



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

Deformaciones de Álgebras de Poisson

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
P R E S E N T A
Claudio Meneses Torres

Director de Tesis: Dr. Jacob Mostovoy

México D.F.

Noviembre 2007



**DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Deformaciones de Álgebras de Poisson

Claudio Meneses Torres

31 de octubre de 2007

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Claudio Meneses Torres

FECHA: 08/Noviembre/2007

FIRMA: [Firma manuscrita]

Beatriz Karina Cisneros A.
Por Ausencia

Tabla de Símbolos

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{g}$	álgebras de Lie.
\mathbb{I}^m	m -cubo: $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$.
$\mathfrak{L}_n(k)$	espacio de constantes de estructura para un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo k .
$U(\mathfrak{g})$	álgebra universal envolvente del álgebra de Lie \mathfrak{g} .
$S(\mathfrak{g})$	álgebra simétrica del álgebra de Lie \mathfrak{g} .
$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$	subálgebra de elementos \mathfrak{g} -invariantes de $S(\mathfrak{g})$.
$Z(A)$ (resp. $Z(\mathfrak{g})$)	centro del álgebra A (resp. del álgebra de Lie \mathfrak{g}).
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$	producto escalar de los vectores \mathbf{x} y \mathbf{p} .
$\mathbf{x} \times \mathbf{p}$	producto vectorial de los vectores \mathbf{x} y \mathbf{p} .
$\langle \omega, v \rangle$	valuación del campo n -vectorial v en la n -forma diferencial ω .

Agradecimientos

El desarrollo de este manuscrito ha significado un completo y complejo proceso de aprendizaje. Es solo al mirar atrás al punto de partida que es posible percibir cuanto se ha avanzado y cual es la sutil esencia que esconde dicho proceso. Desde los primeros intentos de organizar las ideas en la forma más óptima y natural posible hasta corregir los últimos errores de estilo han transcurrido ya 8 meses. Esto no hubiera sido posible sin el apoyo de todos aquellos con quienes tuve la fortuna de contar.

A Jacob Mostovoy, maestro pero sobre todo amigo, quien desde mi llegada a la ciudad de Cuernavaca en agosto del 2005 ha nutrido y favorecido mi formación (tanto matemática como humana) con su manera tan particular de percibir el mundo en que vivimos.

A los sinodales en cuyas manos estuvo la revisión de este trabajo: Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros, Carlos Villegas, Francisco Turrubiates y Adolfo Guillot, por sus acertadas sugerencias y comentarios y por supuesto, por regalarme un poco de su tiempo para ello.

A mis amigos Oscar Rodríguez e Isaac Ortigoza, con quienes conocí y comprendí las maravillas y sutilezas de la Facultad de Ciencias y el placer detrás de una taza de café y una acalorada discusión. A Leonardo y Rodrigo Díaz, viejos amigos con los cuales compartí innumerables experiencias e historias en ese monstruo llamado Ciudad de México.

Y por supuesto, a las personas cuyo apoyo es tan continuo, directo e incondicional que tiende a pasar desapercibido: mis padres Esteban y María Luisa, mis hermanos Flavio y Esteban, y Karina, mi novia. Gracias por estar conmigo, "en las buenas y en las malas", a lo largo de todos estos años, de todos estos instantes.

Stony Brook, NY, 30 de Octubre de 2007

I venture to hope, therefore, that my lectures may interest engineers, physicists and astronomers as well as mathematicians. If one may accuse mathematicians as a class of ignoring the mathematical problems of the modern physics and astronomy, one may, with no less justice perhaps, accuse physicists and astronomers of ignoring departments of the pure mathematics which have reached a high degree of development and are fitted to render valuable service to physics and astronomy. It is the great need of the present in mathematical science that the pure science and those departments of physical science in which it finds its most important applications should again be brought into the intimate association which proved so fruitful in the work of Lagrange and Gauss.

Felix Klein, The Mathematical Theory of the Top, 1897.

