



01161 11  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO *Ref.*

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO FACULTAD DE INGENIERÍA

**CALIBRACIÓN DEL MÉTODO DE  
LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA  
PARA SISTEMAS HISTERÉTICOS SIMPLES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
( E S T R U C T U R A S )  
P R E S E N T A

**FRANCISCO LEONEL SILVA GONZÁLEZ**



DIRECTORA DE TESIS: DRA. SONIA E. RUIZ GÓMEZ

MÉXICO D.F.

OCTUBRE 1998

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *Dedicatorias*

*A mi esposa.  
Azucena gracias por tu amor,  
tu paciencia y todo el apoyo  
que me has dado durante estos  
últimos años.  
¡Te amo!*

*A mis padres: Leonel y  
Carmela por darme la vida,  
sus consejos y su enorme ayuda  
moral y económica. Sin Uds.  
no hubiera podido culminar  
esta nueva etapa en mi vida  
profesional. ¡Los quiero!*

*A mis hijos: Edgar, Angel y  
Alejandro quienes son el  
impulso y alegría de mi vida,  
como un ejemplo de que con  
persistencia todo puede  
lograrse.*

*A mis hermanas:  
Blanca y Diana  
por su ayuda.*

*A mi abuela Luz María, por  
sus cariño y a la memoria de mi  
abuelo Roberto Silva.*

---

# ÍNDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>iv</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos y Alcances	1
1.2 Antecedentes	3
1.2.1 Comportamiento No_Lineal	3
1.2.2 Vibración Aleatoria	4
1.2.3 Métodos de Solución	6
1.2.4 Comentarios Finales	14
<b>2 EL CRITERIO DE LA LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA</b>	<b>15</b>
2.1 El Sistema No_Lineal	15
2.1.1 Comportamiento No_Lineal Elástico	15
2.1.2 Comportamiento No_Lineal Inelástico	16
2.1.3 Ecuación de Movimiento de un Sistema No_Lineal	17
2.2 El Sistema Lineal Equivalente	17
2.2.1 Sistemas con Histéresis	20
2.3 Precisión	20
<b>3 MODELADO Y LINEALIZACIÓN DE LA FUERZA RESTAURADORA HISTERÉTICA</b>	<b>22</b>
3.1 Modelos Diferenciales de Histéresis	22
3.2 Modelo de Baber y Wen	25
3.2.1 Ecuación de Movimiento	28
3.2.2 Influencia de los Parámetros de la Ecuación de Movimiento en la Respuesta de un Sistema UGL	28

3.3	Linealización de la Fuerza Restauradora	29
<b>4</b>	<b>REPRESENTACIÓN DE LA EXCITACIÓN</b>	<b>40</b>
4.1	El Ruido Blanco como Proceso de Excitación	40
4.2	Ruido Blanco Filtrado Estacionario	43
4.3	Ruido Blanco Filtrado No_Estacionario	46
4.4	Ecuaciones de Movimiento Definitivas	47
4.5	Cálculo de los Parámetros del Modelo del Proceso de Excitación	48
4.5.1	<i>Expresión para el cálculo del Estimador de la Densidad Espectral del Proceso Aleatorio de Excitación</i>	49
4.5.2	<i>Determinación de los Parámetros del Modelo Estacionario de la Excitación</i>	51
4.5.3	<i>Determinación de los Parámetros del Modelo No_Estacionario de la Excitación</i>	52
<b>5</b>	<b>CÁLCULO DE LA MATRIZ DE COVARIANZA USANDO LEG</b>	<b>53</b>
5.1	Procedimientos de Solución	53
5.1.1	<i>Caso Estacionario</i>	53
5.1.2	<i>Caso No_Estacionario</i>	54
5.2	Algoritmos Alternos de Solución	55
<b>6</b>	<b>ANÁLISIS DE SISTEMAS NO LINEALES MEDIANTE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO</b>	<b>56</b>
6.1	La Simulación de Monte Carlo	56
6.2	Metodología para el Cálculo de la Respuesta Probabilista	57
<b>7</b>	<b>CALIBRACIÓN DEL MÉTODO LEG</b>	<b>59</b>
7.1	Organización del Estudio	59
7.2	Propiedades de los Sistemas Estudiados	60
7.3	Propiedades del Proceso de Excitación	62
7.3.1	<i>Acelerogramas Sintéticos (para el Análisis con Simulación de Monte Carlo)</i>	62
7.3.2	<i>Cálculo de los Parámetros del Modelo de la Excitación (para Análisis con LEG)</i>	64
7.4	Resultados	68
7.5	Descripción de los Resultados	102
7.5.1	<i>Influencia de <math>\alpha_2</math> (caso IA2)</i>	102
7.5.2	<i>Influencia de <math>\alpha_6</math> (caso IA6)</i>	103
7.5.3	<i>Influencia de la Degradación (caso IDE)</i>	103
7.5.4	<i>Influencia del Nivel de Ductilidad (caso IDD)</i>	104
7.5.5	<i>Influencia del Tipo de Modelo de la Excitación</i>	104
7.6	Errores Relativos Promedio	105
<b>8</b>	<b>EVALUACIÓN DEL MÉTODO</b>	<b>111</b>
8.1	Precisión	111
8.1.1	<i>Causas de la Imprecisión de la LEG</i>	112
8.2	Aspectos Operativos	113
8.2.1	<i>Caso Estacionario</i>	113
8.2.2	<i>Caso No_Estacionario</i>	113
8.2.3	<i>Simulación de Monte Carlo</i>	113
8.3	Eficiencia Computacional	114

<b>9 APLICACIÓN: OBTENCIÓN DE ESPECTROS PROBABILISTAS DE RESPUESTA INELÁSTICA</b>	<b>116</b>
9.1 Antecedentes	116
9.2 Metodología	117
9.2.1 <i>Valor Esperado del Desplazamiento Máximo Absoluto</i>	117
9.2.2 <i>Demanda de Ductilidad</i>	118
9.2.3 <i>Cálculo de Espectros de Ductilidad Constante</i>	118
9.3 Resultados	119
<b>10 CONCLUSIONES</b>	<b>124</b>
10.1 Conclusiones	124
10.2 Estudios Futuros	125
<b>REFERENCIAS</b>	<b>127</b>

---

## RESUMEN

Esta tesis trata con un método de solución de problemas de vibración aleatoria *no lineal*, conocido como el método de la *linealización equivalente estocástica gaussiana*. Este método es una técnica con alto potencial aplicable a casos con excitaciones de características *no estacionarias* y a cualquier tipo de estructura de varios grados de libertad. Su eficiencia computacional es considerablemente mayor que la de la simulación de Monte Carlo.

Se establece la precisión del método de la *linealización equivalente estocástica gaussiana* en el cálculo de la respuesta ante excitaciones de banda angosta, de sistemas de un grado de libertad con diferentes propiedades mecánicas y geométricas. Dichos sistemas tienen comportamiento *histerético* representado mediante una ecuación diferencial. Se considera que las propiedades del sistema son deterministas y que la única fuente de incertidumbre es la excitación. Ésta se modela como un *ruido blanco gaussiano* filtrado con la función de transferencia de Clough y Penzien. Las características del modelo del proceso aleatorio de excitación se obtienen a partir del acelerograma de la componente este-oeste del movimiento registrado en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 (*SCTEW85*).

La calibración de la técnica de *linealización equivalente estocástica gaussiana* se realiza comparando los resultados de dicho método con los que provienen de la simulación de Monte Carlo. En la simulación se usan 50 acelerogramas sintéticos simulados también a partir de las propiedades de *SCTEW85*. Los resultados se presentan en forma de *espectro* de respuesta. Se analizan los errores en el cálculo de la desviación estándar máxima del desplazamiento y de la velocidad así como la esperanza de la rapidez de cambio de la energía *histerética* disipada del sistema. Estas cantidades dan una medida directa sobre la precisión del criterio de *linealización equivalente estocástica gaussiana*.

Además, se presenta una forma efectiva de obtener espectros probabilistas de respuesta *no lineal*

para excitaciones de banda angosta, sin tener que recurrir al método de Monte Carlo. La respuesta analizada corresponde al valor esperado del desplazamiento máximo. Se analiza el error en la estimación de esta cantidad con el fin de evaluar las expresiones usadas para el cálculo del *factor pico*.

A partir del análisis de los *espectros* e historias de respuesta, se dan lineamientos y recomendaciones sobre el empleo del criterio de *linealización equivalente estocástica gaussiana*.



---

# CAPÍTULO

# 1

---

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se da una visión general de los conceptos básicos tratados en esta tesis. En la primera sección se describen los objetivos y alcances de la tesis. En la segunda sección se comenta, en términos generales, la importancia de considerar modelos *no lineales* y las incertidumbres de la excitación en el análisis y diseño de una estructura. Se describen algunos métodos de solución de problemas de vibración aleatoria *no lineal* alternos al de *linealización equivalente estocástica gaussiana*, tema de este trabajo.

### 1.1 OBJETIVOS Y ALCANCES

Existen tres objetivos primordiales de esta tesis. El primero es entender el método de la *linealización equivalente estocástica gaussiana* y familiarizarse con él. El segundo es calibrar dicho método a través de un análisis paramétrico de sistemas *histeréticos* de un grado de libertad (*UGL*) y el tercero es presentar una forma efectiva de obtener espectros probabilistas de respuesta *no lineal* sin tener que recurrir al método de Monte Carlo, ahorrando de esta manera mucho tiempo de cómputo.

Se pretende llegar a establecer la precisión del método *LEG* en el cálculo de la respuesta ante excitaciones de banda angosta, de sistemas *UGL* con las siguientes propiedades físicas y mecánicas:

- I. Rigidez en la postfluencia del sistema. Esto se maneja a través de un parámetro denominado  $\alpha_2$  igual a la relación entre la rigidez en la postfluencia y la rigidez inicial del sistema. Más adelante se verá que este parámetro controla también el grado de *no linealidad* del sistema.
- II. Transición entre el comportamiento lineal y el *no lineal*. Se estudian sistemas con transición suave y transición brusca. Esto se relaciona con el grado de *no linealidad* del sistema de ecuaciones.

- III. Deterioro. Se analizan sistemas con y sin degradación de rigidez y/o resistencia.
- IV. *Demanda de ductilidad*. Se analizan sistemas con diferentes resistencias para que el proceso de excitación usado en esta tesis les demande poca y alta *ductilidad*.
- V. Periodo de vibración del sistema *UGL*. Se estudia un rango amplio de periodos naturales de vibración.
- VI. Influencia de la *estacionariedad* de la excitación. Se usan como modelos de excitación: procesos aleatorios *estacionarios* y *no estacionarios*.

Los sistemas analizados son sistemas *UGL* *histeréticos* cuyo comportamiento *no lineal* se concentra en el resorte del sistema y se representa mediante una ecuación diferencial. Se considera que las propiedades del sistema son deterministas y que la única fuente de incertidumbre es la excitación. Ésta se modela como un *ruido blanco gaussiano* filtrado con la función de transferencia de Clough y Penzien. Las características del modelo del proceso aleatorio de excitación se obtienen a partir del acelerograma de la componente este-oeste del movimiento registrado en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 (*SCTEW85*).

La calibración de la *linealización equivalente estocástica gaussiana* se realiza comparando los resultados de dicho método con los que provienen de la simulación de Monte Carlo. En la simulación se usan 50 acelerogramas sintéticos simulados también a partir de las propiedades de *SCTEW85*. Los resultados se presentan en forma de *espectro* de respuesta. Se analizan los errores en el cálculo de la desviación estándar máxima del desplazamiento y de la velocidad así como la esperanza de la rapidez de cambio de la energía *histerética* disipada del sistema. Estas cantidades dan una medida directa sobre la precisión de la *linealización equivalente estocástica gaussiana*.

La *linealización equivalente estocástica gaussiana* se usa para obtener *espectros* probabilistas de respuesta *no lineal* para excitaciones de banda angosta. La respuesta analizada es el valor esperado del desplazamiento máximo. También se analiza el error en la estimación de esta cantidad con el fin de evaluar las expresiones usadas para el cálculo del *factor pico*.

A partir del análisis de los *espectros* e historias de respuesta, se dan lineamientos y recomendaciones sobre el empleo de la *linealización equivalente estocástica gaussiana*.

## 1.2 ANTECEDENTES

Esta sección se enfoca al estudio de la respuesta dinámica *no lineal* de estructuras sometidas a excitación aleatoria modelada con un proceso *estocástico*. La consideración del comportamiento *no lineal* es indispensable en los casos donde las estructuras deben analizarse para eventos de carga extraordinarios. En la mayoría de estos casos las estructuras tienen comportamiento *no lineal* antes de que algunos de sus componentes estructurales fallen. De esta forma, se requiere de un análisis estructural *estocástico no lineal* con el fin de obtener una respuesta estructural realista ante eventos de carga importantes. Dicho análisis proporciona la base para un análisis posterior de la confiabilidad estructural.

### 1.2.1 Comportamiento *no lineal*

Cuando se analizan las propiedades de vibración de un sistema *UGL* según la teoría de vibración

clásica lineal, se supone que la fuerza en el resorte es proporcional a su deformación. También se considera que el sistema tiene amortiguamiento viscoso de tal manera que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del sistema. Además se supone siempre que la masa permanece invariante en el tiempo. Consecuentemente, la ecuación de movimiento para tal sistema es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes de la siguiente forma

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.1)$$

en donde  $m$ ,  $c$  y  $k$  son la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la rigidez del sistema, respectivamente.  $x$  es el desplazamiento de la masa. Un punto sobre  $x$  indica derivada con respecto al tiempo, así  $\ddot{x}(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  y  $x(t)$  son la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de la masa, respectivamente.  $f$  es una fuerza externa de excitación.

La ecuación (1.1) representa adecuadamente varios problemas prácticos y juega un papel importante en la teoría clásica de vibración lineal. Sin embargo, existen varios sistemas físicos para los cuales las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son insuficientes para describir su movimiento y el análisis de tales sistemas requiere del trato con ecuaciones diferenciales *no lineales*. Si se excluye la posibilidad de que la masa varíe, la forma general de la ecuación de movimiento para un sistema UGL puede expresarse como

$$m\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (1.2)$$

donde  $g$  es en general una función diferencial *no lineal* del desplazamiento y de la velocidad. Los sistemas que tienen como ecuación de movimiento a la ecuación (1.2) se les conoce como *sistemas no lineales* o *sistemas con memoria* y a su movimiento se le llama *vibración* o *respuesta no lineal*. Para estos sistemas el *principio de superposición* no es aplicable.

El comportamiento *no lineal* puede resultar de la:

- a) *No linealidad geométrica*, debida a la relación *no lineal* entre fuerza y deformación, aún sin exceder el límite elástico de los materiales, causada por razones geométricas como deformaciones grandes, esfuerzos de contacto y cierre de aberturas. El péndulo simple es un ejemplo de este tipo de sistema.
- b) *No linealidad del material*, debida a propiedades exclusivas del material. El comportamiento del material del sistema puede ser *elástico* o *inelástico*. Si las cargas dinámicas deforman a un sistema o una parte de él más allá del rango elástico del material, el comportamiento de este sistema se conoce como *comportamiento inelástico*.

La *no linealidad* puede representarse analíticamente por dos tipos de ecuaciones:

- Por ecuaciones *diferenciales no lineales*, como la ecuación (1.2). En este caso la respuesta en un instante anterior afecta la respuesta en un instante posterior y se dice que tal sistema *no lineal* es un sistema *con memoria*, o bien, con comportamiento *histerético*. La *no linealidad* en este caso puede deberse a la rigidez del sistema, que puede representarse como sigue

$$g(x, \dot{x}) = \beta \dot{x} + h_1(x) \quad (1.3)$$

o al amortiguamiento del sistema, que puede representarse por

$$g(x, \dot{x}) = h_2(\dot{x}) + kx \quad (1.4)$$

o a ambos. En las ecuaciones anteriores  $h_1$  y  $h_2$  representan funciones *no lineales*.

- Por ecuaciones *algebraicas no lineales*. En tal caso  $x$  satisface a una ecuación del siguiente tipo

$$x(t) = g[f(t)] \quad (1.5)$$

En esta ecuación, el valor de la respuesta en un instante se determina del valor de la excitación en el mismo instante y  $f$  no tiene efectos posteriores sobre  $x$ . Los sistemas cuyo comportamiento se puede modelar con la ecuación (1.5) reciben el nombre de sistemas *sin memoria*.

Un ejemplo importante de la ocurrencia del comportamiento *no lineal* se encuentra en el problema del diseño sísmico de edificios y otras estructuras. Aquí los elementos estructurales usualmente exhiben un comportamiento *histerético* muy significativo cuando se sujetan a niveles altos de cargas dinámicas. Una representación satisfactoria del comportamiento global del sistema se obtiene al usar un modelo diferencial *no lineal*, que en combinación con una adecuada representación *estocástica* de la excitación sísmica, como se describe en la siguiente sección, constituye un modelo que proporciona la base para formular procedimientos de análisis y diseño más realistas.

### 1.2.2 Vibración aleatoria

Los sismos tienen características impredecibles en el sentido determinista y debido a nuestras incertidumbres es necesario que estos fenómenos se consideren como procesos aleatorios caracterizados por sus propiedades estadísticas. En contraste al análisis tradicional de sistemas basado en conceptos deterministas, la teoría de vibración aleatoria toma en cuenta explícitamente la incertidumbre en la estimación de los parámetros del sistema y de la excitación. La consideración de estas incertidumbres en el análisis requiere del desarrollo de herramientas especializadas que involucren conceptos de dinámica de sistemas, probabilidad, procesos *estocásticos* y confiabilidad.

Actualmente la teoría de vibración aleatoria es una herramienta indispensable en el análisis y diseño de una amplia variedad de estructuras. Por ejemplo, el análisis y diseño de aeronaves sujetas a turbulencias atmosféricas, de edificios y de puentes bajo la acción de cargas de viento o sísmicas, de barcos y plataformas marinas sujetos a viento y olas, están basados frecuentemente en técnicas de *vibración aleatoria*. El uso de modelos deterministas que ignoren las incertidumbres inherentes en el viento, sismo, turbulencia atmosférica y otras fuentes de excitación puede dar lugar a errores graves en el análisis así como a un diseño insatisfactorio.

Un método que resulta el más adecuada para el desarrollo de la teoría de vibración aleatoria es el llamado *espacio de estado*. Algunas de sus ventajas son:

1. Adaptabilidad al cálculo mediante computadora.
2. Extensión directa de sistemas *UGL* a sistemas de varios grados de libertad (*VGL*) y,
3. Extensión sencilla para la descripción de sistemas más generales tales como sistemas con parámetros que varían en el tiempo y sistemas con amortiguamiento no proporcional.

Es conveniente presentar los principios básicos de esta técnica a través del siguiente ejemplo: Considérese un oscilador con masa y un resorte. Sea  $x(t)$  la respuesta de interés y  $f(t)$  la fuerza de excitación. Se sabe que  $x(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$mx(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.6)$$

Supóngase que  $x(t_0) = x_0$  y  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  son conocidas. De ecuaciones diferenciales elementales, se sabe que la respuesta está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0) + \frac{1}{m\omega} \int_{t_0}^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (1.7)$$

donde  $\omega = (k/m)^{1/2}$  es la frecuencia natural del sistema. Nótese que el vector

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

describe completamente al sistema en el instante  $t_0$ , en el sentido de que el conocimiento de estas condiciones, junto con la especificación de la excitación, es todo lo que se necesita para determinar su comportamiento futuro. El vector

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

se conoce como *vector de estado* del sistema en el instante  $t$ , y al espacio en el cual se define el *vector de estado* se le llama *espacio de estado*.

En términos del *vector de estado*  $X(t)$ , la ecuación de movimiento puede escribirse como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en la siguiente forma matricial

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Gf(t) \quad (1.10)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

La ecuación (1.10) se llama *ecuación de estado* del oscilador. Ésta es completamente equivalente a la ecuación (1.6) ya que cualquiera de ellas puede usarse para determinar la respuesta del sistema. Sin embargo la técnica *espacio de estado* proporciona un marco teórico natural en el que puede desarrollarse la formulación de la vibración aleatoria. De hecho esta última depende de manera importante de la técnica mencionada.

### 1.2.3 Métodos de solución

La solución exacta a las ecuaciones diferenciales *no lineales* (*estocásticas y/o deterministas*) de movimiento es generalmente difícil de obtener. El problema se complica más para sistemas *no lineales* excitados aleatoriamente.

En el estado de arte actual en la dinámica estructural *no lineal*, el análisis *determinista* así como el *estocástico* revelan deficiencias importantes. En el análisis *determinista* es muy común el uso de elementos finitos. La técnica de discretización y los continuos desarrollos en métodos numéricos para el análisis estructural *no lineal* junto con la constante disminución del costo computacional permiten obtener modelos estructurales *no lineales* muy detallados y una precisión muy buena. Sin embargo, en muchos casos, las cargas y varios parámetros estructurales se conocen sólo en forma aproximada. En otras palabras, los análisis *deterministas* convencionales evalúan "exactamente" cantidades de respuesta ficticias condicionadas al conocimiento exacto de todas las cargas y de los parámetros estructurales. Por el contrario, el análisis *estocástico* es capaz de incluir las incertidumbres inevitables en el conocimiento de los parámetros estructurales y de las cargas aleatorias, pero muchas de las técnicas existentes son muy sofisticadas y se aplican exitosamente a sistemas *UGL* y en algunos casos a sistemas con dos a cinco grados de libertad. Estos métodos proporcionan una buena idea del comportamiento *no lineal* de una estructura, sin embargo cuando estas técnicas "avanzadas" y "precisas" se aplican a sistemas con varios grados de libertad ( $>10$ ), es frecuente encontrar que éstas no pueden generalizarse o no pueden competir en forma directa con la precisión y simplicidad de la simulación de Monte Carlo.

Un procedimiento de análisis debe cumplir con los siguiente requisitos con el fin de ser útil en una aplicación práctica:

- a) Debe ser aplicable a casos con excitaciones de características *no estacionarias*, descritas por sus *espectros evolutivos*.
- b) Debe ser aplicable a cualquier tipo de estructura discretizada en un sistema de *VGL* o mediante el uso de elementos finitos.
- c) El esfuerzo computacional requerido para calcular la estadística de la respuesta debe ser considerablemente menor que el de la simulación de Monte Carlo.
- d) Debe proporcionar resultados con precisión razonable.

Los procedimientos de análisis *estocástico no lineal* cumplen parcialmente con estos requisitos. La discrepancia más severa entre los requerimientos y las capacidades de un método, se presenta en el inciso b) anterior. La mayoría de los procedimientos que se presentan enseguida, tales como aquellos basados en la ecuación de Fokker-Planck, son aplicables solamente a estructuras que pueden idealizarse por uno o muy pocos grados de libertad. Otras técnicas, como el método de *perturbación*, están restringidas a estructuras con poca *no linealidad* y por lo tanto no son adecuadas para estimar la confiabilidad de estructuras ante excitaciones severas. Una técnica con alto potencial que satisface los tres requerimientos anteriores es el método de la *linealización equivalente estocástica*. Aunque este método se considera como el más adecuado para aplicaciones prácticas tiene varias limitaciones que se mencionan más adelante.

Enseguida se presenta una descripción de algunos métodos de solución de problemas *estocásticos no lineales* en la que se señalan sus bases teóricas, sus ventajas y sus desventajas. Para más detalles consúltese Roberts (1981), Spanos (1981), To (1984), Branstetter *et al* (1988), Roberts y Spanos

(1990) y Soong (1993).

**LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA GAUSSIANA.** Un método natural de atacar un problema *no lineal* es reemplazar el sistema de ecuaciones diferenciales *no lineales* de movimiento por un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales lineales; la diferencia entre ambos sistemas es minimizada en algún sentido apropiado. Esta técnica fue desarrollada inicialmente por Krylov y Bogoliúbov (1937), para sistemas *no lineales* con excitación determinista. Posteriormente fue adaptada para problemas aleatorios por Booton *et al* (1953) y Booton (1954) y usada como una herramienta en ingeniería de control. En forma independiente, el método (ahora conocido como *linealización estadística*, *linealización equivalente*, o *linealización estocástica*) fue propuesto por Caughey (1963) como herramienta para resolver problemas *estocásticos no lineales* en dinámica estructural. A este método se le ha dado aplicación amplia en las áreas de vibración aleatoria y mecánica estructural (Iwan y Mason, 1980; Wen, 1980; Casciati y Faravelli, 1985; Casciati y Faravelli, 1988; Baber y Wen 1981; Baber y Wen 1982; Pires y Tang, 1990).

Como una ilustración de la idea básica de este método, considérese la siguiente forma general de una ecuación diferencial *estocástica* de un oscilador *no lineal*

$$g(X) = F(t) \quad (1.12)$$

$X(t)$  es el vector estado de respuesta

$$X = [x, \dot{x}, \ddot{x}]^T \quad (1.13)$$

donde  $x(t)$  es el desplazamiento,  $\dot{x}(t)$  la velocidad y  $\ddot{x}(t)$  la aceleración del sistema.  $g(X)$  denota una función *no lineal* arbitraria de  $X$  y  $F(t)$  es la excitación.  $X(t)$  y  $F(t)$  se consideran como procesos *estocásticos*.

En el método de *linealización equivalente* se reemplaza la ecuación (1.12) con la forma lineal equivalente

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.14)$$

donde  $m$ ,  $c$  y  $k$  son parámetros que dependerán del tiempo si la naturaleza estadística de  $F(t)$  varía con el tiempo. La *ecuación de error* entre las ecuaciones (1.12) y (1.14) está claramente dada por

$$\varepsilon = g(X) - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx \quad (1.15)$$

Esta ecuación puede minimizarse en algún sentido conveniente. El método usual es minimizar el error medio cuadrático de  $\varepsilon$  con respecto a los parámetros  $m$ ,  $c$  y  $k$ . Este proceso proporciona ecuaciones que involucran valores medios de varias funciones de  $X$ . Para evaluar exactamente estos valores medios es necesario conocer las leyes de probabilidad que gobiernan a  $X(t)$ . Éstas son desconocidas; si fuesen conocidas entonces la solución del problema *no lineal* original sería conocido exactamente y no existiría razón para recurrir a la *linealización equivalente*. Usualmente este problema se resuelve considerando que  $X(t)$  es un proceso aleatorio *gaussiano*. Esto se basa en el hecho de que la respuesta del sistema lineal equivalente será exactamente *gaussiana* si el proceso aleatorio de

excitación es *gaussiano* y aproximadamente *gaussiano* si  $F(t)$  es *no gaussiano*. Una vez considerada esta hipótesis y a través de la teoría lineal estándar, se obtiene un sistema de ecuaciones *no lineales* para los parámetros  $m$ ,  $c$  y  $k$ . Estas ecuaciones serán algebraicas si los parámetros son constantes y diferenciales si estos dependen del tiempo; en cualquier caso es sencillo resolverlas con métodos numéricos y en casos especiales pueden resolverse analíticamente.

Debido a que se supone que la respuesta es *gaussiana*, esta técnica frecuentemente se conoce como *Linealización Equivalente Estocástica Gaussiana (LEG)*.

Una gran ventaja del método *LEG* es que puede generalizarse fácilmente a sistemas *VGL* (i.e. Casciati y Faravelli, 1988). El método puede adaptarse sin dificultad para tratar con excitaciones *no blancas* y puede además generalizarse para excitaciones y respuestas *no estacionarias*.

Aunque el método *LEG* ha sido aplicado extensivamente a problemas *no lineales* de vibración, existen algunas limitaciones. Por ejemplo, la distribución de probabilidad de la respuesta del sistema original y del equivalente pueden desviarse substancialmente una de otra. También cuando el sistema original exhibe esencialmente un fenómeno *no lineal*, tal como cambios bruscos de la amplitud de su respuesta y *ciclos límite*, la distribución de la respuesta es inherentemente diferente de un proceso *gaussiano* supuesto por la *LEG*. En estos casos, la aplicación del método aquí descrito puede conducir a resultados erróneos.

**MÉTODOS DE MARKOV (PROCESOS TIPO DIFUSIÓN).** La respuesta de sistemas *no lineales* sujetos a excitaciones *gaussianas* de banda ancha o que pueden representarse por *ruidos blancos gaussianos* filtrados, es un proceso de difusión de dimensión  $n$  que satisface la siguiente ecuación

$$dX(t) = m(X(t), t)dt + \Sigma(X(t), t)dB(t) \quad (1.16)$$

en la cual  $X(t)$  es un *vector de estado* del sistema que contiene la respuesta del mismo y  $B(t)$  es un *vector de procesos de Wiener* con incrementos estacionarios independientes  $dB(t)$  que siguen una distribución *gaussiana* de media cero y varianza  $dt$ . El vector  $m$  y la matriz  $\Sigma$  contienen los coeficientes de desviación y difusión. Es posible relacionar directamente los coeficientes de  $m$  y de  $\Sigma$  con los parámetros de las ecuaciones de movimiento del sistema en consideración. Se puede demostrar que la ecuación de difusión o ecuación diferencial de Itô (ecuación 1.16) tiene solución única. El proceso solución  $X(t)$  es Markoviano y es tipo difusión si  $m$  y  $\Sigma$  son funciones continuas de  $t$ .

Es deseable hallar la función de distribución de probabilidad de la respuesta. Para esta clase de sistemas, dicha distribución satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [m_i(x, t)f] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{i,j}(x, t)f] \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} = - \sum_{i=1}^n m_i(x_0, t_0) \frac{\partial f}{\partial x_{0i}} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(x_0, t_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} \quad (1.18)$$



donde  $f$  es la *densidad de probabilidad de transición* de  $X(t)$ , es decir,  $f(x, t | x_0, t_0)$  y  $b_{ij} = [\Sigma(x, t) \Sigma^T(x, t)]_{ij}$ . Las ecuaciones (1.17) y (1.18) se conocen como ecuaciones de Fokker-Planck y Kolmogorov respectivamente (FPK). Existen soluciones exactas de las ecuaciones anteriores para el caso en que  $X(t)$  es *estacionario*. Es mucho más difícil obtener soluciones exactas para el caso *no estacionario*. Junto con condiciones iniciales y condiciones de frontera apropiadas pueden obtenerse soluciones por medio del método ordinario de separación de variables o por medio de transformaciones de *Fourier*.

Así, dentro de las limitaciones de este modelo, las cuales esencialmente involucran aproximar el proceso aleatorio de excitación como un *ruido blanco* o un *ruido blanco* filtrado, el marco teórico de este método ofrece, en principio, una *técnica directa* para el tratamiento exacto de problemas de vibración *no lineal*. Desafortunadamente la clase de problemas de vibración aleatoria *no lineal* para los cuales las ecuaciones FPK tienen solución exacta es muy limitado. Para sistemas complicados o cuando se usan filtros lineales para el *ruido blanco* (lo cual se traduce en un incremento de las dimensiones del sistema) es necesario recurrir a técnicas numéricas o numérico-analíticas combinadas para resolver las ecuaciones FPK. Cuando el sistema es de dimensión grande estas técnicas tienden a involucrar considerables requerimientos de memoria y excesivas cantidades de tiempo de cómputo.

**ECUACIONES DE MOMENTO Y TÉCNICAS DE CORTE.** Si se desean obtener sólo los momentos estadísticos de  $X(t)$ , se pueden establecer ecuaciones de momento siguiendo la ecuación de Fokker-Planck. Si  $X(t)$  satisface la ecuación (1.16) la forma general de la ecuación de momento es

$$\frac{dE\{\xi\}}{dt} = E\left\{\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\} + \sum_{i=1}^n E\left\{\frac{\partial \xi}{\partial X_i} m_i\right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n E\left\{(\Sigma \Sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 \xi}{\partial X_i \partial X_j}\right\} \quad (1.19)$$

donde  $\xi(X(t), t) = X_1^{s_1}(t) X_2^{s_2}(t) \dots X_n^{s_n}(t)$ ,  $s_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ . Todos los vectores de momento de orden  $s = \sum_{i=1}^n s_i$ , pueden establecerse a partir de la ecuación (1.19).

Generalmente, en el caso *no lineal* estas ecuaciones no pueden resolverse porque tienen una forma jerárquica infinita y cualquier conjunto finito extraído de éstas, involucra varios momentos desconocidos. En aplicaciones de ingeniería este problema se soluciona usando hipótesis heurísticas que consideran ciertas relaciones entre momentos de orden menor y mayor. Estas técnicas se conocen como *técnicas de corte*. Muchos de estos métodos involucran dos fases: en la primera se selecciona arbitrariamente el orden o nivel de corte  $k > 1$ . En la segunda se usan varias hipótesis para relacionar los momentos de orden mayor que  $k$  con los momentos de orden menor que  $k$ . Las relaciones resultantes entre los momentos por arriba y por debajo del nivel de corte permiten truncar y resolver la jerarquía infinita. Algunas de las técnicas de corte son

1. *Corte basado en momentos centrales.* Supone que los momentos centrales de orden mayor que  $k$  son cero
2. *Corte gaussiano.* Supone que  $X(t)$  es un proceso *gaussiano* y por lo tanto basta con los primeros dos momentos para definir la distribución de probabilidad y los momentos de orden mayor que 3 del proceso  $X(t)$ . Se puede demostrar que esta técnica conduce a resultados idénticos a los que se obtienen con el método *LEG*.
3. *Corte basado en acumulantes.* De acuerdo a esta técnica las ecuaciones de momentos son truncadas bajo la hipótesis de que los *acumulantes* de orden mayor que  $k$ , asociados con el

proceso  $X(t)$ , son cero.

4. *Corte no gaussiano.* Estas técnicas se basan en aproximaciones de la *densidad de probabilidad*  $f$  de  $X(t)$  que dependen de un número finito de parámetros que pueden obtenerse de las ecuaciones de momentos.

Una desventaja de esta técnica es que la complejidad de las ecuaciones de momentos se incrementa dramáticamente cuando el orden del corte  $k$  aumenta.

**PROMEDIO ESTOCÁSTICO.** Este método fue introducido por primera vez por Stratonovich (1964) basado en consideraciones heurísticas. Una demostración rigurosa la dio Khas'minskii (1968) pocos años más tarde. Esta técnica es aplicable a sistemas dinámicos *no lineales* cuya respuesta  $X(t)$  cambia suavemente con el tiempo con una razón del orden de  $\varepsilon$  donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro de valor pequeño (los sistemas que involucran pequeñas *no linealidades* y excitaciones débiles son de este tipo). El *promedio estocástico* ayuda a desarrollar ecuaciones, para el vector estado  $X(t)$ , mucho más simples que las ecuaciones originales exactas. Esto se basa en que los términos que fluctúan rápidamente en las ecuaciones diferenciales originales pueden eliminarse para obtener una ecuación diferencial aproximada de primer orden para  $X(t)$ . En general este método involucra dos fases: en la primera se promedian los términos que no están relacionados con la excitación y en la segunda se suponen que los términos que incluyen a la excitación son procesos de banda ancha y se aproximan con *ruidos blancos*. Así la ecuación diferencial aproximada para  $X(t)$  es una ecuación diferencial *estocástica* del tipo Itô (ecuación 1.17).

El método se basa en el siguiente teorema de Stratonovich-Khas'minskii:

Considérese que el vector de respuesta  $X(t)$  de dimensión  $n$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$X(t) = \varepsilon^2 \alpha(t, X) + \varepsilon \beta(t, X, F) \quad (1.20)$$

donde  $F(t)$  es un proceso aleatorio de excitación cuyas componentes son procesos *estacionarios* de banda ancha con media cero, y los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen ciertos requerimientos que usualmente se conocen en la práctica. Se puede demostrar que  $X(t)$  puede aproximarse sobre un intervalo de orden  $1/\varepsilon$  por la solución  $X(t)$  de la ecuación diferencial de Itô:

$$dX = \varepsilon^2 m(X)dt + \varepsilon \Sigma(X)dB \quad (1.21)$$

donde  $B(t)$  es un vector de procesos de Wiener con incrementos estacionarios independientes  $dB(t)$  que siguen una distribución *gaussiana* de media cero y varianza  $dt$ . El vector de desviación y la matriz de difusión pueden determinarse con

$$m = T^{prom} \left[ E\{\alpha\} + \int_{-\infty}^0 E \left\{ \left[ \frac{\partial \beta}{\partial X} \right]_t [\beta]_{t+\tau} \right\} d\tau \right] \quad (1.22)$$

y

$$\Sigma \Sigma^T = T^{prom} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} E \{ \beta ]_t [ \beta ]_{t+\tau}^T \} dt \right] \quad (1.23)$$

donde

$$T^{prom}(\bullet) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bullet) ds \quad (1.24)$$

es el *operador promedio*. Los subíndices  $t$  y  $t+\tau$  en las ecuaciones (1.22) y (1.23) indican instantes en el cual se calculan las funciones de variación ■

Puede demostrarse, por varios argumentos físicos, que la solución obtenida con este método es asintóticamente exacta para cuando la magnitud del amortiguamiento se aproxima a cero.

**TÉCNICAS DE PERTURBACIÓN.** La técnica de perturbación es un método clásico tanto en problemas deterministas como en *estocásticos*. Se emplea en sistemas con poca *no linealidad*. Resuelve ecuaciones diferenciales que contienen un parámetro  $\varepsilon$  de valor pequeño, considerando una solución aproximada como series de potencias de este parámetro. Introduciendo esta solución aproximada en la ecuación diferencial e igualando términos del mismo orden  $\varepsilon^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se obtiene un conjunto finito de ecuaciones diferenciales lineales simples que pueden resolverse en forma secuencial.

Como una ilustración del uso del método de perturbación para obtener soluciones aproximadas de sistemas dinámicos con poca *no linealidad*, considérese un oscilador simple con desplazamiento  $X(t)$  que satisface la siguiente ecuación diferencial.

$$X(t) + 2\xi\omega_0 X(t) + \omega_0^2 [X(t) + \varepsilon g(X(t))] = F(t) \quad (1.25)$$

en la cual  $F(t)$  es un proceso aleatorio de excitación,  $\xi$  denota la relación de amortiguamiento,  $\varepsilon$  es un parámetro de valor pequeño, y  $g$  es una función *no lineal* del desplazamiento  $X(t)$ . El oscilador es lineal cuando  $\varepsilon=0$  en tal caso  $\omega_0$  denota la frecuencia natural subamortiguada de vibración.

En perturbación se busca una solución  $X(t)$  en forma de series de potencias en  $\varepsilon$ . Por lo tanto  $X(t)$  se expresa como:

$$X(t) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \dots \quad (1.26)$$

Además  $\varepsilon g(X)$  se expande como serie de Taylor alrededor de  $X_0$  de la siguiente forma

$$\varepsilon g(X) = \varepsilon \left[ g(X_0) + g'(X_0)(\varepsilon X_1 + \dots) + \frac{1}{2} g''(X_0)(\varepsilon X_1 + \dots)^2 + \dots \right] \quad (1.27)$$

sustituyendo las ecuaciones (1.26) y (1.27) en la (1.25) e igualando términos del mismo orden  $\varepsilon^k$  se obtiene un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales en términos de  $X_0(t)$ ,  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , .... Para  $k=0, 1$ , y 2 dichas ecuaciones tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
X_0 + 2\xi\omega_0 X_0 + \omega_0^2 X_0 &= F \\
X_1 + 2\xi\omega_0 X_1 + \omega_0^2 X_1 &= -\omega_0^2 g(X_0) \\
X_2 + 2\xi\omega_0 X_2 + \omega_0^2 X_2 &= -\omega_0^2 g'(X_0)X_1
\end{aligned}
\tag{1.28}$$

Con la solución de las ecuaciones resultantes hasta cualquier orden  $k$  y la ecuación (1.26) se obtienen varias aproximaciones para el desplazamiento  $X(t)$ . Es común considerar aproximaciones de primer orden,  $k=1$ . Además es aceptable en varias aplicaciones eliminar términos de ordenes  $\varepsilon^2$  o mayores, siempre que  $\varepsilon$  sea pequeño.

El método de perturbación presentado tiene características atractivas. Reemplaza la solución de un problema aleatorio *no lineal* representado por la ecuación (1.25) con la solución de una serie de problemas aleatorios lineales con el mismo operador diferencial

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \tag{1.29}$$

pero diferentes funciones de excitación (lado derecho de las ecuaciones 1.28). Sin embargo el método tiene algunas limitaciones significativas; la complejidad numérica es una de ellas y las funciones de excitación en las ecuaciones (1.28) se complican conforme  $k$  aumenta.

**SISTEMAS NO LINEALES EQUIVALENTES.** Caughey (1986) propuso una interesante generalización alternativa a la *LEG*. La idea es reemplazar el conjunto original de ecuaciones diferenciales *no lineales* por un conjunto equivalente *no lineal*, donde este último pertenezca a una clase de problemas para los que existan soluciones exactas (i.e. a través del uso de procesos de difusión). Desafortunadamente, la clase de problemas *no lineales* con solución exacta es en la actualidad muy limitada, por lo que el intervalo de aplicabilidad de esta técnica es también limitado. Este método es muy efectivo como un medio para predecir la distribución de probabilidad de la respuesta con precisión razonable. Así, a diferencia del método *LEG* donde se suponen procesos *gaussianos*, se puede obtener información sobre la desviación de la distribución de la respuesta de la forma *gaussiana* debida a los efectos *no lineales*. Esta información es de gran importancia en la estimación de la confiabilidad de un sistema.

Como ejemplo, supóngase un sistema *no lineal* descrito por

$$X(t) + h(X, X) + k(X) = W(t) \tag{1.30}$$

donde  $W(t)$  es un *ruido blanco gaussiano* con intensidad  $\pi G_0$ . En general este sistema no tiene solución exacta. En este método se reemplaza la ecuación (1.30) por la siguiente forma

$$Z(t) + g(H)Z + k(Z) = W(t) \tag{1.31}$$

Para este sistema se tiene una solución exacta. La *densidad de probabilidad estacionaria*  $f(z, z)$  satisface la ecuación de Fokker-Planck (ecuación 1.17). Se puede demostrar que

$$f(z, z) = q \exp \left[ -\frac{2}{\pi G_0} \int_0^H g(v) dv \right] = f(H) \Big|_{H=z^2/2+K(z)} \quad (1.32)$$

donde  $K(z) = \int_0^z k(v) dv$ . Para obtener una mejor aproximación, se selecciona  $g(H)$  de tal forma que el error medio cuadrático  $e$ , sea minimizado

$$e = E\{\varepsilon^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 f(z, z) dz dz \quad (1.33)$$

en donde

$$\varepsilon = h(Z, Z) - g(H)Z \quad (1.34)$$

Haciendo  $\partial e / \partial g = 0$ , se obtiene

$$E\{\varepsilon Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon z f(z, z) dz dz = 0 \quad (1.35)$$

o

$$g(H) = \frac{E\{Z h(Z, Z)\}}{E\{Z^2\}} \quad (1.36)$$

La ecuación (1.35) se interpreta como el requisito de que la energía promedio disipada por el sistema original y el aproximado sea la misma. Haciendo algunos cambios de variables y simplificando se tiene

$$g(H) = \frac{1}{\pi \sqrt{2H}} \int_0^{2\pi} h(H, \phi) \sin \phi d\phi \quad (1.37)$$

Sustituyendo la ecuación (1.37) en la ecuación (1.32), se obtiene la *densidad de probabilidad estacionaria* aproximada del desplazamiento y velocidad. Se pueden calcular, con la ecuación anterior, otras propiedades estadísticas de la respuesta.

**SIMULACIÓN DE MONTE CARLO.** Un método alternativo para estimar, dentro de cualquier nivel de confiabilidad deseado, la estadística de la respuesta de sistemas *no lineales* excitados aleatoriamente se basa en el análisis de experimentos aleatorios conocidos popularmente como *simulación de Monte Carlo* (Shinozuka, 1972; Rubinstein, 1981). El fundamento teórico del método está asociado con el hecho de que las ecuaciones diferenciales *estocásticas* que gobiernan el movimiento de un sistema pueden interpretarse como un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales deterministas (Soong, 1973). Para cada miembro de este conjunto la excitación es una función muestra del proceso aleatorio de excitación, y la respuesta es la correspondiente función muestra del proceso aleatorio de

respuesta. Esta técnica puede aplicarse al cálculo de la estadística de la respuesta *estacionaria* y *no estacionaria*.

Evidentemente entre más grande sea el número de registros simulados menor será la desviación esperada entre los valores calculados y los valores teóricos de la estadística de la respuesta; sin embargo el costo computacional se incrementará significativamente, especialmente para sistemas *VGL*.

#### 1.2.4 Comentarios finales

Como se mencionó al principio, muchos de los métodos aproximados de análisis discutidos anteriormente son más adecuados para sistemas *UGL*. Para sistemas *VGL* dichos métodos son muy difíciles de aplicar; estos tienden a involucrar una severa complejidad analítica, muchas veces combinada con un excesivo requerimiento computacional, en términos de memoria o de tiempo de ejecución. La excepción es el método de *linealización equivalente estocástica*, el cual permite obtener resultados con relativa facilidad, aún en situaciones donde interesa el análisis de sistemas *VGL* sujetos a excitaciones *no estacionarias*. El alto grado de flexibilidad del método *LEG* está íntimamente relacionado con sus limitaciones básicas inherentes.

A través de un uso juicioso de esta técnica el costo computacional involucrado en análisis de confiabilidad, donde actualmente se usa la simulación, puede reducirse substancialmente. La superioridad computacional de la *LEG* se incrementará claramente conforme el número de muestras generadas en un estudio de simulación aumente. Por estas razones la *LEG* tiene un alto grado de popularidad con diseñadores de un amplio rango de las disciplinas de la ingeniería.

---

# CAPÍTULO

# 2

---

## EL CRITERIO DE LA LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE ESTOCÁSTICA

En este capítulo se describe la manera en la que se determinan los parámetros del sistema equivalente. Se comienza estudiando la forma que adopta la ecuación que gobierna el movimiento de un sistema *no lineal*. Con el objeto de ilustrar el criterio de linealización se analiza el caso más simple: sistemas *no histeréticos*. Se comenta la forma de extender el procedimiento a sistemas *histeréticos*. Al final del capítulo se habla de la precisión del método.

### 2.1 EL SISTEMA *NO LINEAL*

Las fuerzas internas, tales como fuerzas de amortiguamiento y de restitución, que actúan en un sistema pueden clasificarse en *conservativas* y *no conservativas*. Las fuerzas *conservativas* son tales que el trabajo hecho por ellas en un desplazamiento del sistema, de una configuración a otra, depende sólo de la posición inicial y final del sistema y no de la trayectoria entre estas posiciones. Las fuerzas gravitatorias y las fuerzas de restitución elásticas son ejemplos de este tipo de fuerzas internas. El trabajo de las fuerzas *no conservativas* está asociado con la trayectoria de deformación y normalmente involucran disipación de energía.

#### 2.1.1 Comportamiento *no lineal* elástico

Varias componentes de sistemas mecánicos y estructurales producen fuerzas internas en virtud de algún grado de deformación *elástico*. La variación de la fuerza aplicada con la deformación resultante, depende principalmente de las propiedades constitutivas del material con el que esta hecho el componente estructural y de aspectos geométricos del sistema. En varios casos y específicamente para deformaciones pequeñas, la relación fuerza-desplazamiento obedece a la ley de Hooke, es decir, es *lineal*, como se muestra en la Fig. 2.1. Sin embargo cuando existen desplazamientos grandes o

cuando el sistema tiene una configuración geométrica especial, la relación deja de ser *lineal*. En este caso el comportamiento *no lineal elástico* puede ser de dos tipos, de *endurecimiento elástico* o *ablandamiento elástico* (ver Fig. 2.1). La palabra *elástico* en este contexto significa que el material no se deforma permanentemente cuando se sujeta a cargas externas. Así, si el material se comporta elásticamente, el sistema regresa a su estado inicial cuando las cargas externas dejan de actuar. Evidentemente las fuerzas internas elásticas son del tipo *conservativo*.

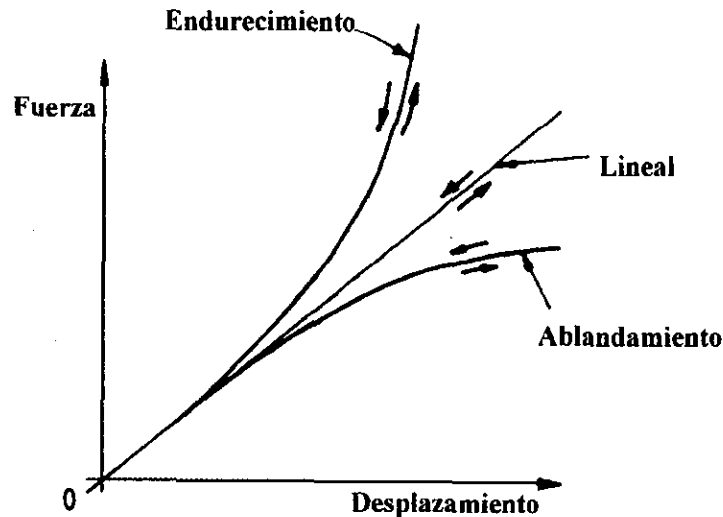


Figura 2.1 Características fuerza-desplazamiento de un sistema elástico.

El *endurecimiento* y *ablandamiento elástico* puede modelarse por medio de una expansión en series de potencias del desplazamiento o por una representación seccionalmente lineal. La representación en series de potencia de orden más bajo de un sistema simétrico *no lineal* elástico es la ecuación de movimiento del llamado *oscilador de Duffing*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \varepsilon x^3 = f(t) \quad (2.1)$$

donde  $c$ ,  $k$ , y  $\varepsilon$  son la constante de amortiguamiento, de rigidez y un parámetro de valor pequeño, respectivamente;  $f(t)$  es la excitación;  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  son el desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente. Para un oscilador con *endurecimiento elástico*  $\varepsilon$  es positivo. Cuando  $\varepsilon$  es negativo el oscilador tiene *ablandamiento elástico*.

### 2.1.2 Comportamiento *no lineal inelástico*

Ninguno de los materiales usados en sistemas mecánicos y estructurales son perfectamente elásticos, es decir, las fuerzas internas generadas por la deformación del sistema no son perfectamente conservativas. El comportamiento *inelástico* ante carga cíclica se manifiesta en forma de ciclos de *histéresis* (Fig. 2.2). El comportamiento es *histerético* en el sentido de que la fuerza depende de la historia completa del desplazamiento y no de un valor instantáneo de este. La forma general de la ecuación de movimiento de un sistema UGL con fuerzas internas *no conservativas* es la siguiente (Roberts y Spanos, 1990)



$$m(x)x + \frac{1}{2} \frac{dm(x)}{dx} x^2 + \frac{\partial v}{\partial x} - f^{nc} = f^{ex} \quad (2.2)$$

Se observa que las *no linealidades* pueden ocurrir en los términos inerciales relacionados con  $m(x)$ , en el término de fuerza interna conservativa  $\partial v / \partial x$ , donde  $v$  es la función escalar de energía potencial y en el término de fuerza interna no conservativa  $f^{nc}$ .  $f^{ex}$  contiene las fuerzas de excitación.

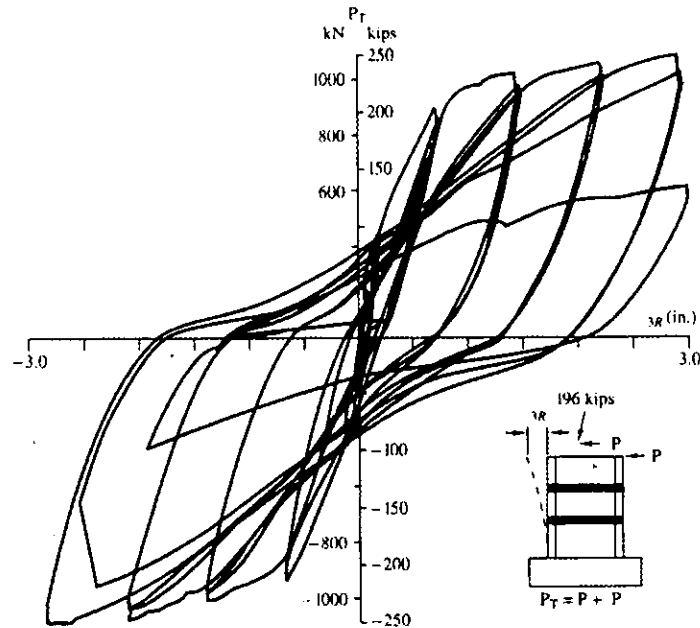


Figura 2.2 Ciclo de *histéresis* ( $1\text{kN} \approx 101.9 \times 10^{-3} \text{ ton}_f$ ,  $1\text{kip} \approx 453.6 \times 10^{-3} \text{ ton}_f$ ,  $1\text{in} = 2.54\text{cm}$ )

### 2.1.3 Ecuación de movimiento de un sistema *no lineal*

La ecuación diferencial *estocástica* de un sistema *UGL no lineal*, conservativo o no conservativo (i.e., ecuaciones 2.1 y 2.2) puede tomar la siguiente forma general

$$g(X(t)) = f(t) \quad (2.3)$$

donde  $X(t)$  es el vector

$$X(t) = [x(t), \dot{x}(t), x(t)]^T \quad (2.4)$$

y  $g(X(t))$  es en general una función *no lineal* del vector  $X(t)$ ,  $f(t)$  es la excitación que se modela como un proceso *estocástico* para considerar su aleatoriedad. Por lo tanto,  $X(t)$  también es un proceso *estocástico*.

## 2.2 EL SISTEMA LINEAL EQUIVALENTE

Debido a que un sistema lineal es mucho más fácil de analizar que un sistema *no lineal*, una forma natural de atacar problemas *no lineales* es reemplazar un conjunto dado de ecuaciones *no lineales*

por un conjunto de ecuaciones lineales. La diferencia entre las soluciones respectivas debe minimizarse en algún sentido apropiado y el criterio que se usa para este fin proporcionará necesariamente los parámetros del sistema lineal.

Para fines de la siguiente descripción, se supone que la excitación  $f(t)$  es un proceso aleatorio gaussiano estacionario con media cero.

