



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**

MODELOS ESTADÍSTICOS DEL IBNR

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
ACTUARIO

PRESENTA

LUIS MANUEL TERRONES AYALA

ASESOR: ACT. MAHIL HERRERA MALDONADO

ACATLÁN, ESTADO DE MÉXICO NOVIEMBRE del 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A mis padres y hermano:

*CONCEPCIÓN AYALA MACÍAS
MANUEL TERRONES TAPIÁ
ANTONIO TERRONES AYALA*

A un buen amigo:

MAHIL HERRERA MALDONADO

Y a la doctora:

CLARA GARZA HUME

Agradecimientos

Gracias a Dios pase el inglés.

De la misma manera a la familia Terrones y Ayala, especialmente a mis abuelas Lucina y Carmen.

Por apoyarme para seguir estudiando la maestría en Ciencias Matemáticas y su confianza para que sea profesor, doy gracias a Mahil y a los profesores:

FÍS. MAT. Jorge Luis Suárez Madariaga

Por Confiar en mi persona y apoyarme

MTRO. Víctor Manuel Ulloa Arellano

Por Ayudarme a dar el salto como profesor en Actuaría

ACT. Miguel Ángel Sánchez Barquin

Por ser buen profesor y amigo

LIC. Christian Carlos Delgado Elizondo

Por ser buena persona

Por ser atenta conmigo doy gracias a mi tutora de maestría, la doctora Clara Garza Hume investigadora del IIMAS.

Por su noble labor doy las gracias a mi Universidad y a los profesores: Alan Evaristo e Iván Mejía.

Y Finalmente, por su amistad doy las gracias a la base canónica, necesariamente a mis amigos: alejandra, tona, liz, roberto, julio, amigorro, amigorruto, sergio, choforo, grecia, jendi, erika, tere y claudia.

*No conozco hecho más alentador
que el de la incuestionable capacidad del hombre
para elevar su vida mediante un esfuerzo consciente.*

HENRY DAVID THOREAU

Modelos Estadísticos del IBNR

Luis Manuel Terrones Ayala

Contenido

1. El Concepto de las Técnicas del IBNR	4
1.1. Conceptos de siniestralidad en el seguro y criterios para asegurar	4
1.2. El Concepto y diferentes aspectos del IBNR	6
1.3. Naturaleza de los sucesos en los que interviene los modelos IBNR	8
2. El Camino del Triángulo	10
2.1. El Camino del Triángulo de Verbeek	10
2.2. Distinción entre modelos y aspectos teóricos del IBNR	14
2.3. El Proceso Poisson	15
2.3.1. Proceso Poisson Homogéneo	17
2.3.2. Proceso Poisson no Homogéneo	20
3. Técnicas del IBNR	24
3.1. Métodos de Suavización	24
3.1.1. Método de la Cadena Escalón en el enfoque estocástico	24
3.1.2. Método de la Cadena Escalón	27
3.1.3. Método de Variación de la Cadena Escalón	29
3.1.4. Método de Separación	31
3.1.4.1. Método Aritmético de Separación	32
3.1.4.2. Método Geométrico de Separación	32
3.1.5. Método de suavización mecánica	33
3.1.6. Método de Mínimos Cuadrados De Vyllder	36
3.2. Métodos Estadísticos	37
3.2.1. Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios	37
3.2.2. El Modelo de Regresión "Poisson"	39
3.3. Modelos de Credibilidad IBNR	41
3.3.1. Modelo de la teoría de la Credibilidad de Straub	43
3.3.2. Modelo de la teoría de la Credibilidad de Mack	48
3.4. Criterio de selección de los modelos IBNR	55
4. Aplicaciones de las Técnicas del IBNR	59
4.1. Cálculo de la Reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados	61
4.2. Valores Negativos en la realización del Triángulo	64
4.3. El Seguro de Crédito	65
4.3.1. Modelo Crediticio de Jarrow Turnbull	77
4.4. Reserva Pérdida	81
Contenido	1
Introducción	2
Conclusiones	82
Índice de Diagramas y cuadros	84
Bibliografía	85
Índice Alfabético	86

Introducción

Las técnicas del IBNR¹ son modelos actuariales utilizados como una herramienta necesaria para el pronóstico de siniestros no reportados en el año de origen, pero en años posteriores a los acontecimientos reclamados, dichas técnicas son expuestas en el tercer capítulo, las cuales se dividen en tres categorías: estadístico, suavización y modelos de la teoría de la Credibilidad, cada categoría es diferenciada por su naturaleza.

El término IBNR es descrito en el estricto sentido como las reclamaciones que no son reportadas en el momento del incidente. La principal aplicación de las técnicas del IBNR reside en el diseño de la Reserva de Siniestros Ocurredos y No Reportados (SONR).

El presente trabajo tiene como objetivo exponer modelos del IBNR así como ejemplificar la utilidad de dichas técnicas particularmente en el Seguro de Crédito.

El analista tiene la decisión de escoger la técnica más eficiente acorde a la naturaleza del proceso de las reclamaciones. Las técnicas del IBNR no necesariamente se utilizan para resolver problemas de SONR, si no que también, para todos aquellos problemas en donde surge un determinado patrón de desarrollo, por ejemplo, el pronóstico del coeficiente de actividad laboral después de la edad normal de retiro.

Cabe señalar que en el ejercicio profesional en México no es usual la aplicación de estos modelos debido al alto costo de la licencia del programa LORE (**loss reserving**) y el desconocimiento existencial de las técnicas del IBNR, por lo que, se realizan sobrestimaciones para el cálculo de las reservas.

¹ La abreviatura IBNR representa la contracción de las palabras: **Incurred But Not Reported**.

El presente trabajo muestra diversos enfoques del IBNR, desde mi punto de vista las técnicas más importantes conforme a cada supuesto. La estructura de este trabajo queda determinada de la siguiente manera:

- **Capítulo 1.** El Concepto de las Técnicas del IBNR, dicho capítulo define conceptos básicos del IBNR;
- **Capítulo 2.** El camino del Triángulo, este capítulo explica el escenario de riesgo en donde intervienen los modelos del IBNR como herramienta de pronóstico, además expresa como surge esta metodología de forma teórica a través del reaseguro. Verbeek fue el precursor de los modelos del IBNR en el año de 1972;
- **Capítulo 3.** Técnicas del IBNR, dicho capítulo esta diseñado para mostrar diversos modelos del IBNR objetivo de este trabajo, y finalmente;
- **Capítulo 4.** Aplicaciones de las Técnicas del IBNR, este capítulo ejemplifica situaciones en los que intervienen modelos del IBNR.

Es necesario que el lector posea conocimientos de inferencia estadística, probabilidad y conceptos básicos de seguros, de ahí que, la temática de este trabajo este orientada a los modelos estadísticos como una herramienta indispensable dentro de los seguros, en particular del IBNR, cualquier sugerencia favor de mandarme su comentario en la dirección electrónica luist002000@yahoo.com.mx, por su comentario gracias.

Luis Manuel Terrones Ayala
UNAM, FES ACATLÁN
Estado de México 03/03/2007.

Capítulo 1

1. El Concepto de las Técnicas del IBNR

1.1. Conceptos de siniestralidad en el seguro y criterios para asegurar.

En primer lugar, se enuncian algunos conceptos de que, en la cuestión de seguros, siniestro significa:

- Acontecimiento determinado que, cuando tiene lugar, obliga a una empresa aseguradora a pagar la indemnización pactada en una póliza de seguro ²;
- Siniestro es cuando se presenta el riesgo asegurado en la póliza y produce daños. Su pago está garantizado hasta el monto determinado en dicha póliza;
- Evento que actualiza la responsabilidad del asegurador.

La relevancia de hoy en día en el estudio de la siniestralidad reside en comparar la siniestralidad ocurrida versus la esperada, a través de las notas técnicas suscitadas en ramos de pensiones, vida, fianzas, accidentes, gastos médicos, riesgos crediticios y seguro de daños.

En diversas situaciones, los siniestros ocurridos muestran un patrón en el que existen fluctuaciones mínimas, lo que indicaría que atrás de todo ello hay un mecanismo subyacente que da lugar a una tendencia en los resultados.

El mecanismo subyacente es de naturaleza estocástica, cuya característica esencial es el de preservar un error bien comportado, por otra parte, se podrá estimar el monto de una reclamación individual y el tiempo entre reclamaciones, utilizando las frecuencias de los valores que se presentan.

² Póliza: contrato que consta entre los derechos y obligaciones entre asegurado y aseguradora, las principales características son:

Bilateral, oneroso, aleatorio, solemne, buena fe, condicional, de ejecución continuada y con el objetivo principal del asegurador que es el de asumir el riesgo del asegurado, mediante el pago de una prima.

Desde un punto de vista técnico/jurídico, las obligaciones de las aseguradoras, convenidas en pólizas de seguro, deben originarse por “los acontecimientos que presenten el carácter de riesgo cuyas consecuencias se hayan asegurado...”, tal cual se establece en el artículo 59³ de la Ley Sobre Contrato de Seguro.

Para comprender lo antes mencionado, se considera al Riesgo como probabilidad de pérdida (incertidumbre de no saber cuando ocurrirá la pérdida) ó bien como aquella eventualidad que de ocurrir traerá consecuencias adversas. La diferencia entre riesgo y siniestro, es de orden temporal, pues mientras el riesgo es mera posibilidad, el siniestro es una realidad.

El estudio de la siniestralidad esperada en los seguros, tiene como finalidad en la nota técnica el diseño de la prima, aunado con otros factores como son los gastos de administración y de adquisición. En el presente trabajo se estudiará siniestros ocurridos en cierto periodo y no reportados, pero en años posteriores reclamados.

La empresa aseguradora debe de tener en cuenta diversos discernimientos para asegurar riesgos, dichos criterios ayudan al asegurador a reducir probables pérdidas de determinados acontecimientos que desde un principio no debieron de ser asegurados. Se enuncian las siguientes condiciones para asegurar:

1. Gran número de exposiciones homogéneas similares;
2. La posible pérdida debe ser definida y medible (cuantificable);
3. La pérdida debe ser por causas accidentales o fortuitas;
4. La probable pérdida debe ser significativa;
5. Exposición catastrófica mínima;
6. Factibilidad económica.

³ Artículo 59 de la Ley Sobre el Contrato de Seguro “La empresa aseguradora responderá de todos los acontecimientos que presenten el carácter del riesgo cuyas consecuencias se hayan asegurado, a menos que el contrato excluya de una manera precisa determinados acontecimientos.”.

1.2. El Concepto y diferentes aspectos del IBNR.

Al momento de adquirir una Póliza de seguro queda estipulado el plazo de vencimiento del mismo, comúnmente el siniestro es reportado al momento de ocurrir el evento adverso, contrario a lo anterior nuestro objetivo es pronosticar siniestros que no fueron reportados en el año de origen pero en años posteriores a los acontecimientos reclamados.

Este tipo de reclamaciones provocan pérdidas en los portafolios de inversión al término del año financiero, al momento de no considerarlo como un factor de riesgo y por ende no haber generado una reserva especializada para este tipo de reclamos, para tales situaciones la prima cobrada es insuficiente, por lo tanto, existe pérdida en los estados financieros de las empresas Aseguradoras.

Este patrón ocurre con frecuencia en el seguro de crédito, se toma como referencia los clientes de un Banco que han dejado ó dejaran de pagar el financiamiento contraído durante cierto periodo, en esta circunstancia el reclamo del Seguro de Crédito del Banco hacia la Empresa Aseguradora será posterior al año en el que verdaderamente debió de reportarse.

Existen distintas técnicas para pronosticar dichos eventos, las cuales se llamarán como Técnicas del IBNR, destacando los Modelos estadísticos, suavización y de Credibilidad, dichos modelos pueden aplicarse a muy variados casos de reclamaciones y siniestros.

La importancia de estas metodologías reside en conocer el tamaño de la pérdida, para poder diseñar primas y finalmente generar reservas SONR, evitando la ruina financiera.

Es importante que el analista tome una decisión para la selección del método IBNR, acorde a la naturaleza del problema e hipótesis del modelo. Eso se debe a que todos los métodos de IBNR tienen implícitamente determinadas hipótesis que justifican al mismo y por lo tanto, el especialista tiene que elegir el método que más se ajuste al problema.

Los modelos IBNR surgen a través de dos facetas, la primera se define como el modelo IBNFR (**Incurred But Not Fully Reported**) y la segunda denominada como IBNYR (**Incurred But Not Yet Reported**), ambas situaciones tienen como característica esencial la de presentar escenarios semejantes, en donde las reclamaciones no fueron pagadas en el periodo correspondiente de ocurrencia. La distinción entre IBNFR y el IBNYR es:

- En el IBNFR la existencia de este evento (siniestro) es conocida, pero el pago del seguro es incompleto, para ilustrar lo anterior se considera periodos largos de tratamiento de alguna enfermedad ó rehabilitación por accidente.
- El IBNYR es un evento que ocurrió en un intervalo establecido y no se conoce hasta tiempo después, porque es consecuencia de retrasos ocasionados por problemas administrativos ó tal vez por el tipo de riesgo cubierto, por ejemplo, los riesgos profesionales de haber contraído alguna enfermedad específica.

Ambas situaciones conforman el concepto del IBNR, por otro lado, se analiza las experiencias laborales de los Notarios en los siguientes encisos:

- a. Considerar el caso en el que ocurre un siniestro cubierto por la póliza de seguros y ha sido notificado al Notario, por ende la dimensión de la pérdida podrá ser valuada, en consecuencia se tomará una decisión para acordar el tamaño de la pérdida en el Tribunal de Justicia, transcurrirán años antes de tomar la decisión final. El IBNFR modelará dichas circunstancias para poder generar reservas.
- b. En ciertos casos, ocurre la reclamación del siniestro entre 10 a 20 años después de la ocurrencia del mismo, la prima pagada generó reservas, dicho suceso produce el segundo tipo de IBNR llamado reservas del IBNYR.

- c. En algunos contratos de seguros es posible la cancelación del mismo por razón de muerte ó simplemente por expirar la cobertura, pero las reclamaciones no reportadas en el año de origen están cubiertas en determinado periodo. Acorde a lo anterior se construyen las reservas IBNYR para este tipo de reclamaciones.

Las problemáticas anteriores podrán resolverse utilizando las técnicas del IBNR, el término IBNR es descrito en el estricto sentido como las reclamaciones que no son reportadas en el momento del incidente, sin embargo la definición del IBNR no incluye el concepto de RBNS (Reported But Not Settled), término definido para las reclamaciones no cubiertas en la póliza.

1.3. Naturaleza de los sucesos en los que interviene los modelos IBNR.

Las técnicas del IBNR no necesariamente se utilizan para resolver problemas de reservas ocurridas y pendientes de pago, sino que también para todos aquellos problemas en donde surge un determinado patrón de desarrollo. Para ejemplificar la estructura de los modelos del IBNR, se definen los siguientes conceptos:

Matriz de Ordenamiento.

La Matriz de Ordenamiento define la naturaleza del tipo de sucesos en los que intervienen las técnicas del IBNR, dicha matriz denota el comportamiento de una variable z a través del tiempo y se representa como:

Despliegue por año calendario					
Año Origen	1	2	...	$t - 1$	t
1	z_{11}	z_{12}	...	$z_{1,t-1}$	z_{1t}
2		z_{22}	...	$z_{2,t-1}$	z_{2t}
⋮			
$m - 1$				$z_{m-1,t-1}$	$z_{m-1,t}$
m					z_{mt}

Diagrama 0 Despliegue por año calendario

La columna año de origen corresponde al año de incidencia del evento adverso y las otras columnas conciernen a los años calendarios en el que se realiza z en el tiempo.

Por lo general en los seguros de Daños la información con ciertas excepciones no se encuentra históricamente ordenada y de ahí que se hagan sobrestimaciones para cubrir riesgos en los que exista la probabilidad de ruina.

Matriz Recorrida.

La matriz recorrida es el proceso en el que se recorre las observaciones de la matriz de ordenamiento, dicho proceso se representa en la siguiente matriz:

Matriz recorrida por año de desarrollo					
Año origen	1	2	...	$t-1$	t
1	z_{11}	z_{12}	...	$z_{1,t-1}$	z_{1t}
2	z_{22}	z_{23}	...	z_{2t}	
⋮		
$m-1$	$z_{m-1,t-1}$	$z_{m-1,t}$			
m	z_{mt}				

Diagrama 1 Matriz recorrida por año de desarrollo

Las técnicas del IBNR son modelos que pronostican la información de tal manera que se completa la información del rectángulo, es obvio que los elementos en diagonal corresponden a los años calendarios. La matriz recorrida es conocida como el Camino del Triángulo dicho concepto queda explicado en el modelo de Verbeek en el año de 1972.

Capítulo 2

2. El Camino del Triángulo

2.1. El Camino del Triángulo de Verbeek.

Las técnicas del IBNR surgen de forma teórica a principios de los años setentas, el modelo diseñado por Verbeek en el año de 1972 para las reservas, es el expuesto a continuación:

Considerar la situación del reaseguro⁴ que cubre un exceso de reclamaciones cuando superan el límite de retención “e”, en este ejemplo solo podemos predecir el número de reclamaciones que incurrieron en ciertos años los cuales excedieron el límite de retención. Después del año calendario t , conocemos el número de reclamaciones n_{js} de los contratos establecidos en el año de origen j y que excedieron la retención en el año s siempre que $j + s \leq t + 1$. En el diagrama 2, el año 0 corresponde al año de 1980 por ende el primer año calendario concierne al año natural de 1981, es decir n_{24} corresponde al número de reclamaciones de los contratos los cuales se establecieron en el año de origen 1982 y excedieron la retención en 1985.

Año de pago					
Año de origen	1	2	...	$t - 1$	t
1	n_{11}	n_{12}	...	$n_{1,t-1}$	n_{1t}
2	n_{21}	n_{22}	...	$n_{2,t-1}$	
⋮		
⋮			
t	n_{t1}				

Diagrama 2 Camino del Triángulo

⁴ Reaseguro: Método por el cual el asegurador traslada al reasegurador mediante el pago de una prima, una participación del riesgo que ha asumido a través de su póliza de seguro, con el propósito de reducir sus probables pérdidas.

Los números de reclamaciones $n_{j,s+1-j}$ paralelos a la diagonal n_{1t}, \dots, n_{t1} representan los valores observados del año calendario s ($s = 1, \dots, t$). Sea M_j el número total de reclamaciones que conciernen al año de origen j y M_{js} el número de reclamaciones incurridas en el año de pago s correspondientes al año de origen j y que no necesariamente excedieron el límite de retención, entonces:

$$M_j = \sum_k M_{jk}$$

Suponemos que la variable M_j se distribuye $Poisson(\lambda)$ y r_s es la probabilidad de pago de la reclamación en el año s , la cual es independiente del año de origen j , además, como es de esperarse las variables aleatorias M_{js} se suponen independientes y con distribución $Poisson(\lambda r_s)$, por otro lado procedemos en argumentar la variable N_{js} la cual representa el número de reclamaciones que excedieron la retención "e" en el año s de los contratos establecidos en el año de origen j , de manera análoga la variable N_{js} tiene distribución $Poisson(r_s \lambda_{j+s-1})$.

