24
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMAS NORMALES DE BRUNO EN CAMPOS VECTORIALES DEL PLANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HECTOR EDUARDO MARTINEZ MORENO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS

MEXICO, D. F. 1998

IVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

FORMAS NORMALES DE BRUNO EN CAMPOS VECTORIALES DEL PLANO.

realizado por HECTOR EDUARDO MARTINEZ MORENO

con número de cuenta 9251975-6, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario DR. FEDERICO SANCHEZ BRINGAS

Propietario DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

Propietario DR. HECTOR SANCHEZ MORGADO

Suplente DR. HUMBERTO CARRILLO CALVET

Suplente M. en C. JOSE MATIAS NAVARRO SOZA

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

Dedico esta tesis

A mis padres por su apoyo y su confianza.

A mi abuela Juanita por que siempre confió en mi (qepd).

A tí , por tu gran apoyo , tu paciencia y, por enseñarme a seguir adelante.

Quiero agradecer

A mi director de tesis, el Dr. Federico Sánchez Bringas por su infinita paciencia y por enseñarme a trabajar con esmero y dedicación.

A mi querida Facultad de Ciencias, por todo lo que me ha enseñado.

CONTENIDO.

INTRODUCCION.

Una técnica muy poderosa para el estudio de ecuaciones diferenciales consiste en transformarlas (sin resolverlas) a una forma más simple.

El objetivo de esta tesis es estudiar las transformaciones que llevan a un sistema de ecuaciones diferenciales dado (en una vecindad de una singularidad aislada), en una forma normal formal (un sistema más simple).

La reducción a formas normales formales se realiza por medio de series de potencias formales, las cuales no siempre son analíticas. En el presente trabajo se estudiarán solamente ciertas condiciones para que dicha serie corresponda a una transformación analítica.

En este trabajo, se presentan los aspectos básicos del método de formas normales formales para campos vectoriales en el plano complejo. El hecho de que sólo nos ocupemos de campos vectoriales en el plano, se debe a que muchos de los teoremas y sus demostraciones que se dan a lo largo de esta tesis, son mejor comprendidos en dimensión 2.

En el capítulo uno, inicialmente se da una introducción del problema y se define lo que es una forma normal formal. Posteriormente se demuestra, en lo que es el resultado más importante de este capítulo, que siempre existe una serie formal que lleva un sistema dado en una forma normal. Por último, se obtienen todas las posibles formas normales formales para un sistema de dimensión 2.

En el segundo capítulo, se analizan todas las condiciones necesarias para que una serie de potencias formal, que hace corresponder (a nivel formal) un sistema de ecuaciones con su forma normal formal, tenga un radio de convergencia positivo. Este capítulo se divide básicamente en tres partes. En la primera parte se demuestran algunos resultados generales sobre formas normales formales. En la segunda parte, se demuestran dos teoremas que servirán para demostrar que, bajo ciertas condiciones, la serie corresponde a una transformación analítica. El primer teorema afirma que si un sistema coincide con la forma normal analítica hasta grado m, entonces existe una serie de potencias que lleva a dicho sistema en un sistema que coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$. El segundo teorema afirma que dicha serie tiene un radio de convergencia positivo.

La última parte del capítulo y de la tesis consiste en la demostración de un teorema que afirma que existe, bajo ciertas condiciones, una transformación analítica que lleva un sistema analítico dado en una forma normal analítica.

Para su demostración, se usan iteradamente los dos resultados mencionados líneas arriba.

Cabe mencionar que el método de normalización analítica aquí presentado, no cubre todos los casos de formas normales en dimensión 2. Sin embargo, los casos tratados en este trabajo son significativos pues abarcan algunos casos en el dominio de Poincaré y en el dominio de Siegel.

Por último, concluímos el trabajo con algunos ejemplos de transformaciones analíticas, y con un pequeño apéndice sobre teoría clásica de formas normales.

CAPITULO 1. TRANSFORMACIONES.

1.1 INTRODUCCION.

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \phi_1(z_1, z_2)\\ \dot{z}_2 &= \phi_2(z_1, z_2),\end{aligned} \tag{1.0}$$

donde $(z_1, z_2) \in C^2$ y las ϕ_i son series de potencias formales, i.e., las ϕ_i son solo una serie de números complejos.

Nuestro problema es describir la forma " más simple " $\dot{y}_i = \varphi_i(Y)$ (donde $Y = (y_1, y_2) \in C^2$) a la cual el sistema anterior puede ser reducido mediante una transformación analítica $x_i = y_i + \xi_i(y_1, y_2)$.

Definición. Un punto x de un sistema de ecuaciones se llama punto singular si

$$\phi_i(x) = 0$$

para todo i.

A los puntos que no son singulares se les llama puntos regulares. En el presente trabajo, nos enfocaremos al estudio de transformaciones analíticas en un sistema con puntos singulares.

Para el caso de puntos regulares, el problema es relativamente sencillo, lo cual se ve claramente en el Teorema de Rectificación también conocido como el teorema de caja de flujo. Cauchy probó la existencia, unicidad y analiticidad de una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales la cual pasa a través de un punto regular, aunque fue Arnold quien consideró la vecindad entera del punto regular y quien formuló y probó este teorema. El teorema es el siguiente :

Teorema. Sea

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

un sistema analítico de ecuaciones que tiene al origen como un punto regular. Entonces existe un cambio de coordenadas analítico

$$x_1 = \xi_1(y_1, y_2)$$
$$x_2 = \xi_2(y_1, y_2),$$

el cual transforma al sistema inicial en el sistema

$$\dot{y}_1 = 1$$
$$\dot{y}_2 = 0.$$

Nosotros no daremos la demostración de este teorema. La demostración se puede ver en Arnold [1], Bruno [4].

1.1.1 PROBLEMA.

Vamos ahora a estudiar lo que pasa en una vecindad de un punto singular (en la parte anterior se trato el problema cuando los puntos son regulares). Para esto, considérese de nueva cuenta el sistema formal (1.0) en el cual el origen es un punto singular. Dicho sistema, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{z} = Az + ...,$$

donde $z = \binom{x_1}{x_2}$ y A es la matriz de coeficientes lineales.

Daremos ahora, una exposición de como la parte lineal del campo, se convierte en una forma canónica de Jordan mediante un cambio de coordenadas. Para ello, sea $Z = BX$ donde B es la matriz de cambio de base. Si aplicamos a $\dot{z} = Az + ...$ la transformación $Z = BX$ obtenemos

$$B\dot{X} = A(BX) + ...,$$

lo cual implica

$$\dot{X} = (B^{-1}AB)X + ...,$$

por tanto se tiene

$$\dot{X} = JX + ...,$$

en la cual, J es de Jordan i.e.,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \sigma & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\sigma = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ó $\sigma = 1$ si $\lambda_1 = \lambda_2$. Nótese que este cambio de coordenadas no afecta el grado de los términos de la ecuación.

Nuestro sistema entonces, queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \varphi_1(X) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \sigma x_1 + \varphi_2(X), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde x_1, $x_2 \in C$; aquí, φ_i no contiene términos lineales ni constantes.

Nuestro objetivo es por el momento, transformar al sistema (1.1) en el sistema más fácil posible, usando un cambio de coordenadas local e invertible

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \xi_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= y_2 + \xi_2(y_1, y_2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde las ξ_i sean series de potencias formales que no contengan términos lineales ni constantes. En particular, nos interesa que dicho cambio, (1.2), sea analítico. Para ello, necesitamos dividir nuestro problema original en :

i) Encontrar las series ξ_i que transforman al sistema (1.1) en un sistema más fácil.

ii) Investigar la convergencia de dichas series.

Nótese que la matriz de los términos lineales de la transformación (1.2) es la identidad, i.e.,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, el cambio de coordenadas es invertible; esto es, los y_i pueden ser escritos como series de potencias en x_1 y x_2.

Ahora, plantearemos el problema anterior en un nivel formal y después introduciremos una notación la cual será usada pare resolver dicho problema.

Supongamos que el sistema complejo (1.1) es un sistema formal. Supongamos también que las series de potencias φ_i son series de potencias formales que no contienen términos lineales ni constantes, y que la matriz de coeficientes de los términos lineales es una matriz de Jordan.

Entonces, podemos preguntarnos: Cuál es el sistema formal más simple

$$\dot{y_1} = \lambda_1 y_1 + \Psi_1(Y) = \overline{\Psi}_1(Y)$$
$$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2 + \sigma y_1 + \Psi_2(Y) = \overline{\Psi}_2(Y), \qquad (1.3)$$
para el cual nosotros podemos transformar el sistema (1.1) con un cambio de coordenadas (1.2) formal e invertible ?

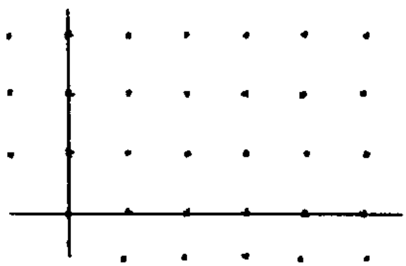
Para resolver esto, introduciremos una nueva notación

$$\overline{\Psi_1} = y_1 g_1(Y) = y_1 \sum_{Q \in N_1} g_{1Q} Y^Q$$
$$\overline{\Psi_2} = y_2 g_2(Y) = y_2 \sum_{Q \in N_2} g_{2Q} Y^Q,$$

donde $Q = (q_1, q_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $g_{iQ} \in C$, $Y^Q = {y_1}^{q_1} {y_2}^{q_2}$ y

$$N_1 = \{Q \mid q_1 \geq -1, q_2 \geq 0 \;\; y \;\; q_1 + q_2 \geq 0\}$$
$$N_2 = \{Q \mid q_2 \geq -1, q_1 \geq 0 \;\; y \;\; q_1 + q_2 \geq 0\}. \qquad (*)$$

Dichos conjuntos se muestran en la siguiente figura



Introduciremos también, una notación similar para el sistema (1.1) y para el cambio de coordenadas (1.2), a saber,

$$\varphi_1 = x_1 f_1(X) = x_1 \sum_{Q \in N_1} f_{1Q} X^Q$$
$$\varphi_2 = x_2 f_2(X) = x_2 \sum_{Q \in N_2} f_{2Q} X^Q, \qquad (1.4)$$

donde los coeficientes $f_{iQ} \in C$, y

$$\xi_1 = y_1 h_1(Y) = y_1 \sum_{Q \in N_1} h_{1Q} Y^Q$$

$$\xi_2 = y_2 h_2(Y) = y_2 \sum_{Q \in N_2} h_{2Q} Y^Q.$$

donde los coeficientes $h_{iQ} \in C$. Aquí, las series de potencias φ_i, ξ_i y Ψ_i tienen potencias enteras positivas y no contienen términos lineales ni constantes.

Hasta ahora, hemos hablado de cambios de coordenadas que transforman a un sistema dado a uno más fácil, pero no hemos dicho nada acerca de como son esas transformaciones ni de su existencia, más adelante se hablará sobre este problema, y además, daremos la demostración de un teorema que nos dice que para todo sistema (1.1) existe un cambio de coordenadas (1.2) el cual transforma a este sistema en un sistema más simple.

1.2. DEFINICION DE FORMA NORMAL FORMAL.

Considérese el sistema de ecuaciones (1.1) y recordemos que se introdujo una nueva notación

$$\varphi_1 = x_1 f_1(X) = x_1 \sum_{Q \in N_1} f_{1Q} X^Q$$

$$\varphi_2 = x_2 f_2(X) = x_2 \sum_{Q \in N_2} f_{2Q} X^Q,$$

donde $f_{iQ} \in C$, las φ_i no tienen términos lineales ni constantes y N_1, N_2 estan definidos en (*).

Sea $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la parte lineal del sistema dado; y consideremos la ecuación

$$< Q, \Lambda >= 0 \quad con \quad Q \in N = N_1 \cup N_2$$

es decir, $< Q, \Lambda >= \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0$

Observación :

Dados los valores propios, la ecuación $< Q, \Lambda >= 0$ puede tener una solución en N, varias soluciones ó una infinidad de soluciones.

Estos vectores $Q \in N$, van fijando monomios de la forma

$$x_1 f_{1Q} X^Q \ , \ x_2 f_{2Q} X^Q.$$

Definición. A todos los monomios de la forma

$$x_i f_{iQ} X^Q,$$

para los cuales $< Q, \Lambda >= 0$ con $Q \in N = N_1 \cup N_2$ se les llama monomios resonantes.
Podemos entonces definir lo que es una forma normal formal.

Definición. Un sistema en el cual todos los monomios de grado mayor o igual que 2 son resonantes, se le llama forma normal formal.

Observación : En particular, si la serie de potencias que define la forma normal formal tiene radio de convergencia positivo, la forma normal es analítica.

En el apéndice, daremos una idea intuitiva de porque una forma normal formal es una expresión más "simple" de un sistema dado.

En la siguiente sección, probaremos que todo sistema puede ser reducido a una forma normal formal por una conveniente serie de potencias. Dicho teorema nos afirma además, que para los monomios no resonantes se tiene que $g_{iQ} = 0$, esto es, después de aplicarle dicha serie de potencias al sistema original, los únicos monomios que componen el nuevo sistema son resonantes, i.e., el nuevo sistema es una *forma normal formal.*

Daremos ahora un ejemplo de una forma normal analítica.

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema

$$\dot{y}_1 = 5y_1 + y_1{}^2 y_2 + 3y_1{}^3 y_2{}^2 + 6y_1{}^4 y_2{}^3 + 7y_1{}^8 y_2{}^7$$
$$\dot{y}_2 = -5y_2 + y_1 y_2{}^2 + 4y_1{}^3 y_2{}^4 + y_1{}^5 y_2{}^6,$$

el cual se puede escribir de la siguiente forma

$$\dot{y}_1 = y_1(5 + y_1 y_2 + 3y_1{}^2 y_2{}^2 + 6y_1{}^3 y_2{}^3 + 7y_1{}^7 y_2{}^7)$$
$$\dot{y}_2 = y_2(-5 + y_1 y_2 + 4y_1{}^3 y_2{}^3 + y_1{}^5 y_2{}^5),$$

aquí, $\Lambda = (5, -5)$, para que este sistema sea una forma normal formal, los monomios $y_1{}^a y_2{}^b$ deben de ser resonantes. Si analizamos la ecuación

$$< Q, \Lambda >= 5q_1 - 5q_2 = 0,$$

de donde $q_1 = q_2$

Los puntos Q que cumplen esta ecuación son de la forma $Q = (k, k)$ con $k \geq 0$. Es fácil verificar que los monomios del sistema anterior son resonantes. Por lo tanto el sistema esta en su forma normal analítica.

1.3. TEOREMA DE EXISTENCIA.

En esta sección se verá que siempre es posible, en un nivel formal, hallar una serie de potencias formal que lleve un sistema del tipo (1.1) en una forma normal formal. Para este fín, introduciremos la siguiente notación :

$$\varphi_i(X) = x_i f_i = x_i \sum_Q f_{iQ} X^Q$$

$$\Psi_i(Y) = y_i g_i = y_i \sum_Q g_{iQ} Y^Q$$

$$\xi_i(Y) = y_i h_i = y_i \sum_Q h_{iQ} Y^Q, \tag{1.5}$$

donde f_{iQ}, g_{iQ} y h_{iQ} son coeficientes complejos y donde las series φ_i corresponden al sistema inicial, las series Ψ_i corresponden a la forma normal formal y las series ξ_i corresponden a la serie de potencias. Aquí ξ_i, φ_i y Ψ_i son series de potencias que no contienen términos de grado menor que dos.

Teorema 1. Existe una serie de potencias (1.2) que reduce al sistema (1.1) en la forma normal formal (1.3) tal que $g_{iQ} = 0$ para $< Q, \Lambda > \neq 0$ y en este caso, los coeficientes h_{iQ} estan determinados de manera única. Por el contrario, para $< Q, \Lambda >= 0$ los coeficientes h_{iQ} pueden ser escogidos arbitrariamente y los coeficientes g_{iQ} estan únicamente determinados.

