



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**¿ COMO PODEMOS DETECTAR HOYOS NEGROS ?**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :**

**F I S I C A**

**P R E S E N T A :**

**ERICA MARIBEL REYES GUTIERREZ**



*DIRECTOR DE TESIS :  
DR. THOMAS ZANNIAS*

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON 1998  
FALLA DE ORIGEN**

2638009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"¿Como podemos detectar hoyos negros?"

realizado por REYES GUTIERREZ ERICA MARIBEL

con número de cuenta 9251759-4 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. THOMAS ZANNIAS *THOMAS ZANNIAS*

Propietario DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA *Dario Juárez*

Propietario DR. SHAHEN HACYAN SALERYAN *Shahen Hacyan Saleryan*

Suplente DR. ALEJANDRO CORICHI RODRIGUEZ GIL *Alejandro Corichi Rodríguez Gil*

Suplente DR. DANY PIERRE PAGE ROLLINET *D.P.*

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura



## AGRADECIMIENTOS

### **Al Dr. Thomas Zannias**

Mi gran admiración y respeto porque sin su ayuda y su gran dedicación no hubiera sido posible la realización de este trabajo. Agradezco su magnífica guía, así como sus valiosas enseñanzas y todo el tiempo dedicado. Pero sobre todo gracias por toda su paciencia.

### **Al Dr. Dario Nuñez**

Hombre dedicado, inteligente y valioso que me brindo su apoyo y sabios consejos, a quien le tengo gran admiración y afecto. Gracias por la confianza, el entusiasmo y la calidez que me brindo a lo largo de este proyecto.

**Al Dr. Dany Page**, del Instituto de Astronomía de la UNAM. Mi sincero agradecimiento por la ayuda brindada con relación a las referencias sobre la Explosión de Supernova. Así como sus comentarios sobre el tema.

**A TI PAPÁ:**

**SR. PEDRO REYES CRUZ,  
GRACIAS POR TU MAGNIFICO EJEMPLO,  
POR SER MI INSPIRACION Y APOYO,  
POR TODO TU AMOR Y  
POR SER MAS QUE PADRE AMIGO  
TE QUIERO MUCHO.**

**A TI MAMÁ**

**SRA. MARY CARMEN GUTIÉRREZ  
GARCIA  
GRACIAS POR TODA UNA VIDA DE  
ENTREGA Y DEDICACIÓN Y CUIDADOS  
A TUS HIJAS,  
POR TU GRAN AMOR, APOYO Y  
COMPRENSIÓN  
TE QUIERO MUCHO**

**A MIS HERMANAS**

**LIC. CLAUDIA REYES GUTIÉRREZ  
GRACIAS POR COMPARTIR CONMIGO  
TODOS TUS LOGROS, SUEÑOS Y  
ANHELOS. GRACIAS POR TU AMOR.  
TE QUIERO CAWIS.**

**LIC. CARMEN REYES GUTIÉRREZ  
GRACIAS POR TODAS LAS ALEGRÍAS  
COMPARTIDAS. POR TU APOYO, POR  
TODO TU AMOR Y AYUDA.  
TE QUIERO BEBE**

**A JORGE CASTRO CESAR  
POR COMPARTIR CONMIGO  
SU VIDA Y SUS IDEALES.**

# INDICE

	<b>págs.</b>
<b>INTRODUCCION</b> .....	I
<b>I. CAPITULO PRIMERO: RELATIVIDAD GENERAL</b> .....	1
1.1. Ecuaciones de campo de Einstein.....	7
1.3 Campos Gravitacionales con simetría esférica .....	10
1.4 Estrellas esféricas.....	16
<b>II. CAPITULO SEGUNDO: HOYOS NEGROS</b> .....	31
2.1 Colapso Gravitacional y Formación de hoyos negros.....	31
2.2 Hoyos Negros.....	36
2.3 Hoyos Negros de Schwarzschild.....	39
2.4 Movimiento de una Partícula Prueba.....	47
2.5 Hoyos Negros de Kerr.....	55
2.6 Geodésicas Ecuatoriales para Hoyos Negros de Kerr.....	58
<b>III CAPITULO TERCERO: ACRECIÓN ESFÉRICA</b> .....	65
3.1 Introducción .....	65
3.2 Determinación de la masa de los Sistemas Binarios. ....	68
3.3 Generalidades de la Acreción: Luminosidad de Eddington. ....	76
3.4 Acreción Hidrodinámica esférica.....	82
3.5 Gráficas.....	108
<b>IV. CAPITULO CUARTO: DISCOS DE ACRECION</b> .....	113
4.1 Espectro de los Sistemas Binarios.....	114
4.2 Modelo Estandar de Discos de Acreción.....	117
4.3 Conservación de la Masa en reposo.....	122
4.4 Conservación del Momento Angular.....	123

	<b>págs.</b>
4.5 Conservación de la Energía. ....	124
4.6 Ecuaciones de la Estructura Vertical .....	126
4.7 Ley de Viscosidad.....	127
4.8 Opacidad, Presión y Transportes Radiativos .....	129
4.9 Solución: Estructura de un modelo de disco Estándar.....	131
4.10 Espectro de disco.....	137

<b>V. CAPITULO QUINTO: CONFRONTACIÓN DE LA TEORÍA CON LAS OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES.....</b>	<b>140</b>
---	------------

## **REFERENCIAS**

## **APENDICE A**

## INTRODUCCIÓN

Durante mis cursos de licenciatura, nació en mi la inquietud de conocer los misterios del universo observable. Las ideas sobre la formación, evolución y muerte de los cuerpos celestes, desde los planetas hasta los cúmulos de galaxias, me parecían fascinantes. Aunque, todavía no conozco todos los detalles de estos fenómenos, sé que la fuerza de gravitación juega un papel muy importante en ellos. Como sabemos el estudio de los cuerpos celestes se realiza a través de las observaciones de la radiación electromagnética que éstos emiten. La fuerza de gravitación y la fuerza nuclear son las responsables de esa radiación. Por ser la fuerza de gravitación tan importante en el estudio de los cuerpos celestes, me interese en el estudio de los objetos donde la gravitación se manifiesta en su máxima expresión: los hoyos negros. El concepto de hoyos negros es muy interesante, porque poseen un campo gravitacional tan intenso que la luz originada dentro de una región límite del espacio-tiempo, no puede escapar a distancias infinitas. Además de la intrigante posibilidad que en el interior del hoyo negro exista una singularidad del espacio-tiempo, donde los conceptos de espacio y tiempo dejan de tener sentido. Aún más un hoyo negro, en contraste con otros objetos compactos, no posee una superficie dura, y para todo propósito éste actúa como un devorador perfecto de todo tipo de materia y radiación. Entonces mi gran pregunta y la motivación de esta tesis es: ¿Si los hoyos negros no emiten ninguna forma de radiación cómo podemos saber que existen? Para responder esta interrogante, primero necesitamos entender: ¿Qué es un hoyo negro?, ¿Cómo se forman los hoyos negros?, ¿Cómo los describe la teoría de la relatividad general?, ¿Cuántos tipos de hoyos negros hay? y ¿Por qué la teoría de la relatividad general los predice?

En esta tesis no presentaremos nueva evidencia observacional o nuevas firmas de los hoyos negros, nuestra idea principal es presentar los principios físicos que podemos usar para detectarlos. Debemos mantener en mente que aunque ellos no emiten ninguna forma de radiación, siguen interaccionando gravitacionalmente con los alrededores. Es posible que estas interacciones produzcan efectos observables que nos ayuden a su detección. En esta tesis presentaremos como el principio más confiable, hasta el momento, para determinar la



existencia de los hoyos negros: el *proceso de pesar*. Aunque este proceso nos da evidencia muy fuerte de la existencia de los hoyos negros, esta evidencia no es definitiva. Por esta razón, además del proceso de pesar, necesitamos otro mecanismo que nos permita detectarlos. Este nuevo mecanismo es el fenómeno de acreción.

En el CAPÍTULO PRIMERO, introducimos las ideas básicas de la teoría de la relatividad general. En particular, hacemos una breve comparación entre la descripción newtoniana de la fuerza de gravitación y la descripción relativista. Haciendo énfasis en las ecuaciones de movimiento de las partículas prueba en ambas teorías. Presentamos una breve introducción de las ecuaciones de Einstein y obtenemos las soluciones que describen físicamente las estrellas esféricas que se encuentran en equilibrio hidrostático. Posteriormente, comparamos las predicciones de ambas teorías para la estructura estelar. En este mismo capítulo, vemos claramente que los objetos compactos son descritos de manera natural por las soluciones de las ecuaciones relativistas de la estructura estelar.

En el CAPÍTULO SEGUNDO, presentamos brevemente un análisis del estado final del colapso gravitacional de una estrella. Así mismo, introducimos el concepto de la masa límite de Chandrasekhar y el fenómeno de la Explosión de la Supernova. En este mismo capítulo, vemos que teóricamente se espera la existencia de los hoyos negros en el universo. Además enfatizamos el importante papel que juega la hipótesis del Censor Cósmico de Penrose en la teoría de los hoyos negros. En esta tesis, aceptamos como válida esta hipótesis. Posteriormente, presentamos de manera breve las soluciones de las ecuaciones de Einstein que describen a los hoyos negros. Al mismo tiempo, estudiamos con detalle los hoyos negros de Schwarzschild y los hoyos negros de Kerr. En el caso de hoyos negros de Schwarzschild, analizamos las ecuaciones de movimiento de las partículas prueba y las comparamos con las ecuaciones de la teoría newtoniana. Finalmente, presentamos las soluciones que describen el movimiento de partículas prueba en el plano ecuatorial del hoyo negro de Kerr.

En el CAPÍTULO TERCERO, analizamos la interacción de los hoyos negros con el universo. Particularmente, introducimos el concepto de los Sistemas Binarios Cerrados, tales sistemas son las mejores configuraciones para realizar el proceso de pesado. Así mismo, presentamos datos observacionales obtenidos de sistemas binarios de rayos-X que

indican que la masa del objeto compacto es mayor que la masa máxima de las estrellas de neutrones. Estas observaciones muestran que dichos sistemas son fuentes intensas de rayos-X. El problema es explicar teóricamente el origen de esa radiación. Para ello introducimos el concepto de acreción y explicamos de manera simple la física involucrada en el proceso de acreción. Mostramos mediante una estimación muy sencilla que el fenómeno de acreción gravitacional es un mecanismo muy eficiente para convertir energía gravitacional a otras formas de energía. Primero, examinamos el modelo más sencillo de acreción, conocido como acreción esférica, suponemos un hoyo negro aislado en el universo que está acretando material del medio interestelar. De este capítulo tenemos dos conclusiones importantes, por un lado aunque el caso más sencillo de acreción no es un mecanismo eficiente para detectar hoyos negros, por otro lado si la acreción se realiza en un sistema binario de rayos-X es necesario considerar un modelo diferente a la acreción esférica. Este nuevo modelo de acreción es el contenido del capítulo siguiente.

En el **CAPITULO CUARTO**, exactamente presentamos otra forma de acreción que por su naturaleza tiene la capacidad de explicar la radiación de rayos-X. Esta nueva forma de acreción tiene la propiedad característica que el material acretado posee momento angular distinto de cero. Analizamos los modelos de discos de acreción, por simplicidad trabajamos en el marco de la teoría newtoniana, sin embargo utilizamos algunos conceptos de la teoría de la relatividad general. Además presentamos las ecuaciones de estructura del disco y las resolvemos para la región externa del disco. Finalmente presentamos el espectro que teóricamente se espera para la región externa del disco.

En el **CAPÍTULO QUINTO**, realizamos una confrontación de la teoría con las observaciones y presentamos algunos espectros de otros modelos de disco.

## Capítulo 1

### RELATIVIDAD GENERAL

Sabemos de los principios básicos de mecánica que las partículas con masa  $m$  que se mueven en un campo gravitacional newtoniano están sujetas a una fuerza  $F^i$  dada por:

$$F^i = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.1)$$

donde el potencial  $\Phi$  satisface la ecuación de Poisson, es decir,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.2)$$

con  $\rho$  la densidad de masa y  $\nabla^2$  el operador laplaciano, que en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) en un sentido encierran todo el espíritu de la teoría gravitacional newtoniana. Por ejemplo, la ecuación (1.1) implica que si consideramos una partícula de masa  $m$  que se mueve en un potencial arbitrario  $\Phi$ , las ecuaciones de movimiento de la partícula son (asumiendo igualdad de la masa inercial con la masa

gravitacional):

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \dot{x}^i = -\nabla^i \Phi(x(t), t) \quad (1.4)$$

donde  $x^i = x^i(t)$  es el vector de posición para la partícula  $m$  al tiempo  $t$ , y  $F^i = -\nabla^i \Phi(x(t), t)$  es la fuerza de gravitación que actúa sobre dicha partícula al tiempo  $t$ . Generalmente para los propósitos astrofísicos, este potencial gravitacional  $\Phi$ , es en principio, también solución a la ecuación (1.2). Típicamente, la densidad  $\rho$  no es cero a priori. Pero la podemos obtener al resolver simultáneamente las ecuaciones (1.1) y (1.2). En esta tesis nos interesa estudiar el campo gravitacional dentro y fuera de una estrella. Para ello suponemos que el material que compone la estrella puede ser tratado en la aproximación continua. En esta aproximación, la densidad  $\rho$ , la presión  $P$ , la velocidad  $\vec{v}$  del medio continuo y el potencial gravitacional  $\Phi$  satisfacen todos juntos las siguientes ecuaciones: [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (1.7)$$

donde,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (1.8)$$

es la derivada convectiva. La ecuación (1.5) es la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa en reposo y la ecuación (1.6) expresa la aceleración de las partículas del fluido en función de las fuerzas que están actuando sobre éstas, es decir,

el lado derecho de la ecuación (1.6).

Ahora la situación se vuelve más complicada, porque para determinar el campo gravitacional de la estrella es necesario resolver de manera autoconsistente las cinco ecuaciones de arriba, para seis incógnitas. Por lo general, tenemos una ecuación adicional a las ecuaciones (1.5) - (1.7), la ecuación de estado. Con esta ecuación podemos resolver el sistema (1.5) - (1.7) para  $\rho$ ,  $P$ ,  $\vec{v}$  y  $\Phi$ . De esta manera es como los astrofísicos teóricos construyen modelos para describir la estructura estelar en el marco de la teoría newtoniana.

Aunque la teoría de gravitación newtoniana es una buena aproximación de la realidad, y todavía es utilizada ampliamente por los físicos y astrofísicos, tiene un problema: No es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Como es bien sabido, antes de la llegada del siglo XX, la física se encontraba en un estado turbulento [2]. Con las modificaciones a las ecuaciones de Ampère hechas por Maxwell (al incluir el desplazamiento de la corriente), Maxwell demostró que la electricidad y el magnetismo son dos aspectos de un mismo fenómeno: el electromagnetismo. Como consecuencia de su teoría descubrió que la luz es un fenómeno electromagnético, es decir, se propaga exactamente como una onda. Si la luz se entiende como una onda electromagnética, es necesario un medio a través del cual viaje la luz. Este razonamiento llevó al concepto del *éter*.

De existir el éter, serviría como un sistema de referencia absoluto. Por ello, el problema más importante de la época era la detección del movimiento de la tierra

a través del éter. El famoso experimento de Michelson y Morley no detectó ningún cambio en la velocidad de la luz. Esta velocidad era la misma en cualquier dirección, independientemente del movimiento de la tierra respecto al hipotético éter. Se hicieron muchas especulaciones sobre el resultado de este experimento, pero ninguna en forma definitiva. Finalmente Einstein resuelve este problema. Einstein en 1905 introduce, por primera vez en la historia de la ciencia, la famosa teoría de la relatividad especial [3]. Como consecuencia de esta teoría existe un nuevo grupo de transformaciones fundamental en la Física, conocido como el grupo de transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones garantizan la invarianza de las ecuaciones de Maxwell para todo sistema de referencia inercial, es decir, no existe un sistema de referencia privilegiado. Por ello, Einstein concluyó que el éter no existe, y de esta forma, se explica naturalmente el resultado del experimento de Michelson y Morley.

Desafortunadamente, la teoría de gravitación newtoniana no era compatible con las transformaciones de Lorentz. Por ello, era necesario encontrar una nueva teoría de gravitación invariante bajo estas transformaciones. A pesar de los enormes esfuerzos realizados por los físicos de 1905 a 1916 no fue posible construir una teoría de gravitación invariante bajo estas transformaciones, y que al mismo tiempo fuera compatible con las observaciones. Finalmente, Einstein en 1916 da un paso drástico [2]. Einstein se da cuenta que la única manera en que puede hacer una teoría de gravitación invariante bajo dichas transformaciones es describir la gravitación como la geometría del espacio-tiempo. En otras palabras, la presencia de la gravitación se

manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo. La geometría del espacio-tiempo de Minkowski (usada en relatividad especial), en coordenadas cartesianas está dada por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.9)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. En la misma situación, cuando existe gravitación, la geometría del espacio-tiempo no tiene la forma (1.9), pero puede ser representada de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.10)$$

con  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, t)$  definido como el tensor métrico.

Como consecuencia de la nueva teoría de gravitación, conocida como la teoría de la relatividad general [4], el movimiento de las partículas prueba, es decir, el análogo de la ecuación (1.1) está dado por:

$$\frac{d^2 \chi^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{d\chi^\mu}{d\tau} \frac{d\chi^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.11)$$

donde,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial \chi^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial \chi^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \chi^\nu} \right] \quad (1.12)$$

los términos  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  se conocen como los símbolos de Christoffel. En la relación (1.12) hemos utilizado la definición de la matriz inversa del tensor métrico  $g_{\sigma\nu}$  dada por  $g^{\sigma\nu}$ , es decir,  $g^{\sigma\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\sigma_\rho$ .

Además, definimos el *tiempo propio* de una partícula que se mueve sobre una curva  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ , con  $\lambda$  un parámetro arbitrario, como el tiempo medido por un

reloj móvil fijo a dicha partícula, es decir,

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\frac{ds^2}{c^2} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{c^2} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -\frac{g_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} d\lambda \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda \\ &= -\frac{g_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda^2 \end{aligned}$$

entonces,

$$d\tau = \left( -\frac{g_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (1.13)$$

Desde el punto de vista geométrico, la ecuación (1.11) indica que una partícula en caída libre a través de un espacio-tiempo curvo, y equivalentemente en un campo gravitacional, se moverá sobre la trayectoria más corta (o más larga) posible entre dos puntos. En la ecuación (1.11) el parámetro  $\tau$  representa exactamente el tiempo propio de la partícula que se mueve sobre una trayectoria, a tales trayectorias se les conoce como *Geodésicas*. Generalmente, en relatividad general y especial, clasificamos las geodésicas como sigue:

a) Geodésicas temporales.- Físicamente, son las trayectorias que recorren las partículas con masa  $m$  distinta de cero que se mueven en un campo gravitacional.

b) Geodésicas nulas.- Éstas representan las trayectorias que siguen los fotones (partículas sin masa) en un campo gravitacional, y

c) Geodésicas espaciales.- Éstas pueden ser interpretadas como las trayectorias que siguen las partículas no físicas llamadas taquiones que hipotéticamente tienen una velocidad mayor que la de la luz. Aunque, matemáticamente podemos obtener estas



trayectorias no esperamos que existan realmente. Por esta razón, no estudiaremos este tipo de geodésicas en la presente tesis.

Como ya mencionamos, Einstein postuló que la presencia de la gravitación curva el espacio-tiempo, en el sentido en que la geometría del espacio-tiempo no está dada por la ecuación (1.9), pero puede ser descrita por la ecuación (1.10). Entonces, es necesario establecer la relación entre la geometría del espacio-tiempo y las fuentes gravitacionales. En otras palabras, nos interesa saber cuales son las ecuaciones dinámicas del campo gravitacional, que es una generalización del campo descrito por la ecuación (1.2). En la siguiente sección hablaremos sobre este problema.

### 1.1 Ecuaciones de Campo de Einstein

Antes de presentar las ecuaciones de campo de Einstein daremos algunos conceptos de la geometría diferencial que nos serán de gran utilidad. Primero introducimos el concepto más importante de una geometría, es decir, el tensor de Riemann. Aunque este tensor puede ser definido en un espacio sin métrica, para nuestros fines introduciremos el concepto de dicho tensor en un espacio que tiene una métrica. Para ello, suponemos que  $g_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio 4-dimensional (independientemente si es Rimaniano o Lorentziano) y el tensor de Riemann está dado por:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \quad (1.14)$$

donde  $\lambda, \mu, \nu, \kappa = 1, 2, 3, 4$ . La propiedad más importante del tensor de Riemann es la siguiente: La condición necesaria y suficiente para que la métrica  $g_{\mu\nu}$  sea plana es

que  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0$ . Es común considerar la forma completamente covariante de  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$  dada por:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &\equiv g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\kappa} \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial\chi^\kappa\partial\chi^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial\chi^\kappa\partial\chi^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial\chi^\nu\partial\chi^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial\chi^\nu\partial\chi^\lambda} \right) + \\ &\quad + g_{\eta\sigma} (\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

El tensor de Riemann,  $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$  satisface las siguientes propiedades:

1.- Simetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (1.16)$$

2.- Antisimetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (1.17)$$

3.- Ciclicidad

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (1.18)$$

Si conocemos el tensor de Riemann podemos construir las siguientes contracciones importantes:

a) El Tensor de Ricci que está dado como:

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa} \quad (1.19)$$

b) El Escalar de Curvatura:

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (1.20)$$

Además, con la ayuda del tensor de Ricci y el escalar de curvatura podemos construir

el siguiente tensor, conocido como el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R \quad (1.21)$$

Por restricción el tensor  $G_{\mu\nu}$  satisface la siguiente propiedad importante:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = 0 \quad (1.22)$$

donde  $\nabla_{\mu}$  representa la derivada covariante.

Como es bien sabido, en la teoría de la relatividad especial cada distribución de materia está asociada con un tensor de segundo rango llamado tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  [3]. Este tensor tiene la propiedad de ser simétrico y cuando usamos coordenadas en que la geometría tiene la forma:  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ , el tensor  $T^{\mu\nu}$  satisface:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (1.23)$$

Einstein haciendo una analogía con la teoría de la relatividad especial, postuló que el tensor  $G_{\mu\nu}$  debe estar relacionado con las fuentes de gravitación, es decir, con la materia y da la siguiente relación [1,4]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

o equivalentemente,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

donde  $G$  denota la constante de Newton. Por consistencia con la ecuación (1.22) es necesario que el tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  satisfaga la ecuación  $\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0$ . Las

ecuaciones (1.24) y su equivalente (1.25) son las famosas ecuaciones de la teoría de la relatividad general postuladas por Einstein en 1916 [1,2,4].

El lado derecho de las ecuaciones de Einstein (1.25) representa una generalización del lado derecho de la ecuación (1.2). De igual forma podemos hacer una analogía entre los lados izquierdo de estas ecuaciones. En otras palabras como el tensor de Einstein contiene la segunda derivada de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , en analogía con la ecuación (1.2) puede ser vista como un potencial general. Estas ecuaciones incorporan las ecuaciones (1.2) en el caso que el campo gravitacional es muy débil [4].

La consecuencia más importante de las famosas ecuaciones de Einstein es que la geometría de espacio-tiempo en el que vivimos no está dada a priori, pero puede ser determinada con la distribución de energía y de momento del material del espacio-tiempo. El significado y las implicaciones de estas ecuaciones es muy extenso, pero para los fines de esta tesis sólo examinaremos algunas soluciones de estas ecuaciones.

## 1.2 Campos Gravitacionales con Simetría Esférica

En esta sección nos interesa ver como las ecuaciones de Einstein describen el espacio-tiempo que representa el campo gravitacional con fuente una estrella esférica. Si analizamos el mismo problema en el marco de la teoría newtoniana, el problema es sencillo. Primero necesitamos resolver el sistema de ecuaciones (1.5) - (1.7), es decir, encontrar las soluciones particulares que describen la densidad  $\rho$ , presión  $P$ , velocidad  $\vec{v}$  y el campo gravitacional  $\Phi$  para el interior de la estrella. Para la re-

gión exterior solamente necesitamos resolver  $\nabla^2\Phi \equiv 0$ , utilizando la hipótesis que el campo gravitacional es cero en infinito, elegimos una solución de  $\nabla^2\Phi = 0$  sujeta a  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{ext} = 0$  y unimos esta solución  $\Phi_{ext}(r)$  con la solución  $\Phi_{int}(r)$  en la hipersuperficie de la estrella. Ahora estamos interesados en resolver el mismo problema en el marco de la relatividad general. De acuerdo con la teoría de la relatividad general necesitamos resolver las ecuaciones de Einstein para la geometría del espacio-tiempo, tanto en la región exterior como en la interior. Para ello, es necesario introducir el concepto de simetría esférica para una geometría del espacio-tiempo. Una geometría del espacio-tiempo es esférica si existen coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  tales que podemos escribir la geometría del espacio-tiempo de la siguiente forma [1,4]:

$$ds^2 = -c^{2\varphi} dt^2 + c^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.26)$$

donde  $\varphi$  y  $\lambda$  son funciones de  $t$  y  $r$ . Como suponemos vacío las ecuaciones de Einstein (1.25) tienen la forma:

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.27)$$

entonces de (1.21),

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.28)$$

Resolvemos la ecuación (1.27) o su equivalente (1.28) con la hipótesis que la geometría es descrita por (1.26). Utilizando la definición de los símbolos de Christoffel dada por (1.12), encontramos que para (1.26) los  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  que no se anulan son:

$$\Gamma_{rr}^r = \lambda', \quad \Gamma_{rr}^t = \varphi', \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^t &= \lambda e^{2(\varphi-\lambda)}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{tt}^r &= \varphi e^{2(\varphi-\lambda)}, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, & \Gamma_{tt}^t &= \dot{\varphi}, \\
\Gamma_{rt}^r &= \dot{\lambda}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin \theta e^{-2\lambda}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

donde prima (') denota diferenciación respecto de  $r$  y el punto diferenciación respecto de  $t$ .

A continuación, utilizando las relaciones (1.29) calculamos las componentes del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  en vacío y obtenemos:

$$G_r^r = -e^{-2\lambda} \left( \frac{2\varphi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = 0 &= \frac{-e^{-2\lambda}}{2} \left( 2\varphi'' + \varphi'^2 + \frac{2(\varphi'^2 - \lambda'^2)}{r} - \varphi'\lambda' \right) + \\
&+ \frac{e^{-2\varphi}}{2} (2\bar{\lambda} + \lambda^2 - 2\dot{\lambda}\dot{\varphi}),
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$G_t^t = -e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{1.32}$$

$$G_t^r = -e^{-2\lambda} \frac{2\dot{\lambda}}{r} = 0. \tag{1.33}$$

De manera simple, podemos integrar el sistema de ecuaciones (1.30) - (1.33), como el tensor de energía-momento es igual a cero, entonces las ecuaciones (1.30), (1.32) y (1.33) son equivalentes a:

$$e^{-2\lambda} \left( \frac{2\varphi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{1.34}$$

$$e^{-2\lambda} \left( \frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{1.35}$$

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{1.36}$$

directamente de la ecuación (1.36) tenemos:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda(r) \quad (1.37)$$

De esta ecuación vemos que la función métrica  $\lambda$  sólo depende de  $r$ . Por otro lado, sumando (1.34) con (1.35) obtenemos:

$$e^{-2\lambda} \left( \frac{2\varphi'}{r} + \frac{2\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$\frac{2e^{-2\lambda}}{r} (\varphi' + \lambda') = 0,$$

esto implica que,

$$\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \lambda) = 0,$$

utilizando el hecho de que  $\lambda$  sólo es función de  $r$ ,

$$\varphi(r, t) = g(t) - \lambda(r) \quad (1.38)$$

donde  $g(t)$  es una constante de integración. Con ayuda de (1.37) y (1.38) podemos probar que (1.31) se satisface idénticamente. Utilizando los resultado (1.37) y (1.38) podemos reescribir la métrica (1.26) como:

$$ds^2 = -e^{2(g(t)-\lambda(r))} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.39)$$

hacemos una transformación de coordenadas dada por:

$$t \rightarrow \bar{t} = \bar{t}(t),$$

$$r \rightarrow \bar{r} = r,$$

$$(\theta, \phi) \rightarrow (\theta, \phi)$$

donde,

$$d\bar{t} = \frac{d\bar{t}}{dt} dt \Rightarrow d\bar{t}^2 = \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^2 dt^2,$$

sustituyendo la ecuación anterior en (1.39) obtenemos:

$$ds^2 = -e^{2(g(t)-\lambda(r))} \left( \frac{dt}{d\bar{t}} \right)^2 d\bar{t}^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.40)$$

Siempre podemos escoger una transformación  $\bar{t} = \bar{t}(t)$  tal que:

$$e^{2g(t)} \left( \frac{dt}{d\bar{t}} \right)^2 \equiv 1 \quad (1.41)$$

utilizando este resultado en la ecuación (1.40), tenemos:

$$ds^2 = -e^{-2\lambda(r)} d\bar{t}^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.42)$$

El resultado (1.42) es muy importante, y es conocido como el Teorema de Birkoff [4]. Este teorema afirma que: *Todas las soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío que tienen simetría esférica son necesariamente estáticas, es decir, no tienen dependencia del tiempo.*

En seguida, mostraremos que sólo existen dos clases de soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío, que son asintóticamente planas. Para ello, reescribimos la ecuación (1.35) de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (e^{-2\lambda}) - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0,$$

multiplicando la ecuación anterior por  $r^2$  obtenemos:

$$-r \frac{d}{dr} (e^{-2\lambda}) - e^{-2\lambda} + 1 = 0,$$



donde los dos primeros términos del lado izquierdo se pueden agrupar en una derivada total respecto de  $r$ , es decir,

$$\frac{d}{dr} (re^{-2\lambda}) = 1,$$

directamente al integrar esta última ecuación obtenemos:

$$re^{-2\lambda} = r + c'$$

despejando la función métrica,

$$e^{-2\lambda} = \frac{r + c'}{r}$$

o bien,

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 + c'/r}$$

Podemos definir  $c' \equiv -2M$ , entonces,

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2M/r}, \quad e^{-2\lambda} = (1 - 2M/r). \quad (1.43)$$

Finalmente, sustituyendo (1.43) en la métrica (1.42) tenemos:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.44)$$

El caso  $M > 0$  es la solución más importante y se conoce como solución de Schwarzschild. En el caso que  $M < 0$ , aunque (1.44) es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein, describe una singularidad desnuda cuando  $0 \leq r < \infty$ . Por último el caso  $M = 0$ , implica que la geometría tiene la forma  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$ . Pero para esta forma  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0$ , es decir, esta solución representa la geometría del espacio-tiempo de Minkowski. En esta tesis cuando escribamos la forma (1.44) siempre

entenderemos que  $M > 0$ . Como conclusión hemos mostrado que las soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío que son asintóticamente planas pertenecen a una de las siguientes clases:

- a) Solución de Schwarzschild.
- b) Espacio plano de Minkowski.