Asumamos, los montos de las reclamaciones independientes e indexamos j y s , por lo que en conjunto lo representamos como X_{jsi} , donde $i = 1, \dots, M_{js}$. El subíndice i ordena los montos de las reclamaciones M_{js} , es decir:

$$N_{js} = \sum_{i=1}^{M_{js}} I_{[e, \infty)}(X_{jsi})$$

La función indicadora toma el valor de uno sí el monto de la reclamación X_{jsi} excede la retención, y cero en otro caso. Las N_{js} contabilizan el número de reclamaciones que excedieron la retención de todos los posibles M_{js} , deducimos el valor esperado de las N_{js} con base en las propiedades de esperanza y en lo siguiente:

- $m \in N \cup \{0\}$;
- $m < \infty$;
- X_{jsi} : variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

$$\begin{aligned}
 E[N_{js}] &= E[E[N_{js} | M_{js} = m]] = \sum_{m=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^m I_{[e, \infty)}(X_{jsi})\right] P(M_{js} = m) \\
 &\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m P(e \leq X_{js} < \infty) P(M_{js} = m) = P(e \leq X_{js} < \infty) \sum_{m=0}^{\infty} m P(M_{js} = m) \\
 &\Rightarrow E[N_{js}] = [1 - F_{X_{js}}(e)] \lambda r_s = r_s \lambda_{j+s-1} \Rightarrow \lambda_{j+s-1} = \lambda [1 - F_{X_{js}}(e)].
 \end{aligned}$$

Este resultado representa el número esperado de arribos que excedieron el límite de retención del respectivo año de origen y de pago, expresado en términos de sus parámetros.

El monto de la reclamación a través de los años es afectado por la inflación denominado factor u , supongamos a u constante aunado a que X_{jsi} son variables independientes y con idéntica distribución, obtenemos:

$$X_{jsi} = X_{js} = Xu^{s+j-2}, \forall i.$$

Analizando la ultima igualdad, $X_{11} = X$ denota el monto de la reclamación al instante es decir en el primer año calendario, $X_{12} = X_{21} = Xu$ denota el monto de la reclamación en el segundo año calendario, $X_{31} = X_{13} = X_{22} = Xu^2$ denota el monto de la reclamación del año inmediato posterior, por consiguiente, el monto de la reclamación crece geoméricamente, de ahí que:

$$F_{X_{js}}(t) = F_X\left(\frac{t}{u^{s+j-2}}\right) \quad \text{y} \quad \lambda_{j+s-1} = \lambda \left[1 - F_X\left(\frac{e}{u^{s+j-2}}\right)\right].$$

Construimos el siguiente diagrama de variables aleatorias N_{js} denotado:

Año de pago					
Año de origen	1	2	...	$t-1$	t
1	N_{11}	N_{12}	...	$N_{1,t-1}$	N_{1t}
2	N_{21}	N_{22}	...	$N_{2,t-1}$	N_{2t}
⋮
⋮
t	N_{t1}	N_{t2}	...	$N_{t,t-1}$	N_{tt}

Diagrama 3 Realización estocástica.

Las N_{js} tienen distribución $Poisson(r_s \lambda_{j+s-1})$. En lo que concierne a los valores esperados de la anterior tabla, los podemos representar en el siguiente diagrama como:

Año de pago					
Año de origen	1	2	...	$t-1$	t
1	$r_1 \lambda_1$	$r_2 \lambda_2$...	$r_{t-1} \lambda_{t-1}$	$r_t \lambda_t$
2	$r_1 \lambda_2$	$r_2 \lambda_3$...	$r_{t-1} \lambda_t$	$r_t \lambda_{t+1}$
⋮
⋮
t	$r_1 \lambda_t$	$r_2 \lambda_{t+1}$...	$r_{t-1} \lambda_{2t-2}$	$r_t \lambda_{2t-1}$

Diagrama 4 Valores esperados de los N_{js} .

Procedemos en estimar mediante el criterio de optimización de la máxima verosimilitud, los vectores $\hat{r} = (r_1, \dots, r_t)$ y $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, los cuales representan el triángulo superior, es decir:

$$L(\hat{r}, \hat{\lambda}) = \prod_{j=1}^t \prod_{s=1}^{t+1-j} \frac{(r_s \lambda_{j+s-1})^{n_{js}}}{n_{js}!} e^{-r_s \lambda_{j+s-1}}$$

$$j + s - 1 \leq t$$

Debido a que la función de verosimilitud se mantiene invariante bajo la transformación logaritmo, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Ln}L(\hat{r}, \hat{\lambda}) &= \sum_{j=1}^t \sum_{s=1}^{t+1-j} -r_s \lambda_{j+s-1} + \sum_{j=1}^t \sum_{s=1}^{t+1-j} n_{js} \text{Ln}(r_s \lambda_{j+s-1}) - \sum_{j=1}^t \sum_{s=1}^{t+1-j} \text{Ln}(n_{js}!) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_{s'}} \text{Ln}L(\hat{r}, \hat{\lambda}) &= 0 \Rightarrow - \sum_{j=1}^{t+1-s'} \lambda_{j+s'-1} + \sum_{j=1}^{t+1-s'} \frac{n_{js'}}{r_{s'}} = 0 \end{aligned}$$

Siempre que $S = S'$ y $S' = 1, \dots, t+1-j$ implicando $j = 1, \dots, t+1-S'$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{t+1-s'} \frac{n_{js'}}{r_{s'}} = \sum_{j=1}^{t+1-s'} \lambda_{j+s'-1} \Rightarrow \hat{r}_{s'} = \frac{\sum_{j=1}^{t+1-s'} n_{js'}}{\sum_{j=1}^{t+1-s'} \lambda_{j+s'-1}}$$

Análogamente, obtenemos el siguiente estimador con base en el criterio de la máxima verosimilitud:

$$\hat{\lambda}_h = \frac{\sum_{s=1}^h n_{s,h+1-s}}{\sum_{s=1}^h r_s}$$

Los estimadores $\hat{N}_{js} = \hat{r}_s \hat{\lambda}_{s+j-1}$ con $j+s-1 \leq t$ corresponden a las observaciones esperadas del triángulo superior del rectángulo. Los estimadores $\hat{N}_{js} = \hat{r}_s \hat{\lambda}_{s+j-1}$ con $s+j-1 > t$ corresponden a las reclamaciones de los años futuros.

Usando los resultados anteriores podemos desarrollar modelos estadísticos lineales para encontrar estimadores del número total de futuras reclamaciones, relativo a un año de origen y de desarrollo.

2.2. Distinción entre modelos y aspectos teóricos del IBNR.

Taylor en el año de 1986 clasificó los modelos IBNR por niveles, debido a la naturaleza aleatoria en el proceso de reclamaciones. Los modelos son divididos en dos categorías; modelos estocásticos y no estocásticos, en algunos casos los modelos no estocásticos podrían tener una interpretación estocástica, por ejemplo, el modelo aritmético de separación.

Algunas veces es inútil aplicar modelos estocásticos porque la información es limitada, sin embargo, los escasos datos podrán ser empleados en modelos del tipo Bayesianos, no obstante, podremos construir intervalos de confianza para controlar la incertidumbre de dichos pronósticos.

Otra clasificación, es distinguiéndolos entre modelos macro y micro. Los modelos macro se caracterizan por agrupar a los individuos en estudio, opuesto a lo anterior, los modelos micro estudian el comportamiento individual y por lo general requieren de más información específica; algunas veces los modelos micro conducen a los modelos macro.

Aunado a lo anterior, Taylor examinó otras perspectivas. La clasificación básica distingue modelos que pueden ó no incluir variables que dependan del número de reclamos, por otro lado, la clasificación de último nivel consiste en ordenar las variables por jerarquía, es decir, con base en los siguientes criterios:

- I. El grado de relevancia en el año de origen;
- II. Tiempo de desarrollo;
- III. Intensificación de las reclamaciones, causada por la inflación (Este punto es considerado dentro de los factores endógenos y exógenos);
- IV. El tipo de reclamación.

Las técnicas IBNR son ejemplos de modelos lineales que explican la naturaleza de los siniestros no reportados, las variables observadas son modeladas a través de una matriz de diseño. Estos modelos son construidos por cada año en cuestión, modelando fila por fila y columna por columna.

2.3. El Proceso Poisson.

En esta sección describiremos el Proceso Poisson, dicha distribución de probabilidad concibe un supuesto fundamental en el desarrollo o recorrido del triángulo en el modelo de Verbeek, método de separación y de la cadena escalón.

El proceso Poisson tiene una característica esencial y es la de ser un proceso de conteo a través del tiempo, en el IBNR la densidad Poisson contabiliza el número de siniestros no reportados el año de ocurrencia. Definamos los siguientes conceptos:

Proceso Estocástico.

Es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t; t \in T\}$ indexadas por el conjunto T , llamado espacio de parámetros y donde X_t es un punto en un espacio E llamado espacio de estados.

Un proceso estocástico puede verse como una función $X: T \times \Omega \rightarrow E$, es decir, una aplicación de $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$.

Si fijamos $t \in T$ entonces la aplicación $\omega \mapsto X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, por otro lado, si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función $X|_{\omega}: T \rightarrow E$ llamada trayectoria ó realización del proceso estocástico. Algunos Procesos estocásticos que por su concepto son útiles en la descripción del Proceso Poisson son:

A) Procesos con incrementos independientes:

Si $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, entonces las variables aleatorias

$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ Son independientes

B) Procesos Estacionarios:

Para cualquier $h > 0$ la distribución de probabilidad asociada el vector aleatorio $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es idéntico a la del vector $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$.

C) Procesos puntuales:

Sea A una colección de subconjuntos de un espacio X . Un proceso puntual, es un proceso $\{X_A; A \in \Delta\}$ indexado por una colección Δ y con valores en $E = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2.3.1. Proceso Poisson Homogéneo.

Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo y espacio de estados $E = \{0,1,2,\dots\}$ y con las siguientes propiedades:

- a. $X_0 = 0$;
- b. Incrementos independientes y estacionarios;
- c. $P\{X_{t+h} - X_t \geq 1\} = \lambda h + \theta(h), h \rightarrow 0$;
- d. $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = \theta(h), h \rightarrow 0$.

El proceso estocástico mencionado se define como Proceso Poisson homogéneo de intensidad λ . El Proceso Poisson es un proceso de conteo, frecuentemente es utilizado para calcular el número de ocurrencias de un evento en el intervalo $[0, t]$. En el camino del triángulo, el Proceso Poisson contabiliza por año calendario, el número de reclamaciones no reportadas en el año de origen.

Proposición:

Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un Proceso Poisson homogéneo con parámetro λt . Entonces:

$$P(X_t = m) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, m \in N \cup \{0\}.$$

Demostración.

$P_m(t) = P(X_t = m)$. Por independencia y estacionalidad del Proceso Poisson implica:

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h) = P_0(t)P\{X_{t+h} - X_t < 0\} = P_0(t)[1 - \lambda h - \theta(h)] = P_0(t)[1 - \lambda h + \theta(h)]$$

Es decir:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P_0(t) - P_0(t)\lambda h + P_0(t)\theta(h) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} P_0(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) \end{aligned}$$

Por razonamiento empírico, la probabilidad de tener ceros eventos en el tiempo inicial (condición inicial $t = 0$) es uno, es decir, $p_0(0) = 1$. La última igualdad se convierte en una ecuación diferencial homogénea de primer grado, por ende obtenemos los siguientes términos:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Generalizando para cualquier evento y por incrementos independientes y estacionarios de los intervalos $c_t = [0, t]$ y $c_h = (t, t + h]$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$p_m(t + h) = p_m(t)p_0(h) + \sum_{k=1}^m p_{m-k}(t)p_k(h)$$

Considerando los supuestos c y d respectivamente, podremos expresar la anterior igualdad en términos de orden de magnitud de la siguiente manera.

$$p_m(t + h) = p_m(t)[1 - \lambda h + \theta(h)] + p_{m-1}(t)[\lambda h + \theta(h)] + \theta(h)$$

Factorizando términos semejantes y de manera análoga se sigue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_m(t + h) - p_m(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-p_m(t)\lambda h + p_{m-1}(t)\lambda h + \theta(h)}{h}$$

$$\Rightarrow p'_m(t) = -p_m(t)\lambda + p_{m-1}(t)\lambda + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h} = -\lambda p_m(t) + \lambda p_{m-1}(t)$$

La ecuación diferencial es resuelta proponiendo un factor integrante, evidentemente la probabilidad de que existan m eventos en el tiempo $t = 0$ es cero, $p_m(0) = 0$, propongamos el factor integrante $Q_m(t)$ dado por:

$$Q_m(t) = e^{\lambda t} p_m(t)$$

Entonces:

$$Q'_m(t) = e^{\lambda t} p'_m(t) + \lambda p_m(t) e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (p'_m(t) + \lambda p_m(t))$$

$$Q'_m(t) = e^{\lambda t} [-\lambda p_m(t) + \lambda p_{m-1}(t) + \lambda p_m(t)] = \lambda e^{\lambda t} p_{m-1}(t)$$

$$Q'_m(t) = \lambda Q_{m-1}(t)$$

El factor integrante cumple con las siguientes características:

- $Q_m(0) = p_m(0) = 0$;
- $Q_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1$.

Dado los supuestos anteriores podremos resolver de manera recursiva cada valor del factor integrante, primeramente $Q'_1(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda$, de manera análoga:

$$Q'_2(t) = \lambda Q_1(t).$$

Por inducción matemática, para m eventos al tiempo t se obtiene:

$$Q_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!},$$

Implicando:

$$e^{\lambda t} p_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $e^{-\lambda t}$ habremos demostrado el teorema.

Teorema. Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un proceso Poisson con parámetro λt , entonces la media y varianza del proceso se describen como:

1. $E(X_t) = \lambda t$
2. $Var(X_t) = \lambda t$

Demostración de 1 (el ejercicio 2 es totalmente análogo).

$$E(X_t) = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = e^{-\lambda t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda t (\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda t$$

2.3.2. Proceso Poisson no Homogéneo.

Es un proceso estocástico $\{X_t; t \geq 0\}$, con espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ y con las siguientes propiedades:

1. $X_0 = 0$;
2. Incrementos independientes;
3. $P\{X_{t+h}, X_t \geq 1\} = \lambda(t)h + \theta(h)$, $h \rightarrow 0$;
4. $P\{X_{t+h}, X_t \geq 2\} = \theta(h)$, $h \rightarrow 0$.

En donde $\lambda(t)$ es una función positiva localmente integrable, las intensidades varían con respecto el tiempo.

Proposición. Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un Proceso Poisson no homogéneo con función de valor medio $\Lambda(t)$, implica:

$$P(X_t = m) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^m}{m!} \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Donde:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

Demostración.

Supongamos $m = 0$, entonces:

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(t, t+h) = p_0(t)(1 - \lambda(t)h + \theta(h))$$

Agrupando términos semejantes se deduce la siguiente ecuación diferencial:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -p_0(t)\lambda(t)$$

De ahí que:

$$p_0(t) = e^{-\Lambda(t)}$$

Análogo al Proceso Poisson homogéneo se define el siguiente factor integrante:

$$\begin{aligned} Q_m(t) &= e^{\Lambda(t)} p_m(t) \\ Q'_m(t) &= e^{\Lambda(t)} p'_m(t) + \lambda(t) e^{\Lambda(t)} p_m(t) = e^{\Lambda(t)} [p'_m(t) + \lambda(t) p_m(t)] \\ &= e^{\Lambda(t)} [-\lambda(t) p_m(t) + \lambda(t) p_{m-1}(t) + \lambda(t) p_m(t)] \\ &= \lambda(t) Q_{m-1}(t) \end{aligned}$$

Proponiendo valores iniciales obtenemos de manera recursiva el m-ésimo término del factor integrante y con ello habremos demostrado el teorema.

$Q'_1(t) = \lambda(t)$, implicando:

$$Q_1(t) = \int_0^t \lambda(s) \partial s = \Lambda(t)$$

Entonces.

$$Q_m(t) = \frac{(\Lambda(t))^m}{m!} .$$

Observaciones:

- Cuando $\lambda(t) = \lambda$ se obtiene el Proceso Poisson Homogéneo;
- $\Lambda'(t) = \lambda(t)$ Se define como función de intensidad y $\Lambda(t)$ es una función continua y no decreciente.

Proposición. Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un Proceso Poisson no homogéneo con función de valor medio $\Lambda(t)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f_{T_1}(t) = e^{-\Lambda(t)} \lambda(t)$
2. $f_{T_2|T_1}(t|s) = e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)} \lambda(t+s)$
3. $f_{W_n}(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t)$
4. $1 - F_{T_k|W_{k-1}}(t|s) = e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)}$
5. $p(T_k > t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) \partial s \quad \forall k \geq 2$

Donde: $W_n = \sum_{k=0}^n T_k$ es el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento y T_k es la variable aleatoria que denota tiempo entre eventos. Demostración:

Propiedad 1.

$$f_{T_1}(t) = \frac{\partial}{\partial t} p(T_1 \leq t) = \frac{\partial}{\partial t} [1 - e^{-\Lambda(t)}] = e^{-\Lambda(t)} \lambda(t).$$

Propiedad 2.

$$\begin{aligned} F_{T_2|T_1}(t|s) &= 1 - p(T_2 > t | T_1 = s) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u+s) \partial u\right\} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F_{T_2|T_1}(t|s) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u+s) \partial u\right\}\right] = \left[\exp\left\{-\int_0^t \lambda(u+s) \partial u\right\}\right] \lambda(t+s) \\ \Rightarrow f_{T_2|T_1}(t|s) &= \left[\exp\left\{-\int_s^{t+s} \lambda(u) \partial u\right\}\right] \lambda(t+s) = \left[\exp\left\{-\int_0^{t+s} \lambda(u) \partial u - \int_s^0 \lambda(u) \partial u\right\}\right] \lambda(t+s) \\ \Rightarrow f_{T_2|T_1}(t|s) &= e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)} \lambda(t+s). \end{aligned}$$

Propiedad 3.

$$\begin{aligned} p(W_n > t) &= p(X_t \leq n-1) = \sum_{r=0}^{n-1} p(X_t = r) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(W_n \leq t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \sum_{r=0}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!}\right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - e^{-\Lambda(t)} - \sum_{r=1}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!}\right] \\ \Rightarrow f_{W_n}(t) &= e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) - \sum_{r=1}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{r-1}}{(r-1)!} \lambda(t) + \lambda(t) \sum_{r=1}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!} \end{aligned}$$

Acorde a lo anterior, agrupamos términos y con ello demostrado la tercera propiedad:

$$f_{W_n}(t) = \lambda(t) \sum_{r=1}^{n-1} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!} - \lambda(t) \sum_{r=1}^{n-2} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^r}{r!} = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t).$$

Propiedad 4.