Demostración . La demostración consiste en construir la serie de potencias (1.2) tal que nos lleve del sistema dado a una forma normal formal. Con esa misma construcción, se demostrará que los coeficientes h_{iQ} pueden ser escogidos arbitrariamente para $< Q, \Lambda >= 0$ y los coeficientes restantes estan únicamente determinados.
La serie de potencias (1.2) lleva al sistema (1.1) en la forma normal formal (1.3) si

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2) \\ \dot{x}_2(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2) \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}\dot{y}_1+\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}\dot{y}_2=\dot{x}_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2)$$
$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}\dot{y}_1+\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}\dot{y}_2=\dot{x}_2(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2).$$

Usando las expresiones dadas en (1.3) y sustituyendo en la primera ecuación (para la segunda el método es análogo) se tiene

$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}(\lambda_1 y_1+\Psi_1(Y))+\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}(\lambda_2 y_2+\sigma y_1+\Psi_2(Y))=$
$\lambda_1 y_1+\lambda_1\xi_1+\varphi_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2).$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_i}(\lambda_i y_i+\sigma y_{i-1}+\Psi_i(Y))=\lambda_1 y_1+\lambda_1\xi_1+\varphi_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2).$$

Desarrollando esta última igualdad y usando las expresiones de ξ_1 y ξ_2 dadas en (1.5) se tiene

$(1+h_1+y_1\frac{\partial h_1}{\partial y_1})(\lambda_1 y_1+\Psi_1(Y))+(y_1\frac{\partial h_1}{\partial y_2})(\lambda_2 y_2+\sigma y_1+\Psi_2(Y))=$
$\lambda_1 y_1+\lambda_1\xi_1+\varphi_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2).$

Simplificando, se obtiene

$\Psi_1(Y)+y_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_1}{\partial y_i}\lambda_i y_i=-h_1\Psi_1(Y)-y_1\frac{\partial h_1}{\partial y_2}\sigma y_1-$
$y_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_1}{\partial y_i}\Psi_i(Y)+\varphi_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2),$

y como por (1.5) $\Psi_1(Y)=y_1g_1$, $\xi_1(Y)=y_1h_1$, finalmente se tiene

$y_1g_1+y_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_1}{\partial y_i}\lambda_i y_i=-h_1y_1g_1-y_1\frac{\partial h_1}{\partial y_2}\sigma y_1-$
$y_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_1}{\partial y_i}y_i g_i+\varphi_1(y_1+y_1h_1,y_2+y_2h_2).$ (1.6)

Si ahora, escribimos sólo los coeficientes de y_1Y^Q en esta última igualdad, tenemos

$$g_{1Q}+h_{1Q}<Q,\Lambda>=-\sum_{P+R=Q}h_{1P}g_{1R}-(q_2+1)\sigma h_{1(Q-E_1+E_2)}$$
$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{P+R=Q}h_{1P}P_i g_{iR}+\{\varphi_1\}_Q, \tag{1.7}$$

donde $\{\varphi_1\}_Q$ es el coeficiente de y_1Y^Q en la serie $\varphi_1(y_1+\xi_1,y_2+\xi_2)$; aquí, el E_j denota el j-ésimo vector unitario.

Daremos ahora una ordenación la cual servirá para analizár los coeficientes de la ecuación anterior. El conjunto de vectores reales Q puede ser ordenado con la siguiente relación: el vector P precede al vector Q si la primera diferencia distinta de cero de las diferencias sucesivas

$$||Q|| - ||P||, \ q_1 - p_1, \ q_2 - p_2,$$

es positiva, donde $||Q|| = q_1 + q_2$ con $Q = (q_1, q_2)$. Por ejemplo, si $Q = (q_1, q_2)$ y $P = (q_1 - 1, q_2 + 1)$ entonces $||Q|| = ||P||$ pero $(q_1) - (q_1 - 1) > 0$ y por tanto P precede a Q. Obviamente cada $Q \in N$ es precedido por un número finito de vectores de N.

Nótese que en el primer sumando del lado derecho de la igualdad, los coeficientes de $y_1 Y^Q$ son una suma de términos de la forma

$$h_{1P_1} g_{1R_1} + ... + h_{1P_m} g_{1R_n},$$

donde

$$P_1 + ... + P_m + R_1 + ... + R_n = ||Q||,$$

y por tanto se tiene que $||P|| + ||R|| = ||Q||$ (esto es, los vectores P y R preceden a Q). Análogamente, en el tercer sumando también se tiene $||P|| + ||R|| = ||Q||$.
La igualdad (1.6) es equivalente monomialmente a la igualdad (1.7) ya que mientras Q corre sobre N_1, el producto $y_1 Y^Q$ corre sobre todos los productos de potencias positivas de y_1, y_2.

Finalmente, $\{\varphi_1\}_Q$ contiene solo términos para los cuales $||Q|| > ||P||$ ya que $\{\varphi_1\}_Q$ no tiene términos lineales. Si ahora en (1.7) se tiene que $||Q|| = 0$, entonces esta igualdad se cumple pues en la igualdad (1.6) no tenemos términos lineales. Si en lugar de esto, $||Q|| > 0$, la igualdad también se cumple si nosotros hacemos

$g_{1Q} = 0$, $h_{1Q} = (< Q, \Lambda >)^{-1} c_{1Q}$ para $< Q, \Lambda > \neq 0$

$g_{1Q} = c_{1Q}$, h_{1Q} arbitrario para $< Q, \Lambda > = 0$,

donde c_{1Q} es el lado derecho de la igualdad (1.7). Nótese que en la ecuación (1.7), la única variable es el coeficiente h_{1Q} pues los demás coeficientes son conocidos (incluyendo a los coeficientes h_{1P}, g_{1R} y $h_{1(Q-E_1+E_2)}$ pues los vectores P, R y $(Q - E_1 + E_2)$ preceden al vector Q). Por lo tanto, siguiendo el orden establecido arriba, los coeficientes h_{1Q} de la serie de potencias (1.2) son construidos uno por uno dependiendo de los coeficientes de la forma normal formal y del sistema inicial. De la misma manera, los coeficientes h_{2Q} de la serie de potencias (1.2) son construidos. De esta forma, la serie de potencias (1.2) fue construida de tal manera que lleva al sistema inicial en una forma normal formal. Con esto, queda demostrado el teorema. $\diamondsuit$

A continuación daremos un ejemplo de como se construye una serie de potencias (1.2).

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema

$\dot{x_1} = 6x_1 + \sum_{q_2=2}^{\infty}(q_2-1)^2 {x_2}^{q_2}$

$\dot{x_2} = 3x_2,$

y su forma normal formal (que en este caso es analítica)

$\dot{y_1} = 6y_1 + {y_2}^2$

$\dot{y_2} = 3y_2,$

Necesitamos encontrar una serie (1.2) tal que reduzca a nuestro sistema original en esa forma normal formal. Para encontrar dicha serie, de acuerdo con el teorema que se acaba de demostrar se tiene que cumplir la ecuación (1.6) que es equivalente a lo siguiente :

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}(6y_1+{y_2}^2) + \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}(3y_2) = 6y_1 + 6\xi_1 + \sum_{q_2=2}^{\infty}(q_2-1)^2 {y_2}^{q_2},$$

Supongamos que ξ_1 no depende de y_1, entonces desarrollando

$$3y_2\frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} = 6\xi_1 + \sum_{q_2=2}^{\infty}(q_2-1)^2 {y_2}^{q_2},$$

Si ahora como en la demostración del teorema, tomamos solo los coeficientes de Y^Q, obtenemos

$$3q_2\xi_{(q_1,q_2)} = 6\xi_{(q_1,q_2)} + (q_2-1)^2,$$

y como $Q=(q_1,q_2)$ entonces obtenemos

$$\xi_Q = \frac{(q_2-1)^2}{3q_2-6},$$

y como ξ_1 no depende de y_1 entonces

$$\xi_1 = \sum_{q_2=3}^{\infty} \frac{(q_2-1)^2 {y_2}^{q_2}}{3q_2-6},$$

y por lo tanto,

$$x_1 = y_1 + \xi_1 = y_1 + \sum_{q_2=3}^{\infty} \frac{(q_2-1)^2 {y_2}^{q_2}}{3q_2-6}.$$

Análogamente, para $x_2 = y_2 + \xi_2$ se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}(6y_1 + {y_2}^2) + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}(3y_2) = 3y_2 + 3\xi_2,$$

si ahora en particular $\xi_2 = 0$, entonces se cumple la igualdad y por lo tanto,

$$x_2 = y_2 + \xi_2 = y_2,$$

De esta forma hemos encontrado la serie de potencias deseada; a saber,
$x_1 = y_1 + \sum_{q_2=3}^{\infty} \frac{(q_2-1)^2 {y_2}^{q_2}}{3q_2-6}$
$x_2 = y_2 + \xi_2 = y_2$.

Aparentemente, al ver este ejemplo, podría pensarse que dado un sistema formal y una de sus formas normales formales, uno puede encontrar fácilmente la serie de potencias (1.2). Esto es falso, pues la mayoría de las veces encontrar dicha serie no es nada fácil en sistemas de dimensión mayor que 2, ya que en ellas, las series ξ pueden depender de más de dos variables y, encontrar la fórmula de los coeficientes puede ser complicado.

Más adelante, estudiaremos todas las posibles formas normales formales para $n = 2$ y daremos varios ejemplos. Regresando al teorema, lo que éste nos está diciendo es que todo sistema formal puede ser llevado a una forma normal formal mediante una serie de potencias formal la cual no necesariamente es única.

Observación :

La no unicidad de la transformación se dá cuando en la ecuación (1.7), se tiene que $< Q, \Lambda >= 0$. En la siguiente sección, analizaremos en que casos pasa esto y señalaremos en que casos la transformación es única.

A continuación daremos algunos ejemplos en los cuales la serie (1.2) no es única .

Ejemplo 1). Considérese el sistema

$\dot{x_1} = 0$
$\dot{x_2} = x_2 + {x_1}^2,$
y considerémos su forma normal formal (que en este caso es analítica)

$$\dot{y_1} = 0$$
$$\dot{y_2} = y_2.$$

Por el teorema anterior, la serie que lleva a este sistema en la forma normal formal debe cumplir

$$\frac{\partial(y_1 + \xi_1)}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial(y_1 + \xi_1)}{\partial y_2}(y_2) = 0,$$

la cual se cumple si $\xi_1 = 0$. Análogamente se debe de cumplir

$$\frac{\partial(y_2 + \xi_2)}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial(y_2 + \xi_2)}{\partial y_2}(y_2) = y_2 + \xi_2 + {y_1}^2,$$

de donde desarrollando se obtiene

$$(y_2)\frac{\partial(\xi_2)}{\partial y_2} + y_2 = y_2 + \xi_2 + {y_1}^2.$$

Dicha igualdad se satisface si $\xi_2 = -{y_1}^2$ y si $\xi_2 = -{y_1}^2 + y_1 y_2$. Nótese que el monomio $y_1 y_2$ no influye en la forma normal formal. El coeficiente de este monomio corresponde al coeficiente de la ecuación (1.7) para el cual $< Q, \Lambda >= 0$, i.e., el coeficiente h_{2Q} para este monomio es arbitrario. Por lo tanto, si al sistema le aplicamos la transformación analítica
$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 - {y_1}^2 + y_1 y_2,$
en donde $h_{2Q} = 1$ obtenemos la forma normal formal deseada. De igual forma, si al mismo sistema le aplicamos ahora la transformación
$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 - {y_1}^2,$
en la cual $h_{2Q} = 0$ obtenemos la misma forma normal formal.

Ejemplo 2). Considérese el sistema
$\dot{x_1} = 3x_1$
$\dot{x_2} = 6x_2 + 3{x_1}^3,$

en el cual los valores propios no son primos relativos, y considerémos su forma normal formal (la cual es analítica)

$$\dot{y_1} = 3y_1$$

$$\dot{y_2} = 6y_2.$$

Por el teorema anterior, la serie de potencias que lleva a este sistema en la forma normal formal debe cumplir

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}(3y_1) + \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}(6y_2) = 3y_1 + 3\xi_1,$$

la cual se cumple si $\xi_1 = 0$. Análogamente se debe de cumplir

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}(3y_1) + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}(6y_2) = 6y_2 + 6\xi_2 + 3{y_1}^3.$$

Dicha igualdad se satisface si $\xi_2 = {y_1}^3$ y si $\xi_2 = {y_1}^2 + {y_1}^3$. Aquí, el término ${y_1}^2$ no influye en la forma normal formal y por la misma razoń que en el ejemplo anterior, el coeficiente h_{2Q} es arbitrario. Por lo tanto, si al sistema le aplicamos la transformación analítica

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + {y_1}^2 + {y_1}^3,$

en donde $h_{2Q} = 1$, obtenemos la forma normal formal deseada. De igual forma, si al mismo sistema le aplicamos ahora la transformación analítica

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + {y_1}^3,$

en la cual $h_{2Q} = 0$, obtenemos la misma forma normal formal.

Ejemplo 3). Considérese el sistema

$\dot{x_1} = 0$

$\dot{x_2} = x_2 + x_1x_2 + {x_1}^2 + {x_1}^3,$

y considerémos su forma normal formal (la cual es analítica)

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = y_2 + y_1y_2.$

Por el teorema anterior, la serie de potencias que lleva a este sistema en la forma normal formal debe cumplir

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}(y_2 + y_1y_2) = 0,$$

la cual se cumple si $\xi_1 = 0$. Análogamente se debe de cumplir

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}(y_2 + y_1y_2) = y_2 + \xi_2 + y_1y_2 + y_1\xi_2 + {y_1}^2 + {y_1}^3,$$

Dicha igualdad se satisface si $\xi_2 = -{y_1}^2$ y si $\xi_2 = -{y_1}^2 + y_1y_2$. Por lo tanto, si al sistema le aplicamos la transformación analítica

$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 - {y_1}^2 + y_1y_2,$

en la cual $h_{2Q} = 1$, obtenemos la forma normal formal deseada. De igual forma, si al mismo sistema le aplicamos ahora la transformación analítica

$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 - {y_1}^2,$

en donde $h_{2Q} = 0$, obtenemos la misma forma normal formal.

Ejemplo 4). Considérese el sistema

$\dot{x_1} = 3x_1$
$\dot{x_2} = 6x_2 + {x_1}^2 + 3{x_1}^3,$

y considerémos su forma normal formal (la cual es analítica)

$\dot{y_1} = 3y_1$
$\dot{y_2} = 6y_2 + {y_1}^2.$

Nótese, que este sistema no tiene como forma normal al sistema lineal. Por el teorema anterior, la serie de potencias que lleva a este sistema en la forma normal formal debe cumplir

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}(3y_1) + \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}(6y_2 + {y_1}^2) = 3y_1 + 3\xi_1,$$

la cual se cumple si $\xi_1 = 0$. Análogamente se debe de cumplir

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}(3y_1) + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}(6y_2 + {y_1}^2) = 6y_2 + 6\xi_2 + {y_1}^2 + 3{y_1}^3,$$

Dicha igualdad se satisface si $\xi_2 = {y_1}^3$ y si $\xi_2 = {y_1}^2 + {y_1}^3$. Por lo tanto, si al sistema le aplicamos la transformación analítica

$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = y_2 + {y_1}^3,$$
en la cual $h_{2Q} = 0$, obtenemos la forma normal formal deseada. De igual forma, si al mismo sistema le aplicamos ahora la transformación analítica
$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = y_2 + {y_1}^2 + {y_1}^3,$$
en donde $h_{2Q} = 1$, obtenemos la misma forma normal formal.

La pregunta natural que se sigue despues de haber demostrado la existencia y haber discutido la no unicidad de la serie (1.2), es la unicidad de la forma normal formal, es decir, dado un sistema formal la forma normal formal está únicamente determinada? La respuesta es no. Para ello, veamos el siguiente ejemplo :

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema
$$\dot{x_1} = {x_1}^2 + {x_1}^3$$
$$\dot{x_2} = x_2 + x_2x_1 - {x_1}^2 + x_2{x_1}^2 + {x_1}^3 + {x_1}^4,$$
Si a este sistema le aplicamos la transformación
$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = y_2 + {y_1}^2,$$
obtenemos la forma normal formal (la cual es analítica)
$$\dot{y_1} = {y_1}^2 + {y_1}^3$$
$$\dot{y_2} = y_2 + y_2y_1 + y_2{y_1}^2.$$
De igual forma, si al mismo sistema le aplicamos ahora la transformación
$$x_1 = z_1$$
$$x_2 = z_2 + z_1z_2 + {z_1}^2,$$
se obtiene la forma normal formal (la cual es analítica)
$$\dot{z_1} = {z_1}^2 + {z_1}^3$$
$$\dot{z_2} = z_2 + z_2z_1.$$

Supongamos ahora, que el sistema (1.1) puede ser reducido por una serie de potencias a la forma normal formal (1.3) y por otra serie de potencias, a la forma normal formal
$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \overline{\Psi}_1(Z)$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \sigma z_1 + \overline{\Psi}_2(Z). \qquad (1.8)$$
Entonces, una composición de una serie potencias con la inversa de la otra, reduce la forma normal formal (1.3) a la forma normal formal (1.8). Por lo

tanto, si conocemos todas las series de potencias de este último tipo entonces podemos conocer todas las series de potencias que llevan al sistema (1.1) a sus formas normales formales.

Teorema 2. Si la serie de potencias

$$y_1 = \eta_1(Z) = z_1 d_1 = z_1 \sum_Q d_{1Q} Z^Q$$
$$y_2 = \eta_2(Z) = z_2 d_2 = z_2 \sum_Q d_{2Q} Z^Q, \tag{1.9}$$

lleva a la forma normal formal (1.3) en la forma normal formal (1.8) entonces $d_{iQ} = 0$ para $< Q, \Lambda > \neq 0$. Aquí, $d_{iQ} \in C$.

