

93
2e



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASIFICACION TOPOLOGICA DE CAMPOS VECTORIALES CUADRATICOS EN EL PLANO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A :
M I R I A M R O J A S A R E N A Z A



NOMBRE DEL DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS.

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

CLASIFICACION TOPOLOGICA DE CAMPOS VECTORIALES CUADRATICOS EN EL PLANO.

realizado por MIRIAM ROJAS ARENAZA

con número de cuenta 9032278-1 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS.

Propietario

DR. GUILLERMO SIENRA LOERA.

Propietario

DRA. ANA MARGARITA GUZMAN GOMEZ.

Suplente

M. en C. JOSE MATIAS NAVARRO SOZA.

Suplente

M. en C. JEFFERSON KING DAVALOS.

Consejo Departamental de Matemáticas

MTRA. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES.

Agradecimientos.

Quisiera agradecer en primer lugar a mi asesor ,Dr. Federico Sánchez Bringas, por el tiempo que invirtió en la dirección de este trabajo, el apoyo académico y administrativo que siempre me ha proporcionado, sus consejos en la académico y en lo personal, su paciencia y sobre todo por su amistad.

A mis sinodales, Dr. Guillermo Sierra Loera, M. en C. Jefferson King Dávalos y particularmente a Matías Navarro Soza por su amistad y a la Dra. Ana Margarita Guzmán por las observaciones que hicieron para mejorar este trabajo.

A mis profesores en la Facultad de Ciencias de quienes aprendí lo bello que son las matemáticas, especialmente al Dr. Pablo Barrera y a Dr. Javier Fernández Gracia.

A mis amigos y familiares por su cariño y el apoyo que siempre he encontrado en ellos.

A la Facultad de Ciencias, especialmente al departamento de Matemáticas.

Dedicatoria

En primer lugar quisiera dedicar este trabajo a mis padres Concepción Arenaza Noriega y Efraín Rojas Rodríguez, por su cariño, confianza y al apoyo que siempre he encontrado en ellos, además que las cosas buenas que se puedan encontrar en mí son en su mayoría gracias a ellos.

A mis hermanos Gabriel, Josué y Priscila por estar siempre ahí donde los he necesitado en todo momento y por los ratos alegres que hemos pasado juntos.

A todos mis tíos por el cariño y la gran confianza que siempre me han tenido.

A Juan Manuel por su amor y ternura, por darme una razón para ser feliz.

A mis amigos en los cuales siempre he encontrado aliento en todo momento en particular: Mika Olsen, Gabriel Vázquez por apoyarme siempre en todos mis proyectos por más descabellados que parecieran; por las risas y las lágrimas compartidas, Antonio Silva simplemente gracias por tu amistad, Noé Sánchez.

IN MEMORIAM AMELIA RODRÍGUEZ DE ROJAS

Í N D I C E.

INTRODUCCIÓN	2
1. CAPÍTULO. BLOW-UP.	3
1.1 BLOW-UP DIRECCIONAL.	7
1.2 BLOW-UP POLAR.	19
2. CAPÍTULO. PROGRAMA.	29
3. CAPÍTULO. CLASIFICACIÓN DE CAMPOS CUADRÁTICOS.	36
3.1 CAMPOS CUADRÁTICOS CON PARTE LINEAL DEGENERADA.	36
3.2 CAMPOS CON SOLO TÉRMINOS CUADRÁTICOS.	43
4. BIBLIOGRAFÍA.	59

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar el comportamiento topológico de los campos vectoriales cuadráticos en el plano, en la vecindad de un punto singular. Para ello estudiaremos la técnica del blow-up (explosión) la que nos ayudará a obtener campos más sencillos de estudiar. Es decir, queremos obtener campos que se puedan linealizar como los hiperbólicos, o que al menos les podamos asociar ciertas variedades invariantes que nos ayuden a entender el comportamiento topológico de estos.

En el primer capítulo estudiaremos los dos tipos de blow-up que existen, el direccional y el polar, se estudiará que tipo de resultados arrojan cada uno, con el fin de ver las ventajas y desventajas que tienen. Demostraremos que ambos, topologicamente hablando, nos reportan los mismos resultados, es decir, si explotamos un campo direccionalmente y polarmente en ambas explosiones obtendremos el mismo comportamiento topológico del campo alrededor del punto singular. Finalmente veremos, con la ayuda del teorema de desingularización, bajo que condiciones podemos descomponer las singularidades de un campo en otras más simples.

En el segundo capítulo se mostrará un programa en el procesador mathematica que explota campos vectoriales, se explicará la estructura del programa, como se utiliza y el tipo de resultados que nos proporciona.

En el tercer capítulo estudiaremos el comportamiento topológico de los campos vectoriales que tienen parte lineal degenerada y términos cuadráticos; y los que tienen únicamente términos cuadráticos; alrededor del origen.

Resolución de Singularidades

Miriam Rojas Arenaza

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias.

U.N.A.M, Ciudad Universitaria, México, D. F.,

04510, México.

Enero, 1998

1 Capítulo

Resolución de Singularidades.

Para conocer el comportamiento topológico de un campo vectorial alrededor de el punto singular de un campo vectorial, necesitamos un aparato que tenga una resolución similar a un microscopio, es decir, necesitamos escoger un sistema coordenado cerca del punto singular al que a un pequeño desplazamiento angular le corresponda un gran cambio en coordenadas. Esta técnica se conoce como **Blow-up**.

Existen 2 tipos de blow-up:

- Blow-up direccional,
- Blow-up polar.

En los dos blow-up podemos escoger un sistema coordenado que tenga la característica mencionada anteriormente, sin embargo una de las principales diferencias entre el blow-up polar y el direccional, es que el blow-up polar para el paso a coordenadas polares requiere de funciones trascendentales (trigonométricas), por lo que algebraicamente es más conveniente el blow-up direccional.

Una vez que hayamos explotado un campo vectorial en el cero vamos a obtener un campo más simple, en el sentido de que para conocer el comportamiento topológico del campo en una vecindad del punto singular, podamos utilizar métodos como el Teorema de Hartman-Grobman.

A continuación antes de explicar las técnicas de blow-up recordaremos el teorema de Hartman-Grobman y algunas definiciones que nos serán útiles. Como estamos trabajando con campos en el plano entonces lo enunciaremos todo en \mathbb{R}^2 , pero se pueden generalizar para el caso \mathbb{R}^n .

Definición 1.1 *Un campo vectorial X lineal en \mathbb{R}^2 decimos que es hiperbólico si sus eigenvalores tienen parte real diferente de cero.*

Definición 1.2 *Diremos que el germen de un campo en \mathbb{R}^2 que tiene como punto singular al cero es hiperbólico si su parte lineal es hiperbólica.*

La importancia de las singularidades hiperbólicas es que estas son estructuralmente estables, es decir, si perturbamos el campo las soluciones de éste van a ser topológicamente equivalentes a las del campo inicial. Además de que existen espacios invariantes asociados a los campos hiperbólicos que determinan su estructura local.

Teorema 1.3 *Sea X un campo vectorial lineal en \mathbb{R}^2 , X hiperbólico, entonces existe una única descomposición de \mathbb{R}^2 como suma directa:*

$$\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u,$$

donde E^u y E^s son espacios invariantes bajo el flujo del campo (e^{tX}).

Los eigenvalores asociados a $X^s = X|_{E^s}$ tendrán parte real negativa y los asociados a $X^u = X|_{E^u}$ tendrán parte real positiva, $X = X|_{E^s} \oplus X|_{E^u}$.

El flujo inducido en E^s es una contracción y el inducido por E^u una expansión.

El número de eigenvalores de la parte lineal de X , con parte real negativa es lo que se conoce como índice del campo.

Teorema 1.4 : (Hartman-Grobman, [Har]).

Sea B un subconjunto abierto en \mathbb{R}^2 que contiene al origen, sea $f \in C^\infty(B)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x).$$

Supóngase que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene eigenvalores con parte real igual a cero.

Entonces, existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene al origen, en otro conjunto abierto V que contiene al origen tal que, para toda $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \in \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para toda $x_0 \in U$ y $t \in I_0$:

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

Es decir, H mapea trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ cerca del origen en trayectorias de $\dot{x} = Ax$ cerca del origen y preserva parametrización

Es decir el comportamiento topológico de un campo hiperbólico queda determinado por los términos lineales de este.

No siempre vamos a encontrar singularidades hiperbólicas, pero van a existir otro tipo de singularidades a las que, al igual que las hiperbólicas, podemos asociar ciertos espacios invariantes.

Es decir para todos los campos lineales existe una descomposición

$$\mathbb{R}^2 = E \oplus E^c,$$

invariante bajo e^{tX} tal que los eigenvalores de $DX(0) = DX(0)|_E$ tienen parte real negativa o positiva y los asociados a $DX(0) = DX(0)|_{E^c}$ tienen la parte real igual a cero.

De acuerdo con lo anterior:

Definición 1.5 Una singularidad es parcialmente hiperbólica si $\dim(E^c) \neq 0$ y $\dim(E) \neq 0$.

Es decir, para que una singularidad en \mathbb{R}^2 sea parcialmente hiperbólica basta que al menos uno de los eigenvalores sea distinto de cero.

En el caso de singularidades parcialmente hiperbólicas al igual que en el de hiperbólicas se prueba la existencia de variedades invariantes que juegan el mismo papel para X como E^s y E^u lo hacen para la parte lineal de una singularidad hiperbólica.

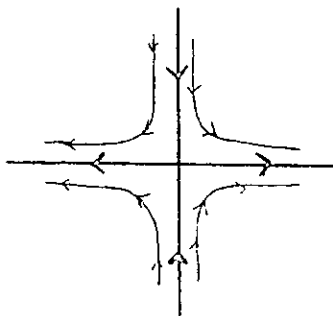
Teorema 1.6 Sea 0 un punto singular de un campo vectorial C^r en \mathbb{R}^2 , $r < \infty$, y $\mathbb{R}^2 = E \oplus E^c$ la descomposición asociada a $DX(0)$ (parte lineal del campo). Supongamos que X es parcialmente hiperbólico en 0 . Entonces existen variedades C^r , W y W^c que contienen al cero, invariantes bajo el flujo de X y tales que:

W es tangente a E en 0 y $J_1(X(0)|_W) = DX(0)|_E$,

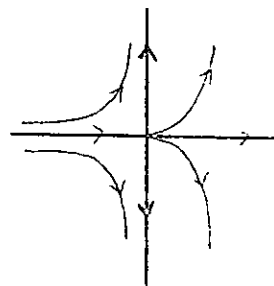
W^c es tangente a E^c en 0 y $J_1(X(0)|_{W^c}) = DX(0)|_{E^c}$.

W se conoce como variedad estable o inestable (dependiendo del signo del eigenvalor) fuerte y es única, W^c se conoce como variedad central y no es única.

A continuación mostraremos ejemplos hiperbólicos y parcialmente hiperbólicos.



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

Una vez definido lo anterior continuaremos ahora con la técnica del Blow-up.

1.1 Blow-Up direccional.

Vamos a empezar con una construcción auxiliar. Sea $p : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ la fibración estándar definida en la línea proyectiva $\mathbb{R}P^1$, donde $\mathbb{R}P^1$ denota el conjunto de líneas de \mathbb{R}^2 que pasan por el origen, es decir, $\mathbb{R}P^1$ nos representa el conjunto de direcciones de \mathbb{R}^2 .

Introduciremos una estructura diferenciable a $\mathbb{R}P^1$, donde por estructura diferenciable vamos a entender lo siguiente:

Definición 1.7 : Una superficie diferenciable de dimensión 2 es un conjunto M y una familia de mapeos inyectivos $x_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ de conjuntos U_i de \mathbb{R}^2 en M , tal que:

$$(1) \cup_i x_i(U_i) = M.$$

(2) para cualquier i, j con $x_i(U_i) \cap x_j(U_j) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $x_i^{-1}(W)$ y $x_j^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^2 y los mapeos $x_j^{-1} \circ x_i$ son diferenciables.

(3) La familia $\{(U_i, x_i)\}$ es maximal relativa a las condiciones (1) y (2).

El par (U_i, x_i) con $q \in x_i(U_i)$ se conoce como sistema coordenado de M en q ; $x_i(U_i)$ es llamado una vecindad coordenada en q . Una familia (U_i, x_i) que satisface (1) y (2) se conoce como estructura diferenciable en M .

En el caso de $\mathbb{R}P^1$ tenemos lo siguiente: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y observemos, para empezar, que $\mathbb{R}P^1$ es el espacio cociente de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ módulo la relación de equivalencia:

$$(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Los puntos de $\mathbb{R}P^1$ los denotaremos por $[x, y]$.

Observemos que si $x \neq 0$ ó $y \neq 0$ entonces $[x, y] = [1, \frac{y}{x}]$ ó $[x, y] = [\frac{x}{y}, 1]$ respectivamente.

Definamos ahora los subconjuntos V_1, V_2 de $\mathbb{R}P^1$ por:

$$V_1 = \{[x, y] : x \neq 0\}, V_2 = \{[x, y] : y \neq 0\},$$

que geoméricamente nos representan los conjuntos de rectas en \mathbb{R}^2 que pasan por el origen pero que no contienen al eje y en V_1 y al eje x en V_2 .