La demostración es análoga a la propiedad 2

Propiedad 5.

$$p(T_k > t) = \int_t^\infty f_{T_k}(u) \partial u = \int_t^\infty \int_0^\infty f_{T_k, W_{k-1}}(u, s) \partial s \partial u = \int_t^\infty \int_0^\infty f_{T_k | W_{k-1}}(u | s) f_{W_{k-1}}(s) \partial s \partial u$$

$$p(T_k > t) = \int_0^\infty \int_t^\infty f_{T_k | W_{k-1}}(u | s) f_{W_{k-1}}(s) \partial u \partial s = \int_0^\infty p(T_k > t | W_{k-1} = s) f_{W_{k-1}}(s) \partial s$$

Por otro lado:

$$\int_0^\infty (1 - F_{T_k | W_{k-1}}(t | s)) f_{W_{k-1}}(s) \partial s = \int_0^\infty (e^{-\Lambda(t+s) + \Lambda(s)}) e^{-\Lambda(s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) \partial s$$

Entonces

$$p(T_k > t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) \partial s \quad \text{Q.E.D.}$$

Capítulo 3

3. Técnicas del IBNR

3.1. Métodos de Suavización.

Las técnicas de suavización estudiadas en esta sección son el Método de la Cadena Escalón, Variación, Mínimos Cuadrados De Vylder y Separación. Dichos modelos pertenecen al enfoque de suavización, cuyo fin es realizar pronósticos con base en ajustes lineales.

3.1.1. Método de la Cadena Escalón en el enfoque estocástico.

Considerar la siguiente realización aleatoria del diagrama 5, las variables aleatorias X_{ij} denotan la reclamación para el año de origen i y de pago j .

Año de pago					
Año de origen	1	...	n	...	t
1	X_{11}	...	X_{1n}	...	X_{1t}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
$t-n+1$	$X_{t-n+1,1}$...	$X_{t-n+1,n}$...	$X_{t-n+1,t}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
t	X_{t1}	...	X_{tn}	...	X_{tt}

Diagrama 5 Realización aleatoria afuera del triángulo

El supuesto fundamental en el anterior diagrama es la proporcionalidad de las columnas además se considera $X_{ij} \sim \text{Poisson}(\alpha_i B_j)$. El diagrama 6 expresa las ecuaciones marginales que corresponde a los valores observados esperados de los X_{ij} .

En referencia de Verbeek, las observaciones X_{ij} con $i+j \leq t+1$ corresponden a los valores observados, por el contrario si $i+j > t+1$ a los valores futuros.

Propongamos $B_1 + \dots + B_t = 1$; donde cada B_j representa la proporción respectiva al año de pago j del total de la reclamación y α_i representa el monto que corresponden al i -ésimo año de origen del total de pagos hecho. Cabe señalar que las observaciones X_{ij} siguen una distribución Poisson, de ahí el nombre del Método de la Cadena Escalón en el enfoque estocástico.

Año de pago						
Año de origen	1	...	n	...	t	Total
1	$\alpha_1 B_1$...	$\alpha_1 B_n$...	$\alpha_1 B_t$	R_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
$t - n + 1$	$\alpha_{t-n+1} B_1$...	$\alpha_{t-n+1} B_n$			R_{t-n+1}
\vdots	\vdots	\vdots				\vdots
t	$\alpha_t B_1$					R_t
Total	k_1	...	k_n	...	k_t	

Diagrama 6 Ecuaciones marginales en el camino del triángulo.

Los parámetros α y B del diagrama 6 son estimados con base en las observaciones R_i y k_j , que corresponden respectivamente a las suma de los renglones y columnas.

1.- $\alpha_1(\hat{B}_1 + \dots + \hat{B}_t) = \hat{\alpha}_1 = R_1$ y $\alpha_1 \hat{B}_t = k_t$ por ende hemos hallado el valor \hat{B}_t .

2.- Asumamos $n < t$, y con ello tendremos que hallar estimadores para $\hat{B}_{n+1}, \dots, \hat{B}_t$

y $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{t-n}$. Resolviendo de manera recursiva se siguen las ecuaciones marginales:

$$\hat{\alpha}_{t-n+1}(\hat{B}_1 + \dots + \hat{B}_n) = R_{t-n+1}$$

$$\hat{B}_n(\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_{t-n+1}) = k_n$$

Consideramos $\hat{B}_1 + \dots + \hat{B}_t = 1$ y de ahí que podamos estimar $\hat{\alpha}_{t-n+1}$ y posteriormente \hat{B}_n .

3.- Repetir el paso 2 para $n = t-1, t-2, \dots, 1$.

Ejemplo: consideremos la siguiente realización.

Año	1	2	3	4	5
1	A	A	A	B	E
2	A	A	A	B	
3	C	C	C	♣	
4	D	D			
5	E				

Observemos el elemento (3,4) del cuadro anterior cual es denotado por ♣, dicho símbolo representa el monto de la reclamación para el sexto año calendario, la predicción para este elemento es:

$$\hat{X}_{34} = \hat{\alpha}_3 \hat{B}_4 = \frac{\hat{\alpha}_3 (\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3) \hat{B}_4 (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)}{(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) (\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3)} = \frac{C_{\Sigma} \bullet B_{\Sigma}}{A_{\Sigma}}$$

$$A_{\Sigma} = R_1 + R_2 - k_4 - k_5$$

Dicha metodología tiene la limitación de suponer distribución Poisson en el proceso de las reclamaciones. En referencia al modelo anterior otra perspectiva es la propuesta por Benjamín y Eagles, quienes examinaron la reserva de reclamos del mercado de Londres mediante una aproximación lineal, con base en una ecuación recursiva (vectores autoregresivos) denotada como:

$$X_{j,r+1} = a_r + c_r X_{jr}$$

El término anterior es minimizado con el objeto de hallar los estimadores de los parámetros a_r y c_r . Es decir:

$$\text{Min}_{a_r, c_r} \sum_{j=1}^{t-r} (X_{j,r+1} - a_r - c_r X_{jr})^2$$

El método descrito es conocido como London Chain (Método de la Cadena de Londres).

Si $a_r = 0$, entonces:

$$\text{Min}_{c_r} \sum_{j=1}^{t-r} (X_{j,r+1} - c_r X_{jr})^2$$

Implicando:

$$\hat{c}_r = \frac{\sum_{j=1}^{t-r} X_{j,r+1} X_{jr}}{\sum_{j=1}^{t-r} X_{jr}^2}$$

El modelo de la cadena escalón es una adaptación del resultado anterior, en otras palabras, el resultado anterior es una técnica más general y antecesora al modelo de la cadena escalón, dicho método es estudiado en la sucesiva sección.

3.1.2. Método de la Cadena Escalón.

Consideremos la realización del camino del triángulo expresado en el diagrama siguiente:

Año de pago							
Año de origen	1	2	...	s	...	t-1	t
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1s}	...	$X_{1,t-1}$	X_{1t}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2s}	...	$X_{2,t-1}$	
⋮		
t-s+1	$X_{t-s+1,1}$	$X_{t-s+1,2}$...	$X_{t-s+1,s}$			
⋮					
t	X_{t1}						

Diagrama 7 camino de las pérdidas acumulativas

Los valores X_{ij} se acumulan por cada año de origen i conforme transcurre la realización del camino del triángulo en el año j , el principal supuesto del método de la Cadena Escalón es la proporcionalidad de las columnas del triángulo y esto se debe al cúmulo de cada año.

El factor de proporción para pasar de la columna s a la columna $s+1$ y el factor de proporción para pasar de la columna S' a la columna S'' lo representamos respectivamente como:

$$C_{s,s+1} = \frac{\sum_{j=1}^{t-s} X_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{t-s} X_{j,s}} \quad \text{y} \quad C_{s',s''} = \prod_{h=s'}^{s''-1} C_{h,h+1}$$

Evidentemente $S' < S''$, por otro lado $C_{t,\infty}$ esta definido como la razón entre el tamaño o monto total de la reclamación y la cantidad acumulada los primeros t años:

$$C_{t,\infty} = \frac{X_{1,\infty}}{X_{1,t}}$$

Se considera el caso $X_{1,\infty} = X_{1,t}$ para alguna t grande ó bien podemos construir un margen de seguridad π el cual satisfaga $X_{1,\infty} = (1 + \pi)X_{1,t}$ para algún valor t y $\pi \in [0,1]$.

De lo obtenido extrapolamos lo siguiente:

$$\hat{X}_{js'} = X_{j,t+1-j} C_{t+1-j,s'} \\ j + s' > t + 1$$

Donde: $C_{t+1-j,s'}$ es el factor de corrección de las observaciones, cabe señalar que los elementos del año calendario t son valores observados. Generalizando este concepto podremos utilizar valores estimados de los elementos pertenecientes al año calendario t con el fin de sensibilizar el pronóstico, es decir:

$$\hat{X}_{js'} = \hat{X}_{j,t+1-j} C_{t+1-j,s'} \\ j + s' > t + 1$$

En consecuencia el triángulo podrá ser transformado en un rectángulo suavizado de valores pronosticados. En la siguiente sección extrapolamos el método de la cadena escalón mediante el concepto de radios de pérdidas o variaciones de montos incurridos por año de origen y de desarrollo, de ahí que surjan distintas vertientes llamadas variaciones de la cadena escalón.

3.1.3. Método de Variación de la Cadena Escalón.

Consideremos los supuestos del método de la Cadena Escalón y el diagrama 7. Construimos un nuevo triángulo tomando como referencia la siguiente ecuación:

$$d_{jr} = \frac{X_{j,r+1}}{X_{jr}} \quad j+r \leq t$$

Acorde a lo anterior, podremos expresar el siguiente diagrama de proporciones o variaciones:

Año de pago							
Año de origen	1	2	...	s	...	t-2	t-1
1	d_{11}	d_{12}	...	d_{1s}	...	$d_{1,t-2}$	$d_{1,t-1}$
2	d_{21}	d_{22}	...	d_{2s}	...	$d_{2,t-2}$	
⋮		
t-s+1	$d_{t-s+1,1}$	$d_{t-s+1,2}$...	$d_{t-s+1,s}$			
⋮				
t-2	$d_{t-2,1}$	$d_{t-2,2}$					
t-1	$d_{t-1,1}$						

Diagrama 8 Triángulo d

En este caso se suponen las proporciones d_{jr} constantes para cada columna r y posteriormente con base en dichas proporciones utilizaremos las \hat{d}_r propuestas por Van Eeghen para estimar las reclamaciones X_{sr} , que son representadas de la siguiente manera:

$$\hat{X}_{sr} = \left[\prod_{h=t-s+1}^{r-1} \hat{d}_{sh} \right] X_{s,t-s+1}$$

$s+r > t+1$

El método de la Cadena Escalón asume valores constantes en las columnas del Triángulo d. En la teoría de la probabilidad esto no siempre es cierto, por ende para evitar problemas de estructura enunciamos los métodos siguientes de Variación de Van Eeghen.

Lista de variaciones de Van Eeghen, año de 1981

- I. Asumamos que existe una tendencia lineal en las columnas del Triángulo d, es decir $d = \alpha + bt$, la estimación a través de Mínimos Cuadrados Ordinarios es una aproximación para cada columna excepto en las ultimas dos por motivos de insuficiencia de datos, por tal motivo proponemos:

$$\hat{d}_{t-1} = \frac{d_{1,t-1} + d_{2,t-1}}{2}$$

$$\hat{d}_t = d_{1,t-1}$$

- II. Este método ponderara los pesos de las observaciones en el Triángulo d. Van Eeghen propone el siguiente estimador para cada columna r :

$$\hat{d}_r = \frac{\sum_{j=1}^{t-r} w_{jr} d_{jr}}{\sum_{j=1}^{t-r} w_{jr}}$$

Nota: seleccionando $w_{jr} = X_{jr}$ resulta el método de la Cadena Escalón ó bien si optamos por $w_{jr} = j + r + 1$ el peso de la ponderación recae sobre años recientes.

- III. Esta variación supone una curva exponencial ajustada para cada columna con sus respectivas constantes de ajuste K_r y B_r determinadas para cada columna, es decir:

$$X_{jr} = K_r \exp(B_r j) \quad r = 1, \dots, t \quad j = 1, \dots, t - r + 1.$$

En la tercera variación podemos estimar los parámetros transformando con logaritmos cada columna excepto en la última por insuficiencia de datos, para ello consideramos $\hat{B}_t = \hat{B}_{t-1}$. Las variaciones de Van Eeghen que corresponden al cuarto, quinto y sexto postulado, son una adaptación a la tercera variación.

3.1.4. Método de Separación.

Considerar el diagrama 7 del Camino de las pérdidas acumulativas, que consiste de variables X_{js} que representan el monto de la reclamación en el año de origen j y de pago s . Los parámetros λ y r describen la evolución por año calendario (inflación) y la fracción del total de reclamaciones respectivamente, dichos parámetros se representan por año calendario de la siguiente forma:

Año de pago					
Año de origen	1	2	...	$t-1$	t
1	$r_1 \lambda_1$	$r_2 \lambda_2$...	$r_{t-1} \lambda_{t-1}$	$r_t \lambda_t$
2	$r_1 \lambda_2$	$r_2 \lambda_3$...	$r_{t-1} \lambda_t$	
⋮		
⋮			
t	$r_1 \lambda_t$				

Diagrama 9 Valores esperados (Método de Separación)

El modelo se indetermina al instante de estimar los parámetros, por lo tanto restringimos el parámetro de proporcionalidad r sujeto a dos vertientes, el Método Aritmético y Geométrico de Separación respectivamente:

- a. $\sum_{s=1}^t r_s = 1;$
- b. $\prod_{s=1}^t r_s = 1.$

Cabe señalar la semejanza con el método estocástico de la cadena escalón, aunque ambos métodos difieren primeramente por su naturaleza, el Método Estocástico de la Cadena Escalón supone distribución Poisson en las reclamaciones y por su construcción, en el Método de Separación surge la vertiente de un comportamiento geométrico.

3.1.4.1. Método Aritmético de Separación.

Sumando las X_{js} que satisfacen $j + s = t + 1$, entonces:

$$\sum_{j=1}^t X_{j,t+1-j} = (r_1 + \dots + r_t) \lambda_t = \hat{\lambda}_t \quad \text{implicando:} \quad \hat{r}_t = \frac{X_{1t}}{\hat{\lambda}_t}$$

Para estimar $\hat{\lambda}_{t-1}$ se procede a sumar todas las X_{js} con $j + s = t$, de modo que:

$$\sum_{j=1}^{t-1} X_{j,t-j} = (r_1 + \dots + r_{t-1}) \lambda_{t-1} = (1 - r_t) \lambda_{t-1} \quad \text{implicando} \quad \hat{\lambda}_{t-1} = \frac{\sum_{j=1}^{t-1} X_{j,t-j}}{(1 - \hat{r}_t)}$$

Para encontrar \hat{r}_{t-1} sumamos los elementos pertenecientes a la columna $t - 1$, de manera que:

$$X_{1,t-1} + X_{2,t-1} = r_{t-1} (\lambda_{t-1} + \lambda_t) \Rightarrow \hat{r}_{t-1} = \frac{X_{1,t-1} + X_{2,t-1}}{\hat{\lambda}_{t-1} + \hat{\lambda}_t}.$$

El método es iterativo, estimando cada parámetro predecesor. En realidad estos resultados son obtenidos en el modelo de Verbeek del Camino del triángulo, es decir, el método aritmético de separación puede ser interpretado desde la perspectiva estadística.

3.1.4.2. Método Geométrico de Separación.

Multiplicamos los elementos X_{js} tales que $j + s = t + 1$, entonces:

$$\prod_{j=1}^t X_{j,t+1-j} = \left(\prod_{j=1}^t r_j \right) \lambda_t^t = \lambda_t^t \quad \text{de ahí que} \quad \hat{\lambda}_t = \left(\prod_{j=1}^t X_{j,t+1-j} \right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{implicando:} \quad \hat{r}_t = \frac{X_{1t}}{\hat{\lambda}_t}$$

Para estimar $\hat{\lambda}_{t-1}$ multiplicamos todas las X_{js} con $j + s = t$, por consiguiente:

$$\prod_{j=1}^{t-1} X_{j,t-j} = \left(\prod_{j=1}^{t-1} r_j \right) \lambda_{t-1} = \left(\frac{1}{\hat{r}_t} \right) \lambda_{t-1} \quad \text{implicando} \quad \hat{\lambda}_{t-1} = \left(\hat{r}_t \cdot \prod_{j=1}^{t-1} X_{j,t-j} \right)^{\frac{1}{t-1}}$$

Para encontrar \hat{r}_{t-1} multiplicamos los elementos pertenecientes a la columna $t-1$ así que:

$$X_{1,t-1} X_{2,t-1} = r_{t-1}^2 \lambda_{t-1} \lambda_t \quad \text{implicando} \quad \hat{r}_{t-1} = \left(\frac{X_{1,t-1} X_{2,t-1}}{\hat{\lambda}_{t-1} \hat{\lambda}_t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Análogamente, de manera recursiva podemos calcular los valores de λ y r en años predecesores al año calendario t . Es ineludible extrapolar mediante un modelo tendencia los valores futuros de lambda dado que ya conocemos los porcentajes r_i con $i = 1, \dots, t$, es común considerar tendencias lineales, logarítmicas, polinomio y de carácter exponencial.

3.1.5. Método de suavización Mecánica.

En general los modelos del IBNR recurren al enfoque lineal en el proceso de las observaciones, en algunas situaciones las técnicas IBNR son ineficientes debido a que no se cumplen las condiciones de dichas técnicas, por ende necesitamos otro enfoque no especializado en el camino del triángulo. La Suavización Mecánica resulta de gran utilidad como modelo de aproximación.