La LEG reemplaza la ecuación (2.3) por la siguiente forma lineal equivalente

$$m_e \ddot{x}(t) + c_e \dot{x}(t) + k_e x(t) = f(t) \quad (2.5)$$

donde  $m_e$ ,  $c_e$  y  $k_e$  son valores arbitrarios de masa, amortiguamiento y rigidez que serán determinadas de tal forma que la solución de la ecuación (2.5) sea una buena aproximación a la solución real obtenida de la ecuación (2.3). Estos parámetros dependerán del tiempo si las propiedades estadísticas de  $f(t)$  dependen del tiempo. La ecuación que proporciona el error entre las ecuaciones (2.3) y (2.5) está dada por

$$\varepsilon = g(X) - m_e \ddot{x} - c_e \dot{x} - k_e x \quad (2.6)$$

Nótese que en la ecuación (2.6)  $x$  es la respuesta del sistema lineal y puesto que  $x$  es una variable aleatoria,  $\varepsilon$  también lo es. Esta cantidad debe minimizarse de alguna forma conveniente y el método usual es minimizar el valor esperado del error  $\varepsilon$  cuadrático, esto es

$$E[\varepsilon^2] \rightarrow \text{mínimo} \quad (2.7)$$

Se pueden usar otros criterios de minimización (Iwan y Patula, 1972) pero parecen no ofrecer ventajas significativas. Las condiciones necesarias para que la expresión (2.7) se cumpla son

$$\frac{\partial}{\partial m_e} E[\varepsilon^2] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial c_e} E[\varepsilon^2] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial k_e} E[\varepsilon^2] = 0 \quad (2.8)$$

donde  $E[\cdot]$  denota el valor esperado. Sustituyendo la ecuación (2.6) en las ecuaciones (2.8) y ejecutando las derivadas parciales se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales que pueden expresarse en forma matricial como (Roberts, 1981)

$$\Sigma p = q \quad (2.9)$$

en la cual

$$p = \begin{bmatrix} m_e \\ c_e \\ k_e \end{bmatrix} \quad ; \quad q = E[X g(X)] \quad (2.10)$$

$\Sigma$  es la matriz de covarianza de  $X$

$$\Sigma = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] \quad (2.11)$$

Nótese que el vector  $\mathbf{X}$  (respuesta del sistema lineal equivalente) es conjuntamente *gaussiano* porque se ha supuesto que el vector excitación en la ecuación (2.5) es *gaussiano* (Lin, 1967).

La ecuación (2.9) representa un conjunto de tres ecuaciones simultáneas que contienen los parámetros requeridos  $m_e$ ,  $c_e$  y  $k_e$ . Esta ecuación se puede resolver para determinar los parámetros equivalentes usando el siguiente:

*Teorema* (Atalik y Utku, 1976)

Sea  $q(\mathbf{Y})=q(y_1, y_2, \dots, y_n)$  una función escalar de  $n$  variables, donde:

1.  $\mathbf{Y}$  es vector de procesos aleatorios conjuntamente *gaussianos* con media cero
2.  $q(\mathbf{Y})$  es una función suficientemente suave para que las derivadas parciales respecto a  $y_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , existan
3.  $|q(\mathbf{Y})| < A \exp\left(\sum_{i=1}^n y_i^a\right)$ ,  $a < 2$  para alguna  $A$  arbitraria y cualquier  $\mathbf{Y}$ .

entonces

$$E[\mathbf{Y}q(\mathbf{Y})] = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] E[\nabla q(\mathbf{Y})]$$

donde  $\nabla$  es el operador diferencial *nabla* ■

Supongamos que  $g(\mathbf{X})$  cumple con las condiciones del teorema anterior, entonces el vector  $\mathbf{q}$  de la ecuación (2.10) resulta

$$E[\mathbf{X}g] = \Sigma E[\nabla g] \quad (2.12)$$

en donde

$$\nabla^T = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

Combinando las ecuaciones (2.9) y (2.12) se obtiene

$$\mathbf{p} = E[\nabla g] \quad (2.14)$$

esto es,

$$\begin{aligned} m_e &= E\left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right] \\ c_e &= E\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right] \\ k_e &= E\left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones determinan los valores de los parámetros  $m_e$ ,  $c_e$  y  $k_e$  del sistema lineal. Las ecuaciones serán algebraicas si los parámetros son constantes y diferenciales si ellos dependen del tiempo; en cualquier caso las ecuaciones pueden resolverse fácilmente por métodos numéricos y en algunos casos de forma analítica. Es obvio que los coeficientes del sistema lineal (ecuación 2.15) dependen de la estadística de la respuesta. Obsérvese que se obtiene una forma exacta de los coeficientes del sistema lineal equivalente cuando se considera que la excitación es un proceso aleatorio *gaussiano estacionario* con media cero (Atalik y Utku, 1976). La extensión es inmediata para el caso de excitaciones con media diferente a cero (ver por ejemplo, Roberts y Spanos, 1990 y Pradlwarter y Schuëller, 1991).

El sistema lineal equivalente puede resolverse con cualquiera de las técnicas analíticas y numéricas existentes. La *LEG* se ha venido usando, durante los últimos años, por varios investigadores debido a una de sus principales ventajas: la extensión fácil al análisis de sistemas *VGL* (i.e. Casciati y Faravelli, 1988). El método también se puede adaptar para usarse en sistemas con excitación *no estacionaria* tal como se describe en el capítulo 6.

### 2.2.1 Sistemas con *histéresis*

Comúnmente, en el área de la ingeniería sísmica se presentan sistemas que tienen comportamiento *histerético*, es decir, la respuesta depende de la historia completa del movimiento, por lo que es necesario introducir algunas modificaciones ligeras al planteamiento anterior con el objeto de evaluar los parámetros del sistema lineal equivalente.

Para sistemas con *histéresis*, la función  $g(X(t))$  de la ecuación (2.3) depende no sólo del valor instantáneo de  $X(t)$  sino también de la historia de la respuesta. Para sistemas cuya respuesta es de banda angosta puede usarse el *principio del promedio* de Krylov y Bogoliubov (1937) como originalmente lo mostró Caughey (1960 y 1963). Sin embargo, la disipación de energía del sistema puede ser relativamente grande y en tales circunstancias el proceso de respuesta es de banda ancha por lo que el *principio del promedio* es inapropiado para la resolución del problema. Para superar esta dificultad se emplea el hecho de que, en muchos casos los ciclos de *histéresis* de elementos estructurales sometidos a cargas cíclicas pueden modelarse satisfactoriamente por ecuaciones diferenciales. Así por ejemplo, puede usarse el modelo diferencial propuesto por Bouc (1967) y modificado por Wen (1980) y Baber y Wen (1981) el cual es capaz de representar una amplia variedad de formas de ciclos de *histéresis*. Park (1992), Suzuki y Minai (1987), Casciati (1987) y Zhang (1996) entre otros, han propuesto otros modelos diferenciales. Cuando un modelo diferencial de la fuerza restauradora *histerética* se incorpora a las ecuaciones de movimiento se obtiene un conjunto extendido de ecuaciones diferenciales que puede escribirse en la forma estándar *espacio de estado* (capítulo 1). En el capítulo 3 se indica qué modelo diferencial se adopta en este trabajo y se describe la manera de construir un modelo lineal equivalente para sistemas *histeréticos* mediante una ligera extensión del método empleado para sistemas *no histeréticos* descrito en esta sección.

## 2.3 PRECISIÓN

Aunque el método *LEG* ha sido aplicado extensamente a problemas *no lineales* de vibración, existen algunas limitaciones. Por ejemplo, la distribución de probabilidad de la respuesta del sistema original y del equivalente pueden desviarse substancialmente una de otra. Cuando el sistema original exhibe

esencialmente un fenómeno *no lineal*, como cambios bruscos de la amplitud de su respuesta y *ciclos limite*, la distribución de la respuesta es inherentemente diferente de un proceso *gaussiano* aun cuando la excitación esté distribuida normalmente. En estos casos la aplicación del método puede conducir a resultados erróneos ya que no predice la influencia de las *no linealidades* sobre la distribución de la respuesta. La precisión de la *LEG* puede mejorarse si la forma supuesta se aproxima mejor a la forma verdadera de la distribución de la respuesta.

Otra limitación de la técnica es que sólo proporciona estimaciones de los primeros dos momentos estadísticos de la respuesta. Las cantidades obtenidas son insuficientes para caracterizar completamente la respuesta de un sistema *no lineal* ya que ésta es generalmente *no gaussiana*. Por esta razón la técnica sólo es apropiada para realizar estudios de confiabilidad en el caso en donde es suficiente el conocimiento de algunos niveles de respuesta índice, tal como la media y media cuadrática.

Se han realizado varios estudios para investigar sobre la precisión y eficiencia del método (Spanos, 1981; Fan y Ahmadi, 1988; Roberts y Spanos, 1990; Pradlwarter y Schuëller, 1991; Schuëller, Pradlwarter y Bucher, 1991; Park, 1992; Hurtado, 1993; Schuëller, Pandey, y Pradlwarter, 1994). En la mayoría de estos estudios se usan como procesos aleatorios de excitación a ruidos blancos y algunos utilizan ruidos blancos filtrados con la función de transferencia de Kanai-Tajimi. Algunos consideran sistemas *no lineales sin memoria* y otros estudian sistemas *histeréticos* usando el modelo diferencial de Baber y Wen. En este último caso se han usado, en general y con algunas excepciones, modelos con *no linealidad baja* ( $\alpha_6=1$ ). Se han revisado la precisión y la eficiencia de la *LEG* para distintos valores de la intensidad de la excitación y del desplazamiento de fluencia, y se ha encontrado que puede esperarse un error menor que 20% en aplicaciones prácticas. Sin embargo Beaman (1980) reporta la ocurrencia de errores relativos del orden de 100% para ciertos sistemas *no lineales*.

El objetivo de este trabajo es hacer una calibración *extensa* del método *LEG* aplicado a sistemas *histeréticos* sujetos a excitaciones aleatorias de banda angosta, en la cual se varíen todos los parámetros que influyan en la precisión y eficiencia del método. Se pretende definir los casos y las condiciones en las que la *LEG* proporciona resultados razonables y aquellos en los que dicho método deja de ser aplicable. Todo esto encaminado a mejorar la *LEG*, que sin lugar a dudas resulta atractiva por su eficiencia computacional.



## MODELADO Y LINEALIZACIÓN DE LA FUERZA RESTAURADORA HISTERÉTICA

El capítulo comienza con una breve descripción de algunos modelos diferenciales para representar la fuerza restauradora *histerética*, propuestos por algunos investigadores. Después se estudia con detalle el modelo diferencial que se emplea en la tesis para representar la fuerza restauradora *histerética* de un sistema. Se muestra el efecto de cada uno de sus parámetros en la respuesta del sistema, así como la forma de considerar el deterioro de las propiedades mecánicas y la manera de obtener la energía *histerética* disipada. En la última sección se calculan los coeficientes de la forma lineal equivalente del modelo basándose en una ligera extensión de las expresiones obtenidas en el capítulo 2.

### 3.1 MODELOS DIFERENCIALES DE HISTÉRESIS

En varias áreas de la práctica, tal como la ingeniería sísmica, la fuerza restauradora es una función *no lineal* de carácter *histerético*. Como se señaló en el capítulo anterior la *LEG* puede aplicarse a este tipo de sistemas modelando adecuadamente los ciclos *histeréticos* mediante ecuaciones diferenciales. Para ilustrar este enfoque considérese que la ecuación de movimiento de un sistema *UGL no lineal histerético* sujeto a un sismo representado por la aceleración del terreno  $a(t)$  con características deterministas, es

$$m\ddot{x}(t) + q(x, \dot{x}, t) = -ma(t) \quad (3.1)$$

En la expresión anterior se supuso que las fuerzas inerciales dependen de la aceleración en forma lineal.  $q(x, \dot{x}, t)$  es la fuerza restauradora de dicho sistema,  $x$  es el desplazamiento relativo del sistema, y el punto indica derivada respecto al tiempo. En problemas prácticos, debido a consideraciones geométricas y/o propiedades mecánicas del material el término  $q(x, \dot{x}, t)$  es

frecuentemente una función *no lineal*. Se supondrá de aquí en adelante que las *no linealidades* provienen de la naturaleza *histerética* de la ley constitutiva del material. La fuerza restauradora en un sistema *no lineal histerético* puede descomponerse en dos partes (Wen, 1976)

$$q(\dot{x}, x, t) = g(\dot{x}, x) + h(x) \tag{3.2}$$

donde  $g(\dot{x}, x)$  es la componente *no histerética no lineal* (generalmente una función algebraica del valor instantáneo de  $x$  y  $\dot{x}$ ), y  $h(x)$  es la componente *histerética* que es función de la historia de la respuesta del sistema. Una representación general de una fuerza restauradora *histerética* es

$$q(\dot{x}, x, t) = c\dot{x} + \alpha_2\alpha_1x + (1 - \alpha_2)\alpha_1z \tag{3.3}$$

$$z = \zeta(x, z) \tag{3.4}$$

en la cual  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $\alpha_1$  es función de la rigidez inicial o de prefluencia,  $\alpha_2$  la razón entre la rigidez de postfluencia y  $\alpha_1$ ,  $z$  la componente *histerética* con unidades de desplazamiento y  $\zeta(x, z)$  una ecuación diferencial de primer orden que modela los ciclos de *histéresis*. Obsérvese que  $(1 - \alpha_2)\alpha_1z$  es la parte *histerética* de la fuerza restauradora. En este trabajo se excluyen las *no linealidades* asociadas con las aceleraciones y velocidades puesto que raramente ocurren en la práctica, pero también pueden incluirse si es necesario.

Varios autores han propuesto algunas funciones  $\zeta(x, z)$  para sistemas bilineales y sistemas donde la transición entre el rango elástico y el inelástico es suave. Por ejemplo, para sistemas elastoplásticos, Suzuki y Minai (1987) proponen el siguiente modelo de *histéresis*

$$\zeta(x, z) = x[1 - u(x)u(z - 1) - u(-x)u(-z - 1)] \tag{3.5}$$

donde  $u(\cdot)$  denota la función paso unitario. Park (1992) propone modificar la ecuación (3.4) para tomar en cuenta el deterioro del sistema de la siguiente forma

$$z = \zeta(x, z, x_m, \bar{e}_h) \tag{3.6}$$

donde  $x_m$  es el desplazamiento máximo medio y  $\bar{e}_h$  la energía *histerética* media disipada por el sistema. Para un sistema bilineal sugiere la siguiente expresión

$$\zeta(\dot{x}, z) = x - 0.5xh_1(z) - 0.5|x|h_2(z) \tag{3.7}$$

en la que

$$h_1(z) = u(z - x_y) + u(-z - x_y) \tag{3.8}$$

$$h_2(z) = u(z - x_y) - u(-z - x_y) \tag{3.9}$$

donde  $x_y$  es el desplazamiento de fluencia del sistema.

Existe otra ecuación diferencial originalmente propuesta por Bouc (1967) y posteriormente



generalizada por Wen (1980) la cual es capaz de representar una amplia variedad de formas de ciclos de histerésis. Este modelo está dado por la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\zeta(\dot{x}, z) = \alpha_3 \dot{x} - \alpha_4 |\dot{x}| z |z|^{\alpha_6-1} - \alpha_5 \dot{x} |z|^{\alpha_6} \quad (3.10)$$

donde  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$  y  $\alpha_6$  son parámetros del modelo que controlan la amplitud, forma del ciclo *histerético* y la suavidad de la transición entre los rangos elástico e inelástico. Mediante una selección apropiada de los parámetros de este modelo diferencial, es posible obtener una muy buena representación de ciclos *histeréticos* reales obtenidos de ensayos de laboratorio. Véase, por ejemplo, el trabajo de Pivovarov y Vinogradov (1987).

Cabe mencionar que al considerar las siguientes funciones en la ecuación (3.7) se obtiene un modelo idéntico a la ecuación (3.10)

$$h_1(z) \approx \frac{|z|^{\alpha_6}}{x_y^{\alpha_6}} \quad (3.11)$$

$$h_2(z) \approx \frac{z|z|^{\alpha_6-1}}{x_y^{\alpha_6}} \quad (3.12)$$

Baber y Wen (1981) modificaron la ecuación (3.10) para considerar el deterioro de las propiedades del sistema. La ecuación propuesta es

$$\zeta(\dot{x}, z) = \left\{ \alpha_3 \dot{x} - \nu \left( \alpha_4 z |\dot{x}| |z|^{\alpha_6-1} + \alpha_5 \dot{x} |z|^{\alpha_6} \right) \right\} / \eta \quad (3.13)$$

donde  $\alpha_3$ ,  $\eta$  y  $\nu$  son función de la energía *histerética* disipada y por lo tanto del tiempo, y controlan el nivel de deterioro. Este modelo se estudia con más detalle en la siguiente sección.

Existen algunos inconvenientes sobre el modelo de Wen y consecuentemente sobre el modelo de Baber y Wen. La ecuación (3.10) viola el postulado de estabilidad de Drucker. Al emplearla se obtiene un comportamiento en el que: si durante la descarga la fuerza no cambia de signo, la recarga sucesiva se caracteriza por un incremento en la deformación inelástica, lo cual viola una ley complementaria de la teoría de la plasticidad y se produce disipación de energía negativa (Thyagarajan y Iwan, 1990). El grado de violación puede reducirse al incrementar el valor del parámetro  $\alpha_6$ ; pero como se verá en el capítulo 7 un incremento de  $\alpha_6$  se refleja en una disminución en la precisión de los cálculos, además de que las ecuaciones de movimiento se vuelven inmanejables para fines de integración. Casciati (1987) corrige adecuadamente este error al introducir dos términos adicionales para forzar a este modelo a satisfacer el requerimiento mecánico mencionado. La ecuación propuesta es

$$\zeta(\dot{x}, z) = \alpha_3 \dot{x} - \alpha_4 |\dot{x}| z |z|^{\alpha_6-1} - \alpha_5 \dot{x} |z|^{\alpha_6} - \left[ \alpha_7 |\dot{x}| |z|^{\alpha_8-1} + \alpha_7 \dot{x} |z|^{\alpha_8} \right] \quad (3.14)$$

### 3.2 MODELO DE BABER Y WEN

A pesar de las deficiencias del modelo de Baber y Wen (1981), la ecuación (3.13) se ha aceptado ampliamente para propósitos de la vibración aleatoria debido a su versatilidad y a la posibilidad de expresar los coeficientes linealizadores en forma exacta. Además, si el valor esperado de la fuerza restauradora es cero, como sucede generalmente en aplicaciones prácticas, las violaciones locales de los principios de la plasticidad no son importantes en un análisis de vibración aleatoria, y en este caso la energía disipada será siempre positiva. Debido a estas razones el modelo de Baber y Wen se eligió para representar, en este trabajo, a la fuerza restauradora *histerética* del sistema.

A continuación se proporcionan las expresiones necesarias para determinar los valores adecuados de los parámetros del modelo de Baber y Wen.

▪ **Fuerza de fluencia ( $f_y$ )**

La fuerza restauradora según la ecuación (3.3) es:

$$f_R = \alpha_1 \alpha_2 x + (1 - \alpha_2) \alpha_1 z \quad (3.15)$$

donde  $\alpha_2$  se define como la razón de la rigidez de postfluencia  $k_H$  y el parámetro  $\alpha_1$ , es decir

$$k_H = \alpha_1 \alpha_2 \quad (3.16)$$

Se analizará, sin pérdida de generalidad, el caso en el que  $z > 0$  y  $x > 0$ . Obsérvese que cuando  $z = \zeta(x, z) = 0$  en la ecuación (3.13), se presenta el valor máximo  $z_{max}$  de  $z$ . Sustituyendo  $z = \zeta(x, z) = 0$  y considerando  $z > 0$  ( $\Rightarrow |z| = z$ ) y  $x > 0$  ( $\Rightarrow |x| = x$ ) en dicha ecuación se obtiene:

$$z_{max} = \left( \frac{\alpha_3}{\nu(\alpha_4 + \alpha_5)} \right)^{1/\alpha_6} \quad (3.17)$$

al sustituir  $z = z_{max}$  y  $x = x_{max}$  en la ecuación (3.15) se obtiene el valor máximo  $f_{max}$  de  $f_R$

$$f_{max} = \alpha_1 \alpha_2 x_{max} + (1 - \alpha_2) \alpha_1 \left( \frac{\alpha_3}{\nu(\alpha_4 + \alpha_5)} \right)^{1/\alpha_6} \quad (3.18)$$

Por otro lado, la rigidez inicial del sistema en función de los parámetros  $\alpha_i$  se obtiene al considerar que en un sistema elástico lineal,  $z_{max}$  se aproxima a infinito. Esta condición ocurre cuando  $\alpha_4 + \alpha_5$  tiende a cero (ecuación 3.17). Considerando esta condición en la ecuación (3.13) para el caso  $z > 0$  y  $x > 0$  resulta  $z = \alpha_3 x$ , es decir

$$z = \alpha_3 x \quad (3.19)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.15)

$$f_R = (\alpha_1 \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_3) x \quad (3.20)$$

por lo que la rigidez inicial  $k$  del sistema es

$$k = \alpha_1 \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_3 \quad (3.21)$$

Recuérdese que  $\alpha_3$  es función del tiempo. En la presente tesis se adopta como valor inicial de  $\alpha_3$   $(\alpha_3)_0 = 1.0$  y de la ecuación anterior resulta  $k = \alpha_1$ .

Ahora considérese que  $f_y$  es aquel valor de  $f_R$  a partir del cual un sistema elastoplástico perfecto fluye. En un sistema elastoplástico  $\alpha_2 = 0$  entonces  $f_{max} = f_y$  y de la ecuación (3.18) se obtiene

$$f_y = k \left( \frac{1}{\nu(\alpha_4 + \alpha_5)} \right)^{1/\alpha_6} \quad (3.22)$$

Esta expresión relaciona la cantidad física fuerza de fluencia con los parámetros del modelo de Baber y Wen.

▪ **Parámetros  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$**

Para obtener los valores de  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  a partir de las propiedades físicas de un sistema, supóngase que ellos son proporcionales entre sí. La constante de proporcionalidad se selecciona de acuerdo a la forma en la cual se disipa la energía *histerética*. Se supone (Casciati y Faravelli, 1991) generalmente que para:

➤ estructuras de acero  $\alpha_4 = \alpha_5$  (3.23)

➤ estructuras de concreto reforzado  $\alpha_4 = -2 \alpha_5$  (3.24)

Sustituyendo (3.23) en (3.22)

$$\alpha_5 = \frac{1}{2\nu} \left( \frac{k}{f_y} \right)^{\alpha_6} \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.22)

$$\alpha_5 = -\frac{1}{\nu} \left( \frac{k}{f_y} \right)^{\alpha_6} \quad (3.26)$$

▪ **Parámetro  $\alpha_6$**

El efecto de  $\alpha_6$  en la respuesta del sistema es modelar la transición entre el rango elástico y el inelástico. Si  $\alpha_6$  es grande el diagrama fuerza restauradora-desplazamiento es bilineal con cambio brusco entre el intervalo elástico y el inelástico; si  $\alpha_6$  es pequeño ( $\approx 1$ ) el sistema tiene una transición suave entre el rango elástico y el inelástico. La selección del valor de este parámetro dependerá entonces del material o de la configuración geométrica del sistema a modelar. Este parámetro influye directamente en el nivel de *no linealidad* del sistema de ecuaciones.

▪ **Parámetros  $\alpha_3$ ,  $\eta$  y  $\nu$ . Deterioro**

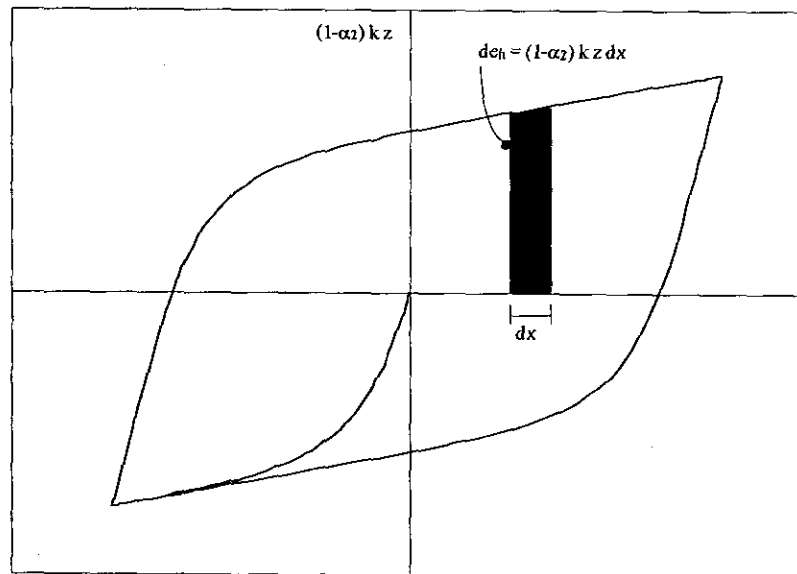
Es importante considerar el deterioro de las propiedades mecánicas de los elementos de un sistema estructural cuando éste se somete a excitaciones dinámicas severas y de larga duración. Puesto que la energía *histerética* ( $e_h$ ) es un indicador de la severidad de la respuesta y de su duración, el deterioro del sistema se obtiene haciendo que los parámetros de la función de *histéresis*, ecuación (3.13), dependan de la energía disipada. Obsérvese que en la ecuación (3.13) al incrementarse  $\eta$  con  $e_h$  ocurre una degradación de rigidez mientras que si  $\nu$  aumenta con  $e_h$  ocurre una degradación de resistencia. Alternativamente si  $\alpha_3$  disminuye con  $e_h$  ocurre un deterioro combinado de rigidez y resistencia. De esta forma, al considerar

$$\begin{aligned}\alpha_3(t) &= (\alpha_3)_0 - \delta_{\alpha_3} e_h(t) \\ \eta(t) &= \eta_0 + \delta_{\eta} e_h(t) \\ \nu(t) &= \nu_0 + \delta_{\nu} e_h(t)\end{aligned}\tag{3.27}$$

se obtiene el efecto deseado. En esta expresión,  $(\alpha_3)_0$ ,  $\eta_0$  y  $\nu_0$  son los valores iniciales de los parámetros  $\alpha_3$ ,  $\eta$  y  $\nu$  iguales todos a uno, y  $\delta_{\alpha_3}$ ,  $\delta_{\eta}$  y  $\delta_{\nu}$  son cantidades no negativas (Baber y Wen, 1981).

La energía disipada se obtiene calculando el área que va limitando el ciclo de *histéresis* durante el tiempo que dura el comportamiento inelástico del sistema. Es decir  $e_h$  es función de la parte *histerética* de la fuerza restauradora  $(1-\alpha_2)kz$  y del desplazamiento  $x$ . En un ciclo *histerético* típico (Fig. 3.1) se observa que  $de_h = (1-\alpha_2)kzdx$ , o bien

$$e_h = (1-\alpha_2)kzx\tag{3.28}$$



**Figura 3.1** Ciclo *histerético* típico.

donde el punto indica derivación con respecto al tiempo. Por lo tanto, la energía disipada por la

acción *histerética* desde el instante  $t=0$  hasta el instante  $t$  es

$$e_h(t) = (1 - \alpha_2)k \int_0^t z(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau \quad (3.29)$$

### 3.2.1. Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento que gobierna el comportamiento de los sistemas *UGL* analizados en esta tesis cuando están sujetos a aceleraciones deterministas del terreno  $a(t)$ , se obtiene sustituyendo la ecuación (3.3) en la ecuación (3.1), y la ecuación (3.13) en la (3.4). Dividiendo por  $m$  resulta

$$x + 2\xi\omega\dot{x} + \alpha_2\omega^2x + (1 - \alpha_2)\omega^2z = -a(t) \quad (3.30)$$

$$z = \left\{ \alpha_3\dot{x} - \nu \left( \alpha_4 z |x| |z|^{\alpha_6-1} + \alpha_5 x |z|^{\alpha_6} \right) \right\} / \eta \quad (3.31)$$

donde  $\xi = c/(2m\omega)$  es la fracción de amortiguamiento crítico viscoso y  $\omega = \sqrt{k/m}$  la frecuencia natural inicial de vibración.

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) se pueden escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo el siguiente cambio de variable  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \dot{x}$  y  $y_3 = z$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha_2\omega^2 y_1 - (1 - \alpha_2)\omega^2 y_3 - a(t) \\ \dot{y}_3 &= \left\{ \alpha_3 y_2 - \nu \left( \alpha_4 y_3 |y_2| |y_3|^{\alpha_6-1} + \alpha_5 y_2 |y_3|^{\alpha_6} \right) \right\} / \eta \end{aligned} \quad (3.32)$$

Este sistema se resuelve con cualquier método numérico de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. En este trabajo se emplea la subrutina *DGEAR* del International Mathematical and Statistical Library (*IMSL*). Para más detalles, véase por ejemplo Hindmarsh (1974) y Gear (1971).

### 3.2.2 Influencia de los parámetros de la ecuación de movimiento en la respuesta de un sistema *UGL*

En las Figs. 3.2 a 3.8 se muestra la influencia de cada uno de los parámetros de la ecuación (3.13) en la respuesta de un sistema *UGL* ante un movimiento armónico.

Se adoptan los siguientes valores:

- $m = 1.7/981$  ton  $s^2/cm$
- $\xi = 0.05$
- Periodo natural de vibración  $T = 2\pi/\omega$  indicado en las figuras correspondientes
- $(\alpha_3)_0 = \eta_0 = \nu_0 = 1.0$
- $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  correspondientes a acero (ecuación 3.25) con los valores para  $f_y$  señalados en las figuras correspondientes
- $a(t) = 100 \text{ sen}(\pi t)$   $cm/s^2$  en  $0 \leq t \leq 6$  s

Sea  $\beta = \Omega/\omega$  la relación de la frecuencia de la excitación ( $\Omega=\pi$ ) y la frecuencia del sistema ( $\omega$ ). Se estudia el efecto que tienen los parámetros  $\alpha_2$ ,  $\alpha_6$ ,  $\delta_{\alpha_3}$ ,  $\delta_\eta$ ,  $\delta_\nu$  y  $\beta$  en la forma del ciclo *histerético*, en el desplazamiento máximo y en la energía *histerética* disipada en los primeros 6 segundos de la excitación. Se obtienen los siguientes resultados:

- Para el caso  $\beta=1/2$  donde el sistema tiene  $T=1.0\text{s}$ ,  $f_y=0.12$  ton,  $\alpha_6=1$ , sin degradación de rigidez (Figs. 3.2 y 3.3) *grosso modo* en el intervalo  $0<\alpha_2<0.2$  el desplazamiento máximo y la energía *histerética* tienden a aumentar cuando  $\alpha_2$  crece. Un aumento de  $\alpha_2$  a partir de  $\alpha_2\approx 0.2$  produce una disminución del desplazamiento máximo y de la energía *histerética* (el ciclo se hace esbelto conforme  $\alpha_2$  aumenta). El comportamiento para otros valores de  $\beta$  puede ser diferente al descrito anteriormente (ver capítulo 7).
- En la Fig. 3.4 se observa que la transición entre el comportamiento elástico e inelástico es suave en el intervalo  $0<\alpha_6<5$  y tiende a ser más brusca para valores de  $\alpha_6>5$ .
- En la Fig. 3.5 se observa lo siguiente:
  - a) En el caso en que  $\beta<1$ , un aumento de  $\alpha_6$  provoca una disminución del desplazamiento máximo y de la energía disipada del sistema independientemente de su fuerza de fluencia  $f_y$ .
  - b) En el caso en que  $\beta=1.0$  el desplazamiento máximo y la energía *histerética* crecen conforme  $\alpha_6$  aumenta. El desplazamiento máximo de sistemas con fuerza de fluencia baja tiende a disminuir conforme  $\alpha_6$  aumenta.
  - c) En el caso en que  $\beta>1$ , un aumento de  $\alpha_6$  en sistemas con fuerza de fluencia alta (donde la excitación demanda poca y moderada ductilidad) provoca un aumento del desplazamiento máximo. Para sistemas con fuerza de fluencia baja el desplazamiento máximo tiende a disminuir conforme  $\alpha_6$  aumenta. Por otro lado, la energía *histerética* disminuye conforme  $\alpha_6$  y  $f_y$  aumentan.
- Las Figs. 3.6 a 3.8 muestran los resultados de un análisis a un sistema con  $\beta=1$ ,  $f_y=0.1$  ton,  $\alpha_2=0.02$  y  $\alpha_6=5$ . Al incrementarse  $\delta_\eta$  el parámetro  $\eta$  crece por lo que ocurre una degradación de rigidez. Si  $\delta_\nu$  aumenta,  $\nu$  crece y ocurre una degradación de resistencia. Alternativamente si  $\delta_{\alpha_3}$  aumenta,  $\alpha_3$  disminuye y ocurre un deterioro combinado de rigidez y resistencia. Obsérvense las ecuaciones (3.27). Un aumento en cualquiera de estos tres parámetros se refleja en una disminución de la energía *histerética*.

### 3.3 LINEALIZACIÓN DE LA FUERZA RESTAURADORA

Para considerar el carácter aleatorio de los sismos se introducirán conceptos de *vibración aleatoria* en la siguiente descripción. Se denotará por  $a(t)$  al proceso aleatorio de excitación (representado por aceleraciones del terreno) y por  $x(t)$  al desplazamiento del sistema.

Obsérvense que la ecuación (3.31) es la única fuente de *no linealidad* del sistema. Ésta puede linealizarse en la siguiente forma

$$\dot{z} = cx + hz \tag{3.33}$$

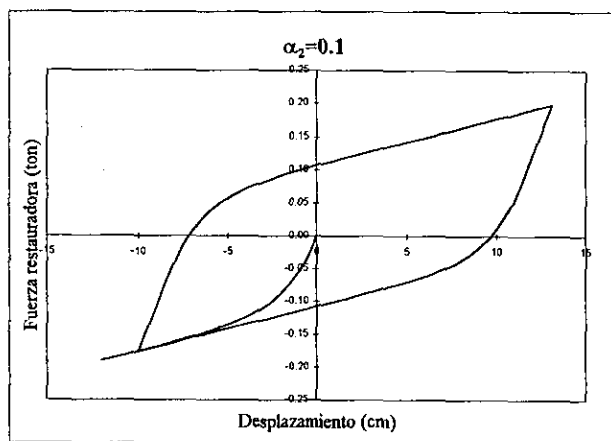
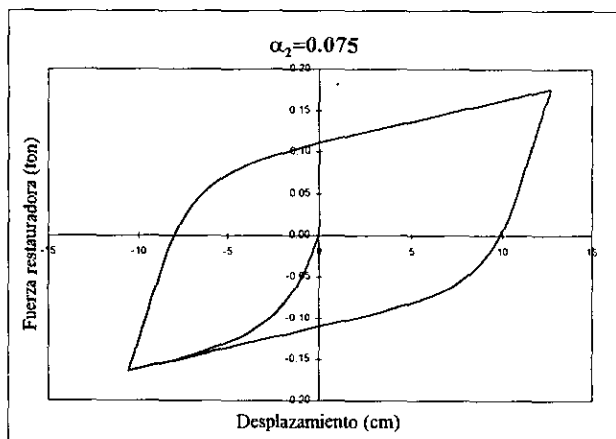
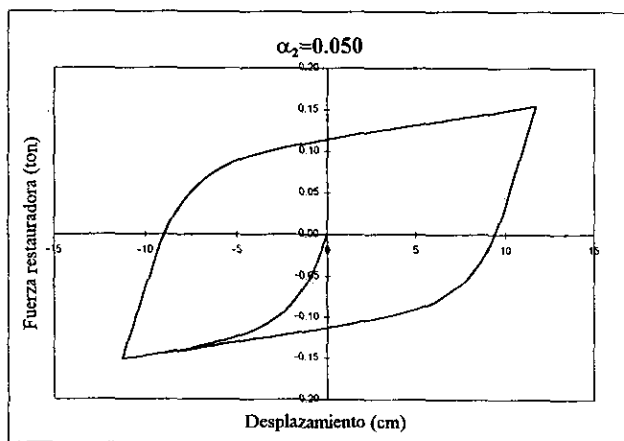
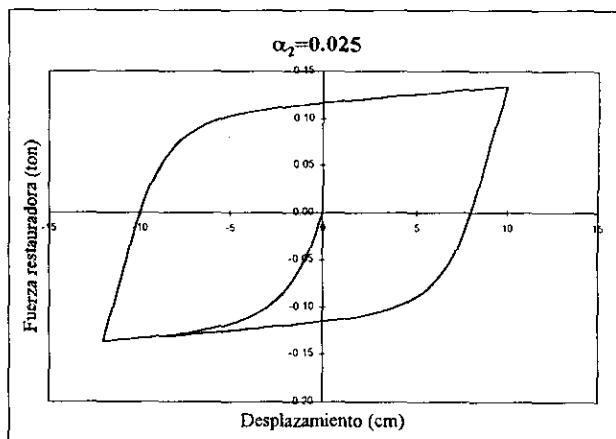
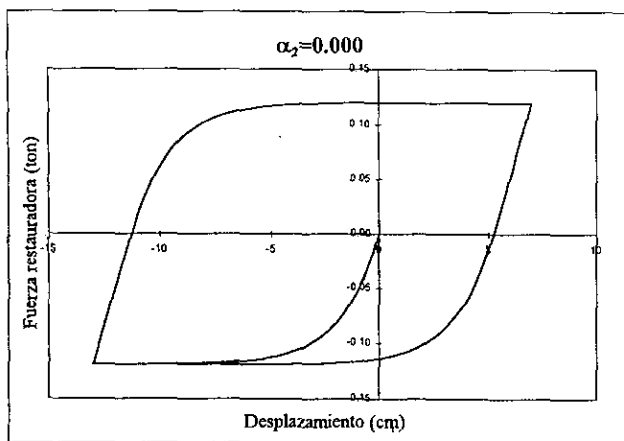
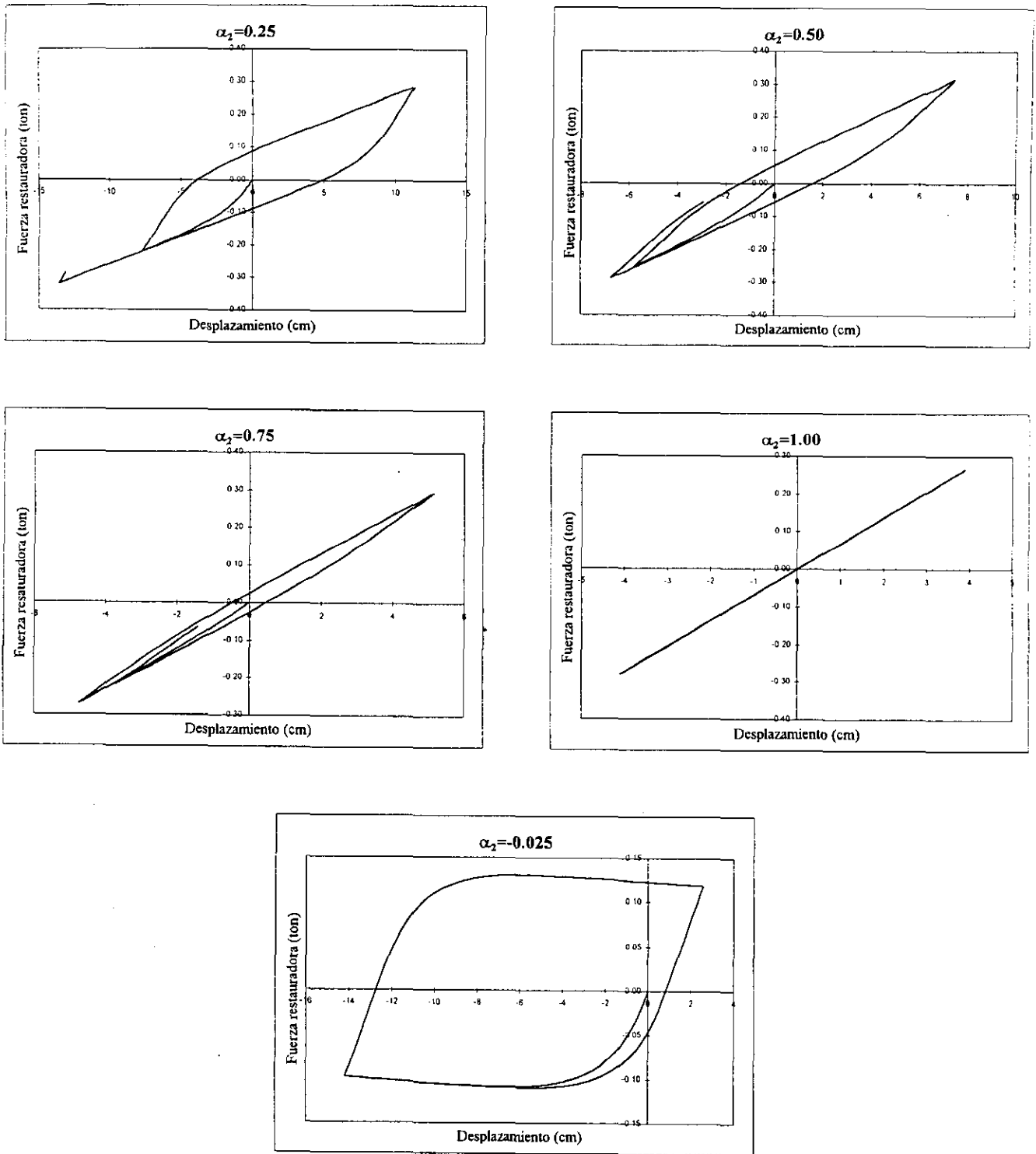
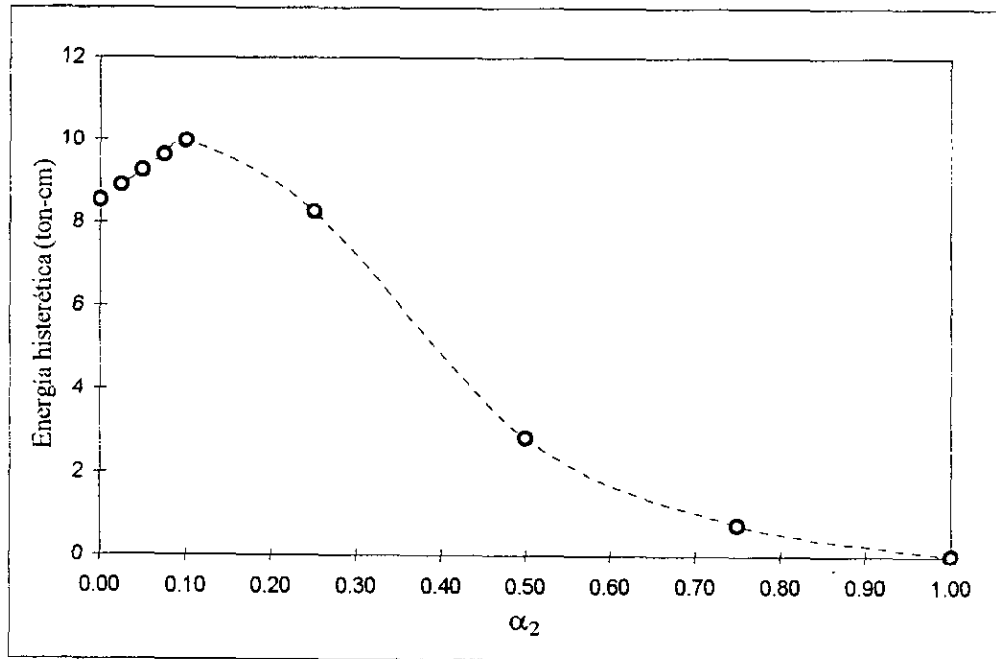
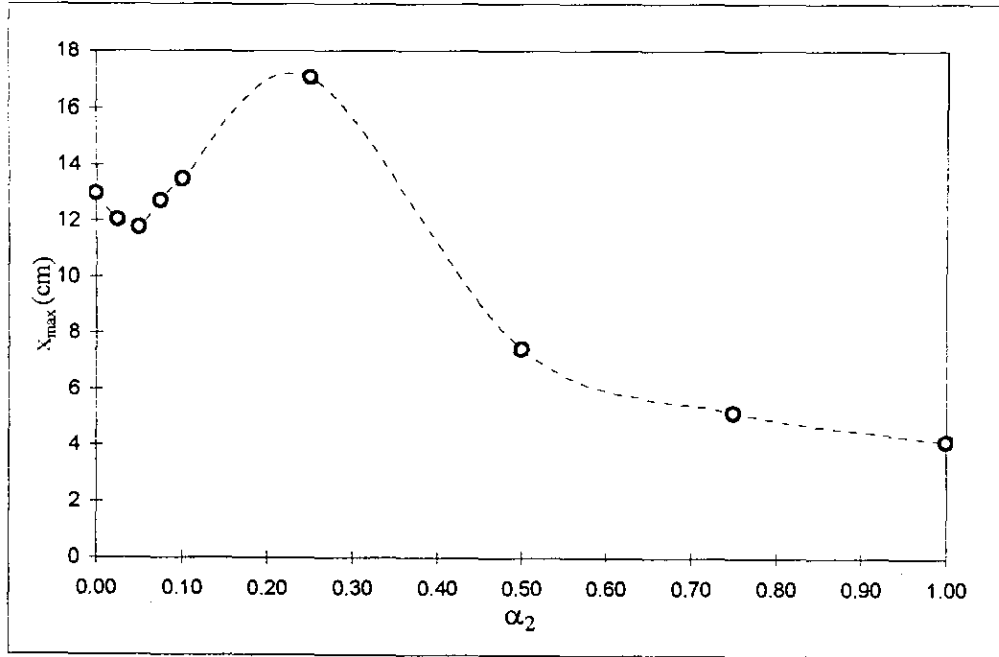


Figura 3.2.a. Forma del ciclo histerético para distintos valores de  $\alpha_2$ .  
 $\beta=1/2$ ,  $T=1.0s$ ,  $f_y=0.12$  ton,  $\alpha_6=1.0$  y  $\delta_{\alpha_3}=\delta_{\eta}=\delta_{\nu}=0.0$

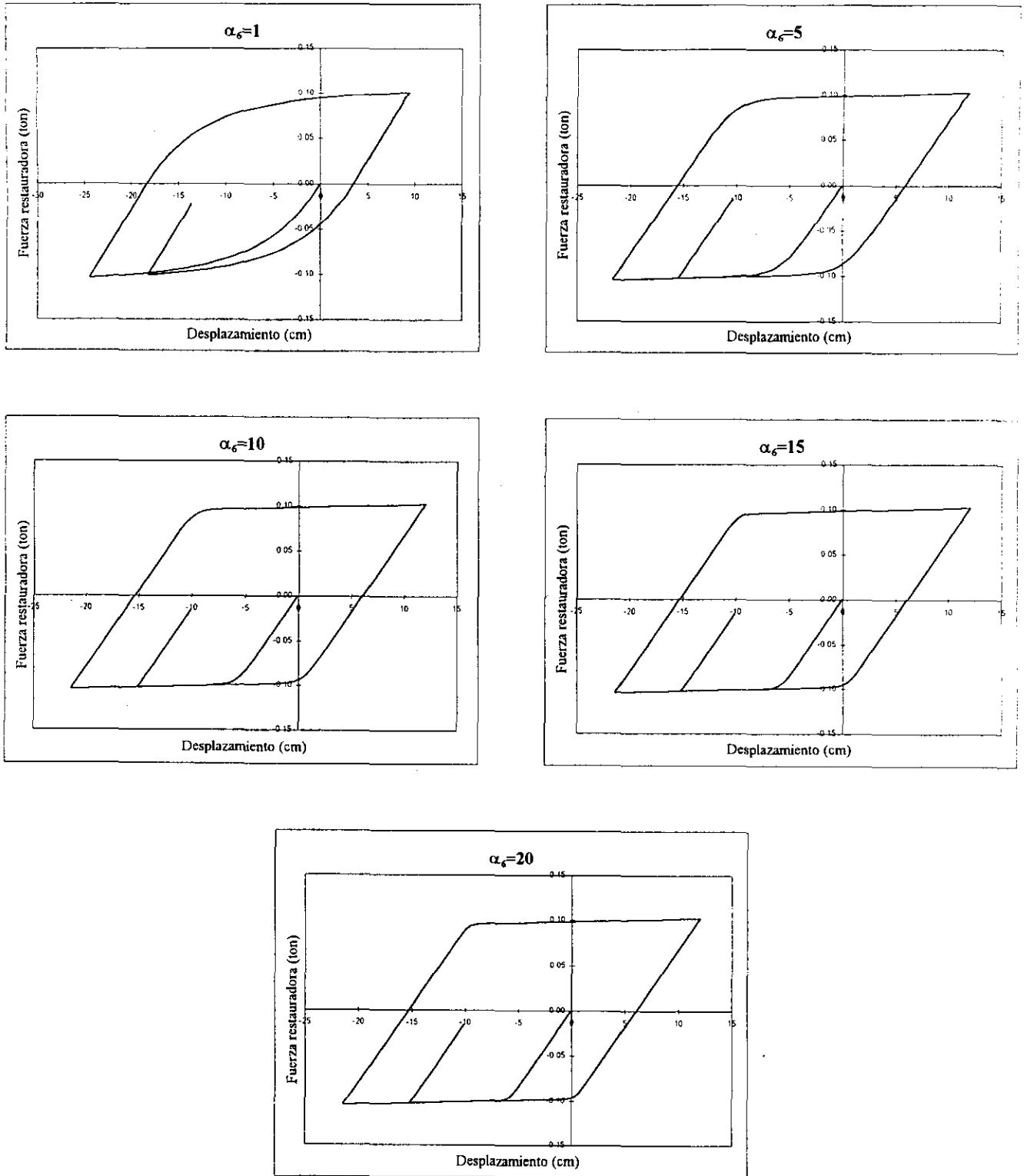


**Figura 3.2.b.** Forma del ciclo histerético para distintos valores de  $\alpha_2$ .  
 $\beta=1/2$ ,  $T=1.0s$ ,  $f_y=0.12$  ton,  $\alpha_6=1.0$  y  $\delta_{\alpha_3}=\delta_{\eta}=\delta_{\nu}=0.0$





**Figura 3.3.** Influencia del parámetro  $\alpha_2$  en el desplazamiento máximo y en la energía histerética disipada.  $\beta=1/2$ ,  $T=1.0s$ ,  $f_y=0.12$  ton,  $\alpha_6=1.0$  y  $\delta_{\alpha_3}=\delta_{\eta}=\delta_{\nu}=0.0$



**Figura 3.4.** Forma del ciclo histérico para distintos valores de  $\alpha_6$ .  
 $\beta=1/2$ ,  $T=1.0s$ ,  $f_y=0.10$  ton,  $\alpha_2=0.02$  y  $\delta_{\alpha_3}=\delta_{\eta}=\delta_v=0.0$

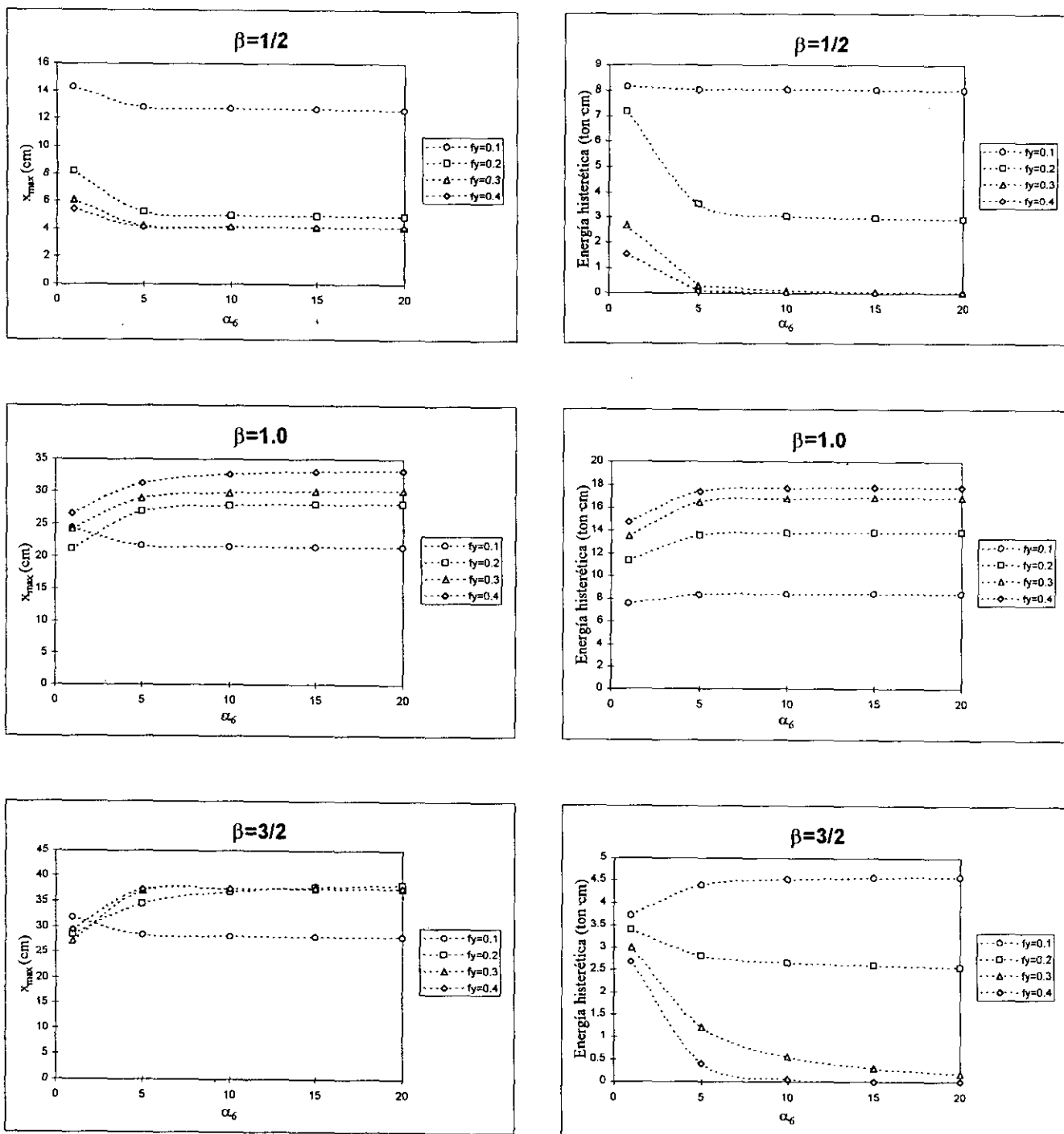


Figura 3.5. Influencia del parámetro  $\alpha_6$  en el desplazamiento máximo y en la energía histerética disipada, para distintas relaciones  $\beta = \Omega/\omega$  y distintos valores de  $f_y$ ,  $\alpha_2 = 0.02$  y  $\delta_{\alpha_3} = \delta_{\eta} = \delta_v = 0.0$