En la siguiente sección veremos como podemos usar las ecuaciones de Einstein para construir soluciones que describan el interior de una estrella con simetría esférica y estática. Es decir, construiremos modelos de estrellas estáticas y con simetría esférica en el marco de la relatividad general.

### 1.3 Estrellas Esféricas

En esta sección construiremos el espacio-tiempo que describe el interior de estrellas con simetría esférica y estáticas. Como vimos en la sección 1.2, para las estrellas con simetría esférica la geometría del espacio-tiempo es descrita por la ecuación (1.26), donde  $\lambda = \lambda(r)$  y  $\varphi = \varphi(r)$ . Además suponemos que el material que constituye la estrella se puede describir mediante un fluido perfecto. Entonces el tensor de energía-momento como fuente de las ecuaciones de Einstein (1.25), en este caso, tiene la siguiente forma [4]:

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.45)$$

donde  $\rho = \rho(r)$  y  $P(r)$  son la densidad y la presión respectivamente. Para una estrella estática la 4-velocidad está dada como:

$$u^\mu = e^{-\varphi} \delta_0^\mu$$

y está normalizada de acuerdo a:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad (1.46)$$

Ahora resolvemos las ecuaciones (1.25) para el interior de la estrella con  $T^{\mu\nu}$  dada por (1.45). Por simplicidad trabajamos en unidades donde  $c = G = 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} 8\pi T_{00} &= 8\pi\rho = G_{00} \Rightarrow \\ 8\pi T_{00} &= \frac{2\lambda'}{r e^{2\lambda}} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\lambda}) \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_{rr} &= 8\pi P = G_{rr} \Rightarrow \\ 8\pi T_{rr} &= \frac{2\varphi'}{r e^{2\lambda}} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\lambda}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_{\theta\theta} &= 8\pi P = G_{\theta\theta} \Rightarrow \\ 8\pi T_{\theta\theta} &= e^{-(\Phi + \lambda)} \frac{d}{dr} [\varphi' e^{(\varphi - \lambda)}] + \frac{1}{r e^{2\lambda}} (\varphi' - \lambda') \end{aligned} \quad (1.49)$$

Como la ecuación (1.47) solamente es función de  $\lambda$ , se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2r\lambda'}{e^{2\lambda}} + (1 - e^{-2\lambda}) \right] &= 8\pi\rho \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] &= 8\pi\rho \end{aligned}$$

al integrar esta ecuación encontramos una solución para  $e^{2\lambda}$  dada por:

$$r'(1 - e^{-2\lambda}) \Big|_0^r = 8\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (1.50)$$

usando la condición inicial  $\lambda(r)|_{r(0)} = 0$ , que implica  $e^{2\lambda} \rightarrow 1$ , conforme  $r \rightarrow 0$ , tenemos:

$$r(1 - e^{-2\lambda}) = 8\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (1.51)$$

introducimos una nueva función  $m(r)$  definida como:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (1.52)$$

utilizando esta definición reescribimos (1.51) como:

$$r(1 - e^{-2\lambda}) = 2m(r)$$

De esta manera, la solución a la ecuación (1.47) queda determinada por:

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad (1.53)$$

Para el espacio-tiempo que tiene la signatura de una geometría lorentziana, es necesario que para toda  $r \geq 0$  la función métrica  $e^{2\lambda}$  satisfaga la siguiente desigualdad:

$$e^{2\lambda} \geq 0.$$

o bien, de la ecuación (1.53),

$$r \geq 2m(r) \quad (1.54)$$

Regresamos a la ecuación (1.48) y despejamos  $\varphi'$ ,

$$\frac{2\varphi'}{r e^{2\lambda}} = 8\pi P + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\lambda})$$

al sustituir la ecuación (1.53) en la ecuación de arriba, tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2M)} \quad (1.55)$$

Por otro lado, el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  satisface:

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.56)$$

esta ecuación puede ser escrita en las siguientes dos ecuaciones:

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} \rho + (\rho + P) \nabla^{\alpha} u_{\alpha} = 0, \quad (1.57)$$

y,

$$(P + \rho) u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} + (g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) \nabla^{\alpha} P = 0 \quad (1.58)$$

La primera ecuación para el caso que examinamos se satisface idénticamente por lo que no podemos obtener ninguna información de ésta. Pero, la siguiente ecuación no es una ecuación trivial. Para  $P = P(r)$ ,  $u^{\mu} = (e^{-\varphi}, 0, 0, 0) \Rightarrow u_{\mu} = g_{\mu\nu} u^{\nu} = (-e^{\varphi}, 0, 0, 0)$

tenemos:

$$\begin{aligned} u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} &= u^{\alpha} \left[ \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} u_{\sigma} \right] \\ u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} &= u^{\alpha} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - u^{\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} u_{\sigma} \\ u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} &= -u^0 \Gamma^0_{0\beta} u_0 = \Gamma^0_{0\beta} = \frac{1}{2} g^{00} \Gamma_{00\beta} \\ u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} &= \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^0} \right) \\ u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \delta^r_{\beta} \end{aligned}$$

entonces el primer término del lado izquierdo de la ecuación (1.58) está dado por:

$$(P + \rho) u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} = (P + \rho) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \delta^r_{\beta},$$

mientras que el segundo término de (1.58) es:

$$(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}) \nabla^{\alpha} P = \nabla_r P \delta^r_{\beta} = \frac{\partial P}{\partial r} \delta^r_{\beta},$$

Así, sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (1.58), para  $b = r$ , obtenemos:

$$(P + \rho) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{d\varphi}{dr},$$

Finalmente, utilizando la ecuación (1.55) tenemos:

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2M)} \quad (1.59)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkof de equilibrio hidrodinámico [4]. Esta ecuación nos dice como varía la presión  $P(r)$  del fluido dentro de la estrella.

En resumen tenemos:

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} \quad (1.60)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (1.61)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (1.62)$$

$$\frac{dP}{dr} = -(P(r) + \rho(r)) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (1.63)$$

Cuando sustituimos (1.60) y (1.61) en la ecuación (1.49) vemos que se satisface idénticamente. Entonces las ecuaciones (1.60) - (1.63) son suficientes para resolver (1.24) con la hipótesis (1.45). Para obtener la geometría y la estructura de la estrella necesitamos resolver las ecuaciones (1.60) - (1.63). Primero resolvemos las ecuaciones (1.62) y (1.63) que son independientes de las funciones métricas. Para esto debemos utilizar una ecuación de estado para el fluido. En general, esta ecuación depende

del modelo estelar que queramos construir. Para estrellas normales esta ecuación de estado puede relacionar, por ejemplo, la presión  $P$ , la densidad  $\rho$ , la temperatura  $T$  o la entropía  $S$ . Por razones que explicaremos más adelante, utilizaremos una ecuación de estado de la forma  $P = P(\rho)$ , que se conoce como ecuación de estado fría. La estrellas descritas por una ecuación de este tipo se encuentran en su última etapa de evolución, en este estado la presión que soporta la estrella es la presión de electrones o neutrones degenerados. Con  $P = P(\rho)$  como la ecuación de estado resolvemos las ecuaciones (1.62) y (1.63) para  $m(r)$  y para  $P(r)$ . Definimos la hipersuperficie de la estrella imponiendo:

$$P(R) = 0 \tag{1.61}$$

Una vez que hayamos encontrado  $m(r)$  y  $P(r)$  podemos resolver las ecuaciones (1.60) - (1.61) para obtener  $\varphi(r)$  y  $\lambda(r)$ . Las funciones  $\varphi(r)$ ,  $\lambda(r)$ ,  $m(r)$  y  $P(r)$  determinan la estructura estelar y al mismo tiempo la geometría interior de la estrella. Como hemos visto para completar los modelos de estrellas esféricas en el marco de la teoría newtoniana, debemos unir suavemente, en la superficie estelar, el potencial gravitacional externo  $\Phi_{ext}$  con el potencial interno  $\Phi_{int}$  de la estrella. Donde  $\Phi_{ext}$  es solución a la ecuación  $\nabla^2 \Phi = 0$ , mientras que  $\Phi_{int}$  satisface la ecuación (1.2). En otras palabras, debemos imponer que el potencial sea continuo diferenciable en la superficie estelar. De la misma manera, en la relatividad general para completar el modelo estelar es necesario igualmente unir suavemente la geometría del espacio-tiempo fuera de la estrella con la geometría interna. Sabemos del Teorema de Birkhoff, que probamos

en la sección anterior, que la geometría del espacio-tiempo exterior de la estrella está dada por la ecuación (1.44). Además vimos que la geometría interior de la estrella está dada por la ecuación (1.26), con  $\lambda$  y  $\varphi$  soluciones de las ecuaciones (1.60) y (1.61) respectivamente. Para hacer la unión suponemos que la coordenada radial  $r$  en la forma (1.44) satisface que  $r \geq R$ , donde  $R$  es solución de (1.64). Al mismo tiempo, la masa  $M$  que aparece en la ecuación (1.44) está definida como  $M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$ , por supuesto con  $\rho(r)$  solución de las ecuaciones (1.62) y (1.63). De esta manera tenemos un modelo completo para la geometría del espacio-tiempo que es solución de las ecuaciones de Einstein (1.25).

Es interesante dar un ejemplo donde podamos ver explícitamente la forma de las funciones  $m(r)$  y  $P(r)$ . Para ello, resolveremos las ecuaciones (1.60) - (1.63) para una estrella con densidad uniforme, es decir, que satisface:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

En este caso la función  $m(r)$ , dada por la ecuación (1.62), puede ser integrada directamente,

$$\begin{aligned} \int_0^r dm &= 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \\ m(r') \Big|_0^r &= 4\pi \rho_0 \frac{r'^3}{3} \Big|_0^r \end{aligned}$$

evaluando obtenemos:

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \tag{1.65}$$



donde hemos usado el hecho que  $m(r)|_{r=0} = 0$ . Esto se debe a que imponemos que el espacio-tiempo sea suave, es decir, cuando  $\lambda \rightarrow 0$  de la ecuación (1.60) tenemos que  $m(r)|_{r=0} = 0$ . De esta manera, tenemos la función  $m(r)$  expresada explícitamente como función de  $r$ . Sustituimos este valor en la ecuación Tolman-Oppenheimer-Volkoff (1.63) y encontramos que,

$$\frac{dP}{dr} = -(P(r) + \rho_0) \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0\right) + 4\pi r^3 P(r)}{r \left(r - 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0\right)\right)}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial con  $P(r=R) = 0$  obtenemos [4]:

$$P(r) = \rho_0 \left[ \frac{(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}}{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - 3(1 - 2M/R)^{1/2}} \right] \quad (1.66)$$

La ecuación anterior describe el comportamiento de  $P(r)$  como función de la coordenada radial. Podemos calcular la presión en el centro de la estrella  $P_c$ , para ello hacemos  $r = 0$  en la ecuación (1.66), y encontramos que:

$$P_c = \rho_0 \left[ \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1} \right] \quad (1.67)$$

Como consecuencia de esta ecuación  $P_c$  no es finita para todos los valores de  $M$  y  $R$ . En particular, la presión central en la estrella  $P_c$  se vuelve infinita cuando:

$$3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1 = 0 \quad (1.68)$$

despejando,

$$R = \frac{9}{4}M, \quad (1.69)$$

Esta ecuación es muy importante, nos dice que si resolvemos las ecuaciones de Einstein para una estrella con simetría esférica, en equilibrio hidrostático y con una densidad

uniforme  $\rho_0$ , no podemos construir estrellas con  $M$  y  $R$  arbitrarias. Es necesario que la relación entre su masa y su radio sea  $M/R > 4/9$ . En caso de que esta relación no se cumpla la estrella simplemente no puede existir. Otra forma de interpretar este resultado, es que existe un límite a la masa posible de una estrella con densidad uniforme  $\rho_0$ . Podemos encontrar el valor máximo de la masa al considerar el valor de  $m(r)$  para  $r = R$ , en la ecuación (1.65),

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \quad (1.70)$$

despejando  $R$  en términos de la masa  $M$ , tenemos:

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3}, \quad (1.71)$$

sustituyendo el valor de  $R$  en la ecuación (1.69), es decir,

$$\begin{aligned} \left( \frac{3M}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} &= \frac{9}{4}M, \\ M &= \left( \frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{1/2} \left( \frac{4}{9} \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

entonces la masa máxima posible está determinada por:

$$M_{\max} = \frac{4}{9(3\pi)^{1/2}} \rho_0^{-1/2}. \quad (1.72)$$

Hemos encontrado que para una configuración estelar estática, con simetría esférica y densidad uniforme  $\rho_0$  existe una masa máxima posible. En este punto es interesante examinar las ecuaciones de estructura estelar y sus predicciones dentro del marco de la gravitación newtoniana. En este caso es suficiente resolver las ecuaciones (1.60)

-(1.63) en el límite newtoniano ( $P \ll \rho$ ,  $m(r) \ll r$ ), éstas se reducen a:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m(r)}{r^2} \quad (1.73)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (1.74)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m(r)}{r^2} \quad (1.75)$$

para resolver estas ecuaciones, primero debemos notar que la ecuación (1.74) tiene la misma forma que en el caso de relatividad general entonces el valor de la función  $m(r)$ , que ya calculamos arriba, está dado por:

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \quad (1.76)$$

notamos que la ecuación (1.75) es simplemente la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana, utilizando la definición de  $m(r)$  dada por la ecuación (1.76) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{4}{3}\pi\rho_0^2 r, \\ \int_r^R dP &= -\frac{4}{3}\pi\rho_0^2 \int_r^R r dr, \\ P(R) - P(r) &= -\frac{2}{3}\pi\rho_0^2 (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

pero  $P(R) = 0$ , de la ecuación (1.64), así,

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi\rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (1.77)$$

Al igual que en el caso de relatividad general, podemos calcular la presión central de una estrella  $P_c$  con densidad uniforme, es decir, para  $r = 0$  tenemos de la ecuación anterior:

$$P_c = \frac{2}{3}\pi\rho_0^2 R^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} M^{2/3} \rho_0^{4/3}, \quad (1.78)$$

donde hemos utilizado (1.71). Esta expresión, como consecuencia de la gravedad newtoniana, difiere enormemente de la ecuación en el caso relativista, ya que afirma que para cualquier  $R$  y  $M$  dados, la presión siempre se mantendrá finita en el centro. Es decir, no existe una masa límite en el caso newtoniano (para los modelos con densidad uniforme  $\rho_0$ ). Para valores muy grandes de la masa  $M$  siempre existirá una presión  $P$  lo suficientemente grande que garantice el equilibrio hidrostático de la estrella newtoniana, al contrario, de lo que nos dice la ecuación relativista (1.72). En este sentido, podemos decir que la gravitación de la relatividad general es más fuerte que la gravitación newtoniana.

Las conclusiones hasta este momento son una consecuencia de tomar una densidad uniforme  $\rho_0$  para las estrellas. La pregunta de la que nos ocuparemos ahora es la siguiente: ¿Cómo son los modelos de estrellas relativistas para otras ecuaciones de estado más realistas que los modelos de densidad uniforme? Este problema es más difícil de resolver analíticamente, porque las ecuaciones (1.62) y (1.63), con una ecuación de estado diferente de  $\rho = cte.$  se vuelven muy complicadas. Pero este problema ha sido atacado por diversos grupos de investigadores en todo el mundo. Como resultado de estas investigaciones ha sido posible encontrar soluciones numéricas para modelos estelares relativistas más cercanos a la realidad [5,6,7]. A continuación, presentaremos brevemente los resultados numéricos claves, para la estructura de una clase de estrellas que nos será de gran utilidad para los fines de esta tesis.

Como veremos con más detalle en el capítulo siguiente, cuando el combusti-

ble nuclear de la estrella no pueda producir reacciones nucleares exotérmicas, ésta se colapsará bajo la acción de su propio peso. Generalmente la densidad se incrementa, mientras que su tamaño disminuye, y al mismo tiempo, aparecen efectos cuánticos, por ejemplo, la presión de degeneración de electrones y de neutrones posiblemente dominará otras formas de presión térmica. En estos casos, podemos utilizar una ecuación de estado fría, es decir, la presión es solamente función de la densidad  $P = P(\rho)$  [1,4,6,7]. Para este régimen, el trabajo numérico que mencionamos anteriormente nos dice cuales son las predicciones de la teoría de la relatividad general para los estados finales de las estrellas. Típicamente, para resolver las ecuaciones de estructura estelar numéricamente es necesario especificar la densidad central  $\rho_c$  de la estrella. Se supone que  $\rho_c$  se encuentra en el siguiente rango:

$$10^5 g/cm^3 \leq \rho_c \leq 10^{17} g/cm^3 \quad (1.79)$$

A partir de la ecuación de estado  $P = P(\rho)$ , se determina un valor para  $P_c$ . Posteriormente, se resuelven las ecuaciones (1.60) - (1.63) y así se determina el radio  $R$  y la masa total de la estrella  $M$ . Al repetir este procedimiento para todas las densidades centrales en el rango (1.79) y de esta manera obtenemos una gráfica de la masa  $M$  resultante contra el radio  $R$  resultante. Esta gráfica es mostrada en la figura (1.1), [1,4].

La gráfica (1.1) tiene implicaciones muy importantes en astrofísica. Si por ejemplo, queremos construir estrella de masa  $M = 1M_{\odot}$ , con una ecuación de estado fría, es decir,  $P = P(\rho_c)$  la figura (1.1) indica que existen tres posibles modelos

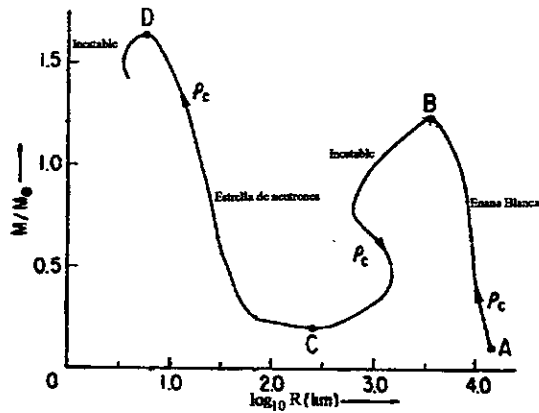


Figura 1.1 Configuración de estrellas de materia fría

distintos para la estrella, es decir, para la misma masa tenemos tres radios diferentes. Pero esto no implica que en la naturaleza existan esos tres modelos diferentes de estrellas. Es importante recordar al lector que no todas las soluciones de un sistema de ecuaciones, en nuestro caso ecuaciones (1.60) - (1.63), representan una situación real. Para ello, es necesario que la solución del sistema sea estable. Por esta razón necesitamos encontrar las soluciones de las ecuaciones de estructura estelar (1.60) - (1.63) que sean estables. En otras palabras, debemos saber que puntos sobre la curva de la figura (1.1) representan soluciones estables. Para ello, debemos utilizar la teoría general de perturbaciones. Este es un problema muy interesante para la física del problema que estamos desarrollando, pero al mismo tiempo muy complicado. Aunque en esta tesis no analizaremos la teoría de perturbaciones, utilizaremos los resultados obtenidos por la aplicación de esta teoría en nuestro análisis. En general, se han

realizado muchos trabajos [1] sobre este problema y se ha establecido que pequeñas perturbaciones de presión y de densidad pueden desestabilizar la configuración estelar. Con referencia en la gráfica (1.1), solamente los puntos que se encuentren en las ramas  $AB$  y  $CD$  son estables. Los puntos en la parte  $BC$  y los puntos después de  $D$  son inestables [1,4]. Pero ¿Cuál es la física de los modelos estelares que se encuentran en las ramas  $AB$  o  $CD$ ? Para explicar esta cuestión es necesario recordar al lector algunas predicciones de la mecánica cuántica para sistemas con muchos grados de libertad.

De la mecánica cuántica sabemos que los fermiones, por ejemplo, electrones y neutrones se comportan de acuerdo al *Principio de Exclusión de Pauli*. Este principio es la razón de que a altas densidades de material compuesto por fermiones, se genere una presión de origen mecánico cuántico que es llamada presión de degeneración (para una descripción más detallada ver por ejemplo [1] y el libro [8]). Dependiendo del tipo de fermiones tenemos presión de un gas degenerado de electrones y presión de un gas degenerado de neutrones. En 1925 el científico inglés Ralph Fowler aplicó las leyes de la mecánica cuántica al estudio de las estrellas llamadas enanas blancas (por su tamaño tan pequeño y su alta temperatura superficial) y sugirió que los electrones forman lo que se conoce como un *gas degenerado de electrones*. De esta forma el colapso gravitacional de la estrella podía ser detenido por la *presión de degeneración* de los electrones.

En 1931, el astrofísico hindú Chandrasekar utilizó la presión de degeneración

de electrones de origen cuántico para construir un modelo estelar en equilibrio hidrostático donde la fuerza de gravitación está equilibrada con la presión de degeneración de los electrones. Chandrasekhar encontró que la masa total de esta configuración quedaba determinada de manera única, y calculó que la masa crítica debía de ser  $M_{Ch} = 1.4 M_{\odot}$ ; a este valor se le denomina el *límite de Chandrasekhar* [1]. La existencia de este límite implica que no todas las estrellas pueden alcanzar una configuración de equilibrio hidrostático, es decir, donde la fuerza de gravitación esté balanceada con la presión de degeneración de electrones. A esta configuración se le conoce como *Enanas Blancas*. Con referencia en la figura (1.1) podemos interpretar la región  $AB$ , con las *Enanas Blancas*. De esta gráfica vemos que la masa máxima es alrededor de  $M_{Ch} = 1.4 M_{\odot}$  y el radio máximo es aproximadamente  $R \sim 10^9 \text{ cm}$ . En el trabajo de Chandrasekhar se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es el estado final de una estrella fría con masa mayor que el límite de Chandrasekhar?

En 1932 se descubrió una nueva partícula el *neutrón*. El físico soviético L. Landau utiliza esta nueva partícula para dar respuesta a la pregunta planteada por Chandrasekhar y predice que el colapso de una estrella con masa mayor a  $M_{Ch} = 1.4 M_{\odot}$ , debía llevar a una densidad tan alta, que los núcleos atómicos en contacto formarían un sólo y gigantesco núcleo, compuesto de neutrones. Éstos generan una presión de degeneración de neutrones capaz de balancearse con la fuerza de gravedad. Esta configuración estelar es llamada *Estrella de Neutrones* y teóricamente es introducida al mismo tiempo por los astrónomos Zwicky y Baade. Es importante recordar que en



esa época, las estrellas de neutrones eran sólo una predicción teórica. En la gráfica (1.1) la región  $CD$  tiene valores de  $M$  y  $R$  predichos teóricamente para las *Estrellas de Neutrones*. Aunque la introducción de las estrellas de neutrones proporciona parcialmente la respuesta a la pregunta planteada por Chandrasekhar. Las consideraciones de la gráfica (1.1) llevan naturalmente a una nueva pregunta ¿Qué pasa con las estrellas que en su último estado tienen una masa mayor a la masa del punto  $D$ ? Esta pregunta será analizada en el capítulo siguiente.

## Capítulo 2

### HOYOS NEGROS

#### 2.1 Colapso Gravitacional y Formación de Hoyos Negros

Para resolver la pregunta planteada al final del capítulo anterior es ilustrativo mencionar que sabemos sobre el nacimiento y muerte de las estrellas. Físicamente, las estrellas se forman por contracción gravitacional de nubes de gas interestelar denso, que consisten principalmente en hidrógeno. Aunque el proceso de su formación es muy complicado ya que es necesario tomar en cuenta campos magnéticos, momento angular, etc., más o menos, la formación termina en un estado donde la temperatura es tan alta que se generan reacciones termonucleares. Aunque, intuitivamente quizá podamos entender como nacen las estrellas, el problema para saber como mueren todavía es más complejo. La evolución térmica estelar y el estado final de la estrella, tienen puntos que no están bien entendidos [ver por ejemplo [8]]. Generalmente, el estado final depende fuertemente del valor de la masa inicial de la estrella. Por ejemplo, generalmente es bien aceptado, que estrellas con masas iniciales del orden de  $4M_{\odot}$  después de quemar el Hidrógeno inicial, pueden perder la masa suficiente tal

que, eventualmente, su estado final sea el de enanas blancas, porque la masa final es menor que  $M_{Ch} = 1.4M_{\odot}$ . Pero la descripción no es tan simple si consideramos la evolución de estrellas con masa mayores que  $4M_{\odot}$ . Típicamente, es más o menos aceptado que estrellas con masas mayores que  $8M_{\odot}$ , en su interior continuamente transforman un tipo de núcleo a otro por reacciones termonucleares [9]. Estas reacciones transforman exitosamente hidrógeno en helio, helio en carbono, carbono a neón, neón a oxígeno, oxígeno en silicio y finalmente el silicio en hierro. Entonces las estrellas masivas finalmente quedan compuestas de un centro de hierro sin reacciones termonucleares rodeado por capas concéntricas quemando los diferentes elementos químicos que ya mencionamos. El núcleo de hierro posee 26 protones y 30 neutrones. De hecho el núcleo de hierro es muy especial, porque los protones y neutrones en su núcleo están tan fuertemente ligados que las reacciones nucleares adicionales son endotérmicas. De acuerdo al consenso general el estado final depende de la masa del centro de hierro. Como las reacciones nucleares exotérmica son imposibles, el centro de hierro se colapsa por la fuerza de gravedad. Este colapso está acompañado con la fotodesintegración de los núcleos y genera la neutronización del centro vía el decaimiento inverso  $\beta$ . En este punto se da la situación más crítica del colapso gravitacional. El colapso puede terminar si la presión de degeneración de los neutrones es suficiente para detenerlo. En este caso la detención del colapso genera una onda de choque hacia afuera resultando posiblemente un fenómeno espectacular llamado: *Explosion de la Supernova* [10]. Si este escenario se realiza el resultado final de la

evolución estelar puede generar dos configuraciones. La primera posibilidad es que el centro de hierro tenga una masa  $M \sim 4M_{\odot}$ , y los cálculos numéricos indican que el producto final será una estrella de neutrones, mientras que las demás capas de la estrella son eyectadas hacia afuera [9,10]. La otra posibilidad, es decir, si la masa del centro de hierro es mayor que  $4M_{\odot}$ , se cree que en lugar de una estrella de neutrones se formará un hoyo negro [9]. Desde el punto de vista de la evolución estelar la existencia de los hoyos negros es evidente, ya que no existe ninguna razón para que todas las estrellas masivas tengan un centro de hierro del orden de  $4M_{\odot}$ .

En la actualidad todavía existen grandes problemas para describir el fenómeno de colapso del centro de la estrella y el mecanismo que genera la explosión de la supernova. Sin embargo hay evidencia observacional que indica que una explosión de la supernova al menos producirá una estrella de neutrones. Además, no existe ningún principio físico que prohíba la formación de hoyos negros como resultado final del colapso gravitacional completo del centro de una estrella. De hecho, simulaciones numéricas de colapsos del centro de estrellas progenitoras con masa mayores que  $20M_{\odot}$  indican la formación de hoyos negros como resultado del colapso gravitacional completo. Pero todavía hay más preguntas que no entendemos. En particular, queremos saber ¿Es verdad que los productos finales son los hoyos negros y las estrellas de neutrones?, ¿Cuánto material de la envolvente es eyectado por la explosión de la supernova?, ¿Cuál es el significado del momento angular y de los campos magnéticos en el mecanismo de colapso del centro de la estrella? Aunque, hemos argumentado

de los principios de física básica que los hoyos negros son un estado final posible para las estrellas masivas, todavía hay problemas matemáticos abiertos. Por ejemplo, ¿Cuáles son las predicciones de la teoría de la relatividad general para el estado final de la estrella en el caso que la presión de degeneración de neutrones sea insuficiente para detener el colapso gravitacional? Esta cuestión preocupó a los relativistas por muchos años.

El trabajo pionero de Oppenheimer en 1939 indica que el colapso de una esfera homogénea de gas, en el contexto de la relatividad general, lleva a un estado final singular, donde toda la masa está concentrada en un sólo punto. Posteriormente, Wheeler con sus alumnos de Princeton a principios de los años 60 verifican las conclusiones de los trabajos de Oppenheimer. En este trabajo se usan modelos de estrellas con ecuaciones de estado más cercanas a la realidad. Sin embargo las conclusiones del trabajo de Oppenheimer permanecen intactas. En el estado final del colapso gravitacional completo se desarrolla una singularidad del espacio-tiempo. Exactamente una configuración donde la densidad y la temperatura de la estrella son infinitas y al mismo tiempo su tamaño es puntual. Las leyes de la física y la capacidad de predecir el futuro fallarán totalmente. Surgen nuevas interrogantes ¿Podemos ser afectados por los terribles efectos de esta singularidad?, ¿Es la singularidad un artificio de la simetría esférica o es realmente generada por la naturaleza atractiva de la fuerza de gravitación? Penrose en un trabajo brillante [11] contesta de manera definitiva la segunda pregunta. Demuestra que realmente existe una singularidad en el estado final

de la estrella, y además que esta singularidad no es un artificio de la simetría, sino que es generada por la naturaleza de la fuerza de gravedad. Para dar respuesta a la primera pregunta, es decir, ¿Podemos ser afectados por los efectos de la singularidad? Penrose introduce la famosa *hipótesis del Censor Cósmico* [11]. Esta hipótesis afirma que todos los colapsos gravitatorios completos producen únicamente hoyos negros (donde la singularidad está oculta mediante el horizonte de eventos) y nunca singularidades desnudas. Si la hipótesis es válida la singularidad del espacio-tiempo estará oculta dentro del horizonte de eventos y no influirá en el mundo exterior. En otras palabras, la singularidad está *desconectada causalmente* del mundo exterior.