Mostraremos ahora que podemos tomar a V_1 y V_2 como vecindades coordenadas donde las coordenadas en V_1 y V_2 son:

$$u = \frac{y}{x}, v = \frac{x}{y} \text{ respectivamente.}$$

Ahora definimos:

$$x_1 : \mathbb{R} \rightarrow V_1 \text{ por } x_1(u) = [1, u], u \in \mathbb{R},$$

y análogamente:

$$x_2 : \mathbb{R} \rightarrow V_2 \text{ por } x_2(v) = [v, 1], v \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos que $\{(\mathbb{R}, x_1), (\mathbb{R}, x_2)\}$ es una estructura diferenciable en $\mathbb{R}P^1$.

Cualquier mapeo x_1, x_2 es biyectivo mientras $\cup x_i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^1$.

Nos resta demostrar que $x_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R} y que $x_2^{-1} \circ x_1$ es diferenciable ahí. Ahora los puntos en \mathbb{R} son de la forma:

$$\{u \in \mathbb{R}; u \neq 0\} \text{ de ahí que } x_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \text{ sea un conjunto abierto en } \mathbb{R}.$$

Por otro lado:

$$x_2^{-1} \circ x_1(x, y) = x_2^{-1}[1, u] = x_2^{-1}\left[\frac{1}{u}, 1\right] = x_2^{-1}[v, 1] = v,$$

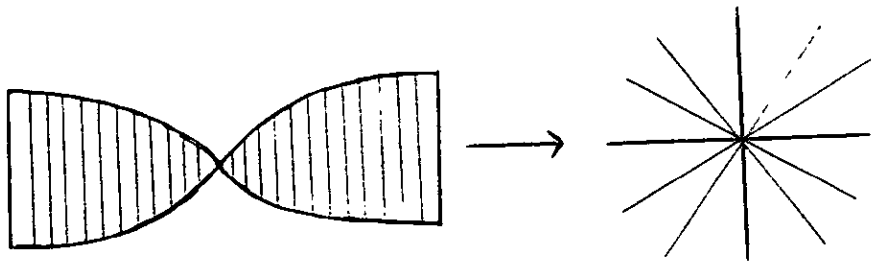
la segunda igualdad se da ya que estamos en $V_1 \cap V_2$, donde tanto x como y son distintos de cero y , por lo tanto podemos dividir.

Además $x_2^{-1} \circ x_1$ es diferenciable, ya que v también es diferenciable en $V_1 \cap V_2$.

En resumen el espacio de direcciones en \mathbb{R}^2 (espacio real proyectivo) puede ser cubierto por 2 vecindades coordenadas.

Consideremos ahora la gráfica Γ del mapeo p . Esta gráfica representa una superficie suave en el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 - \{0\} \times \mathbb{R}P^1$, donde $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ es lo que se conoce como divisor. Localmente Γ tiene la forma de una escalera en espiral; globalmente el divisor es difeomorfo al círculo, y el producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ al interior del toro.

Sumergiendo el plano agujereado en el plano, podemos considerar la gráfica Γ como una superficie suave en el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. La proyección natural $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mapea Γ sobre el plano agujereado $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ difeomorfamente, es decir, π_1 es diferenciable y tiene inversa diferenciable.



Teorema 1.8 *La cerradura de la gráfica Γ del mapeo $p : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ es una superficie suave $\Gamma_1 = \Gamma \cup (\{0\} \times \mathbb{R}P^1)$. La superficie Γ_1 es difeomorfa a la banda de Möbius.*

Demostración:

Sean $U = \{(x, u) : u = \frac{y}{x}, x \neq 0\}$ y $V = \{(v, y) : v = \frac{x}{y}, y \neq 0\}$ vecindades coordenadas en \mathbb{R}^2 que cubren a Γ_1 . Para demostrar la suavidad de Γ_1 tenemos que ver que el cambio de coordenadas entre las dos vecindades es diferenciable. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$.

dado por $F(x, u) = (\frac{1}{u}, xu) = (v, y)$, $F^{-1}(v, y) = (yv, \frac{1}{v})$.

$DF = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{u^2} \\ u & x \end{pmatrix}$ la cual es claramente C^∞ si $u \neq 0$ y

$DF^{-1} = \begin{pmatrix} y & v \\ -\frac{1}{v^2} & 0 \end{pmatrix}$ también es C^∞ si $v \neq 0$.

Por lo tanto Γ_1 es una superficie suave.

Por otro lado la proyección $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ manda Γ_1 en líneas rectas. Cuando el círculo $\mathbb{R}P^1$ es recorrido una vez la correspondiente línea en \mathbb{R}^2 retorna girada un ángulo π . Se sigue de esto que Γ_1 es una banda de Möbius. ■

El pasar de \mathbb{R}^2 a Γ_1 es lo que llamamos el **blow-up direccional** en el 0 sobre el divisor. El mapeo $\pi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conocido como el **colapso** del círculo $\{0\} \times \mathbb{R}P^1$ en el punto 0. El mapeo $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ restringido a Γ es un difeomorfismo sobre el plano agujereado. De ahí que todos los objetos geométricos que en el plano tienen una singularidad en 0 pueden ser llevados sobre Γ_1 . Al mismo tiempo las singularidades pueden ser más simples, ya que al dividir el campo podemos obtener campos linealizables.

En la práctica el blow-up direccional significa pasar de (x, y) a las cartas coordenadas $(x, u = \frac{x}{y})$ con $x \neq 0$ y $(v = \frac{x}{y}, y)$ con $y \neq 0$.

Veamos ahora que sucede con la ecuación diferencial que define un campo vectorial en el plano (x, y) . Asumiremos que el punto 0 es un punto singular en nuestro campo vectorial.

Teorema 1.9 *Si u un campo vectorial diferenciable W con un punto singular en 0 le aplicamos el blow-up direccional obtendremos un campo vectorial en Γ extendible a un campo diferenciable en Γ_1 , es decir, un campo extendible al divisor.*

Demostración:

Sea W el campo vectorial definido de la siguiente forma:

$$W = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Construimos la carta coordenada (x, u) .

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \text{ donde } x \neq 0.$$

Derivamos x y u para obtener la expresión de W en esta carta,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{u} &= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{xQ(x, y) - yP(x, y)}{x^2},\end{aligned}$$

sustituimos $y = ux$ en las expresiones anteriores.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, xu) \\ \dot{u} &= \frac{xQ(x, xu) - xuP(x, xu)}{x^2} = \frac{Q(x, xu) - uP(x, xu)}{x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión del campo en esta carta es:

$$W_1 = \begin{cases} \dot{x} = P(x, xu) \\ \dot{u} = \frac{Q(x, xu) - uP(x, xu)}{x} \end{cases}.$$

Carta (v, y) .

$$\text{En este caso } v = \frac{x}{y} \text{ y } y \neq 0.$$

Derivamos ahora v , y para obtener la expresión del campo inicial en esta carta.

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{yQ(x, y) - xP(x, y)}{y^2} \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}$$

sustituimos $x = yv$ en las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{yP(yv, y) - yvQ(yv, y)}{y^2} = \frac{P(yv, y) - vQ(yv, y)}{y} \\ \dot{y} &= Q(yv, y).\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión del campo en esta carta es:

$$W_2 = \begin{cases} \dot{v} = \frac{P(yv, y) - vQ(yv, y)}{y} \\ \dot{y} = Q(yv, y) \end{cases}$$

Es decir, para (x, u) , (v, y) encontramos expresiones que son suaves.

Nos falta demostrar que el campo se extiende suavemente al divisor.

Para demostrar esto tenemos que verificar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F_*(W_1) = \lim_{y \rightarrow 0} W_2,$$

donde F es la función cambio de coordenadas descrita en el teorema 1.8 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F_*(W_1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{u^2} \\ u & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, xu) \\ Q(x, xu) - uP(x, xu) \end{pmatrix} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} \left(-\frac{Q(x, xu)}{x} - uP(x, xu) \right) \\ uP(x, xu) + Q(x, xu) - uP(x, xu) \end{pmatrix}, \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{P(vy, y) - vQ(vy, y)}{y} \\ Q(vy, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la última igualdad la obtenemos haciendo el cambio de coordenadas $x = vy$ y $u = \frac{1}{v}$.

La expresión que obtuvimos al final corresponde a $\lim_{y \rightarrow 0} W_2$ y como el cero es un punto singular entonces $P(0, 0) = Q(0, 0) = (0, 0)$.

Por lo tanto el campo se extiende diferenciablemente al divisor. ■

El objetivo principal del Blow-up es encontrar las separatrices del campo, sin embargo, con el blow-up vamos a encontrar las direcciones a las cuales son tangentes las separatrices, estas direcciones las vamos a llamar direcciones separatrices.

Al hablar de separatrices nos referimos a las curvas solución C^∞ en cuya cerradura se encuentra el punto singular, y ocurre frecuentemente que nos marcan una frontera entre soluciones con propiedades diferentes, como el atraer ó repeler en una dirección, y es a través de ellas que nos damos una idea de como se está comportando el campo, topológicamente hablando. Por ello es importante ver que relación existe entre el número de direcciones separatrices y los términos del campo. Esta relación nos la proporciona el siguiente teorema:

Teorema 1.10 Sea \bar{X} campo vectorial diferenciable con un punto singular en cero, y sean X_1, Y_1 las expresiones del campo en las cartas (x, u) y (v, y) respectivamente. Si explotamos el campo en el cero y al aproximarnos al divisor en X_1 y Y_1 el número de puntos singulares que obtengamos es finito el número de direcciones separatrices transversales al divisor quedará acotado por el mínimo exponente del campo.

Antes de dar la demostración del teorema recordemos que, de acuerdo al teorema 1.9 al explotar construimos un campo en Γ_1 que es diferenciable en el divisor, por ello para buscar los puntos singulares nos aproximamos al divisor en la dirección en la que estamos trabajando para detectar donde se anula el campo en el divisor. Ya que las direcciones separatrices transversales al divisor nos las determinan los puntos singulares el detectar direcciones separatrices corresponde a detectar puntos singulares del campo, aunque cabe señalar que (como se verá más adelante) no todos los puntos singulares determinan direcciones separatrices.

Entonces nuestro problema se traduce en ver que nos determina el número de puntos singulares del campo.

Demostración:

$$\text{Sea } \bar{X} = \left(\begin{array}{l} a_1 x^k + a_2 x^{k-1} y + \dots + a_k x y^{k-1} + a_{k+1} y^k + \Theta(k+1) \\ b_1 x^m + b_2 x^{m-1} y + \dots + b_k x y^{m-1} + b_{m+1} y^m + \Theta(m+1) \end{array} \right),$$

$$k, m \in \mathbb{Z}^+,$$

supongamos $k < m$.

Analizamos las cartas coordenadas:

Carta (x, u) .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x^k + a_2 x^k u + \dots + a_k x^k u^{k-1} + a_{k+1} x^k u^k + \dots \\ \dot{u} &= -a_1 x^{k-1} u - a_2 x^{k-1} u^2 - \dots - a_k x^{k-1} u^k - a_{k+1} x^{k-1} u^{k+1} + b_1 x^{m-1} \\ &\quad + b_2 x^{m-1} u + \dots + b_m x^{m-1} u^{m-1} + b_{m+1} x^{m-1} u^m + \dots \end{aligned}$$

Este campo vectorial se desvanece en el divisor por lo que dividimos este campo entre x^{k-1} . Después de dividir obtenemos el siguiente campo:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= a_1x + a_2xu + \dots + a_kxu^{k-1} + a_{k+1}xu^k + \dots \\ \tilde{u} &= -a_1u - a_2u^2 - \dots - a_ku^k - a_{k+1}u^{k+1} + b_1x^{m-k} \\ &\quad + b_2x^{m-k}u + \dots + b_mx^{m-k}u^{m-1} + b_{m+1}x^{m-k}u^m + \dots\end{aligned}$$

La división no cambió el sentido de los vectores del campo, y obtuvimos un campo cuyos puntos singulares están situados en el divisor sin que el campo se anule completamente en él.

Nos aproximamos ahora al divisor haciendo tender x a cero y obtenemos un campo diferenciable en Γ_1 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{X} = (0, -a_1u - a_2u^2 - \dots - a_ku^k - a_{k+1}u^{k+1}),$$

para encontrar los puntos singulares hay que buscar las raíces del polinomio:

$$a_1u + a_2u^2 + \dots + a_ku^k + a_{k+1}u^{k+1} = 0,$$

el cual a lo más va a tener $k + 1$ raíces que se traducen en puntos singulares, los cuales son a su vez los que determinan las posibles direcciones separatrices del campo, por lo que en esta carta hemos encontrado que hay a lo más $k + 1$ direcciones separatrices.

Carta (v, y)

$$\begin{aligned}\dot{v} &= a_1v^ky^{k-1} + a_2v^{k-1}y^{k-1} + \dots + a_kvyy^{k-1} + a_{k+1}y^{k-1} \\ &\quad - b_1v^{m-1}y^{m-1} - b_2v^my^{m-1} - \dots - b_mv^2y^{m-1} - b_{m+1}vy^{m-1} + \dots \\ \dot{y} &= b_1v^my^m + b_2v^{m-1}y^m + \dots + b_mv y^m + b_{m+1}y^{m+1}\end{aligned}$$

dividiendo y aproximandonos por y nos queda que el polinomio del cual dependen los puntos singulares es:

$$a_1v^k + a_2v^{k-1} + \dots + a_kv + a_{k+1} = 0.$$

El polinomio anterior tendrá a lo más k raíces.

obtuvimos $k + 1$ y en la carta (v, y) k raíces, que como se las que nos determinan las direcciones separatrices por lo direcciones separatrices quedará acotado por $k + 1$. Donde onente del campo. ■

observamos que siempre el número de direcciones separatrices por los términos que tengan el mínimo exponente en el campo.

ación analizaremos un ejemplo de Blow-up direccional.

$$X = (x^2 - 2xy) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - 2xy) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Calculamos la carta (x, u) .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - 2x^2u \\ \dot{u} &= \frac{x^2u^2 - 2x^2u - u(x^2 - 2x^2u)}{x} = \frac{3x^2u^2 - 3x^2u}{x} = 3xu^2 - 3xu. \end{aligned}$$

Dividimos el campo entre x para que al aproximarnos al divisor este no se desvanezca.

$$\tilde{X} = \frac{\bar{X}}{x} = \begin{pmatrix} x - 2xu \\ 3u^2 - 3u \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{X} = (0, 3u^2 - 3u).$$

Para encontrar los puntos en donde se anula el campo en el divisor, igualamos la segunda coordenada a cero.

$$3u^2 - 3u = u(3u - 3) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ y } u = 1,$$

por lo tanto los puntos críticos son $(x = 0, u = 0)$ y $(x = 0, u = 1)$.

