendo de la forma en que se efectúe la sutura.

iii) La *Queratomileusis (KM)*, consiste en remover la parte central de la córnea mediante trepanación y congelamiento. Después de un remodelaje mecánico, se regresa el tejido corneal a su lugar y se sutura. Esta técnica tiene tres modalidades dependiendo del defecto a corregir: la queratomileusis miópica, en la cual se retira tejido del centro del disco retirado para darle forma de una lenticula cóncava que cuando es suturada en la córnea, hace que ésta sea más plana incrementando la longitud focal del ojo. En la queratomileusis hipermetrópica, al tejido retirado se le da forma de una lenticula convexa la cual produce que la córnea se haga más aguda reduciendo así la longitud focal del ojo. Y en la queratomileusis in situ, el tejido removido después de ser remodelado se vuelve a colocar en su lugar sin llevar a cabo el congelamiento del tejido.

En todas estas técnicas, el procedimiento recae principalmente en la habilidad del cirujano, las propiedades mecánicas de la córnea y de la evolución favorable que pueda tener la herida, por lo que resulta en una corrección refractiva inestable. Sin embargo, la cirugía fotorefractiva con láser de excímero podría ayudar a resolver algunos problemas del moldeo de la superficie corneal. Dependiendo de la mezcla de excimeros, se pueden emplear diferentes longitudes de onda que proporcionen una mayor o menor eficiencia en el proceso de ablación del tejido corneal. La longitud de onda debe cumplir dos condiciones, primeramente deberá ser totalmente absorbida por la córnea a fin de preservar las regiones internas del ojo, en especial la retina; y segundo, que no produzca

mutaciones. La longitud de onda que cumple con estas condiciones es de 193 nm que la proporciona el láser de *ArF*, que emite radiación en el ultravioleta.

Las técnicas fotorefractivas con láser de excímero más usadas para modelar la forma de la superficie corneal [1][24] son:

i) La *Queratectomía fotorefractiva (PRK)*, que usa el láser de excímero para corregir miopía, astigmatismo e hipermetropía, removiendo una pequeña cantidad de tejido de la superficie corneal, donde previamente se ha retirado la superficie epitelial, cambiando así la curvatura de la superficie corneal.

ii) *Queratomielesis in situ con láser (LASIK)*. En este método se usa un láser excímero para corregir miopía e hipermetropía removiendo una pequeña cantidad de tejido debajo de una capa delgada de tejido corneal. Una vez removido el tejido, la pequeña capa de tejido corneal se regresa al lugar donde se llevo a cabo la fotoablación. Este procedimiento es esencialmente una combinación de dos procedimientos quirúrgicos refractivos, la queratectomía fotorefractiva (PRK) y la queratoplastia lamelar automatizada (AKL).

Los efectos colaterales que surgen cuando se tiene una cirugía refractiva son variados y dependen del tipo de cirugía empleada, pero los más generales e importantes desde el punto de vista óptico son: la diplopia o doble visión, una presbiopía prematura o pérdida de la habilidad de lectura, una sobre corrección o inducción de hipermetropía, una falta de corrección o miopía o astigmatismo residual y la inducción de astigmatismo irregular.

1.7. Conclusión.

Se encuentra que el ojo humano es un sistema óptico bastante complejo sobre el cual se han construido modelos ópticos para así poder estudiar tanto la formación de imágenes como sus errores refractivos. Ahora bien, por ser la córnea el principal elemento refractor del ojo, cualquier corrección deberá realizarse sobre esta misma. Si los errores refractivos no son grandes es posible la corrección mediante el uso de anteojos o lentes de contacto; pero cuando los errores son mayores, se tiene que hacer uso de técnicas quirúrgico refractivas para su corrección. Cuando los errores refractivos son grandes, conviene la cirugía por razones estéticas. Las cirugías no pueden hacer grandes cambios, pero reducen el error refractivo haciendo posible usar lentes delgadas en vez de los "odiosos" de "fondo de botella", "gruesos" o de "gran potencia". El éxito de las cirugías refractivas recae principalmente en el conocimiento con precisión de la forma de toda la superficie anterior de la córnea antes, durante y después de la operación, por lo que se hace importante el estudiar los rasgos más importante sobre las principales técnicas de medición de la topografía corneal. Como veremos en el capítulo siguiente, las técnicas empleadas en la actualidad para la obtención de la topografía corneal suponen que la córnea es una superficie esférica, lo cual no es completamente cierto.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE LA SUPERFICIE CORNEAL

Cualquier cambio en la curvatura de la superficie anterior de la córnea, se refleja instantáneamente en un cambio en el poder refractor del ojo; esto es útil para poder corregir los errores refractivos del ojo ya sea diseñando lentes de contacto o sometiendo a la córnea a una cirugía refractiva. Cualquiera que sea la técnica para modificar la superficie corneal, es necesario conocer con precisión su topografía. Desde luego, muchos factores deben ser tomados en cuenta para el diseño de un sistema que mida la topografía corneal; algunos de estos factores pueden ser que la superficie corneal es convexa y asimétricamente esférica; el ojo se mueve constantemente y en algunas situaciones no refleja adecuadamente.

Aquí describiremos las características principales de algunos mecanismos empleados para la medición de la topografía corneal y cuyos principios básicos de operación siguen siendo utilizados por los instrumentos actuales.

2.1. El Queratómetro.

El queratómetro inventado por Helmholtz hace mediciones del radio de curvatura sobre una área relativamente pequeña (aproximadamente 3 mm de diámetro) de la superficie anterior de la córnea. Aquí se supone que la superficie corneal se puede aproximar por una superficie esférica o por una superficie toroidal, ambas convexas y perfectamente reflectoras, debido principalmente a lo pequeño del área que se mide, sobre todo la parte central de la córnea donde se supone que la superficie corneal es más esférica. El diseño óptico del queratómetro permite la medición del tamaño de la imagen reflejada y por tanto de la curvatura de la superficie corneal [15][16].

2.1.1. Principios Básicos de Operación.

Como hemos discutido ampliamente en el capítulo anterior, la córnea es una superficie esférica asimétrica convexa, pero que en su parte central se le puede aproximar por una superficie esférica. En la figura 2.1 podemos observar cómo es la formación de imágenes por una superficie esférica convexa. La relación entre las posiciones del objeto s_o y la imagen s_i , así como el radio de curvatura de la superficie r , están relacionadas por medio de la fórmula de los espejos en la aproximación paraxial [28],

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (2.1)$$

donde se aplica igualmente a un espejo cóncavo ($r < 0$, $f > 0$) o a un espejo convexo ($r > 0$, $f < 0$); aquí f es el foco del espejo.

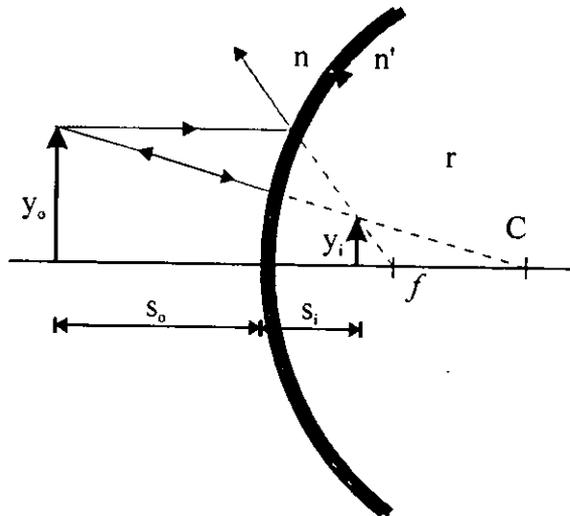


Figura 2.1. Formación de imágenes por una superficie esférica convexa.

Por otra parte, tenemos que la magnificación transversal está dada por

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = - \frac{s_i}{s_o} \quad (2.2)$$

Despejando s_i de (2.2) y sustituyendo en (2.1), obtenemos

$$r = \frac{2s_o y_i}{y_o - y_i} \quad (2.3)$$

el radio de curvatura de la superficie como función del tamaño del objeto y del tamaño de la imagen. Esta expresión es en la que se basan los queratómetros para la medición de la curvatura de la parte central de la superficie anterior de la córnea, en los cuales se asume que la distancia de la superficie al objeto es siempre constante. Aquí se conoce el tamaño del objeto y lo único que se tiene que medir con el instrumento es el tamaño de la imagen, que aunque es muy pequeña puede amplificarse ópticamente. Sin embargo, el ojo se está moviendo continuamente lo cual produce que las mediciones sean imprecisas. Helmholtz resolvió este problema del movimiento ocular usando un dispositivo para duplicar la imagen. Cuando la imagen a ser medida se duplica y se realizan las mediciones comparando las dos imágenes, los pequeños movimientos del ojo no son importantes debido a que ambas imágenes se mueven en conjunto. Las mediciones de la curvatura se hacen a tamaño del objeto constante o a tamaño de la imagen constante.

En muchos de los casos, a la superficie corneal no es posible considerarla completamente esférica, sino más bien que tenga una forma toroidal por lo que el radio de curvatura variará en varios de sus meridianos. En consecuencia, para que el queratómetro sea útil, deberá ser posible medir el radio de curvatura en distintos meridianos. Para esto, el instrumento debe ser diseñado en forma tal que el objeto pueda rotarse respecto al eje de la córnea. Los objetos usados en los queratómetros son llamados *miras*.

Ahora bien, los queratómetros son diseñados en tal forma que proporcionan, más que la curvatura de un meridiano de la superficie corneal, el poder dióptrico o refractivo P , el cual asume que se proporcione un valor del índice de refracción de la córnea n' , el cual puede ser el valor promedio del ojo esquemático o reducido por tratarse de una sola superficie refractora; luego, el poder dióptrico está dado por

$$P = \frac{n' - n}{r} \quad (2.4)$$

donde n es el índice de refracción del aire y r es el radio de curvatura de la superficie corneal.

2.1.2. El Oftalmómetro de Javal-Schiötz.

La operación de este queratómetro está basada en el tamaño del objeto variable y el tamaño constante de la imagen; emplea un dispositivo de doble imagen fija. En la figura 2.2, se muestra un diagrama del sistema óptico del instrumento. En este sistema, el objeto consiste de dos miras (I y II) iluminadas con lámparas que se colocan atrás de ellas. Las dos miras se mueven simétricamente una

hacia la otra respecto al eje del instrumento. Debido a que las dos miras forman el objeto del sistema óptico, se tiene un tamaño variable del objeto, este es, la distancia entre las dos miras.

La imagen del objeto es reflejada por la córnea del paciente y aquella se convierte en el objeto del resto del sistema óptico. Luego el tamaño de la imagen dependerá, de acuerdo a la ec. (2.3), del radio de curvatura de la córnea y del tamaño variable del objeto, esto es, de la distancia entre las dos miras. En la figura 2.2 se observa cómo se duplica la imagen usando un prisma Wollaston, el cual produce las dos imágenes por birrefringencia.

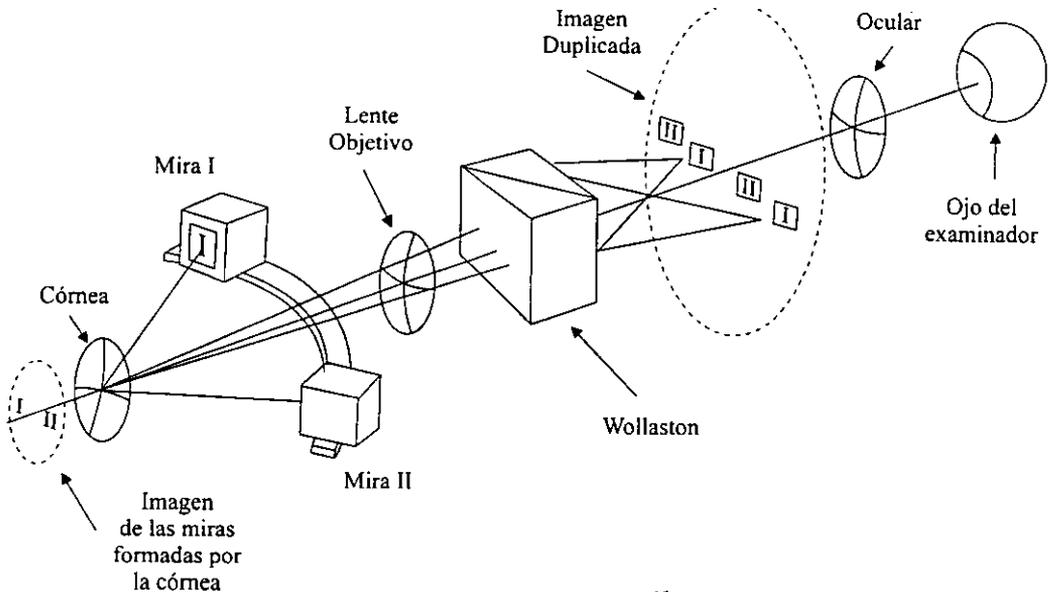


Figura 2.2. Sistema óptico del oftalmómetro de Javal-Schiötz.

La figura 2.3.a muestra las imágenes vistas por el paciente, la mira quebrada de la izquierda es iluminada con luz verde mientras que la de la rectangular de la derecha con luz roja. La figura 2.3.b muestra las imágenes duplicadas de las miras vistas por el examinador; notese cómo estas imágenes se encuentran traslapadas. Cuando se efectúan las mediciones, sólo se emplean las imágenes centrales. Como la separación de las miras cambia, la separación de estas imágenes también cambia y cuando las dos imágenes centrales se encuentran como se muestra en la figura 2.3.b, entonces las escalas asociadas a la separación de las miras indicarán el radio de curvatura corneal y el poder dióptrico de la córnea.

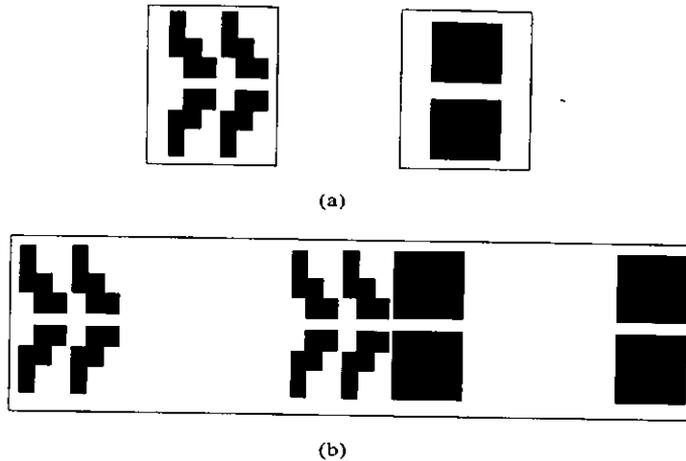


Figura 2.3. a) Imágenes de las miras vistas por el paciente. b) Imágenes de las miras duplicadas, vistas por el examinador.

2.1.3. El Queratómetro (Bausch & Lomb Keratometer).

Este instrumento utiliza los principios de tamaño del objeto constante y tamaño variable de la imagen; la figura 2.4 muestra el sistema óptico simplificado del instrumento. Una lámpara ilumina la mira por medio de un espejo diagonal. El tamaño de la imagen formada por la superficie de la córnea de esta mira será función del radio de curvatura de la córnea. La imagen producida será pues el objeto del resto del sistema óptico. Más allá del diafragma hay dos prismas que duplican cada uno la imagen de la mira. Los prismas se pueden mover independientemente de forma paralela al eje central del instrumento. La luz que pasa a la derecha (izquierda) del diafragma incidirá en el prisma derecho (izquierdo, respectivamente) produciendo ambos la duplicación de la imagen. La luz que pasa a través del orificio superior e inferior del diafragma no pasa a través de ningún prisma; sin embargo, se produce una imagen sobre el eje central del instrumento; estas aberturas duplicarán la imagen central si el sistema no se encuentra alineado adecuadamente.

La primera visión que tiene el observador de esta mira, antes de la alineación del instrumento, se muestra en la figura 2.5.a. Nótese cómo la imagen central se encuentra duplicada, indicando que el instrumento no se encuentra perfectamente alineado. La figura 2.5.b muestra cómo se ve la imagen cuando el sistema está enfocado y se mide sobre un meridiano horizontal. Nótese que la imagen central no se encuentra duplicada y los signos positivos de la imagen central y de la imagen izquierda coinciden debido a que se efectuó un ajuste horizontal. Mediante un ajuste vertical, es posible hacer coincidir los signos menos de la imagen central y de la imagen superior para así poder realizar mediciones en ese meridiano.

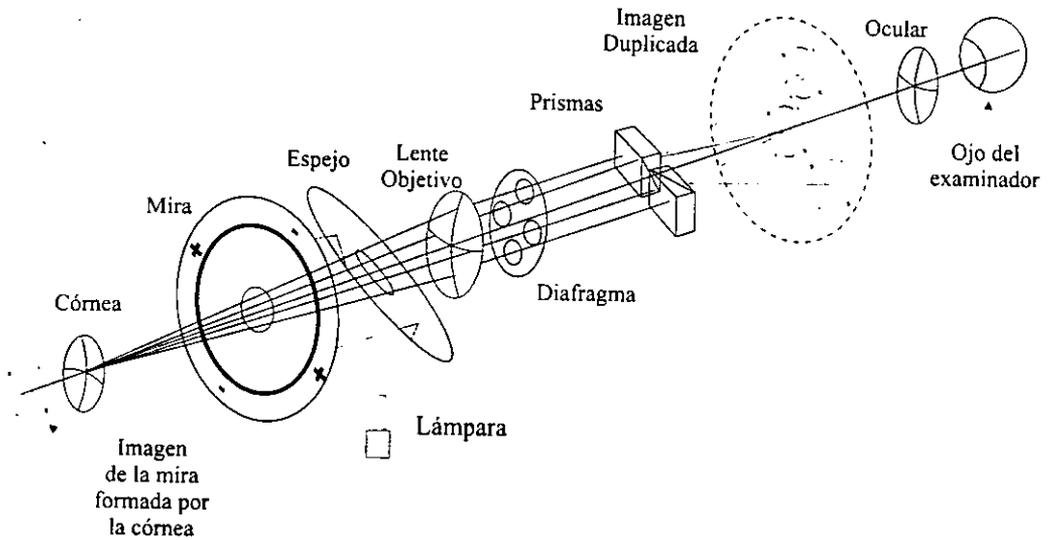


Figura 2.4. Sistema óptico de queratómetro (Keratometer).

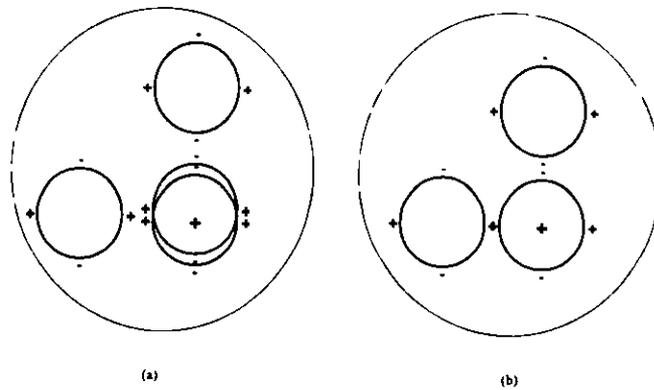


Figura 2.5. a) Imágenes de las miras vistas por el examinador antes de la alineación. b) Imágenes de las miras cuando se efectúa la medición de un meridiano.

Con el método de duplicación de esta técnica, es posible medir la potencia de una córnea con astigmatismo regular sin tener que rotar ninguna porción del instrumento cuando se realiza la medición. El dispositivo de duplicación también se mueve paralelo al eje central del instrumento de tal forma que la separación pueda variarse.

Con los queratómetros se puede medir sólo la parte central de la superficie corneal, dentro de un diámetro de hasta 3 mm, con una precisión de ± 0.25 D y una reproducibilidad de los datos de ± 0.25 D [19]. Asimismo, las mediciones se efectúan en planos meridionales.

2.2. El Queratoscopio.

La fotoqueratoscopia fue desarrollada en 1893 por A. Gullstrand [17], quien empleó un disco de Plácido como objeto, el cual consiste de una serie de anillos concéntricos blancos y negros alternados que se colocan sobre una pantalla plana. Cuando esta pantalla se coloca frente al ojo, los anillos son reflejados por la superficie corneal; aquí, la posición, el tamaño, el espaciamiento de los anillos en la imagen, así como la relación entre los tamaños del objeto y de la imagen medida, determinan la forma de la superficie de la córnea, figura 2.6. Las imágenes se observan a través de un agujero que se encuentra sobre la parte central de la pantalla; es también aquí donde se ajusta un sistema fotográfico para capturar las imágenes de los anillos sobre una película fotográfica. Si la superficie corneal fuera esférica, la imagen observada de los anillos del disco de Plácido aparecerán circulares e igualmente espaciados. Si por otra parte la córnea es astigmática, los anillos serán óvalos y su espaciamiento variará en distintos ejes. Esto último, sobre la forma de los anillos, se debe principalmente a que Gullstrand basó su diseño en la suposición de que la superficie corneal es esférica.

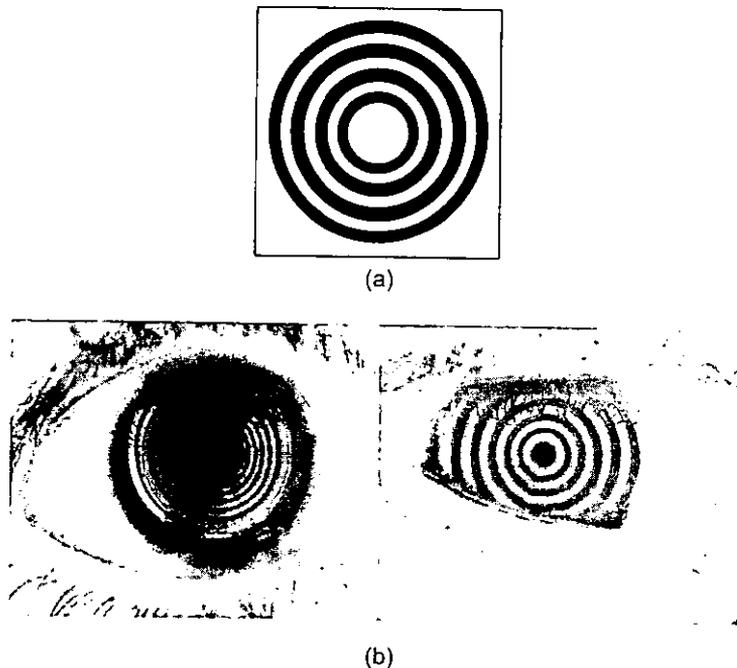


Figura 2.6. a) Disco de Plácido. b) Imagen reflejada por la superficie corneal del disco de Plácido.

La pantalla plana de Gullstrand permaneció en el desarrollo de varios fotoqueratoscopios subsecuentes. Sin embargo, existen configuraciones de las pantallas esféricas, cónicas y cilíndricas [29][30] que intentan cubrir toda la superficie corneal, pero que siguen basándose en la teoría desarrollada por Gullstrand. Estas nuevas configuraciones se basan sobre los inconvenientes que se tienen al considerar el objeto plano en términos de aberración en la imagen. Por otra parte, se muestra teóricamente que un objeto elíptico es la configuración óptima para la pantalla en el caso de una superficie esférica [5][6][18]. No obstante, tomando en cuenta que la superficie corneal es esférica, por simplicidad se deduce que un objeto cilíndrico es una buena aproximación para lograr que la imagen obtenida sea plana y pueda capturarse sobre una película fotográfica para que a partir de ésta se obtenga la información necesaria para la reconstrucción de la superficie corneal. El Hage [31][32] introdujo en el fotoqueratoscopio un sistema telecéntrico [33] (un sistema óptico cuya pupila de salida se encuentra en infinito es un sistema telecéntrico en el espacio imagen); en su sistema se usa como objeto una pantalla cilíndrica. Con éste nuevo instrumento es posible calcular la forma de la superficie corneal sin hacer ninguna suposición previa de su forma.

2.2.1. El Método de Gullstrand.

Durante una medición oftalmométrica, el radio de curvatura real del algún punto de la córnea no se puede encontrar directamente de manera exacta; sin embargo, este radio de curvatura se puede aproximar por la distancia entre el punto de intersección entre las normales que pasan por dos puntos sucesivos sobre la superficie corneal, y la superficie de la córnea. Mientras más pequeña sea la zona explorada, mayor será la precisión en la aproximación. Este punto de intersección está aproximadamente en el punto medio de los centros de curvatura asociados a las dos normales de la superficie, ρ_1 y ρ_2 en la figura 2.7.

Con relación a la figura 2.7, sea $I'OH$ una porción de la curva, las normales a la curva en los puntos I y H se intersectan en los puntos P_1 y P_2 y forman ángulos β_1 y β_2 , respectivamente, con las líneas paralelas al eje óptico del oftalmómetro OQ . Si ahora permitimos que los puntos I y H se aproximen uno al otro en forma tal que las variaciones en curvatura de los puntos definidos entre ellos puedan ser despreciados, $[IP_1]$ y $[HP_2]$, representarán curvaturas promedio cuyos radios de curvatura los expresamos por ρ_1 y ρ_2 , respectivamente. De la figura 2.7, tenemos

$$\left. \begin{aligned} HE &= HP_2 \text{ Sen } \beta_2 \\ IC &= IP_1 \text{ Sen } \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

haciendo

$$HP_2 = \rho_2 \approx IP_1,$$

$$HE - IC = HD = y_2 - y_1$$

tenemos que (2.5) conduce a

$$y_2 - y_1 \cong \rho_2 (\text{Sen } \beta_2 - \text{Sen } \beta_1)$$

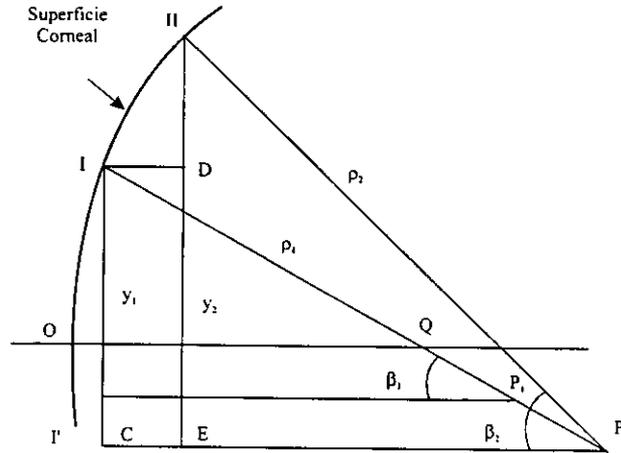


Figura 2.7. Cálculo del radio de curvatura aproximado entre dos puntos sucesivos de la superficie corneal.

En general, para cualquier par de puntos consecutivos tenemos que el radio de curvatura del n -ésimo punto está dado a través de

$$\rho_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\text{Sen}\beta - \text{Sen}\beta_{n-1}} \quad (2.6)$$

Esta ecuación es válida para puntos que caen infinitamente muy cerca uno del otro; para distancias mayores entre dos puntos consecutivos, ésta es sólo una aproximación. Para obtener el radio de curvatura, los valores de y y β se determinan experimentalmente como sigue: De la figura 2.8, sea un objeto AF cuya imagen reflejada por la superficie corneal debe medirse, y sea AD el eje extendido del objetivo fotográfico. La imagen reflejada del punto A parecerá provenir de la dirección AD y la imagen reflejada de F parecerá provenir de la línea AC . Luego, el tamaño de la imagen reflejada, que es medida sobre la placa fotográfica, es la distancia y , que es la perpendicular desde el punto C a la línea AD . Esta suposición de Gullstrand considera que la mira se encuentra muy alejada de la superficie corneal. De la figura 2.8, tenemos que $\beta = \angle CDA$ y $\alpha = \angle CAD$, en consecuencia

$$\angle ECA = \alpha + \beta$$

y si BC es paralela a AD , resulta

$$\angle FCB = 2\beta + \alpha$$

luego, tenemos

$$\text{Tan}(2\beta + \alpha) = \frac{FA - BA}{BC}$$

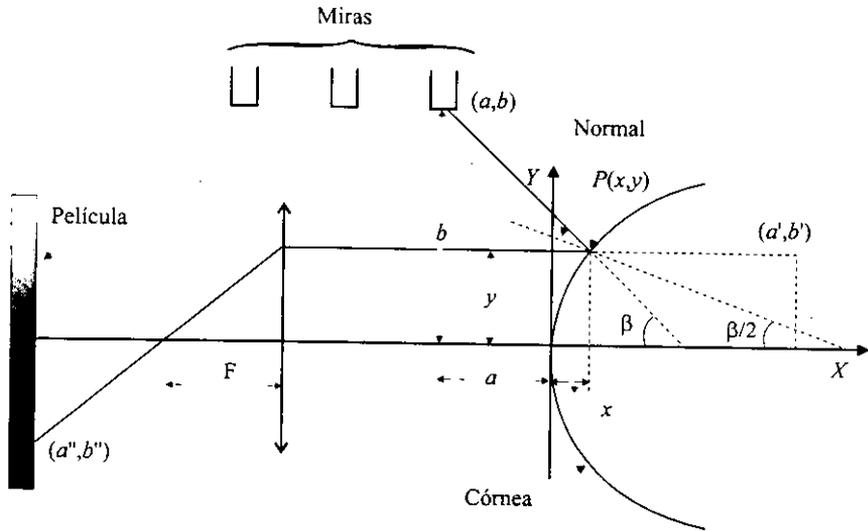


Figura 2.9. Mediciones fotoqueratóscópicas de la curvatura con el método de El Hage.

$$Y - y = -\tan(\beta/2) (X - x).$$

Por otra parte, la pendiente de la normal se escribe como

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\tan\beta/2.$$

De la figura 2.9 también tenemos que

$$\tan\beta = \frac{b - y}{a - x}$$

donde (a, b) representan la posición de uno de los anillos de la mira cilíndrica. Como

$$\tan\beta = \frac{2 \tan\beta/2}{1 - \tan^2\beta/2}$$

podemos escribir

$$\frac{b - y}{a - x} = \frac{2 \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right)}{1 - \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right)^2}$$

⇒

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{a-x}{b-y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$$

por lo tanto, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a-x}{b-y}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a-x}{b-y}\right)^2 + 1} \quad (2.8)$$

que es una ecuación general que representa la forma de cualquier superficie corneal. La solución de esta ecuación diferencial se puede obtener si se pueden encontrar $a = a(y)$ y $b = b(y)$, es decir, la posición de los anillos del queratoscopio en función de sus imágenes. Por construcción, se obtiene la posición de los anillos del queratoscopio a_i y mediante medición directa sobre la película fotográfica se obtienen las imágenes de los anillos y_i ; en consecuencia, es posible encontrar una relación entre a_i y b_i . La relación numérica se transforma en una relación analítica ajustando un polinomio a los datos experimentales mediante mínimos cuadrados [34]. Luego, como la mira es una pantalla cilíndrica, aquí tenemos $b_i = b_c$ son constantes. Así, la ec. (2.8) se convierte en una ecuación diferencial de primer orden cuya solución contiene un parámetro arbitrario. Se debe conocer un punto de la curva solución para realizar la integración (como veremos en el capítulo siguiente también con nuestra técnica de reconstrucción de la superficie se requiere conocer un punto para efectuar la integración). Este punto debe estar en la proximidad del vértice de la córnea. Aquí se supone que la córnea en este punto se asemeja a una esfera de radio R_o . Así, la superficie corneal se calcula sin hacer ninguna suposición de su forma.