En la presente tesis aceptaremos como correcta la hipótesis del Censor Cósmico de Penrose. Como consecuencia aceptamos que el colapso gravitacional completo produce un *Hoyo Negro*.

Es conveniente comentar que hay personas que tienen dudas sobre la formación de hoyos negros estelares. Una duda que frecuentemente es expresada está relacionada con la existencia del fenómeno de viento estelar y sus efectos sobre la estrella. Si éste es muy intenso, posiblemente puede reducir significativamente la masa de la estrellas y en el estado final la masa de su centro posiblemente sea menor que el límite de Chandrasekhar. Si este fenómeno se cumple entonces todas las estrellas terminarían su vida como *Enanas Blancas*. Pero este argumento tiene puntos débiles. Si fuera válido no podríamos detectar estrellas de neutrones (por ejemplo, en forma de pulsares). En esta tesis vamos a aceptar la hipótesis de que los hoyos negros son

parte de este universo. Así surge de manera natural la pregunta central de la tesis:

*¿Cómo Podemos Detectar los Hoyos Negros?*

Si existe una manera para detectarlos, todas las preguntas relacionadas con las problemas de la explosión de la supernova terminarían. En este capítulo hablaremos sobre las propiedades básicas de los hoyos negros que serán importantes para entender los principios físicos involucrados en los posibles mecanismos de su detección.

## 2.2 Hoyos Negros

En la sección previa vimos como se pueden formar los hoyos negros estelares y mencionamos las razones físicas por las que esperamos su existencia. De la sección 1.2 sabemos que en la teoría de la relatividad general, la gravitación se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo. Desde este punto de vista es natural que preguntemos: ¿Qué es un hoyo negro? Seguramente es un campo gravitacional y en cierto sentido un campo gravitacional muy intenso, ya que posee una región donde la luz no puede escapar a infinito. Estas propiedades físicas pueden ser expresadas matemáticamente con las siguientes condiciones [4]. Un hoyo negro está definido como una métrica en el espacio-tiempo que es solución de las ecuaciones de Einstein (1.25) y que tiene las siguientes propiedades:

- 1) La geometría es asintóticamente plana;
- 2) Posee una región de espacio-tiempo que no puede comunicarse con la región asintótica;

Como consecuencia de la propiedad (2) tenemos la siguiente definición:

La frontera que separa esta región del espacio-tiempo que no puede comunicarse a la región asintótica plana se conoce como el *horizonte de eventos*.

3) No existen singularidades del espacio-tiempo fuera y sobre el horizonte de eventos.

En 1916, Karl Schwarzschild [1,4], derivó una solución de las ecuaciones de Einstein para un campo gravitacional alrededor de una masa esférica. En el capítulo anterior, exactamente en la sección 1.2 derivamos la famosa solución de Karl Schwarzschild. En la siguiente sección veremos que esta solución bajo condiciones especiales representa un hoyo negro que es conocido como *hoyo negro de Schwarzschild* [1,4].

En 1963 R. Kerr descubrió otra familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con simetría axial. Estas soluciones representan una nueva familia de hoyos negros llamada la *familia de Kerr* [1,4]. La generalización con carga fue encontrada subsecuentemente como solución a las ecuaciones de campo Einstein-Maxwell por Newman en 1965 [4].

Una gran pregunta que preocupaba a las personas que trabajan en la teoría de la relatividad general era: ¿Cuántas soluciones distintas a las ecuaciones de Einstein en vacío y a las ecuaciones Einstein-Maxwell representan hoyos negros? Hoy en día, gracias a los trabajos de muchas personas la respuesta es muy clara. Para ello se han establecido los siguientes teoremas muy fuertes [12]:



*Teorema 1.-* “La única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío que corresponde a un hoyo negro estático es la solución de Schwarzschild.”

*Teorema 2.-* “La única solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que corresponde a un hoyo negro estático y con un campo electro-magnético es la solución de Reissner-Nordström.”

*Teorema 3.-* “La única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío que corresponde a un hoyo negro con rotación es la solución de Kerr.”

*Teorema 4.-* “La única solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que corresponde a un hoyo negro estacionario y con un campo electro-magnético es la solución de Kerr-Newmann.”

Para los fines de esta tesis consideraremos solamente los hoyos negros descritos por la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kerr, es decir, esperamos que los hoyos negros que son astrofísicamente importantes sean esféricos sin carga o rotantes sin carga. Desde el punto de vista astrofísico, los objetos celestes con carga no son importantes ya que en general serán neutralizados rápidamente por el plasma de los alrededores. Entonces en las siguientes secciones analizaremos las propiedades más importantes de los hoyos negros de Schwarzschild y de los hoyos negros de Kerr.

### 2.3 Hoyos Negros de Schwarzschild

El hoyo negro de Schwarzschild es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. La métrica de Shwarzschild en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , como derivamos

en la sección 1.2, tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

donde  $M$  es una constante positiva, que identificamos con la masa física del hoyo negro.

En esta forma no podemos suponer que la coordenada  $r$  toma valores entre  $0 \leq r < \infty$ , porque la métrica tiene una singularidad en  $r = 2M$ , es decir, en  $r = 2M$ ,  $g_{tt} = 0$  y  $\lim_{r \rightarrow 2M} g_{rr} \rightarrow \infty$ . Pero como mostraremos en seguida, esta singularidad es solamente una singularidad de las coordenadas. Precisamente, para probar que la geometría no es singular en  $r = 2M$  debemos extender la métrica (2.1) para toda  $r$ , tal que,  $0 \leq r < \infty$ . Existen varias transformaciones de coordenadas que pueden emplearse para esto y al mismo tiempo indican que la singularidad en  $r = 2M$  es una singularidad de las coordenadas. En esta tesis utilizaremos una de estas transformaciones definida por [1]:

$$\begin{aligned} u &= u(t, r) = \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh \left( \frac{t}{4M} \right), \\ v &= v(t, r) = \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh \left( \frac{t}{4M} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

Con la ayuda de (2.2) derivamos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} &= u^2 - v^2, \\ \tanh \left( \frac{t}{4M} \right) &= \frac{v}{u} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Utilizando la transformación (2.2), podemos reescribir la métrica (2.1) en las nuevas coordenadas  $(u, v, \theta, \phi)$ . Primero, expresamos las ecuaciones (2.2) de la siguiente

manera:

$$\begin{aligned} u &= u(t, r) = g(r) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \\ v &= v(t, r) = g(r) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \end{aligned}$$

con:

$$g(r) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M}$$

tomamos las diferenciales  $du$  y  $dv$ :

$$du = \frac{dg(r)}{dr} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dr + \frac{g(r)}{4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dt \quad (2.4)$$

$$dv = \frac{dg(r)}{dr} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dr + \frac{g(r)}{4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dt \quad (2.5)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para  $dr$  y  $dt$ ,

$$\begin{aligned} dr &= \frac{Edu - Bdv}{EA - BC} \\ dt &= \frac{Adv - Cdu}{EA - BC} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{dg(r)}{dr} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), & B &= \frac{g(r)}{4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \\ C &= \frac{dg(r)}{dr} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), & E &= \frac{g(r)}{4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

sustituyendo  $dr$  o  $dt$  en la métrica (2.1) tenemos:

$$ds^2 = \frac{1}{EA - BC} \left[ \left( \frac{B^2}{f} - A^2 f \right) dv^2 + \left( \frac{E^2}{f} - C^2 f \right) du^2 + 2 \left( fAC - \frac{EB}{f} \right) dudv \right] + r^2 d\Omega^2 \quad (2.7)$$

al sustituir los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de las ecuaciones (2.6), primero obtenemos:

$$fAC - \frac{EB}{f} = 0$$

Esto implica que la métrica (2.7) queda como sigue:

$$ds^2 = \frac{1}{EA - BC} \left[ \left( \frac{B^2}{f} - A^2 f \right) dv^2 + \left( \frac{E^2}{f} - C^2 f \right) du^2 \right] + r^2 d\Omega^2$$

sustituyendo los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $E$  de las ecuaciones (2.4) y (2.5) tenemos finalmente:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.8)$$

Esta forma de la métrica es válida para  $2M < r < \infty$  y la nuevas coordenadas  $(u, v, \theta, \phi)$  se conocen como *Coordenadas de Kruskal* [1]. Para analizar el comportamiento de la métrica (2.8) en  $r = 2M$  primero calculamos el jacobiano de la transformación (2.2) en  $r = 2M$ . Por definición:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{rc^{r/2M}}{32M^3}$$

y claramente vemos que la transformación dada por (2.2) no es singular en  $r = 2M$ . Esto implica que podemos extender la geometría (2.8) hasta  $r = 2M$ . Hasta el momento hemos visto que la geometría está definida en  $r \geq 2M$  por la ecuación (2.8), pero todavía no tenemos una descripción completa de la geometría del espacio-tiempo. Para ello necesitamos extender la geometría para  $r < 2M$ . Una manera de hacerlo, es utilizar la transformación de coordenadas (2.2) para valores de  $r \leq 2M$ .

Esta transformación tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u &= u(t, r) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tau/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= v(t, r) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tau/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para  $r \leq 2M \Rightarrow 1 - r/2M \geq 0$ , es decir el valor dentro de la raíz cuadrada es positivo y la raíz es real en las ecuaciones (2.9). Ahora reescribimos la métrica (2.1) para valores  $r \leq 2M \Rightarrow 2M/r - 1 \geq 0$  como:

$$ds^2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dt^2 - \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.10)$$

La geometría dada por (2.10) sigue siendo solución a las ecuaciones de Einstein, pero también es singular en  $r = 2M$ . Utilizamos la transformación de coordenadas dada por la ecuación (2.9) en la métrica (2.10) obtenemos :

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad r \leq 2M. \quad (2.11)$$

Nos damos cuenta que la métrica (2.11) es idéntica a la métrica (2.8) en  $r = 2M$ . Al inspeccionarla, vemos que las funciones de la métrica son analíticas en  $r = 2M$ . Entonces tenemos una geometría extendida analíticamente a través de la hipersuperficie  $r = 2M$ , es decir, a través del horizonte de eventos.

La figura (2.1) muestra el plano  $u - v$  con  $-\infty < u < \infty$  y  $-\infty < v < \infty$ . Con referencia en las transformaciones dadas por (2.2) y (2.9) los puntos del espacio-tiempo con coordenadas  $-\infty < t < \infty$  y  $0 \leq r < \infty$  están representados en esta figura por la región de la parte superior de la línea  $B'OC'$ . Además los puntos del

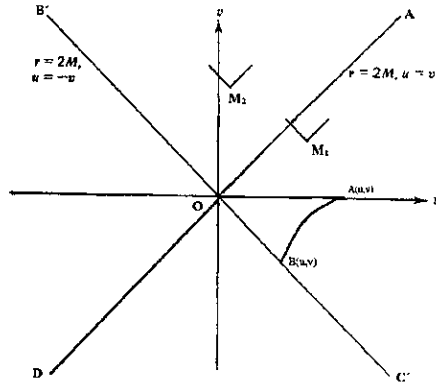


Figura 2.1 Coordenadas de Kruskal, donde se muestran las geodésicas nulas radiales, es decir,  $du = \pm dv$ . Para los puntos  $M_1$  y  $M_2$  dibujamos el cono de luz futuro.

espacio-tiempo con  $r = 2M$  y  $-\infty < t < \infty$  son representados en la misma figura por las líneas  $OA'$ ,  $OB'$  y  $OC'$ , porque estos puntos satisfacen que  $u^2 = v^2$ .

Una propiedad muy conveniente de la geometría escrita en las coordenadas de Kruskal  $(u, v)$ , es que las geodésicas nulas radiales tienen una ecuación muy sencilla. Como vimos en el capítulo primero, las geodésicas nulas tienen la propiedad que para cada dos puntos infinitesimales sobre dichas geodésicas:  $ds^2 = 0$ . Entonces la forma de la geometría de Schwarzschild, expresada en coordenadas de Kruskal, implica que las geodésicas nulas radiales cumplen que  $du = \pm dv$ . Es decir, son curvas que en el plano  $u - v$  forman un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $v$ . El espacio-tiempo que se encuentra en la parte superior de la línea  $B'OC'$  descrito en la figura (2.1) presenta patologías. Para ver esto de manera más clara consideremos una partícula que se mueve sobre una

geodésica del punto  $A(u, v)$  al punto  $B(u', v')$  como se muestra en la figura (2.1). El punto  $B(u', v')$  es el punto donde esta geodésica se intersecta con la hipersuperficie  $u = \pm v$ . El tiempo propio de esta partícula para viajar del punto  $A$  al punto  $B$  es finito. Pero esto significa que el espacio-tiempo que se encuentra en la parte superior de la línea  $B'OC'$  no es completo. En otras palabras, matemáticamente el espacio-tiempo dado por  $B'OC'A'$  tiene fronteras. Espacio-tiempos con esta propiedad no son físicos y matemáticamente podemos eliminarlos imponiendo la condición que el espacio-tiempo sea geodésicamente completo [4]. Exactamente si el espacio-tiempo es geodésicamente completo todas las geodésicas que no choquen con singularidades pueden extenderse a valores infinitos del tiempo propio. Entonces necesitamos extender el espacio-tiempo dado por  $B'OC'A'$ . Para ello hacemos una reflexión sobre la hipersuperficie  $u = \pm v$  y equivalentemente la línea  $B'OC'$ . Ahora el espacio extendido está dado por el plano total  $(u - v)$ .

Entonces para describir la nueva región extendida del espacio-tiempo podemos utilizar los siguientes cambios de coordenadas:

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (r \geq 2M) \end{aligned} \quad (2.12)$$

y para  $r \leq 2M$ ,

$$\begin{aligned} u &= -\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= -\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (r \leq 2M) \end{aligned} \quad (2.13)$$

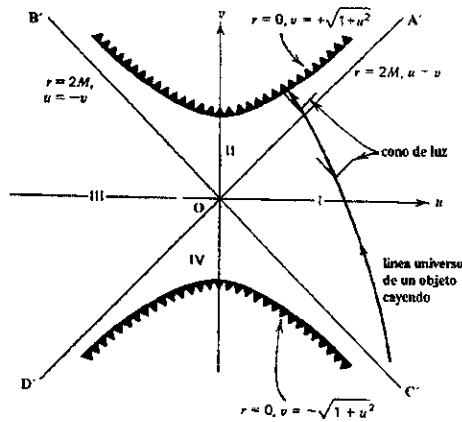


Figura 2.2 Diagrama de Kruskal de la métrica de Schwarzschild

Estas nuevas coordenadas describen la región  $D'OC'$  y  $D'OB'$  respectivamente. Finalmente extendemos la métrica de Schwarzschild analíticamente en las regiones  $D'OC'$  y  $D'OB'$  usando las coordenadas  $(u, v)$ . Por supuesto, la métrica tiene la forma dada por (2.8).

El espacio-tiempo descrito anteriormente está representado con más detalle por la figura (2.2) y es conocido como la extensión analítica de una variedad de Schwarzschild. La figura (2.2) indica la estructura del espacio-tiempo y también muestra las hipersuperficies (nulas)  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$  y  $OD'$  que son los horizontes, mientras que la hipersuperficie  $r = 0$  representa la singularidad del espacio-tiempo. Como se ve en la figura la singularidad está oculta dentro del horizonte de eventos, es decir, en la parte  $B'OA'$  y en la parte del espacio-tiempo  $D'OC'$  (conocida como Hoyo Blanco) respectivamente. Es claro de esta figura que puntos dentro de la región  $B'OA'$



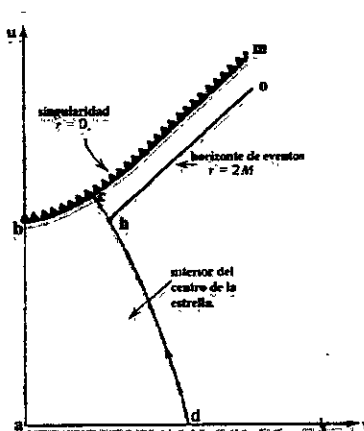


Figura 2.3 Diagrama de Kruskal para una estrella colapsándose.

no pueden comunicarse con puntos, por ejemplo en la región  $A'OC'$ . En este sentido la región  $B'OA'$  es el interior del hoyo negro de Schwarzschild relativamente de la región  $A'OC'$ . Como hemos visto aunque matemáticamente el espacio-tiempo mostrado en la figura (2.2) es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío que representa un hoyo negro, realístamente esperamos que un hoyo negro esférico producido por el colapso gravitacional completo sólo será descrito por el espacio-tiempo mostrado en la figura (2.3).

En esta figura vemos que la parte  $abcd$  representa la parte del espacio-tiempo dentro de la estrella que se colapsa hacia la singularidad representada como  $bm$ . La región exterior del hoyo negro esta descrita como la región  $dho$  y  $ho$  es exactamente el horizonte de eventos. Para el caso de colapso esférico la geometría de la región  $bcmx$  está dada por la geometría de Schwarzschild.

En esta tesis no vamos a trabajar en la extensión analítica de una variedad de Schwarzschild. En astrofísica, sólo la parte *bhor* de la figura (2.3) es relevante. Con esta idea, en la siguiente sección analizaremos el movimiento de una partícula prueba en la geometría de Schwarzschild, descrita de acuerdo al diagrama (2.3).

## 2.4 Movimiento de una Partícula Prueba

En esta sección estudiaremos el movimiento de partículas prueba que se están moviendo en la parte de la variedad fuera del horizonte de eventos. Entonces para analizar dichas trayectorias es suficiente utilizar las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  con la métrica de la forma (2.1). Como vimos en el capítulo primero las partículas libres se mueven en trayectorias geodésicas, es decir, satisfacen la ecuación (1.11). Las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse con un principio variacional del lagrangiano de una partícula, que por simplicidad suponemos con masa igual a la unidad, éste tiene la siguiente forma [1,4]:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.14)$$

donde como vimos  $\tau$  es el tiempo propio que es medido a lo largo de la trayectoria (ver ecuación (1.13)). Las ecuaciones de movimiento de Lagrange tienen la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$$

Para el caso de la geometría de Schwarzschild la forma del lagrangiano queda determinada por:

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.15)$$

Como  $L$  no tiene dependencia explícita de la coordenada  $t$ , ni de la coordenada  $\phi$ , automáticamente tenemos las siguientes constantes de movimiento: (En lo que sigue utilizaremos frecuentemente el punto sobre la coordenada para denotar derivada con respecto al tiempo propio  $\tau$  por ejemplo  $\dot{t} = dt/d\tau$ , etc.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= E, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= l, \end{aligned}$$

resolvemos las ecuaciones (2.16) y obtenemos:

$$\begin{aligned} E &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\ l &= r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.17)$$

mientras que las ecuaciones de Euler-Lagrange para la coordenada  $\theta$ , están determinadas por:

$$\frac{d}{d\tau} \left( r \frac{d\theta}{d\tau} \right) = r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.18)$$

Finalmente, necesitamos calcular las ecuaciones de movimiento  $r(\tau)$ . Pero podemos obtener la componente  $dr(\tau)/d\tau$ , cuando imponemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= -1, & \text{partículas con masa.} \\ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= 0, & \text{partículas sin masa.} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Antes de escribir las ecuaciones de movimiento para  $r(\tau)$ , analicemos la ecuación (2.18). Primero supongamos que la partícula se encuentra a un tiempo inicial  $\tau = 0$  en el plano ecuatorial, es decir,  $\theta = \pi/2$  y  $\dot{\theta} = 0$ , desarrollando el lado izquierdo de (2.18) obtenemos:

$$\frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + r \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = r^2 \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (2.20)$$

Utilizando las condiciones iniciales  $\theta = \pi/2$ , y  $\dot{\theta} = 0$ , la ecuación (2.20) nos dice que  $d^2\theta/d\tau^2 = 0$  para  $\tau = 0$ . En la ecuación (2.20) diferenciamos con respecto de  $\tau$ , y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} \frac{d\theta}{d\tau} + 2 \frac{dr}{d\tau} \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + r \frac{d^3\theta}{d\tau^3} &= 2r \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \\ &+ r^2 \cos\theta \cos\theta \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \\ &+ r^2 \sin\theta \sin\theta \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \\ &+ 2r^2 \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau}. \end{aligned}$$

con las condiciones  $\tau = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , esta ecuación nos dice que:

$$\left. \frac{d^3\theta}{d\tau^3} \right|_{\tau=0} = 0$$

De manera sucesiva, obtenemos para cada  $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ :

$$\left. \frac{d^m \theta}{d\tau^m} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (2.21)$$

Pero (2.21) implica que el movimiento de la partícula para  $\theta(\tau)$ , es igual a cero para todo tiempo  $\tau \geq 0$ , es decir, la partícula se está moviendo en un plano si a un tiempo  $\tau = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  y  $\dot{\theta} = 0$ . Con la conclusión que el movimiento se da en el plano ecuatorial buscaremos soluciones de las ecuaciones geodésicas que representan geodésicas temporales. La temporalidad implica que la ecuación (2.19) toma la forma:

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.22)$$

despejamos  $dr/d\tau$ , y obtenemos,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - 1 \right] \quad (2.23)$$

Cuando usamos (2.17) en (2.23) finalmente tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \quad (2.24)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E \quad (2.25)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.26)$$

Como en la mecánica clásica, definimos un *potencial efectivo* dado por:

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) \quad (2.27)$$

en este caso la ecuación (2.24) se convierte en:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - V(r) \quad (2.28)$$

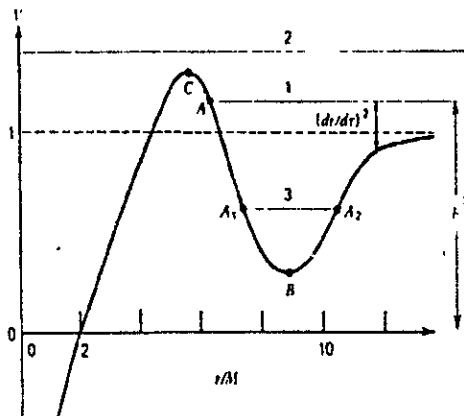


Figura 2.4 Gráfica del perfil del potencial efectivo para una partícula, orbitando en un hoyo negro de Schwarzschild de masa  $M$

Para un valor fijo de  $\tilde{l}$ , es decir, constante,  $V(r)$  es descrita esquemáticamente por la figura (2.4). En esta figura las tres líneas horizontales corresponden a diferentes valores de  $\tilde{E}^2$ . De la ecuación (2.28) vemos que la distancia de la línea horizontal a  $V$  nos da  $(dr/d\tau)^2$ . Consideremos la órbita 1, la línea horizontal etiquetada con 1 corresponde a una partícula que viene de infinito con una energía  $\tilde{E}^2$ , cuando la partícula alcanza el valor de  $r$  correspondiente al punto  $A$ ,  $dr/d\tau$  se hace cero y cambia su signo, es decir, la partícula regresa a infinito. Tales órbitas no están acotadas, y  $A$  es llamado el punto de retorno. La órbita 2 es una órbita de *captura*: la partícula es atrapada por el hoyo negro. Esta clase de órbitas son resultado de la dinámica de la relatividad general, ya que como veremos más adelante estas órbitas

no aparecen en la teoría newtoniana. La órbita 3 es una órbita acotada, con dos puntos de retorno  $A_1$  y  $A_2$ . El punto  $B$  corresponde a una órbita circular estable. Si la partícula es ligeramente perturbada en  $B$ , la órbita permanece alrededor de  $B$ . El punto  $C$  es una órbita circular inestable; una partícula localizada en tal punto, que experimente una ligera perturbación radial hacia adentro, caerá hacia el hoyo negro y será capturada. Si ésta es hacia afuera, la partícula se irá rápidamente a infinito.

Es instructivo examinar cuáles son las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en un campo con simetría esférica en la teoría newtoniana. En este caso, el lagrangiano está dado por:

$$L = \frac{1}{2} m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right] - V(r) \quad (2.29)$$

Resolvemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, para  $r$  :

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dr}{dt} \right) = mr \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (2.30)$$

para  $\theta$ , encontramos que:

$$\frac{d}{dt} \left( mr^2 \dot{\theta} \right) = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (2.31)$$

mientras que para  $\phi$ , obtenemos directamente una constante de movimiento dada por:

$$l = mr^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (2.32)$$

Al igual que en el caso relativista proponemos  $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$  en  $t = 0$ . De esta manera desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (2.31) y utilizando las condiciones iniciales, encontramos que  $d^2\theta/dt^2 = 0$  en  $t = 0$ , y siguiendo el mismo razonamiento,

obtenemos que  $d^n\theta/dt^n = 0$  en  $t = 0$ . Es decir, que la partícula se está moviendo para todo tiempo en un plano y suponemos que ese plano es el plano ecuatorial. En este caso la ecuación (2.32) queda como:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{l}{mr^2} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.30), utilizando condiciones iniciales y la ecuación (2.33) queda expresada como:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (2.34)$$

Multiplicando en ambos lados por la velocidad radial:

$$m \left(\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2}\right) = \frac{l^2}{mr^3} \frac{dr}{dt} - \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \frac{dr}{dt}\right) \quad (2.35)$$

esta ecuación puede reescribirse como una derivada total, es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right) \quad (2.36)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right] = 0$$

así, que la otra integral de movimiento está dada por:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (2.37)$$

Para el caso clásico, el potencial efectivo puede escribirse como:

$$V(r) \equiv \left( \frac{l}{mr^2} - \frac{GM}{r} \right) \quad (2.38)$$



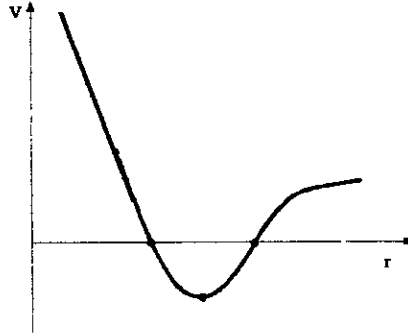


Figura 2.5 Gráfica del perfil del potencial efectivo para una partícula, descrito en la teoría clásica.

así,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E^2 - V(r)$$

Para un valor fijo de  $l$ ,  $V(r)$  es descrito por la figura (2.5). Donde vemos que el potencial efectivo descrito por la ecuación (2.38) es similar al potencial efectivo relativista para valores  $r \rightarrow \infty$ . Pero existen grandes diferencias para  $r \rightarrow 2M$ . La ecuación (2.27), tiene un término puro de efectos relativistas de acoplamiento entre momento angular y potencial gravitacional que va como  $(r^{-3})$ . Este término es muy importante ya que permite a una partícula con momento angular penetrar al centro del objeto compacto, es decir, se generan las órbitas de captura (ver órbita 2 en la figura (4.2)). Esto difiere considerablemente de la teoría clásica donde la partícula no podía atravesar una barrera de potencial y era obligada a regresar a infinito, como vimos en la figura (2.5).

A continuación, consideramos brevemente la estabilidad de las trayectorias relativistas. Las órbitas estables deben satisfacer que  $\partial V/\partial r = 0$ . Con ayuda de (2.27) tenemos que :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \Rightarrow Mr^2 - \tilde{l}^2 r + 3M\tilde{l}^2 = 0 \quad (2.39)$$

por lo que se puede demostrar que el potencial no tiene máximo ni mínimo para  $\tilde{l} < 2\sqrt{3}M$  y  $V_{\max} = 1$  para  $\tilde{l} = 4M$ .

Las órbitas circulares ocurren cuando  $\partial V/\partial r = 0$  y  $\partial r/\partial \tau = 0$ . De las ecuaciones (2.28) - (2.39) tenemos que:

$$\tilde{l}^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} \quad (2.40)$$

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)} \quad (2.41)$$

Las órbitas circulares existen por debajo de  $r = 3M$ , el caso límite corresponde a las órbitas del fotón ( $\tilde{E} = E/m \rightarrow \infty$ ). Las órbitas circulares son estables si  $\partial^2 V/\partial r^2 > 0$ , y son inestables si  $\partial^2 V/\partial r^2 < 0$ . La última órbita circular estable en la geometría de Schwarzschild es  $r = 6M$ . La variación de  $V$  con  $\tilde{l}^2$  se muestra en la figura (2.6).

## 2.5 Hoyos Negros de Kerr

En esta sección mencionaremos las propiedades más importantes de la familia de los hoyos negros de Kerr. Como vimos en el capítulo anterior la única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío que corresponde a un hoyo negro con rotación es la

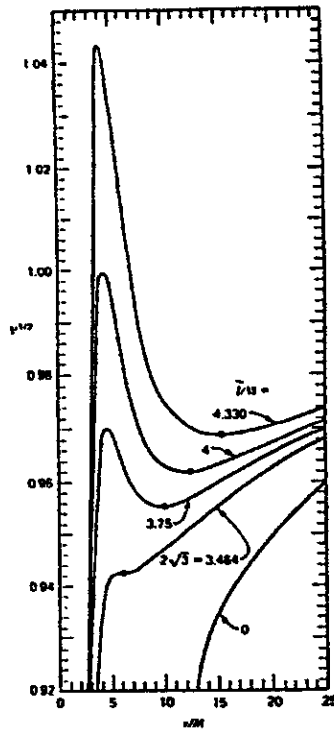


Figura 2.6 Gráfica del perfil del potencial efectivo para partículas con diferentes momentos angulares  $\tilde{l}$  orbitando en un hoyo negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Si la partícula cae desde  $r = \infty$  con un parámetro de impacto  $b > 3\sqrt{3}M$  ésta regresa a  $r = \infty$ . Si  $b < 3\sqrt{3}M$  la partícula es capturada por el hoyo negro.

solución de Kerr. Los hoyos negros de Kerr tienen propiedades muy distintas de los hoyos negros de Schwarzschild. Una de ellas es que poseen momento angular distinto de cero.