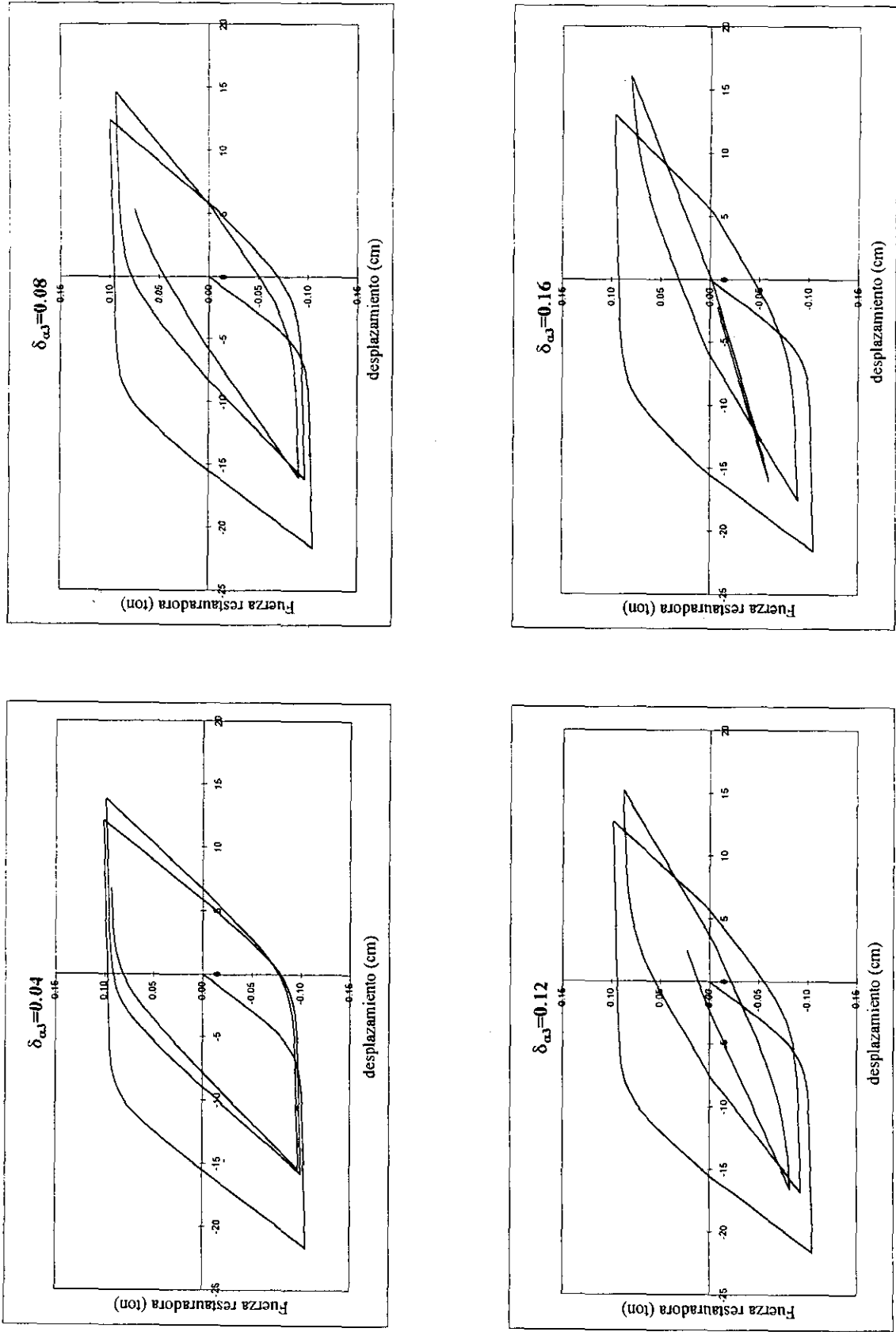


Figura 3.6 Influencia del parámetro  $\delta_{\alpha_3}$  para  $\beta=1$ ,  $T=2.0s$ ,  $f_y=0.1$  ton,  $\alpha_2=0.02$ ,  $\alpha_6=5.0$  y  $\delta_\eta=\delta_v=0.0$

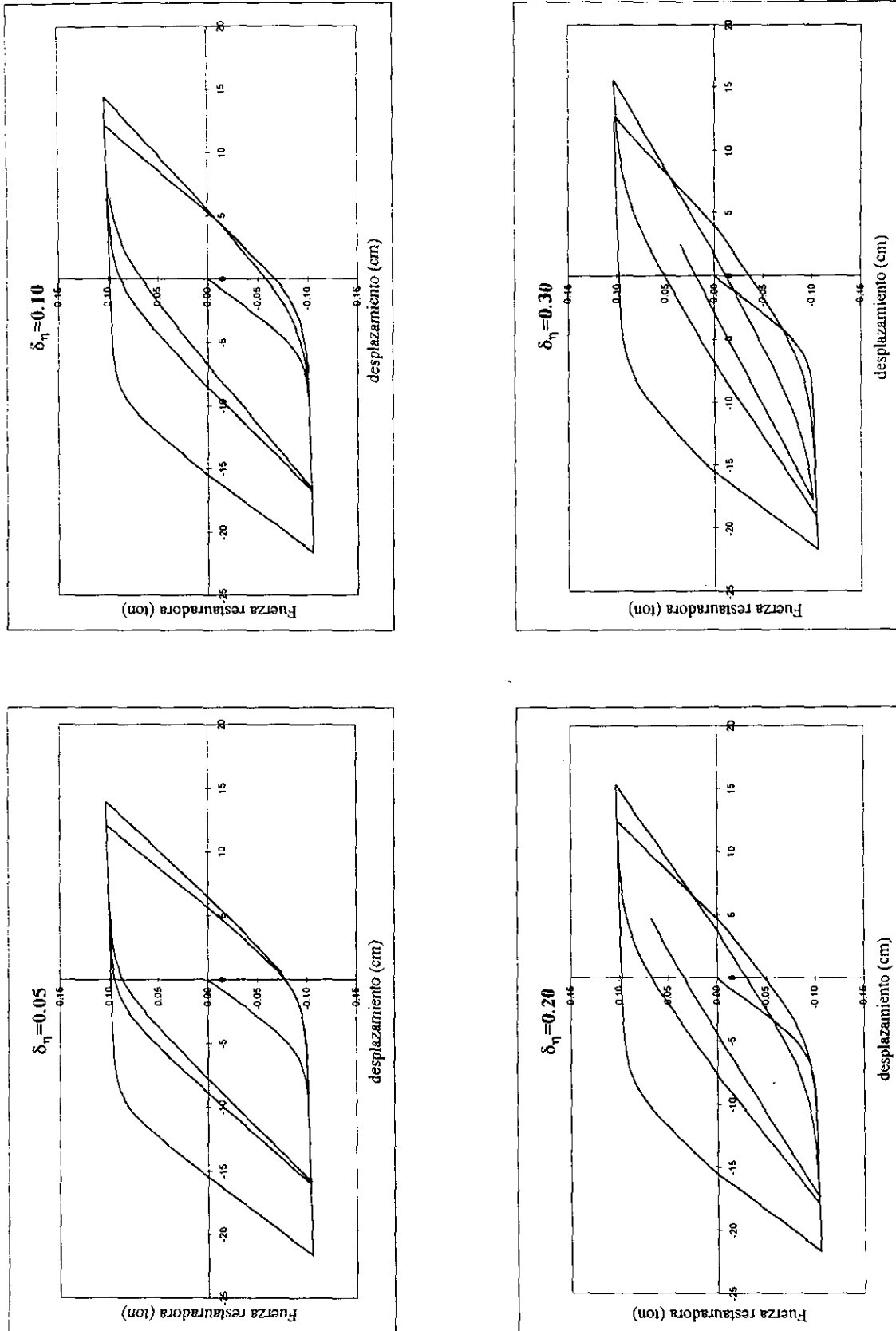


Figura 3.7 Influencia del parámetro  $\delta_\eta$  para  $\beta=1$ ,  $T=2.0s$ ,  $f_y=0.1$  ton,  $\alpha_2=0.02$ ,  $\alpha_6=5.0$  y  $\delta_{\alpha_3}=\delta_y=0.0$

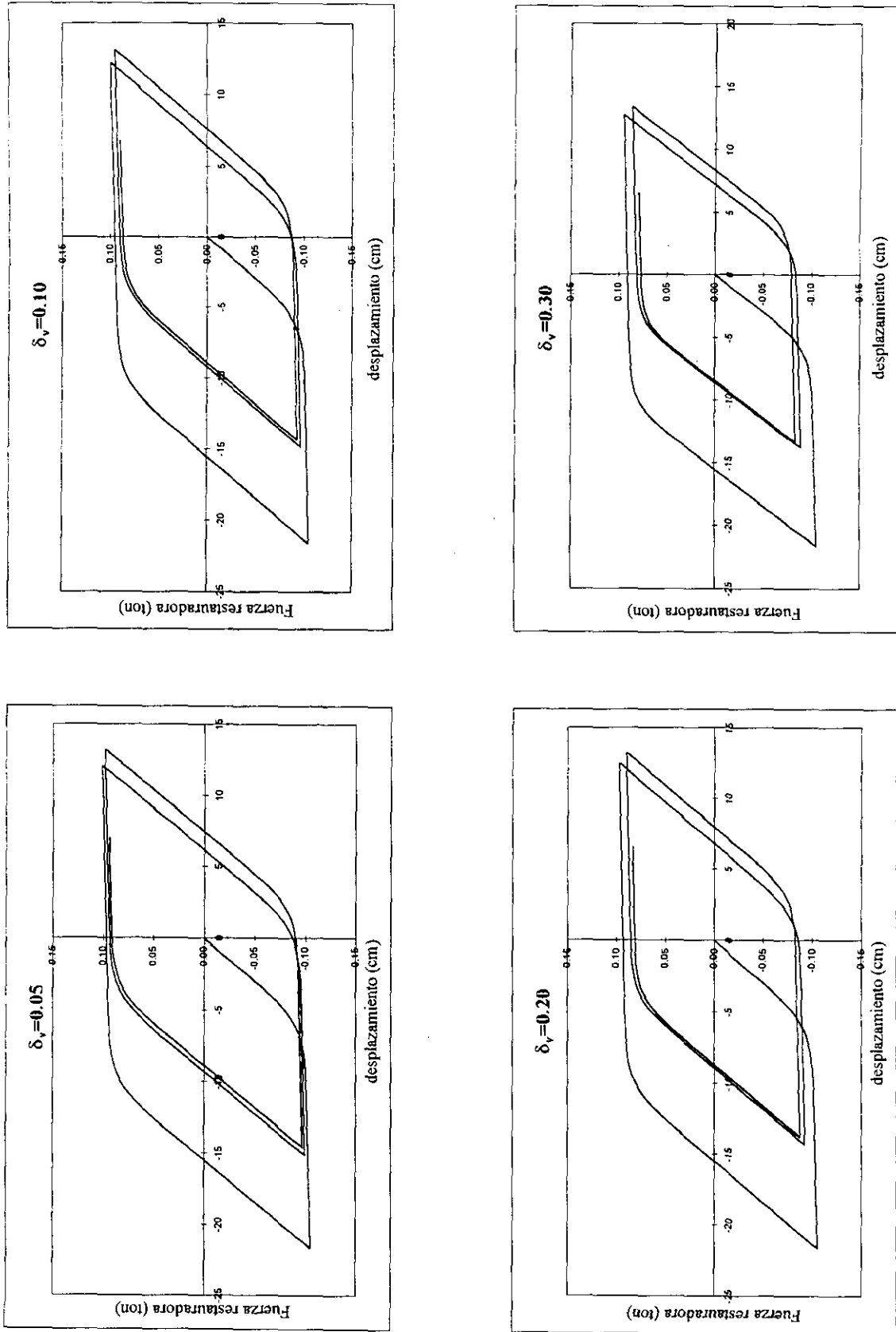


Figura 3.8. Influencia del parámetro  $\delta_v$  para  $\beta=1$ ,  $T=2.0s$ ,  $f_y=0.1$  ton,  $\alpha_2=0.02$ ,  $\alpha_6=5.0$  y  $\delta_{\alpha 3}=\delta_{\eta}=0.0$

$c$  y  $h$  se determinan a partir de las ecuaciones (2.8). En la sección 2.2 se ha considerado que la excitación es un proceso aleatorio *gaussiano estacionario* con media cero, por lo que la respuesta y en particular  $\dot{x}$  y  $z$  serán conjuntamente *gaussianos* con media cero. La minimización de la ecuación de error proporciona (ver ecuación 2.15, Kazakov, 1965 y Atalik y Utku, 1976)

$$c = E \left[ \frac{\partial z}{\partial \dot{x}} \right] \quad \text{y} \quad h = E \left[ \frac{\partial z}{\partial z} \right] \quad (3.34)$$

Realizando los cálculos apropiados (Baber y Wen, 1979) se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} c &= \mu_{\alpha_3} - \mu_\nu (\alpha_4 f_1 + \alpha_5 f_2) / \mu_\eta \\ h &= -\mu_\nu (\alpha_4 f_3 + \alpha_5 f_4) / \mu_\eta \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde  $\mu_{\alpha_3}$ ,  $\mu_\nu$ , y  $\mu_\eta$  son los valores medios de  $\alpha_3$ ,  $\nu$  y  $\eta$  respectivamente

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha_3} &= (\alpha_3)_0 - \delta_{\alpha_3} \mu_{e_n} \\ \mu_\eta &= \eta_0 + \delta_\eta \mu_{e_n} \\ \mu_\nu &= \nu_0 + \delta_\nu \mu_{e_n} \end{aligned} \quad (3.36)$$

y las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  y  $f_4$  dependen de la estadística de la respuesta

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sigma_z^{\alpha_6}}{\pi} \Gamma \left( \frac{\alpha_6 + 2}{2} \right) 2^{\frac{\alpha_6}{2}} I_s \\ f_2 &= \frac{\sigma_z^{\alpha_6}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{\alpha_6 + 1}{2} \right) 2^{\frac{\alpha_6}{2}} \\ f_3 &= \frac{\alpha_6 \sigma_x \sigma_z^{\alpha_6 - 1}}{\pi} \Gamma \left( \frac{\alpha_6 + 2}{2} \right) 2^{\frac{\alpha_6}{2}} \left( \frac{2(1 - \rho_{xz}^2)^{(\alpha_6 + 1)/2}}{\alpha_6} + \rho_{xz} I_s \right) \\ f_4 &= \frac{\alpha_6 \rho_{xz} \sigma_x \sigma_z^{\alpha_6 - 1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{\alpha_6 + 1}{2} \right) 2^{\frac{\alpha_6}{2}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$\Gamma(\cdot)$  es la *función gamma*,  $\sigma_x$  es la desviación estándar de  $x$ ,  $\sigma_z$  es la desviación estándar de  $z$ ,  $\rho_{xz}$  el coeficiente de correlación entre  $\dot{x}$  y  $z$ , y

$$I_s = 2 \int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha_6} \psi \, d\psi \quad (3.38)$$

con

$$\lambda = \arctan \left( \frac{\sqrt{1 - \rho_{xz}^2}}{\rho_{xz}} \right) \quad (3.39)$$

Obsérvese que en las ecuaciones (3.36) es necesario calcular  $\mu_{e_h}$ . A partir de la ecuación (3.29) se obtiene

$$\mu_{e_h} = E(e_h) = (1 - \alpha_2)k \int_0^{\infty} E[x(\tau)z(\tau)] d\tau \quad (3.40)$$

$E[xz]$  es un elemento de la matriz de covarianza de la respuesta ( $\Sigma_Y$ ). Ésta se describe con detalle en el capítulo 4.

Realizando el cambio de variables  $y_2 = x$  y  $y_3 = z$  en la ecuación (3.33) y reemplazando la tercer ecuación del sistema (3.32) por la ecuación resultante, se obtienen el siguiente *sistema lineal equivalente*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ y_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha_2\omega^2 y_1 - (1 - \alpha_2)\omega^2 y_3 - a(t) \\ y_3 &= cy_2 + hy_3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Usando la técnica *espacio de estado*, este sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede escribirse como:

$$\frac{dY}{dt} = LY + F \quad (3.42)$$

donde  $Y^T = [y_1, y_2, y_3]$  y

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_2\omega^2 & -2\xi\omega & -(1 - \alpha_2)\omega^2 \\ 0 & c & h \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

y  $F^T = [0, -a(t), 0]$

En el siguiente capítulo se describe la forma de modelar la excitación en sentido aleatorio, para luego determinar la ecuación que tendrá que resolverse para calcular una estimación de la estadística de la respuesta del sistema *UGL no lineal*.



## REPRESENTACIÓN DE LA EXCITACIÓN

Aquí se describe la manera en que se modela el proceso aleatorio de excitación. Se comentan las razones de seleccionar un *ruido blanco* filtrado y se habla de la necesidad de considerar el carácter *no estacionario* del proceso aleatorio de excitación mediante una modulación de amplitud y frecuencia de un proceso *estacionario*. Se describe la forma de obtener la intensidad del *ruido blanco* y los parámetros del filtro a partir de un acelerograma del sismo que se considera representativo de la excitación. Se establecen las ecuaciones *estocásticas* lineales equivalentes a partir de las cuales se determina la ecuación con la que se calcula la matriz de covarianza de la respuesta.

### 4.1 EL RUIDO BLANCO COMO PROCESO DE EXCITACIÓN

En el capítulo anterior se estableció que el sistema *lineal equivalente* de ecuaciones de movimiento de un sistema *UGL* sujeto a una excitación aleatoria *gaussiana estacionaria* con media cero es

$$\frac{dY}{dt} = LY + F \quad (4.1)$$

donde  $Y$  es el vector que contiene la respuesta del sistema,  $L$  es una matriz que depende de las propiedades mecánicas y geométricas del sistema así como de  $c$  y de  $h$ , y  $F$  es un vector que contiene al proceso aleatorio de excitación, que en este caso es la aceleración del terreno  $a(t)$ .

El vector de respuesta  $Y$  será también un proceso aleatorio *gaussiano estacionario* con media cero (Lin, 1967) y entonces la respuesta queda completamente descrita por su matriz de covarianza  $\Sigma_Y$ . Por lo tanto es de interés determinar la expresión con la cual se puede calcular dicha matriz.

Aplicando el operador *esperanza*  $E[\cdot]$  a ambos miembros de la ecuación (4.1) se obtiene

$$\frac{d}{dt} E[Y] = LE[Y] + E[F] \quad (4.2)$$

Para el caso en que  $E[F]=0$

$$\frac{d}{dt} E[Y] = LE[Y] \quad (4.3)$$

Sustrayendo la ecuación (4.3) a la ecuación (4.1) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \{Y - E[Y]\} = L\{Y - E[Y]\} + F \quad (4.4)$$

Sea  $Z = Y - E[Y]$ . Sustituyendo en la ecuación (4.4)

$$\frac{d}{dt} Z = LZ + F \quad (4.5)$$

La solución general de la ecuación (4.5), es (Reid, 1983)

$$Z(t) = \text{Exp}[Lt]Z(0) + \int_0^t \text{Exp}[L(t-\tau)]F(\tau)d\tau \quad (4.6)$$

donde  $Z(0)$  es el vector de condiciones iniciales y la expresión  $\text{Exp}[Lt]$  se conoce como la matriz de transición y está definida por

$$\text{Exp}[Lt] = I + Lt + \frac{1}{2!}(Lt)^2 + \frac{1}{3!}(Lt)^3 + \dots \quad (4.7)$$

postmultiplicando la ecuación (4.5) por  $Z^T$

$$\frac{dZ}{dt} Z^T = LZZ^T + FZ^T \quad (4.8)$$

transponiendo

$$Z \frac{dZ^T}{dt} = ZZ^T L^T + ZF^T \quad (4.9)$$

Sumando la ecuación (4.8) y la ecuación (4.9)

$$\frac{dZ}{dt} Z^T + Z \frac{dZ^T}{dt} = LZZ^T + ZZ^T L^T + FZ^T + ZF^T \quad (4.10)$$

El miembro de la parte izquierda de la ecuación (4.10) es igual a  $\frac{d}{dt}\{ZZ^T\}$ . Aplicando el operador  $E[\cdot]$  a la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt}E[ZZ^T] = LE[ZZ^T] + E[ZZ^T]L^T + E[FZ^T] + E[ZF^T] \quad (4.11)$$

Sea  $\Sigma_Y = E[ZZ^T]$  la matriz de covarianza de la respuesta  $Y$ . La ecuación (4.11) se escribe como

$$\frac{d}{dt}\Sigma_Y = L\Sigma_Y + \Sigma_Y L^T + E[FZ^T] + E[ZF^T] \quad (4.12)$$

Los dos últimos términos pueden evaluarse usando la solución general para  $Z(t)$ , ecuación (4.6). De esta manera

$$E[ZF^T] = \text{Exp}[Lt]E[Z(0)F^T] + \int_0^t \text{Exp}[L(t-\tau)]E[F(\tau)F^T(\tau)]d\tau \quad (4.13)$$

Si las condiciones iniciales son deterministas, o bien si no tienen correlación con el proceso aleatorio de excitación entonces  $E[Z(0)F^T] = \mathbf{0}$ . Además

$$E[F(\tau)F^T(\tau)] = \Sigma_F(t, \tau) \quad (4.14)$$

es la matriz de covarianza de  $F(t)$ . Por lo tanto

$$E[ZF^T] = \int_0^t \text{Exp}[L(t-\tau)]\Sigma_F(t, \tau)d\tau \quad (4.15)$$

similarmente

$$E[FZ^T] = \int_0^t \text{Exp}[L(t-\tau)]\Sigma_F^T(t, \tau)d\tau \quad (4.16)$$

sustituyendo en la ecuación (4.12) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\Sigma_Y = L\Sigma_Y + \Sigma_Y L^T + \int_0^t \text{Exp}[L(t-\tau)]\{\Sigma_F(t-\tau) + \Sigma_F^T(t-\tau)\}d\tau \quad (4.17)$$

Supóngase que los elementos de  $F(t)$  son procesos de tipo *ruido blanco estacionario*. De esta forma la ecuación (4.17) se simplifica significativamente y se tiene

$$\Sigma_F(t, \tau) = \Omega\delta(t-\tau) \quad (4.18)$$

donde  $\Omega$  es una matriz real no negativa, simétrica y de valores constantes y  $\delta(t-\tau)$  es la función *delta de Dirac*. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.17) resulta la integral igual a  $\Omega$ . Así

$$\frac{d}{dt} \Sigma_Y = L \Sigma_Y + \Sigma_Y L^T + \Omega \quad (4.19)$$

Sea  $a(t)$  un *ruido blanco* con función de covarianza

$$w_F(\tau) = I \delta(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau) \quad (4.20)$$

donde  $s_0$  es la amplitud (constante) de la *densidad espectral bilateral* de  $a(t)$ , entonces

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La ventaja de modelar al proceso aleatorio de excitación  $a(t)$  con un *ruido blanco estacionario* es resolver una ecuación más sencilla.

La forma de solucionar la ecuación (4.19) se explica en el siguiente capítulo.

#### 4.2 RUIDO BLANCO FILTRADO ESTACIONARIO

Los análisis de *Fourier* de acelerogramas de movimientos fuertes muestran que los *espectros* de amplitudes de *Fourier* no son constantes aún en una banda estrecha de frecuencias. Ellos son de carácter oscilatorio, existen una o varias frecuencias dominantes del movimiento y se amortiguan en frecuencias altas, lo cual sugiere el uso de un *ruido blanco* filtrado de duración limitada. Eligiendo apropiadamente las características del filtro este modelo representa de forma adecuada los movimientos fuertes de terreno. Kanai (1957) y Tajimi (1960) han sugerido una *función de transferencia*  $h_{KT}(\omega)$  característica de un filtro de segundo orden, cuya *función de transmitancia*<sup>1</sup> es:

$$|h_{KT}(\omega)|^2 = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (4.22)$$

Con esta función, la *densidad espectral de potencia* del proceso filtrado, llámese  $a_I(t)$ , es:

$$S_{KT}(\omega) = |h_{KT}(\omega)|^2 s_0 \quad (4.23)$$

donde  $s_0$  es la amplitud de la *densidad espectral bilateral* del *ruido blanco estacionario*  $a(t)$ . Los parámetros  $\xi_g$  y  $\omega_g$  que aparecen en la *función de transmitancia* se consideran deterministas y pueden interpretarse como el amortiguamiento y la frecuencia equivalentes del terreno, respectivamente. La

<sup>1</sup> Lin (1967) asigna este nombre al módulo cuadrado de la *función de transferencia*. Este término se usa en el resto de la tesis.

Fig. 4.1 muestra la forma del filtro de Kanai y Tajimi.

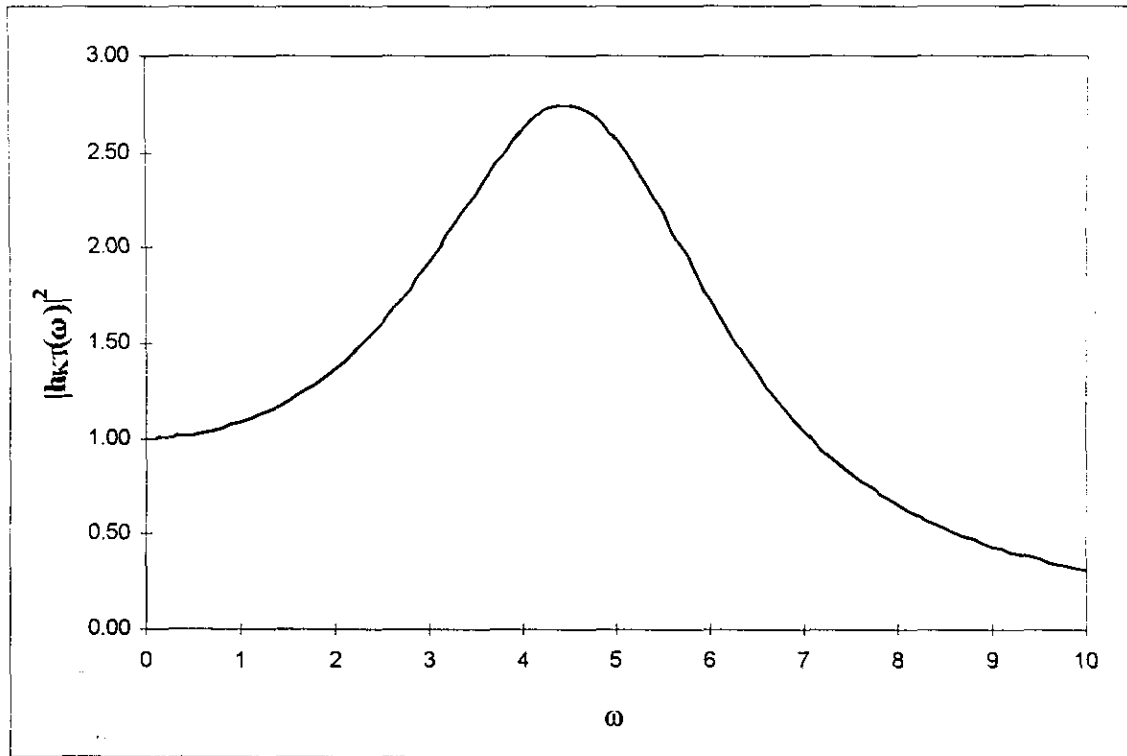


Figura 4.1 Función de transmitancia de Kanai y Tajimi.

El filtro anterior atenúa las componentes en frecuencia alta y amplifica aquellas componentes en la vecindad de  $\omega = \omega_g$ . Obsérvese que cuando  $\omega \rightarrow 0$  las amplitudes de la *densidad espectral* tienden a  $s_0$  y esto puede provocar algunas dificultades con componentes de baja frecuencia. Este problema se visualiza fácilmente al calcular la *densidad espectral* de la velocidad y del desplazamiento del terreno, dividiendo la ecuación (4.23) por  $\omega^2$  y  $\omega^4$  respectivamente. La *varianza estacionaria* de la velocidad y del desplazamiento tienden a infinito cuando  $\omega \rightarrow 0$ . Este inconveniente se elimina haciendo pasar la respuesta del filtro anterior  $a_1(t)$  por un segundo filtro que atenúe energicamente componentes de baja frecuencia. Un filtro apropiado es el que tiene la siguiente *función de transmitancia*

$$|h_{CP}(\omega)|^2 = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (4.24)$$

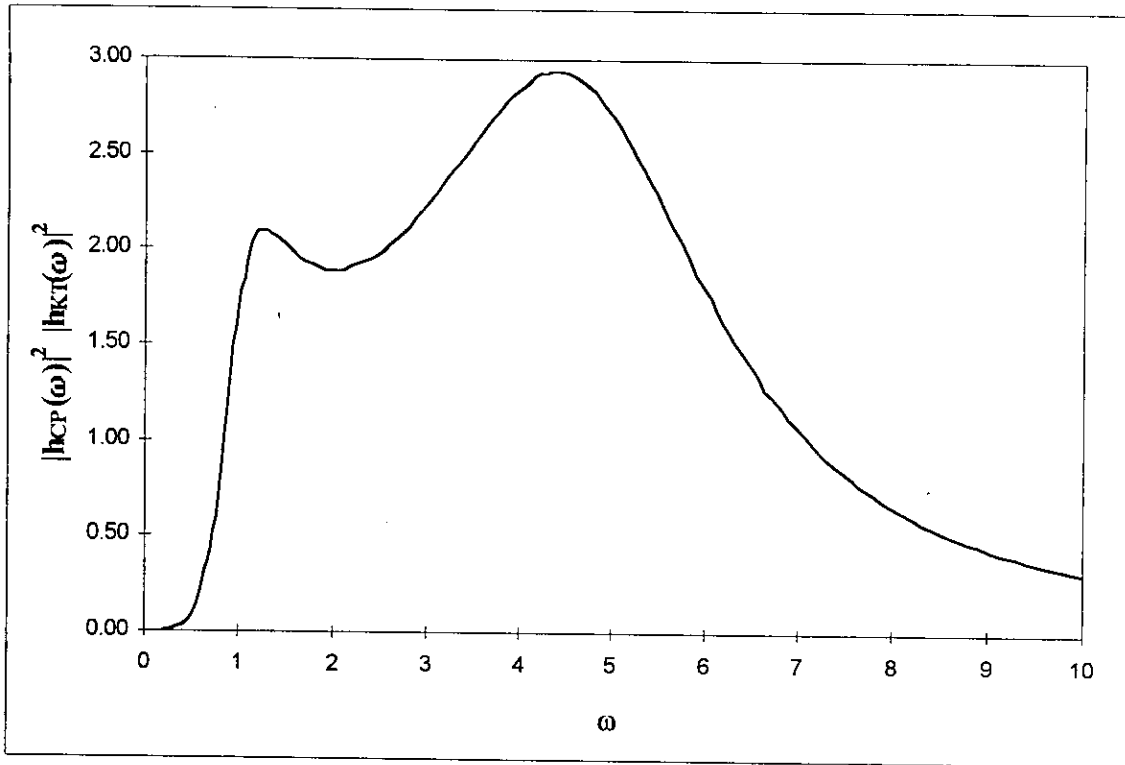
donde el parámetro de amortiguamiento  $\xi_f$  y el de frecuencia  $\omega_f$  se seleccionan para dar las características deseadas del filtro. Éstos se consideran también deterministas. Sea  $a_2(t)$  la función que resulta de filtrar  $a_1(t)$  con un filtro cuya *función de transmitancia* es la ecuación (4.24).  $a_2(t)$  tiene como *densidad espectral de potencia* a (Clough y Penzien, 1975):

$$S_{CP}(\omega) = |h(\omega)|^2 s_0 \quad (4.25)$$

donde

$$|h(\omega)|^2 = |h_{KT}(\omega)|^2 |h_{CP}(\omega)|^2 = \left( \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \left( \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \right) \quad (4.26)$$

La curva descrita por la ecuación (4.26) tiene la forma mostrada en la Fig. 4.2.



**Figura 4.2** Función de transmitancia de Clough y Penzien.

La función  $a_1(t)$  que resulta de filtrar un ruido blanco estacionario  $a(t)$  con la ecuación (4.22) puede obtenerse al solucionar la siguiente ecuación diferencial para  $x_g$  y  $\dot{x}_g$ .

$$\ddot{x}_g + 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g = -a(t) \quad (4.27)$$

La aceleración absoluta que corresponde a la respuesta de este primer filtro es

$$a_1(t) = \ddot{x}_g + a(t) = -2\xi_g \omega_g \dot{x}_g - \omega_g^2 x_g \quad (4.28)$$

La función  $a_2(t)$  que resulta de filtrar la respuesta del primer filtro ( $a_1(t)$ ) con la ecuación (4.24) puede obtenerse al resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x}_f + 2\xi_f \omega_f \dot{x}_f + \omega_f^2 x_f = -a_1(t) = 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g \quad (4.29)$$

La aceleración absoluta que corresponde a la respuesta de este segundo filtro es

$$a_2(t) = \ddot{x}_f = 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g - 2\xi_f \omega_f \dot{x}_f - \omega_f^2 x_f \quad (4.30)$$

Por último, la aceleración  $-a_2(t)$  es la que excita a la estructura.

En las ecuaciones anteriores  $\ddot{x}_f, \dot{x}_f, x_f, \dot{x}_g, x_g$  y  $x_g$  son las aceleraciones, velocidades y desplazamientos de cada filtro.

El proceso descrito anteriormente se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.3

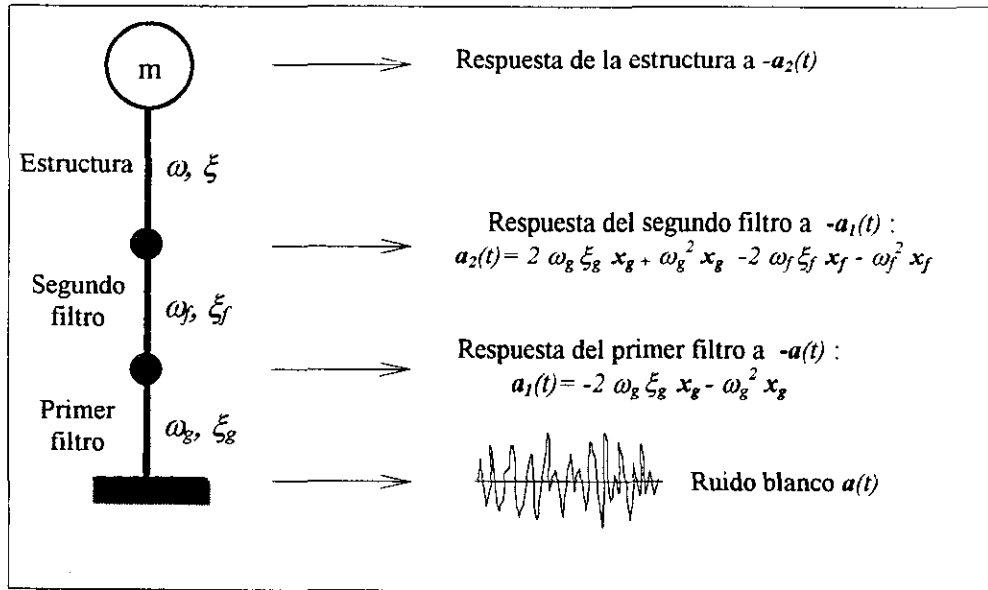


Figura 4.3 Proceso de filtrado del ruido blanco.

### 4.3 RUIDO BLANCO FILTRADO NO ESTACIONARIO

La respuesta de un sistema es generalmente *no estacionaria* debido a dos factores principales: el primero está asociado con la *no estacionariedad* de la excitación y el otro está asociado con la degradación de rigidez y de resistencia del sistema. Para obtener un proceso más representativo de un movimiento sísmico severo debe considerarse el carácter *no estacionario* de los acelerogramas. En general un acelerograma muestra una fase corta de incremento de la intensidad del movimiento hasta un valor máximo seguida por una intervalo de tiempo en el cual la intensidad se mantiene constante para luego decaer en forma exponencial (Clough y Penzien, 1975). Lo anterior sugiere el uso de un proceso *no estacionario* del siguiente tipo

$$\alpha(t) = c(t)\beta(t) \quad (4.31)$$

denominado *proceso oscilatorio* (Bolotin, 1960).  $c(t)$  es una función suave determinista que depende del tiempo la cual modula la varianza del proceso  $\alpha(t)$ .  $\beta(t)$  es un proceso *estacionario* en el sentido amplio con media cero y *densidad espectral*  $S_\beta(\omega)$ , y  $\alpha(t)$  es un proceso *no estacionario* con *densidad espectral evolutiva*  $S_\alpha(\omega, t) = c^2(t) S_\beta(\omega)$ .

En realidad el proceso *oscilatorio* es adecuado para modelar sólo funciones del tiempo con cambios

relativamente suaves de su contenido de frecuencia. Con todo rigor debe introducirse también una función moduladora del contenido de frecuencia cuya función puede interpretarse como un cambio a la escala del tiempo de un proceso *estacionario*. En este trabajo sólo se modula en amplitud y no en frecuencia, es decir, se usa el proceso *oscilatorio* descrito por la ecuación (4.31) donde  $\beta(t)$  es el *ruido blanco estacionario*  $a(t)$  con densidad espectral  $s_0$

$$\alpha(t) = c(t)a(t) \quad (4.32)$$

este proceso tiene la siguiente *densidad espectral evolutiva*

$$S_\alpha(\omega, t) = s_0 c^2(t) \quad (4.33)$$

Al reemplazar el término  $a(t)$  de la ecuación (4.27) por el proceso  $\alpha(t)$  se obtiene

$$\ddot{x}_g + 2\xi_g \omega_g \dot{x}_g + \omega_g^2 x_g = -c(t)a(t) \quad (4.34)$$

Obsérvese que para el caso *estacionario* la función moduladora  $c(t) = 1.0$ .

#### 4.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEFINITIVAS

Para considerar la variación de la energía y el carácter *no estacionario* del proceso aleatorio de excitación, como se ha descrito previamente, debe reemplazarse  $a(t)$  del sistema de ecuaciones (3.41) por el *ruido blanco filtrado no estacionario*  $a_2(t)$  descrito por la ecuación (4.30). Esto implica el agregar al sistema de ecuaciones mencionado, las ecuaciones (4.34) y (4.29). Las expresiones resultantes forman un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Usando el cambio de variables  $y = \dot{x}$ ,  $y_f = \dot{x}_f$ ,  $y_g = \dot{x}_g$  (recuérdese que  $x$  y  $z$  son el desplazamiento del sistema y la variable auxiliar del modelo de Baber y Wen, ecuación 3.31) el sistema puede escribirse en la forma de la ecuación (4.1) con  $Y^T = [x, x_f, x_g, z, y, y_f, y_g]$ ,  $F^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0, -c(t)a(t)]$  y:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h & c & 0 & 0 \\ -\alpha_2 \omega^2 & \omega_f^2 & -\omega_g^2 & -(1-\alpha_2)\omega^2 & -2\xi\omega & 2\xi_f \omega_f & -2\xi_g \omega_g \\ 0 & -\omega_f^2 & \omega_g^2 & 0 & 0 & -2\xi_f \omega_f & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & -\omega_g^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_g \omega_g \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

La *matriz de covarianza* del vector de respuesta  $Y$  se obtiene resolviendo la ecuación (4.19). Los elementos de dicha matriz son



$$\Sigma_Y = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{xx_f} \sigma_x \sigma_{x_f} & \rho_{xx_g} \sigma_x \sigma_{x_g} & \rho_{xz} \sigma_x \sigma_z & \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y & \rho_{xy_f} \sigma_x \sigma_{y_f} & \rho_{xy_g} \sigma_x \sigma_{y_g} \\ & \sigma_{x_f}^2 & \rho_{x_f x_g} \sigma_{x_f} \sigma_{x_g} & \rho_{x_f z} \sigma_{x_f} \sigma_z & \rho_{x_f y} \sigma_{x_f} \sigma_y & \rho_{x_f y_f} \sigma_{x_f} \sigma_{y_f} & \rho_{x_f y_g} \sigma_{x_f} \sigma_{y_g} \\ & & \sigma_{x_g}^2 & \rho_{x_g z} \sigma_{x_g} \sigma_z & \rho_{x_g y} \sigma_{x_g} \sigma_y & \rho_{x_g y_f} \sigma_{x_g} \sigma_{y_f} & \rho_{x_g y_g} \sigma_{x_g} \sigma_{y_g} \\ & & & \sigma_z^2 & \rho_{zy} \sigma_z \sigma_y & \rho_{zy_f} \sigma_z \sigma_{y_f} & \rho_{zy_g} \sigma_z \sigma_{y_g} \\ & & & & \sigma_y^2 & \rho_{yy_f} \sigma_y \sigma_{y_f} & \rho_{yy_g} \sigma_y \sigma_{y_g} \\ & & & & & \sigma_{y_f}^2 & \rho_{y_f y_g} \sigma_{y_f} \sigma_{y_g} \\ & & & & & & \sigma_{y_g}^2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

simétrica

donde  $\sigma_i$  es la desviación estándar de la variable aleatoria  $i$ ,  $\sigma_i^2$  es la varianza de la variable aleatoria  $i$  y  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación de las variables aleatorias  $i$  y  $j$  ( $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ ).

La matriz  $\Omega$  resulta

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi c^2(t)s_0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

En cuanto a los coeficientes linealizadores  $c$  y  $h$ , puede demostrarse que las expresiones (3.34) son igualmente aplicables a problemas con procesos aleatorios de excitación *no estacionarios*, tal como el proceso  $\alpha(t)$  de la ecuación (4.32) (ver por ejemplo Iwan y Mason, 1980). Ahora,  $c$  y  $h$  son funciones del tiempo y se obtienen a partir de las ecuaciones (3.35) a (3.40).

La manera de resolver la ecuación (4.19) se muestra en el capítulo 5.

#### 4.5 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DEL PROCESO DE EXCITACIÓN

Los parámetros del modelo de la excitación  $s_0$ ,  $\xi_f$ ,  $\omega_f$ ,  $\xi_g$ ,  $\omega_g$  y  $c(t)$  se calculan de diferente forma para el caso *estacionario* y para el caso *no estacionario*, pero no son independientes entre sí. De hecho para el caso *no estacionario* se requiere haber definido antes un proceso de excitación *estacionario*. Se verá que los parámetros mencionados dependen de un estimador de la *densidad espectral* y de la esperanza de la función de energía del proceso aleatorio de excitación que se modelará. Enseguida se deduce la expresión para determinar dicho estimador y después se estudia la forma de obtener los parámetros  $s_0$ ,  $\xi_f$ ,  $\omega_f$ ,  $\xi_g$ ,  $\omega_g$  y  $c(t)$  para el caso *estacionario* y para el *no estacionario*.

#### 4.5.1 Expresión para el cálculo del estimador de la *densidad espectral* del proceso aleatorio de excitación<sup>2</sup>

Se supone que el proceso aleatorio de excitación que se va a modelar es *ergódico* con media cero, de tal forma que los parámetros necesarios del modelo pueden obtenerse a partir de un acelerograma  $a(t)$ , definido en el intervalo  $[0, T]$ , de un sismo que se considera representativo de dicho proceso. La transformada de *Fourier* (directa) del registro  $a(t)$  es:

$$A(\omega) = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt = k_1 \int_0^T a(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.38)$$

y la transformada inversa de *Fourier* es:

$$a(t) = k_2 \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.39)$$

Las dos ecuaciones anteriores se conocen como *par de transformadas de Fourier*.  $k_1$  y  $k_2$  son constantes que cumplen con  $k_1 k_2 = (2\pi)^{-1}$ . A partir de estas expresiones se puede llegar a establecer la siguiente relación (teorema de *Parseval*)

$$\int_0^T a^2(t) dt = \frac{k_2}{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \quad (4.40)$$

Sea  $x(t)$  la respuesta de un oscilador a la excitación  $a(t)$ .  $x(t)$  está dada por la ecuación:

$$x(t) = \int_0^t a(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.41)$$

donde  $h(t)$  es la *función de respuesta a un impulso unitario*. La transformada de *Fourier* de  $x(t)$  es

$$X(\omega) = H(\omega) A(\omega) \quad (4.42)$$

donde  $H(\omega)$  es la transformada de *Fourier* de  $h(t)$ , conocida como *función de respuesta de frecuencia compleja* o *función de transferencia*.

La potencia de la respuesta  $x(t)$  se define como

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(\tau) d\tau \quad (4.43)$$

donde  $T$  es la duración del registro  $a(t)$ .

<sup>2</sup> En esta sección puede consultarse: Weaver (1989); Bendat y Piersol (1993); Hsu (1973); Lin (1967) y Clough y Penzien (1975).

Considerando el teorema de *Parseval*

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k_2}{Tk_1} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.44)$$

Si  $|H(\omega)| = 1$  la potencia de la respuesta es igual a la potencia de la excitación y  $X(\omega) = A(\omega)$ , así

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k_2}{Tk_1} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k_2}{Tk_1} |A(\omega)|^2 d\omega \quad (4.45)$$

Sea

$$S(\omega) = \frac{k_2}{Tk_1} |A(\omega)|^2 \quad (4.46)$$

un estimador de la función *densidad espectral* del proceso aleatorio de excitación. Generalmente  $k_1 = 1/2\pi$  y  $k_2 = 1$ . De esta forma

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} |A(\omega)|^2 \quad (4.47)$$

La función de *densidad espectral* de la ecuación (4.46) está definida sobre todas las frecuencias positivas y negativas y es llamado *espectro bilateral*. Esta clase de *espectros* es útil para estudios analíticos pero en la práctica es conveniente trabajar con *espectros* definidos sobre frecuencias positivas. De las propiedades de simetría de la ecuación (4.46) se obtiene

$$G(\omega) = 2S(\omega) \quad (4.48)$$

conocido como *función de densidad espectral unilateral*.

**DURACIÓN DE LA PARTE INTENSA DEL REGISTRO.** Al analizar la gráfica de un acelerograma, resulta claro que las aceleraciones del terreno son inherentemente *no estacionarias*. Sin embargo, un proceso *estacionario* puede ser, en ciertas ocasiones, una buena aproximación al proceso aleatorio de movimiento del terreno. Las características del modelo *estacionario* se determinan a partir de un segmento del acelerograma representativo cuya duración corresponde a la parte intensa del registro: aquella en la que se concentra la mayor parte de la energía del movimiento y en la que se presenta la respuesta estructural máxima. De acuerdo a lo anterior, la variable  $T$  de la ecuación (4.47) se considerará igual a la duración de la parte intensa  $T_I$  del registro  $a(t)$ . Esta duración debe capturar el carácter transitorio esencial del sismo, para que su *densidad espectral* represente el contenido de frecuencia durante la fase fuerte del movimiento.

En la literatura se han propuesto, entre otras, dos formas simples de obtener esta duración. La primera define a ésta como el intervalo entre el primero y el último cruce de un umbral preestablecido, en general igual a 0.05g. La segunda se basa en el concepto de *energía acumulada* que se obtiene integrando el cuadrado de las aceleraciones, de esta forma la duración es el intervalo

de tiempo necesario para acumular cierta fracción de la energía, i.e. 95%.

El criterio que se adopta en esta tesis se basa en la siguiente expresión propuesta por Vanmarcke y Lai (1980) para calcular la duración de la parte intensa del movimiento

$$T_I = \frac{2I_0}{(a_{max})^2} \ln\left(\frac{2T_I}{T_e}\right) \quad (4.49)$$

donde  $I_0$  es la *intensidad de Arias* del registro  $a(t)$ :  $I_0 = \int_0^t a^2(\tau) d\tau$ ,  $a_{max}$  la aceleración máxima absoluta de  $a(t)$ .  $T_e$  es el periodo dominante de  $a(t)$ . La ecuación (4.49) es de naturaleza probabilista y es la solución implícita del siguiente sistema de ecuaciones

$$I_0 = T_I \sigma_0^2 \quad (4.50)$$

$$a_{max}/\sigma_0 = \sqrt{2 \ln(2 T_I/T_e)} \quad (4.51)$$

Donde  $\sigma_0$  es la aceleración media cuadrática del movimiento

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{T_I} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \quad (4.52)$$

La ecuación (4.50) proviene de la combinación del teorema de *Parseval* (ecuación 4.40), del estimador de la *densidad espectral* de  $a(t)$  (ecuación 4.47) y de la varianza del proceso (igualdad izquierda de la ecuación 4.52). La ecuación (4.51) es una cantidad (factor pico) que puede ser excedida una vez en promedio durante el intervalo de tiempo  $T_I$  (o la cual tiene una probabilidad de  $e^{-1}=0.3679$  de no ser excedida durante  $T_I$ )<sup>3</sup>. Si  $T_e$  es conocido la ecuación (4.49) puede resolverse para  $T_I$  usando algún método numérico. Las principales características del valor de  $T_I$  obtenido con dicha ecuación son: *i*) se considera la energía total del movimiento y *ii*) hay una relación congruente entre  $a_{max}$  y la aceleración media cuadrática del movimiento.

#### 4.5.2 Determinación de los parámetros del modelo estacionario de la excitación

Es claro que la *densidad espectral*  $S_{CP}(\omega)$  del modelo de excitación (ecuación 4.25) debe ser aproximadamente igual al estimador de la *densidad espectral*  $S(\omega)$  del proceso aleatorio de excitación (ecuación 4.47) cuyo movimiento representativo es  $a(t)$ . Los parámetros  $s_0$ ,  $\xi_f$ ,  $\omega_f$ ,  $\xi_g$  y  $\omega_g$  que definen a  $S_{CP}(\omega)$  pueden obtenerse en los siguientes dos pasos:

1. Primero se lleva a cabo un ajuste de los *espectros*  $S_{CP}(\omega)$  y de  $S(\omega)$  usando una técnica adecuada de estimación paramétrica *no lineal* (ver sección 7.3.2). Los parámetros que se determinan son precisamente  $\xi_f$ ,  $\omega_f$ ,  $\xi_g$  y  $\omega_g$ , que principalmente dan forma a  $S_{CP}(\omega)$  y  $s_0^*$  que en general es diferente a  $s_0$  debido a que la varianza del modelo de excitación (área bajo  $S_{CP}(\omega)$ ) igual a (Yeh y

<sup>3</sup> La ecuación (4.51) se deriva de la hipótesis de que el cruce de un determinado umbral (relativamente alto) ocurre como un proceso de arribos de Poisson. Para un proceso estacionario *gaussiano* esta hipótesis es correcta, pero la fórmula es inapropiada para umbrales muy pequeños.

Wen, 1989):

$$\sigma_{CP}^{2*} = \pi s_0^* \frac{\omega_g^4 (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 [\xi_g \omega_f^3 + \xi_f \omega_g^3 + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g)]}{2\xi_g \xi_f [(\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2 \omega_f^2 (\xi_g^2 + \xi_f^2) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\omega_g^2 + \omega_f^2)]} \quad (4.53)$$

es diferente a la varianza real  $\sigma_0^2$  (ecuación 4.52).

- Usando las cantidades  $\xi_g$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_f$  y  $\omega_f$  calculadas en el paso anterior, se determina el valor de  $s_0$  usando la siguiente expresión

$$s_0 = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{2\xi_g \xi_f [(\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2 \omega_f^2 (\xi_g^2 + \xi_f^2) + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\omega_g^2 + \omega_f^2)]}{\omega_g^4 (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g) + 4\xi_g^2 \omega_g^2 [\xi_g \omega_f^3 + \xi_f \omega_g^3 + 4\xi_g \xi_f \omega_g \omega_f (\xi_g \omega_f + \xi_f \omega_g)]} \quad (4.54)$$

La ecuación anterior se obtiene de la ecuación (4.53) reemplazando  $s_0^*$  por  $s_0$  y  $\sigma_{CP}^{2*}$  por  $\sigma_0^2$ .

Los valores de  $s_0$ ,  $\xi_f$ ,  $\omega_f$ ,  $\xi_g$  y  $\omega_g$  obtenidos tal como se describe arriba, garantizan que la varianza del modelo *estacionario* de la excitación ( $\sigma_{CP}^2$ ) es exactamente igual a la del proceso aleatorio de excitación ( $\sigma_0^2$ ).

#### 4.5.3. Determinación de los parámetros del modelo no estacionario de la excitación

El modelo *no estacionario* de la excitación usado en este trabajo es el *oscilatorio* definido por la ecuación (4.31). La función moduladora  $c(t)$  se determina a través de la función esperanza de la energía de la excitación sísmica, dada por

$$E[e(t)] = \int_0^t E[\alpha^2(\tau)] d\tau \quad (4.55)$$

Según el modelo propuesto por la ecuación (4.31) y considerando que el proceso aleatorio estacionario  $\beta(t)$  tiene varianza unitaria y media cero, se obtiene:

$$E[e(t)] = \int_0^t c^2(\tau) E[\beta^2(\tau)] d\tau = \int_0^t c^2(\tau) d\tau \quad (4.56)$$

Los parámetros que definen a la función  $c(t)$  se seleccionan tal que la función esperanza de la energía del modelo de la excitación, se ajuste a la función de energía basada en un acelerograma  $a(t)$  representativo del proceso aleatorio de excitación (Saragoni y Hart, 1974).

Los valores de  $\xi_g$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_f$  y  $\omega_f$  se calculan de la misma forma que para el caso *estacionario*. El valor de  $s_0$  se calcula con la ecuación (4.54) sustituyendo  $\sigma_0^2=1$ . Al suponer que el proceso *estacionario*  $\beta(t)$  tiene varianza unitaria, resulta que la varianza del modelo *no estacionario*  $\alpha(t)$  en cualquier instante es controlada únicamente por la función moduladora  $c(t)$ .

En el capítulo 7 se calculan los datos necesarios para obtener la función moduladora que se emplea en el estudio de calibración.

---

# CAPÍTULO

# 5

---

## CÁLCULO DE LA MATRIZ DE COVARIANZA USANDO LEG

En este capítulo se describe el método de solución de la ecuación (4.19). El objetivo es determinar la matriz de covarianza del vector de respuesta  $Y$ . Si la excitación es *estacionaria* se requiere de un proceso iterativo para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas *no lineales*. Si la excitación es *no estacionaria* la solución se obtiene al integrar numéricamente, en intervalos de tiempo suficientemente pequeños, un sistema de ecuaciones diferenciales *no lineales* de primer orden.

### 5.1 PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN

#### 5.1.1 Caso estacionario

Para la respuesta *estacionaria* la cual implica que  $c(t)=1$ , y que no existe deterioro de las propiedades mecánicas del sistema, se tiene que  $\frac{d}{dt}\Sigma_Y = 0$ . Entonces la ecuación (4.19) se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas *no lineales* de la siguiente forma

$$L\Sigma_Y + \Sigma_Y L^T + \Omega = 0 \quad (5.1)$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación de *Liapounov* o ecuación de *Sylvester*. Puesto que los elementos  $c$  y  $h$  de la matriz  $L$  dependen de la estadística de la respuesta (véanse las ecuaciones 3.35 y 3.37) se requiere de un procedimiento de carácter iterativo para resolver la ecuación (5.1). En la siguiente descripción se utilizan superíndices para denotar el número de iteración. Para iniciar las iteraciones se puede usar la solución del sistema lineal con una rigidez igual a la rigidez de prefluencia del sistema *no lineal*. Lo anterior implica

$$\begin{aligned} c^0 &= 0.999(\alpha_3)_0 \\ h^0 &= -0.05(\alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Usando estas expresiones se puede determinar la matriz  $L$  para luego resolver la ecuación (5.1) empleando un algoritmo numérico y así obtener la primer aproximación  $\Sigma_Y^0$  de la matriz de covarianza. Existen algunos algoritmos eficientes propuestos por Bartels y Stewart (1972), Beavers y Denman (1975), Pace y Barnett (1972) y Rothschild y Jameson (1978). En este trabajo se ha empleado el algoritmo de Bartels y Stewart usando una tolerancia en los cálculos de  $1 \times 10^{-15}$ . Una vez que se calcula  $\Sigma_Y^0$ , las ecuaciones (3.35) (considerando  $\delta_{\alpha_3} = \delta_{\eta} = \delta_{\nu} = 0$ ) proporcionan los nuevos valores de  $c$  y  $h$ , digamos  $c_d^1$  y  $h_d^1$ . Sin embargo, no es conveniente usar estos valores para determinar la nueva matriz  $\Sigma_Y^1$ . Casciati y Faravelli (1985) recomiendan usar los siguientes valores corregidos para  $c$  y  $h$  con el fin de controlar la convergencia

$$\begin{aligned} c^k &= (c_d^k - c^{k-1}) / \beta + c^{k-1} \\ h^k &= (h_d^k - h^{k-1}) / \beta + h^{k-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde el superíndice  $k=1,2,3,\dots$  denota el numero de iteración,  $c_d$  y  $h_d$  denotan los valores no corregidos de  $c$  y  $h$  obtenidos directamente de las ecuaciones (3.35) y  $\beta$  es un valor real no negativo. Casciati y Faravelli (1985) usan  $\beta=10$  lo cual implica una convergencia lenta pero eficaz. En el capítulo 7 se usa en general  $\beta=3$ .  $c^k$  y  $h^k$  se utilizan para calcular la nueva matriz  $\Sigma_Y^k$ . En cada iteración se determina la siguiente cantidad

$$\Delta_{ij} = \frac{|\left(\Sigma_Y^k\right)_{ij} - \left(\Sigma_Y^{k-1}\right)_{ij}|}{\left(\Sigma_Y^k\right)_{ij}} \quad (5.4)$$

donde  $(\Sigma_Y^k)_{ij}$ , es el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $\Sigma_Y^k$ . El proceso iterativo continua y se detiene hasta que el valor máximo de  $\Delta_{ij}$  sea menor que cierta cantidad pequeña. En el trabajo se ha usado en general

$$\left(\Delta_{ij}\right)_{\max} \leq 1 \times 10^{-10} \quad (5.5)$$

En el capítulo 8 se comenta sobre el efecto de los parámetros del modelo de Baber y Wen en los valores de  $\beta$  y  $(\Delta_{ij})_{\max}$ .