Considerar el modelo lineal que explica el fenómeno aleatorio Y mediante la combinación lineal de variables X . La variable Y puede ser interpretada como el número de reclamaciones que esta en función de los factores X , denotado por:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + \dots + B_k X_k + \varepsilon$$

Donde: ε representa el término error, para ilustrar la técnica de suavización mecánica consideremos las observaciones $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ y $X_j = (X_1^j, \dots, X_n^j)$ de las variables Y y X_j con $j = 1, \dots, k$ del modelo de regresión lineal, donde:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{i1} + \dots + B_k X_{ik} \quad i = 1, \dots, n.$$

En el caso de que $k + 1 < n$ ciertamente existirían más ecuaciones que variables X implicando dependencia lineal, por ende para corregir este problema agrupamos las n observaciones arbitrariamente en $k + 1$ grupos. Para ejemplificar sumemos las n_1 ecuaciones del primer grupo y con ello obtenemos el primer modelo denotado por:

$$\sum_{i=1}^{n_1} Y_i = B_0 \cdot n_1 + B_1 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} X_{i1} + \dots + B_k \cdot \sum_{i=1}^{n_1} X_{ik}, \text{ dado que } \sum \varepsilon_i = 0.$$

De manera análoga obtenemos los sucesivos k modelos, en otras palabras construimos $k + 1$ nuevas ecuaciones lineales con el fin de estimar los $k + 1$ parámetros B fundamentado en el teorema de Cramer:

Teorema de Cramer: Un sistema de n ecuaciones lineales (modelos) y n parámetros además con determinante distinto de cero tiene una y sola una solución la cual esta dada para el vector b , como:

$$b_i = \frac{\det_i}{\det} \quad i = 1, \dots, n$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \det = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\det_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ y_2 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det_2 = \begin{vmatrix} x_{11} & y_1 & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & y_2 & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & y_n & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det_n = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

Con base en el resultado anterior podremos determinar los parámetros del modelo, para ilustrar consideremos el Modelo de Makeham que describe la mortalidad por año:

Método de King-Hardy

$$l_x = kS^x g^{c^x}$$

$$\Rightarrow \ln l_x = \ln k + (\ln S)X + (\ln g)C^X$$

El objetivo es estimar los parámetros $\text{Ln}(k)$, $\text{Ln}(s)$ y $\text{Ln}(g)$, por ello tenemos que construir una matriz de 3×3 , es decir, se requiere agrupar n observaciones en tres grupos denotados $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. La propuesta de agrupación es la siguiente:

$$X = 0, 1, \dots, n_1, n_1+1, \dots, n_2, n_2+1, \dots, n_3. \quad \text{Evidentemente } n_3 = n$$

$$\sum_{X=0}^{n_1} \text{Ln}l_X = (n_1+1)\text{Ln}(k) + \text{Ln}(s) \left[\frac{n_1(n_1+1)}{2} \right] + \text{Ln}(g) \left[\frac{1-C^{n_1+1}}{1-C} \right]$$

Del grupo ζ_1

$$\sum_{X=n_1+1}^{n_2} \text{Ln}l_X = (n_2-n_1)\text{Ln}(k) + \text{Ln}(s) \left[\frac{(n_2+n_1+1)(n_2-n_1)}{2} \right] + \text{Ln}(g) \left[\frac{C^{n_1+1}(1-C^{n_2-n_1})}{1-C} \right]$$

Donde:

$$\begin{aligned} \sum_{X=n_1+1}^{n_2} X &= \sum_{X=0}^{n_2-n_1-1} (X+n_1+1) = \frac{(n_2-n_1-1)(n_2-n_1)}{2} + \frac{2(n_1+1)(n_2-n_1)}{2} = \frac{(n_2-n_1)(n_1+n_2+1)}{2} \\ \sum_{X=n_1+1}^{n_2} C^X &= \sum_{X=0}^{n_2-n_1-1} (C^{X+n_1+1}) = C^{n_1+1} \sum_{X=0}^{n_2-n_1-1} C^X = C^{n_1+1} \left[\frac{1-C^{n_2-n_1}}{1-C} \right] \end{aligned}$$

Del grupo ζ_2

$$\sum_{X=n_2+1}^{n_3} \text{Ln}l_X = (n_3-n_2)\text{Ln}(k) + \text{Ln}(s) \left[\frac{(n_3+n_2+1)(n_3-n_2)}{2} \right] + \text{Ln}(g) \left[\frac{C^{n_2+1}(1-C^{n_3-n_2})}{1-C} \right]$$

Del grupo ζ_3 , de ahí que se obtenga la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} n_1+1 & \frac{n_1(n_1+1)}{2} & \frac{1-C^{n_1+1}}{1-C} \\ n_2-n_1 & \frac{(n_2+n_1+1)(n_2-n_1)}{2} & \frac{C^{n_1+1}(1-C^{n_2-n_1})}{1-C} \\ n_3-n_2 & \frac{(n_3+n_2+1)(n_3-n_2)}{2} & \frac{C^{n_2+1}(1-C^{n_3-n_2})}{1-C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Ln}(k) \\ \text{Ln}(s) \\ \text{Ln}(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{X=0}^{n_1} \text{Ln}l_X \\ \sum_{X=n_1+1}^{n_2} \text{Ln}l_X \\ \sum_{X=n_2+1}^{n_3} \text{Ln}l_X \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer podremos encontrar la inversa de la matriz de 3X3 siempre que cumpla con las condiciones y por ello estimar indirectamente los parámetros k , s y g para alguna C fija.

3.1.6. Método de Mínimos Cuadrados De Vylder.

Se considera la realización del triángulo con valores *no acumulativos* de pérdidas denotadas por x_{js} , $j+s \leq t+1$. La variable x_j representa el monto total de las reclamaciones respectivo al año de origen j , además la variable v_s denota la proporción del total de la reclamación establecida en el año s . Asumamos $v_1 + \dots + v_t = 1$, por consiguiente determinamos los valores de los parámetros x y v de manera que:

$$\text{Min} \sum_{j+s \leq t+1} (x_{js} - x_j v_s)^2$$

Procedemos en optimizar el parámetro x de la forma cuadrática anterior, resultando la siguiente expresión matemática:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{j+s \leq t+1} (x_{js} - x_j v_s)^2 = 0 \Rightarrow \sum_{s=1}^{t+1-j} (x_{js} - x_j v_s) v_s = 0 \quad \text{Entonces:} \quad x_j = \frac{\sum_{s=1}^{t+1-j} x_{js} v_s}{\sum_{s=1}^{t+1-j} v_s^2}.$$

Análogamente obtenemos el valor óptimo para v , denotado como:

$$v_s = \frac{\sum_{j=1}^{t+1-s} x_{js} x_j}{\sum_{j=1}^{t+1-s} x_j^2}$$

El sistema de ecuaciones es resuelto por iteración proponiendo un valor inicial $v_1 = \dots = v_t = 1/t$ y sujeto a la restricción de que la suma de proporciones es uno. En definitiva, el modelo de Vylder es una adaptación al concepto de Verbeek.

3.2. Métodos Estadísticos.

Considerar el arreglo rectangular de variables x expresado en el siguiente diagrama:

Año de pago				
Año de origen	1	2	...	t
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1t}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2t}
⋮
k	x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kt}

Diagrama 10 Variables observadas.

No necesariamente utilizaremos la estructura del camino del triángulo para realizar estimaciones en los problemas del IBNR como en el ejemplo de Verbeek, con base en la regresión lineal explicaremos siniestros ocurridos pero no reportados.

3.2.1. Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).

Considerar el modelo lineal que explica el fenómeno Y de siniestros no reportados en el año de origen mediante la combinación lineal de variables independientes en el sentido del álgebra lineal, entonces, el modelo básico de regresión lineal debe de cumplir los siguientes supuestos:

- $E(U|X) = 0$;
- $Cov(U_i|U_j) = 0$;
- $\sigma^2(U_i|X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Los parámetros desconocidos de la relación lineal son el objeto de la estimación. Proponemos un error bien comportado, de ahí que el problema minimice los errores y halle un B_0 que satisfaga:

$$\begin{aligned}
 \underset{B_0=b}{\text{Minimizar}} S(B_0) &= (Y - XB_0)'(Y - XB_0) \\
 &= Y'Y - B_0'X'Y - Y'XB_0 + B_0'X'XB_0 \\
 &= Y'Y - 2B_0'X'Y + B_0'X'XB_0 \\
 &= Y'Y - 2Y'XB_0 + B_0'X'XB_0
 \end{aligned}$$

La condición necesaria para mínimo es:

$$\frac{\partial S(B_0)}{\partial B_0} = -2X'Y + 2X'XB_0 = 0$$

Supongamos que b es solución, entonces b satisface las ecuaciones normales de mínimos cuadrados $X'Xb = X'Y$. Si X es de rango completo entonces $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$.
Aunado a lo anterior, enunciaremos los supuestos esenciales del modelo de Mínimos Cuadrados Ordinarios:

Supuesto 1

Naturaleza lineal de la relación $Y = XB + U$ (El modelo debe de estar bien estructurado);

Supuesto 2

La matriz de los regresores $X_{n \times k}$ es de rango k ($k < n$, n observaciones);

Supuesto 3

$$E[UU'|X] = \sigma^2 I$$

No existe correlación entre los errores y la varianza σ^2 es homocedástica;

Supuesto 4

X , Es una matriz conocida de constantes (regresores no estocásticos);

Supuesto 5

$U|X$, El vector de errores se distribuye como $N(0, \sigma^2 I)$.

El vector Y representa la variable dependiente, en el ejemplo de Verbeek la variable Y representaría el numero de reclamaciones que excedieron el limite de retención, el vector X las variables explicativas y el vector U de errores, la desventaja de este método reside en validar los supuestos de mínimos cuadrados ordinarios.

3.2.2. El Modelo de Regresión “Poisson”.

La construcción de este modelo nos ilustra de manera clara la modelación de un fenómeno aleatorio Y a través de una combinación lineal de variables independientes en el sentido del álgebra lineal, es evidente la gran similitud que existe por su naturaleza con el método de separación, sin embargo, las reclamaciones son expresadas en términos de los valores esperados del proceso Poisson de manera similar al modelo de Verbeek.

Considerar el diagrama 9 del método de separación con sus respectivos valores esperados, sacando logaritmos en dicho modelo podremos convertirlo en uno lineal siempre $x > 0$, es decir:

$$\ln(X_{js}) = \ln(r_s) + \ln(\lambda_{j+s-1}) + U_{js}, \quad j + s \leq t + 1. \text{ Donde: } U_{js} \text{ denota el término error.}$$

El modelo de regresión lineal es estructurado de la siguiente manera, los exponentes determinan la dimensión de los vectores:

$$Y^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \ 1\right)} = V^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \ 2t\right)} B^{(2t \ 1)} + U^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \ 1\right)}$$

Asumir el subsiguiente vector de $2t$ parámetros desconocidos:

$$B^t = (\ln(r_1), \dots, \ln(r_t), \ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_t))$$

- Y Representa el vector que contiene $t(t + 1)/2$ observaciones agrupadas;
- U Representa el vector de errores.

$$Y^t = (\ln(X_{11}), \dots, \ln(X_{1t}), \ln(X_{21}), \dots, \ln(X_{2,t-1}), \dots, \ln(X_{t1}))$$

$$U^t = (U_{11}, \dots, U_{1t}, U_{21}, \dots, U_{2,t-1}, \dots, U_{t1})$$

Para construir la matriz de diseño V consideraremos un caso particular y posteriormente lo generalizamos para t años calendarios. Planteemos el siguiente camino del triángulo:

Año origen	Año de pago		
	1	2	3
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	
3	x_{31}		

Entonces, la respectiva matriz de diseño V se delimita como:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalizando para cualquier realización, definimos la siguiente Matriz de diseño:

$$V^{\left(\frac{1}{2}t(t+1) \quad 2t\right)} = \begin{bmatrix} I^{(t,t)} & & & I^{(t,t)} \\ I^{(t-1,t-1)} & 0^{(t-1,1)} & 0^{(t-1,1)} & I^{(t-1,t-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I^{(t-s,t-s)} & 0^{(t-s,s)} & 0^{(t-s,s)} & I^{(t-s,t-s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I^{(1,1)} & 0^{(1,t-1)} & 0^{(1,t-1)} & I^{(1,1)} \end{bmatrix}$$

El modelo causa inconsistencias porque la solución no es única, por lo tanto restringimos de manera análoga al método de separación con $\Pi r = 1$ y definimos \tilde{V} y \tilde{B} omitiendo la primera columna en la matriz de diseño V y el primer elemento de la matriz B , entonces obtenemos el siguiente modelo:

$$Y^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \quad 1\right)} = \tilde{V}^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \quad 2t-1\right)} \tilde{B}^{(2t-1 \quad 1)} + U^{\left(\frac{t(t+1)}{2} \quad 1\right)}$$

La restricción nos ayuda a tener una solución óptima, además de reducir las dimensiones del modelo en cuestión, el parámetro r_1 es calculado de siguiente igualdad:

$Ln(r_2) + \dots + Ln(r_t) = Ln(r_2 r_3 \dots r_t) = Ln(1/r_1)$, de ahí que:

$$r_1 = \frac{1}{r_2 r_3 \dots r_t}$$

Finalmente, para estimar los parámetros de la matriz \tilde{B} procedemos a correr una regresión restringida, es decir, restringimos el parámetro intercepto a un valor nulo en el modelo de Mínimos Cuadrados Ordinarios y por ende obtenemos los estimadores de $\hat{\lambda}$ y $\hat{\rho}$, es evidente que los valores de las variables explicativas del modelo de regresión corresponden a datos dicotómicos $\{0,1\}$.

Calculados los parámetros del modelo de Regresión "Poisson" procedemos en extrapolar los valores lambda a través de un ajuste lineal u exponencial, por lo que, es conveniente utilizar graficas de dispersión para conocer la tendencia de manera similar al método de separación.

Existen técnicas estadísticas que pueden estimar los parámetros de esta ecuación, en concreto la inferencia Bayesiana, diseño de experimentos y máxima verosimilitud. Por lo que a mi respecta el método MCO es el más eficiente por la rapidez y fácil interpretación.

3.3. Modelos de Credibilidad IBNR.

Para entender los modelos de Credibilidad IBNR primeramente enunciamos el concepto general de la teoría de la Credibilidad y posteriormente describiremos los modelos IBNR de la teoría de la Credibilidad de Straub y Mack.

Las empresas aseguradoras formulan la prima convenida en la póliza con base en la experiencia contemplada, la pregunta es como ponderan las aseguradoras las reclamaciones en el portafolio de seguros.

Este problema es por tanto un conjunto de experiencias registradas en el sistema que determina la prima para el año siguiente, tomando en cuenta, no solamente la experiencia individual en el grupo si no también la experiencia colectiva. Existen dos casos extremos que estudia la Teoría de la Credibilidad:

- El primer caso, consiste en asignar la misma prima para cada contrato del portafolio, dicha prima es estimada por la media total \bar{X} de las reclamaciones, es decir, se plantea un portafolio de riesgos homogéneos el cual resulta poco práctico en situaciones reales y un mal negocio para el asegurador.
- En el segundo caso, definimos una prima respectiva a cada grupo j con base en el promedio de reclamaciones \bar{X}_j , en otras palabras, planteamos un portafolio heterogéneo de grupos homogéneos, pero esta situación es válida siempre que cada grupo j tenga suficiente experiencia contemplada.

Los buenos riesgos por ejemplo los riesgos que tengan una baja frecuencia y severidad por fundamentos de seguros no son asegurables⁶.

Aunado a lo anterior, ningún portafolio de contratos de seguros es completamente homogéneo ni totalmente heterogéneo, la problemática fue planteada a principios del siglo XX mediante la ponderación de dichas situaciones extremas, denotada en la siguiente ecuación.

$$\text{Prima de Credibilidad} = Z_j \bar{X}_j + (1 - Z_j) \bar{X}$$

Donde:

La variable Z_j denota el factor de Credibilidad, dicho factor representa la experiencia individual de la celda j .

⁶ Frecuencia:

Número de ocurrencias o eventos respecto al total de unidades de riesgo expuestas, en un período de tiempo.

⁵ Severidad:

Monto de los daños o pérdidas.

Existen dos métodos de evaluación de Z_j , la primera es llamada como limited fluctuation credibility theory, el segundo método se conoce como the greatest accuracy credibility theory.

Los riesgos de la celda j tienen propiedades únicas y semejantes a otras celdas, la teoría de la Credibilidad estudia la ponderación del factor de Credibilidad para cada celda, los modelos de Credibilidad IBNR de Mack y De Vylder asumen que la distribución de las variables aleatorias \bar{X}_j dependa de un parámetro θ_j .

Conforme a lo mencionado dicho parámetro la teoría de la Credibilidad lo interpreta como la realización de un parámetro θ_j en Θ_j . La diferencia entre años de origen es caracterizado por la realización del parámetro de riesgo θ_j , suponiendo la misma distribución estructural de la realización para todos los años.

En resumen los modelos de Credibilidad IBNR se desprenden del concepto de ponderación entre parámetros de riesgo.

3.3.1. Modelo de la teoría de la Credibilidad de Straub.

El modelo de la teoría de la credibilidad de Straub considera el costo de incendio x_{jr} , equivalente al monto total de la reclamación dividido por el volumen de la prima subyacente. Cuando satisface la desigualdad $j+r \leq t+1$, representa la experiencia ó valores observados, por otro lado, cuando $j+r > t+1$ denota los costos futuros de incendio.

Supongamos que x_{jr} son variables aleatorias que satisfacen las **condiciones de Straub** denotadas estadísticamente por:

(S1) Las variables aleatorias x_{js} y $x_{j's'}$ son independientes siempre $j \neq j'$;

(S2) $E(x_{js}) = e_s \quad j, s = 1, \dots, t$;

(S3) $\text{cov}(x_{js}, x_{j's'}) = \frac{c_{ss'}}{P_j} \quad j = 1, \dots, t$.

Donde P_j denota el volumen de la prima subyacente del año de origen j , y C es una matriz simétrica. Sujeto a estas condiciones afrontamos un problema de modelos lineales multidimensionales de Credibilidad además de estimar valores futuros y optimizar en el sentido de error cuadrático medio.

El conjunto $P = \{x_{js} | j + s \leq t + 1\}$ denota las variables observadas en los primeros t años calendarios. Antes de enunciar el teorema de Straub, consideremos el siguiente resultado.

Condiciones de regularidad.

Sea x_1, \dots, x_n una muestra aleatoria con función de densidad continua $f(\cdot, \theta)$. Definamos $T = t(x_1, \dots, x_n)$ un estadístico o estimador no sesgado de $\tau(\theta)$ donde $\theta \in \Theta$ (Espacio de Parámetros contenido en la recta real), el desarrollo para las funciones de densidad discreta es totalmente análogo. Denotamos a las condiciones de regularidad como:

1. $\exists \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) \quad \forall x, \theta$;
2. $\frac{\partial}{\partial \theta} \int \dots \int t(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int t(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) dx_1 \dots dx_n$;
3. $0 < E \left[\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x, \theta) \right]^2 \right] < \infty$.

Teorema: Estimador IBNR de Straub (Error Cuadrático Medio).

Sujeto a las hipótesis (S1), (S2), y (S3), el estimador óptimo lineal IBNR de Straub se define como:

$$\mu_{qm} = \sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} x_{js}$$

Denotamos la esperanza condicional como $E[x_{qm}|p]$ $q+m > t+1$, dicha esperanza es minimizada respecto al Error Cuadrático Medio sujeto a $E[\mu_{qm}] = E[x_{qm}] = e_m$. El estimador IBNR de Straub para futuros años calendarios particularmente para el año calendario $q+m-1$ se define como:

$$\hat{\mu}_{qm} = \varepsilon \sum_{i=1}^t P_i \underline{e}'_i C_i^{-1} \underline{X}_i + \underline{c}'_{mq} C_q^{-1} \underline{X}_q$$

Donde:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{e_m - \underline{c}'_{mq} C_q^{-1} \underline{e}_q}{\sum_i P_i \underline{e}'_i C_i^{-1} \underline{e}_i} & \alpha_r &= (\alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,t-r+1})' \\ \underline{e}_r &= (e_{1,r}, \dots, e_{t-r+1,r})' & \underline{c}_{jr} &= (c_{j1}, \dots, c_{j,t-r+1})' \\ C_r &= (\underline{c}_{1,r}, \dots, \underline{c}_{t-r+1,r}) & \underline{X}_r &= (x_{r,1}, \dots, x_{r,t-r+1})' \end{aligned}$$

Demostración.