La geometría de los hoyos negros de Kerr es descrita por dos parámetros, la masa del hoyo negro  $M$  y el momento angular  $J$ . Las propiedades de los hoyos negros de Kerr son más claras en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  Boyer-Lindquist (1967) (para una descripción de estas coordenadas ver [4]), donde la métrica de Kerr está dada como:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \quad (2.12)$$

$$+ \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde  $\phi$  es la dirección de rotación del hoyo negro y,

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.13)$$

La métrica es estacionaria (independiente de  $t$ ) y axisimétrica alrededor del eje polar (independiente de  $\phi$ ). Definimos  $a$  como el momento angular por unidad de masa del hoyo negro. Tenemos que  $J^2 = a^2 M^2$ , entonces para que el elemento de línea dado por (2.12) represente un hoyo negro es necesario que  $a$  se encuentre dentro del siguiente rango  $0 \leq a^2 \leq 1$ . Si  $a = 0$  recuperamos la métrica de Schwarzschild. Cuando  $a^2 = 1$ , la geometría (2.12) describe un hoyo negro con rotación máxima. En caso que  $a^2 > 1$  la geometría describe una singularidad desnuda. Pero este caso no está permitido porque hemos aceptado como válida la hipótesis del Censor Cósmico.

Una propiedad característica de los hoyos negros de Kerr es la existencia de una región conocida como la *ergosfera*. La ergosfera se define como una región del espacio-tiempo donde todos los observadores físicos están rotando necesariamente en la misma dirección de la rotación del hoyo negro. La ecuación que describe la hipersuperficie de espacio-tiempo de la ergosfera es:

$$1 - \frac{2rM}{\Sigma} = 0 \Rightarrow \Sigma = 2Mr \Rightarrow r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr = 0 \quad (2.44)$$

Para el caso que  $0 \leq a^2 \leq 1$  podemos ver fácilmente que la ecuación (2.44) tiene una raíz real dada por:

$$r_0 = M + (M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (2.45)$$

Esta ecuación define el límite estático y es una frontera de la ergosfera (ver figura (2.7)). Otra hipersuperficie muy importante del espacio-tiempo del hoyo negro de Kerr es el horizonte de eventos. Es un poco difícil determinarlo en el presente caso. El lector puede referirse a [1,4] para más detalles. La hipersuperficie del horizonte de eventos está dado por:

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.46)$$

En la figura (2.7) representamos una sección del hoyo negro de Kerr, donde vemos claramente la relación de la ergosfera con el horizonte de eventos.

## 2.6 Geodésicas Ecuatoriales para el Hoyo Negro de Kerr

Para el estudio del proceso de acreción de disco en hoyos negros de Kerr es muy importante tener una idea como son las ecuaciones de movimiento para las partícu-

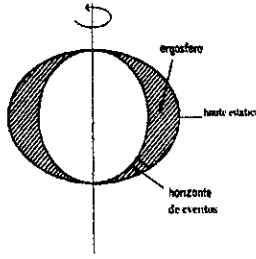


Figura 2.7 Diagrama de un hoyo negro de Kerr.

las que se encuentran fuera del hoyo negro de Kerr. En otras palabras, necesitamos resolver las ecuaciones de las geodésicas en la geometría de Kerr. En el caso de esta geometría las soluciones de las ecuaciones de las geodésicas son mucho más complicadas que en la geometría de Schwarzschild. Afortunadamente, para los modelos de discos de acreción en un hoyo negro de Kerr solamente necesitamos las soluciones que describen el movimiento de las partículas en el plano ecuatorial, es decir, el plano descrito por  $\theta = \pi/2$ , en las coordenadas de Boyer-Lindquist. El lagrangiano de estas partículas está dado por [1]:

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{4aM}{r} \dot{t}\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\phi}^2 \quad (2.17)$$

entonces las ecuaciones de movimiento para  $t$  tienen la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

donde,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} - \frac{4aM}{r} \dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

entonces,

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} - \frac{4aM}{r}\dot{\phi} = cte = -E \quad (2.48)$$

mientras que para  $\phi$  tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

donde,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{4aM}{r}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

entonces,

$$-\frac{4aM}{r}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi} = cte = -l \quad (2.49)$$

Tenemos dos ecuaciones para  $\dot{t}$ , y para  $\dot{\phi}$ , es decir, (2.48) y (2.49). Reescribimos estas

ecuaciones de la siguiente manera:

$$A\dot{t} + B\dot{\phi} = l$$

$$C\dot{t} + D\dot{\phi} = -E$$

con,

$$\begin{aligned} A &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), & B &= -\frac{4aM}{r} \\ C &= -\frac{4aM}{r}, & D &= r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Resolvemos para  $\dot{t}$  y para  $\dot{\phi}$ ,

$$\dot{t} = -\frac{(Dl + EB)}{(BC - DA)}$$

y,

$$\dot{\phi} = \frac{Cl + EA}{(BC - DA)}$$

con ayuda de las ecuaciones (2.50) tenemos:

$$\dot{t} = \left( \frac{E(r^3 + a^2r + 2Ma^2) - 2aMlr}{r\Delta} \right) \quad (2.51)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r - 2M)l + 2aME}{r\Delta} \quad (2.52)$$

No necesitamos construir explícitamente la ecuación de movimiento para la parte radial  $r(\tau)$ . Podemos utilizar la condición que  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ , es decir,

$$g_{tt}\dot{t}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi t}\dot{\phi}\dot{t} + g_{rr}\dot{r}^2 = -1$$

$$g_{tt}\dot{t}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 = -1$$

cuando resolvemos esta ecuación para  $\dot{r}^2$  obtenemos,

$$g_{rr}\dot{r}^2 = -\frac{1}{g_{rr}} - \frac{g_{tt}}{g_{rr}}\dot{t}^2 - \frac{g_{\phi\phi}}{g_{rr}}\dot{\phi}^2 - 2\frac{g_{t\phi}}{g_{rr}}\dot{t}\dot{\phi}$$

de esta manera,

$$r^3 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = R(E, l, r) \quad (2.53)$$

donde,

$$R \equiv E^2(r^3 + a^2r + 2ma^2) - 4aMEl - (r - 2M)l^2 - m^2r\Delta. \quad (2.54)$$

Primero, nos interesa investigar las condiciones, para las que soluciones de la ecuación (2.53), describen partículas moviéndose en órbitas circulares en el plano ecuatorial, es decir, para las órbitas que satisfagan  $r(\tau) = cte$ , para toda  $\tau$ . En otras palabras, busquemos las soluciones donde la coordenada radial  $r_0$  está fija. Si tenemos las siguientes condiciones iniciales:  $r(\tau_0) = r_0$ ,  $dr/d\tau|_{\tau_0} = 0$ , podemos probar de (2.53)



que todas las órbitas circulares ecuatoriales deben satisfacer:

$$R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \quad (2.55)$$

Ahora podemos resolver la ecuación (2.55) para expresar la energía  $\tilde{E}$  y momento angular  $\tilde{l}$ , como funciones del radio  $r$ , de la siguiente manera:

$$\tilde{E} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r \left( r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.56)$$

$$\tilde{l} = \pm \frac{\sqrt{Mr} \left( r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2 \right)}{r \left( r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.57)$$

De donde vemos que para  $\tilde{E}$  y  $\tilde{l}$  sean reales es necesario que el denominador sea real.

Como este denominador es función de  $r$ , tenemos un radio mínimo, después del cual pueden existir órbitas circulares. Es decir, todas las órbitas circulares en el plano  $\theta = \pi/2$  deben satisfacer:  $r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} \geq 0$ . Entonces para encontrar este  $r$  mínimo, tenemos que resolver  $r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} = 0$ . La órbita del radio mínimo se conoce como la última órbita circular del "fotón" y está dada por:

$$r_{ph} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \cos^{-1} (\mp a/M) \right] \right\} \quad (2.58)$$

Con la experiencia adquirida en el estudio de las órbitas en los hoyos negros de Schwarzschild esperamos que no todas las órbitas circulares sean estables. Para nuestro análisis es necesario encontrar órbitas circulares, acotadas y estables. Una órbita circular no está acotada si tiene la propiedad la energía por unidad de masa  $E/m > 1$ . Para estas órbitas una pequeña perturbación tiene el efecto que la partícula escapa a

infinito. La frontera que tiene órbitas que están acotadas satisface  $E/m \leq 1$ . El caso en que se cumple la igualdad  $E/m = 1$ , nos da la última órbita acotada, resolvemos las ecuaciones (2.56) y (2.57), obtenemos:

$$r_{mb} = 2M \mp a + 2M^{1/2} (M \mp a)^{1/2} \quad (2.59)$$

Todavía podemos tener órbitas circulares y acotadas pero que no son sean estables. Una órbita circular es estable si satisface que  $\partial^2 R/dr^2 \leq 0$ . Cuando resolvemos  $\partial^2 R/dr^2 = 0$ , obtenemos la raíz positiva  $r_1$ , así la región  $r \geq r_{ms}$  presenta órbitas circulares que son estables, donde  $r_{ms}$  es el radio mínimo de la última órbita circular estable en el plano ecuatorial, es decir,

$$\begin{aligned} r_{ms} &= M \left\{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right\} \dots \\ Z_1 &\equiv 1 + \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \frac{a}{M} \right)^{1/3} + \left( 1 - \frac{a}{M} \right)^{1/3} \right], \\ Z_2 &\equiv \left( 3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para tener una situación clara sobre la relación entre los radios que hemos encontrado graficamos  $r_{ph}$ ,  $r_{mb}$ ,  $r_{ms}$  (fig. 2.8) como funciones de la masa  $M$  y del momento angular específico  $a$  del hoyo negro [13].

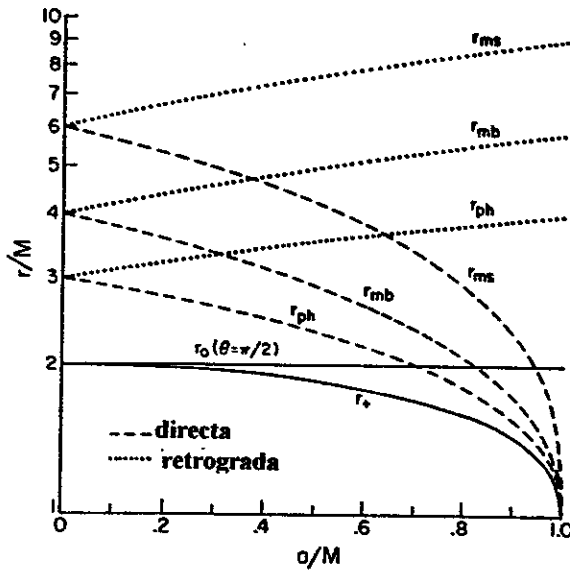


Figura 2.8 Órbitas ecuatoriales circulares alrededor de un hoyo negro rotante de masa  $M$ , como función del momento angular por unidad de masa  $a$  [13]. Las curvas entrecortadas y punteadas (para órbitas directas y retrogradas) graficadas en los radios coordenados de Boyer-Linquist de la última órbita estable ( $r_{ms}$ ), la última órbita acotada ( $r_{mb}$ ), y de las órbitas de los fotones ( $r_{ph}$ ). Las curvas solidas indican el horizonte de eventos ( $r_+$ ) y la frontera ecuatorial de la ergosfera ( $r_0$ ).

## Capítulo 3

### ACRECIÓN ESFÉRICA

#### 3.1 Introducción

Como vimos en el capítulo anterior los hoyos negros se caracterizan por no dejar escapar ninguna forma de radiación de su interior. Específicamente, al analizar la figura (2.2) del capítulo anterior, vimos que de la región II ninguna señal puede llegar a la región I. Normalmente, la detección y el estudio de los objetos astrofísicos se realiza a través de las observaciones de radiación electromagnética que éstos emiten. En ocasiones se emplean otros mecanismos, por ejemplo, la radiación de neutrinos y otras partículas cargadas en forma de viento estelar. Desde esta perspectiva en el caso de hoyos negros no podemos utilizar el concepto de radiación electromagnética ni otras formas de radiación para detectarlos porque simplemente no emiten radiación. Posiblemente, la radiación gravitacional puede dar información sobre los hoyos negros. Aunque, por ahora la astronomía de radiación gravitacional no existe, esperamos que en el futuro con el desarrollo de detectores de ondas gravitacionales, la radiación gravitacional puede contribuir al estudio de hoyos negros. Pero en este momento

el problema es ¿Cómo podemos detectarlos? Específicamente, en esta tesis estamos interesados en entender los principios físicos en los que se basa su detección.

Debemos tener en mente que aunque los hoyos negros no están emitiendo radiación, todavía ejercen influencia gravitacional en otros objetos celestes cercanos a él, éste es un principio básico que utilizaremos para su detección.

En el capítulo primero vimos que tanto las enanas blancas como las estrellas de neutrones están soportadas por la presión de degeneración de electrones y de neutrones respectivamente. Además, concluimos la existencia de una masa máxima para las estrellas de neutrones  $M_{\max}^{ns}$ , cuando analizamos la gráfica (1.1). Los modelos teóricos de las estrellas de neutrones usando diferentes ecuaciones de estado indican que  $M_{\max}^{ns}$  está probablemente acotado por [18]:

$$M_{\max}^{ns} < 5M_{\odot} (\rho_0/\rho_{nuc})^{1/2}$$

donde  $\rho_{nuc} = 2 \times 10^{14} \text{gr/cm}^3$  y  $\rho_0 \simeq (0.5 - 5) \rho_{nuc}$  es la densidad de volumen de materia nuclear. Hasta el momento no hay un consenso general del valor exacto de esta masa límite, debido principalmente a la incertidumbre de la física del interior de las estrellas de neutrones. Basados en la teoría y las observaciones los físicos y astrofísicos creen que la masa máxima de las estrellas de neutrones satisface que:  $M_{\max}^{ns} \sim 3M_{\odot}$  y posiblemente se incrementará hasta un 25% cuando incluyamos efectos de rotación. Aunque teóricamente es posible establecer configuraciones con masas mayores a  $M_{\max}^{ns}$ , estas configuraciones requieren condiciones muy especiales y por ello son llamadas estrellas exóticas. Si tenemos un método para determinar la masa del objeto compacto

$M_c$  y los resultados de este procedimiento nos lleva a que  $M_c > 3M_\odot$ , el consenso general de físicos y astrofísicos es que tendremos evidencias fuertes de que el objeto compacto es un hoyo negro. Este criterio es, hasta el momento, el más poderoso y confiable. Pero queremos comentar brevemente que este criterio de masa presenta algunos problemas. Primero, no es fácil determinar observacionalmente la masa del objeto compacto. Segundo, existen otros inconvenientes, entre estos podemos mencionar algunos objetos hipotéticos, construidos por astrofísicos, con masas mayores que  $M_{\text{max}}^{\text{ns}}$ , por ejemplo las estrellas de quarks. Entonces el consenso general de físicos y astrofísicos es que necesitamos otras evidencias para concluir definitivamente que un objeto compacto con  $M_c > 3M_\odot$  es un hoyo negro

En seguida, presentaremos un breve resumen de las evidencias más recientes de los hoyos negros estelares basados en el criterio de masa. Una situación muy clara donde la influencia gravitacional de los hoyos negros puede ser observada es en las configuraciones donde un hoyo negro constituye un sistema binario con otra estrella. Observacionalmente sabemos que más del 50% de las estrellas en una galaxia típica se encuentran en sistemas binarios. Ahora indicaremos brevemente la posibilidad de que un sistema binario cerrado evolucione a una configuración donde una de las estrellas es un objeto compacto. Típicamente, de la teoría de la evolución estelar [8] las estrellas más masivas quemarán más rápidamente su combustible nuclear. Además normalmente no esperamos que las dos estrellas tengan la misma masa en el momento de su nacimiento. Entonces si una de ellas es más masiva puede convertirse en un

objeto compacto mientras que la otra sigue siendo una estrella normal. De esta manera, un sistema binario puede estar conformado por un objeto compacto y una estrella normal. Exactamente se han observado sistemas binarios donde el compacto es una enana blanca y otros donde es una estrella de neutrones, pero también existen casos donde se espera que el objeto compacto sea un hoyo negro. Astrofísicamente, existe una clase de sistemas binarios que se clasifican como: a) Sistemas Binarios de Enanas Blancas; b) Sistemas Binarios de Estrellas de Neutrones y c) Sistemas Binarios de Candidatos a Hoyos Negros. Además una clase de sistemas binarios que nos interesan son los sistemas binarios de rayos-X (XRB). Estos sistemas son muy importantes por varias razones. Una de ellas es que muchas veces nos permiten acotar las masas de las dos estrellas componentes del sistema. En la siguiente sección analizaremos brevemente como podemos hacer esto.

### 3.2 Determinación de la masa de Sistemas Binarios de Rayos-X

Como mencionamos anteriormente, una de las evidencia más fuertes para concluir la existencia de hoyos negros es el criterio de masa. Es decir, si podemos determinar que la masa del objeto compacto  $M_c$  es mayor que tres masas solares  $M_c \geq 3M_\odot$ , tenemos fuertes evidencias que el objeto central es un hoyo negro. Por esta razón astronómicamente es muy importante determinar la masa del objeto compacto. Para un objeto compacto aislado es muy difícil determinar su masa. Afortunadamente, en un sistema binario cerrado bajo ciertas condiciones podemos medir observacional-

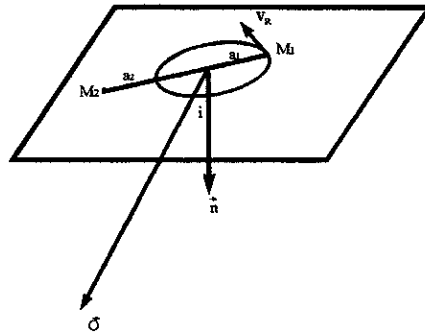


Figura 3.1 Diagrama del plano ecuatorial de un sistema de dos estrellas con masas  $M_1$  y  $M_2$ ,  $\vec{n}$  es la normal al plano orbital y  $\vec{\sigma}$  representa la dirección de la línea de observación.

mente la masa de sus componentes. Dependiendo de la naturaleza del sistema binario la determinación de la masa puede lograrse utilizando la teoría de gravitación newtoniana o incluyendo efectos relativistas generales. Típicamente en sistemas binarios compuestos por una estrella normal y un objeto compacto, los efectos relativistas son despreciables (pero en sistemas binarios que involucran dos objetos compactos los efectos relativistas se vuelven muy importantes). En lo que sigue indicaremos como puede ser determinada la masa del sistema dentro del marco newtoniano.

El objeto central está determinado por la llamada función de masa [1]. Para encontrar esta función, consideremos dos estrellas que en primera aproximación son esféricas, con masas  $M_1$  y  $M_2$  las cuales constituyen un sistema binario cerrado. Asumimos que giran en órbitas circulares alrededor del centro de masa. La figura (3.1) nos muestra este sistema visto en el plano orbital. La distancia de separación



entre las dos masas es  $a$ , y sus distancias al centro de masa son  $a_1$  y  $a_2$  :

$$a_1 + a_2 = a, \quad (3.1)$$

$$M_1 a_1 - M_2 a_2 = 0. \quad (3.2)$$

En la figura (3.1) el ángulo  $i$  es llamado el ángulo de inclinación del plano orbital a la línea de observación. Si consideramos el movimiento de la estrella con masa  $M_1$ , la velocidad radial  $v_R$  en el centro de masa está dado por:

$$v_R = w a_1 = \frac{2\pi}{T} a_1 \quad (3.3)$$

Con  $T$  el periodo orbital de la estrella con respecto de su centro de masa. Cuando proyectamos la velocidad radial sobre la línea de observación obtenemos con referencia en la figura (3.1):

$$v_1 = \frac{2\pi}{T} a_1 \sin i, \quad (3.4)$$

Esta velocidad  $v_1$ , en muchos casos, puede ser determinada espectroscópicamente, al igual que el periodo  $T$ . Alternativamente, para pulsos de rayos-X uno puede medir variaciones en el tiempo de llegada de los pulsos.

De las leyes de Kepler tenemos que:

$$\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (3.5)$$

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos:

$$a = \frac{M_1 + M_2}{M_2} a_1, \quad (3.6)$$

y entonces,

$$f(M_1, M_2, i) \equiv \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{T v_1^3}{2\pi G} \quad (3.7)$$

La función  $f$  es llamada la *función de masa* para  $M_1$ . De las observaciones podemos conocer el lado derecho de esta ecuación.

Para algunos sistemas binarios de rayos-X, ha sido posible medir la función de masa tanto para la compañera óptica como la función de masa de rayos-X. Obteniendo:

$$f_x = \frac{(M_x \sin i)^3}{(M_x + M_0)^2} = \frac{4\pi (a_1 \sin i)^3}{GT^2}, \quad f_0 = \frac{(M_0 \sin i)^3}{(M_x + M_0)^2} = \frac{T v_1^3}{2\pi G}, \quad (3.8)$$

donde  $x$  se refiere a la fuente de rayos-X y 0 a la compañera óptica. La razón de estas dos expresiones nos da la razón de masa  $q$ ,

$$q \equiv \frac{M_x}{M_0}, \quad (3.9)$$

y entonces podemos reescribir la ecuación (3.8) como:

$$M_x = \frac{f_x q (1+q)^2}{\sin^3 i} \quad (3.10)$$

Un valor único de  $M_x$  todavía depende del parámetro  $\sin i$  que generalmente no conocemos. En la práctica, mediante observaciones podemos acotar este valor y obtener una aproximación de la masa de la compañera. Típicamente, el ángulo de inclinación puede determinarse de tres maneras: a) Vía observación de eclipses de rayos-X; b) Curvatura óptica de la luz; y c) Variaciones de polarización (para más detalles ver [14]). De esta forma, la función de masa nos da información de la masa del compacto.

Las tablas siguientes [14] muestran las medidas más recientes de los sistemas binarios de rayos-X más importantes. Estos sistemas están clasificado de acuerdo a la masa del “donador”, es decir, la masa de la estrella normal. Así tenemos: LMXB (sistemas binarios de rayos-X poco masivos), HMXB (sistemas binarios de rayos-X masivos) y candidatos a hoyos negros. En la primer clase, es decir, LMXB la masa de la estrella normal es menor que  $1M_{\odot}$ , mientras que para HMXB la masa del donador es mayor que  $10M_{\odot}$ . En la primera tabla se dan los valores de la función de masa y el límite inferior de la masa del objeto compacto.

Objeto	Tipo	$f(M_x)$	$\sim M_x$
GRO JO 422+32 (XN Per 92)	LMXB	$1.21 \pm 0.06$	$\geq 9$
A 0620-00 (XN Mon 75)	LMXB	$2.91 \pm 0.08$	4.9 – 10
GRS 1124-683 (XN Mus 91)	LMXB	$3.01 \pm 0.15$	5 – 7.5
4U 1543-47	LMXB	$0.22 \pm 0.02$	1.2 – 7.9
GRO J1655-40 (XN Sco 94)	LMXB	$3.16 \pm 0.15$	$7.02 \pm 0.22$
H 1705-250 (XN Oph 77)	LMXB	$4 \pm 0.8$	$4.9 \pm 1.3$
GS 2000+250 (XN Vul 88)	LMXB	$4.97 \pm 0.1$	$8.5 \pm 1.5$
GS 2023+338 (V404 Cyg)	LMXB	$6.08 \pm 0.06$	$12.3 \pm 0.3$
0538-641 (LMC-X-3)	HMXB	$2.3 \pm 0.3$	7 – 14
1956+350 (Cyg X-1)	HMXB	$0.24 \pm 0.01$	7 – 20

Tabla 3.1 Los mejores candidatos a hoyos negros entre los sistemas binarios de rayos-X [14].

Los objetos en la tabla 3.1 son candidatos a hoyos negros. La masa inferida

(dada en unidades de masas solares) del objeto compacto es mayor que  $M_{\max}^{ns}$ . Excepto el sistema 4U 1538-52, aunque la incertidumbre en la masa es muy grande.

Nombre	$i(^{\circ})$	$M_x (M_{\odot})$	$M_{comp} (M_{\odot})$
HMXB			
Vela X-1	$> 74$	$1.88 (+0.69, -0.47)$	$23.5 (+2.2, -1.5)$
4U 1538-52	$68 (+9, -8)$	$1.06 (+0.41, -0.34)$	$16.4 (+5.2, -4.0)$
SMC X-1	$70 (+11, -7)$	$1.6 \pm 0.1$	$17.2 \pm 0.6$
LMC X-4	$65 (+7, -6)$	$1.47 (+0.44, -0.39)$	$15.8 (+2.3, -2.0)$
Cen X-3	$> 66$	$1.09 (+0.57, -0.52)$	$18.4 (+4.0, -1.8)$
Her X-1	$> 79$	$1.47 (+0.23, -0.37)$	$2.32 (+0.16, -0.29)$
LMXB			
Cen X-4	$30 - 37$	$1.1 - 1.9$	$< 0.2$
4U 1626-67	$9 - 36$	$1.8 (+2.8, -1.3)$	$< 0.5$
Cyg X-2	$< 73$	$> 1.42 (\pm 0.08)$	$< 0.47 (\pm 0.03)$
4U 2129+47	$> 70$	$0.6 \pm 0.2$	$0.4 \pm 0.2$

Tabla 3.2 Masas de estrellas de neutrones: Púlsares Binarios de rayos-X y de Radio [11].

En las tablas 3.2 y 3.3, la masa del objeto compacto se ha determinado como la masa de la estrella de neutrones. La diferencia entre estas tablas es que en la tabla 3.3 los cálculos de la masa del objeto compacto utilizan mediciones de efectos relativistas, las componentes del sistema binario son dos estrellas de neutrones, mientras que la tabla 3.2 se refiere a sistemas binarios de rayos-X.

<i>Nombre</i>	<i>Método</i>	$m_p (M_\odot)$	$m_c (M_\odot)$
<i>J1518 - 4904</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.54 \pm 0.22$	$1.09 \pm 0.19$
<i>B1534 + 12</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.338 \pm 0.012$	$1.341 \pm 0.012$
<i>B1802 - 07</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.28 \pm 0.16$	$0.35 \pm 0.07$
<i>B1855 + 09</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.27 (+0.23, -0.15)$	$0.233 (+0.026, -0.017)$
<i>B1913 + 16</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.442 \pm 0.003$	$1.386 \pm 0.003$
<i>B2127 + 11C</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.350 \pm 0.040$	$1.363 \pm 0.060$
<i>B2303 + 46</i>	<i>R, <math>\dot{w}</math></i>	$1.20 \pm 0.26$	$1.40 \pm 0.24$

Tabla 3.3 Masas de estrellas de neutrones con efectos relativísticos en pulsares binarios [14].

De las tablas anteriores, es importante resaltar que la masa observadas de los objetos compactos que son estrellas de neutrones son todas menores que tres masas solares. Mientras que para todos los candidatos a hoyos negros su masa excede dicho el valor, es decir,  $M_{\max}^{ns} \sim 3M_\odot$ . Además para los candidatos a hoyos negros no se ha visto ninguna evidencia de que sean estrella de neutrones. Es decir, nunca vimos en estos sistemas binarios: a) pulsares de radio; b) pulsares de rayos-X o c) Bursts de rayos-X. De hecho, de la evidencia observacional es casi seguro que la teoría de evolución estelar es correcta y ésta indica probablemente la existencia de hoyos negros.

Aunque la medición de masa y las observaciones nos dan información muy significativa y afirmativa sobre la existencia de hoyos negros, no las podemos usar para probar definitivamente que un sistema binario tiene un hoyo negro.

La creencia general de los físicos y astrofísicos es que el fenómeno de acreción

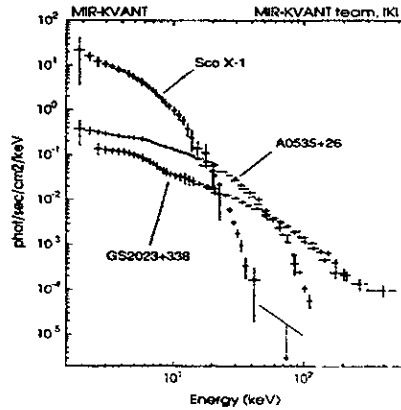


Figura 3.2. Espectro obtenido con el MIR-KVANT de tres tipos de sistemas binarios de rayos- X [14].

tiene información adicional y es posible, en principio, distinguir la naturaleza de los objetos compactos en sistemas binarios. La razón de esta creencia es clara de la figura (3.2). Esta figura indica que el espectro de radiación de rayos-X, típico de un sistema LMXB (como SCOX-1) de un sistema HMXB (como A0535+26) en los que el objeto compacto es seguramente una estrella de neutrones, y el espectro de un candidato a hoyo negro BHIC (como GS2023+338) [14]. Estos espectros fueron observados por el detector ruso MIR-KVANT [14]. Como podemos ver de la figura (3.2) el espectro de estos sistemas es muy distinto en la parte de altas energías. Particularmente notar que la cola de la ley de potencias en el BHIC se extiende hasta energías muy altas. Esta cola de la ley de potencias no se ve en un sistema XRB con estrellas de neutrones. Comúnmente se cree que la cola de la ley de potencias es una signatura para los hoyos

negros. En la siguiente sección estudiaremos el proceso de acreción, particularmente explicaremos porque el fenómeno de acreción puede dar una signatura donde podemos diferenciar, en principio, un hoyo negro de una estrella de neutrones.