Todos los queratoscopios que se emplean en la actualidad para la medición de la topografía corneal se basan en la teoría expuesta por Gullstrand, así como en las ideas desarrolladas por El Hage, y sólo difieren en el diseño de su pantalla empleada como mira. Estos diseños de pantalla únicamente permiten abarcar más área de la superficie anterior de la córnea. por ejemplo, el *Corneoscope* emplea 12 anillos que cubren aproximadamente el 70 % de la superficie corneal y el *Corneal Modeling System* aproximadamente el 90 % de la superficie disponible [19]. Sin embargo, la precisión con la que miden las distintas zonas de la superficie corneal es muy variada. Así, para la parte central (3 mm de diámetro) la precisión es de ± 0.1 D con una reproducibilidad de ± 0.5 D, para el resto de la superficie las mediciones son más imprecisas obteniéndose precisiones del orden de ± 0.25 D con una reproducibilidad de hasta ± 1.5 D, en el mejor de los casos. Estas precisiones se obtienen de canicas de calibración entre las 38 D y 43 D potencias que caen dentro del intervalo de córneas normales, las cuales tienen rangos entre las 38 D y 46 D. Para potencias de canicas de calibración mayores, los resultados obtenidos son menos reproducibles y más imprecisos [19].

2.3. Técnicas Rasterestereográficas.

Las técnicas basadas en el disco de Plácido para cuantificar la topografía corneal, tienen algunas limitaciones que reducen su uso clínico. Una de estas limitaciones es que si se requiere extender la imagen queratoscópica de los anillos sobre toda la superficie corneal, la mira debe colocarse más cerca de la superficie de la córnea o el tamaño del disco debe ser de mayor diámetro; una de las desventajas de hacer esto es que la imagen obtenida se oscurece debido a la nariz, cejas o

párpados, produciendo que algunos de los anillos tengan segmentos oscuros y en consecuencia no sea posible la evaluación. Otra desventaja que presentan es que no son útiles para córneas que presentasen defectos epiteliales o úlceras estromales ya que no reflejan adecuadamente [12][19]. Este problema de reflexión es importante si se requiere evaluar la topografía corneal inmediatamente después de que se somete al ojo a una cirugía fotorefractiva con láser de excímero, en cuyo caso la superficie ocular es ópticamente difusa como resultado de haber perdido el epitelio [24]. Adicionalmente, córneas que tienen una superficie muy irregular causan que los anillos se mezclen, haciendo imposible la obtención de información de estas zonas [12]. La importancia de las técnicas rasterestereográficas se encuentra en que es posible evaluar la superficie corneal aun cuando ésta no refleja adecuadamente.

En la rasterestereografía corneal [21][22][23] se proyecta una malla, normalmente la imagen de una rejilla de Ronchi, la cual es una transparencia con bandas opacas y transparentes de igual espesor, sobre la superficie corneal. Con esto se elimina el problema causado por las sombras, además no se requiere de un epitelio intacto y se ve poco afectada por córneas irregulares. Si se proyecta la imagen de una rejilla de Ronchi sobre una superficie plana, se observará que el espaciamiento entre regiones claras y oscuras es constante; si por otra parte, la proyección se hace sobre una superficie no plana, se observa un desplazamiento de las franjas respecto a las proyectadas sobre la superficie plana. La posición y espaciamiento de estas regiones claras y oscuras proporcionan información sobre la elevación de la superficie y con esto es posible determinar la topografía corneal.

Como la córnea es una superficie transparente no difusiva, para que la imagen de la rejilla de Ronchi proyectada sobre la superficie corneal sea visible es necesario usar un material difusor. Un primer intento fue espolvorear talco sobre la córnea previamente anestesiada [35] el método actual de proyección emplea fluoresceína para teñir la película de lágrima y obtener en detalle la superficie corneal. Se utiliza un filtro azul de cobalto para producir que la película de lágrima fluoreszca emitiendo luz verde en un patrón de franjas claras y oscuras producido por la rejilla de Ronchi. Esta imagen es vista con una cámara usando un filtro amarillo con el fin de distinguir entre la luz incidente y la luz de detección, posteriormente la imagen se digitaliza y se almacena para su análisis. Con esta información se calculan las elevaciones de la superficie respecto a la posición de las líneas que se proyectan sobre una superficie plana. Finalmente los radios de curvatura se calculan usando un algoritmo que ajusta la mejor curva a los puntos de elevación [34]. Usando este método, las curvaturas se determinan para cualquier meridiano de la córnea. Ocasionalmente ocurre que la película de lágrima es insuficiente o que la fluoresceína desaparece rápidamente; para resolver este problema, y se puedan efectuar las mediciones, se mezcla fluoresceína con una solución de metilcelulosa.

En la actualidad existen varios instrumentos rasterestereográficos para la evaluación de la topografía corneal cuya diferencia principal es el algoritmo de evaluación de los puntos de elevación respecto a una superficie de referencia; ésta se elige casi siempre perpendicular al eje óptico del instrumento. Warnicki *et al.* [21][22] calculan la elevación corneal trigonométricamente comparando el desplazamiento horizontal de las líneas proyectadas sobre la superficie corneal con respecto a la posición de las líneas que se proyectan sobre una superficie plana. El sistema óptico empleado se muestra en la figura 2.10, el cual consiste de una lámpara de hendidura que ha sido modificada para ser tanto un sistema proyector como un detector. Como el espaciamiento de las líneas sobre un plano

es constante, cualquier elevación o depresión respecto a este plano desviará las líneas proyectadas sobre la córnea de acuerdo a la ecuación

$$\Delta = (\text{líneas desplazadas} \times SP) - d$$

donde Δ es la desviación de las líneas, SP es el espaciamiento entre líneas sobre el plano de referencia, d es la distancia de un punto del plano de referencia al punto que se desea medir, y las líneas desplazadas es el número de líneas entre la línea de referencia y la línea que se requiere medir, figura 2.11.

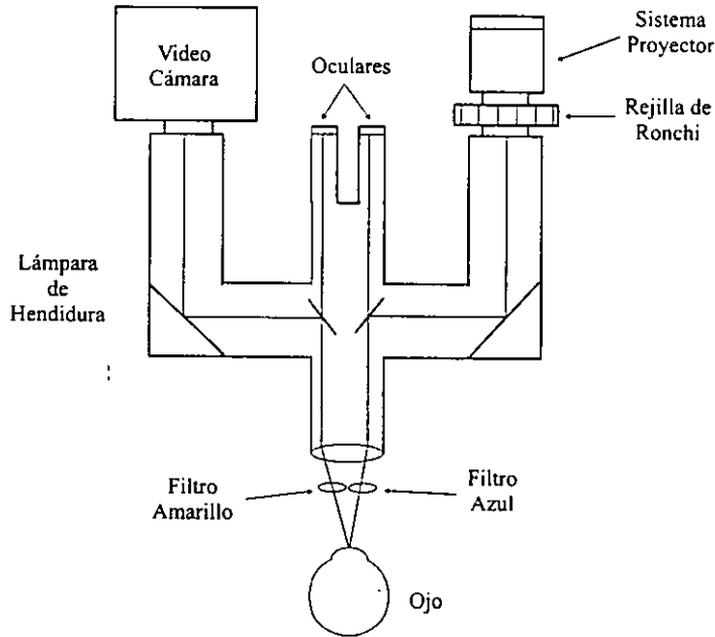


Figura 2.10. Sistema óptico de un microscopio Zeiss con un divisor de haz y un sistema de proyección de franjas.

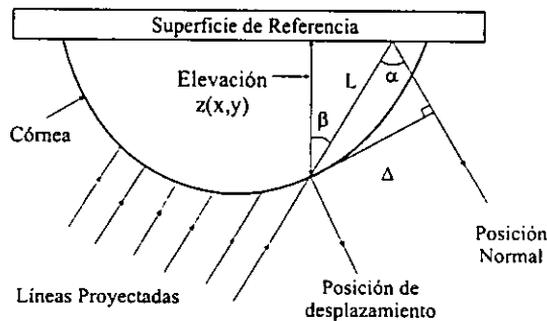


Figura 2.11. Diagrama que muestra las líneas de la rejilla desplazadas sobre la córnea.

De la figura 2.11 se tiene que

$$\text{sen } \alpha = \frac{\Delta}{L}$$

⇒

$$L = \frac{\Delta}{\text{sen } \alpha}$$

y

$$\text{cos } \beta = \frac{z(x, y)}{L}$$

Combinando ambas expresiones resulta que la elevación $z(x, y)$ está dada por

$$z(x, y) = \frac{\Delta}{\text{Sen } \alpha} \frac{\text{Cos } \beta}{M}$$

donde α y β están definidos como se muestra en la figura 2.11 y M es la amplificación.

La precisión con la que se obtiene la topografía corneal con este instrumento, para un ojo de tamaño promedio (7.8 mm de radio de curvatura, aproximadamente), es de aproximadamente ± 0.3 D, la cual es superior a las obtenidas mediante técnicas queratoscópicas y queratométricas [19] (sección 2.1 y 2.2).

Por otra parte, Windecker *et al.* [23] obtienen la elevación corneal a partir de mediciones en fase de una serie de cuadros de intensidad. La proyección de franjas genera una longitud de onda sintética dada por

$$\lambda_s = \frac{p}{\text{Sen } \alpha}$$

donde p es el periodo de la rejilla y α es el ángulo de incidencia. La figura 2.12 muestra este principio.

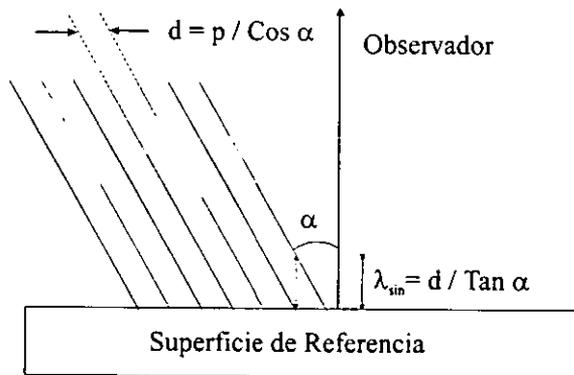


Figura 2.12. Diagrama que muestra el principio de proyección de franjas.

El sistema óptico del instrumento se muestra en la figura 2.13. Aquí la rejilla es desplazada como se indica para introducir un desplazamiento de fase y obtener una diferencia de fase entre las distintas imágenes. El esquema aquí presentado es idéntico al que se obtiene con arreglos interferométricos, por lo que de los cuadros de intensidad obtenidos es posible extraer la diferencia de fase. Esta está relacionada con las elevaciones, o las diferencias de camino óptico *DCO*, mediante

$$z(x, y) = \frac{p}{2\pi \text{Sen } \alpha} \phi(x, y)$$

donde $\phi(x, y)$ representa el mapa de diferencias de fase misma que se calcula mediante algoritmos interferométricos de desplazamiento de fase [36]. La máxima diferencia en elevación obtenida con este instrumento es de aproximadamente 110 μm (0.7 D) que es mayor que los valores clínicos aceptados obtenidos con el queratoscopio y el queratómetro [19].

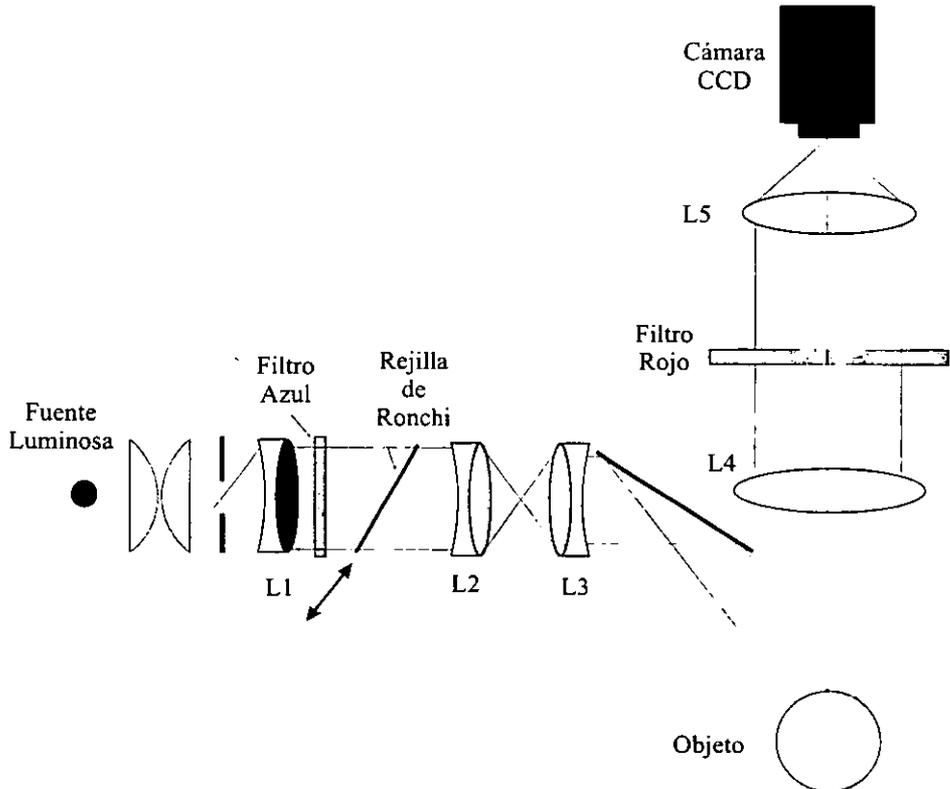


Figura 2.13. Arreglo experimental del topómetro proyector de franjas.

2.4. Técnicas Interferométricas.

Las técnicas interferométricas [13][20] extraen información de la topografía corneal a partir de un patrón de interferencia formado por reflexión en la córnea, de un haz coherente monocromático que se hace interferir con un haz de referencia. El patrón de interferencia es capturado y digitalizado y a partir de éste se puede obtener el frente de onda ajustando los datos obtenidos a un polinomio [37]. Estas técnicas empleadas para la medición superficies esféricas convexas como la córnea, requieren de un sistema óptico más sofisticado, de óptica nula y de un sistema óptico rápido ($f/\#$ pequeño) [28].

Un queratómetro interferométrico desarrollado para la evaluación de la topografía corneal es el que emplea técnicas de dos longitudes de onda en el visible [20]. Esto es así debido a que las variaciones de la forma de la córnea son grandes comparadas con la longitud de onda de la luz visible, por lo que debe suponerse un esquema de interferometría de dos longitudes de onda equivalentes a un arreglo de deflectometría de Moiré [38]. El sistema óptico de este instrumento se muestra en la figura 2.14.

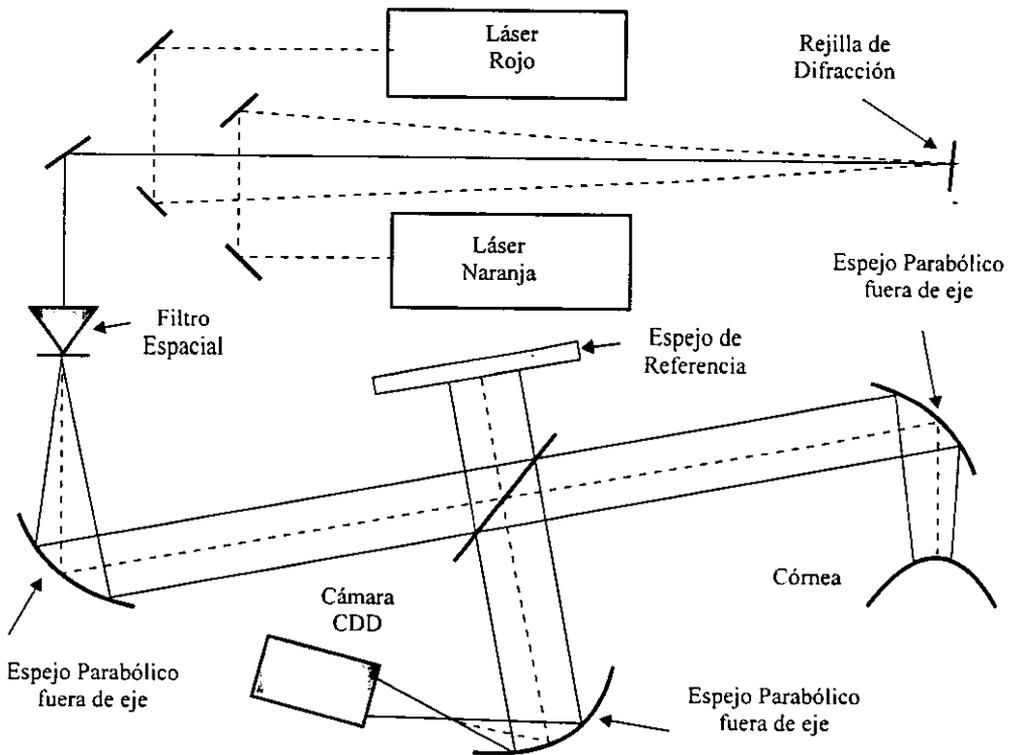


Figura 2.14. Queratómetro interferométrico de dos longitudes de onda.

La idea de emplear dos longitudes de onda es que los patrones de interferencia de ambas fuentes producen un interferograma cuya longitud de onda efectiva

$$\lambda_{efec} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|\lambda_1 - \lambda_2|}$$

es mayor que la longitud de onda de las que la constituyen. Esto proporciona al sistema estabilidad y un espaciado entre franjas que permite efectuar el conteo más fácilmente. En este sistema se utiliza $\lambda_1 = 0.6320 \mu\text{m}$ que corresponde al rojo y $\lambda_2 = 0.6119 \mu\text{m}$ que corresponde al naranja, dando así una longitud de onda efectiva de $\lambda_{efec} = 18.527 \mu\text{m}$.

Otro dispositivo interferométrico diseñado para la evaluación de la topografía corneal [13], se muestra en la figura 2.15. Este es un dispositivo holográfico que almacena el patrón de franjas en una cámara holográfica para después obtener información topográfica de ésta.

Si bien la precisión de estos instrumentos es del orden de fracción de la longitud de onda, resultan ser poco prácticos en una aplicación de carácter clínico para la evaluación de la topografía corneal en donde las mediciones tienen que efectuarse en vivo y en tiempos inferiores a 1/60 de segundo. Sin embargo, estas técnicas no han sido aplicadas clínicamente; tal vez su aplicación más importante se halle en pruebas ópticas de superficies esféricas convexas.

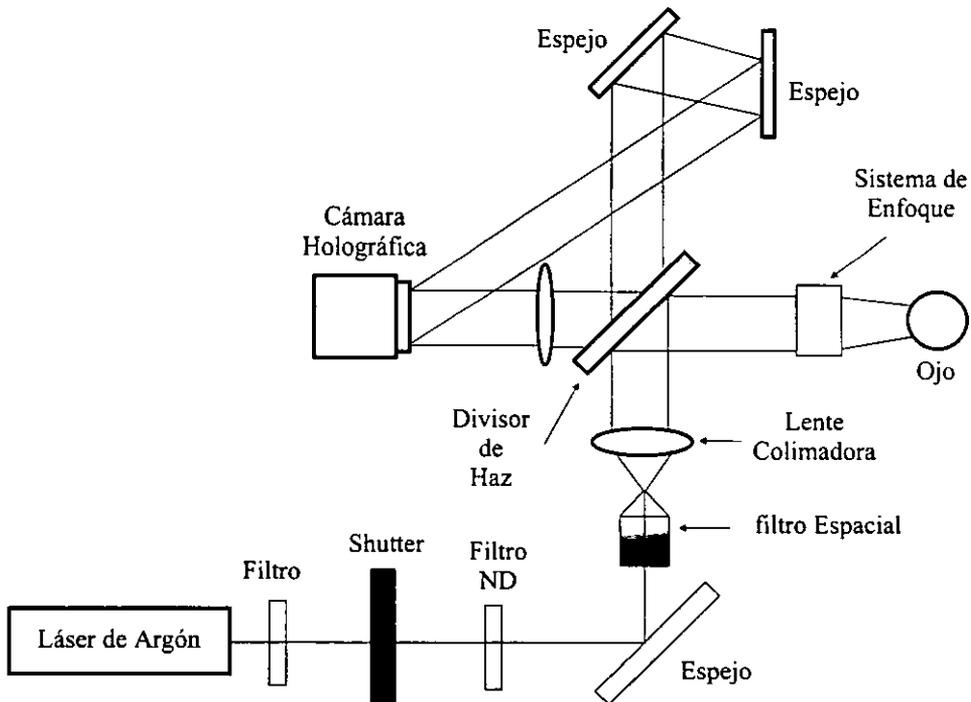


Figura 2.15. Sistema óptico del Queratómetro holográfico.

2.5. Nuevas Propuestas.

En el laboratorio de Óptica Aplicada del Centro de Instrumentos de la UNAM, se han venido investigando y desarrollando nuevas técnicas no sólo para la evaluación de la topografía corneal sino también para su aplicación de pruebas ópticas de superficies esféricas no simétricas. Las técnicas desarrolladas están basadas en la teoría de pruebas ópticas por deflectometría láser [2]. Una de las técnicas desarrollada y diseñada para la evaluación de la topografía corneal, la queratopografía láser [3][4], se discute ampliamente en este trabajo. Su estudio ha permitido el desarrollo de otra técnica que combina tanto las técnicas basadas en el disco de Plácido como la deflectometría láser. Esta última técnica tiene variantes en cuanto a la aplicación y diseño de la pantalla usada como mira, pero en esencia son lo mismo.

El primer diseño desarrollado es un videoqueratómetro en tres dimensiones [5][6] en el cual mediante un trazo paraxial de rayos, se diseña una pantalla cilíndrica en 3D en forma tal que las líneas claras y oscuras de pantalla al ser proyectadas por la superficie corneal, proporcionan una imagen plana tipo disco de Plácido. Dicha imagen presenta a los anillos equidistantes e igualmente espaciados si la superficie es una esfera, y una imagen de los anillos distorsionada si no lo es; la imagen es capturada y almacenada para posteriormente evaluar la topografía corneal, figura 2.16. Con este sistema se llega a tener una precisión de $50 \mu\text{m}$ (0.3 D) de valor *rms* en la diferencia en coordenada radial teórica y calculada.

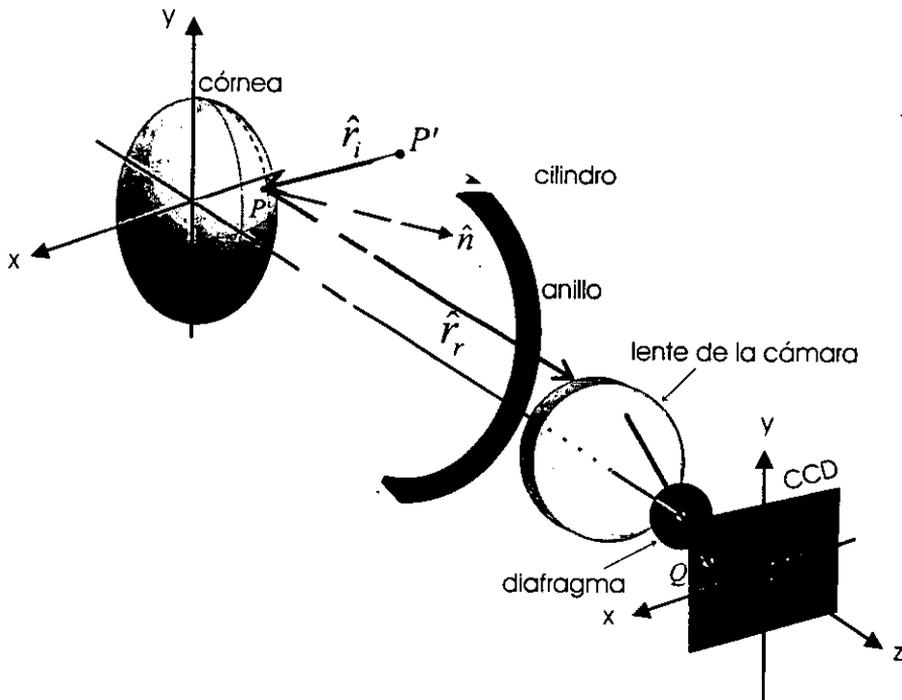


Figura 2.16. Videoqueratómetro en 3D.

Basados en las ideas anteriores, se diseñó un segundo sistema óptico que permite en general la evaluación de cualquier superficie esférica convexa [7]. A diferencia del anterior, aquí se efectúa un trazo exacto de rayos para poder diseñar la pantalla en 3D que se proyectará sobre la superficie a probar. La prueba óptica aquí planteada es nula y consiste en proyectar la mira sobre la superficie a probar, la cual proporciona una imagen de la pantalla que en este caso consiste de una malla cuadrada; el arreglo óptico de este sistema se muestra en la figura 2.17. La evaluación de la topografía corneal a partir de los puntos de cruce de las líneas que forman la imagen de la malla cuadrada es similar a la que se emplea en la Queratografía Láser, la cual analizaremos posteriormente.

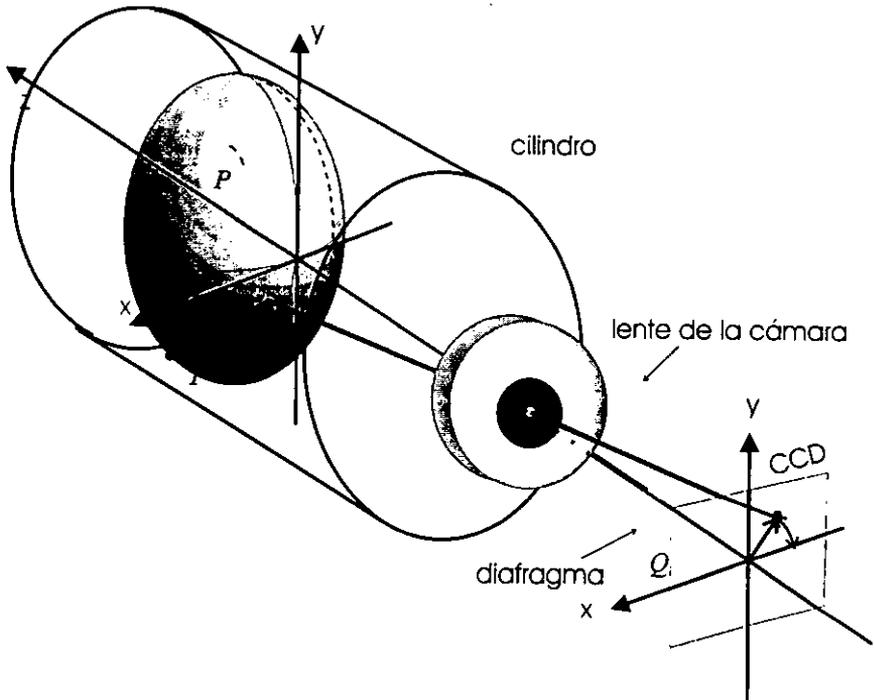


Figura 2.17. Prueba nula para superficies esféricas convexas.

2.6. Conclusión.

Los métodos que se emplean en la actualidad para la medición de la topografía corneal son muy variados. Los de uso clínico más generalizado son los queratométricos y los queratoscópicos. Los primeros pueden obtener mediciones con una precisión de ± 0.25 D en el radio de curvatura, pero sólo son capaces de proporcionar información de la zona central (3 mm de diámetro) de la superficie anterior de la córnea. Por otra parte, los queratoscopios modernos pueden hacer mediciones de la superficie corneal sobre un área que va desde el 70 al 95 % de la superficie total, pero la precisión con la que proporcionan el radio de curvatura depende en gran medida de la zona que se esté midiendo. Así, para la zona central la precisión puede alcanzar ± 0.1 D en el radio de curvatura y para

el resto $\pm 0.25 D$ en el radio de curvatura. Cabe mencionar que los errores más grandes en las mediciones con los sistemas queratoscópicas se encuentran el centro y en la periferia, por lo que la información que dan los anillos centrales y los de la periferia se desecha.