### 5.1.2. Caso no estacionario

Para el caso *no estacionario*, incluyendo los sistemas que tengan deterioro en sus propiedades, se tiene  $\frac{d}{dt} \Sigma_Y \neq 0$ , dando lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales *no lineales* de primer orden

$$\frac{d}{dt} \Sigma_Y = L \Sigma_Y + \Sigma_Y L^T + \Omega \quad (5.6)$$

Es necesario emplear un programa de computadora para resolverla paso a paso en el tiempo. Existen subrutinas apropiadas para la solución de ecuaciones diferenciales. En este trabajo se ha empleado la subrutina *DGEAR*, una librería del *IMSL*. Para más detalles véanse por ejemplo Hindmarsh (1974) y Gear (1971). En el caso de un sistema *UGL*, considerando el filtro de Clough y Penzien el tamaño de la matriz de covarianza es de  $7 \times 7$  (expresión 4.36). Para usar la subrutina mencionada, la ecuación (5.6) se transforma primero en un sistema de 49 ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan de igualar los elementos de la matriz del lado izquierdo con los respectivos elementos de la matriz del lado derecho de la ecuación (5.6). Como la matriz  $\frac{d}{dt} \Sigma_Y$  es simétrica, las ecuaciones necesarias son únicamente 28.

En el fondo la solución del caso *no estacionario* involucra un esquema de integración paso a paso que implica el uso repetido de las ecuaciones (3.35) y (5.6). El eje del tiempo se divide en un número finito de intervalos  $\Delta t$  igualmente espaciados en los que  $c$  y  $h$  son constantes. Al inicio  $c$  y  $h$  son conocidas (sistema lineal, ecuaciones 5.2) por lo que  $\Sigma_Y$  en el instante  $t = \Delta t$  puede encontrarse por medio de la integración numérica de la ecuación (5.6). Sustituyendo los elementos apropiados de la matriz  $\Sigma_Y$  en las ecuaciones (3.35) se obtienen los nuevos valores de  $c$  y  $h$  para el siguiente intervalo, y así sucesivamente. La matriz  $L$  se actualiza en cada paso para incluir los cambios que toman lugar en el sistema tales como el decremento de rigidez y el incremento del amortiguamiento. La ecuación (3.40) se resuelve en paralelo para considerar la disipación de energía y los parámetros  $\mu_{\alpha 3}$ ,  $\mu_v$ , y  $\mu_\eta$  se actualizan en cada paso para tomar en cuenta el deterioro del sistema.

Para el estudio de calibración del capítulo 7, el cálculo simbólico necesario para establecer las 28 ecuaciones a resolver, se realizó con el programa *Mathematica* (Wolfram, 1991) y el método de solución usado es el de Adams (Hindmarsh, 1974). Se seleccionó un tamaño del paso interno de integración de  $H=0.00001$  y un error relativo  $TOL=1 \times 10^{-10}$ .

## 5.2 ALGORITMOS ALTERNOS DE SOLUCIÓN

Los algoritmos propuestos por Bartels y Stewart (1972), Beavers y Denman (1975), Pace y Barnett (1972) y Rothschild y Jameson (1978) funcionan muy bien para problemas en los que la dimensión de la matriz  $\Sigma_Y$  es de  $100 \times 100$  o menor. Sin embargo cuando se introduce una discretización con elementos finitos, tales dimensiones aumentan considerablemente. Por otra parte sólo una modesta parte de las regiones plásticas potenciales se activarán bajo una excitación aleatoria. Si uno es capaz de obtener las regiones plásticas que realmente serán activadas la dimensión del problema puede reducirse drásticamente. Ambos casos pueden tratarse introduciendo un algoritmo de solución en el dominio de la frecuencia (Mochio, Samaras y Shinozuka, 1985; Baber, 1986; Singh *et al.*, 1988; Faravelli, Casciati y Singh, 1988). Éste involucra el cálculo de los valores característicos y modos complejos de la matriz  $L$ . La naturaleza compleja del problema de valores característicos proviene del hecho de que  $L$  es no simétrica. Este algoritmo ofrece la ventaja de que los modos de menor importancia pueden despreciarse en los cálculos.



# ANÁLISIS DE SISTEMAS *NO LINEALES* MEDIANTE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

Frecuentemente, la simulación de Monte Carlo se usa como herramienta para estimar la precisión de las soluciones de vibración aleatoria de sistemas *no lineales* generadas por métodos de análisis aproximados, tal como la *linealización equivalente estocástica*. En casos especiales pueden también usarse los valores teóricos determinados por la solución de la ecuación de Fokker-Planck. La calibración de la *LEG*, objetivo de este trabajo, se realiza comparando los resultados de dicho método con los que provienen de la simulación de Monte Carlo. Enseguida se describe la manera de calcular la estadística de la respuesta de un sistema *UGL histerético* a través de los resultados obtenidos por una serie de análisis deterministas.

## 6.1 SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

Como se mencionó en el capítulo 1, un método alterno para estimar, dentro de cualquier nivel de confiabilidad deseado, la estadística de la respuesta de sistemas *no lineales* excitados aleatoriamente, se basa en el análisis de experimentos aleatorios popularmente conocidos como simulación de Monte Carlo (Shinozuka, 1972; Rubinstein, 1981). El fundamento teórico del método está asociado con el hecho de que las ecuaciones diferenciales *estocásticas* que gobiernan el movimiento de un sistema pueden interpretarse como un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales deterministas (Soong, 1973). Para cada miembro de este conjunto, la excitación es una función muestra del proceso aleatorio de excitación, y la respuesta es la correspondiente función muestra del proceso aleatorio de respuesta.

La parte importante de cualquier estudio de simulación es un algoritmo que proporciona un conjunto de números pseudoaleatorios que pertenecen a una población con una función de *densidad de probabilidad* específica. Procesando apropiadamente este conjunto de números puede obtenerse, en

una sucesión discreta de tiempos igualmente espaciados, los valores de las funciones muestra del proceso aleatorio de excitación, con un contenido de frecuencia y una variación temporal de la intensidad previamente seleccionados. Para cada muestra del proceso aleatorio de excitación puede determinarse la respuesta del sistema estructural usando cualquier método conveniente de integración numérica de ecuaciones diferenciales. Esta técnica puede aplicarse al cálculo de la estadística de la respuesta *estacionaria* y *no estacionaria*.

Evidentemente, entre más grande sea el número de registros simulados, menor será la diferencia entre los valores numéricos y los valores teóricos de la estadística de la respuesta. Desgraciadamente, el número de muestras comúnmente aceptado para niveles de confiabilidad en ingeniería es muy alto. Esto hace que el costo computacional de la simulación sea significativo, especialmente para sistemas *VGL*. Debe hacerse notar que la necesidad de un gran número de muestras puede eliminarse si interesa la estadística de la respuesta *estacionaria*. En este caso bajo ciertas condiciones se puede suponer *ergodicidad* respecto a algún momento estadístico. Esta hipótesis permite la determinación de este conjunto específico de momentos estadísticos usando una simple función muestra de la respuesta.

El cálculo de las funciones muestras del proceso aleatorio de excitación no es objetivo de este trabajo por lo cual se adopta un conjunto de acelerogramas sintéticos previamente determinados, cuyas características se describen en el siguiente capítulo.

## 6.2 METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DE LA RESPUESTA PROBABILISTA

Básicamente, el proceso de simulación consiste en generar  $N$  funciones muestra del proceso aleatorio de excitación sobre un intervalo fijo de tiempo y convertirlas en las correspondientes  $N$  funciones muestra del proceso aleatorio de respuesta a través de métodos de integración numérica de las ecuaciones gobernantes del movimiento. Para el caso de sistemas con excitación *no estacionaria* donde las  $N$  funciones muestra del proceso de respuesta son  $x_1(t_j)$ ,  $x_2(t_j)$ ,  $x_3(t_j)$ , ...,  $x_N(t_j)$  para cada  $j=1,2,3,\dots,N_T$  (tamaño de cada muestra), un estimador de la esperanza del proceso aleatorio de respuesta  $X$  en el instante  $t_j$  es

$$\hat{m}_x(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_j) \quad (6.1)$$

y un estimador de la desviación estándar del proceso aleatorio de respuesta  $X$  en el instante  $t_j$  es

$$\hat{\sigma}_x(t_j) = \left[ \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N [x_i(t_j) - \hat{m}_x(t_j)]^2 \right) \right]^{1/2} \quad (6.2)$$

Una característica de los estimadores  $\hat{m}_x(t_j)$  y  $\hat{\sigma}_x(t_j)$  es que su precisión es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de muestras  $N$ . Así para mejorar la precisión por un factor de 10 es necesario incrementar la cantidad de cálculos por un factor de 100. Puesto que los valores de las muestras en un instante particular  $t_j$  son estadísticamente independientes es fácil estimar la

precisión de  $\hat{m}_x(t_j)$  y  $\hat{\sigma}_x(t_j)$ . De hecho, para valores grandes de  $N$ ,  $\hat{m}_x(t_j)$  tiene una desviación estándar dada por

$$\sigma_1(t_j) = \frac{\hat{\sigma}_x(t_j)}{N^{1/2}} \quad (6.3)$$

así como  $\hat{\sigma}_x(t_j)$  tiene una desviación estándar dada por

$$\sigma_2(t_j) = \frac{\hat{\sigma}_x(t_j)}{(2N)^{1/2}} \quad (6.4)$$

Se observa que el estimador de la media tiene más dispersión que el estimador de la desviación estándar.

En el presente trabajo, las ecuaciones que se resuelven para obtener cada muestra del proceso aleatorio de respuesta son las siguientes (ver ecuación 3.32)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -2\xi\omega y_2 - \alpha_2\omega^2 y_1 - (1 - \alpha_2)\omega^2 y_3 - a(t) \\ \dot{y}_3 &= \left\{ \alpha_3 y_2 - \nu \left( \alpha_4 y_3 |y_2| |y_3|^{\alpha_6-1} + \alpha_5 y_2 |y_3|^{\alpha_6} \right) \right\} / \eta \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $y_1 = x$  el desplazamiento del sistema,  $y_2 = \dot{x}$  la velocidad del sistema,  $y_3 = z$  la variable auxiliar del modelo diferencial de Baber y Wen y  $a(t)$  un registro de aceleraciones del terreno. Véase el capítulo 3 para la descripción de los demás parámetros.

Al contar con  $N$  muestras  $a(t)$  del proceso aleatorio de excitación, las ecuaciones (6.5) deben resolverse de manera determinista  $N$  veces para determinar las  $N$  muestras del proceso aleatorio de respuesta. En esta tesis el sistema de ecuaciones (6.5) se resuelve paso a paso usando la librería *DGEAR* del *IMSL*.

Una vez que se tiene el conjunto de  $N$  muestras del proceso de respuesta, por ejemplo el desplazamiento del sistema  $x_i(t)$ , se emplean las ecuaciones (6.1) y (6.2) para determinar la estadística de la respuesta.

## CALIBRACIÓN DEL MÉTODO *LEG*

### 7.1 ORGANIZACIÓN DEL ESTUDIO

El estudio sobre la precisión de la *LEG* se organiza como sigue. Se analiza la influencia de seis parámetros que influyen de manera importante en la precisión del método:

1. Parámetro  $\alpha_2$  del modelo de Baber y Wen (caso IA2). Se considera este parámetro ya que influye en el desplazamiento máximo del sistema (ver Figura 3.3) y por lo tanto en la *demanda de ductilidad*. Cabe mencionar que el parámetro  $\alpha_2$  juega un papel importante en el *rango* de la matriz  $L$ . En el caso *estacionario* y cuando  $\alpha_2=0$ , la ecuación (5.1) no puede resolverse ya que la primera columna de la matriz  $L$  (ver igualdad 4.35) contendría ceros. Puede demostrarse que la varianza del desplazamiento  $\sigma_x^2$  tiende a infinito cuando  $\alpha_2$  se aproxima a cero (Casciati y Faravelli, 1986). Esta condición está considerada en el método numérico, utilizado en esta tesis, para resolver la ecuación de *Liapounov*. El análisis de osciladores con un valor muy bajo de  $\alpha_2$  se realiza sustituyendo el valor real de  $\alpha_2$  por un valor ficticio, tal como lo sugiere Casciati y Faravelli (1986).
2. Parámetro  $\alpha_6$  del modelo de Baber y Wen (caso IA6). Un aumento del valor de este parámetro se refleja en un incremento del grado de *no linealidad* de la ecuación (3.31). Esto implica que los parámetros del *sistema lineal equivalente* (ecuaciones 3.34) tengan un margen de error más grande.
3. Deterioro de las propiedades mecánicas del sistema (caso IDE). El deterioro de resistencia y de rigidez influye directamente en la forma en la que se distribuye probabilísticamente la fuerza restauradora. Esto implica que la densidad de probabilidad de dicha fuerza pueda ser sustancialmente diferente de la *gaussiana*, considerada por la *LEG*.
4. *Nivel de ductilidad*  $\eta$  (caso IDD). Puesto que el proceso aleatorio de excitación para cualquier caso de estudio es el mismo, el *nivel de ductilidad* que demanda el proceso de excitación a cada

sistema *UGL* se controla por medio de la fuerza de fluencia que se le asigna. Cabe aclarar que los espectros que se presentan en las Figuras 7.13 a 7.41 no son espectros de *ductilidad* constante.

5. Periodo de vibración del sistema. Para estudiar el efecto que tiene este parámetro en la precisión de la *LEG*, se analiza un número considerable de sistemas que tienen periodos de vibración entre 0.1s y 6.0s.
6. *Estacionariedad* de la excitación. Se evalúa la precisión del método *LEG* en la estimación de la respuesta de sistemas *UGL* ante modelos de excitación *estacionarios* y *no estacionarios*.

## 7.2 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS ESTUDIADOS

Los sistemas analizados son sistemas *UGL* que tienen en común las siguientes propiedades geométricas y mecánicas:

- Fracción de amortiguamiento crítico  $\xi=0.05$
- Sistemas que se deforman axialmente. Su rigidez inicial es  $k=EA/L$
- Material: acero, con módulo de elasticidad  $E=2100 \text{ ton/cm}^2$
- Longitud del resorte  $L=150\text{cm}$
- Masa  $m=1.7/981=1.7329 \times 10^{-3} \text{ ton}\cdot\text{s}^2/\text{cm}$

Debido a que se analizan sistemas con diferentes propiedades (periodo de vibración, rigidez en la postfluencia, rapidez de la transición del intervalo elástico al intervalo inelástico y fuerza de fluencia), los parámetros del modelo de Wen toman diferentes valores dependiendo del caso en estudio:

- $\alpha_1 = k$ , variable tal que el periodo de vibración esté dentro del intervalo [0.1s, 6.0s]
- $\alpha_2$ : valores seleccionados en forma arbitraria
- $\alpha_3 = 1.0$  (constante)
- $\alpha_4 = \alpha_5 = \frac{1}{2\nu} \left( \frac{k}{f_y} \right)^{\alpha_6}$ . Se adopta esta expresión debido a que se considera que el material es acero (ver ecs. 3.23 y 3.25). Los valores de  $f_y$  están asociados a diferentes *demandas de ductilidad* y el valor inicial de  $\nu$  es uno.
- $\alpha_6$ : valores seleccionados en forma arbitraria
- Los parámetros de deterioro  $\delta_{\alpha_3}$ ,  $\delta_{\eta}$  y  $\delta_{\nu}$  (ecuación 3.27) también se consideran arbitrarios.

Para el valor establecido de la masa y a partir de un análisis previo con *LEG* considerando un modelo de excitación *no estacionario*, se calculó un conjunto de fuerzas de fluencia asociadas a determinada *demanda de ductilidad* de desplazamiento  $\mu$ . En las Figs. 7.1 y 7.2 se muestran las fuerzas de fluencia mencionadas, junto con su respectiva *demanda de ductilidad*  $\mu$ . En el capítulo 9 se explica con detalle como se calculó esta *demanda de ductilidad*. Ésta no es constante en el rango de periodos estudiado; sin embargo, cada conjunto de fuerzas implica cierto *nivel de ductilidad* representado en las figuras por la letra griega *eta* ( $\eta$ ). Con el fin de contar con un caso *elástico lineal* ( $\eta = 0$ ), se considera además un valor alto de la fuerza de fluencia  $f_y=150 \text{ ton}$ . Este último caso no se presenta en las figuras 7.1 y 7.2.

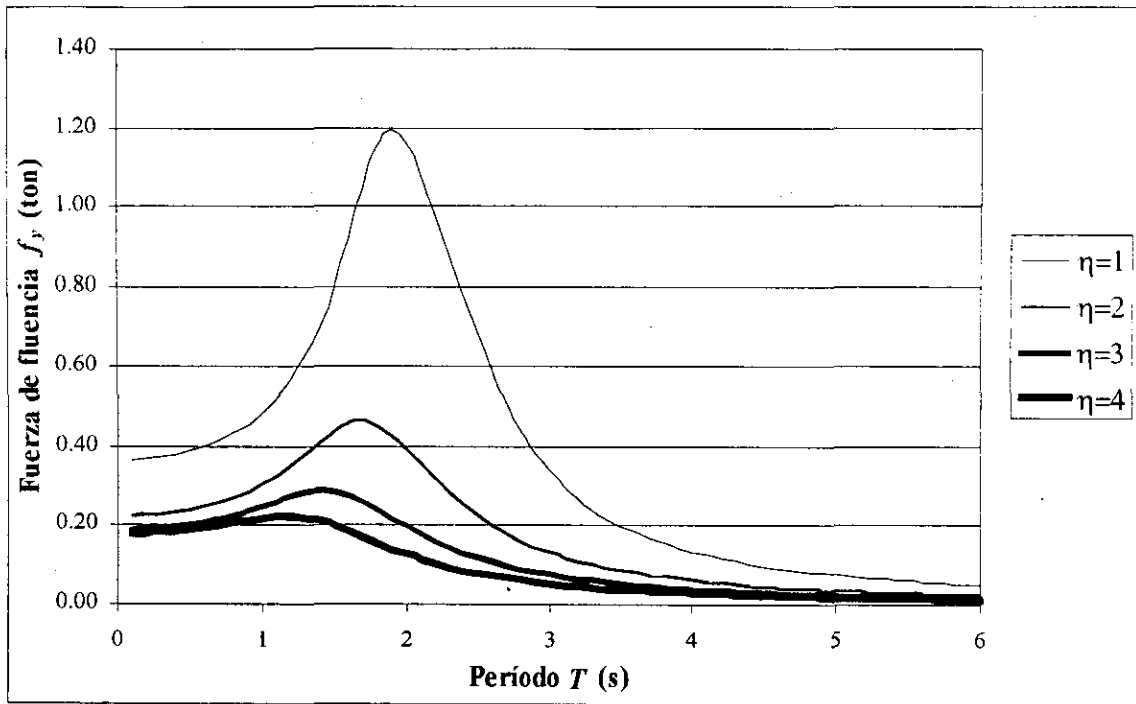


Figura 7.1 Fuerzas de fluencia para el estudio de calibración.

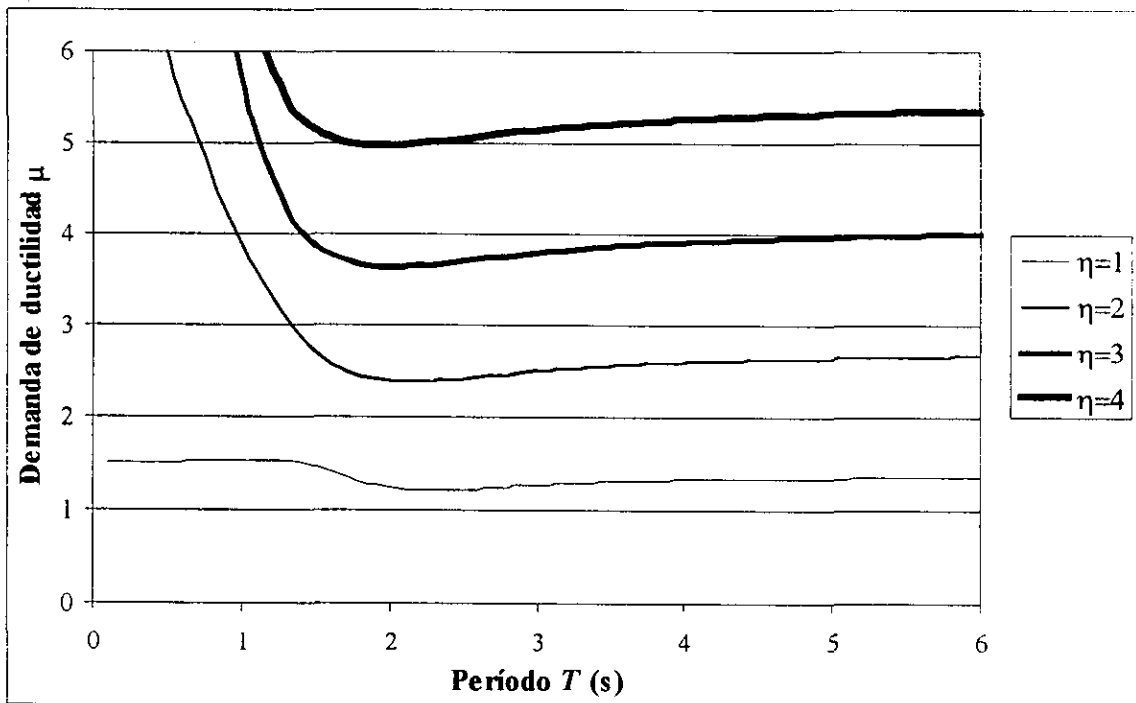


Figura 7.2 Demandas de ductilidad, asociadas a las fuerzas de fluencia seleccionadas, obtenidas con un análisis previo de *LEG no estacionaria*.

Se varían hasta tres parámetros en cada caso de estudio, de la siguiente forma:

Caso IA2:

- $\alpha_l = k$ , variable tal que el período de vibración se encuentre dentro del intervalo [0.1s, 6.0s]

- $\alpha_2 = 0.001, 0.015, 0.25, 0.50$  y  $0.75$
- $\alpha_4 = \alpha_5$  tal que  $\eta = 1$  y  $4$
- $\alpha_6 = 1$
- Sin deterioro, por lo que  $\delta_{\alpha_3} = \delta_{\eta} = \delta_{\nu} = 0.0$

Caso IA6:

- $\alpha_1 = k$ , variable tal que el periodo de vibración se encuentre dentro del intervalo  $[0.1s, 6.0s]$
- $\alpha_2 = 0.015$
- $\alpha_4 = \alpha_5$  tal que  $\eta = 1$  y  $4$
- $\alpha_6 = 1, 3, 5, 7$  y  $15$
- $\delta_{\alpha_3} = \delta_{\eta} = \delta_{\nu} = 0.0$

Caso IDE:

- $\alpha_1 = k$ , variable tal que el periodo de vibración se encuentre dentro del intervalo  $[0.1s, 6.0s]$
- $\alpha_2 = 0.015$
- $\alpha_4 = \alpha_5$  tal que  $\eta = 4$
- $\alpha_6 = 1$
- $\delta_{\alpha_3} = 0.05$ ,  $\delta_{\eta} = 0.2$  y  $\delta_{\nu} = 0.2$  en forma independiente. Hurtado y Barbat, (1993) consideran valores similares a estos.

Caso IDD:

- $\alpha_1 = k$ , variable tal que el periodo de vibración se encuentre dentro del intervalo  $[0.1s, 6.0s]$
- $\alpha_2 = 0.015$
- $\alpha_4 = \alpha_5$  tal que  $\eta = 0, 1, 2, 3$  y  $4$
- $\alpha_6 = 1$
- $\delta_{\alpha_3} = \delta_{\eta} = \delta_{\nu} = 0.0$

Los datos listados arriba son necesarios para formar el sistema de ecuaciones (6.5) que se resuelve en el estudio de simulación y para crear la matriz  $L$  que interviene en el planteamiento de la ecuación (5.1) para el caso *estacionario* y de la ecuación (5.6) para el caso *no estacionario*. Además, para calcular las muestras del proceso aleatorio de excitación necesarias para la solución con simulación de Monte Carlo, es necesario seleccionar un movimiento representativo de dicho proceso. A partir de éste se determinan también los parámetros del filtro y la intensidad del *ruido blanco*, tal como se explicó en la sección 4.5.

## 7.3 PROPIEDADES DEL PROCESO DE EXCITACIÓN

### 7.3.1. Acelerogramas sintéticos (para el análisis con simulación de Monte Carlo)

Se considera que el proceso aleatorio de excitación tiene propiedades estadísticas que se obtienen a partir de las del acelerograma en dirección este-oeste del temblor del 19 de septiembre de 1985 registrado en la Secretaria de Comunicaciones y Transportes en la Cd. de México (SCTEW85). Este registro tiene las siguientes propiedades:

- N° de parejas tiempo-aceleración: 8192
- Intervalo de digitalización:  $0.02s \Rightarrow$  Duración total: 163.82s
- Aceleración máxima absoluta =  $a_{max} = 167.918 \text{ cm/s}^2$

Además de estas características es necesario conocer su curva de *intensidad de Arias* y su *espectro de amplitudes de Fourier*. Las Figs. 7.3 y 7.4 se determinaron con dos programas elaborados para resolver la ecuación  $I_0 = \int_0^t a^2(\tau) d\tau$  y la ecuación (4.38) usando el algoritmo de la transformada rápida de *Fourier* (Weaver, 1989).

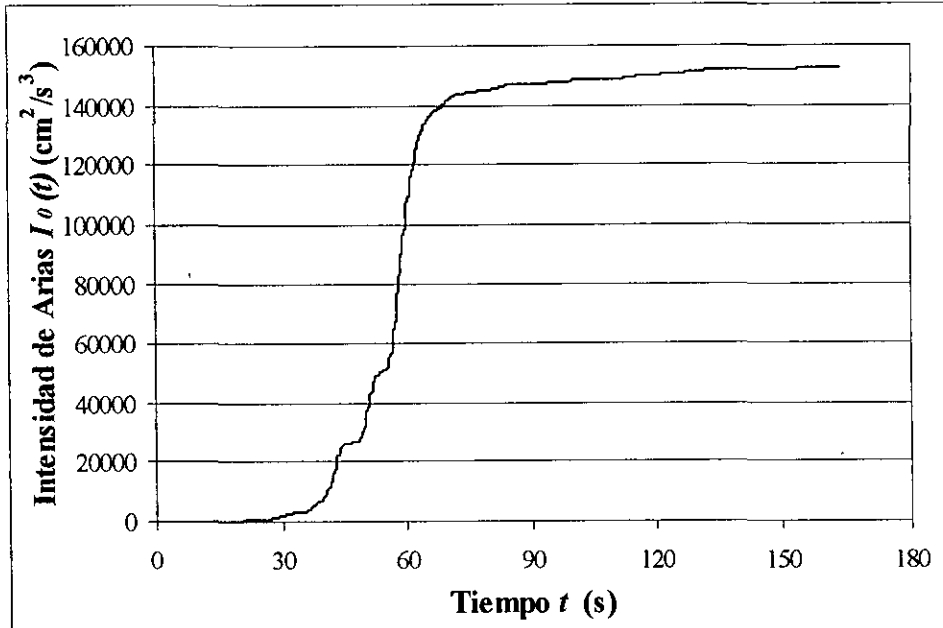


Figura 7.3 Curva de intensidad de *Arias* del acelerograma SCTEW85.

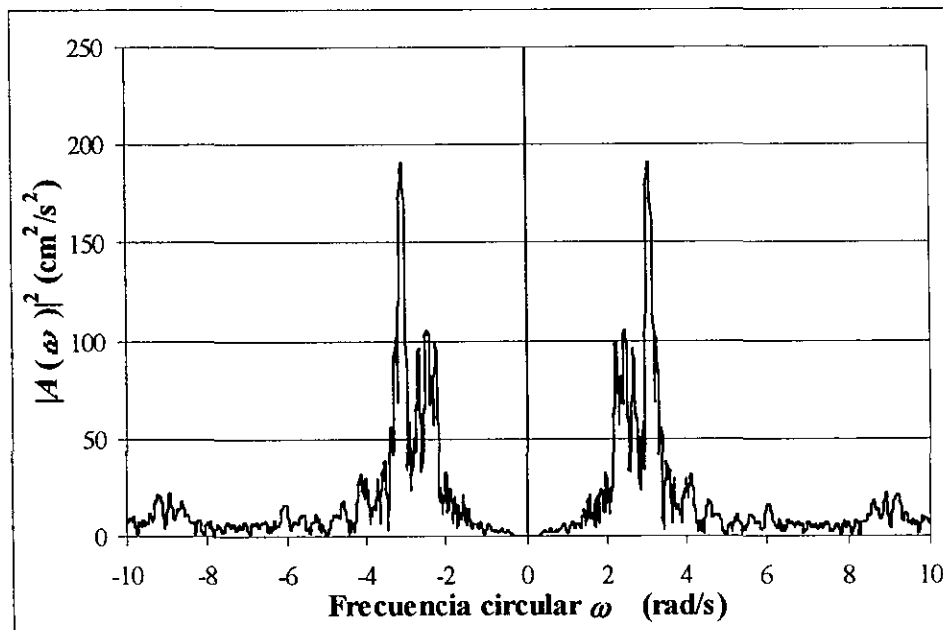


Figura 7.4 Espectro de amplitudes de *Fourier* del acelerograma SCTEW85.

También se calcularon los siguientes datos característicos del acelerograma SCTEW85



- Intensidad de *Arias*:  $I_0 = 152350.87 \text{ cm}^2/\text{s}^3$
- Instante que corresponde al 5% de  $I_0$ : 39.64s
- Instante que corresponde al 50% de  $I_0$ : 58.00s
- Instante que corresponde al 95% de  $I_0$ : 76.60s
- Duración de la fase intensa según el criterio de acumulación de energía (90% de  $I_0$ ): 36.960s
- Area bajo el *espectro* de amplitudes de *Fourier* =  $\int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = 24247.42 \text{ cm}^2/\text{s}^3$
- Frecuencia dominante =  $\omega_e = 2\pi / T_e = \frac{\int_0^{\infty} \omega |A(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega} = 3.2189 \text{ rad/s}$

El cálculo de las funciones muestras del proceso aleatorio de excitación no es objetivo de este trabajo. Se adoptó un conjunto de acelerogramas sintéticos previamente determinados. El proceso aleatorio de excitación está formado por un conjunto de cincuenta acelerogramas simulados a partir del registro SCTEW85. Para detalles sobre el proceso de simulación véase Alamilla (1997).

Los acelerogramas sintéticos se escalan para que todos ellos tengan una intensidad de *Arias* similar a la del registro SCTEW85. Los registros están digitalizados en 4502 puntos en intervalos de 0.04s, por lo que la duración de cada uno es de 180.04s. En la Tabla 6.1 se muestran las características de los acelerogramas sintéticos. En esa tabla:

- $t_{50}$  es el instante en el que se presenta el 50% de la intensidad de *Arias*.
- $T_{90}$  es el intervalo en el que se acumula el 90% de la intensidad de *Arias*.

En la Fig. 7.5 se muestra la curva media de intensidad de *Arias* más/menos una desviación estándar, correspondiente a los cincuenta acelerogramas sintéticos. En la Fig. 7.6 se muestra su *espectro* medio lineal-elástico de aceleraciones absolutas más/menos una desviación estándar para un 5% del amortiguamiento crítico.

### 7.3.2. Cálculo de los parámetros del modelo de la excitación (para el análisis con LEG)

**DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO ESTACIONARIO.** Sustituyendo las cantidades  $(a_{max})^2 = 28196.45 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ ,  $I_0 = 152350.87 \text{ cm}^2/\text{s}^3$  y  $T_e = 2\pi/3.2189 = 1.95 \text{ s}$  en la ecuación (4.49) se tiene que la duración de la parte intensa de SCTEW85 según Vanmarcke y Lai, (1980) es  $T_I = 40.17\text{s}$ . Esta cantidad se usa en la ecuación (4.47) para obtener el estimador de la *densidad espectral*  $S(\omega)$  de SCTEW85. En la Fig. 7.7 se muestra esta función. La varianza del proceso aleatorio de excitación se obtiene al resolver la ecuación (4.52). Ésta resulta  $\sigma_0^2 = 3792.38 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ .

Por medio del método *Quasi-Newton* de estimación paramétrica *no lineal*, se realiza un ajuste de la *densidad espectral*  $S(\omega)$  y el modelo  $S_{CP}(\omega)$  (ecuación 4.25), y se obtienen los siguientes valores de los parámetros del filtro de Clough y Penzien

$$\begin{array}{lll} \xi_g = 0.0220 & \omega_g = 3.101 \text{ rad/s} & e_T s_0^* = 2.45 \text{ cm}^2/\text{s}^3 \text{ (El subíndice } e \\ \xi_f = 0.0492 & \omega_f = 2.298 \text{ rad/s} & \text{ indica estacionario y T significa que } s_0 \text{ depende de } T_I) \end{array}$$

Tabla 6.1. Datos de los acelerogramas usados en la simulación

Sismo	$t_{50}(s)$	$T_{50}(s)$	$I_0 (cm^2/s^2)$	$a_{max}(cm/s^2)$	$\omega_0 (rad/s)$	$\int  A(\omega) ^2 d\omega$
SS01E	59.36	129.32	152345.32	182.15	2.974	24248.18
SS02E	62.44	82.16	152355.93	161.81	3.213	24248.49
SS03E	44.72	143.88	152351.57	128.30	3.220	24254.13
SS04E	64.68	75.20	152347.63	168.77	2.986	24246.92
SS05E	59.56	77.32	152349.80	184.57	3.218	24249.01
SS06E	59.20	60.76	152356.03	161.17	3.154	24248.42
SS07E	60.92	63.04	152340.35	168.42	3.114	24245.88
SS08E	62.88	74.36	152345.50	163.43	3.027	24246.78
SS09E	44.20	117.64	152342.03	136.01	3.229	24246.49
SS10E	62.84	127.76	152338.67	216.74	2.993	24247.04
SS11E	58.80	41.04	152344.86	205.93	2.956	24246.51
SS12E	57.92	126.68	152352.08	165.88	3.423	24251.44
SS13E	56.28	67.64	152355.00	197.32	3.263	24248.68
SS14E	64.52	100.76	152346.92	175.39	3.105	24248.97
SS15E	60.20	118.60	152341.64	202.08	3.236	24249.10
SS16E	62.36	136.88	152342.40	161.66	3.298	24246.31
SS17E	65.40	128.80	152358.96	144.63	3.285	24249.11
SS18E	56.88	85.60	152339.29	166.41	3.041	24247.51
SS19E	57.92	144.04	152347.27	160.37	3.253	24248.42
SS20E	58.60	91.84	152358.28	177.24	3.132	24249.31
SS21E	54.32	116.48	152350.55	126.08	3.125	24247.35
SS22E	61.16	40.84	152352.28	146.31	3.118	24247.95
SS23E	62.04	131.64	152349.90	177.19	3.053	24247.28
SS24E	60.80	73.56	152352.33	178.93	3.105	24247.76
SS25E	58.96	96.04	152339.35	166.43	3.076	24246.33
SS26E	63.36	107.96	152352.59	156.87	3.218	24247.93
SS27E	62.12	81.48	152357.61	167.37	3.066	24249.70
SS28E	55.80	50.64	152361.38	156.25	3.237	24249.63
SS29E	58.76	130.24	152345.75	155.06	3.052	24248.18
SS30E	58.68	78.64	152346.16	178.13	3.148	24251.46
SS31E	62.96	122.96	152346.55	156.26	3.093	24258.29
SS32E	63.44	111.00	152346.47	151.11	3.189	24247.09
SS33E	61.04	93.68	152347.60	127.84	3.023	24249.36
SS34E	53.48	95.08	152350.49	167.68	3.145	24249.05
SS35E	55.40	91.56	152342.24	152.90	3.155	24246.82
SS36E	63.72	49.60	152341.91	144.57	3.076	24246.30
SS37E	57.92	68.44	152347.05	138.28	3.087	24247.20
SS38E	62.96	88.24	152350.80	171.55	3.077	24247.44
SS39E	65.28	123.40	152354.90	136.23	3.367	24248.06
SS40E	55.36	115.12	152346.60	156.72	3.144	24246.89
SS41E	64.20	120.96	152344.54	142.69	3.353	24250.65
SS42E	61.56	97.76	152354.96	142.18	3.196	24248.17
SS43E	64.96	141.84	152356.08	146.61	3.209	24249.39
SS44E	56.44	78.04	152344.25	152.27	3.133	24246.92
SS45E	44.28	91.64	152342.27	131.24	3.091	24246.11
SS46E	63.48	133.80	152349.58	152.82	3.279	24248.29
SS47E	61.28	109.08	152356.52	189.89	3.254	24248.43
SS48E	62.64	122.04	152360.02	214.01	3.218	24248.87
SS49E	57.44	120.24	152343.67	142.33	3.051	24246.25
SS50E	55.08	72.44	152353.19	142.50	3.137	24247.77

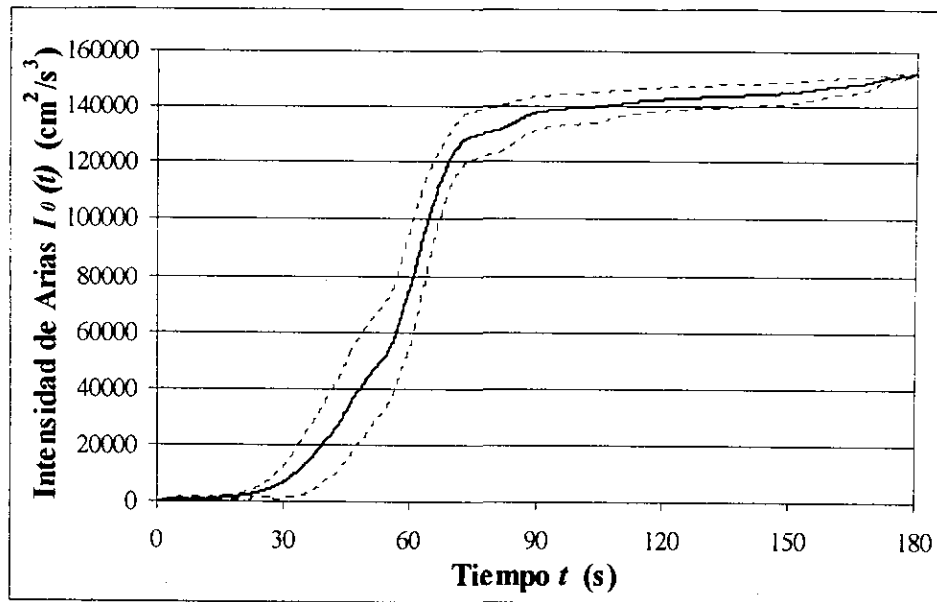


Figura 7.5 Curva media de intensidades de Arias más/menos una desviación estándar de los cincuenta sismos simulados.

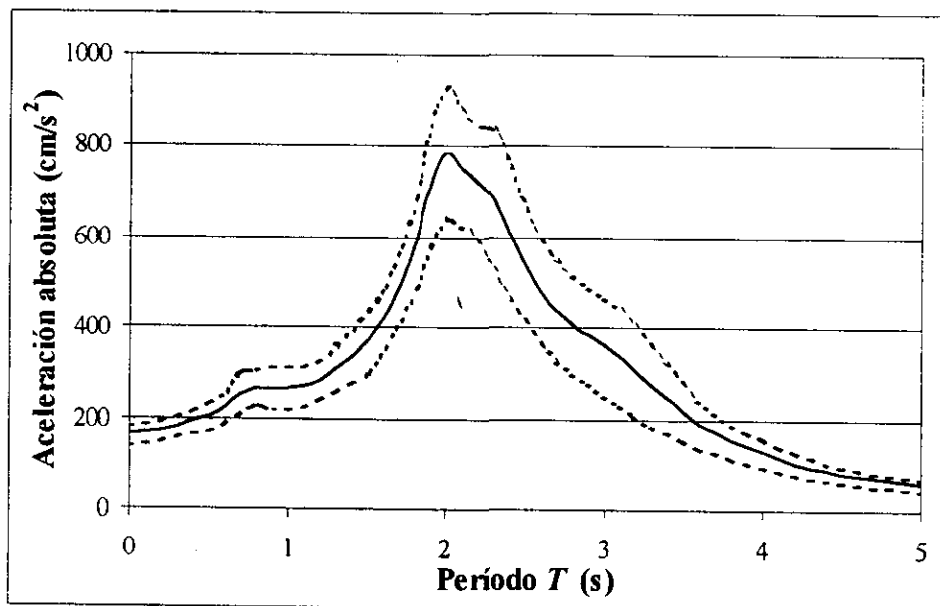


Figura 7.6 Espectro medio lineal-elástico ( $\xi=0.05$ ) de aceleraciones absolutas más/menos una desviación estándar de los cincuenta sismos simulados.

Sustituyendo estas cantidades en la ecuación (4.53) se obtiene  ${}_{eT}\sigma_{CP}^*{}^2 = 3370.31 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ . Como se mencionó en la sección 4.5.2,  ${}_{eT}\sigma_{CP}^*{}^2$  es diferente a  $\sigma_0^2$ . Usando los valores anteriores de  $\xi_g$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_f$ , y  $\omega_f$  junto con  $\sigma_0^2=3792.38 \text{ cm}^2/\text{s}^4$  en la ecuación (4.54) se obtiene:

$${}_{eT}S_0 = 2.76 \text{ cm}^2/\text{s}^3$$

En la Fig. 7.7 se muestra la función  $S_{CP}(\omega)$ . El ajuste de los espectros  $S(\omega)$  y  $S_{CP}(\omega)$  se realizó con el programa *STATISTICA* v5.1 (StatSoft, Inc., 1997). El método *Quasi-Newton* presenta muy buen comportamiento en muchas aplicaciones (ver también Bard, 1974).

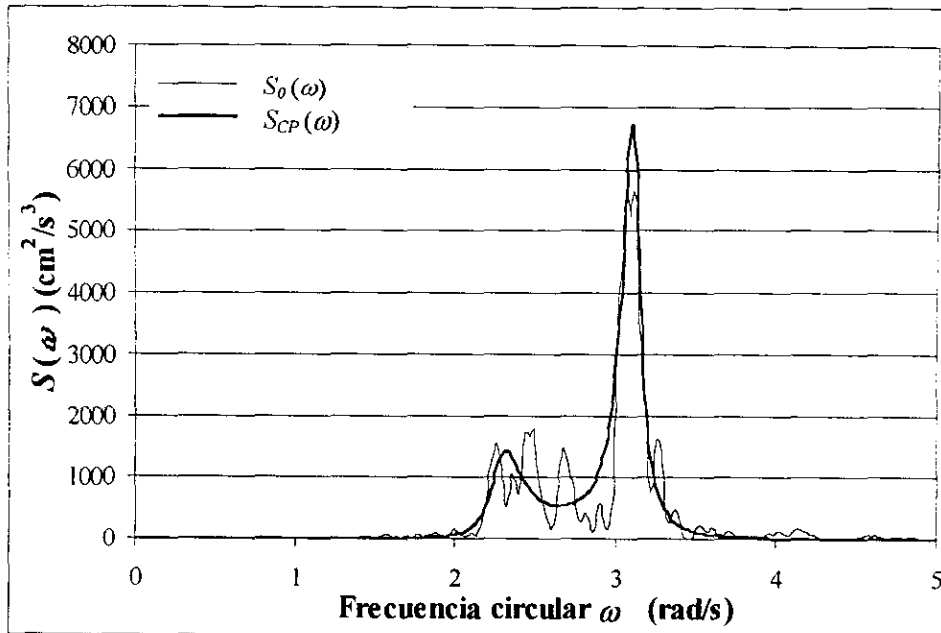


Figura 7.7 Densidad espectral bilateral de SCTEW85 ( $S_0(\omega)$ ) y de su modelo estacionario ( $S_{CP}(\omega)$ ).

**DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO NO ESTACIONARIO.** El modelo *no estacionario* usado en esta tesis es el descrito por la ecuación (4.31). Como se comentó en la sección 4.5.3, para que la varianza de dicho modelo sea controlada exclusivamente por la función moduladora  $c(t)$ , conviene elegir como modelo *estacionario*  $\beta(t)$  a uno que tenga varianza unitaria. Si se selecciona  $\beta(t)$  como el ruido blanco filtrado con *densidad espectral*  $S_{CP}(\omega)$  dada por la ecuación (4.25), entonces la intensidad del ruido blanco para el modelo *no estacionario* ( ${}_{ne}S_0$ ) se calcula sustituyendo en la ecuación (4.54),  $\sigma_0^2 = 1.0 \text{ cm}^2/\text{s}^4$  y los valores de  $\xi_g$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_f$ , y  $\omega_f$  calculados con anterioridad. Se obtiene:

$${}_{ne}S_0 = 7.2776 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}^3 \quad (\text{el subíndice } ne \text{ indica } no \text{ estacionario})$$

La función moduladora  $c(t)$  que se usa en este trabajo fue propuesta por Yeh y Wen (1989)

$$c^2(t) = A \frac{t^B}{D + t^E} e^{-Ct} \quad (7.1)$$

Como se indica en la sección 4.5.3, los valores de los parámetros de esta función se determinan a partir de un ajuste de  $c^2(t)$  y la función esperanza de la energía de la excitación sísmica. Puesto que el acelerograma representativo del proceso aleatorio de excitación es el registro SCTEW85, esta función es igual a la función de intensidad de Arias de dicho registro, es decir

$$E[e(t)] = I_0(t) = \int_0^t c^2(\tau) d\tau \quad (7.2)$$

Conviene realizar el ajuste con  $\int_0^t c^2(\tau) d\tau$  y no con  $c^2(t)$ .

Para simular los acelerogramas sintéticos, Alamilla (1997) usó la ecuación (7.1) con

$$A = 5.8161 \times 10^{48}, \quad B = -0.33885, \quad C = -0.12583, \quad D = 2.166 \times 10^{47} \quad \text{y} \quad E = 26.461$$

Para ser congruente con el proceso de excitación usado en el estudio de simulación, se adoptan los mismos valores de los parámetros A, B, C, D y E. Según Alamilla (1997) estos parámetros se determinaron por medio de un ajuste por mínimos cuadrados *no lineales* usando el método de Gauss (Bard, 1974). En la Fig. 7.8 se muestra la variación en el tiempo de las funciones  $\int c^2(t)dt$ , e  $I_0(t)$ .

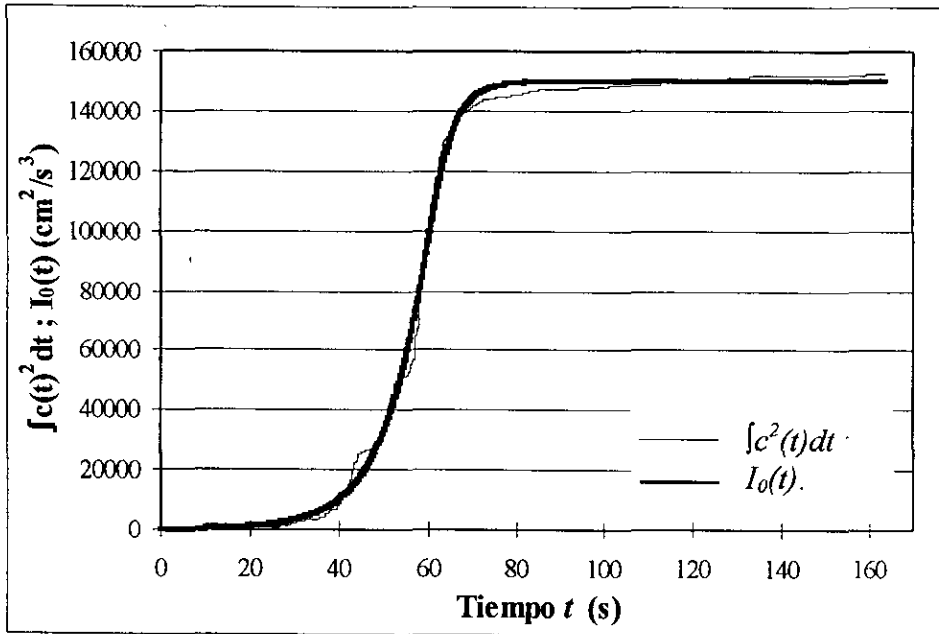


Figura 7.8 Integral de la función moduladora de la intensidad del proceso *no estacionario*.

La varianza instantánea del modelo *no estacionario* del proceso de excitación es:

$${}_{ne}\sigma_{CP}^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ne}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} c^2(t) S_{CP}(\omega) d\omega = c^2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} S_{CP}(\omega) d\omega = c^2(t) \quad (7.3)$$

ya que el proceso *estacionario* que se modula tiene varianza unitaria. El valor máximo de  ${}_{ne}\sigma_{CP}^2(t)$  ocurre en el instante  $t = 59.22s$  y es igual a  $({}_{ne}\sigma_{CP}^2)_{\max} = 8483.15 \text{ cm}^2/s^4$ . En la Fig. 7.9 se muestra la varianza instantánea del proceso *no estacionario* y la de SCTEW85.

## 7.4 RESULTADOS

En las dos secciones anteriores se han establecido los datos suficientes para plantear las ecuaciones de movimiento (5.1), (5.6) y (6.5). Estas ecuaciones se resuelven de la manera descrita en los capítulos 5 y 6. Las cantidades en las que se basa el criterio de calibración son la desviación estándar instantánea del desplazamiento y de la velocidad así como la esperanza de la rapidez de cambio de la energía disipada de un sistema *UGL no lineal histerético*. Cuando se usa el método *LEG*, estas cantidades se obtienen a partir de la matriz de covarianza (ecuación 4.36). Cuando se emplea la simulación de Monte Carlo esas cantidades se determinan con las ecuaciones (6.1) y (6.2).

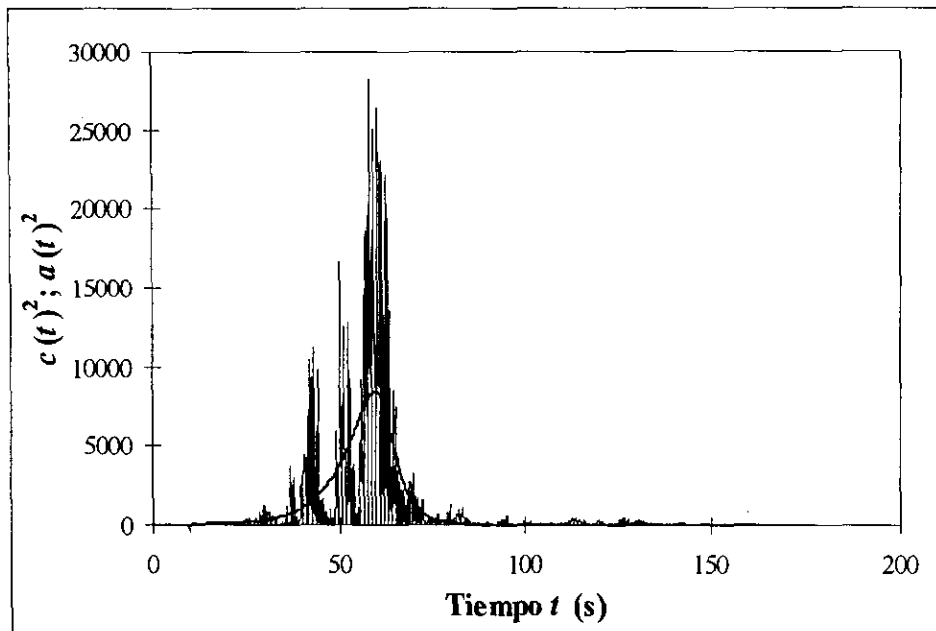


Figura 7.9 Varianza instantánea del modelo *no estacionario* de la excitación y de SCTEW85.

En el caso *LEG* con excitación *estacionaria* se obtiene un sólo valor de respuesta. En los casos de simulación y *LEG* con excitación *no estacionaria* se obtiene una historia de respuesta. De cada historia obtenida a partir del análisis de cada sistema *UGL* se toman los valores máximos de las cantidades mencionados con anterioridad y se grafican en función del periodo de vibración del sistema *UGL* analizado. En la Figs. 7.10 y 7.11 se muestran algunas historias de respuesta, correspondientes al caso *IDD* con niveles de ductilidad  $\eta=1$  y  $\eta=4$  respectivamente.

Se calculan errores relativos entre la respuesta determinada por *LEG* y la respuesta determinada por simulación de Monte Carlo. El cálculo se hace de la siguiente forma

$$\text{error relativo}(\%) = \frac{\text{respuesta obtenida con simulación} - \text{respuesta obtenida con LEG}}{\text{respuesta obtenida con simulación}} \times 100 \quad (7.4)$$

Obsérvese que un valor positivo del error relativo significa que la *LEG* subestima la respuesta y un valor negativo implica que la *LEG* sobrestima la respuesta.