Demostración. La prueba es similar a la del teorema de existencia. Como la serie de potencias (1.9) lleva a la forma normal formal (1.3) en la forma normal formal (1.8), entonces se cumple que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(z_1+\eta_1)}{\partial z_1} & \frac{\partial(z_1+\eta_1)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(z_1+\eta_1, z_2+\eta_2) \\ \dot{y}_2(z_1+\eta_1, z_2+\eta_2) \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\frac{\partial(z_1+\eta_1)}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial(z_1+\eta_1)}{\partial z_2}\dot{z}_2 = \dot{y}_1(z_1+\eta_1, z_2+\eta_2)$$
$$\frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_2}\dot{z}_2 = \dot{y}_2(z_1+\eta_1, z_2+\eta_2).$$

Usando las expresiones dadas en (1.3) y en (1.8) y sustituyendo en la segunda ecuación (para la primera el método es análogo), se tiene

$$\frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_1}(\lambda_1 z_1 + \overline{\Psi_1}(Z)) + \frac{\partial(z_2+\eta_2)}{\partial z_2}(\lambda_2 z_2 + \overline{\sigma} z_1 + \overline{\Psi_2}(Y)) =$$
$$\lambda_2 z_2 + \lambda_2\eta_2 + \sigma z_1 + \sigma\eta_1 + \psi_2(Z+\eta),$$

y como por (1.9) $\eta_2(Z) = z_2 d_2$, sustituyendo obtenemos

$$z_2\frac{\partial d_2}{\partial z_1}(\lambda_1 z_1 + \overline{\Psi_1}(Z)) + \frac{\partial(z_2+z_2 d_2)}{\partial z_2}(\lambda_2 z_2 + \overline{\sigma} z_1 + \overline{\Psi_2}(Y)) =$$
$$\lambda_2 z_2 + \lambda_2\eta_2 + \sigma z_1 + \sigma\eta_1 + \psi_2(Z+\eta).$$

Desarrollando esta última ecuación se tiene que

$$z_2\frac{\partial d_2}{\partial z_1}\lambda_1 z_1 + z_2\frac{\partial d_2}{\partial z_1}\overline{\Psi_1}(Z) + (1 + d_2 + \frac{\partial d_2}{\partial z_2})(\lambda_2 z_2 + \overline{\sigma} z_1 + \overline{\Psi_2}(Y)) =$$
$$\lambda_2 z_2 + \lambda_2\eta_2 + \sigma z_1 + \sigma\eta_1 + \psi_2(Z+\eta),$$

De donde simplificando, se tiene finalmente que

$z_2\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(d_2)}{\partial z_2}(\lambda_i z_i)=\overline{\sigma}z_1d_2-d_2\overline{\Psi_2}(Z)-z_2\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(d_2)}{\partial z_2}\overline{\sigma}z_1$
$-z_2\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(d_2)}{\partial z_2}(\overline{\Psi_1+\Psi_2})+\sigma z_1d_1+\psi_2(Z+\eta)\overline{\sigma}z_1+\overline{\Psi_2}(Z).$
Si ahora de esta última ecuación solo escribimos los coeficientes de z_2Z^Q (de la misma manera que en el teorema de existencia), obtenemos

$$d_{2Q}< Q,\Lambda > = d_{2(Q-E_1+E_2)}\overline{\sigma}-\sum_{P+R=Q} d_{2P}\overline{g_{2R}}-d_{2(Q-E_1+E_2)}\overline{\sigma}(q_2+1)$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{P+R=Q} d_{2P}P_i\overline{g_{iR}}+d_{1(Q-E_1+E_2)}\sigma+\{\Psi_2\}_Q. \tag{1.10}$$

Nótese que del lado derecho de la igualdad solo hay términos de la forma d_{2P} para los cuales $P=(Q-E_1+E_2)$ preceden a Q; (esto es, la primera diferencia distinta de cero de las diferencias sucesivas

$$||Q||-||P||,\ q_1-p_1,\ q_2-p_2,$$

que sea positiva). Ahora mostraremos por inducción que

$$d_{2P}=0\ si\ \ < P,\Lambda >\neq 0.$$

El más pequeño $P\in N$ (con respecto al orden descrito arriba) es $P=E_2-E_1$. Este vector P solo se encuentra en N_1 (recuérdese que

$$N_1=\{Q\mid q_1\geq -1,\ q_2\geq 0\ y\ q_1+q_2\geq 0\},$$

y por tanto P no esta en N_2).
Para este vector, se tiene que

$$d_{2(Q-E_1+E_2)}\overline{\sigma}-\sum_{P+R=Q} d_{2P}\overline{g_{2R}}-d_{2(Q-E_1+E_2)}\overline{\sigma}(q_2+1)$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\sum_{P+R=Q} d_{2P}P_i\overline{g_{iR}}+d_{1(Q-E_1+E_2)}\sigma+\{\Psi_2\}_Q=0,$$

por lo que obtenemos

$$d_{2(E_2-E_1)}< E_2-E_1,\Lambda > =0,$$

Supongamos ahora que $d_{2P} = 0$ si $< P, \Lambda > \neq 0$ para todo P que precede a Q, con $Q \in N$ y sea $< Q, \Lambda >= 0$. Demostraremos entonces que $d_{2Q} = 0$.
Ya que las matrices de la parte lineal de la forma normal formal (1.3) y de la forma normal formal (1.8) son de la forma de Jordan, tenemos entonces que σ, $\overline{\sigma}$ son distintas de cero solo si $\lambda_1 = \lambda_2$ esto es, $< E_2, \Lambda >=< E_1, \Lambda >$ y por tanto

$$< Q - E_1 + E_2, \Lambda >=< Q, \Lambda > \neq 0.$$

En general se tiene que

$$< Q - E_{i-1} + E_i, \Lambda >=< Q, \Lambda > \neq 0,$$

y por tanto, $d_{2(Q-E_{i-1}+E_i)} = 0$ por nuestra hipótesis de inducción. Por lo tanto el primero, tercero y quinto sumando de (1.10) son cero. Si ahora, $P + R = Q$, se tiene que

$$< P, \Lambda > + < R, \Lambda >=< Q, \Lambda > \neq 0,$$

de donde $< P, \Lambda > + < R, \Lambda >$ tiene al menos un sumando distinto de cero, y como $< Q, \Lambda > \neq 0$ obtenemos

$$d_{2P}\tilde{g_{2R}} = 0,$$

esto es, al menos un factor de $d_{2P}\tilde{g_{2R}} = 0$ es cero.
Por lo tanto el segundo y el cuarto sumando de (1.10) son cero. Lo único que nos falta demostrar es que los coeficientes de $y_2 Y^Q$ en la serie

$$y_2 d_2 g_2(y_1 d_1, y_2 d_2) = y_2 \sum S g_{2S} Y^S {d_1}^{t_1} {d_2}^{t_2},$$

son cero. De esta última expresión se tiene que su coeficiente es una suma de términos de la forma

$$g_{2S} d_{1P_1} d_{2P_2},$$

donde $S + P_1 + P_2 = Q$. Y como $< S, \Lambda >= 0$ y $< Q, \Lambda > \neq 0$ entonces al menos para alguna P_i se tiene que $< P_i, \Lambda > \neq 0$.

Como $S + P_1 + P_2 = Q$ entonces P_i precede a Q y, de acuerdo a nuestra hipótesis de inducción se tiene que

$$g_{2S}d_{1P_1}d_{2P_2} = 0,$$

i.e., nuestro término $\{\Psi_2\}_Q = 0$

Y por tanto obtenemos $d_{2Q} < Q, \Lambda > = 0$ y como $< Q, \Lambda > \neq 0$ entonces $d_{2Q} = 0$ y por lo tanto, el teorema esta demostrado para la segunda ecuación. Para la primera ecuación el procedimiento es el mismo, así, el teorema esta demostrado. $\diamondsuit$

1.4. CLASIFICACION DE FORMAS NORMALES FORMALES.

En esta sección, se darán todas las posibles formas normales formales para el caso de un sistema de dos ecuaciones .

Para esto, sea $N = N_1 \cup N_2$ donde como se recordará

$$N_1 = \{Q \mid q_1 \geq -1,\ q_2 \geq 0\ y\ q_1 + q_2 \geq 0\}$$

$$N_2 = \{Q \mid q_2 \geq -1,\ q_1 \geq 0\ y\ q_1 + q_2 \geq 0\}.$$

Ahora, sea $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ y supongamos que $\lambda_2 \neq 0$ y consideremos

$$< Q, \Lambda >= \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0,$$

como $\lambda_2 \neq 0$, si dividimos, obtenemos

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} q_1 + q_2 = 0.$$

Sea $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, se tiene entonces que $\lambda q_1 + q_2 = 0$.

Consideraremos ahora todos los posibles valores de λ.

a) $\lambda = u + iv$, con $v \neq 0$. Se tiene que en los reales, la única solución posible de $\lambda q_1 + q_2 = 0$ es la solución trivial, i.e., $q_1 = q_2 = 0$. Por lo tanto la forma normal formal es

$$\dot{y_1} = y_1 g_{1(0,0)} {y_1}^0 {y_2}^0 = \lambda_1 y_1$$

$$\dot{y_2} = y_2 g_{2(0,0)} {y_1}^0 {y_2}^0 = \lambda_2 y_2.$$

Nótese que en este caso, la serie de potencias (1.2) es única pues la ecuación $< Q, \Lambda >= 0$ no tiene soluciones no triviales.

b) $\lambda > 0$. Para este caso, los únicos puntos de N que satisfacen $\lambda q_1 + q_2 = 0$ son $Q = (m, -1)$ y el $Q = (0, 0)$. Entonces, el único punto que es solución no trivial de $\lambda q_1 + q_2 = 0$ es aquel que pasa por la recta $\lambda m - 1 = 0$, i.e., $\lambda = m^{-1}$.

Si $\lambda = m^{-1} < 1$, entonces la única solución no trivial es $Q = (m, -1) \in N_2$. Así, la forma normal formal es

$\dot{y_1} = y_1 g_{1(0,0)} {y_1}^0 {y_2}^0 = \lambda_1 y_1$

$\dot{y_2} = y_2 g_{2(0,0)} {y_1}^0 {y_2}^0 + g_{2(m,-1)} {y_1}^m = \lambda_2 y_2 + g_{2(m,-1)} {y_1}^m$.

En este caso la serie de potencias (1.2) no es única.

Si $\lambda = m^{-1} > 1$, el resultado es el mismo, pero con las variables intercambiadas, es decir

$\dot{y_1} = \lambda_1 y_1 + g_{1(-1,m)} {y_2}^m$

$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2$.

Si $\lambda = 1$, esto es, $\lambda_1 = \lambda_2$; entonces las soluciones no triviales de $< Q, \Lambda >= 0$ son $q_1 = -q_2$ y por lo tanto tales soluciones son

$$Q = (-1, 1) \in N_1 \;\; y \;\; Q = (1, -1) \in N_2,$$

lo cual implica que la forma normal formal sea

$\dot{y_1} = \lambda_1 y_1$

$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2 + \sigma y_1$.

En este caso la serie de potencias (1.2) también es única a pesar de que la ecuación $< Q, \Lambda >= 0$ tiene soluciones no triviales, esto se debe al hecho que los puntos $Q \in N$ que satisfacen dicha ecuación, no cumplen que $||Q|| \neq 0$ (ver teorema 1).

Si λ es irracional entonces la ecuación $< Q, \Lambda >= 0$ no tiene soluciones no triviales y por lo tanto, la forma normal formal es

$$\dot{y_1} = \lambda_1 y_1$$

$$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2.$$

Aquí, la serie de potencias (1.2) también es única.

c) $\lambda = 0$ (i.e., $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0$)

Se tiene entonces que $< Q, \Lambda >= \lambda_2 q_2 = 0$ lo cual implica que las soluciones son todos los puntos del eje q_1 i.e., $Q = (k, 0) \in N$ tal que $k \geq 0$, $k \in Z$.

De donde nuestra forma normal formal es

$\dot{y_1} = y_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,0)} {y_1}^k = y_1 g_1(y_1)$
$\dot{y_2} = y_2 (\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,0)} {y_1}^k + \lambda_2) = y_2 g_2(y_1).$
Nótese que para este caso, la serie de potencias (1.2) no es única.

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema
$\dot{x_1} = 0$
$\dot{x_2} = -x_2 + x_1 x_2 + 3{x_1}^2 + 3{x_1}^3 + {x_1}^2 x_2 - 9{x_1}^4 - 6{x_1}^5,$
en este caso, $\Lambda = (0,3)$ y por lo tanto, la forma normal formal es
$\dot{y_1} = y_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,0)} {y_1}^k = y_1 g_1(y_1)$
$\dot{y_2} = y_2 (\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,0)} {y_1}^k + \lambda_2) = y_2 g_2(y_1),$
donde de nueva cuenta, las g_i dependen de la serie de potencias (1.2). Si al sistema original le aplicamos la transformación analítica
$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 + 3{y_1}^2 + 6{y_1}^3,$
entonces la forma normal formal resultante es
$\dot{y_1} = 0$
$\dot{y_2} = -y_2 + y_1 y_2 + {y_1}^2 y_2.$

d) $\lambda < 0$. Aquí, los únicos puntos que satisfacen $< Q, \Lambda >= 0$ estan en el primer cuadrante, y cualquiera que sea Q se tiene que $Q \in N_1$ y $Q \in N_2$.

Si $\lambda = -1$ (i.e., $\lambda_2 = -\lambda_1$) entonces los puntos Q que satisfacen la ecuación

$$< Q, \Lambda >= \lambda_1 (q_1 - q_2) = 0,$$

son de la forma $Q = (k,k)$ con $k \in Z^+$. Así la forma normal formal es

$$\dot{y_1} = y_1 (\sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k + \lambda_1)$$
$$\dot{y_2} = y_2 (\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k + \lambda_2).$$

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema
$\dot{x_1} = x_1$
$\dot{x_2} = -x_2 + 4x_1 + 3{x_1}^3,$
Aquí lo que se tiene es $\Lambda = (1,-1)$; de modo que nuestra forma normal formal es de la forma

$$\dot{y_1} = y_1(\sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k + 1)$$
$$\dot{y_2} = y_2(\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k - 1).$$

Si ahora al sistema original le aplicamos la transformación analítica

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + \frac{4}{5}{y_1}^2 + \frac{3}{4}{y_1}^3,$

la forma normal formal resultante es

$$\dot{y_1} = y_1$$
$$\dot{y_2} = -y_2.$$

Si $\lambda = -\frac{r}{s}$ con $(r, s) = 1$, se tiene entonces que

$$< Q, \Lambda >= -\frac{r}{s} q_1 + q_2 = 0,$$

de donde $-rq_1 + sq_2 = 0$. Por lo tanto, las soluciones no triviales son $q_1 = ks$ y $q_2 = kr$ con $k \in Z^+$ y entonces la forma normal formal esta dada por

$$\dot{y_1} = y_1(\sum_{k=1}^{\infty} g_{1(ks,kr)} {y_1}^{ks} {y_2}^{kr} + \lambda_1)$$
$$\dot{y_2} = y_2(\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(ks,kr)} {y_1}^{ks} {y_2}^{kr} + \lambda_2).$$

En este caso, la serie de potencias (1.2) tampoco es única.

Hasta ahora, hemos dado todas las posibles formas normales formales para un sistema de dos ecuaciones. Pero aún no sabemos si las series de potencias (1.2) corresponden a una transformación analítica.

Esto se hará en el siguiente capítulo en donde analizaremos las distintas propiedades que tienen que cumplir las series de potencias para que estas correspondan a transformaciones analíticas.

CAPITULO 2. NORMALIZACION DE SISTEMAS ANALÍTICOS.

2.1. INTRODUCCION

En este capítulo, se desarrollará un análisis sobre las condiciones que deben de cumplir las formas normales formales y los valores propios para que dado un sistema analítico y su forma normal formal, la serie de potencias que lleva al sistema analítico en la forma normal formal, corresponda a una transformación analítica.

Los primeros resultados en esta dirección fueron obtenidos por Dulac, Poincaré, Siegel y otros [ver Apéndice], quienes encontraron criterios de mayoración en las series de potencias que llevan a un sistema dado en una forma normal; dichos criterios dependen en gran parte de la posición de los valores propios de la parte lineal del campo en el plano complejo. Se distinguen dos casos :

a) Cuando el cero no pertenece a la envolvente convexa de los valores propios se dice que estos se encuentran en el dominio de Poincaré.

b) Cuando el cero pertenece a la envolvente convexa de los valores propios se dice que estos se encuentran en el dominio de Siegel.

Decimos que x pertenece a la envolvente convexa de $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ si x se expresa como $x = \sum m_i \lambda_i$ con $0 \leq m_i \leq 1$, $\sum m_i = 1$ y m_i (con $i = 1, 2$) en los reales.

Aunque A. Bruno (ver Bruno [4]) no distingue explícitamente estos casos en las formas normales formales y en sus criterios de mayoración, nosotros sí señalaremos dicha distinción en la clasificación de las formas normales formales y en los criterios de mayoración.