En los puntos singulares veremos que el campo es hiperbólico, por ello para encontrar el comportamiento topológico del campo en una vecindad de los puntos singulares utilizamos Hartman-Grobman.

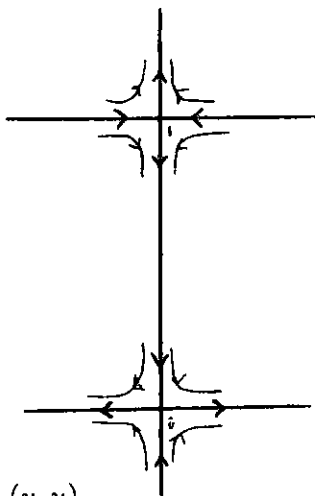
Calculamos la derivada del campo.

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 - 2u & -2x \\ 0 & 6u - 3 \end{pmatrix}.$$

evaluamos la derivada en los puntos críticos del campo y obtenemos:

$$D\tilde{X}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } D\tilde{X}_{(x=0,u=1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Analizamos ahora la carta (v, y) .

$$\dot{v} = \frac{v^2 y^2 - 2y^2 v - v(y^2 - 2y^2 v)}{x} = \frac{3v^2 y^2 - 3y^2 v}{y} = 3v^2 y - 3yv$$

$$\dot{y} = y^2 - 2y^2 v.$$

El campo en esta carta es:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 3v^2 y - 3yv \\ y^2 - 2y^2 v \end{pmatrix}.$$

Analogamente al caso anterior dividimos el campo y nos aproximamos al divisor haciendo, en este caso, tender y a cero.

$$\tilde{Y} = \frac{\bar{Y}}{y} = \begin{pmatrix} 3v^2 - 3v \\ y - 2yv \end{pmatrix}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \tilde{Y} = (3v^2 - 3v, 0),$$

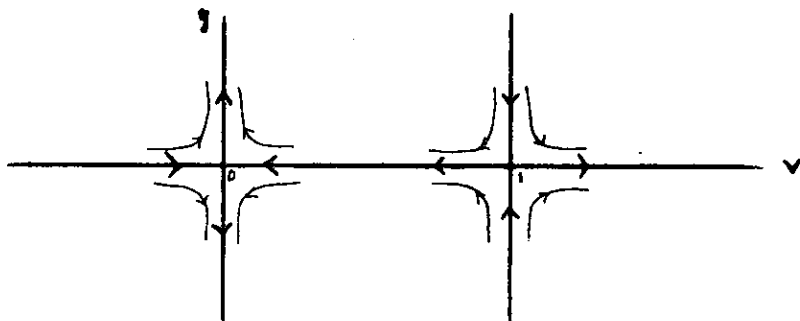
para obtener los puntos críticos hacemos: $3v^2 - 3v = v(3v - 3) = 0$, de la ecuación anterior se sigue que los puntos críticos son: $(v = 0, y = 0)$, $(v = 1, y = 0)$.

Evaluamos la derivada en los puntos críticos del campo.

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 6v - 3 & 0 \\ -2y & 1 - 2v \end{pmatrix}$$

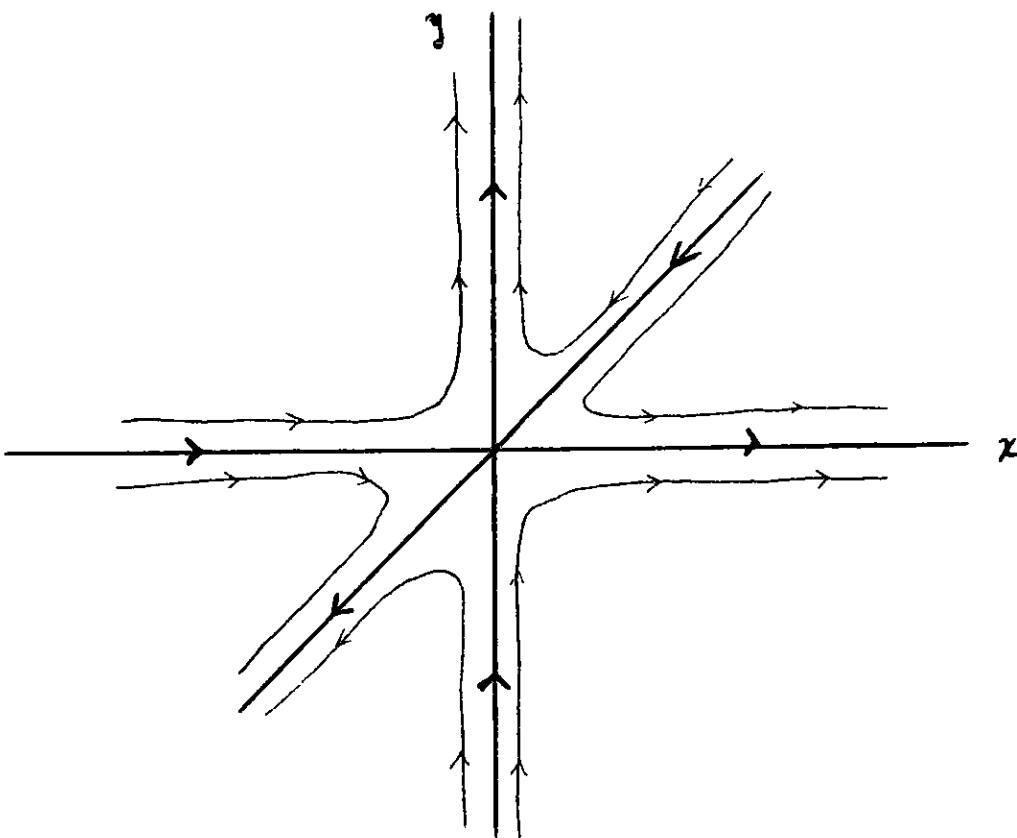
$$D\tilde{Y}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{Y}_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



En el ejemplo anterior el explotar obtuvimos tres direcciones separatrices; una que corresponde a la recta de pendiente uno y otras dos que corresponden a los dos ejes. La primera se detecta en ambas cartas; en la carta (x, u) corresponde al punto $(0, 1)$ y en la carta (v, y) al $(1, 0)$, esto se debe a que esta pertenece a la intersección de V_1 y V_2 (vecindades coordenadas), a diferencia de los ejes que solamente pertenecen, por como los construimos, a una vecindad coordenada. Geométricamente lo podemos pensar de la siguiente forma: al eje y en la carta (x, u) le corresponde $u = \infty$, es decir, al explotar la recta que le asociaríamos al eje y quedaría en el infinito, y análogamente sucede con el eje x en la carta (v, y) . Por ello los ejes solo se detectan en una carta.

El retrato fase final queda de la siguiente forma:



1.2 Blow-up Polar

Teorema 1.11 : Sea X un campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}^2 con $X(0) = 0$ y sea $\Phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ el mapeo definido en coordenadas polares. Entonces hay un campo vectorial $\tilde{X} \in C^\infty$ definido en $S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\Phi_*(\tilde{X}) = X$.

Es decir, si tengo un campo C^∞ en \mathbb{R}^2 con $X(0) = 0$ a partir de este se va a construir otro campo vectorial \tilde{X} definido en $S^1 \times \mathbb{R}$, que también va a ser C^∞ , y que va a cumplir que $\Phi_*(\tilde{X}) = X$.

La función Φ va a mapear los puntos que están situados sobre el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ a una altura r , en un círculo en \mathbb{R}^2 que va a tener radio r .

Los puntos que estén en r y $-r$ nos los va a mapear al mismo círculo de radio r , pero recorrido en direcciones opuestas, es decir, r círculo recorrido en el sentido usual (contrario a las manecillas del reloj) y $-r$ en sentido contrario, por lo tanto Φ cubre doblemente a \mathbb{R}^2

Demostración:

La idea de la demostración es descomponer el campo X en su parte radial y tangencial, para que una vez hecho esto, utilizando coordenadas polares y que Φ_* es invertible en $r \neq 0$ construyamos \tilde{X} .

Sea $X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}^2 .

En \mathbb{R}^2 definimos los siguientes campos vectoriales:

$$R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_{xy} = \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad V_{yx} = \frac{1}{2} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

El campo vectorial R se conoce como campo radial corresponde a todas las rectas que pasan por el origen. Los campos, V_{xy} y V_{yx} , corresponden a los campos tangentes a los círculos que tienen su centro en el origen, recorridos unos en el sentido de las manecillas del reloj y otros en sentido contrario.

Notemos que $V_{xy} = -V_{yx}$ y que $V_{xx} = V_{yy} = 0$

Demostraremos que X puede ser escrito de la siguiente forma:

$$X = \frac{1}{x^2 + y^2} (\langle R, X \rangle R + 2[\langle V_{xy}, X \rangle V_{xy} + \langle V_{yx}, X \rangle V_{yx}]),$$

desarrollando el lado derecho de la igualdad anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x^2 + y^2} (\langle R, X \rangle R + 2[\langle V_{xy}, X \rangle V_{xy} + \langle V_{yx}, X \rangle V_{yx}]) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} (\langle R, X \rangle R + 2[\langle V_{xy}, X \rangle V_{xy} + \langle (-V_{xy}), X \rangle (-V_{xy})]) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} (\langle R, X \rangle R + 4[\langle V_{xy}, X \rangle]) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} (\langle (x, y), (f_1, f_2) \rangle (x, y) + 4[\langle \frac{1}{2}(-y, x), (f_1, f_2) \rangle (-\frac{1}{2}(-y, x))]) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} ((x f_1 + y f_2)(x, y) + [(-y f_1 + x f_2)(-y, x)]) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} ((x^2 f_1 + x y f_2, x y f_1 + y^2 f_2) + (y^2 f_1 - x y f_2, -x y f_1 + x^2 f_2)) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} ((x^2 f_1 + y^2 f_1, x^2 f_2 + y^2 f_2) = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2)(f_1, f_2) = (f_1, f_2)) = X. \end{aligned}$$

Definiremos en $S^1 \times \mathbb{R}$ los campos vectoriales \tilde{R} , \tilde{V}_{xy} y \tilde{V}_{yx} , tales que:

$$\Phi_*(\tilde{R}) = R, \quad \Phi_*(\tilde{V}_{xy}) = V_{xy} \quad \text{y} \quad \Phi_*(\tilde{V}_{yx}) = V_{yx},$$

queremos que $\Phi_*(\tilde{R}) = R$ y sabemos que Φ_* es invertible en $r \neq 0$, por lo tanto:

$$\tilde{R} = \Phi_*^{-1} R.$$

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

$$\Phi_* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Calculamos las expresiones para \tilde{R} , \tilde{V}_{xy} y \tilde{V}_{yx} , utilizando que $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$.

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -\frac{x \sin \theta}{r} + \frac{y \cos \theta}{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ -\frac{r \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{r \sin \theta \cos \theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{xy} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-y \cos \theta + x \sin \theta) \\ \frac{1}{2}(y \frac{\sin \theta}{r} + x \frac{\cos \theta}{r}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-r \sin \theta \cos \theta + r \cos \theta \sin \theta) \\ \frac{1}{2}(\frac{r \sin^2 \theta}{r} + \frac{r \cos^2 \theta}{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

analogamente para \tilde{V}_{yx} obtenemos que:

$$\tilde{V}_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \text{ es decir, } \tilde{V}_{xy} = -\tilde{V}_{yx},$$

por lo tanto, en $S^1 \times \mathbb{R}$ tenemos:

$$\tilde{R} = r \frac{\partial}{\partial r}, \tilde{V}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \tilde{V}_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Es decir, \tilde{V}_{xy} y \tilde{V}_{yx} son los campos cuyo flujo es una rotación en $S^1 \times \mathbb{R}$.

