

37  
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLAN

"CONTROL BASADO EN PASIVIDAD DE  
SISTEMAS ELECTROMECHANICOS"

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A:  
ERNESTO DE LOS MARES ESPINOSA OCHOA

ASESOR:  
DR. GERARDO RENE ESPINOSA PEREZ

1998

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEXICO

1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
 UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
 DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES



VERDAD NACIONAL  
 AVANZA DE  
 MEXICO

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
 DIRECTOR DE LA F.E.S.-CUAUTITLAN  
 P R E S E N T E .

U N A M  
 FACULTAD DE ESTUDIOS  
 SUPERIORES - CUAUTITLAN



AT'N: Ing. Jaime de Anda Montañez  
 Jefe del Departamento de Exámenes  
 Profesionales de la F.E.S.-C

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Control Basado en Pasividad de Sistemas Electromecánicos".

que presenta el pasante: Ernesto de los Mares Espinosa Ochoa,  
 con número de cuenta: 8610006-3 para obtener el TITULO de:  
Ingeniero Mecánico Electricista.

Considerando que dicho tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E.  
 "POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo. de México, a 16 de Abril de 1998

PRESIDENTE	<u>Ing. Ubaldo Ramírez Urizar</u>	<u>[Firma]</u>	<u>20/03/98</u>
VOCAL	<u>Dr. Gerardo René Espinosa Pérez</u>	<u>[Firma]</u>	<u>20/02/98</u>
SECRETARIO	<u>Ing. Jorge Buendía Gómez</u>	<u>[Firma]</u>	<u>20/03/98</u>
RIMER SUPLENTE	<u>Ing. Margarita López López</u>	<u>[Firma]</u>	<u>16/04/98</u>
SEGUNDO SUPLENTE	<u>Ing. Juan González Vega</u>	<u>[Firma]</u>	<u>24/FEB/98</u>

A María Esther y Ernesto

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo de la tesis. . . . .	2
1.2	Organización de la tesis. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Ecuaciones Euler-Lagrange</b>	<b>3</b>
2.1	Formulación general . . . . .	3
2.2	Sistemas eléctricos y mecánicos . . . . .	4
2.2.1	Elementos básicos . . . . .	4
2.3	Funciones de energía . . . . .	12
2.3.1	De funciones de energía a variables medibles . . . . .	17
2.4	Sistemas interconectados . . . . .	22
2.4.1	Restricciones Holonómicas . . . . .	27
2.5	Ecuaciones Euler-Lagrange . . . . .	32
2.5.1	Modelado de sistemas eléctricos vía Euler-Lagrange . . . . .	33
2.5.2	Modelado de sistemas mecánicos vía Euler-Lagrange . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Modelado de sistemas electromecánicos</b>	<b>43</b>
3.1	Sistemas electromecánicos . . . . .	43
3.2	Modelado de sistemas electromecánicos vía Euler-Lagrange . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Control de sistemas electromecánicos</b>	<b>54</b>
4.1	Filosofía de diseño . . . . .	54
4.1.1	Preliminares . . . . .	54
4.1.2	Propiedades de los sistemas Euler-Lagrange . . . . .	56
4.1.3	Diseño del Control . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Caso de Estudio: El motor de inducción</b>	<b>72</b>
5.1	Modelo del motor de inducción de $3\phi$ . . . . .	73

5.2	Modelo equivalente de $2\phi$ . . . . .	77
5.2.1	Transformación de Blondel . . . . .	78
5.3	Propiedades . . . . .	81
5.4	Control del motor de inducción . . . . .	85
5.4.1	Etapa 1: Control de corrientes . . . . .	85
5.4.2	Etapa 2: Control de la señal de acoplo . . . . .	91
5.4.3	Etapa 3: Control de la posición o velocidad mecánica . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Resultados de simulación</b>	<b>93</b>
6.1	Modelo . . . . .	93
6.2	Experimento . . . . .	93
6.3	Resultados . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Expresión cuadrática de una matriz antisimétrica</b>	<b>101</b>

# Agradecimiento

Muchas persona me han ayudado, de una u otra forma, a concluir este trabajo, y a ellas debo dar las gracias. En particular a los académicos de la Coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería por abrirme las puertas y permitirme trabajar a mis anchas. A la Dra. Cristina Verde, coordinadora de esta sección, por haberme soportado durante mi ya legendaria estancia en este espacio y por todo el apoyo que me ha brindado. Al Dr. Jaime Moreno, al Dr. Luis Alvarez, a Rolando Carrera, a Esaú Vicente y a Laura Mayanín junto con los ya mencionados por brindarme una sonrisa todas las mañanas de cada día.

Agradezco de manera especial al Dr. Gerardo Espinosa el haberme aceptado como tesista en uno de sus múltiples proyectos y quien sin su oportuna ayuda este trabajo de tesis no hubiera sido posible. Por haber desarrollado, gracias a mi presencia, el concepto de "paciencia infinita" especialmente cuando mi comprensión evidenciaba la existencia de sólo tres neuronas, sabiéndome orientar en tal situación. Por la gran amistad que siento por él y de él, muchas gracias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a los profesores de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, por brindarme los conocimientos que antecedieron a este trabajo. A los profesores Amado León, Gerardo Espinosa, Jorge Buendía y Nicolás Calva, cuya experiencia me fue valiosa en cada una de las etapas de mis estudios. Así mismo quiero agradecer al Ing. Juan González, todo el apoyo que me ha proporcionado para que esta tesis llegue a su termino. Al profesor Alfredo Andrade por haberme enseñado *el camino* que ha guiado mis pasos. Estoy eternamente agradecido.

De alguna manera quiero agradecer a mi dislexia por todo el trabajo extra al teclear este texto. De igual forma a todas aquellas personas que en algún momento han supuesto que la investigación básica en México sólo es perdida de tiempo y todo aquel que se dedica al negocio de investigador sólo consume recursos, gracias, porque me han servido de una valiosa referencia acerca de lo que no quiero ser...

Por último, a mis estimados "maestros", Paul, Erick, Fausto, Edmundo, a mis cuates Ulises, Javier, Héctor "Popo", Liliana, a mis hermanos Alejandra, Lorena, Gerardo y Horacio y a los siempre entrañables Waby, David e Isaac, a todos ellos gracias por compartir conmigo lo que son y lo que parecen ser. Y a Calvin...

Muchas gracias, de nada.

# Control basado en pasividad de sistemas electromecánicos

Ernesto de los Mares Espinoza-Ochoa

Mayo de 1998



# Capítulo 1

## Introducción

Partiendo del hecho de que en la actualidad la industria requiere de mejores desempeños que los proporcionados por los tradicionales sistemas de control, el desarrollo de métodos más eficientes es prioritario. Así mismo se requieren hacer consideraciones explícitas de las no linealidades del sistema e incluirlas dentro de la etapa de diseño del control, además de requerir modelos matemáticos más completos, los cuales no desprecien la naturaleza del sistema.

Tal problema ha motivado un gran avance teórico con el propósito de desarrollar estrategias de control capaces de resolver este problema. Desafortunadamente la brecha entra la teoría y la práctica aún persiste, provocando que muchos de los métodos desarrollados no tengan una aplicación práctica.

Un método que ha logrado, de alguna manera, sortear exitosamente esta brecha, es el conocido por *control por moldeo de energía*, cuya principal característica es explotar las propiedades físicas del sistema para el diseño del control. Su idea fundamental consiste en moldear la energía natural del sistema e inyectar amortiguamiento de tal forma que el objetivo de control se logre.

Ya que éste método matemático se encuentra orientado hacia la ingeniería, es necesario considerar de forma fundamental que la filosofía empleada para resolver el problema anteriormente descrito, se encuentra restringida a un subconjunto de sistemas con *naturaleza física* descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, caracterizando a esta clase de subsistema de tal forma que se esté en la capacidad de cubrir la mayor cantidad posible de sistemas físicos con un sólo método. Se considera particularmente a los sistemas descritos a través de las ecuaciones Euler-Lagrange.

La aplicación del control *control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento* ha resuelto algunos problemas en aplicaciones que van desde los sistemas puramente mecánicos hasta los puramente eléctricos, pasando por aquellos que poseen una estructura electromecánica.

## 1.1 Objetivo de la tesis.

El objetivo que persigue esta tesis es el de mostrar como la inclusión de las propiedades físicas del sistema en el diseño del control proporciona controles físicamente interpretables, capaces de resolver los actuales problemas industriales. Se muestra como la filosofía de control basado en pasividad aplicada a sistemas electromecánicos funciona para sistemas que actualmente se emplean en la práctica, para lo cual se seleccionó el motor de inducción (MI) como el ejemplo más interesante debido a la tendencia industrial en automatización con máquinas eléctricas de utilizar este tipo de motores en lugar de los tradicionalmente considerados de corriente directa (CD).

## 1.2 Organización de la tesis.

El capítulo 2 describe la obtención de las ecuaciones Euler-Lagrange a partir de consideraciones de potencia y energía, se desarrollan ejemplos para ilustrar las ventajas de este método. En el capítulo 3 se presentan la forma en la cual se desarrollan los modelos matemáticos de los sistemas electromecánicos que son objeto de estudio en esta tesis. El capítulo 4 presenta el método de control por moldeo de energía de una forma general, así mismo las propiedades que exhiben los sistemas Euler-Lagrange. El capítulo 5 presenta el caso de estudio seleccionado, el motor de inducción, su modelo y el diseño del control. Adicionalmente se presentan los resultados de simulación digital del MI. El último capítulo expone las ventajas y el desarrollo futuro, tanto teórico como práctico, que presenta el método.

# Capítulo 2

## Ecuaciones Euler-Lagrange

El objetivo de este capítulo es presentar a las ecuaciones de Euler-Lagrange como un método de modelado que es aplicable tanto a sistemas eléctricos como mecánicos y por lo tanto a electromecánicos. La utilidad del método se ilustra con algunos ejemplos. El desarrollo presentado está basado en [Meis66].

### 2.1 Formulación general

El procedimiento general para determinar el comportamiento dinámico de un sistema como función del tiempo, involucra resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas conocidas como *ecuaciones de equilibrio*. Estas ecuaciones determinan la dinámica del sistema de acuerdo a la interconexión de elementos en el sistema. Para un sistema eléctrico tales ecuaciones pueden obtenerse a través de las leyes de Kirchhoff de corrientes o voltajes, para un sistema mecánico la formulación de las ecuaciones de equilibrio se realiza a través de la segunda ley de Newton, o por el principio de D'Alembert. En el caso de que el sistema a modelar sea de naturaleza electromecánica, la obtención de la estructura matemática que describe al sistema puede complicarse, aunque cada uno de los subsistemas que lo componen puede formularse a través de los principios y leyes adecuados a su naturaleza, mientras que el subsistema que corresponde a la interacción electromecánica puede modelarse realizando consideraciones de conservación de la energía.

Una alternativa que permite realizar este procedimiento pero en un contexto unificado son las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). La formulación

de las ecuaciones EL parte de la premisa que cualquier sistema físico, independiente de su naturaleza, es un transformador de energía. Por lo tanto, su comportamiento dinámico puede obtenerse a partir de sus características energéticas. La característica principal del método es obtener el comportamiento dinámico de un sistema físico a partir de su información energética. El requisito exigido es que esta información energética se encuentre en función del mínimo número de variables necesarias para describir de manera completa su comportamiento dinámico. Desde una perspectiva más técnica, el desarrollo de las ecuaciones EL tienen como punto de partida la descripción de los elementos interconectados del sistema, a través de sus relaciones constitutivas. A partir de éstas se expresa la función de potencia para el elemento, y de ésta se obtiene la función de energía asociada al él.

## 2.2 Sistemas eléctricos y mecánicos

Considerando las características generales de las ecuaciones EL, para el modelado de sistemas electromecánicos se identifican primero las propiedades energéticas de estos, posteriormente se determina el número mínimo de coordenadas necesarias para describir su comportamiento dinámico y finalmente se obtiene su modelo dinámico.

Con el fin de caracterizar la clase de sistemas electromecánicos considerados en este trabajo, se parte de la suposición de que cualquier sistema de este tipo está formado por la interconexión de elementos básicos ideales. Estos elementos son: fuentes de voltaje, corriente, fuerza y par, inductancias, capacitores, resistencias, masas, resortes y amortiguadores.

Adicionalmente los modelos propuestos para describir a los sistemas electromecánicos deben estar restringidos a que su expresión esté en función de variables de fácil manipulación. En general estas variables se relacionan con las que son fácilmente medibles.

El propósito es situar el método a un nivel accesible para el ingeniero, para ello empleamos elementos básicos ideales.

### 2.2.1 Elementos básicos

#### Sistemas eléctricos

El capacitor es un buen punto de partida para presentar la formulación EL.

La capacitancia está descrita por la relación diferencial

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.1)$$

donde  $i(t)$  es la corriente,  $v(t)$  el voltaje y  $C$  es la capacitancia. Esta ecuación puede escribirse de la forma

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (2.2)$$

La función que define a la corriente es

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.3)$$

con  $q(t)$  la carga como una función del tiempo. Integrando ésta ecuación, se tiene que

$$q(t) - q(0) = \int_0^t i(t) dt \quad (2.4)$$

Si en esta ecuación se considera que las condiciones iniciales son iguales a cero, la ecuación (2.2) toma la forma

$$v(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (2.5)$$

Desde un punto de vista físico el capacitor tiene la habilidad de almacenar corriente y en este proceso una diferencia de potencial aparece en los extremos del capacitor, por lo tanto se requiere de una expresión que relacione el voltaje a través del dispositivo cuando la carga se acumula. En este caso la carga aparece como una variable fundamental, por lo tanto se selecciona como una de las **coordenadas básicas**. Si se grafica la carga como una función del voltaje, entonces la capacitancia  $C(v)$  es la pendiente de esta curva en cualquier punto, como se muestra en la figura 2.1. Si la curva es una línea recta, entonces la capacitancia es una constante y por lo tanto se tiene un capacitor lineal; si la curva no corresponde a una línea recta, entonces la pendiente cambia como una función de la carga o el voltaje y el elemento es no lineal. La figura 2.1

se conoce como la *curva constitutiva o característica* del elemento que describe completamente el comportamiento de éste.

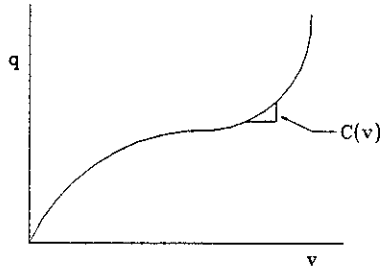


Figura 2.1: Curva característica de un capacitor

La asignación de la variable dependiente o independiente, esta limitada por las variables que se deseen analizar, i.e. si se desea que la variable independiente sea la carga, la relación de capacitancia toma la forma presentada en 2.5

A continuación se describe, partiendo de la inductancia, la segunda coordenada básica, el flujo de enlace. La inductancia está descrita por la ecuación diferencial

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.6)$$

en donde  $L$  corresponde al parámetro del inductor, esta última ecuación define que el voltaje a través del inductor es proporcional a la derivada de la corriente que circula a través de él. Integrando esta ecuación con respecto al tiempo se tiene que

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \quad (2.7)$$

asumiendo que las condiciones iniciales son iguales a cero. En este momento es conveniente mencionar que la derivada del flujo de enlace con respecto al tiempo define el voltaje, es decir

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = v(t)$$

por lo que la expresión (2.7) puede escribirse como

$$i(t) = \frac{1}{L} \lambda(t) \quad (2.8)$$

Una inductancia tiene la habilidad de almacenar voltaje y en este proceso una corriente fluye a través de él. La curva característica de un inductor se presenta en la figura 2.2. La pendiente de esta curva es  $L(i)$ , la inductancia. Similarmente a la curva del capacitor, una línea recta en la gráfica de  $\lambda$  contra  $i$ , es un valor constante para  $L$  y el elemento es lineal, mientras que una curva en esta gráfica describe a un elemento no lineal. La segunda coordenada básica es el *flujo de enlace*.

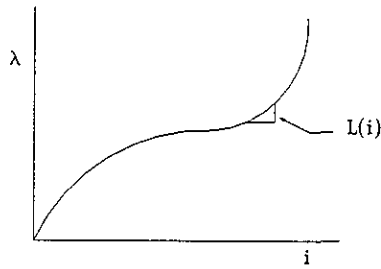


Figura 2.2: Curva característica de un inductor

Dado que todos los sistemas disipan energía, es necesario definir la relación para describir este fenómeno. En este caso el elemento disipador, es decir el elemento que no almacena energía sino sólo la disipa, está modelado por una resistencia eléctrica. La relación que describe el comportamiento de este tipo de elemento es

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (2.9)$$

donde  $i(t)$  es la corriente que circula a través de él,  $v(t)$  es el voltaje en sus terminales y  $R$  es la resistencia definida como  $R = \frac{1}{G}$ , siendo  $G$  la admitancia. En el caso general el valor de  $R$  depende de la corriente o el voltaje, por lo que la curva característica de un resistor es la que se presenta en la figura 2.3

En el caso particular que  $R$  sea constante entonces la curva característica es una recta con pendiente  $R$ , es decir se trata de un resistor lineal.

Es interesante observar que la resistencia está expresada en términos de las primeras derivadas de las variables básicas: corriente (derivada de la carga) y voltaje (derivada del flujo enlace).

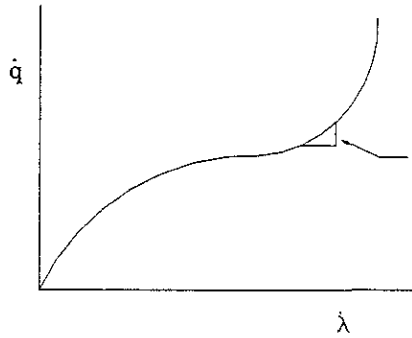


Figura 2.3: Curva característica de un resistor

### Sistemas mecánicos translacionales

Siendo coherentes con la descripción hecha para los sistemas eléctricos, a continuación se describen los elementos básicos para sistemas mecánicos.

Una masa puede describirse por una relación diferencial

$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.10)$$

donde  $f(t)$  es la fuerza que actúa sobre el elemento,  $M$  es la masa y  $v(t)$  es la velocidad lineal. Integrando la ecuación (2.10) se tiene

$$v(t) = \frac{1}{M} \int_0^t f(t) dt \quad (2.11)$$

considerando condiciones iniciales nulas.

El término integral en (2.11) se define como el *momentum*  $p$ , entonces esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{1}{M} (p(t) - p(0)) = \frac{1}{M} \int_0^t f(t) dt \quad (2.12)$$

de donde, reescribiendo la ecuación (2.12) con condiciones iniciales cero, se tiene que

$$v(t) = \frac{1}{M} p(t) \quad (2.13)$$



A diferencia de los elementos introducidos hasta ahora, en el caso de las masa el parámetro  $M$  en general se considera constante, por lo que sólo se habla de masas lineales, las cuales poseen una curva característica como la que se presenta en la figura 2.4.

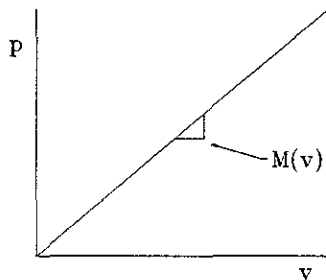


Figura 2.4: Curva característica de una masa

El *momentum* es seleccionado como la primera coordenada básica mecánica. Tomando la primera derivada del *momentum* se obtiene la fuerza aplicada a la masa. Se puede observar que la masa es un almacenador de fuerza.

En lo que se refiere al resorte, este elemento está descrito por una ecuación de la forma

$$x(t) = Kf(t) \quad (2.14)$$

donde  $x(t)$  es el desplazamiento relativo de las terminales del resorte y establece la segunda coordenada básica para los sistema mecánicos. Sin embargo, se sabe que la velocidad en las terminales se define como

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

por lo que la ecuación (2.14) se puede escribir como

$$f(t) = \frac{1}{K} \int_0^t v(t)dt \quad (2.15)$$

donde la integral en la ecuación (2.15) es simplemente la diferencia de posición entre la parte superior y la inferior del resorte, esto es

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t)dt \quad (2.16)$$

En general la ecuación (2.14) define una curva característica como la mostrada en la figura 2.5. Por otro lado, de la ecuación (2.15) se puede observar que el resorte es un almacenador de velocidad. Al igual que en los casos anteriores, si  $K$  es constante se dice entonces que el resorte es lineal.

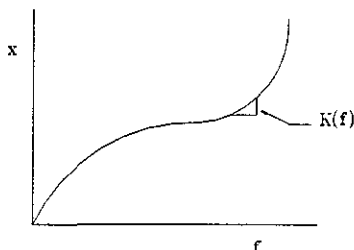


Figura 2.5: Curva característica de un resorte

Hasta este punto se ha descrito que las coordenadas fundamentales para sistemas mecánicos son el *momentum* y la posición, y que la primera derivada de estas coordenadas son fuerza y velocidad respectivamente. En lo que se refiere a los elementos de disipación o amortiguamiento, se emplean estas primeras derivadas para caracterizarlos, similarmente a la resistencia eléctrica.

La relación que describe un amortiguador está dada por

$$f(t) = Dv(t) \quad (2.17)$$

donde  $D$  se conoce como coeficiente de amortiguamiento. De manera general, este parámetro depende de la fuerza o de la velocidad y al igual que en los elementos anteriores si es constante entonces define un amortiguador lineal. Es importante notar que, al igual que la resistencia eléctrica, la curva característica de un amortiguador no depende de variables básicas, por lo que se puede concluir que este elemento sólo disipa y no almacena energía.

Para el caso de un sistema mecánico rotacional, existe una similitud en la definición de las coordenadas básicas, el *momentum lineal* es similar del *momentum angular*, la posición angular a la posición lineal, y la fuerza al par.

## Sistemas mecánicos rotacionales

Los elementos básicos rotacionales están definidos de una forma análoga a los traslacionales. Como se mencionó en un párrafo anterior, las coordenadas fundamentales para el movimiento rotacional son el *momentum angular*  $l$  y la *posición angular*  $\theta$ .