Antes de presentar los resultados para efectuar la calibración, se realiza un análisis preliminar de la respuesta de un sistema con propiedades correspondientes al caso *IDD* con nivel de ductilidad  $\eta=2$ . En la Fig. 7.12 se muestra la *máxima desviación estándar de la velocidad* del sistema obtenida con simulación de Monte Carlo, y con *LEG* considerando los modelos *estacionario* y *no estacionario* de la excitación. Sin considerar por ahora los resultados de la simulación, obsérvese que la curva *estacionaria* se encuentra por debajo de la *no estacionaria*, lo cual es extraño ya que teóricamente la respuesta *estacionaria* es una cota superior para cualquier cantidad de respuesta. Esto se debe a que la varianza del proceso *estacionario*,  $_{eT}\sigma_{CP}^2 = 3792.38 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ , es menor que la varianza máxima del proceso *no estacionario*  $(_{ne}\sigma_{CP}^2)_{\max} = 8483.15 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ . Es decir, se están comparando resultados obtenidos con diferentes niveles de excitación. La varianza del modelo estacionario depende de la duración de la parte intensa ( $T$ ) del registro  $a(t)$  (véase ecuación 4.52); esto significa entonces, que la ecuación (4.49) sobrestima, en este estudio, dicha duración. Puesto que la varianza del modelo

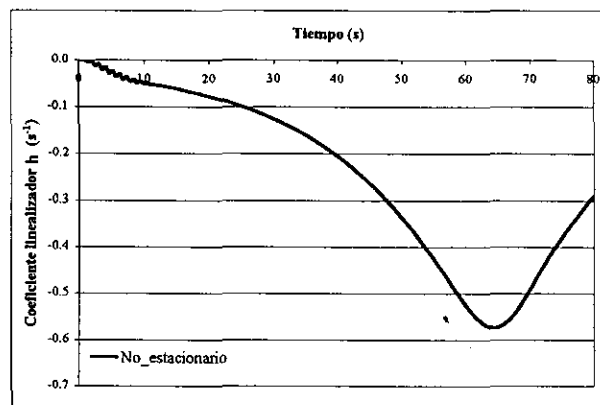
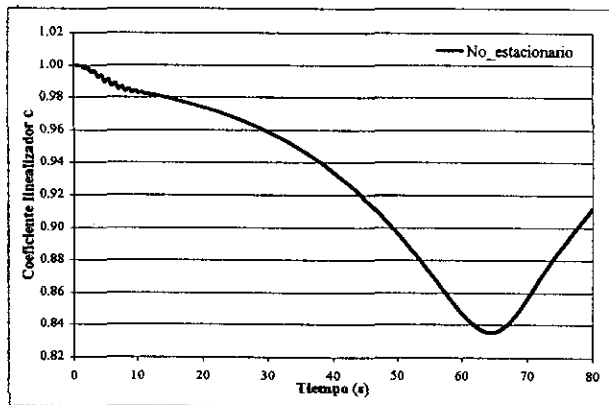
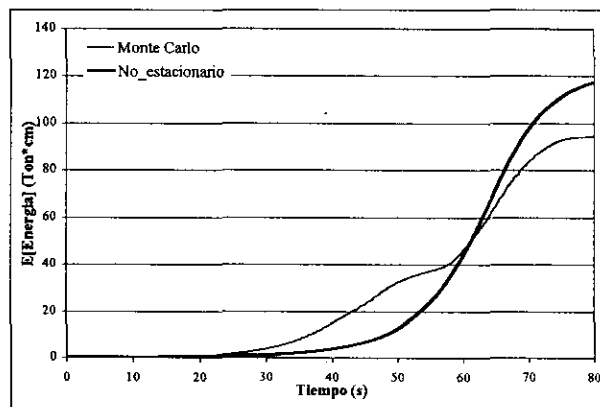
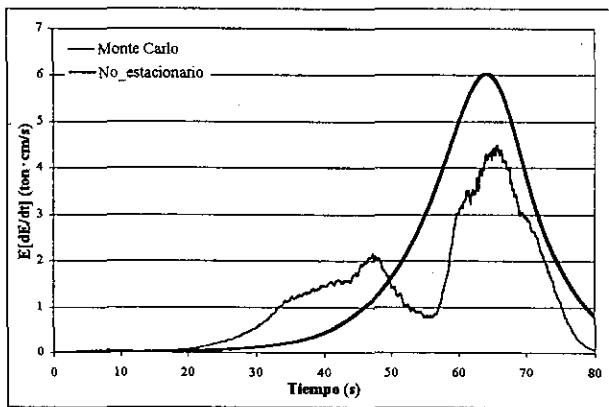
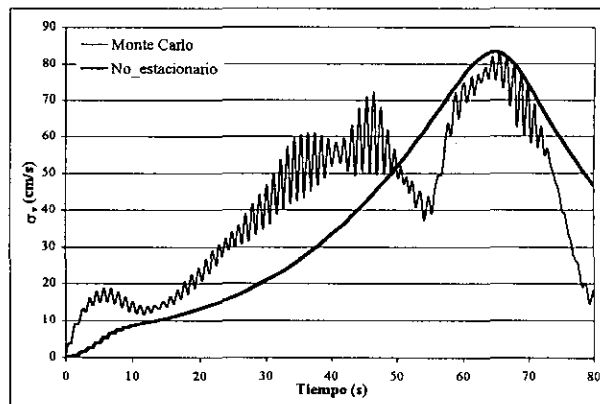
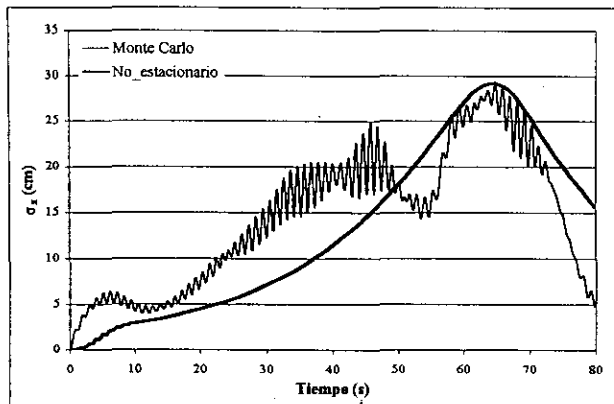


Figura 7.10 Historias de respuesta para el caso IDD con  $\eta=1$ .  
 Desviación estándar del desplazamiento ( $\sigma_x$ ) y velocidad ( $\sigma_v$ ), esperanza de la rapidez de cambio de la energía ( $E[dE/dt]$ ), esperanza de la energía ( $E[Energia]$ ) y coeficientes linealizadores ( $c$  y  $h$ ).

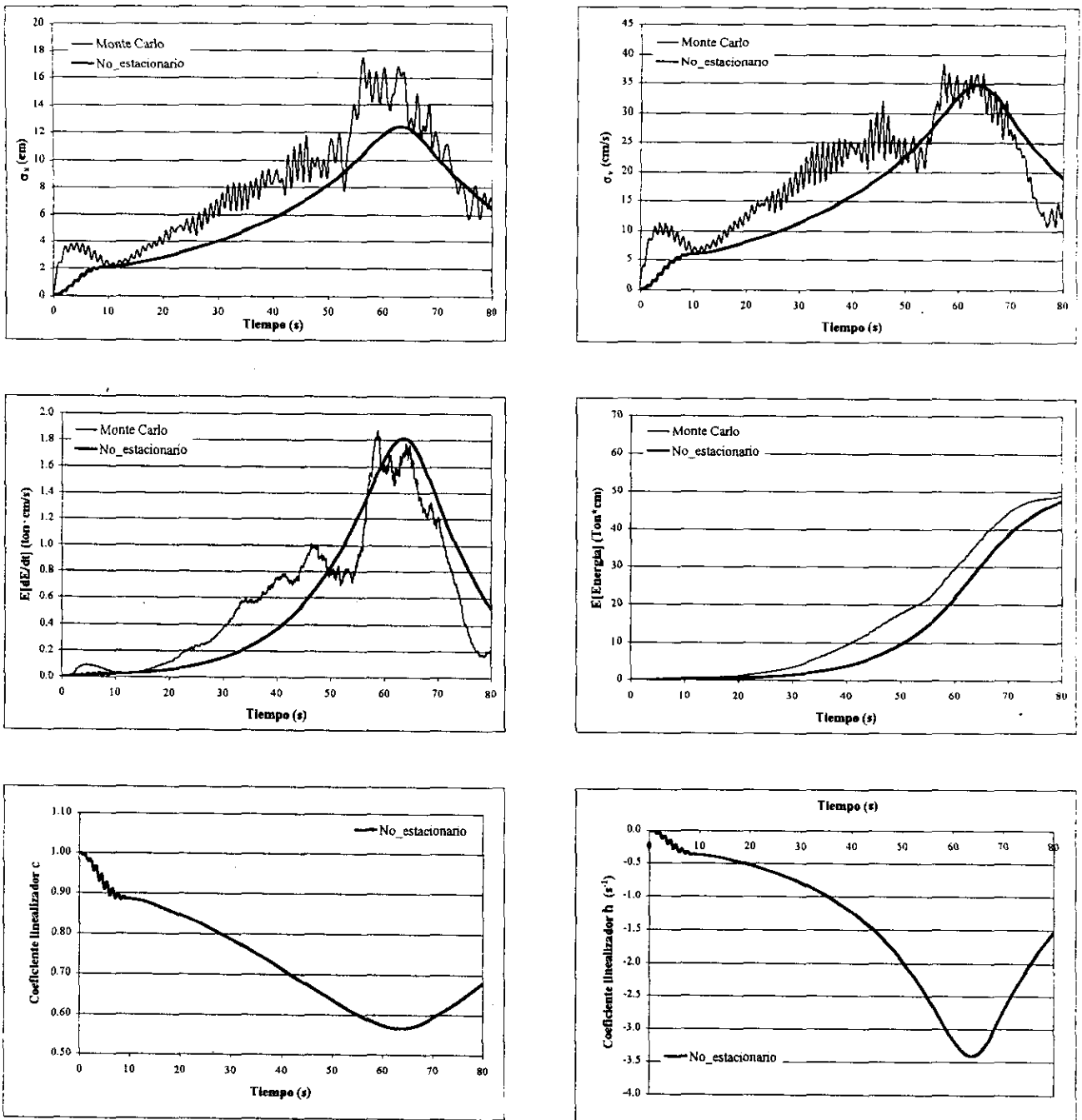


Figura 7.11 Historias de respuesta para el caso IDD con  $\eta=4$   
 Desviación estándar del desplazamiento ( $\sigma_x$ ) y velocidad ( $\sigma_v$ ), esperanza de la rapidez de cambio de la energía ( $E[dE/dt]$ ), esperanza de la energía ( $E[Energía]$ ) y coeficientes linealizadores ( $c$  y  $h$ ).



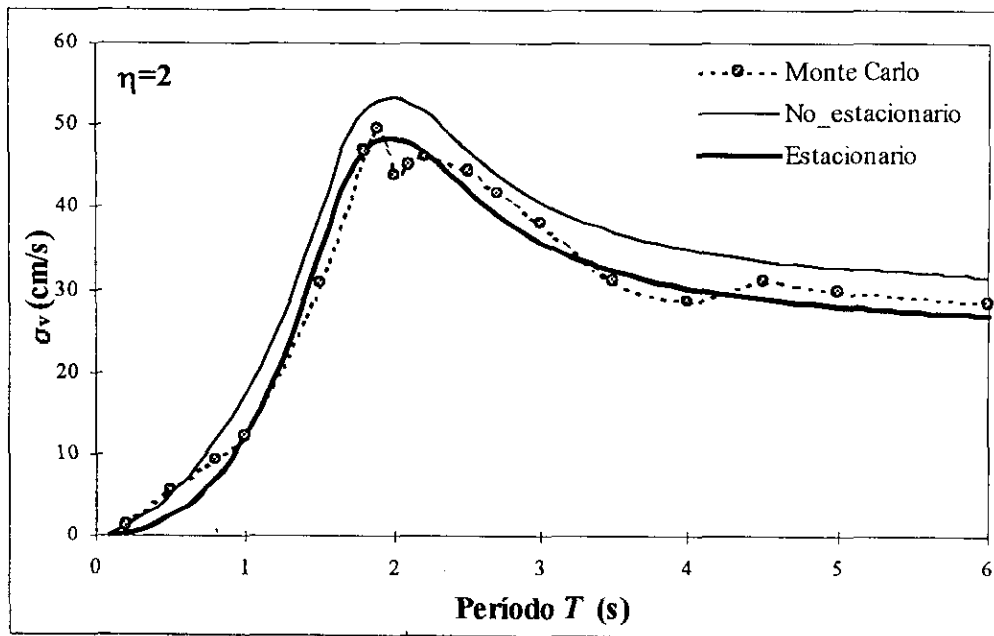


Figura 7.12 Máxima desviación estándar de la velocidad.

no estacionario es función directa de la energía del registro  $\alpha(t)$ , se tomará como varianza del proceso estacionario a la varianza máxima del no estacionario. La cantidad anterior  $e_T s_0$  se reemplaza por la que se obtiene al sustituir en la ecuación (4.54) los valores de  $\xi_g$ ,  $\omega_g$ ,  $\xi_f$ , y  $\omega_f$  calculados en la página 64, y  $\sigma_0^2 = (ne\sigma_{CP}^2)_{\max} = 8483.15 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ . Se obtiene:

$$e_V s_0 = 6.1737 \text{ cm}^2/\text{s}^3 \quad (\text{el subíndice } e \text{ indica estacionario y el V significa que } s_0 \text{ depende de } (ne\sigma_{CP}^2)_{\max})$$

La duración de la parte intensa del registro  $\alpha(t)$  asociada a la varianza considerada se calcula con la ecuación (4.52)

$$\sigma_0^2 = \frac{2\pi}{T_I} (24247.42) = 8483.15 \text{ cm}^2/\text{s}^4 \tag{7.5}$$

Al resolver se obtiene  $T_I = 17.96 \text{ s}$ . Estos últimos datos son los definitivos para el caso estacionario. En ellos están basadas las gráficas siguientes, quienes se describen en la sección 7.5.

**Caso IA2.** Los resultados para este caso se presentan en las Figs. 7.13 a 7.17 para un nivel de ductilidad  $\eta=1$ , y en las Figs. 7.18 a 7.22 para  $\eta=4$ .

**Caso IA6.** Los resultados para este caso se presentan en las Figs. 7.23 a 7.27 para  $\eta=1$ , y en las Figs. 7.28 a 7.32 para  $\eta=4$ .

**Caso IDE.** Los resultados para este caso se presentan en las Figs. 7.33 a 7.36.

**Caso IDD.** Los resultados para este caso se presentan en las Figs. 7.37 a 7.41.

En el resto de la tesis, se omite por sencillez el adjetivo "máxima" de los términos "máxima desviación estándar del desplazamiento", "máxima desviación estándar de la velocidad" y "máxima esperanza de la rapidez de cambio de la energía".

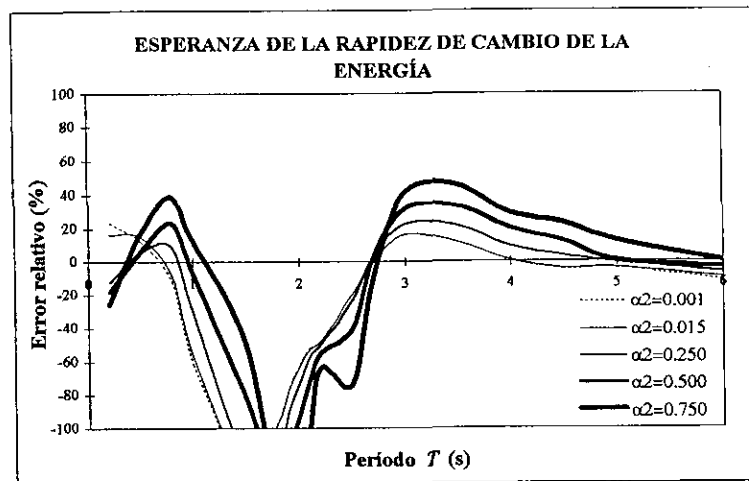
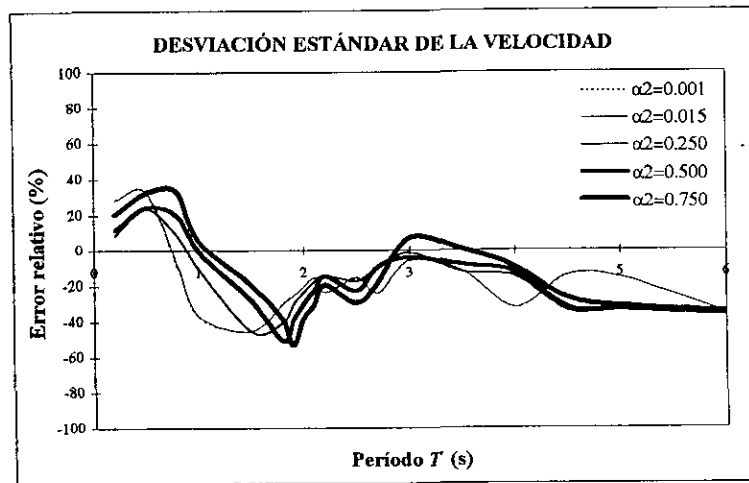
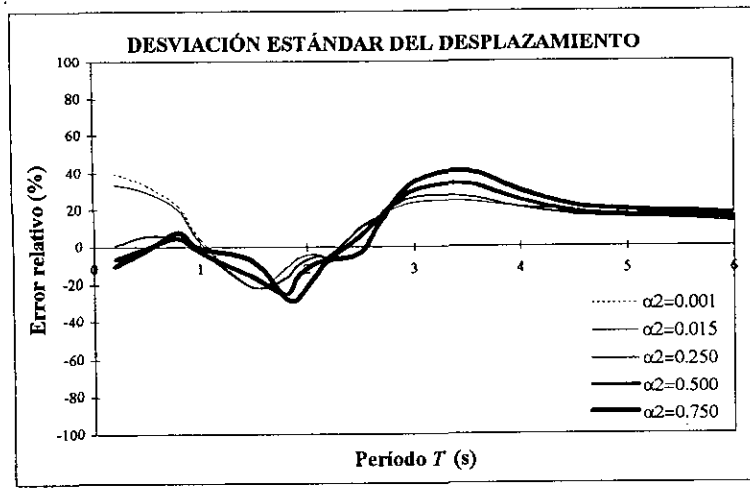


Figura 7.13 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IA2 estacionario con  $\eta=1$ .

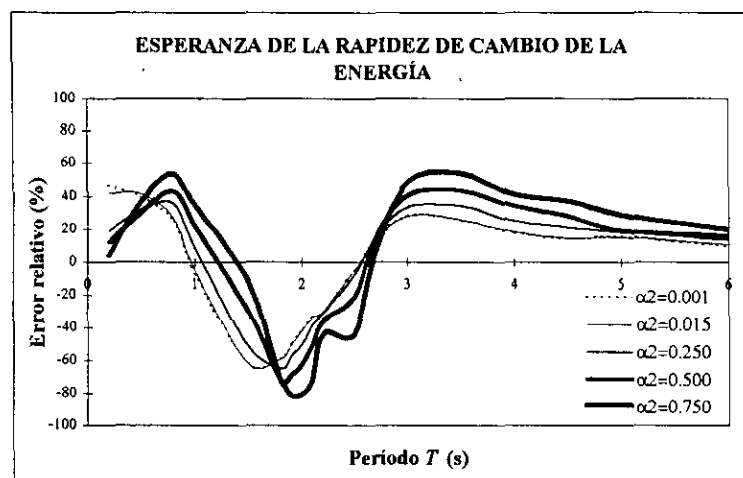
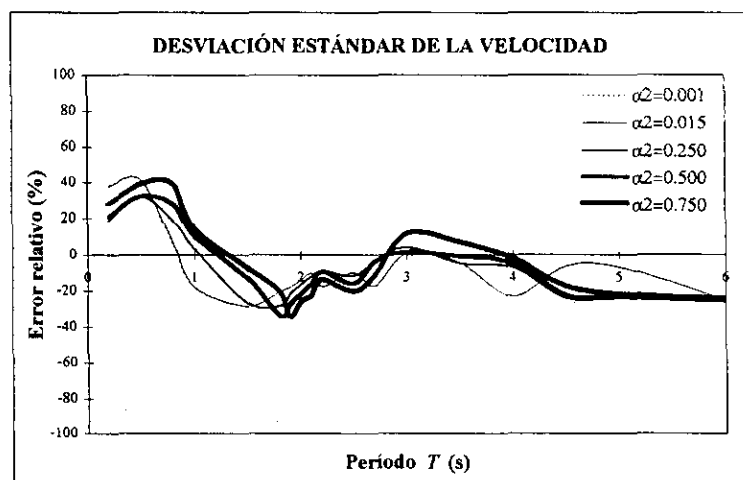
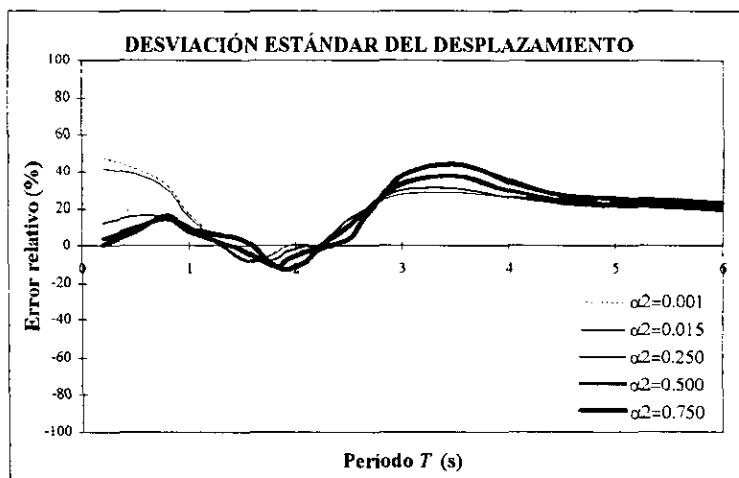


Figura 7.14 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía.  
Caso *IA2* no\_estacionario con  $\eta=1$ .

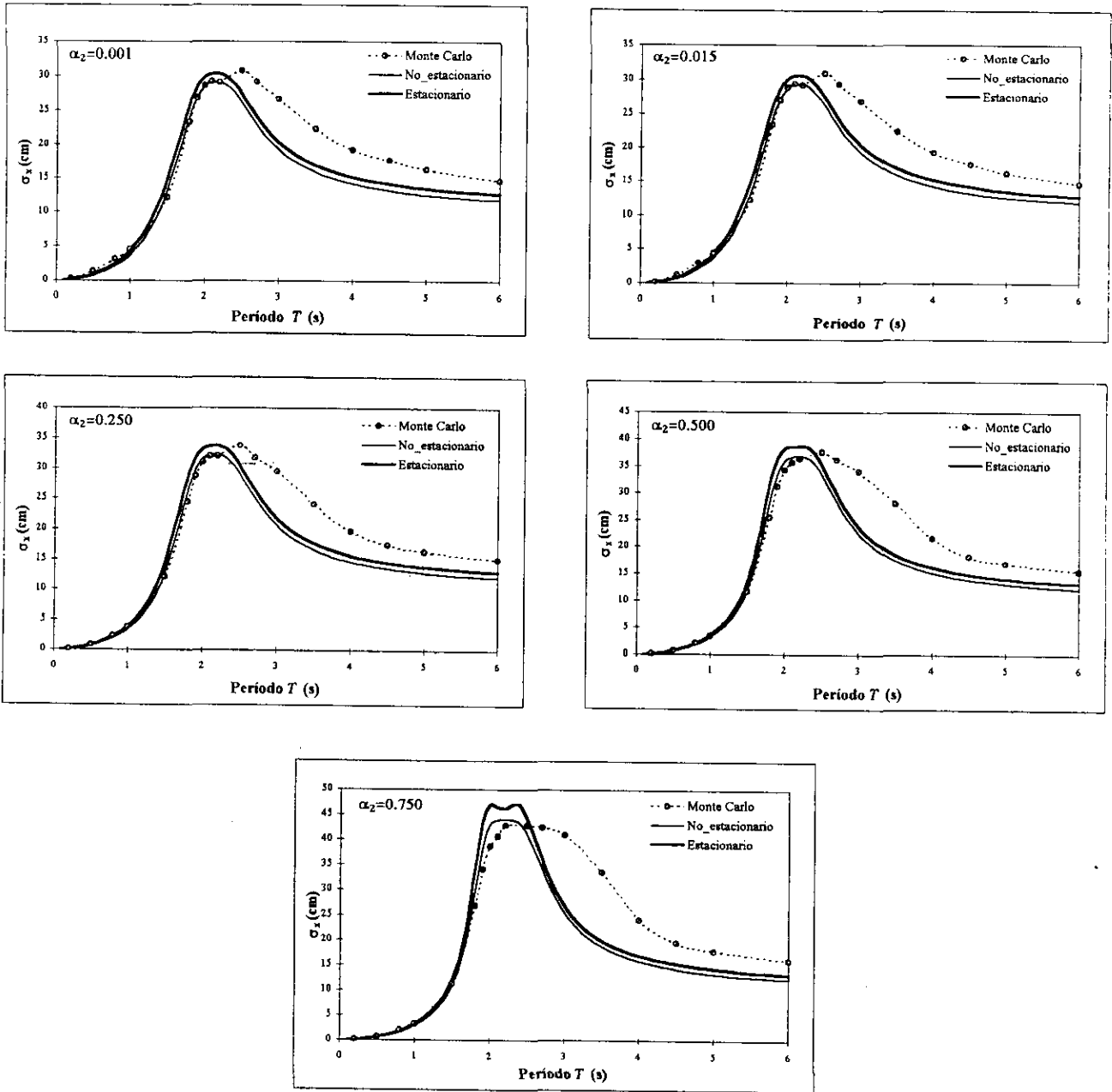


Figura 7.15 Desviación estándar del desplazamiento. Caso L42 con  $\eta=1$ .

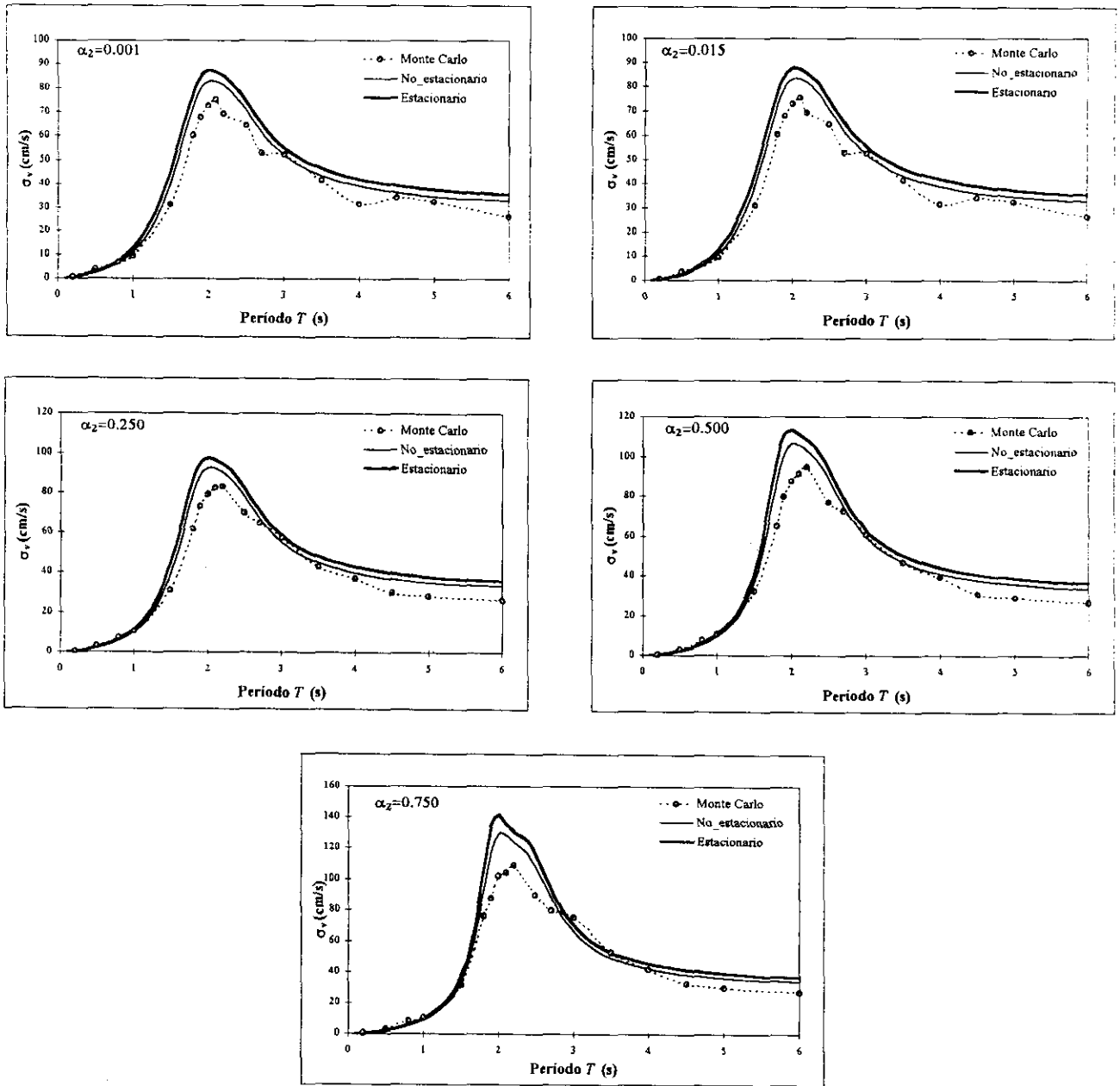


Figura 7.16 Desviación estándar de la velocidad. Caso IA2 con  $\eta=1$ .

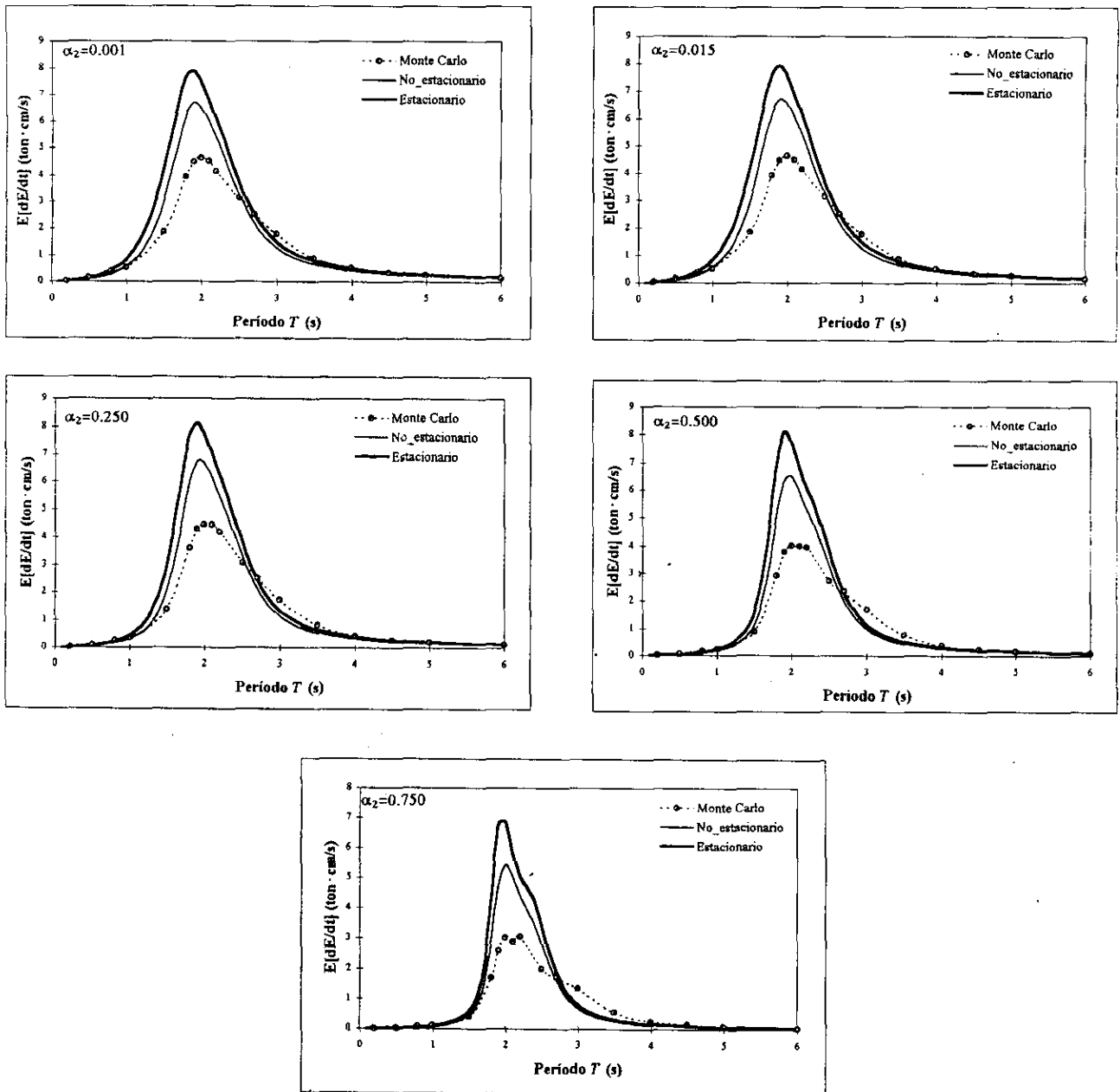


Figura 7.17 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso L42 con  $\eta=1$ .

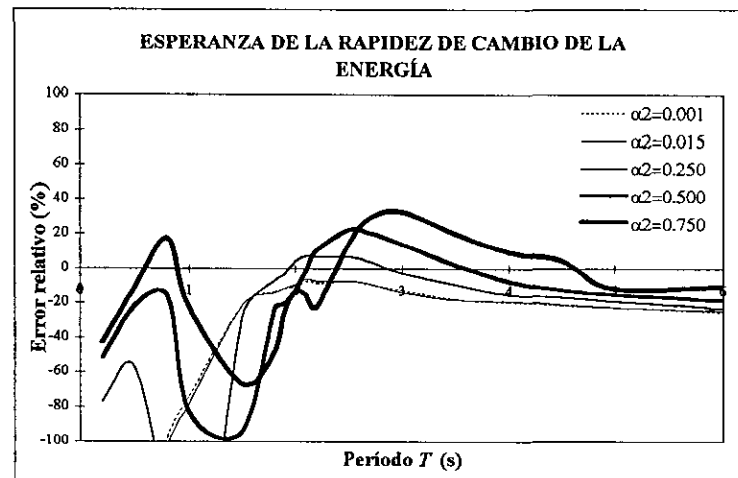
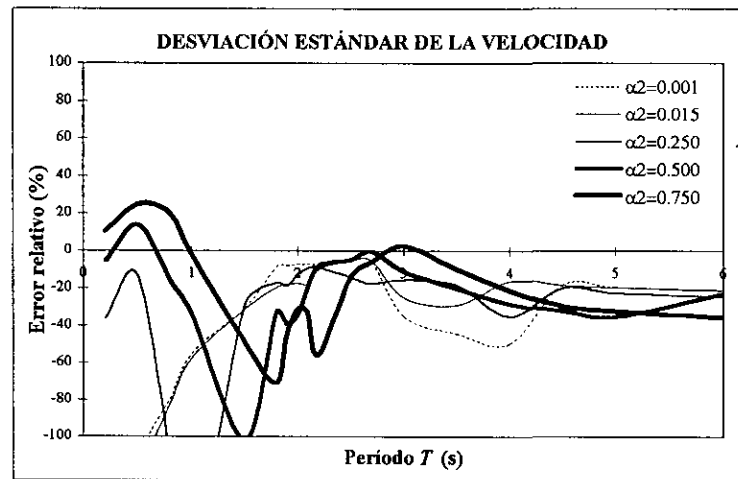
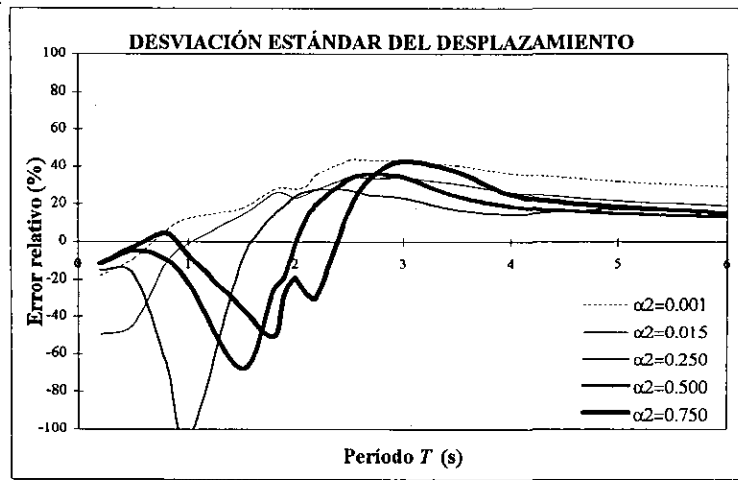


Figura 7.18 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso LA2 estacionario con  $\eta=4$ .

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

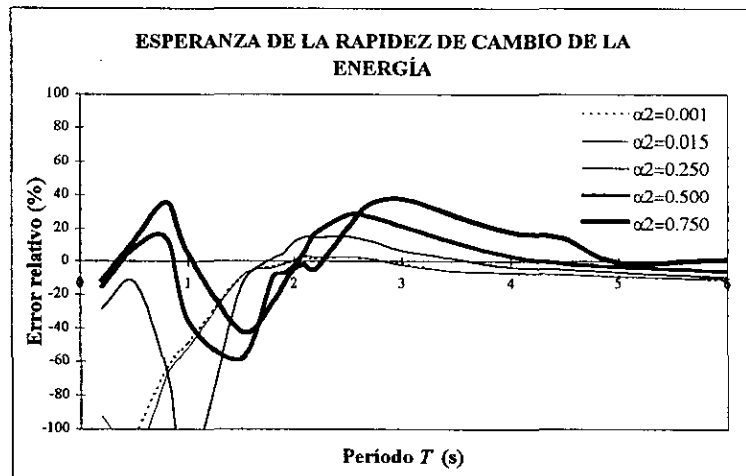
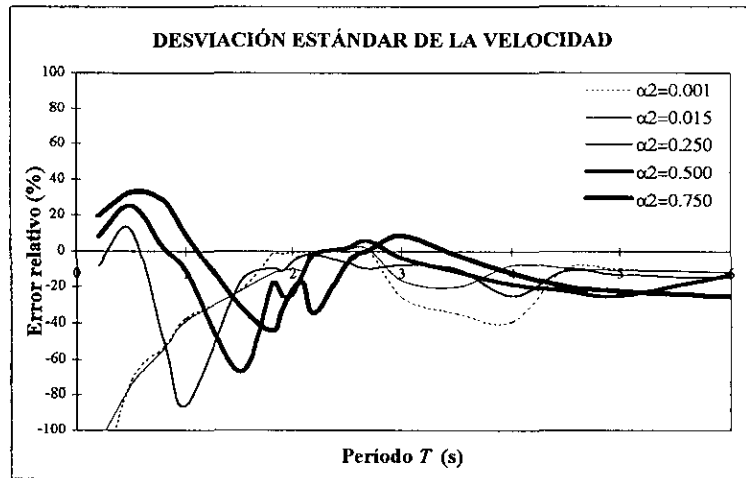
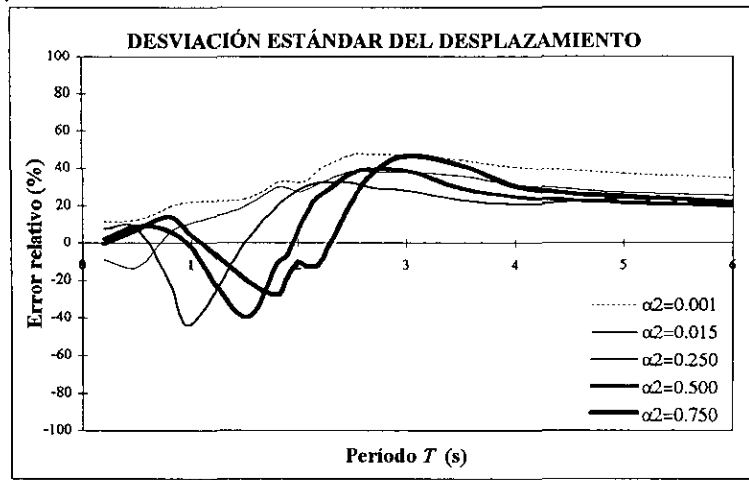


Figura 7.19 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IA2 no estacionario con  $\eta=4$ .



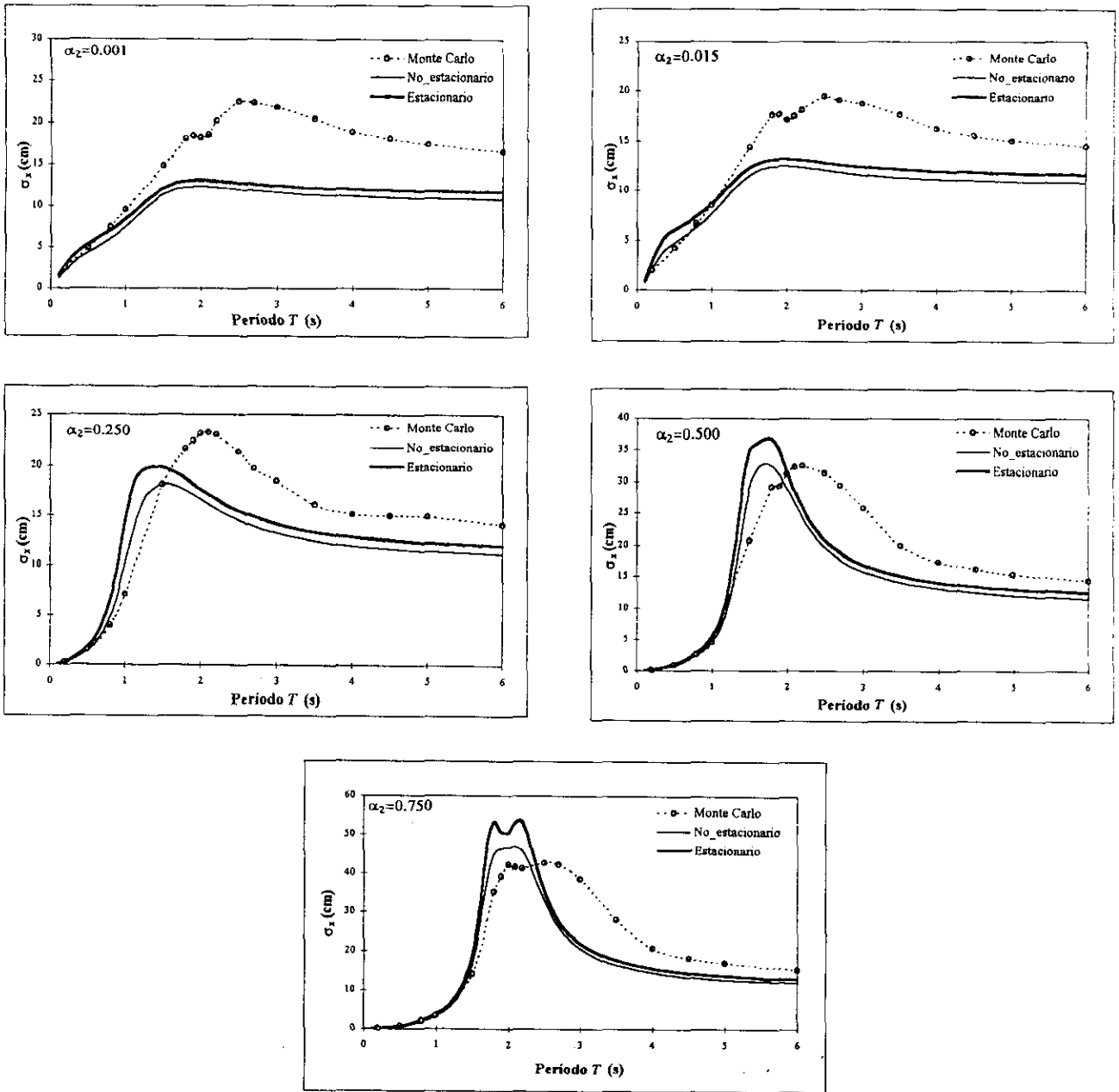


Figura 7.20 Desviación estándar del desplazamiento. Caso L42 con  $\eta=4$ .

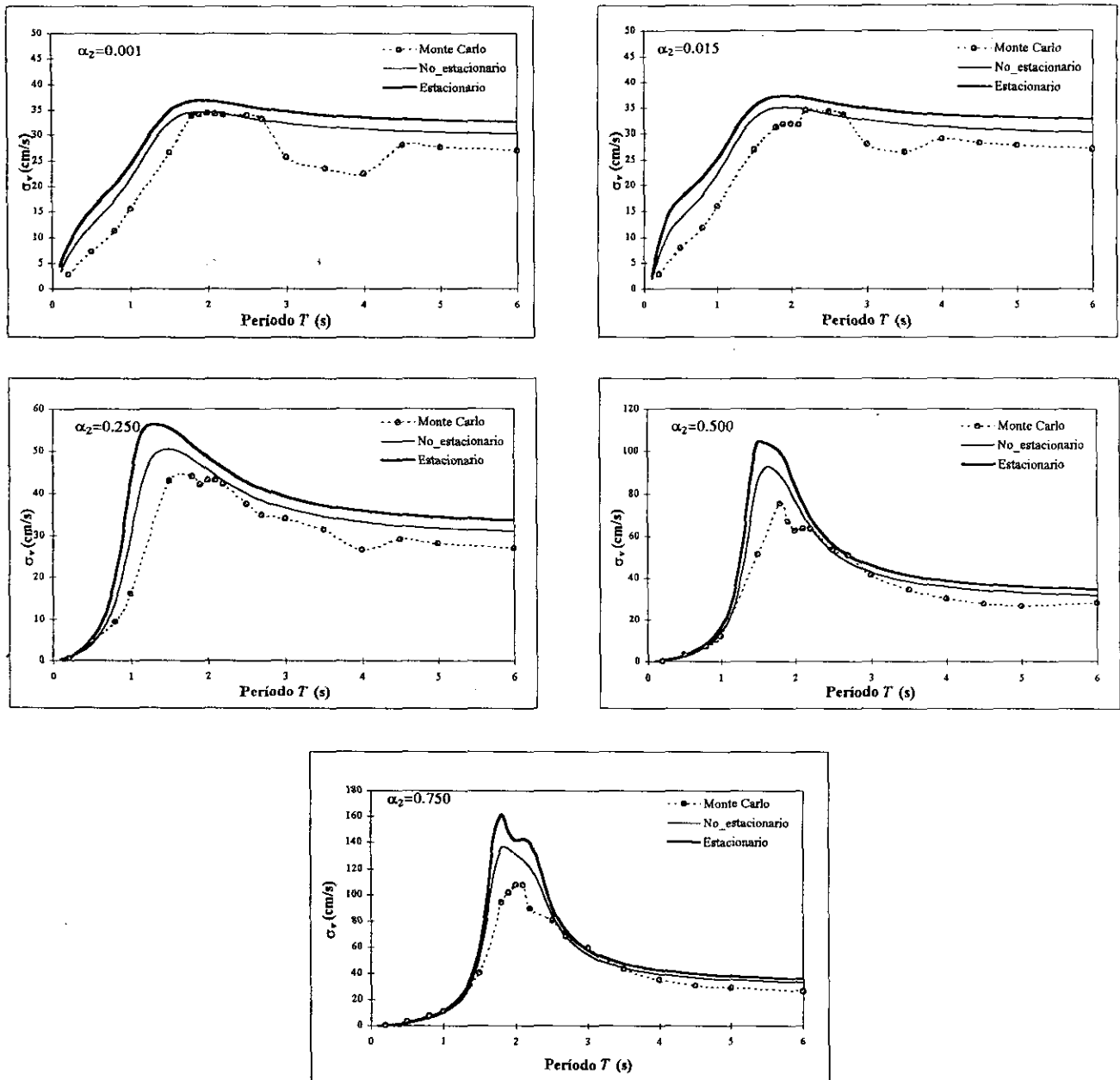


Figura 7.21 Desviación estándar de la velocidad. Caso IA2 con  $\eta=4$ .

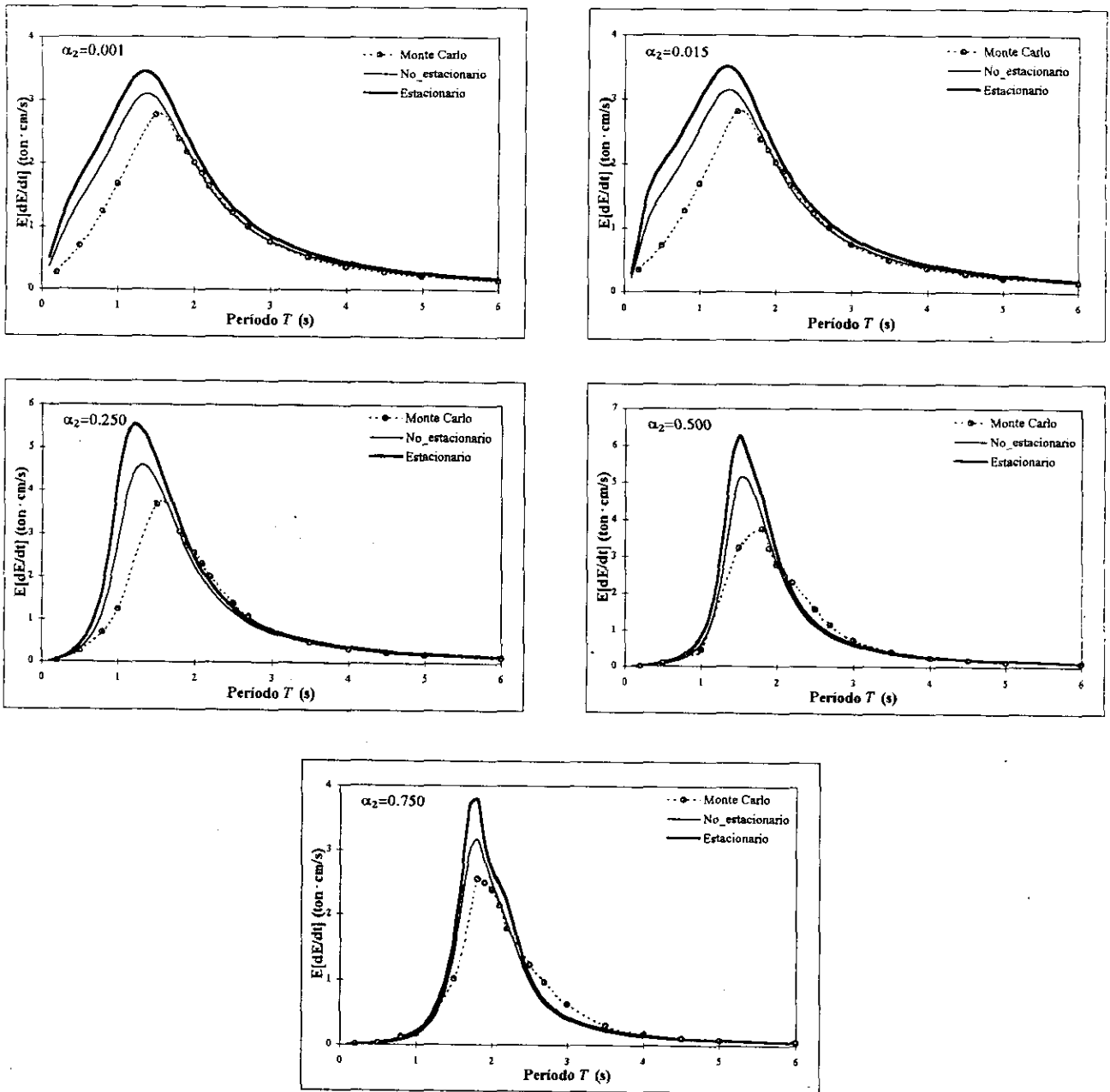


Figura 7.22 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso I42 con  $\eta=4$ .

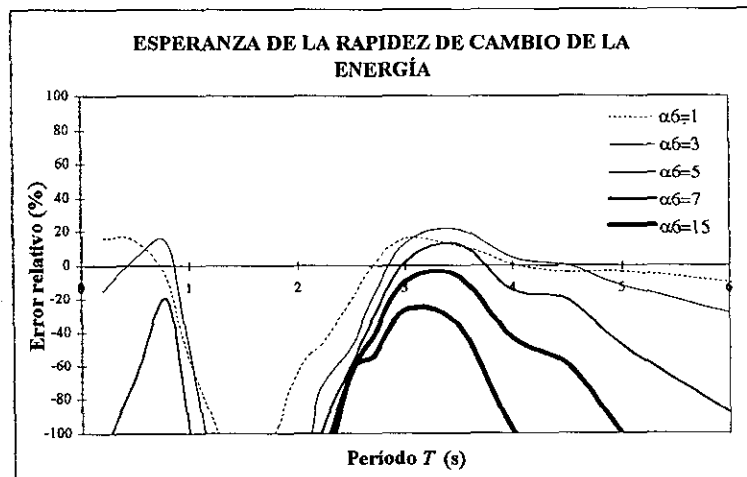
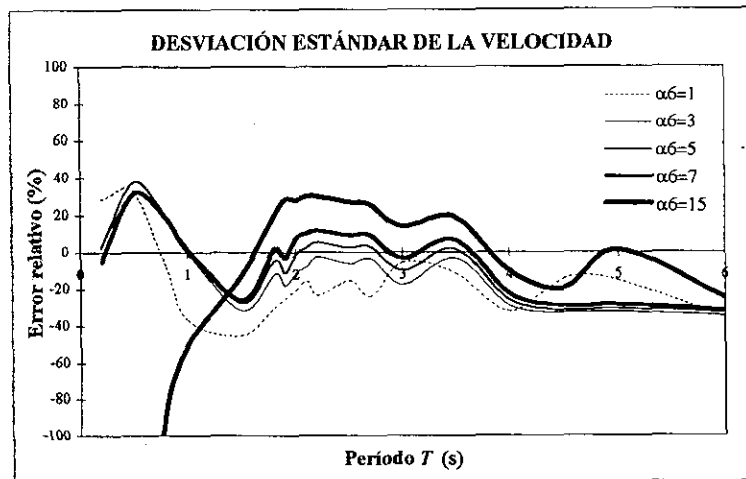
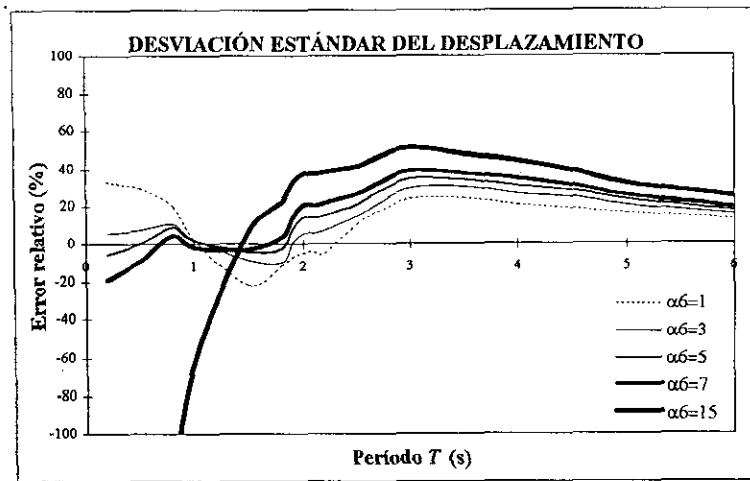


Figura 7.23 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IA6 estacionario con  $\eta=1$ .