Índice general

Tabla de Símbolos	III
Introducción	1
1. Álgebras de Poisson	3
1.1. Definiciones básicas, ejemplos	3
1.2. Sobre álgebras de Lie y temas afines	5
1.2.1. Contracciones y deformaciones de álgebras de Lie	5
1.2.2. El Álgebra Universal Envolvente	7
1.2.3. El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt	9
1.3. Dos teorías de Cohomología	12
1.4. El modelo matemático de la mecánica Hamiltoniana	13
1.5. Variedades de Poisson	15
2. El Álgebra de Snyder-Yang-Leznov	19
2.1. Construcción del álgebra de Snyder-Yang-Leznov	19
2.2. El Oscilador Armónico	23
2.2.1. La simetría escondida del problema	23
2.2.2. El oscilador en A_{SYL}	25
2.2.3. Solución del caso unidimensional	26
2.2.4. Solución del caso general	29
3. Cuantización por Deformación	33
3.1. Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica como 2 perspectivas de un mismo objeto	33
3.1.1. El sueño de Dirac: el programa de Cuantización	34
3.2. Deformaciones y estructuras de Poisson	35
3.3. La fórmula de Kontsevich en \mathbb{R}^m	40

3.4.	La fórmula de Kontsevich y el producto de Moyal	45
3.5.	El isomorfismo de Duflo	49
3.5.1.	Un isomorfismo de Cohomologías	50
3.5.2.	Dos isomorfismos	51
A.	$\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ es un álgebra de Lie	55
B.	S_{ij} y l_k conmutan con H	61
C.	Relaciones de conmutación de S_{ij} y l_k	65
	Bibliografía	71

Introducción

Si bien la forma en que son definidas puede pensarse por completo moderna y abstracta, las álgebras de Poisson son objetos que aparecieron de manera natural en el estudio de la dinámica de los cuerpos físicos, y es en este sentido que son conocidas desde hace más de un siglo. Es bien sabido que el estudio de la mecánica Hamiltoniana hoy en día es para muchos equivalente al estudio de la geometría simpléctica, aunque ciertamente un poco de observación cuidadosa da cuenta de que la estructura fundamental para determinar un problema mecánico es la estructura de álgebra de Poisson en el álgebra de funciones sobre la variedad simpléctica en cuestión, y que la formulación más general posible de este formalismo es en términos de un álgebra de Poisson conmutativa.

Recientemente, gracias al trabajo de Maxim Kontsevich, la atención ha sido atraída hacia el estudio de ciertas álgebras de Poisson no conmutativas que surgen como deformaciones de las anteriores, cuya estructura describe a una clase de objetos conocidos como *observables cuánticas* y que aparecen en una reinterpretación de los primeros programas de cuantización introducidos, llamada cuantización por deformación. Kontsevich resolvió de manera completa y satisfactoria el problema central de la cuantización por deformación al construir un producto estrella canónico sobre el álgebra de funciones de toda variedad de Poisson, mostrando la sutil conexión existente entre el trabajo de matemáticos y físicos, muchas veces pensado como dos temas independientes o sin mucha interacción.

Esta disertación comprende un breve estudio de las álgebras de Poisson y de como diversas nociones de deformación de estas pueden ser utilizadas para la solución de problemas de la física matemática. El capítulo 1 está dedicado a introducir la noción de álgebra de Poisson y las generalidades matemáticas que serán utilizadas en el desarrollo posterior de este trabajo. También es introducida aquí la primera de dos nociones de deformación de álgebra de

Poisson que consideraremos en este trabajo.

En el capítulo 2 se presenta un álgebra de Poisson conmutativa que corresponde a una deformación de la subálgebra polinomial del álgebra de *observables clásicas*, es decir, el álgebra de funciones suaves sobre $T^*(\mathbb{R}^3)$. Interpretando a esta como la estructura necesaria para establecer un problema en mecánica clásica, es planteado y resuelto el problema del oscilador armónico. Ciertos cálculos que aparecen al resolver los detalles técnicos del problema se presentan como apéndices al final del trabajo.

En el capítulo 3 se analiza el problema de la cuantización por deformación; primero es presentada conceptualmente la noción de cuantización por deformación como un programa de cuantización, luego la formulación algebraica de estas ideas y después la solución de Kontsevich para un producto estrella canónico en toda estructura de Poisson sobre un abierto de \mathbb{R}^m . En base a esto es demostrado que esta fórmula contiene como caso particular al producto de Moyal y la forma en que el isomorfismo de Duflo, un isomorfismo conocido en la teoría de álgebras de Lie, puede deducirse de ella.

Capítulo 1

Álgebras de Poisson

1.1. Definiciones básicas, ejemplos

Definición 1.1.1. Consideremos un álgebra¹ A (no necesariamente conmutativa) dotada de una operación que denotamos

$$\{\cdot, \cdot\} : A \times A \rightarrow A$$

Decimos que A es un **álgebra de Poisson** si $\{\cdot, \cdot\}$ satisface

- (1) **Bilinealidad** $\{a, b\}$ es lineal en a y b .
- (2) **Anticonmutatividad** $\{a, b\} = -\{b, a\}$
- (3) **Identidad de Jacobi** $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a, c\}, b\} + \{a, \{b, c\}\}$
- (4) **Regla de Leibniz** $\{ab, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$

Las condiciones (1)-(3) implican que A es un álgebra de Lie bajo la operación $\{\cdot, \cdot\}$, que llamaremos de ahora en adelante *paréntesis de Poisson*. La condición (4) relaciona el producto del álgebra con el paréntesis de Poisson, y suele referírsele diciendo que la operación $\{\cdot, \cdot\}$ actúa por *derivaciones* en A .