El par aplicado a una inercia, para un elemento lineal, relaciona dos variables en la ecuación

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (2.18)$$

donde  $\omega$ , es la velocidad angular,  $T$  es el par aplicado y  $J$  la inercia. Integrando la ecuación (5.32), la velocidad angular está dada por

$$\omega(t) = \frac{1}{J} \int_0^t T(t) dt \quad (2.19)$$

con  $\omega(0)$  tomada como cero. La integral en la ecuación (5.33) está definida como el *momentum angular*, esto es

$$l(t) - l(0) = \int_0^t T(t) dt \quad (2.20)$$

Cuando  $l(0)$  se toma como igual a cero y la ecuación (5.33) es simplemente

$$\omega(t) = \frac{1}{J} l(t)$$

Para un resorte rotacional ideal, la relación constitutiva está dada por

$$T = \frac{1}{K_\theta} \theta \quad (2.21)$$

donde  $K_\theta$  es la constante del resorte.

El amortiguador rotacional, considerando un elemento lineal, está descrito por la relación

$$T = D_\theta \omega$$

donde  $D_\theta$  es el coeficiente rotacional viscoso.

Se ha obtenido, considerando la similitud entre sistemas mecánicos traslacionales y rotacionales, seis variables básicas. Es obvio el hacer notar que sólo las posiciones lineales y angulares, son variables básicas. En el caso de las variables cuyas primeras derivadas se emplean, tales como las corrientes, voltajes, fuerzas, y velocidades, su selección yace en la factibilidad para poder medir estas variables. Es más fácil medir voltaje que flujo de enlace y corriente que carga, y es más sencillo sensar posición que velocidad.

## 2.3 Funciones de energía

A continuación se obtienen las características energéticas de cada uno de los elementos presentados a partir de sus relaciones constitutivas. Posteriormente se presenta la generalización para el caso cuando se cuentan con  $n$  elementos interconectados.

**Sistemas eléctricos.** La potencia eléctrica asociada a un capacitor está dada por

$$P_e(t) = v(t)i(t) \quad (2.22)$$

La energía que fluye dentro de éste elemento se almacena como un campo eléctrico, esto es, un capacitor almacena corriente  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ . El incremento de energía en un tiempo  $dt$  está dado por

$$dW_e(t) = P_e(t)dt = v(t)\frac{dq(t)}{dt}dt \quad (2.23)$$

por lo que la energía almacenada desde un tiempo inicial  $t_0$  a un tiempo posterior  $t$  se obtiene integrando (2.23), lo que resulta en

$$W_e(t) - W_e(t_0) = \int_{t_0}^t v(t)i(t)dt \quad (2.24)$$

la cual se puede escribir, substituyendo  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , como

$$W_e(q) - W_e(q_0) = \int_{q_0}^q v(q)dq$$

Ya que el interés se centra en la energía total que almacena el capacitor, si el tiempo  $t_0$  se selecciona de tal forma que  $q_0 = 0$ , entonces la energía almacenada en el tiempo cero es

$$W_e(t_0) = W_e(q_0) = 0 \quad (2.25)$$

y con esto la ecuación (2.25) se reduce a

$$W_e(q) = \int_0^q v(q) dq \quad (2.26)$$

En éste momento se está en posición de establecer la relación que existe entre esta expresión que caracteriza a la energía almacenada por el elemento y la relación constitutiva que determina su comportamiento dinámico.

Si se observa la figura 2.1, que define la relación constitutiva del capacitor, se podrá notar que el término del lado derecho de la ecuación (2.26) no es otra cosa más que el área bajo la curva definida por la función (2.5). Es decir, la energía almacenada por este elemento puede ser obtenida de manera directa de la misma curva constitutiva del capacitor. Este hecho por supuesto no es sorprendente, sin embargo nos permite obtener información adicional del elemento. Específicamente, si se considera ahora como variable independiente al voltaje en la función definida por (2.5), se puede ver que una segunda función de energía puede ser obtenida.

$$W_e'(v) = \int_0^v q(v) dv \quad (2.27)$$

donde la función que determina el área sobre la curva y se identifica con la notación primada se conoce como la *coenergía* almacenada en el capacitor.

Aunque en realidad no existe una interpretación física para las funciones de coenergía, la utilidad de estas se verá clara cuando posteriormente se utilicen como herramientas de modelado, lo cual se lleva a cabo en secciones posteriores. Baste por el momento observar el hecho de que a partir de la curva constitutiva del capacitor es posible obtener sus características energéticas por medio de las funciones de energía y coenergía.

Para el caso del inductor la situación es muy similar, se parte de la relación

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}$$

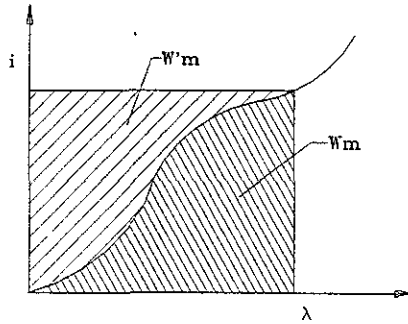


Figura 2.6: Representación gráfica de las funciones de energía y co-energía

ya que se considera que en la inductancia se almacena voltaje, entonces el campo magnético almacenado a través del tiempo es

$$dW_m(t) = i(t) \frac{d\lambda(t)}{dt} dt$$

Si la energía almacenada en el tiempo  $t_0$  es cero, entonces la energía almacenada es

$$W_m(t) = \int_0^t i(t) \frac{d\lambda(t)}{dt} dt$$

la cual puede reducirse a

$$W_m(\lambda) = \int_0^\lambda i(\lambda) d\lambda \quad (2.28)$$

Esta expresión corresponde a la energía magnética almacenada. La función de coenergía magnética está dada por

$$W'_m(i) = \int_0^i \lambda(i) di \quad (2.29)$$

Al igual que en el caso del capacitor, el hecho importante que se desprende de la estructura de las funciones (2.28) y (2.29) es que estas pueden ser obtenidas directamente de la curva constitutiva del inductor, como se observa en la figura 2.6, como el área bajo y sobre la curva definida por la función (2.8)

Para el caso de la resistencia y considerando su función constitutiva dada por la ecuación (2.9), un procedimiento similar al del capacitor e inductor puede ser seguido. En este caso el área bajo la curva está dada por

$$\mathcal{F}_e(i) = \int_0^i v(i) di$$

la cual determina la energía disipada por el elemento, ya que al tratarse de un elemento disipador ideal no almacena energía. Esta función se conoce como función de disipación de Rayleigh y de manera análoga se puede definir la cofunción de disipación como

$$\mathcal{F}'_e(v) = \int_0^v i(v) dv$$

cuya interpretación gráfica coincide con el área sobre la curva constitutiva del elemento.

**Sistemas mecánicos** Para la obtención de las funciones de energía de un sistema mecánico translacional se realizan consideraciones similares a las realizadas para los elementos eléctricos.

Considerando que una masa es un almacenador de energía cinética (fuerza) y la fuerza se define como  $f(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ , si la potencia mecánica está dada por la relación

$$P_m = v(t)f(t)$$

donde  $f(t)$  es la fuerza y  $v(t)$  es la velocidad, entonces un incremento en la energía almacenada por el elemento es

$$dT = P_m dt = v(t) \frac{dp(t)}{dt} dt$$

y por lo tanto la energía cinética almacenada está dada por

$$\mathcal{T}(p) = \int_0^t v(t) \frac{dp(t)}{dt} dt$$

o equivalentemente

$$\mathcal{T}(p) = \int_0^p v(p) dp \tag{2.30}$$

Como se esperaba, esta expresión coincide con el área bajo la curva constitutiva de la masa definida por la función (2.13), por lo que la coenergía cinética toma la forma

$$T'(v) = \int_0^v p(v)dv \quad (2.31)$$

En el caso de un resorte, la energía se almacena en forma de energía potencial (velocidad). Si para incrementos de tiempo la energía potencial suministrada cambia de acuerdo a

$$d\mathcal{V}(t) = f(t) \frac{dx(t)}{dt} dt$$

entonces la energía almacenada por el resorte es

$$\mathcal{V}(t) = \int_0^t f(t) \frac{dx(t)}{dt} dt$$

lo cual es equivalente a

$$\mathcal{V}(x) = \int_0^x f(x)dx \quad (2.32)$$

Nuevamente esta expresión se puede obtener de calcular el área bajo la curva ahora de la definida por la función (2.14). De esta gráfica se puede obtener entonces que la ecuación de coenergía potencial es de la forma

$$\mathcal{V}'(f) = \int_0^f x(f)df \quad (2.33)$$

Finalmente y siguiendo un procedimiento similar al aplicado a la resistencia eléctrica, se puede deducir que la función de disipación de Rayleigh para un amortiguador es

$$\mathcal{F}_m(f) = \int_0^f \dot{x}(f)df$$

mientras que la co-función de disipación está dada por

$$\mathcal{F}'_m(\dot{x}) = \int_0^x f(\dot{x})d\dot{x}$$



Con el fin de completar la obtención de las funciones de energía de todos los elementos básicos involucrados en la estructura de un sistema electromecánico, el análisis presentado para el caso de sistemas mecánicos translacionales se puede extender al caso de sistemas rotacionales. Así, se puede obtener que la función de energía cinética para una inercia rotacional está dada por

$$\mathcal{T}(l) = \int_0^l \dot{\theta}(l) dl \quad (2.34)$$

mientras que la función de coenergía cinética es

$$\mathcal{T}'(\dot{\theta}) = \int_0^{\dot{\theta}} l(\dot{\theta}) d\dot{\theta}$$

Para un resorte rotacional la función de energía potencial está dada por

$$\mathcal{V}(\theta) = \int_0^{\theta} i(\theta) d\theta \quad (2.35)$$

mientras que la función de coenergía potencial se establece como

$$\mathcal{V}'(i) = \int_0^i \theta(i) di \quad (2.36)$$

La función de disipación de Rayleigh para un amortiguador rotacional es

$$\mathcal{F}_r(l) = \int_0^l \dot{\theta}(l) dl$$

por lo que la cofunción de disipación se puede expresar como

$$\mathcal{F}_r'(\dot{\theta}) = \int_0^{\dot{\theta}} l(\dot{\theta}) d\dot{\theta}$$

### 2.3.1 De funciones de energía a variables medibles

Cómo se mencionó al inicio de éste capítulo, una condición que deben cumplir los modelos propuestos para los sistemas electromecánicos es que estos deben estar en función de variables de fácil medición. Específicamente, estas variables son corrientes, voltajes, fuerzas y posiciones. Por otro lado, las funciones de energía recientemente presentadas dependen de variables básicas,

es decir, cargas, flujos, momentums y posiciones. En éste sentido es necesario establecer que relación existe entre las variables deseables para representar el comportamiento dinámico de un sistema electromecánico y las funciones de energía presentadas.

Para poder establecer esta relación, considere la función de energía eléctrica almacenada en un capacitor dada por (2.26). Es evidente, que si se toma la derivada parcial de esta expresión con respecto a la carga  $q$ , entonces lo que se obtiene es

$$\frac{\partial W_e(q)}{\partial q} = v(q)$$

Es decir, a partir del conocimiento de  $W_e(q)$  es posible calcular el valor del voltaje en las terminales del capacitor.

De manera similar, si se considera la derivada parcial de la co-energía eléctrica respecto al voltaje, entonces se obtiene que

$$\frac{\partial W'_e(v)}{\partial v} = q(v)$$

por lo que al derivar esta expresión respecto al tiempo se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_e(v)}{\partial v} \right] = i(v)$$

Una de las variables eléctricas deseables para describir el comportamiento dinámico de este tipo de sistemas, la corriente, se puede obtener de la información energética del elemento.

Considere ahora que la función de energía magnética almacenada en un inductor está dada por la ecuación (2.28); si se toma la derivada parcial con respecto al flujo de enlace  $\lambda$ , se obtiene

$$\frac{\partial W_m(\lambda)}{\partial \lambda} = i(\lambda)$$

Esto es, si se conoce  $W_m(\lambda)$  es posible conocer el valor de la corriente  $i$ . Similarmente, al considerar la derivada parcial de la co-energía magnética respecto a la corriente, se obtiene

$$\frac{\partial W'_m(i)}{\partial i} = \lambda(i)$$

Si esta expresión se deriva con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(i)}{\partial i} \right] = v(i)$$

Nuevamente, la segunda de las variables eléctricas deseadas para describir el comportamiento dinámico de sistemas eléctricos, el voltaje, se puede obtener de la información energética del elemento.

Para establecer las relaciones existentes entre variables medibles y funciones de energía para un resistor se emplean la función y la co-función de disipación de Rayleigh. La utilidad de estas funciones puede apreciarse si se considera que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_e(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = v(\dot{q}) \quad (2.37)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{F}'_e(\dot{\lambda})}{\partial \dot{\lambda}} = \dot{q}(v) \quad (2.38)$$

La ecuación (2.37) muestra que la derivada parcial de la función de disipación de Rayleigh con respecto a la corriente proporciona el voltaje en la terminales del resistor. Similarmente, la ecuación (2.38) muestra que al derivar parcialmente con respecto al voltaje la co-función de Rayleigh se obtiene la corriente a través del elemento.

Se desarrolla ahora el caso de elementos mecánicos: masas, resortes y amortiguadores.

Considere la función de energía cinética almacenada en una masa, dada por la ecuación (2.30), la derivada parcial con respecto al *momentum* está dado por la expresión

$$\frac{\partial T(p)}{\partial p} = v(p).$$

Esta expresión muestra que si se conoce  $T(p)$ , se puede conocer la velocidad  $v$  del elemento. Si se obtiene la derivada parcial de la coenergía cinética, se tiene que

$$\frac{\partial T'(v)}{\partial v} = p(v)$$

Al obtener la derivada con respecto al tiempo de esta expresión se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(v)}{\partial v} \right] = f(v)$$

Una vez más, se ha obtenido información a partir de la descripción energética del elemento, en este caso la fuerza  $f$ .

Ahora se desarrolla el caso de un resorte translacional partiendo de la función de energía potencial almacenada en el elemento, descrita por la ecuación (2.32). Al obtener su derivada parcial con respecto a la posición  $x$ , la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x)}{\partial x} = f(x)$$

Al igual que en los casos anteriormente descritos, a partir del conocimiento de la función de energía es posible calcular el valor de una de las variables de medición, en este caso la fuerza. Considere la derivada parcial de la co-energía potencial (2.33) respecto a la fuerza, entonces se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{V}'(f)}{\partial f} = x(f)$$

por lo que al derivar esta expresión con respecto al tiempo se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{V}'(f)}{\partial f} \right] = v(f)$$

que corresponde a la velocidad en el resorte.

Por último se realiza el desarrollo para el caso de un amortiguador, este análisis es similar al realizado para el resistor eléctrico, así que se parte de la función y la co-función de disipación de Rayleigh que para este caso están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}_m(\dot{p})}{\partial \dot{p}} = v(\dot{p}) \quad (2.39)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{F}'_m(\dot{x})}{\partial \dot{x}} = \dot{p}(v) \quad (2.40)$$

La derivada parcial con respecto a la fuerza en la ecuación (2.39) da como resultado la velocidad en el amortiguador, y la derivada parcial con respecto a la velocidad (2.40) resulta en la fuerza transmitida por el amortiguador.

El mismo análisis es aplicado para obtener, de manera similar, la relación entre variables medibles y funciones de energía para los sistemas mecánicos rotacionales.

Establecer estas relaciones sólo conlleva adecuar las variables asociadas a los elementos rotacionales, con lo cual si se considera que la función de energía cinética almacenada en una inercia, dada por la ecuación (2.34), la derivada parcial con respecto al *momentum angular* está dado por la expresión

$$\frac{\partial T(l)}{\partial l} = \omega(l).$$

Esta expresión representa que si se conoce  $T(l)$ , se puede conocer la velocidad angular  $\dot{\theta}$  del elemento. Ahora bien, al obtener la derivada parcial de la coenergía cinética con respecto a la velocidad angular, se tiene que

$$\frac{\partial T'(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = l(\dot{\theta})$$

Al obtener la derivada con respecto al tiempo de la expresión anterior se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right] = \dot{l}(\dot{\theta})$$

La representación anterior proporciona información a partir de la descripción energética del elemento, en este caso el par aplicado  $T$ .

El siguiente elemento a analizar es el resorte rotacional. Partiendo de la función de energía potencial almacenada en el elemento, descrita por la ecuación (2.35), al obtener su derivada parcial con respecto a la posición angular  $\theta$ , la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta} = \dot{i}(\theta)$$

Similarmente a los casos anteriormente descritos, a partir del conocimiento de la función de energía es posible calcular el valor de una de las variables de medición, en este caso el par.

Considere la derivada parcial de la co-energía potencial (2.36) respecto a la fuerza, entonces se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{V}'(\dot{i})}{\partial \dot{i}} = \theta(\dot{i})$$

por lo que al derivar esta expresión con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{V}'(\dot{i})}{\partial \dot{i}} \right] = \dot{\theta}(\dot{i})$$

que corresponde a la velocidad angular en el resorte.

Por último se realiza el desarrollo para el caso de un amortiguador rotacional. Se parte nuevamente de la función y la co-función de disipación de Rayleigh que para este caso están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{mr}(\dot{i})}{\partial \dot{i}} = \dot{\theta}(\dot{i}) \quad (2.41)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{F}'_{mr}(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = \dot{i}(\dot{\theta}) \quad (2.42)$$

El análisis es el mismo que el realizado para los elementos que disipan energía, la derivada parcial con respecto al par, en la ecuación (2.41) da como resultado la velocidad angular en el amortiguador, y la derivada parcial con respecto a la velocidad angular (2.42) resulta en el par transmitida por el amortiguador rotacional.

## 2.4 Sistemas interconectados

Como se presentó en la sección anterior, la información energética de cada uno de los elementos básicos es equivalente a la información que se puede obtener de ellos utilizando variables de fácil manipulación. Sin embargo, una ventaja que presenta el enfoque energético es la facilidad que se obtiene para definir sistemas interconectados.

**Sistemas eléctricos.** Para generalizar la formulación de las funciones de energía al caso de sistemas con múltiples elementos, se parte una vez más de la capacitancia. En este caso, para un sistema para  $n$  capacitores interconectados, la energía total almacenada en el sistema se define como una función que depende, de alguna manera, de las cargas almacenadas en cada uno de los  $n$  capacitores y está dada por la ecuación

$$\begin{aligned}
 W_e(q_1, q_2, \dots, q_n) &= \int_0^{q_1} \dot{\lambda}_1(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_1 \\
 &+ \int_0^{q_2} \dot{\lambda}_2(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_2 \\
 &+ \dots + \int_0^{q_n} \dot{\lambda}_n(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_n
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

donde por cuestiones de ventaja notacional, que se verán más claras adelante, los voltajes en cada capacitor se denotan como  $\dot{\lambda}_i$  y las cargas como  $q_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Abreviando la notación de la ecuación (2.43), se puede escribir

$$W_e(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{q_i} \dot{\lambda}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_i \tag{2.44}$$

La función de coenergía puede desarrollarse de forma similar, por simetría, de la ecuación (2.44), por lo que está dada por

$$W'_e(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{q_i} q_i(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_n) d\dot{\lambda}_i$$

En la sección anterior se demostró que a partir de las funciones de energía es posible obtener las variables básicas asociadas a cada elemento. Para el caso de un sistema de  $n$  capacitores, se tiene que al derivar con respecto a la  $k$ -ésima carga se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_e(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \int_0^{q_i} \dot{\lambda}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n) dq_i \\
 &= \dot{\lambda}_k(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Es decir, que debido a la estructura propuesta para la función de energía del sistema, la propiedad de poder obtener variables, como son el voltaje en

las terminales de un elemento dado, no se pierde. En el caso de la conergía eléctrica de este mismo sistema, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'_e(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_k, \dots, \dot{\lambda}_n)}{\partial v_k} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{i=1}^n \int_0^{v_i} q_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n) d\lambda_i \\ &= q_k(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_k, \dots, \dot{\lambda}_n) \end{aligned}$$

por lo que al derivar respecto al tiempo se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_e(\dot{\lambda}_1, \dots, \dot{\lambda}_n)}{\partial \dot{\lambda}_k} \right] = i_k(\dot{\lambda}_1, \dots, \dot{\lambda}_n)$$

La expresión anterior establece que siguiendo el mismo procedimiento que el presentado para un sólo elemento, la corriente en un determinado capacitor puede ser obtenida a partir de la función de energía del sistema completo.

Es interesante notar la relación que existe entre la variable utilizada para obtener la derivada parcial y la variable resultante de aplicar esta derivación. Mientras que el voltaje se obtiene de derivar con respecto a la carga, la corriente es el resultado de derivar respecto al voltaje. Esto es importante, como se verá más adelante, pues el tipo de derivada parcial seleccionada estará estrechamente ligada con el tipo de análisis que se aplique al sistema, es decir, análisis por mallas o por nodos.

La propiedad presentada es fácilmente extendible a los elementos básicos restantes.

Para un sistema de  $n$  inductancias, se parte de la función de energía total descrita por

$$\begin{aligned} W_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= \int_0^{\lambda_1} \dot{q}_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \\ &+ \int_0^{\lambda_2} \dot{q}_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_2 \\ &+ \dots + \int_0^{\lambda_n} \dot{q}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_n \end{aligned} \quad (2.46)$$

Esta puede ser escrita de la siguiente forma

$$W_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\lambda_i} \dot{q}_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_i$$



y por lo tanto la función de coenergía tiene la misma estructura

$$W'_m(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\dot{q}_i} \lambda_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) d\dot{q}_i$$

Cuando se obtiene la derivada parcial de la energía de campo magnético con respecto a  $\lambda$ , se tiene que

$$\frac{\partial W'_m(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)}{\partial v_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{i=1}^n \dot{q}_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)$$

lo cual se reduce a

$$\frac{\partial W'_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)}{\partial v_k} = \dot{q}_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n)$$

esto es, tomando el cambio en la energía magnética total con respecto al flujo en el  $k$  - *ésimo* elemento, mientras los demás flujos permanecen constantes, se obtiene la corriente en el  $k$  - *ésimo* inductor. Obsérvese que la selección de  $\lambda$  como nuestra variable de interés, permite obtener términos de corrientes.