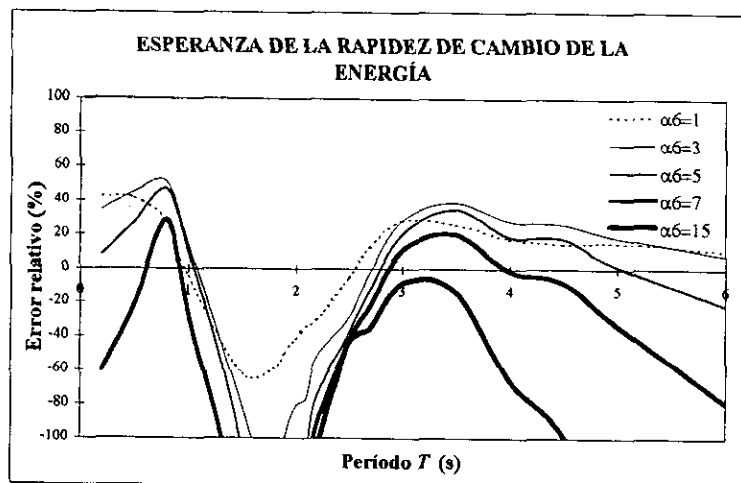
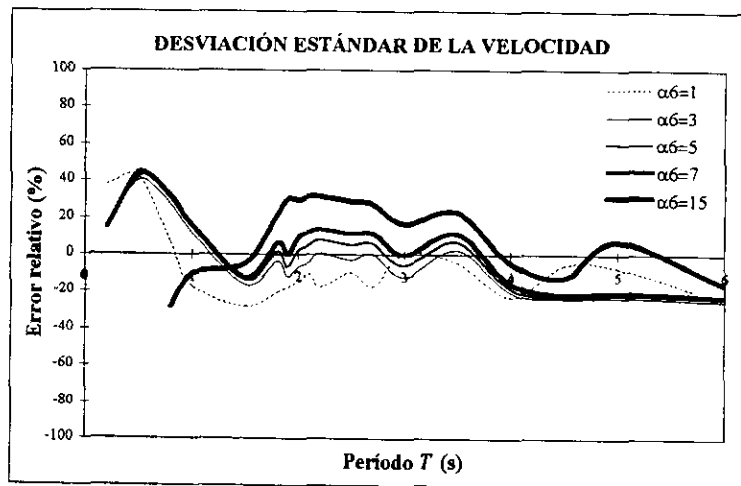
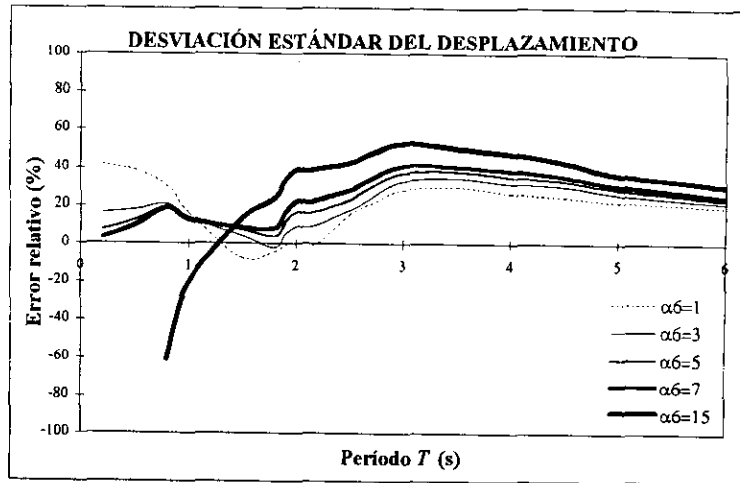


Figura 7.24 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso  $I_{A6}$  no\_estacionario con  $\eta=1$ .

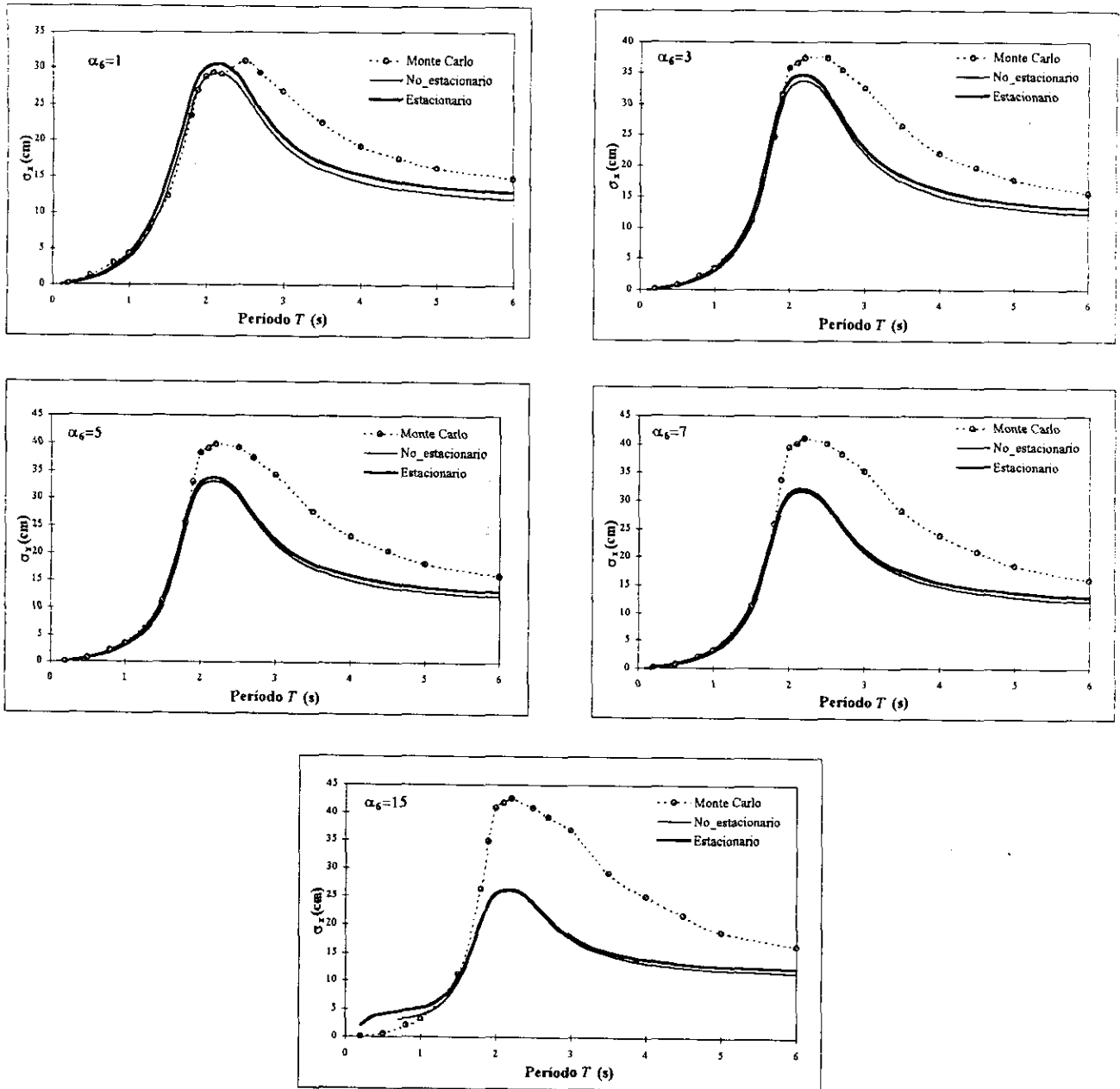


Figura 7.25 Desviación estándar del desplazamiento. Caso LA6 con  $\eta=1$ .

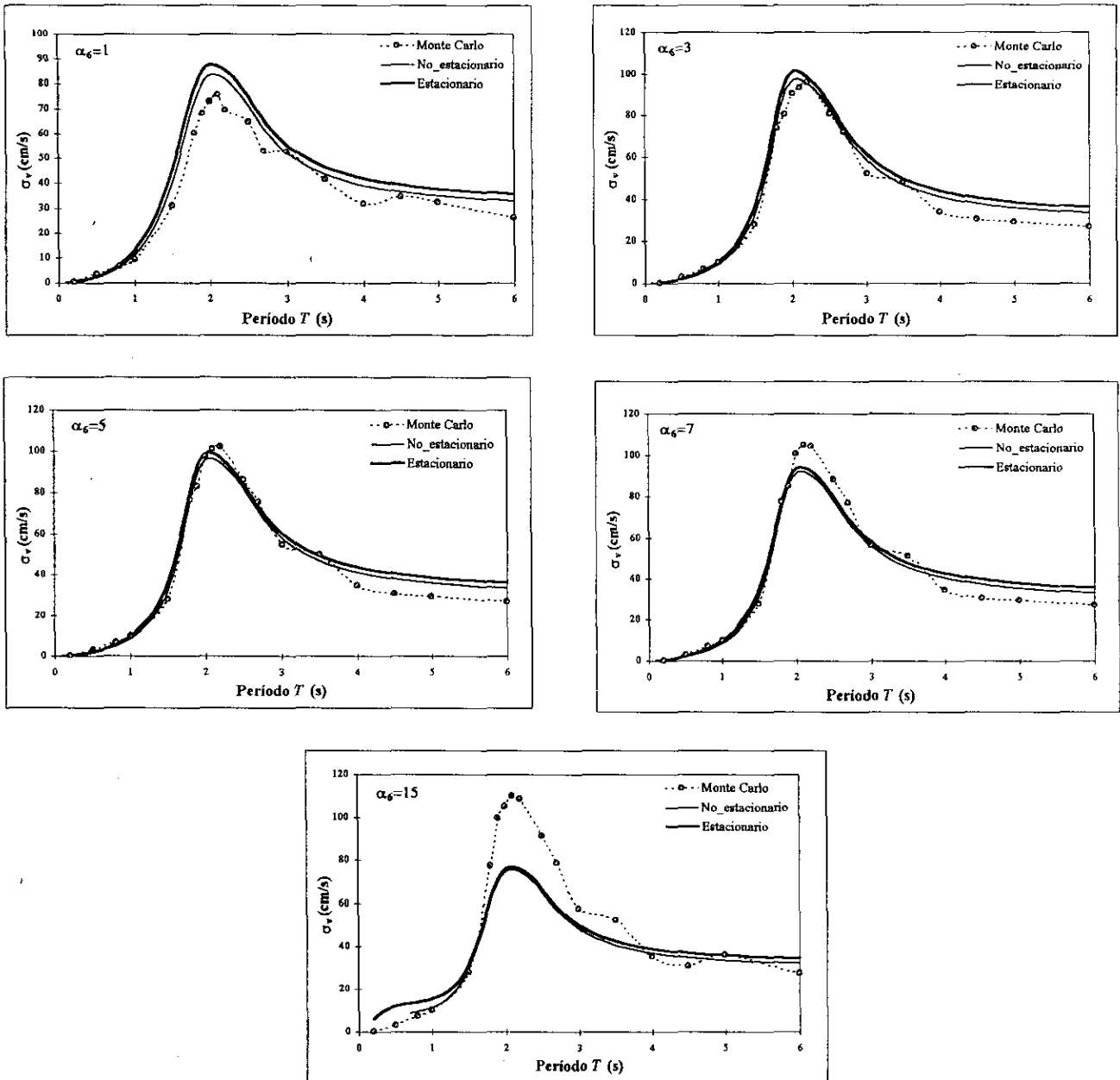


Figura 7.26 Desviación estándar de la velocidad. Caso IA6 con  $\eta=1$ .

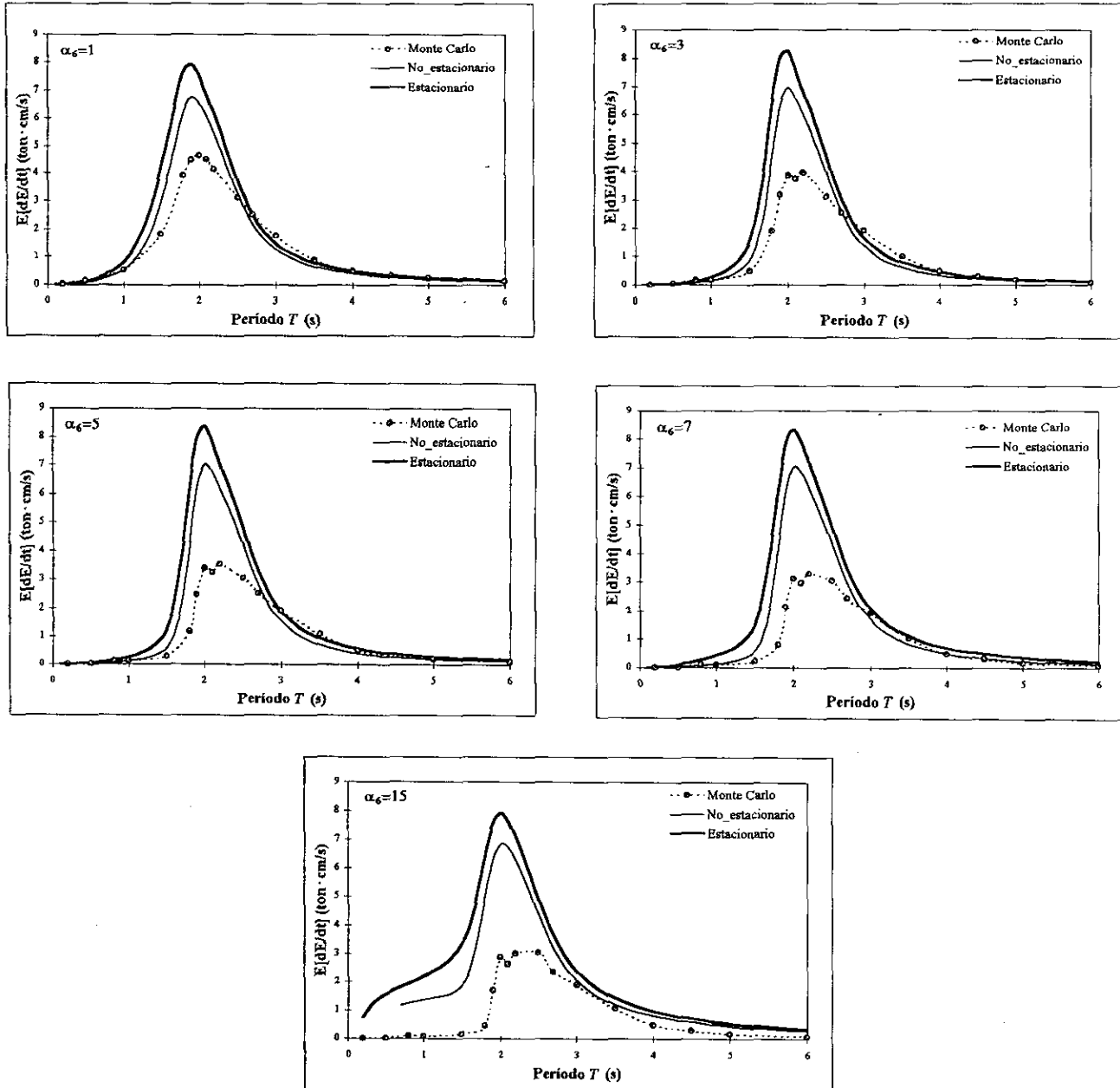


Figura 7.27 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IA6 con  $\eta=1$ .



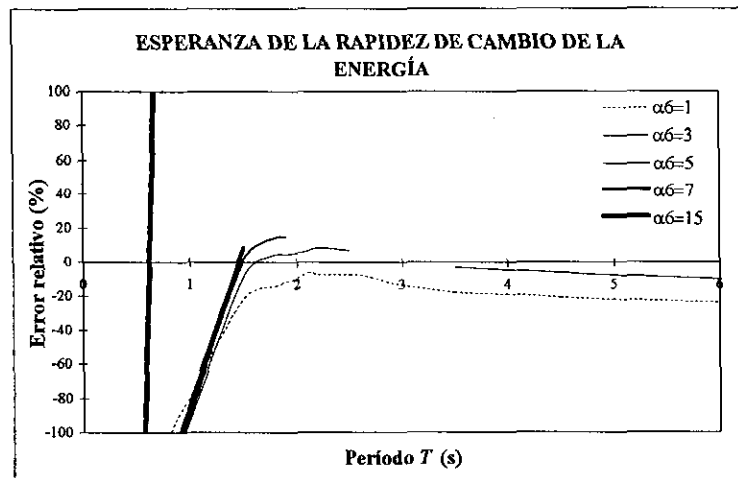
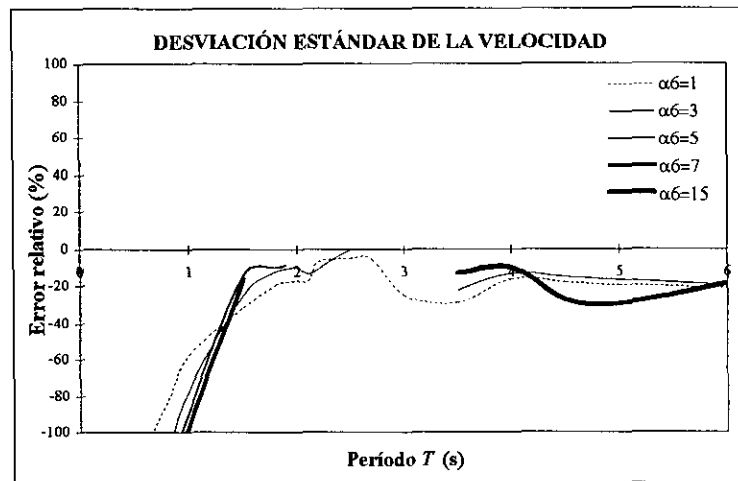
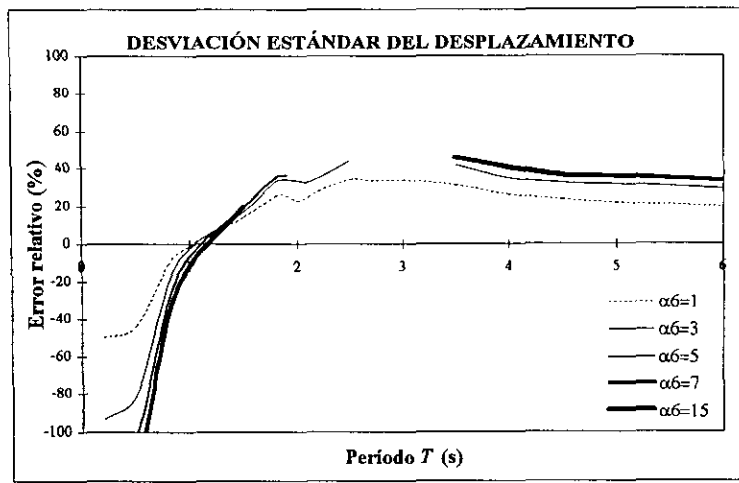


Figura 7.28 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso  $I_{A6}$  estacionario con  $\eta=4$ .

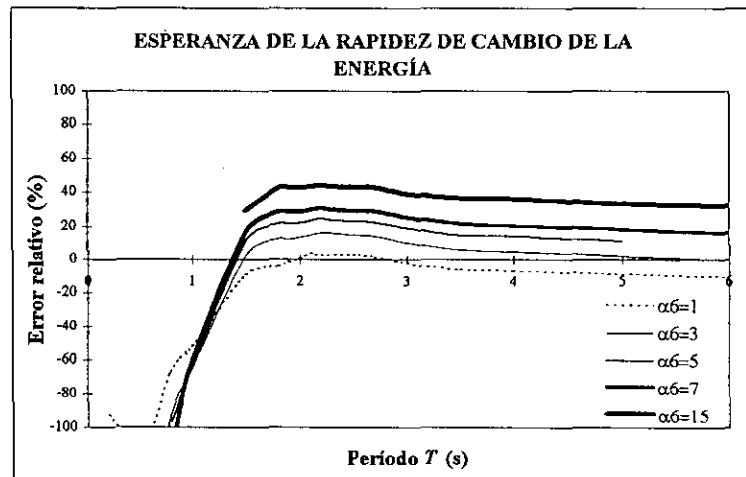
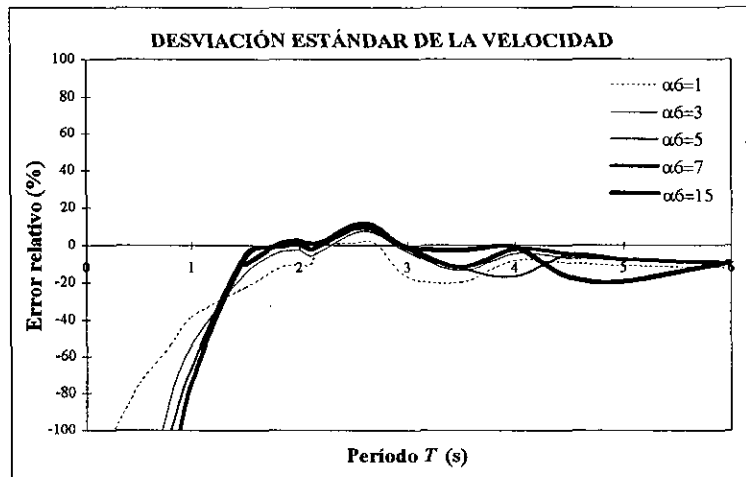
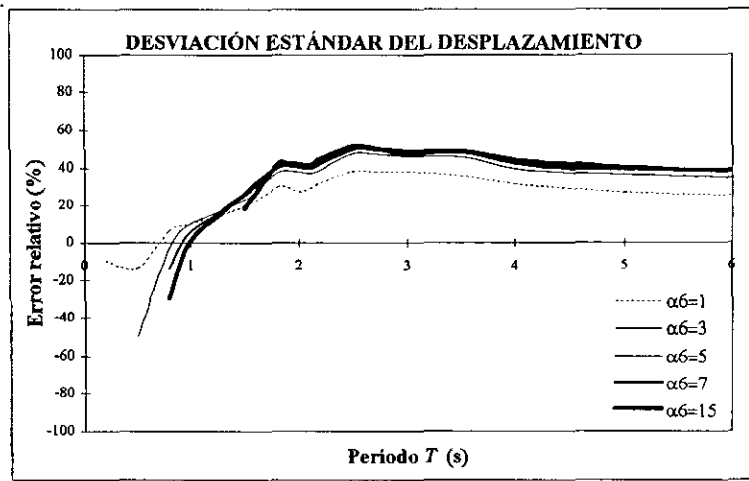


Figura 7.29 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso LA6 no estacionario con  $\eta=4$ .

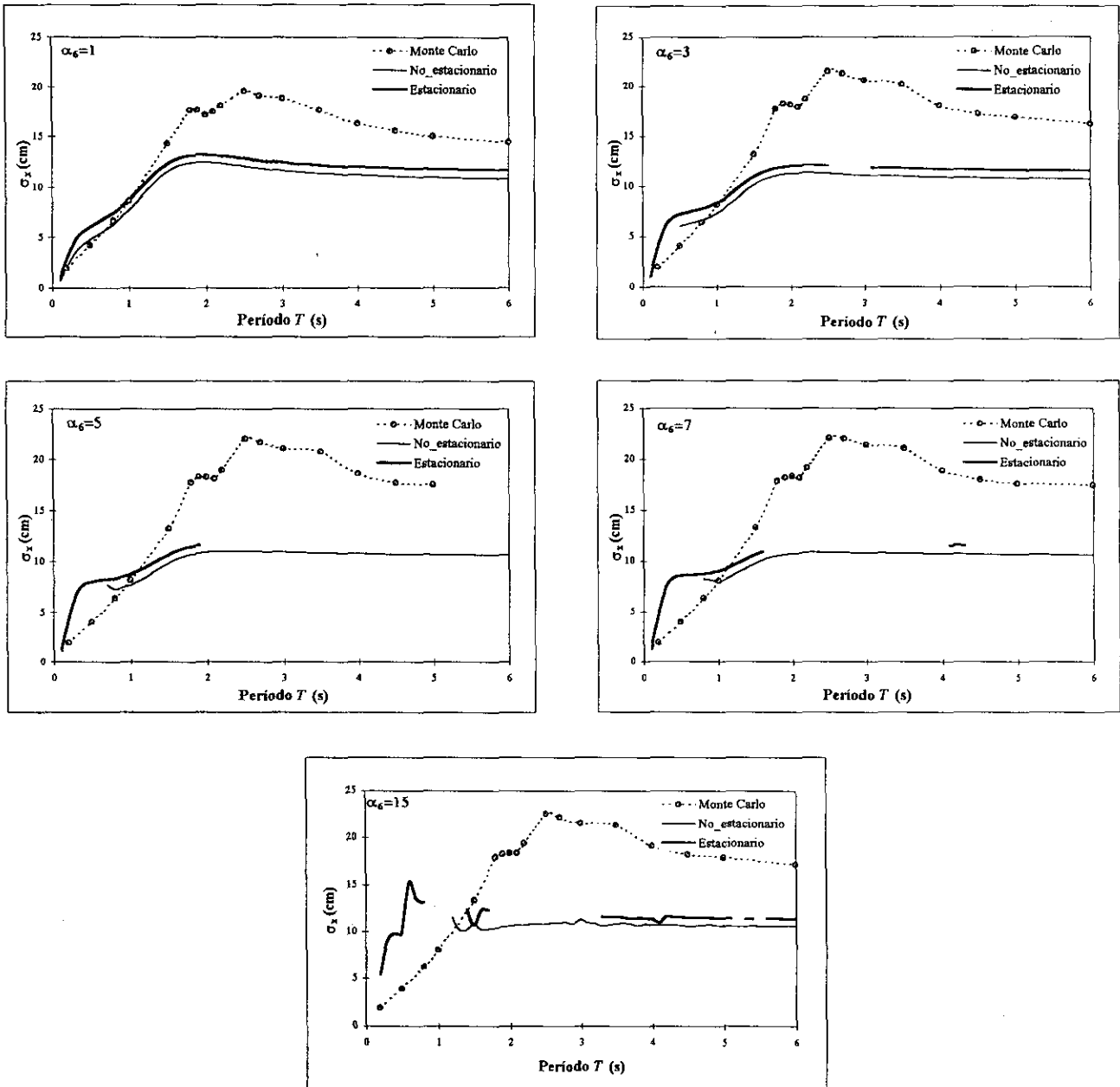


Figura 7.30 Desviación estándar del desplazamiento. Caso LA6 con  $\eta=4$ .

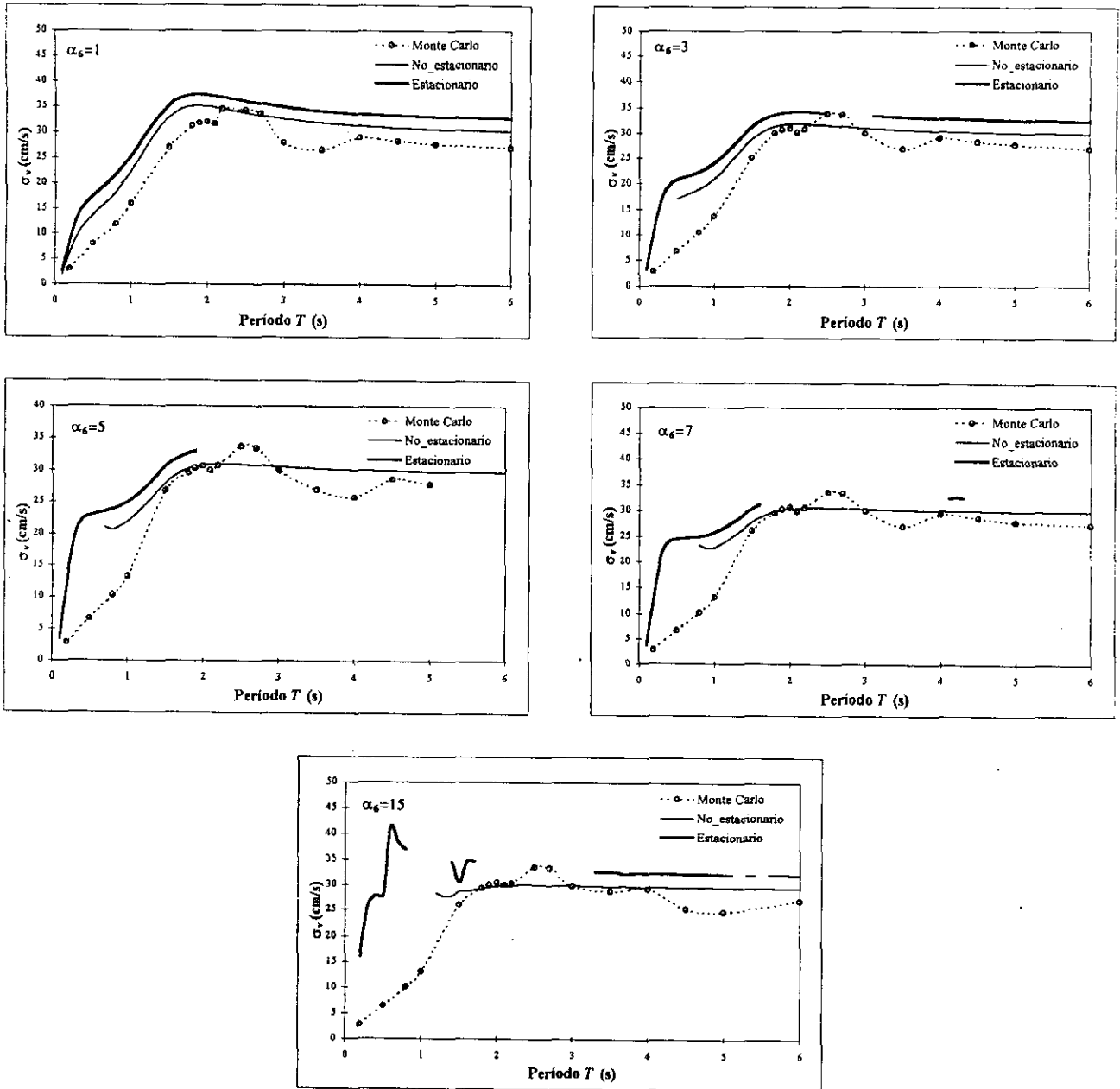


Figura 7.31 Desviación estándar de la velocidad. Caso  $I_{A6}$  con  $\eta=4$ .

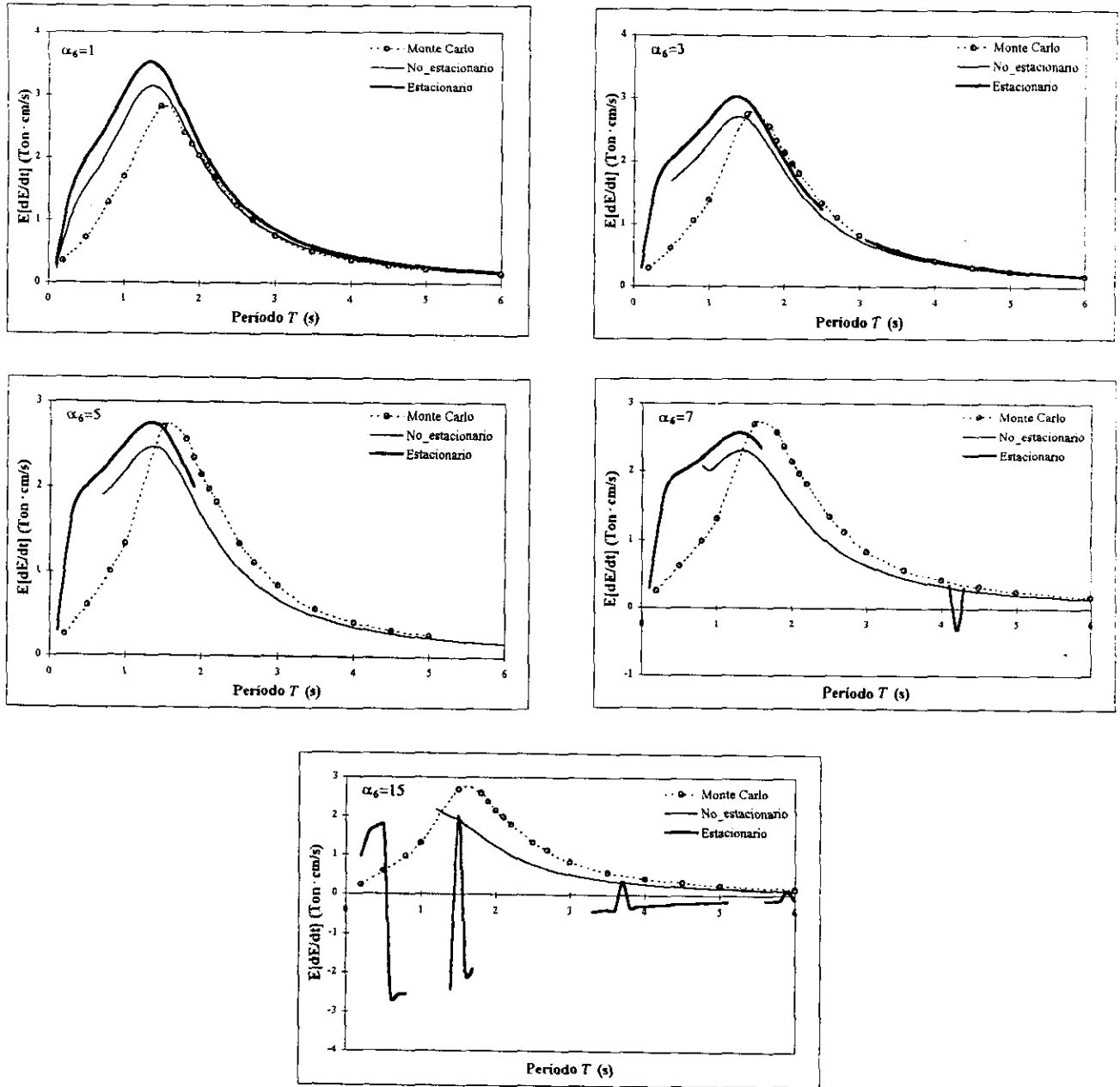


Figura 7.32 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso  $L6$  con  $\eta=4$ .

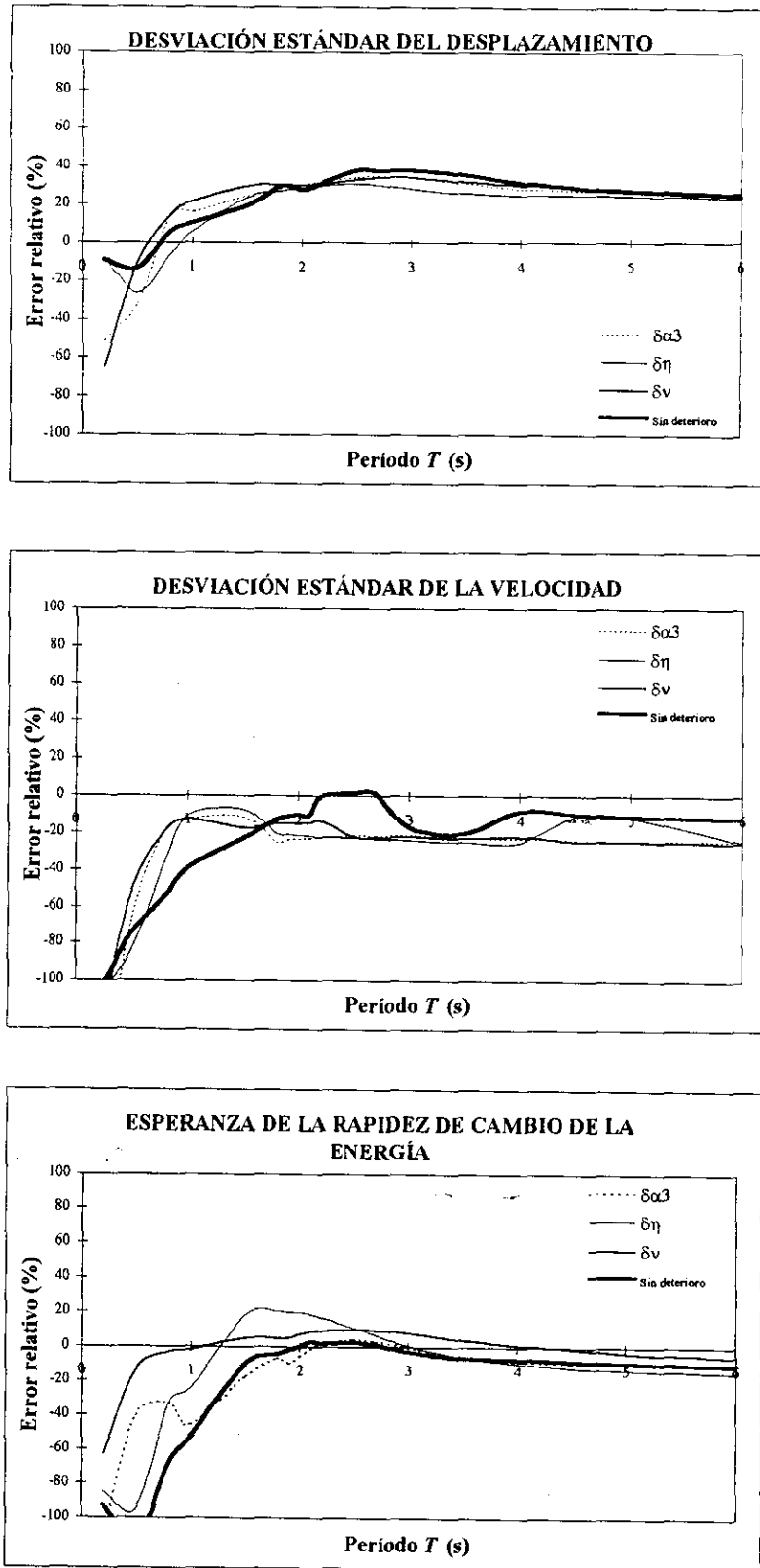


Figura 7.33 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IDE no\_estacionario con  $\eta=4$ .

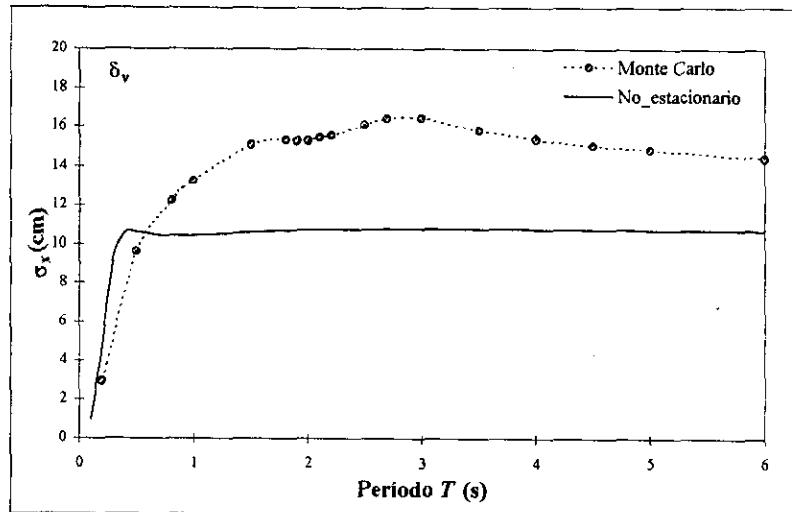
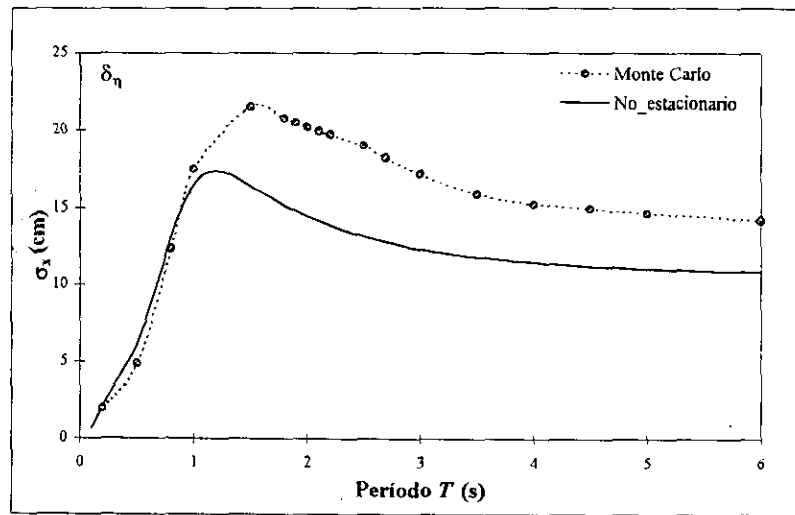
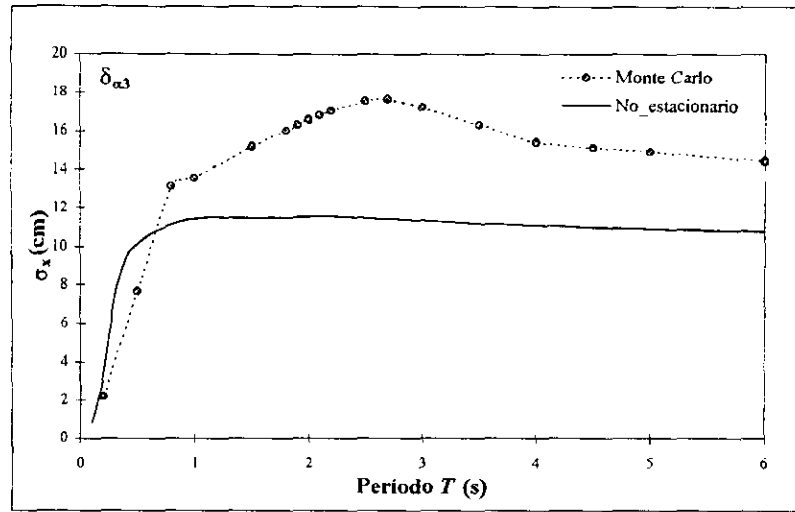


Figura 7.34 Desviación estándar del desplazamiento.  
 Caso IDE con  $\eta=4$ .

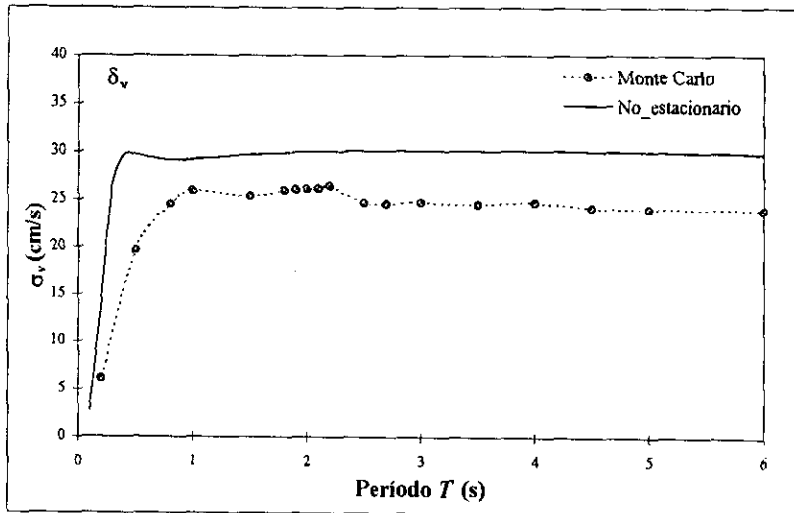
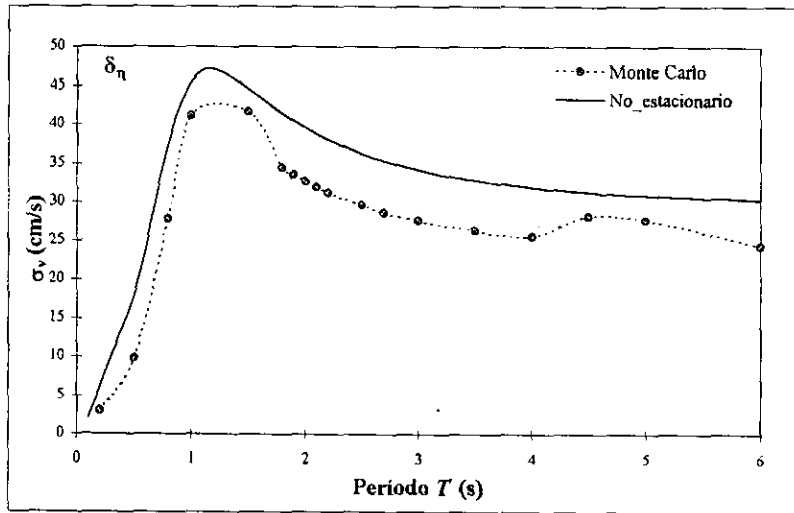
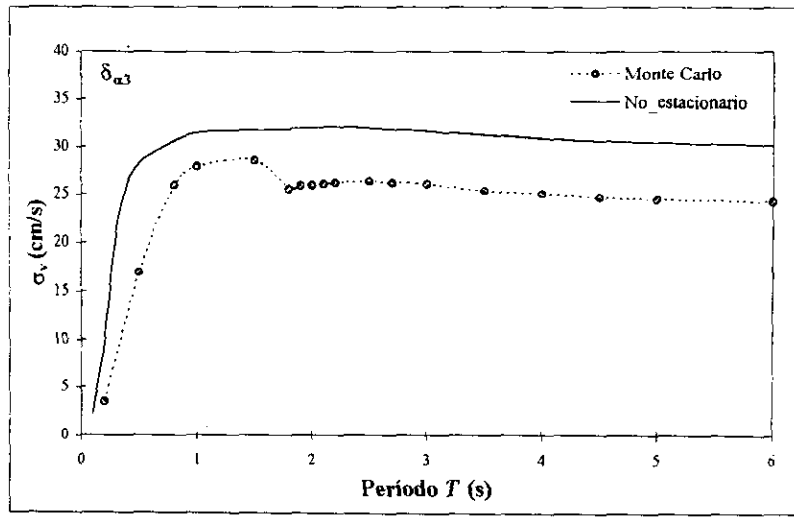


Figura 7.35 Desviación estándar de la velocidad.  
Caso IDE con  $\eta=4$ .



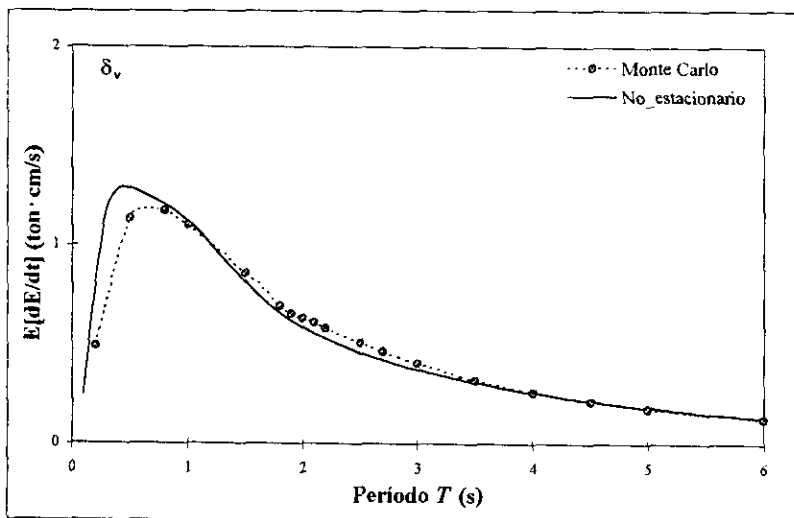
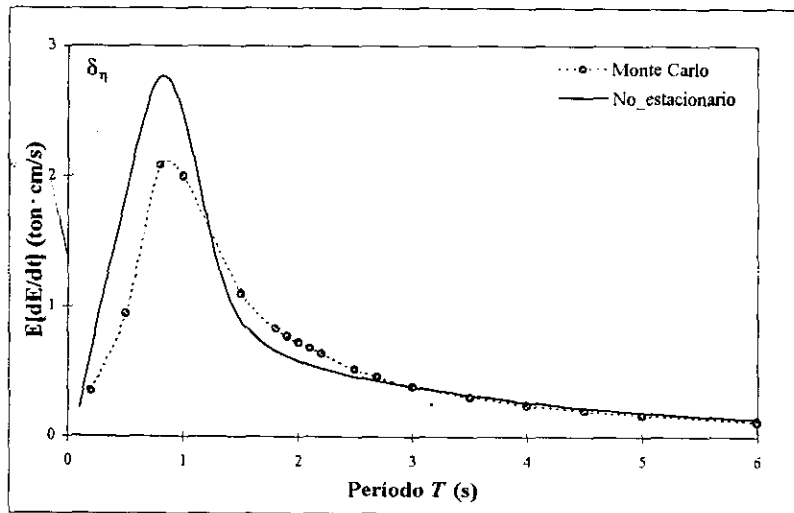
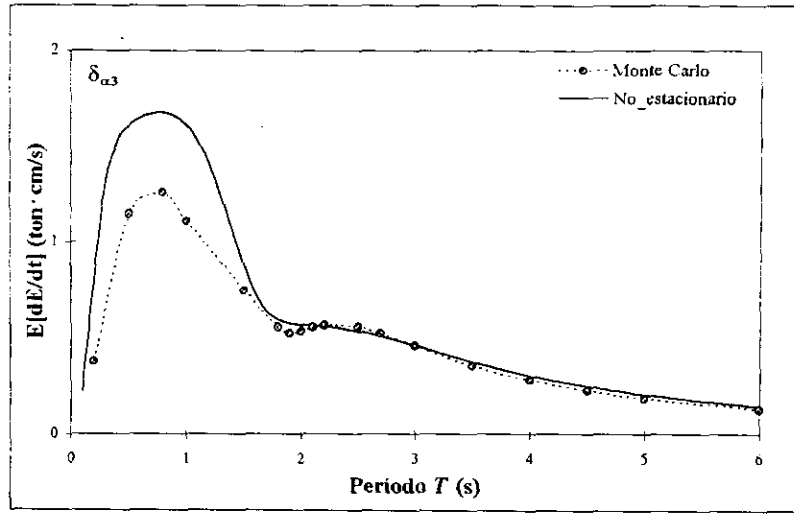


Figura 7.36 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IDE con  $\eta=4$ .

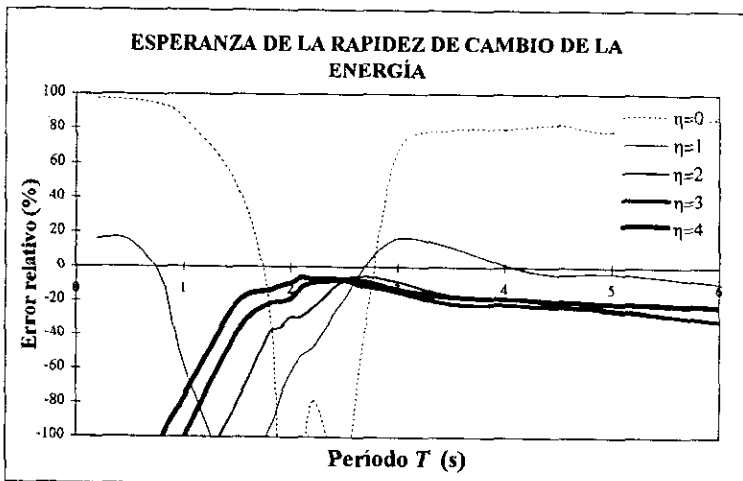
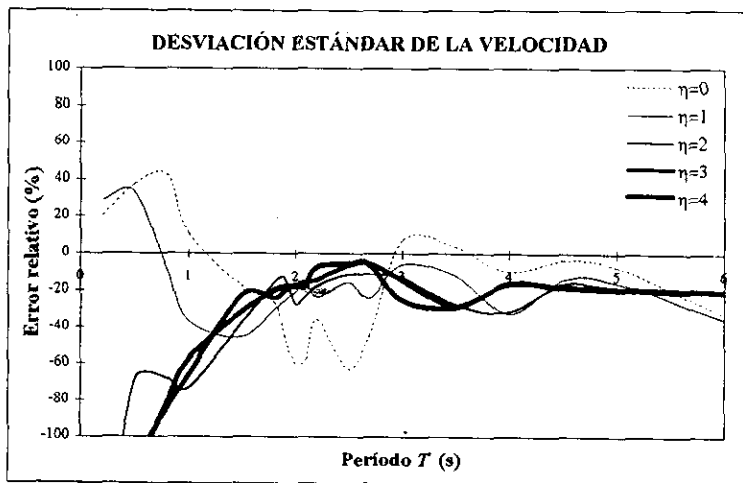
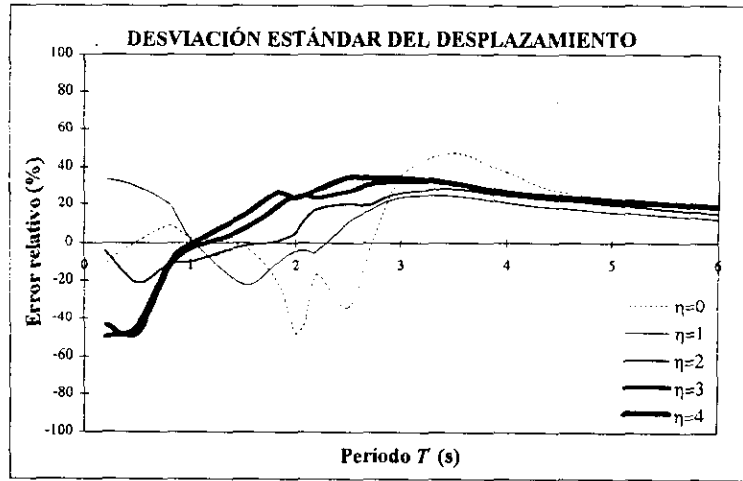


Figura 7.37 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso *IDD* estacionario.