Introduciremos las funciones:

$$\alpha_r = \langle R, X \rangle, \alpha_{xy} = \langle V_{xy}, X \rangle, \alpha_{yx} = \langle V_{yx}, X \rangle,$$

donde, $\alpha_r, \alpha_{xy}, \alpha_{yx} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Observemos que:

$$\alpha_{yx} = \langle V_{yx}, X \rangle = \langle (-V_{xy}), X \rangle = -\langle V_{xy}, X \rangle = -\alpha_{xy}.$$

$$\begin{aligned} & \Phi_* \left[\frac{1}{r^2} ((\alpha_r \circ \Phi) \tilde{R} + 2((\alpha_{xy} \circ \Phi) \tilde{V}_{xy} + (\alpha_{yx} \circ \Phi) \tilde{V}_{yx})) \right] = \\ & \Phi_* \left[\frac{1}{r^2} ((\alpha_r \circ \Phi) \tilde{R} + 2((\alpha_{xy} \circ \Phi) \tilde{V}_{xy} + (-\alpha_{yx} \circ \Phi) (-\tilde{V}_{yx})) \right] = \\ & \Phi_* \left[\frac{1}{r^2} ((\alpha_r \circ \Phi) \tilde{R} + 4((\alpha_{xy} \circ \Phi) \tilde{V}_{xy}) \right] \\ & = \Phi_* \left[(f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (-f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ & = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta \\ \frac{1}{r} (-f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos \theta (f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) - \sin \theta (-f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \\ \sin \theta (f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) + \cos \theta (-f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} f_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ f_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = X, \end{aligned}$$

por lo tanto el \tilde{X} que cumple nuestras hipótesis es:

$$\tilde{X} = \frac{1}{r^2} [(\alpha_r \circ \Phi) \tilde{R} + 2((\alpha_{xy} \circ \Phi) \tilde{V}_{xy})].$$

Esta última expresión no tiene significado para $r = 0$, pero como en $0 \in \mathbb{R}^2$ X, R, V_{xy} y V_{yx} son cero; $\langle R, X \rangle, \langle V_{xy}, X \rangle$ y $\langle V_{yx}, X \rangle$ tienen un uno-jet zero. Esto significa que para $r = 0$: $\alpha_r \circ \Phi; \frac{\partial(\alpha_r \circ \Phi)}{\partial r}; \alpha_{xy} \circ \Phi; \frac{\partial(\alpha_{xy} \circ \Phi)}{\partial r}; \alpha_{yx} \circ \Phi;$

$\frac{\partial(\alpha_{xy} \circ \Phi)}{\partial r}$ son todas iguales a cero. Es claro de la expansión de Taylor de X en 0 que $\frac{1}{r^2}(\alpha_r \circ \Phi)$, $\frac{1}{r^2}(\alpha_{xy} \circ \Phi)$ y $\frac{1}{r^2}$ son C^∞ si tomamos el límite para $r = 0$. Por lo tanto

$$\tilde{X} = \frac{1}{r^2}((\alpha_r \circ \Phi)\tilde{R} + 2[(\alpha_{xy} \circ \Phi)\tilde{V}_{xy}]),$$

es C^∞ . Para $r \neq 0$ tenemos que $\Phi_*(\tilde{X}) = X$, por continuidad se obtiene en todas partes. ■

Analicemos ahora un ejemplo de Blow-up polar.

Sea el campo $(x^2 + 2xy)\frac{\partial}{\partial x} + (4y^2 + 3xy)\frac{\partial}{\partial y}$.

Construimos \tilde{X} .

$$\alpha_r = \langle x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, (x^2 + 2xy)\frac{\partial}{\partial x} + (4y^2 + 3xy)\frac{\partial}{\partial y} \rangle = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3.$$

$$(\alpha_r \circ \Phi)\tilde{R} = r^3(\cos^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta + 3\cos\theta \sin^2\theta + 4\sin^3\theta)r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$4\alpha_{xy} = 4 \langle \frac{1}{2}(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}), (x^2 + 2xy)\frac{\partial}{\partial x} + (4y^2 + 3xy)\frac{\partial}{\partial y} \rangle$$

$$= 4(x^2y + xy^2) = 4xy(x + y)$$

$$(\alpha_{xy} \circ \Phi)\tilde{V}_{xy} = 4r^3 \cos\theta \sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta})$$

$$= 2r^3 \cos\theta \sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Por lo tanto el campo es:

$$\tilde{X} = \left(\begin{array}{l} r^2(\cos^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta + 4\sin^3\theta + 3\cos\theta \sin^2\theta) \\ 2r \cos\theta \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta) \end{array} \right),$$

al igual que en el blow-up direccional dividido el campo.

$$\bar{X} = \frac{1}{r}\tilde{X} = \left(\begin{array}{l} r(\cos^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta + 4\sin^3\theta + 3\cos\theta \sin^2\theta) \\ 2\cos\theta \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta) \end{array} \right),$$

cuando $r = 0$,

$$\bar{X} = 2\cos\theta \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)\frac{\partial}{\partial \theta},$$

igualando la expresión anterior a cero obtenemos que los puntos críticos son en $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, $\theta = 0, \pi$, $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$.

Calculamos la derivada del campo:

$$D\bar{X} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

$$a_{1,1} = \cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta + 4 \sin^3 \theta + 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

$$a_{1,2} = r(8 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta + 4 \cos^3 \theta - 3 \sin^3 \theta).$$

$$a_{2,2} = 2(-2 \sin^2 \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta + \cos^3 \theta).$$

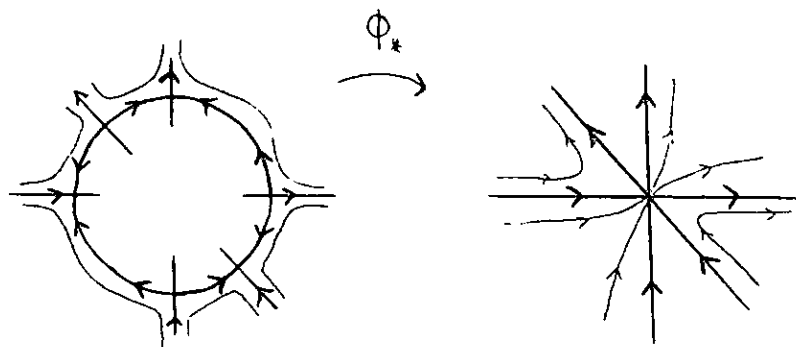
Sustituyendo la derivada en cada uno de los puntos:

$$D\bar{X}_{(0, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D\bar{X}_{(0, \frac{3}{2}\pi)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D\bar{X}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D\bar{X}_{(0,\pi)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D\bar{X}_{(0, \frac{3}{4}\pi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad D\bar{X}_{(0, \frac{7}{4}\pi)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Obtenemos los siguientes dibujos:



El blow-up polar nos proporciona una buena visión global de lo que sucede en la vecindad del punto singular topológicamente hablando. Pero una vez que hemos subdividido de esta forma, una singularidad en otras nuevas, haremos los cálculos necesarios usando el Blow-up direccional ya que los cálculos resultan

más sencillos, algebraicamente hablando, que con el Blow-up polar que implica el trabajar con funciones trigonométricas.

Demostremos ahora que el Blow-up direccional nos da el mismo resultado que el blow-up polar. Para ello daremos un difeomorfismo que vaya del blow-up polar al blow-up direccional.

Sea \tilde{X} el campo que obtenemos al explotar polarmente y \bar{X} el que se obtiene en la explosión direccional.

Por consiguiente consideramos $U \in S^1 \times \mathbb{R}$ donde,

$$U = \{(r, \theta) \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), r \in \mathbb{R}\}.$$

Sea el mapeo $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido de la siguiente manera:

$$G(r, \theta) = (r \cos \theta, \tan \theta).$$

G mapea $U \in S^1 \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ difeomorfamente, es decir, G es una C^∞ carta para U y se sigue que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \bar{X} \\ \phi_r \downarrow & \swarrow G_* & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

Por lo anterior \tilde{X} y \bar{X} son difeomorfos, es decir, $G_*(\tilde{X}) = \bar{X}$ donde,

$$G_*(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Calculamos $G_*(\tilde{X})$

$$\begin{aligned} G_*(\tilde{X}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r}(f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) \\ \frac{1}{r^2}(f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -f_1 \frac{\sin \theta}{r^2} \cos^2 \theta + f_2 \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \frac{1}{rx}(f_2 - u f_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \tilde{X} \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad usamos las siguientes identidades:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta.$$

Es decir, G_* manda órbitas de \tilde{X} a órbitas de \bar{X} y como $\frac{1}{r}$ es una función positiva se conserva el sentido de la orientación.

En los ejemplos que hemos hecho anteriormente se han obtenido singularidades lo suficientemente simples para ser tratadas con métodos como Hartman-Grobman, sin embargo no siempre vamos a encontrar ese tipo de singularidades. Como se verá en el capítulo tres, es por ello que vale la pena preguntarse si hay características que les sean comunes a los campos en los que al explotar, obtengamos singularidades "bonitas" entendiendo por singularidades bonitas a aquellas singularidades en las cuales una vez que hayamos explotado podamos determinar el comportamiento topológico del campo en una vecindad alrededor del punto, como es el caso de las singularidades hiperbólicas y las parcialmente hiperbólicas.

La respuesta a la pregunta formulada anteriormente nos la da el "Teorema de Descomposición" que veremos posteriormente.

Antes del teorema veremos algunas definiciones, que se requieren para la comprensión del teorema.

Definición 1.12 Diremos que una singularidad, en el cero, de un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 es un "cero no degenerado" si $j_1(X)(0) \neq 0$ y j_1 considerado como un campo vectorial lineal en \mathbb{R}^2 no es linealmente conjugado al campo vectorial $x \frac{\partial}{\partial y}$ donde (x, y) son las coordenadas en \mathbb{R}^2 .

Una pregunta natural es: ¿qué campos vectoriales lineales en \mathbb{R}^2 tienen un cero no degenerado?

De acuerdo con el teorema de clasificación de formas canónicas de Jordan de matrices, $j_1(X)(0)$ es linealmente conjugado a una de las siguientes matrices canónicas:

$$1.) \begin{pmatrix} \lambda_1 & i \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2, i = 0, \text{ en caso contrario } i = 1$$

$$2.) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} a \neq 0, b \neq 0$$

$$3.) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \neq 0$$

$$4.) \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \lambda \neq 0$$

$$5.) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si el $j_1(X)(0)$ es linealmente conjugado a una de las primeras cuatro matrices anteriores entonces tienen singularidad con un cero no degenerado.

Normalmente cuando le aplicamos a un campo un blow-up obtenemos campos con $j_1(X)(0)$ linealmente conjugados a los casos 1 y 3. Los casos 2 y 4 corresponden a espirales y centros respectivamente, por lo que estas singularidades nos dan en $S^1 \times \mathbb{R}$ campos sin singularidades en la vecindad de $S^1 \times \{0\}$.

Cuando obtenemos campos linealmente conjugados a los casos 1 y 3 corresponden a singularidades hiperbólicas y parcialmente hiperbólicas, es decir, singularidades cuya parte lineal tiene dos o un eigenvalores distintos de cero respectivamente. En estos casos podemos determinar las separatrices y los sentidos de ellas, con lo que ya tendríamos una buena visión del comportamiento del campo en una vecindad del punto singular.

Definición 1.13 *Una singularidad, en el cero, de un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 puede estar bien descompuesta si existe una sucesión finita de blow-ups $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n$ que nos llevan a un campo \overline{X} tal que las singularidades de \overline{X} en el divisor sean:*

1). *Singularidades aisladas p que correspondan a singularidades hiperbólicas o parcialmente hiperbólicas y tales que $j_\infty(\overline{X}|_{W^c})(p) \neq 0$ si W^c es la variedad central de \overline{X} en p .*

2). *Todo el divisor es una singularidad con cero no degenerado.*

En este caso decimos que tenemos una singularidad bien descompuesta.

Definición 1.14 *Un campo $X \in \mathbb{R}^2$ satisface una desigualdad de tipo Lojasiewicz en 0 si existen $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ tal que:*

$$\|X(x)\| \geq c\|x\|^k.$$

En una vecindad del cero

Los campos analíticos con singularidad aislada siempre cumplen una desigualdad de tipo Lojasiewicz.

Supongamos que es falso. Entonces el cero es una singularidad aislada y no cumple Lojasiewicz, es decir;

$$\text{Para toda } k \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ y } c > 0, c \in \mathbb{R} \quad \|X(x)\| < c\|x\|^k,$$

donde x está en una vecindad del cero, por lo que $\|x\| < \epsilon$.

Como la desigualdad es para toda k , si $k \rightarrow \infty$, entonces $c\|x\|^k \rightarrow 0$.

Por otro lado la norma es una función definida positiva, por lo que $\|X(x)\| = 0$, lo cual es una contradicción porque supusimos que el cero era el único punto singular.

Teorema 1.15 *Si un campo en \mathbb{R}^2 tiene en cero una singularidad C^∞ , los siguientes enunciados son equivalentes:*

- 1). *X tiene una singularidad bien descompuesta mediante blow-up.*
- 2). *X satisface una desigualdad de tipo Lojasiewicz en 0.*

Sin embargo la posición, y otras propiedades determinantes (como el número de separatrices) de las singularidades en una buena descomposición, dependen únicamente de un jet finito de X en 0, como ya lo habíamos visto.

Para la demostración del teorema anterior véase [Dum].

2 Capítulo

El programa que explota campos vectoriales en el cero, está escrito en el procesador **mathematica** y su objetivo principal es el de resolver las singularidades del campo aplicando el método del Blow-up en el 0 del campo. Lo hace construyendo las cartas coordenadas (x, u) , (v, y) y calcula la forma en que nos acercamos al divisor en estas cartas para detectar si existen o no puntos singulares en el campo. Si hay singularidad detectará si esta es hiperbólica o parcialmente hiperbólica. En caso de que sea hiperbólica aplicará el teorema de Hartman-Grobman para obtener el comportamiento de las separatrices. En caso de que la singularidad no sea hiperbólica o parcialmente hiperbólica se volverá a explotar el campo en esa singularidad y repetiremos el procedimiento anterior.

El programa puede explotar hasta dos veces en una dirección.