Si se realiza una operación similar, se puede obtener de la función de coenergía magnética que

$$\frac{\partial W'_m(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\dot{q}_i} \lambda_i(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n) d\dot{q}_i$$

de la cual se obtiene que

$$\frac{\partial W'_m(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_k(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n)$$

De manera similar al caso de capacitores, si se toma la derivada con respecto al tiempo de esta expresión entonces se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_k} \right] = \dot{\lambda}_k(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n)$$

es decir, se obtiene como variable el voltaje en el  $k$  - *ésimo* inductor. Nuevamente, es interesante notar como seleccionando a la corriente como variable respecto a la cual se realiza la derivación parcial, es posible obtener el voltaje en el elemento.

Este mismo tipo de deducción que se ha realizado para los elementos eléctricos es posible realizarlo para los sistemas mecánicos.

**Sistemas mecánicos.** La energía en una masa se almacena en forma de *energía cinética*. La potencia instantánea suministrada a un sistema de  $n$  masas está dado por

$$P = \dot{x}_1(t)\dot{p}_1(t) + \dot{x}_2(t)\dot{p}_2(t) + \cdots + \dot{x}_n(t)\dot{p}_n(t) \quad (2.47)$$

La energía cinética almacenada en un tiempo  $t$  está dado por

$$T(t) = \int_0^t \dot{x}_1(t) \frac{dp_1(t)}{dt} dt + \int_0^t \dot{x}_2(t) \frac{dp_2(t)}{dt} dt + \cdots + \int_0^t \dot{x}_n(t) \frac{dp_n(t)}{dt} dt \quad (2.48)$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} T(p_1, p_2, \dots, p_n) &= \int_0^{p_1} \dot{x}_1(p_1, p_2, \dots, p_n) dp_1 \\ &+ \int_0^{p_2} \dot{x}_2(p_1, p_2, \dots, p_n) dp_2 \\ &+ \int_0^{p_n} \dot{x}_n(p_1, p_2, \dots, p_n) dp_n \end{aligned}$$

Empleando una notación abreviada, la energía cinética almacenada total es

$$T(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{p_i} \dot{x}_i(p_1, p_2, \dots, p_n) dp_i \quad (2.49)$$

y la expresión para la coenergía es entonces

$$T'(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\dot{x}_i} p_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) d\dot{x}_i$$

Seleccionando las coordenadas de posición como las de mayor interés, las derivadas parciales de la función de energía con respecto a  $x$  y a  $\dot{x}$  (posición y velocidad respectivamente) tienen la forma

$$\frac{\partial T'(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \sum_{i=1}^n \int_0^{\dot{x}_i} p_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_n) d\dot{x}_i$$

lo cual se puede representar simplificada como

$$\frac{\partial T'(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_k} = p_k(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_k, \dots, \dot{x}_n)$$

Esta expresión proporciona como resultado el *momentum*.

Para un resorte rotacional o translacional se considera que son almacenadores de *energía potencial*. Para un sistema de  $n$  resortes se tiene que la expresión de energía potencial es

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \dot{p}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i \quad (2.50)$$

Ahora se formula la función de coenergía potencial como

$$V(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\dot{p}_i} x_i(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots, \dot{p}_n) d\dot{p}_i.$$

Considerando una discusión similar a la que se realizó para la masa, todas las ecuaciones de equilibrio mecánico son usualmente escritas como una sumatoria de fuerzas con  $x$  y  $\dot{x}$  como las coordenadas de interés. Empleando la función de energía potencial se obtiene que

$$\frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \dot{p}_i(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_i$$

ecuación que resulta en

$$\frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \dot{p}_k(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

la cual representa la fuerza aplicada al  $k$  - *ésimo* resorte.

En la tabla 2.1 se muestran los resultados del análisis realizado hasta este punto, presentándose la estructura de las funciones de energía y co-energía para cada elemento y las derivadas parciales requeridas para la obtención de las variables asociadas a cada tipo de análisis por el cual el sistema bajo estudio es resuelto.

### 2.4.1 Restricciones Holonómicas

Una vez que se ha introducido el concepto de sistema interconectado, es conveniente abordar el problema relacionado con la determinación del mínimo número de variables necesarias para describir el comportamiento dinámico de un sistema.

Elemento	Función de energía	Derivada Parcial	Análisis
Capacitor	$W_e(q) = \int_0^q v(q) dq$	$\frac{\partial W_e(q)}{\partial q} = v(q)$	Mallas
	$W_e'(v) = \int_0^v q(v) dv$	$\frac{\partial W_e'(v)}{\partial v} = q(v)$	Nodos
Inductor	$W_m(\lambda) = \int_0^\lambda i(\lambda) d\lambda$	$\frac{\partial W_m(\lambda)}{\partial \lambda} = i(\lambda)$	Nodos
	$W_m'(i) = \int_0^i \lambda(i) di$	$\frac{\partial W_m'(i)}{\partial i} = \lambda(i)$	Mallas
Masa	$T(p) = \int_0^p \dot{x}(p) dp$	$\frac{\partial T(p)}{\partial p} = \dot{x}(p)$	Velocidad
	$T'_m(\dot{x}) = \int_0^{\dot{x}} p(\dot{x}) d\dot{x}$	$\frac{\partial T'_m(\dot{x})}{\partial \dot{x}} = p(\dot{x})$	Fuerza
Resorte	$\mathcal{V}(x) = \int_0^x f(x) dx$	$\frac{\partial \mathcal{V}(x)}{\partial x} = f(x)$	Fuerza
	$\mathcal{V}'(f) = \int_0^f x(f) df$	$\frac{\partial \mathcal{V}'(f)}{\partial f} = x(f)$	Velocidad
Inercia	$T(l) = \int_0^l \dot{\theta}(l) dl$	$\frac{\partial T(l)}{\partial l} = \dot{\theta}(l)$	Vel. ang
	$T'(\dot{\theta}) = \int_0^{\dot{\theta}} l(\dot{\theta}) d\dot{\theta}$	$\frac{\partial T'(\dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = l(\dot{\theta})$	Fuerza
Resorte rotacional	$\mathcal{V}(\theta) = \int_0^\theta \dot{l}(\theta) d\theta$	$\frac{\partial \mathcal{V}(\theta)}{\partial \theta} = \dot{l}(\theta)$	Fuerza
	$\mathcal{V}'(\dot{l}) = \int_0^{\dot{l}} \theta(\dot{l}) d\dot{l}$	$\frac{\partial \mathcal{V}'(\dot{l})}{\partial \dot{l}} = \theta(\dot{l})$	Vel. ang.

Tabla 2.1: Funciones de Energía

El concepto fundamental para determinar estas variables es el de restricción. Cuando un número determinado de elementos se interconectan, sus variables no pueden evolucionar de la misma manera que cuando no lo estaban, por el contrario cada una de estas variables dependen de alguna manera de las otras. Este hecho es importante pues establece que no todas las variables serán necesarias para describir el comportamiento dinámico de un sistema.

Para el desarrollo de las ecuaciones Euler-Lagrange un tipo particular de restricciones son las restricciones holonómicas.

Considere un sistema compuesto por  $m$  elementos interconectados con coordenadas  $x_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . El hecho de que estas variables dependan unas de otras implica la existencia de funciones  $g_j(x_1, \dots, x_m)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , que las relacionan. Si estas funciones satisfacen la condición

$$g_j(x_1, \dots, x_m) = 0; \quad j = 1, \dots, r$$

entonces se dice que establecen restricciones holonómicas.

De la existencia de este tipo de restricciones se desprende un hecho fundamental. Por cada restricción aplicada al sistema se disminuye en uno el

número de coordenadas independientes, es decir, que si se aplican  $r$  restricciones al sistema, entonces el número de coordenadas independientes será  $n = m - r$ . Más aún, la ventaja de trabajar con restricciones holonómicas radica en el hecho de que las  $m$  coordenadas originales expresarse como funciones de las  $n$  coordenadas independientes, es decir

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n) \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

donde  $q_i$ , son las coordenadas independientes, y se conocen como coordenadas generalizadas. Así, para representar el comportamiento dinámico del sistema, éste puede ser descrito de manera completa utilizando únicamente las  $n$  coordenadas generalizadas en lugar de las  $m$  coordenadas originales.

Una ventaja adicional que se desprende del hecho de trabajar con restricciones holonómicas es el que se refiere a la propiedad de poder expresar las funciones de energía como función únicamente de coordenadas generalizadas, recuperando para estas coordenadas las propiedades presentadas en las secciones anteriores.

Un par de ejemplos sencillos ilustran los conceptos presentados en esta sección.

**Ejemplo 1** Considere el sistema mecánico mostrado en la figura 2.7. Debido

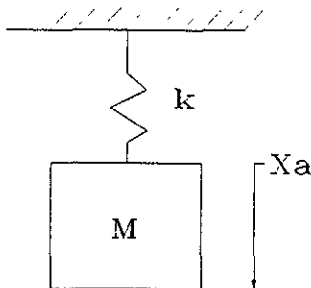


Figura 2.7: Representación de un sistema masa-resorte

a la interconexión de estos dos elementos, en el punto A aparece una restricción en su comportamiento. Formalmente esta restricción se puede establecer como

$$x_k = x_m$$

Es decir la función que describe la restricción es

$$g(x_k, x_m) = x_k - x_m = 0$$

por lo que se establece una restricción holonómica. Por lo tanto, de las dos coordenadas originales  $x_k$ ,  $x_m$ , sólo se requiere una para describir el comportamiento dinámico del sistema. Como complemento, considere la función de energía potencial del resorte la cual, considerando un resorte lineal, está dada por

$$V(x_k) = \frac{1}{2} k x_k^2$$

Si se define como coordenada generalizada a  $x = x_k = x_m$ , entonces esta función de energía se puede escribir como

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$



**Ejemplo 2** Considere el sistema eléctrico mostrado en la figura 2.8. Las

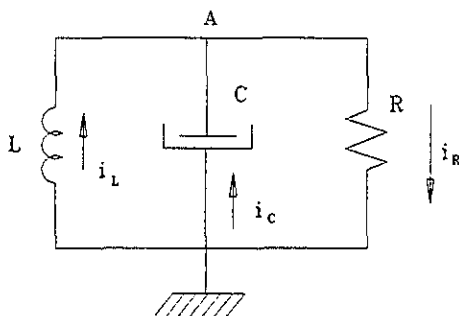


Figura 2.8: Representación de un sistema RLC

coordenadas originales son  $i_L, i_C, i_R$ . En este caso existe una restricción debido a la interconexión de los elementos en el punto A. Esta restricción está determinada por la expresión

$$i_L + i_C = i_R \tag{2.51}$$

por lo que la función que la describe puede escribirse como

$$g(i_L, i_C, i_R) = i_L + i_C - i_R = 0$$

con lo que se establece una restricción holonómica. Es interesante notar para este caso que la expresión (2.51) puede ser expresadas en términos de variables básicas, integrando obtenemos

$$q_L + q_C = q_R$$

por lo que la restricción toma la forma

$$g(q_L, q_C, q_R) = q_L + q_C - q_R = 0$$

Debido a que el número de coordenadas asignadas es tres y el número de restricciones holónicas es uno, entonces existen únicamente dos coordenadas generalizadas. Aunque no es la única solución, defina  $q_1 = q_L$  y  $q_2 = q_C$ , entonces las coordenadas originales se pueden expresar en función de las coordenadas generalizadas como

$$q_L = q_1 \quad (2.52)$$

$$q_C = q_2$$

$$q_R = q_1 + q_2$$

En relación a las funciones de energía considere como ejemplo la función de disipación de Rayleigh, la cual considerando una resistencia lineal se puede expresar como

$$F = \frac{1}{2} R \dot{i}_R^2$$

En términos de las coordenadas generalizadas y gracias a las funciones (2.52), esta se escribe como

$$F = \frac{1}{2} R (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$



## 2.5 Ecuaciones Euler-Lagrange

En las secciones precedentes se ha resuelto hasta el momento la forma en la cual se obtienen las variables medibles y la obtención del mínimo número de variables independientes para describir un sistema.

Resta por resolver un problema, cómo plantear las ecuaciones de equilibrio. El objetivo aquí es mostrar que éstas pueden obtenerse a través de las ecuaciones Euler-Lagrange. Para ello, el procedimiento a seguir es, plantear las ecuaciones EL, aplicarlas a sistemas eléctricos y mecánicos y mostrar que las ecuaciones obtenidas son las mismas que las que se derivan al aplicar las leyes de Kirchhoff y Newton respectivamente.

Las ecuaciones EL están dadas por<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad ; i = 1, \dots, n \quad (2.53)$$

donde

$q$  es el vector de coordenadas generalizadas. La ventaja principal de emplear estas coordenadas radica en el hecho de que representan el conjunto mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el estado de un sistema. Este conjunto mínimo representa a su vez los grados de libertad del sistema. Por otro lado el vector de coordenadas permite agrupar variables de diferente naturaleza.

$\dot{q}$  corresponde a la derivada de el vector de coordenadas generalizadas.

$\mathcal{L}$  es el Lagrangiano definido como

$$E'(q, \dot{q}) - E(q)$$

donde  $E'$  es la co-energía y  $E$  es la energía que posee el sistema

$\mathcal{F}$  corresponde a la función de disipación de Rayleigh.

$Q_i$  son las fuerzas generalizadas, esto es las fuerzas externas que afectan a cada uno de las coordenadas generalizadas o grados de libertad.

---

<sup>1</sup>Para un análisis completo de la formulación Lagrangiana, se refiere al lector interesado a [Meis\69] y [Lagra\89]



Es importante hacer notar que las fuerzas generalizadas pueden no ejercer acción alguna sobre alguno de los grados de libertad, esto es, no están actuados.

Un hecho importante de la formulación lagrangiana es la obtención de una ecuación de equilibrio por cada grado de libertad que posee el sistema, en otras palabras, por cada coordenada generalizada.

La formulación Lagrangiana es sistemática, por lo sólo resta presentar la metodología adecuada para el tipo de análisis realizado sobre el sistema. Se recuerda que que en este capítulo solamente se considera el caso en que todas las  $q'$  s son de una misma naturaleza.

### 2.5.1 Modelado de sistemas eléctricos vía Euler-Lagrange

En esta sección se aplican las ecuaciones generales (2.53) a sistemas eléctricos a través de ejemplos sencillos. Para el análisis de estos sistemas existen dos formas posibles: análisis por mallas o análisis por nodos, la diferencia yace en que para el análisis por mallas las variables de interés son voltajes en función de corrientes y cargas, mientras que para un análisis por nodos las variables son corrientes en función de voltajes y flujos. De aquí se desprende el hecho de que la construcción del Lagrangiano depende del tipo de análisis que se realiza sobre el sistema.

Al realizar un análisis por mallas se emplea entonces la función de co-energía magnética, como se observa en la tabla 2.1, mientras que la función de energía empleada es la eléctrica. Si el análisis se realiza por nodos, de la misma tabla puede observarse que la función de co-energía a emplear ahora es la eléctrica, mientras que la función de energía a utilizar es la magnética.

Puede observarse también de la tabla 2.1 que la selección de funciones de energía y co-energía para diferentes tipos de análisis es muy sencilla, ya que de estas se deducen las variables asociadas al tipo de análisis, de aquí se recalca un hecho importante, para un análisis por mallas todas las coordenadas involucradas son voltajes, para un análisis por nodos, las coordenadas son corrientes.

A continuación se presenta la metodología general de formulación del Lagrangiano

- 1 Identificar las coordenadas originales del sistema
- 2 Identificar las restricciones.

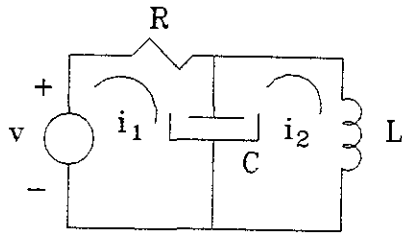


Figura 2.9: Sistema eléctrico RLC

- 3 Identificar las coordenadas independientes.
- 4 A través de las ecuaciones de restricción representar cada coordenada original en función de las coordenadas generalizadas
- 5 Obtener las funciones de energía del sistema, en función de coordenadas generalizadas
- 6 Identificar las fuerzas externas generalizadas.
- 7 Aplicar las ecuaciones Euler-Lagrange.

Para ilustrar el método se desarrollo un ejemplo sencillo, este corresponde a sistema eléctrico del tipo RLC

**Ejemplo 3** *Considere el circuito mostrado en la figura 2.9. Análisis por mallas*

*En este tipo de análisis se utilizan voltajes para la representación de la ecuaciones de equilibrio. Tales ecuaciones están formuladas en términos de corrientes.*

*En este caso las coordenadas originales están dadas por  $i_r, i_c, i_l$ , mientras que las coordenadas independientes son  $i_1, i_2$*

*De esta manera, se establece una relación entre coordenadas de la siguiente forma*

$$\begin{aligned}
 i_{rR} &= i_1 \Rightarrow q_r = q_1 \\
 i_c &= i_1 - i_2 \Rightarrow q_c = q_1 - q_2 \\
 i_l &= i_2 \Rightarrow q_l = q_2.
 \end{aligned}$$

Con el caso anterior identificamos las coordenadas generalizadas del sistema.

Ahora observe que las restricciones en este circuito corresponden a la ley de corrientes en el circuito, este es un hecho fundamental ya que al realizar el análisis por mallas los voltajes se encuentran en función de corrientes y cargas, por ello la ecuación de restricción es

$$i_r + i_c = i_l \Rightarrow q_r + q_c = q_l$$

cuya forma corresponde a una restricción holonómica.

Se seleccionan ahora las funciones de energía y co-energía apropiadas para el análisis por mallas. Tomando como base la tabla 2.1 y considerando la relación entre coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} W_e(q_c) &= \frac{1}{2} \frac{1}{C} q_c^2 \Rightarrow W_e(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{C} (q_1 - q_2)^2 \\ W'_m(q_l) &= \frac{1}{2} L q_l^2 \Rightarrow W'_m(q_2) = \frac{1}{2} L q_2^2 \\ \mathcal{F}_e(q_r) &= \frac{1}{2} R q_r^2 \Rightarrow \mathcal{F}_e(q_r) = \frac{1}{2} R q_1^2 \end{aligned}$$

A partir de este punto se formulan las ecuaciones de equilibrio de forma similar a la expresada por la ley de mallas de Kirchhoff

Para la malla 1 la expresión del voltajes está dada por

$$V = V_r + V_c$$

Se requiere que las variables descritas en la ecuación anterior se encuentren representadas a través de funciones de energía por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e(q_c)}{\partial q_c} &= V_c = \frac{1}{C} q_c = \frac{1}{C} (q_1 - q_2) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_e(q_r)}{\partial q_r} &= V_r = R q_r = R q_1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son un resultado ya conocido, a partir de las ecuaciones de energía podemos conocer, en este caso,

los voltajes en cada elemento interconectado. De forma que la ecuación de equilibrio para la malla 1, una ecuación de voltajes, en términos de corrientes tiene la forma

$$V = Rq_l + \frac{1}{C}(q_1 - q_2)$$

Esta expresión en términos de las funciones de energía es

$$V = \frac{\partial W_e(q_c)}{\partial q_c} + \frac{\partial \mathcal{F}_e(q_r)}{\partial q_r} \quad (2.54)$$

Para la malla 2 se tiene que

$$V_l - V_c = 0$$

pero

$$\frac{\partial W'_m(q_l)}{\partial q_l} = \lambda_l = Lq_l.$$

Para obtener de esta expresión el voltaje a través del elemento se requiere la derivada total de esta expresión, de tal forma que se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(q_l)}{\partial q_l} \right] = V_l = L \frac{dq_l}{dt} = L \frac{dq_2}{dt}$$

Similarmente al caso de la malla 1, se tiene una expresión formulada por ley de Kirchhoff. Expresando esta última ecuación en términos de la función de energía se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(q_l)}{\partial q_l} \right] - \frac{\partial W_e(q_c)}{\partial q_c} = 0 \quad (2.55)$$

### Análisis por nodos

Este tipo de análisis conlleva la formulación de ecuaciones en términos de voltajes ya que las variables que se emplean son las corrientes presentes en el circuito

Las coordenadas originales en este circuito son  $V_r, V_c, V_l$ , siendo las coordenadas independientes  $V_1$ , en donde se establece una relación entre variables de la forma

$$\begin{aligned}V_r &= V_1 - V \Rightarrow \lambda_r = \lambda_1 - \lambda_2 \\V_c &= V_1 \Rightarrow \lambda_c = \lambda_1 \\V_l &= V_1 \Rightarrow \lambda_l = \lambda_1\end{aligned}$$

En este caso las restricciones están dadas por la ley de voltajes del circuito

$$\begin{aligned}V_r + V &= V_c \Rightarrow \lambda_r + V = \lambda_c \\V_c &= \lambda_c \Rightarrow \lambda_c = \lambda_l\end{aligned}$$

Las funciones de energía para realizar un análisis por mallas, de la tabla 2.1 son:

$$\begin{aligned}W_e'(V_c) &= \frac{1}{2}CV_c \Rightarrow W_e'(V_1) = \frac{1}{2}CV_1^2 \\W_m(\lambda_l) &= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \lambda_l^2 \Rightarrow W_m(\lambda_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \lambda_1^2 \\F_e'(V_r) &= \frac{1}{2} \frac{1}{R} V_r^2 \Rightarrow F(V_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{R} (V_1 - V)^2\end{aligned}$$

La formulación de las ecuaciones de equilibrio se realiza a través del análisis nodal, así la descripción de los nodos es:

Para el nodo 1, la ecuación de corrientes está definida como

$$i_r + i_c = i_c$$

expresando esta ecuación a través de las funciones de energía asociadas a las variables, tenemos en primera instancia que

$$\frac{\partial W_e'(V_c)}{\partial V_r} = q_c = CV_c$$

lo cual implica que para obtener la corriente es necesario obtener la derivada temporal de esta expresión, esto es

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W_e'(V_c)}{\partial V_c} \right] = i_c = C \frac{dV_c}{dt}$$

Dada la presencia de un elemento disipador la función de energía asociada a éste está dada por

$$\frac{\partial \mathcal{F}'_e(V_r)}{\partial V_r} = iR = \frac{1}{R} V_c$$

mientras que la corriente en el inductor se define como

$$\frac{\partial W_m(\lambda_l)}{\partial \lambda_l} = i_c = \frac{1}{L} \lambda_l$$

La ecuación de corrientes en términos de voltajes tiene entonces la forma

$$C \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{R} V_r = \frac{1}{L} \lambda_l$$

Esta ecuación en términos de las variables independientes es equivalente a

$$C \frac{dV_1}{dt} + \frac{1}{R} (V_1 - V) = \frac{1}{L} \lambda_1 = \frac{1}{L} \int V_1 dt$$

Hasta ahora se han formulado las ecuaciones de equilibrio empleando leyes de Kirchhoff y expresando éstas a través de funciones de energía y co-energía.