Ejemplos:

1. Toda álgebra A puede ser dotada de estructura de álgebra de Poisson introduciendo como paréntesis de Poisson al conmutador $[a, b] := ab -$

¹Las álgebras consideradas en este trabajo serán asociativas por definición.

ba ; la bilinealidad de esta operación se sigue de la distributividad del producto en el álgebra y la antisimetría es inmediata de la definición de conmutador. De

$$\begin{aligned} [[a, c], b] + [a, [b, c]] &= (ac - ca)b - b(ac - ca) + a(bc - cb) - (bc - cb)a \\ &= (ab - ba)c - c(ab - ba) = [[a, b], c] \end{aligned}$$

se sigue la identidad de Jacobi. Finalmente, de

$$[a, c]b + a[b, c] = (ac - ca)b + a(bc - cb) = abc - cab = [ab, c]$$

se sigue la regla de Leibniz.

2. **Funciones en Espacio Fase en n dimensiones.** Consideremos al espacio euclidiano \mathbb{R}^{2n} con coordenadas $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$. El espacio $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ junto con el corchete dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (1.1)$$

es un álgebra de Poisson. Los axiomas (1), (2) y (4) se siguen directamente de las reglas de diferenciación del cálculo de varias variables. La identidad de Jacobi es menos evidente, pero se verifica fácilmente después de un sencillo cálculo.

3. **Funciones en Variedades simplécticas.** Una variedad simpléctica es una variedad diferenciable de dimensión par M^{2n} dotada de una *estructura simpléctica*, que es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada ω^2 en M^{2n} . La estructura simpléctica establece un isomorfismo entre TM_x y T^*M_x , para todo $x \in M$; para cada covector $\omega^1 \in T^*M_x$ existe un único vector $\eta \in TM_x$ tal que $\omega^1(\xi) = \omega^2(\eta, \xi)$.

Podemos dotar al espacio $C^\infty(M^{2n})$ de estructura de álgebra de Poisson de la siguiente manera: Dada una función $f \in C^\infty(M^{2n})$, el isomorfismo $I : T^*M_x \rightarrow TM_x$ mencionado previamente nos permite asociar a f un campo vectorial Idf derivado de la 1-forma diferencial df . Definimos un paréntesis de Poisson como sigue

$$\{f, g\} := \omega^2(Idf, Idg) \quad (1.2)$$

los axiomas (1) y (2) se siguen de la definición de forma diferencial y de propiedades elementales de álgebra lineal. Para verificar los axiomas (3) y (4) el lector es referido a [2].

4. **Funciones sobre el dual de un álgebra de Lie.** Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real de dimensión finita. Es convencional denotar por \mathfrak{g}^* al dual (sobre \mathbb{R}) de dicha álgebra; sea A el álgebra de funciones suaves sobre \mathfrak{g} . Dado que el espacio de funciones lineales sobre \mathfrak{g}^* (es decir, el doble dual de \mathfrak{g}) es canónicamente isomorfo a \mathfrak{g} , posee un corchete natural. Este corchete se extiende a un único paréntesis de Poisson sobre A . Explícitamente, para $f, g \in A$ y $x \in \mathfrak{g}^*$, tenemos

$$[f, g]_{\mathfrak{g}}(x) = \langle x, [df(x), dg(x)] \rangle \quad (1.3)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto canónico entre vectores y covectores, pues $df(x)$ y $dg(x)$ son funciones lineales en \mathfrak{g}^* y por lo tanto elementos de \mathfrak{g} . Los axiomas (1)-(3) son inmediatos por ser \mathfrak{g} un álgebra de Lie. El axioma (4) se sigue de que la derivada exterior satisface la regla de Leibniz;

$$\begin{aligned} \langle x, [d(fg)(x), dh(x)] \rangle &= \langle x, [df(x)g(x) + f(x)dg(x), dh(x)] \rangle \\ &= \langle x, [df(x), dh(x)] \rangle g(x) + f(x) \langle x, [dg(x), dh(x)] \rangle \end{aligned}$$

Este último ejemplo será central en el desarrollo posterior de este trabajo, como puede apreciarse en la sección 3.5, donde es construido el isomorfismo de Duflo a partir de la cuantización formal de $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$.