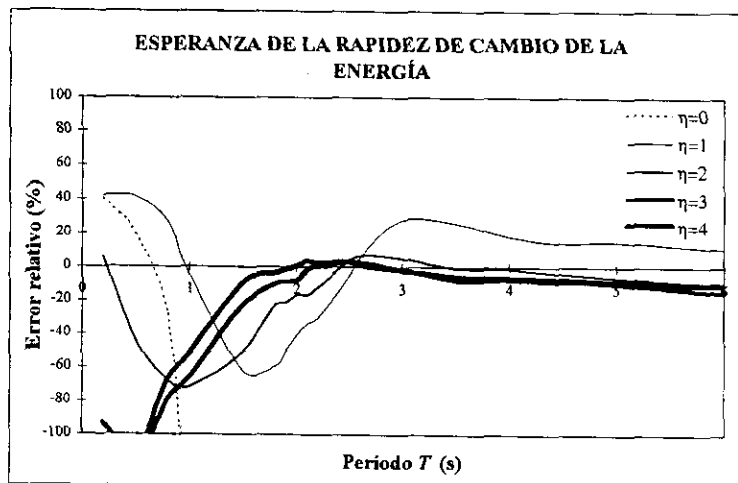
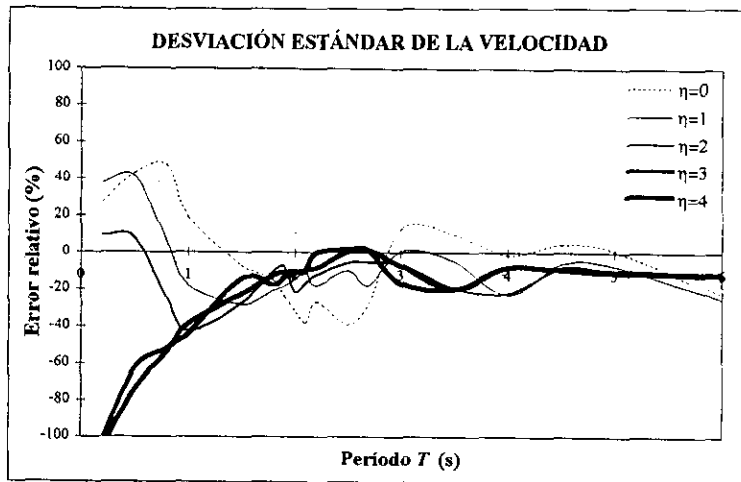
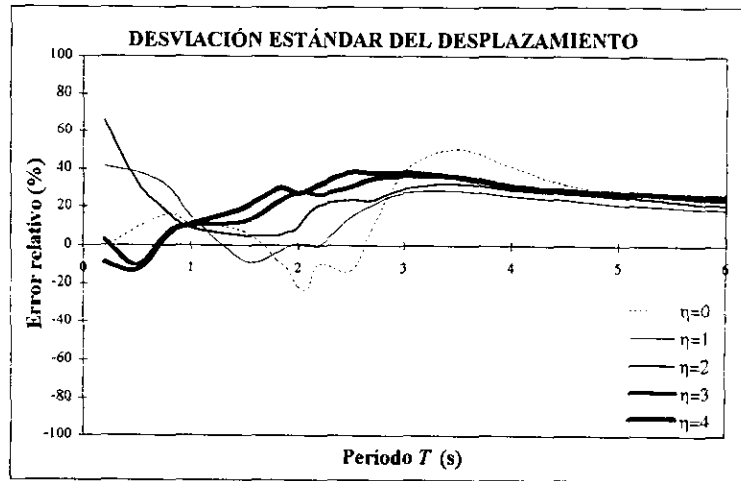


Figura 7.38 Errores relativos de  $\sigma_x$ , de  $\sigma_v$  y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso *IDD no\_estacionario*.

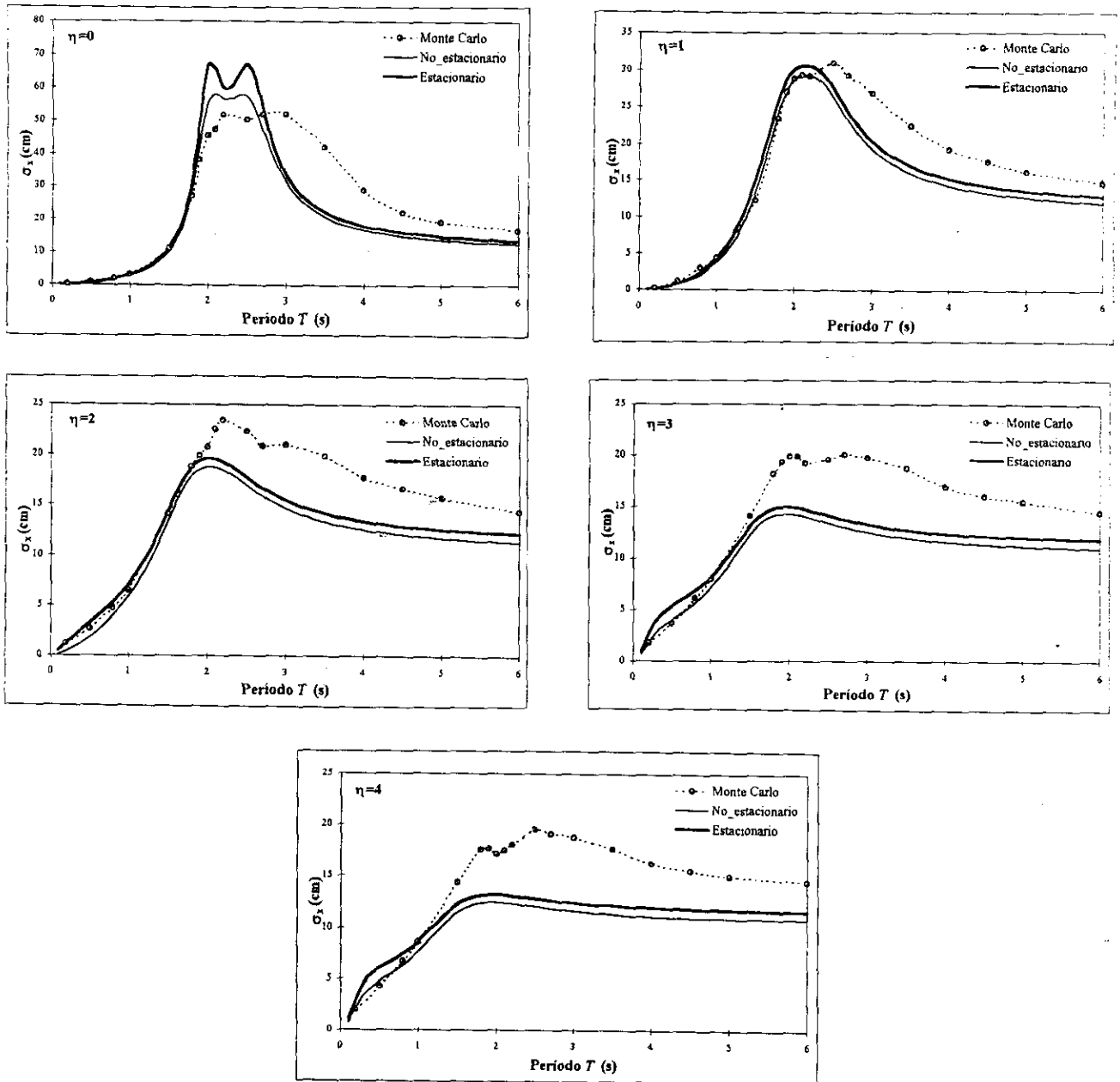


Figura 7.39 Desviación estándar del desplazamiento. Caso IDD.

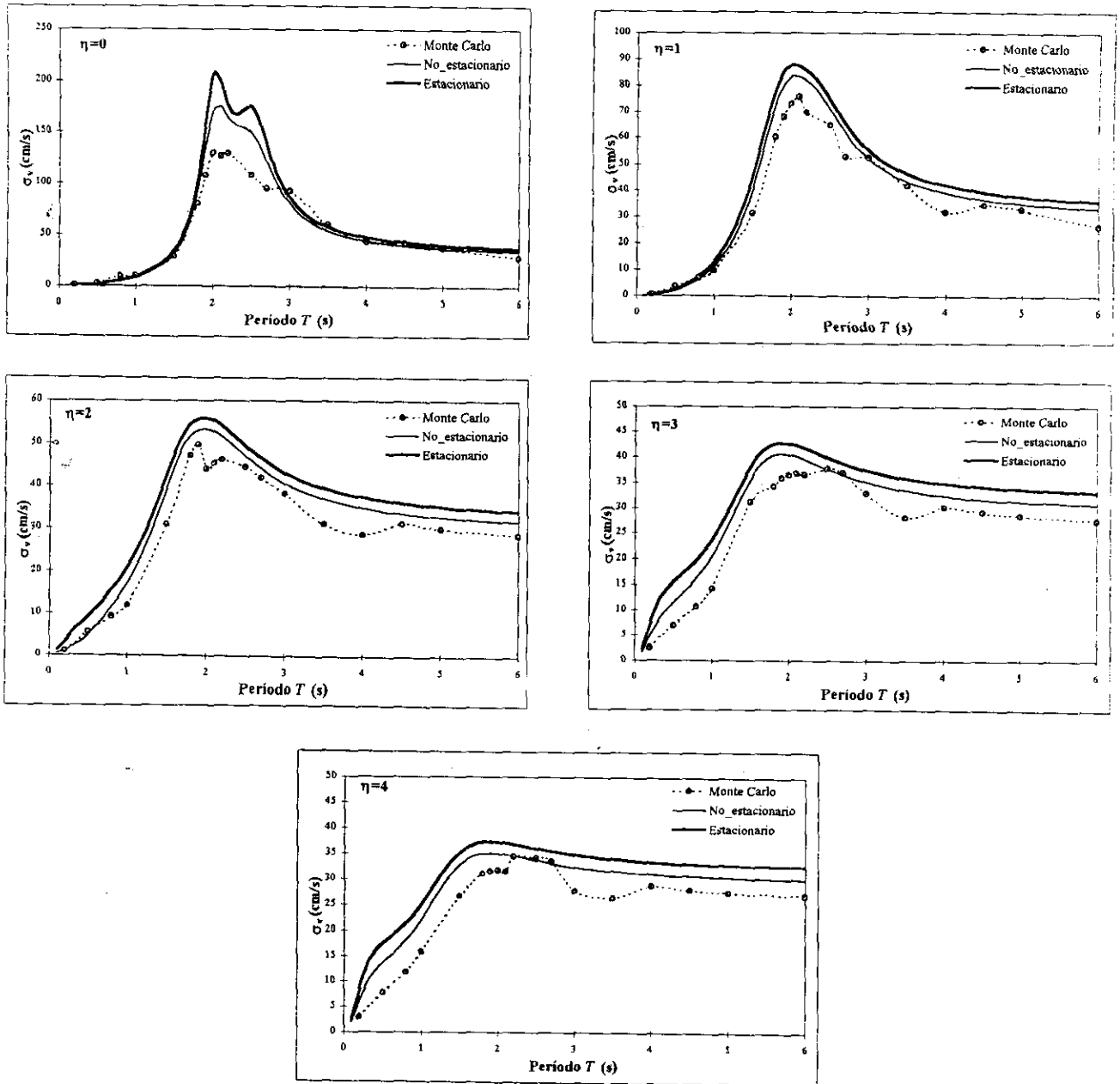


Figura 7.40 Desviación estándar de la velocidad. Caso *IDD*.

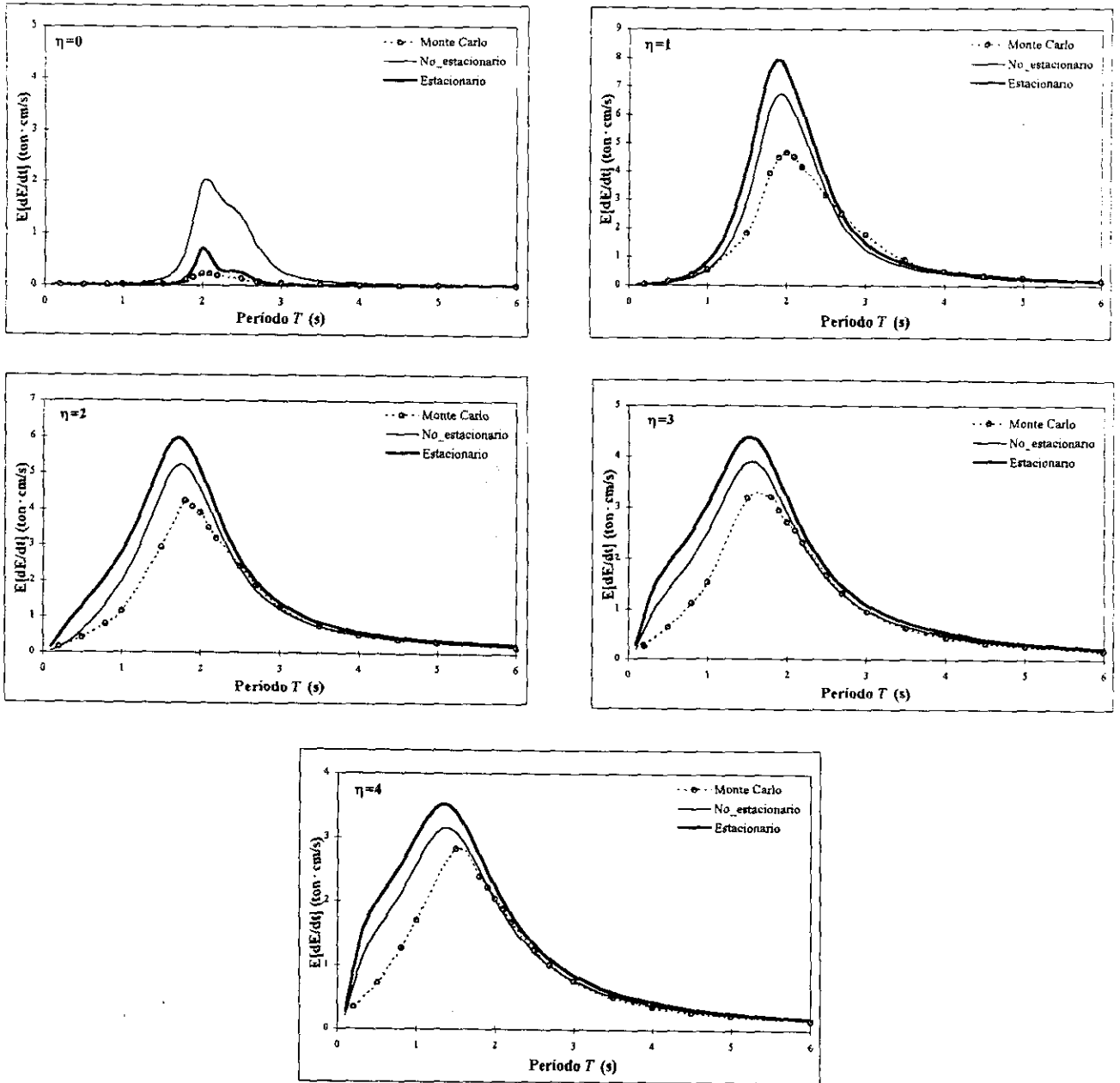


Figura 7.41 Esperanza de la rapidez de cambio de la energía. Caso IDD.

## 7.5 DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS

Enseguida se realiza una descripción cuantitativa de los resultados mostrados en las figuras anteriores, señalando la magnitud del error en cada caso de estudio. Las posibles causas de las tendencias de las curvas de error se analizan en el siguiente capítulo.

Para la siguiente descripción se divide el intervalo de periodos de vibración estudiado de la siguiente manera:

- Periodos cortos  $T \leq 1.0s$
- Periodos intermedios  $1.0s < T \leq 2.5s$
- Periodos largos  $2.5s < T \leq 6.0s$

Se observa en las figuras anteriores que en términos generales, las curvas del caso *estacionario* siguen el mismo comportamiento que las curvas del caso *no estacionario* (son paralelas) y por esta razón sólo se describen enseguida los resultados de este último caso.

### 7.5.1 Influencia de $\alpha_2$ (caso IA2)

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL DESPLAZAMIENTO

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\sigma_x$  se subestima y el error disminuye de 47% a 8% conforme el valor de  $\alpha_2$  aumenta. En periodos intermedios  $\sigma_x$  se sobrestima y el error aumenta ligeramente con el valor de  $\alpha_2$  alcanzando valores de hasta 10%. En periodos largos  $\sigma_x$  se subestima y el error aumenta de 15% a 44% en la medida en que  $\alpha_2$  crece.

*Ductilidad alta.* En periodos cortos el error es del orden de 10% para valores de  $\alpha_2$  cercanos a 0.015 y 0.5. Para otros valores de  $\alpha_2$  el error oscila entre 21% y 43%. En periodos intermedios  $\sigma_x$  se subestima y el error tiende a disminuir desde 40% conforme  $\alpha_2$  aumenta. En periodos largos  $\sigma_x$  se subestima entre un 20% y 47%, y el error es menor para valores intermedios de  $\alpha_2$ .

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA VELOCIDAD

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\sigma_v$  se subestima de un 5% a 42%. En periodos intermedios  $\sigma_v$  se sobrestima entre 9% y 34% aumentando el valor del error a medida que  $\alpha_2$  crece. En periodos largos  $\sigma_v$  se sobrestima hasta un 26% disminuyendo con incrementos de  $\alpha_2$ .

*Ductilidad alta.* En periodos cortos y para valores de  $\alpha_2$  mayores que 0.25,  $\sigma_v$  se subestima hasta un 33% y para valores de  $\alpha_2$  menores que 0.25,  $\sigma_v$  se sobrestima entre 38% y 133%. En periodos intermedios  $\sigma_v$  se sobrestima y el error aumenta de 0% a 44% conforme aumenta  $\alpha_2$ . En periodos largos  $\sigma_v$  se sobrestima y el error disminuye desde 39% conforme  $\alpha_2$  aumenta.

#### ESPERANZA DE LA RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA ENERGÍA

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\mu_{e_h}$  se subestima hasta un 47%, para periodos muy cortos el error disminuye con incrementos de  $\alpha_2$ . En periodos intermedios  $\mu_{e_h}$  se sobrestima y el error oscila entre 5% y 80%. En periodos cercanos al dominante de la excitación el error aumenta con el valor de  $\alpha_2$ . En periodos largos  $\mu_{e_h}$  se subestima y el error se encuentra entre 10% y 54% aumentando

con el valor de  $\alpha_2$ .

*Ductilidad alta.* En periodos cortos  $\mu_{e_h}$  se sobrestima hasta un 150% y el error es mayor para valores de  $\alpha_2$  pequeños. En periodos intermedios  $\mu_{e_h}$  se subestima y el error alcanza valores de 20% aumentando conforme aumenta  $\alpha_2$ . En periodos largos  $\mu_{e_h}$  se subestima y el error alcanza valores de hasta 37% aumentando con el valor de  $\alpha_2$ .

### 7.5.2 Influencia de $\alpha_6$ (caso IA6)

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL DESPLAZAMIENTO

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\sigma_x$  se subestima y el error disminuye desde 41% conforme  $\alpha_6$  aumenta. Con valores muy altos de  $\alpha_6$ ,  $\sigma_x$  se llega a sobrestimar hasta en un 61%. En periodos intermedios  $\sigma_x$  se subestima y el error aumenta con el valor de  $\alpha_6$  alcanzando valores de hasta 40%. En periodos largos  $\sigma_x$  se subestima y el error aumenta de 20% a 52% en la medida en que  $\alpha_6$  crece.

*Ductilidad alta.* En periodos cortos se tuvieron errores numéricos pero se observa que la tendencia es sobrestimar  $\sigma_x$  con errores entre 0% y más allá de 40% aumentando conforme  $\alpha_6$  crece. En periodos intermedios y largos  $\sigma_x$  se subestima y el error tiende a aumentar desde 25% hasta 51% conforme  $\alpha_6$  aumenta.

#### DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA VELOCIDAD

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\sigma_v$  se subestima hasta un 45%. En periodos intermedios y para valores de  $\alpha_6$  menores que 5,  $\sigma_v$  se sobrestima hasta un 28% y los errores altos corresponden a valores de  $\alpha_6$  pequeños. Para valores de  $\alpha_6$  mayores que 5,  $\sigma_v$  se subestima hasta un 31% y el error aumenta conforme  $\alpha_6$  crece. En periodos largos  $\sigma_v$  se sobrestima hasta un 25% disminuyendo conforme  $\alpha_6$  crece.

*Ductilidad alta.* En periodos cortos  $\sigma_v$  se sobrestima desde 40% hasta más allá de 150% aumentando conforme aumenta el valor de  $\alpha_6$ . En periodos intermedios y largos  $\sigma_v$  se sobrestima hasta un 20% y el error es menor para valores pequeños de  $\alpha_6$ .

#### ESPERANZA DE LA RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA ENERGÍA

*Ductilidad baja.* En periodos cortos  $\mu_{e_h}$  se subestima hasta un 51% disminuyendo conforme  $\alpha_6$  aumenta. Para valores de  $\alpha_6$  mayores que 7,  $\mu_{e_h}$  se sobrestima con un error bastante grande del orden de 1700%. En periodos intermedios  $\mu_{e_h}$  se sobrestima desde un 25% aumentando rápidamente hasta un valor de 1110% conforme  $\alpha_6$  crece. En periodos largos y valores  $\alpha_6$  menores que 7,  $\mu_{e_h}$  se subestima hasta un 38% disminuyendo conforme aumenta el valor de  $\alpha_6$ . Para valores de  $\alpha_6$  mayores que 7,  $\mu_{e_h}$  se sobrestima hasta un 290%.

*Ductilidad alta.* En periodos cortos  $\mu_{e_h}$  se sobrestima desde un 50% hasta más allá de 170% y el error es mayor para valores de  $\alpha_6$  grandes. En periodos intermedios y largos  $\mu_{e_h}$  se subestima y el error crece de 0% a 42% conforme aumenta  $\alpha_6$ .

### 7.5.3 Influencia de la degradación (caso IDE)



Aquí se analizan dos estados de comportamiento. El primero es sin ningún tipo de deterioro y el segundo contempla una posible degradación de las propiedades mecánicas del material. Se seleccionó un *nivel de ductilidad*  $\eta=4$  para que hubiese la suficiente disipación de energía con el fin de estudiar el efecto del deterioro en la precisión de la LEG. Los valores seleccionados para los parámetros de la degradación (ecuación 3.36) son  $\delta_{\alpha_3} = 0.05$ ,  $\delta_{\eta} = 0.2$  y  $\delta_{\nu} = 0.2$ . No se considera el efecto de la rapidez de la degradación en la precisión de la LEG y por esta razón no se estudian otros valores de estos parámetros.

Se observa que el deterioro de las propiedades mecánicas del sistema UGL afecta principalmente a la desviación estándar de la velocidad y a la esperanza de la rapidez de cambio de la energía, en periodos intermedios y largos. Observando las gráficas de la Fig. 7.33 se nota que las curvas siguen el mismo comportamiento, excepto en periodos cortos en donde el error es menor en el caso con degradación. La desviación estándar del desplazamiento se subestima, y la desviación estándar de la velocidad así como la rapidez de cambio de la energía se sobrestiman.

#### 7.5.4 Influencia del nivel de ductilidad (caso IDD)

**DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL DESPLAZAMIENTO.** En periodos cortos  $\sigma_x$  se subestima y el error es máximo para valores de  $\eta$  entre 1 y 2, del orden de 65%. Para periodos intermedios y valores de  $\eta$  menores que uno  $\sigma_x$  se sobrestima y el error aumenta de 0% a 22% a medida que  $\eta$  disminuye. Para valores de  $\eta$  mayores que uno  $\sigma_x$  se subestima y el error aumenta de 0% a 38% conforme  $\eta$  crece. En periodos largos  $\sigma_x$  se subestima y el error crece de un 20% a un 38% al aumentar  $\eta$ . Para un *nivel de ductilidad* nulo ( $\eta=0$ ) el error alcanza valores de hasta 50%.

**DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA VELOCIDAD.** En periodos cortos y  $\eta < 2$   $\sigma_v$  se subestima y el error aumenta de 0% a 48% al disminuir  $\eta$ . Para  $\eta > 2$   $\sigma_v$  se sobrestima y el error aumenta de 0% a 107% al aumentar  $\eta$ . En periodos intermedios  $\sigma_v$  se sobrestima y el error oscila entre 0% y 39% y tiende a disminuir conforme  $\eta$  aumenta. En periodos largos  $\sigma_v$  se sobrestima y el error oscila entre 0% y 25% y tiende a disminuir conforme  $\eta$  aumenta.

**ESPERANZA DE LA RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA ENERGÍA.** En periodos cortos y valores de  $\eta$  menores que 1.5,  $\mu_{e_n}$  se subestima hasta un 42% y para valores de  $\eta$  mayores que 1.5  $\mu_{e_n}$  se sobrestima hasta un 120%. En periodos intermedios  $\mu_{e_n}$  se sobrestima y el error disminuye 1047% a 0% conforme aumenta el valor de  $\eta$ . En periodos largos y valores de  $\eta$  menores que 1,  $\mu_{e_n}$  se sobrestima en un 2200%. Para valores de  $\eta$  entre 1 y 2,  $\mu_{e_n}$  se subestima hasta un 40%. Para valores de  $\eta > 2$   $\mu_{e_n}$  se sobrestima hasta en un 15%.

#### 7.5.5 Influencia del tipo de modelo de la excitación

Al usar el modelo *no estacionario* de la excitación, la LEG aproxima mejor la respuesta que al usar el modelo *estacionario*; ya que en general, en el primer caso los errores relativos y numéricos son menores que los del segundo caso. Al usar un modelo *estacionario* con niveles altos de *no linealidad*  $\alpha_6$  y *ductilidad*  $\eta$  se tuvieron errores numéricos que impidieron obtener la solución del problema en varios periodos (ver Fig. 7.28 y Figs 7.30 a 7.32).

Para sistemas *UGL* con periodo mayor al periodo dominante de la excitación el caso *estacionario* subestima con un error ligeramente menor al del caso *no estacionario*, la desviación estándar del desplazamiento y en algunos casos la rapidez de cambio de la energía. Considerando que resulta más desfavorable subestimar que sobrestimar una respuesta, la condición anterior no le da ninguna ventaja al análisis *estacionario*. Sin embargo al usar la intensidad del ruido blanco ( $e_{TS\sigma}=2.76 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ ) asociada a la duración calculada directamente con la ecuación (4.49), el error en la estimación de la desviación estándar de la velocidad y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía disminuye, pero éste se incrementa en la desviación estándar del desplazamiento.

## 7.6 ERRORES RELATIVOS PROMEDIO

En las Figs. 7.42 a 7.46 se muestran los *errores relativos promedio (erp)* en función de la magnitud de los parámetros  $\alpha_2$ ,  $\alpha_6$  y  $\eta$ . Sólo se presenta el caso *no estacionario*.

En cada gráfica se muestran tres curvas que corresponden al *erp* en periodos cortos, en periodos intermedios y en periodos largos. Por ejemplo, el *erp* en periodos cortos se obtuvo al promediar los valores absolutos de los errores relativos de la respuesta de sistemas cuyo periodo de vibración pertenece al intervalo  $0.0\text{s} < T \leq 1.0\text{s}$  y que tienen un valor específico de  $\alpha_2$ ,  $\alpha_6$  y  $\eta$ .

Se observa principalmente lo siguiente:

- El *erp* en el cálculo de la desviación estándar del desplazamiento  $\sigma_x$  es siempre menor que 45%.
- El *erp* en la estimación de la desviación estándar de la velocidad  $\sigma_v$  es siempre menor que 25%, excepto en sistemas *UGL* de periodo corto con nivel de *ductilidad* alto, donde el *erp* llega a alcanzar valores mayores que 70%.
- El *erp* en el cálculo de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía  $\mu_{e_n}$  es del orden de 40%, excepto en sistemas *UGL* de periodo corto con nivel de *ductilidad*  $\eta \neq 1$  en los que el *erp* llega a alcanzar valores de 100%. Para sistemas *UGL* de periodo intermedio y largo el *erp* disminuye conforme el nivel de *ductilidad* aumenta. Los valores máximos de *erp* están asociados a sistemas elásticos-lineales ( $\eta=0$ ).
- El parámetro  $\alpha_2$  influye también en la magnitud del *erp* ya que valores pequeños de  $\alpha_2$  implican mayor nivel de *ductilidad* (ver Fig. 3.3).
- Valores altos del parámetro  $\alpha_6$  propician un incremento en el *erp*, afectando principalmente el valor de  $\mu_{e_n}$ .

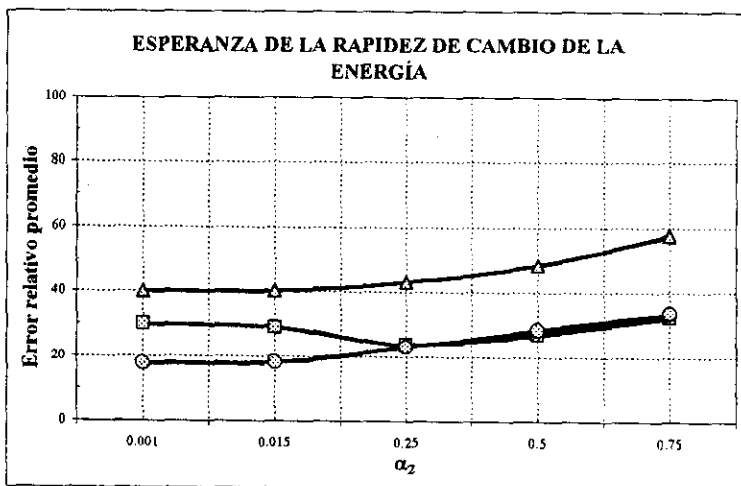
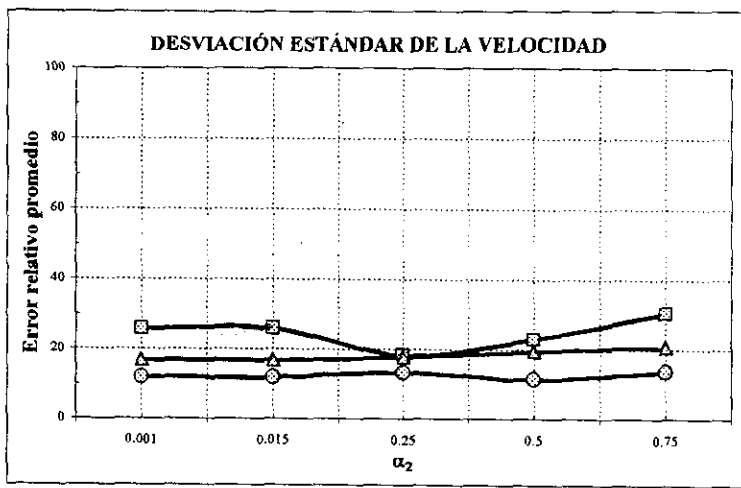
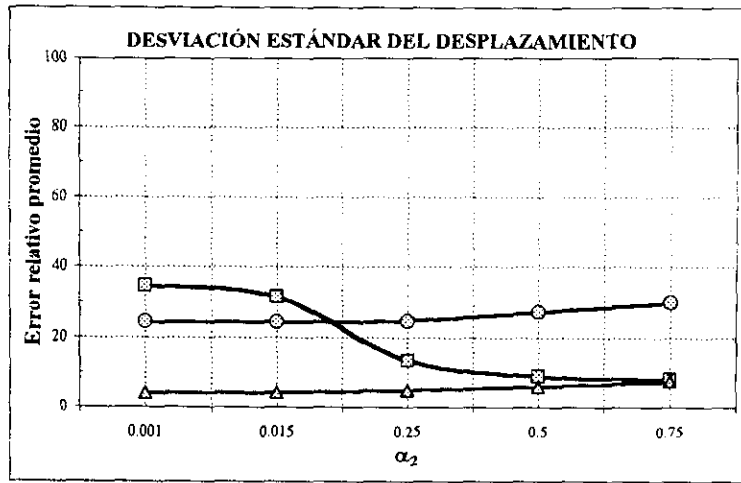


Figura 7.42 Influencia de  $\alpha_2$  con  $\eta=1$

- Períodos cortos
- ▲— Períodos intermedios
- Períodos largos

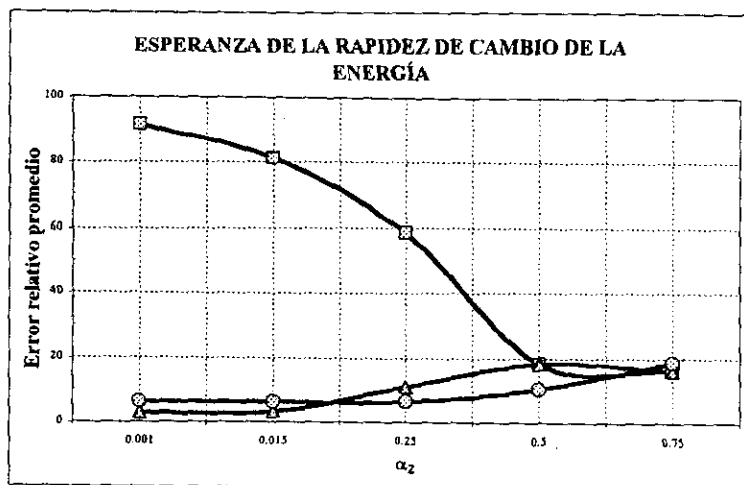
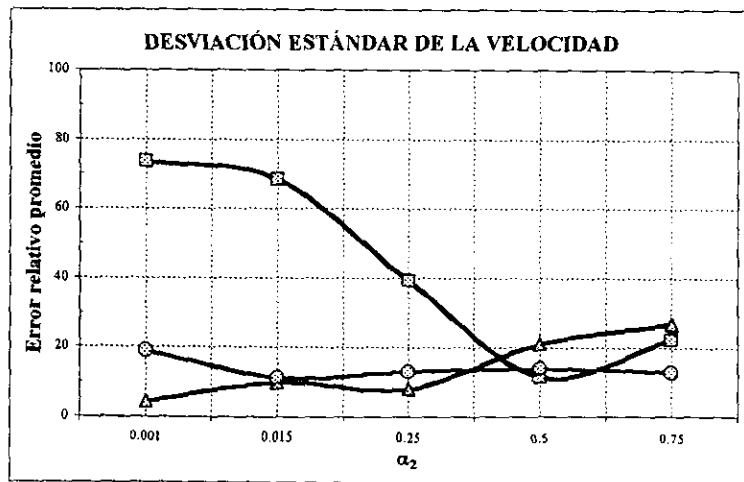
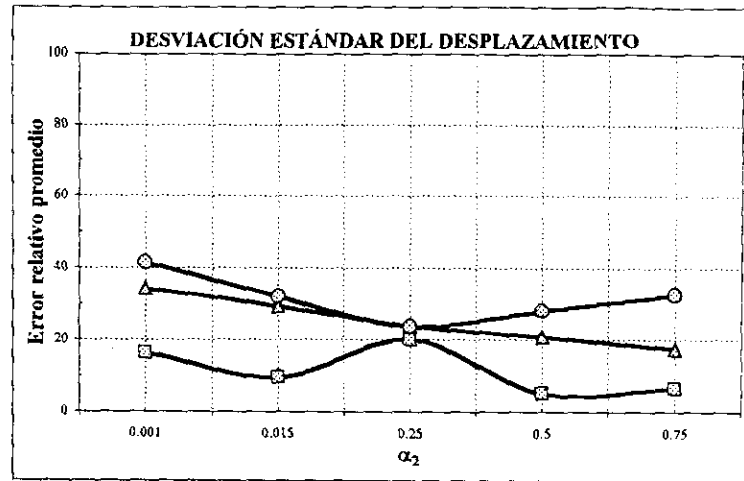


Figura 7.43 Influencia de  $\alpha_2$  con  $\eta=4$

- Períodos cortos
- ▲— Períodos intermedios
- Períodos largos

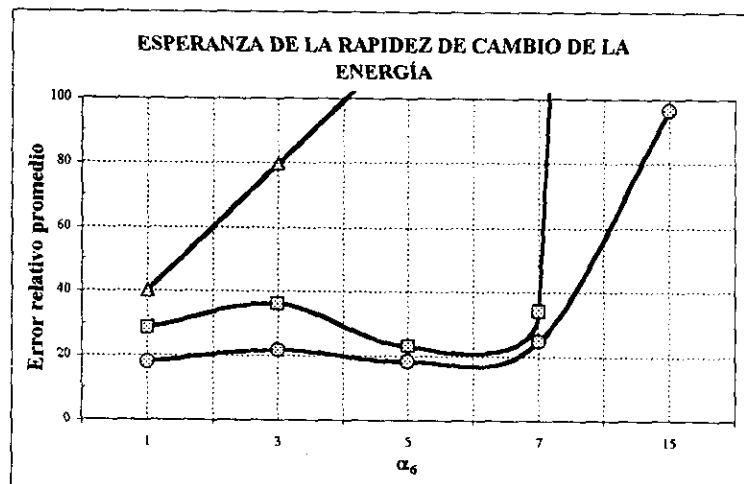
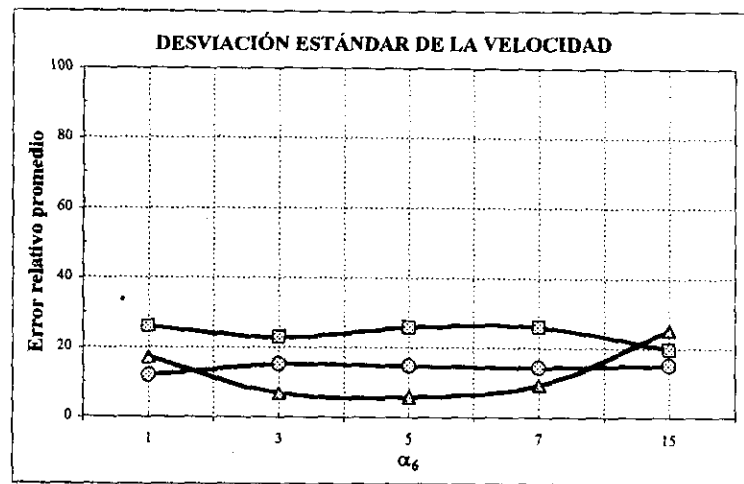
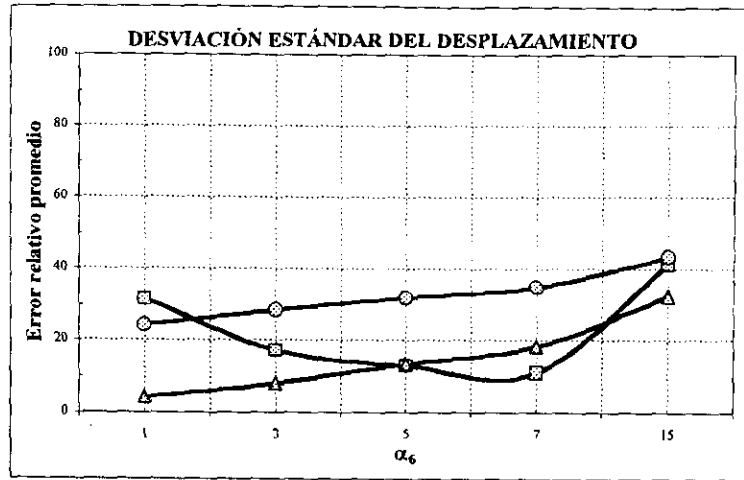


Figura 7.44 Influencia de  $\alpha_6$  con  $\eta=1$

- Períodos cortos
- ▲— Períodos intermedios
- Períodos largos

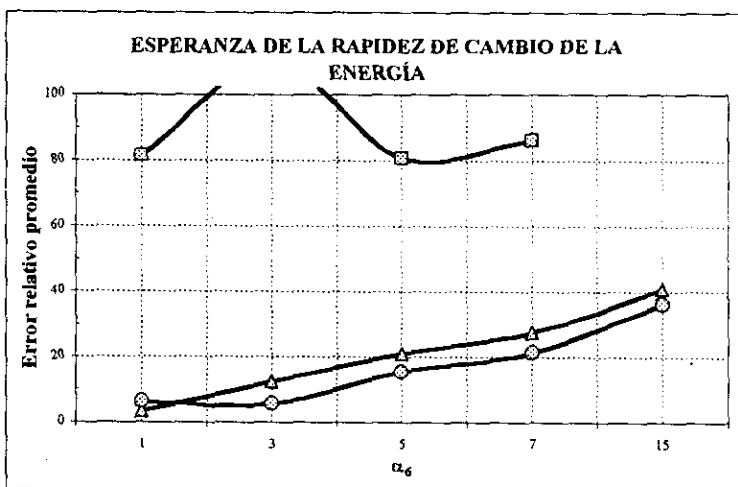
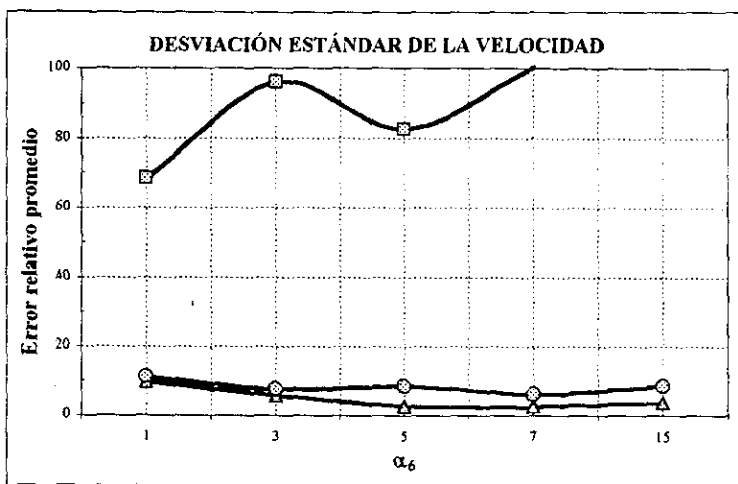
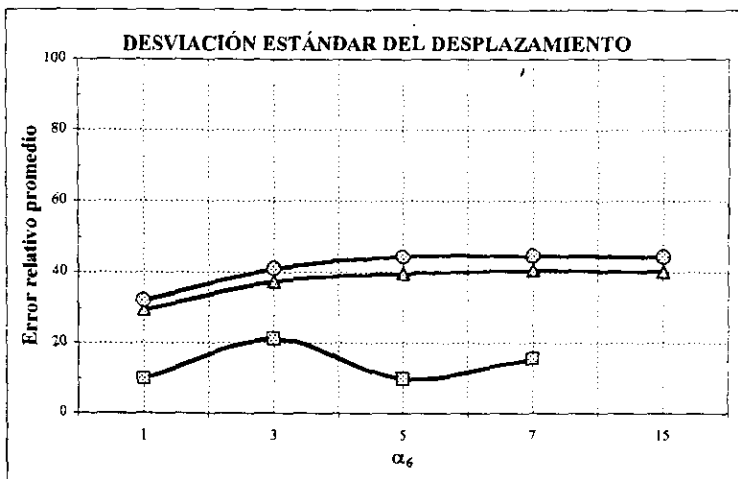


Figura 7.45 Influencia de  $\alpha_6$  con  $\eta=4$

- Períodos cortos
- ▲— Períodos intermedios
- Períodos largos

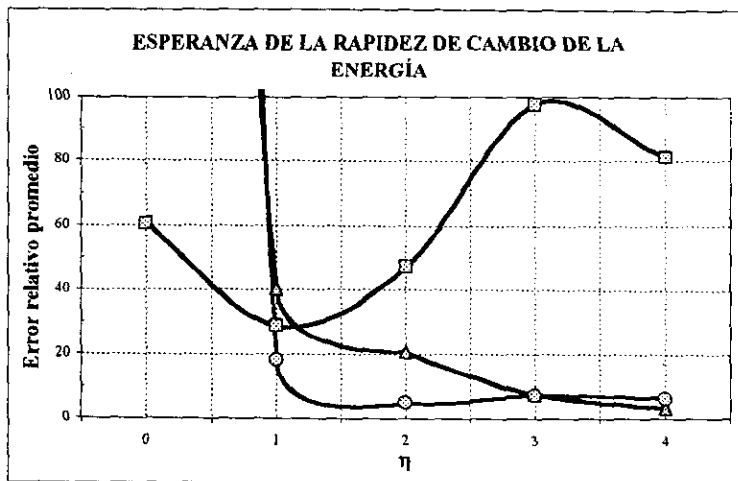
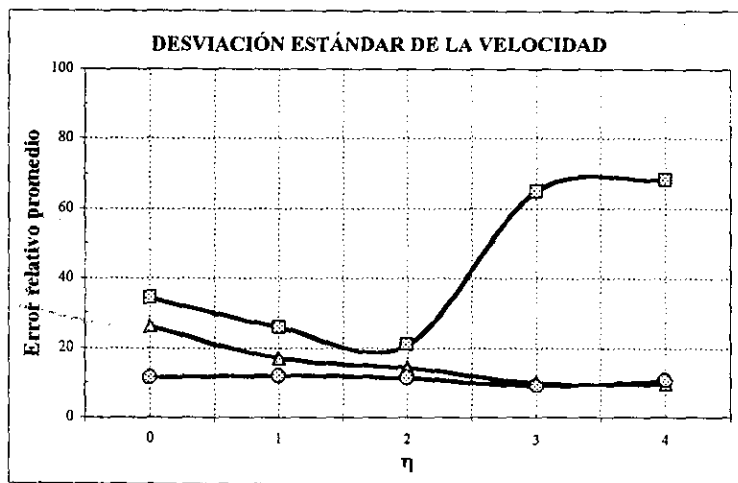
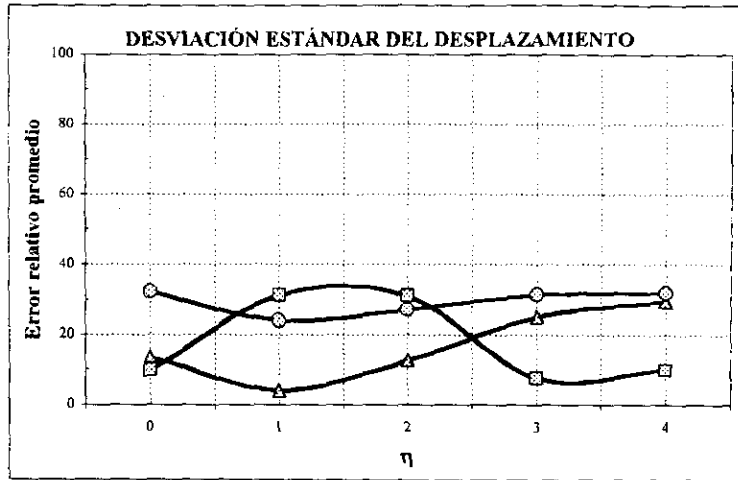


Figura 7.46 Influencia de  $\eta$

- Períodos cortos
- ▲— Períodos intermedios
- Períodos largos

## EVALUACIÓN DEL MÉTODO

### 8.1 PRECISIÓN

Después de analizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior se observa que las tendencias generales son las siguientes:

- La *LEG* subestima, en general, la desviación estándar del desplazamiento. El *error relativo promedio (erp)* es siempre menor que 45%. Los *erp* menores se asocian a sistemas *UGL* de periodo corto ( $T \leq 1.0s$ ) e intermedio ( $1.0s < T \leq 2.5s$ ). Conforme la *no linealidad* y el *nivel de ductilidad* aumentan, el error relativo crece y el intervalo de periodos en el que se subestima  $\sigma_x$  crece hacia periodos cortos. Por ejemplo, obsérvese en las Figs. 7.18 y 7.19 que el intervalo en el que se subestima  $\sigma_x$  crece conforme  $\alpha_2$  disminuye (valores pequeños de  $\alpha_2$  implican mayor *ductilidad*, ver Fig 3.3).
- En general, la *LEG* sobrestima la desviación estándar de la velocidad. Esta cantidad se predice satisfactoriamente con un *erp* menor que 25%, en periodos intermedios y largos ( $2.5s < T \leq 6.0s$ ) aún para *niveles de ductilidad* y de *no linealidad* altos. Sin embargo, para sistemas *UGL* de periodo corto con nivel de *ductilidad* alto, el *erp* es alto ( $>70\%$ ). Obsérvese que  $\sigma_v$  es sensible al *nivel de ductilidad* principalmente en periodos cortos, donde conforme el *nivel de ductilidad* disminuye  $\sigma_v$  tiende a subestimarse (véase por ejemplo las Figs. 7.37 y 7.38).
- El error relativo en el cálculo de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía de sistemas *UGL* de periodo intermedio y largo, tiende a disminuir conforme su *nivel de ductilidad* crece, pero aumenta, independientemente de este parámetro, conforme el nivel de *no linealidad* se incrementa. El *erp* en el cálculo de  $\mu_{\dot{e}_n}$  es del orden de 40% excepto en periodos cortos con nivel de *ductilidad*  $\eta \neq 1$  donde esta cantidad tiende a sobrestimarse con un error considerable.



- El error relativo de la respuesta en general, crece cuando:
  1. El sistema *UGL* es de periodo de vibración corto con nivel de *ductilidad* alto.
  2. El grado de *no linealidad* es alto ( $\alpha_6$  grande).
  3. El sistema es elástico lineal o con *nivel de ductilidad muy* bajo ( $0 \leq \eta \leq 1$  o  $\alpha_2$  grande), particularmente para el cálculo de energía.
- Con excepción de sistemas *UGL* de periodo corto, la desviación estándar de la velocidad se predice con mejor precisión que la esperanza de la rapidez de cambio de la energía y ésta a su vez mejor que la desviación estándar del desplazamiento.
- De los análisis realizados (Fig. 7.33) se observa que la degradación aumenta el error relativo de: la desviación estándar del desplazamiento en periodos cortos y de la desviación estándar de la velocidad y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía en periodos intermedios y largos.
- Al modelar la excitación usada en esta tesis como un proceso *estacionario* se observa que su varianza asociada a la intensidad del ruido blanco  $e_{TS0}=2.76 \text{ cm}^2/\text{s}^3$  (obtenida con la duración dada por la ecuación 4.49) se subestima. Ello implica que la ecuación (4.49) sobrestima, en este estudio, la duración de la parte intensa de la excitación. Sin embargo esto no significa que la precisión de la *LEG* se vea afectada. Los resultados del caso *estacionario* que se presentan en las Figs. 7.13 a 7.41 corresponden a la intensidad del ruido blanco  $e_{VS0}=6.17 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ . Al usar la intensidad  $e_{TS0}=2.76 \text{ cm}^2/\text{s}^3$  la respuesta disminuiría aproximadamente un 17%; esto significa que el error relativo en la estimación de la desviación estándar de la velocidad y de la esperanza de la rapidez de cambio de la energía disminuiría en comparación con el mostrado en las figuras mencionadas, pero aumentaría en la desviación estándar del desplazamiento. Esto indica que el proceso aleatorio de excitación usado en este trabajo puede modelarse con un proceso *estacionario* para fines del cálculo de la desviación estándar de la velocidad. Sin embargo debe tenerse cuidado en análisis de sistemas *UGL* con *no linealidad* y *nivel de ductilidad* altos en los que se presentan errores numéricos indeseables que impiden, en la mayoría de los casos, obtener la solución del problema.

### 8.1.1 Causas de la imprecisión de la *LEG*

Los errores obtenidos en la estimación de la respuesta de un sistema histerético *UGL* se deben a las siguientes causas:

1. Influye la pequeña cantidad de acelerogramas que sirvieron de base para, a través de simulación, obtener los resultados "*exactos*" con los que se determinó la precisión de la *LEG*.
2. La *LEG* supone un comportamiento *gaussiano* para todas las variables que representan la respuesta del sistema *UGL*, pero realmente ésta es *no gaussiana*. Por ejemplo, físicamente la fuerza restauradora está obligada a caer en una región finita, lo que implica que su densidad de probabilidad es *no gaussiana*.
3. La técnica *LEG* usada en esta tesis supone que el proceso aleatorio de excitación tiene media cero. El proceso aleatorio formado por solamente 50 acelerogramas tiene media ligeramente diferente de cero. Esto influye en los resultados obtenidos en la tesis, pero no es una restricción para la *LEG* ya que este método puede generalizarse para procesos con media diferente de cero.

4. El proceso formado por los 50 acelerogramas es con todo rigor un proceso *no estacionario* que varía en amplitud y frecuencia. La técnica *LEG* usada en esta tesis considera la variación de la amplitud del proceso, pero no toma en cuenta el cambio en el contenido de frecuencia. Según Ruiz (1995) el usar un proceso modulado en amplitud y frecuencia conduce a una respuesta estadística mayor que la que se obtiene al usar un proceso oscilatorio. Esto aumentaría la precisión de *LEG*.
5. Se obtuvo que la magnitud del error es mayor para periodos cortos y *no linealidades* y *ductilidades* altas. Si la *no linealidad* es alta, la transición del intervalo de comportamiento elástico al inelástico es más brusca y las derivadas indicadas en las ecuaciones (3.34) dan lugar a una peor aproximación de los parámetros linealizadores (obsérvese que esta es una hipótesis importante de la *LEG*, ver sección 2.2). Si la *ductilidad* es alta se tienen valores bajos de  $f_y$  que junto con valores grandes de  $\alpha_6$  conducen a valores altos de  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  (ver ecuaciones 3.25 y 3.26). Si el periodo es corto, la rigidez es pequeña e influye también en la magnitud de los parámetros  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$ . Todo esto implica, en los casos donde el periodo es corto y la *no linealidad* y *ductilidad* son altas, manejar números grandes en combinación con números pequeños lo que hace que el método numérico se vuelva inestable para ciertas combinaciones de  $\eta$ ,  $\alpha_6$  y  $T$ .

## 8.2 ASPECTOS OPERATIVOS

### 8.2.1 Caso estacionario

En el procedimiento iterativo empleado para resolver la ecuación (5.1) se emplea el factor  $\beta$  (ver ecuaciones 5.3) para controlar la rapidez de la convergencia del método numérico. En este trabajo se usó  $\beta=3$  y en términos generales no se presentaron problemas, excepto en el caso *IA6* con *nivel de ductilidad* alto en donde a medida que aumentaba el valor de  $\alpha_6$  se requería un factor  $\beta$  más alto. Para  $\alpha_6 > 1$  se usó  $\beta=16$  y  $\beta=32$ , sin embargo no se eliminan los problemas numéricos que evitan la obtención de la solución del problema: por ejemplo resultan coeficientes de correlación  $\rho_{xz}$  ligeramente mayores que uno y varianzas de desplazamiento y velocidad negativas. El uso de valores altos de  $\beta$  aumenta la estabilidad del método numérico pero conduce a un mayor número de iteraciones con el consiguiente incremento del tiempo de cálculo. El número promedio de iteraciones requeridas en el caso *IA6* fue de 638 (con un mínimo de 132 y un máximo de 3457). En los demás casos el número promedio de iteraciones requeridas fue de 62 (con un mínimo de 36 y un máximo de 276).

### 8.2.2 Caso no estacionario

En este caso se presentaron errores numéricos con  $\alpha_6 > 1$  y *niveles de ductilidad* altos, principalmente en periodos cortos. Inclusive se obtuvieron, en algunos casos, rapidezces de cambio negativas de la energía (Fig. 7.32). El tamaño del paso interno de integración  $H$  y el error relativo  $TOL$  empleado en la subrutina del *IMSL* para resolver las ecuaciones diferenciales fue de  $1 \times 10^{-5}$  y  $1 \times 10^{-10}$  respectivamente.

### 8.2.3 Simulación de Monte Carlo

En este caso no se presentó ningún tipo de error numérico. Se usó el mismo método de solución de ecuaciones diferenciales del caso anterior con  $H = 1 \times 10^{-5}$  y  $TOL = 1 \times 10^{-10}$ .

### 8.3 EFICIENCIA COMPUTACIONAL

En esta tesis se define a la eficiencia computacional de la *LEG* como la razón entre la duración de los cálculos en un análisis de simulación de Monte Carlo y la duración de los cálculos en un análisis de *LEG*.