Primeramente supongamos que las variables x_{jr} satisfacen las condiciones de regularidad, posteriormente utilizamos los multiplicadores de Lagrange para minimizar el error cuadrático medio y por ello obtener el estimador IBNR de Straub. Consideremos el siguiente multiplicador de Lagrange:

$$\Phi_{qm} = E(\{E[x_{qm}|p] - \mu_{qm}\}^2) + 2\varepsilon E[e_m - \mu_{qm}]$$

Derivando la función de Lagrange con respecto al parámetro α sujeto a la restricción propuesta, obtenemos los siguientes términos:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{j's'}} \Phi_{qm} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{j's'}} E \left[\{E[x_{qm}|p] - E[x_{qm}] - \sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} (x_{js} - E[x_{js}])\}^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_{j's'}} 2\varepsilon \left[e_m - \sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} E[x_{js}] \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{j's'}} \Phi_{qm} = E \left[\{E[x_{qm}|p] - E[x_{qm}] - \sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} (x_{js} - E[x_{js}])\} (x_{j's'} - E[x_{j's'}]) \right] + \varepsilon E[x_{j's'}] = 0$$

Implicando:

$$E[(E[x_{qm}|p] - E[x_{qm}])(x_{j's'} - E[x_{j's'}])] = \sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} E[(x_{js} - E[x_{js}])(x_{j's'} - E[x_{j's'}])] - \varepsilon E[x_{j's'}]$$

Sustituyendo: r por s' , s por j' y por Radon-Nikodym obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E[(E[x_{qm}|p] - E[x_{qm}])(x_{sr} - E[x_{sr}])] &= \sum_{s+i \leq t+1} \alpha_{si} E[(x_{si} - E[x_{si}])(x_{sr} - E[x_{sr}])] - \varepsilon E[x_{sr}] \\ &= E[(x_{qm} - E[x_{qm}])(x_{sr} - E[x_{sr}])] \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades (S2) y (S3), la expresión anterior puede ser descrita como:

$$\frac{c_{mr}}{P_s} \delta_{qs} = \sum_{i=1}^{t-s+1} \frac{c_{ir}}{P_s} \alpha_{si} - \varepsilon e_r \quad r+s \leq t+1$$

En el que:

$$\sum_{j+s \leq t+1} \alpha_{js} e_s = e_m$$

Consideremos los vectores propuestos por Straub: α_j , e_j , c_{mq} y C_j . Entonces podemos expresar el siguiente arreglo de ecuaciones multidimensionales.

$$C_j \alpha_j = (c_{1j}, \dots, c_{t-j+1,j}) \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \vdots \\ \alpha_{j,t-j+1} \end{pmatrix} = c_{1j} \alpha_{j1} + \dots + c_{t-j+1,j} \alpha_{j,t-j+1} = \sum_{i=1}^{t-j+1} \alpha_{ji} c_{ij}$$

Por otro lado, podemos expresar el arreglo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{t-j+1} \alpha_{ji} c_{ij} = \sum_{i=1}^{t-j+1} \alpha_{ji} \begin{pmatrix} c_{i,1} \\ \vdots \\ c_{i,t-j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{t-j+1} \alpha_{ji} c_{i,1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{t-j+1} \alpha_{ji} c_{i,t-j+1} \end{pmatrix} = \varepsilon P_j \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{t-j+1} \end{pmatrix} + \delta_{qj} \begin{pmatrix} c_{m1} \\ \vdots \\ c_{m,t-q+1} \end{pmatrix} = \varepsilon P_j e_j + \delta_{qj} c_{mq}$$

$$C_j \alpha_j = \varepsilon P_j e_j + \delta_{qj} c_{mq}$$

En general la matriz de Covarianza es no singular, dicho concepto es un supuesto de los modelos de la teoría de la credibilidad, entonces:

$$\alpha_j = \varepsilon P_j C_j^{-1} e_j + \delta_{qj} C_j^{-1} c_{mq} \quad j = 1, \dots, t.$$

Utilizando la propiedad de simetría de la matriz de Covarianza (transponiendo) y sustituyendo i por j, obtenemos:

$$\alpha'_i = \varepsilon P_i e'_i C_i^{-1} + \delta_{qi} c'_{mq} C_i^{-1}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por e_j y sumando para cada i, se obtiene la ecuación del parámetro de Lagrange.

$$\sum_i \alpha'_i e_i = \sum_i \left(\alpha_{i1} \dots \alpha_{i,t-i+1} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{t-i+1} \end{pmatrix} = \sum_{i+j \leq t+1} \alpha_{ij} e_j = e_m$$

$$\Rightarrow e_m = \varepsilon \sum_i P_i e'_i C_i^{-1} e_i + c'_{mq} C_q^{-1} e_q$$

Entonces:

$$\varepsilon = \frac{e_m - c'_{mq} C_q^{-1} e_q}{\sum_i P_i e'_i C_i^{-1} e_i}$$

El estimador para $E(x_{qm} | p)$ lo denotamos como:

$$\hat{\mu}_{qm} = \sum_{i=1}^t \alpha'_i \cdot X_i = \sum_{i=1}^t [\varepsilon P_i e'_i C_i^{-1} + \delta_{qi} c'_{mq} C_i^{-1}] \cdot X_i$$

Es decir:

$$\hat{\mu}_{qm} = \varepsilon \sum_{i=1}^t P_i e'_i C_i^{-1} \cdot X_i + c'_{mq} C_q^{-1} \cdot X_q \quad \text{Q.E.D.}$$

El estimador del teorema anterior es insesgado y optimo en el sentido de error cuadrático medio.

3.3.2. Modelo de la teoría de la Credibilidad de Mack.

El modelo IBNR de Mack es una aplicación del modelo de la teoría de la Credibilidad de Bühlmann-Straub, el propósito de enunciar este concepto es el de facilitar la comprensión del modelo IBNR de Mack. El modelo de Credibilidad de Bühlmann-Straub explica la variable X_{jt} la cual representa la reclamación del contrato j en el periodo t en términos de una combinación lineal de tres componentes:

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt} \quad j = 1, \dots, J, \quad t = 1, \dots, T + 1.$$

La igualdad anterior satisface los supuestos de Bühlmann-Straub denotados por:

- m : Es el valor esperado del monto de la reclamación de una póliza arbitraria en el portafolio;
- Ξ_j : Denota la desviación aleatoria de m especificada para el contrato j (factor de riesgo para el contrato j), dicha variable tiene media cero y varianza a , además idéntica distribución;
- Ξ_{jt} : Denota la desviación correspondiente al año t del promedio a largo plazo, con $\text{var}(\Xi_{jt}) = s^2/w_{jt}$. Cabe señalar que la varianza de dicha variable diferencia el modelo de Bühlmann-Straub con el modelo de balance de Bühlmann, en otras palabras w_{jt} es un factor de ajuste atribuido a la observación X_{jt} ;
- Ξ_j y Ξ_{jt} : Son variables aleatorias independientes;
- El factor $m + \Xi_j$ denota la Prima de Riesgo;
- Las Ξ_{jtk} son independientes e igualmente distribuidas con media cero y varianza s^2 , dicha variable aleatoria expresa la desviación de la Prima de Riesgo para el contrato individual k , en el periodo t y en el grupo j .

Enunciemos el siguiente teorema sin demostración, posteriormente utilizaremos dicho modelo efectuando ciertos ajustes y con ello habremos demostrado el modelo IBNR de Mack.

Teorema: Modelo de Bühlmann-Straub.

El mejor estimador lineal homogéneo de la Prima de Riesgo, resulta de minimizar el siguiente Error Cuadrático Medio (ECM) dado por:

$$\begin{aligned} & \underset{h_{it}}{\text{Min}} E \left[\left\{ m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{it} X_{it} \right\}^2 \right] \\ & \text{S.A. } E[m + \Xi_j] = \sum_{i,t} h_{it} E(X_{it}) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} X_{jw} &= \frac{\sum_{t=1}^T w_{jt}}{\sum_{t=1}^T w_{j\Sigma}} X_{jt} & w_{j\Sigma} &= \sum_{t=1}^T w_{jt} & X_{zw} &= \sum_{j=1}^J \frac{z_j}{z_\Sigma} X_{jw} & z_\Sigma &= \sum_{j=1}^J z_j \\ z_j &= \frac{w_{j\Sigma}}{\frac{s^2}{a} + w_{j\Sigma}} \end{aligned}$$

Los valores optimizados desglosan el siguiente estimador lineal óptimo en el sentido ECM de la prima de riesgo ($m + \Xi_j$), denotado por:

$$\text{Estimador de la Prima de Riesgo} = z_j X_{jw} + (1 - z_j) X_{zw}$$

Corolario: Estimador no sesgado del modelo de Bühlmann-Straub.

Se propone el siguiente estimador no sesgado del modelo de Bühlmann-Straub como:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} w_{jt} (X_{jt} - X_{jw})^2$$

Considerando:

$$\text{var}(X_{jt}) = \text{var}(m + \Xi_j + \Xi_{jt}) = \text{var}(\Xi_j) + \text{var}(\Xi_{jt}) = a + \frac{s^2}{w_{jt}}$$

$$\text{var}(X_{jw}) = \sum_{t=1}^T \frac{(w_{jt})^2}{(\sum_{t=1}^T w_{j\Sigma})^2} \text{var}(X_{jt}) = a \frac{\sum w_{jt}^2}{w_{j\Sigma}^2} + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \approx a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 J(T-1)E(\hat{s}^2) &= \sum_{j,t} w_{jt} \{ \text{var}(X_{jt}) + \text{var}(X_{jw}) - 2 \text{cov}[X_{jt}, X_{jw}] \} \\
 &= \sum_{j,t} w_{jt} \left\{ a + \frac{s^2}{w_{jt}} + a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} - 2 \left(a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right) \right\} \\
 &= \sum_{j,t} w_{jt} \left(\frac{s^2}{w_{jt}} - \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right) = s^2 \sum_{j,t} \left(1 - \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} \right) \\
 &= s^2 (JT - J) = s^2 J(T-1)
 \end{aligned}$$

Antes de enunciar el modelo IBNR de Mack, se enuncian algunas conjeturas del **Modelo IBNR de la teoría de la Credibilidad De Vylder**.

(Dv1) Los vectores aleatorios $(\theta_1, \underline{X}_1), \dots, (\theta_k, \underline{X}_k)$ son independientes, además la estructura de las variables $\theta_1, \dots, \theta_k$ son independientes e idénticamente distribuidas;

(Dv2) El vector \underline{X}_j se define como $\underline{X}_j = B(\theta_j) \underline{Y}_j$; donde $B(\theta_j)$ es una función escalar y \underline{Y}_j es un vector desconocido con valor esperado $E[\underline{Y}_j] = \underline{Y}_j^0$. Los vectores \underline{Y}_j y θ_j son independientes, implicando $E[\underline{X}_j | \theta_j] = \underline{Y}_j^0 B(\theta_j)$ además T_j representa el conjunto de índices de los años de desarrollo respectivo al año de origen j , en el camino del triángulo;

(Dv3) $\text{cov}(\underline{X}_j | \theta_j) = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{p_j} I_j$; donde p_j es un valor conocido respectivo al año de origen.

El modelo de la teoría de la Credibilidad de Mack es una adaptación del supuesto (Dv3), es decir, en el Modelo de la teoría de la Credibilidad De Vylder la varianza es independiente del año de desarrollo q . El argumento en contra de dicho supuesto se da especialmente en el seguro de responsabilidad Civil, Mack indicó las siguientes dos razones en el año de 1990.

1. Las pérdidas no se manifiestan hasta años posteriores de la ocurrencia, por ejemplo, los defectos en productos o errores hechos por Arquitectos u Notarios.
2. La dificultad de establecer el monto de la reclamación en periodos largos, para ejemplificar considérese tratamientos largos de medicación o de rehabilitación.

Por este par de razones Mack propone la siguiente adaptación de la varianza:

$$\left[\text{cov}(\underline{X}_j | \theta_j) \right]_{jq} = \text{var}[x_{jq} | \theta_j] = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{p_j} y^{2-\alpha}_q \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Si $\alpha = 2$ se obtiene el modelo De Vylder. **El modelo IBNR de Mack** propone los siguientes supuestos análogos al modelo IBNR de credibilidad De Vylder:

(M1) Los vectores aleatorios $(\theta_1, X_1), \dots, (\theta_k, X_k)$ son independientes, además la estructura de las variables $\theta_1, \dots, \theta_k$ son independientes e idénticamente distribuidas;

(M2) $E[x_{jq} | \theta_j] = y_q B(\theta_j)$; Simplificamos expresando $b = E[B(\theta_j)]$;

(M3) $\text{cov}(\underline{X}_j | \theta_j) = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{p_j} Y_\alpha$; donde Y_α es una matriz diagonal con elementos $y^{2-\alpha}_i$ para

$i = 1, \dots, t$.

$$[Y_\alpha]_{iq} = \delta_{iq} \cdot y^{2-\alpha}_i$$

Estos resultados satisfacen las condiciones del Modelo de prima de riesgo de Bühlmann-Straub, por esta razón podremos enunciar y demostrar con base en dicho modelo el teorema IBNR de la Teoría de la Credibilidad de Mack.

Teorema: Modelo de Credibilidad IBNR de Mack.

Sujeto a los supuestos de Mack (M1)-(M3) y a la estructura de los parámetros \tilde{y}_q , $\text{var}(\tilde{B}(\theta_j)) = a$ y $E[\tilde{\sigma}^2(\theta_j)] = s^2$, el estimador IBNR de la Credibilidad de Mack es definido para el año de origen j y año de desarrollo q , como:

$$\hat{x}_{jq} = \tilde{y}_q (\tilde{z}_j \tilde{b}_j + (1 - \tilde{z}_j))$$

En el que:

$$\tilde{b}_j = \frac{\sum_{q \in T_j} x_{jq} \tilde{y}_q^{\alpha-1}}{\sum_{q \in T_j} \tilde{y}_q^\alpha} \quad z_j = \frac{p_j \tilde{v}_j}{p_j \tilde{v}_j + \frac{s^2}{a}} \quad \tilde{v}_j = \sum_{q \in T_j} \tilde{y}_q^\alpha.$$

Demostración.

Por el axioma de elección obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \text{var}[\tilde{B}(\theta_j)] &\equiv \text{var}(\Xi_j) = a \\ E[\tilde{\sigma}^2(\theta_j)] &\equiv E[(\Xi_{jtk})^2] = \text{var}(\Xi_{jtk}) = s^2 \end{aligned}$$

Del supuesto (M2) obtenemos el siguiente resultado:

$$E[x_{jq}] = E[E[x_{jq} | \theta_j]] = y_q E[B(\theta_j)] = y_q b = \tilde{y}_q$$

Sea $\tilde{x}_{jq} = \frac{x_{jq}}{\tilde{y}_q}$, entonces las conjeturas (M2) y (M3) podrán describirse como:

$$(M2') \quad E[\tilde{x}_{jq} | \theta_j] = \frac{y_q B(\theta_j)}{y_q b} = \frac{B(\theta_j)}{b} = \tilde{B}(\theta_j);$$

$$\begin{aligned} (M3') \quad [\text{cov}(\tilde{X}_j | \theta_j)]_{jq} &= \text{cov}(\tilde{x}_{jq} | \theta_j) = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{\tilde{y}_q^2 p_j} [Y_\alpha]_{jq} = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{y_q^2 b^2 p_j} [y^{2-\alpha}] \\ &= \frac{\sigma^2(\theta_j)}{y_q^\alpha b^{2-\alpha} p_j} = \frac{\tilde{\sigma}^2(\theta_j)}{y_q^\alpha p_j} = \frac{\tilde{\sigma}^2(\theta_j)}{\tilde{y}_q^\alpha p_j}. \end{aligned}$$

En el cual:

$$\tilde{\sigma}^2(\theta_j) = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{b^{2-\alpha}}$$

El planteamiento anterior satisface los supuestos del modelo de Bühlmann-Straub, sustituyendo $w_{jq} = p_j \tilde{y}_q^\alpha$ en las igualdades de Bühlmann-Straub podremos obtener la ecuación de Credibilidad de Mack. Del modelo de Bühlmann-Straub utilizamos lo siguiente:

$$z_j = \frac{w_{j\Sigma}}{\frac{s^2}{a} + w_{j\Sigma}} \quad w_{j\Sigma} = \sum_{q \in T_j} w_{jq} \quad \tilde{x}_{jw} = \sum_{q \in T_j} \frac{w_{jq}}{w_{j\Sigma}} \tilde{x}_{jq}$$

Por otro lado

$$p_j \tilde{v}_j = \sum_{q \in T_j} p_j \tilde{y}_q^\alpha = w_{j\Sigma}$$

Mack ajusta el modelo de Bühlmann-Straub, implicando las siguientes igualdades:

$$\tilde{z}_j = \frac{p_j \tilde{v}_j}{\frac{s^2}{a} + p_j \tilde{v}_j}$$

$$\tilde{b}_j = \sum_{q \in T_j} \frac{p_j \tilde{y}_q^\alpha}{p_j \tilde{v}_j} \tilde{x}_{jq} = \sum_{q \in T_j} \frac{\tilde{y}_q^\alpha \tilde{x}_{jq}}{\tilde{v}_j} = \sum_{q \in T_j} \frac{x_{jq} \tilde{y}_q^{\alpha-1}}{\tilde{v}_j}.$$

Por lo tanto, del resultado anterior podremos obtener el componente de riesgo propuesto por Mack óptimo en el sentido de error cuadrático medio, correspondiente al año de origen j denotado por:

$$\Psi_j = (\tilde{z}_j \tilde{b}_j + (1 - \tilde{z}_j))$$

Multiplicando el término anterior por la componente de desarrollo \tilde{y}_q , habremos demostrado el modelo IBNR de la Teoría de la Credibilidad de Mack, es decir:

$$\hat{x}_{jq} = \tilde{y}_q \Psi_j$$

En el teorema anterior es necesario estimar los parámetros a , \tilde{y}_q y s^2 , por ende enunciamos los siguientes estimadores no sesgados para cada parámetro.

Corolario: Estimador de \tilde{y}_q

Un estimador no sesgado de \tilde{y}_q es sugerido como:

$$\hat{\tilde{y}}_q = \frac{\sum_{j \in K_s} p_j x_{jq}}{\sum_{j \in K_s} p_j} \quad s = 1, \dots, t.$$

Demostración.

Ejercicio para el lector.

Corolario: Estimador de s^2 .

Un estimador no sesgado de s^2 es propuesto por:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k \sum_{q \in T_j} p_j \tilde{y}_q^\alpha (\tilde{x}_{jq} - \tilde{x}_{jw})^2$$

Donde:

$$m = \sum_{j=1}^k (\#T_j - 1)$$

Demostración.

El estimador no sesgado del modelo de Bühlmann-Straub se define como:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} w_{jt} (X_{jt} - X_{jw})^2$$

Entonces, sustituyendo $w_{jq} = p_j \tilde{y}_q^\alpha$ y los factores correspondientes obtenemos la siguiente expresión:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j,q} p_j \tilde{y}_q^\alpha (\tilde{x}_{jq} - \tilde{x}_{jw})^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k \sum_{q \in T_j} p_j \tilde{y}_q^\alpha (\tilde{x}_{jq} - \tilde{x}_{jw})^2$$

Con base en el corolario del modelo de Bühlmann-Straub, el estimador anterior es no sesgado, recordando que T_j denota el conjunto de índices de los años de desarrollo respectivo a cada año de origen j en el camino del triángulo, si T_j fuera constante claramente $m = k(\#T_j - 1)$ lo cual *no es posible* por la naturaleza del camino del triángulo.