En general, una *estructura de Poisson* en una variedad diferenciable M es un paréntesis de Poisson definido en el álgebra de funciones suaves a los reales $C^\infty(M)$. Llamaremos *variedad de Poisson* a toda variedad diferenciable M cuya álgebra de funciones suaves pueda ser dotada de una estructura de Poisson. Como se verá más adelante en la sección 1.4, cualquier campo bivectorial en una variedad diferenciable determina una estructura de Poisson y además, toda variedad de Poisson admite una foliación en subvariedades simplécticas.

1.2. Sobre álgebras de Lie y temas afines

1.2.1. Contracciones y deformaciones de álgebras de Lie

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión n sobre un campo k (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) y $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de esta, es claro que el corchete de cualesquiera

dos elementos de dicha base será expresable como una combinación lineal de estos, es decir,

$$[x_i, x_j] = C_{ij}^k x_k$$

a los escalares C_{ij}^k se les llama *constantes de estructura*. La antisimetría del corchete y la identidad de Jacobi se pueden expresar en términos de ciertas ecuaciones entre constantes de estructura como $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ y $C_{il}^m C_{jk}^l + C_{jl}^m C_{ki}^l + C_{kl}^m C_{ij}^l = 0$ respectivamente. Dado que la elección de una base para un \mathfrak{g} es altamente arbitraria y su estructura de álgebra de Lie es una característica intrínseca, estas constantes poseen una restricción adicional; si $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ es otra base y $x'_j = A_j^i x_i$, entonces $C_{ij}^k A_k^l = C_{rs}^l A_i^r A_j^s$. Es fácil ver que esta relación entre constantes de estructura es una relación de equivalencia, pues la ecuación anterior determina una acción de $GL(n, k)$ en k^{n^3} . Denotaremos por $\mathfrak{L}_n(k)$ al espacio de órbitas bajo esta acción con la topología inducida por el cociente, es decir, al espacio que parametriza todas las posibles estructuras de álgebra de Lie para el espacio vectorial n -dimensional sobre el campo k .²

Definición 1.2.1. Una *deformación uniparamétrica* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una función continua

$$\mathfrak{D} : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{L}_n(k)$$

donde $\mathfrak{D}(0)$ corresponde a la clase de constantes de estructura de \mathfrak{g} . Similarmente, una *deformación m -paramétrica* de esta álgebra de Lie es una función continua

$$\mathfrak{D} : \mathbb{I}^m \rightarrow \mathfrak{L}_n(k)$$

tal que $\mathfrak{D}(0, \dots, 0)$ corresponde a la clase de constantes de estructura de \mathfrak{g} .

Definición 1.2.2. Dadas \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' álgebras de Lie, decimos que \mathfrak{g}' es una *contracción* de \mathfrak{g} si las relaciones de conmutación de la primera están dadas a través de las relaciones de la última como

$$[x, y]' = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} A_\epsilon^{-1}([A_\epsilon(x), A_\epsilon(y)]) \quad (1.4)$$

donde los $A_\epsilon \in GL(n, k)$ forman una familia de transformaciones lineales no singulares de \mathfrak{g} , y ϵ_0 es un punto singular de sus inversas A_ϵ^{-1} .

²Este espacio no es necesariamente una variedad diferenciable pues $GL(n, k)$ no es un grupo compacto; sin embargo en un contexto puramente algebraico, $\mathfrak{L}_n(k)$ si constituye una *variedad algebraica*.

Debemos notar que la definición de contracción de un álgebra de Lie es un caso particular de la definición de deformación de un álgebra de Lie: sin embargo hacemos mención de esta definición por su aparición en una gran variedad de contextos en la física.

Una deformación en un álgebra de Lie induce de manera natural una deformación en el álgebra de funciones sobre su dual, que como hemos visto es un álgebra de Poisson; aunque si bien no hemos introducido aún una definición de deformación de un álgebra de Poisson, será precisamente esta noción, en el contexto de álgebras de funciones sobre el dual de un álgebra de Lie, la que consideraremos en el siguiente capítulo.

Es importante notar que siempre existen al menos dos contracciones triviales de un álgebra de Lie: el álgebra de Lie abeliana, para la cual las relaciones de conmutación son todas iguales a 0 y el álgebra de Lie misma, para la cual las relaciones de conmutación permanecen sin cambio. Cualquier otra contracción aparecerá en algún lugar intermedio entre estas dos.