Empleando el enfoque Lagrangiano para un análisis por mallas se requiere de las funciones de energía  $W_e(q_1, q_2)$ ;  $W'_m(\dot{q}_2)$ ; y  $\mathcal{F}_e(\dot{q}_1)$ , las cuales quedan expresadas dentro de la forma EL como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_1} \right] + \frac{\partial W_e(q_1, q_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_e(\dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = V \quad (2.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} \right] + \frac{\partial W_e(q_1, q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{F}_e(\dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad (2.57)$$

En este caso el lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = W'_m(\dot{q}_2) - W_e(q_1, q_2)$$

lo cual implica entonces que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_e}{\partial \dot{q}_1} = V$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{q}_2} = 0$$

Se observa de las ecuaciones (2.56) y (2.57) que el resultado es el mismo que el obtenido en las ecuaciones (2.54) y (2.55).

La formulación lagrangiana a través de un análisis nodal se realiza ahora empleando las funciones de energía  $W'_e(\dot{\lambda}_1)$ ;  $W_m(\lambda_1)$ ; y  $\mathcal{F}_e(\dot{\lambda}_1)$ . Si estas expresiones se substituyen en la ecuación general (2.53) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_e(\dot{\lambda}_1)}{\partial \dot{\lambda}_1} \right] + \frac{\partial W_m(\lambda_1)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_e(\dot{\lambda}_1)}{\partial \dot{\lambda}_1} = 0 \quad (2.58)$$

En este caso el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dot{\lambda}_1) = W'_e(\dot{\lambda}_1) - W_m(\lambda_1)$$

con lo cual la ecuación EL se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_1} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \mathcal{F}_e(\dot{\lambda}_1)}{\partial \dot{\lambda}_1} = 0$$



Del ejemplo anterior se pueden realizar las siguientes observaciones: las variables independientes corresponden, en el caso de un análisis por mallas, a corrientes de malla, mientras que en un análisis por nodos, a voltajes de nodo; las ecuaciones de restricción en el análisis por mallas corresponden a la ley de corrientes de Kirchhoff y para el análisis por nodos la ecuación de restricción es la ley de voltajes. Por último se observa que las ecuaciones de equilibrio para el análisis por mallas están formuladas de forma similar a la ley de voltajes y para el análisis nodal la formulación es símil a la ley de voltajes, es decir, las ecuaciones obtenidas por EL son las mismas que las obtenidas por Kirchhoff.

## 2.5.2 Modelado de sistemas mecánicos vía Euler-Lagrange

El modelado de sistemas mecánicos de manera general se formula a través del análisis de fuerzas en función de velocidades y posiciones, ya que éstas son variables más fáciles de medir.

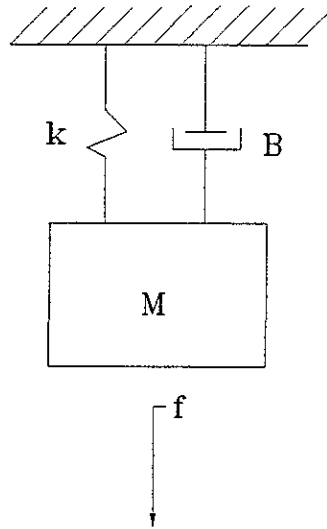


Figura 2.10: Representación de un sistema masa-resorte-amortiguador

Se observa de la tabla 2.1 que para el análisis de sistemas mecánicos el Lagrangiano se define ahora como la diferencia entre la co-energía cinética y la energía potencial, esto es

$$\mathcal{L} = T' - V$$

Cómo se mencionó en secciones anteriores el modelado a través de las ecuaciones Euler-Lagrange es general, independiente de la naturaleza del sistema. Evidentemente el método es el mismo, lo cual se ilustra con el siguiente ejemplo

**Ejemplo 4** *Considere el sistema mostrado en la figura 2.10. Las ecuaciones que describen a este sistema deben encontrarse en términos de velocidades, para lo cual se emplea las fuerzas presentes en el sistema.*

*En este caso las variables independientes corresponden a las posiciones de nodo por lo cual las variables originales son  $x_k, x_b, x_m$ , esto es, las posiciones que describen a cada elemento*

*La variable independiente es  $x$ , o sea la posición que describe el movimiento de todo el sistema*



La ecuación de restricción está dada por la sumatoria de velocidades, y en éste caso se encuentra definida por

$$\dot{x}_m = \dot{x}_b = \dot{x}_k = \dot{x}$$

lo cual implica que

$$x_m = x_b = x_k = x$$

Las funciones de energía asociadas con cada uno de los elemento del sistema son

$$\begin{aligned} V(x_k) &= \frac{1}{2} K x_k^2 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} K x^2 \\ T'(\dot{x}_m) &= \frac{1}{2} M \dot{x}_m^2 \Rightarrow T'(\dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \\ \mathcal{F}'(\dot{x}_b) &= \frac{1}{2} B \dot{x}_b^2 \Rightarrow \mathcal{F}'(\dot{x}) = \frac{1}{2} B \dot{x}^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Conociendo las relaciones de cada elemento, se formulan a continuación las ecuaciones de equilibrio las cuales corresponden a la tercera ley de Newton y tienen la forma

$$f = f_k + f_b + f_m \quad (2.60)$$

donde  $f$  es la fuerza externa ejercida en el sistema. De las funciones de energía (2.59) se obtienen, a través de su derivada parcial, la fuerza asociada a cada elemento, esto es

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = f_k = Kx \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'(\dot{x})}{\partial \dot{x}_i} &= p_m = M\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \right] &= f_m = M\ddot{x} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}'(\dot{x})}{\partial \dot{x}_i} = f_b = B\dot{x} \quad (2.63)$$

De esta forma, al substituir (2.61, 2.62, y 2.63) en la ecuación (2.60), obtenemos

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f$$

Empleando el enfoque Lagrangiano se tiene nuevamente que las funciones de energía necesarias para la descripción del sistema son  $V(x)$ ;  $T'(\dot{x})$ ; y  $\mathcal{F}'(\dot{x})$ . Entonces el Lagrangiano se define como

$$\mathcal{L} = T' - V$$

esto es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

La co-función de disipación de Rayleigh está definida como

$$\mathcal{F}'(\dot{x}) = \frac{1}{2}B\dot{x}^2$$

Llevando los términos anteriores a la ecuación general (2.53), tenemos que

$$M \ddot{x} + B\dot{x} + Kx = Q$$

donde  $Q$  corresponde a la fuerza externa  $f$ .

El resultado anterior, obtenido por la metodología Lagrangiana es el mismo que el obtenido por Newton o por el principio de D'Alembert.



En éste capítulo se obtuvo el modelado para sistemas de una sola naturaleza , eléctricos y mecánicos. A manera de nota se recuerda al lector que sólo se trabajó con estas dos clases de sistemas ya que el objetivo es desarrollar el análisis para sistemas que combinan estas dos clases de sistemas, esto es, sistemas electromecánicos. El modelado a través de Euler-Lagrange se desarrolla en el siguiente capítulo. ■

# Capítulo 3

## Modelado de sistemas electromecánicos

En el capítulo anterior se mostró que las ecuaciones Euler-Lagrange se pueden aplicar a sistemas eléctricos y mecánicos para obtener las ecuaciones de equilibrio que describen el comportamiento dinámico de estos sistemas no importando que tan compleja sea su estructura. Este mismo capítulo sirve de preámbulo para mostrar el desarrollo de las ecuaciones EL en sistemas electromecánicos. Se puede observar además que la formulación Euler-Lagrange puede aplicarse a una amplia clase de sistemas electromecánicos.

La organización de este capítulo es la siguiente, se define el tipo de sistemas electromecánicos que se consideran en esta tesis, se determinan las características asociadas este tipo de plantas, se ilustra el método con algunos ejemplos y por último se desarrolla el modelo de los sistemas bajo estudio.

### 3.1 Sistemas electromecánicos

En esta sección se examinan las funciones de energía y co-energía de elementos electromecánicos. La parte eléctrica de un sistema electromecánico puede almacenar energía en forma de campo eléctrico o campo magnético, de aquí el que se clasifiquen en dos clases generales, sistemas electromecánicos de campo eléctrico y sistemas electromecánicos de campo magnético. Muchos sistemas físicos poseen ambas formas de almacenamiento, pero es usual que un efecto domine sobre el otro, así que esta clasificación no es tan restrictiva.

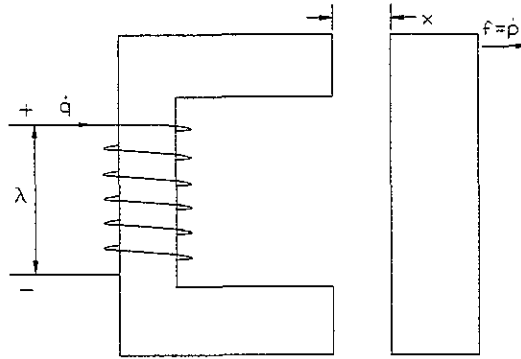


Figura 3.1: Sistema electromecánico de almacenamiento de energía de campo magnético

Los elementos que se analizan son inductores y capacitores dependientes de la posición. Para su análisis, considere la Figura 3.1.

Note que el sistema se compone de un conjunto de terminales eléctricas además de un miembro mecánico móvil. Este sistema posee un puerto<sup>1</sup> mecánico y uno eléctrico.

Las variables de voltaje y corriente para el puerto eléctrico se designan por  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{q}$  respectivamente. Similarmente, para las variables de velocidad y fuerza asociadas al puerto mecánico están dadas por  $\dot{x}$  y  $\dot{p}$ , respectivamente. La velocidad  $\dot{x}$  del elemento móvil es medida con respecto al miembro estacionario y  $x$  se toma igual a cero cuando ambos elementos están juntos.

Se analizan ahora las funciones que describen al sistema. Para tal propósito, se asume que la velocidad  $\dot{x}$  es igual a cero. En otras palabras, la parte móvil se encuentra en una posición fija  $x$ . La parte eléctrica del sistema está caracterizada por una inductancia, éste elemento se encuentra a su vez caracterizado por una curva que relaciona el flujo de enlace  $\lambda$  como función de la corriente  $q$  en el embobinado. La figura 3.2 muestra diferentes curvas para varias posiciones del elemento móvil. Estas posiciones están designadas por  $x_a$ ,  $x_b$ , y  $x_c$ .

Con el miembro móvil en una posición fija  $x$ , el almacenamiento de energía

<sup>1</sup>El término puerto es generalmente usado para describir el lugar en el sistema en donde la energía eléctrica o mecánica puede suministrarse o substraerse.

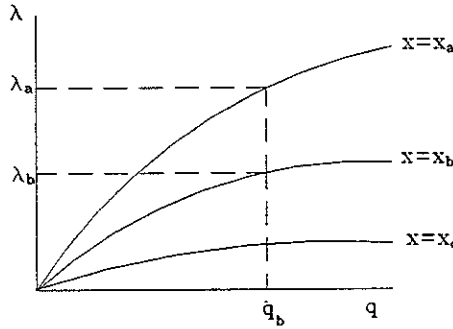


Figura 3.2: Familia de curvas características para diferentes posiciones del elemento móvil del sistema de campo magnético

magnética puede evaluarse de la forma usual

$$W_m(\lambda, x) = \int_0^\lambda \dot{q}(\lambda, x) d\lambda \quad (3.1)$$

La única diferencia aquí yace en el hecho de que la corriente  $\dot{q}$  es una función de los flujos de enlace y de la posición del elemento móvil. La integral dada en la ecuación (5.1) se interpreta entonces como el área bajo la curva para una posición final dada, mostrada en la Figura 3.3

En forma similar, la co-energía almacenada en el sistema se define como el área debajo de la curva en la figura 3.3. La co-energía de campo magnético puede calcularse como

$$W'_m(\dot{q}, x) = \int_0^{\dot{q}} \lambda(\dot{q}, x) d\dot{q} \quad (3.2)$$

y es una función de la corriente y la posición. Las ecuaciones (5.1) y (5.2) no son diferentes a las ecuaciones obtenidas para un inductor ideal. La parte mecánica ofrece sólo una variable adicional a estas ecuaciones.

Ahora se analizan los sistemas electromecánicos que almacenan energía eléctrica en forma de campo eléctrico. La figura 3.4 ilustra un dispositivo de este tipo, con un puerto mecánico y uno eléctrico. El sistema consta de un arreglo de dos platos conductores de manera que si un voltaje  $\lambda$  existe entre los platos, entonces un campo eléctrico está presente. El plato inferior es móvil con respecto al plato superior fijo. En general, la velocidad

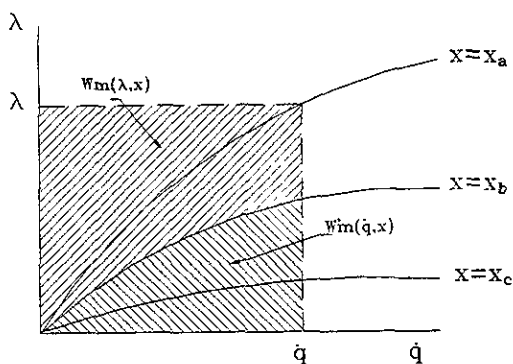


Figura 3.3: Representación de las funciones de energía y co-energía del sistema de campo magnético

Y fuerza del puerto mecánico se denotan por  $\dot{x}$  y  $\dot{p}$  respectivamente. Para el puerto eléctrico las variables de corriente y voltaje se denotan por  $\dot{q}$  y  $\dot{\lambda}$  respectivamente.

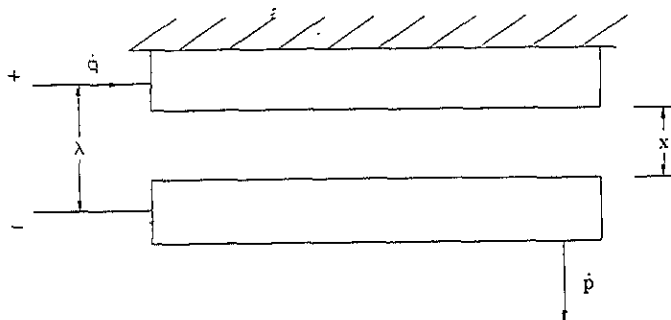


Figura 3.4: Sistema electromecánico de almacenamiento de energía de campo eléctrico

La curva característica de un dispositivo que almacena campo eléctrico es una representación de la carga como función de la diferencia de potencial  $\dot{\lambda}$ . En la figura 3.5 se encuentran representadas un conjunto de curvas las cuales representan diferentes posiciones del plato móvil.

Las funciones de energía y co-energía pueden generarse de manera análoga a la del sistema de campo magnético. De esta forma se tiene que la función

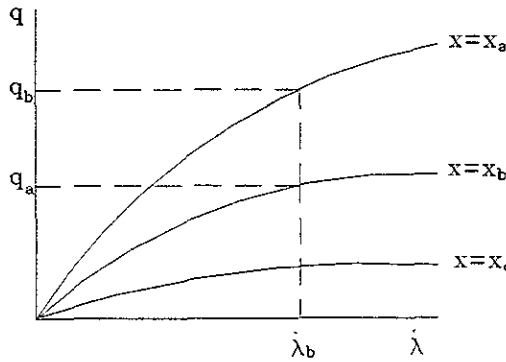


Figura 3.5: Familia de curvas para varias posiciones fijas del elemento móvil del sistema de campo eléctrico

de energía de campo eléctrico es

$$W_e(q, x) = \int_0^q \dot{\lambda}(q, x) dq. \quad (3.3)$$

En forma similar, la función de co-energía eléctrica está dada por

$$W'_e(\dot{\lambda}, x) = \int_0^{\dot{\lambda}} q(\dot{\lambda}, x) d\dot{\lambda}. \quad (3.4)$$

La representación gráfica de las funciones de energía y co-energía para este sistema se presentan en la figura 3.6

De la formulación realizada para ambos tipos de sistema se evidencia la relación entre las funciones de energía obtenidas y las variables medibles. Esto es, para un análisis nodal

$$\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial \lambda} = \dot{q}(\lambda, x)$$

$$\frac{\partial W'_e(\dot{\lambda}, x)}{\partial \dot{\lambda}} = q(\dot{\lambda}, x)$$

mientras que para un análisis por mallas, se tiene que

$$\frac{\partial W_e(q, x)}{\partial q} = \dot{\lambda}(q, x)$$

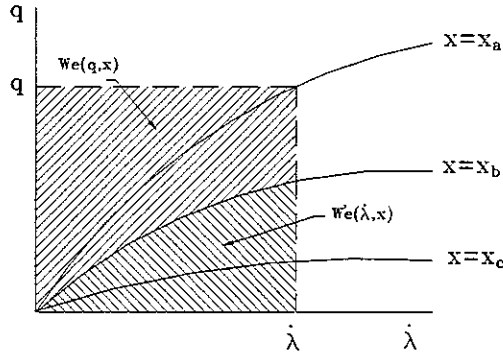


Figura 3.6: Funciones de energía y co-energía del sistema de campo eléctrico

$$\frac{\partial W'_m(\dot{q}, x)}{\partial \dot{q}} = \lambda(\dot{q}, x)$$

## 3.2 Modelado de sistemas electromecánicos vía Euler-Lagrange

Ya que un sistema electromecánico combina estructuras eléctricas y mecánicas, la función lagrangiana que lo define contiene ahora funciones de energía eléctrica y mecánica y co-funciones energéticas eléctricas y mecánicas. Esto es, las funciones de energía y co-energía que definen al sistema se asocian, de manera natural, en la estructura lagrangiana como términos bien definidos, de esta forma el término de co-energía en el Lagrangiano se denomina *función total de co-energía* y similarmente, el término asociado a la energía se nombra *función total de energía*. Entonces el Lagrangiano requiere de estas dos funciones para construirlo.

Por simplicidad en el texto reescribimos dos grupos de ecuaciones ya conocidas, el Lagrangiano de un sistema mecánico se define de manera general, como

$$\mathcal{L} = T' - V \tag{3.5}$$

Para un sistema eléctrico el Lagrangiano se formula como

$$\mathcal{L} = W'_m - W_e \tag{3.6} \quad (\text{mallas})$$

$$\mathcal{L} = W'_e - W_m \tag{3.7} \quad (\text{nodos})$$



La forma en la cual se contruye el Lagrangiano involucra entonces conocer la función de co-energía total  $T'$  dada por

$$T'(\dot{x}, x, \frac{\dot{q}}{\lambda}) = T'(\dot{x}, x) + \begin{matrix} W'_m(\dot{q}) & (mallas) \\ W'_e(\dot{\lambda}) & (nodos) \end{matrix} \quad (3.8)$$

así como la función de energía total  $\mathcal{V}$  dada por

$$\mathcal{V}(x, \frac{q}{\lambda}) = V(x) + \begin{matrix} W_e(q) & (mallas) \\ W_m(\lambda) & (nodos) \end{matrix} \quad (3.9)$$

La función de disipación de Rayleigh tiene la forma general

$$\mathcal{F}(\dot{x}, \frac{\dot{q}}{\lambda}) = F'_m(\dot{x}) + \begin{matrix} F'_e(\dot{q}) & (mallas) \\ F'_e(\dot{\lambda}) & (nodos) \end{matrix} \quad (3.10)$$

El Lagrangiano total del sistema se define entonces como

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x, \frac{\dot{q}}{\lambda}, \frac{q}{\lambda}) = T'(\dot{x}, x, \frac{\dot{q}}{\lambda}) - \mathcal{V}(x, \frac{q}{\lambda}) + \mathcal{F}(\dot{x}, \frac{\dot{q}}{\lambda}) \quad \begin{matrix} (mallas) \\ (nodos) \end{matrix} \quad (3.11)$$

Si se analizan cuidadosamente las funciones totales de co-energía (3.8) y energía (3.9), se puede conocer el vasto alcance de esta formulación. Note que  $T'$  se compone de la co-energía cinética y de la co-energía eléctrica  $W'_e$  o magnética  $W'_m$ , según sea el tipo de análisis para la parte eléctrica. La co-energía cinética  $T'$  puede ser función de la velocidad y de la posición, y no sólo de la velocidad cómo se presenta en la tabla 2.1.