Corolario: Estimador del parámetro a .

Un estimador no sesgado de a es dado por:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k p_j \tilde{v}_j (\tilde{b}_j - 1)^2 - k s^2 \right)$$

Donde:

$$n = \sum_{j=1}^k p_j \tilde{v}_j$$

Demostración.

$$E[\tilde{b}_j] = \sum_{q \in T_j} \frac{E[x_{jq}] \tilde{y}_q^{\alpha-1}}{\tilde{v}_j} = \frac{1}{\tilde{v}_j} \sum_{q \in T_j} \tilde{y}_q \tilde{y}_q^{\alpha-1} = 1$$

$$E[\hat{a}] = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k p_j \bar{v}_j E[(\tilde{b}_j - 1)^2] - ks^2 \right)$$

Por otro lado de Bühlmann-Straub se conoce:

$$\text{var}(\tilde{b}_j) = a + \frac{s^2}{p_j \bar{v}_j}$$

Entonces

$$E[\hat{a}] = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k p_j \bar{v}_j \left(a + \frac{s^2}{p_j \bar{v}_j} \right) - ks^2 \right) = \frac{1}{n} (an + ks^2 - ks^2) = a.$$

En resumen el modelo de Credibilidad IBNR de Mack es una aplicación teórica del modelo Bühlmann-Straub, por otro lado, el modelo de Credibilidad De Vylder se puede interpretar como un caso particular del modelo de Mack. En el siguiente capítulo abordaremos problemas prácticos en los que es indispensable recurrir a las técnicas del IBNR, describiendo cada método seleccionado.

3.4. Criterio de selección de los modelos IBNR.

En esta sección describiremos las ventajas y desventajas de las técnicas del IBNR enunciadas en las secciones anteriores, la descripción de las técnicas ayudara al lector en la selección del modelo más conveniente acorde a la naturaleza del problema en estudio.

Métodos de Suavización

Técnica de la Cadena Escalón.

Ventajas:

El modelo de la Cadena Escalón no supone distribución aleatoria en los valores observados, el supuesto fundamental es la proporcionalidad de las columnas, dicho supuesto se puede cumplir acumulando las observaciones por año de origen.

Desventajas:

Es una técnica de Suavización cuyo fin es extrapolar los valores observados con base en promedios ponderados. La técnica de la Cadena Escalón debe ser seleccionada como modelo tendencia, es decir, debemos analizar si los datos observados cumplen con los supuestos de algún otro modelo teóricamente más apto en la explicación del problema.

Técnica de Variación de la Cadena Escalón.**Ventajas:**

El modelo de Variación de la Cadena Escalón es una extensión conceptual del modelo de la Cadena Escalón, los ajustes realizados se orientan en la construcción de un nuevo triángulo de radios o razones por año de desarrollo. En algunas ocasiones la aplicación de las variaciones nos ayuda reducir el margen de error mediante otra suavización adicional al de la Cadena Escalón.

Desventajas:

Las variaciones de la Cadena Escalón suponen tendencia lineal o exponencial en el triángulo de radios, en otras palabras, dicha adaptación requiere cumplir más condiciones en su estructura.

Técnica de Mínimos Cuadrados De Vylder.**Ventajas:**

La técnica de Mínimos Cuadrados De Vylder al ser una técnica de suavización no supone algún tipo de distribución aleatoria en la realización del triángulo, el modelo De Vylder supone valores no acumulados de pérdidas, además, los valores observados se proponen igual a la multiplicación de dos factores que representan el monto de la reclamación respectivo a cierto año de origen y la proporción del total de la reclamación establecida en el año de desarrollo, respectivamente.

Desventajas:

Es una técnica iterativa en el que se debe establecer la convergencia de los parámetros, sujeta a la restricción propuesta por De Vylder.

Técnica de Separación.

Ventajas:

Los resultados derivados en el modelo Aritmético de Separación coinciden con el modelo de Verbeek (estimadores óptimos en el sentido de máxima verosimilitud). En la realización del triángulo la estructura de los valores observados pueden ser acumulables o no, dichas observaciones resultan del producto de dos factores, el parámetro lambda que describe la evolución por año calendario y la fracción de la reclamación por año de desarrollo.

Desventajas:

Tiene una estructura pseudo aleatoria además se debe encontrar la tendencia de los parámetros estimados.

Métodos estadísticos

El modelo de Regresión "Poisson"

Ventajas:

El modelo de Regresión "Poisson" es estructurado con fundamento en el modelo de Verbeek, además su diseño es por mínimos cuadrados ordinarios.

Desventajas:

Supone las reclamaciones en términos de los valores esperados de la distribución Poisson en el recorrido del triángulo, por ende, debe de satisfacer más condiciones, otro detrimento se origina en la estimación de los parámetros por mínimos cuadrados ordinarios sujeto a la restricción propuesta.

Otros Métodos

Ventajas:

Los valores observados en el camino del triángulo pueden ser planteados como un modelo lineal de componentes o factores que explican los siniestros no reportados, mediante métodos estadísticos como son los Mínimos Cuadrados Ordinarios y el filtro de Kalman.

Desventajas:

Los modelos descritos son técnicas no especializadas en la estructura del camino del triángulo.

Métodos de Credibilidad

Técnica de Straub y de Mack

Ventajas:

La técnica IBNR de Straub es un modelo multidimensional lineal de naturaleza aleatoria. El modelo de Straub es un estimador no sesgado óptimo en el sentido de Error Cuadrático Medio de las futuras observaciones.

El modelo de Mack es un caso particular del modelo de Bühlmann-Straub y general del modelo De Vylder (supuesto de varianzas), por ende, los estimadores IBNR de Mack son óptimos estadísticamente en el sentido de Error Cuadrático Medio.

Desventajas:

Los valores observados en el camino del triángulo deben satisfacer los tres supuestos de Straub y de Mack respectivamente, además, el cálculo numérico de software es complejo en la situación de no contar con un programa especializado en IBNR.

Capítulo 4

4. Aplicaciones de las Técnicas del IBNR

En este capítulo describiremos ejemplos prácticos en los que existe la necesidad de utilizar estas técnicas. Los modelos IBNR son un utensilio de pronóstico, dichas técnicas tienen un extenso campo de aplicación de manera que el número de aplicaciones posibles es mucho mayor del conocido hasta ahora, las más comunes se centra en el estudio:

- Calculo de reservas de IBNR en automóviles;
- Proyección de desarrollo de pérdidas en los ramos de daños;
- IBNR para Responsabilidad Civil Profesional;
- Estimación del número de recuperaciones de crédito, en los Bancos;
- “Coeficientes de Actividad” después de la edad normal de retiro.

Los modelos IBNR se aplican acorde a la naturaleza del tipo de reclamación. En el capítulo anterior observamos factores significativos de cada modelo, por ejemplo:

- Inflación ajustada, en el método de Separación representado por λ ;
- Fracción de la pérdida que es pagada del monto total reclamado;
- El pago por unidad de riesgo, considerando los montos de reclamaciones como x_{js}/n_j , donde n_j es el estimado del número de reclamaciones del respectivo año de origen j.

Es muy importante conocer la distribución de probabilidad en el camino del triángulo, por ello es conveniente utilizar pruebas de bondad de ajuste. La estadística de Kolmogorov Smirnov, la cual considera como estadístico de prueba la desviación máxima absoluta existente entre los valores teóricos y los muestrales sobre las funciones de distribución, tiene la propiedad de ser ajustable a muestras pequeñas por lo que es adecuada su aplicación en el ajuste de reclamaciones.

Los resultados numéricos ⁷pueden ser obtenidos mediante un software especializado en IBNR llamado LORE (**loss reserving**), donde se presentan 14 diferentes clases de los métodos de IBNR. La variabilidad depende de las hipótesis establecidas en el modelo, dichas técnicas son:

1. CL Chain Ladder Method;
2. CL 1 Chain Ladder Method, variation I;
3. CL 2 Chain Ladder Method, variation II;
4. CL 3 Chain Ladder Method, variation III;
5. CL 4 Chain Ladder Method, variation IV;
6. CL 5 Chain Ladder Method, variation V;
7. CL 6 Chain Ladder Method, variation VI;
8. ASL Arithmetic Separation method, linear extrapolation;
9. ASE Arithmetic Separation method, exponential extrapolation;
10. GSL Geometric Separation Method, Linear extrapolation;
11. GSE Geometric Separation Method, exponential extrapolation;
12. DevLS De Vylder Least Squares Method;
13. M KIT Method of Mack, iterative procedure;
14. DevIT De Vylder's Credibility Method, iterative procedure.

Las diversas aplicaciones del computador LORE (**loss reserving**) se orientan en el diseño de la reserva SONR, dichas aplicaciones abordan situaciones en los que es necesario analizar el comportamiento de la variable a explicar.

⁷ Los resultados numéricos del presente capítulo son obtenidos mediante el sistema SAS y Excel, se sugiere al lector la comprobación de los mismos.

4.1. Cálculo de la Reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados.

El método de cálculo de la Reserva de Siniestros Ocurridos No Reportados (SONR), se describe con base en la estadística de Siniestros de los primeros t años observados, se estructura la matriz de siniestralidad reclamada (realización del triángulo), denotado en el siguiente diagrama:

Siniestralidad Reclamada					
Año de origen	1	2	...	$t-1$	t
1	m_{11}	m_{12}	...	$m_{1,t-1}$	m_{1t}
2	m_{21}	m_{22}	...	$m_{2,t-1}$	
⋮		
⋮			
t	m_{t1}				

Diagrama 11 Siniestralidad reclamada

Donde: m_{ij} = Monto de siniestralidad reclamada en el periodo de desarrollo j de siniestros ocurridos en el periodo de origen i . Procedemos a calcular la matriz de siniestralidad neta acumulada ó monto neto acumulado.

Siniestralidad acumulada						
Año de origen	1	2	...	$t-1$	t	$t+1$
1	mA_{11}	mA_{12}	...	$mA_{1,t-1}$	mA_{1t}	$mA_{1,t+1}$
2	mA_{21}	mA_{22}	...	$mA_{2,t-1}$		
⋮			
⋮				
t	mA_{t1}					

Diagrama 12 Siniestralidad acumulada.

Donde:

mA_{ij} = Monto neto acumulado en el período de desarrollo j de Siniestros Ocurridos en el periodo de origen i ;

$$mA_{1,t+1} = mA_{1,t}(1 + FACT);$$

$FACT$ =Factor Aplicable que determina el desarrollo del siniestro en el primer año de origen, dicho factor es un porcentaje estimado por el experto, por otro lado, si no se cuenta con tal información lo más conveniente es proceder de manera análoga al planteamiento mostrado en esta sección pero evidentemente suprimiendo la columna $t + 1$ ⁸.

Primeramente determinamos la matriz de Siniestralidad acumulada futura acorde a la elección de la técnica IBNR adecuada, posteriormente calculamos las diferencias entre los montos futuros de siniestralidad acumulada en períodos de desarrollo consecutivos, es decir, primeramente diferenciamos los montos netos futuros acumulados entre los años calendarios t y $t + 1$, y de manera consecutiva diferenciamos hasta el año calendario $2t$. La matriz resultante de diferencias entre montos futuros acumulados por año calendario presenta la siguiente estructura:

Siniestralidad Futura							
Año de origen	1	2	...	$t - 1$	t	$t + 1$	Reserva para reclamos futuros
1						$mF_{1,t+1}$	$SONR_1^d$
2					$mF_{2,t}$	$mF_{2,t+1}$	$SONR_2^d$
⋮			
$t - 1$...	$mF_{t-1,t-1}$	$mF_{t-1,t}$	$mF_{t-1,t+1}$	$SONR_{t-1}^d$
t		mF_{t2}	...	$mF_{t,t-1}$	$mF_{t,t}$	$mF_{t,t+1}$	$SONR_t^d$

Diagrama 13 Siniestralidad futura.

⁸ Factor Aplicable: porcentaje que es aplicado para determinar la siniestralidad de un año inmediato posterior al primer año de origen, con el fin de generar la reserva correspondiente.

Donde:

mF_{ij} = Monto Futuro de Siniestralidad por reclamar en el período de desarrollo j , por siniestros ocurridos en el período de origen i ;

$SONR_i^d$ = Reserva de Siniestros Ocurridos No Reportados Directos para el período de Origen i .

Acorde a lo anterior, la reserva de Siniestros Ocurridos No Reportados Directos para el período de Origen i , se determina como la suma lateral denotada por:

$$SONR_i^d = \sum_{j=t+2-i}^{t+1} mF_{i,j}, i = 1, \dots, t.$$

Cabe señalar la importancia del reaseguro en la participación del riesgo, debido a que cierta proporción de la pérdida es precisamente recuperada por este concepto. Asimismo, la Reserva de Siniestros Ocurridos No Reportados de Retención (límite de retención de la empresa aseguradora) correspondiente a cada período de origen i , se obtendrá aplicando la siguiente fórmula:

$$SONR_i^R = SONR_i^d (1 - FREAS_i)$$

Donde:

$FREAS_i$ = Porcentaje estimado de recuperación de siniestros por *reaseguro cedido*, para cada período de origen i .

$$FREAS_i = \frac{SONR_i^d - SONR_i^R}{SONR_i^d} = 1 - \frac{SONR_i^R}{SONR_i^d}$$

Las reservas de riesgos en curso por reaseguro cedido del subramo o tipo de seguro se determinará como el 50% de la prima cedida de las pólizas en vigor, descontada con el porcentaje de comisiones menor del efectivamente pagado por la institución de seguros y el porcentaje de comisiones publicado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas en marzo de cada ejercicio. La reserva total por siniestros ocurridos no reportados de *retención*, se obtiene de la siguiente forma:

$$SONR = \sum_{i=1}^t SONR_i^R.$$

4.2. Valores Negativos en la realización del Triángulo.

La presencia de valores negativos en la realización del triángulo complica la aplicación de los métodos estadísticos tradicionales y puede distorsionar la estimación de la reserva, posibles causas de la existencia de valores negativos en la realización del triángulo:

- a. Rechazo de reclamación por improcedencia, fraude, dolo o mala fe (cancelación)
- b. Adjudicación /Venta de restos de bienes dañados (salvamento)
- c. Recuperación de totalidad o parte de siniestro cubierto
- d. Errores de registro (Cancelación total o parcial)

Se procede a utilizar un modelo alternativo, dicho modelo consiste en reconstruir los valores originales del siniestro, para trabajar únicamente con valores positivos y reflejar el impacto de los valores negativos. Es necesario considerar el desarrollo del triángulo hasta el año calendario t , por ende el ajuste según la causa es:

En el inciso a) el ajuste que deriva es cancelar el monto original de la reclamación, en los sucesores encisos calcularemos un factor de ajuste propuesto de modo que podamos trabajar de manera ordinaria, dicho factor de ajuste lo denotamos como:

$$\tilde{X}_{ij} = F_i^j \text{ Siempre que } F_i^j \in R^+ \text{ y } \tilde{X}_{ij} = 0 \text{ en otro caso.}$$

Donde:

$$F_i^j = \frac{X_{ij} * \sum_{k=1}^{t-i+1} X_{ik}}{\sum_{k=1}^{t-i+1} X_{ik}^+}$$

X_{ik} =Monto de siniestro ocurrido en el año de origen i y reportado en el año k ;

$$X_{ik}^+ = \text{Max}\{0, X_{ik}\};$$

F_i^j = Factor de ajuste correspondiente al valor de X_{ij} ;

\bar{X}_{ij} = Monto ajustado de siniestro ocurrido en i y reportados en el año j .

4.3. El Seguro de Crédito.

En el seguro de crédito podemos encontrar diversos escenarios en el que el seguro cubre la posibilidad de impago, por ejemplo préstamos dados y no pagados, también pueden ser garantías dadas y después, no respaldadas por el fiador; o, subrogaciones de cualquier seguro de daños.

Sí el cliente de una empresa comercial no paga la deuda contraída en el período establecido, la compañía aseguradora pagara un porcentaje significativo del monto a través del Seguro de Crédito, por lo tanto la empresa comercial recuperara el dinero que no le fue pagado por su cliente.

Acorde a lo anterior, otro actividad del Seguro de Crédito consiste en cubrir riesgos financieros a los bancos, en particular para personas que no tienen capacidad económica para pagar su deuda o personas no longevas incapaces de rembolsar el préstamo al banco, en tales casos el Seguro de Crédito cubrirá los montos no pagados de los clientes incumplidos.

Normalmente un porcentaje importante del debito original podrá ser recuperado mediante el seguro de crédito, la compañía aseguradora con base en los pronósticos del IBNR tiene la posibilidad de estructurar una tarifa competitiva. Es muy importante para la empresa de Seguros tener la idea exacta del periodo de recuperación del total reclamado.

Para diseñar la prima en el Seguro de Crédito es conveniente utilizar debido a su enfoque financiero, modelos crediticios que evalúen riesgos, por ejemplo, los modelos de Credit-Suisse (CreditRisk +), J. P. Morgan (Credit Metrics) y Jarrow-Turnbull. Definamos el concepto de Riesgo de Crédito y posteriormente estudiemos un ejemplo de recuperación de montos.

Riesgo de Crédito.

El Riesgo de Crédito es la incertidumbre que los instrumentos financieros tienen a causa del posible incumplimiento de obligaciones contractuales por alguna de las partes. Por supuesto ese Riesgo de Crédito implica una prima que lo compense.

Ejemplo:

Diseño de la prima para el Seguro de Crédito.

Los aseguradores de crédito son capaces de recuperar mediante su cartera de inversión una importante proporción de los montos o créditos no pagados a los bancos (asegurados) por concepto de incumplimiento en el pago de sus clientes. La empresa de Seguros cubre la obligación al descubierto a través del pago de la suma asegurada pactada en la póliza.

Los valores expresados en la siguiente realización denotan porcentajes acumulados de recuperación de créditos que se han logrado, fundamentados en la cartera de la empresa de Seguros, correspondiente a cada año de origen.

Asumamos que hemos recopilado información del año de 1984 al año de 1989 y deseamos pronosticar tendencias de recuperación hasta el año de 1994. En la primera columna tenemos el año de origen de incumplimiento al crédito otorgado y en el primer renglón se muestra los años de desarrollo de las recuperaciones realizadas.

El acumular la información, de la manera expuesta, nos ayuda a entender que, por ejemplo, en 1984, el 8% de las recuperaciones se hicieron en el mismo año. Ahora, para el año de 1989, el 73% de los montos habidos en el año de 1984 ya han sido recuperados, dicha información es representada en el cuadro 1.