Descripción General del Programa

El programa está subdividido en funciones, ya que este contiene conjuntos de instrucciones que van a ser utilizadas más de una vez, como es el caso del procedimiento para construir las cartas coordenadas, además de que mediante el uso de estas utilizaremos un menor espacio en el momento de la ejecución del programa y el diseño del programa resulta más claro.

Iremos haciendo una descripción de la tarea de cada una de las funciones.

Función Descripción

1. Carta. Construye las cartas coordenadas siguiendo el procedimiento descrito en el teorema 1.2

A esta función se le debe proporcionar el campo y qué carta se quiere construir, (x, u) o (v, y) .

2. Escribe. Esta función tiene como tarea la de establecer una comunicación con el usuario al proporcionarle los datos de una forma clara.

Se le proporciona en qué carta estamos trabajando y el mensaje que se quiere mandar.

3. Simp. Esta función junto con `elimin`, van a dejar un solo representante de las raíces de multiplicidad mayor o igual que dos.

Específicamente esta función nos simplifica la información de manera que quede lista para que se pueda trabajar con ella.

Para que trabaje se le proporcionan el vector de soluciones obtenido durante el programa, (opcl) para que pueda identificar la carta en la que estamos trabajando.

4. Elimín. Tiene como tarea la de dejar solo un representante de aquellas raíces que son múltiples.

5. Expl01. Esta función es la que contiene el método del Blow-up direccional, pero explota únicamente en una dirección ya sea en dirección de x o y . Se le tienen que dar como datos el campo y la dirección en la que se quiere explotar.

6. Expl02. Esta última función es la que hace que el campo se explote en ambas direcciones y que en caso de ser necesario manda a explotar una segunda vez.

De las funciones expl01 y expl02 daremos una descripción más detallada ya que expl01 es la que contiene el método del Blow-up direccional y expl02 es la que explota el campo en ambas direcciones y en caso de ser necesario vuelve a explotar.

Función Expl01

Paso 1. Dependiendo de la carta que hallamos elegido va a preparar todo para la primera o segunda coordenada.

Paso 2. Construye la carta correspondiente con la ayuda de la función carta y la guarda en crt1.

Paso 3. Calcula la forma en la que el campo se acerca al divisor. En caso de que el campo se anule en el divisor divide el campo, para obtener los puntos singulares que están situados sobre este. Guarda la ecuación que determina los puntos singulares en l1.

Paso 4. Igualando l1 a 0 resuelve la ecuación respecto a w para encontrar los puntos singulares y guarda el resultado en sol1, sol1 va a ser un vector de soluciones de la ecuación $l1 = 0$.

Paso 5. Verifica que el conjunto de soluciones sea diferente del vacío ya que, en caso contrario el campo se esta aproximando tangente al divisor. De ser así la función manda el mensaje a pantalla de que el campo se aproxima tangente y termina. En caso contrario sigue con los demás pasos.

Paso 6. Verifica que el vector $sol1$ no tenga raíces con multiplicidad, en caso de tenerlas deja solo un representante de esas raíces. Guarda este nuevo vector en $sol2$. Manda a pantalla Las raíces obtenidas utilizando escribe.

Paso 7. Calcula la derivada del campo ($deral$), la manda a pantalla y se evalúa en ella $w = 0$ donde w puede ser x o y dependiendo de la carta en la que este trabajando.

Paso 8. Dentro de un ciclo hace los siguientes pasos. En $comp1$ guarda la matriz que resulto de evaluar los puntos singulares en en la derivada del campo, después calcula los eigenvalores de $comp1$ y si los dos eigenvalores son distintos de cero entoces la singularidad es hiperbólica y utilizando Hartman-Grobman obtenemos los sentidos de las separatrices; si nada más uno de los eigenvalores es distinto de cero la singularidad es parcialmente hiperbólica; si los dos son iguales a cero entonces guarda esos puntos en el vector $volex$.

Paso 9. Debido a que podemos volver a explotar el campo $crt1$ lo deja en términos de x, y y guarda el resultado en crt .

Al final $explo1$ deja como resultado un vector que va a tener como contenido la carta crt y $volex$.

Función $explo2$

Paso 1. Explota el campo en ambas direcciones, con ayuda de $explo1$, y guarda el resultado de las explosiones en $car1$ y $car2$ que son las explosiones en dirección x , y respectivamente.

Paso 2. En la segunda entrada de $car1$ ($car2$) va a estar el vector $volex$ que contiene los puntos en los que hay que volver a explotar, $exi1$ y $exi2$ son la longitud del vector $volex$.

Paso 3. Si $exi1$ ($exi2$) son distintos de cero quiere decir que hay puntos en los que tenemos que volver a explotar, en cuyo caso se vuelve a explotar en la carta y dirección correspondientes y se guarda el resultado en $car3$ ($car4$).

¿Cómo se utiliza el programa?

Lo único que el usuario debe proporcionar a `explo2` es el campo que se quiere explotar.

Ejemplo

```
campo = {x2 + 2xy, y2 + 2xy}  
explo2{campo}
```

```

carta[a1_List,a2_]:= (prueba=(x,y)/a2;
  If[prueba[[1]]==1,
    x1=u x;q1=1;q2=2;w=u;z=y;a3=(x2,w1),
    Print["no reconoce"],
    x1=v y;q1=2;q2=1;w=v;z=x;a3=(w1,x2)];
  x2=ExpandAll[a1[[q1]]/.z->x1];
  w1=ExpandAll[((a1[[q2]]/.z->x1)-
    w (a1[[q1]]/.z->x1))/ a2];
  crt=a3;Clear[a2,a3,x2,w1];crt);

escribe[opc_,d_]:= (If[opc==1,Print["x->0 ", "u->",d],
  Print["v->",d," y->0"]]);

simp[vecsol_List,opc1_]:= (If[opc1==1,w=u,w=v];
  long=Length[vecsol];
  vecsol1={};
  For[i=1,i<=long,i++,r=w/.vecsol[[i]];
    vecsol1=Insert[vecsol1,r,i];vecsol1];
  elimin[vec_List]:= (vec1={vec[[1]]};
  n=Length[vec];
  i=2;
  While[i<=n,ent=vec[[i]];n1=Length[vec1];j=1;
    While[j<=n1,
      If[ent!=vec1[[j]],
        If[j==n1,vec1=Insert[vec1,ent,n1+1],j=j+1];
        j=j+1];
      i=i+1];vec2=vec1;Clear[vec1];vec2);

explor1[cmp_List,q_]:= (prb=(x,y)/q;
  If[prb[[1]]==1,q2=2;Print["Carta (x,xu)"];w=u;
  dericon=(q,u);esc=1;z=y,Print["hola"],
  q2=1;Print["Carta (yv,y)"];w=v;
  dericon=(v,y);esc=2;z=x];
  crt1=carta[cmp,q];
  l11=Limit[crt1[[q2]],q->0];
  While[l11==0,crt4=ExpandAll[crt1/q];crt1=crt4;
  l11=Limit[crt1[[q2]],q->0];];
  Print[crt1];
  sol=NSolve[l11==0,w];
  sol1=simp[sol,esc];
  num1=Length[sol1];
  If[num1!=0,Print["Puntos Singulares"];
  sol2=elimin[sol1];
  num2=Length[sol2];
  For[r=1,r<=num2,r++,escribe[esc,sol2[[r]]]];
  deral=Outer[D,crt1,dericon];
  Print["Derivada del campo"];
  Print[MatrixForm[deral]];

```

```

yde4=deral/.q->0;
For[j=1,j<=num2,j++,
  comp2=ExpandAll[yde4/.w->sol2[[j]]];
  Print["Eigenvalores de la derivada"];
  eigen=Eigenvalues[comp2];
  Print[eigen];
  If[eigen==(0,0),
    Print["Hay que volver a explotar en el punto: "];
    volex=(sol2[[j]]);escribe{esc,sol2[[j]]} ,
    If[Det[comp2]!=0,
      Print["Singularidad Hiperbolica"],
      Print["Singularidad Parcialmente Hiperbolca"]] ],
Print["El campo se aproxima tangente"];
volex1=volex;
crt=crt1;Clear[crt1,volex];crt2=crt/.w->z;
{crt2,volex1} );

explo2[cmp1_List]:=({
  car1=explo1[cmp1,x];
  car2=explo1[cmp1,y];
  ex1=Length[car1[[2]]];
  ex2=Length[car2[[2]]];
  If[ex1!=0,Print["2da Explosion"];
  car3=explo1[car1[[1]],x];
  car4=explo1[car1[[1]],y]];
  If[ex2!=0,Print["2da Explosion"];
  car31=explo1[car1[[1]],x];
  car41=explo1[car2[[1]],y]];
Clear[ex1,ex2,car1,car2,car3,car4]);

```


campo={x^2-2 x y,y^2-2 x y};

explo2[campo]

Carta (x,xu)

$\{x - 2 u x, -3 u + 3 u^2\}$

Puntos Singulares

x->0 u->0.

x->0 u->1.

Derivada del campo

1 - 2 u -2 x

0 -3 + 6 u

Eigenvalores de la derivada

{-3., 1.}

Singularidad Hiperbolica

Eigenvalores de la derivada

{3., -1.}

Singularidad Hiperbolica

Carta (yv,y)

$\{-3 v + 3 v^2, y - 2 v y\}$

Puntos Singulares

v->0. y->0

v->1. y->0

Derivada del campo

-3 + 6 v 0

-2 y 1 - 2 v

Eigenvalores de la derivada

{-3., 1.}

Singularidad Hiperbolica

Eigenvalores de la derivada

{3., -1.}

Singularidad Hiperbolica

3 Capítulo

En este capítulo utilizando el método del Blow-up direccional analizaremos los campos que tienen parte lineal degenerada y términos de segundo orden, y los que únicamente tienen términos de segundo orden.

3.1 Campos con parte lineal degenerada y términos cuadráticos

Estudiaremos primero los campos con términos cuadráticos y parte lineal, para ello recordemos las formas canónicas de Jordan que se vieron en el capítulo 1, pág. 25.

Las matrices que se mencionaron anteriormente corresponden a las partes lineales de los campos que vamos a estudiar, sin embargo los casos (1), (2) al ser hiperbólicos los podemos estudiar con el teorema de Hartman-Grobman; los campos con parte lineal correspondiente al caso (3) corresponden a campos parcialmente hiperbólicos que tienen asociadas invariantes a partir de las cuales podemos determinar el comportamiento topológico de ellos, y el caso (4) corresponde a un centro, por lo tanto la única parte lineal que nos interesa estudiar es la que corresponde al caso (5), que es un campo cuya parte lineal tiene un cero degenerado.

Caso con parte lineal degenerada.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1y + a_2x^2 + a_3xy + a_4y^2 \\ \dot{y} &= b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2\end{aligned}$$

Carta (x, u) con $u = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1xu + a_2x^2 + a_3x^2u + a_4x^2u^2 \\ \dot{u} &= \frac{b_1x^2 + b_2x^2u + b_3x^2u^2 - u(a_1xu + a_2x^2 + a_3x^2u + a_4x^2u^2)}{x} \\ &= b_1x + (b_2 - a_2)xu + (b_3 - a_3)xu^2 - a_1u^2 - a_4xu^3\end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1xu + a_2x^2 + a_3x^2u + a_4x^2u^2 \\ b_1x + (b_2 - a_2)xu + (b_3 - a_3)xu^2 - a_1u^2 - a_4xu^3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} X_1 = (0, -a_1 u^2)$$

Haciendo $-a_1 u^2 = 0$ notamos que solo hay un punto singular en esta carta que es: $(x = 0, u = 0)$.

Carta (v, y) con $v = \frac{x}{y}$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{a_1 y + a_2 v^2 y^2 + a_3 v y^2 + a_4 y^2 - v(b_1 v^2 y^2 + b_2 v y^2 + b_3 y^2)}{y} \\ &= a_1 + (a_2 - b_2)v^2 y + (a_3 - b_3)v y + a_4 y - b_1 v^3 y \\ \dot{y} &= b_1 v^2 y^2 + b_2 v y^2 + b_3 y^2 \end{aligned}$$

$$Y_1 = \left(\begin{array}{c} a_1 + (a_2 - b_2)v^2 y + (a_3 - b_3)v y + a_4 y - b_1 v^3 y \\ b_1 v^2 y^2 + b_2 v y^2 + b_3 y^2 \end{array} \right)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} Y_1 = (a_1, 0)$$

En esta carta el campo se aproxima tangente al divisor, por lo tanto no se detectan singularidades en esta carta.

Hacemos entonces el análisis en la carta (x, u) ya que ahí detectamos singularidades.

Calculamos la derivada del campo.

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = a_1 u + 2a_2 x + 2a_3 x u + 2a_4 x u^2$$

$$a_{12} = a_1 x + a_3 x^2 + 2a_4 x^2 u$$

$$a_{21} = b_1 + (b_2 - a_2)u + (b_3 - a_3)u^2 - a_4 u^3$$

$$a_{22} = (b_2 - a_2)x + 2(b_3 - a_3)xu - 2a_1 u - 3a_4 x u^2$$

$$D\tilde{X}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta carta la explosión no nos llevo a un campo hiperbólico ni parcialmente hiperbólico, por lo que nos conviene hacer una segunda explosión en (x, u) .