1.2.2. El Álgebra Universal Envolverte

Recordando uno de los ejemplos anteriores, es posible asociar a cada álgebra A un álgebra de Lie A_L definiendo una operación a través del conmutador de dos elementos $[a, b] = ab - ba$. El álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie \mathfrak{g} juega una suerte de papel inverso a este hecho en el sentido de que esta es el álgebra con unidad A "más general" (en el sentido de universalidad) tal que el álgebra de Lie A_L contiene a \mathfrak{g} como subálgebra de Lie.

Definición 1.2.3. *Un álgebra universal de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un álgebra $U(\mathfrak{g})$ junto con una función $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ tal que*

1. ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, es lineal y

$$\phi([x, y]) = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x)$$

2. Si A es cualquier álgebra con unidad y $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow A$ es cualquier homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo

de álgebras β tal que $\alpha = \beta \circ \phi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow \phi & \searrow \beta & \\ U(\mathfrak{g}) & & \end{array}$$

Es claro que si $U(\mathfrak{g})$ existe, será única salvo isomorfismo, y podremos entonces hablar de *el* álgebra universal de \mathfrak{g} . Llamaremos a esta álgebra el álgebra universal envolvente. Mostraremos a continuación la manera de construirla.

El *álgebra tensorial* de un espacio vectorial V es la solución al problema universal para funciones de V en un álgebra, es decir, es un álgebra $T(V)$ junto con una función lineal $\psi : V \rightarrow T(V)$ tal que para cualquier función lineal $\alpha : V \rightarrow A$ de V en un álgebra A , existe un único homomorfismo de álgebras $\beta : T(V) \rightarrow A$ tal que $\alpha = \beta \circ \psi$.

Si denotamos³

$$T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ factores}}$$

dadas las propiedades del producto tensorial, podemos definir una multiplicación $T^n(V) \times T^m(V) \rightarrow T^{n+m}(V)$ a través de

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

lo cual nos permite definir una estructura de álgebra en $\bigoplus_{\mathbb{N}} T^n(V)$, que contará con la propiedad universal mencionada arriba. Definimos entonces

$$T(V) := \bigoplus_{\mathbb{N}} T^n(V) \tag{1.5}$$

Ahora, en el caso en el que $V = \mathfrak{g}$, podemos considerar al ideal bilateral I en $T(\mathfrak{g})$ generado por los elementos de la forma $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$; entonces

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I \tag{1.6}$$

³siendo $T^0(V) = k$, el campo base.

es claramente un álgebra universal para \mathfrak{g} por construcción, pues dada un álgebra A , cualquier homomorfismo entre \mathfrak{g} y A (pensada como álgebra de Lie A_L) se extiende de manera única a un homomorfismo de álgebras $\beta : T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ cuyo kernel contendrá a I por provenir de un homomorfismo de álgebras de Lie.

Un caso particular de álgebra universal envolvente es el *álgebra simétrica* $S(\mathfrak{g})$, correspondiente al caso en el que el corchete de \mathfrak{g} es 0 para cualquier pareja de elementos; su importancia se percibe en el hecho de que es muy fácil construir una base para esta álgebra, pues si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base para \mathfrak{g} , $S(\mathfrak{g}) \cong k[x_1, \dots, x_n]$, es decir, el álgebra simétrica de un álgebra de Lie abeliana es isomorfa al anillo de polinomios en las indeterminadas dadas por los elementos de una base de dicha álgebra. Esto es claro al considerar la construcción de $S(\mathfrak{g})$ a través del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$, pues en este caso el ideal bilateral I estará generado por elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x$, y el hecho de que $S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ nos dice que el álgebra simétrica será un álgebra conmutativa y graduada, de tal manera que cada subespacio $S^k(\mathfrak{g})$ estará generado por los monomios

$$x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}$$

donde los x_i 's son elementos de una base para \mathfrak{g} . Dado que no importa el orden en el cual estos son considerados en un determinado monomio, el homomorfismo generado por

$$x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \mapsto x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

será un isomorfismo entre $S(\mathfrak{g})$ y $k[x_1, \dots, x_n]$.

1.2.3. El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt es un resultado fundamental en la teoría de álgebras de Lie, pues nos permite caracterizar al álgebra universal envolvente de una cierta álgebra de Lie \mathfrak{g} , a través del álgebra simétrica de esta última, la cual como hemos visto, posee una base muy fácil de caracterizar.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , es posible construir un álgebra graduada en términos de su álgebra universal envolvente: definimos $U_n(\mathfrak{g})$ como el subespacio de $U(\mathfrak{g})$ generado por productos de a lo más n elementos de \mathfrak{g} , es decir,