Cuadro 1
Porcentajes acumulados por año de desarrollo

Año Calendario	0	1	2	3	4	5
84	8	32	49	62	69	73
85	7	30	42	61	66	
86	6	21	34	48		
87	10	30	45			
88	9	33				
89	8					

El pronóstico de tasas acumulativas de recuperación requiere de un análisis estadístico previo. Primeramente describamos en el siguiente cuadro los valores observados por año de origen:

Cuadro 2
Estadísticas de los porcentajes por año de origen

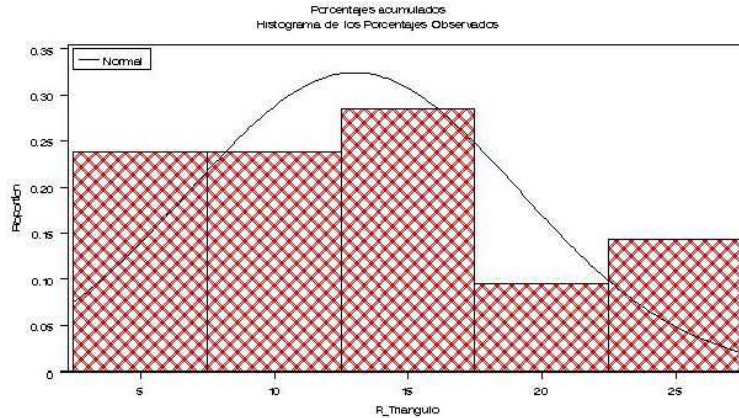
Año Calendario	0	1	2	3	4	5	Tasa Media	Desviación Estándar
1984	8	24	17	13	7	4	12	7
1985	7	23	12	19	5		13	8
1986	6	15	13	14			12	4
1987	10	20	15				15	5
1988	9	24					17	11
1989	8						8	0

Acorde a lo anterior, es conveniente expresar las observaciones en términos de años calendarios y por consiguiente aplicar la prueba de Bondad de Ajuste de Kolmogorov-Smirnov concatenando las columnas por año calendario, en suma hallar una viable distribución de probabilidad (Poisson). Se considera el siguiente cuadro:

Cuadro 3
Porcentajes no acumulados por año Calendario

Año de origen	AC1	AC2	AC3	AC4	AC5	AC6	Porcentaje acumulado
1984	8	24	17	13	7	4	73%
1985		7	23	12	19	5	66%
1986			6	15	13	14	48%
1987				10	20	15	45%
1988					9	24	33%
1989						8	8%
Cúmulo recuperado en seis años calendarios							46%

Histograma de los Porcentajes no acumulados u observaciones del cuadro 1:



Es evidente en el histograma precedente que la distribución de las observaciones no refleja de manera a priori distribución Normal. Si embargo observamos una cola derecha amplia y el tipo de curva es pariente a la curva plana platykurtic.

Los resultados de Kolmogorov-Smirnov resultaron negativos, es decir, la prueba de Bondad de Ajuste no encontró distribución de probabilidad apropiada al proceso, por esta razón descartamos los modelos: Cadena Escalón (enfoque estocástico), Aritmético de Separación y Modelo de Regresión “Poisson”.

Procedemos a encontrar la Técnica de Suavización más adecuada, para ello es conveniente suprimir el ultimo año calendario (sexto año calendario) y medir un margen de error para cada modelo en la estimación del año suprimido. Primeramente utilizaremos el método de la Cadena Escalón y posteriormente la técnica de Variación, Geométrico de Separación y Mínimos Cuadrados De Vylder.

En este ejemplo descartaremos la aplicación de los modelos de Credibilidad por dos motivos. La primer causa es la complejidad del calculo si no se cuenta con el software especializado (necesidad del programa de computador **loss reserving**) y finalmente, se debe verificar estadísticamente si los valores observados cumplen o no con los supuestos de Mack y Straub.

Sin mayor preámbulo observemos los pronósticos de cada modelo propuesto y por ende se opta por escoger la técnica más eficiente.

Método de la Cadena Escalón.

Desarrollo	1	2	3	4	5
84	8	32	49	62	69
85	7	30	42	61	68
86	6	21	34	46	
87	10	30	45		
88	9	33			
Factor	Cs,s+1	3.6452	1.5060	1.3516	1.1129

Los pronósticos son ajustados con base en la proporcionalidad de las columnas observadas.

Primera Variación de la Cadena Escalón.

Columna	D1	D2	D3	D4
Año Calendario	0	1	2	3
84	4.0000	1.5313	1.2653	1.1129
85	4.2857	1.4000	1.4524	1.1129
86	3.5000	1.6190	1.3588	1.1129
87	3.0000	1.6047	1.3588	1.1129
88	2.7501	1.6486	1.3588	1.1129

Las columnas D1 y D2 se ajustan suponiendo aunque de forma incorrecta una tendencia lineal presente en cada columna del triángulo d, los resultados de los coeficientes de regresión son expresados en el subsiguiente cuadro.

BETA	ALFA	Regresión Lineal
Año Calendario	Intercepto	Columna
-0.37857	36.06429	D1
0.0439	-2.21463	D2

Aunado a lo anterior, obtenemos los siguientes pronósticos:

Desarrollo	0	1	2	3	4
84	8	32	49	62	69
85	7	30	42	61	68
86	6	21	34	46	
87	10	30	48		
88	9	25			

Observaremos en el cuadro correspondiente al Error de eficiencia por Técnica, que uno de los métodos con mayor error es el de la primera Variación de la Cadena Escalón y el motivo de tal imprecisión reside en utilizar esta técnica conociendo de antemano que no existe una tendencia lineal presente en cada columna del triángulo d.

Segunda Variación de la Cadena Escalón.

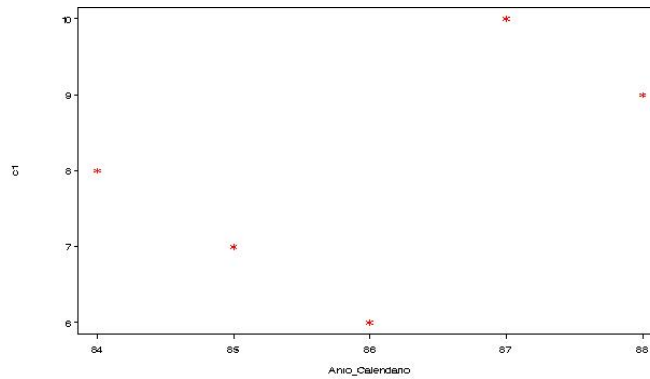
Columna	D1	D2	D3	D4
Año Calendario	0	1	2	3
84	4.0000	1.5313	1.2653	1.1129
85	4.2857	1.4000	1.4524	1.1129
86	3.5000	1.6190	1.3757	1.1129
87	3.0000	1.5297	1.3757	1.1129
88	3.4892	1.5297	1.3757	1.1129

En la segunda Variación del método de la cadena Escalón proponemos la siguiente ponderación y posteriormente observamos los pronósticos de dicha Variación:

$$\hat{d}_r = \frac{\sum_{j=1}^{s-r} w_{jr} d_{jr}}{\sum_{j=1}^{s-r} w_{jr}} \quad \text{Donde: } w_{jr} = (j + r + 1)^2$$

Desarrollo	0	1	2	3	4
84	8	32	49	62	69
85	7	30	42	61	68
86	6	21	34	47	
87	10	30	46		
88	9	31			

Es ineludible examinar las observaciones de las columnas y observar si los porcentajes acumulados presenta un comportamiento exponencial, de ahí que grafiquemos la primera columna, dicha columna presenta el mayor número de observaciones del recorrido.



Evidentemente no existe un patrón exponencial, entonces no es eficaz utilizar el método de la tercera Variación de la Cadena Escalón.

Método de Mínimos Cuadrados De Vylder.

Desarrollo	0	1	2	3	4	Pronóstico
84	8	24	17	13	7	Cúmulo
85	7	23	12	19	7	68
86	6	15	13	12		46
87	10	20	14			44
88	9	24				33
X	69.6836	68.9466	49.9484	63.7488	73.5955	
V	0.12229406	0.3267	0.2199	0.2306	0.1005	
Número	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	

Método Geométrico de Separación.

Año Calendario	0	1	2	3	4	Pronóstico
84	8	24	17	13	7	Cúmulo
85	7	23	12	19	7	68
86	6	15	13	16		50
87	10	20	14			44
88	9	20				29
						Restricción
Proporción r	0.6604	1.6989	1.1775	1.3570	0.5578	1.0000
Lambda ajuste Lineal		11.7361*	11.6683	11.6004	11.5325	
Valores lambda	12.1144	12.2369	12.1096	10.6887	12.5491	

En el siguiente cuadro observamos el margen de error respectivo a cada método, dichos errores serán de gran utilidad en la selección del modelo más eficiente.

Cuadro 4
Error de eficiencia por Técnica

Porcentaje Acumulado del Año Calendario Omitido	Cadena Escalón	Variación I	Variación II	M. C. De Vylder	Geométrico Separación
66	68	68	68	68	68
48	46	46	47	46	50
45	45	48	46	44	44
33	33	25	31	33	29
Error Acumulado	4.30532	15.07535	5.60064	5.43675	8.71380
Error Mínimo	4.30532				
Error Máximo	15.0753				

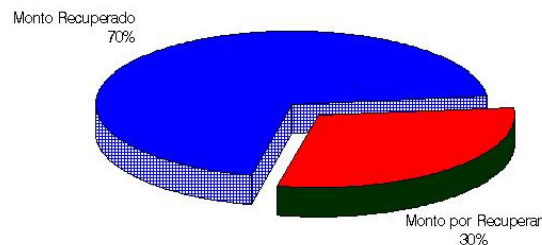
NOTA: Los errores se presentan en cifras decimales a diferencia del redondeo que se presenta en los pronósticos.

El modelo con menor error acumulado y sujeto a este criterio el más preciso es el de la Cadena Escalón, de ahí que pronostiquemos los porcentajes con base en dicha técnica. Empleando el factor de proporcionalidad entre las columnas podremos construir el rectángulo estimado para futuros años calendarios, implicando los siguientes resultados:

Cuadro 5
Pronósticos de los porcentajes acumulados

Año Calendario	1	2	3	4	5	6
84	8	32	49	62	69	73
85	7	30	42	61	66	70
86	6	21	34	48	53	56
87	10	30	45	62	68	71
88	9	33	50	68	75	79
89	8	29	44	60	66	70
Factor	Cs,s+1	3.6500	1.5044	1.3680	1.0976	1.0580
Cúmulo Esperado por Recuperar						70%
Porcentaje No Recuperado						30%

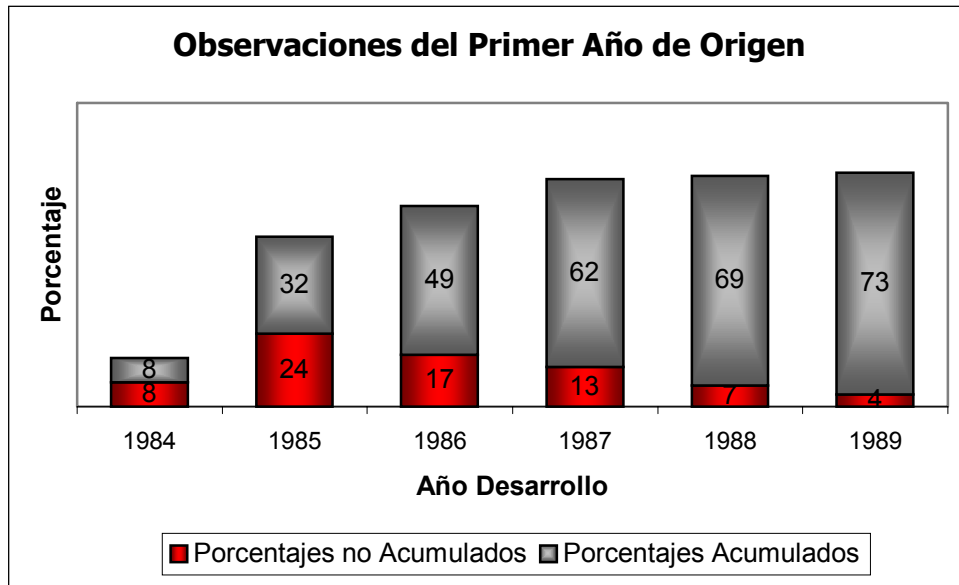
En referencia al cuadro anterior, se habrá de recuperar un 70% del monto total reclamado en los años de 1984 a 1989. El diagrama de pastel consecuente expresa la proporción esperada de recuperación para el año de 1994.

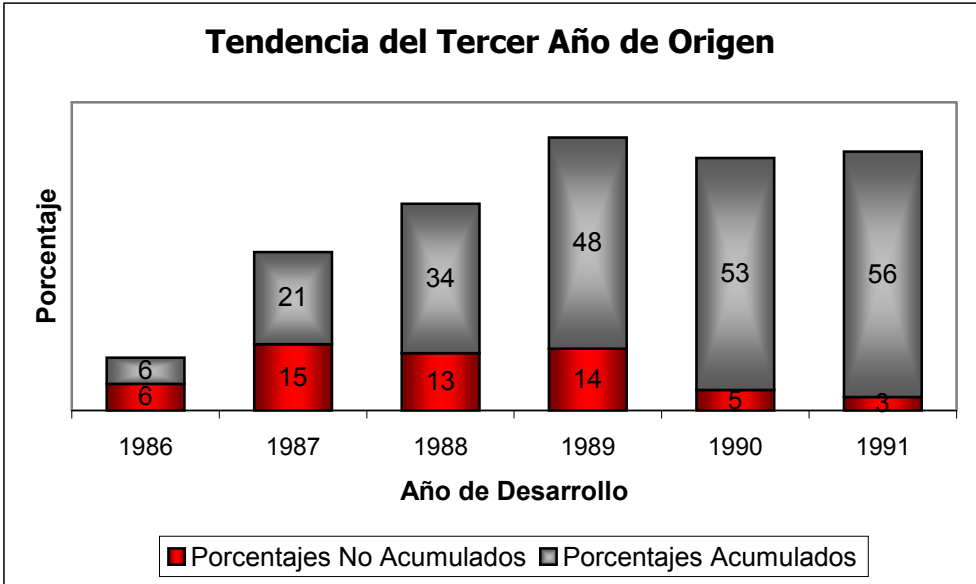
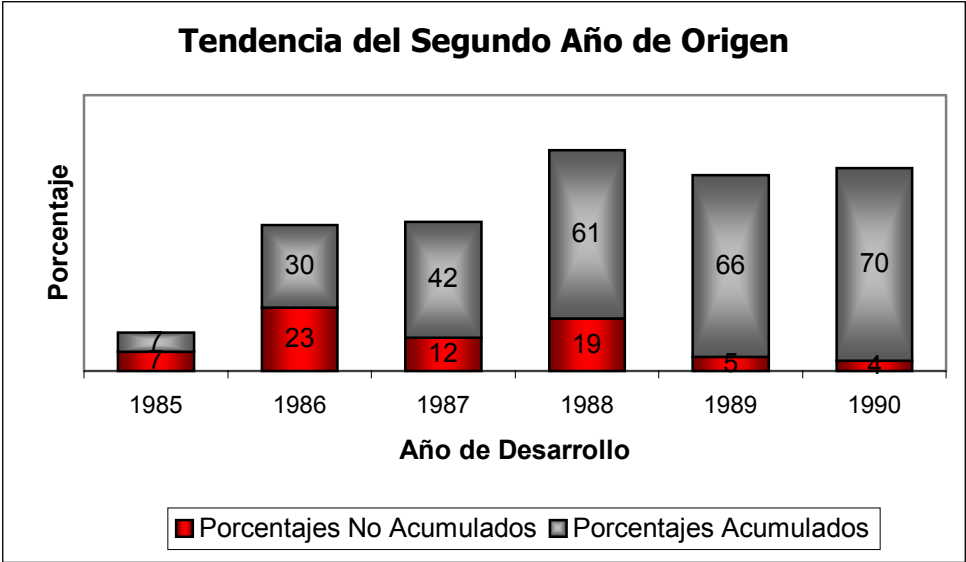


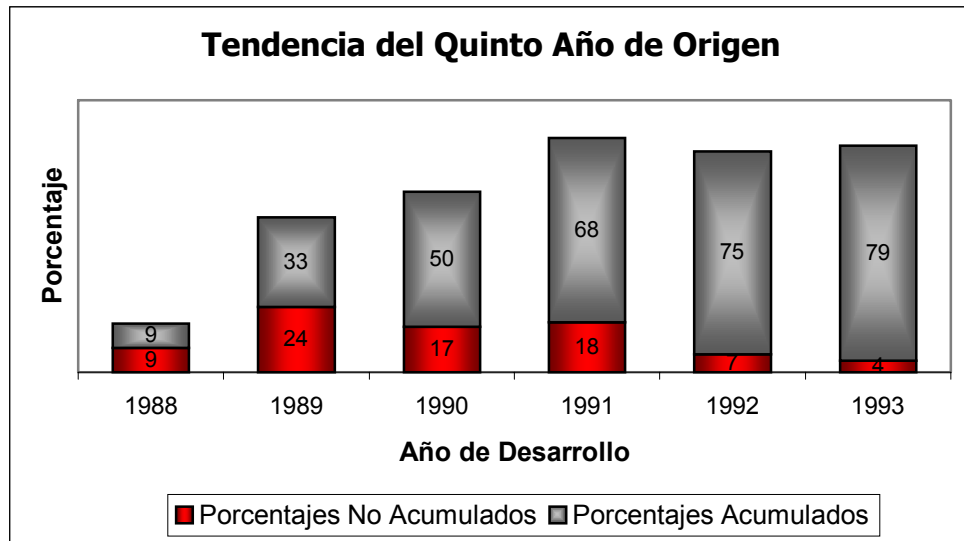
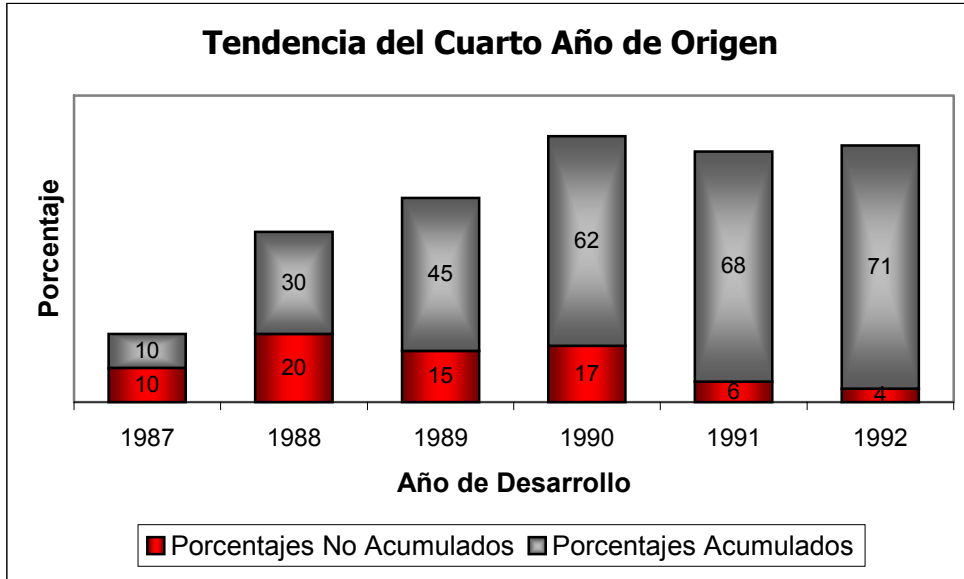
Donde:

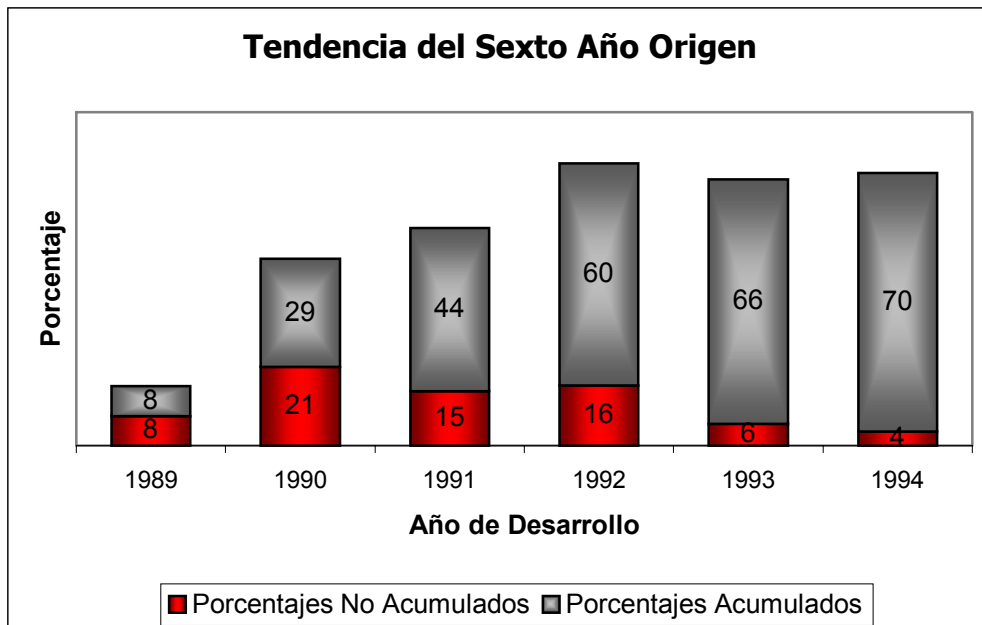
Escenario del Monto Recuperado:	Cúmulo Porcentual	Porcentaje Recuperado
Monto Esperado de Recuperación	146	24%
Monto Observado de Recuperación	273	46%

Cabe señalar que el Monto Esperado de Recuperación equivalente al 24%, coincide con la reserva de Siniestros Ocurridos No Reportados Directos (*SONR^d*). Aunado a lo anterior, las tendencias de recuperación (pronósticos) por año de origen son expresadas en las siguientes graficas:









El rectángulo suavizado (modelo tendencia) del anterior camino del triángulo nos otorgara información suficiente para construir una tarifa competitiva en el cobro de la prima.