Carta (x, u_1)

En este caso $u_1 = \frac{x}{x}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1 x^2 u_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 u_1 + a_4 x^4 u_1^2 \\ \dot{u}_1 &= \frac{b_1 x + (b_2 - a_2)x^2 u_1 + (b_3 - a_3)x^3 u_1^2 - a_1 x^2 u_1^2 - a_4 x^4 u_1^3 - u_1(a_1 x^2 u_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 u_1 + a_4 x^4 u_1^2)}{x} \\ &= b_1 + (b_2 - 2a_2)xu_1 + (b_3 - 2a_3)x^2 u_1^2 - 2a_1 x u_1^2 - 2a_4 x^3 u_1^3\end{aligned}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} a_1 x^2 u_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 u_1 + a_4 x^4 u_1^2 \\ b_1 + (b_2 - 2a_2)xu_1 + (b_3 - 2a_3)x^2 u_1^2 - 2a_1 x u_1^2 - 2a_4 x^3 u_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} X_2 = (b_1, 0)$$

El campo se aproxima tangente en esta carta.

Carta (v_1, u)

En esta carta $v_1 = \frac{x}{u}$

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{a_1 v_1 u^2 + a_2 v_1^2 u^2 + a_3 v_1^3 u^3 + a_4 v_1^4 u^4 - v_1(b_1 v_1 u + (b_2 - a_2)v_1 u^2 + (b_3 - a_3)v_1 u^3 - a_1 u^2 - a_4 v_1 u^4)}{u} \\ &= 2a_1 v_1 u + (2a_2 - b_2)v_1^2 u + (2a_3 - b_3)v_1^3 u^2 - b_1 v_1^2 + 2a_4 v_1^2 u^3 \\ \dot{u} &= b_1 v_1 u + (b_2 - a_2)v_1 u^2 + (b_3 - a_3)v_1 u^3 - a_1 u^2 - a_4 v_1 u^4\end{aligned}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 2a_1 v_1 u + (2a_2 - b_2)v_1^2 u + (2a_3 - b_3)v_1^3 u^2 - b_1 v_1^2 + 2a_4 v_1^2 u^3 \\ b_1 v_1 u + (b_2 - a_2)v_1 u^2 + (b_3 - a_3)v_1 u^3 - a_1 u^2 - a_4 v_1 u^4 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} Y_2 = (-b_1 v_1^2, 0)$$

En esta carta encontramos que el único punto crítico es el $(0, 0)$. Por lo tanto hacemos el análisis en la carta (v_1, u)

Calculamos la derivada del campo.

$$DY_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2a_1 u + 2(2a_2 - b_2)v_1 u + 2(2a_3 - b_3)v_1 u^2 - 2b_1 v_1 + 4a_4 v_1 u^3$$

$$a_{12} = 2a_1 v_1 + (2a_2 - b_2)v_1^2 + 2(2a_3 - b_3)v_1^2 u + 6a_4 v_1^2 u^2$$

$$a_{21} = b_1 u + (b_2 - a_2)u^2 + (b_3 - a_3)u^3 - a_4 u^4$$

$$a_{22} = b_1 v_1 + 2(b_2 - a_2)v_1 u + 3(b_3 - a_3)v_1^2 u^2 - 2a_1 u - 4a_4 v_1 u^3$$

Sustituimos la derivada en el punto.

$$DY_2|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos una tercera explosión en la carta (v_1, u) en el punto $(0, 0)$

Carta (v_1, u_2) donde $u_2 = \frac{u}{v_1}$ con $v_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} &= 2a_1 v_1^2 u_2 + (2a_2 - b_2)v_1^3 u_2 + (2a_3 - b_3)v_1^4 u_2^2 - b_1 v_1^2 + 2a_4 v_1^5 u_2^3 \\ &= \frac{b_1 v_1^2 u_2 + (b_2 - a_2)v_1^3 u_2^2 + (b_3 - a_3)v_1^4 u_2^3 - a_1 v_1^2 u_2^2 - a_4 v_1^5 u_2^3 - u_2(2a_1 v_1^2 u_2 + (2a_2 - b_2)v_1^3 u_2 + (2a_3 - b_3)v_1^4 u_2^2 - b_1 v_1^2 + 2a_4 v_1^5 u_2^3)}{v_1} \\ &= 2b_1 v_1 u_2 + (2b_2 - 3a_2)v_1^2 u_2^2 + (2b_3 - 3a_3)v_1^3 u_2^3 - 3a_1 v_1 u_2^2 - 3a_4 v_1^4 u_2^4 \end{aligned}$$

En este caso es necesario dividir el campo. Después de dividir obtenemos siguiente expresión:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 v_1 u_2 + (2a_2 - b_2)v_1^2 u_2 + (2a_3 - b_3)v_1^3 u_2^2 - b_1 v_1 + 2a_4 v_1^4 u_2^3 \\ 2b_1 u_2 + (2b_2 - 3a_2)v_1 u_2^2 + (2b_3 - 3a_3)v_1^2 u_2^3 - 3a_1 u_2^2 - 3a_4 v_1^3 u_2^4 \end{pmatrix}$$

Nos aproximamos al divisor sacando el límite cuando v_1 tiende a cero.

$$\lim_{v_1 \rightarrow 0} X_3 = (0, 2b_1 u_2 - 3a_1 u_2^2)$$

lo tanto los puntos críticos en esta carta son: $(0, 0)$ y $(0, \frac{2b_1}{3a_1})$

Calculamos la derivada del campo en la carta (v_1, u_2)

$$DX_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2a_1 u_2 + 2(2a_2 - b_2)v_1 u_2 + 3(2a_3 - b_3)v_1^2 u_2^2 - b_1 + 8a_4 v_1^3 u_2^3.$$

$$a_{12} = 2a_1 v_1 + (2a_2 - b_2)v_1^2 + 2(2a_3 - b_3)v_1^3 u_2 + 6a_4 v_1^4 u_2^2.$$

$$a_{21} = (2b_2 - 3a_2)u_2^2 + 3(2b_3 - 3a_3)v_1^2 u_2^3 - 9a_4 v_1^2 u_2^4.$$

$$a_{22} = 2b_1 + 2(2b_2 - 3a_2)v_1 u_2 + 2(2b_3 - 3a_3)v_1^2 u_2^2 - 6a_1 u_2 - 12a_4 v_1^3 u_2^3.$$

Sustituimos la derivada en los puntos singulares.

$$DX_3|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix}$$

$$DX_3|_{(0, \frac{2b_1}{3a_1})} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{3} & 0 \\ 2(b_3 - a_3)(\frac{2b_1}{3a_1})^2 & -2b_1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo anterior los dos puntos singulares obtenidos en esta carta son hiperbólicos.

Carta (v_2, u) .

En esta carta $v_2 = \frac{v_1}{u}$.

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 &= \frac{2a_1v_2u^2 + (2a_2 - 2b_2)v_2^2u^3 + (2a_3 - b_1)v_2^2u^4 - b_1v_2^2u^2 + 2a_4v_2^2u^5 - v_2(b_1v_2u^2 + (b_2 - a_2)v_2u^3 + (b_3 - a_3)v_2u^4 - a_1u^2 - a_4v_2u^5)}{u^5} \\ &= 3a_1v_2u + (3a_2 - 2b_2)v_2^2u^2 + (3a_3 - 2b_3)v_2^2u^3 - 2b_1v_2^2u + 3a_4v_2^2u^4 \\ \dot{u} &= b_1v_2u^2 + (b_2 - a_2)v_2u^3 + (b_3 - a_3)v_2u^4 - a_1u^2 - a_4v_2u^5 \end{aligned}$$

Es este caso es necesario dividir el campo, despues de hacerlo obtenemos la siguiente expresión:

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 3a_1v_2 + (3a_2 - 2b_2)v_2^2u + (3a_3 - 2b_3)v_2^2u^2 - 2b_1v_2^2 + 3a_4v_2^2u^3 \\ b_1v_2u + (b_2 - a_2)v_2u^2 + (b_3 - a_3)v_2u^3 - a_1u - a_4v_2u^4 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} Y_3 = (3a_1v_2 - 2b_1v_2^2, 0).$$

Por lo tanto en esta carta los puntos críticos son los siguientes:

$$(0, 0) \text{ y } \left(\frac{3a_1}{2b_1}, 0\right)$$

$$DY_3 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = 3a_1 + 2(3a_2 - 2b_2)v_2u + 2(3a_3 - 2b_3)v_2u^2 - 4b_1v_2 + 6a_4v_2u^3.$$

$$b_{12} = (3a_2 - 2b_2)v_2^2 + 2(3a_3 - 2b_3)v_2^2u + 9a_4v_2^2u^2.$$

$$b_{21} = b_1u + (b_2 - a_2)u^2 + (b_3 - a_3)u^3 - a_4u^4.$$

$$b_{22} = b_1v_2 + 2(b_2 - a_2)v_2u + 3(b_3 - a_3)v_2u^2 - a_1 - 4a_4v_2u^3.$$

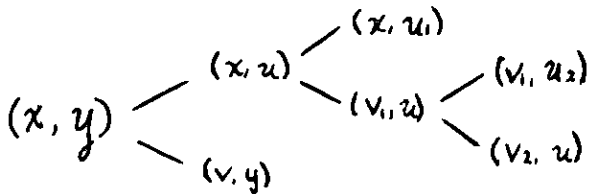
Sustituimos la derivada en los puntos singulares.

$$DY_3|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$DY_3|_{(\frac{3a_1}{2b_1}, 0)} = \begin{pmatrix} -3a_1 & (3a_2 - 2b_2)(\frac{3a_1}{2b_1})^2 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo anterior los dos puntos singulares obtenidos en esta carta son hiperbólicos.

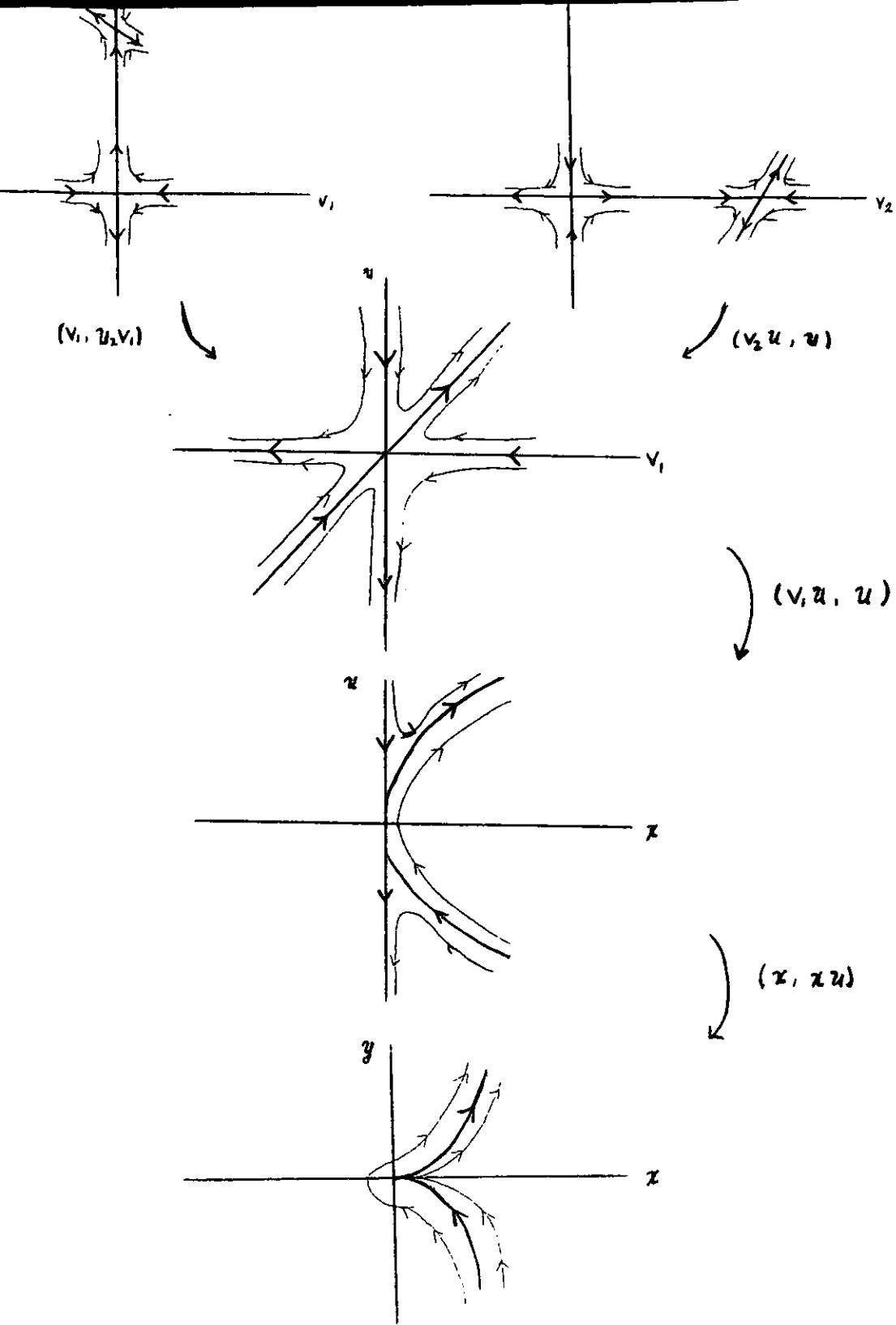
En la última explosión obtuvimos, en ambas cartas, solo puntos críticos hiperbólicos, estos puntos nos van a servir para encontrar las direcciones en las cuales se van a encontrar las separatrices del campo. Para ello nos ayudaremos con el siguiente diagrama, donde veremos la forma como hemos explotado.