### 3.3 Generalidades de la Acreción, Luminosidad de Eddington

En general, entendemos por *acreción*: *el proceso gravitacional por el cual las estrellas atrapan partículas del medio interestelar que las rodea*. Dependiendo de las condiciones gravitacionales donde la acreción tenga lugar, una cantidad de energía gravitacional es convertida en otra forma de energía. Posiblemente parte de esta energía es emitida en forma de radiación electromagnética. Por esta razón, el fenómeno de acreción puede ser un mecanismo muy poderoso para el proceso de determinación de la existencia de hoyos negros. La posibilidad de que el material acretado por un objeto compacto sea una fuente importante de radiación fue sugerida por primera vez por Zel'dovich (1964) [15] y Salpeter (1964) [16]. Antes de estudiar con detalle el proceso de acreción es importante mencionar un hecho observacional que refuerza la idea de Zel'dovich [15] y Salpeter [16] que la acreción es un mecanismo muy eficiente para transformar energía. Esto lo podemos ver utilizando un argumento muy sencillo [20]. Consideremos un gramo de masa que está acretando en la superficie de una estrella de neutrones típica con  $M = 3M_{\odot}$  y  $R = 10\text{km}$ . Tenemos que el potencial gravitacional está dado por  $\Phi = -GM/r$ , entonces la fuerza (considerando la simetría esférica) está dada por:  $\vec{F} = -GM/r^2\hat{e}_r$ , podemos calcular el trabajo necesario para

llevar la partícula con masa de un gramo de infinito a la superficie de la estrella, es decir,

$$W = \int_{\infty}^R \frac{GMm}{r^2} dr = GMm/R,$$

para el caso de la estrella de neutrones tenemos:

$$W = \frac{(6 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) (1.989 \times 10^{33} \text{ g}) 1\text{g}}{10^7 \text{ cm}}$$

$$W \sim 10^{20} \text{ erg} \quad (3.11)$$

Por otro lado, si analizamos el proceso en el cual un gramo de masa involucrado en reacciones de fusión nuclear, por ejemplo, un gramo de hidrógeno convertido en helio, tenemos que la conversión de masa a energía tiene la siguiente forma:

$$\Delta E_{nuc} = 0.007mc^2 = 6 \times 10^{18} \text{ erg} \quad (3.12)$$

comparando estas simples estimaciones (3.11) y (3.12), tenemos que el fenómeno de acreción gravitacional puede ser un mecanismo más eficiente para convertir energía gravitacional a otras formas de energía que la fusión nuclear [20].

Por supuesto, aunque Zel'dovich y Salpeter se dieron cuenta que la acreción era un mecanismo importante para la detección de objetos compactos, la idea no fue desarrollada por la falta de instrumentos adecuados para realizar las observaciones generadas por la acreción. Esta situación cambió durante los años 1960-1970, con el lanzamiento del cohete Aerobe que llevaba tres contadores Geiger. Éstos pronto descubrieron que nuestra galaxia contiene fuentes discretas de rayos-X, fuentes brillantes en el cielo en una banda de energía de 1-10 KeV. Posteriormente el 12 de diciembre



de 1970, el primer satélite, Uhuru, fue lanzado por la NASA desde la costa de Kenia. Este satélite estaba enteramente dedicado a realizar observaciones de rayos-X en la banda de 2-500 KeV, revolucionando nuestro entendimiento de las fuentes de rayos-X cósmicos. Antes de marzo de 1973 se habían identificado más de 300 fuentes de rayos-X. Más o menos en la misma década, se descubrieron los cuasares en 1963 y los pulsares en 1968. Estos descubrimientos motivaron el estudio teórico intensivo de los hoyos negros. La observación de fuentes binarias de rayos-X como Cisne X-1 a principios de los 70's nos da una primera evidencia creíble de la existencia de los hoyos negros (para un desarrollo histórico de la astronomía de rayos-X ver por ejemplo [1]).

Aunque la idea central de la acreción es en general sencilla, modelar esta acreción se vuelve muy complicado, ya que la física de la acreción involucra varias disciplinas. En general depende de la teoría de gravitación que utilicemos, ya sea la teoría newtoniana o la relatividad general, además debemos considerar la hidrodinámica, la física de plasma, y en algunos casos la física nuclear y la física de transportes radiativos. Independientemente de los detalles, todos los modelos de acreción suponen la aproximación hidrodinámica para el material acretado. En esta aproximación el camino libre medio  $l$  satisface que  $l \ll L$  con  $L$  la escala característica. Esta condición en general no es válida para todos los casos, pero en el problema de acreción, la materia acretada posee un campo magnético congelado y en este caso los iones y electrones están acoplados a las líneas de campo magnético [1,15,18,20]. Lo que hace que la aproximación hidrodinámica sea válida.

En la mayoría de los modelos que describen la acreción la mayor parte de esta energía potencial gravitacional es convertida en radiación electromagnética que escapa a infinito. En general, en el fenómeno de acreción tenemos interacción de la materia acretada con los fotones emitidos. De los principios básicos de la física sabemos que la materia con carga interactúa con la radiación por la Dispersión de Compton. Esta interacción tiene como consecuencia que la materia cargada absorba energía y momento del campo de radiación, entonces hay una fuerza efectiva de radiación que actúa en el material acretado. Aunque esta fuerza actúa predominantemente en los electrones, dado que éstos están acoplados electromagnéticamente con los protones, la fuerza de radiación actúa efectivamente en todo el plasma. Estas consideraciones llevan a la definición del concepto de la Luminosidad de Eddington [1,20].

Vamos a calcular esa luminosidad en el caso especial en que la acreción tiene lugar en un objeto compacto esférico, y por simplicidad suponemos que la fuerza de gravitación es newtoniana. Consideremos un elemento del plasma en un volumen pequeño acretando en el objeto compacto a una distancia  $r$  del objeto compacto. La fuerza de gravitación, suponiendo que el plasma acretado está compuesto por electrones y protones tiene la siguiente forma :

$$F = \frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} \simeq \frac{GMm_p}{r^2}$$

donde hemos utilizado el hecho que  $m_p \gg m_e$ . Por otro lado,

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2$$

es la sección transversal de dispersión de Thompson para el proceso  $e + \nu \rightarrow e' + \nu'$ . En general los fotones interactúan con los protones, con la correspondiente sección transversal dada por:

$$\sigma_p = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_p c^2} \right)^2$$

pero,

$$\sigma_e / \sigma_p = \frac{m_p^2}{m_e^2} \Rightarrow \sigma_p \ll \sigma_e \quad (3.13)$$

entonces podemos ignorar la componente  $\sigma_p$  del protón. Además para este flujo suponemos  $S$  como el flujo de energía a un radio  $r$  con  $[S] = \text{erg}/\text{cm}^2 \text{s}$ , si multiplicamos  $S$  por la sección transversal de Thompson  $\sigma_t$  y la dividimos por la velocidad de la luz tenemos:

$$F = \frac{(S \cdot \sigma_t)}{c}$$

esta cantidad representa el cambio de energía y de momento del campo de radiación (fotones) con la materia del fluido (electrones). En otras palabras,  $F$  es la fuerza que ejerce el campo de radiación sobre los electrones. Sea  $L$  la luminosidad total del campo de radiación con  $[L] = \text{erg}/\text{s}$ , entonces  $L/(4\pi r^2) = S$ . Entonces la fuerza de radiación que actúa sobre los electrones está dada por:

$$F_{\text{rad}} = \frac{S\sigma}{c} = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\sigma_t}{c}$$

para este elemento del fluido la fuerza neta  $F_T$  que actúa sobre él está dada por:

$$F_T = \frac{GMm_p}{r^2} - \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\sigma_t}{c}$$

de esta forma podemos ver que en el caso de que  $F_T < 0$  no hay flujo de acreción porque hipotéticamente la fuerza de radiación es muy alta. El valor límite de la luminosidad cuando  $F_T = 0$  se define como la luminosidad límite de Eddington:

$$\frac{1}{r^2} \left[ GMm_p - \frac{L}{4\pi} \frac{\sigma_t}{c} \right] = 0$$

entonces,

$$L_{edd} \equiv \frac{4\pi c GMm_p}{\sigma_t}$$

podemos escribir esta luminosidad de una manera más clara:

$$\begin{aligned} L_{edd} &= \frac{4\pi c G m_p}{\sigma_t} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) M_\odot \\ &= 1.3 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg/s} \end{aligned} \quad (3.14)$$

En otras palabras la luminosidad de Eddington es la luminosidad donde la presión de radiación para un flujo esférico que se mueve hacia un objeto compacto con simetría esférica está balanceado con la fuerza de gravitación. Podemos interpretar esa luminosidad como la máxima luminosidad para la acreción en estado estable en un objeto de masa  $M$ . Apesar de que, en la derivación que presentamos, consideramos acreción esférica en un campo gravitacional newtoniano, el concepto de luminosidad de Eddington sigue siendo útil para otros tipos de acreción y sirve como una luminosidad característica.

Muchas veces en los problemas de acreción introducimos el concepto de la eficiencia  $\eta$ . Este coeficiente de eficiencia está definido como la razón de la luminosidad

que observamos a infinito dividido por la tasa de acreción a infinito, es decir,

$$\eta \equiv \frac{L_{\infty}}{Mc^2}$$

El valor exacto de este parámetro depende fuertemente del modelo de acreción que estemos usando. Un concepto que nos será de gran utilidad es la tasa de acreción de Eddington  $\dot{M}_{Edd}$ . Esta tasa de acreción define la tasa de acreción necesaria para el caso de acreción estable y esféricamente simétrica, donde la luminosidad de Eddington a infinito tenga una eficiencia de  $\eta = 0.1 = 10\%$ , es decir:

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{(0.1) c^2} = 1.4 \times 10^{18} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) g/s$$

### 3.4 Acreción Hidrodinámica Esférica

En esta sección aplicaremos los conceptos presentados en la sección anterior a un problema astrofísicamente interesante. Particularmente, estudiaremos el modelo de acreción esférica, posiblemente el más sencillo [24,25]. Aunque, podemos estudiar este tipo de acreción para cada objeto compacto, es decir, enanas blancas, estrellas de neutrones u hoyos negros, por razones que veremos más adelante supondremos que el objeto compacto es un hoyo negro. Para ello asumimos que el hoyo negro satisface las siguientes condiciones: a) Se encuentra aislado en una región del universo, posiblemente en la Galaxia, y está acreutando materia interestelar, y b) No está rotando. Entonces, por los teoremas de unicidad que vimos en el capítulo segundo, la geometría está descrita por la métrica de Schwarzschild. Además suponemos que el proceso de acreción es estacionario, es decir, el flujo no cambia con el tiempo. En

esta tesis no analizaremos los modelos de acreción que varíen con el tiempo (acreción de flujos no estacionarios). Aunque al inicio del proceso de acreción uno espera que el flujo dependa del tiempo, podemos pensar que después de un breve tiempo de transición llega a un estado estacionario [para acreción hidrodinámica estacionaria ver también [23]]. Entonces nuestro modelo de acreción es independiente del tiempo, posee simetría esférica y la métrica del espacio-tiempo está dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.15)$$

Suponemos que el material acretado satisface la aproximación hidrodinámica y por simplicidad asumimos que es un fluido perfecto de prueba, entonces el tensor de energía-momento del fluido está dado por:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P) u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

y la corriente bariónica por:

$$J_\alpha = n u_\alpha \quad (3.17)$$

Donde  $\rho$  es la densidad total de energía-momento incluyendo la contribución de energía térmica,  $P$  es la presión isotrópica y  $u$  es la 4-velocidad hidrodinámica media del fluido. Como es común suponemos que los electrones y los protones están en equilibrio local térmico entonces tienen la misma 4-velocidad hidrodinámica media.

Ambas cantidades, es decir,  $T_{\alpha\beta}$  y  $J_\alpha$  se conservan:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla_\alpha (n u^\alpha) = 0 \quad (3.19)$$

Además, la primera ley de la termodinámica combinada con la segunda nos dice que:

$$u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{\rho}{n} \right) + P u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{1}{n} \right) = T u^\alpha \nabla_\alpha S \quad (3.20)$$

donde  $S$  es la entropía por bariones y  $T$  la temperatura, medidas en un sistema local del fluido.

La versión covariante de la conservación del tensor energía es equivalente a:

$$u^\alpha \nabla_\alpha \rho + (\rho + P) \nabla_\alpha u^\alpha = 0 \quad (3.21)$$

$$(\rho + P) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = -\nabla_\alpha P - u_\alpha u^\beta \nabla_\beta P \quad (3.22)$$

Para satisfacer las condiciones de simetría esférica y de acreción independiente del tiempo tomamos:  $\rho = \rho(r)$ ,  $P = P(r)$ ,  $n = n(r)$  y  $u = (u^t(r), u^r(r))$ . Para ampliar las aplicaciones de nuestro tratamiento, vamos a realizar los cálculos utilizando una métrica más general escrita de la siguiente forma:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + g(r) d\Omega^2 \quad (3.23)$$

Por supuesto cuando  $f(r) = (1 - 2M/r)$  y  $g(r) = r^2$ , recuperamos la métrica de Schwarzschild. Primero analizamos el contenido de (3.21), donde el primer término de la ecuación está dado por:

$$u^\alpha \nabla_\alpha \rho = u^t \nabla_t \rho + u^r \nabla_r \rho = u^r \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (3.24)$$

para calcular el segundo término de dicha ecuación necesitamos conocer  $(\nabla_\alpha u^\alpha)$ .

Sabemos que la derivada covariante  $\nabla_\alpha u_\beta$  tiene la siguiente forma:

$$\nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k$$

entonces,

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u_{\beta} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k \quad (3.25)$$

Cuando usamos la métrica (3.23), (3.25) toma la siguiente forma:

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = g^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} - g^{tt} \Gamma_{tt}^k u_k - g^{rr} \Gamma_{rr}^k u_k - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^k u_k - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^k u_k$$

desarrollando,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} u^{\alpha} = & g^{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} - g^{tt} \Gamma_{tt}^t u_t - g^{tt} \Gamma_{tt}^r u_r - g^{rr} \Gamma_{rr}^t u_t - g^{rr} \Gamma_{rr}^r u_r - \\ & - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^t u_t - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r u_r - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^t u_t - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r u_r \end{aligned} \quad (3.26)$$

para calcular el lado derecho de la ecuación (3.26) necesitamos calcular los símbolos de Christoffel para la métrica dada por (3.23). Como vimos en el Capítulo primero están definidos como (ver ecuación (1.12))

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right]$$

necesitamos calcular  $\Gamma_{tt}^k$ ,  $\Gamma_{rr}^k$ ,  $\Gamma_{\theta\theta}^k$  y  $\Gamma_{\phi\phi}^k$  con  $k = t, r$ , y obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} g^{r\nu} \left[ \frac{\partial g_{\nu t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\nu t}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^{\nu}} \right] \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left[ \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right] \\ \Gamma_{tt}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

utilizando que  $g_{tt} = -f(r)$ ,  $g_{rr} = 1/f(r)$ ,  $g^{tt} = -1/f(r)$  y  $g^{rr} = f(r)$ , tenemos:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} f(r) \left( \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \quad (3.27)$$



mediante un procedimiento análogo obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= \frac{1}{2}g^{tt} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \right) = 0 \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{f(r)} \right) = -\frac{1}{2f(r)} \left( \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \\
\Gamma_{rr}^t &= -\frac{1}{2}g^{tt} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial t} \right) = 0 \\
\Gamma_{\theta\theta}^t &= -\frac{1}{2}g^{tt} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} \right) = 0 \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}f(r) \left( \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) \\
\Gamma_{\phi\phi}^t &= -\frac{1}{2}g^{tt} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial t} \right) = 0 \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}f(r) \sin^2 \theta \left( \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

sustituyendo los valores de los coeficientes métricos y las ecuaciones (3.28) en (3.26)

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha}u^{\alpha} &= f(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{f(r)} \left[ \frac{1}{2}f(r) \left( \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \right] u_r + \\
&\quad + f(r) \left[ \frac{1}{2f(r)} \left( \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \right] u_r + \\
&\quad + \frac{1}{g(r)} \left[ \frac{1}{2}f(r) \left( \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) \right] u_r + \\
&\quad + \frac{1}{g(r) \sin^2 \theta} \left[ \frac{1}{2}f(r) \sin^2 \theta \left( \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) \right] u_r \tag{3.29}
\end{aligned}$$

simplificando la ecuación anterior tenemos:

$$\nabla_{\alpha}u^{\alpha} = f(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} u_r + \frac{f(r)}{g(r)} \frac{\partial g(r)}{\partial r} u_r \tag{3.30}$$

utilizamos que  $u^{\alpha} = g^{\alpha\beta}u_{\beta}$ , entonces  $u^r = u_r f(r)$  y  $u^t = u_t / f(r)$ , (3.30) queda:

$$\nabla_{\alpha}u^{\alpha} = f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u^r}{f(r)} \right) + \frac{u^r}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{f(r)}{g(r)} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \left( \frac{u^r}{f(r)} \right) \tag{3.31}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\alpha} u^{\alpha} &= \frac{\partial u^r}{\partial r} - \frac{u^r}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{u^r}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{1}{g(r)} \frac{\partial g(r)}{\partial r} u^r \\
 &= \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{1}{g(r)} \frac{\partial g(r)}{\partial r} u^r \\
 &= \frac{1}{g(r)} \left( g(r) \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial g(r)}{\partial r} u^r \right)
 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos:

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) \quad (3.32)$$

Regresando a la ecuación (3.24) que podemos escribir, utilizando (3.21) y (3.32) como sigue:

$$u^r \frac{\partial \rho}{\partial r} + (\rho + P) \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) = 0 \quad (3.33)$$

Ahora vamos a analizar la ecuación (3.22). Para ello, es necesario calcular  $(u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha})$ .

Pero:

$$u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = u^{\beta} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k \right)$$

Para la métrica (3.23) tenemos,

$$u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = u^r \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r} - u^t u_r \Gamma_{t\alpha}^r - u^r u_t \Gamma_{r\alpha}^t - u^t u_r \Gamma_{t\alpha}^r - u^r u_t \Gamma_{r\alpha}^t, \quad (3.34)$$

donde necesitamos conocer  $\Gamma_{t\alpha}^r$ ,  $\Gamma_{r\alpha}^t$ ,  $\Gamma_{t\alpha}^t$  y  $\Gamma_{r\alpha}^r$ . Para la métrica (3.23) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{t\alpha}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left[ \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{t\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial g_{t\alpha}}{\partial t} \right] \\
 \Gamma_{t\alpha}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \delta_{\alpha}^r + \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \delta_{\alpha}^r - \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \delta_{\alpha}^r \\
 \Gamma_{t\alpha}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \delta_{\alpha}^r
 \end{aligned}$$

de manera similar obtenemos los demás símbolos de Christoffel, sustituyendo los coeficientes métricos tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^t_{t\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \delta^r_\alpha \\
 \Gamma^t_{r\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \delta^t_\alpha \\
 \Gamma^r_{t\alpha} &= \frac{1}{2} f(r) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \delta^t_\alpha \\
 \Gamma^r_{r\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \delta^r_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.35) en (3.34) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 u^\beta \nabla_\beta u^\alpha &= u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} \delta^r_\alpha + u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \delta^t_\alpha - \frac{1}{2} u^t u_t \left( \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta^r_\alpha - \\
 &\quad - \frac{1}{2} u^r u_t \left( \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta^t_\alpha - \frac{1}{2} u^t u_r \left( f(r) \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta^t_\alpha + \\
 &\quad + \frac{1}{2} u^r u_r \left( \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta^r_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

usando que  $u^r u_r = (u^r)^2 / f(r)$  y  $u^t u_t = -(u^t)^2 f(r)$  y agrupando los términos comunes tenemos:

$$\begin{aligned}
 u^\beta \nabla_\beta u^\alpha &= \left[ u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} (u^t)^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{(u^r)^2}{f^2(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] \delta^r_\alpha + \\
 &\quad + \left[ u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right] \delta^t_\alpha
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

ahora el lado derecho de la ecuación (3.22) está dado por:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha P &= \frac{\partial P}{\partial r} \delta^r_\alpha \\
 u_\alpha u^\beta \nabla_\beta P &= u_\alpha \left( u^t \frac{\partial P}{\partial t} + u^r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = u_\alpha u^r \frac{\partial P}{\partial r} \\
 &= u_t u^r \frac{\partial P}{\partial r} \delta^t_\alpha + u_r u^r \frac{\partial P}{\partial r} \delta^r_\alpha
 \end{aligned}$$

de esta manera tenemos que:

$$-\nabla_{\alpha} P - u_{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\beta} P = -u_t u^r \frac{\partial P}{\partial r} \delta_{\alpha}^t - \left( u_r u^r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} \right) \delta_{\alpha}^r \quad (3.38)$$

multiplicando la ecuación (3.37) por  $(\rho + P)$  e igualando con (3.38) obtenemos dos ecuaciones, para  $\alpha = t$ :

$$(\rho + P) \frac{\partial u_t}{\partial r} - u_t \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (3.39)$$

y para  $\alpha = r$ :

$$-\left( u_r u^r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} \right) = (\rho + P) \left( u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} (u^t)^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{(u^r)^2}{f^2(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \quad (3.40)$$

utilizando que la 4-velocidad está normalizada,  $g^{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = -1$ , podemos escribir:

$$(u^t)^2 = \frac{1}{f(r)} + \frac{1}{f^2(r)} (u^r)^2 \quad (3.41)$$

simplificando,

$$\frac{(\rho + P)}{f(r)} \left( u^r \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = -\frac{1}{f(r)} \frac{\partial P}{\partial r} ((u^r)^2 + f(r)) \quad (3.42)$$

así la ecuación (3.22) queda expresada de la siguiente manera,

$$u^r \frac{\partial u^r}{\partial r} = -\frac{1}{(\rho + P)} \frac{\partial P}{\partial r} ((u^r)^2 + f(r)) - \frac{1}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (3.43)$$

Este es el contenido de la ecuación de Euler como función de  $u^r$ . A continuación, analizaremos la conservación de la corriente bariónica, así podemos reescribir la ecuación (3.19) como:

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} n + n \nabla_{\alpha} u^{\alpha} = 0 \quad (3.44)$$

utilizando la ecuación (3.32) tenemos que:

$$\nabla_{\alpha} u^{\alpha} = \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) \quad (3.45)$$

además para este caso,

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} n = u^r \frac{\partial n}{\partial r} \quad (3.46)$$

utilizando (3.45) y (3.46) podemos escribir la ecuación (3.19) como:

$$u^r \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{n}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) = 0 \quad (3.47)$$

escribiendo de manera explícita la derivada y multiplicando por  $g(r)$  la ecuación anterior obtenemos:

$$g(r) u^r \frac{\partial n}{\partial r} + n g(r) \frac{\partial u^r}{\partial r} + n u^r \frac{\partial g(r)}{\partial r} = 0 \quad (3.48)$$

Entonces, la ley de conservación del número de bariones puede ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r} (n u^r g(r)) = 0 \quad (3.49)$$

Resumiendo, las ecuaciones (3.19), (3.21) y (3.22) que describen el movimiento de un fluido perfecto acretado en un hoyo negro de Schwarzschild, son las siguientes:

$$\frac{d}{dr} (n u^r g(r)) = 0, \quad (3.50a)$$

$$(\rho + P) \frac{du_t}{dr} - u_t \frac{dP}{dr} = 0, \quad (3.50b)$$

$$u^r \frac{du^r}{dr} = -\frac{1}{(\rho + P)} \frac{dP}{dr} ((u^r)^2 + f(r)) - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr}. \quad (3.50c)$$

A continuación estudiaremos la ecuación (3.20), con las mismas condiciones que analizamos las ecuaciones de conservación (3.18) y (3.19). Primero calculamos la cantidad

de calor que es producido cuando el fluido es acretando hacia el hoyo negro, es decir,

$$\dot{Q} = u^\alpha \nabla_\alpha Q = T u^\alpha \nabla_\alpha S \quad (3.51)$$

donde  $S$  es la entropía por bariones y  $T$  la temperatura, medidas en un sistema inercial local del fluido. Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (3.20) tenemos:

$$\begin{aligned} u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{\rho}{n} \right) + P u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{1}{n} \right) &= u^t \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{n} \right) + u^r \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho}{n} \right) + \\ &\quad + P u^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) + P u^r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right), \\ u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{\rho}{n} \right) + P u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} u^r \frac{d\rho}{dr} - \frac{u^r}{n^2} \frac{dn}{dr} (\rho + P) \end{aligned} \quad (3.52)$$

sustituyendo los valores que hemos encontrado para  $u^r d\rho/dr$  y  $u^r dn/dr$ , es decir, las ecuaciones (3.33) y (3.47) en la anterior obtenemos:

$$-\frac{(\rho + P)}{n} \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) + \frac{(\rho + P)}{n} \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial r} (u^r g(r)) = 0 \quad (3.53)$$

con este resultado la ecuación (3.20) queda:

$$u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{\rho}{n} \right) + P u^\alpha \nabla_\alpha \left( \frac{1}{n} \right) = T u^\alpha \nabla_\alpha S = 0 \quad (3.51)$$

Este resultado es muy importante. Nos dice que siempre que se satisfagan las leyes de conservación (3.18) y (3.19) no habrá generación de calor, es decir, la entropía se mantendrá constante y el flujo será adiabático. A continuación, resolvemos las ecuaciones (3.50a) y (3.50c). Directamente de la ecuación (3.50a) tenemos:

$$4\pi m n u^r g(r) = \dot{M} \quad (3.55)$$

donde  $\dot{M}$  es una constante definida como la tasa de acreción y  $m$  es la masa característica del material acretado. Por otro lado, de la ecuación (3.54) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho}{n} \right) + P \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho}{n} \right) + \frac{d}{dr} \left( \frac{P}{n} \right) - \frac{1}{n} \left( \frac{dP}{dr} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

entonces,

$$\left( \frac{dP}{dr} \right) = n \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho + P}{n} \right) \quad (3.57)$$

utilizando la ecuación anterior reescribimos la ecuación (3.50c):

$$-\frac{1}{(\rho + P)} n \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho + P}{n} \right) ((u^r)^2 + f(r)) - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} - u^r \frac{du^r}{dr} = 0 \quad (3.58)$$

agrupando términos, dividiendo por  $n$ ,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\rho + P}{n} \right) \frac{d}{dr} [f(r) + (u^r)^2] + [(u^r)^2 + f(r)] \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho + P}{n} \right) = 0 \quad (3.59)$$

multiplicando toda la ecuación por  $(\rho + P)/n$ ,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 \frac{d}{dr} [f(r) + (u^r)^2] + [(u^r)^2 + f(r)] \left( \frac{\rho + P}{n} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho + P}{n} \right) = 0 \quad (3.60)$$

entonces la ecuación anterior se puede escribir como una derivada total,

$$\frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 (f(r) + (u^r)^2) \right] = 0$$

De esta ecuación con la condición  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = 0$  obtenemos la siguiente ley de conservación:

$$\left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 (f(r) + (u^r)^2) = \left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 \Big|_{\infty} \quad (3.61)$$

De la misma manera utilizando (3.57) reescribimos (3.50b),

$$\left(\frac{\rho + P}{n}\right) \frac{\partial u_t}{\partial r} - u_t \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho + P}{n}\right) = 0$$

directamente vemos que:

$$\frac{d}{dr} \left[ \left(\frac{\rho + P}{n}\right) u_t \right] = 0 \quad (3.62)$$

de esta ecuación tenemos otra ley de conservación:

$$\left(\frac{\rho + P}{n}\right) u_t = - \left(\frac{\rho + P}{n}\right) \Big|_{\infty} \quad (3.63)$$

En los cálculos hidrodinámicos es más conveniente introducir el concepto de la velocidad del sonido  $a$ , definida por:

$$a^2 = dP/d\rho|_s \quad (3.64)$$

donde  $dP/d\rho|_s$  significa derivada de  $P$  con la entropía  $S$  fija. Con la definición  $a^2$  podemos reescribir las ecuaciones (3.50a) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (nug(r)) &= n'ug(r) + nu'g(r) + nu(g(r))' \\ &= \frac{n'}{n} + \frac{u'}{u} + (\log g(r))' \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{n'}{n} = -\frac{u'}{u} - (\log g(r))' \quad (3.65)$$

donde por simplicidad hemos identificado  $u' = u$  y la prima (') denota derivada con respecto a  $r$ . Utilizando la primera ley de la termodinámica, en la definición de la velocidad del sonido tenemos:

$$a^2 = \frac{dP}{dn} \frac{dn}{d\rho} = \frac{dP}{dn} \frac{n}{\rho + P} \quad (3.66)$$



entonces,

$$P' = a^2 (\rho + P) \frac{n'}{n}$$

sustituyendo la ecuación anterior en (3.50c) y dividiendo ambos lados por  $u^2$  obtenemos:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{a^2 n'}{u^2 n} (u^2 + f(r)) - \frac{1}{2u^2} f(r)' \quad (3.67)$$

sustituimos (3.65) en (3.67):

$$\frac{u'}{u} = \frac{a^2}{u^2} \left( \frac{u'}{u} + (\log g(r))' \right) (u^2 + f(r)) - \frac{1}{2u^2} f(r)'$$

despejamos  $u'/u$  y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u} \left( \frac{u^2 - a^2(u^2 + f(r))}{u^2} \right) &= (\log g(r))' \frac{a^2(u^2 + f(r))}{u^2} - \frac{1}{2u^2} f(r)' \\ \frac{u'}{u} &= \frac{(\log g(r))' (f(r) + u^2) a^2 - \frac{1}{2} f(r)'}{u^2 - a^2(f(r) + u^2)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Hemos encontrado la ecuación para la velocidad  $u$ , podemos reescribir (3.68) de la siguiente manera:

$$\frac{u'}{u} = \frac{D_1}{D} \quad (3.69)$$

donde las funciones  $D$  y  $D_1$  están definidas como:

$$D = u^2 - a^2 [f(r) + u^2], \quad (3.70)$$

$$D_1 = (\log g(r))' [f(r) + u^2] a^2 - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \quad (3.71)$$

Ahora sustituimos (3.69) en (3.65) y obtenemos:

$$\frac{n'}{n} = -\frac{(\log g(r))' D + D_1}{D} \quad (3.72)$$

A continuación, necesitamos especificar una ecuación de estado que describa el material acretado. En astrofísica es muy común elegir una ecuación de estado politrópica para describir el plasma acretado, es decir,

$$P = Kn^\Gamma \quad (3.73)$$

donde el parámetro  $K$  es una constante y  $\Gamma$  representa el índice politrópico dentro del rango  $1 < \Gamma < 5/3$ . Para esta ecuación de estado calculamos la energía total por barión, es decir, queremos conocer  $\rho$  como función de  $n$  y  $P$ . Como vimos anteriormente el flujo es adiabático, entonces de la primera de ley de la termodinámica tenemos la densidad  $\rho$  como función del número bariónico y la presión. En este caso se cumple la ecuación (3.54) entonces utilizando la ecuación de estado politrópica podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho}{n} \right) + Kn^\Gamma \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{n} \right) &= 0 \\ d\rho - \frac{\rho}{n} dn - Kn^{\Gamma-1} dn &= 0 \end{aligned}$$

integrando esta última ecuación encontramos que  $\rho$  está relacionada con la densidad bariónica  $n$  por:

$$\rho = m n + \frac{P}{\Gamma - 1} \quad (3.74)$$

Por otro lado, la primera ley de la termodinámica implica la siguiente expresión para la velocidad del sonido:

$$a^2 = \frac{dP}{dn} \frac{n}{\rho + P} = \Gamma K n^{\Gamma-1} \frac{n}{\rho + P}$$

utilizando la densidad de energía  $\rho$  (3.74) tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\Gamma K n^{\Gamma-1} n}{m n + \frac{K n^{\Gamma}}{\Gamma-1} + K n^{\Gamma}} \\ &= \frac{\Gamma K n^{\Gamma-1}}{m (\Gamma-1) + K n^{\Gamma-1} + K n^{\Gamma-1} (\Gamma-1)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalmente podemos expresar la velocidad del sonido  $a$  como:

$$a^2 = \frac{\Gamma K n^{\Gamma-1}}{m(\Gamma-1) + \Gamma K n^{\Gamma-1}}, \quad (3.76)$$

La ecuación anterior implica que la velocidad del sonido  $a$ , para una ecuación de estado politrópica, es solamente función del número barionico  $n$ . Entonces podemos eliminar el número bariónico  $n$  en favor de la velocidad del sonido  $a$  en las ecuaciones (3.69) y (3.72). Además es más fácil escribir la 4-velocidad solamente como función de una nueva variable  $v$  que tiene la forma:

$$u^\mu = (u^t, u^r) = \left( \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\sqrt{f(r)}v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (3.77)$$

En seguida reescribiremos las ecuaciones (3.69) - (3.72), utizando (3.76) y (3.77).