$$\phi(x_{i_1}) \cdots \phi(x_{i_k}) \quad k \leq n$$

donde cada uno de los índices i_1, \dots, i_k está parametrizado por los elementos de \mathfrak{g} . Por ejemplo, $U_0(\mathfrak{g}) = k$ y $U_1(\mathfrak{g}) = k \oplus \phi(\mathfrak{g})$. Las siguientes relaciones se verifican directamente de la definición:

$$U_n(\mathfrak{g}) \subset U_{n+1}(\mathfrak{g})$$

$$U_m(\mathfrak{g}) \cdot U_n(\mathfrak{g}) \subset U_{m+n}(\mathfrak{g})$$

Entonces definimos

$$\mathrm{gr}_n(U(\mathfrak{g})) := U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}) \quad (1.7)$$

y el espacio

$$\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g})) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{gr}_n(U(\mathfrak{g})) \quad (1.8)$$

al cual dotamos de estructura de álgebra graduada con la multiplicación

$$\mathrm{gr}_m(U(\mathfrak{g})) \times \mathrm{gr}_n(U(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathrm{gr}_{m+n}(U(\mathfrak{g}))$$

inducida por la multiplicación en $U(\mathfrak{g})$.

Si $a \in U_n(\mathfrak{g})$, podemos expresarlo en la forma

$$a = \sum_{i_k \leq n} c_k \phi(x_{i_1}) \cdots \phi(x_{i_k})$$

y si \bar{a} denota la imagen de a bajo la proyección $U_n(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathrm{gr}_n(U(\mathfrak{g}))$ entonces

$$\bar{a} = \sum_{i_k \leq n} c_k \overline{\phi(x_{i_1})} \cdots \overline{\phi(x_{i_k})}$$

es decir, como álgebra, $\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$ es generada por los elementos $\phi(x)$ tales que $x \in \mathfrak{g}$. Dado que

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} - \overline{\phi(y)\phi(x)} = \overline{\phi([x, y])} \in \mathrm{gr}_1(U(\mathfrak{g}))$$

entonces el lado izquierdo de esta igualdad es idénticamente 0 en $\mathrm{gr}_2(U(\mathfrak{g}))$. Esto prueba que $\mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$ es un álgebra *conmutativa*. Entonces, por la propiedad universal del álgebra simétrica, existe un único homomorfismo de álgebras

$$w : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathrm{gr}(U(\mathfrak{g}))$$

que extiende a la función lineal

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gr}(U(\mathfrak{g})) \quad x \mapsto \overline{\phi(x)}$$

este homomorfismo es suprayectivo ya que los elementos $\overline{\phi(x)}$ generan a $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$.

El **teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt** afirma que

$$w : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr}(U(\mathfrak{g})) \quad \text{es un isomorfismo.} \quad (1.9)$$

aunque la forma en que suele ser enunciado clásicamente es la siguiente: consideremos una base $\{x_i\}$ de \mathfrak{g} , $i \in I$, donde I es un conjunto totalmente ordenado. Como $\text{gr}(U(\mathfrak{g}))$ es conmutativa, podemos reordenar cualquier producto de $\overline{\phi(x_i)}$ de forma creciente. Esto muestra que los elementos

$$x_M := \phi(x_{i_1}) \cdots \phi(x_{i_k}), \quad M = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad i_1 \leq \cdots \leq i_k$$

generan a $U(\mathfrak{g})$ como espacio vectorial.

Teorema 1.2.4. (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Los elementos x_M forman una base para $U(\mathfrak{g})$.*

Para la demostración, el lector es referido a [25]. En particular podemos notar que $\phi : \mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ es una función inyectiva, y podemos por lo tanto identificar a \mathfrak{g} como subespacio de $U(\mathfrak{g})$. En este sentido *cualquier* elemento de $U(\mathfrak{g})$ se podrá expresar como una combinación lineal de productos de elementos de \mathfrak{g} . Si convenimos denotar por $x_i \circ x_j$ al producto en $U(\mathfrak{g})$ de $x_i, x_j \in \mathfrak{g}$, lo anterior es equivalente a que todo elemento tome la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum c_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \circ \cdots \circ x_{i_k}$$

Dado que los elementos de la forma $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ con $i_1 \leq \cdots \leq i_k$ forman una base para $S(\mathfrak{g})$, el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt implica que $S(\mathfrak{g})$ y $U(\mathfrak{g})$ son isomorfos como espacios vectoriales. Si tenemos en cuenta la identificación $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$ mencionada previamente, la forma explícita de este isomorfismo, al que llamaremos I_{PBW} , viene dada por

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} x_{\sigma(i_1)} \circ x_{\sigma(i_2)} \circ \cdots \circ x_{\sigma(i_k)} \quad (1.10)$$

donde Σ_k denota al grupo simétrico de k elementos.