Los puntos que obtuvimos en la última explosión son los siguientes:

$$(x = 0, u_2 = 0), (x = 0, u_2 = \frac{2b_1}{3a_1}), (v_2 = \frac{3a_1}{2b_1}, 0) \text{ y } (v_2 = 0, y = 0)$$

Vamos a esquematizar la información topológica en los siguientes diagramas.



3.2 Campos con solo términos cuadráticos

A continuación analizaremos los campos con solo términos cuadráticos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 \\ \dot{y} &= b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Explotamos este campo en ambas direcciones.

$$\text{carta } (x, u), \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + a_2x^2u + a_3x^2u^2 \\ \dot{u} &= \frac{b_1x^2 + b_2x^2u + b_3x^2u^2 - u(a_1x^2 + a_2x^2u + a_3x^2u^2)}{x} \\ &= \frac{b_1x^2 + (b_2 - a_1)x^2u + (b_3 - a_2)x^2u^2 - a_3x^2u^3}{x} \\ &= b_1x + (b_2 - a_1)xu + (b_3 - a_2)xu^2 - a_3xu^3 \end{aligned}$$

En este caso es necesario dividir el campo.

$$\bar{X} = \frac{\dot{x}}{x} = \left(\begin{array}{c} a_1x + a_2xu + a_3xu^2 \\ b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 \end{array} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{X} = (0, b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3).$$

Por lo tanto para encontrar los puntos singulares sobre el divisor hay que resolver la ecuación:

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0. \quad (A)$$

Carta (v, y)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{a_1v^2y^2 + a_2vy^2 + a_3y^2 - v(b_1v^2y^2 + b_2vy^2 + b_3y^2)}{y} \\ &= \frac{(a_1 - b_2)v^2y^2 + (a_2 - b_3)vy^2 + a_3y^2 - b_1v^3y^2}{y} \\ &= (a_1 - b_2)v^2y + (a_2 - b_3)vy + a_3y - b_1v^3y \\ \dot{y} &= b_1v^2y^2 + b_2vy^2 + b_3y^2 \end{aligned}$$

$$\bar{Y} = \frac{\dot{y}}{y} = \left(\begin{array}{c} (a_1 - b_2)v^2 + (a_2 - b_3)v + a_3 - b_1v^3 \\ b_1v^2y + b_2vy + b_3y \end{array} \right).$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \bar{Y} = (a_3 + (a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3, 0).$$

Para encontrar los puntos singulares sobre el divisor hay que resolver la siguiente ecuación:

$$a_3 + (a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3. \quad (B)$$

Observamos que cuando nos aproximamos al divisor los puntos singulares nos quedan determinados por los polinomios (A) y (B).

Los polinomios (A) y (B) los obtuvimos suponiendo que el campo (*) contaba con todos los posibles términos de grado 2, sin embargo no siempre sucede así y dependiendo de los términos con los que este cuente vamos a obtener los siguientes polinomios:

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0, \quad (1)$$

$$b_1 + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0, \quad (2)$$

$$b_1 + (b_2 - a_1)u - a_3u^3 = 0, \quad (2')$$

$$(b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0, \quad (3)$$

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 = 0, \quad (3')$$

$$b_1 + (b_2 - a_1)u = 0, \quad (4)$$

$$(b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0, \quad (4')$$

$$b_1 + (b_3 - a_2)u^2 = 0, \quad (5)$$

$$(b_2 - a_1)u - a_3u^3 = 0, \quad (5')$$

$$b_1 - a_3u^3 = 0, \quad (6)$$

$$(b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 = 0, \quad (7)$$

$$(b_2 - a_1)u = 0, \quad (8)$$

$$(b_3 - a_2)u^2 = 0, \quad (8')$$

$$b_1 = 0, \quad (9)$$

$$-a_3u^3 = 0. \quad (9')$$

Tendríamos que estudiar todos los campos que nos determinan los polinomios anteriores, sin embargo observemos lo siguiente:

Si $b_1 = 0$, entonces en (x, u) el polinomio que nos va a determinar los puntos singulares sobre el divisor es el siguiente:

$$(b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0, \quad (1)$$

y en la carta (v, y) , (pag. 36)

$$a_3 + (a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 = 0 \quad (2).$$

En este caso es conveniente hacer el análisis en la carta (x, u) ya que en esta 0 va a ser una de las raíces de la ecuación (1) y esta no se detectaría en la carta (v, y) .

Por otro lado si ahora hacemos que $a_3 = 0$ vamos a obtener los siguientes polinomios:

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 = 0, \quad (1)$$

y en la carta (v, y) (pag. 36)

$$(a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3 = 0, \quad (2)$$

en este caso vemos que la información queda contenida en el polinomio (2) el cual tiene como raíz al 0, por lo que en este caso conviene hacer el análisis en la carta (v, y) .

De lo anterior podemos ver que esencialmente el análisis y los resultados que obtengamos cuando $b_1 = 0$ y $a_3 = 0$ van a ser los mismos, por lo que basta con analizar un solo caso.

Por lo tanto si analizamos el caso 2 también analizamos el caso 2', y lo mismo va suceder con los casos: 3 y 3', 4 y 4', 5 y 5', 8 y 8', 9 y 9'. En el caso 9 y 9' los campos que determinan ese tipo de polinomios tienen una entrada igual a cero, es decir, son campos cuyo retrato fase son rectas horizontales o

verticales dependiendo el caso en el que nos encontremos. Por lo tanto solo tenemos que estudiar 8 casos.

Caso 1. $b_1, (b_2 - a_1), (b_3 - a_2), a_3 \neq 0$

Los polinomios que se obtienen en ambas cartas son los siguientes:

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3x^3 = 0 \quad (1)$$

$$a_3 + (a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3 = 0 \quad (2)$$

En este caso se puede analizar en cualquier carta ya que ninguna de las raíces es cero, y por lo tanto obtendríamos la misma información en cualquiera de las dos cartas.

Se analizará la carta (x, u) .

En esta carta los puntos singulares quedan determinados por la siguiente ecuación:

$$b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0.$$

Reducimos esta ecuación dividiendo todo el polinomio entre a_3 y haciendo el cambio de variable $u = y + \frac{b_3 - a_2}{3a_3}$ y obtenemos la siguiente ecuación:

$$-y^3 + py = q,$$

donde $p = \frac{(b_3 - a_2)^2}{3a_3} + \frac{(b_2 - a_1)}{a_3}$ y $q = -[4(\frac{(b_3 - a_2)}{3a_3})^3 + \frac{(b_2 - a_1)(b_3 - a_2)}{4a_3^2} + \frac{b_1}{a_3}]$

El discriminante de la ecuación anterior es:

$$D = -4p^3 - 27q^2.$$

Si $D \geq 0$ entonces la ecuación tiene raíces reales. En el caso $D = 0$ habría multiplicidad en las raíces.

Si $D < 0$ tendríamos dos raíces imaginarias y una real.

De acuerdo con lo anterior si $D \geq 0$ entonces a lo más detectamos tres direcciones separatrices y si $D < 0$ se detectaría únicamente una dirección separatriz.

Después de explotar obtuvimos el siguiente campo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x + a_2xu + a_3xu^2 \\ \dot{u} &= b_1 + (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 + a_3u^3.\end{aligned}$$

Calculamos la derivada de este campo.

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2u + a_3u^2 & a_2x + 2a_3xu \\ 0 & (b_2 - a_1) + 2(b_3 - a_2)u + 3a_3u^2 \end{pmatrix}$$

Los puntos singulares serían de la forma $(x = 0, \tilde{u})$, con $\tilde{u} \neq 0$, donde \tilde{u} nos representa cualquiera de las raíces de la ecuación.

Al sustituir estos en la derivada obtenemos lo siguiente:

$$D\tilde{X}|_{(0, \tilde{u})} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\tilde{u} + a_3\tilde{u}^2 & 0 \\ 0 & (b_2 - a_1) + 2(b_3 - a_2)\tilde{u} + 3a_3\tilde{u}^2 \end{pmatrix}.$$

Si los dos eigenvalores de la matriz anterior son distintos de cero entonces la singularidad será hiperbólica, si solo uno es distinto de cero entonces la singularidad será parcialmente hiperbólica y en caso de que los dos sean iguales a cero hay que volver a explotar el campo, como se hizo en el caso con términos lineales.

Caso 2. $(b_2 - a_1) = 0$

En este caso obtenemos los siguientes polinomios:

$$b_1 + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0 \quad (1)$$

$$a_3 + (a_2 - b_3)v - b_1v^3 = 0 \quad (2)$$

En este caso la información que obtendríamos en las cartas es la misma ya que ninguna raíz es igual a cero, sin embargo en este caso haremos el análisis en la carta (v, y) , ya que en ésta calcular el discriminante de la ecuación (2) es fácil.

En este caso el discriminante queda de la siguiente forma:

$$D = -[4(a_2 - b_3)^3 + 27a_3].$$

Si $4(a_2 - b_3)^3 + 27a_3 \geq 0$, entonces las raíces del polinomio son reales y en caso de que se de la igualdad tendremos raíces con multiplicidad.

En este caso encontraríamos a lo más tres direcciones separatrices.

Si $4(a_2 - b_3)^3 + 27a_3 < 0$ tendremos dos raíces imaginarias y una real.

En este caso solo encontramos a lo más una dirección separatriz.

El campo que obtuvimos después de explotar es el siguiente:

$$\dot{v} = a_3 + (a_2 - b_3)v - b_1v^3$$

$$\dot{y} = b_1v^2y + b_2vy + b_3y.$$

Calculamos la derivada de este campo.

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_3) - 3b_1v^2 & 0 \\ 2b_1vy + b_2y & b_1v^2 + b_2v + b_3 \end{pmatrix}$$

Los puntos singulares son de la siguiente forma $(\tilde{v}, 0)$, con $\tilde{v} \neq 0$, y donde \tilde{v} representa cualquiera de las raíces de la ecuación. Al sustituir la derivada del campo en los puntos singulares obtenemos lo siguiente:

$$D\tilde{Y}|_{(\tilde{v},0)} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_3) - 3b_1\tilde{v}^2 & 0 \\ 0 & b_1\tilde{v}^2 + b_2\tilde{v} + b_3 \end{pmatrix}$$

Si los dos eigenvalores de la matriz anterior son distintos de cero entonces la singularidad será hiperbólica, si solo uno de ellos es distinto de cero la singularidad será parcialmente hiperbólica y si los dos eigenvalores son iguales a cero entonces será necesario explotar de nuevo el campo, como en el primer caso del capítulo.

En el caso 2' vamos a obtener el mismo tipo de resultados solo que ahora nos conviene calcular el discriminante de la ecuación que nos queda en la carta (x, u) .

Caso 3. $b_1 = 0$

Los polinomios en ambas cartas nos quedan:

$$(b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 = 0 \quad (1)$$

$$(a_1 - b_2)v^2 + (a_2 - b_3)v + a_3 = 0 \quad (2)$$

nos basta con analizar (1) ya que esta ecuación tiene como raíz al cero a diferencia de la ecuación (2) cuyas dos raíces son distintas de cero.

En la ecuación (1) claramente se ve que $u = 0$ es una raíz de esta ecuación por lo tanto las otras quedan determinadas por el siguiente polinomio:

$$(b_2 - a_1) + (b_3 - a_2)u - a_3u^2 = 0.$$

Calculamos las raíces de la ecuación anterior.

$$u_{1,2} = \frac{-(b_3 - a_2) \pm \sqrt{(b_3 - a_2)^2 + 4a_3(b_2 - a_1)}}{-2a_3}$$

$$\text{hacemos } r = (b_3 - a_2)^2 + 4a_3(b_2 - a_1).$$

Entonces el número de raíces va a depender de r . Si $r < 0$ esto quiere decir que $u_{1,2}$ son raíces imaginarias.

Si $r = 0$ entonces se obtiene una raíz real de doble multiplicidad, es decir, $u_1 = u_2$.

Si $r > 0$ vamos a obtener dos raíces reales distintas entre sí.

En el primer caso \tilde{X} va a tener solo una raíz real la cual es la única que nos determina una dirección separatriz, para ver su sentido calculamos la derivada del campo.

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2xu + a_3xu^2 \\ (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 - a_3u^3 \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2u + 2a_3u^2 & a_2x + 2a_3xu \\ 0 & (b_2 - a_1) + 2(b_3 - a_2)u - 3a_3u^2 \end{pmatrix}$$

evaluando la derivada en $(x = 0, u = 0)$.

$$D\tilde{X}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (b_2 - a_1) \end{pmatrix}$$

Si $a_1 \neq 0$ y $a_1 \neq b_2$ entonces la singularidad será hiperbólica.

Ahora suponiendo que $r > 0$ las raíces serán las siguientes:

$$u_{2,3} = \frac{(b_3 - a_2) \pm \sqrt{(b_3 - a_2)^2 + 4a_3(b_2 - a_1)}}{2a_3}$$

Sustituyendo la derivada del campo en los puntos singulares obtenemos:

$$D\tilde{X}_{(0,u_{2,3})} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2a_3(b_3 - a_2) + \frac{1}{2a_3}((b_3 - a_2)^2 \mp \sqrt{(b_3 - a_2)^2 + 4a_3(b_2 - a_1)})$$

$$a_{22} = -2(b_2 - a_1) \pm \frac{(b_3 - a_2)}{2a_3} - (b_3 - a_2) + \sqrt{(b_3 - a_2)^2 + 4a_3(b_2 - a_1)}$$

De la matriz que obtuvimos anteriormente se ve claramente que las raíces $u_{2,3}$ son hiperbólicas.