Para ello, primero sustituimos  $u^r$  por  $v$  en (3.70) y (3.71) y obtenemos:

$$D = \frac{f(r)(v^2 - a^2)}{(1-v^2)}, \quad (3.78)$$

$$D_1 = f(r) (\log g(r))' \frac{a^2}{1-v^2} - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \quad (3.79)$$

de la ecuación (3.77) tenemos que:

$$u^2 = \frac{f(r)v^2}{1-v^2} \quad (3.80)$$

para obtener  $u/u'$ , derivamos esta ecuación con respecto de  $r$ ,

$$\begin{aligned} 2uu' &= \frac{1}{1-v^2} (2vv'f(r) + f'(r)v^2) + \frac{f(r)v^2}{(1-v^2)^2} 2vv' \\ &= \frac{2vv'f(r) + f'(r)v^2 - 2v^3v'f(r) - f'(r)v^4 + 2v^3v'f(r)}{(1-v^2)^2} \\ &= \frac{2vv'f(r) + f'(r)v^2(1-v^2)}{(1-v^2)^2} \end{aligned}$$

dividimos ambos lados por  $2u^2$ , entonces,

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} \frac{1}{(1-v^2)} + \frac{f'(r)}{2f(r)} \quad (3.81)$$

Por otro lado, sustituyendo  $u$  por  $v$  en la ecuación (3.69), es decir, los valores de  $D$  y  $D_1$  dados por (3.78) y (3.79):

$$\frac{u'}{u} = \frac{f(r)a^2(\log g(r))'^2 - \frac{1}{2}f(r)'(1-v^2)}{f(r)(v^2-a^2)} \quad (3.82)$$

igualando (3.81) con la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{v'}{v} \frac{1}{(1-v^2)} + \frac{f'(r)}{2f(r)} = \frac{f(r)a^2(\log g(r))'^2 - \frac{1}{2}f(r)'(1-v^2)}{f(r)(v^2-a^2)} \quad (3.83)$$

desarrollando,

$$\frac{v'}{v} = (1-v^2) \frac{2D_1 - (\log f(r))' D}{D}$$

Ahora para obtener  $n'/n$  despejamos de la ecuación (3.76)  $n^{\Gamma-1}$  y obtenemos:

$$n^{\Gamma-1} = a^2 \frac{m(\Gamma-1)}{\Gamma K} \left( \frac{1}{\Gamma-1-a^2} \right)$$

entonces,

$$\log(n^{\Gamma-1}) = \log[a^2 m(\Gamma-1)] - \log[\Gamma K(\Gamma-1-a^2)]$$

$$(\log (n^{\Gamma-1}))' = (\log [a^2 m (\Gamma-1)])' - (\log [\Gamma K (\Gamma-1-a^2)])'$$

$$\Gamma-1 \left( \frac{n'}{n} \right) = 2 \frac{a'}{a} + \frac{2aa'}{\Gamma K (\Gamma-1-a^2)}$$

simplicando:

$$\frac{n'}{n} = 2 \frac{a'}{a} \frac{1}{(\Gamma-1-a^2)} \quad (3.84)$$

A continuación sustituimos  $u$  por  $v$  en la ecuación (3.72), es decir, los valores de  $D$  y  $D_1$  dados por (3.78) y (3.79):

$$\frac{n'}{n} = - \frac{(\log g(r))' D + D_1}{D} \quad (3.85)$$

igualando estas dos últimas ecuaciones tenemos:

$$2 \frac{a'}{a} \frac{1}{(\Gamma-1-a^2)} = - \frac{(\log g(r))' D + D_1}{D}$$

Finalmente tenemos:

$$(\log v^2)' = (1-v^2) \frac{2D_1 - (\log f(r))' D}{D}, \quad (3.86)$$

$$(\log a^2)' = -(\Gamma-1-a^2) \frac{(\log g(r))' D + D_1}{D}, \quad (3.87)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a (3.50a) - (3.50c). Pero en la forma que están escritas son más claras y resulta más fácil trabajar con ellas. Hasta donde sabemos, las ecuaciones (3.86) y (3.87) son presentadas por primera vez en la literatura. Por otro lado las ecuación (3.55) y (3.61) pueden ser escritas en términos de las nuevas variables  $v$  y  $a^2$ , directamente de (3.55), utilizando (3.76) tenemos:

$$\left( \frac{m(\Gamma-1)}{\Gamma K} \right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} \left( \frac{a^2}{\Gamma-1-a^2} \right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} \frac{v \sqrt{f(r)}}{\sqrt{1-v^2}} g(r) = c_1$$

elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{a^2}{\Gamma - 1 - a^2}\right)^{\Gamma-1} \frac{v^2}{1-v^2} f(r) g^2(r) = \left(\frac{a_\infty^2}{\Gamma - 1 - a_\infty^2}\right)^{\Gamma-1}; \quad (3.88)$$

de la expresión (3.61) tenemos:

$$\left(\frac{m(\Gamma - 1)}{\Gamma - 1 - a^2}\right)^2 \left(\frac{f(r)}{1-v^2}\right) = c_2$$

Finalmente,

$$(\Gamma - 1 - a^2)^2 \frac{1-v^2}{f(r)} = (\Gamma - 1 - a_\infty^2)^2 \quad (3.89)$$

Esta forma de las ecuaciones de conservación, (3.88) y (3.89), es equivalente a (3.55) y (3.61), pero escritas de una manera más conveniente para trabajar con ellas. Resumiendo tenemos las siguientes ecuaciones para el movimiento del fluido:

$$(\log v^2)' = (1-v^2) \frac{2D_1 - (\log f(r))' D}{D}, \quad (3.90)$$

$$(\log a^2)' = -(\Gamma - 1 - a^2) \frac{(\log g(r))' D + D_1}{D}, \quad (3.91)$$

donde,

$$D = \frac{f(r)(v^2 - a^2)}{(1-v^2)}, \quad (3.92)$$

$$D_1 = f(r) (\log g(r))' \frac{a^2}{1-v^2} - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \quad (3.93)$$

La ecuación (3.92) muestra que para garantizar el incremento monótonico y suave de  $v$ , con el decremento de  $r$  y simultaneamente quitar las singularidades en el flujo, la solución debe pasar a través de un *punto crítico*, donde:

$$D_1 - D = 0 \quad (3.94)$$

entonces de la ecuación (3.92) tenemos que:

$$\frac{f(r)(v^2 - a^2)}{(1 - v^2)} = 0 \Rightarrow v_s^2 = a_s^2 \quad (3.95)$$

y de la expresión (3.93) tenemos:

$$f(r)(\log g(r))' \frac{v^2}{1 - v^2} - \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} = 0 \quad (3.96)$$

En el caso de Schwarzschild tenemos que  $f(r) = (1 - 2M/r)$  y  $g(r) = r^2$ , entonces utilizando (3.95) reescribimos la ecuación (3.96),

$$\left(1 - \frac{2M}{r_s}\right) \frac{2}{r_s} \frac{a_s^2}{1 - a_s^2} + \frac{M}{r_s^2} = 0 \quad (3.97)$$

hacemos una aproximación a segundo orden en  $a^2$ , es decir,  $a^2/1 - a^2 \simeq a^2(1 + a^2) \simeq a^2$  y  $f(r) \simeq 1$ , de esta manera tenemos:

$$a_s^2 \simeq \frac{M}{2r_s} \quad (3.98)$$

donde  $r_s$  es el radio crítico. Entonces este radio crítico corresponde al *radio sónico* al cual la velocidad del flujo es igual a la velocidad del sonido. Utilizando  $v^2 = a^2$  en  $r_s$  en la ecuación (3.89) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma - 1 - a_s^2)^2 \frac{1 - a_s^2}{f(r)} &= (\Gamma - 1 - a_\infty^2)^2 \\ (\Gamma - 1)^2 \left(1 - \frac{a_s^2}{\Gamma - 1}\right)^2 \frac{1 - a_s^2}{f(r)} &= (\Gamma - 1)^2 \left(1 - \frac{a_\infty^2}{\Gamma - 1}\right)^2 \\ \left(1 - \frac{2a_s^2}{\Gamma - 1}\right) \frac{1 - a_s^2}{f(r)} &= 1 - \frac{2a_\infty^2}{\Gamma - 1} \\ \left(1 - \frac{2a_s^2}{\Gamma - 1}\right) (1 - a_s^2) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2a_\infty^2}{\Gamma - 1}\right) \\ a_s^2 \left(\frac{2}{\Gamma - 1} - 1\right) - \frac{2M}{r_s} &= \frac{2a_\infty^2}{\Gamma - 1} \end{aligned}$$

sustituyendo la expresión (3.98) en la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{M}{2r_s} \left( \frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} - 4 \right) &= \frac{2a_\infty^2}{\Gamma-1} \\ \frac{M}{2r_s} (5-3\Gamma) &= \frac{2a_\infty^2}{\Gamma-1}\end{aligned}$$

De esta ecuación el radio sónico  $r_s$  está relacionado con las condiciones a infinito por:

$$r_s = \left( \frac{5-3\Gamma}{4} \right) \frac{M}{a_\infty^2}. \quad (3.99)$$

Consecuentemente, obtenemos la velocidad del sonido en el punto sónico, es decir, sustituyendo la ecuación (3.99) en (3.98), así:

$$a_s^2 = \left( \frac{2}{5-3\Gamma} \right) a_\infty^2, \quad (3.100)$$

Ahora para encontrar la tasa de acreción  $\dot{M}$  definida por (3.55), calculamos el lado izquierdo de la ecuación (3.55) en  $r = r_s$  con  $g(r) = r^2$  para el hoyo negro de Schwarzschild, entonces:

$$\dot{M} = 4\pi mnug(r)|_s = 4\pi mn_s u_s r_s^2$$

utilizando (3.99), (3.100) y además:

$$n = n_\infty \left( \frac{a}{a_\infty} \right)^{2/\Gamma-1} \quad (3.101)$$

entonces la tasa de acreción en el punto sónico está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{M} &= 4\pi m \left( \frac{1}{2} \right)^{(\Gamma-1)} \left( \frac{4}{5-3\Gamma} \right)^{(\Gamma-1)} n_\infty \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{4}{5-3\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} a_\infty \left( \frac{5-3\Gamma}{4} \right)^2 \left( \frac{M}{a_\infty^2} \right)^2, \\ \dot{M} &= 4\pi mn_\infty a_\infty \left( \frac{M}{a_\infty^2} \right)^2 \lambda_s, \quad (3.102)\end{aligned}$$



donde,

$$\lambda_s = \left( \frac{5 - 3\Gamma}{4} \right)^{-(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{\Gamma+1/2(\Gamma-1)}$$

A continuación, presentamos un análisis dimensional de la tasa de acreción. Para ello reescribimos la ecuación (3.102) como:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 4\pi\rho_{\infty}M^2a_{\infty}^{-3} \\ &= 4\pi \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} \frac{gr}{cm^3}} \right) 10^{-24} \frac{gr}{cm^3} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 GM_{\odot}^2 \left( \frac{a_{\infty}}{10 \frac{km}{s}} \right)^{-3} \left( 10 \frac{km}{s} \right)^{-3} \\ &= 4\pi 10^{-24} (2 \times 10^{33})^2 (6.67 \times 10^{-11})^2 \times 10^{-15} \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} \frac{gr}{cm^3}} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{a_{\infty}}{10 \frac{km}{s}} \right)^{-3} \frac{gr}{s} \\ &= 2.2362 \times 10^{11} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} \frac{gr}{cm^3}} \right) \left( \frac{a_{\infty}}{10 \frac{km}{s}} \right)^{-3} \frac{gr}{s} \end{aligned}$$

Finalmente escribimos:

$$\dot{M} \simeq 10^{11} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} \frac{gr}{cm^3}} \right) \left( \frac{a_{\infty}}{10 \frac{km}{s}} \right)^{-3} \frac{gr}{s} \quad (3.103)$$

Como veremos más adelante  $\dot{M}$  es muy pequeña en comparación con la tasa  $\dot{M}$  típica de otras formas de acreción que veremos en el capítulo cuarto.

Hasta ahora hemos calculado la tasa de acreción  $\dot{M}$  para un flujo subsónico en infinito (es decir,  $u_{\infty} < a_{\infty}$ ), que alcanza un punto crítico. Sin embargo, para describir el comportamiento completo del flujo, es decir, desde infinito que pase por el punto sonico y alcance el horizonte de eventos, debemos asegurarnos que el flujo sea regular en el horizonte de eventos. En otras palabras todas las cantidades físicas deben estar acotadas en el horizonte. La existencia del horizonte y la regularidad del flujo sobre el horizonte imponen restricciones a la velocidad del flujo. Para analizar

estas restricciones vamos a calcular la magnitud de la 4-aceleración del flujo en el horizonte. Esta cantidad debe estar acotada en el horizonte de eventos. Primero calculamos la aceleración  $a_\alpha = u^\mu \nabla_\mu u_\alpha$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 a_\alpha &= u^\mu \left[ \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho u_\rho \right] = u^\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu} - u^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\rho u_\rho \\
 &= u^r \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - u^t \Gamma_{t\alpha}^\rho u_\rho - u^r \Gamma_{r\alpha}^\rho u_\rho \\
 &= u^r \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - u^t \Gamma_{t\alpha}^t u_t - u^t \Gamma_{t\alpha}^r u_r - u^r \Gamma_{r\alpha}^t u_t - u^r \Gamma_{r\alpha}^r u_r
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

donde los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{t\alpha}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \delta_\alpha^r \\
 \Gamma_{t\alpha}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \delta_\alpha^t \\
 \Gamma_{r\alpha}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \delta_\alpha^t \\
 \Gamma_{r\alpha}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \delta_\alpha^r
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

sustituyendo (3.105) en la expresión (3.104) tenemos:

$$\begin{aligned}
 a_\alpha &= \left[ u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} + \frac{u^t u^r}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{u^r u^t}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right] \delta_\alpha^t + \\
 &+ \left( u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u^t u_t}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{u^r u_r}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) \delta_\alpha^r
 \end{aligned}$$

entonces,

$$a_\alpha = \left( u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \delta_\alpha^t + \left( u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u^t u_t}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{u^r u_r}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) \delta_\alpha^r \tag{3.106}$$

utilizando el hecho que la 4-velocidad está normalizada, es decir,  $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$ ,

tenemos:

$$g^{tt} u_t^2 + g^{rr} u_r^2 = -1$$

entonces,

$$u_t^2 = \frac{1}{f(r)} + \frac{(u^r)^2}{f^2(r)}$$

además  $u_r u^t = -(u^t)^2 f(r)$ ,  $u_r u^r = (u^r)^2 / f(r)$ , entonces podemos reescribir la expresión (3.106) como:

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \left( u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \delta'_\alpha + \left( u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{(u^r)^2}{2f^2(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{(u^r)^2}{2f^2(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta''_\alpha \\ a_\alpha &= \left( u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \delta'_\alpha + \left( u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{(u^r)^2}{f^2(r)} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \delta''_\alpha \\ a_\alpha &= \left( u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \delta'_\alpha + \left[ u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} (\log f(r))' + \frac{(u^r)^2}{f(r)} (\log f(r))' \right] \delta''_\alpha \end{aligned} \quad (3.107)$$

Para el caso de Schwarzschild tenemos:

$$a_\alpha = \left( u^r \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \delta'_\alpha + \left[ u^r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{M}{r^2} \frac{1}{(1-2M/r)} + \frac{u_r u^r}{(1-2M/r)} \frac{2M}{r^2} \right] \delta''_\alpha \quad (3.108)$$

Para resolver esta ecuación, de la ecuación (3.77) obtenemos que:

$$u_r u^r = \frac{(u^r)^2}{f(r)} = \frac{f(r) v^2}{f(r) (1-v^2)} = \frac{v^2}{(1-v^2)} \quad (3.109)$$

de donde,

$$\frac{\partial u_t}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (u^t f(r)) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (3.110)$$

para facilitar los cálculos introducimos el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.111)$$

entonces la ecuación (3.110) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_t}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (y) \quad (3.112)$$

o bien,

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{f(r)} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{y}{f(r)} \quad (3.113)$$

De igual manera utilizando la ecuación (3.77) y la nueva variable  $y$ , podemos escribir

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u^r}{f(r)} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{f(r)} \frac{\sqrt{f(r)}v}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{yv}{f(r)} \right) \quad (3.114)$$

o bien,

$$u^r = \frac{\sqrt{f(r)}v}{\sqrt{1-v^2}} = yv \quad (3.115)$$

Finalmente reescribimos (3.108) de la siguiente manera:

$$a_\alpha = -yv \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) \delta_\alpha^t + \left[ yv \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{yv}{(1-2M/r)} \right) + \frac{M}{r^2} \frac{1}{(1-2M/r)} \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right] \delta_\alpha^r \quad (3.116)$$

Ahora podemos calcular la magnitud de la aceleración, es decir,

$$a^2 = g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu = g^{tt} a_t^2 + g^{rr} a_r^2$$

entonces,

$$a^2 = -\frac{1}{(1-2M/r)} \left( -yv \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) \right)^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ yv \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{yv}{(1-2M/r)} \right) + \frac{M}{r^2} \frac{1}{(1-2M/r)} \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right]^2$$

$$a^2 = -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{yv}{(1-2M/r)} \frac{\partial}{\partial r} (yv) - y^2 v^2 \left( \frac{2M/r^2}{(1-2M/r)^2} \right) + \frac{M}{r^2} \frac{1}{(1-2M/r)} \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right]^2$$

$$a^2 = -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{(1-2M/r)} \left[ yv \frac{\partial}{\partial r} (yv) - \frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{2M}{r^2} \right) + \frac{M}{r^2} \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right]^2$$

$$a^2 = -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{(1-2M/r)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (yv)^2 - \frac{M}{r^2} \left( \frac{2y^2 v^2}{(1-2M/r)} - \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right)^2 \right]$$

usando que  $y^2 = (1-2M/r)/(1-v^2)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{(1-2M/r)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (yv)^2 - \frac{M}{r^2} \left( \frac{2v^2}{1-v^2} - \frac{1+v^2}{(1-v^2)} \right)^2 \right]^2 \\ &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{(1-2M/r)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (yv)^2 - \frac{M}{r^2} \left( \frac{v^2-1}{1-v^2} \right)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

donde podemos reescribir :

$$\frac{M}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)$$

entonces,

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{(1-2M/r)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (yv)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4(1-2M/r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( y^2 v^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right) \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4(1-2M/r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1-2M/r)}{(1-v^2)} v^2 + (1-2M/r) \right) \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4(1-2M/r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( (1-2M/r) \left( \frac{v^2}{(1-v^2)} + 1 \right) \right) \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4(1-2M/r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1-2M/r)}{(1-v^2)} \right) \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4(1-2M/r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} y^2 \right]^2 \\ a^2 &= -\frac{y^2 v^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \frac{4y^2}{4(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 \\ a^2 &= \frac{y^2}{(1-2M/r)} \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 (v^2 - 1) \end{aligned}$$

Utilizando la definición de  $y$ , en este caso tenemos finalmente que:

$$a^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 \quad (3.117)$$

recordando que  $v$  es la velocidad de un observador ortonormal. Si consideramos puntos muy cercanos al horizonte podemos tomar la siguiente expansión:

$$\begin{aligned} f(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = f(r_0) + \frac{df(r_0)}{dr}(r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f(r_0)}{dr^2}(r - r_0)^2 + \dots \\ v(r) &= v(r_0) + \frac{dv(r_0)}{dr}(r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2v(r_0)}{dr^2}(r - r_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

y substituyendo estos valores en la ecuación (3.117) obtenemos que el escalar  $a^2$  es finito en el horizonte de eventos, con tal que  $v(r)$  cumpla la siguiente condición:

$$\lim_{r \rightarrow 2M} v(r) = 1$$

La condición anterior es una consecuencia de la regularidad del flujo sobre el horizonte de eventos. Si el objeto compacto no es un hoyo negro no podemos imponer esta condición, y para ese caso no hay un flujo único. Con la condición anterior para el caso de hoyo negro mostraremos numéricamente que existe una solución única que tiene la propiedad de ser subsónica en infinito, es decir,  $v_\infty < a_\infty$ , que pasa a través de un punto crítico y además satisface que  $\lim_{r \rightarrow 2M} v(r) = 1$ . Esta es la solución que estamos buscando.

### 3.5 Gráficas

En esta sección mostraremos el comportamiento de la velocidad del flujo, mediante un cálculo numérico. Para ello, reescribimos la ecuación de conservación (3.61) como:

$$\left(\frac{\rho}{n} + \frac{I'}{n}\right)^2 (f(r) + u^2) = \left(\frac{\rho - I'}{n}\right)^2 \Big|_{\infty} \quad (3.118)$$

utilizando (3.54) y sustituyendo la presión  $P$  de la ecuación de estado tenemos:

$$\left[ m + Ku^{\Gamma-1} \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \right]^2 (f(r) + u^2) = \left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 \Big|_{\infty}$$

de la ecuación para la tasa de acreción (3.55) despejamos  $n$  y la sustituimos en la ecuación anterior:

$$\left[ m + K \left( \frac{\dot{M}}{4\pi n u g(r)} \right)^{\Gamma-1} \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \right]^2 (f(r) + u^2) = \left( \frac{\rho + P}{n} \right)^2 \Big|_{\infty} \quad (3.119)$$

De esta manera, hemos obtenido una ecuación implícita para la velocidad  $u = u^r$ , que resolveremos numéricamente. Esta ecuación tiene como parámetros libres, la tasa de acreción  $\dot{M}$  y las condiciones a la frontera en infinito con  $\rho_{\infty}$ ,  $P_{\infty}$  y  $n_{\infty}$ . Para estos parámetros fijos la ecuación (3.119) nos da una solución para la velocidad del flujo. Para el trabajo numérico es más conveniente utilizar la velocidad  $v$  dada por la ecuación (3.77). Para más detalles ver el apéndice A. Utilizando la métrica de Schwarzschild, obtenemos las gráficas 3.2 y 3.3. Cada una de estas gráficas está caracterizada con un valor de  $\dot{M}$  y un valor para el lado derecho de la ecuación (3.119).

No todas las soluciones describen una situación real, para ello es necesario que cumplan las condiciones a infinito y la más importante para el caso de acreción en un hoyo negro la regularidad en el horizonte de eventos, es decir,  $v = 1$  como vimos en la sección anterior. De las gráficas tenemos que la *única solución* que satisface estas condiciones es la solución que pasa por el punto crítico. Para esta solución el flujo incrementa su velocidad mientras el radio decrece. La velocidad del flujo a infinito es

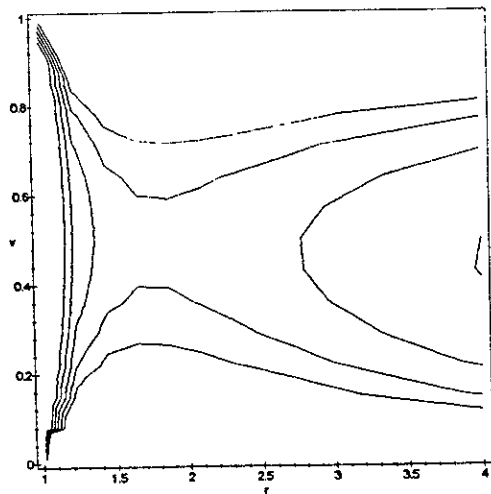


Figura 3.3 Perfil del comportamiento de un flujo en el caso de acreción esférica en un hoyo negro de Schwarzschild de masa  $M$ . Es importante notar que la variable  $r$  de la gráfica está relacionada con el radio de Schwarzschild por  $r = 2Mr_{sc}$ .

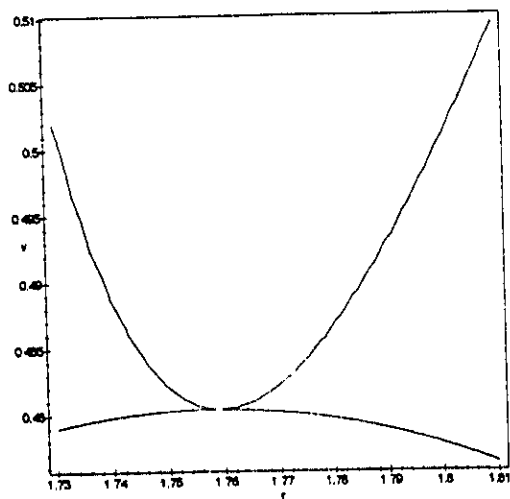


Figura 3.4 Punto sónico.



subsónica, aumenta conforme se acerca al punto crítico, en el punto crítico alcanza la velocidad del sonido, pasando dicho punto la velocidad se vuelve supersónica y finalmente el flujo cruza el horizonte de eventos con la velocidad de la luz.

### 3.6 Radiación a Infinito

Hasta el momento tenemos una buena idea de como son las soluciones de Euler de la hidrodinámica en el marco del hoyo negro de Schwarzschild. Exactamente presentamos el comportamiento de la soluciones en estado estacionario. En suma dependen de las condiciones iniciales a infinito, imponiendo la regularidad del flujo en el horizonte de eventos del hoyo negro vimos, teóricamente y con la ayuda de cálculos numéricos, que para flujos subsónicos en infinito existe una solución única con el valor  $v = 1$  en el horizonte de eventos. Esta solución se llama Trasónica, es la solución que pasa por el punto  $r$  que satisface  $D = D_1 = 0$ .

Además como probamos en la ecuación (3.54) estos flujos son flujos adiabáticos. Esto implica que aunque el material se comprime no hay producción de calor, es decir, la compresión es adiabática. Aunque físicamente esperamos que el plasma acretado no sea completamente adiabático, es decir, esperamos producción de radiación como consecuencia de las interacciones entre electrones y protones. En esta sección indicamos que si tomamos en cuenta procesos radiativos para la tasa de acreción  $\dot{M}$  dada por la ecuación (3.103), encontramos que la radiación a infinito es muy poca. Entonces podemos concluir que para hoyos negros, formados por el colapso gravita-

cional completo de una estrella, la acreción esférica no es un proceso efectivo para producir suficiente radiación para ser observada. Esto lo podemos ver analizando la pérdida de energía en el efecto Bremsstrahlung térmico [19]. La tasa a la cual el plasma está emitiendo vía Bremsstrahlung térmico por unidad de masa al radio  $r$ , tiene la siguiente forma [19]:

$$\epsilon_{ff} = \left( 5 \times 10^{-3} \frac{erg}{gr\ s} \right) \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} gr\ cm^{-3}} \right) \left( \frac{T_{\infty}}{10^4 K} \right) \left( \frac{r}{r_i} \right)^{-(3/4)(\Gamma+1)} \quad (3.120)$$

Integramos esta tasa de acreción desde el horizonte de eventos hasta infinito, suponiendo que el índice adiabático es  $\Gamma = 1.4$ , en este caso obtenemos la siguiente expresión para la luminosidad:

$$L_{ff} \sim \left( 5 \times 10^{17} \frac{erg}{gr\ s} \right) \left( \frac{\rho_{\infty}}{10^{-24} gr\ cm^{-3}} \right) \left( \frac{T_{\infty}}{10^4 K} \right) \left( \frac{r}{r_i} \right)^{-3.3} \quad (3.121)$$

Esta luminosidad es mucho menor que la luminosidad de Eddington,  $L_{Edd} \simeq 1.3 \times 10^{38} (M/M_{\odot}) erg/s$ . Podemos concluir definitivamente, que mediante las observaciones corrientes no podemos detectar hoyos negros, que se encuentren aislados acretando en forma esférica.