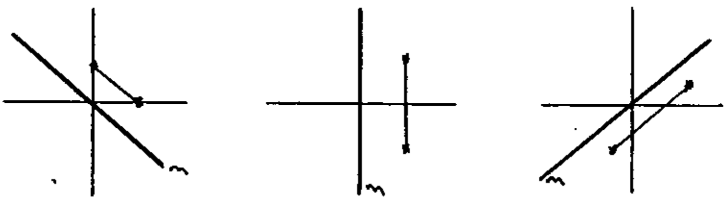
Considérese ahora, a los valores propios λ_i como puntos fijos sobre el plano C; los siguientes casos pueden ocurrir :

(1) Existe una línea recta m que pasa por el origen y que contiene exactamente a l puntos λ_i, y los demás λ_i estan del mismo lado de la recta m $(i = 1, 2)$.

(2) Para cada línea que pasa a través del origen hay valores propios λ_i en ambos lados de la línea. (Solo casos en el dominio de Siegel)

Nótese que en el caso (1), la recta m no es única. Como nosotros nos hemos enfocado para el caso de un sistema de dos ecuaciones, y, tomando en cuenta que $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, se tienen las siguientes opciones :

(a) $\lambda = u + iv$ con $v \neq 0$. En este caso, o los dos valores propios son complejos con parte imaginaria distinta de cero (algunos casos se muestran en la figura) ó un valor propio tiene parte imaginaria igual a cero y el otro valor propio tiene parte imaginaria distinta de cero.

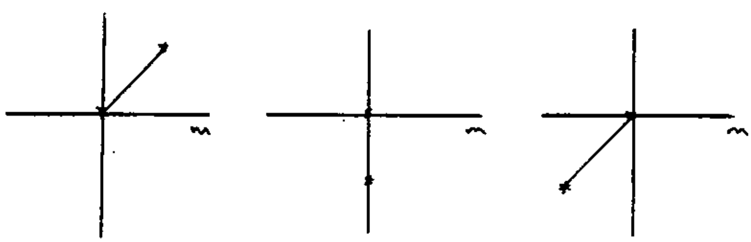


En cualquier caso $l = 0$ (esto se debe al hecho de que l será el mínimo número de valores propios que pertenecen a la recta m). Este es un caso (1) con valores propios en el dominio de Poincaré.

(b) Si $\lambda > 0$. Si λ_1, λ_2 son reales entonces $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 > 0$ ó $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 < 0$. Si λ_1, λ_2 tienen parte imaginaria distinta de cero entonces $\lambda_1 = \lambda\lambda_2$ (Algunos casos se muestran en la siguiente figura).

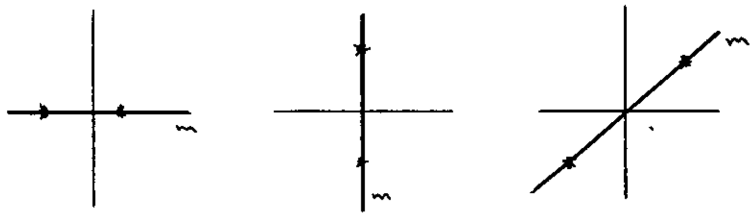
En cualquier caso $l = 0$ y de nueva cuenta es un caso (1) con valores propios en el dominio de Poincaré.

(c) $\lambda = 0$. Aquí $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$. En este caso $l = 1$ (pues λ_1 esta en la recta m cualquiera que esta sea). Algunos casos se dan en la figura siguiente.



De cualquier manera estamos en el caso (1). Este es ya un caso con valores propios en el dominio de Siegel.

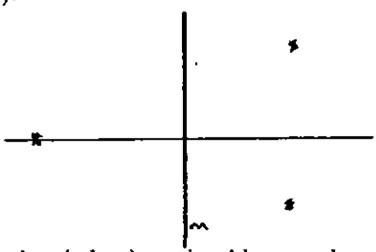
(d) $\lambda < 0$. Si λ_1, λ_2 son reales entonces $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 > 0$ ó $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 < 0$. Si λ_1, λ_2 tiene parte imaginaria entonces λ_1 y λ_2 estan en distintos cuadrantes. En la figura siguiente se muestran algunos casos.



Aquí de cualquier modo, estamos en el caso (1) pero con $l = 2$. Este también es un caso con valores propios en el dominio de Siegel.

Nótese que para un sistema de dos ecuaciones diferenciales, nunca tuvimos la condición 2); de hecho, esta condición solo se da para un sistema de 3 ó mas ecuaciones y dependiendo de los λ_i.

Por ejemplo, si nuestros valores propios son $\lambda_1 = r < 0$, $\lambda_2 = a + ib$ con $a \neq 0, b > 0$ y $\lambda_3 = a - ib$, tenemos entonces que para cualquier línea l que tomemos, siempre vamos a tener λ_i de ambos lados de la línea y por tanto, estamos en el caso 2).



Hasta ahora, el orden de los λ_i no ha sido tomado en consideración y por tanto, no ha jugado un papel importante en nuestro análisis. En lo sucesivo, las variables y_i de la forma normal serán enumeradas de tal forma que

$$0 = \mu_1 = ... = \mu_l < \mu_{l+1} \leq \mu_2,$$

donde μ_i es la distancia del valor propio λ_i a la recta m. Nótese que como la recta m no es única, entonces la distancia μ_i no está definida unívocamente. De acuerdo a la clasificación sobre λ que se ha hecho en este trabajo, se tiene lo siguiente:

(a) Aquí $l = 0$ y entonces ningún λ_i esta en la recta m y por tanto $0 < \mu_1 < \mu_2$.

(b) De nueva cuenta $l = 0$ y por lo tanto también se tiene que $0 < \mu_1 < \mu_2$.

(c) Aquí $l = 1$ pues $\lambda_1 = 0$ y se tiene entonces que $0 = \mu_1 < \mu_2$.

(d)En este caso $l = 2$ pues los dos λ_i estan en la línea m y por tanto tenemos $0 = \mu_1 = \mu_2$.

Daremos ahora un teorema el cual nos dice que manera esta expresada la forma normal formal en general. Dicho teorema no se demostrará, pues no se encuentra dentro de los objetivos de este trabajo.

Teorema 1. Si Λ corresponde al caso 1), entonces la forma normal formal esta dada por

$\dot{y}_i = \Psi_i$ para $1 \leq i \leq l$

$\dot{y}_i = \sum_{j=l+1}^{2} b_{ij}y_j + \sum b_{iq_{l+1}\ldots q_{i-1}} y_{l+1}{}^{q_{l+1}} \ldots y_{i-1}{}^{q_{i-1}}$ para $l+1 \leq i \leq 2$.

Donde Ψ_i, b_{ij} y $b_{iq_{l+1}\ldots q_{i-1}}$ son series de potencias en $y_1, \ldots, y_l$.

La demostración puede ser vista en Bruno [3]. Es muy fácil verificar que las formas normales formales que obtuvimos en la sección (1.4), son las dadas por este teorema.

Hasta ahora, hemos hablado de todas las posibles formas normales formales y de las series de potencias que llevan a un sistema dado en una forma normal formal. Pero no hemos dicho nada acerca de la convergencia de dichas series de potencias. Ahora daremos una condición, la cual nos da información sobre la convergencia de dicha serie. Esta condición es muy importante ya que es una de las hipótesis del teorema que garantiza en ciertos casos que la serie de potencias corresponda a una transformación analítica. Dicho teorema se dará más adelante.

2.2 CONDICION A.

Consideraremos sólo el caso (1), pues el caso 2 nunca se da en C^2. Por el teorema anterior nosotros sabemos que si Λ corresponde al caso (1), entonces la forma normal formal esta dada por

$\dot{y}_i = \Psi_i(Y')$ para $i = 1, \ldots, l$

$\dot{y}_i = \sum_{j=l+1}^{2} b_{ij}y_j + \sum b_{iq_{l+1}\ldots q_{i-1}} y_{l+1}{}^{q_{l+1}} \ldots y_{i-1}{}^{q_{i-1}}$ para $i = l+1, \ldots, 2$.

Condición A. Si Λ corresponde al caso 1), entonces existen series de potencias $a(Y') = a(y_1, ..., y_l)$ tal que en la forma normal formal $\dot{y_i} = \Psi_i(Y')$ se tiene

$$\Psi_i = \lambda_i y_i a(Y') \qquad \text{para } 1 \leq i \leq l.$$

Lo que nos dice esta condición es que si la forma normal formal es escrita en la forma $\dot{y_i} = y_i \sum g_{iQ} Y^Q$, entonces

$$G' = \Lambda' a,$$

i.e., $G'_Q = \Lambda' a_Q \ \forall Q \in N = N_1 \in N_2$, donde $G' = (g_1, ..., g_l)$ y $\Lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_l)$; y $G_Q{}' = (g_{1Q}, ..., g_{lQ})$.

Daremos ahora un ejemplo de una forma normal analítica la cual cumple la condición A y otra forma normal analítica que no la cumpla.

Ejemplo. La forma normal analítica

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2 + y_2 {y_1}^2 + y_2 {y_1}^3 = \lambda_2 y_2 \Psi_2(y_1)$,

cumple la condición A ya que $\dot{y_1} = \lambda_1 y_1 a = 0$ pues $\lambda_1 = 0$. Por el contrario, la forma normal analítica

$\dot{y_1} = {y_1}^2$

$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2 + y_2 {y_1}^2 + y_2 {y_1}^3 = \lambda_2 y_2 \Psi_2(y_1)$,

no la cumple pues $\dot{y_1} \neq 0$ aunque $\lambda_1 = 0$.

Despues de dada la condición A uno podría preguntarse que tipo de formas normales formales cumplen (o no cumplen) la condición A ?. A continuación analizaremos que condiciones deben de cumplir las formas normales formales que obtuvimos en la sección 1.4. para que estas cumplan la condición A.

a) $\lambda = u + iv$, con $v \neq 0$. Para este caso, la condición A siempre se cumple pues nunca se tiene el subsistema $\dot{y_i} = \Psi_i(Y')$ ya que $l = 0$.

b) $\lambda > 0$. En este caso también $l = 0$ y de nueva cuenta no se tiene el subsistema $\dot{y_i} = \Psi_i(Y')$, entonces la forma normal analítica siempre satisface la condición A.

c) $\lambda = 0$ (i.e., $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0$) Aquí $l = 1$, y como ya se vió en la sección 1.4. la forma normal formal es

$\dot{y_1} = y_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,0)} {y_1}^k = y_1 g_1(y_1)$

$\dot{y_2} = y_2 (\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,0)} {y_1}^k + \lambda_2) = y_2 g_2(y_1)$,

Como $l = 1$, entonces la serie de potencias a depende solo de y_1. Para que la forma normal formal cumpla la condición A se necesita que $\dot{y_1} = \Psi_1(y_1) = \lambda_1 y_1 a(y_1) = 0$, i.e., se necesita que en la forma normal formal $g_1 = 0$.
d) $\lambda < 0$. i) Si $\lambda = -1$ (i.e., $\lambda_2 = -\lambda_1$) entonces como se vió en la seción 1.4. la forma normal formal es

$$\dot{y_1} = y_1(\sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k + \lambda_1) = \lambda_1 y_1 g_1$$

$$\dot{y_2} = y_2(\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,k)} {y_1}^k {y_2}^k + \lambda_2) = \lambda_2 y_2 g_2.$$

Como $l = 2$, entonces la serie de potencias a depende de y_1 y de y_2. Para que la forma normal formal cumpla la condición A se necesita que $\dot{y_1} = \Psi_1(y_1) = \lambda_1 y_1 a(y_1, y_2)$ y que $\dot{y_2} = \Psi_2(y_2) = \lambda_2 y_2 a(y_1, y_2)$, i.e., se necesita que en la forma normal formal $-g_1 = g_2$.

ii) $\lambda = -\frac{r}{s}$ con $(r, s) = 1$. De nueva cuenta $l = 2$ y la forma normal formal esta dada por

$$\dot{y_1} = y_1(\sum_{k=1}^{\infty} g_{1(ks,kr)} {y_1}^{ks} {y_2}^{kr} + \lambda_1) = \lambda_1 y_1 g_1$$

$$\dot{y_2} = y_2(\sum_{k=1}^{\infty} g_{2(ks,kr)} {y_1}^{ks} {y_2}^{kr} + \lambda_2) = \lambda_2 y_2 g_2,$$

la cual satisface la condición A solo si

$$g_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} g_1.$$

Nótese que el inciso (i) es un caso particular de este inciso (ii). Entonces para el caso de un sistema de dimensión 2, en los únicos casos en los cuales la condición A puede no cumplirse es cuando algún λ es cero y cuando $\lambda < 0$, (los dos son casos en el dominio de Siegel).

Ya sabemos que la forma normal formal no está únicamente determinada; supóngase entonces que alguna de ellas cumple la condición A, uno se podría hacer entonces la siguiente pregunta :

Dada una forma normal formal que satisface la condición A entonces, cualquier forma normal formal de ese sistema, satisface la condición A ? La respuesta es sí y esta dada por un teorema que demostraremos más adelante. Antes de demostrar eso, daremos la demostración de otro resultado que nos servirá para la respuesta de la pregunta anterior.

Teorema 2. Sea

$$y_1 = \eta_1(Z)$$
$$y_2 = \eta_2(Z),$$

una serie de potencias formal e invertible que lleva a la forma normal formal

$$\dot{y_1} = y_1 g_1 = y_1 \sum_Q g_{1Q} Y^Q$$
$$\dot{y_2} = y_2 g_2 = y_2 \sum_Q g_{2Q} Y^Q, \tag{2.1}$$

en la forma normal formal

$$\dot{z_1} = z_1 \tilde{g_1} = z_1 \sum_Q \tilde{g_{1Q}} Z^Q$$
$$\dot{z_2} = z_2 \tilde{g_2} = z_2 \sum_Q \tilde{g_{2Q}} Z^Q. \tag{2.2}$$

Si en la forma normal formal (2.1) se tiene que

$$< P, G >= 0, \ \forall P \in N \ \ < P, \Lambda >= 0,$$

donde $G = (g_1, g_2)$ y $\tilde{g_{iQ}} \in C$, entonces $g_1(Y)$ y $g_2(Y)$ son series de potencias y

$$\tilde{g_1} = g_1(\eta_1, \eta_2)$$
$$\tilde{g_2} = g_2(\eta_1, \eta_2).$$

Demostración. Si para cada $Q \in N$ tenemos $q_1 = -1$ ó $q_2 = -1$, entonces $Q \notin N_2$ ó $Q \notin N_1$ respectivamente, i.e., si $q_i = -1 \Rightarrow Q \notin N_j$. Aquí, $g_{jQ} = 0$ y $< Q, G_Q >= q_1 g_{1Q} + q_2 g_{2Q}$ y como $q_i = -1$ se tiene que $< Q, G_Q >= -g_{iQ}$.

De cualquier modo, como $< P, G >= 0 \Longleftrightarrow < P, \Lambda >= 0$ con $P \in N$, esto implica que $< Q, G_Q >= 0$ esto es, $g_{iQ} = 0$ y todas las g_i son series de potencias positivas.

La serie de potencias inversa de $y_i = \eta_i(Z)$ que es $z_i = y_i h_i(Y)$, lleva a la forma normal formal (2.2) en la forma normal formal (2.1). Por el teorema 2 del capítulo anterior se tiene que

$$h_{iP} = 0 \ si \ < P, \Lambda > \neq 0.$$

Si ahora expresamos a Z en términos de Y en $\dot{z_1} = z_1\tilde{g_1}$ por medio de $z_1 = y_1 h_1$ y como $\dot{y_1} = y_1 g_1$ obtenemos

$$y_1 g_1 h_1 + y_1 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h_1}{\partial y_i} y_i g_i = y_1 h_1 \tilde{g_1}(y_1 h_1, y_2 h_2). \qquad (*)$$

Si tomamos solo los coeficientes de $y_1 Y^Q$ en la expresión

$$y_1 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h_1}{\partial y_i} y_i g_i,$$

obtenemos

$$\sum_{P+R=Q} h_{1P} < P, G_R > .$$

Como $< P, G >= 0$ para todo $P \in N$, $< P, \Lambda >= 0$ y $h_{1P} = 0$ si $< P, \Lambda > \neq 0$ entonces

$$\sum_{P+R=Q} h_{1P} < P, G_R >= 0.$$

Por lo tanto $(*)$ se reduce a

$$y_1 g_1 h_1 = y_1 h_1 \tilde{g_1}(y_1 h_1, y_2 h_2),$$

y como $z_1 = y_1 h_1$, se tiene entonces que $z_1 g_1 = z_1 \tilde{g_1}$ esto es,

$$\tilde{g_1} = g_1(\eta_1, \eta_2).$$

Análogamente

$$\tilde{g_2} = g_2(\eta_1, \eta_2),$$

y por tanto, el teorema esta demostrado. $\diamondsuit$

Teorema 3. Si al menos una forma normal formal de un sistema dado satisface la condición A, entonces cualquier otra forma normal formal de ese sistema también la satisface.