En el caso 3' vamos a obtener el mismo tipo de resultados, solo que ahora se analizará la carta (v, y) , y el eje y será el que sea dirección separatriz de los polinomios.

Caso 4. $(b_3 - a_2) = a_3 = 0$

Los polinomios en este caso quedan:

$$\begin{aligned} b_1 + (b_2 - a_1)u &= 0 & (1) \\ (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3 &= 0 & (2) \end{aligned}$$

En este caso el polinomio que nos da más información es el (2), que es el correspondiente a la carta (v, y) ; este polinomio tiene las siguientes raíces.

$$v_1 = 0 \text{ y } v_2 = \frac{(a_1 - b_2)}{b_1}$$

v_1 es de doble multiplicidad; por lo tanto el campo va a tener 2 direcciones separatrices.

Calculamos la derivada del campo:

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_1 - b_2)v^2 - b_1v^3 \\ b_1v^2y + b_2vy + b_3y \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 2(a_1 - b_2)v - 3b_1v^2 & 0 \\ 2b_1vy + b_2y & b_1v^2 + b_2v + b_3 \end{pmatrix}$$

sustituimos la derivada del campo en v_1 y v_2 para obtener el comportamiento de las direcciones separatrices.

$$D\tilde{Y}_{(v_1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

La singularidad $(v_1, 0)$ es parcialmente hiperbólica

$$D\tilde{Y}_{(v_2,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{(a_1 - b_2)^2}{b_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_1(a_1 - b_1)}{b_1} + b_3 \end{pmatrix}$$

Si $\frac{a_1(a_1 - b_1)}{b_1} \neq b_3$ el punto $(v_2, 0)$ es una singularidad hiperbólica.

En el caso 4' vamos a obtener el mismo número de singularidades, solo que ahora haremos el análisis en la carta (v, y) y en ese caso el eje x sería dirección separatriz.

Caso 5. $(b_2 - a_1) = a_3 = 0$

Los polinomios quedan:

$$b_1 + (b_3 - a_2)u^2 = 0 \quad (1)$$

$$(a_2 - b_3)v - b_1v^3 = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) me da toda la información, ya que esta tiene como raíz al cero, por lo tanto el análisis lo haremos en la carta (v, y) .

Las raíces de la ecuación son: $v_1 = 0$ y $v_{2,3} = \frac{\pm\sqrt{4b_1(a_2-b_3)}}{-2b_1}$ hacemos:
 $r = 4b_1(a_2 - b_3)$.

Dependiendo de los valores que tome r va a ser el número de raíces que obtengamos, es decir:

Si $r \leq 0$ entonces no nos determina otros puntos singulares además del $(0, 0)$, y por lo tanto el campo tendrá a lo más una dirección separatriz.

Si $r > 0$ vamos a obtener dos raíces de distinto signo y en total el campo tendrá a lo más tres direcciones separatrices.

El campo en la carta (v, y) es de la siguiente forma:

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_3)v - b_1v^3 \\ b_1v^2y + b_2vy + b_3y \end{pmatrix}$$

Calculamos la derivada del campo:

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_3) - 3b_1v^2 & 0 \\ 2b_1vy + b_2y & b_1v^2 + b_2v + b_3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos la derivada en los puntos singulares que obtuvimos:

$$D\tilde{Y}_{(v_1, 0)} = \begin{pmatrix} (a_2 - b_3) & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{Y}_{(v_{2,3}, 0)} = \begin{pmatrix} -2(a_2 - b_3) & 0 \\ 0 & a_2 \pm \frac{b_2\sqrt{b_1(a_2-b_3)}}{b_1} \end{pmatrix}$$

Si $a_2 \neq b_3$ entonces las dos singularidades serán hiperbólicas.

En el caso 5', el análisis se tendría que hacer en la carta (x, u) , y conservaríamos el mismo tipo y número de direcciones separatrices y, en este caso el eje x sería dirección separatriz.

Caso 6. $(b_2 - a_1) = (b_3 - a_2) = 0$

Polinomios que caracterizan a estos campos:

$$b_1 - a_3u^3 = 0 \quad (1)$$

$$a_3 - b_1v^3 = 0 \quad (2)$$

En este caso se puede analizar cualquiera de las dos cartas ya ninguna de las ecuaciones tiene como raíz al cero, y por lo tanto la información que obtengamos en cualquiera de las dos cartas va a ser la misma. Es decir este campo solo encontramos a lo más una dirección separatriz.

Analizaremos en la carta (x, u) . La raíz en esta carta es $u = \left(\frac{b_1}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

El campo y su derivada son:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2xu + a_3xu^2 \\ b_1 - a_3u^3 \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2u + a_3u^2 & a_2x + 2a_3xu \\ 0 & -3a_3u^2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la derivada en el punto singular:

$$D\tilde{X}_{(0,u)} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\left(\frac{b_1}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}} & a_2x + 2a_3xu \\ 0 & -3a_3\left(\frac{b_1}{a_3}\right)^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Si $a_1 + a_2\left(\frac{b_1}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ la singularidad $(0, u)$ es hiperbólica

Caso 7. $a_3 = b_1 = 0$

$$(b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 = 0 \quad (1)$$

$$(a_2 - b_3)v + (a_1 - b_2)v^2 = 0 \quad (2)$$

Las dos ecuaciones anteriores tienen como solución al cero, por lo tanto es necesario revisar ambas cartas.

Carta (x, u)

Las raíces de la ecuación (1) son: $u_1 = 0$, $u_2 = -\frac{b_2 - a_1}{b_3 - a_2}$ con $b_3 \neq a_2$.

El campo en esta carta es:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2x^2u \\ (b_2 - a_1)u + (b_3 - a_2)u^2 \end{pmatrix}$$

Derivada del campo anterior:

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2xu & a_2x^2 \\ 0 & (b_2 - a_1) + 2(b_3 - a_2)u \end{pmatrix}$$

Evaluamos $D\tilde{X}$ en u_1 y u_2 .

$$D\tilde{X}_{(0, u_1)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (b_2 - a_1) \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{X}_{(0, u_2)} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \frac{b_2 - a_1}{b_3 - a_2} & 0 \\ 0 & -(b_2 - a_1) \end{pmatrix}$$

Si $b_2 \neq a_1$ entonces ambas singularidades son hiperbólicas.

Carta (v, y)

Las raíces en esta carta son: $v_1 = 0$ y $v_2 = -\frac{a_2 - b_1}{a_1 - b_2}$. Solamente analizaremos cuando $v = 0$ ya que el comportamiento del otro punto singular ya fue revisado en la carta (x, u) .

Campo en la carta (v, y)

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_1 - b_2)v^2 + (a_2 - b_3)v \\ b_2vy + b_3y \end{pmatrix}$$

Calculamos la derivada del campo y la evaluamos en los puntos singulares.

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 2(a_1 - b_2)v + (a_2 - b_3) & 0 \\ b_2y & b_2v + b_3 \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{Y}_{(0,v_1)} = \begin{pmatrix} a_2 - b_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

Si $a_2 \neq b_3$, $(0, v_1)$ es una singularidad hiperbólica.

En este caso encontramos en total 3 direcciones separatrices, a lo m'as: el eje x , el eje y y una que corresponde a la recta con pendiente $u_2 = -\frac{b_2 - a_1}{b_3 - a_2}$.

Caso 8. Únicamente $(a_1 - b_2) \neq 0$

En este caso los polinomios que nos quedan son los siguientes:

$$(b_2 - a_1)u = 0 \quad (1)$$

$$(a_1 - b_2)v^2 = 0 \quad (2)$$

Los dos polinomios anteriores tienen como raíz, por lo que analizaremos la carta (x, u) y la carta (v, y) . En este caso vamos a obtener a lo más dos direcciones separatrices.

Carta (x, u)

El campo que nos queda después de explotar es el siguiente:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 x \\ (b_2 - a_1)u \end{pmatrix}$$

Calculamos la derivada del campo.

$$D\tilde{X} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & (b_2 - a_1) \end{pmatrix}$$

Si $b_2 \neq a_1$ entonces el $(0, 0)$ es una singularidad hiperbólica.

Carta (v, y)

En esta carta después de explotar nos queda el siguiente campo:

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_1 - b_2)v \\ b_2 y \end{pmatrix}$$

Calculamos la derivada del campo.

$$D\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (a_1 - b_2) & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Si $b_2 \neq a_1$ entonces el $(0, 0)$ es un punto singular hiperbólico.

En este campo al explotar obtuvimos dos direcciones separatrices que coinciden con el eje x y con el y .

En el caso 8' obtenemos los mismo resultados.

Tipo Caso

3 separatrices

Restricciones

$D > 0$

3 (una sep coincide con eje)

$r > 0$

5

$r > 0$

7 (2 sep coinciden con ejes)

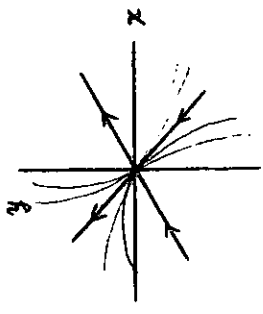
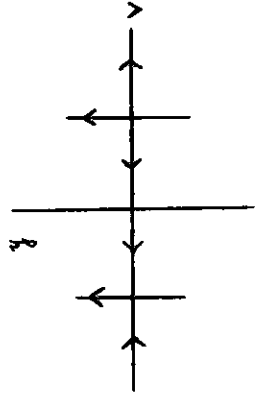
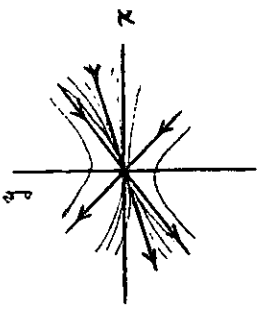
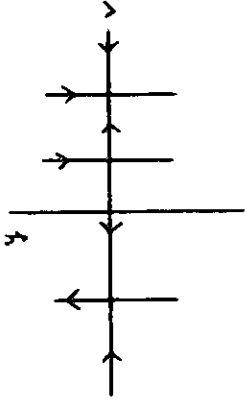
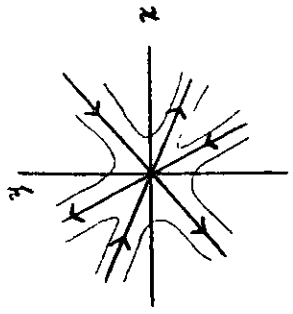
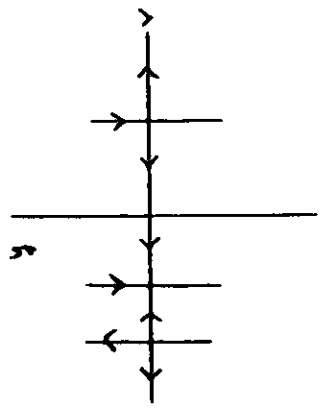
2 separatrices

$D = 0$

3 (una sep coincide con eje)

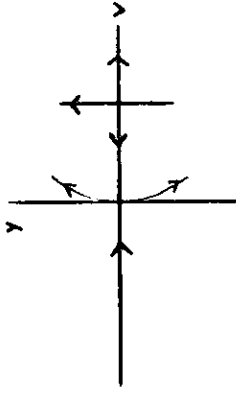
$r = 0$

8 (ambas sep coinciden con ejes)

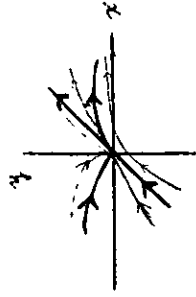


Tipo Caso Restricciones.

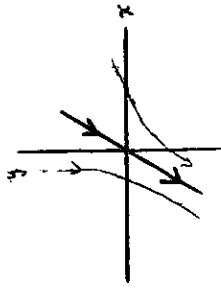
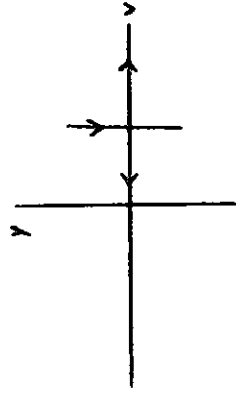
2 separatrices



4 (una coincide con eje
(una separatrix parcialmente hiperbólica))



1 separatrix



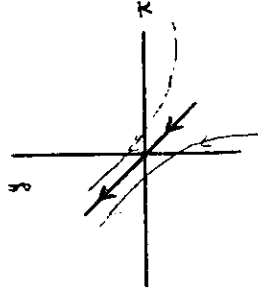
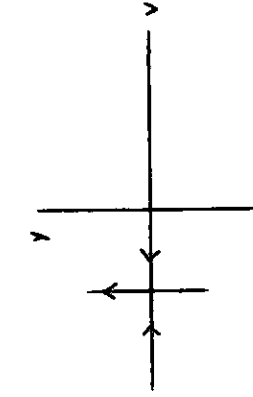
1, 2,

$$D < 0$$

3, 5

$$r < 0$$

6



Bibliografia

- [Arn] V. I. Arnold.
Geometrical Methods in the theory of ordinary differential equations.
Springer Verlag, (1983)
- [Bir] Birkhoff G., Saunders M.'L.
A survey of modern algebra.
Macmillan Company, (1965)
- [Cam] Camacho César.
Singular points of analytic differential equations.
Lectures Notes, School on Dynamical Systems, I.C.T.P., (1991)
- [Doc] M. P. Do Carmo.
Differential geometry of curves and surfaces.
Birkhäuser, (1992)
- [Dum] F. Dumortier.
Singularities of vector fields on the plane.
J. of Diff. Eq. 23, 1 (1977) 53-106
- [Har] Hartman
Ordinary differential equations.
New York, Wiley, (1964)