Se midió la duración del proceso para obtener cada una de las curvas de las Figs. 7.13 a 7.41. Los cálculos se efectuaron con una PC con procesador Pentium 166MHz. Para el caso de la solución con *LEG* (casos *estacionario* y *no estacionario*) cada curva consta de 60 puntos, es decir se analizaron 60 sistemas *UGL*. En el caso de la solución con simulación de Monte Carlo cada curva está formada por 18 puntos, es decir se analizaron 18 sistemas cada uno excitado con 50 acelerogramas.

Los tiempos del cálculo de una curva con 60 puntos se multiplicaron por un factor igual a 18/60 con el objeto de determinar una duración equivalente del proceso del cálculo de una curva que tuviese 18 puntos, y poder así comparar estos tiempos equivalentes con los tiempos obtenidos en el caso de simulación.

En la Fig. 8.1 se muestran los tiempos de cálculo para cada caso analizado. Se observa lo siguiente:

- En el caso del estudio con simulación de Monte Carlo se obtuvieron en general duraciones similares en todos los casos de estudio, excepto en el caso *IDD* cuyo incremento en la duración se atribuye a que la sesión de cálculo fue en tiempo compartido. Sin considerar este caso, la duración promedio de los cálculos es de 7 horas 56 minutos.
- Para el caso de *LEG estacionaria* se tuvieron problemas, como se menciona arriba, en el caso *IA6* en donde se tuvo que aumentar el factor  $\beta$  con el consiguiente incremento de la duración de los cálculos. Para este caso la duración promedio de los cálculos es de 2.4 minutos. En los demás casos la duración promedio de cálculos es de 0.3 minutos con un factor  $\beta=3$ .
- Para el caso de *LEG no estacionaria* la duración promedio de los cálculos es de 33.4 minutos. Obsérvese el incremento de la duración para el caso *IA6* con *nivel de ductilidad* alto.

Con las duraciones listadas arriba, se encuentra que la eficiencia del método *LEG* (tal como se definió al principio de esta sección) es de 200 a 1500 en el caso *estacionario* y del orden de 14 en el caso *no estacionario*. Esto significa que el tiempo de cómputo de la *LEG* caso *estacionario* es de 0.067% a 0.5% del tiempo de cómputo de la simulación de Monte Carlo; y que el tiempo de cómputo de la *LEG* caso *no estacionario* es el 7.14% del tiempo de cómputo de la simulación de Monte Carlo.

Se concluye que la disminución de la duración de los cálculos con el método *LEG* hace que esta técnica resulte bastante atractiva.

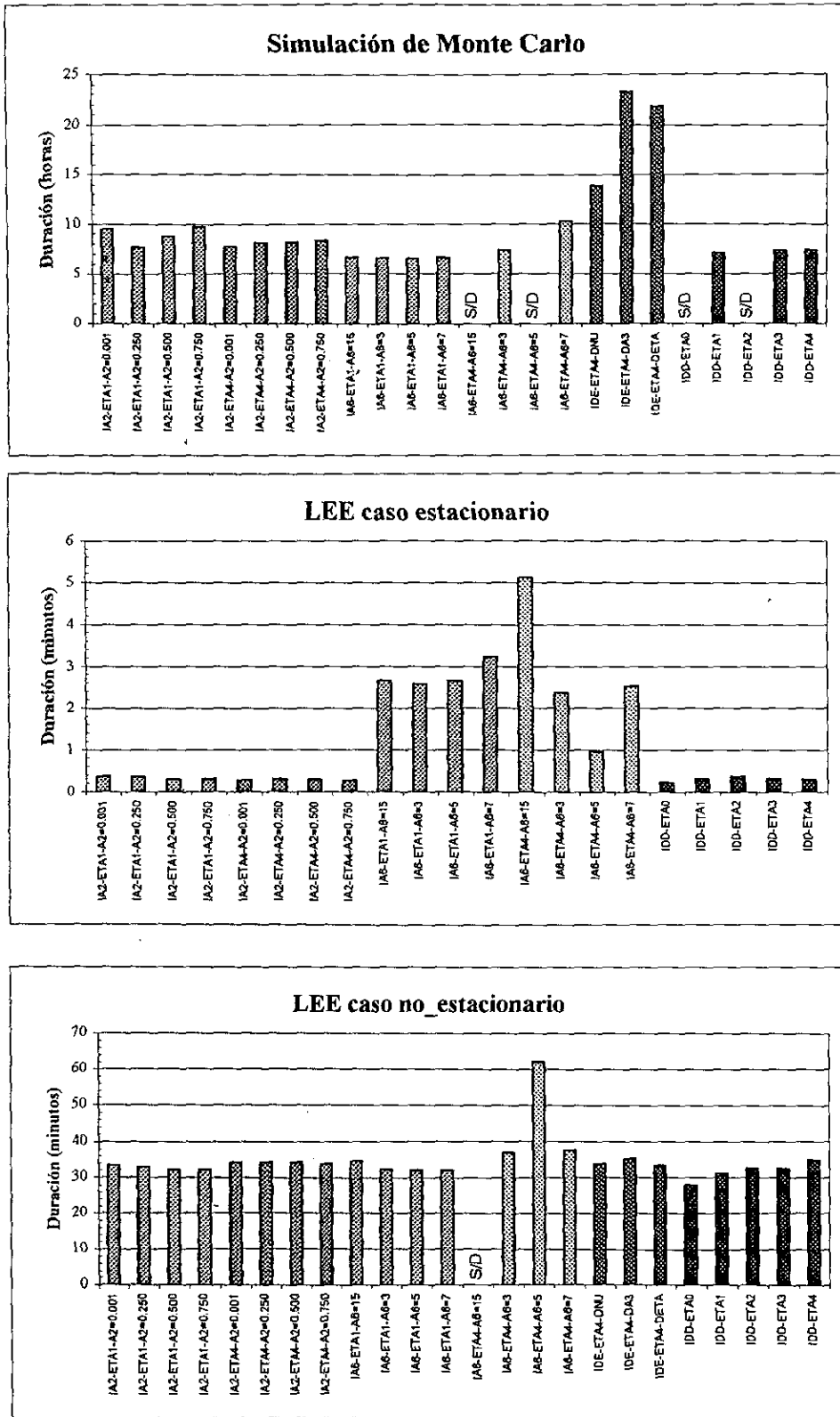


Figura 8.1 Duración de los cálculos para la obtención de una curva con 18 puntos

## APLICACIÓN: OBTENCIÓN DE ESPECTROS PROBABILISTAS DE RESPUESTA INELÁSTICA

Se muestra un método alternativo para el cálculo de *espectros* probabilistas de respuesta *no lineal*. Este método se basa en la estadística de la respuesta de un sistema *UGL no lineal* obtenida con la técnica *LEG* descrita en los capítulos anteriores. Los *espectros* obtenidos toman en cuenta la variabilidad de la respuesta de sistemas *no lineales* debida a las incertidumbres inherentes en la intensidad y características del movimiento sísmico, así como la degradación de rigidez y/o resistencia del sistema. La estimación de dichos *espectros* con este método resulta atractiva comparada con la tradicional y costosa técnica de simulación de Monte Carlo.

### 9.1 ANTECEDENTES

Con el objeto de establecer *espectros* de diseño sísmico, la aleatoriedad de la excitación se ha tomado en cuenta de forma distinta en varios estudios. Algunos consideran que las ordenadas de dichos *espectros* corresponden a los valores esperados de las respuestas máximas ante los temblores más grandes que sea razonable esperar. Otros determinan envolventes de los *espectros* lineales de respuesta para diferentes grados de amortiguamiento, a través de factores que amplifican el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del terreno. En otros estudios los *espectros* de diseño se definen de manera que su ordenada para cualquier valor del período de vibración de una estructura corresponde a la misma tasa anual de excedencia.

Por otra parte existen pocos estudios que consideran el comportamiento *no lineal* de las estructuras en el cálculo de *espectros de respuesta probabilista*. En diseño sísmico se usan factores de reducción empíricos para tomar en cuenta las reducciones en las fuerzas de diseño debidas al comportamiento inelástico. Algunos estudios (i.e. Ordaz y Perez-Rocha, 1993, Ordaz y Reinoso, 1987, Miranda 1993a, Miranda 1993b) emplean un número considerable de análisis deterministas para llegar a

establecer *espectros de respuesta probabilista*, factores de reducción de fuerzas sísmicas o estimar directamente la resistencia lateral requerida para tener un control adecuado de las deformaciones inelásticas de una estructura ante sismos severos.

La técnica que se describe en este capítulo considera, además de la incertidumbre en la respuesta debida a la incertidumbre en la excitación, el comportamiento *no lineal* del sistema. Esta técnica es elegante y versátil en el cálculo de *espectros* probabilistas de respuesta *no lineal* con los cuales se puede llegar a establecer *espectros* de diseño, *espectros de isoconfiabilidad*, estudiar factores de reducción de fuerzas sísmicas, etc. El uso de los resultados obtenidos aquí requiere de la hipótesis de que el proceso aleatorio de excitación sea un proceso *ergódico gaussiano* con media cero, para que los parámetros de su modelo puedan determinarse a través de un acelerograma representativo de él.

El objetivo es mostrar una técnica potencial en el cálculo de *espectros* de respuesta cuya principal ventaja es la reducción del tiempo de cómputo en relación con la técnica de Monte Carlo.

## 9.2 METODOLOGÍA

En los capítulos anteriores se ha descrito ampliamente la técnica mediante la cual se calcula la estadística de la respuesta de un sistema *UGL histerético* sujeto a una excitación aleatoria *gaussiana* con media cero. Enseguida se describe la manera de determinar, a partir de los resultados obtenidos con la *LEG*, en particular la desviación estándar del desplazamiento y de la velocidad, el valor esperado del desplazamiento máximo absoluto. Se muestra la metodología usada para calcular *espectros probabilistas* de procesos aleatorios de excitación de banda angosta.

### 9.2.1 Valor esperado del desplazamiento máximo absoluto

Con el fin de obtener el valor esperado del desplazamiento máximo absoluto que se presenta en el intervalo de tiempo en el que la excitación es intensa ( $T_I$ ) se emplea el concepto de *factor pico*. El cálculo de este *factor pico* depende del tipo de modelo de excitación. Se consideran dos casos: cuando el proceso aleatorio de excitación se modela como un proceso *estacionario* y cuando se modela como proceso *no estacionario*.

**CASO ESTACIONARIO.** Se sabe que si el proceso de respuesta es un proceso aleatorio *gaussiano estacionario* con media cero, el valor esperado del desplazamiento máximo absoluto que se presenta en el intervalo de tiempo  $T_I$ , es igual a

$$\chi = E\left[|x|_{\max}\right] = r\sigma_x \quad (9.1)$$

donde  $r$  se conoce como *factor pico*. Usando las expresiones derivadas por Cartwright y Longuet-Higgins (1956) con algunas fórmulas de Rice (1954), Davenport (1964) derivó la siguiente expresión para el cálculo del *factor pico*

$$r = \frac{\chi}{\sigma_x} = \sqrt{2 \ln N} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N}} \quad (9.2)$$

donde

$$N = v_0 T_I = \frac{\sigma_v}{\pi \sigma_x} T_I \quad (9.3)$$

En las expresiones anteriores  $N$  y  $v_0$  son el número esperado y la tasa de cruces del eje del tiempo en el intervalo  $T_I$  del proceso de respuesta;  $\gamma=0.577216\dots$  es la constante de Euler.  $\sigma_x$  y  $\sigma_v$  son la desviación estándar del desplazamiento y de la velocidad del sistema.

**CASO NO ESTACIONARIO.** La ecuación (9.1) no es estrictamente aplicable a procesos *no estacionarios*. De los resultados obtenidos en este trabajo se observa que la siguiente expresión es adecuada para el cálculo de  $\chi$

$$\chi = r(\sigma_x)_{max} \quad (9.4)$$

donde el *factor pico* se calcula con la expresión (9.2), considerando

$$N = \frac{m \sigma_v}{\pi (\sigma_x)_{max}} T_I \quad (9.5)$$

aquí  $(\sigma_x)_{max}$  es la máxima desviación estándar del desplazamiento y  $m \sigma_v$  es la desviación estándar de la velocidad en el instante en el que se presenta  $(\sigma_x)_{max}$ .

### 9.2.2 Demanda de ductilidad

Una vez que se conoce el valor esperado del desplazamiento máximo absoluto se puede determinar la *demanda de ductilidad* ( $\mu$ ) del sistema. Ésta se define como el cociente de la esperanza del desplazamiento máximo absoluto  $\chi$  y el desplazamiento de fluencia  $x_y$ , es decir

$$\mu = \frac{\chi}{x_y} = \frac{\chi \cdot k}{f_y} \quad (9.6)$$

donde  $f_y$  es la fuerza de fluencia del sistema y  $k$  es la rigidez inicial del mismo. Obsérvese que  $\mu$  es una cantidad aleatoria. Si el valor del parámetro  $\alpha_6$  del modelo de Baber y Wen es pequeño,  $\mu=1$  no implica un comportamiento elástico lineal, ya que la relación fuerza-desplazamiento deja de ser lineal y elástica desde valores pequeños del desplazamiento (obsérvese la Figura 3.4).

### 9.2.3 Cálculo de espectros de ductilidad constante

Para determinar *espectros de ductilidad constante* existen dos técnicas.

1. En la primera se calculan para un sistema con periodo de vibración  $T$  dado, varias respuestas máximas  $\chi$  para diferentes valores de la fuerza de fluencia  $f_y$ , determinando al mismo tiempo la *demanda de ductilidad* asociada. Con esto se obtiene, para este sistema, una serie de puntos con coordenadas  $(\chi_i, \mu_i)$ . El proceso se repite para otros sistemas con diferentes periodos de vibración. Para construir el *espectro de ductilidad constante* se interpola linealmente para el valor de la *ductilidad* deseada  $\mu$ , utilizando los puntos  $(\chi_i, \mu_i)$  de cada periodo del *espectro*.

2. En la segunda técnica se determina para cada periodo del sistema la respuesta asociada a la *demanda de ductilidad* deseada  $\mu$ . Esto requiere del siguiente proceso iterativo para hallar la fuerza de fluencia necesaria para obtener la *demanda de ductilidad* requerida:

Se determinan las respuestas máximas y las *demandas de ductilidad* asociadas del sistema con periodo  $T$ , para dos fuerzas de fluencia arbitrarias, obteniendo los puntos  $A(f_{y1}, \mu_1)$  y  $B(f_{y2}, \mu_2)$ . Con estos puntos se inicia un proceso iterativo usando el método de bisección para determinar el valor de  $f_y$  asociada a la *ductilidad*  $\mu$ . En el método de bisección se supone que  $\log(f_{yi})$  y  $\log(\mu_i)$  se relacionan linealmente lo cual acelera la convergencia de la solución. Cuando el error en la estimación de  $\mu$  es suficientemente pequeño, el proceso se detiene y se repiten los mismos cálculos para otro valor del periodo de vibración hasta cubrir el intervalo deseado.

La ventaja del primer método es la rapidez de los cálculos, ya que no se usa ningún proceso iterativo; además se pueden obtener al mismo tiempo varios *espectros* inelásticos para diferentes *ductilidades*. La ventaja del segundo método es la precisión de la estimación de la respuesta para cierta *ductilidad* deseada. El segundo método se seleccionó para determinar los *espectros* presentados en la siguiente sección.

Hay otros parámetros que no se discuten aquí, pero que se consideran en el cálculo de dichos *espectros*, tal como la existencia varios valores de  $f_y$  para una misma *demanda de ductilidad*  $\mu$ . Esto se debe a que la *demanda de ductilidad* no aumenta siempre monótonamente al decrecer  $f_y$ .

### 9.3 RESULTADOS

Con el fin de calibrar esta técnica, se calculan *espectros* de respuesta para un proceso aleatorio de excitación cuyas propiedades estadísticas se obtienen a partir del acelerograma SCTEW85. Las propiedades de este proceso se calcularon en la sección 7.3. La duración de la parte intensa es  $T_I=17.96s$ , determinada con la ecuación (7.5). Las propiedades de los sistemas analizados son las que corresponden al caso de estudio IDD descrito en la sección 7.2, excepto que los valores de  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  (funciones de la fuerza de fluencia) se obtienen tal que  $\mu=1$  y  $\mu=4$ . Obsérvese que en ese caso de estudio la *no linealidad* es baja ( $\alpha_6=1$ ).

Los resultados obtenidos con *LEG* se comparan con los obtenidos con simulación de Monte Carlo. Las Figs. 9.1 y 9.2 muestran los resultados asociados a las *demandas de ductilidad*  $\mu = 1$  y  $\mu = 4$ . Se grafica la desviación estándar del desplazamiento ( $\sigma_x$ ), el *factor pico* ( $r$ ), la esperanza del desplazamiento máximo absoluto ( $\chi$ ), la fuerza de fluencia ( $f_y$ ), la esperanza de la rapidez de cambio de la energía ( $E[dE/dt]$ ) y la esperanza de la energía ( $E[E]$ ). Se observa que el caso *no estacionario* es el que predice con mejor aproximación estas cantidades y que los errores son mayores cuando la *demanda de ductilidad* es uno. En la Fig. 9.3 se muestra el error relativo (ecuación 7.4) en el cálculo de  $\chi$ . Para *demandas de ductilidad* pequeñas, el error relativo es aceptable sólo en periodos largos ( $2.5s < T \leq 6.0s$ ). Para *demandas de ductilidad* altas el error relativo es aceptable (menor que 20%) en periodos intermedios ( $1.0s < T \leq 2.5s$ ) y largos.

En las Figs. 9.1 y 9.2 se ve que el *factor pico* se sobrestima en mayor grado en periodos intermedios y cuando la *demanda de ductilidad* es uno. Obsérvese que éste no depende del tipo de modelo de la excitación (las curvas del *factor pico* para el caso *estacionario* y *no estacionario* coinciden).



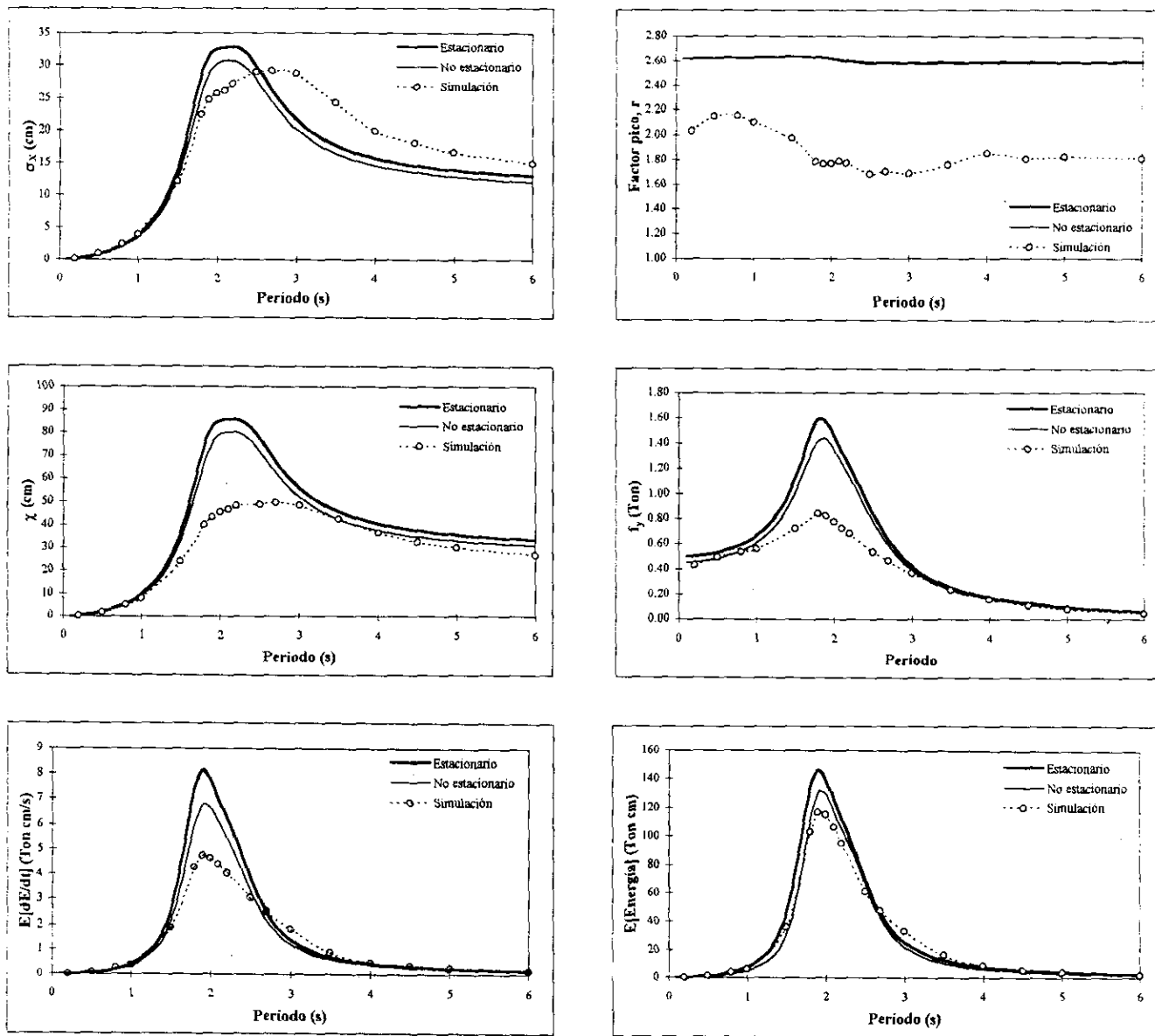


Figura 9.1 Resultados para ductilidad  $\mu=1$

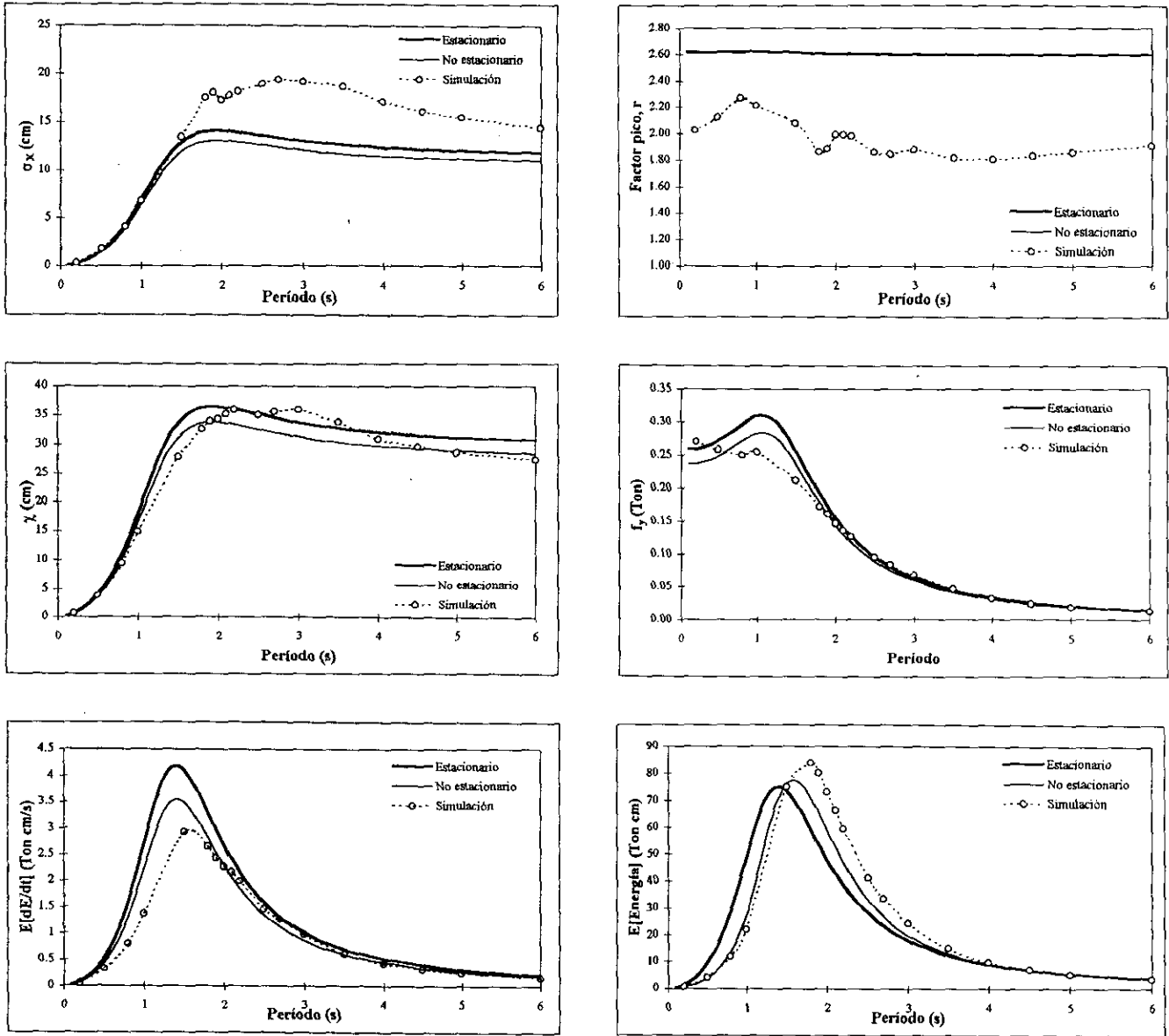


Figura 9.2 Resultados para ductilidad  $\mu=4$

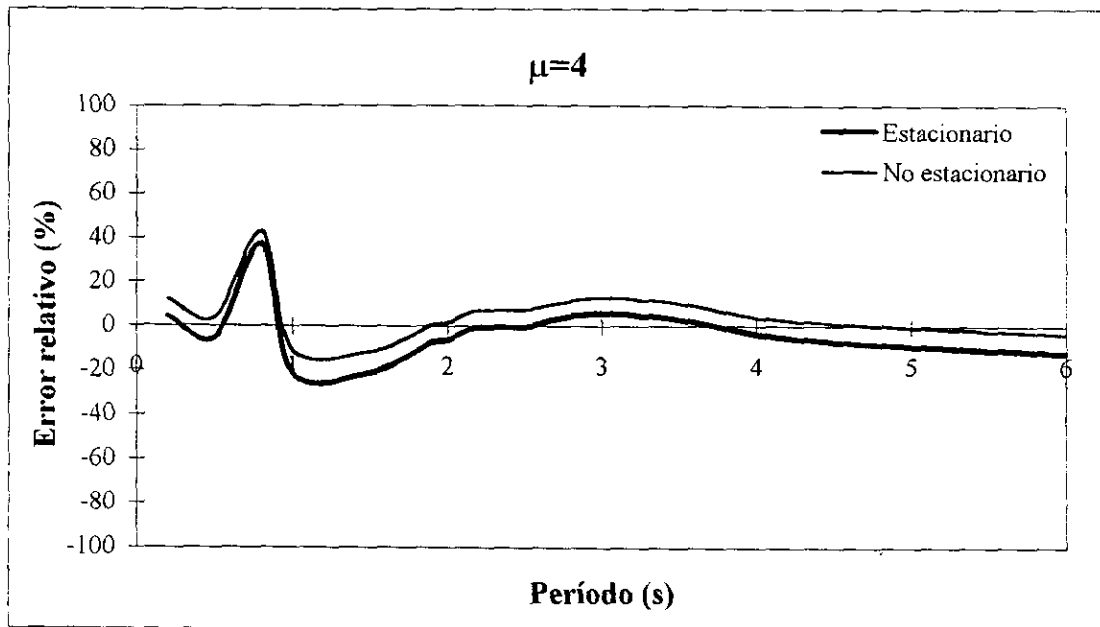
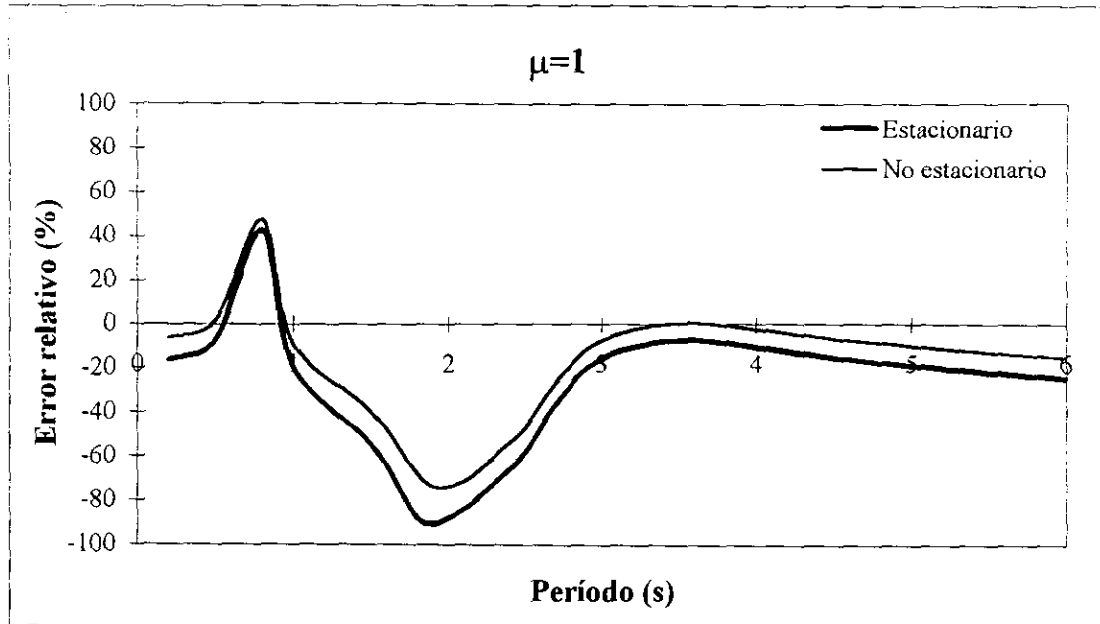


Figura 9.3 Errores relativos en la estimación de  $\chi$

La magnitud de los errores relativos se explica de la siguiente manera:

El error relativo en el cálculo de la desviación estándar del desplazamiento y de la velocidad se absorbe en el número esperado de cruces del eje del tiempo  $N$  (ecuaciones 9.3 y 9.5). Por otra parte la duración de la parte intensa del registro  $T_I$  no influye mucho, ya que puede probarse que cuando la tasa de cruces del eje del tiempo es del orden de 0.85 (magnitud promedio obtenida en los análisis anteriores), un incremento de 100% en  $T_I$  se refleja en un incremento aproximado de 10% en el *factor pico*. Por estas dos razones la *LEG* no influye de manera importante en la magnitud del *factor pico* sino más bien esta última se ve afectada por la naturaleza de la ecuación (9.2). El error en el cálculo del valor esperado del desplazamiento máximo absoluto se reduce (cuando  $\mu=4$ ) debido a que el orden de la subestimación de la desviación estándar del desplazamiento se compensa con el de la sobrestimación del *factor pico*. Cuando  $\mu=1$  el *factor pico* se sobrestima demasiado y por lo tanto  $\chi$  también.

Se hace ver que, aunque no se consideró en los espectros anteriores, puede tomarse en cuenta la posible degradación de las propiedades mecánicas de los sistemas *UGL*.

El tiempo de cómputo correspondiente al cálculo de un *espectro* con dieciocho puntos se muestra en la siguiente tabla.

**Tabla 9.1** Tiempos de cómputo (minutos)

<i>Ductilidad</i> \ Análisis	<i>LEG estacionaria</i>	<i>LEG no estacionaria</i>	<i>Simulación (50 registros)</i>
$\mu=1$	0.89	88.87	1666.60
$\mu=4$	1.98	128.27	1401.83

En los análisis de simulación y *LEG no estacionaria* se consideraron 4502 pasos de integración. Los tiempos mostrados en la tabla 9.1 resultaron al usar una PC con procesador Pentium 166MHz y dependen en gran medida de la fuerza de fluencia que se considera al iniciar el proceso iterativo descrito en el inciso dos de la sección 9.2.3. Dichas fuerzas fueron las mismas para la simulación y para la *LEG*.

De la tabla 9.1 se obtiene que la eficiencia computacional de la *LEG* (tal como se definió en la sección 8.3) para determinar espectros probabilistas de respuesta *no lineal* es de 700 a 1900 en el caso *estacionario* y de 11 a 19 en el caso *no estacionario*.

---

# CAPÍTULO

# 10

---

## CONCLUSIONES

### 10.1 CONCLUSIONES

A partir de los resultados presentados en esta tesis se obtienen las siguientes conclusiones:

#### **SOBRE LA ESTADÍSTICA DE LA RESPUESTA:**

- El modelo *no estacionario* de la excitación conduce a resultados más cercanos a los obtenidos con simulación de Monte Carlo que el modelo *estacionario*.
- El error relativo depende en gran medida del periodo natural de vibración del sistema *UGL*. En general, en periodos cortos ( $T \leq 1.0s$ ) se presentan errores relativos altos. Cabe mencionar que en periodos cortos la respuesta es baja y entonces el *error absoluto* (valor del numerador de la ecuación 7.4) asociado a *errores relativos* altos, es pequeño.
- *Grosso modo*, el método *LEG* subestima la desviación estándar del desplazamiento con un *error relativo promedio* menor que 45%. La desviación estándar de la velocidad de sistemas *UGL* de periodo intermedio ( $1.0s < T \leq 2.5s$ ) a largo ( $2.5s < T \leq 6.0s$ ), se sobrestima con un *error relativo promedio* menor que 25%. La rapidez de cambio de la energía *histerética* disipada tiene un *error relativo promedio* del orden de 40% excepto en sistemas *UGL* de periodo corto con nivel de ductilidad  $\eta \neq 1$  donde esta cantidad tiende a sobrestimarse con un error considerable.
- Valores altos de  $\alpha_6$  propician un incremento en el *error relativo promedio*, afectando principalmente al valor de la rapidez de cambio de la energía *histerética*.
- Valores altos de  $\eta$  y  $\alpha_6$  junto con un modelo de excitación *estacionario* conducen a errores numéricos que impiden obtener la solución al problema.

- Del análisis de las Figs. 7.42 a 7.46 se deduce lo siguiente. Si se aceptan errores relativos de hasta 15% el método *LEG* es adecuado para el cálculo de:
  - ◆ la desviación estándar del desplazamiento de sistemas *UGL* de periodo intermedio con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo  $0.001 \leq \alpha_2 \leq 0.75$ , niveles de *no linealidad* en el intervalo  $1 \leq \alpha_6 \leq 5$  y nivel de ductilidad  $0 \leq \eta \leq 2$ .
  - ◆ la desviación estándar de la velocidad de sistemas *UGL* de periodo intermedio a largo con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo  $0.015 \leq \alpha_2 \leq 0.25$ , niveles de *no linealidad* en el intervalo  $1 \leq \alpha_6 \leq 7$  y nivel de ductilidad  $1 \leq \eta \leq 4$ .
  - ◆ la rapidez de cambio de la energía *histerética* de sistemas *UGL* de periodo intermedio a largo con valores de la *rigidez de postfluencia* en el intervalo  $0.001 \leq \alpha_2 \leq 0.5$ , niveles de *no linealidad* en el intervalo  $1 \leq \alpha_6 \leq 4$  y nivel de ductilidad  $\eta \geq 3$ .
- Una de las ventajas que interviene de manera importante en la decisión del uso de la *LEG* es su eficiencia computacional la cual se definió en este trabajo como la razón entre la duración de los cálculos en un análisis de simulación de Monte Carlo y la duración de los cálculos en un análisis de *LEG*. En esta tesis se encontró que:
  - ◆ el tiempo de cómputo de la *LEG* caso *estacionario* es de 0.067% a 0.5% del tiempo de cómputo de la simulación de Monte Carlo. Estos valores implican una eficiencia computacional entre 200 y 1500.
  - ◆ el tiempo de cómputo de la *LEG* caso *no estacionario* es el 7.14% del tiempo de cómputo de la simulación de Monte Carlo. Este valor implica una eficiencia computacional de 14.
 El tiempo de cálculo de un análisis de respuesta *no lineal* puede disminuir a costa de tener errores relativos del orden señalado arriba.

#### **SOBRE ESPECTROS PROBABILISTAS DE RESPUESTA NO LINEAL:**

- En la determinación de espectros probabilistas de respuesta *no lineal*, el modelo *no estacionario* de la excitación conduce a mejores resultados que el *estacionario*.
- Para *demandas de ductilidad* pequeñas ( $\mu \approx 1$ ), el error relativo es aceptable (menor que 20%) sólo en periodos largos. Para *demandas de ductilidad* altas ( $\mu \approx 4$ ) el error relativo es aceptable (menor que 15%) en periodos intermedios y largos. En periodos cortos se presentan errores relativos altos independientemente de la *demanda de ductilidad*.
- Se analizaron sistemas con *no linealidad* baja ( $\alpha_6 = 1$ ). Si el valor de  $\alpha_6$  se incrementa, el error relativo en la estimación del valor esperado del desplazamiento máximo absoluto puede ser mayor que los mencionados con anterioridad.
- Se observó que la naturaleza de la ecuación (9.2) sobrestima el factor pico usado en el cálculo del valor esperado del desplazamiento máximo absoluto.
- La eficiencia computacional de la *LEG* para determinar espectros probabilistas de respuesta *no lineal* es de 700 a 1900 en el caso *estacionario* y de 11 a 19 en el caso *no estacionario*.

## 10.2 ESTUDIOS FUTUROS

De este trabajo se deduce la necesidad de realizar varios estudios que lo complementen. Algunos son:

1. Generalizar la *linealización equivalente* para procesos de excitación con media diferente de cero.
2. Realizar un estudio más extenso sobre la influencia de la degradación de las propiedades mecánicas de los materiales.
3. Considerar, además de la variación de la amplitud del proceso de excitación, el cambio en el contenido de frecuencia.
4. Para futuras calibraciones es deseable usar un número más alto de acelerogramas en un estudio de simulación.
5. Explorar la forma de obtener las características del modelo de excitación, sea *estacionario* o *no estacionario*, a través de todo el conjunto de acelerogramas que se use en la simulación y no de uno sólo como se hizo en esta tesis al suponer *ergodicidad*. En este caso la *densidad espectral* del proceso de excitación se calcularía a través de la *función de autocorrelación* del mismo.
6. Considerar que la respuesta es *no gaussiana*. En este caso se tienen dos opciones:
  - Pueden adoptarse métodos teóricos propuestos con el fin de mejorar la *linealización equivalente* (i.e. Hurtado y Barbat, 1993; y Pradlwarter y Schuëller, 1991). Las mejoras, como la forma de la densidad de probabilidad de la respuesta, se basarían en los resultados obtenidos en este trabajo.
  - Desarrollar un esquema empírico de corrección de errores, basado en los resultados de este estudio paramétrico (como lo muestra Park, 1992).
7. En cuanto a los espectros probabilistas, puede explorarse la posibilidad de determinar el valor máximo absoluto del desplazamiento, usando la siguiente expresión para el cálculo del factor pico (Cartwright y Longuet-Higgins, 1956; ó Choi y Wu, 1991):

$$r = \left( \frac{2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2/2} \right)^{1/2} \left( \sqrt{\ln \left( (1 - \varepsilon^2)^{1/2} N \right)} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{\ln \left( (1 - \varepsilon^2)^{1/2} N \right)}} \right)$$

donde  $N$  y  $\gamma$  se describen en el capítulo 9 y  $\varepsilon$  es una medida del ancho de banda del proceso de respuesta que tiene un valor entre cero y uno. Para procesos de banda angosta  $\varepsilon = 0$  y en procesos de banda ancha  $\varepsilon = 1$ . El proceso de excitación usado en la tesis no es estrictamente de banda angosta. Al considerar el ancho de banda del proceso de respuesta, esta expresión podría mejorar los resultados ya que el factor pico disminuye conforme el ancho de banda aumenta.

8. Realizar estudios sobre la aplicación de la *linealización equivalente* a sistemas de múltiples grados de libertad.

---

## REFERENCIAS

- Alamilla, J.L. (1997), *Simulación de Temblores en el Valle de México Mediante Procesos Estocásticos Modulados en Amplitud y Frecuencia*, Tesis presentada en la DEPFI, UNAM como requisito para obtener el grado de Maestro en Ingeniería.
- Atalik, T.S. y Utku, S., (1976), "Stochastic Linearization of Multi-Degree-of-Freedom Non-Linear Systems." *Earthquake Engr. and Struct. Dynam.*, Vol. 4, pp. 411-420.
- Baber, T.T. (1986), "Modal Analysis for Random Vibration of Hysteretic Frames." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, pp. 841-859.
- Baber, T.T. y Wen, Y.K. (1981), "Random Vibration of Hysteretic, Degrading Systems." *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 107, no.EM6, pp.1069-1087.
- Baber, T.T. y Wen, Y.K. (1982), "Stochastic Response of Multistorey Yielding Frames." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, no. 3, pp. 403-416.
- Bard, Y. (1974), *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York and London.
- Bartels, R.H. y Stewart, G.W. (1972), "Solution of the Matrix Equation  $AX+XB=C$ ." *Algorithm 432 in Communications of the ACM*, Vol. 15, no. 9.
- Beaman, J.J., (1980), "Accuracy of Statistical Linearization, in New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics", editado por P.J. Holmes, SIAM, Philadelphia, PA, 195-207.
- Beavers, A.N.Jr. y Denman, E.D. (1975), "A New Solution Method for the Liapunov Matrix Equation." *SIAM J. Appl. Maths.*, Vol. 29, pp. 416-421.
- Bendat, J.S. y Piersol, A.G. (1986), *Random Data. Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons. 2ª edición.
- Bendat, J.S. y Piersol, A.G. (1993), *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. John Wiley & Sons. 2ª edición.
- Bolotin, V.V. (1960). "Statistical Theory of Aseismic Design of Structures", En: *Proceedings of the 2nd. World Conference on Earthquake Engineering*, Tokio y Kyoto, Japón, pp. 1365-1374.



- Booton, R.C. (1954), "Non-Linear Control Systems with Random Inputs", *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-1, 91-18.
- Booton, R.C., Mathews, M.V. y Seifert, W.W. (1953), "Nonlinear Servomechanisms with Random Inputs." Dyn. Anal. Control Lab., rep. no. 70, MIT, Cambridge, Mass., USA.
- Bouc, R. (1967). "Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis." *Proc. 4th Int. Conf. Nonlinear Oscillations*, Praga, Checoslovaquia.
- Branstetter, L.J., Jeong, G.D., Yao, J.T., Wen, Y.K. y Lin, Y.K. (1988), "Mathematical Modelling of Structural Behaviour During Earthquakes." *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, no. 3, pp. 130-145.
- Cartwright, D.E. y Longuet-Higgins, M.S. (1956), "The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function" *Proc. of the Royal Society of London, Series A*, 237, pp. 212-232.
- Casciati, F. (1987), "Non-Linear Stochastic Dynamics of Large Structural Systems by Equivalent Linearization." *Proc. ICASP5*, Vancouver, Vol. 2, pp. 1165-1172.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1985), "Methods of Non-Linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility." *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 90, pp. 341-356.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1986), "Non-Linear Stochastic Dynamics by Equivalent Linearization", En: *Methods of Stochastic Structural Mechanics*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Workshop on Stochastic Methods in Structural Mechanics, Pavia, pp. 571-586.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1988), "Stochastic Equivalent Linearization for 3-D Frames." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, no. 10, pp.1760-1771.
- Casciati, F. y Faravelli, L. (1991), *Fragility Analysis of Complex Structural Systems*. Research Studies Press, Taunton, UK.
- Caughey, T.K. (1960), "Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis." *J. Appl. Mech., ASME*, Vol. 27, pp. 649-652.
- Caughey, T.K. (1963), "Equivalent Linearization Techniques." *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 35, no. 11, pp. 1706-1711.
- Caughey, T.K. (1986), "On the response of Non-Linear Oscillators to Stochastic Excitation." *Prob. Engng Mech.* Vol. 1, pp. 2-4.
- Clough, R.W. y Penzien, J. (1975), *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York.
- Choi, S-T y Wu, W-F. (1991), "Extreme Peak Distribution and Its Applications in Stochastic Structural Dynamics Problems", En: *Stochastic Structural Dynamics 2, New Practical Applications*, 2<sup>nd</sup> International Conference on Stochastic Structural Dynamics, 9 a 11 de Mayo de 1990, Boca Raton, Florida, Springer-Verlag.
- Davenport, A.G. (1964), "Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading", *Proceedings, Institution of Civil Enginners*, Londres, Vol. 28 artículo no. 6739, pp. 187-196.
- Dimarogonas, A. (1996), *Vibration for Engineers*, segunda edición, Prentice-Hall
- Fan, F.-G. y Ahmadi, G. (1988), "Loss of Accuracy and Nonuniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization and Cumulant-Neglected Methods." reporte no. MIE-168, Department of Mechanical and Industrial Engineering, Clarkson University, Potsdam, N.Y.
- Faravelli, L., Casciati, F. y Singh, M.P. (1988), "Stochastic Equivalent Linearization Algorithms and their Applicability to Hysteretic Systems, Meccanica." *Journal of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 23, no. 2, pp. 107-112.
- Gear, C.W. (1971), *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey.
- Hindmarsh, A.C. (1974), "GEAR: Ordinary Differential Equation System Solver." *Lawrence Livermore Laboratory*, reporte UCID-30001, revisión 3.

- Hurtado, J.E. y Barbat, A.H. (1993), "Improved Stochastic Linearization Method Using Mixed Distributions." *Structural Safety*, Vol. 18, no. 1, pp. 49-62.
- Hsu, H.P. (1973), *Análisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano.
- IMSL Inc. (1980), *IMSL Library Reference Manual*, ed. 8, Houston, Tx.
- Iwan, W.D. y Mason, A.B. (1980), "Equivalent Linearization for Systems Subjected to Non-stationary Random Excitation." *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 15, pp. 71-82.
- Iwan, W.D. y Patula, E.J., (1972), "The merit of Different Error Minimization Criteria in Approximate Analysis." *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, Vol. 39, pp. 257-262.
- Kanai, K. (1957), "Semi-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground.", *Univ. Tokyo Bull. Earthquake Res. Inst.*, Vol. 35, pp. 309-325.
- Kazakov, I.E. (1965), "Generalization of the Method of Statistical Linearization to Multidimensional Systems." *Auto. Remote Control*, Vol. 26, pp. 1201-1206.
- Khas'minskii, R.Z. (1968), "On the Averaging Principle for Stochastic Differential Itô Equations" *Kibernetika*, Vol. 4, pp. 260-279 (en ruso).
- Krylov y Bogoliubov, (1937), "Introduction a la Mécanique Nonlinéaire: les Méthodes Approchées et Asymptotiques." Ukr. Akad. Nauk. Inst. de la Mécanique, Chaire de Phys. Math. Ann. t. 1-2. (Traducido por S. Lefshetz en *Annals of Mathematical Studies*, no. 11, Princeton University, Princeton, N.J., 1947).
- Lin, Y.K. (1967), *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill.
- Lin, Y.K. y Cai, G-Q (1995), *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, N.Y.
- Lin, Y.K., Kozin, F., Wen, Y.K., Casciatti, F., Schüeller, G.I., Der Kiureghian, A., Ditlevsen, O. y Vanmarcke, E.H. (1986), "Methods of Stochastic Structural Dynamics", *Structural Safety*, Vol. 3, pp. 167-194.
- Miranda, E. (1993a), "Evaluation of Site-Dependent Inelastic Seismic Design Spectra", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 119, no. 5, pp. 1319-1338.
- Miranda, E. (1993b), "Probabilistic Site-Dependent Non-Linear Spectra", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 22, pp. 1031-1046.
- Mochio, T. Samaras, E. y Shinozuka, M. (1985), "Stochastic Equivalent Linearization for Finite Element Based Reliability Analysis", *Proc. ICOSSAR'85, Kobe*, Vol. I, pp. 375-384.
- Ordaz M. y Perez-Rocha L.E. (1993), "Estimación de espectros de respuesta elastoplástica", *Memorias del X Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Yucatán, México, Vol. II. pp. 998-1005.
- Ordaz M. y Reinoso E. (1987), "Uso de la Teoría de vibraciones aleatorias en la determinación de los espectros de diseño del reglamento para las construcciones del Distrito Federal". *Memorias del VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Qro. México., pp. A155 - A167.
- Pace, I.S. y Barnett, S. (1972), "Comparison of Numerical Methods for Solving Liapunov Matrix Equations." *Int. J. Control*, Vol. 15, pp. 907-915.
- Park, Y.J. (1992), "Equivalent Linearization for Seismic Responses. I: Formulation and Error Analysis." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, no. 11, pp. 2207-2226.
- Pires, J.A. y Tang, M. (1990), "Statistics of Hysteretic Energy Dissipated Under Random Dynamics Loading." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, no. 8, pp. 1706-1722.
- Pivovarov y Vinogradov (1987), "One Application of Bouc's Model for Non-Linear Hysteresis." *J. Sound Vib.*, Vol. 118, pp. 209-216.
- Pradlwarter, H.J. y Schüeller, G.I. (1991), "The Method of Statistical Equivalent Linearization." En: *Structural Dynamics. Recent Advances*, editado por G.I.Schüeller, Springer-Verlag, Berlin.
- Reid, J.G. (1983), *Linear System Fundamentals: Continuous and Discrete, Classic and Modern*,

- McGraw-Hill, New York.
- Rice, S.O. (1954), "Mathematical Analysis of Random Noise." *Bell System Technical Journal*, 1944, Vol. 23, pp.282-332 y 1945, Vol. 24, pp. 46-156. Reimpreso en *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. Wax. Editor, Dover Publications, Inc., New York, 1954.
- Roberts, J.B. (1981), "Response of Nonlinear Mechanical System to Random Excitation. Part 2: Equivalent Linearization and other Methods." *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, no.5, pp. 15-29.
- Roberts, J.B. y Spanos, P.D. (1990), *Random Vibration and Statistical Linearization*. Wiley, New York.
- Rothschild, D. y Jameson, A. (1968), "Comparison of Numerical Methods for Solving Liapunov Matrix Equations." *Int. J. Control*, Vol. 11, pp. 181-198.
- Rubinstein, R.Y. (1981), *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley, New York.
- Ruiz, S.E. (1995), "Influence of the Mathematical Modeling of the Seismic Input on the Stochastic Response of Structural Frames", *Soil Dynamics and Earthquake Engng VII*, Editors: A.S. Cakmak y C. A. Brebbia, Comp. Mech. Publications, pp. 267-274.
- Saragoni, G.R. y Hart, G.C. (1974), "Simulation of Artificial Earthquakes." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2, pp. 249-267.
- Schuëller, G.I., Pandey, M.D. y Pradlwarter, H.J. (1994), "Equivalent Linearization (EQL) in Engineering Practice for Aseismic Design." *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, pp. 95-102.
- Schuëller, G.I., Pradlwarter, H.J. y Bucher, C.G. (1991), "Efficient Computational Procedures for Reliability Estimates of MDOF-Systems." *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 26, no. 6, pp.961-974.
- Shinozuka, M. (1972), "Monte Carlo Solution of Structural Dynamics." *Comps. Structs.*, Vol. 2, pp. 855-874.
- Singh, M.P., Maldonado G., Heller, R. y Faravelli, L. (1988), "Modal Analysis of Nonlinear Hysteretic Structures for Seismic Motions." *IUTAM Symp. On Nonlinear Stochastic Dynamics in Engineering Systems*, editado por Ziegler F. y Schueller G. Springer Verlag, pp. 443-454.
- Soong, T.T. (1973), *Random Differential Equations in Science and Engineering*. Academic New York.
- Soong, T.T. y Grigoriu, M. (1993), *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. PTR Prentice Hall.
- Spanos, P.D. (1981), "Stochastic Linearization in Structural Dynamics." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 34, no. 1, pp. 1-8.
- StatSoft, Inc. (1997), *STATISTICA for Windows [Computer program manual]*. Tulsa, OK: StatSoft, Inc., 2300 East 14th Street, Tulsa, OK 74104
- Stratonovich, R.L. (1964), *Topics in the Theory of Random Noise*, 2 Vols, Gordon and Breach, NY.
- Suzuki, Y. y Minai, R. (1987), "Application of Stochastic Differential Equations to Seismic Reliability Analysis of Hysteretic Structures." En: *Lecture Notes in Engng*. No. 32, editado por Y.K. Lin y R. Minai, Springer, Berlin.
- Tajimi, H. (1960), "A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake.", *Proc. 2<sup>nd</sup>. World Conf. Earthquake Eng.* Tokio y Kyoto, Vol. II, pp. 781-798.
- Thyagarajan, R.S. y Iwan, W.D. (1990), "Performance characteristics of a widely used hysteretic model in structural dynamics." En: *Proc. Fourth U.S. National Conf. On Earthquake Engineering*. Palm Springs, EERI, Oakly, pp. 177-186.

- To, W.S. (1984), "The Response of Nonlinear Structures to Ryom Excitation." Una publicación de Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, D.C., Vol. 16, no. 4, pp. 13-33.
- Vanmarcke, E.H. y Lai, S.P. (1980), "Strong-Motion Duration and RMS Amplitude of Earthquake Records." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 70, no. 4, pp. 1293-1307.
- Visual Numerics Inc. (1992), *IMSL Fortran Numerical Libraries, Version 2.0*. Houston, Tx.
- Weaver, H.J. (1989), *Theory of Discrete and Continuos Fourier Analysis*. J. Wiley, New York.
- Wen, Y.K. (1976), "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems." *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*. Vol. 102, no. EM2, pp. 249-263.
- Wen, Y.K. (1980), "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation." *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 150-154.
- Wolfram, S. (1991), *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, segunda edición.
- Yeh, C.H. y Wen, Y.K. (1989), *Modeling of Nonstationary Earthquake Ground Motion and Biaxial and Torsional Response of Inelastic Structures*. Civil Eng. Studies. Structural Research Series no. 546, University of Illinois, Urbana, IL.
- Zhang, J.H. (1996), "Spectral Analysis for Systems with Hysteretic Restoring Force." *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 10, no.1, pp. 19-28.

---

## AGRADECIMIENTOS

A la *Dra. Sonia E. Ruiz Gómez* por el apoyo que siempre me ha brindado. ¡Gracias por sus enseñanzas y consejos!

A mis sinodales: *Dr. Luis Esteva Maraboto*, *Dr. Ernesto Heredia Zavoni*, *Dr. Mario Ordaz Schroeder* y *Dr. Francisco J. Sánchez Sesma* por sus sugerencias y opiniones a este trabajo.

A *Jorge Alamilla* por facilitarme los acelerogramas sintéticos que sirvieron de base para realizar la calibración de método *LEG*.

A los compañeros que estuvieron y están en el cubículo 213 del Instituto de Ingeniería, quienes han dado alegría a las largas horas de trabajo.

A todos mis amigos y a aquellas personas que directa o indirectamente han influido en mi formación profesional.

A la Facultad de Ingeniería y a sus profesores por la formación profesional proporcionada.

Al Instituto de Ingeniería por las facilidades otorgadas para el uso de sus instalaciones.

Esta tesis se realizó dentro del proyecto 3683P-A9607 "*Criterio de Linealización Equivalente Aplicado a Sistemas Estructurales Sujetos a Sismos*" patrocinado por CONACyT.