Afortunadamente, como hemos mencionada anteriormente, tenemos muchas evidencias de que existen hoyos negros en sistemas binarios de rayos-X. Para los sistemas binarios la situación es muy diferente al caso del hoyo negro aislado, porque la materia que es acretada posee momento angular. Entonces no podemos utilizar la acreción esférica para modelar la acreción del flujo con momento angular. El problema de materia acretada con momento angular será analizado en el siguiente capítulo.

## Capítulo 4

### DISCOS DE ACRECIÓN

Al principio del capítulo segundo mencionamos que las observaciones astronómicas, a partir de 1960, muestran que hay sistemas binarios galácticos que están emitiendo grandes cantidades de energía en forma de rayos-X, en el intervalo  $1-500\text{KeV}$ . Como planteamos brevemente en el mismo capítulo el problema al que se enfrentaron los astrónomos y físicos teóricos era explicar el origen de esta radiación. Como veremos en la presente sección, la acreción es un mecanismo que convierte energía potencial gravitacional a otras formas de energía, incluyendo la electromagnética. Es decir, vía acreción en objetos compactos podemos principalmente explicar el origen de los rayos-X observados en los sistemas binarios y lo más importante, en principio, el espectro de rayos-X puede ser la clave para probar la existencia de hoyos negros. Como ya mencionamos los espectros mostrados en la figura (3.2) son muy diferentes, dependen de la naturaleza del objeto compacto. La pregunta es la siguiente ¿Es posible a partir de las diferencias en los espectros y con ayuda del criterio de masa probar definitivamente la existencia de hoyos negros?

En la sección 3.4 del capítulo anterior vimos que la forma más sencilla de acreción esférica, es decir, acreción sin presencia de ondas de choque y con condiciones a la frontera en infinito que son típicas en el medio intergaláctico, no puede explicar el origen de esta radiación. En este capítulo presentaremos otra forma de acreción que por su naturaleza tiene la capacidad de explicar la radiación de rayos-X. Esta nueva forma de acreción tiene la propiedad característica de que el material acretado posee momento angular distinto de cero, de hecho el momento angular es muy próximo al momento angular kepleriano. Para introducir la acreción de disco, vamos a recordar al lector algunas características de los sistemas binarios que nos serán de utilidad para entender el proceso de acreción

#### 4.1 Sistemas Binarios

Un concepto muy importante en el estudio de discos de acreción que se forman en sistemas binarios es el concepto de Lóbulo de Roche. El *Lóbulo de Roche* es una hipersuperficie equipotencial hipotética que pasa a través del punto interior de Lagrange  $L_1$ . En el diagrama (4.1) dibujamos las hipersuperficies equipotenciales en un sistema binario típico compuesto por un objeto compacto y una estrella normal. En esta figura podemos ver el Lóbulo de Roche. La teoría de evolución estelar de sistemas binarios afirma que existen dos posibles configuraciones.

La primera posibilidad, es que la hipersuperficie de la estrella normal se encuentre dentro del lóbulo de Roche. La segunda, es que la hipersuperficie estelar esté

afuera del Lóbulo de Roche. Cuando la hipersuperficie de la estrella normal se encuentra fuera del Lóbulo de Roche el material de la estrella normal está influenciada por el campo gravitacional del objeto compacto. La idea central de los modelos de disco de acreción es que el material de la estrella normal es influenciado eventualmente por el objeto compacto. Bajo condiciones específicas este material posee suficiente momento angular y se establece en una configuración tipo disco alrededor del objeto compacto.

La otra posibilidad, con respecto de la hipersuperficie de la estrella normal relativa al Lóbulo de Roche es que se encuentre dentro de éste. Aunque en este caso el campo gravitacional del objeto compacto no ejerce gran influencia en el material de la estrella normal como en el caso anterior, el fenómeno de viento estelar es el responsable de la transferencia de masa de la estrella normal al objeto compacto. Recordemos que generalmente las estrellas normales poseen una región llamada *corona caliente*, donde la temperatura es tan elevada que puede ocasionar que la energía térmica del plasma sea mayor que la fuerza gravitacional. En este caso el plasma es eyectado, en forma de viento, con altas velocidades. Este fenómeno se conoce como viento estelar. Entonces si la estrella normal no llena físicamente su lóbulo de Roche, puede emitir viento estelar y una pequeña fracción ( $\lesssim 0.1\%$ ) de este viento es capturada por la estrella compacta. Aunque la acreción vía viento estelar es un problema muy interesante desde el punto de vista matemático y físico en esta tesis no estudiaremos esta forma de acreción (para detalles de este tipo de acreción ver [20]). Sin embargo,

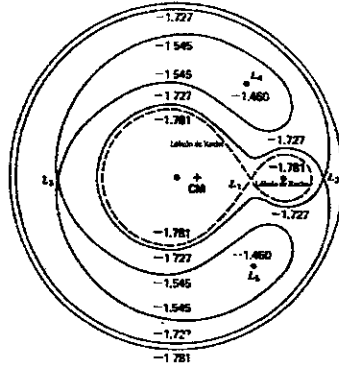


Figura 4.1 Las equipotenciales  $\Phi_{gc} = \text{constantes}$  para el potencial gravitacional newtoniano + el potencial centrífugo en el plano orbital del sistema binario con órbitas circulares. Para el caso mostrado aquí las estrellas tienen una razón de masa  $M_N : M_c = 10 : 1$ , donde la estrella normal  $M_N$  está a la izquierda y la estrella compacta  $M_c$  a la derecha. Las equipotenciales están etiquetadas con sus valores  $\Phi_{gc}$  medidos en unidades de  $G(M_N + M_c)/a$ , donde  $a$  es la separación del centro de masa a las dos estrellas. La equipotencial más interna es el Lóbulo de Roche de cada estrella. [De Novikov y Thorne (1973) [19].]

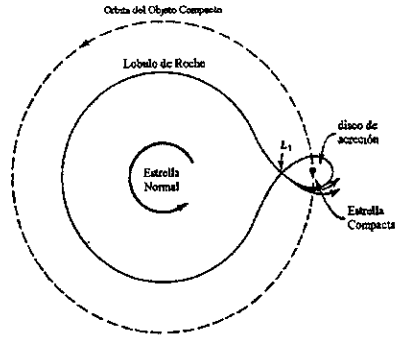


Figura 4.2 Disco de Acreción

examinaremos con detalle la acreción vía flujo sobre el Lóbulo de Roche.

En particular en este capítulo analizaremos con detalle un modelo de disco de acreción conocido como el Modelo Estándar. Este modelo fue construido por primera vez en 1972 por Shakura y Sunayev [17] y Thorne y Novikov incluyendo efectos relativistas [19], también se le conoce como modelo  $\alpha$ -disco de acreción. La razón para el término  $\alpha$ -disco quedará clara posteriormente.

## 4.2 Modelo Estándar de Discos de Acreción

Para tener una idea intuitiva de la formación del disco de acreción en un sistema binario podemos imaginar la situación física descrita por el diagrama (4.2). En esta figura vemos que mientras el objeto compacto está girando, el material de la estrella normal, en forma de plasma caliente, se mueve a través del punto interior de Lagrange  $L_1$  y al ser atrapado por el objeto compacto forma una configuración tipo disco. Para

estudiar los  $\alpha$ -discos de acreción contruidos por Shakura y Sunayev [17] y Thorne y Novikov [19] necesitamos imponer las siguientes condiciones en el disco:

- 1.- El material capturado puede ser descrito hidrodinámicamente.
- 2.- El plano central del disco coincide con el plano ecuatorial del objeto compacto.
- 3.- El disco es delgado, es decir, para toda  $r$ , se cumple que  $h(r) \ll r$ , donde  $h(r)$  es la altura vertical del disco.
- 4.- El disco se encuentra en promedio en un estado estacionario y las partículas del material acretado se encuentran en órbitas keplerianas. Además superpuesto a esas órbitas keplerianas hay una velocidad radial muy pequeña, que denotaremos como  $v_r$ .
- 5.- El campo gravitacional de la estrella normal no ejerce ninguna influencia gravitacional en la estructura del disco.

Aunque podemos estudiar la estructura del disco de acreción que satisface las condiciones anteriores en el marco de referencia de la teoría de la relatividad general [19], por simplicidad en esta tesis estudiaremos la estructura de un disco de acreción en el marco de la teoría newtoniana. Sin embargo, utilizaremos algunos conceptos de la teoría de la relatividad general. En particular, en la figura (2.8) de la sección 2.6, mostramos la existencia de un radio  $r$ , dentro del cual no es posible tener órbitas circulares estables. Por consiguiente suponemos que el disco de acreción no puede ir más allá de dicho radio. Así podemos identificar este radio con el radio donde se



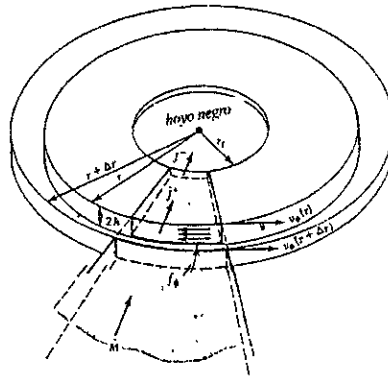


Figura 4.3 Disco de acreción kepleriano delgado alrededor de un hoyo negro de Kerr

encuentra el borde interior del disco, que denotamos como  $r_I$ . Entonces para toda  $r$  tal que  $r < r_I$  el material caerá rápidamente al hoyo negro. Por otro lado, asumimos que el material es depositado en el disco por una tasa de acreción constante  $\dot{M}$  y que es atrapado por la estrella compacta a la misma tasa de acreción. Finalmente para describir el disco de acreción utilizamos coordenadas cilíndricas con el origen en el centro del hoyo negro y suponemos que el plano del disco se encuentra en el plano  $z = 0$ .

Para tener una idea más clara de la estructura del disco, podemos tomar una sección transversal, como es mostrado en la figura (4.3), donde  $z$  es el eje de giro del objeto compacto,  $r$  la coordenada radial del disco y  $h(r)$  la altura del disco. Para obtener las ecuaciones de la estructura del disco, es necesario analizar a fondo las suposiciones básicas bajo las que estamos trabajando. Una de ellas es que las partículas se muevan en órbitas keplerianas, esto implica, que la fuerza de gravitación

es igual a la fuerza centrífuga, es decir,

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_\phi^2}{r} \quad (4.1)$$

de donde la velocidad orbital kepleriana es,

$$v_\phi = r\Omega = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} \quad (4.2)$$

y la velocidad angular kepleriana  $\Omega$  es:

$$\Omega = \left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Consecuentemente el momento angular por unidad de masa  $\tilde{l}$ , para cada partícula del fluido está dado por:

$$\tilde{l} = (GM r)^{1/2} \quad (4.4)$$

multiplicando este momento angular con la tasa de acreción  $\dot{M}$  en estado estable obtenemos el flujo de momento angular  $\dot{J}$ , que cruza el radio  $r$  :

$$\dot{J} = \dot{M} \tilde{l}(r) = \dot{M} (GM r)^{1/2} \quad (4.5)$$

Sea  $r_D$  el radio exterior del disco, entonces el flujo de momento angular que es depositado en el disco es:

$$\dot{J}_D = \dot{M} (GM r_D)^{1/2}$$

Por otro lado, para que las partículas dentro del disco sean atrapadas finalmente por el objeto compacto es necesario que  $\tilde{l}_D \gg \tilde{l}_I$ . En otras palabras, para que la acreción se realice necesitamos un mecanismo para que el flujo pierda momento angular conforme

se aproxime al hoyo negro. De los principios de mecánica clásica sabemos que para introducir un cambio en el momento angular  $\vec{L}$  de una partícula es necesario aplicar una torca sobre dicha partícula, es decir,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (4.6)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza que actúa sobre la partícula y  $\vec{M}$  es la torca. La mayor contribución de Shakura y Sunayev para el entendimiento de acreción con momento angular distinto de cero fue la introducción de un mecanismo capaz de reducir el momento angular del flujo. Shakura y Sunayev postularon que el fluido está muy lejos de ser un fluido perfecto, pero en contraste asumieron la existencia de una viscosidad distinta de cero. Aunque todavía no sabemos el origen de esa viscosidad, platicaremos sobre ella más adelante. La existencia de la viscosidad tiene los siguientes efectos:

- 1.- Transporte de momento angular, es decir no permite al flujo permanecer en una órbita alrededor del hoyo negro, y
- 2.- Transforma la energía potencial en calor.

Si aceptamos la hipótesis de Shakura y Sunayev definimos  $f_\phi$ , como el esfuerzo viscoso (fuerza por unidad de área) ejercido en la dirección  $\phi$  por el elemento de fluido en  $r$  sobre los elementos vecinos en  $r + dr$ . El esfuerzo viscoso está relacionado con la componente  $t_{r\phi}$  del tensor de esfuerzos característico del fluido, de acuerdo a:

$$f_\phi = -t_{r\phi} \quad (4.7)$$

Donde para un disco kepleriano tenemos que [1,17,19,20]:

$$t_{r\phi} = -\frac{3}{2}\eta\Omega = -\frac{3}{2}\eta\left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad dinámico ( $g\text{ cm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ).

Para determinar la estructura del disco de acreción que se encuentra en un estado estacionario debemos resolver simultáneamente cuatro ecuaciones de conservación: conservación de masa, conservación del flujo de momento angular, conservación de energía y conservación de momento vertical. Además, tenemos que especificar una ley de viscosidad para  $\eta$ , así como una ley que describa el transporte de radiación del centro a la superficie. Primero, es muy útil definir el concepto de la densidad superficial de un cilindro hipotético del disco que está en la coordenada radial  $r$  y la altura es  $2h(r)$ . En este caso la densidad superficial  $\Sigma(r)$  está definida por la siguiente ecuación:

$$\Sigma(r) \equiv \int_{-h}^h \rho dz \approx 2h(z=0, r)\rho(z=0, r) = 2h\rho \quad (4.9)$$

donde  $z$  mide la altura vertical perpendicular al plano medio del disco. En el lado derecho de la ecuación (4.9), hemos evaluado  $\rho$  en  $z=0$ , esto lo podemos hacer ya que suponemos que el disco es geoméricamente delgado, es decir, para cada  $r$  satisface que  $h(r) \ll r$ .

### 4.3 Conservación de la Masa en Reposo

Como vimos en el capítulo primero la ecuación de continuidad para el flujo de masa estacionario está dada por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.10)$$

integrando sobre un volumen  $v$  obtenemos,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_{s(V)} \rho \vec{v} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.11)$$

esto implica que:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \oint_{s(V)} \rho \vec{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.12)$$

donde el lado derecho de la ecuación representa el flujo de la densidad de energía. La ecuación (4.12) nos da una ley de conservación de la masa. Para aplicarla al caso del disco, tomamos dos cilindros concéntricos de radios  $r_1$  y  $r_2$ , donde  $V$  es el volumen entre los dos cilindros, y el lado izquierdo de la ecuación (4.12) es cero, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{r=r_1} \rho \vec{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{r=r_2} \rho \vec{v} \cdot d\mathbf{s} \\ \rho v_r 2\pi r h(r)|_{r=r_1} &= \rho v_r 2\pi r h(r)|_{r=r_2} \end{aligned}$$

Finalmente utilizando la ecuación (4.9) obtenemos:

$$\dot{M} = 2\pi r \Sigma v_r = \text{constante} \quad (4.13)$$

donde  $v_r$  es la velocidad radial definida anteriormente en la condición (4). La ecuación (4.13) afirma que la tasa de acreción de la masa a través del cilindro de radio  $r$ , es independiente de  $r$ .

#### 4.4 Conservación de Momento Angular

Sea  $\dot{J}^+ = \dot{M} (GM r)^{1/2}$  el flujo de momento angular a través del radio  $r$ , debido al influjo del gas (Figura 4.4), y  $\dot{J}^-$  el flujo de momento angular que es consumido por el objeto compacto, como  $\dot{J}^-$  debe ser menor que  $\dot{J}^+$ , podemos escribir:

$$\dot{J}^- = \beta \dot{M} (GM r_I)^{1/2} \quad \text{donde } |\beta| \leq 1. \quad (4.14)$$

Por otro lado, la conservación del momento angular requiere que la tasa neta del cambio del momento angular con  $r$  sea igual a la torca ejercida por la fuerza viscosa.

De acuerdo a,

$$\text{torca} = (\text{fuerza a lo largo de } e_\phi / \text{área}) \times (\text{área}) \times (r) = \dot{J}^+ - \dot{J}^-,$$

ó,

$$(f_\phi) (2\pi r \cdot 2h) (r) = \dot{M} [(GM r)^{1/2} - \beta (GM r_I)^{1/2}]. \quad (4.15)$$

Vemos que el esfuerzo  $f_\phi$  requerido está determinado, en estado estacionario, únicamente por  $M$  y  $\dot{M}$ .

#### 4.5 Conservación de la Energía

De la segunda ley de la termodinámica tenemos:

$$dQ = T ds, \quad (4.16)$$

esto implica que la razón de tiempo de la producción de calor está asociada con la razón de incremento de entropía, es decir,

$$d\dot{Q} = T d\dot{s} \quad (4.17)$$

En el caso del disco la fuente más importante de producción de calor es la viscosidad. Para introducir la viscosidad definimos la siguiente ecuación, (hacemos una comparación de las ecuaciones (3.20) y (3.54)):

$$\dot{Q} = \rho d\dot{Q} = \rho T \dot{s} \equiv \frac{1}{2} \frac{t^2}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{t_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta}}{\eta} \quad (4.18)$$

donde  $t_{\alpha\beta}$  es el tensor de esfuerzos. En coordenadas cilíndricas, la única componente del tensor  $t_{\alpha\beta}$  que no se anula es  $t_{\phi r}$ , por lo que la ecuación (4.18) puede ser expresada de la siguiente manera [1]:

$$\dot{Q} \approx \frac{(t_{\phi r})^2}{\eta} \quad (4.19)$$

utilizando la ecuación (4.7) obtenemos:

$$\dot{Q} = \frac{-f_{\phi} t_{\phi r}}{\eta}. \quad (4.20)$$

Sustituimos los valores del  $f_{\phi}$  y de  $t_{\phi r}$  de las ecuaciones (4.8) y (4.15) en la ecuación (4.20) y obtenemos,

$$\begin{aligned} 2h\dot{Q} &= 2h\rho T \dot{s} = \frac{-2hf_{\phi} t_{\phi r}}{\eta} \\ 2h\dot{Q} &= \frac{3M}{4\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_L}{r} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

La ecuación anterior nos dice que parte de la energía potencial se transforma en calor. La otra propiedad postulada por Shakura y Sunayev es que este calor, es decir  $2h\dot{Q}$ , no se acumula en el disco, sino que es radiado completamente por el disco. Con esta propiedad de la ecuación (4.21), obtenemos directamente que el flujo de energía

emitido por la cara superior (inferior) del disco al radio  $r$  es:

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{1}{2} \times 2h\dot{Q} \\ &= \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_I}{r} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como el disco es delgado, la emisión se da preferentemente en la dirección vertical más que la dirección radial. Podemos ver de la ecuación (4.22) que el flujo de energía emitido queda completamente determinado por  $M$ ,  $\dot{M}$  y  $r$ . La luminosidad total del disco es:

$$L = \int_{r_I}^{\infty} 2F \times 2\pi r dr = \left( \frac{3}{2} - \beta \right) \frac{GM\dot{M}}{r_I}. \quad (4.23)$$

#### 4.6 Estructura Vertical del Disco

En la dirección vertical no tenemos movimiento neto del gas (el disco es estacionario). Las únicas fuerzas que están actuando sobre las partículas del gas, son la presión vertical del disco y la fuerza gravitacional de la estrella compacta a lo largo de la dirección  $e_z$ , es decir, el disco se encuentra en equilibrio hidrostático en la dirección  $z$ ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{GM}{r^2} \frac{z}{r} \quad (4.24)$$

Además utilizando el hecho de que el disco es delgado, es decir,  $h \ll r$  tenemos:

$$\rho(h, r) \approx \rho(0, r) \quad (4.25)$$



Integrando la ecuación de equilibrio hidrostático en la dirección vertical:

$$\int_{z=0}^{z=h} dP = - \int_{z=0}^{z=h} \frac{GM}{r^3} \rho z dz \quad (4.26)$$

como no tenemos presión en la superficie del disco, es decir,  $P(z = h, r) = 0$  y utilizando (4.25) obtenemos:

$$P(z = 0, r) = - \frac{GM}{2r^3} \rho h^2 \quad (4.27)$$

dejando la altura  $h$  obtenemos:

$$h = - \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{2r^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (4.28)$$

Utilizando la ecuación (4.3), una ecuación de estado politrópica  $P = K\rho^\Gamma$ , y la definición de la velocidad del sonido  $a^2 = c_s^2 = dP/d\rho|_s = (K\Gamma\rho^{\Gamma-1}) (\rho/\rho) \simeq P/\rho$ , en la ecuación (4.28), obtenemos:

$$h \simeq - \frac{c_s}{\Omega} \quad (4.29)$$

## 4.7 Ley de Viscosidad

Regresamos ahora al concepto de viscosidad. Al introducir la viscosidad el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  que representa el flujo acretaoes muy diferente al tensor  $T_{\mu\nu}$  que usamos en acreción esférica (ver ecuación (3.15)). Exactamente, ahora el tensor  $T_{\mu\nu}$  toma la siguiente forma:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P) u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta} \quad (4.30)$$

donde el término  $t_{\alpha\beta}$  es el tensor de esfuerzos que está relacionado con un coeficiente de viscosidad dinámico  $\eta$ . La ecuación (4.30) es una ley macroscópica. Para saber la

forma exacta de (4.30) es necesario saber que procesos microfísicos generaran este  $t_{\alpha\beta}$ . Por procesos microfísicos consideraremos los que se dan a distancias del orden de la longitud del camino libre medio,  $l$ . Para establecer las restricciones para determinar el coeficiente de viscosidad  $\eta$ , Shakura y Sunyaev [17] suponen que esta viscosidad es generada por turbulencias y el esfuerzo de deformación cortante basado en algunas consideraciones dinámicas. De esta manera el coeficiente de viscosidad dinámico  $\eta$  en presencia de turbulencias se puede escribir como:

$$\eta \equiv \rho v_{turb} l_{turb}, \quad (4.31)$$

donde  $v_{turb}$  es la velocidad del plano de contacto donde se crean turbulencias relativas al movimiento medio del gas y  $l_{turb}$  es la longitud de escala en que se pueden apreciar turbulencias. Aunque no conocemos los valores de  $v_{turb}$  y  $l_{turb}$  Shakura y Sunyaev establecen un límite superior para ambos valores de la siguiente manera. Esperan que la velocidad de turbulencia debe ser mucho menor que la velocidad del sonido, es decir,  $v_{turb} \ll c_s$ . Además, suponen que el tamaño de longitud de escala de las turbulencias debe ser menor que la altura  $h$  del disco, así  $l_{turb} \leq h$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.31) tenemos un límite superior para el coeficiente de viscosidad dado por:

$$\eta \lesssim \rho c_s h, \quad (4.32)$$

Usando las ecuaciones (4.7) y (4.8), tenemos un límite en la fuerza:

$$f_\phi = -t_{\phi r} \simeq -\eta\Omega \quad (4.33)$$

utilizando (4.32) y (4.29) obtenemos:

$$f_\phi \lesssim (\rho c_s h) \Omega = \rho c_s \left( \frac{c_s}{\Omega} \right) \Omega = \rho c_s^2 = \rho \frac{P}{\rho} = P \quad (4.34)$$

De las desigualdades  $f_\phi \lesssim P$ , entonces podemos escribir en general,

$$f_\phi = \alpha P \quad (4.35)$$

donde hemos introducido un parámetro adimensional,  $\alpha$ , el cual no podemos calcular con detalle, pero que satisface:

$$\alpha \leq 1 \quad (4.36)$$

Precisamente, por este parámetro  $\alpha$ , los modelos construidos aquí son conocidos como modelos  $\alpha$ -discos de acreción. Tales modelos típicamente llevan  $\alpha$  como un parámetro constante y libre en la ecuación de estructura del disco. El parámetro  $\alpha$  se encuentra en el rango  $0.01 \lesssim \alpha \lesssim 1$ .

#### 4.8 Opacidad, Presión y Transporte Radiativo

Para los parámetros típicos de acreción involucrados en las estrellas compactas con  $M \sim M_\odot$ , la fuente dominante de la absorción de fotones en el disco es Bremsstrahlung térmico o absorción libre-libre. La opacidad media de Rosseland está definida por [1,19]:

$$\bar{\kappa}_{abs} \simeq \bar{\kappa}_{ff} \simeq 0.64 \times 10^{23} \left( \rho [g \text{ cm}^{-3}] \right) (T [K])^{-7/2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (4.37)$$

La mayor fuente de dispersión de fotones es la dispersión Thomson, donde:

$$\bar{\kappa}_{disp} \simeq \bar{\kappa}_{ts} = 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}. \quad (4.38)$$

Generalmente la presión total del material del disco es la suma de la presión térmica del gas y la presión de radiación. Para hidrógeno ionizado se obtiene:

$$P(\rho, T) \simeq \frac{2\rho kT}{m_p} + P_{rad} \quad (4.39)$$

donde en equilibrio termodinámico local, tenemos:

$$P_{rad} \simeq \frac{1}{3} a T^4. \quad (4.40)$$

La idea ahora, es que el disco está definido en dos regiones. En la parte externa del disco la presión del gas domina la presión de radiación y en la parte interna la presión de radiación, por encontrarse a altas temperaturas, domina la presión del gas. Para completar la estructura del disco necesitamos introducir un mecanismo de propagación de calor de la parte interna del disco a la superficie del disco. Este mecanismo de transporte es principalmente la radiación. El calor es transportado verticalmente ( $h \ll r$ ) y de la teoría de transporte radiativo sabemos que si la profundidad óptica total,  $\tau$ , del disco (medido en la dirección vertical) excede la unidad, los fotones son transportados a la superficie vía difusión:

$$F(\tau, z) = -\frac{c d(aT^4)}{3 d\tau}, \quad \tau > 1 \quad (4.41)$$

donde  $F(r, z)$  es el flujo de fotones verticales y hemos supuesto equilibrio termodinámico local entre el gas de fotones y la materia. La cantidad  $\tau$  es la profundidad óptica calculada de la opacidad media total de Rosseland:

$$\tau = \int_0^h \bar{\kappa} \rho dz \approx \bar{\kappa}(\rho, T) \Sigma \quad (4.42)$$

donde  $\bar{\kappa}$  es llamada la opacidad de Kramer [1,17,19]. Reemplazando las diferenciales por diferencias finitas, integramos la ecuación (4.41) aproximadamente obtenemos para el flujo superficial  $F(r, z = h) = F(r)$ ,

$$F(r) \approx \frac{acT^4}{\tau} = \frac{acT^4}{\bar{\kappa}\Sigma}, \quad \tau(r) > 1 \quad (1.43)$$

En la ecuación (4.43) las cantidades  $\Sigma(r)$  y  $F(r)$  están dadas por las ecuaciones (1.9) y (4.22), respectivamente, y  $T(r)$  y  $\rho(r)$  están evaluadas cerca del centro del disco en  $z = 0$ .

Si  $\tau$  es menor que la unidad, el disco se vuelve ópticamente delgado a la salida de los fotones. En este caso los fotones pueden escapar libremente de sus puntos de emisión sin sufrir ningún tipo de absorción o dispersión. En este caso la ecuación (4.43), apropiada sólo para la difusión, será reemplazada por:

$$F(r) \approx \int_0^h \Lambda(\rho, T) dz \approx h \Lambda(\rho, T), \quad \tau(r) < 1. \quad (1.44)$$

donde  $\Lambda(\rho, T)$  es el promedio de la emisividad de fotones ( $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}$ ) en el disco.