Ahora bien, suponga que las co-energías  $W'_m$  o  $W'_e$ , en cierto sistema, son funciones de más variables además de  $\dot{q}$  o  $\dot{\lambda}$ . Por ejemplo, asuma que  $W'_m$  es función de todas las corrientes de malla, esto es de todas las  $\dot{q}$ 's, y también de ciertas coordenadas mecánicas en un sistema electromecánico. En otras palabras, suponga

$$W'_m = W'_m(\dot{q}, x) \quad (3.12)$$

con lo cual se indica que  $W'_m$  depende de todas las coordenadas  $\dot{q}$  y  $x$ . Dado que la co-energía magnética es una función de las coordenadas de posición (posición), el término  $-\partial W'_m(\dot{q}, x)/\partial x_k$  sería incluido en la ecuación para la fuerza en la coordenada mecánica. Analizando el significado de esto, si se

realiza una formulación por mallas para la parte eléctrica del sistema, la función total de co-energía está dada por

$$T'(\dot{x}, x, q) = T'(\dot{x}, x) + W'_m(\dot{q}, x) \quad (3.13)$$

Empleando la suposición hecha en (3.12), la co-energía magnética depende de las coordenadas de posición mecánicas. De forma similar, la función total de energía está dada por

$$\mathcal{V}(x, q) = V(x) + W_e(q) \quad (3.14)$$

De la ecuación (3.11), el Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x, \dot{q}, q) = T'(\dot{x}, x) + W'_m(\dot{q}, x) - V(x) - W_e(q) \quad (3.15)$$

Para la  $k$ -ésima coordenada mecánica, la ecuación EL proporciona la siguiente ecuación de equilibrio

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}_k} \right] - \frac{\partial T'(\dot{x}, x)}{\partial x_k} - \frac{\partial W'_m(\dot{q}, x)}{\partial x_k} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} = Q_k \quad (3.16)$$

Los términos que aparecen en la ecuación anterior tienen la siguiente interpretación. En el lado izquierdo de la ecuación, los primeros dos términos son fuerzas debidas a la inercia. El cuarto término, involucra la energía potencial, representa las fuerzas presentes en los resortes. El término  $Q_k$  en el lado derecho de la ecuación incluye todas las fuerzas externas aplicadas al  $k$ -ésimo nodo mecánico. El término restante  $-\partial W'_m(\dot{q}, x)/\partial x_k$  es una fuerza mecánica la cual se incrementa debido al almacenamiento de co-energía eléctrica, y por lo tanto es llamada *fuerza mecánica de origen eléctrico*. En el ejemplo que se presenta a continuación se ilustran las ventajas del método.

**Ejemplo 5** Considere el sistema de levitación magnética que se ilustra en la figura 3.7. Realizando un análisis por mallas para la parte eléctrica del sistema, se emplea la función total de co-energía, esto es

$$T'(\dot{x}, x, \dot{q}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + W'_m(\dot{q}, x)$$

La función de co-energía magnética para este dispositivo, considerando  $L(x) = \frac{c}{x}$ , con  $c$  una constante, se determina como

$$W'_m(\dot{q}, x) = \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2.$$

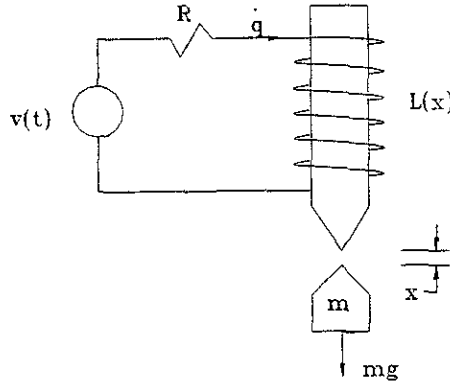


Figura 3.7: Sistema de levitación magnética

La función de energía total  $\mathcal{V}$  en este caso es cero. Por lo tanto el Lagrangiano tiene la siguiente estructura

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2.$$

La función de disipación de Rayleigh corresponde a la expresión

$$F'_e(\dot{q}) = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

por lo que la función total de disipación es

$$\mathcal{F}(\dot{x}, \dot{q}) = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema para la parte mecánica

$$Q_x = Mg$$

y para la parte eléctrica

$$Q_q = v(t)$$

Las ecuaciones de equilibrio para el subsistema eléctrico se obtienen a partir de la ecuación  $EL$ , por lo cual se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x})}{\partial \dot{q}} = Q_q$$

Desarrollando la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{q}} &= \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{q}} \right] &= L(x) \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{x} \dot{q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x})}{\partial \dot{q}} &= R\dot{q} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de equilibrio para la parte eléctrica es

$$L(x) \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{x} \dot{q} + R\dot{q} = v(t)$$

La ecuación de equilibrio para el subsistema mecánico se determina a partir de la ecuación EL como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = Q_x$$

Evalúando las derivadas parciales de esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] &= M\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, x, \dot{x})}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q}, \dot{x})}{\partial \dot{x}} &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual la ecuación de equilibrio mecánica es

$$M\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2 = Mg$$

en donde el término  $\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2$  corresponde a la fuerza mecánica de origen eléctrico.



El desarrollo del Lagrangiano para sistemas electromecánicos es idéntico al formulado para sistemas de una sola naturaleza, la única diferencia yace en el hecho de que las funciones eléctricas involucran coordenadas eléctricas y mecánicas, esto es la metodología no cambia. Retomando los resultados obtenidos se observa que si a un sistema electromecánico aplicamos leyes de Kirckchhof, leyes de Newton más el principio de la conservación de la energía, el modelo obtenido es el mismo al que se obtiene por Euler-Lagrange.

Haste este momento se ha desarrollado la metodología de modelado a emplear, en el siguiente capítulo se propone la filosofía de control, la cual se encuentra asociada a las características de las ecuaciones Euler-Lagrange, de este modo, se podrá observar que el desarrollo Lagrangiano no sólo es una herramienta de modelado.



;

# Capítulo 4

## Control de sistemas electromecánicos

En el capítulo anterior se obtuvo un modelo para los sistemas electromecánicos empleando la formulación Lagrangiana. Partiendo de este modelo, en éste capítulo se presenta el diseño de la estrategia de control desarrollada en este trabajo de tesis. La filosofía empleada para su diseño considera de manera fundamental la estructura física del sistema, aprovechando sus propiedades de disipación para poderla controlar. El objetivo es diseñar un control a partir de la entrada de control para el sistema electromecánico, con el cual se logre controlar la velocidad mecánica de este.

La organización de este capítulo presenta como primera parte los preliminares matemáticos esenciales para exponer las propiedades de los sistemas EL.

### 4.1 Filosofía de diseño

El diseño del controlador requiere conocer algunos conceptos, los cuales se exponen a continuación.

#### 4.1.1 Preliminares

A continuación se presentan los preliminares esenciales para exponer las propiedades de los sistemas EL.

**Definición 6** Considere un sistema representado por la ecuación

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.1)$$

el cual posee una salida definida como

$$y = h(x, u) \quad (4.2)$$

Si existe una función

$$\mathcal{H}(x(t)) \geq 0 \quad (4.3)$$

tal que se satisface la siguiente desigualdad

$$\mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x(0)) \leq \int_0^T u^T y \, dt \quad (4.4)$$

entonces se dice que el sistema descrito por 4.1 es **pasivo**. Esta ecuación es conocida como desigualdad de pasividad.

**Teorema 7** Considere un sistema representado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (4.5)$$

si  $x = \bar{x}$  con  $u = 0$ , satisface que  $f(\bar{x}, 0) = 0$ ; y  $h(\bar{x}, 0) = 0$ ; entonces  $\bar{x}$  califica como punto de equilibrio. Si existe una función definida positiva

$$V(x) \geq 0$$

tal que la primera derivada de la función satisface

$$\dot{V}(x) \leq 0;$$

con  $u = 0$  y valuada lo largo de la trayectoria de soluciones de (4.5), entonces se dice que  $\bar{x}$  es **estable** en el sentido de Lyapunov. [Spo89]

**Proposición 8** Un sistema pasivo es estable en el sentido de Lyapunov

## Prueba

Partiendo de la desigualdad de pasividad

$$\mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x(0)) \leq \int_0^T u^T y \, dt$$

considerando que la entrada  $u = 0$ , se tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{H}(x(t)) - \mathcal{H}(x(0)) \leq 0$$

la diferencia descrita en la ecuación anterior implica que la derivada de la función de energía es

$$\dot{\mathcal{H}}(x) \leq 0$$



### 4.1.2 Propiedades de los sistemas Euler-Lagrange

Dado que el objetivo de control es explotar las propiedades que presentan los sistemas descritos por ecuaciones EL, es necesario entonces buscar estas propiedades en el modelo disponible.

Para un sistema electromecánico no conservativo la formulación EL está dada por

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \mathcal{Q} \quad (4.6)$$

El Lagrangiano mecánico está dado por

$$\mathcal{L}_m = T'(q_m, \dot{q}_m) - V(q_m) \quad (4.7)$$

y la función de disipación de energía es  $F_m(\dot{q}_m)$ . Además, las fuerzas externas generalizadas se encuentran definidas por

$$Q_m = -F_L$$

que corresponden a las perturbaciones externas.

El Lagrangiano eléctrico es



$$\mathcal{L}_e = W'_m(\dot{q}_e, q_m) - W_e(q_e, q_m) \quad (4.8)$$

y la función de disipación de energía es

$$F_e(\dot{q}_e)$$

Las fuerzas externas generalizadas son

$$Q_e = Mu$$

en donde  $M$  tiene la forma

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$

El Lagrangiano total se construye como

$$\mathcal{L}_T = T'(q_m, \dot{q}_m) + W'_m(\dot{q}_e, q_m) - V(q_m) - W_e(q_e, q_m)$$

Partiendo de esta expresión la formulación EL para el subsistema eléctrico es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{q}_e} = \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e}$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{q}_e} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]$$

Por lo tanto con respecto a  $q_e$  es

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial q_e} = - \frac{\partial W(q_e, q_m)}{\partial q_e}$$

Las fuerzas disipativas para el subsistema se encuentran dadas por la relación

$$\frac{\partial \mathcal{F}_T}{\partial \dot{q}_e} = \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e}$$

Substituyendo este conjunto de ecuaciones en (4.6), se obtiene el siguiente modelo para la parte eléctrica

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right] + \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_e} + \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e} = Mu \quad (4.9)$$

Ahora bien, el modelo para el subsistema mecánico se encuentra a través del Lagrangiano total con respecto a  $\dot{q}_m$  y  $q_m$ , por lo que se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T'(q_m, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m}$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{q}_m} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(q_m, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]$$

El Lagrangiano con respecto a  $q_m$  es

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial q_m} = \frac{\partial T'(q_m, \dot{q}_m)}{\partial q_m} - \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial q_m} - \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_m}$$

en donde se define  $\frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial q_m} - \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_m} = -f_e$  y siendo las fuerzas de disipación

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial F_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m}$$

El modelo para el subsistema mecánico está formulado como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(q_m, \dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \right] - \frac{\partial T'(q_m, \dot{q}_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + \frac{\partial F_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} = f_e - F_L \quad (4.10)$$

El objetivo es probar que los sistemas Euler-Lagrange son sistemas pasivos.

Para ello se considera que el subsistema eléctrico y el subsistema mecánico establecen un mapa pasivo respectivamente de la forma

$$\sum_e : \begin{bmatrix} u \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i_a \\ f_e \end{bmatrix}; \quad \sum_m : (f_e + F_L) \rightarrow \dot{q}_m$$

## Prueba

A partir de la ecuación (4.8) del subsistema eléctrico se tiene que su derivada es igual a

$$\dot{\mathcal{L}}_e = \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T \ddot{q}_e + \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m - \left[ \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_e} \right]^T \dot{q}_e - \left[ \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_m} \right]^T \dot{q}_m$$

de esta ecuación se observa que el segundo y cuarto término del lado izquierdo son precisamente  $-f_e$  con lo que se tiene que

$$\dot{\mathcal{L}}_e = \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T \ddot{q}_e - \left[ \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_e} \right]^T \dot{q}_e - f_e^T \dot{q}_m \quad (4.11)$$

Por otro lado se sabe que

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \right] = \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T \ddot{q}_e + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T \dot{q}_e$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_e &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T \dot{q}_e - \left[ \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_e} \right]^T \dot{q}_e - f_e^T \dot{q}_m \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \right] - \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right]^T + \left[ \frac{\partial W_e(q_e, q_m)}{\partial q_e} \right]^T \right\} \dot{q}_e - f_e^T \dot{q}_m \end{aligned}$$

Del modelo eléctrico se sabe que el segundo y tercer término de la ecuación anterior corresponden a  $\frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e}$ , entonces

$$\dot{\mathcal{L}}_e = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial W'_m(\dot{q}_e, q_m)}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \right] + \left\{ \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e} - Mu \right\} \dot{q}_e - f_e^T \dot{q}_m$$

Además se conoce que

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e - \mathcal{L}_e \right] = \dot{\mathcal{H}}_e = \frac{d}{dt} [W'_m(\dot{q}_e, q_m) + \partial W_e(q_e, q_m)]$$

entonces

$$\frac{d\mathcal{L}_e}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \right] + \left\{ \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e} - \mathbf{M}u \right\}^T \dot{q}_e - f_e^T \dot{q}_m$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e - \mathcal{L}_e \right] = - \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e}^T \dot{q}_e + (\mathbf{M}u)^T \dot{q}_e + f_e^T \dot{q}_m$$

Con esto la derivada de la función de energía total es

$$\dot{\mathcal{H}}_e = - \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e}^T \dot{q}_e + (\mathbf{M}u)^T \dot{q}_e + f_e^T \dot{q}_m$$

donde al integrando la ecuación anterior se tiene que

$$\mathcal{H}_e(t) - \mathcal{H}_e(0) = - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e}^T \dot{q}_e dt + \int_0^T u^T \mathbf{M}^T \dot{q}_e dt + \int_0^T f_e^T \dot{q}_m dt \quad (4.12)$$

En donde  $M$  tiene la estructura

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{q}_e = \begin{bmatrix} \dot{q}_{ea} \\ \dot{q}_{er} \end{bmatrix}$$

entonces la expresión anterior indica que existen ciertas coordenadas que no son actuadas, esto es no existe un control directo sobre ellas. Partiendo de esta estructura particular se tiene entonces que

$$u^T \mathbf{M}^T \dot{q}_e = u^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{ea} \\ \dot{q}_{er} \end{bmatrix} = u^T \dot{q}_{ea}$$

Para poder comprobar la propiedad de pasividad se realiza la siguiente suposición

$$\left( \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)}{\partial \dot{q}_e} \right)^T \dot{q}_e \geq \alpha \|\dot{q}_e\|^2; \quad \alpha \geq 0 \quad (4.13)$$

es decir, que se debe satisfacer que la función de disipación es no negativa.

Entonces la ecuación (4.12) se expresa como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_e(t) - \mathcal{H}_e(0) &= - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt + \int_0^T u^T \dot{q}_e dt + \int_0^T f_e^T \dot{q}_m dt \\ &= - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt + \int_0^T [u \quad \dot{q}_m] \begin{bmatrix} \dot{q}_{ea} \\ f_e \end{bmatrix} dt\end{aligned}$$

donde si se define que  $u = [u \quad \dot{q}_m]$  y  $y = [\dot{q}_{ea} \quad f_e]^T$  resulta en

$$\mathcal{H}_e(t) - \mathcal{H}_e(0) = - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt + \int_0^T uy dt$$

La ecuación anterior debe satisfacer (4.4), esto implica que

$$\mathcal{H}_e(t) = - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt + \int_0^T uy dt + \mathcal{H}_e(0)$$

donde, para satisfacer esta igualdad se debe cumplir que

$$\int_0^T uy dt - \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt + \mathcal{H}_e(0) \geq 0$$

entonces

$$\int_0^T uy dt \geq \int_0^T \frac{\partial F_e(\dot{q}_e)^T}{\partial \dot{q}_e} \dot{q}_e dt - \mathcal{H}_e(0) \geq \alpha \int_0^T \|\dot{q}_e\|^2 dt + \beta$$

donde si  $\beta = -\mathcal{H}_e(0)$ , se demuestra la primera parte de la proposición.

Para el subsistema mecánico se realiza la prueba partiendo de la ecuación (4.7). Se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{L}_m &= \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \ddot{q}_m + \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} \right]^T \dot{q}_m - \left[ \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} \right]^T \dot{q}_m \\ &= \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \ddot{q}_m + \left\{ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} - \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} \right\}^T \dot{q}_m \\ &= \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \ddot{q}_m - f_e^T \dot{q}_m\end{aligned}$$

$$\text{donde } -f_e = \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial q_m} - \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m}.$$

Por otro lado se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m \right\} = \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \ddot{q}_m + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_m &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m \right\} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m - f_e \dot{q}_m \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m \right\} + \left\{ -\frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial F_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \right\} \dot{q}_m \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m \right\} - \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right] + f_e \right\} \dot{q}_m \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[ \frac{\partial T'(\dot{q}_m, q_m)}{\partial \dot{q}_m} \right]^T \dot{q}_m \right\} + \left[ \frac{\partial F_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} - f_e^T + F_L^T \right] \dot{q}_m \end{aligned}$$

Además para este subsistema mecánico se tiene que

$$\mathcal{H}_m = T'(\dot{q}_m, q_m) + \mathcal{V}(q_m)$$

Se sabe que

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{q}_m} \right)^T \dot{q}_m - \mathcal{L}_m \right] = \mathcal{H}_m = \frac{d}{dt} [T'(\dot{q}_m, q_m) + \mathcal{V}(q_m)] \quad (4.14)$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_m = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{q}_m} \right)^T \dot{q}_m \right] + \left\{ \frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} - f_e^T + F_L^T \right\} \dot{q}_m$$

lo cual implica que la ecuación (4.14) es entonces

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{q}_m} \right)^T \dot{q}_m - \mathcal{L}_m \right] = -\frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} + f_e^T - F_L^T \dot{q}_m$$

Por la definición dada en (4.14), se tiene entonces que

$$\dot{\mathcal{H}}_m = -\frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} + f_e^T - F_L^T \dot{q}_m$$

Integrando esta ecuación se tiene ahora

$$\mathcal{H}_m(t) - \mathcal{H}_m(0) = -\int_0^t \frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m dt + \int_0^t (f_e^T - F_L^T) \dot{q}_m dt$$

ya que se hace la misma suposición descrita por la ecuación (4.13), se tiene

$$\mathcal{H}_m(t) - \mathcal{H}_m(0) = -\int_0^t \frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m dt + \int_0^t \tilde{u}\tilde{y} dt$$

donde  $\tilde{u}$  es definida como  $f_e^T - F_L^T$  y  $\tilde{y}$  se define como  $\dot{q}_m$ .

Entonces

$$\mathcal{H}_m(t) = -\int_0^t \frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m dt + \int_0^t \tilde{u}\tilde{y} dt + \mathcal{H}_m(0)$$

lo cual implica que

$$\int_0^t \tilde{u}\tilde{y} dt \geq \int_0^t \frac{\partial F_e(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m dt - \mathcal{H}_m(0) \geq \alpha \int_0^t \|\dot{q}_m\|^2 dt + \gamma$$

donde  $\gamma = -\mathcal{H}_m(0)$ , se demuestra la segunda parte de la proposición. ♠♠♠

Bajo las condiciones descritas en ambas demostraciones, el modelo del sistema electromecánico puede ser visto como la interconexión de dos sub-sistema pasivos (4.1), esto implica que la interconexión de un bloque pasivo con otro bloque pasivo resulta en un bloque total que preserva la propiedad de pasividad. [VanDer96]

Se puede deducir que los sistema EL son estables en el sentido de Lyapunov por ser pasivos.

Con las propiedades presentadas hasta ahora se propone como metodología de control el esquema presentado a continuación.

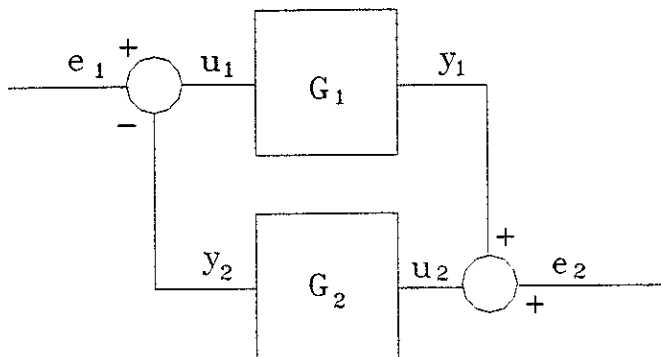


Figura 4.1: Interconexión de bloques

### 4.1.3 Diseño del Control

Esta sección presenta el diseño de la estrategia de control empleada. El diseño del control se divide en tres partes, la primera etapa es controlar las corrientes, a través de  $u$  con un control que emplea  $i_a$ . Dicho control debe preservar la propiedad de pasividad del lazo cerrado entre este control y el subsistema eléctrico para garantizar estabilidad Lyapunov. Dado que la fuerza de interacción  $y$  es función de las corrientes y cargas del sistema sólo es necesario garantizar un control sobre estas variables para llevar a  $y$  a un valor deseado.

Una vez que se tiene control sobre  $y$ , basta elegir de manera adecuada  $y_d$ , para que la posición o la velocidad del sistema mecánico tengan el comportamiento deseado.

Es necesario remarcar que la metodología expuesta es muy general y en este caso el diseño del control es muy complicado, el objetivo es describir sistemas con una estructura particular para lo cual se hacen las siguientes consideraciones.

Para un sistema electromecánico de variables eléctricas lineales, la estructura de las funciones de energía para el subsistema eléctrico tienen la forma

$$W'_m(q_m, \dot{q}_e) = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T D(q_m) \dot{q}_e$$

$$W_e(q_m, q_e) = \frac{1}{2} q_e^T C(q_m) q_e$$



donde  $D(q_m) = D^T(q_m) > 0$  y  $C(q_m) = C^T(q_m) > 0$ ,  $\forall q_m \in \mathcal{R}$ , la función de disipación de Rayleigh se define como

$$F_e(\dot{q}_e) = \frac{1}{2} R \dot{q}_e^2$$

Para el subsistema mecánico las ecuaciones están definidas por

$$T'(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} J \dot{q}_m$$

Además la función de energía potencial es una función de la forma  $V(q_m)$ . La función de disipación para el subsistema se describe como

$$F_m(\dot{q}_m) = \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2$$

Bajo esta estructura en particular el modelo tiene la siguiente forma, para la parte eléctrica

$$D(q_m) \ddot{q}_e + \dot{D}(q_m) \dot{q}_e + C(q_m) q_e + R \dot{q}_e = M u \quad (4.15)$$

mientras que para la parte mecánica el modelo se describe como

$$J \ddot{q}_m + B \dot{q}_m + g(q_m) = y - y_L \quad (4.16)$$

en donde

$$g(q_m) = \frac{\partial V(q_m)}{\partial (q_m)}$$

define los términos gravitacionales, y  $y$  se define como

$$y = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \frac{\partial D(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e - \frac{1}{2} q_e^T \frac{\partial C(q_m)}{\partial q_m} q_e \quad (4.17)$$

el cual contiene las fuerzas de interacción entre ambos subsistemas.