Demostración. Daremos la demostración solo para el caso (1), pues para $n = 2$ el caso (2) nunca se presenta.
Para el caso (1), la forma normal formal esta dada por el teorema 1 como

$$\dot{y}_i = \Psi_i(Y') \qquad \text{para } 1 \leq i \leq l$$
$$\dot{y}_i = \sum_{j=l+1}^{2} b_{ij}(Y')y_j + \eta_i(y_1) \qquad \text{para } 1+1 \leq i \leq 2,$$

donde el subsistema $\dot{y}_i = \Psi_i(Y')$ con $i = 1, ..., l$ es una forma normal formal de orden l. Si ahora nosotros aplicamos a esta forma normal formal la serie de potencias

$$y_i = \eta_i(Z') \qquad \text{para } 1 \leq i \leq l$$
$$y_i = \sum_{j=l+1}^{2} c_{ij}(Z')z_j + \eta_i(z_1) \qquad \text{para } l+1 \leq i \leq 2,$$

obtenemos otra forma normal formal.

Ahora, para nuestro sistema $\dot{y}_i = \Psi_i(Y')$ se tiene que $G' = \Lambda' a$ y por tanto se cumple que

$$< P, G >= 0, \; \forall \; P \in N, \; < P, \Lambda >= 0,$$

y por el teorema anterior, la nueva forma normal formal satisface la condición A, con $\tilde{a} = a(\eta_1, \eta_2)$. $\diamond$

Ahora, dividiremos el caso (1) de la siguiente forma :

1*) Hay un par de números conmensurables en $\{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$

1**) Los números $\{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$ son inconmensurables por pares

En el presente trabajo solo se estudiará el caso 1*). Para la teoría sobre el caso 1 * *) ver Bruno [3].

2.3 CONDICION W.

Daremos ahora, una nueva condición la cual se necesitará para demostrar el teorema que garantiza la existencia de transformaciones analíticas en ciertos casos.

Condición W. Sea $w_k = min < Q, \Lambda >$ para $Q \in N$, $||Q|| < 2^k$ y $< Q, \Lambda > \neq 0$
Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} ln w_k{}^{-1} < \infty,$$

Esta condición, es una condición aritmética muy débil en los valores propios λ_1 y λ_2 la cual se satisface casi siempre; en particular para el caso 1*) siempre se satisface como veremos más adelante. En contraste, la condición A es una fuerte restricción en la forma normal formal.

Podemos entonces por el momento, enunciar el teorema de existencia de transformaciones analíticas que demostraremos más adelante, el cual incluye algunos casos en el dominio de Siegel y en el dominio de Poincaré.

Teorema. Si para el sistema analítico

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \phi_1(X) \\ \dot{x_2} &= \phi_2(X), \end{aligned} \tag{2.3}$$

el vector $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ satisface la condición W y la forma normal formal satisface la condición A, entonces existe una transformación analítica

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \overline{\xi_1} \\ x_2 &= y_2 + \overline{\xi_2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

tal que lleva al sistema (2.3) en una forma normal analítica.

Ahora daremos un lema el cual nos demostrará que el caso 1$*$) nos implica que siempre se cumpla la condición W en dimensión 2.

Para ello, sea τ un número complejo, con $|\tau| = 1$, tal que el vector $(Re\tau, Im\tau)$ es ortogonal a la línea m y que tal vector esté del mismo lado de los λ_i. Si hacemos

$$\begin{aligned} \mu_i &= Re(\tau\lambda_i) \\ \nu_i &= Im(\tau\lambda_i), \end{aligned}$$

es muy fácil verificar que μ_i es la distancia del valor propio λ_i a la recta m. Si hacemos $\tilde{M} = (\mu_1, \mu_2)$ y $\tilde{N} = (\nu_1, \nu_2)$; se tiene entonces que

$$\tau\Lambda = \tilde{M} + i\tilde{N}.$$

Lema 2. Sea Q un elemento arbitrario en N. Si Λ corresponde al caso 1$*$) entonces

$$0 < inf\{| < Q'', \tilde{M}'' > | \, | < Q'', \tilde{M}'' > \neq 0\},$$

y la ecuación $< Q'', \tilde{M}'' >= 0$ tiene solo un número finito de soluciones Q''. Ademas existe una $\epsilon > 0$ tal que

$$| < Q, \Lambda > | > \epsilon, \ para \ < Q, \Lambda > \neq 0,$$

donde $Q'' = (q_{l+1}, ..., q_n)$ y $\tilde{M}'' = (\mu_{l+1}, ..., \mu_n)$.

Demostración. Primero lo demostraremos para $l = 0$ el cual es un caso en el dominio de Poincaré. Despues lo demostraremos para un caso en el dominio de Siegel ($l = 1$). El otro caso Siegel ($l = 2$) es análogo.

CASO $l = 0$) Aquí se tiene que $Q'' = (q_1, q_2)$, y de la misma manera, $\tilde{M}'' = (\mu_1, \mu_2)$ donde μ_i es la distancia de la recta m al valor propio λ_i y l es el número de valores propios que estan contenidos en m, y definimos a la norma del vector Q'' como $|Q''| = q_1 + q_2$

Primero demostraremos que $< Q'', \tilde{M}'' > > \mu_1(|Q''| - 1) - \mu_2$.
En efecto, si calculamos
$\mu_1(|Q''| - 1) - \mu_2 = \mu_1(q_1 + q_2 - 1) - \mu_2$
como $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \mu_1 q_1 + \mu_1 q_2 - \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 - \mu_1 - \mu_2$
$< \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 =< Q'', \tilde{M}'' >$
y por lo tanto, $< Q'', \tilde{M}'' > > \mu_1(|Q''| - 1) - \mu_2$.

Ahora, si $|Q''| - 1 > \frac{(\mu_2+1)}{\mu_1}$ entonces $| < Q, \Lambda > | \geq < Q'', \tilde{M}'' > > \mu_1(|Q''| - 1) - \mu_2$ por lo cual se tiene que $< Q'', \tilde{M}'' > > 1$.
Por el contrario, si $|Q''| - 1 < \frac{(\mu_2+1)}{\mu_1}$ entonces $\mu_1(|Q''| - 1) < \mu_2 + 1$, pero aquí, el número de vectores Q'' que cumplen esta propiedad es finito.

Se afirma que $< Q'', \tilde{M}'' >= 0$ y $< Q'', \tilde{N}'' >= 0$ solo aceptan un número finito de soluciones. En efecto, si Q'' cumple la condición $|Q''| - 1 > \frac{(\mu_2+1)}{\mu_1}$ entonces también cumple que $< Q'', \tilde{M}'' > > 1$ que es una contradicción pues $0 =< Q'', \tilde{M}'' > \not> 1$; por lo tanto Q'' cumple la condición $|Q''| - 1 < \frac{(\mu_2+1)}{\mu_1}$ y solo son un número finito de valores. Por tanto, $< Q'', \tilde{M}'' >= 0$ solo aceptan un número finito de soluciones. De la misma manera, se demuestra que $< Q'', \tilde{N}'' >= 0$ solo tiene un número finito de soluciones. Aquí
$\tilde{N}'' = (\nu_{l+1}, ..., \nu_n) = (\nu_1, \nu_2)$.

En particular, $| < Q'', \tilde{M}'' > | > \delta_1 > 0$ si $< Q'', \tilde{M}'' > \neq 0$ y por tanto se cumple que en cualquier caso,

$$0 < inf\{| < Q'', \tilde{M}'' > | \, |< Q'', \tilde{M}'' > \neq 0\},$$

y que $< Q'', \tilde{M}'' >= 0$ tiene un número finito de soluciones. Por tanto, la primera parte del teorema ha sido demostrada para este caso.

Parte ii) Si ahora calculamos

$$\begin{aligned}
|<Q,\Lambda>|^2 &= |(a_1+ib_1)q_1+(a_2+ib_2)q_2|^2 \\
&= |a_1q_1+a_2q_2+i(b_1q_1+b_2q_2)|^2 \\
&= (a_1q_1+a_2q_2)^2+(b_1q_1+b_2q_2)^2 \\
&= |<Q'',\tilde{M}''>|^2+{b_1}^2{q_1}^2+2b_1q_1b_2q_2+{b_2}^2{q_2}^2 \\
&= |<Q'',\tilde{M}''>|^2+|<Q,\tilde{N}>|^2 \\
&= |<Q'',\tilde{M}''>|^2+|<Q'',\tilde{N}''>|^2.
\end{aligned}$$

Nótese que para el caso $l=0$, se tiene que $Q=Q'+Q''=Q''$ y $\tilde{N}=\tilde{N}'+\tilde{N}''=\tilde{N}''$.

En la primera parte, se demostró que $|<Q'',\tilde{M}''>|>\delta_1>0$ y que la igualdad $<Q'',\tilde{M}''>=0$ tiene un número finito de soluciones. También se demostró que $<Q'',\tilde{N}''>=0$ tiene un número finito de soluciones. Por lo tanto, como se cumple la igualdad

$$|<Q,\Lambda>|^2=|<Q'',\tilde{M}''>|^2+<Q'',\tilde{N}''>|^2,$$

se tiene que $|<Q,\Lambda>|^2>\delta_2>0$ si $<Q,\Lambda>\neq 0$ y como en la primera parte se demostró que $|<Q,\Lambda>|\geq|<Q'',\tilde{M}''>|>1$. Si hacemos $\epsilon=min\{\delta_2,1\}$ el lema está probado en el caso del dominio de Poincaré.

CASO $l=1$) Ahora lo demostraremos para un caso Siegel ($l=1$). El otro caso Siegel ($l=2$) es análogo. Ahora, $Q''=(q_2)$, y $\tilde{M}''=(\mu_2)$ donde μ_2 es la distancia de la recta m al valor propio λ_2 y donde $l=1$ denota el número de valores propios que estan contenidos en m, en este caso la norma del vector Q'' es $|Q''|=q_2$.

Primero demostraremos que $<Q'',\tilde{M}''>>\mu_2(|Q''|-1)-\mu_2$.
En efecto, si calculamos

$$\mu_2(|Q''|-1)-\mu_2=\mu_2(q_2-1)-\mu_2,$$

lo cual implica que

$$\mu_2q_2-\mu_2-\mu_2\leq\mu_2q_2-2\mu_2<\mu_2q_2=<Q'',\tilde{M}''>,$$

y por lo tanto, $<Q'',\tilde{M}''>>\mu_2(|Q''|-1)-\mu_2$. Ahora, si $|Q''|-1>\frac{(\mu_2+1)}{\mu_2}$ entonces $|<Q,\Lambda>|\geq|<Q'',\tilde{M}''>|>\mu_2(|Q''|-1)-\mu_2$ por lo cual se tiene que $|<Q'',\tilde{M}''>|>1$.
Por el contrario, si $|Q''|-1<\frac{(\mu_2+1)}{\mu_2}$ entonces $\mu_2(|Q''|-1)<\mu_2+1$, pero aquí, el número de vectores Q'' que cumplen esta propiedad es finito y además

$< Q'', \tilde{M}'' >= \mu_2 q_2 = 0$ y $< Q'', \tilde{N}'' >= \nu_2 q_2 = 0$ solo aceptan un número finito de soluciones.

En particular, $| < Q'', \tilde{M}'' > | > \delta_1 > 0$ si $< Q'', \tilde{M}'' > \neq 0$ y por tanto se cumple que en cualquier caso,

$$0 < inf\{| < Q'', \tilde{M}'' > | \, |< Q'', \tilde{M}'' > \neq 0\},$$

y que $< Q'', \tilde{M}'' >= 0$ tiene un número finito de soluciones. Por tanto, para este segundo caso la primera parte del teorema ha sido demostrada.

Parte ii) Como $l = 1$ y para el caso de dimensión 2 $l = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ entonces $\Lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_l) = \lambda_1 = 0$, $\tilde{M}' = \mu_1 = 0$ y $\tilde{N}' = \nu_1 = 0$.

Si ahora calculamos

$$\begin{aligned}
| < Q, \Lambda > |^2 &= |(a_2 + ib_2)q_2|^2 = |a_2 q_2 + ib_2 q_2|^2 \\
&= (a_2 q_2)^2 + (b_2 q_2)^2 = | < Q'', \tilde{M}'' > |^2 + {b_2}^2 {q_2}^2 \\
&= | < Q'', \tilde{M}'' > |^2 + | < Q, \tilde{N} > |^2 \\
&= | < Q'', \tilde{M}'' > |^2 + | < Q'', \tilde{N}'' > |^2
\end{aligned}$$

Nótese que para el caso $l = 1$, se tiene que $\tilde{N} = \tilde{N}' + \tilde{N}'' = \tilde{N}''$ pues como ya vimos líneas arriba, $\tilde{N}' = 0$. En la primera parte, se demostró que $| < Q'', \tilde{M}'' > | > \delta_1 > 0$ y que esta desigualdad tiene un número finito de soluciones. También se demostró que $< Q'', \tilde{N}'' >$ tiene un número finito de soluciones y como se cumple la igualdad

$$| < Q, \Lambda > |^2 = | < Q'', \tilde{M}'' > |^2 + | < Q', \tilde{N}' > + < Q'', \tilde{N}'' > |^2$$

se tiene entonces que $| < Q, \Lambda > |^2 > \delta_2 > 0$ si $< Q, \Lambda > \neq 0$ y como en la primera parte se demostró que $| < Q, \Lambda > | \geq | < Q'', \tilde{M}'' > | > 1$. Si hacemos $\epsilon = min\{\delta_2, 1\}$ el lema está probado para este caso del dominio de Siegel. Por tanto el lema está demostrado. $\diamondsuit$

Demostraremos ahora, que en el caso 1*), la condición W siempre se satisface.

En efecto, como $w_k = min < Q, \Lambda >$ para $Q \in N$, $||Q|| < 2^k$ y $< Q, \Lambda > \neq 0$ y como por el lema anterior existe una $\epsilon > 0$ tal que

$$< Q, \Lambda > > \epsilon, \; para \; < Q, \Lambda > \neq 0,$$

se tiene entonces que

$$< Q, \Lambda >= w_k \geq \epsilon > 0,$$

lo cual implica que

$$w_k{}^{-1} \leq \epsilon^{-1} < \infty,$$

de donde se obtiene finalmente que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} ln w_k{}^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} ln \epsilon^{-1} = ln \epsilon^{-1} < \infty,$$

y por tanto, la condición W se satisface para 1$*$).

2.4 ITERACIONES.

Introduciremos ahora una nueva notación. Sean ξ_1, ξ_2 series de potencias en y_1, y_2 y sea Λ fijo. Para cada número complejo δ, la expresión $\xi_{i\delta}$ denota las series de potencias que consisten de aquellos términos cy_iY^Q de las series ξ_i para los cuales $< Q, \Lambda >= \delta$. Así, por ejemplo, si la forma normal formal es $\dot{y_i} = \Psi_i(Y)$, se tiene que $\Psi_{i0} = \Psi_i$ para $< Q, \Lambda >= 0$.

Definimos para una serie de potencias ξ, su orden $ord\xi$ como el conjunto de ordenes de todos los términos de la serie ξ y $\underline{ord}\xi := min\ ord\xi$.
Por ejemplo, sea $\xi = y_1y_2 + y_2{}^3$. Aquí, $ord\xi = \{2, 3\}$ y $\underline{ord}\xi = 2$.

El símbolo $m \leq ord\xi \leq 2m$ significa que todos los ordenes de ξ son mayor que m y menor que $2m$. Finalmente, $\widehat{E^m}$ denota la serie definida como la serie de todos los términos de ξ cuyos ordenes no exceden a m.

Supóngase que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \lambda_1 x_1 + \Psi_1(X) + \varphi_1(X) \\ \dot{x_2} &= \lambda_2 x_2 + \Psi_2(X) + \varphi_2(X), \end{aligned} \tag{2.5}$$

coincide con la forma normal analítica en todos los términos de orden menor que m :

$$1 \leq ord\Psi_i \leq m,\ \Psi_{i0} = \Psi_i,\ m + 1 \leq ord\varphi_i,$$

donde las series φ_i no tienen términos lineales ni constantes. Nosotros quisieramos una serie de potencias

$$x_1 = y_1 + \xi_1$$
$$x_2 = y_2 + \xi_2, \tag{2.6}$$

tal que lleve al sistema anterior en un sistema de la forma

$$\dot{y_1} = \lambda_1 y_1 + \Psi_1(Y) + \overline{\Psi_1}(Y) + \overline{\varphi_1}(Y)$$
$$\dot{y_2} = \lambda_2 y_2 + \Psi_2(Y) + \overline{\Psi_2}(Y) + \overline{\varphi_2}(Y), \tag{2.7}$$

el cual coincida con la forma normal analítica en todos los términos con el más alto grado posible. El lema que demostraremos a continuación nos garantiza la existencia de dicha serie de potencias la cual lleva un sistema que coincide con la forma normal analítica hasta grado m a un sistema que coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$. Este lema es muy importante ya que para la demostración del teorema de existencia de la transformación analítica es usado iteradamente. En ese teorema, tal transformación es construida por iteraciones, es decir, se toma un sistema que coincida con la forma normal analítica hasta grado m, y se va aplicando sucesivamente el lema 3 hasta que el último sistema coincida completamente con la forma normal analítica.