1.3. Dos teorías de Cohomología

Como hemos visto, las álgebras de Poisson poseen dos productos y podemos pensarlas en particular como álgebras asociativas o como álgebras de Lie. Para cada una de estas dos estructuras es posible asociar un complejo de cocadenas y consecuentemente un anillo de cohomología, la *cohomología de Hochschild* y la *cohomología de Chevalley* respectivamente, los cuales serán de gran utilidad en el capítulo 3 e introducimos a continuación.

Si A es un álgebra sobre un campo k y N un A -bimódulo, consideraremos los espacios $\text{Hom}(\bigotimes_n A, N)$ cuyos elementos son funciones n -lineales del álgebra en N

$$L : \bigotimes_n A \rightarrow N.$$

Podemos introducir un operador cofrontera entre estos espacios a través de la fórmula

$$\begin{aligned} (\partial_h^n L)(x_0, x_1, \dots, x_n) &:= x_0 L(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i L(x_0, \dots, x_{i-1} x_i, \dots, x_n) + (-1)^{n+1} L(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) x_n \end{aligned}$$

Si además consideramos la función

$$\partial_h^0 : N \rightarrow \text{Hom}(A, N) \quad (\partial_h^0 v)(x) := xv - vx$$

es posible demostrar que para toda $n \geq 0$ se satisface $\partial_h^{n+1} \circ \partial_h^n = 0$ y por lo tanto que (H^*, ∂_h^*) , es decir

$$H^0 \xrightarrow{\partial_h^0} H^1 \xrightarrow{\partial_h^1} H^2 \xrightarrow{\partial_h^2} H^3 \rightarrow \dots$$

es un complejo de cocadenas, donde $H^0 := N$ y $H^n = \text{Hom}(\bigotimes_n A, N)$. La cohomología de este complejo es conocida como cohomología de Hochschild de un álgebra A sobre el bimódulo N . En particular nos interesa el caso en que $N = A$; seguiremos la convención de denotar a la cohomología de este complejo por $HH^*(A, A)$.

Por otro lado, una herramienta de gran utilidad que podemos asociar a toda álgebra de Lie \mathfrak{g} es la *cohomología de Chevalley*; las n -cocadenas en este caso son funciones n -lineales antisimétricas de \mathfrak{g} en un \mathfrak{g} -módulo \mathfrak{N}

$$F : \bigwedge^n \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{N}$$

y el operador cofrontera de Chevalley ∂_c es definido en una n -cocadena F como

$$(\partial_c^n F)(x_0, x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n [x_i, F(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)] \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} F([x_i, x_j], x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n)$$

donde \widehat{x}_i denota que x_i debe ser omitido. Puede demostrarse que para toda $n \geq 0$, $\partial_c^{n+1} \circ \partial_c^n = 0$, es decir, (C^*, ∂_c^*) , donde $C^0 = \mathfrak{N}$ y $C^n = \text{Hom}(\bigwedge^n \mathfrak{g}, \mathfrak{N})$ es un complejo de cocadenas, llamado complejo de Chevalley-Eilenberg. La cohomología de Chevalley (denotada por $H_c^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{N})$) es la cohomología de este complejo.

1.4. El modelo matemático de la mecánica Hamiltoniana

El formalismo Hamiltoniano es una reformulación de la mecánica clásica introducida en 1833 por W. R. Hamilton, surgida a partir del llamado formalismo Lagrangiano y que en términos vagos podría describirse como el estudio de la dinámica en el llamado *espacio fase*. Aunque si bien no fue planteado en el lenguaje moderno de la geometría diferencial, la forma en que fue planteado originalmente es equivalente a introducir al espacio fase como el haz cotangente sobre una variedad diferenciable N (espacio de configuraciones) junto con la siguiente 2-forma diferencial:

$$\omega = \sum_{i=0}^n dq_i \wedge dp_i \tag{1.11}$$

donde q_1, \dots, q_n son coordenadas locales en un abierto U de N y p_1, \dots, p_n las correspondientes coordenadas de $(\mathbb{R}^n)^*$ en una trivialización del haz cotangente sobre U . Esta 2-forma está bien definida, y es claramente cerrada (es exacta) y no degenerada.