La primera etapa del diseño del control es lograr controlar las corrientes y cargas del subsistema eléctrico, el objetivo es entonces llevar estas variables a un comportamiento deseado, esto es, obtener la función del comportamiento dinámico del error, para lo cual se define el error eléctrico como

$$e = q_e - q_{ed} \quad (4.18)$$

en donde  $q_{ed}$  corresponde a la carga eléctrica deseada. Para el propósito de garantizar que las corrientes y cargas de las cuales depende  $y$  tiendan a valores deseados se define una función  $z$  la cual está dada por

$$z = \dot{e} + \Lambda e \quad (4.19)$$

lo cual es equivalente a expresarla como

$$e = \frac{1}{s + \Lambda} z$$

esta expresión sólo es una descripción del error filtrado. Esta ecuación representa a un sistema de primer orden estable en el sentido entrada acotada-salida acotada (BIBO). Esta expresión permite observar que si la función  $z$  tiende a cero, el error es cero.

De las expresiones 4.18 y 4.19 se deducen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} z &= \dot{q}_e - \dot{q}_d + \Lambda e \\ \Rightarrow \dot{q}_e &= z + \dot{q}_d - \Lambda e \\ \Rightarrow \ddot{q}_e &= \dot{z} + \ddot{q}_d - \Lambda \dot{e} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Una vez que se ha definido convenientemente el error eléctrico se desarrolla una ecuación dinámica para el error la cual se representa como

$$D(q_m)\dot{z} + \dot{D}(q_m)z + Rz = \Psi \quad (4.21)$$

donde  $\Psi$  se define convenientemente como

$$\Psi = Mu - \left\{ D(q_m) [\ddot{q}_{ed} - \Lambda \dot{e}] + \dot{D}(q_m) [\dot{q}_d - \Lambda e] + R [\dot{q}_{ed} - \Lambda e] + C(q_m)q_e \right\} \quad (4.22)$$

donde se observa que  $\Psi$  se encuentra la entrada de control  $u$ . Se observa además que  $\Psi$  contiene como segundo término una estructura similar a 4.21 pero en los términos definidos en 4.20.

La función  $\dot{D}(q_m)\dot{z}$  puede expresarse de la siguiente de la forma

$$\dot{D}(q_m)\dot{z} = \frac{\partial D(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m z = C(q_m, \dot{q}_m, z) z$$

la cual posee la ventaja de que

$$S^T \left[ \dot{D}(q_m) - 2C(q_m, \dot{q}_m, z) \right] S = 0 \quad (4.23)$$

la cual se satisface para cualquier  $S \in \mathcal{R}^n$ . La expresión anterior contiene un hecho importante, esta forma cuadrática involucra a los términos que no generan trabajo. Empleando este resultado la ecuación (4.21) toma la forma

$$D(q_m)\dot{z} + C(q_m, \dot{q}_m, z)z + Rz = \Psi \quad (4.24)$$

Se buscan ahora las condiciones para las cuales  $z = 0$ . Se propone entonces una función candidata de Lyapunov la cual dependa de  $z$  con lo que se tiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} z^T D(q_m) z \\ \dot{V} &= z^T D(q_m) \dot{z} + \frac{1}{2} z^T \dot{D}(q_m) z \end{aligned}$$

la cual se puede expresar, aprovechando la última propiedad expuesta, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T [-C(q_m, \dot{q}_m, z)z - Rz + \Psi] + \frac{1}{2} z^T \dot{D}(q_m) z \\ &= \frac{1}{2} z^T \left[ \dot{D}(q_m) - 2C(q_m, \dot{q}_m, z) \right] z - z^T Rz + z^T \Psi \end{aligned}$$

Se busca ahora que el término  $-z^T Rz$  sea negativo definido, así que empleando la propiedad (4.23) y considerando que  $\Psi = 0$  se tiene que

$$\dot{V} = -z^T Rz < 0$$

lo cual implica que en el sentido de Lyapunov

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0$$

con lo cual se esta garantizando que el error en la corrientes tiende a un valor deseado

## Control de corrientes: etapa 1

En esta etapa del diseño se busca un control que proporcione a  $\Psi$  una estructura tal que dependa de  $z$ , esto es

$$\Psi = -kz$$

tal que  $R + k > 0$ .

Primero se considera la estructura de las cada una de las matrices del subsistema eléctrico, en donde la matriz de inductancias está dada por

$$D(q_m) = \begin{bmatrix} D_{11}(q_m) & D_{12}(q_m) \\ D_{12}^T(q_m) & D_{22}(q_m) \end{bmatrix}$$

en donde los términos de la antidiagonal corresponden a las inductancias mutuas.

La matriz de disipación incluye entonces los términos las resistencias del sistema.

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Por último la matriz de capacitancias tiene la forma

$$C(q_m) = \begin{bmatrix} C_1(q_m) & 0 \\ 0 & C_2(q_m) \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación se define una corriente en términos de las corrientes deseadas y el error en las cargas, con lo que se tiene que

$$\dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} = \dot{q}_d - \Lambda e = \begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} - \Lambda e_1 \\ \dot{q}_{d2} - \Lambda e_2 \end{bmatrix}$$

en donde los errores  $e_1$  y  $e_2$  están dados por

$$e_1 = q_1 - q_{d1}; e_2 = q_2 - q_{d2}$$

En base a los argumentos anteriores  $\Psi$  puede expresarse.

$$\Psi = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11}(q_m)\dot{q}_{r1} + D_{12}(q_m)\dot{q}_{r2} + \dot{D}_{11}(q_m)\dot{q}_{r1} + \dot{D}_{12}(q_m)\dot{q}_{r2} + R_1\dot{q}_{r1} + C_1(q_m)q_1 \\ D_{12}^T(q_m)\dot{q}_{r1} + D_{22}(q_m)\dot{q}_{r2} + \dot{D}_{12}^T(q_m)\dot{q}_{r1} + \dot{D}_{22}(q_m)\dot{q}_{r2} + R_2\dot{q}_{r2} + C_2(q_m)q_2 \end{bmatrix}$$

Ahora bien,  $u$  tiene la estructura descrita por la siguiente ecuación

$$u = D_{11}(q_m)\dot{q}_{r1} + D_{12}(q_m)\dot{q}_{r2} + \dot{D}_{11}(q_m)\dot{q}_{r1} + \dot{D}_{12}(q_m)\dot{q}_{r2} \quad (4.25)$$

$$+ R_1\dot{q}_{r1} + C_1(q_m)q_1 - k_1z_1 \quad (4.26)$$

Si  $\dot{q}_d$  y  $q_d$  se eligen de tal forma que se satisface

$$D_{12}^T(q_m)\dot{q}_{r1} + D_{22}(q_m)\dot{q}_{r2} + \dot{D}_{12}^T(q_m)\dot{q}_{r1} + \dot{D}_{22}(q_m)\dot{q}_{r2} + R_2\dot{q}_{r2} + C_2(q_m)q_2 = 0 \quad (4.27)$$

Observe que el último término de (4.26) corresponde precisamente al valor  $\Psi$  que se busca entonces se puede decir que

$$\Psi = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} -k_1z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que si  $k_1$  es tal que  $\begin{bmatrix} R_1 + k_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0$  entonces se satisfacen las condiciones requeridas.

**Observación 1** *La desventaja del controlador es que satisfacer la ecuación (4.27) depende de cada sistema y además de (4.26) se observa que se necesita medir  $\dot{q}_{r1}$  y  $\dot{q}_{r2}$  y sus derivadas, lo que implica que se debe medir  $\dot{q}$  y  $q$ . Sin embargo para el sistema bajo estudio se satisfacen ambas restricciones.*

## Control de la señal de acoplo: etapa 2

Partiendo de la definición de la señal de interacción  $y$  (4.17) se puede escribir una relación similar para la señal de interacción deseada en función de los valores deseados para  $y$ , con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$y_d = \frac{1}{2}\dot{q}_d^T D(q_m)q_d - \frac{1}{2}q_d^T C(q_m)q_d \quad (4.28)$$

De forma similar a la etapa anterior, es posible expresar  $y - y_d$  como el error entre estas dos señales lo que implica el error para la señal de interacción

está dada por

$$\begin{aligned}
 y - y_d &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q_m)\dot{q} - \frac{1}{2}q_d^T D(q_m)q_d - \frac{1}{2}q^T C(q_m)q + \frac{1}{2}q_d^T C(q_m)q_d \\
 &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q_m)\dot{q} - \frac{1}{2}(\dot{q} - e)^T D(q_m)\dot{q}_d - \frac{1}{2}q^T C(q_m)q + \\
 &\quad \frac{1}{2}(q - e)^T C(q_m)q_d \\
 &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q_m)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{e}^T D(q_m)q_d - \frac{1}{2}q^T C(q_m)e - \frac{1}{2}e^T C(q_m)q_d \\
 &= \frac{1}{2}(\dot{e} + \dot{q}_d)^T D(q_m)\dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T D(q_m)q_d - \frac{1}{2}(e + q_d)^T C(q_m)e - \\
 &\quad \frac{1}{2}e^T C(q_m)q_d \\
 &= \frac{1}{2}\dot{e}^T D(q_m)\dot{e} + \dot{e}^T D(q_m)q_d - \frac{1}{2}e^T C(q_m)e - e^T C(q_m)q_d
 \end{aligned}$$

Dado que la señal  $y$  es una función de las corrientes, si estas convergen a un valor deseado  $y$  debe tender a una  $y_d$ , sin embargo es necesario establecer que sólo si  $\dot{q}_d$ ,  $q_d$ ,  $D(q_m)$  y  $C(q_m)$  están acotadas entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_d) = 0$$

es decir el criterio se satisface y se obtiene control de la fuerza de interacción.

Antes de continuar con el análisis es necesario observar que se ha impuesto una condición más a  $\dot{q}_d$ ,  $q_d$ , el hecho de que deben ser acotadas.

### Control de la posición o velocidad mecánica: etapa 3

Para completar el diseño del controlador de sistema electromecánico se analiza por último el subsistema mecánico. De la etapa anterior se logró el control sobre la señal de interacción, la cual depende de las corrientes y las cargas del sistema. En esta etapa se muestra que al tener control sobre la entrada del subsistema mecánico se puede lograr controlar (definiendo una  $y_d$  adecuada) su salida, esto es, la posición o la velocidad mecánica. Partiendo de la ecuación 5.53 la cual describe el modelo para el subsistema mecánico se puede escribir una ecuación  $y_d$  que posea la misma estructura que 5.53, con la cual se tiene que  $y_d$  se define como

$$y_d \doteq J\dot{q}_{md} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + B\dot{q}_{md} + y_L \quad (4.29)$$

lo cual es equivalente a escribir el modelo 5.53 en términos de los valores deseados como

$$J\dot{q}_{md} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + B\dot{q}_{md} = y_d - y_L$$

La expresión anterior es útil para definir el error mecánico en términos de la diferencia de ambas ecuaciones (5.53) y (4.29). De esta forma el error se define como

$$e_m = \dot{q}_m - \dot{q}_{md} \quad (4.30)$$

A partir de esta definición se puede formular una ecuación dinámica del error mecánico como

$$J\dot{e}_m + Be_m = y - y_d \quad (4.31)$$

La expresión anterior se puede representar como

$$e_m = \frac{1}{Js + B}(y - y_d) \quad (4.32)$$

Esta expresión es similar a la descrita para la  $z$  del sistema eléctrico, y corresponde de manera análoga a un sistema BIBO estable.

De la definición expuesta para el error mecánico se puede entonces garantizar que si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_d) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_m = 0$$

**Observación 2** *Note que la definición de  $y_d$  implica conocer  $\frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m}$ ,  $y_L$  lo cual establece una tercera limitación.*

Se busca ahora aplicar esta metodología a un sistema con estructura física particular para lo cual se seleccionó el motor de inducción como caso de estudio. ■

## Capítulo 5

# Caso de Estudio: El motor de inducción

En el capítulo anterior se desarrolló la estrategia de control a emplear sobre un sistema físico con una estructura particular. El objetivo buscado en este capítulo es mostrar como se implanta el método de control basado en pasividad en sistemas electromecánicos. Se selecciona el motor de inducción (MI) como el ejemplo más interesante debido a que la tendencia industrial en automatización con máquinas eléctricas ha sido utilizar motores de corriente directa (CD), debido a la relativa facilidad con que se puede obtener un control preciso. No obstante, los motores de CD presentan algunas desventajas frente a los motores de inducción (MI), debidas fundamentalmente a la forma de construcción de estos últimos. Específicamente, los MI al ser utilizados están prácticamente libres de mantenimiento, tienen mucho más alta proporción de torque inercial (debido a la falta de bobinas en el rotor) y pueden ser utilizados en medios ambientes hostiles (tales como, corrosivos y explosivos), por mencionar algunas. Por otro lado, los MI son caracterizados por modelos matemáticos no lineales, es decir, son dispositivos mucho más complejos que los motores de CD y por lo tanto, el control es más difícil de realizar por lo complicado de su diseño. Como consecuencia de ello, su implantación también es muy complicada requiriéndose una infraestructura electrónica muy sofisticada.

En este capítulo se obtiene el modelo del MI a través de las ecuaciones EL, a partir de este modelo se obtiene un modelo más simplificado a través de la transformación de Blondel, se presentan El modelo del motor de inducción de  $3\phi$  se obtiene a través de las ecuaciones EL. Posteriormente se obtiene



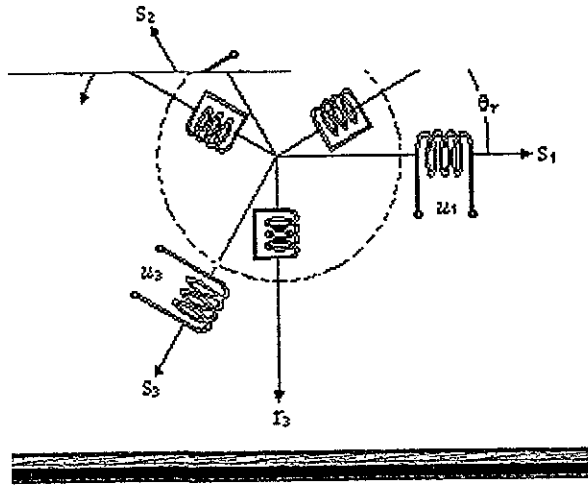


Figura 5.1: Representación del MI de  $3\phi$

un modelo equivalente más simplificado, de dos fases (conocido como  $\alpha\beta$ ), utilizando la transformación de Blondel; se presentan algunas propiedades útiles de la estructura física del motor. En la última sección se realiza el diseño del controlador en base al modelo  $\alpha\beta$ .

## 5.1 Modelo del motor de inducción de $3\phi$

Considere un MI de  $3\phi$  compuesto por tres devanados de estator fijos y tres devanados de rotor los cuales giran a una velocidad angular  $\omega_r$ , como lo muestra la figura 5.1.

Para la obtención del modelo de este motor, éste se descompone en dos sistemas, uno eléctrico y el otro mecánico, considerando las siguientes suposiciones para el sistema eléctrico: **Devanados por fase sinusoidalmente distribuidos con efectos capacitivos despreciables y fases idealmente simétricas.** El estator y el rotor se consideran concéntricos y la banda de aire entre ellos con una longitud radial constante. La permeabilidad de los núcleos se supone infinita y la saturación de los núcleos se desprecia, al igual que las pérdidas en el entrehierro, los efectos de partes terminales de los devanados y

los de las ranuras. Adicionalmente se considera que los materiales magnéticos utilizados en la construcción del motor son lineales.

Se parte de la consideración de que los flujos en el motor están dados por

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_3 & L_{sr} \mathbf{U}(q_7) \\ L_{sr} \mathbf{U}^T(q_7) & L_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.1)$$

donde  $\lambda$  representa el vector de flujos

$$[\lambda_s^T, \lambda_r^T]^T = [\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \lambda_{s3}, \lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \lambda_{r3}]^T \quad (5.2)$$

y  $\dot{\mathbf{q}}$  representa el vector de corrientes

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_s^T, \dot{\mathbf{q}}_r^T]^T = [\dot{q}_{s1}, \dot{q}_{s2}, \dot{q}_{s3}, \dot{q}_{r1}, \dot{q}_{r2}, \dot{q}_{r3}]^T \quad (5.3)$$

adicionalmente

$$\mathbf{U}(q_7) = \begin{bmatrix} \cos(q_7) & \cos(q_7 + \gamma) & \cos(q_7 - \gamma) \\ \cos(q_7 - \gamma) & \cos(q_7) & \cos(q_7 + \gamma) \\ \cos(q_7 + \gamma) & \cos(q_7 - \gamma) & \cos(q_7) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_e(q_7) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_3 & L_{sr} \mathbf{U}(q_7) \\ L_{sr} \mathbf{U}^T(q_7) & L_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

con  $q_7$  la posición del rotor,  $\gamma = 120^\circ$  y los subíndices  $s$  y  $r$  denotando variables de estator y rotor respectivamente.

La matriz de resistencias está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_3 & 0 \\ 0 & R_r \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

que se obtiene de considerar que los tres devanados de estator tienen el mismo valor de resistencias ( $R_s$ ) así como los de rotor ( $R_r$ ).

Para el subsistema mecánico suponga que no existen efectos de torsión en la flecha del motor y la fricción presente se considera de tipo viscoso. Bajo estas condiciones la parte mecánica del motor sólo almacena energía cinética, por lo que

$$T' = \frac{1}{2} J \dot{q}_7^2$$

Además la función de disipación es de la forma

$$F = \frac{1}{2} B \dot{q}_7^2$$

Una vez definidas las funciones de energía para el motor, el Lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, \theta, \omega) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D_e \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} J \dot{q}_7^2$$

con una función de disipación

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} B \dot{q}_7^2$$

Aplicando las ecuaciones EL

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \mathcal{Q}$$

y considerando como coordenadas generalizadas a las cargas en los devanados  $q$  y la posición angular  $q_7$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, q_7, \dot{q}_7) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D_e(q_7) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} J \dot{q}_7^2 & (5.4) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{i}}} &= D_e(q_7) \dot{\mathbf{i}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{i}}} \right] &= D_e(q_7) \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \dot{D}_e(q_7) \dot{\mathbf{q}} = D_e(q_7) \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial D_e(q_7)}{\partial \theta} q_7 \dot{q}_7 \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Además

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}$$

por lo tanto resulta que la ecuación para el sistema eléctrico está dada por

$$D_e(q_7) \frac{d\dot{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{\partial D_e(q_7)}{\partial q_7} \dot{q}_7 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M} \mathbf{u}$$

con

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ u_{s3} \end{bmatrix}$$

y en donde  $\mathbf{M}$  posee la estructura

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

debido a que los devanados de rotor están en corto circuito.

Para el sistema mecánico se tiene, partiendo del Lagrangiano (5.4), que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_7} &= J \dot{q}_7 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_7} \right] = J \frac{d \dot{q}_7}{dt} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_7} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial D_e(q_7)}{\partial q_7} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

siendo la función de disipación descrita por

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$$

De aquí resulta que

$$J \frac{d\omega_r}{dt} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{i}} \frac{\partial D_e}{\partial q_7} \dot{\mathbf{i}} = -\tau_L$$

entonces la ecuación del subsistema mecánico esta definida como

$$J \frac{d \dot{q}_7}{dt} = \tau - \tau_L$$

donde

$$\tau(\dot{q}_7, q_7) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial D_e(q_7)}{\partial \theta} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.5)$$

se identifica como la fuerza mecánica de origen eléctrico, la cual corresponde a la señal de interconexión de los dos subsistemas.

La derivada parcial en la ecuación 5.5 está dada por l ecuación

$$\frac{\partial D_e(q_7)}{\partial q_7} = \mathbf{W}_1(q_7) = -L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W}_{12}(q_7) \\ \mathbf{W}_{21}(q_7) & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{W}_{12}(q_7) = \begin{bmatrix} \sin(q_7) & \sin(q_7 + \gamma) & \sin(q_7 - \gamma) \\ \sin(q_7 - \gamma) & \sin(q_7) & \sin(q_7 + \gamma) \\ \sin(q_7 + \gamma) & \sin(q_7 - \gamma) & \sin(q_7) \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{12}^T(q_7)$$

y además, si se define

$$\tau(\dot{q}_7, q_7) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_1(q_7) \dot{\mathbf{q}}$$

las ecuaciones de la parte eléctrica y mecánica puede reescribirse como

$$D_e(q_7) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_1(q_7) \dot{q}_7 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}u$$

$$J \frac{d \dot{q}_7}{dt} + B \dot{q}_7 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_1(q_7) \dot{\mathbf{q}} - \tau_L$$

Para finalizar esta sección es necesario mencionar el hecho de que cualquier efecto disipativo en la flecha del motor (fricción) se incluye en el par de carga, por lo que en general esta variable dependerá tanto de la posición como de la velocidad angular del motor.