Asimismo, cabe mencionar la precisión con la que se proporcionan los resultados, tanto en las técnicas queratométricas como en las queratoscópicas, realmente se basa en los mejores valores que se tienen con esferas de calibración de distintos diámetros. Otro aspecto a resaltar en estas técnicas es que siempre se trabaja en planos meridionales y los algoritmos que se tienen para la reconstrucción del radio de curvatura suponen que la superficie de la córnea es esférica.

Por otra parte, las técnicas rasterestereográficas tienen su principal aplicación clínica en los casos de que la córnea no refleja adecuadamente las imágenes, pero al igual que en las técnicas anteriores, la precisión que se puede lograr es de aproximadamente $\pm 0.3 D$ en el radio de curvatura, lo cual no mejora la precisión de las otras técnicas. A pesar de este inconveniente, a diferencia de las técnicas anteriores aquí es posible hacer mediciones sobre toda la superficie corneal y no sólo en planos meridionales.

Por su parte, las técnicas interferométricas presentan un esquema alentador debido a que la precisión con la que pueden obtener el frente de onda, y consecuentemente la forma de la superficie, es del orden de fracción de la longitud de onda empleada en la prueba. Sin embargo, los esquemas que se han presentado hasta el momento para la medición de la forma de la superficie, sólo son aplicables en pruebas ópticas de superficies esféricas. No hemos encontrado reportes sobre trabajos en córneas vivas, ni mucho menos de la precisión con la que pueden medir la topografía, lo cual se puede deber principalmente a que los arreglos ópticos empleados son tan complejos que resultan ser poco prácticos en las aplicaciones clínicas.

Finalmente, las técnicas videoqueratoscópicas con pantallas en 3D tipo disco de Plácido o de malla cuadrada que se desarrollan en el CI-UNAM, si bien se encuentran en su etapa inicial, proporcionan información de toda la superficie corneal debido a su diseño y los resultados arrojados hasta el momento, para el caso de trazo de rayos paraxial, nos indican que podemos hacer mediciones de la topografía corneal con una precisión de $50 \mu\text{m}$ de valor *rms* en la diferencia entre la coordenada radial teórica y calculada. Aunque lo que necesitan los médicos es información en términos de radio de curvatura, como una aproximación podemos ver a la coordenada radial como un radio de curvatura y aplicarle así el valor obtenido en la precisión, el cual es del orden del valor que reportan los médicos de $\pm 0.25 D$ o equivalentemente $\pm 0.04 \text{ mm}$ en el radio de curvatura en el mejor de los casos.

Ahora bien como veremos más adelante, debido a que el algoritmo para obtener la topografía corneal empleado en la videoqueratometría en 3D es similar al que se emplea en la queratografía láser, esperamos que la precisión con la que se pueda calcular la topografía corneal pueda mejorar al obtenido en videoqueratometría en 3D, debido a que el trazo de rayos se hace de manera exacta en lugar de paraxial.

CAPÍTULO 3

QUERATOPOGRAFÍA LÁSER: TEORÍA

Los métodos tradicionales para la evaluación de la topografía corneal presentan varios inconvenientes los cuales los hacen poco prácticos en aplicaciones clínicas. Este se observa principalmente en las cirugías refractivas, donde la precisión con la que se desea obtener la forma de la superficie anterior de la córnea, antes, durante y después de someterla a una cirugía, es fundamental para poder establecer un diagnóstico adecuado. Asimismo, este conocimiento permitirá estudiar los efectos colaterales y las posibles complicaciones que se presenten en la córnea después de someterla a una cirugía refractiva. Con el método de evaluación de la superficie corneal mediante queratopografía láser desarrollado en este trabajo, se pretenden erradicar varios de los inconvenientes que se presentan en la mayoría de los instrumentos actuales empleados en la evaluación de la topografía. Una de las primeras cosas que se pretenden eliminar son las suposiciones que se hacen acerca de la forma de la superficie, con el propósito de aumentar la precisión. Asimismo, con esta técnica se quiere evaluar toda la superficie de la córnea, que las mediciones se realicen dentro del

intervalo de tiempo del movimiento ocular y que la reconstrucción de la superficie corneal se realice en tiempo real.

3.1. Deflectometría Láser.

Como la superficie anterior de la córnea, principal elemento refractor del ojo, es una superficie convexa esférica y que en la mayor parte de los casos es una superficie parcialmente especular, una técnica útil para la medición de su topografía nos la proporciona la deflectometría láser por reflexión [2]. La técnica de deflectometría láser por reflexión consiste en hacer incidir un haz láser sobre la superficie de la cual se desea conocer su forma, y así medir su ángulo de deflexión. A partir de éste es posible obtener las normales a la superficie y posteriormente con ellas efectuar su reconstrucción, figura 3.1.

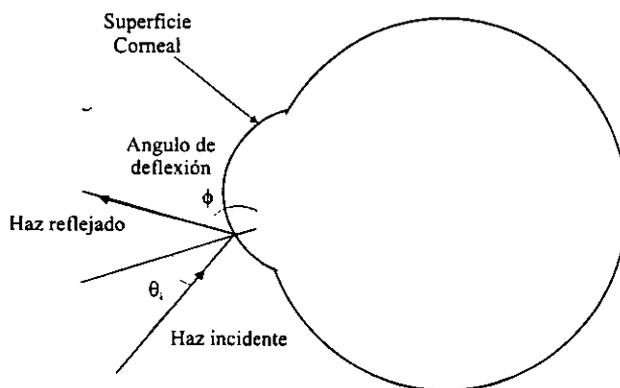


Figura 3.1. Deflectometría Láser por reflexión.

Para ver cómo, con el conocimiento de las normales a una superficie, es posible la reconstrucción, supongamos que la superficie anterior de la córnea es una superficie suave la cual se puede representar matemáticamente mediante una función $\phi(x, y, z) = cte$, y también supongamos que le hacemos incidir un haz láser que describe una trayectoria sobre la superficie corneal, figura 3.2. Así, para cualquier punto $P(x, y, z)$ de la trayectoria del haz, el elemento diferencial de longitud $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ que es un vector tangente a la superficie, será perpendicular al vector normal \hat{n} a la superficie en ese punto, de tal manera que podemos escribir

$$\hat{n} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.1)$$

donde

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi(x, y, z)}{|\nabla\phi(x, y, z)|} \Big|_{P(x, y, z)}$$

es la normal a la superficie. La ec. (3.1) es la ecuación fundamental de la deflectometría láser por reflexión, la cual nos dice que si conocemos las normales a la superficie para cada punto de incidencia del haz láser, es posible integrar y obtener así la forma de la superficie. Esta será la expresión que emplearemos para la evaluación de la topografía corneal, por lo que el método deberá diseñarse en tal forma que nos permita evaluar directamente las normales a la superficie real.

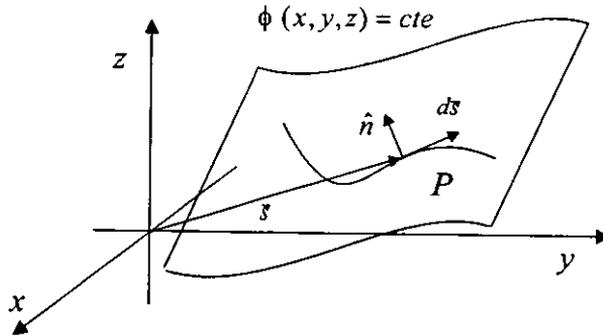


Figura 3.2. Ecuación fundamental de la deflectometría láser.

3.2. Sistema Óptico del Queratopógrafo Láser.

El diseño del queratopógrafo láser requiere considerar que la superficie corneal es esférica convexa. Por ello, para determinar su topografía es necesario que el sistema óptico sea tal que se pueda barrer toda la superficie y que se puedan registrar todos los rayos reflejados por la superficie corneal. Se calcularán entonces las normales a la superficie en esas posiciones y con esta información se obtendrá la topografía corneal. Desde luego que esto no es una tarea fácil si consideramos que en general es difícil poder medir superficies esféricas convexas, y aún más, si la superficie es un tejido vivo que se mueve permanentemente. Considerando lo último, el sistema debe ser tal que las mediciones puedan realizarse muy rápidamente para evitar dañar al tejido y contrarrestar el movimiento ocular.

Considerando lo anterior, en el Laboratorio de Óptica Aplicada del Centro de Instrumentos, hemos desarrollado un sistema para la medición de la topografía corneal cuyo arreglo experimental se muestra en la figura 3.3. Aquí, un haz láser se hace incidir sobre un espejo plano colocado a 45° , que efectúa un movimiento lineal con el propósito de desviarlo hacia el prisma Dove, que a su vez efectúa un movimiento circular, ocasionando un movimiento circular del haz del doble de la velocidad angular del prisma. El movimiento combinado de ambos elementos es tal que, sobre un plano perpendicular a la salida del prisma (que llamaremos plano intermedio) el haz describe una trayectoria espiral [3][4], tal y como se muestra en la figura 3.4. Este movimiento combinado es el que proporciona el barrido de haz sobre la superficie de prueba. Posteriormente, el haz incide sobre el espejo parabólico fuera de eje y se refleja hacia su foco. Pero antes de llegar a este punto, incide sobre la superficie corneal, se refleja y eventualmente regresa por el mismo sistema e incide sobre el detector de posición.

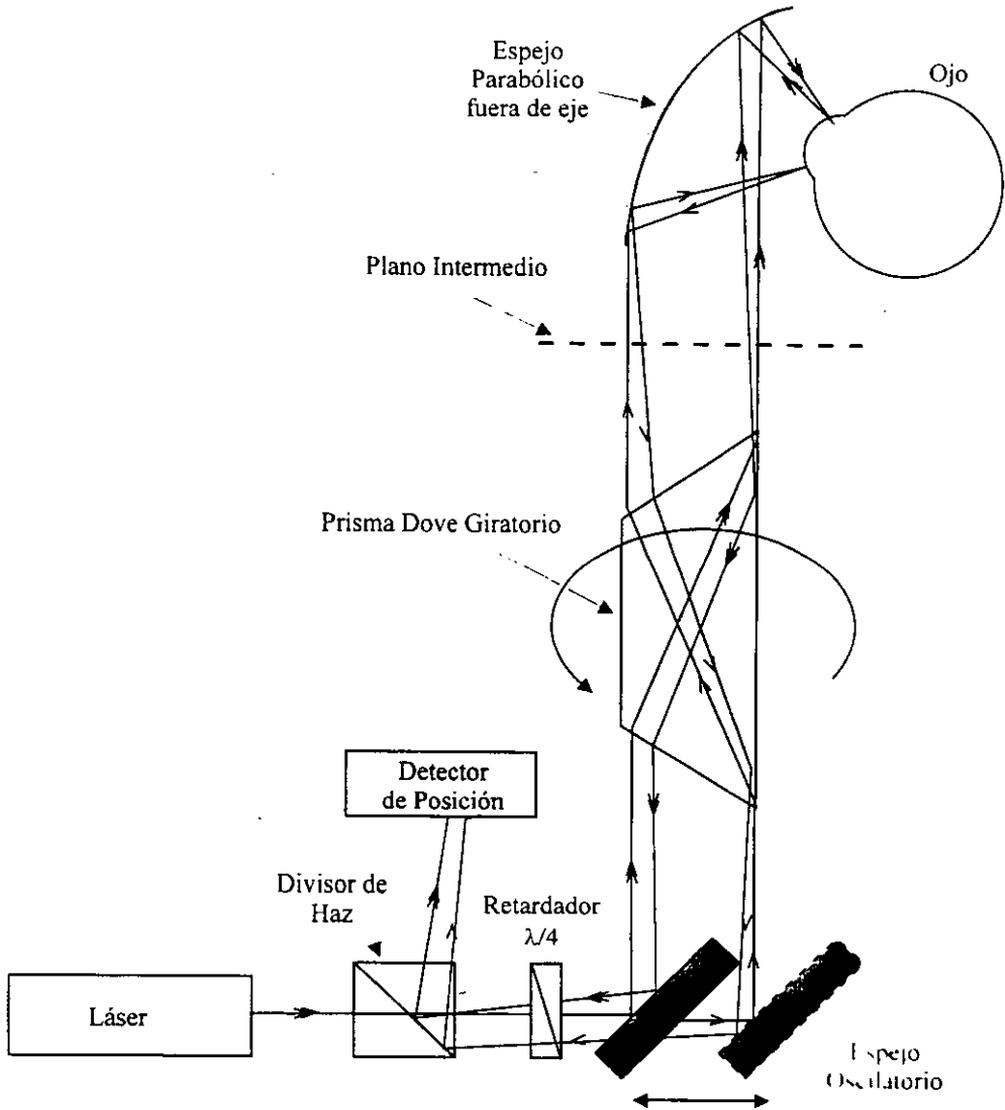


Figura 3.3. Arreglo experimental del queratopógrafo láser.

En el apéndice A se discute sobre las características mecánicas, ópticas y electrónicas de cada uno de los componentes del queratopógrafo láser. Asimismo, se establecen las ecuaciones del barrido proporcionadas por las componentes mecánicas del sistema.

Ahora bien, la alineación del sistema es tal que, si el haz es reflejado por una esfera, colocada de manera que su centro coincida con el foco del espejo parabólico fuera de eje, se obtendrá un haz

de regreso que incidirá sobre el centro del detector de posición. Así, cualquier desviación del haz del centro del detector de posición, será indicativa de un cambio en la superficie de prueba respecto a la superficie esférica de referencia. Esto último nos indica que el método se pueda clasificar como una prueba nula rayo a rayo; es decir, en ausencia de deformaciones de la superficie, la desviación del haz será nula.

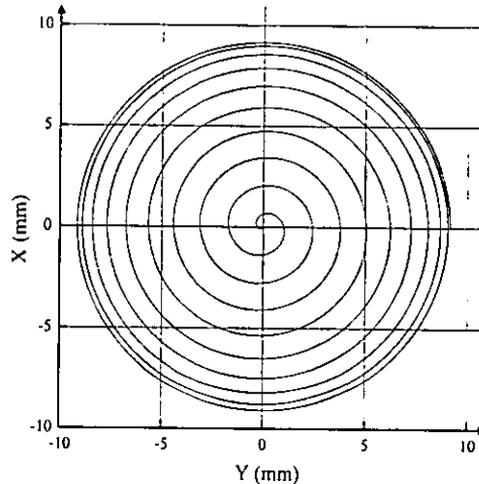


Figura 3.4. Trayectoria espiral del barrido vista en el plano intermedio.

En el presente trabajo se hace un trazo exacto de rayos que permite establecer el algoritmo de reconstrucción de la topografía de la superficie de prueba y estudiar el comportamiento del sistema, mediante una simulación numérica, en presencia de ruido y en casos donde la superficie de prueba no es muy suave. Cabe mencionar que los datos experimentales que proporciona el queratopógrafo son los puntos de detección obtenidos con el detector de posición. Posteriormente, se obtienen las direcciones del haz incidente en el sistema óptico; que son importantes para establecer cuales son los puntos donde incide el haz sobre una esfera cercana a la superficie de prueba que llamaremos esfera de referencia. A partir de estos puntos de referencia se efectúa un trazo de rayos de regreso que permitirá eventualmente, encontrar las normales aproximadas a la superficie real y mediante la ecuación fundamental de la deflectometría láser obtener la topografía de la superficie.

3.3. Trazo Exacto de Rayos.

El trazo de rayos consiste en establecer las ecuaciones que nos permitan conocer en todo momento la trayectoria del haz a través del sistema óptico del queratopógrafo láser. Aunque el detector de posición proporciona la información de manera casi continua (el detector tiene un tiempo de respuesta y la tarjeta digitalizadora sólo lee información cada cierto tiempo, apéndice A), aquí efectuaremos las evaluaciones de manera discreta para que con el trazo exacto de rayos podamos establecer una relación única entre los puntos sobre la esfera de referencia y los puntos de detección.

Consideremos N puntos (en nuestro caso tomamos una muestra de mil puntos) de la trayectoria espiral descrita por el haz láser después de que pasa por el prisma, figura 3.5. Cada punto está tomado a intervalos de tiempo regulares, uno después de otro de acuerdo a las ecuaciones del barrido que se deducen en el apéndice A, las cuales están dadas por

$$\rho(t) = a \cos(\omega_1 t) + \sqrt{l^2 - [h - a \operatorname{Sen}(\omega_1 t)]^2} - \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$\phi(t) = 4\omega_2 t + \phi_0$$

y que nos proporcionan las coordenadas del punto en coordenadas polares (ρ, ϕ) . Aquí, ω_1 y ω_2 son las velocidades angulares del servo motor que mueve al espejo y que hace rotar al prisma, respectivamente. Ahora bien, cada punto indica la posición del rayo incidente en el plano intermedio. A ése rayo, después de ir al espejo parabólico, a la córnea y reflejarse para regresar, le corresponde otro punto único en el plano intermedio. Al conjunto de puntos de los rayos incidentes en el plano intermedio le llamaremos trayectoria del barrido, a los de regreso, los llamaremos, trayectoria de detección; debe tenerse cuidado con esto último ya que realmente no se trata de los puntos que llegan al detector de posición.

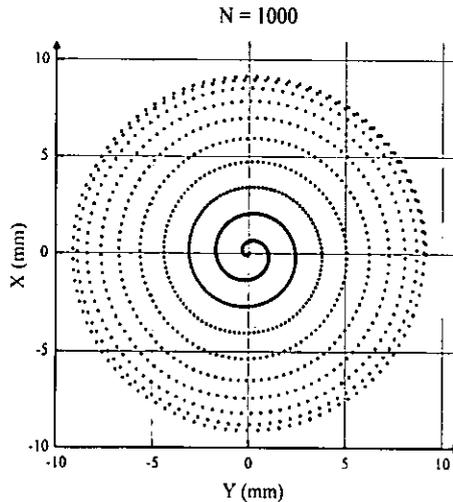


Figura 3.5. Puntos del barrido.

A continuación, supongamos que el prisma permanece fijo (no gira) y el plano (intermedio) que contiene los puntos del barrido lo colocamos a la izquierda del prisma, figura 3.6. Al plano en esta posición lo llamaremos *plano de detección*, que no corresponde realmente con la posición del plano del detector de posición. Luego, a partir de cada uno de los N puntos de la espiral sobre el plano de detección se trazan rayos paralelos al eje z que inciden sobre el sistema óptico, formando así una espiral completa de rayos que inciden sobre la superficie de la córnea de manera equivalente que en el sistema real.

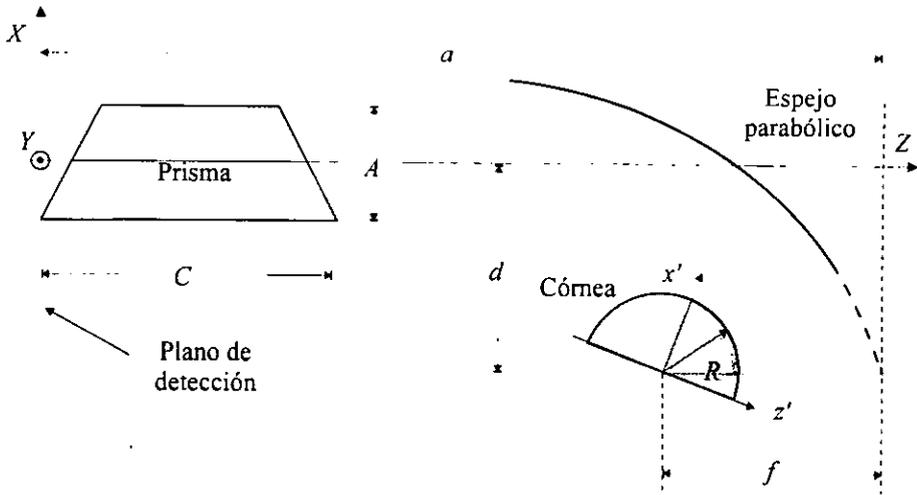


Figura 3.6. Plano meridional del sistema óptico del queratopógrafo láser, para efectos del trazo exacto de rayos.

El trazo de rayos se divide en un trazo de ida y uno de regreso. El trazo de rayos de ida consiste en trazar rayos que parten de cada uno de los puntos de la espiral sobre el plano de detección y viajan a través de todo el sistema óptico del queratopógrafo láser incidiendo finalmente sobre la superficie corneal. En el trazo de regreso se utilizan las direcciones de los rayos reflejados por la córnea y se hacen pasar por todo el sistema óptico e incidirán eventualmente sobre el plano de detección. Si en lugar de la superficie corneal se coloca una esfera de referencia centrada en el foco del espejo parabólico, entonces los puntos de intersección de los rayos de regreso con el plano de detección coincidirán con los de la espiral de salida. Esto último nos dice que, rayo a rayo, el sistema nos proporciona una prueba nula, ya que si en lugar de la esfera de referencia se coloca la superficie corneal, en general el rayo de regreso no coincidirá con el rayo de ida y su separación sobre el plano de detección será indicativa de irregularidades sobre la superficie de prueba.

3.3.1. Ecuaciones de las Superficies Ópticas.

Considerando el sistema de coordenadas xyz que se muestra en la figura 3.6 tenemos que la ecuación del plano de la primera cara del prisma, cara izquierda en la figura 3.6, está dada por la expresión

$$x - z + \frac{A}{2} = 0 \quad (3.2)$$

para la segunda cara del prisma, cara del lado derecho, tenemos

$$x + z - \frac{2C - A}{2} = 0 \quad (3.3)$$

y, para la cara inferior del prisma,

$$x + \frac{A}{2} = 0. \quad (3.4)$$

Por otra parte, la ecuación del espejo parabólico fuera de eje está dada por

$$(x + d)^2 + y^2 + 4f(z - a) = 0 \quad (3.5)$$

donde f es el foco del espejo parabólico, (a, f, d) y (a, d) son las coordenadas que nos dan la posición del foco y del vértice del espejo parabólico, respectivamente.

Finalmente, la ecuación para la esfera de referencia es

$$(x + d)^2 + y^2 + (z - a + f)^2 = R^2 \quad (3.6)$$

donde R es el radio.

3.3.2. Representación Matemática de los Rayos.

Los rayos que pasan a través del sistema óptico se representan por rectas en el espacio de manera paramétrica

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{n}$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición, $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ es un punto conocido de la recta, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es un vector paralelo a la recta y t es un parámetro. La expresión anterior se puede escribir como

$$\left. \begin{aligned} x &= x_o + t n_x \\ y &= y_o + t n_y \\ z &= z_o + t n_z \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Esta expresión define un par de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Para conocer dónde estas rectas interceptan a las superficies ópticas del sistema, se tienen que resolver simultáneamente junto con las ecuaciones de las superficies ópticas antes establecidas. Desde luego, aunque el trazo de ida será siempre de la misma manera, el algoritmo del trazo de regreso dependerá mucho de la dirección del haz desviado por la superficie corneal, y consecuentemente en el trazo de regreso se tienen que considerar, para cada uno de los rayos de la espiral, todas las posibles direcciones que pueda tener a través del sistema óptico. Así, por ejemplo, la ecuación de la recta que representa a un rayo cuyos cosenos directores están dados por $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, es

$$t = \frac{x - x_o}{n_x} = \frac{y - y_o}{n_y} = \frac{z - z_o}{n_z},$$

la cual debe resolverse simultáneamente con alguna de las expresiones que representan las superficies ópticas del sistema. Para un rayo sobre el plano xz , $\vec{n} = (n_x, 0, n_z)$, se tiene

$$t = \frac{x - x_o}{n_x} = \frac{z - z_o}{n_z}, \quad y = y_o,$$

y para un rayo que vaya en la dirección del eje z , $\vec{n} = (0, 0, n_z)$, se tiene

$$t = \frac{z - z_o}{n_z}, \quad x = x_o, \quad y = y_o.$$

Debe notarse con estos ejemplos que dependiendo de la dirección del rayo, dada por los cosenos directores asociados, la resolución del sistema de ecuaciones desde el punto de vista analítico puede resultar bastante laboriosa.

3.3.3. Trazo de Rayos de Ida.

El trazo de rayos de ida consiste en establecer la trayectoria que siguen los rayos desde cualquier punto del barrido $P_b(x_b, y_b)$ del plano de detección hasta un punto $P_e(x_e, y_e, z_e)$ sobre la superficie de la córnea haciendo uso de las ecuaciones de las superficies ópticas, ecs. (3.2) a (3.6), y la de las rectas asociadas a las direcciones de los rayos, ec. (3.7); ver figura 3.7.

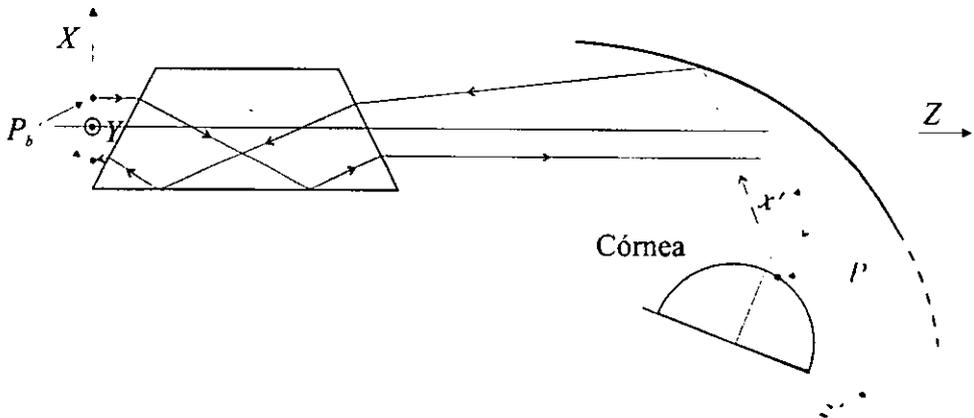


Figura 3.7. Trazo de rayos a través del sistema óptico del queratómetro

Por diseño del queratógrafo, el trazo de rayos de ida siempre será el mismo, esto es, a partir de los puntos del barrido siempre se trazarán rayos paralelos al eje z y éstos eventualmente intersectarán a la superficie corneal. Ahora bien, por simplicidad, el trazo de ida se efectúa en un plano "meridional" al sistema óptico del queratógrafo, lo que significa que cualquier rayo que salga del plano de detección paralelo al eje z siempre viajará sobre un mismo plano. Este hecho nos

permite buscar una relación entre el punto del barrido $P_b(x_b)$ y el punto de intersección con la superficie corneal $P_e(x_e, z_e)$ para todos los valores de la coordenada y_b . Sin embargo, como no podemos conocer de antemano el punto de intersección de los rayos sobre la superficie corneal, aproximamos este punto por el punto de intersección con la esfera de referencia; más adelante en este capítulo discutiremos sobre esta aproximación. En el apéndice B se muestran con detalle los cálculos del trazo de rayos de ida y cómo se obtiene la relación entre las coordenadas de los puntos del plano de detección y las coordenadas de los puntos donde el haz incide sobre la esfera de referencia; dicha relación está dada por

$$x_e(x_b) = \frac{-[d + \alpha(\beta - a + f)] + \sqrt{[d + \alpha(\beta - a + f)]^2 - (1 + \alpha^2)[d^2 + (\beta - a + f)^2 - R^2]}}{1 + \alpha^2}$$

y

$$z_e(x_b) = \frac{\alpha \left\{ -[d + \alpha(\beta - a + f)] + \sqrt{[d + \alpha(\beta - a + f)]^2 - (1 + \alpha^2)[d^2 + (\beta - a + f)^2 - R^2]} \right\}}{1 + \alpha^2} + \beta$$

donde

$$\alpha(x_b) = \frac{\left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A - d \right)^2 - 4f^2}{4f \left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A - d \right)}$$

y

$$\beta(x_b) = \frac{\left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A \right) \left[\left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A - d \right)^2 - 4f^2 \right]}{4f \left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A - d \right)} + \frac{\left(x_b - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + 2} + A - d \right)^2}{4f} + a.$$

Aquí Γ es el invariante de Lagrange y está dado por la ley vectorial de la refracción [26], ver apéndice B. Como veremos más adelante, estas expresiones nos serán de mucha utilidad para poder calcular las normales a la superficie que se requiere evaluar. Por otra parte, para el caso de la simulación que discutiremos en el siguiente capítulo, se va a requerir conocer también la relación que hay entre los puntos del plano de detección y los puntos de intersección del haz con la superficie corneal de simulación, esto requiere que se realicen de manera adicional los cálculos con la superficie propuesta en la última parte del trazo de rayos de ida, ver apéndice B.

3.3.4. Trazo de Rayos de Regreso.

Una vez que el rayo es reflejado por la superficie corneal, en general la dirección de éste ya no estará sobre un plano meridional sino que, dependiendo de la forma de la superficie, regresará por una trayectoria distinta a la del haz incidente. Luego, para efectuar el trazo de regreso se emplean las mismas ecuaciones de (3.1) a (3.7), pero aquí se tienen que considerar todas las posibles direcciones del haz dadas por los cosenos directores de (3.7), $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Resolver analíticamente para cada

una de las direcciones del rayo de regreso resulta ser muy laborioso por lo que es preferible hacerlo numéricamente; en el apéndice B sólo se ejemplifica el trazo analítico de regreso para la esfera de referencia el cual es similar al trazo de ida, figura 3.7. Este trazo de rayos de regreso establece una relación entre los puntos de la superficie corneal y los puntos sobre el plano de detección. Como veremos más adelante en este capítulo, para el caso de la evaluación de la topografía corneal, los cálculos se realizan partiendo de los puntos de aproximación sobre la esfera de referencia obtenidos en el trazo de ida, pero con direcciones ligeramente diferentes a las dadas por los rayos reflejados por la esfera de referencia.