#### 4.9 Solución: Estructura de un Modelo de Disco Estandar

En resumen la estructura del disco geoméricamente delgado implica las siguientes condiciones:

$$\Sigma(r) \approx 2h\rho \quad (1.15)$$

$$\dot{M} = 2\pi r \Sigma v_r \quad (1.16)$$

$$(f_{\dots}) (2\pi r \cdot 2h)(r) = \dot{M} \left[ (GM/r)^{1/2} - \beta (GM/r_I)^{1/2} \right] \quad (1.17)$$

$$F(r) = \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_I}{r} \right)^{1/2} \right] \quad (4.48)$$

$$h = \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{2r^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

$$f_\phi = \alpha P \quad (4.50)$$

$$P(\rho, T) \simeq \frac{2\rho k T}{m_p} + P_{rad} \quad (4.51)$$

$$F(r) \approx \frac{a c T^4}{\bar{\kappa} \Sigma} \quad (4.52)$$

queremos resolver este sistema de ecuaciones para encontrar las cantidades  $\rho(r)$ ,  $h(r)$ ,  $\Sigma(r)$ ,  $v_r(r)$ ,  $P(r)$ ,  $T(r)$ ,  $f_\phi(r)$ ,  $\bar{\kappa}(r)$  y  $F(r)$  como funciones de  $r$ ,  $\dot{M}$  y  $M$ . Para resolverlo necesitamos saber que forma de presión domina, es decir, la presión de materia o presión de radiación. La idea consiste en que en la región externa la presión del gas está completamente dominada por la presión de materia, es decir,

$$P(\rho, T) \simeq \frac{2\rho k T}{m_p} \quad (4.53)$$

además el proceso radiativo que opera en esta parte del disco es solamente la radiación libre-libre y entonces la opacidad media de Rosseland tiene la forma dada por la ecuación (4.38). Con estas condiciones resolvemos las ecuaciones (4.45)-(4.52). Para ello realizamos el siguiente procedimiento. Primero, sustituimos la ecuación (4.50) en (4.47) y obtenemos:

$$(\alpha P)(2\pi r \cdot 2h)(r) = \dot{M} \left[ (GM r)^{1/2} - \beta (GM r_I)^{1/2} \right] \quad (4.54)$$

después sustituimos (4.53) en la ecuación anterior, así,

$$\alpha \left( \frac{2\rho k T}{m_p} \right) (2\pi r \cdot 2h)(r) = \dot{M} A \quad (4.55)$$

donde para simplificar los cálculos,

$$A = \left[ (GM r)^{1/2} - \beta (GM r_I)^{1/2} \right] \quad (4.56)$$

sustituyendo (4.45) en (4.55) tenemos:

$$\alpha \left( \frac{2k}{m_p} \right) (2\pi r^2) \Sigma T = \dot{M} A \quad (4.57)$$

ahora la ecuación (4.52) en la (4.48) nos da:

$$\frac{a c T^4}{\bar{\kappa} \Sigma} = \dot{M} B \quad (4.58)$$

donde,

$$B = \frac{3}{4\pi} \frac{GM}{r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_I}{r} \right)^{1/2} \right] \quad (4.59)$$

multiplicando la ecuación (4.57) con (4.58) obtenemos la siguiente expresión para la temperatura:

$$\alpha \left( \frac{2k}{m_p} \right) (2\pi r^2) \left( \frac{a c}{\bar{\kappa}} \right) T^5 = \dot{M}^2 B A$$

entonces,

$$T = \left[ \left( \frac{m_p}{2k} \right) \left( \frac{1}{2\pi r^2} \right) B A \right]^{1/5} \left( \frac{\bar{\kappa}}{a c} \right)^{1/5} \dot{M}^{2/5} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{1/5} \quad (4.60)$$

despejamos  $\Sigma$  de la ecuación (4.52):

$$\Sigma = \frac{a c T^4}{\bar{\kappa} F(r)} \quad (4.61)$$

sustituimos (4.48) y (4.60) en (4.61),

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left( \frac{\bar{\kappa}}{a c} \right)^{-1} \frac{1}{\dot{M} B} \left[ \left( \frac{m_p}{2k} \right) \left( \frac{1}{2\pi r^2} \right) B A \right]^{4/5} \left( \frac{\bar{\kappa}}{a c} \right)^{4/5} \dot{M}^{8/5} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{4/5} \\ \Sigma &= \left[ \left( \frac{m_p}{2k} \right) \left( \frac{1}{2\pi r^2} \right) A \right]^{4/5} \left( \frac{1}{B} \right)^{1/5} \left( \frac{\bar{\kappa}}{a c} \right)^{-1/5} \dot{M}^{3/5} \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{4/5} \end{aligned} \quad (4.62)$$

a continuación sustituimos (4.53) en (4.49) entonces:

$$h = \left(\frac{2k}{m_p}\right)^{1/2} \left(\frac{2r^3}{GM}\right)^{1/2} T^{1/2} \quad (4.63)$$

sustituyendo (4.60) en (4.63) obtenemos:

$$h = \left(\frac{2k}{m_p}\right)^{2/5} \left(\frac{2r^3}{GM}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi r^2}\right)^{1/10} B^{1/10} A^{1/10} \left(\frac{\bar{\kappa}}{ac}\right)^{1/10} \dot{M}^{1/5} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/10} \quad (4.64)$$

despejamos de la ecuación (4.45) la densidad y obtenemos:

$$\rho = \frac{\Sigma}{2h} \quad (4.65)$$

sustituyendo (4.62) y (4.64) en la ecuación (4.65),

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{m_p}{2k}\right)^{2/5} \left(\frac{1}{2\pi r^2}\right)^{9/10} \left(\frac{2r^3}{GM}\right)^{1/2} \left(\frac{A^9}{B}\right)^{1/10} \left(\frac{\bar{\kappa}}{ac}\right)^{-1/10} \dot{M}^{4/5} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{9/10} \quad (4.66)$$

Hemos resuelto las ecuaciones de la estructura del disco en la región externa, es decir, donde la presión del disco está dominada por la presión de materia y la opacidad es dominada por la opacidad libre-libre, al hacerlo encontramos que la profundidad óptica de la radiación con respecto de los procesos libre-libre es mayor que 1. Esto implica que esta región del disco está radiando como cuerpo negro. Por otro lado, las ecuaciones de estructura del disco indican que el flujo de radiación está dado por la ecuación (4.48), entonces podemos introducir para esta región del disco una temperatura superficial característica, dada por:

$$F(r) = \frac{acT^4}{4}$$



con  $a = 7.56 \times 10^{15} \text{ erg cm}^3 \text{ deg}^{-4}$ , comparando esta ecuación con la ecuación (4.48)

tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{acT^4}{4} &= \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_I}{r} \right)^{1/2} \right] \\ &\simeq \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \quad r \gg r_I \end{aligned} \quad (4.67)$$

entonces para la región externa del disco,  $r \gg r_I$ , la temperatura característica está dada por:

$$T = \left( \frac{3}{2\pi} \frac{\dot{M}}{ac} \frac{GM}{r^3} \right)^{1/4} \quad (4.68)$$

para analizar esta fórmula la aplicaremos en un sistema binario, donde utilizaremos las siguientes unidades.

$$\begin{aligned} M &= \left( \frac{M}{M_\odot} \right) M_\odot \\ r &= \frac{r}{\left( \frac{2MG}{c^2} \right)} \left( \frac{2MG}{c^2} \right) = \left( \frac{2GM_\odot}{c^2} \right) \left( \frac{r}{r_s} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \\ \dot{M} &= \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right) \dot{M}_{17} \end{aligned}$$

entonces en estas unidades la ecuación (4.68) queda:

$$\begin{aligned} T &= \left[ \frac{3}{2\pi} \frac{1}{ac} \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right) \dot{M}_{17} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) GM_\odot \left( \frac{2GM_\odot}{c^2} \right)^{-3} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-3} \right]^{1/4} \\ T &= \left[ \frac{3}{2\pi} \frac{1}{ac} \dot{M}_{17} GM_\odot \left( \frac{2GM_\odot}{c^2} \right)^{-3} \right]^{1/4} \left[ \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3} \right]^{1/4} \\ T &= \left[ \frac{3}{16\pi} \frac{1}{a} \dot{M}_{17} c^5 \left( \frac{1}{GM_\odot} \right)^2 \right]^{1/4} \left[ \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (4.69)$$

resolveremos la ecuación anterior con:

$$\dot{M}_{17} = 10^{17} \text{ gr s}^{-1} \quad (4.70)$$

$$\dot{M}_{\odot} = 2.33 \times 10^{33} \text{ gr} \quad (4.71)$$

entonces:

$$\begin{aligned} T = & \left( \frac{3}{16\pi} \right)^{1/4} (7.56 \times 10^{15} \text{ erg cm}^3 \text{ deg}^{-4})^{-1/4} * \\ & * (10^{17} \text{ gr s}^{-1})^{1/4} (1 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1})^{5/4} (6.67 \times 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ s}^{-2})^{-2/4} * \\ & * (2.33 \times 10^{33} \text{ gr})^{-2/4} \times \left[ \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3} \right]^{1/4} \end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} T = & 3.2686 \times 10^{-5/4} (10^{15} \times 10^{17} \times 10^{50} \times 10^{14} \times 10^{-66})^{1/4} * \\ & * (\text{erg cm}^3 \text{ deg}^{-4} \text{ gr}^{-1} \text{ s cm}^{-5} \text{ s}^5 \text{ cm}^6 \text{ gr}^{-2} \text{ s}^{-4} \text{ gr}^2)^{-1/4} * \\ & * \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right)^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3/4} \end{aligned}$$

entonces tenemos la temperatura superficial del disco es:

$$T_s \approx (5 \times 10^7 \text{ K}) \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{17}} \right)^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-3/4} \quad (4.72)$$

Hasta este punto hemos examinado tanto la estructura radial como la estructura vertical del disco de acreción en el régimen donde la presión del gas domina la presión de radiación y la opacidad es dominada por la absorción libre-libre. En principio podemos continuar examinando la estructura vertical del disco, posiblemente incluya una región donde la presión de radiación es mayor que la presión del gas y la dispersión de electrones domina la absorción libre-libre. Aunque, básicamente es una simple repetición del análisis presentados aquí y resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, en esta tesis no presentaremos este desarrollo, porque no analizaremos esa parte del

espectro. Para ver las formas finales de la región interna del disco y al mismo tiempo, otras propiedades por ejemplo el radio  $r$  al que domina la presión de radiación, el espesor óptico, etc. el lector puede referirse a [17,19].

#### 4.10 Espectro del Disco

Como hemos visto, la parte del disco que emite como cuerpo negro tiene una temperatura característica  $T_s$  dada por (4.72) que es función del radio, es decir,  $T_s = T_s(r)$ , donde  $r_I < r < r_D$ . Por construcción cada anillo del disco emite un espectro característico de cuerpo negro a una temperatura característica  $T_s(r)$ , es decir la intensidad  $I_\nu$  está dada por:

$$I_\nu = B_\nu [T(r)] = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT(r)} - 1)} (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}), \quad r_I < r < r_D. \quad (4.73)$$

Ahora estamos interesados en saber que tipo de espectro esperamos obtener utilizando aparatos (en la tierra) que están a una distancia  $D$  y que la normal del plano del disco hace un ángulo  $i$  con la línea de observación. El flujo emitido a la frecuencia  $\nu$  del disco está dado por [20]:

$$\begin{aligned} F_\nu &= \frac{2\pi \cos i}{D^2} \int_{r_I}^{r_D} I_\nu r dr \\ &= \frac{4\pi h \nu^3 \cos i}{c^2 D^2} \int_{r_I}^{r_D} \frac{r}{e^{h\nu/kT(r)} - 1} dr \end{aligned} \quad (4.74)$$

De la fórmula (4.74) podemos graficar el espectro característico del disco que es mostrado en la figura (4.1).

Esta gráfica la podemos deducir fácilmente de la ecuación (4.74), para ello consideremos que  $\nu \ll kT(r_D)/h$  esto implica que  $F_\nu \propto \nu^2$  y para  $\nu$  tal que  $kT(r_D)/h \ll$

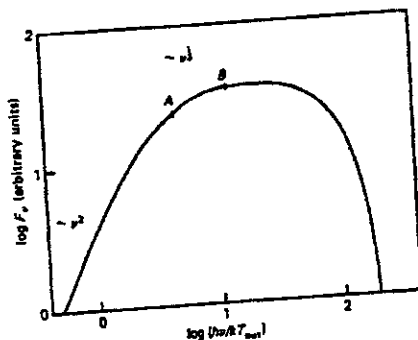


Figura 4.4 El espectro continuo  $F_\nu$  de un disco de acreción ópticamente denso radiando localmente como cuerpo negro.

$\nu \ll kT(r_I)/h$  obtenemos que:

$$F_\nu \propto \nu^{1/3} \int_0^\infty \frac{x^{5/3}}{e^x - 1} dx \propto \nu^{1/3}$$

donde  $x = h\nu/kT(r) \simeq (h\nu/kT_I) (r/r_I)^{3/4}$  [20].

Hasta este análisis hemos supuesto por simplicidad que todos los anillos del disco de  $r_I$  hasta  $r_D$  están emitiendo como cuerpos negros, con una temperatura característica dada por (4.72). Para cálculos más detallados la parte interior del disco no emite como cuerpo negro. Esta región del disco emite como un cuerpo negro modificado. El lector puede tener más información en [17,19].

En esta sección solamente presentaremos el espectro total obtenido cuando se toma en cuenta que la parte interior del disco no emite como cuerpo negro (figura (4.5)). Como vemos en la figura (4.5) a parte del espectro de cuerpo negro existe tam-

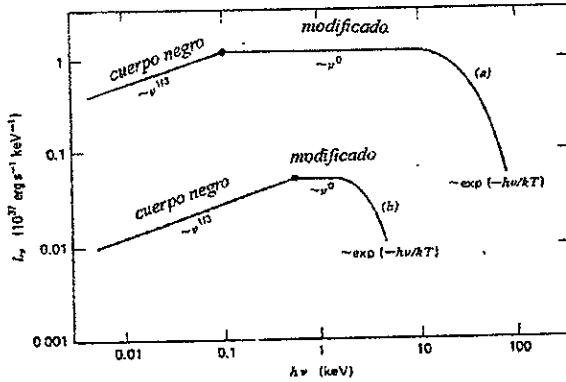


Figura 4.5 Gráfica del espectro de potencias emitido por dos modelos de disco, calculados por Shakura y Sunayev (1973) sin tomar en cuenta las correcciones relativistas o la captura de radiación por el hoyo negro. En ambos modelos el hoyo se supone sin rotación, así el borde interior del disco en  $r_I = 6M$ . El modelo (a) corresponde a  $\alpha \sim 10^{-3}$ ,  $M = M_\odot$ ,  $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot \text{ años}^{-1}$ ,  $L \simeq L_{Edd} \simeq 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$ ; el modelo (b) corresponde a  $\alpha \sim 10^{-2} - 1$ ,  $M = M_\odot$ ,  $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot \text{ años}^{-1}$ ,  $L \simeq 10^{36} \text{ erg s}^{-1}$ . La porción de espectro marcada como cuerpo negro es generada por la región externa del disco, la región fría del disco, donde la dispersión de electrones no es importante. La región marcada con modificado es generada por la región interna del disco, donde la dispersión de electrones es la fuente dominante de la opacidad. La temperatura de la cola exponencial es la temperatura superficial del borde interior del disco. Ver referencias [1,17,19].

bién un espectro característico de la ley de potencias, que se extiende desde energías alrededor de  $1\text{KeV}$  hasta  $10\text{KeV}$ . Después el espectro exhibe un corte exponencial.

Pero ¿Qué podemos concluir del espectro de la figura (1.5) y en general de los discos de acreción que presentamos hasta el momento? Una conclusión clara es que, aún el modelo más sencillo de los discos de acreción obtenemos un espectro con un pico en el rango  $\text{KeV}$ . Los físicos y astrofísicos no tienen dudas en cuanto a que la acreción es el mecanismo responsable para la generación de los rayos-X (ver por ejemplo comentarios en la referencia [11]).

## Capítulo 5

# CONFRONTACIÓN DE LA TEORÍA CON LAS OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Esta tesis comienza con una pregunta muy sencilla ¿Cómo podemos detectar hoyos negros? En el capítulo primero vimos como la teoría de la relatividad general de Einstein describe a la fuerza de gravitación. En el capítulo segundo presentamos los resultados más recientes de la teoría de la evolución estelar, haciendo énfasis en la muerte de las estrellas. De igual forma, presentamos algunos resultados numéricos que implican que el último estado evolutivo de las estrellas masivas pueden ser los hoyos negros. Igualmente, establecimos la manera en que la relatividad general describe a los hoyos negros y mencionamos sus propiedades básicas. En los dos últimos capítulos analizamos las herramientas teóricas que utilizan los científicos para probar la existencia de los hoyos negros. También presentamos los datos observacionales más recientes de las masas de las estrellas de neutrones y de los candidatos a hoyos negros (en las tablas 3.1, 3.2 y 3.3). Estos resultados dan fuerte evidencia de los hoyos negros como miembros de sistemas binarios de rayos-X. Desafortunadamente,

como vimos en las secciones 3.1 y 3.2 el criterio de masa por sí sólo no puede probar definitivamente la existencia de los hoyos negros. Pero el fenómeno de acreción (en esta tesis sólo presentamos las ideas básicas) tiene la potencia para concluir definitivamente esta existencia. Con referencia en la figura (3.2), en este momento, es decir, abril de 1998, los científicos creen que la ley de potencias extendida que vemos únicamente en los candidatos a hoyos negros es la prueba definitiva de su existencia. Desafortunadamente, como vimos con detalle ninguna de las predicciones de la acreción esférica, ni de la acreción de los  $\alpha$ -discos pueden explicar el espectro que indica la figura (3.2). Aunque de esto no podemos concluir que la acreción no puede explicar este espectro, podemos concluir definitivamente que los modelos de acreción sencillos que presentamos en este trabajo no son capaces de explicarlo. En general se tienen la creencia de que aunque el fenómeno de acreción es válido, los modelos de acreción no son exactamente correctos. Para ver esto, en la figura (5.1), (5.2) y (5.3) presentamos las últimas predicciones de una evolución de la idea de los  $\alpha$ -discos de acreción. El nuevo modelo de acreción se conoce como ADAF (advection dominate accretion flows) [21]. Aunque no presentaremos un análisis detallado de estos modelos de acreción ADAF, para nuestros fines es suficiente indicar que en estos modelos la energía generada por el tensor viscoso no es radiada completamente, sino que parte de ella es advectada al hoyo negro. Esta condición difiere de la que impusimos para los modelos  $\alpha$ -discos de acreción donde el calor generado por la viscosidad es radiado totalmente (exactamente después de la ecuación (4.21)). Esta diferencia de los modelos ADAF



y  $\alpha$ -discos es muy significativa. Cuando consideramos todos los detalles del material acregado en un modelo ADAF, obtenemos los espectros mostrados en las figuras (5.1), (5.2) y (5.3). En estas figuras se muestran las predicciones de estos dos modelos comparandolas con los datos observacionales. Como podemos ver de dichas figuras las predicciones de los modelos ADAF están de acuerdo con las observaciones. Sin embargo, todavía no podemos concluir que los modelos ADAF prueban la existencia de hoyos negros. Las predicciones de estos modelos están de acuerdo con los datos observacionales solamente en sistemas es estados "inactivos también llamados apagados o bajos". Estos estados se caracterizan por una luminosidad en la banda de rayos-X con valores  $L \simeq 10^{30} \text{erg/s}$  a  $L \simeq 10^{32} \text{erg/s}$ .

En este momento, todavía no es claro si las predicciones de los modelos ADAF están de acuerdo con observaciones de fuentes que se encuentren en estados altos o ultra altos [22]. No obstante, para los fines de esta tesis creemos que el lector está convencido que: a) De las observaciones y la teoría tenemos evidencias muy fuertes de la existencia de los hoyos negros en este universo; b) Aunque, en este momento no hemos probado que los hoyos negros existan, es claro que el criterio de masa y el fenómeno de acreción serán los ingredientes básicos para finalmente probar la existencia de los hoyos negros.

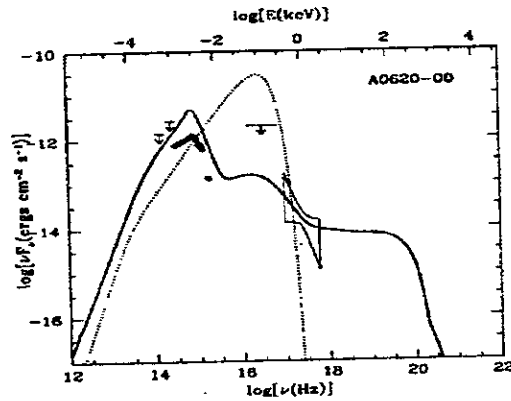


Figura 5.1 Espectro de un modelo ADAF de A0620-00 (línea sólida) a la tasa de acreción  $\dot{M} = 4 \times 10^{-4}$ , comparado con los datos observacionales. La línea punteada muestra el espectro de un disco de acreción delgado a la tasa de acreción  $\dot{M} = 10^{-5}$ . Como vemos las predicciones de los discos delgados no concuerdan con las observaciones.

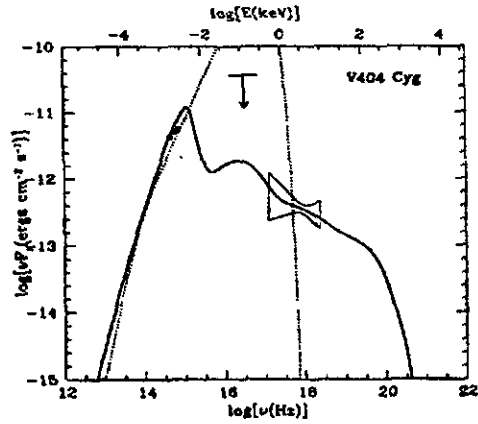


Figura 5.2 Espectro de un modelo ADAF de V404 Cyg (línea sólida) a la tasa de acreción  $\dot{M} = 2 \times 10^{-3}$ , comparada con datos observacionales. La línea punteada muestra el espectro de un modelo de disco de acreción delgado a  $\dot{M} = 1.8 \times 10^{-3}$ .

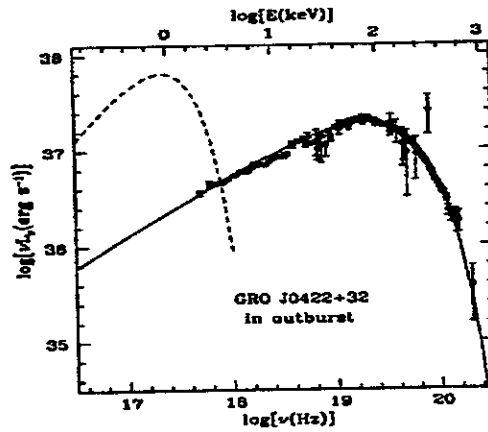


Figura 5.3 Modelo ADAF de J0422+32 (línea sólida) en el llamado estado bajo, comparado con datos observacionales (puntos y líneas). La línea punteada muestra un modelo de disco de acreción delgado a la misma tasa de acreción  $\dot{M} = 0.1$ .

## REFERENCIAS

1. S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky: Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, The physics of compact objects. (J. Wiley & Sons, (1983)).
2. Para una introducción y un resumen histórico ver por ejemplo M. Born: Einstein's Theory of Relativity. (Dover, (1962)).
3. Para una introducción de la teoría de la relatividad especial ver por ejemplo W. Rind: Essential Relativity (Springer Verlag, (1977)).
4. R. M. Wald: General Relativity. (Chic. Un. Press (1981)). ...
5. Para resultados numéricos completos ver las siguientes dos referencias, pero para una introducción de los resultados finales ver [1,4].
6. B. Datta, Fund. Cosmic. Phys. 12, 151, (1988)
7. W.D. Arnet y R. L. Bowers, ApJS 33, 415, (1977)
8. C. J. Heisen y S.D. Kawaler: Stellar Interiors. Physical Principles, Structure and Evolution (A&A Lib. Springer Verlag, (1994))
9. Para una descripción más detallada ver: S. E. Woosley y T.A. Weaver, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 24, 205-53, (1986)

10. Para una explicación sencilla ver el artículo: H. A. Bethe y G. Brown: Explosión de supernova, *Investigación y Ciencia*, 157, (1989).
11. R. Penrose, *Riv. Nuovo Cimento*, 1, 252, (1969)
12. Para un repaso de estos teoremas y su significado en la astrofísica de hoyos negros ver: T. Zannias, in "Observational evidence for black holes in the universe" (Edit. S. Chakrabarti Kluwer publication, in press (1998)).
13. J. M. Bardeen, W. H. Press and S.A Teukolsky, *Astrophys. J.* 178, 374 (1972)
14. J. Van Paradijs, *astro-ph/9802177*
15. Ya. B. Zel'dovich, *Sov. Phys.-Dokl.* 9, 195, (1964).
16. E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* 140, 796, (1964)
17. N. I. Shakura, R. A. Sunayev, *Astron. Astrophys.*, 24, 337, (1973).
18. R. D. Blandford and K. S. Thorne in *Einstein Centenary Volume* (EDs. S. W. Hawking and W. Israel CUP (1979))
19. I. D. Novikov and K. S. Thorne in *Black holes* (Eds. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, (1973)).
20. J. Frank, A. King and D. Raine: *Accretion Power in Astrophysics*, 2nd. Ed. (CUP (1992))
21. Para una introducción de estos modelos de acreción y más referencias ver: K. Menov, E. Quataert and R. Narayan in "The proceeding of the Eighth Marcel Grossmann meeting on General Relativity" (Ed. T. Piran World Scient. in press, (1998)).
22. Para otros modelos de acreción, alternativos de ADAF y  $\alpha$ -discos, ver: S. K. Cha-

- krabarti, Phys. Rep., 266, 229 (1996).
23. Hacyan, S., Gen. Rel. Grav., 13, 57 (1981).
24. Michel, F.C., Astrophys. Space Sci., 15, 153 (1972).
25. Carter, B., Gibbons, G. W., Lin, D. N. C., and Perry, M. J. Astron. Astrophys., 52, 247 (1976).

## APENDICE A

A continuación se presenta el programa utilizado para obtener las gráficas presentadas en la sección de Gráficas del Capítulo tercero. El programa está hecho en MAPLE V Release 4 .

```
> restart:
```

```
> with(plots):
```

Primero hacemos un programa para poder graficar la velocidad como función de  $t$  y dejando un parámetro libre.

```
> graf:=proc(expr,ecvarin,ecvardep,ecpar,n) local
  t,t1,t2,x,x1,x2,a,a1,a2,k,c,F,P,lista;
  t:=lhs(ecvarin);
  t1:=lhs(rhs(ecvarin));
  t2:=rhs(rhs(ecvarin));
  x:=lhs(ecvardep);
  x1:=lhs(rhs(ecvardep));
  x2:=rhs(rhs(ecvardep));
  a:=lhs(ecpar);
  a1:=lhs(rhs(ecpar));
  a2:=rhs(rhs(ecpar));
  for k from 0 to n-1 do
    c.k:=a1+(a2-a1)*k/(n-1);
    F.k:=(eval@subs)(a=c.k,expr);
    P.k:=plots[implicitplot](F.k, t=t1..t2, x=x1..x2, numpoints=200);
  od;
  lista:=[seq(P.k, k=0..n-1)];
  plots[display](lista);
end;
```

```
graf:=proc(expr,ecvarin,ecvardep,ecpar,n)
```

```
local t,t1,t2,x,x1,x2,a,a1,a2,k,c,F,P,lista;
```

```
  t:=lhs(ecvarin);
```

```
  t1:=lhs(rhs(ecvarin));
```

```
  t2:=rhs(rhs(ecvarin));
```

```
  x:=lhs(ecvardep);
```

```
  x1:=lhs(rhs(ecvardep));
```

```
  x2:=rhs(rhs(ecvardep));
```

```
  a:=lhs(ecpar);
```

```
  a1:=lhs(rhs(ecpar));
```

```
  a2:=rhs(rhs(ecpar));
```

```
  for k from 0 to n-1 do
```

```
    c.k:=a1+(a2-a1)*k/(n-1);
```

```
    F.k:=(eval@subs)(a=c.k,expr);
```



$P.k := \text{plots}\{\text{implicitplot}\}(F.k, t = t1 \dots t2, x = x1 \dots x2, \text{numpoints} = 200)$

od;

$\text{lista} := [\text{seq}(P.k, k = 0 \dots n - 1)];$

$\text{plots}[\text{display}](\text{lista})$

end

A continuación introducimos los coeficientes métricos:

>  $f := (r) \rightarrow (1 - 1/r);$

$$f := r \rightarrow 1 - \frac{1}{r}$$

>  $g := (r) \rightarrow r^2;$

$$g := r \rightarrow r^2$$

Como es más conveniente trabajamos con la 3-velocidad  $v$ , por ello realizamos el siguiente cambio de variable dado por la ecuación (3.77).

>  $u := (r, v) \rightarrow f(r)^{1/2} * v / (1 - v^2)^{1/2};$

$$u := (r, v) \rightarrow \frac{\sqrt{f(r)} v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Finalmente, reescribimos la ecuación de conservación (3.119) con la tasa de acreción  $M_p$  y las condiciones a infinito  $M_2$ , así:

>  $H := (M_p, \Gamma, M_2, r, v),$

$M_2, r, v) \rightarrow (1 + M_p / ((u(r, v) * g(r))^{(\Gamma - 1)}))^{2 * (f(r) + u(r, v)^2) - M_2};$

$$H := (M_p, \Gamma, M_2, r, v) \rightarrow \left(1 + \frac{M_p}{(u(r, v) g(r))^{(\Gamma - 1)}}\right)^2 (f(r) + u(r, v)^2) - M_2$$

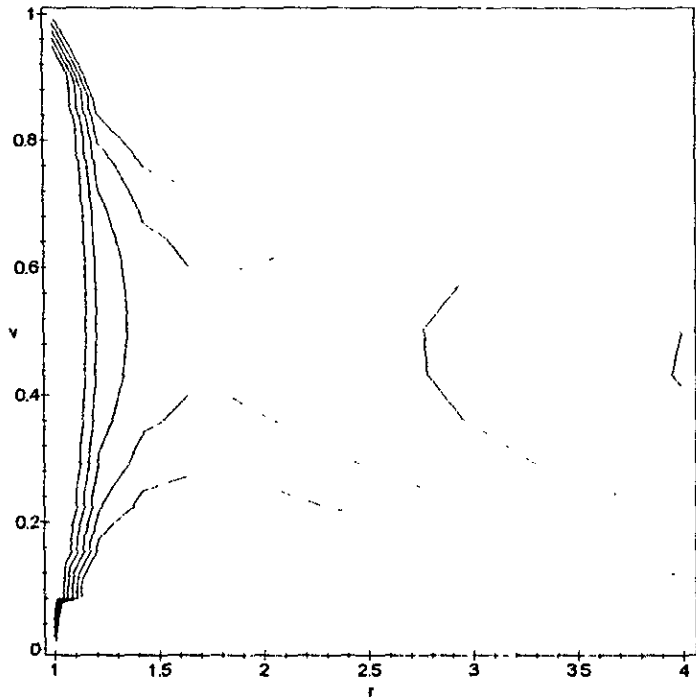
Entonces encontramos una solución

>  $H11 := (r, v, M_2) \rightarrow H(3, 4/3, M_2, r, v);$

$$H11 := (r, v, M_2) \rightarrow H\left(3, \frac{4}{3}, M_2, r, v\right)$$

Graficamos todas las soluciones para este caso, considerando  $\Gamma = 2M/r_{\alpha}$ , donde  $r_{\alpha}$  es el radio de Schwarzschild, por ello el horizonte en nuestra notación se encuentra en  $r=1$ .

>  $\text{graf}(H11(r, v, M_2), r = 1.01 \dots 4, v = 0.01 \dots 0.99, M_2 = 5 \dots 10, 5);$



Esta gráfica muestra todas las soluciones, para esta tasa de acreción, es decir,  $M_p=3$ . En la siguiente gráfica vemos que el punto sónico existe para el valor único de  $M_2=8.5085$ .

```
> implicitplot(H11(r,v,8.5085), r=1.73..1.81, v=0.01..0.99);
```