Lema 3. La serie de potencias (2.6) que lleva al sistema (2.5) (el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado m), en el sistema (2.7) (el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$) existe y esta únicamente determinada por las siguientes condiciones (en los coeficientes de la serie ξ)

$$\xi_{i0} = 0$$
$$\xi_{i\delta} = \widehat{\zeta_{i\delta}}^{2m}, \tag{2.8}$$

donde las $\zeta_{i\delta}$ son soluciones del sistema (el cual esta dado por las ecuaciones de conjugación de los sistemas (2.5) y (2.7))

$$\delta\zeta_{i\delta} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{i\delta}}{\partial y_j}\Psi_j = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j}\zeta_{j\delta} + \varphi_{i\delta}, \tag{2.9}$$

las cuales son únicas para $\delta \neq 0$.
Entonces

$$\overline{\Psi_i} = \widehat{\varphi_{i0}}^{2m}.$$

Los órdenes de todas las series bajo consideración, satisfacen las siguientes desigualdades :

$$1 \leq ord\Psi_i \leq m < ord\varphi_i$$

$$m+1 \leq ord\xi_i \leq 2m, m+1 \leq ord\zeta_i$$

$$m+1 \leq ord\overline{\Psi_i} \leq 2m < ord\overline{\varphi}_i.$$

La idea de la demostración es primero demostrar la existencia de la serie de potencias, lo cual no se desarrollará aquí. Esta demostración se hace de la misma manera de como se hizo en el teorema 1 del capítulo anterior. La parte 2 es demostrar que $\overline{\Psi_i} = \widehat{\varphi_{i0}}^{2m}$. Esto se hace tomando la ecuación

$\lambda_1 y_1 + \Psi_1 + \overline{\Psi_1} + \overline{\varphi_1} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_j}(\lambda_j y_j + \Psi_j + \overline{\Psi_j} + \overline{\varphi_j}) =$

$\lambda_1 y_1 + \lambda_1 \xi_1 + \Psi_1(Y + \Xi) + \varphi_1(Y + \Xi),$

en la cual se sustituyen los valores de $\Psi_1(Y+\Xi) - \Psi_1(Y)$ y de $\varphi_1(Y+\Xi)$ los cuales son calculados con la fórmula de Taylor. Finalmente, de la ecuación resultante se toman los términos de grado mayor que $m+1$ y menor que $2m$ la cual necesariamente se reduce a $\overline{\Psi_i} = \widehat{\varphi_{i0}}^{2m}$

Demostración. La primera parte de la prueba es análoga a la demostración del teorema de existencia de la serie de potencias (1.2) (ver teorema 1 del capítulo 1).

Para que la serie (2.6) lleve al sistema (2.5) en el sistema (2.7), se necesita que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2) \\ \dot{x_2}(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2) \end{pmatrix}$$

esto es, desarrollando

$$\frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_1}\dot{y_1} + \frac{\partial(y_1+\xi_1)}{\partial y_2}\dot{y_2} = \dot{x_1}(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2)$$

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}\dot{y_1} + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}\dot{y_2} = \dot{x_2}(y_1+\xi_1, y_2+\xi_2),$$

si ahora desarrollamos solo para la primera ecuación, obtenemos

$\lambda_1 y_1 + \Psi_1 + \overline{\Psi_1} + \overline{\varphi_1} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_j}(\lambda_j y_j + \Psi_j + \overline{\Psi_j} + \overline{\varphi_j}) =$

$\lambda_1 y_1 + \lambda_1 \xi_1 + \Psi_1(Y + \Xi) + \varphi_1(Y + \Xi),$

lo cual implica que

$$\overline{\Psi_1}+\overline{\varphi_1}+\sum_{j=1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y_j}(\lambda_j y_j+\Psi_j+\overline{\Psi_j}+\overline{\varphi_j})-\lambda_1\xi_1=$$
$$\Psi_1(Y+\Xi)+\varphi_1(Y+\Xi)-\Psi_1(Y). \qquad (2.10)$$

Por la fórmula de Taylor, se tiene

$$\Psi_1(Y+\Xi)-\Psi_1(Y)=\sum_{j=1}^2\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_j}\xi_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y_j\partial y_k}\xi_j\xi_k+...,$$

donde los términos de grado menor que $m+1$ estan en $\sum\frac{\partial\Psi_1\xi_j}{\partial y_j}$ pues en los demás términos de $\Psi_1(Y+\Xi)-\Psi_1(Y)$ los de menor grado son de grado $2m+2$.

De igual forma por Taylor,

$$\varphi_1(Y+\Xi)=\varphi_1(Y)+\sum_{j=1}^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_j}\xi_j+...,$$

donde $m+m+1\leq ord(\sum_{j=1}^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_j}\xi_j+...)$

Si ahora, de la ecuación (2.10) tomamos la ecuación con términos de grado mayor que $m+1$ y menor que $2m$, se tiene

$$\overline{\Psi_1}+\sum_{j=1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y_j}\widehat{(\lambda_j y_j+\Psi_j)}^{2m}-\lambda_1\xi_1=\sum_{j=1}^2\widehat{\frac{\partial\xi_j\Psi_1}{\partial y_j}}^{2m}+\widehat{\varphi_1(Y)}^{2m}. \qquad (2.11)$$

Si en esta ecuación, sustituimos todos los términos de la forma y_1Y^Q, donde $<Q,\Lambda>=\delta$ y como $\Psi_{10}=\Psi_1$ ya que el sistema (2.6) coincide con la forma normal analítica hasta grado m y $\mathrm{ord}\Psi\leq m$, y como también se tiene que $\overline{\Psi_{10}}=\overline{\Psi_1}$; entonces para $\delta\neq 0$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^2\frac{\partial\xi_{1\delta}}{\partial y_j}\lambda_j y_j-\lambda_1\xi_{1\delta}+\sum_{j=1}^2\widehat{\frac{\partial\xi_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j}^{2m}=\sum_{j=1}^2\widehat{\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_j}\xi_{j\delta}}^{2m}+\widehat{\varphi_{1\delta}}^{2m}. \qquad (2.12)$$

Obsérvese que si $\xi_{1\delta}=y_1Y^Q$ y como $<Q,\Lambda>=\delta$ tomando solo la diferencia

$$\sum_{j=1}^2\frac{\partial\xi_{1\delta}}{\partial y_j}\lambda_j y_j-\lambda_1\xi_{1\delta},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2\frac{\partial y_1Y^Q}{\partial y_j}\lambda_j y_j-\lambda_1y_1Y^Q &= \frac{\partial y_1Y^Q}{\partial y_1}\lambda_1y_1-\frac{\partial y_1Y^Q}{\partial y_2}\lambda_2y_2-\lambda_1y_1Y^Q\\ &= q_1\lambda_1y_1Y^Q+q_2\lambda_2y_1Y^Q\\ &= Y^Qy_1<Q,\Lambda>,\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{j=1}^2\frac{\partial y_1Y^Q}{\partial y_j}\lambda_j y_j-\lambda_1\xi_{1\delta}=\delta\xi_{1\delta},$$

y por lo tanto de lo anterior, y de la ecuación (2.12) obtenemos

$$\delta\xi_{1\delta} + \sum_{j=1}^{2} \widehat{\frac{\partial \xi_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j}^{2m} = \sum_{j=1}^{2} \widehat{\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_j}\xi_{j\delta}}^{2m} + \widehat{\varphi_{1\delta}}^{2m}.$$

La existencia de la solución de este sistema para $m+1 \leq ord\xi_1 \leq 2m$ puede ser probada como se hizo en el teorema 1 de existencia de la serie de potencias (ver capítulo 1). De igual forma se prueba la existencia de la solución de (2.9). Así, los coeficientes de la serie $\zeta_{1\delta}$ dependen solo de los coeficientes de los términos de las series φ_1 y Ψ_1.

Por tanto, $\xi_{1\delta} = \widehat{\zeta_{1\delta}}^{2m}$. Y si para $\delta = 0$ hacemos $\xi_{1\delta} = 0$, entonces la ecuación (2.11), se reduce a

$$\overline{\Psi_1} = \widehat{\varphi_{10}}^{2m}.$$

De igual forma, se tiene que

$$\xi_{2\delta} = \widehat{\zeta_{2\delta}}^{2m}, \quad \overline{\Psi_2} = \widehat{\varphi_{20}}^{2m},$$

y por tanto el lema esta demostrado. $\diamondsuit$

Ejemplo. Considérese el siguiente sistema (este es un caso en el dominio de Siegel)

$\dot{x_1} = 0$

$\dot{x_2} = -x_2 + x_1x_2 + 3{x_1}^2 - 3{x_1}^3,$

el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado 1 (pues para el caso $\Lambda = (0,-1)$, $3{x_1}^2$ es un término no resonante).

Lo que se desea es encontrar una serie de potencias (2.6) tal que lleve a este sistema en un nuevo sistema que coincida con una forma normal analítica hasta grado 2. Por ejemplo, que coincidiera con el sistema (que en este caso es una forma normal analítica de grado 2)

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = -y_2 + y_1y_2.$

Si hacemos $x_1 = y_1$, solo nos falta checar que

$$\frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial(y_2+\xi_2)}{\partial y_2}(-y_2+y_1y_2) = -y_2 - \xi_2 + y_1y_2 + y_1\xi_2 + 3{y_1}^2 - 3{y_1}^3,$$

en el cual desarrollando, obtenemos

$$y_1 y_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} = -\xi_2 + y_1 \xi_2 + 3{y_1}^2 - 3{y_1}^3.$$

Si ξ_2 no depende de y_2, nuestra ecuación se reduce a

$$0 = -\xi_2 + y_1 \xi_2 + 3{y_1}^2 - 3{y_1}^3.$$

Si hacemos $\xi_2 = 3{y_1}^2$, la ecuación se cumple pues

$$0 = -3{y_1}^2 + y_1(3{y_1}^2) + 3{y_1}^2 - 3{y_1}^3.$$

Por lo tanto, la serie de potencias (que en este caso corresponde a una transformación analítica)

$x_1 = y_1$
$x_2 = y_2 + 3{y_1}^2$,

lleva al sistema

$\dot{x_1} = 0$
$\dot{x_2} = -x_2 + x_1 x_2 + 3{x_1}^2 - 3{x_1}^3$,

el cual cumple con las condiciones del teorema, a la forma normal analítica

$\dot{y_1} = 0$
$\dot{y_2} = -y_2 + y_1 y_2$.

Sea $b = \sum_Q b_Q Y^Q$ una serie de potencias en Y. Definimos

$$\overline{|b|} = \sum_Q |b_Q| Y^Q,$$

i.e., las series $\overline{|b|}$ es obtenida de la serie b reemplazando los coeficientes por sus valores absolutos.

La notación

$$\sum_Q b_Q Y^Q \prec \sum_Q d_Q Y^Q,$$

significa que $|b_Q| \leq d_Q$ incluyendo Q con componentes negativas (i.e., la serie d esta mayorando a la serie b). Finalmente, $\overline{|b|}_\rho$ para un real $\rho \geq 0$, denota el valor de las series $\overline{|b|}$ en el punto $y_1 = y_2 = \rho$.

Las siguientes propiedades son obvias :

(1) Si $b \prec d$, entonces $\overline{|b|}_\rho \leq \overline{|d|}_\rho$

(2) Si $b = d \cdot e$, entonces $\overline{|b|} \prec \overline{|d||e|}$

(3) Si $m \leq$ord b y $\rho \leq r \leq 1$, entonces

$$\overline{|b|}_\rho \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \overline{|b|}_r.$$

(4) Si $\overline{|b|}_\rho < \infty$, entonces el radio de convergencia de la serie b es al menos ρ.

(5) Si $m \leq ord\ b$ y $\rho \leq r \leq 1$, entonces

$$\overline{\left|\frac{\partial y}{\partial y_j}\right|}_\rho \leq \frac{m}{\rho}\overline{|b|}_\rho$$

Daremos ahora, un lema que nos servirá para demostrar que la serie ξ tiene radio de convergencia positivo. Este lema será dado en términos de un vector P en lugar del vector Q como hemos venido trabajando.

Lema 4. Si Λ corresponde al caso 1), entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una constante positiva c que depende de Λ y de ϵ tal que

$|P''| < c| < P, \Lambda > |$ para todo $P \in N$, $| < P, \Lambda > | > \epsilon$

Aquí $P'' = (p_{l+1}, ..., p_2)$.

Demostración. Daremos la demostración para los casos $l = 0$ (en el dominio de Poincaré) y para $l = 1$ (en el dominio de Siegel). El caso $l = 2$ es análogo a estos dos.

Supongamos primero que $l = 0$. Sea $P \in N$, como $P'' = (p_{l+1}, ..., p_2)$ entonces $P'' = (p_1, p_2)$, si

$\frac{1}{2}|P''| > 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}$, entonces por las desigualdades dadas por el lema 2, se tiene

$$\begin{aligned} | < P, \Lambda > | &\geq < P'', \overline{M}'' > \geq \mu_1(|P''| - 1) - \mu_2 \\ &\geq \mu_1[|P''| - 1 - \tfrac{\mu_2}{\mu_1}] > \tfrac{1}{2}\mu_1|P''|. \end{aligned}$$

Si $0 < \frac{1}{2}|P''| \leq 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}$, entonces para $| < P, \Lambda > | > \epsilon$ se tiene

$$\frac{| < P, \Lambda > |}{|P''|} > \frac{\epsilon}{2(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1})}.$$

Si hacemos

$$c^{-1} = min\{\frac{1}{2}\mu_1, \frac{1}{2}\epsilon(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1})^{-1}\},$$

se obtiene el lema para el caso $l = 0$.

Supongámos ahora que $l = 1$. Sea $P \in N$, en este caso $P'' = p_2$; si $\frac{1}{2}|P''| > 1 + \frac{\mu_2}{\mu_2}$, entonces de nueva cuenta por las desigualdades dadas por el lema 2 se tiene que

$$\begin{aligned} |< P, \Lambda >| &\geq < P'', \overline{M}'' > \mu_2(|P''| - 1) - \mu_2 \\ &\geq \mu_2[|P''| - 1 - \tfrac{\mu_2}{\mu_2}] > \tfrac{1}{2}\mu_2|P''|. \end{aligned}$$

Si $0 < \frac{1}{2}|P''| \leq 1 + \frac{\mu_2}{\mu_2}$, entonces para $|< P, \Lambda >| > \epsilon$ se tiene

$$\frac{|< P, \Lambda >|}{|P''|} > \frac{\epsilon}{2(2)}.$$

Si hacemos

$$c^{-1} = min\{\frac{1}{2}\mu_2, \frac{1}{4}\epsilon\},$$

se obtiene el lema para el caso $l = 1$. Por lo tanto el lema esta demostrado en general. ◇

Demostraremos ahora un lema que afirma que si la forma normal analítica satisface la condición A, entonces la serie de potencias (2.6) tiene radio de convergencia positivo.

Lema 5. Supóngase que la serie de potencias (2.6) lleva al sistema (2.5) (el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado m), en el sistema (2.7) (el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$) y que la forma normal analítica correspondiente al sistema (2.5)

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= \lambda_1 y_1 + \Psi_1(Y) \\ \dot{y_2} &= \lambda_2 y_2 + \Psi_2(Y), \end{aligned} \tag{2.13}$$

satisface la condición A.
Entonces siempre existen constantes c_1 y c_2 tal que las desigualdades

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \leq \rho < 1 \ , \quad \textstyle\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho < 1 \\ &\textstyle\sum_{i=1}^{2} \overline{|\Psi_i|}_\rho < c_1 \ , \quad \sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j}\right|}_\rho < c_1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

se cumplen y además implican

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho < c_2. \tag{2.15}$$

Demostración. En la parte 1 de la demostración, se demuestra el teorema suponiendo que la siguiente desigualdad se verifica :

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j-\zeta_{1\delta}g_1\prec y_1a\delta\zeta_{1\delta}+c|\delta|\overline{|\zeta_{1\delta}|}(\sum_{j>l}\overline{|g_j|}+|\Lambda|\overline{|a|}) \qquad (2.16).$$

En la parte 2 de la prueba se demuestra dicha igualdad.

PARTE 1. Por hipótesis, sabemos que se cumplen las desigualdades $\frac{1}{2}<\rho\leq 1$, $\sum_{i=1}^{2}\overline{|\Psi_i|}_\rho<c_1$, y como $\Psi_1=y_1g_1$, $\Psi_2=y_2g_2$ entonces $\sum_{i=1}^{2}\overline{|g_i|}_\rho<2c_1$.

Lo cual implica que $|\Lambda'|\overline{|a|}_\rho<2c_1$ pues $g_1=\lambda_1a,...,g_l=\lambda_la$ y donde $\Lambda'=(\lambda_1,...,\lambda_l)$.