3.4. Cálculo de las Normales a la Superficie.

3.4.1. Sistema de Coordenadas para la Córnea.

Se define un nuevo sistema de coordenadas para la córnea cuyo origen se encuentra sobre el foco del espejo parabólico y cuyo eje x' se encuentra a lo largo de la línea que une el centro del espejo parabólico con su foco, figura 3.8. Este cambio es con el propósito de hacer las mediciones sobre toda la superficie corneal, evaluando las normales a la superficie corneal y posteriormente con éstas reconstruir la superficie empleando para ello la ecuación fundamental de la deflectometría láser ec. (3.1). Es en este sistema de coordenadas donde se coloca la esfera de referencia y se calculan las normales a la superficie corneal. En el caso de la simulación, las superficies corneales de simulación también están referidas a este sistema de coordenadas.

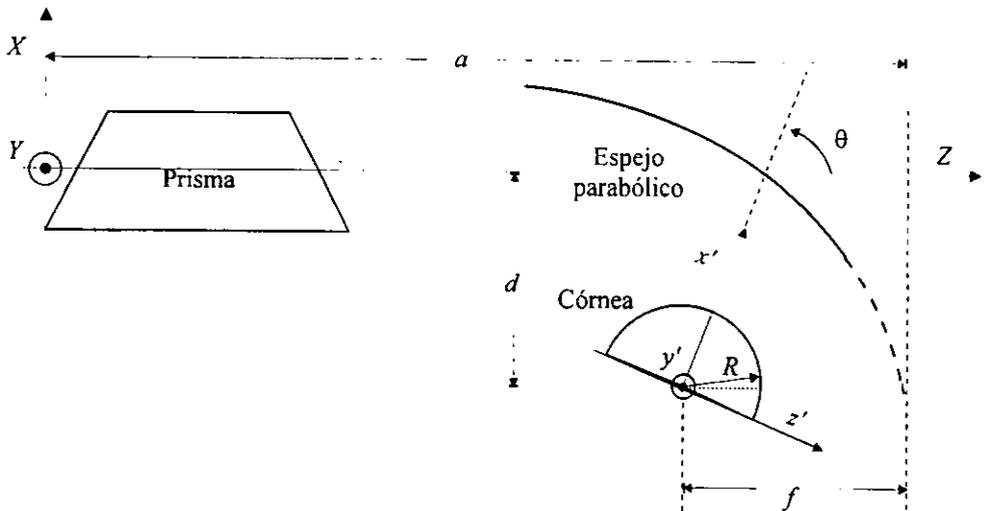


Figura 3.8. Sistema de coordenadas de la esfera de referencia.

El nuevo sistema de coordenadas es una transformación que consiste de una rotación seguida de una traslación, cuyas ecuaciones de transformación están dadas por las siguientes expresiones (ver apéndice B)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos\theta - z \sin\theta + d \\ y' &= y \\ z' &= z \cos\theta + x \sin\theta - a + f \end{aligned} \right\}$$

y la transformación inversa es

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos\theta + z' \sin\theta - d \\ y &= y' \\ z &= z' \cos\theta - x' \sin\theta + a - f \end{aligned} \right\}$$

donde el ángulo θ de la rotación está dado por

$$\tan\theta = \frac{d^2 - 4f^2}{4fd}$$

Estas ecuaciones de transformación se emplean en el algoritmo del trazo de rayos y en el de la evaluación de las normales a la superficie corneal.

3.4.2. Algoritmo para Obtener las Normales a la Superficie.

Experimentalmente se conoce en todo momento la trayectoria de los rayos de ida; de los rayos reflejados sólo se conoce donde caen sobre el plano de detección [3]. Así, para conocer la normal a la superficie real en el punto donde incide el haz de ida, antes es necesario conocer la dirección del rayo reflejado, ya que la normal a la superficie de acuerdo a la ley vectorial de la reflexión está dada por la expresión [26][28],

$$\hat{n} = \frac{\hat{r}_i - \hat{r}_r}{|\hat{r}_i - \hat{r}_r|} \quad (3.8)$$

donde \hat{n} , \hat{r}_i y \hat{r}_r son los vectores unitarios asociados a la normal a la superficie, el rayo incidente y el rayo reflejado, respectivamente (ver apéndice B).

Para conocer la dirección del rayo reflejado es necesario conocer otro punto por donde pase éste. Como no conocemos el punto de incidencia del rayo de ida sobre la superficie real, lo aproximamos al punto donde el haz incide sobre la esfera de referencia, a partir de éste establecemos la dirección del rayo reflejado, en consecuencia podremos calcular de manera aproximada la normal a la superficie, figura 3.9. En el capítulo siguiente realizaremos algunas simulaciones de superficies corneales que nos permitirán establecer qué tan buena es nuestra aproximación.

Sea $P_d = (x_d, y_d)$ el punto donde el haz reflejado por la superficie corneal intersecta al plano de detección y sea $P_e = (x_e, y_e, z_e)$ el punto donde el haz intersecta a la esfera de referencia. El procedimiento para el cálculo de la normal a la superficie corneal asociada a este rayo requiere conocer la dirección del rayo que une a P_e con P_d . Así, a partir del punto P_e sobre la esfera de referencia, se traza un rayo de regreso normal a la superficie esférica utilizando el algoritmo de la

sección anterior. La dirección la podemos representar, en el sistema de coordenadas de la esfera de referencia, por

$$\hat{r}_{r1} = (r_{r1x}, r_{r1y}, r_{r1z}).$$

Este rayo eventualmente incidirá sobre el plano de detección en un punto Q_1 . Este punto es generalmente distinto al punto real de intersección P_d , si la superficie que se está evaluando no es esférica o no está alineada y centrada, y debe estar sobre el centro del detector de posición. En lo subsiguiente, todos los vectores \hat{r}_i que se usarán, estarán normalizados.

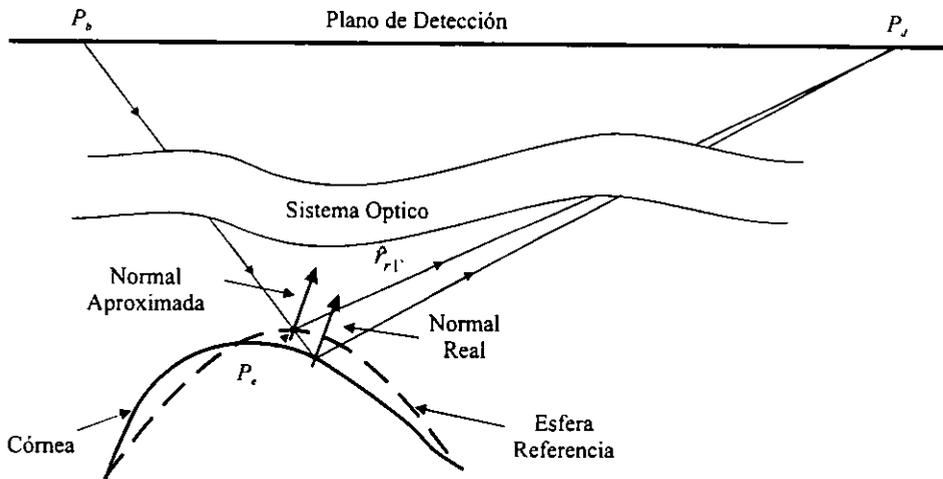


Figura 3.9. Diagrama que muestra cómo, sustituyendo el punto de intersección del haz incidente con la superficie real por el punto donde este mismo haz intersecciona a la esfera de referencia, se encuentra que la normal aproximada es muy parecida a la normal real.

Ahora bien, de la dirección del rayo \hat{r}_{r1} que parte del punto P_e sobre la esfera de referencia e incide en el punto Q_1 sobre el plano de detección, deseamos encontrar la dirección del rayo que une a los puntos P_e y P_d , figura 3.10.a. Para encontrar esta dirección, proponemos un método que consiste en efectuar pequeños incrementos Δr en las componentes de \hat{r}_{r1} y mandar los rayos con estas nuevas direcciones para que incidan sobre el plano de detección en puntos muy próximos al punto Q_1 , de incremento ΔQ . En general, el incremento Δr en las componentes del vector \hat{r}_{r1} será una función del incremento ΔQ de la posición del punto Q_1 sobre el plano de detección, es decir

$$\Delta Q = f(\Delta r).$$

De esta relación sólo sabemos que si no hay incremento ($\Delta r = 0$) en las coordenadas de \hat{r}_{r1} , entonces el rayo llegará al mismo punto Q_1 y en consecuencia $\Delta Q = 0$, por lo que aseguramos que la función f pasa forzosamente por el origen. Si bien la función puede tener una forma analítica compleja,

podemos suponer (si los incrementos son pequeños) que cerca del origen la relación entre los incrementos sea aproximadamente lineal, figura 3.10.b.

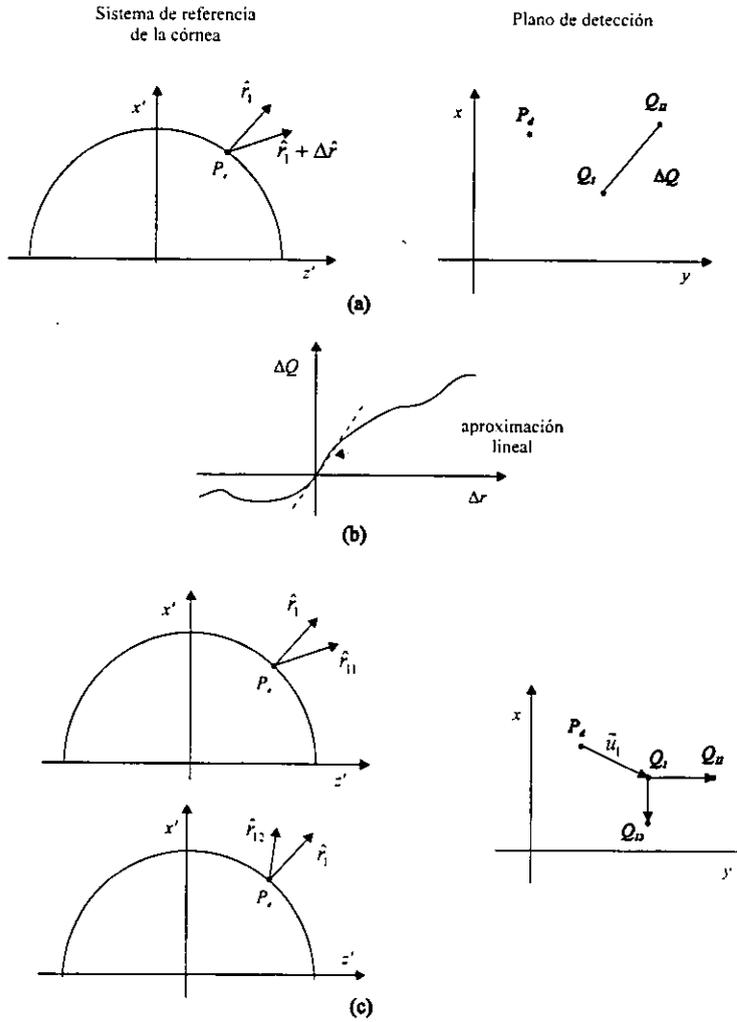


Figura 3.10. Cálculo de las normales a la superficie.

Con esto en mente, se trazan un par de rayos, provenientes del punto P_e , pero con direcciones tal que no difieran mucho de \hat{r}_{r1}

$$\hat{r}_{11} = (r_{r1x}, r_{r1y} + e_1, r_{r1z}) = (r_{11x}, r_{11y}, r_{11z})$$

y

$$\hat{r}_{12} = (r_{r1x}, r_{r1y}, r_{r1z} + e_1) = (r_{12x}, r_{12y}, r_{12z}).$$

Nótese que se incrementan de manera independiente las componentes de \hat{r}_{r1} . Aquí, $e_1 \ll 1$ (en nuestras evaluaciones utilizamos $e_1 = 0.001$); estos rayos intersectarán al plano de detección en los puntos Q_{11} y Q_{12} , respectivamente, figura 3.10.c.

Sobre el plano de detección podemos definir el vector

$$\vec{a}_1 = P_d Q_1$$

que nos da el desplazamiento del punto de detección P_d , proporcionado por la superficie real, al punto Q_1 , dado por la esfera de referencia; y a los vectores

$$\vec{v}_{11} = \overline{Q_1 Q_{11}} \text{ y } \vec{v}_{12} = \overline{Q_1 Q_{12}},$$

que representan los incrementos sobre el plano de detección. En general, estos dos vectores no son paralelos por lo que podemos suponer que cualquier vector sobre el plano de detección lo podemos escribir como

$$\vec{u}_1 = a_1 \vec{v}_{11} + b_1 \vec{v}_{12}$$

donde

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{u_{1y} v_{12x} - u_{1x} v_{12y}}{v_{11y} v_{12x} - v_{11x} v_{12y}} \\ b_1 &= \frac{u_{1x} v_{11y} - u_{1y} v_{11x}}{v_{11y} v_{12x} - v_{11x} v_{12y}} \end{aligned} \right\}, \quad (3.9)$$

y se ha supuesto que los vectores que representan los incrementos \vec{v}_{11} y \vec{v}_{12} son linealmente independientes.

Usando los valores obtenidos en (3.9), se construye un nuevo rayo que sale del punto P_e sobre la esfera de referencia, el cual está dada por

$$\hat{r}_{r2} = (r_{r1x}, r_{r1y} + b_1 e_1, r_{r1z} + a_1 e_1) = (r_{r2x}, r_{r2y}, r_{r2z}). \quad (3.10)$$

Este rayo que realmente no es reflejado, sólo es de prueba, incidirá sobre el plano de detección en un punto Q_2 . Si se cumple que la distancia de este punto al de detección es menor que un número pequeño predeterminado $\varepsilon \ll 1$ (en nuestro caso utilizamos $\varepsilon \approx 10^{-6}$), es decir, si

$$d_2 \equiv |\vec{u}_2| < \varepsilon$$

donde

$$\vec{u}_2 = \overline{P_d Q_2}.$$

Entonces, el procedimiento de unir el punto P_d sobre el plano de detección con el punto P_e sobre la esfera de referencia habrá concluido. La ecuación (3.10), que indica la dirección aproximada que une ambos puntos, se sustituye en (3.8) para obtener así la normal aproximada asociada a este rayo. Si por lo contrario, $d_2 > \varepsilon$, el proceso se repite iterativamente, pero ahora comenzando con la dirección inicial dada por la ecuación (3.10); el rayo interseca al punto de detección en Q_2 . Como antes, se construyen un par de vectores unitarios que representan a los vectores reflejados cuyas direcciones son ligeramente diferentes a las de (3.10); éstos son:

$$\hat{r}_{21} = (r_{r2x}, r_{r2y} + e_2, r_{r2z}) = (r_{21x}, r_{21y}, r_{21z})$$

y

$$\hat{r}_{22} = (r_{r2x}, r_{r2y}, r_{r2z} + e_2) = (r_{22x}, r_{22y}, r_{22z}).$$

Aquí, e_2 es una fracción de e_1 (en nuestro caso usamos $e_2 = e_1/2$). Estos rayos intersestrarán al plano de detección en los puntos Q_{21} y Q_{22} , respectivamente. Análogamente al caso anterior, si v_{21} y v_{22} son linealmente independientes, es posible expresar a \bar{u}_2 , como

$$\bar{u}_2 = a_2 \bar{v}_{21} + b_2 \bar{v}_{22}$$

$$\text{donde } a_2 = \frac{u_{2y}v_{22x} - u_{2x}v_{22y}}{v_{21y}v_{22x} - v_{21x}v_{22y}}, b_2 = \frac{u_{2x}v_{21y} - u_{2y}v_{21x}}{v_{21y}v_{22x} - v_{21x}v_{22y}}, \bar{v}_{21} = \overline{Q_2Q_{21}} \text{ y } \bar{v}_{22} = \overline{Q_2Q_{22}}.$$

Finalmente, la dirección del rayo reflejado será

$$\hat{r}_{r3} = (r_{r2x}, r_{r2y} + b_2 e_2, r_{r2z} + a_2 e_2) = (r_{r3x}, r_{r3y}, r_{r3z}). \quad (3.11)$$

Este rayo reflejado incidirá eventualmente sobre el plano de detección en el punto Q_3 , si se cumple

$$d_3 = |\bar{u}_3| < \varepsilon$$

donde

$$u_3 = \overline{P_d Q_3}.$$

Entonces, la dirección del haz reflejado estará dada por la expresión (3.11) que sustituida en (3.8) nos proporciona la normal asociada al rayo. Si por lo contrario $d_3 > \varepsilon$, se vuelve a repetir el proceso. Así, para la j -ésima iteración tenemos que un rayo que sale del punto P_e sobre la esfera de referencia en la dirección

$$\hat{r}_j = (r_{rjx}, r_{rjy}, r_{rjz})$$

eventualmente incidirá sobre el plano de detección en el punto Q_j . Luego, se trazan un par de rayos con direcciones casi similares a las de \hat{r}_j ,

y

$$\hat{r}_{j1} = (r_{j1x}, r_{j1y} + e_j, r_{j1z}) = (r_{j1x}, r_{j1y}, r_{j1z})$$

$$\hat{r}_{j2} = (r_{j2x}, r_{j2y}, r_{j2z} + e_j) = (r_{j2x}, r_{j2y}, r_{j2z})$$

que incidirán sobre el plano de detección en Q_{j1} y Q_{j2} , respectivamente; aquí, $e_j = e_{j-1}/2$. Si definimos los vectores $\bar{u}_j = \overline{PQ_{j1}}$, $\bar{v}_{j1} = \overline{Q_jQ_{j1}}$ y $\bar{v}_{j2} = \overline{Q_jQ_{j2}}$ sobre el plano de detección, y suponemos que son linealmente independientes, podemos escribir

$$\bar{u}_j = a_j \bar{v}_{j1} + b_j \bar{v}_{j2}$$

donde $a_j = \frac{u_{2y}v_{22x} - u_{2x}v_{22y}}{v_{21y}v_{22x} - v_{21x}v_{22y}}$, $b_j = \frac{u_{1x}v_{j1y} - u_{1y}v_{j1x}}{v_{j1y}v_{j2x} - v_{j1x}v_{j2y}}$; y así, el rayo que sale del punto P_e sobre la esfera de referencia es

$$\hat{r}_{r(j+1)} = (r_{j1x} + b_j e_j, r_{j1y} + a_j e_j, r_{j1z}) = (r_{r(j+1)x}, r_{r(j+1)y}, r_{r(j+1)z})$$

que incidirá sobre el plano de detección en un punto Q_{j+1} . Si se cumple que

$$d_{j+1} \equiv |\bar{u}_{j+1}| < \varepsilon$$

donde

$$\bar{u}_{j+1} = P_d Q_{j+1}$$

entonces el procedimiento de unir el punto P_d sobre el plano de detección con el punto P_e sobre la esfera de referencia habrá concluido y $\hat{r}_{r(j+1)}$ es la dirección buscada.

Este procedimiento iterativo se repite para cada uno de los rayos de la espiral y se obtiene la dirección del rayo que une a los puntos P_e sobre la esfera de referencia con los puntos medidos P_d de los rayos que inciden sobre el plano de detección. Con estas direcciones del haz reflejado y las direcciones previamente conocidas del haz incidente, se obtienen las normales a la superficie corneal de manera aproximada usando la ecuación (3.8). Normalmente el proceso converge después de tres o cuatro iteraciones, aunque no hay garantía de que esto suceda. La experiencia muestra que el proceso es útil para la mayoría de los casos.

3.5. Reconstrucción de la Superficie.

Una vez calculadas las normales a la superficie, lo que sigue es reconstruir la superficie usando la ecuación fundamental de la deflectometría láser (3.1). Por conveniencia, ésta se expresa en coordenadas esféricas las cuales se relacionan con las coordenadas cartesianas locales de la esfera de referencia por,

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right),$$

y

$$\phi = \arctan \frac{y'}{x'}$$

donde como es usual, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En estas coordenadas, el elemento de línea de (3.1) se escribe como

$$d\vec{s} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin\theta d\phi \quad (3.12)$$

y la normal a la superficie es

$$\hat{n} = n_r \hat{r} + n_\theta \hat{\theta} + n_\phi \hat{\phi} \quad (3.13)$$

donde

$$n_r = n_x \sin\theta \cos\phi + n_y \sin\theta \sin\phi + n_z \cos\theta$$

$$n_\theta = n_x \cos\theta \cos\phi + n_y \cos\theta \sin\phi - n_z \sin\theta$$

$$n_\phi = -n_x \sin\phi + n_y \cos\phi.$$

Aquí, $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ es la normal a la superficie calculada previamente en las coordenadas cartesianas del sistema de referencia de la esfera, y las coordenadas angulares (θ, ϕ) están dadas de manera aproximada por el barrido, esto es, donde incide el haz sobre la esfera de referencia. De (3.12) y (3.13) en la ecuación de la deflectometría láser (3.1), resulta

$$\frac{dr}{r} + \frac{n_\theta}{n_r} d\theta + \frac{n_\phi \sin\theta}{n_r} d\phi = 0.$$

Como las coordenadas angulares son proporcionadas por el barrido, para encontrar la forma de la superficie sólo tenemos que integrar la ecuación anterior y calcular la coordenada radial. Así, integrando la expresión anterior, resulta

$$r = r_o \exp\left(-\int \left(\frac{n_\theta}{n_r} d\theta + \sin\theta \frac{n_\phi}{n_r} d\phi\right)\right). \quad (3.14)$$

Esta expresión proporciona la coordenada radial; r_o corresponde a la coordenada radial de un punto del barrido (r_o, θ_o, ϕ_o) que suponemos conocido; en nuestra simulación tomamos el punto del comienzo del barrido que corresponde al origen del sistema de coordenadas asociado al plano de detección.

Pero como del barrido tomamos una muestra discreta de N puntos ($N=100$, en nuestro caso), trazando el mismo número de rayos, la integral de (3.14) se tiene que resolver para esta muestra de N puntos, empleando para la integración el método de trapecios [39]. Así, la integral

$$I = \int \left(\frac{n_\theta}{n_r} d\theta + \text{sen } \theta \frac{n_\phi}{n_r} d\phi \right)$$

se escribe como

$$I \approx \sum_i \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{2} \left(\frac{n_{\theta_i}}{n_r} + \frac{n_{\theta_{i+1}}}{n_r} \right) + \sum_i \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{2} \left(\frac{n_{\phi_i}}{n_r} \text{sen } \theta_i + \frac{n_{\phi_{i+1}}}{n_r} \text{sen } \theta_{i+1} \right).$$

La ec. (3.14) se escribe como

$$r_n = r_0 \exp \left[- \sum_i^{n-1} \left\{ \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{2} \left(\frac{n_{\theta_i}}{n_r} + \frac{n_{\theta_{i+1}}}{n_r} \right) + \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{2} \left(\frac{n_{\phi_i}}{n_r} \text{sen } \theta_i + \frac{n_{\phi_{i+1}}}{n_r} \text{sen } \theta_{i+1} \right) \right\} \right] \quad (3.15)$$

y nos proporciona la coordenada radial correspondiente al punto de incidencia del n -ésimo rayo del barrido, aquí $0 \leq n \leq N - 1$. Notar que la constante de integración r_0 aparece como factor, no como sumando eso afecta al tamaño no al origen de los resultados.

En resumen, dadas las direcciones a partir del trazo de rayos de ida y los puntos sobre el plano de detección, se calculan las direcciones que unen estos puntos con los de la intersección del haz de ida con la esfera de referencia. Entonces, a partir de (3.8) se calculen las normales aproximadas a la superficie corneal y con éstas, y el conocimiento de las coordenadas angulares, mediante la ec. (3.15) se obtienen las coordenadas radiales de la superficie corneal y en consecuencia la forma de la superficie, esto es, tenemos (r_n, θ_n, ϕ_n) .

Cabe mencionar que la precisión con la que se determine r_n dependerá en gran medida de la magnitud de los incrementos $\Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i$, y $\Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i$; si los puntos consecutivos de la trayectoria están muy próximos unos con otros, el error cometido al calcular r_n será inferior que en el caso donde se encuentran más separados los puntos de detección y aun más si algunos de los puntos no son registrados.

Debemos notar que una de las ventajas de este método de evaluación de la topografía corneal puede, en principio, evaluar toda la superficie de la córnea en donde haya rayos incidentes dados por el barrido y que los reflejados sean capaces de ser detectados; además, a reserva de conocer de antemano un punto de la superficie, el método no hace ninguna suposición sobre la forma de la superficie a evaluar. En el siguiente capítulo realizaremos algunas simulaciones donde se analizará cuál es la precisión que proporciona el método cuando se utiliza como superficie de referencia una esfera.

3.5. Conclusión.

Con el propósito de cumplir con los requerimientos necesarios para la evaluación de la topografía corneal que deben tener los instrumentos diseñados para esta tarea, aquí se describe un nuevo dispositivo experimental que permitirá medir toda la topografía corneal en un tiempo inferior a 1/100 de segundo sin hacer suposiciones de su forma. Su diseño es tal que, si se coloca la esfera de referencia en la posición de la superficie corneal a probar, se registrará un sólo punto sobre el detector de posición, que cuando el sistema se encuentra bien alineado, será el centro del detector; esto hace que el método sea una prueba nula.

La reconstrucción de la topografía corneal con esta técnica está basada en la deflectometría láser por reflexión y requiere el cálculo de las normales a la superficie con la información proporcionada por el detector del queratopógrafo. Para ello, se construye un algoritmo que permite encontrar iterativamente la dirección del rayo que une al punto del plano de detección con el punto correspondiente sobre la esfera de referencia, para así obtener de manera aproximada las normales de la superficie a evaluar. Finalmente, con las normales aproximadas se obtiene la topografía de la superficie. Así, si la superficie de referencia está muy próxima a la real se espera que el método proporcione la forma de la superficie con una buena precisión, siempre y cuando se puedan registrar todos los puntos de detección.

CAPÍTULO 4

QUERATOPOGRAFÍA LÁSER: SIMULACIÓN

El algoritmo desarrollado para la evaluación de la topografía corneal por deflectometría láser del capítulo anterior, se implementó en lenguaje de programación C [40] para así poder realizar evaluaciones numéricas. Así, usando el programa de evaluación de la topografía corneal, en este capítulo se efectúan una serie de simulaciones para estudiar la precisión que puede darnos el método. Para ello, simulamos córneas con superficies de revolución suaves y con superficies con variaciones cosenoidales que no son de revolución. Asimismo, se hace un estudio detallado de cómo el ruido que se introduce al sistema afecta al método de evaluación. Este ruido puede deberse a la estabilidad del haz láser, a la precisión finita del detector de posición, a perturbaciones ambientales como turbulencia, a movimientos involuntarios del ojo y principalmente a las vibraciones mecánicas que se introducen por el movimiento del espejo oscilatorio y la rotación del prisma.

4.1. Simulación.

Con el algoritmo de simulación se busca generar datos de los puntos de detección como si se hubieran obtenido experimentalmente. Para ello, primeramente se obtienen los puntos del barrido haciendo uso las ecuaciones del apéndice A [3]; posteriormente y partiendo de los puntos del barrido se efectúa un trazo de rayos incidentes (sección 3.3.3) para obtener los puntos de intersección con la superficie corneal de simulación, de la cual se desea conocer su topografía. Ahora bien, partiendo de los puntos sobre la superficie corneal de simulación se realiza un trazo de rayos reflejados (sección 3.3.4) para así obtener los puntos de detección que es el lugar donde el haz intersecta al plano de detección. La figura 4.1 muestra el diagrama de bloques de la simulación. Por otra parte, los puntos de detección serán los datos experimentales que se utilicen para la evaluación de la topografía de la superficie.

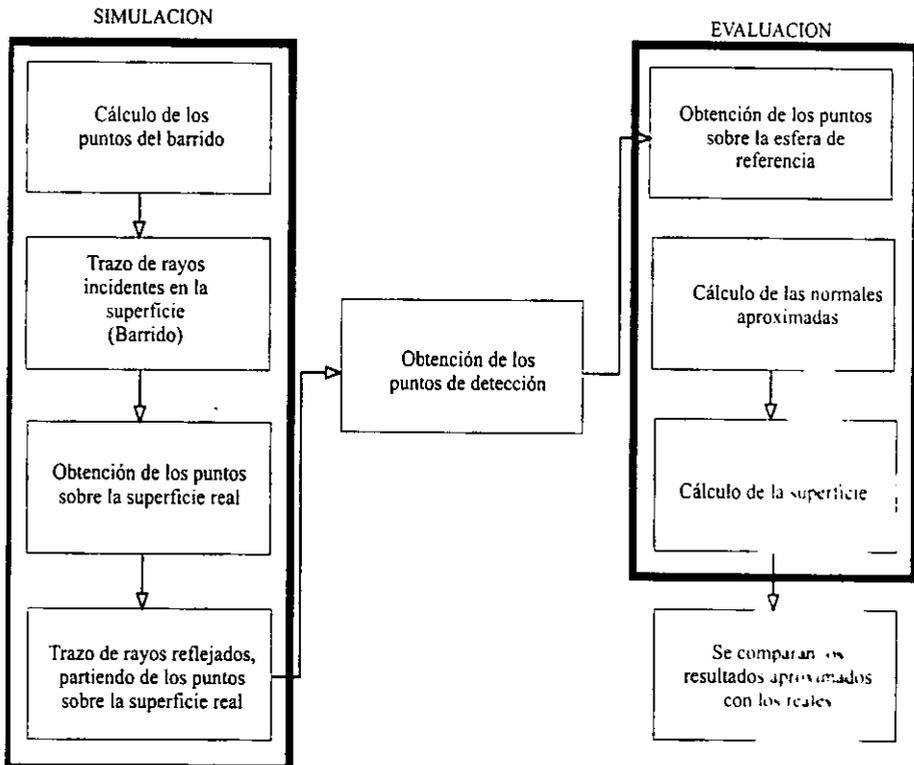


Figura 4.1. Diagrama de bloques de la simulación.