El modelo completo para el motor de tres fases para la parte eléctrica está dado por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \mathbf{U}(q_7) \\ L_{sr} \mathbf{U}^T(q_7) & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} - \\ & L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & W_{12}(q_7) \\ W_{21}(q_7) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \dot{q}_7 + \begin{bmatrix} R_s I_3 & 0 \\ 0 & R_r I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

y para la parte mecánica está dado por la ecuación

$$J \ddot{q}_7 + B \dot{q}_7 = \tau - \tau_L. \quad (5.7)$$

El siguiente paso es llevar este modelo a una expresión reducida, esto es a un modelo de dos fases

## 5.2 Modelo equivalente de $2\phi$

Se sabe que una de las corrientes, tanto de estator como de rotor, es redundante si se consideran neutros aislados, es decir

$$\dot{q}_{s1} + \dot{q}_{s2} + \dot{q}_{s3} = 0 \quad (5.8)$$

y

$$\dot{q}_{r1} + \dot{q}_{r2} + \dot{q}_{r3} = 0 \quad (5.9)$$

Entonces, se puede obtener un modelo de orden reducido equivalente al modelo de  $3\phi$ . Para esto se consideran las suposiciones de la sección anterior.

## 5.2.1 Transformación de Blondel

Considere las distribuciones de corriente para cada fase con idéntico factor de distribución  $d$  dadas por

$$\mathcal{J}_{s1}^3 = d \sin(\phi_r) \dot{q}_{s1} az \quad (5.10)$$

$$\mathcal{J}_{s2}^3 = d \sin(\phi_r + \gamma) \dot{q}_{s2} az \quad (5.11)$$

$$\mathcal{J}_{s3}^3 = d \sin(\phi_r - \gamma) \dot{q}_{s3} az \quad (5.12)$$

donde  $\phi_r$  es la posición angular con respecto a la cual la magnitud de la distribución es medida y  $az$  es el vector unitario en el eje  $z$  (saliendo del papel).

La distribución de corriente total es la suma de las distribuciones individuales, es decir

$$\mathcal{J}_{sT}^3 = d[(\dot{q}_{s1} + \cos(\gamma) \dot{q}_{s2} + \sin(\gamma) \dot{q}_{s3}) \sin(\phi_r) - \quad (5.13)$$

$$(-\sin(\gamma) \dot{q}_{s2} + \cos(\gamma) \dot{q}_{s3})] az \quad (5.14)$$

Considere ahora un MI de  $2\phi$  (como se muestra en la figura 5.2) con devanados de estator en ejes fijos ortogonales  $\alpha_s$  y  $\beta_s$ , y devanados de rotor también en ejes ortogonales  $\alpha_r$  y  $\beta_r$ , girando a una velocidad angular  $\omega_r$ . De manera similar al MI de  $3\phi$ , se puede obtener la distribución total de corrientes para una máquina bifásica de la siguiente manera

$$\mathcal{J}_{sT} = d[\dot{q}_{s1} \sin(\phi_r) - \dot{q}_{s2} \cos(\phi_r)] az \quad (5.15)$$

Asumiendo que la distribución de corrientes totales para la máquina de  $3\phi$  debe ser igual para la máquina de  $2\phi$ , si lo que se desea es obtener un modelo equivalente, entonces  $\mathcal{J}_{sT} = \frac{2}{3} \mathcal{J}_{sT}^3$ , por lo tanto, las siguientes condiciones se deben cumplir

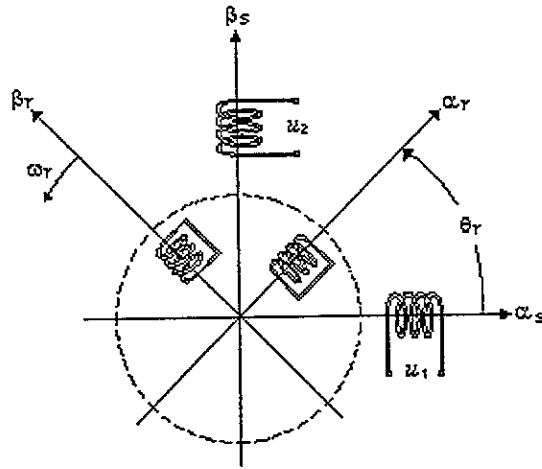


Figura 5.2: Representación equivalente del MI de  $2\phi, \alpha\beta$

$$\dot{q}_{s1} = \frac{2}{3} [\dot{q}_{s1} + \cos(\gamma) \dot{q}_{s2} + \cos(\gamma) \dot{q}_{s3}] \quad (5.16)$$

$$\dot{q}_{s2} = \frac{2}{3} [-\sin(\gamma) \dot{q}_{s2} + \sin(\gamma) \dot{q}_{s3}]$$

en donde el factor  $\frac{2}{3}$  se introduce con objetivo de preservación de potencia.

La expresión anterior establece la *Transformación de Blondel* que relaciona variables de  $3\phi$  con variables equivalentes de  $2\phi$ , y cuya estructura esta dada por

$$\mathbf{T}_{3\phi}^{2\phi} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

El procedimiento anterior puede ser aplicado también a los devanados de rotor, por lo que la transformación completa al vector de corrientes del motor de  $3\phi$  es:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{s3} \\ \dot{q}_{r3} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

y los voltajes transformados están dados por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ 1 & \cos(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Aplicando estas transformaciones al modelo de  $3\phi$  se obtiene el modelo equivalente  $\alpha\beta$  del motor como:

$$\mathbf{D}_x(q_5) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_1(q_5) \omega_r \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_x \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_x \mathbf{u} \quad (5.20)$$

$$J \dot{\omega}_r - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_1(q_5) \dot{\mathbf{q}} = -\tau_L \quad (5.21)$$

donde

$$\mathbf{D}_x(q_5) = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} e^{Jq_5} \\ L_{sr} e^{-Jq_5} & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}; \quad (5.22)$$

$$\mathbf{W}_1(q_5) = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & J e^{Jq_5} \\ -J e^{-Jq_5} & 0 \end{bmatrix}; \quad (5.23)$$



$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

con  $\mathcal{J}$  la  $2 \times 2$  matriz antisimétrica

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathcal{J}^T$$

y

$$e^{\mathcal{J}q_5} = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) \end{bmatrix} = e^{-\mathcal{J}^T q_5}$$

Note que en este caso el par mecánico de origen eléctrico está dado por

$$\tau = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}_1(q_5) \dot{\mathbf{q}}$$

mientras que la estructura de la parte mecánica no se modifica con la transformación.

Debe quedar claro que aunque el modelo  $\alpha\beta$  se obtiene a partir del modelo de  $3\phi$ , también describe el comportamiento dinámico de un motor de  $2\phi$  bajo las suposiciones antes mencionadas.

## 5.3 Propiedades

Para poder presentar el diseño del control se presentan algunas propiedades del modelo no lineal del MI

La primera propiedad se relaciona con las características de disipación de energía del motor, el motor de inducción establece un mapa pasivo si se consideran como entradas los voltajes de estator y el par de carga, y como salidas las derivadas de las coordenadas generalizadas directamente afectadas por las fuerzas externas, las corrientes de estator y la velocidad angular del rotor. Dado que el MI es un caso particular de la metodología expuesta en capítulos anteriores este es un resultado esperado.

**Proposición 9** Considere el modelo  $\alpha\beta$  del motor de inducción, y defina como el vector de entrada

$$v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\tau_L \end{bmatrix}$$

y como vector de salida

$$y = \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix}$$

bajo estas condiciones el mapa

$$\mathcal{M} : v \rightarrow y$$

es pasivo.<sup>1</sup>

La siguiente propiedad se relaciona con las características de disipación del sistema, el cual se observa como la interconexión de dos subsistemas. Está demostrado que ambos subsistemas, eléctrico y mecánico, son pasivos y por lo tanto, tomando como base el hecho de que la interconexión de bloques pasivos es también pasiva, se obtiene una interpretación de la propiedad de pasividad presentada en la propiedad anterior.

**Proposición 10** Considere el modelo del motor de inducción (5.20) y (5.21) como la interconexión de un mapa eléctrico establecido por (5.20) y un mapa mecánico, obtenido de la estructura de (5.21), dados respectivamente por

$$\Sigma_e : v_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -\dot{q}_5 \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \tau \end{bmatrix}$$

y

$$\Sigma_m : (-\tau + \tau_L) \rightarrow -\dot{q}_5 = \frac{1}{Jp + B}(-\tau + \tau_L); \quad p = \frac{d}{dt}$$

Bajo estas condiciones, el modelo del motor de inducción puede ser visto como la interconexión de dos subsistemas pasivos.

La siguiente propiedad considera la naturaleza física del motor para establecer la relación que existe entre la velocidad de rotación del vector de flujos de rotor y el par generado por el motor. Considere la figura 5.3 de un motor de dos fases, de la figura se obtienen las siguientes relaciones

<sup>1</sup>La prueba de esta propiedad se desarrolló en el capítulo anterior.

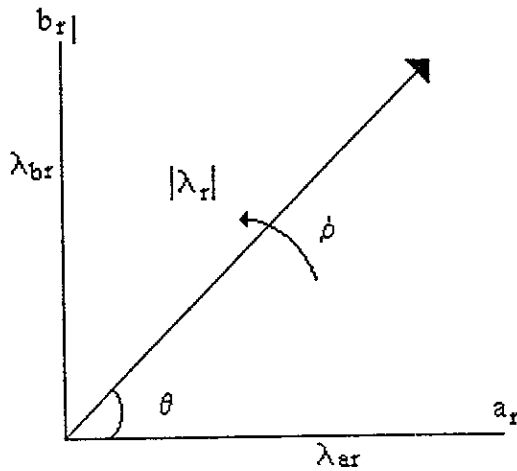


Figura 5.3: Representación de las fases a y b de un motor de inducción  $2\phi$

$$\lambda_{ar} = |\lambda_r| \cos(\rho)$$

$$\lambda_{br} = |\lambda_r| \sin(\rho)$$

Esto implica que

$$\lambda_{ar} = |\lambda_r| \begin{bmatrix} \cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{bmatrix}$$

Ya que se trabaja en  $2\phi$ , el ángulo de rotación del vector resultante de flujo de rotor con respecto al eje  $\alpha$  del sistema de referencia fijo al estator es

$$\rho = \arctan\left(\frac{\lambda_{br}}{\lambda_{ar}}\right)$$

Esto implica que la derivada del vector de flujo se puede representar como

$$\dot{\lambda}_r = |\lambda_r| \begin{bmatrix} -\sin(\rho)\dot{\rho} \\ \cos(\rho)\dot{\rho} \end{bmatrix} = \dot{\rho} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} |\lambda_r| \begin{bmatrix} \cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{bmatrix}$$

Esta expresión se puede reducir a

$$\dot{\lambda}_r = \dot{\rho} \mathcal{J} \lambda_r$$

Dado que  $\lambda_r$  es una función de la posición se puede verificar que

$$\lambda_r(0) = \begin{bmatrix} |\lambda_r| \\ 0 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\dot{\rho} = \frac{d}{dt} \arctan \left( \frac{\lambda_{br}}{\lambda_{ar}} \right) \quad (5.24)$$

Con esta última expresión se establece la siguiente propiedad

**Proposición 11** *La velocidad angular del vector de flujos de rotor está dada en términos del par generado como*

$$\dot{\rho} = \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \tau \quad (5.25)$$

con  $\|\cdot\|$  la norma Euclidianana.

**Prueba.** Considere la ecuación 5.24, operando este término se tiene que

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2} \left( \lambda_{r1}^2 \dot{\lambda}_{r2}^2 - \dot{\lambda}_{r1}^2 \lambda_{r2}^2 \right) = -\frac{1}{\|\lambda_r\|^2} \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{\lambda}_r \quad (5.26)$$

Por otro lado, se sabe que la estructura de los flujos en el modelo  $\alpha\beta$  está dada por

$$\lambda = D_e(q_5) \dot{q}$$

de donde se tiene que

$$\dot{\lambda} = D_e(q_5) \ddot{q} + W_1 \dot{q}_5 \dot{q} = -R \dot{q} + M u$$

con la última identidad obtenida de 5.20. Si se considera la estructura de la matriz de entrada M se puede obtener de la expresión anterior que

$$\dot{\lambda}_r = -R_r \dot{q}_r$$

por lo tanto, substituyendo esta expresión en la ecuación 5.26 se obtiene que

$$\dot{\rho} = \frac{R_r}{\|\lambda_r\|^2} \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{q}_r$$

La prueba se completa haciendo notar que

$$\tau = \frac{1}{2} \dot{q}^T W_1 \dot{q} = -L_{sr} \dot{q}^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_s} \dot{q}_s$$

el cual puede ser expresado como

$$\tau = \lambda_r^T \mathcal{J} \dot{q}_r$$

con lo cual se establece la prueba de esta última propiedad.

## 5.4 Control del motor de inducción

En el diseño del control para sistemas electromecánicos la primera etapa de diseño se realizaba para obtener un control sobre las corrientes y las cargas, en el modelo trifásico se consideró que los efectos capacitivos se despreciaban, de esta forma para el diseño se reduce a lograr un control sobre las corrientes

De esta forma la ecuación

$$z = \dot{e} + \Lambda e \quad (5.27)$$

en donde se define

$$\dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d \quad (5.28)$$

$$e = q - q_d \quad (5.29)$$

Como los efectos capacitivos se desprecian, el comportamiento de las cargas no se contempla en el análisis. De esta manera se puede substituir  $z$  por  $\dot{e}$ .

### 5.4.1 Etapa 1: Control de corrientes

Ya se conoce la filosofía de diseño, sólo basta aplicarla al motor bifásico, en esta caso empleando la definición anteriormente descrita para el error dada por (5.28). De esta definición el vector de corrientes está dado por

$$\dot{q} = \dot{e} + \dot{q}_d \quad (5.30)$$

De la definición anterior, se obtiene una representación para la dinámica del error, substituyendo 5.30, en el modelo eléctrico de  $2\phi$ , se tiene que

$$D_e(q_7) [\ddot{e} + \ddot{q}_d] - L_{sr} W_1(q_5) [\dot{e} + \dot{q}_d] \dot{q}_5 + R_e [\dot{e} + \dot{q}_d] = M u \quad (5.31)$$

A partir de la ecuación anterior obtenemos una ecuación en función del error, lo que resulta en la expresión

$$D_e(q_7) \ddot{e} - L_{sr} W_1(q_5) \dot{e} \dot{q}_5 + R_e \dot{e} = \Psi \quad (5.32)$$

en donde  $\Psi$  se define como

$$\Psi = M u - \left\{ D_e(q_7) \ddot{q}_d - L_{sr} W_1(q_5) \dot{q}_d \dot{q}_5 + R_e \dot{q}_d \right\} \quad (5.33)$$

Se buscan en este modelo las mismas propiedades que posee el modelo general, en este caso se requiere satisfacer la propiedad

$$z^T \left[ \dot{D}_e(q_5) - 2L_{sr} \bar{W}_1(q_5) \dot{q}_5 \right] z = 0 \quad (5.34)$$

, entonces el modelo de dos fases se puede reescribir de la forma

$$\begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_5} \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_5} & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} - L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J} e^{\mathcal{J} q_5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \dot{q}_5 + \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_5} & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Partiendo de esta ecuación se puede verificar lo siguiente

$$z^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 \\ -L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & L_{sr} e^{\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} z = 0 \quad (5.36)$$

expresión que se reduce a

$$z^T \begin{bmatrix} 0 & -L_{sr} e^{\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 \\ -L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 & 0 \end{bmatrix} z = 0 \quad (5.37)$$

Empleando el resultado anterior el modelo dinámico del error para el sub-sistema eléctrico queda reducido a la expresión

$$D_e(q_5) \ddot{e} - L_{sr} \bar{W}_1(q_5) \dot{e} \dot{q}_5 + \bar{R}_e \dot{e} = \Psi \quad (5.38)$$

De esta ecuación se necesita saber bajo que condiciones el error en las corrientes es cero. El término  $\Psi$  contiene el grado de libertad  $u$ , es entonces que a través de  $\Psi$  se debe satisfacer el objetivo. De esta forma se busca entonces que esta variable tenga la estructura

$$\Psi = -k \dot{e} \quad (5.39)$$

Proponiendo una función

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^T D_e(q_5) \dot{e} \quad (5.40)$$

con derivada

$$\dot{V} = \dot{e}^T [\bar{R}_e + k] \dot{e} \quad (5.41)$$

Si adicionalmente se satisface que  $\bar{R}_e + k > 0$ , se puede garantizar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0$$

con lo cual se resuelve el control de corrientes.

El objetivo es entonces diseñar la ley de control con  $\Psi = -k\dot{e}$ . De esta forma  $\Psi$  puede escribirse en la forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

con lo cual se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - L_{sr} \ddot{q}_{sd} - L_{sr} e^{\mathcal{J}q_5} \ddot{q}_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_5} \dot{q}_{rd} \dot{q}_{sd} + R_s \dot{q}_{sd} \\ -L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_5} \ddot{q}_{sd} - L_r \ddot{q}_{rd} - L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_5} \dot{q}_5 \dot{q}_{sd} - R_r \dot{q}_{sd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

donde el subíndice  $d$  denota el comportamiento deseado para cada variable. De la expresión anterior se obtiene el valor de  $u$ , de la siguiente forma

$$u = L_{sr} \ddot{q}_{sd} + L_{sr} e^{\mathcal{J}q_5} \ddot{q}_{rd} - L_{sr} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}q_5} \dot{q}_{rd} \dot{q}_{sd} - R_s \dot{q}_{sd} - k_1 \dot{e}_s \quad (5.43)$$

y con lo que se logra que

$$\Psi_1 = -k\dot{e}_s \quad (5.44)$$

donde  $\dot{e}_s$  se define como el error en las corrientes de estator dado por  $\dot{e}_s = \dot{q}_s - \dot{q}_{sd}$ . Entonces de la expresión 5.43, se obtiene la ley de control para el sistema, sujeta a la restricción

$$L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_5} \ddot{q}_{sd} + L_r \ddot{q}_{rd} + L_{sr} \mathcal{J} e^{-\mathcal{J}q_5} \dot{q}_5 \dot{q}_{sd} + R_r \dot{q}_{sd} = 0 \quad (5.45)$$

obtenida de la descomposición de  $\Psi$  hecha en 5.42.

Con base en el resultado obtenido para  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , esta se puede escribir de la forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} -k\dot{e}_s \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{e} = -k\dot{e}$$

entonces la ecuación 5.38, adopta la forma

$$D_e(q_5) \ddot{e} - L_{sr} \bar{W}_1(q_5) \dot{e} \dot{q}_5 + (\bar{R}_e + k) \dot{e} = 0$$

Para satisfacer la restricción impuesta por 5.45, es necesario encontrar una representación para la  $\dot{q}_{rd}$ . Note que la relación lineal entre el flujo y la corriente se definió anteriormente como

$$\lambda = D_e(q_5) \dot{q}$$

lo cual implica que los flujos de estator y rotor están dados por

$$\begin{aligned} \lambda_s &= L_s \dot{q}_5 + L_{sr} e^{J_{q_5}} \dot{q}_r \\ \lambda_r &= L_{sr} e^{J_{q_5}} \dot{q}_5 + L_r \dot{q}_r \end{aligned}$$

en donde el voltaje en el rotor se encuentra dado por

$$\dot{\lambda}_r = L_{sr} e^{J_{q_5}} \ddot{q}_5 - L_{sr} e^{J_{q_5}} \dot{q}_5 \dot{q}_s + L_r \ddot{q}_r \quad (5.46)$$

De esta última expresión la ecuación 5.45 puede reescribirse como

$$\dot{\lambda}_{rd} + R_r \dot{q}_{rd} = 0,$$

de aquí se obtiene el valor deseado para  $\dot{q}_{rd}$ , esto es

$$\dot{q}_{rd} = -\frac{1}{R_r} \dot{\lambda}_{rd} \quad (5.47)$$

La forma en la cual es seleccionada el valor de  $\dot{\lambda}_{rd}$ , depende de la naturaleza física del motor. Siguiendo estos argumentos se propone que

$$\dot{\lambda}_{rd} = \dot{\rho}_d \mathcal{J} \lambda_{rd}$$



en donde  $\dot{\rho}$  es la velocidad angular del vector de flujos de rotor en términos del para generado.

Dada la relación ortogonal entre ambas fases

$$\lambda_{rd}(0) = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

con  $\beta$  el valor deseado para  $|\lambda_{rd}|$ , se tiene que

$$\dot{\rho}_d = \frac{R_r}{\beta^2} \tau_d$$

con

$$\tau_d = \frac{L_{sr}}{2} \dot{\mathbf{q}}_d^T W_1(q_5) \dot{\mathbf{q}}_d$$

con esta expresión se satisface la restricción impuesta al sistema.

Aún es necesario satisfacer  $\dot{q}_{sd}$ , presente en la ley de control, así que considerando

$$\lambda_{rd} = L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_5} \dot{q}_{sd} + L_r \dot{q}_{rd}$$

se tiene que el valor deseado para la corriente de estator es

$$\dot{q}_{sd} = [\lambda_{rd} - L_r \dot{q}_{rd}] \frac{e^{\mathcal{J}q_5}}{L_{sr}}$$

Con los resultados obtenidos se satisfacen la restricción y la ley de control.

Resta aún encontrar los valores para los cuales  $\bar{R}_e + k > 0$  se satisface. Considere que

$$\bar{R}_e + k = \begin{bmatrix} R_s + k_1 & 0 \\ L_{sr} e^{-\mathcal{J}q_5} \dot{q}_5 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

la matriz anterior se puede escribir en términos de su parte simétrica (ver Apéndice A), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} (\bar{R}_e + k)_{sy} &= \frac{1}{2} \left[ (\bar{R}_e + k) + (\bar{R}_e + k)^T \right] \\ &= \begin{bmatrix} (R_s + k_1) \mathcal{I}_2 & \frac{1}{2} L_{sr} e^{\mathcal{J}q_5} \mathcal{J}^T \dot{q}_5 \\ \frac{1}{2} L_{sr} e^{\mathcal{J}q_5} \mathcal{J}^T \dot{q}_5 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Respecto a esta matriz se observa que siguiendo las propiedades expuestas en el Apéndice A se tendrá que

$$\left(\bar{R}_e + k\right) > 0$$

es definido positivo si la inversa de  $(R_r \mathcal{I}_2)^{-1}$  existe, lo cual se satisface por tratarse una expresión escalar, y si además la expresión

$$(R_s + k_1) \mathcal{I}_2 - \left[ \frac{1}{2} L_{sr} e^{\mathcal{J} q_5} \mathcal{J}^T \dot{q}_5 \right] \frac{1}{R_r} \mathcal{I}_2 \left[ \frac{1}{2} L_{sr} e^{-\mathcal{J} q_5} \dot{q}_5 \right] > 0$$

se satisface.