El análisis anterior resulta muy indispensable en la elaboración de la prima del Seguro de Crédito, por ello resulta tentador indagar de manera muy superficial en la elaboración de la prima del seguro para riesgos crediticios utilizando el enfoque de Jarrow-Turnbull.

4.3.1. Modelo Crediticio de Jarrow-Turnbull.

El modelo de Jarrow-Turnbull tiene por objetivo el análisis (valorización, cobertura,...) de instrumentos financieros sujetos a posible impago y negociados en un mercado abierto.

Las expectativas así obtenidas se emplean en la valorización de contratos en los que alguna de las partes o el subyacente pueda o no responder a lo prometido.

Definamos los siguientes conceptos o inputs que precisa el modelo de Jarrow-Turnbull:

- ∂ : Tasa de recuperación asociada a la deuda en cuestión, por cada peso se recupera ∂ pesos, $\partial \in (0,1)$. Dato exógeno que para nuestro interés refleja el porcentaje esperado IBNR de recuperación de los montos reclamados por año calendario;
- Δt : Intervalo de tiempo fijo por lo general a un año;
- $Q(0,n)$: Curva de tipo con riesgo. Es el precio hoy del Bono Cupón Cero ⁹con riesgo que vence en el tiempo $n\Delta t$, el nominal es 1. Es un dato de mercado;
- $P(0,n)$: Curva de tipo sin riesgo. Es el precio hoy del Bono Cupón Cero sin riesgo que vence en el tiempo $n\Delta t$, el nominal es 1. Es un dato de mercado.

El precio del Bono con riesgo tiende a decrecer con el tiempo, reflejando la acumulación progresiva del riesgo, cabe señalar que dichos Bonos representan los activos en los que la aseguradora TALM invierte los montos de las primas recibidas de cierto portafolio de seguros. Definamos el siguiente proceso, el cual nos indica el estado en el que se encuentra un portafolio de seguros de la compañía TALM en el tiempo $n\Delta t$:

$$X_n = 1 \cdot I(\xi) + \delta \cdot I(\tau)$$

Donde los eventos ξ y τ representan:

ξ -Si *no existe* pago de las reclamaciones hasta el tiempo $n\Delta t$,

τ -Si *existe* pago de las reclamaciones hasta el tiempo $n\Delta t$.

⁹ Bono Cupón Cero:

Definamos a unos nuevos instrumentos financieros denominados Cupones Ceros al plazo T, que tiene las siguientes características: Se trata de Bonos que pagan una unidad monetaria en el instante T y además solo existe un flujo de importe prefijado (no hay cupones intermediarios de ahí el nombre de Cupón Cero).

Se tiene que si $X_n = \partial \Rightarrow X_{n+1} = \partial$. Interesan las probabilidades de transición entre esos estados, definamos:

$$\begin{aligned}\Pi_n &= P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1) \\ 1 - \Pi_n &= P(X_n = \partial | X_{n-1} = 1)\end{aligned}$$

Para completar enunciamos que:

$$\begin{aligned}P(X_n = 1 | X_{n-1} = \partial) &= 0 \\ P(X_n = \partial | X_{n-1} = \partial) &= 1\end{aligned}$$

Y también definamos la probabilidad P_n , dada por:

$$P_n = P(X_n = 1)$$

Es decir, P_n es la probabilidad que en el tiempo $n\Delta t$ la aseguradora TALM no pague los montos reclamados, se desprende el siguiente concepto:

$$P_n = \Pi_n P_{n-1} = \frac{P(X_n = 1, X_{n-1} = 1)}{P(X_{n-1} = 1)} P(X_{n-1} = 1) = P(X_n = 1, X_{n-1} = 1)$$

Obsérvese que $\Pi_n \leq 1$ entonces se cumple $P_n \leq P_{n-1}$ como era de esperarse.

Supongamos que los valores recopilados y pronosticados del camino del triángulo corresponden a la estadística de la aseguradora TALM, con base en dicha experiencia la compañía de Seguros puede diseñar una prima para el próximo año calendario a través de una ponderación entre los valores pronosticados de los porcentajes esperados no acumulados de recuperación respectivo a los años de 1985 al año de 1989, es decir:

Año de origen	Pronósticos no acumulados del séptimo año Calendario (1990)
1985	4%
1986	5%
1987	17%
1988	17%
1989	21%
Promedio aritmético ∂:	13%

La tasa $\hat{\delta}$ de recuperación asociada al séptimo año calendario correspondiente al año de 1990, es del 13%. El modelo que indica el estado en el que se encuentra cierto portafolio de la aseguradora TALM en el tiempo $n\Delta t$, sin pérdida de generalidad equivalente al séptimo año calendario, es:

$$X_{\tau} = \begin{cases} \$1.00 \\ \$0.13 \end{cases}$$

La aseguradora TALM pagara una cantidad fija F convenida en el contrato de seguros en el momento de la reclamación, entonces puede diseñar una prima estándar que sirva como tarifa en su estrategia de mercado, la que podemos definir como:

$$\begin{aligned} \text{Prima} &= F \sum_{n=1}^N P(0, n) P(X_n = 0.13, X_{n-1} = 1) = F \sum_{n=1}^N P(0, n) P(X_n = 0.13 | X_{n-1} = 1) P(X_{n-1} = 1) \\ &= F \sum_{n=1}^N P(0, n) (1 - \Pi_n) P_{n-1} = F \sum_{n=1}^N P(0, n) (P_{n-1} - P_n) \cdot \end{aligned}$$

4.4. Reserva Pérdida.

En referencia a la sección 1.2 acerca de los diferentes aspectos del IBNR, si el Notario comete un error de medición en la valorización del tamaño de la pérdida, el sistema dictamina que el Notario es responsable durante un periodo de tiempo estipulado.

La reserva pérdida o monto no reclamado considera al retraso temporal como un factor, causado por la corrección del error de dato cometido por el Notario y el dato declarado por la víctima, en particular:

Supongamos que en cierto periodo T una reclamación ha sido efectuada por el Notario referente a un siniestro cubierto en la póliza de una compañía Aseguradora A, dicha póliza fue cancelada en el periodo T-1 (el Notario prefirió asegurarse con la compañía B), pero la reclamación hecha por el Notario resulto de las pérdidas generadas en el momento T-2.

La compañía Aseguradora A impugna y alude que en la póliza se estipulo que no hay pago de la reclamación después de la vigencia del Contrato, y además el Notario actuó con dolo por no haber declarado en el instante correspondiente, por otro lado, la empresa B alega que su contrato no cubre en ese periodo la responsabilidad de los daños. El problema suscitado es resuelto por la Corte de Justicia.

En tales situaciones es conveniente predecir este tipo de reclamaciones seleccionando el modelo más adecuado, para ello consideremos el camino del triángulo ilustrado en el diagrama 2, donde el eje vertical corresponde al año de origen y el eje horizontal el año de la declaración de la pérdida.

Es de sumo interés para la empresa Aseguradora conocer las futuras reclamaciones no reportadas en el año de origen, resultando conveniente que el analista tome una decisión a cerca del tipo de técnica IBNR a utilizar, para explicar la naturaleza de las reclamaciones.

Conclusiones

Capítulo 1 y Capítulo 2.

Los modelos del IBNR estudian siniestros no reportados en el año de origen pero reclamados en los años posteriores. El IBNR surge del concepto de IBNFR y IBNYR. Ambas situaciones describen las reclamaciones que no fueron pagadas en el periodo correspondiente de ocurrencia porque el pago del seguro fue incompleto o bien por retrasos administrativos.

Los modelos del IBNR son clasificados por Taylor en el año de 1986 acorde a la naturaleza estocástica del proceso de las reclamaciones. El concepto del IBNR surge de forma teórica a través del modelo de reaseguro de Verbeek.

Capítulo 3.

La selección del modelo IBNR es acorde a la naturaleza del problema que se esta planteando, es decir, es conveniente utilizar herramientas estadísticas que nos ayuden a describir el tipo de datos que estamos utilizando, por ejemplo, si existe una distribución Poisson en el recorrido del triángulo es conveniente utilizar el modelo de la Cadena Escalón (enfoque estocástico), Separación ó el Modelo de Regresión "Poisson".

Por otro lado, si la prueba Kolmogorov-Smirnov no proyecta ningún tipo de distribución de probabilidad conocida, es eficaz utilizar métodos de Suavización como el modelo de Mínimos Cuadrados De Vylder, Cadena Escalón, Variación de la Cadena Escalón y Separación.

Los modelos de la teoría de la Credibilidad de Mack y Straub son seleccionados si las observaciones de la realización del triángulo satisfacen las condiciones respectivas de cada modelo, si dichas observaciones cumplen con los supuestos, el error de los valores pronosticados es óptimo bajo el criterio estadístico del error cuadrático medio. Es indispensable contar con el software de **loss reserving** con el fin de facilitar los cálculos.

Existen algunos modelos del IBNR que no fueron desarrollados en este trabajo como lo son: el modelo de Verrall, long-normal y long-lineal. Los modelos IBNR anteriores requieren del cumplimiento de más condiciones teóricas, desde mi punto de vista menos aplicados en situaciones reales, además los modelos de long-normal y long-lineal son similares en su estructura al modelo de Regresión "Poisson", sin pérdida de generalidad he decidido no integrar estas técnicas en este trabajo.

Capítulo 4.

En dicho capítulo estudiamos problemas y aplicaciones derivados de los pronósticos IBNR, por ejemplo, la elaboración de la reserva SONR de siniestros ocurridos y no reportados, además enunciamos el factor de ajuste del recorrido del triángulo cuando los valores observados son negativos.

Aunado a lo anterior, examinamos detalladamente la aplicación del IBNR en el seguro de crédito, describiendo la metodología de selección de la técnica adecuada a través de un razonamiento estadístico, posteriormente puntualizamos en el enfoque de Jarrow-Turnbull para la elaboración de la prima del Seguro de Crédito.

Conclusión final o síntesis del trabajo.

En conclusión, las técnicas del IBNR son modelos: estadísticos, de suavización y de Credibilidad que tienen como finalidad pronosticar siniestros no reportados en el año de origen pero en los años posteriores reclamados. Con base en dichos modelos las empresas aseguradoras son capaces de construir una reserva especializada denominada SONR y por esta razón protegerse de la ruina financiera.

El analista tiene la decisión de escoger la técnica más eficiente acorde a la naturaleza del proceso de las reclamaciones. Las técnicas del IBNR no necesariamente se utilizan para resolver problemas de reservas ocurridas y pendientes de pago, sino que también para todos aquellos problemas en donde surge un determinado patrón de desarrollo, por ejemplo, el pronóstico del coeficiente de actividad laboral después de la edad normal de retiro.

Índices de Diagramas y Cuadros

Diagrama 0	Despliegue por año calendario	8
Diagrama 1	Matriz recorrida por año de desarrollo	9
Diagrama 2	Camino del triángulo	10
Diagrama 3	Realización estocástica	12
Diagrama 4	Valores esperados de los N_{js}	13
Diagrama 5	Realización aleatoria afuera del triángulo	24
Diagrama 6	Ecuaciones marginales en el camino del triángulo	25
Diagrama 7	Camino de las pérdidas acumulativas	27
Diagrama 8	Triángulo d	29
Diagrama 9	Valores esperados (Método de Separación)	31
Diagrama 10	Variables observadas	37
Diagrama 11	Siniestralidad reclamada	61
Diagrama 12	Siniestralidad acumulada	61
Diagrama 13	Siniestralidad futura	62
Cuadro 1	Porcentajes acumulados por año de desarrollo	67
Cuadro 2	Estadísticas de los porcentajes por año de origen	67
Cuadro 3	Porcentajes no acumulados por año calendario	67
Cuadro 4	Error de eficiencia por Técnica	72
Cuadro 5	Pronósticos de los porcentajes acumulados	73

Bibliografía

[2002] R. Bonilla, E. de Alba, "Tratamiento de valores negativos en el triángulo de desarrollo utilizado en la estimación de reservas para SONR (IBNR)", 27th International Congress of Actuaries ICA CANCÚN, ITAM.

[1997] N. L. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones and C. Nesbitt, "ACTUARIAL MATHEMATICS", Published by THE SOCIETY of ACTUARIES.

[1997] J. L. Fernández Pérez, Seminario de Matemática Financiera "Riesgo de Crédito y el modelo de Jarrow-Turnbull", MEFF-UAM Volumen 1; ESPAÑA.

[1995] J. GALAMBOS, "ADVANCED PROBABILITY THEORY", Temple university Philadelphia, Pennsylvania Second Edition MARCEL DEKKER.

[1998] W. H. Greene, "ECONOMETRIC ANALYSIS", Third Edition, New York University Edit PRENTICE HALL Inc.

[2003] M. Herrera Maldonado, Tesina: "Introducción a los procesos Estocásticos", FES ACATLÁN UNAM.

[1994] Kass R., Van Heerwaarden A. E., Goovaerts M.J. "Ordering of actuarial risks", Caire Education Series, Amsterdam.

[2001] Kass R., Goovaerts M., Dhaene J., and Denuit M., "Modern Actuarial Risk Theory" Published by KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, P.O. Box 17,3300 AA Dordrecht. The Netherlands. BOSTON/DORDRECHT/LONDON.

[2003] Kiyosi Itô, "Stochastic Process"; Edited by Ole E. Barndorff-Nielsen (Department of Mathematics University of Aarhus Denmark), and Ken-iti Sato (Nagoya Japan), Springer Verlag; Berlin.

[1974] A. M. Mood, F. Graybill, D. Boes, "Introduction of theory Statistics", Third Edition, Edit McGraw-Hill International Editions.

[2001] REVISTA MEXICANA DE SEGUROS Y FIANZAS; ISSN 1561-2383 GEMA EDITORES; Tomo 53 número 621; Diciembre.

[1989] STRAUB, E., "Non-life Insurance Mathematics"; Springer Verlag; Berlin.

[1986] TAYLOR, G.C., "Claim reserving in non-life insurance"; North-Holland; Amsterdam.

[2006] F. Venegas Martínez, "Riesgos Financieros y Económicos", productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, Editorial INTERNATIONAL THOMSON Editores.

[1972] Verbeek, H.G., "An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance"; ASTIN Bulletin, 6,3; 195-202.

Índice Alfabético

A

Aplicaciones del IBNR · 59
Artículo 59 Ley Sobre el Contrato de Seguro · 5

B

Benjamín and Eagles · 26
Bibliografía · 85
Bono cupón cero · 78
Bühlmann-Straub · 48

C

Cadena Escalón · 27
Cálculo de la Reserva de Siniestros Ocurridos y No Reportados SONR · 61
Concepto de la teoría de la Credibilidad · 41
Conclusiones · 82
Condiciones de regularidad · 44
Contenido · 1
Cramer · 36

D

Distinción entre modelos y aspectos teóricos del IBNR · 14

E

Ecuaciones marginales · 25
El Camino del Triangulo de Verbeek · 10

El Concepto y diferentes aspectos del IBNR · 6

El Seguro de Crédito · 65, 77

Estimador de la Prima de Riesgo · 49

F

Factor Aplicable · 62

Factor de Ajuste · 64

Frecuencia y Severidad · 42

I

Incurred But Not Fully Reported · 7

Incurred But Not Yet Reported · 7

Índices de Diagramas y Cuadros · 84

Introducción · 2

K

King-Hardy · 34

Kolmogorov Smirnov · 59

L

London Chain · 26

LORE · 60

M

Matriz de diseño · 40

Matriz de Ordenamiento · 8

Matriz recorrida · 9

Método Aritmético. · 32

Método de Separación. · 31

Método de suavización mecánica. · 33

Método de Variación. · 29
Método Geométrico. · 32
Métodos Estadísticos · 37
Mínimos Cuadrados De Vylder · 36
Mínimos Cuadrados. · 37
Modelo Crediticio de Jarrow-Turnbull · 77
Modelo de Bühlmann-Straub · 49
Modelo de Credibilidad IBNR de Mack ·
51
Modelo de la Credibilidad De Vylder · 50
Modelo de la teoría de la Credibilidad de
Straub · 43
Modelo de Regresión · 39

N

Naturaleza de los sucesos en los que
interviene el modelo IBNR · 8

P

Póliza · 4
Prima de Credibilidad · 42
Prima de Riesgo · 48
Proceso Estocástico · 16

R

Reaseguro · 10
Reserva Pérdida · 81
Reserva total por siniestros ocurridos no
reportados de retención · 63
Riesgo · 5
Riesgo de Crédito · 66

S

Siniestro · 4
SONR · 61

T

Taylor · 14, 82
Técnicas del IBNR · 24
Teorema del Error Cuadrático Medio de
Straub · 45
Triangulo d · 29

V

Valores Negativos en la realización del
Triangulo · 64
Van Eeghen · 30
Verbeek · 10