El algoritmo de evaluación de la topografía de la superficie, por su parte, consiste en obtener los puntos sobre la esfera de referencia. Luego, con éste conjunto de puntos y los puntos de detección, se procede a calcular las normales aproximadas empleando el algoritmo de evaluación de

las normales (sección 3.4.2). A continuación, con las normales calculadas, se integra numéricamente (sección 3.5) obteniéndose así la topografía de la superficie corneal de simulación. Finalmente, se comparan los datos calculados mediante queratopografía láser con los valores teóricos. En la figura 4.1 se muestra un diagrama de bloques de la evaluación.

4.1.1. Superficies de Simulación.

Las superficies empleadas en la simulación se encuentran referidas al sistema de coordenadas de la esfera de referencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

donde tomamos de manera arbitraria $R = 9$ mm (el radio promedio medido de córneas normales [12] es de aproximadamente 7.8 mm).

Una de las superficies empleadas en la simulación es un paraboloides de revolución cuya ecuación está dada por

$$x = -\frac{1}{4G}(y^2 + z^2) + R$$

donde G es el foco del paraboloides. Por otra parte, como la superficie con oscilaciones se escoge una superficie con variaciones cosenoidales sobre el eje y dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left\{ R + A \cos(\phi \pi y) \right\}^2$$

donde A es la amplitud de las oscilaciones en torno a la superficie esférica y $\phi/2$ la frecuencia espacial de estas oscilaciones. La figura 4.2 muestra algunas gráficas de los perfiles, para distintos valores de los parámetros A , ϕ y G , de las superficies utilizadas para simular la superficie corneal (línea continua) así como el perfil de la superficie de referencia (línea punteada). El perfil de la superficie corneal de simulación mostrado en la figura 4.2.a es útil para simular superficies rápidas que se encuentran comúnmente en superficies corneales que presentan deformaciones como el queratocono principalmente [25]; la figura 4.2.b por su parte, muestra una superficie de simulación corneal más achatada y cuya forma puede encontrarse frecuentemente en córneas que han sido sometidas a una queratotomía radial (sección 1.6) [1][24]. Los perfiles para la superficie con variaciones intentan simular superficies corneales cuyas deformaciones sean muy agudas; desde luego que este tipo de condición tal vez sólo se presenta en córneas que han sufrido algún tipo de traumatismo. En resumen, con este tipo de superficies lo que se intenta llevar a cabo es una simulación lo más real posible, al tipo de complicaciones que se pueden presentar sobre la forma de la superficie corneal y que los instrumentos tradicionales empleados para medir su topografía son incapaces de lograrlo con suficiente precisión o que simplemente no proporcionan información alguna.

Cabe mencionar que las expresiones que representan a las superficies de simulación corneal son utilizadas sólo en la última parte del trazo de rayos incidentes (sección 3.3.3) para conocer el punto donde los rayos provenientes del espejo parabólico fuera de eje las intersectan. Los cálculos

para obtener los puntos donde los rayos intersectan a la superficie parabólica, aunque laboriosos, pueden efectuarse algebraicamente sin dificultad ya que siempre es posible despejar a las variables involucradas (que en este caso son las coordenadas donde los rayos incidentes intersectan a la superficie parabólica) de los sistemas de ecuaciones que se obtienen para las distintas posibilidades de las direcciones de los rayos incidentes. Sin embargo, para el caso de la superficie con variaciones en las ecuaciones que se obtienen, no es posible despejar a las variables algebraicamente, ya que se tienen ecuaciones trascendentes; por ello, se tienen que resolver numéricamente empleando un método iterativo para obtener las raíces de las ecuaciones. El método aquí empleado es el algoritmo de Newton-Rhadson [39][41].

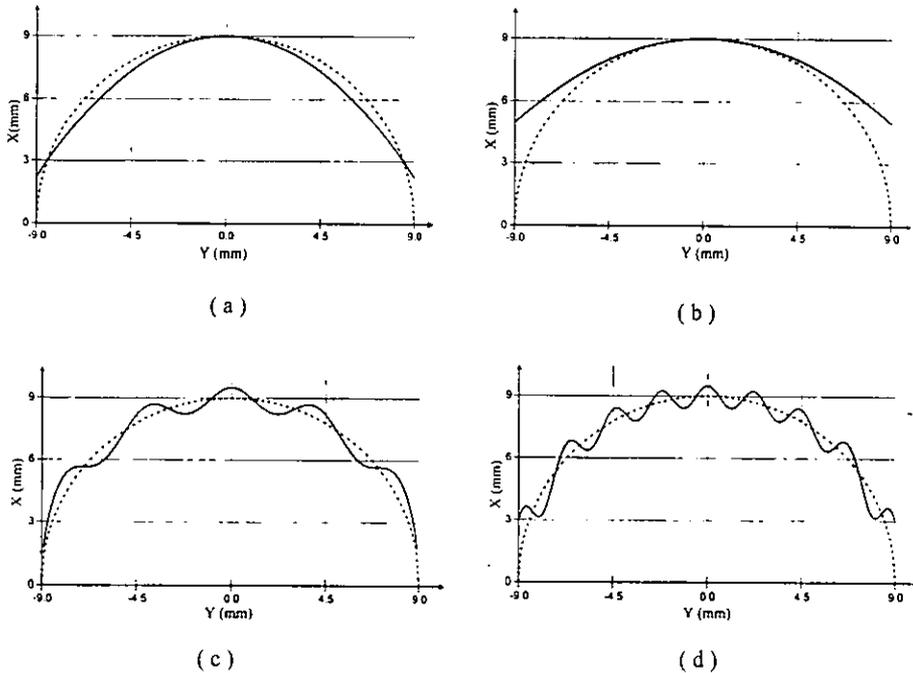


Figura 4.2. La línea punteada representa a la esfera de referencia y la línea sólida a las superficies corneales de simulación. Paraboloides: a) $G = 3 \text{ mm}$, b) $G = 5.5 \text{ mm}$. Superficie con variaciones: c) $A = 0.5 \text{ mm}$, $\phi = 0.5 \text{ mm}^{-1}$, d) $A = 0.5 \text{ mm}$, $\phi = 0.9 \text{ mm}^{-1}$.

4.1.2. Simulación del Ruido.

Desde luego que si lo que se requiere es efectuar una simulación que se aproxime aun más a las dificultades que pueden encontrar al evaluar la topografía corneal, es necesario considerar el ruido que puede introducirse al sistema óptico del queratopógrafo láser de manera aleatoria. Este ruido puede deberse a distintos factores como pueden ser las vibraciones mecánicas del sistema, la turbulencia, la estabilidad del haz y la precisión finita del detector entre otras.

Ahora bien, como lo que se obtienen de manera experimental en las mediciones por queratopografía láser son los puntos de detección, debe ser aquí donde se introduce el ruido simulado. Así pues, la simulación del ruido consiste en aplicar una función aleatoria en ambas coordenadas de cada uno de los puntos de detección de tal manera que cada uno de ellos sea desplazado de su posición original tal y como se muestra esquemáticamente en la figura 4.3. La figura 4.3.a muestra a los puntos de detección antes de aplicarles la función aleatoria de ruido, y la figura 4.3.b muestra cómo queda finalmente la configuración de éstos puntos de detección y es a partir de estos que se lleva a cabo la simulación. La función de ruido empleada para esta tarea, aplicada a cada punto (x,y) de detección, está dada por la siguiente expresión

$$\delta x = \lambda (alx - 50) / 100$$

$$\delta y = \lambda (aly - 50) / 100$$

donde δx y δy nos proporcionan, de manera independiente, el desplazamiento aleatorio de cada punto de detección (x,y) ; alx y aly son funciones aleatorias que retornan un número entero entre 0 y 100 (función *random* en el lenguaje de programación C, la cual tiene una distribución cuadrada [40]) y λ es un parámetro que nos permite ajustar el desplazamiento de las coordenadas del punto de detección. Así por ejemplo, si $\lambda = 0.1$ mm, δx (o δy) tendrán un valor desplazamiento entre -0.05 mm y +0.05 mm de su posición original y dependerá del tipo de distribución de la función aleatoria.

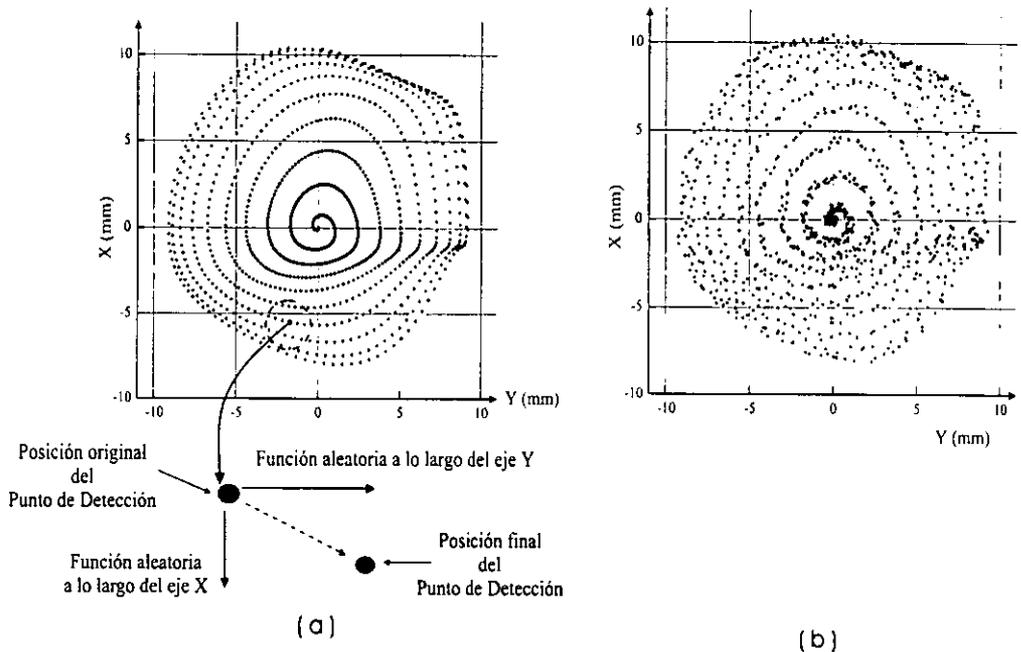


Figura 4.3. Simulación del ruido sobre los puntos de detección; a) Puntos de detección sin ruido, b) puntos de detección con ruido.

4.2. Resultados.

4.2.1. Superficie Parabólica sin Ruido.

Se realizó la simulación para la superficie parabólica empleando distintos valores de la distancia focal obteniéndose primeramente los puntos de detección, algunos de los cuales se muestran en la figura 4.4. Aquí se observa que a menor distancia focal el número de puntos registrados en el plano de detección disminuye. Esto se debe a que la superficie que se está simulando se hace más rápida para estos valores de la distancia focal, y en consecuencia rayos que inciden sobre la periferia de la superficie parabólica de simulación tendrán un ángulo de reflexión lo suficientemente grande como para que se salgan del sistema óptico del queratopógrafo láser. Nótese también que a menor distancia focal de la superficie, el área de detección aumenta y a mayor distancia focal el área de detección disminuye; como antes, esto se debe a que a menor distancia focal mayor deflexión del haz (figura 4.2.a).

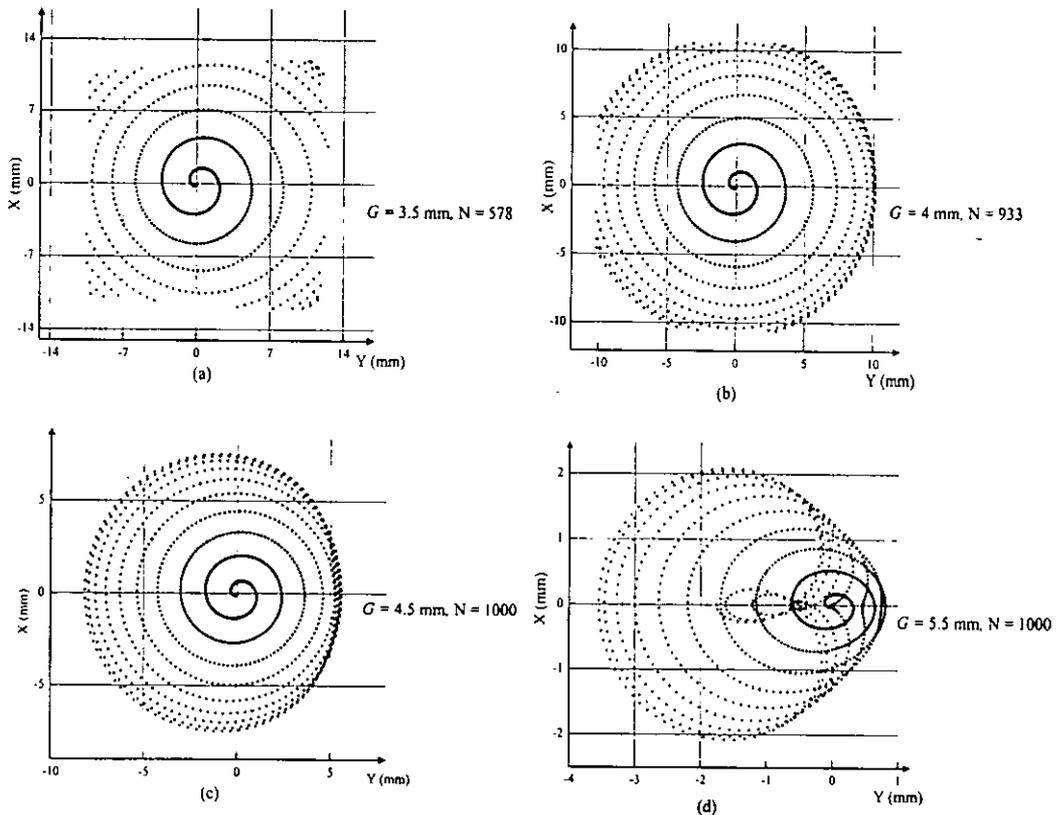


Figura 4.4. Gráficas de los puntos de detección para distintos valores de distancia focal producidos por una superficie parabólica empleada para simular la superficie corneal. Aquí, G = distancia focal y N = número de puntos de detección.

Recuérdese que los puntos de detección mostrados en la figura 4.4 no corresponden realmente a los puntos de detección que se observan sobre el plano del detector de posición. Para obtener los puntos de detección tal y como se obtienen experimentalmente de manera real con el detector de posición, hay que restarles a cada uno de ellos los correspondientes del barrido. Así, si la superficie que se está probando es esférica, entonces el detector de posición sólo registrará un punto el cual caerá sobre el centro del detector siempre y cuando el sistema se encuentre bien alineado. Si por otra parte, la superficie no fuera esférica, se observaría que el haz no necesariamente incidirá sobre el centro del detector. Por ejemplo, en la figura 4.5 se muestran los puntos de detección correspondientes a los puntos de la figura 4.4 tal y como se observarían sobre el detector de posición.

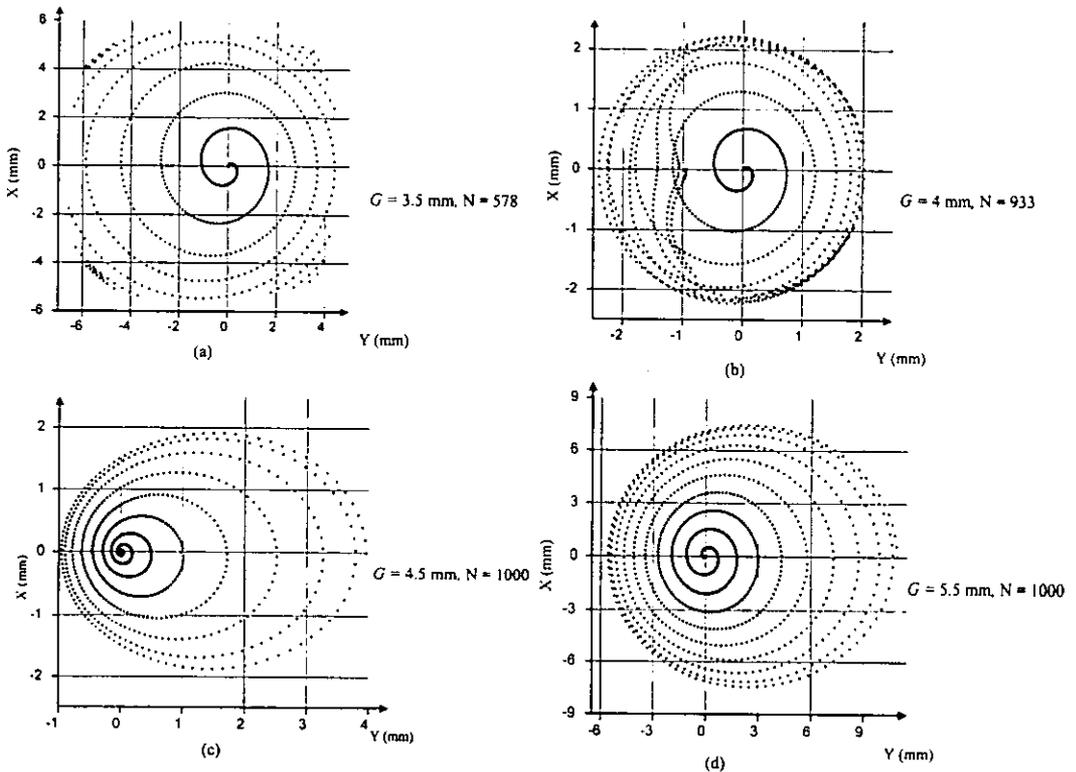


Figura 4.5. Gráficas de los puntos de detección para distintos valores de distancia focal producidos por una superficie parabólica empleada para simular la superficie corneal vistos desde el sistema de referencia asociado al detector de posición.

Ahora bien, debido a que el espejo parabólico fuera de eje produce un haz reflejado que incide sobre la superficie parabólica asimétricamente (figura 4.6) se observa que las espirales obtenidas de los puntos de detección están descentradas, y también como consecuencia de esta asimetría, las trayectorias de las espirales correspondientes a superficies de mayor distancia focal se cruzan. El cruce de las trayectorias del haz de detección no afecta la evaluación de la topografía

debido a que en cada instante se conoce la trayectoria del haz incidente y del haz reflejado, a diferencia de la videoqueratometría, en donde los anillos superpuestos presentan ambigüedad y consecuentemente es imposible la evaluación (sección 2.2).

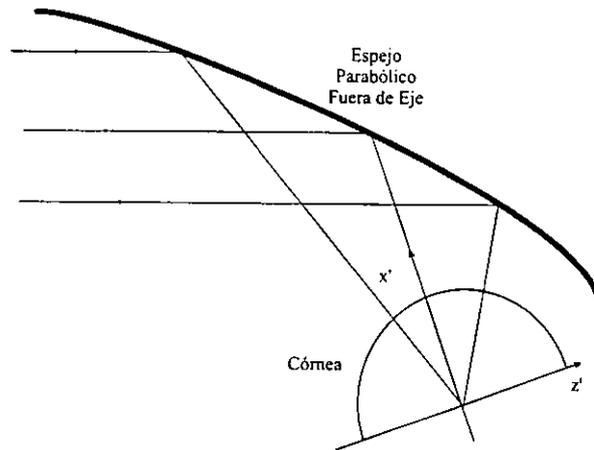
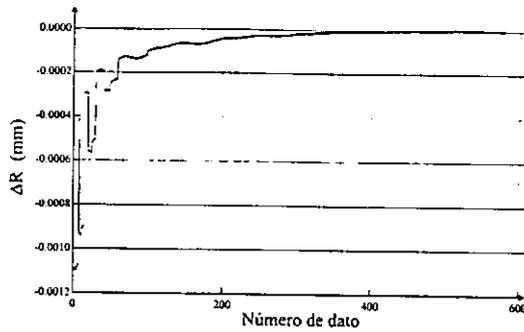


Figura 4.6. Incidencia del haz de manera asimétrica sobre la superficie corneal producida por el espejo parabólico fuera de eje.

A continuación, con los puntos de detección de la figura 4.4 obtenidos para los distintos valores de distancia focal y los puntos sobre la esfera de referencia, se procede a la reconstrucción de la topografía de la superficie, de acuerdo a lo señalado en la sección 4.1. Los resultados se muestran en la figura 4.7; donde se observan las gráficas de las diferencias entre la coordenada radial teórica y calculada, $\Delta R = R_{\text{teórica}} - R_{\text{calculada}}$. Para el caso de superficies de mayor distancia focal, figura 4.7.c y 4.7.d, notamos que existen unas variaciones periódicas en las diferencias de la coordenada radial, que se deben más que nada a que el haz proveniente del espejo parabólico fuera de eje, incide de manera asimétrica sobre la superficie parabólica de prueba y en consecuencia habrá zonas donde la superficie de referencia se aleja más de la superficie de prueba. Esto se muestra en los perfiles de las superficies mostrados en la figura 4.2.a y b; sin embargo, en ambos casos, las mayores diferencias en coordenada radial son del orden de $1 \mu\text{m}$. Por otra parte, en el caso de superficies de menor distancia focal donde algunos de los rayos se salen de sistema óptico, notamos que las diferencias en la coordenada radial de las gráficas de la figura 4.7.a y 4.7.b presentan en la periferia variaciones abruptas que se deben principalmente a la forma en que se lleva a cabo la integración (sección 3.5). La trayectoria de integración propuesta se realiza partiendo de un punto de la periferia siguiendo una trayectoria espiral; esto implica que cuando varios rayos reflejados no entran al sistema óptico en su trayectoria hacia el detector, el error de integración se incrementa pues $\Delta\phi$ es muy grande relativamente hablando, ec. (3.15). Esto produce que al integrar puntos consecutivos de la espiral con la ec. (3.15), sobre la periferia se cometa un error mayor si algunos de los puntos no son registrados. Desde luego que es posible reducir estas diferencias en la coordenada radial sobre la periferia si se escoge una trayectoria de integración más eficiente, eligiendo, por ejemplo, una trayectoria con puntos cercanos. Aún así, la diferencia en coordenada radial en el mayor de los casos del orden de $1 \mu\text{m}$.



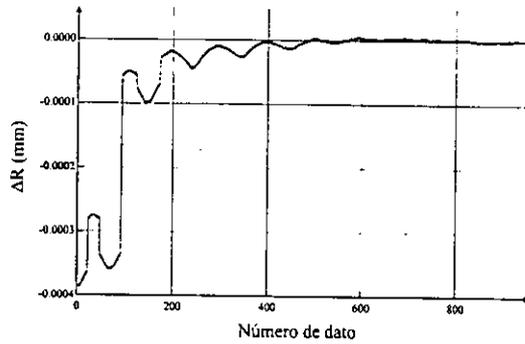
$G = 3.5 \text{ mm}, N = 578$

$\Delta R_{\text{Máximo}} = 0.003 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{Mínimo}} = -1.11 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{RMS}} = 0.185 \mu\text{m}$

(a)



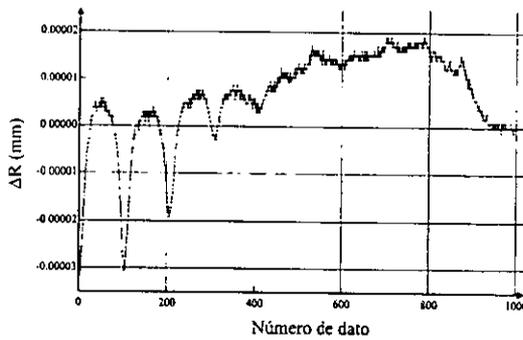
$G = 4 \text{ mm}, N = 933$

$\Delta R_{\text{Máximo}} = 0.006 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{Mínimo}} = -0.385 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{RMS}} = 0.109 \mu\text{m}$

(b)



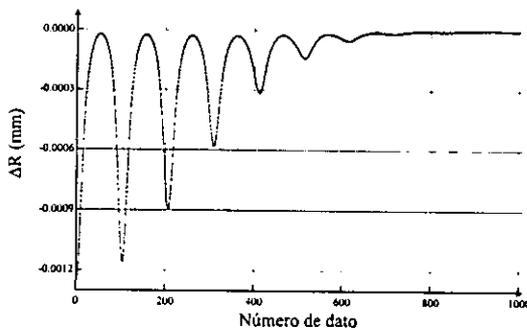
$G = 4.5 \text{ mm}, N = 1000$

$\Delta R_{\text{Máximo}} = 0.019 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{Mínimo}} = -0.032 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{RMS}} = 0.012 \mu\text{m}$

(c)



$G = 5.5 \text{ mm}, N = 1000$

$\Delta R_{\text{Máximo}} = 0.005 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{Mínimo}} = -1.25 \mu\text{m}$

$\Delta R_{\text{RMS}} = 0.271 \mu\text{m}$

(d)

Figura 4.7. Diferencias entre la coordenada radial teórica y la calculada para el caso de la superficie parabólica.

En la tabla 4.1 se resumen el resto de las superficies analizadas, y se muestran los valores rms ΔR_{rms} , el máximo ΔR_{max} y el mínimo ΔR_{min} de las diferencias entre la coordenada radial teórica y calculada para cada una de las superficies parabólicas analizadas. Aquí observamos que el método propuesto para la evaluación de topografía corneal evalúa adecuadamente, aun en los casos donde no se tienen todos los puntos de detección, y a pesar de que las diferencias en la coordenada radial correspondientes a la periferia de la superficie son mayores que las que corresponden al centro. Esto se refleja de manera global en el valor rms de las diferencias de la coordenada radial obtenido ΔR_{rms} , siendo el mayor menor de $0.3 \mu m$ y cuya máxima variación es del orden de $1.3 \mu m$. Estos valores obtenidos son menores que los valores clínicos aceptados, los cuales en el mejor de los casos son del orden de $40 \mu m (\pm 0.25 D)$ [12][19].

Distancia Focal G (mm)	Puntos Registrados N	ΔR_{rms} (μm)	ΔR_{max} (μm)	ΔR_{min} (μm)
3	383	0.072	0.003	-0.529
3.5	578	0.185	0.004	-1.1
4	933	0.109	0.006	-0.385
4.5	1000	0.012	0.019	-0.032
5	1000	0.091	0.009	-0.43
5.5	1000	0.271	0.005	-1.25

Tabla 4.1. Superficie parabólica sin ruido.

Lo anterior muestra que para el caso de superficies de revolución suaves, sin considerar el ruido, se puede lograr una buena precisión en la medición de la topografía corneal de manera global inferior a $0.3 \mu m$. Desde luego la mayor precisión se tiene en la región central que en la periferia donde las diferencias entre la superficie de referencia y la superficie que se requiere evaluar son mayores, figura 4.7, debido al descentramiento del haz incidente sobre la superficie originada por el espejo parabólico fuera de eje y principalmente a la trayectoria de integración. Para el caso de superficies rápidas, la precisión puede aumentarse si se mejora la trayectoria de integración tomando un camino en el cual los incrementos en $\Delta\phi$ ($\Delta\theta$) sean lo más pequeños posibles. Además, el proceso de integración va acumulando error, en general, solamente se compensa si la función a integrar cambia de creciente a decreciente, pero si es notoria, sólo se acumula, no se compensa.

4.2.2. Superficie Parabólica con Ruido.

Para la simulación del ruido, a los puntos de detección de la figura 4.4 se les aplicó la función de ruido descrita en la sección 4.1.2 usando varios valores para el parámetro del ruido con el fin de incrementar el efecto. En la figura 4.8 se muestra un ejemplo de cómo al ir incrementándose el parámetro de ruido, los puntos de detección en lugar de describir una trayectoria espiral suave, van distribuyéndose cada vez más aleatoriamente, hasta llegar el momento, como el caso de mayor ruido, en que la distribución de los puntos de detección ya no se asemeja a una trayectoria espiral.

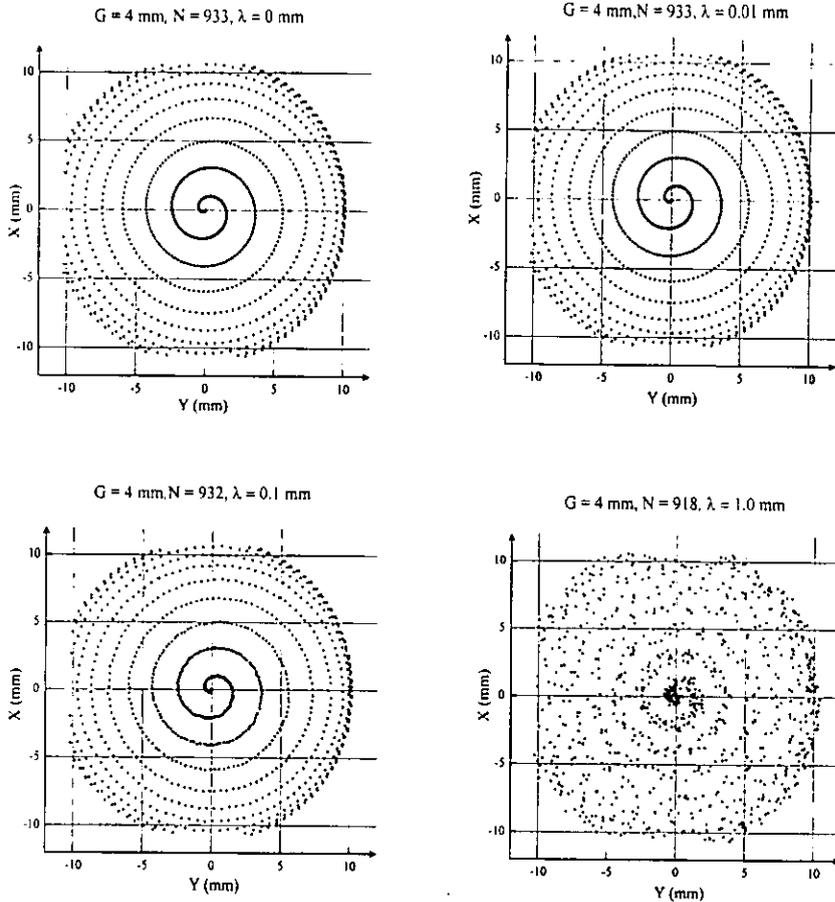


Figura 4.8. Gráficas de los puntos de detección para distintos valores del parámetro de ruido en una superficie parabólica.