Operando esta expresión se obtiene que

$$(R_s + k_1) \mathcal{I}_2 - \left[ \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_5^2}{4R_r} \right] e^{\mathcal{J} q_5} \mathcal{J}^T \mathcal{J} e^{-\mathcal{J} q_5} > 0$$

en donde, considerando que la relación que existe entre ambas fases es ortogonal, esta ecuación se reduce a

$$\left[ R_s + k_1 - \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_5^2}{4R_r} \right] \mathcal{I}_2 > 0$$

Esta expresión es equivalente a escribir

$$R_s + k_1 - \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_5^2}{4R_r} > 0 \quad (5.49)$$

de donde se observa que  $R_s$  siempre es positivo, entonces la expresión (5.49) se reescribe como

$$k_1 - \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_5^2}{4R_r} > 0$$

Si se considera que  $k_1$  tiene la forma

$$k_1 = \frac{L_{sr}^2 \dot{q}_5^2}{4R_r} + c$$

con  $c$  una constante mayor que cero, se garantiza que el término  $\left(\bar{R}_e + k\right) > 0$ , se satisface, esto es, es definido positivo.

Hasta este punto los términos presentes en la restricción 5.45 impuesta a la ley de control 5.43, se satisfacen de igual forma la ley de control contiene una expresión adecuada para el término que restaba definir.

## 5.4.2 Etapa 2: Control de la señal de acoplo

Partiendo de la definición de la señal de interacción  $\tau$  se puede escribir una relación similar para la señal de interacción deseada en función de los valores deseados para  $\tau$ , con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\tau_d = \frac{1}{2} \dot{q}_d^T D(q_m) q_d \quad (5.50)$$

De forma similar a la etapa anterior, es posible expresar  $\tau - \tau_d$  como el error entre estas dos señales lo que implica el error para la señal de interacción está dada por

$$\begin{aligned} \tau - \tau_d &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q_m) \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}_d^T D(q_m) q_d \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q_m) \dot{q} - \frac{1}{2} (\dot{q} - e)^T D(q_m) \dot{q}_d \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q_m) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{e}^T D(q_m) q_d \\ &= \frac{1}{2} (\dot{e} + \dot{q}_d)^T D(q_m) \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T D(q_m) q_d \\ &= \frac{1}{2} \dot{e}^T D(q_m) \dot{e} + \dot{e}^T D(q_m) q_d \end{aligned}$$

Dado que la señal  $\tau$  es una función de las corrientes, si estas convergen a un valor deseado  $\tau$  debe tender a una  $\tau_d$ , esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau_d) = 0,$$

es decir el criterio se satisface y se obtiene control de la fuerza de interacción.

## 5.4.3 Etapa 3: Control de la posición o velocidad mecánica

El diseño del controlador para el MI se completa al garantizar control sobre la velocidad del motor. De la etapa anterior se logró el control sobre la señal de interacción, la cual depende de las corrientes del sistema, en esta etapa se muestra que al tener control sobre la entrada del subsistema mecánico se puede lograr controlar (definiendo una  $\tau_d$  adecuada) su salida, esto es, la

velocidad mecánica. Partiendo de la ecuación 5.7 la cual describe el modelo para el subsistema mecánico se puede escribir una ecuación  $\tau_d$  que posea la misma estructura que 5.7, con la cual se tiene que  $\tau_d$  se define como

$$\tau \doteq J\dot{q}_{md} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + B\dot{q}_{md} + \tau_L \quad (5.51)$$

lo cual es equivalente a escribir el modelo 5.7 en términos de los valores deseados como

$$J\dot{q}_{md} + \frac{\partial V(q_m)}{\partial q_m} + B\dot{q}_{md} = \tau_d - \tau_L$$

La expresión anterior es útil para definir el error mecánico en términos de la diferencia de ambas ecuaciones 5.7 y 5.51, de esta forma el error se define como

$$e_m = \dot{q}_m - \dot{q}_{md} \quad (5.52)$$

A partir de esta definición se puede formular una ecuación dinámica del error mecánico como

$$J\dot{e}_m + Be_m = \tau - \tau_d \quad (5.53)$$

La expresión anterior se puede representar como

$$e_m = \frac{1}{Js + B}(\tau - \tau_d) \quad (5.54)$$

De la definición expuesta para el error mecánico se puede entonces garantizar que si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tau - \tau_d) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_m = 0$$

Con esta última etapa en el diseño del controlador se logra el control de la velocidad del MI y se satisfaciendo así el objetivo de control. Es necesario entonces, validar el control obtenido con la ayuda de la simulación digital, los experimentos realizados se presentan en el capítulo siguiente. ■

# Capítulo 6

## Resultados de simulación

En este capítulo se presentan los resultados de simulación digital obtenidos del desempeño del esquema de control propuesto, estos resultados validan los resultados teóricos anteriormente propuestos.

La estructura seguida en este capítulo presenta el modelo empleado para la simulación. Posteriormente se describe el experimento con el cual se evalúa el controlador y por último se presentan los resultados gráficos junto con su discusión.

### 6.1 Modelo

El modelo empleado para la simulación es el equivalente  $\alpha\beta$  que corresponde a un motor estándar jaula de ardilla de  $3\phi$  con alimentación de 220/380 volts a 60 Hz con estator conectado en delta. La potencia promedio del motor es de 2.2 kW y la velocidad promedio es de 1750 r.p.m. [Espin93].

Los parámetros empleados para el motor son:  $R_s = 0.687\Omega$ ,  $R_r = 0.842\Omega$ ,  $L_s = 84\text{mH}$ ,  $L_r = 85.2\text{mH}$ ,  $L_{sr} = 81.3\text{mH}$ ,  $D_m = 0.03\text{kgm}^2$ .

### 6.2 Experimento

Se plantea el siguiente experimento con el cual se evalúa el controlador desarrollado, la evaluación corresponde al seguimiento de par con una referencia

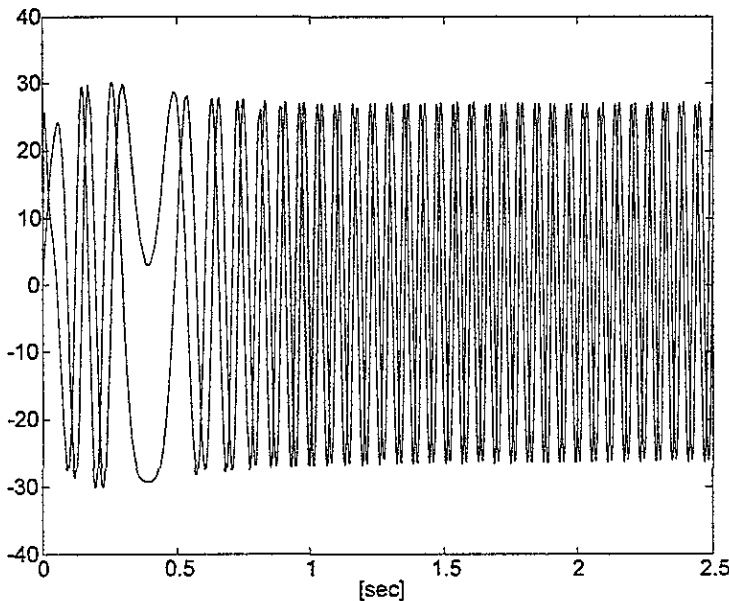


Figura 6.1: Corrientes de estator  $i_{s1}$ , y  $i_{s2}$ .

variante en el tiempo de la forma

$$\tau_d = \frac{20}{w} \cos(wt)$$

Se considera que el motor se encuentra en estado de reposo con condiciones iniciales iguales a cero. Al arranque el torque de carga se cambia a  $\tau_L = 20\text{Nm}$ . La norma del flujo de rotor deseado del controlador es igual a  $\beta = 2$ . Los valores nominales para este experimento son

$$a = 100; \quad b = 15; \quad g = 0.001; \quad \epsilon = 4.5 \quad \text{y} \quad f = 5$$

## 6.3 Resultados

El objetivo principal de los experimentos realizados fue el de resaltar las propiedades del esquema de control, mostradas teóricamente.

La figura 6.1 muestra las corrientes de estator del motor bifásico modelado

La figura 6.2 muestra la respuesta de las corrientes de rotor

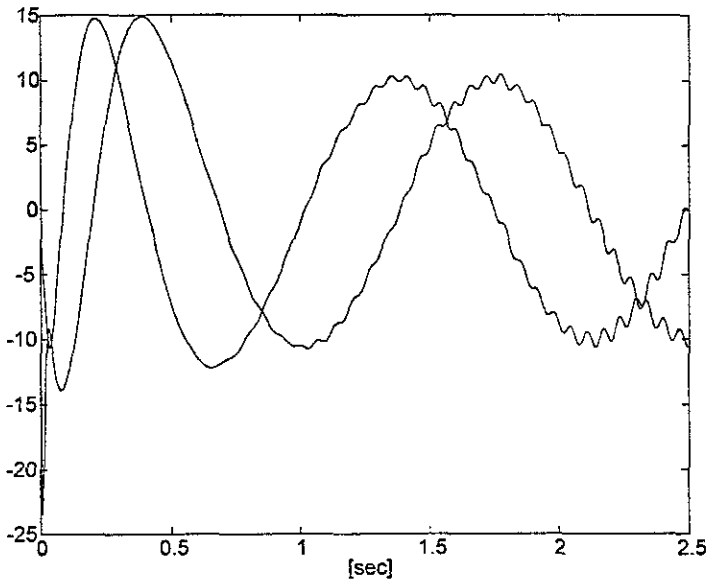


Figura 6.2: Corrientes de rotor  $i_{r1}$  y  $i_{r2}$ .

En las gráficas 6.3 y 6.4 se presentan las gráficas del error en las corrientes de rotor y estator, esto es, el error que existe entre la corriente real y la deseada. Se observa que el error tiende a cero en ambos casos.

En la figura 6.5 se muestra la acción de la ley de control sobre el motor  $u$ .

La figura 6.6 muestra el error en la velocidad mecánica se puede observar de esta figura que el error es aproximadamente cero en 2.5 segundos. En la figura 6.7 se presentan las gráficas del par generado y el par deseado. El par real tiende a un comportamiento deseado con lo cual el objetivo de control se satisface ya que el error entre ambas señales tiende a cero.

Con este último resultado y junto con los resultados de las figuras anteriores queda de manifiesto que el objetivo del controlador se cumple, con lo que se validan tanto el modelo propuesto como la estrategia de control empleada.



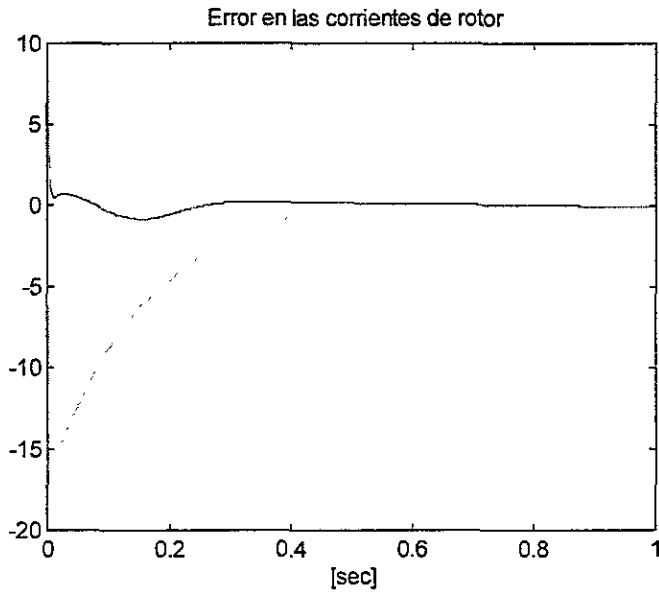


Figura 6.3: Corrientes de rotor

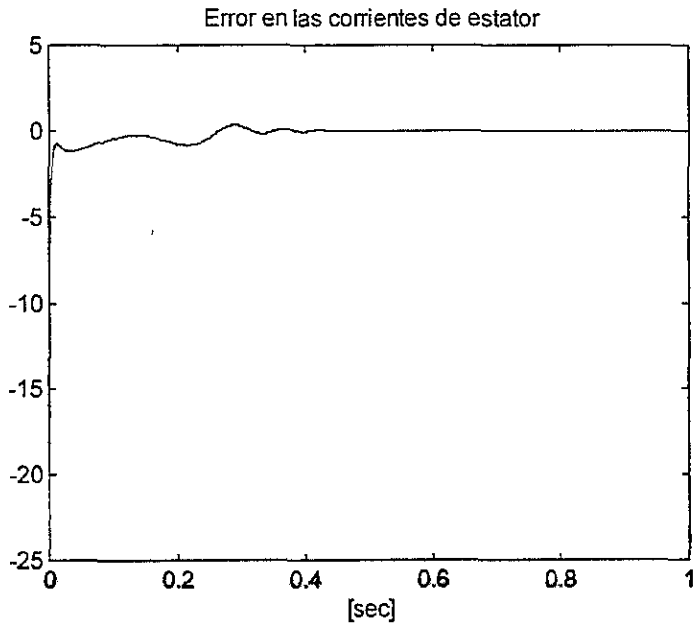


Figura 6.4: Corrientes de estator



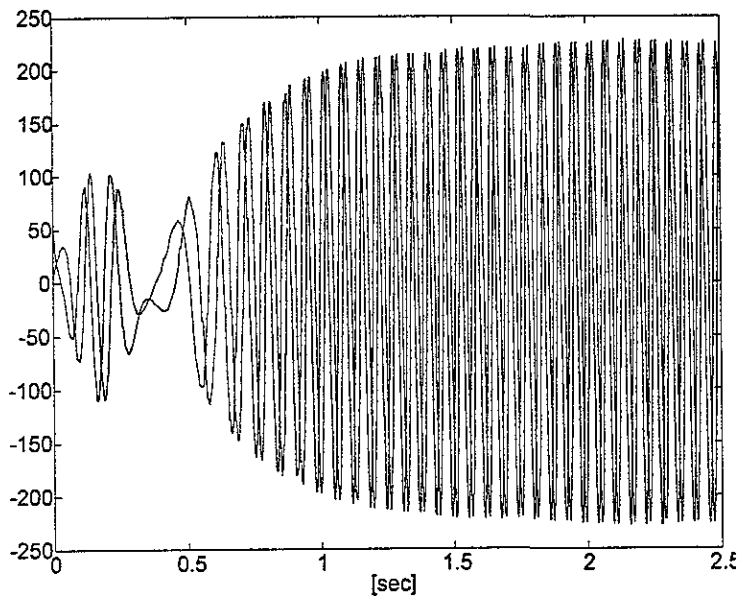


Figura 6.5: Entradas de control  $u_1$  y  $u_2$

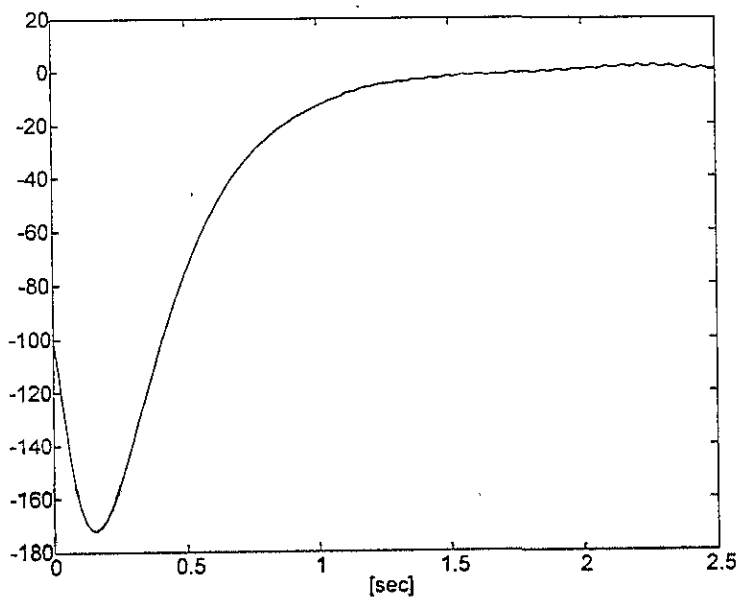


Figura 6.6: Error entre la velocidad  $\dot{q}_m$  y  $\dot{q}_{md}$ .

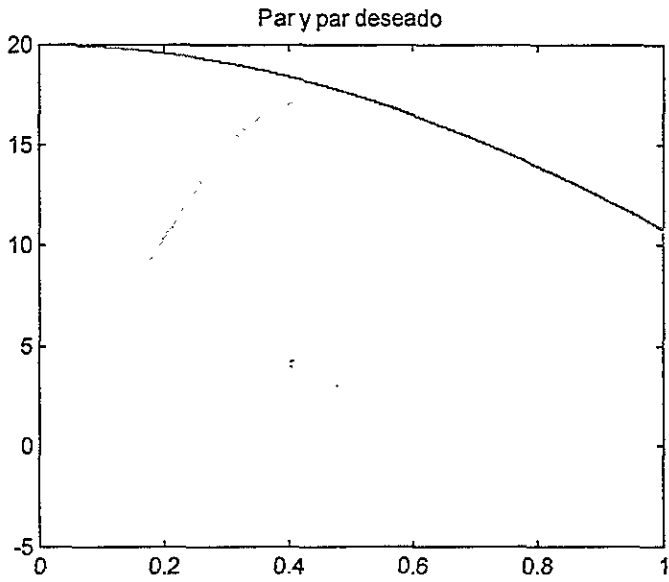


Figura 6.7:  $\tau$  y  $\tau_d$

# Capítulo 7

## Conclusiones

Al termino del presente trabajo se está en posición de presentar las siguientes conclusiones.

En este trabajo se presenta una introducción completa al análisis de sistemas físicos a través del modelado por ecuaciones Euler-Lagrange, partiendo desde los elementos básicos que describen a los dos tipos de sistemas que competen a este trabajo, a saber, sistemas mecánicos y sistemas eléctricos.

Posteriormente se desarrolla el modelado de sistemas electromecánicos empleando ecuaciones Euler-Lagrange, se observa que el método permite explotar las características físicas del sistema. Se observa también que los sistemas Euler-Lagrange exhiben la propiedad de pasividad, propiedad que indica como se comporta la energía en un sistema, es de esta forma que se desarrolla una estrategia de control la cual explota estas propiedades.

El objetivo fundamental de este trabajo es el control basado en pasividad de sistemas electromecánicos, cuyas características, propiedades y restricciones fueron mostradas, y es claro que su implantación física es posible.

Se seleccionó el motor de inducción como el ejemplo más práctico y de inmediata aplicación debido a su extendido uso industrial.

Las restricciones a las cuales está sujeta la ley de control depende de cada sistema; sin embargo para el sistema seleccionado, estas restricciones se satisfacen.

La estrategia de control desarrollada para el caso de estudio logra el objetivo de control.

El trabajo realizado funcionó como un puente entre el trabajo experimental y el desarrollo teórico, demostrando que ambas ramas forman un sólo

ámbito, ya que la ingeniería de ninguna manera puede pretender ser una actividad meramente de implantación ignorando las aportaciones teóricas. En este sentido se espera haber aportado, con los resultados obtenidos, el impulso necesario que sirva de motivación a otros para intentar llevar a cabo experimentos empleando este esquema de control en tiempo real y mejorar su desempeño. Con el mismo propósito el presente trabajo pretende contribuir al reducir la brecha, aún existente, entre teoría y práctica, ya que con la experimentación de una teoría, esta brecha forzosamente tiene que ser afectada.



# Apéndice A

## Expresión cuadrática de una matriz antisimétrica

Considere una matriz cuadrada del forma

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

si se satisface que

$$B^{-1}$$

existe, y la relación

$$A - CB^{-1}C^T > 0$$

es definida positiva, entonces la matriz  $M$ , cumple con

$$M > 0$$

Es necesario realizar algunas observaciones, primero que  $M$  es una matriz simétrica, en caso de que la matriz bajo análisis no lo sea, es posible expresarla en términos de su parte simétrica en términos de una forma cuadrática, esto es

$$z^T M z = \frac{1}{2} z^T [M + M^T] z$$

en donde  $M_{sy} = \frac{1}{2} (M + M^T)$ .



# Bibliografía

- [Chow95] Chow, Tai L. *Classical Mechanics*. New York, Wiley, 1995.
- [Espin93] Espinosa-Pérez, G. *Control No Lineal de Motores de Inducción*. Tesis doctoral. México, DEPFI-UNAM, 1993.
- [Gom96] Gómez Becerril, D. *Control No Lineal de Posición de un Motor de Inducción de dos Fases*. Tesis. México, FESC-UNAM, 1996.
- [Kha96] Khalil, Hassan K. *Nonlinear Systems*. 2ª edición. New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- [Lan85] Lancaster, P. *The Theory of Matrices*. Orlando, Academic Press. 1985.
- [Leo85] Leonhard, W. *Control of Electrical Drives*. Springer Verlag, Berlín, 1985.
- [Meis66] Meisel, Jerome. *Principles of Electromechanical Energy conversion*. New York, McGraw-Hill, 1966.
- [ONE96] Ortega, R; Nicklasson, P; Espinosa, G. *On Speed Control of Induction Motors*. Brief paper. Automatica, Vol 32. No. 3, pp 455-460, 1996.
- [Spo89] Spong, M. *Robot Dynamics and Control*. New York. Wiley. 1989.
- [Tay94] Taylor, D. G. *Nonlinear Control of Electrical Machines: An Overview*. IEEE Control Systems, Vol 14, No. 6, pp 41-51, 1994.
- [VanDer96] Schaft, Arjan. van der. *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. London. Springer Verlag. 1996.