Sea $\lambda=|\Lambda'|$, entonces $\overline{|a|}_\rho<2c_1\lambda^{-1}$. Como por el lema 3

$$\delta\zeta_{1\delta}+\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j=\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_j}\zeta_{j\delta}+\varphi_{1\delta},$$

se tiene entonces que

$$\delta\zeta_{1\delta}=-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j+(\zeta_{1\delta}g_1-\zeta_{1\delta}g_1)+\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_j}\zeta_{j\delta}+\varphi_{1\delta},$$

lo cual implica que

$$\begin{array}{rcl}\zeta_{1\delta}&=&-\delta^{-1}(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j-\zeta_{1\delta}g_1)-\delta^{-1}\delta\zeta_{1\delta}g_1+\delta^{-1}(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_j}\zeta_{j\delta}+\varphi_{1\delta})\\ &\prec&\delta^{-1}\Big(c|\delta|\overline{|\zeta_{1\delta}|}(\sum_{j>l}\overline{|g_j|}+|\Lambda|\overline{|a|})\Big)+\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}\overline{|a|}\\ &+&\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}\sum_{i=1}^{2}\overline{|g_i|}+\delta^{-1}\sum_{i,j=1}^{2}\overline{\left|\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_j}\right|}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}+\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}\\ &\prec&c\overline{|\zeta_{1\delta}|}(\sum_{i=1}^{2}\overline{|g_i|}+2|\Lambda|c_1\lambda^{-1})+\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}|2c_1\lambda^{-1}|\\ &+&\epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}\sum_{i=1}^{2}\overline{|g_i|}+\epsilon^{-1}\sum_{i,j=1}^{2}\overline{\left|\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_j}\right|}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}+\epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}.\end{array}$$

La primera desigualdad se cumple por (2.16); la segunda desigualdad se dá pues $|\delta|^{-1}<\epsilon^{-1}$ (esto se dá por el lema 2). Ahora, si sumamos sobre las dos series ($\zeta_{1\delta}$ y $\zeta_{2\delta}$) y como se cumplen $\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}_\rho<1$, $\sum_{i=1}^{2}\overline{|\Psi_i|}_\rho<c_1$ y $\sum_{i,j=1}^{2}\overline{\left|\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_j}\right|}_\rho<c_1$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}_\rho&<&\sum_{i=1}^{2}\overline{|\zeta_i|}_\rho\Big(c(2c_1+|\Lambda|2c_1\lambda^{-1})\\ &+&2c_1\lambda^{-1}+\epsilon^{-1}2c_1+\epsilon^{-1}c_1\Big)+\epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}_\rho,\end{array}$$

si ahora escogemos a c_1 de tal forma que

$$c_1(2c + 2|\Lambda|c\lambda^{-1} + 2\lambda^{-1} + 2\epsilon^{-1}) = \frac{1}{2},$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\zeta_i|}_\rho < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \overline{|\zeta_i|}_\rho + \epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho,$$

lo cual implica

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \overline{|\zeta_i|}_\rho < \epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho,$$

y como $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho < 1$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\zeta_i|}_\rho < \frac{2}{\epsilon},$$

y como por el lema 3

$$\xi_{i\delta} = \widehat{\zeta}_{i\delta}^{2m},$$

entonces $\overline{|\xi_i|} \prec \overline{|\zeta_i|}$, por lo que finalmente si definimos a $c_2 = \frac{2}{\epsilon}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|} < c_2 = \frac{2}{\epsilon},$$

y por tanto, la serie de potencias tiene radio de convergencia positivo. Así, se ha demostrado la primera parte.

PARTE 2. Demostraremos ahora que se cumple la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j - \zeta_{1\delta} g_1 \prec y_1 a\delta\zeta_{1\delta} + c|\delta|\overline{|\zeta_{1\delta}|}(\sum_{j>l} \overline{|g_j|} + |\Lambda|\overline{|a|}). \qquad (2.16)$$

Dicha desigualdad se demostrará en dos partes. En la parte (i) se demostrará la igualdad

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{1\delta}}{\partial y_j}\Psi_j - \zeta_{1\delta} g_1 = y_1 a\delta\zeta_{1\delta} + y_1\sum_{P,R} h_{1P} < P'', \vec{G}_R{}'' > Y^{P+R} ...(i),$$

mientras que en la parte (ii) demostraremos la desigualdad

$$y_1\sum_{P,R} h_{1P} < P'', \vec{G}_R{}'' > Y^{P+R} \prec c|\delta|\overline{|\zeta_{1\delta}|}(\sum_{j>l} \overline{|g_j|} + |\Lambda|\overline{|a|}) ..., (ii).$$

Parte (*i*). Para demostrar esta parte, sea $\zeta_1 = y_1 h_1 = y_1 \sum_Q h_{1Q} Y^Q$ y $\tilde{g}_1 = g_1 - \lambda_1 a = \sum_Q \tilde{g_1}_Q Y^Q$ donde a es la serie de potencias que cumple la condición A en la forma normal analítica.

Si ahora calculamos

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{16}}{\partial y_j}\Psi_j - \zeta_{16} g_1 &= \frac{\partial \zeta_{16}}{\partial y_1}\Psi_1 + \frac{\partial \zeta_{16}}{\partial y_2}\Psi_2 - y_1 h_1 g_1 \\
&= (h_1 + y_1 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_1})(y_1 g_1) + (y_1 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_2})(y_2 g_2) - y_1 h_1 g_1 \\
&= {y_1}^2 g_1 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_1} + y_1 y_2 g_2 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_2} \\
&= y_1 (y_1 g_1 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_1} + y_2 g_2 \tfrac{\partial h_1}{\partial y_2}) \\
&= y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P, G_R > Y^{P+R},
\end{aligned}$$

donde, como se hizo en el teorema 1 del capítulo 1, P representa la potencia en la serie h y R representa la potencia en la serie g_i; con $G_R = (g_{1R}, g_{2R})$. Como $< P, G_R > = < P, \Lambda a_R > + < P, \check{G}_R >$ pues $\check{g}_i = g_i - \lambda_i a$, entonces

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{16}}{\partial y_j}\Psi_j - \zeta_{16} g_1 &= y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P, \Lambda a_R > Y^{P+R} \\
&+ y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P, \check{G}_R > Y^{P+R} \\
&= y_1 a \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P, \Lambda > Y^{P+R} \\
&+ y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P'', \check{G}_R{}'' > Y^{P+R} \\
&= y_1 a \delta \zeta_{16} + y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P'', \check{G}_R{}'' > Y^{P+R},
\end{aligned}$$

pues $\check{G}' = (\check{g}_1, ..., \check{g}_l) = \bar{0}$ y donde $\delta = < P, \Lambda >$. De esta forma, hemos demostrado la igualdad (i).

Parte (*ii*). Para demostrar la desigualdad (ii), nótese que

$$| < P'', \check{G}_R{}'' > | \leq |P''||\check{G}_R{}''|$$

y como $|\check{G}_R{}''| = \sum_{j\,>\,l} |\check{g_{jR}}''|$ entonces se tiene

$$y_1 \sum_{P,\,R} |h_{1P}|| < P'', \check{G}_R{}'' > |Y^{P+R} \prec y_1 \sum_{P} |h_{1P}||P''|Y^P \sum_{j\,>\,l} \sum_{R} |\check{g_{jR}}|Y^R,$$

Ahora, por el lema 2 existe $\epsilon > 0$ tal que $|\delta| > \epsilon$. Por el lema anterior para esta ϵ podemos encontrar c tal que $|P''| < c|\delta|$. Esto nos implica que

$$\begin{aligned}
y_1 \textstyle\sum_P |h_{1P}||P''|Y^P \sum_{j\,>\,l} \sum_R |\check{g_{jR}}|Y^R &\prec c|\delta|\overline{|\zeta_{16}|} \textstyle\sum_{j\,>\,l} \overline{|\check{g}_j|} \\
&\prec c|\delta|\overline{|\zeta_{16}|}(\textstyle\sum_{j\,>\,l} \overline{|g_j|} + |\Lambda|\overline{|a|}),
\end{aligned}$$

(obsérvese que solo en esta última estimación usamos la serie mayorante $\overline{|g_j|}$ la cual esta dada por la forma normal analítica). Y finalmente obtenemos

$$y_1 \textstyle\sum_{P,\,R} h_{1P} < P'', \check{G}_R{}'' > Y^{P+R} \prec c|\delta|\overline{|\zeta_{16}|}(\sum_{j\,>\,l} \overline{|g_j|} + |\Lambda|\overline{|a|})$$

Así, hemos demostrado la desigualdad (ii). Ahora, de las desigualades (i) y (ii) obtenemos la desigualdad

$$\textstyle\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \zeta_{16}}{\partial y_j}\Psi_j - \zeta_{16} g_1 \prec y_1 a \delta \zeta_{16} + c|\delta|\overline{|\zeta_{16}|}(\sum_{j\,>\,l} \overline{|g_j|} + |\Lambda|\overline{|a|}). \qquad (2.16)$$

y así, hemos demostrado la parte 2 y por tanto, se ha demostrado el lema. $\diamond$

Ejemplo. Tomando el mismo sistema y la misma forma normal analítica del ejemplo anterior donde el sistema esta dado por

$\dot{x_1} = 0$

$\dot{x_2} = -x_2 + x_1x_2 + 3{x_1}^2 - 3{x_1}^3,$

y la forma normal analítica esta dada por

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = -y_2 + y_1y_2,$

Supóngase que $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$, entonces mostraremos que las desigualdades se cumplen y por tanto, $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho < c_2$ se cumple

1) $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho = \overline{|\varphi_1|}_\rho + \overline{|\varphi_2|}_\rho = 0 + \overline{|x_1x_2 + 3{x_1}^2 - 3{x_1}^3|}_\rho = |4\rho^2 - 3\rho^3| < 1.$

2) $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\Psi_i|}_\rho = \overline{|\Psi_1|}_\rho + \overline{|\Psi_2|}_\rho = 0 + \overline{|-x_2|}_\rho < c$, con $c \geq 1$.

3) $\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j}\right|}_\rho = \overline{\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\right|}_\rho + \overline{\left|\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_2}\right|}_\rho + \overline{\left|\frac{\partial \Psi_2}{\partial y_1}\right|}_\rho + \overline{\left|\frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2}\right|}_\rho = 0+0+0+\overline{|-1|}_\rho \leq 1 < c_1.$

Necesitamos ver que $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho < c_2$. Si calculamos

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho = \overline{|\xi_1|}_\rho + \overline{|\xi_2|}_\rho = 0 + \overline{|3{y_1}^2|}_\rho = 3\rho^2 < c_2,$$

obtenemos $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho < c_2$ con $c_2 > 3$.

2.5. TEOREMA DE EXISTENCIA DE TRANSFORMACIONES ANALÍTICAS.

Después de haber demostrado el lema anterior, podemos entonces enunciar y demostrar el teorema que garantiza en ciertas condiciones, que existe una serie de potencias la cual corresponde a una transformación analítica.

Teorema. Supóngase que $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ correspondiente al sistema (2.3) satisface la condición W, que la forma normal formal (que corresponde al sistema (2.3)) satisface la condición A , y que las ϕ_i son analíticas en el origen.

Entonces, existe una transformación (2.4) analítica en el origen la cual lleva al sistema (2.3) en una forma normal formal.

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente. La transformación es construida por aproximaciones sucesivas, es decir se toma una forma normal analítica, y un sistema que coincida con la forma normal analítica hasta grado m. Por el lema 3 existe una serie de potencias (2.6) la cual lleva a dicho sistema, en un sistema el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$; por el lema 5, dicha serie de potencias corresponde a una transformación analítica. De nueva cuenta se aplica el lema 3 (ahora al sistema que coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$) y el nuevo sistema coincide con la forma normal analítica hasta grado $4m$; de nueva cuenta, por el lema 5 la transformación es analítica. Se procede así sucesivamente, hasta que el sistema resultante coincida completamente con la forma normal analítica.

La parte 1 de la prueba, consiste en demostrar que en cada paso las desigualdades del lema 5 (nótese que aquí entra en juego la condición A) se cumplen y por tanto en cada paso, la serie de potencias (2.3) tiene radio de convergencia positivo.

En la parte 2, se demuestra que en cada paso de iteración, la ρ con la que se tienen las desigualdades del lema 5 siempre varía entre $\frac{1}{2}$ y 1 y así, todo lo anterior se cumple en cada paso de iteración.

Finalmente, en la parte 3 se demuestra que como cada transformación es analítica y además tiene un radio de convergencia específico, entonces la transformación límite es analítica.

PARTE 1. Por el lema 3 existe una serie de potencias (2.6) que lleva al sistema (2.5) el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado m, (donde $1 \leq ord\Psi_i \leq m$, $\Psi_{i0} = \Psi_i$ y $m+1 \leq ord\varphi_i$) en el sistema (2.7) el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado $2m$. Aquí, $1 \leq ord\Psi_i \leq m$, $m+1 \leq ord\overline{\Psi_i} \leq 2m < ord\overline{\varphi_i}$.

Por el lema 5, se tiene que para el sistema (2.5) se cumplen las desigualdades (2.14) para $m = 2^k$ (donde m denota el grado hasta el cual el sistema dado coincide con la forma normal analítica) lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_\rho < c_2.$$

El primer paso de esta demostración, es tratar de ver que desigualdades análogas a (2.16), se cumplen para el nuevo sistema (2.7). Para ello, sea $r = m^{\frac{-1}{m}}\rho$ y $R = c_2 m^{\frac{-1}{m}}\rho$; como $m+1 \leq ord\xi_i \leq 2m$ entonces por el lema 3 y utilizando la propiedad (3) (ver página 45) y el hecho de que $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho < 1$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}_R < \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m+1} = \left(\frac{c_2 m^{\frac{-1}{m}}\rho}{\rho}\right)^{m+1} < c_2{}^{m+1}m^{-2-\frac{2}{m}} < m^{-2}, \quad (2.17)$$

de igual forma se obtiene

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{|\xi_i|}_R < m^{-2}, \quad (2.18)$$

Ahora, mostraremos que para $|y_i| < R$ y $m \geq 3$ se cumple que para alguna $\theta \in [0,1]$ entonces $|y_i + \theta\xi_i| < r$, que por la desigualdad del triángulo es análogo a demostrar que $R + \overline{|\xi_i|}_R < r$. Pero

$$R + \overline{|\xi_i|}_R = c_2 m^{\frac{-1}{m}}\rho + m^{-2} < \rho m^{\frac{-2}{m}} + m^{-2-\frac{2}{m}}.$$

Lo que tenemos que demostrar entonces, es que

$$\rho m^{\frac{-2}{m}} + m^{-2-\frac{2}{m}} < r = \rho m^{\frac{-1}{m}},$$

esto es

$$\frac{m^{-2}}{m^{\frac{1}{m}} - 1} < \rho,$$

y como

$$\frac{m^{-2}}{m^{\frac{1}{m}} - 1} = \frac{m^{-2}}{exp(\frac{\ln m}{m}) - 1} < \frac{m^{-2}}{\frac{\ln m}{m}} < \frac{1}{2} \leq \rho,$$

se obtiene que efectivamente

$$|y_i + \theta\xi_i| < r.$$

Usando este hecho, la propiedad 3 (ver página 45), y como $\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}_\rho < 1$ y $m < ord\varphi_i$; se obtiene la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i(Y+\Xi)|}_R < \sum_{i=1}^{2}\overline{|\varphi_i|}_r < \left(\frac{r}{\rho}\right)^{m+1} < m^{-1}. \quad (2.19)$$

Por otro lado como $ord\xi_i \leq 2m$ y $\sum_{i=1}^{2}\overline{|\xi_i|}_R < m^{-2}$ y utilizando la propiedad 5 (ver pagina 45) se tiene entonces la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}\right|}_R < \frac{2m}{R} \sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_R < \frac{2m^{-1}}{\rho} \leq 4m^{-1}. \qquad (2.20)$$

Análogamente , como $\overline{\Psi_i} = \widehat{\varphi_{i0}}^{2m}$ con $m+1 \leq ord\overline{\Psi_i} \leq 2m$ y $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_R < m^{-2}$, se tiene la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\Psi}_i|}_R < \sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_R < m^{-2} < 8m^{-1}. \qquad (2.21)$$

Usando lo anterior y la propiedad 5 (ver página 45) se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial y_j}\right|}_R < \frac{2m}{R} \sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_R < \frac{2m^{-1}}{\rho} \leq 4m^{-1}.$$

de donde finalmente obtenemos la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial y_j}\right|}_R < 8m^{-1}. \qquad (2.22)$$

Por último, de la demostración del lema 3, se tiene

$\overline{\Psi_i} + \overline{\varphi_i} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}(\lambda_j y_j + \Psi_j + \overline{\Psi_j} + \overline{\varphi_j}) - \lambda_i \xi_i =$
$\Psi_i(Y+\Xi) + \varphi_i(Y+\Xi) - \Psi_i(Y)$,

de donde

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_i} \quad &= \quad -\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}\overline{\varphi_i} - \overline{\Psi_i} - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}(\lambda_j y_j + \Psi_j + \overline{\Psi_j}) \\ &+ \quad \lambda_i \xi_i + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \xi_j (y_1 + \theta_1 \xi_1, y_2 + \theta_2 \xi_2) + \varphi_i(Y+\Xi), \end{aligned}$$

y por tanto, sumando sobre las dos series φ_i y como se cumplen las desigualdades (2.17),...,(2.22) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\varphi}_i|}_R < 4m^{-1} \sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\varphi}_i|}_R + m^{-1}(6 + 5c_1 + 5|\Lambda|),$$

lo cual implica si $m > 10 + 5c_1 + 5|\Lambda|$, que

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\varphi}_i|}_R < \frac{m^{-1}(6 + 5c_1 + 5|\Lambda|)}{1 - 4m^{-1}} = \frac{6 + 5c_1 + 5|\Lambda|}{m-4} < 1. \qquad (2.23)$$

que junto con las hipótesis

$\frac{1}{2} \leq \rho < 1, \quad \sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_\rho < 1$

$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\Psi_i|}_\rho < c_1 - \frac{16}{m}, \quad \sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j}\right|}_\rho < c_1 - \frac{16}{m},$

implican para

$$m = 2^k > max\{10 + 5c_1 + 5|\Lambda|, \frac{16}{c_1}, 3\},$$

que se cumplan todas las desigualdades siguientes (las cuales fueron demostradas anteriormente)

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_R < m^{-2} < c_2, \quad \sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\varphi}_i|}_R \leq 1$$
$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\Psi_i + \tilde{\Psi}_i|}_R < \sum_{i=1}^{2} \overline{|\Psi_i|}_R + \sum_{i=1}^{2} \overline{|\tilde{\Psi}_i|}_R < c_1 - \frac{16}{m} + \frac{8}{m} = c_1 - \frac{16}{m'},$$
$$\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial(\Psi_i+\tilde{\Psi}_i)}{\partial y_j}\right|}_R < \sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_j}\right|}_R + \sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial\tilde{\Psi}_i}{\partial y_j}\right|}_R < c_1 - \frac{16}{m'},$$

que corresponden al nuevo sistema (2.7). Así, se ha demostrado la parte 1.