En la figura 4.9 se muestra cómo el ruido desplaza a los puntos de detección, produciendo que éstos sigan una trayectoria aleatoria, muy distinta a la trayectoria espiral original, la cual aparentemente no nos proporciona información alguna. Pero a pesar de esto, y a reserva de que alguno de los puntos de detección se muevan a una posición tal que el rayo correspondiente se salga del sistema óptico del queratopógrafo láser, nuestro algoritmo sigue evaluando la topografía de la superficie.

Así, usando el algoritmo de evaluación sobre los puntos de detección con ruido de la superficie parabólica de la figura 4.8 se procedió a calcular las normales a la superficie e integrar para obtener la topografía de estas superficies con ruido. En la figura 4.10 se muestran las diferencias en la coordenada radial teórica y calculada ΔR , donde se observa cómo al ir incrementándose el parámetro de ruido se afecta cada vez más la evaluación de la topografía, aspecto que se ve reflejado en el incremento del valor rms de las diferencias en la coordenada radial ΔR_{rms} . También se observa

que los incrementos son mayores y más aleatorios sobre la periferia que en la región central de la superficie debido principalmente a la trayectoria de integración empleada.

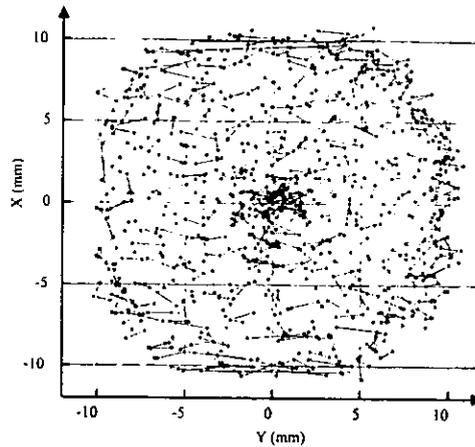


Figura 4.9. Trayectoria aleatoria seguida por el haz sobre el plano de detección, producida por la presencia de ruido.

La tabla 4.2 resume los resultados obtenidos al evaluar la topografía de las superficies parabólicas de distinta distancia focal y diferentes valores del parámetro del ruido. Para el caso de la superficie de menor distancia focal, se nota que el incremento del parámetro del ruido produce una disminución en el registro de puntos sobre el plano de detección debido a que la función de ruido mueve el punto de detección en forma tal que, el rayo que lo une con el punto correspondiente sobre la esfera de referencia se sale del sistema óptico. Por otra parte, para ambos valores de la distancia focal se observa que conforme se incrementa el ruido se produce un aumento en las diferencias ΔR y en el valor *rms* de las diferencias ΔR_{rms} en la coordenada radial; esto nos indica que el ruido afecta notablemente la evaluación de la topografía de la superficie, como es de esperarse.

Distancia Focal G (mm)	Parámetro de ruido λ (mm)	Puntos Registrados N	ΔR_{rms} (μm)	ΔR_{max} (μm)	ΔR_{min} (μm)
4	0.0	933	0.109	0.006	-0.385
	0.01	933	0.206	0.003	-0.712
	0.1	932	0.947	0.357	-3.15
	0.5	928	2.38	3.01	-8.39
	1.0	925	3.3	9.61	-8.1
	2.0	911	15.99	42.22	-4.29
4.5	0.0	1000	0.012	0.019	-0.032
	0.01	1000	0.052	0.024	-0.124
	0.1	1000	0.356	0.793	-0.888
	0.5	1000	1.17	0.69	-3.25
	1.0	1000	3.19	4.62	-11.3
	2.0	1000	6.93	17.12	-5.32

Tabla 4.2. Superficie parabólica con ruido.

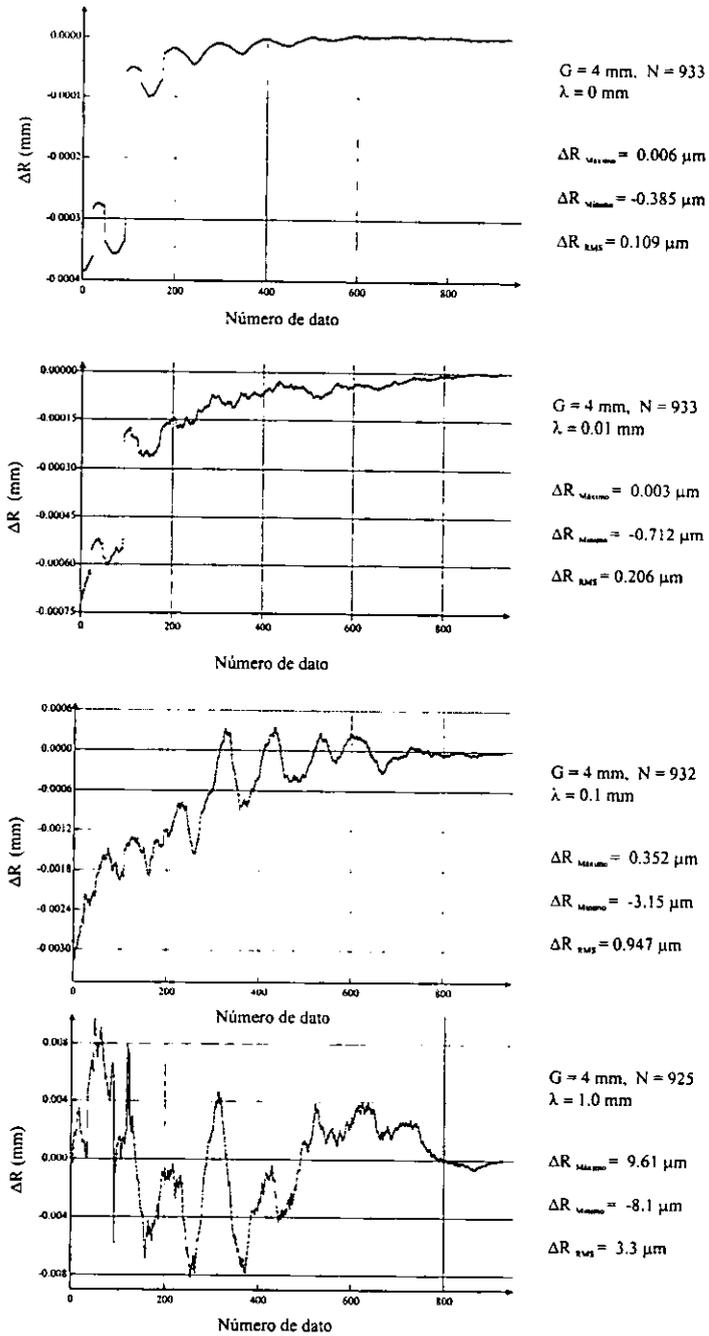


Figura 4.10. Gráficas de las diferencias en la coordenada radial teórica y calculada para distintos valores de los parámetros del ruido en la superficie parabólica.

La figura 4.11 muestra que al ir incrementando el ruido, el valor rms de las diferencias ΔR_{rms} en la coordenada radial también se va incrementando rápidamente, o de manera equivalente, la precisión con la que se evalúa la topografía va disminuyendo. Al igual que en el apartado anterior, de las gráficas de la figura 4.10 se observa que se tiene una precisión mayor en la evaluación de la topografía para la región central que para la zona de la periferia misma que puede mejorarse si se optimiza la trayectoria de integración.

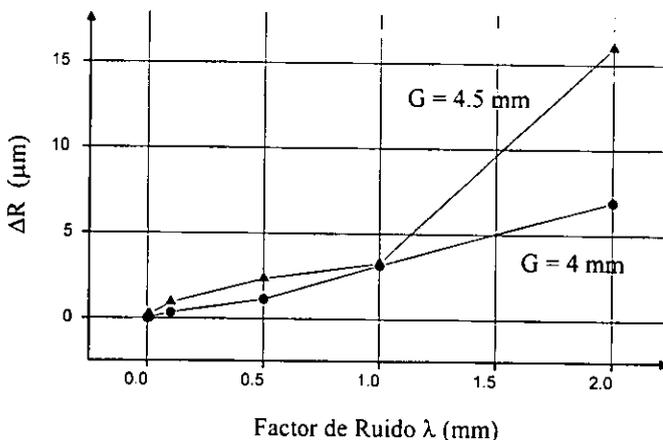


Figura 4.11. Variación del valor rms de las diferencias en la coordenada radial respecto al ruido.

Ahora bien, para que la presencia de ruido no afecte la precisión en las mediciones de la topografía de la superficie considerablemente, se debe aceptar un parámetro de ruido que proporcione un valor ΔR_{rms} que no se aleje mucho del límite obtenido para el caso sin ruido. Este límite para los casos analizados de superficies parabólicas es inferior a $0.3 \mu m$. Así, con valores del parámetro de ruido inferiores a 0.1 mm, que equivale a desplazar en cualquiera de sus coordenadas al punto de detección entre -0.05 a $+0.05$ mm, tendremos valores rms en las diferencias de la coordenada radial ΔR_{rms} inferiores a $1 \mu m$, que no se aleja mucho del valor obtenido para el caso sin ruido. Parámetros de ruido superiores a 0.1 mm proporcionan un valor ΔR_{rms} relativamente grande respecto al valor obtenido para el caso sin ruido, tabla 4.2. Aun así, estos valores son inferiores a los aceptados clínicamente de $\pm 0.25 D$ ($40 \mu m$) [12][19].

4.2.3. Superficie con Variaciones sin Ruido.

Para este caso se propusieron varias superficies con variaciones en la amplitud y la frecuencia espacial de las oscilaciones. La figura 4.12 muestra un ejemplo de los puntos de detección para este tipo de superficies de simulación. Nótese en estas gráficas, cómo al ir incrementándose la frecuencia espacial de las oscilaciones, las trayectorias se hacen más irregulares y el número de puntos registrados disminuye; esto debido a que la pendiente de la superficie en ciertas regiones es tal que reflejan los rayos hacia afuera del sistema óptico del queratopógrafo láser, ver figura 4.2.c y d. Aunque aquí no se muestran, el resto de los gráficos obtenidos al incrementar la amplitud de las

oscilaciones son similares a los aquí mostrados con la única diferencia de que cada vez se registra un número menor de puntos debido a que se salen del sistema óptico.

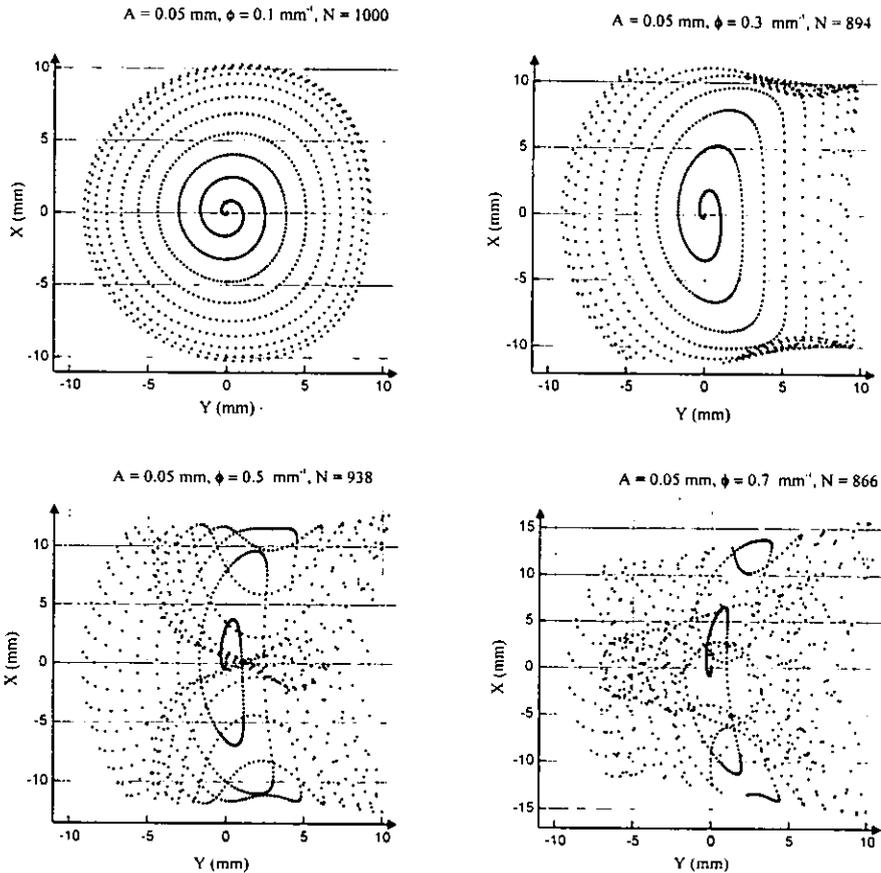


Figura 4.12. Gráficos de los puntos del barrido para la superficie con variaciones.

Como en los casos de la superficie parabólica, con los puntos de detección se calculan las normales a la superficie y se integra numéricamente para obtener la topografía de la superficie. En la figura 4.13 se muestran los gráficos correspondientes a las diferencias en coordenada radial teórica y calculada, ΔR . Obsérvese cómo para el primer gráfico, donde se registran todos los puntos de detección, la gráfica presenta algunas oscilaciones en sus diferencias debidas a la asimetría del haz incidente y principalmente a que hay regiones donde la superficie de la esfera de referencia se aleja más de la superficie teórica, ver figura 4.2.d. En estas regiones las diferencias en la coordenada radial son mayores respecto a las de la región central. El resto de los gráficos de la figura 4.13 presenta el mismo comportamiento de los gráficos de la superficie parabólica. Como puede apreciarse, en la periferia se observa que las diferencias en coordenada radial presentan variaciones muy grandes debido, como antes, a la trayectoria integración ya que existen puntos de la trayectoria de integración que no se logran registrar debido a que los rayos correspondientes sufren de grandes desviaciones de manera que se salen del sistema óptico.

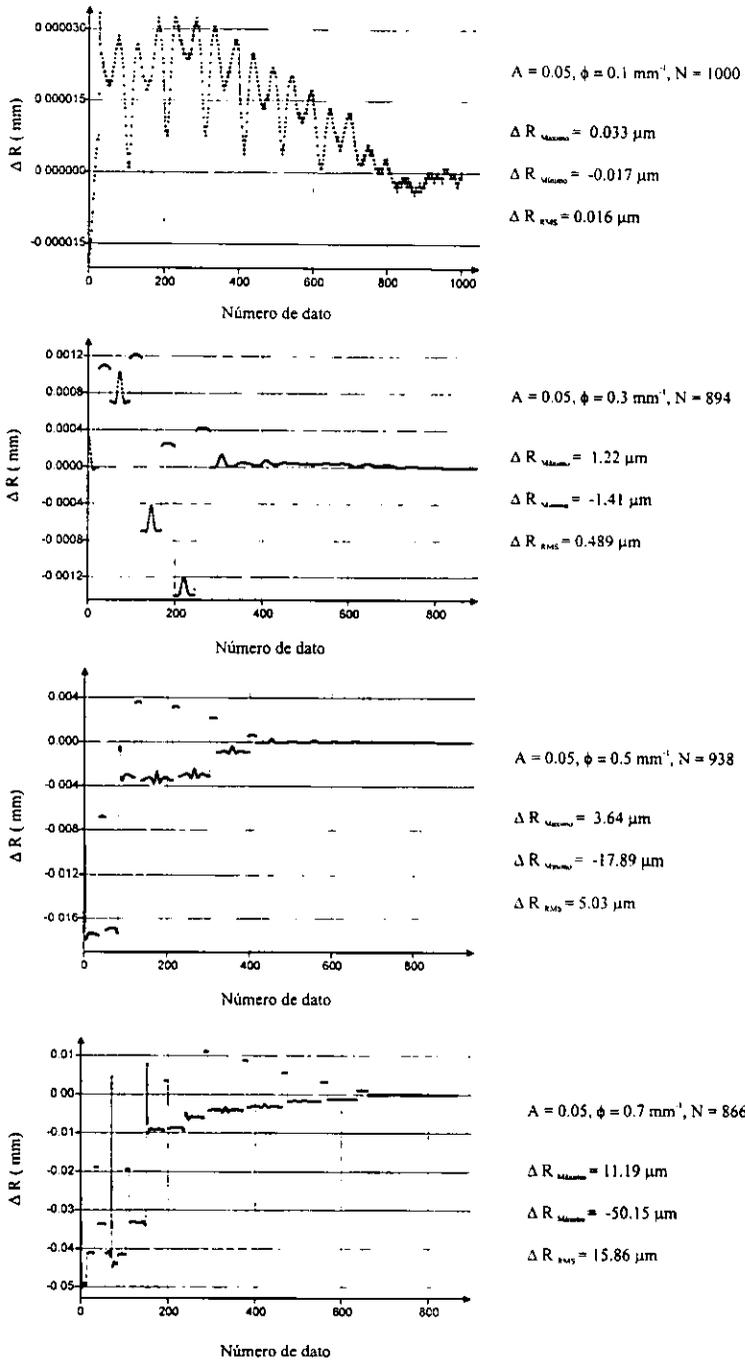


Figura 4.13. Diferencias en coordenada radial teórica y calculada para el caso de la superficie con variaciones.

En la tabla 4.3 se resumen los valores del resto de las superficies analizadas donde se nota que para una frecuencia constante en las oscilaciones de la superficie de prueba, al ir incrementándose la amplitud disminuye el número de puntos y aumenta el valor *rms* de las diferencias en coordenada radial ΔR_{rms} siendo mayor la precisión a amplitudes pequeñas. Si por otra parte, mantenemos constante la amplitud e incrementamos la frecuencia de las oscilaciones, también observamos que ΔR_{rms} aumenta por lo que la precisión será mejor si la frecuencia de las oscilaciones no es muy grande, figura 4.13.

Amplitud <i>A</i> (mm)	Frecuencia ϕ (mm ⁻¹)	Rugosidad <i>A</i> * ϕ	Puntos Registrados <i>N</i>	ΔR_{rms} (μ m)	ΔR_{max} (μ m)	ΔR_{min} (μ m)
0.01	0.1	0.001	1000	0.017	0	-0.028
0.01	0.3	0.003	1000	0.014	0.042	-0.036
0.01	0.5	0.005	1000	0.029	0.163	-0.11
0.01	0.7	0.007	1000	0.052	0.357	-0.237
0.05	0.1	0.005	1000	0.016	0.033	-0.017
0.05	0.3	0.015	894	0.489	1.22	-1.41
0.05	0.5	0.025	938	5.03	3.64	-17.89
0.05	0.7	0.035	866	15.86	11.19	-50.15
0.1	0.1	0.01	951	0.735	2.69	-1.94
0.1	0.3	0.03	582	43.15	27	-129.1
0.1	0.5	0.05	585	128.4	0.181	-222.61
0.1	0.7	0.07	546	147.55	0.055	-238.7
0.3	0.1	0.03	772	16.2	43.74	-44.32
0.3	0.3	0.09	268	67.27	162.91	-237.31
0.3	0.5	0.15	221	679.79	0.156	-1579.91
0.3	0.7	0.21	166	412.37	507.56	-843.49
0.5	0.1	0.05	630	30.36	42.72	-112.65
0.5	0.3	0.15	179	89.37	184.63	-511.67
0.5	0.5	0.25	134	578.87	259	-1089.99
0.5	0.7	0.35	109	720.61	275.78	-1428.01

Tabla 4.3. Superficie con variaciones sin ruido.

Un mejor parámetro para analizar la precisión en este tipo de superficies se muestra en la tercera columna la tabla 4.3, donde se tiene el producto entre la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones; este producto nos dice qué tan rugosa es la superficie que estamos analizando. Así, si se incrementa la rugosidad de la superficie notamos que el valor *rms* en las diferencias de la coordenada radial ΔR_{rms} también aumenta. Para entender el significado de la rugosidad consideremos los gráficos mostrados en la figura 4.14, donde se muestran tres gráficos cosenoidales dos de los cuales tienen la misma pendiente pero distinta amplitud, *a* y *c*, y el otro es de pendiente más suave *b*, e igual amplitud que *c*, esto es

$$\text{Rugosidad} = \frac{A_1}{l_1} = \frac{A_3}{l_3} = 2 \frac{A_2}{l_2}$$

que nos dice que la rugosidad de *a* y *c* es igual y el doble que *b*. Así, al llegar un rayo sobre la superficie de prueba, *a* y *c* desviarán el rayo más o menos el mismo ángulo (en la máxima pendiente), mientras que *b* lo desviará menos.

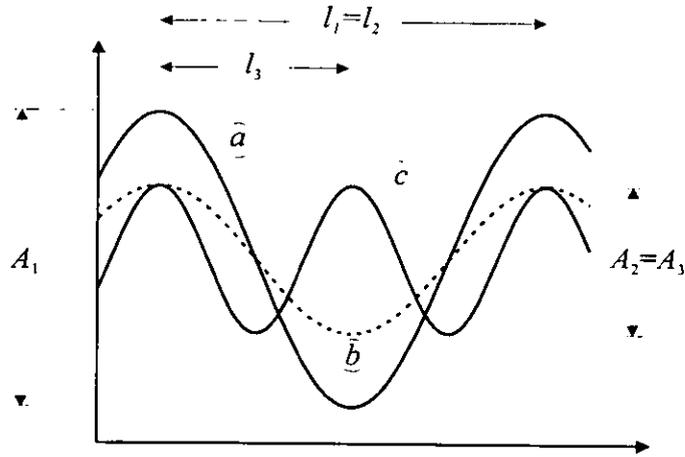


Figura 4.14. Rugosidad.

En la figura 4.15 se muestra una gráfica de la variación de ΔR_{rms} respecto a la rugosidad. De la tabla 4.3 y de la figura 4.15 observamos que una rugosidad inferior a 0.035 nos proporciona valores de ΔR_{rms} menores de 40 μm en el peor de los casos, el resto es inferior a 1 μm . Estos valores caen dentro del rango de los valores clínicos aceptados [12][19] que son de 40 μm ($\pm 0.25 D$). Cabe mencionar, que este valor de 0.035 en la rugosidad corresponde principalmente a superficies donde la amplitud de las oscilaciones es inferior a 0.3 μm , lo cual no es muy grande, y a frecuencias de oscilación pequeñas. De lo anterior podemos deducir que un valor aceptable de la rugosidad de la superficie inferior a 0.035 nos proporciona la topografía de la superficie con una precisión del orden de los 40 μm .

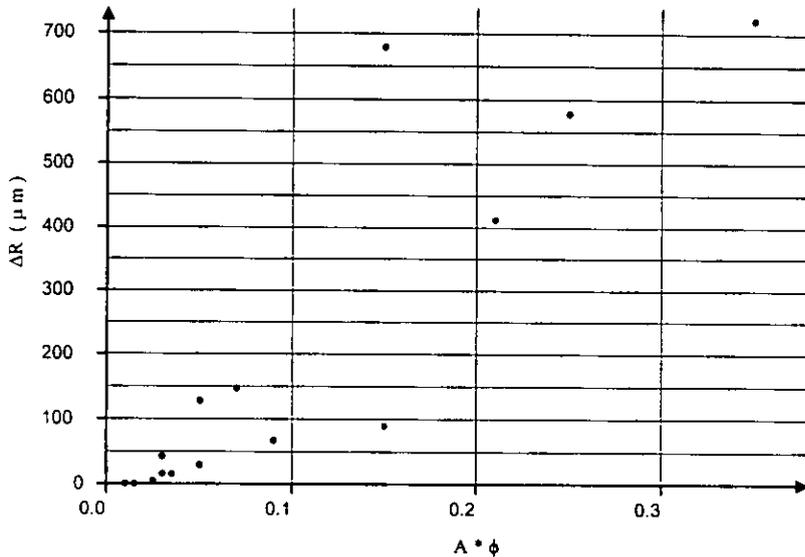


Figura 4.15. Variación del valor rms respecto a la rugosidad de la superficie.

4.2:4. Superficie con Variaciones con Ruido.

Para el caso con ruido se escogieron varias superficies de prueba con distintos valores en la amplitud y frecuencia de las oscilaciones. En la figura 4.16 se muestra un ejemplo de los puntos de detección para una de estas superficies de prueba incrementando el valor del parámetro de ruido. Como en el caso de la superficie parabólica, también aquí notamos que si se incrementa el ruido, la trayectoria que describe el haz sobre el plano de detección se va haciendo cada vez más aleatoria hasta llegar el momento en que se aprecia sólo una conglomeración de puntos que aparentemente no proporcionan información alguna; asimismo, el número de puntos de detección se decrementa debido a que algunos de los rayos se salen del sistema óptico.

Con los puntos de detección obtenidos se hace la evaluación para obtener la topografía de la superficie, calculando las normales a la superficie e integrando. En la figura 4.17 se muestran algunas de las gráficas de las diferencias en coordenada radial teórica y calculada ΔR . Aquí notamos que las mayores diferencias en la coordenada radial pertenecen a los puntos de la periferia y que se deben principalmente a errores debido a la manera que se toma la trayectoria de integración. También notamos cómo el ruido va afectando a estas diferencias produciendo que el error en la medición aumente tal y como se puede verificar en los valores rms de las diferencias ΔR_{rms} .

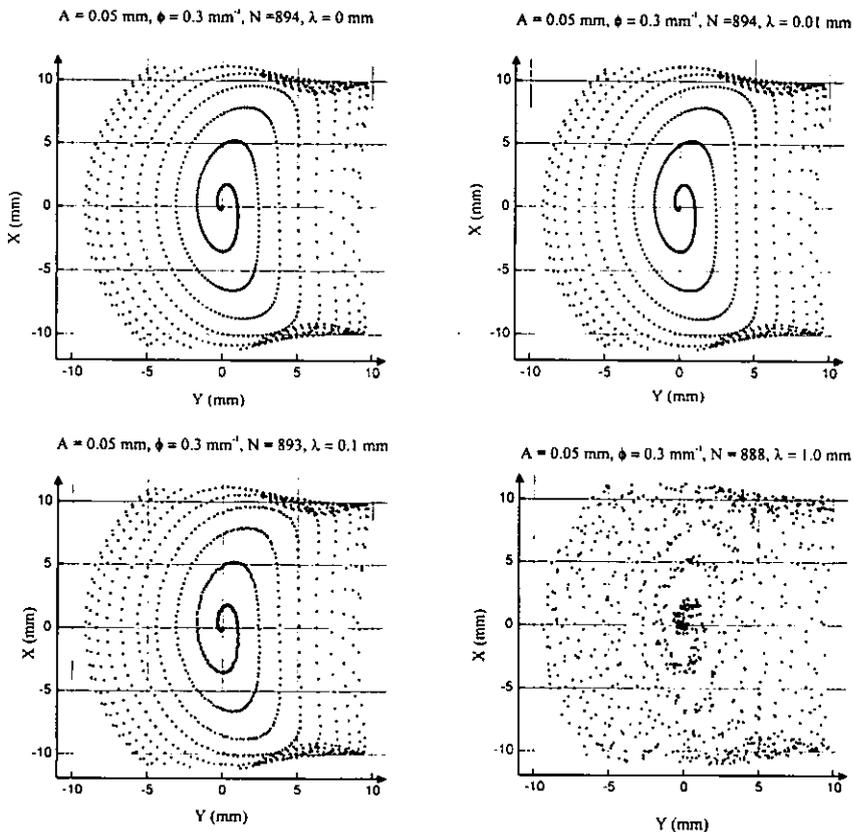


Figura 4.16. Gráficas de los puntos de detección con ruido para la superficie con variaciones.

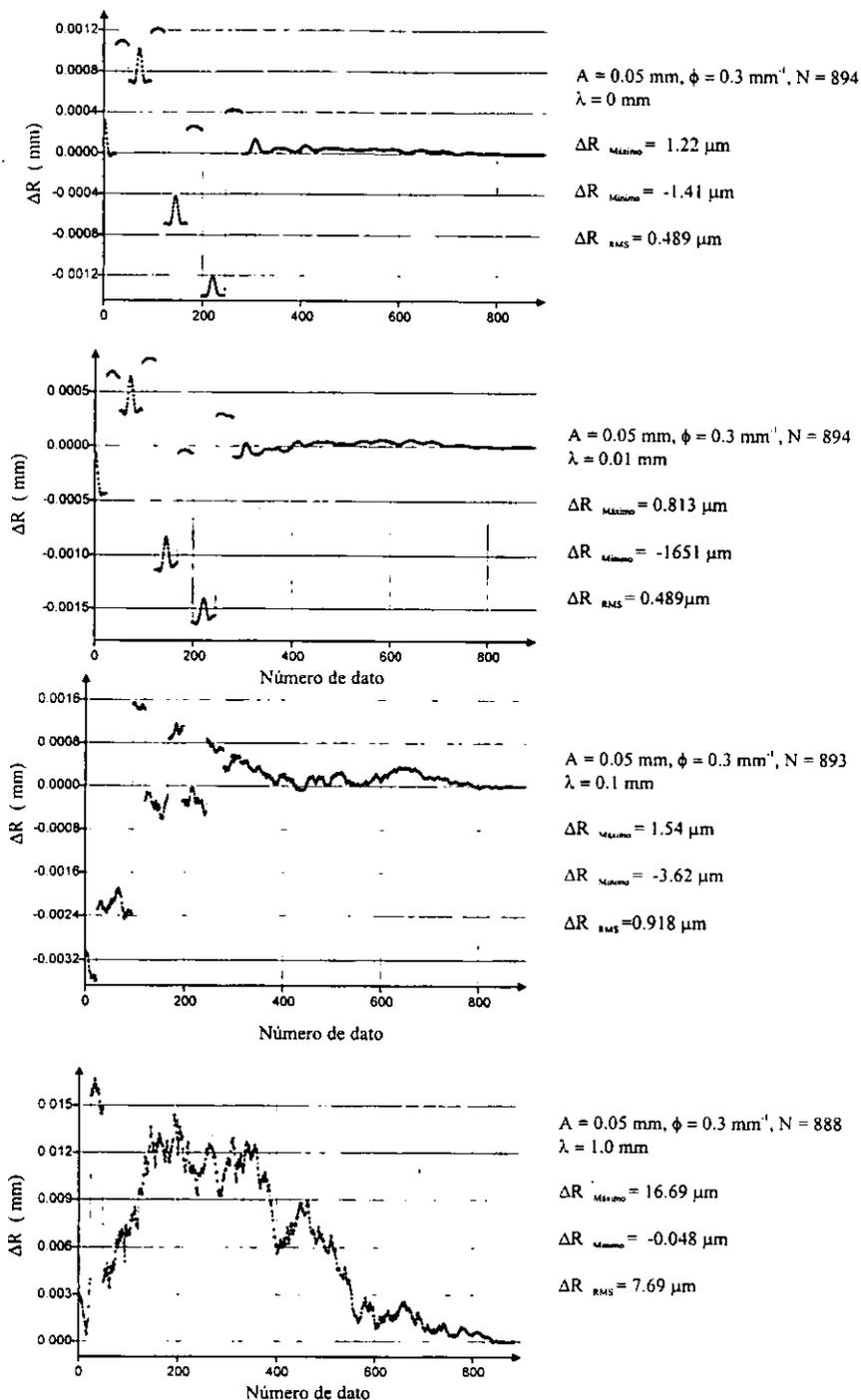


Figura 4.17. Diferencias en coordenada radial teórica y calculada para la superficie con variaciones.

En la tabla 4.4 se resumen los resultados obtenidos para el resto de las superficies analizadas. Para el caso donde todos los puntos de detección son registrados, notamos que al ir aumentando el parámetro del ruido aumenta el valor ΔR_{rms} y el valor máximo o mínimo de las diferencias en la coordenada radial, obteniéndose una mejor precisión para los casos en que el parámetro de ruido no es muy grande. Para el caso donde no se tienen todos los puntos de detección se observa que al incrementarse el parámetro de ruido, el número de puntos registrados disminuye al tiempo que aumenta el valor ΔR_{rms} y el valor máximo de las diferencias en la coordenada radial, siendo mayores las diferencias para estos casos con relación a los casos donde se pueden registrar todos los puntos debido principalmente al error cometido en la trayectoria de integración. También observamos que para un valor del parámetro de ruido constante, el incremento en la rugosidad produce un incremento en ΔR_{rms} .

Amplitud A (mm)	Frecuencia ϕ (mm ⁻¹)	Rugosidad $A*\phi$	Parámetro de ruido λ	Puntos registrados N	ΔR_{rms} (μm)	ΔR_{max} (μm)	ΔR_{min} (μm)
0.01	0.3	0.003	0.0	1000	0.014	0.042	-0.036
			0.01	1000	0.042	0.131	-0.016
			0.1	1000	0.357	1.03	-0.314
			0.5	1000	1.97	2.82	-7.54
			1.0	1000	4.88	14.33	-1.35
			2.0	1000	5.84	19.44	-3.48
0.01	0.5	0.005	0.0	1000	0.029	0.163	-0.11
			0.01	1000	0.071	0.261	-0.039
			0.1	1000	0.232	0.877	-0.296
			0.5	1000	3.74	6.86	-0.814
			1.0	1000	6.91	22.13	-7.86
			2.0	1000	15.34	32.56	-0.473
0.05	0.3	0.015	0.0	894	0.489	1.22	-1.41
			0.01	894	0.489	0.813	-1.65
			0.1	893	0.918	1.54	-3.62
			0.5	891	4.84	1.3	-17.6
			1.0	888	7.69	16.69	-0.048
			2.0	876	10.57	5.03	-29.81

Tabla 4.4. Superficie con variaciones con ruido.

En la figura 4.18 se muestra una gráfica de la variación de ΔR_{rms} contra el parámetro del ruido para distintos valores de la rugosidad. Aquí observamos cómo al aumentar el ruido, aumenta rápidamente el valor ΔR_{rms} . Luego, como en el caso de la superficie parabólica con ruido, aquí también notamos que para que la precisión en las mediciones de la topografía no se vea muy afectada por la presencia de ruido, debemos aceptar un valor del parámetro del ruido menor o igual a 0.1 mm, que para el caso de superficies con variaciones, equivale a tener una precisión inferior a 1 μm para los casos cuya rugosidad es inferior a 0.015.

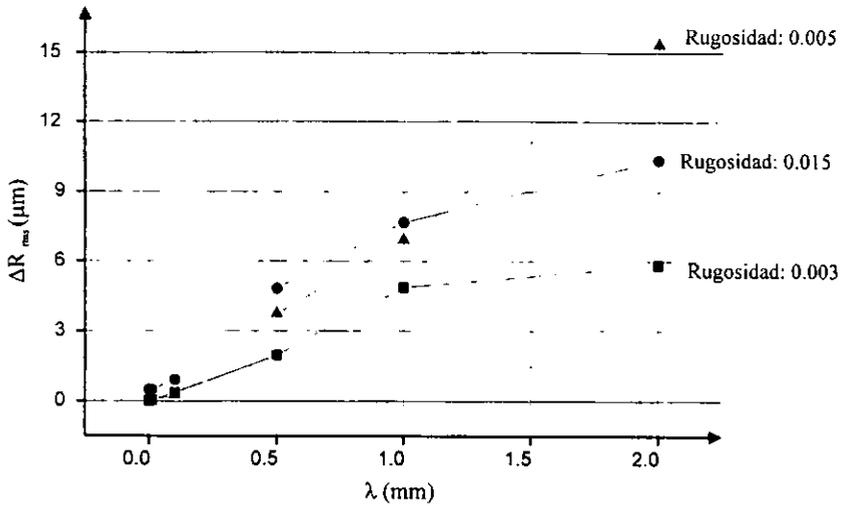


Figura 4.18. Variación del valor rms de las diferencias en la coordenada radial respecto al ruido.

4.3. Conclusión.

La nueva implementación de los algoritmos de evaluación de la topografía corneal, en lenguaje de programación C, nos permitió reducir el tiempo de evaluación de la superficie corneal de 10 minutos en una computadora PC 386-16SX en el programa diseñado por F. Granados [3], a sólo 10 segundos en una computadora PC Pentium de 132 Mhz. Este tiempo relativamente más corto del procesamiento de la información nos permitió estudiar y analizar, mediante simulación numérica, la precisión que se puede alcanzar con el queratopógrafo láser cuando se requiere conocer la topografía de superficies que presentan deformaciones muy pronunciadas y que los sistemas tradicionales no pueden analizar debido principalmente a que suponen que la superficie corneal es una superficie esférica y además efectúan sus mediciones sobre meridianos. Otro aspecto que se presenta en este trabajo es el estudio de la precisión en presencia de ruido, el cual a pesar de que los datos que se tienen sobre el plano de detección se distribuyen aleatoriamente dentro de una zona limitada alrededor de un punto exacto, el algoritmo sigue proporcionando información.

Por otra parte, la simulación de superficies suaves de revolución muestra que nuestro método evalúa la topografía de la superficie con un error inferior a $0.3 \mu\text{m}$ para el caso en que no se considera el ruido e inferior a $1 \mu\text{m}$ si se permite un factor del parámetro de ruido menor a 0.1 mm . Para el caso de la simulación de la superficie con variaciones sin ruido, se encuentra que la topografía de superficie puede obtenerse con una precisión inferior a $40 \mu\text{m}$ en los casos donde la rugosidad de la superficie es inferior a 0.035 . Para el caso de ruido en la evaluación de la superficie con variaciones, se obtiene si la rugosidad es inferior a 0.015 y el parámetro del ruido inferior a 0.1 mm ; entonces, la precisión con la que se evalúa la superficie no se aleja mucho del valor obtenido para el caso sin ruido. En todos estos casos analizados se encuentra que los valores ΔR_{rms} obtenidos son menores que los valores clínicos aceptados, los cuales en el mejor de los casos son del orden de $40 \mu\text{m}$ ($\pm 0.25 \text{ D}$) [12][19]. En los casos analizados del ruido tanto para la superficie parabólica como la que presenta variaciones encontramos que de acuerdo a los valores ΔR_{rms} obtenidos (tablas 4.2 y

4.4) el método es muy sensible a la presencia del ruido. Cabe mencionar que en los resultados aquí mostrados hemos supuesto que el detector de posición proporciona la posición del haz con precisión infinita cosa que no es verdad. En el apéndice A se menciona que el detector de posición realmente proporciona una precisión de la posición de $20\ \mu\text{m}$ dentro de un diámetro no mayor a $15\ \text{mm}$. Por esta razón la precisión con la que se puede medir la posición del haz láser con el queratopógrafo láser dependerá de la precisión que nos proporcione el detector de posición que en este caso es de $20\ \mu\text{m}$. Sin embargo, aún considerando lo anterior, los resultados obtenidos siguen cayendo dentro de los valores aceptados clínicamente.

En general, para todos los casos analizados, encontramos primeramente que si las superficies analizadas son muy rápidas o que si las variaciones de forma, sobre todo en la periferia de la superficie, son tales que la pendiente es grande, se tiene que algunos puntos de detección no pueden ser registrados debido a que algunos de los rayos incidentes sobre este tipo de superficies, tienen ángulos de deflexión tales que se salen del sistema óptico de queratopógrafo láser. Lo anterior afecta la evaluación de la topografía debido a que la trayectoria de integración se realiza siguiendo una trayectoria espiral que comienza en un punto previamente conocido. Así, si algunos de estos puntos de la espiral no son registrados el error en la integración se incrementa debido a que el incremento en el ángulo azimutal $\Delta\phi$, de la ecuación de integración, aumenta relativamente hablando; además de que no se proporciona información de esas regiones de la superficie que se esta evaluando.

Como el principal problema de la precisión en la evaluación de la topografía de la superficie de prueba se encuentra cuando no se tienen todos los puntos de detección, siempre será posible aumentarla si la trayectoria de integración se cambia por otra óptima. En este caso se debe indicar al programa que tome el punto más próximo para efectuar la integración.

Por otra parte, en algunos de los casos es posible aumentar el número de puntos registrados sobre el plano de detección si se realiza un enfocamiento de la superficie de prueba acercándola al espejo parabólico fuera de eje. Entonces si logramos aumentar el número de puntos registrados no sólo podríamos obtener mayor información sobre la periferia de la superficie, sino que además de manera global aumentaríamos la precisión con la que se obtiene la topografía.

CONCLUSIONES GENERALES

La superficie anterior de la córnea se presenta como el principal elemento refractor del ojo humano, por lo que cualquier cambio en su curvatura se refleja de manera inmediata en un cambio en el poder refractor del ojo. Así, cualquier corrección del estado refractor, requiere modificar permanentemente la superficie corneal. Para corregir los errores refractivos que afectan la agudeza visual, se diseñan anteojos y lentes de contacto y en algunos casos se somete a la superficie corneal a cirugías refractivas. Todos estos métodos y técnicas de corrección requieren conocer con precisión la topografía de la córnea. Sin embargo, las técnicas e instrumentos clínicos actuales que se utilizan para medir la topografía corneal sólo proporcionan información de algunas de las zonas de la superficie y sus algoritmos de reconstrucción se basan en la suposición errónea de que la superficie corneal es esférica, además de que las mediciones se realizan sobre planos meridionales; así, la precisión con que se mide la topografía, ± 0.25 D (40 μm) en el radio de curvatura, depende en gran medida de estos factores.

En este trabajo se discutió sobre la queratopografía láser como una técnica alternativa de evaluación de la topografía corneal cuyas principales características son que es posible medir toda la superficie de la córnea. El algoritmo de evaluación no requiere de que se hagan suposiciones sobre la forma de la superficie corneal y de que la evaluación de la topografía se realice en tiempo real. También se hizo un estudio detallado en cuanto a sus alcances en precisión en las mediciones topográficas y resolución que nos proporciona el sistema. Para lograr esto, se desarrollaron algoritmos los cuales nos permitieron realizar una serie de simulaciones de superficies corneales que van desde superficies bastante suaves, hasta aquellas que presentan variaciones muy agudas. Asimismo, se efectuaron simulaciones sobre ruido que puede introducirse al sistema del queratopógrafo láser. Estas simulaciones estaban encaminadas principalmente a probar el método en presencia de posibles complicaciones que pudieran presentarse en presencia de una córnea real.

Los algoritmos de evaluación y simulación de la superficie corneal, que fueron implementados en lenguaje de programación C, presentan la ventaja de reducción del tiempo de

evaluación, de 10 minutos en el programa diseñado por F. Granados [3] a sólo 10 segundos en el programa actual. Esto desde luego permitirá en su oportunidad, poder evaluar la superficie corneal en tiempo real.

En cuanto a la simulación se refiere, encontramos que para superficies suaves sin ruido la precisión con la que puede obtenerse la topografía de la superficie es inferior a $0.3 \mu\text{m}$, que es a su vez inferior a los valores clínicamente aceptados ($40 \mu\text{m}$). Para el caso de la superficie con variaciones cosenoidales, la precisión con la que se puede obtener la topografía de la superficie depende en gran medida de la rugosidad de ésta. Así, para que la precisión sea del orden a la de los valores clínicamente aceptados ($40 \mu\text{m}$), la rugosidad debe ser inferior a 0.035 , que se caracteriza principalmente por amplitudes y oscilaciones de la superficie no muy agudas. Cabe mencionar que este tipo de análisis sobre superficies con variaciones no se puede lograr con los instrumentos y técnicas (queratométricos y queratoscópicos) que se utilizan en la evaluación de la topografía, debido principalmente a que la información obtenida, por ejemplo, cuando se traslapan los anillos en una queratografía, presentan ambigüedad.

Uno de los rasgos más importantes de este trabajo es la introducción de ruido en la evaluación de la topografía, aspecto que no se considera en los instrumentos y técnicas comerciales actuales. Aquí observamos cómo la presencia de ruido afecta notablemente la evaluación de la topografía de la superficie, lo que nos indica que el sistema es muy sensible a la presencia del ruido en el sistema. Así, para el caso de la superficie suave se encuentra que un factor de ruido inferior a 0.1 mm nos proporciona una precisión inferior a $1 \mu\text{m}$ en la medición de la topografía, la cual nos se aleja mucho del valor obtenido para el caso en que no se considera el ruido ($0.3 \mu\text{m}$). Por su parte, para el caso de la superficie con variaciones cosenoidales en presencia de ruido, también se encuentra que un factor de ruido inferior a 0.1 mm nos proporciona una precisión en la evaluación de la topografía inferior a $1 \mu\text{m}$ cuando la rugosidad de la superficie analizada es inferior a 0.015 . Asimismo, se muestra que la precisión que nos proporciona el queratopógrafo láser depende en gran medida del detector de posición ($20 \mu\text{m}$), misma que se puede mejorar si se cuenta con un detector que proporcione mayor precisión, pero aún considerando esto último se encuentra que todos estos valores obtenidos siguen siendo del orden, y en algunos casos inferiores, a los valores clínicamente aceptados.

Con esta nueva técnica de evaluación de la topografía de la superficie anterior de la córnea, es posible obtener precisiones que caen dentro del rango de los valores clínicos aceptados, que en algunos de los casos analizados son ampliamente superados, además de que aquí no hacen suposiciones sobre la forma de la superficie corneal y su evaluación puede llevarse a cabo en tiempo real. Adicionalmente, es posible aumentar la precisión en las mediciones si el algoritmo de integración se modifica en forma tal que la trayectoria de integración sea más eficiente. También se puede aumentar la superficie de evaluación efectuando pequeños enfocamientos sobre todo en los casos donde la superficie de prueba es rápida.

Finalmente, podemos afirmar que la técnica aquí descrita cubre la mayor parte de los requerimientos clínicos, por lo que se presenta como una nueva alternativa para la evaluación de la topografía de la superficie anterior de la córnea, misma que supera en varios aspectos a los instrumentos clínicos actuales utilizados en la misma tarea.

APÉNDICE A

CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL QUERATOPÓGRAFO LÁSER

A.1. Ecuaciones del Barrido en Queratopografía Láser.

Con el fin de hacer las mediciones sobre toda la superficie corneal, el sistema se diseña en forma tal que el haz láser incidente sobre la córnea tenga una trayectoria espiral. Esta trayectoria es generada por el movimiento combinado de un espejo que se coloca a 45° respecto a la trayectoria del haz y que realiza un movimiento lineal que se aleja del láser lo que le da un movimiento lineal transversal al haz reflejado. El resto del movimiento lo proporciona un prisma Dove que efectúa un movimiento circular, figura 3.3.

Para obtener las ecuaciones del barrido, se analizan los movimientos de cada componente óptica por separado. Primeramente en la figura a.1 se muestra el sistema mecánico que mueve al espejo a 45° ; éste está formado por un sistema de biela manivela que hace oscilar a una platina sobre la cual descansa el espejo a 45° y que es controlada por un servo motor por medio de una

computadora [3]. Lo que se quiere con este sistema es que el haz que incide sobre el espejo a 45° al ser reflejado e incidir sobre el prisma Dove barra toda la anchura de su primera cara sin salirse de éste. Así, de la figura a.1, tenemos que

$$\xi = a \text{Cos}\theta + l \text{Cos}\phi \tag{a.1}$$

y

$$h = a \text{Sen}\theta + l \text{Sen}\phi$$

del cual obtenemos

$$\text{Sen}\phi = \frac{h}{l} - \frac{a \text{Sen}\theta}{l}$$

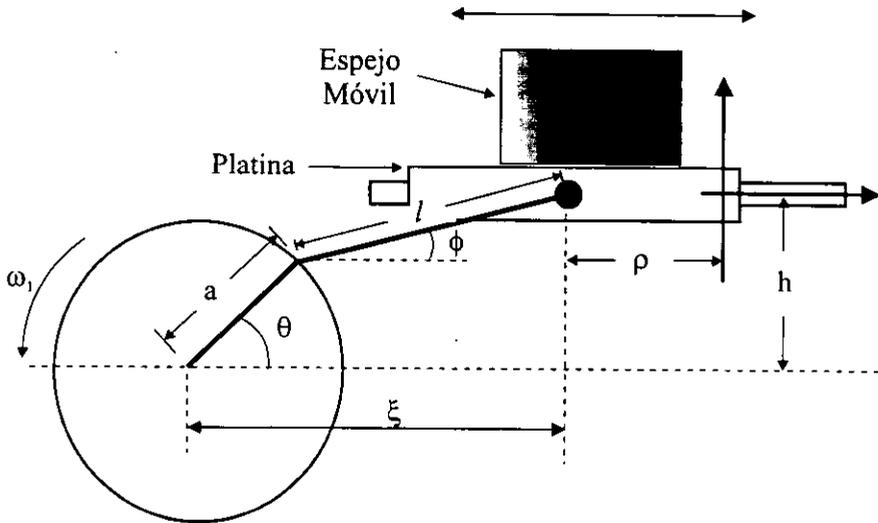


Figura a.1. Sistema mecánico para mover el espejo a 45° .

sustituyendo en (a.1), resulta

$$\xi = a \text{Cos}\theta + \sqrt{l^2 - [h - a \text{Sen}\theta]^2}$$

que nos dice que el punto de unión de la biela con la platina se mueve respecto al sistema de referencia de la manivela, de $\sqrt{l^2 - h^2} + a$ a $\sqrt{l^2 - h^2} - a$ cuando el ángulo va de 0 a π , respectivamente. Este movimiento respecto al eje óptico del sistema será

$$\rho = a \text{Cos}(\theta) + \sqrt{l^2 - [h - a \text{Sen}(\theta)]^2} - \sqrt{l^2 - h^2}$$

para que así el haz recorra una distancia entre a y $-a$ cuando el ángulo va de 0 a π , respectivamente.

Luego, considerando que al girar la manivela con velocidad angular constante, se tiene $\theta = \omega t$, resulta

$$\rho(t) = a \cos(\omega_1 t) + \sqrt{l^2 - [h - a \sin(\omega_1 t)]^2} - \sqrt{l^2 - h^2}. \quad (a.2)$$

Que nos proporciona la posición del punto de unión de la biela con la platina. En el arreglo experimental usamos los valores, $l = 50 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$, ω_1 es la velocidad angular del servo motor y $a = 9 \text{ mm}$, para barrer la superficie del prisma Dove la cual es de aproximadamente 18 mm . En la figura a.2 se muestra una gráfica de $\rho(t)$, obsérvese que cuando el ángulo va de 0 a π , el haz recorre la distancia entre a y $-a$, pero el movimiento no es uniforme.

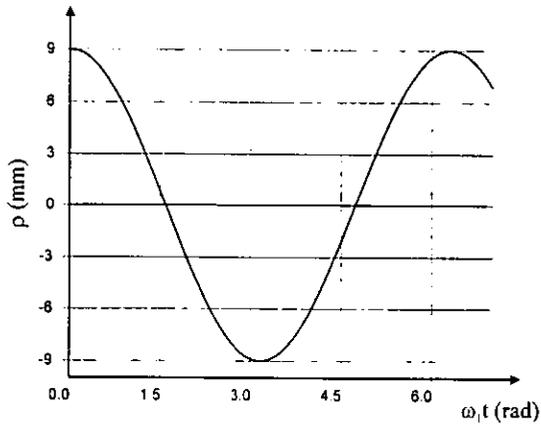


Figura a.2. Posición del haz láser producida por el espejo móvil.

Por otra parte, el prisma Dove rota con ayuda de dos engranes, uno de ellos está conectado a un segundo servo motor el cual es controlado con una computadora y el otro aloja al prisma, figura a.3.

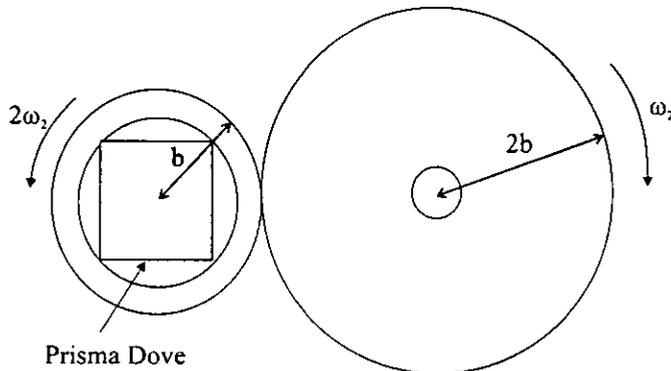


Figura a.3. Sistema mecánico para rotar el prisma Dove.

Ambos engranes generan una relación de movimiento 1:2 y como el prisma hace una rotación de la imagen duplicando el ángulo de giro, entonces resulta que el sistema completo proporciona al haz incidente sobre el prisma una rotación con una relación 1:4, dada por la expresión

$$\phi(t) = 4\omega_2 t + \phi_0 \quad (\text{a.3})$$

donde ϕ_0 es la fase inicial y ω_2 es la velocidad angular del segundo servo motor.

Finalmente, (a.2) y (a.3) proporcionan la posición del haz en coordenadas polares (ρ, ϕ) que sobre un plano perpendicular al eje del sistema óptico del queratopógrafo láser inmediatamente a la salida del prisma, describe una trayectoria espiral tal como se muestra en la figura a.4. En nuestro caso la relación entre las velocidades angulares de los dos servo motores es de aproximadamente $\omega_2 / \omega_1 = 10$ para tener diez espirales en la trayectoria del barrido.

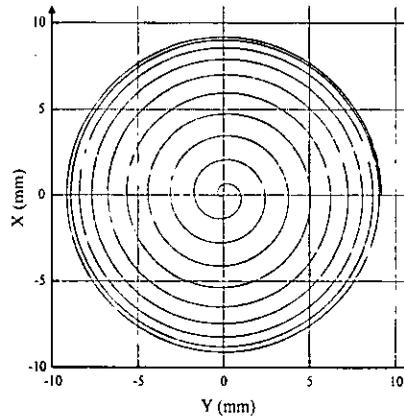


Figura a.4. Trayectoria del barrido.

A.2. Características Físicas de los Componentes Ópticos del Queratopógrafo Láser.

a) Prisma Dove.

El prisma Dove se muestra en la figura a.5, sus dimensiones son

$$\left. \begin{array}{l} A = 20.0 \text{ mm} \\ B = 28.3 \text{ mm} \\ C = 84.55 \text{ mm} \end{array} \right\} \pm 0.15 \text{ mm}$$

Especificaciones (Catálogo de Melles Griot, número de producto: 01 PDE 005):

- i) Índice de refracción : $n=1.5168$
- ii) Material : BK 7.

iii) Longitud onda diseño : $\lambda = 587.6 \text{ nm}$

iv) Abertura efectiva en la cara A : 90 %

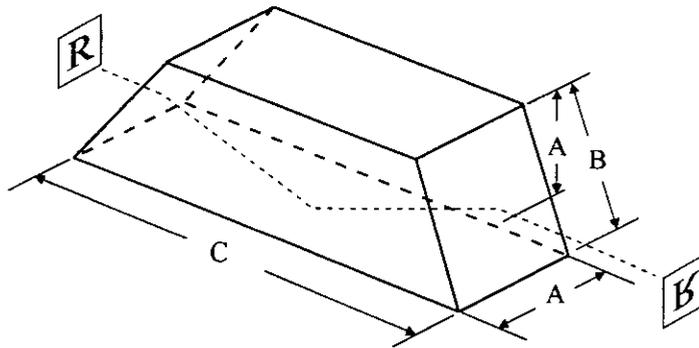


Figura a.5. Prisma Dove.

b) Espejo Parabólico Fuera de Eje.

El espejo parabólico fuera de eje se muestra en la figura a.6. Las especificaciones se indican en el Catálogo de Melles Griot, número de producto: 02 POA 011, aquí

$$\left. \begin{array}{l} f = 10.2 \text{ mm} \\ \phi = 25.4 \text{ mm} \end{array} \right\} \pm 0.13 \text{ mm}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} d = 25.4 \text{ mm} \\ B = 12.7 \text{ mm} \\ L = 38.4 \text{ mm} \end{array} \right\} \pm 0.8 \text{ mm}$$

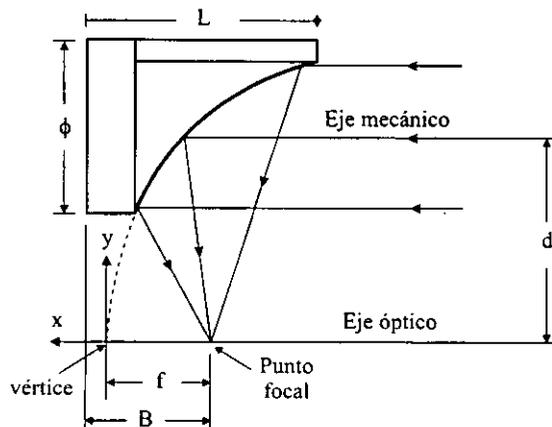


Figura a.6. Espejo parabólico fuera de eje.

c) Detector de Posición.

En el desarrollo del queratopógrafo láser, uno de los problemas que se presentan es la determinación con precisión de la posición del haz láser y para esto se utiliza un detector de posición bidimensional (SC50) de UDT (United Detector Technology). Este detector es un fotodiodo de efecto lateral con dos amplificadores que proporcionan la posición del haz en dos ejes de manera continua. Esta unidad sensa el centroide del haz láser y proporciona dos salidas analógicas.

Este detector ha sido ampliamente caracterizado en el Laboratorio de Óptica Aplicada del CI-UNAM y se encuentra que proporciona una precisión en las mediciones de la posición de $10\ \mu\text{m}$ en la región central del detector en un área del 2 % del total y una precisión de $20\ \mu\text{m}$ en la región central del detector dentro de un diámetro no mayor a 15 mm que corresponde a aproximadamente al 60 % del área total, área suficiente para efectuar las mediciones de deflexión del haz por Queratopografía láser [42], ver figura a.7.

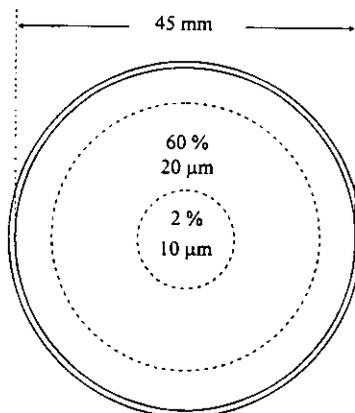


Figura a.7. Sección transversal del detector de posición.

APÉNDICE B

TRAZO EXACTO DE RAYOS

B.1. Ley Vectorial de la Reflexión.