PARTE 2. El siguiente paso de la demostración, consiste en mostrar que en cada iteración, la nueva ρ (nótese que en lo anterior el papel de la ρ lo jugaba la R) siempre varía entre $\frac{1}{2}$ y 1; y así todo lo anterior se cumple en cada paso de iteración.

Después de cada paso, el valor de m se duplica ($m = 2^k$) y la nueva ρ llamada aquí R, decrece $c_2 m^{\frac{-2}{m}}$ veces, pues $R = c_2 m^{\frac{-1}{m}} \rho$; por lo tanto, lo único que tenemos que demostrar es que siempre se tiene que $\rho > \frac{1}{2}$.
Sea $m_k = 2^k$ y $\gamma_k = (c_2)^{\frac{-1}{m_k}}$, entonces es fácil verificar que

$$\rho_{k+1} = \gamma_k m_k^{\frac{-2}{m_k}} \rho_k,$$

no es otra cosa más que

$$\rho_{k+1} = \rho_s \prod_{s \leq i \leq k} \gamma_i m_i^{\frac{-2}{m_i}},$$

por lo que para $k > s$ se tiene

$$\rho_k > \rho_s \prod_{s \leq i \leq k} \gamma_i m_i^{\frac{-2}{m_i}}.$$

Afirmamos que el producto

$$\prod_{1 \leq i < \infty} \gamma_i m_i^{\frac{-2}{m_i}},$$

converge. En efecto, si a este producto le aplicamos logaritmo,se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \gamma_k - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln m_k}{m_k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln c_2}{m_k} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ln 2}{2^k}$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln c_2}{2^k} - 2\ln 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k},$$

y como estas dos series convergen, entonces el producto

$$\prod_{s\leq i<\infty} \gamma_i m_i^{\frac{-2}{m_i}} > 0,$$

converge. Por lo tanto existe s tal que

$$\prod_{s\leq i<\infty} \gamma_i m_i^{\frac{-2}{m_i}} > \frac{1}{2},$$

de donde $\rho_k > \frac{c_1}{2}$ para $k > s$ y por tanto siempre se tiene que $\rho > \frac{1}{2}$.

En la demostración del lema 5, demostramos la existencia de la constante c_1 para las desigualdades dadas por (2.14) pero nunca demostramos que siempre se puede cumplir $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_1 < 1$. En este proceso haremos consideraciones a las otras desigualdades dadas por (2.14), lo cual será mostrado detalladamente. Para esto, sea $m_0 = 2^{k_0}$ de tal forma que

$$m_o > max\{10 + 5c_1 + 5|\Lambda|, \frac{16}{c_1}, 3, 2^s\},$$

Usando el lema 3, reducimos el sistema (2.3) por medio de un número finito de iteraciones, al sistema (2.5) con $m = m_0$. Ya que en cada paso de iteración la transformación correspondiente esta definida por polinomios, la transformación de (2.3) en (2.5) es analítica. Y como el sistema inicial es analítico por hipótesis del teorema, entonces el sistema (2.5) es analítico en el origen.

Ahora como por definición la matríz de la parte lineal de una forma normal formal es de Jordan, entonces

$\Psi_1 = \eta_1$

$\Psi_2 = \sigma x_1 + \eta_2,$

donde η_i no contiene términos lineales ni constantes. Si ahora en (2.5) sustituimos $x_i = \beta u_i$, obtenemos

$\dot{u_1} = \lambda_1 u_1 + ...$

$\dot{u_2} = \lambda_2 u_2 + \beta^{-1}\sigma u_1 + ...$

Como $\sigma = 0$ ó $\sigma = 1$, sea β tal que

$$\beta^{-1} < \frac{c_1 - \frac{16}{m}}{2}.$$

Ahora sustituímos $u_i = \delta v_i$, donde $\delta \leq 1$ es escogido de tal forma que en el sistema resultante se tenga

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_1 < 1, \quad \sum_{i=1}^{2} \overline{|\eta_i|}_1 < \frac{c_1 - \frac{16}{m}}{2}, \quad \sum_{i,j=1}^{2} \overline{\left|\frac{\partial \eta_i}{\partial y_j}\right|}_1 < \frac{c_1 - \frac{16}{m}}{2},$$

Esto siempre se puede hacer, porque η_i y φ_i no contienen constantes ni términos lineales. Las últimas dos desigualdades garantizan que no se afectan las desigualdades dadas por (2.14) en este proceso. Entonces para este sistema, las desigualdades se cumplen para $\rho = 1$ y por tanto siempre se cumple $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\varphi_i|}_1 < 1$, que es lo que se quería demostrar.

Por tanto, ya que siempre $\frac{1}{2} < \rho_k \leq 1$, las desigualdades se cumplen en cada paso de iteración. Entonces, la parte 2 ha sido demostrada.

PARTE 3. El último paso de esta demostración consiste en probar la convergencia de las aproximaciones sucesivas.

Para $m = 2^k$, la serie de potencias (2.6) será denotada como sigue

$$U_k : Y \longrightarrow X.$$

Si $|y_i| < \rho_{k+1}$, y como $\sum_{i=1}^{2} \overline{|\xi_i|}_R < m^{-2}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i| < {m_k}^{-2}.$$

Supongamos por un momento que un sistema (expresado en variables x_1, x_2) es llevado a una forma normal analítica (expresada en variables y_1, y_2) por 2 iteraciones, donde el sistema "intermedio" esta dado en términos de z_1, z_2. Por la definición de U_k y por lo visto anteriormente, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{2} |z_i - x_i| < {m_{k_0}}^{-2}, \qquad \sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i| < {m_{k_1}}^{-2}, \qquad (2.24)$$

Si se tiene que $y_i < \frac{1}{2}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i| &= \sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i + z_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{2} (|z_i - x_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{2} |z_i - x_i| + \sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i| < {m_{k_0}}^{-2} + {m_{k_1}}^{-2}, \end{aligned}$$

la última desigualdad se dá por (2.24). Con esta idea, podemos entonces dar el argumento en general. Si hacemos la composición

$$V_k = U_k \circ \ldots \circ U_{k_0},$$

entonces el mapeo $V_k : Y \longrightarrow X$ es tal que para $|y_i| < \frac{1}{2}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i| < \sum_{j=k_0}^{k} {m_j}^{-2} = \sum_{j=k_0}^{k} (2^j)^{-2},$$

y como $\sum_{j=k_0}^{k} m_j^{-2}$ converge entonces la sucesión de mapeos V_k también converge para $|y_i| < \frac{1}{2}$

Así la transformación límite es analítica en el origen. Además esta transformación fue construida de tal manera que transformara al sistema (2.5) en una forma normal analítica (con m=m_0).

Y como dicho sistema fue obtenido del sistema (2.3) por una transformación analítica, entonces la composición de estas transformaciones es analítica en el origen y transforma a (2.3) en una forma normal analítica. Así, el teorema esta demostrado. ◇

Ejemplo 1. Considérese el siguiente sistema :

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 + 3{x_1}^2 + 3{x_1}^3 + {x_1}^2 x_2 - 9{x_1}^4 - 6{x_1}^5,$$

el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado 1 (el término $3{x_1}^2$ es no resonante). Por el lema 3 existe una transformación que lleva a este sistema en el sistema

$$\dot{z}_1 = 0$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 + z_1 z_2 + 6{z_1}^3 + {z_1}^2 z_2 - 6{z_1}^4 - 6{z_1}^5,$$

el cual coincide con la forma normal analítica hasta grado 2 (aquí el término $6{z_1}^3$ es no resonante). Tal transformación es

$$x_1 = z_1$$
$$x_2 = z_2 + 3{z_1}^2,$$

la cual es analítica. Si ahora aplicamos nuevamente el lema 3 al sistema

$$\dot{z}_1 = 0$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 + z_1 z_2 + 6{z_1}^3 + {z_1}^2 z_2 - 6{z_1}^4 - 6{z_1}^5,$$

el sistema resultante debe coincidir con la forma normal analítica hasta grado 4. Si en particular le aplicamos la transformación analítica

$$z_1 = y_1$$
$$z_2 = y_2 + 6{y_1}^3,$$

obtenemos la forma normal analítica de grado 3

$$\dot{y}_1 = 0$$
$$\dot{y}_2 = -y_2 + y_1 y_2 + {y_1}^2 y_2.$$

Por lo tanto, si al sistema

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 + 3{x_1}^2 + 3{x_1}^3 + {x_1}^2 x_2 - 9{x_1}^4 - 6{x_1}^5,$$

le aplicamos la transformación analítica

$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = y_2 + 3{y_1}^2 + 6{y_1}^3,$$

obtenemos la forma normal analítica

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = -y_2 + y_1 y_2 + {y_1}^2 y_2.$

Ejemplo 2. La transformación

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + {y_1}^2 + {y_1}^3 + {y_1}^4,$

que lleva al sistema

$\dot{x_1} = x_1$

$\dot{x_2} = x_2 + {x_1}^2 + 2{x_1}^3 + 3{x_1}^4$, en la forma normal analítica

$$\dot{y_1} = y_1$$

$$\dot{y_2} = y_2.$$

es analítica.

Ejemplo 3. La transformación

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + 3{y_1}^2,$

que lleva al sistema

$\dot{x_1} = 0$

$\dot{x_2} = -x_2 + x_1 x_2 + 3{x_1}^2 - 3{x_1}^3,$

en la forma normal analítica

$\dot{y_1} = 0$

$\dot{y_2} = -y_2 + y_1 y_2.$

es analítica.

Ejemplo 4. La transformación

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + \frac{4}{5}{y_1}^2 + \frac{3}{4}{y_1}^3,$

que lleva al sistema

$\dot{x_1} = x_1$

$\dot{x_2} = -x_2 + 4x_1 + 3{x_1}^3,$

en la forma normal analítica

$$\dot{y_1} = y_1$$

$$\dot{y_2} = -y_2.$$

es analítica.

APÉNDICE.

Este apéndice, contiene algunos resultados de la teoría clásica de formas normales. Esto, con el fin de contextualizar esta tesis con los primeros resultados de esta teoría obtenidos por Dulac, Poincaré, Siegel, etc. (ver Arnold [2]).

En el estudio de la normalización de sistemas analíticos, se distinguen dos casos sobre los valores propios de la parte lineal del campo :

a) Cuando el cero no pertenece a la envolvente convexa de los valores propios, estos se encuentran en el dominio de Poincaré.

b) Cuando el cero pertenece a la envolvente convexa de los valores propios, estos se encuentran en el dominio de Siegel.

El primer resultado importante sobre normalización analítica, es el teorema de linealización de Poincaré :

Teorema. Si los valores propios son no resonantes y están en el dominio de Poincaré, entonces existe una transformación analítica que lleva al sistema analítico

$$\dot{X} = AX + ...,$$

en la forma normal

$$\dot{X} = AX.$$

Esto es, cuando un sistema cumple con las hipótesis del teorema, entonces puede ser linealizado. En la demostración de este teorema (ver Arnold [2]) la cual resulta constructiva, se vé que si los términos del campo X son no resonantes, pueden ser eliminados por una transformación analítica. Dicha demostración se divide en 2 partes: una formal y una analítica.

En la parte formal, a partir de la ecuación $d\Phi X \Phi^{-1}$ se obtiene un difeomorfismo Φ^k el cual anula al k-ésimo término. Dicho difeomorfismo, esta definido por la ecuación homológica

$$L_A \Phi^k = -X^k,$$

la cual se resuelve cuando L_A es invertible (aquí entra el hecho de que los valores propios sean no resonantes).

En la parte analítica, se demuestra que el difeomorfismo formal

$$\Phi = \lim_{k \to \infty} \Phi^k$$

construído en la parte anterior de la demostración, es analítico.

Para demostrar esto, primero se propone un campo vectorial Q cuyo difeomorfismo asociado mayora al difeomorfismo asociado al campo X; dicho campo Q es escogido de tal forma que su difeomorfismo este dado por una serie geométrica y así, poder garantizar su convergencia.

Despues, se encuentra la solución analítica que resulta de aplicar Φ al campo Q, y entonces, se demuestra que cada término de la expansión de Taylor del difeomorfismo asociado a la linealización de X está acotado por el término correspondiente de la expansión de Taylor del difeomorfismo asociado a la línealización de Q (aquí se utiliza el hecho de que los valores propios estan en el dominio de Poincaré).

La definición de resonancia a la cual se refiere este teorema, está dada por

$$\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_i(p_i - 1) + \ldots + \lambda_n p_n = 0$$

donde $\sum p_j \geq 2$ con p_j positivo. Obsérvese que esta definición es la misma que la definición dada en el capítulo 1.

Nótese también, que la forma normal lineal es una expresión con un número menor de términos (y en ese sentido, es una expresión más simple).

Supongamos ahora, que en el campo X existen resonancias, entonces, la forma normal no puede ser lineal (ver teorema 1 del capítulo 1). Pero dicha forma normal puede ser llevada a una forma polinomial. En la teoría clásica lo anterior está dado por el teorema de Poincaré-Dulac :

Teorema. Si los valores propios estan en el dominio de Poincaré entonces existe una transformación analítica que lleva al sistema analítico

$$\dot{X} = AX + W(X) + \ldots,$$

en la forma normal analítica

$$\dot{X} = AX + W(X),$$

donde $W(X)$ contiene solo un número finito de términos resonantes.

La demostración de este teorema, es análoga a la demostración del teorema anterior, con la salvedad de que los términos resonantes no pueden ser eliminados.

Finalmente, de acuerdo a la clasificación de formas normales que se dió en la sección 1.4., diremos cuales tienen sus valores propios en el dominio de Poincaré y cuales tienen, sus valores propios en el dominio de Siegel.

a) $\lambda = u + iv$ con $v \neq 0$. En este caso, la forma normal corresponde a valores propios en el dominio de Poincaré.

b) $\lambda > 0$. Aquí también, la forma normal corresponde a valores propios en el domino de Poincaré.

c) $\lambda = 0$. En este caso, la forma normal corresponde a valores propios en el dominio de Siegel.

d) $\lambda < 0$. Aquí también, la forma normal corresponde a valores propios en el domino de Siegel.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arnold, V.I.: *Ordinary Differential Equations.* MIT Press 1974.

[2] Arnold, V.I.: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag 1988.

[3] Bruno, A.: *The Analytical Form of Differential Equations.* Trans. Mosc. Math. Soc., **26**, pp. 199-239 1972.

[4] Bruno, A.: *Local Methods in Nonlinear Differential Equations.* Springer-Verlag 1989.

[5] Dulac, H.: *Solutions D'un Systèm D'équations Différentiells Dans Le Voisinage De Valeurs Singulières.* Bull. Soc. Math. France, **51**, pp. 324-383.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
U.N.A.M., México, D.F., 04510, México.
email: mmhe@minervaux.fciencias.unam.mx