Sean \vec{s}_1 , \vec{s}_2 y \hat{p} los vectores asociados al rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie, respectivamente. Aquí $|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2| = n_1$, donde n_1 es el índice de refracción del medio incidente, de la figura b.1, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= n_1 \cos\theta \hat{p} + n_1 \operatorname{Sen}\theta \hat{i} \\ \vec{s}_2 &= n_1 \operatorname{Sen}\theta \hat{p} - n_1 \cos\theta \hat{i}\end{aligned}$$

donde \hat{i} es el vector tangente a la interface en el punto de incidencia. Haciendo la diferencia, resulta

$$\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = 2n \cos\theta \hat{p}$$

pero como

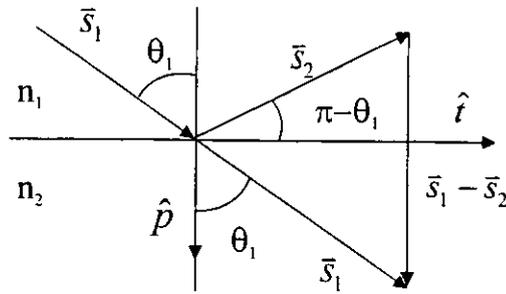


Figura b.1. Ley de reflexión.

$$\hat{p} \cdot \bar{s}_1 = n_1 \cos \theta$$

entonces la ley de reflexión se escribe como

$$\bar{s}_2 = \bar{s}_1 - 2\bar{s}_1 \cdot \hat{p} \hat{p}. \quad (\text{b.1})$$

Por otra parte, de la figura b.1 se observa que

$$\hat{p} = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}{|\bar{s}_1 - \bar{s}_2|} \quad (\text{b.2})$$

que es la normal a la superficie en términos del rayo incidente y reflejado. Esta expresión se emplea para el cálculo de las normales aproximadas en el queratopógrafo láser.

B.2. Ley Vectorial de la Refracción.

Sean \bar{s}_1 , \bar{s}_2 y \hat{p} los vectores asociados al rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie, respectivamente. Aquí $|\bar{s}_1| = n_1$ y $|\bar{s}_2| = n_2$ donde n_1 es el índice de refracción del medio incidente y n_2 es el índice de refracción del medio refractado. De la figura b.2, tenemos

$$\bar{s}_2 = \bar{s}_1 - \Gamma \hat{p} \quad (\text{b.3})$$

donde Γ es el invariante de Lagrange [26][28]. Asimismo, debe cumplirse que

$$\bar{s}_2 \cdot \hat{t} = \bar{s}_1 \cdot \hat{t}$$

o que

$$n_1 \text{Sen} \theta_1 = n_2 \text{Sen} \theta_2$$

que es la Ley de Snell.

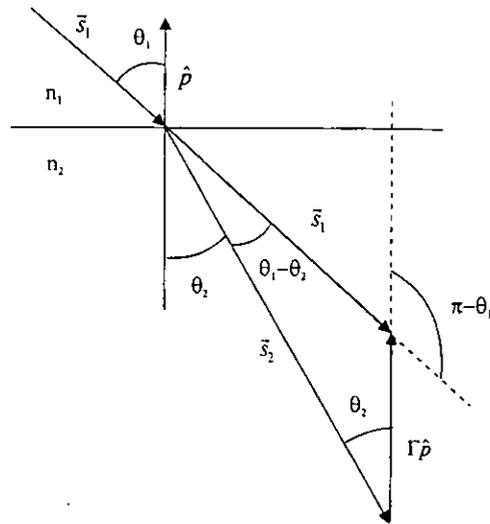


Figura b.2. Ley de refracción

Por otra parte, aplicando la ley de los senos al triángulo de la figura b.2, resulta

$$\frac{\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\Gamma} = \frac{\text{Sen}(\pi - \theta_1)}{n_2} = \frac{\text{Sen}\theta_2}{n_1}$$

combinando esta expresión con la ley de Snell, resulta

$$\Gamma = n_2 \text{Cos}\theta_2 - n_1 \text{Cos}\theta_1. \quad (\text{b.4})$$

que es el invariante de Lagrange en términos de los ángulos y de los índices de refracción. Las ecuaciones (b.3) y (b.4), representan la ley vectorial de la refracción.

La ec. (b.4) se puede escribir en términos de las direcciones de los rayos; de la figura tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 \cdot \hat{p} &= -n_1 \text{Cos}\theta_1 \\ \Rightarrow \\ \text{Cos}\theta_1 &= -\frac{\bar{s}_1 \cdot \hat{p}}{n_1} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ley de Snell, resulta

$$\text{Cos}\theta_2 = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + (\bar{s}_1 \cdot \hat{p})^2}$$

sustituyendo ambos resultados en (b.4), resulta

$$\Gamma = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + (\vec{s}_1 \cdot \hat{p})^2} + \vec{s}_1 \cdot \hat{p}$$

esta última forma del invariante de Lagrange Γ es muy útil en el algoritmo del trazo exacto de rayos debido a que está dada en términos de la dirección de los rayos incidente y de la normal a la superficie.

Cabe mencionar que tanto en la ley de reflexión como en la de refracción, todos los vectores son coplanares.

B.3. Trazo de Rayos de Ida.

Para el trazo de rayos de ida consideraremos en plano $x-z$ del sistema óptico, figura b.3. Luego, para cada punto $P_d(x_d)$ de la espiral sobre el plano de detección se traza un rayo paralelo al eje z , cuya dirección es $\hat{n}_1 = (0,1)$ e incide eventualmente sobre la primera cara en el punto

$$P_1 = (x_d, x_d + \frac{A}{2}).$$

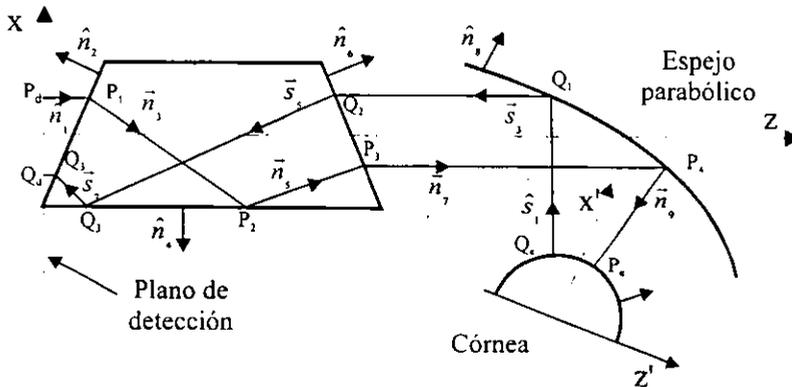


Figura b.3.. Trazo de rayos a través del sistema óptico del queratómetro.

A partir de la ley vectorial de la refracción, el rayo será refractado por la primera cara del prisma en la dirección

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 - \Gamma \hat{n}_2,$$

donde

$$\hat{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

es la normal a la primera cara del prisma y

$$\Gamma = n_v \sqrt{1 - \left(\frac{n_a}{n_v}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\hat{n}_2 \cdot \bar{n}_1}{n_o}\right)^2\right]} + \hat{n}_2 \cdot \bar{n}_1.$$

Aquí n_v es el índice de refracción del prisma y n_a es el índice de refracción del aire. Resolviendo, tenemos que la dirección del rayo refractado es

$$\bar{n}_3 = (0,1) - \left(\frac{\Gamma}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right),$$

por lo que

$$\bar{n}_3 = \left(-\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\right).$$

De P_1 y \bar{n}_3 en (3.7), la recta asociada a este rayo será

$$\frac{x - x_d}{-\Gamma/\sqrt{2}} = \frac{z - x_d - A/2}{1 + \Gamma/\sqrt{2}},$$

o, desarrollando

$$z = \left(1 + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\right)(x_d - x) + x_d + \frac{A}{2} \quad (\text{b.5})$$

que resolviendo simultáneamente con (3.4) resulta que el rayo intersecta a la base del prisma en el punto

$$P_2 = \left(-\frac{A}{2}, \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\Gamma}\right)\left(x_d + \frac{A}{2}\right)\right).$$

El rayo incidente es reflejado en este punto de acuerdo a la ley de reflexión vectorial en la dirección

$$\bar{n}_5 = \bar{n}_3 - 2\bar{n}_3 \cdot \hat{n}_4 \hat{n}_4,$$

donde $\hat{n}_4 = (-1,0)$ es un vector normal a la base del prisma; luego

$$\bar{n}_5 = \left(-\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2\Gamma}{\sqrt{2}}(-1,0),$$

por lo que, finalmente

$$\vec{n}_5 = \left(\frac{\Gamma}{2}, 1 + \frac{\Gamma}{2} \right).$$

Ahora, de \vec{n}_5 y P_3 , en la ecuación (3.7), se encuentra que la ecuación del rayo reflejado por la base del prisma es

$$\frac{x + A/2}{\Gamma/2} = \frac{z - (2 + \Gamma/2)(x_d + A/2)}{1 + \Gamma/2},$$

con lo que se obtiene

$$z - (1 + \sqrt{2}/\Gamma)x = (1 + \sqrt{2}/\Gamma)A/2 + (2 + \sqrt{2}/\Gamma)(x_d + A/2). \quad (\text{b.6})$$

Resolviendo simultáneamente (3.3) y (b.6), se obtiene el punto donde el rayo reflejado por la base del prisma incide sobre la segunda cara del prisma

$$P_3 = \left(\frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - x_d - A, \left(\frac{\Gamma + \sqrt{2}}{2\Gamma + \sqrt{2}} \right) C + x_d + \frac{A}{2} \right),$$

luego, el rayo emergerá del prisma en la dirección

$$\vec{n}_7 = \vec{n}_5 - \Gamma \hat{n}_6,$$

donde $\hat{n}_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ es el vector normal a la segunda cara del prisma; sustituyendo

$$\vec{n}_7 = \left(\frac{\Gamma}{2}, 1 + \frac{\Gamma}{2} \right) - \left(\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2} \right)$$

entonces

$$\vec{n}_7 = (0, 1)$$

Aunque el resultado es obvio, por la manera en que funciona el prisma Dove, esto sirve para checar las ecuaciones, pues cuando el rayo ya no es paralelo al eje óptico, los resultados ya no son obvios. Con \vec{n}_7 y P_3 en (3.7) y (3.5), tenemos que el rayo que sale del prisma intersecta a la superficie del espejo parabólico en el punto,

$$P_4 = \left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A, \frac{1}{4f} \left[x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d \right]^2 + a \right).$$

Mediante la ley de reflexión, el rayo incidente es reflejado en la dirección

$$\bar{n}_9 = \bar{n}_7 - 2\bar{n}_7 \cdot \hat{n}_8 \hat{n}_8,$$

donde

$$\hat{n}_8 = \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + 4f^2}}(x+d, 2f) \Big|_{P_1} = \frac{1}{\sqrt{\left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d\right)^2 + 4f^2}} \left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d, 2f\right)$$

es el vector normal a la superficie del paraboloide. Luego,

$$\bar{n}_9 = (0,1) - \frac{4f}{\left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d\right)^2 + 4f^2} \left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d, 2f\right),$$

o, desarrollando

$$\bar{n}_9 = \frac{4f}{\left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d\right)^2 + 4f^2} \left(-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d, \frac{1}{4f} \left[-x_d + \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} - A + d\right]^2 - f\right).$$

A partir de \bar{n}_9 y P_4 en (3.7), se obtiene que la ecuación del rayo reflejado está dada por

$$\begin{aligned} x + x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A &= \frac{z - \frac{1}{4f} \left[x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right]^2 - a}{x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d} \\ &= \frac{\frac{1}{4f} \left[x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right]^2 - f}{\frac{1}{4f} \left[x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right]^2 - f} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} z - \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2 - 4f^2}{4f \left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)} &= x = \\ &= \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A\right) \left[\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2 - 4f^2\right]}{4f \left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)} + \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2}{4f} + a. \end{aligned}$$

Si definimos

$$\alpha(x_d) = \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2 - 4f^2}{4f\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)},$$

y

$$\beta(x_d) = \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A\right)\left[\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2 - 4f^2\right]}{4f\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)} + \frac{\left(x_d - \frac{C\Gamma}{2\Gamma + \sqrt{2}} + A - d\right)^2}{4f} + a,$$

la expresión anterior se escribe como

$$z - \alpha x = \beta \tag{b.7}$$

que representa al rayo reflejado por la superficie del paraboloide.

Luego, resolviendo simultáneamente (3.6) y (b.7), obtenemos

$$(x + d)^2 + (\alpha x + \beta - a + f)^2 = R^2,$$

por tanto

$$(1 + \alpha^2)x^2 + 2[d + \alpha(\beta - a + f)]x + d^2 + (\beta - a + f)^2 - R^2 = 0.$$

Resolviendo para x , y z , resulta

$$\left. \begin{aligned} x_r(x_d) &= \frac{-[d + \alpha(\beta - a + f)] + \sqrt{[d + \alpha(\beta - a + f)]^2 - (1 + \alpha^2)[d^2 + (\beta - a + f)^2 - R^2]}}{1 + \alpha^2}, \\ y \\ z_r(x_d) &= \frac{\alpha\left\{-[d + \alpha(\beta - a + f)] + \sqrt{[d + \alpha(\beta - a + f)]^2 - (1 + \alpha^2)[d^2 + (\beta - a + f)^2 - R^2]}\right\} + \beta}{1 + \alpha^2}, \end{aligned} \right\} \tag{b.8}$$

que son las coordenadas donde el rayo reflejado por el espejo parabólico intercepta a la esfera de referencia. Este punto es de mucha utilidad para poder calcular las normales a la superficie que se requiere evaluar. Para el caso de la simulación, el último paso del trazo requiere resolver las ecuaciones para la superficie propuesta.

B.4. Trazo de Rayos de Regreso.

Sea $Q_e = (x_e, z_e)$ un punto de la esfera de referencia donde el rayo proveniente de la espiral del plano de detección interseca a ésta, entonces, este rayo será reflejado en la dirección

$$\hat{s}_i = \frac{1}{\sqrt{(x_e + d)^2 + (z_e - a + f)^2}} (x_e + d, z_e - a + f)$$

que es la normal a la superficie esférica evaluada en Q_e . De (3.7), tenemos que la ecuación que representa al rayo que va de Q_e a Q_l sobre el espejo parabólico es

$$(x_e + d)z - (z_e - a + f)x = dz_e + (a - f)x_e. \quad (b.9)$$

Despejando z de (b.9) y sustituyendo en (3.5), resulta

$$(x_e + d)x^2 + 2[(x_e + d)d + 2f(z_e - a + f)]x + (x_e + d)d^2 + 4f[(z_e - a)d - fx_e] = 0.$$

Resolviendo, resulta

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-[(x_e + d)d + 2f(z_e - a + f)]}{x_e + d} + \\ &+ \frac{\sqrt{[(x_e + d)d + 2f(z_e - a + f)]^2 - (x_e + d)\{(x_e + d)d^2 + 4f[(z_e - a)d - fx_e]\}}}{x_e + d} \\ z_1 &= \frac{z_e - a + f}{x_e + d} x_1 + \frac{dz_e + (a - f)x_e}{x_e + d} \end{aligned} \right\} \quad (b.10)$$

que representan las coordenadas de $Q_l = (x_1, z_1)$ donde el rayo interseca a la superficie del espejo parabólico. Mediante ley de reflexión, el rayo reflejado tendrá una dirección

$$\hat{s}_3 = \bar{s}_1 - 2\bar{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \hat{s}_2 = (0, -1)$$

donde $\hat{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{(x_1 + d)^2 + 4f^2}} (x_1 + d, 2f)$ es la normal a la superficie del espejo parabólico.

Con Q_l y \bar{s}_3 en (3.2), resulta que el rayo reflejado interseca a la segunda cara del prisma en

$$Q_2 = (x_1, -x_1 + C - A/2)$$

luego el rayo es refractado en la dirección

$$\vec{s}_5 = \vec{s}_3 - \Gamma \hat{s}_4 = \left(-\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \right)$$

donde $\hat{s}_4 = \hat{n}_6$ es la normal a la superficie de la segunda cara del prisma. De Q_2 y \vec{s}_5 en (3.7), tenemos la ecuación de la recta asociada al rayo refractado

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{-\Gamma/\sqrt{2}} &= \frac{z - x_1 - C + A/2}{-1 - \Gamma/\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \\ z - \left(\frac{\sqrt{2}}{\Gamma} + 1 \right) x &= - \left(\frac{\sqrt{2}}{\Gamma} + 2 \right) x_1 + C - A/2. \end{aligned} \quad (\text{b.11})$$

Resolviendo simultáneamente (3.4) con (b.11), resulta

$$Q_3 = \left(-\frac{A}{2}, \left(\frac{\sqrt{2} + 2\Gamma}{\Gamma} \right) x_1 - \left(\frac{\sqrt{2} + 2\Gamma}{\Gamma} \right) \frac{A}{2} + C \right)$$

que es el punto donde el haz refractado interseca a la base del prisma; el haz reflejado estará en la dirección

$$\vec{s}_7 = \vec{s}_5 - 2\vec{s}_5 \cdot \hat{s}_6 \hat{s}_6 = \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \right)$$

donde $\hat{s}_6 = \hat{n}_4$ es la normal a la base del prisma. De Q_3 y \vec{s}_7 en (3.7), tenemos que la ecuación del rayo reflejado es

$$\begin{aligned} \frac{x + A/2}{\Gamma/\sqrt{2}} &= \frac{z + \left(\frac{\sqrt{2} + 2\Gamma}{\Gamma} \right) (x_1 + A/2) - C}{-1 - \Gamma/\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \\ z + \left(\frac{\sqrt{2} + \Gamma}{\Gamma} \right) (x + A/2) &= - \left(\frac{\sqrt{2} + 2\Gamma}{\Gamma} \right) (x_1 + A/2) + C. \end{aligned} \quad (\text{b.12})$$

Resolviendo (3.1) y (b.12), resulta

$$Q_4 = \left(\frac{\Gamma C}{\sqrt{2} + 2\Gamma} - x_1 - A, \frac{\Gamma C}{\sqrt{2} + 2\Gamma} - x_1 - A/2 \right)$$

es el punto donde el rayo reflejado interseca a la primera cara del prisma. Finalmente el rayo refractado tendrá una dirección

$$\vec{s}_0 = \vec{s}_7 - \Gamma \hat{s}_8 = (0, -1)$$

y éste rayo intersectará al plano de detección en el punto

$$Q_d = (x_d, 0)$$

donde

$$x_d(x_e, z_e) = \frac{[(x_e + d)d + 2f(z_e - a + f)]}{x_e + d} - \frac{\sqrt{[(x_e + d)d + 2f(z_e - a + f)]^2 - (x_e + d)\{(x_e + d)d^2 + 4f[(z_e - a)d - fx_e]\}}}{x_e + d} + \frac{\Gamma C}{\sqrt{2 + 2\Gamma}} - A \tag{b.13}$$

el cual establece una relación entre los puntos de la esfera de referencia y los del plano de detección.

B.5. Sistema de Coordenadas para la Córnea.

Para definir el nuevo sistema de coordenadas para la córnea; primeramente encontraremos la ecuación de la recta que pasa por el centro y el foco del espejo parabólico, figura b.4. Sea un rayo que viaja paralelo al eje z con dirección $\hat{n}_1 = (0, 1)$ e intersecta al centro del espejo parabólico en el punto

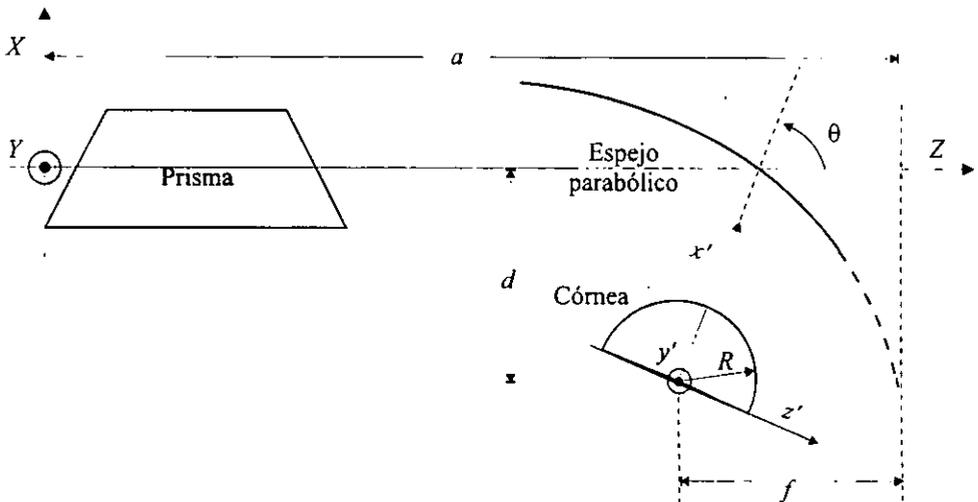


Figura b.4. Sistema de coordenadas de la esfera de referencia.

$$P = \left(0, -\frac{d^2}{4f} + a \right)$$

el rayo reflejado por el espejo viajará ahora en la dirección,

$$\bar{n}_3 = \hat{n}_1 - 2\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 \hat{n}_2$$

donde $\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4f^2}}(d, 2f)$ es la normal al espejo parabólico, luego

$$\bar{n}_3 = \left(-\frac{4fd}{d^2 + 4f^2}, 1 - \frac{8f^2}{d^2 + 4f^2} \right)$$

y la ecuación de la recta que pasa por P en la dirección de \bar{n}_3 es

$$\begin{aligned} \frac{x}{-\frac{4fd}{d^2 + 4f^2}} &= \frac{z + \frac{d^2}{4f} - a}{\frac{d^2 + 4f^2 - 8f^2}{d^2 + 4f^2}} \\ \Rightarrow z &= \frac{d^2 - 4f^2}{4fd} x - \frac{d^2}{4f} + a \end{aligned} \quad (b.14)$$

es la ecuación de la recta que une el centro con el foco del espejo parabólico sobre la cual se coloca el eje x' del nuevo sistema de referencia. En consecuencia, el nuevo sistema de referencia deberá rotarse un ángulo dado por

$$\text{Tan} \theta = \frac{d^2 - 4f^2}{4fd}$$

La rotación nos da la siguiente transformación de ejes,

$$\begin{aligned} \eta &= x \cos \theta - z \sin \theta \\ \zeta &= z \cos \theta + x \sin \theta \end{aligned}$$

Si ahora consideramos que el foco del espejo parabólico tiene coordenadas

$$Q = (-d, a - f).$$

Entonces el sistema de referencia rotado, deberá trasladarse a este punto. Las ecuaciones de transformación que efectúan esto son

$$\begin{aligned} x' &= \eta + d \\ z' &= \zeta - a + f \end{aligned}$$

finalmente, la transformación completa es

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos\theta - z \operatorname{sen}\theta + d \\ y' &= y \\ z' &= z \cos\theta + x \operatorname{sen}\theta - a + f \end{aligned} \right\} \quad (\text{b.15})$$

y la transformación inversa es

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos\theta + z' \operatorname{sen}\theta - d \\ y &= y' \\ z &= z' \cos\theta - x' \operatorname{sen}\theta + a - f \end{aligned} \right\} \quad (\text{b.16})$$

Estas transformaciones se emplean en el algoritmo del trazo de rayos y en el de la evaluación de las normales a la superficie corneal.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [2] Díaz Uribe, J. R., *Pruebas Ópticas por Deflectometría Láser*. Tesis de Doctorado. Facultad de Ciencias UNAM, México (1990).
- [3] Granados Agustín, F.S., *Evaluación de la Topografía Corneal por Deflectometría Láser*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, México (1993).
- [4] Orozco Arellanes, M. de J., *Detección de la Posición de Haces Gaussianos para Queratopografía Láser*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, México (1995).
- [5] Funes-Maderey I., Díaz-Uribe R., "Corneal Topography Reconstruction by Videokeratometry in Tree Dimensions", Conference Program 1997 OSA Annual Meeting, Long Beach, California, (1997).
- [6] Funes-Maderey I., *Videoqueratometría de Campo Plano*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, México (1998).
- [7] Díaz-Uribe R., Campos-García M., "Null screen testing of aspheric convex surfaces", Conference Program 1997 OSA Annual Meeting, Long Beach, California, (1997).
- [8] Katz, M., "The human eye as an optical system", en Safir, A. Editor. *Refraction and clinical optics*, Harper & Row, Publishers, USA (1980).
- [9] Keating, M.P. *Geometric, Physical and Visual Optics*, Butterworths, USA (1998).

- [10] Lindsay, R., Smith, G., Atchison, D., "Descriptors of the Corneal Shape", *Optometry and Vision Science*, **75**, 2, 156-158, (1998).
- [11] Malacara, D., Editor. *Optical Shop Testing*, 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. USA (1992).
- [12] Applegate, R.A., Howland, H.C., "Noninvasive Measurement of Corneal Topography", *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 30-41, (1995).
- [13] Bores, L.D., "Corneal Topography-The Dark Side of the Moon", en *Holography, Interferometry and Optical Pattern Recognition in Biomedicine*, SPIE, **1429**, 217-228 (1991).
- [14] Fry, G.A., "The Image-Forming Mechanism of the Eye", *Handbook of Physiology-Neurophysiology I*, American Physiological Society. Chap. XXVII, 647-670 (1959).
- [15] Mohram, R. "The Keratometer", en *Refraction and clinical optics*, en Safir, A. Editor. Harper & Row, Publishers (1980).
- [16] Rubin, M.L., *Optics for Clinicians*, 2nd Ed., TRIAD Scientific Publishers, USA (1974).
- [17] Gullstrand A., "Photographic-Ophthalmometric and Clinical Investigations of Corneal Refraction", Part I. *American Journal of Optometry and Archives of American Academy of Optometry*. **43**, (1966). Translated from the German by: W.M. Ludlam, Optometric Center of New York.
- [18] Schultz, D.N., "Asymmetry of Corneal and Peripheral Corneal Astigmatism Measured by Photokeratoscopy", *Am. J. of Optometry and Physiol. Optics*, **54**, 776-781, (1977).
- [19] Waring III, G.O., Hannush, S.B., Bogan, S.J., Maloney, R.K., "Classification of Corneal Topography with Videokeratography", en Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [20] Baroth, E.C., Hochberg, E.B., Harrison, R., Chazanoff, S.L., "Computer Assisted Noninvasive Topography of the Cornea, Final Report", NASA-JPL, April 28, (1989).
- [21] Warnicki, J.W., Rehkopf, P.G., Arffa, R.C., Stuart, J.C., "Corneal Topography Using a Projected Grid", en Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [22] Warnicki, J.W., Rehkopf, P.G., Curtin, D.Y., Burns, S.A., Arffa, R.C., Stuart, J.C., "Corneal Topography Using Computer analyzed rasterstereographic images", *Appl. Opt.*, **27** (6), 1135-1140 (1988).
- [23] Windecker, R., Tiziani, H.J., "Topometry of technical and Biological Objects by Fringe Projection", *Appl. Opt.*, **34**, 3644-3650 (1995).
- [24] Azema, A.G., "Corneal Optical Zone Reshaping with Excimer Laser", en Laude, L.D., *Excimer Lasers*. Kluwer Academic Publishers, (1994).

- [25] Caroline, P.J., Norman, C.W., "Corneal Topography in the Diagnosis and Management of Keratoconus", en Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [26] Malacara, D. Malacara, Z., *Handbook of Lens Design*, Marcel Dekker Inc. New York (1994).
- [27] Kraff, C.R., Robin, J.B., "Normal Corneal Topography", en Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [28] Hecht, E., *Optics*, 3rd Ed., Addison Wesley Longman, Inc., New York (1998).
- [29] Doss, J.D., Huston, R.L., Rowsey, J.J., Brown, D.R., "Method for Calculation of Corneal Profile and Power Distribution", *Arch. Ophthalmol* **99**, 1261-1265, (1981).
- [30] Klyce, S.D., "Computer-Assisted Corneal Topography: High-resolution graphic presentation and analysis keratoscopy", *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* **25**, 1426-1435, (1984).
- [31] El Hage, S.G., "Suggested New Methods for Photokeratoscopy a comparison for their validities. Part I.", Submitted August 12, (1970), issue of the American Journal of Optometry and archives of American Academy of Optometry.
- [32] El Hage, S.G., "The Computerized Corneal Topographer (EH-270)", en Schanzlin, D.T., Robin, J.B., Editors. *Corneal Topography: Measuring and Modifying the Cornea*. Springer Verlag, USA (1992).
- [33] Meyer-Arendt, J.R. *Introduction to Classical and Modern Optics*, 4th edition, Prentice Hall Inc., USA (1995).
- [34] Caceci, M.S., Cacheris, W.P., "Fitting Curves to Data", *Byte* (May 1984).
- [35] Bonnett, R., "New Method of Topographical Ophthalmometry - Its Theoretical and Clinical Applications", *Am. J. Opt.*, **39**, 227 (1962).
- [36] Greivenkamp, J.E., Bruning, J.H., "Phase Shifting Interferometry" en Malacara, D., Editor. *Optical Shop Testing*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., USA, (1992).
- [37] Malacara, D., DeVore, S.L., "Interferogram Evaluation and Wavefront Fitting", en Malacara, D., Editor. *Optical Shop Testing*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., USA, (1992).
- [38] Creath, K., Wyant, J.C., "Moiré and Fringe ProjectionTechnics", en Malacara, D., Editor. *Optical Shop Testing*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., USA (1992).
- [39] Burden, R.L., Faires, J.D., *Análisis Numérico*, 3ra. ed., Grupo Editorial Iberoamérica, México (1985).

- [40] Schildt, H., *Turbo C/C++: Manual de referencia*, primera edición, Osborne McGraw-Hill Interamericana de España, México (1992).
- [41] Press, W.H., Flanery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., *Numerical Recipes in C. The art of scientific computing*, Cambridge University Press, USA (1990).
- [42] González, M., Nogueira, A., Díaz, R., "Caracterización de un detector de posición bidimensional de haces luminosos", Memorias Congreso de Instrumentación SOMI XI, Morelia, Mich., México, 595-599 (1996).