Los enfoques contemporáneos del formalismo Hamiltoniano involucran la introducción de una variedad simpléctica M como espacio fase. Como se mencionó previamente en el ejemplo 3 de la sección 1.1, la forma simpléctica establece un isomorfismo entre los espacios tangente y cotangente para cada punto de M . A través del isomorfismo inverso la forma ω corresponde a

un *campo bivectorial*, es decir, una sección c del haz $(\Omega^2(M))^*$ con cierta propiedad adicional que mencionaremos en la siguiente sección. En un sistema generalizado de coordenadas la forma ω y el bivector c se expresan en la forma

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad c = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

donde $\omega_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $c^{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones indexadas por i y j que para cada punto $x \in M$, forman matrices antisimétricas e inversas una de la otra. A un sistema de coordenadas $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ en donde la forma ω tome la forma (1.11) se le llama *sistema de coordenadas canónicas*. El teorema de Darboux garantiza la existencia local de dichos sistemas de coordenadas.

Las *cantidades físicas* u *observables* son identificadas con funciones suaves en M (como posición, momento lineal, momento angular...) y forman el espacio $C^\infty(M)$. Con respecto a la multiplicación usual, $C^\infty(M)$ posee estructura de álgebra conmutativa. Hemos visto también que es posible introducir un paréntesis de Poisson en $C^\infty(M)$, que en las coordenadas generalizadas consideradas previamente toma la forma

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad (1.12)$$

Un *estado del sistema* es un funcional lineal positivo y unital en $C^\infty(M)$ y corresponde en general a una medida de probabilidad μ en M . Un estado puro es un punto extremal del espacio de estados; los estados puros corresponden a medidas concentradas en puntos de M y por lo tanto suele referirseles como los puntos de M .

La dinámica de un sistema está determinada por la elección de una *función Hamiltoniana* H , que en principio puede ser cualquier función en $C^\infty(M)$. En la llamada *imagen de Hamilton*⁴, las observables son además funciones del tiempo y la evolución temporal de una observable f está dada a partir de la ecuación

$$\dot{f} = \{f, H\} \quad (1.13)$$

⁴Existe similarmente la *imagen de Liouville* en donde las observables solo son funciones de M mientras que los estados evolucionan temporalmente de tal manera que un estado puro obedece las ecuaciones de Hamilton. Esta forma de describir la dinámica es equivalente a la imagen de Hamilton y es utilizada principalmente en la mecánica estadística.

donde \dot{f} denota la derivada de f con respecto de t . En particular, para las coordenadas canónicas q_i, p_i , obtenemos las *ecuaciones de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Definición 1.4.1. Una función f es llamada *integral primera* del sistema correspondiente a la observable H si $\{f, H\} = 0$.

Claramente las integrales primeras forman un subespacio vectorial (de dimensión finita, debido a que la dimensión de M es finita). Además, de la identidad de Jacobi se sigue que dicho subespacio es una subálgebra de Lie de $C^\infty(M)$. La existencia de esta álgebra de Lie \mathfrak{g} permite introducir al grupo de Lie $G = \exp \mathfrak{g}$ como el grupo de simetrías del sistema en cuestión.

Como podemos ver, la estructura central en la descripción de un sistema mecánico es la *estructura de Poisson*

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

en el álgebra de funciones sobre una variedad diferenciable y de la elección de una función hamiltoniana, ya que la ecuación (1.13) solo depende de estas. Por lo tanto resulta natural extender el formalismo Hamiltoniano de variedades simplécticas a variedades de Poisson.

1.5. Variedades de Poisson

De manera análoga al haz tangente TM de una variedad diferenciable M , podemos asociar, para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, el espacio $\Lambda^n TM := \bigcup_{x \in M} \Lambda^n T_x M$ que posee una estructura natural de variedad diferenciable y más aún, de haz vectorial sobre M . Un *campo n -vectorial* en una variedad diferenciable M es definido como una sección en $\Lambda^n TM$. De acuerdo a la notación estándar, $\Gamma(\Lambda^n TM)$ representa el espacio de campos n -vectoriales en la variedad diferenciable M .

Hay una gran sutileza que podemos intuir de la sección anterior, y es que cualquier campo bivectorial $c \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ determina de manera canónica una estructura bilineal y antisimétrica en $C^\infty(M)$ a través de la fórmula

$$\{f, g\} = \langle c, df \wedge dg \rangle \tag{1.14}$$

de la cual la ecuación (1.12) no es más que su expresión en un sistema de coordenadas locales. Un cálculo muestra que además se satisface la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned}\{fg, h\} &= \langle c, d(fg) \wedge dh \rangle = \langle c, (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dh \rangle \\ &= \langle c, df \wedge dh \rangle g + f \langle c, dg \wedge dh \rangle = \{f, h\}g + f\{g, h\}\end{aligned}$$

¿se satisfará la identidad de Jacobi? En general, la respuesta es *no*, aunque puede demostrarse [11] que esta propiedad es equivalente a la anulación de c consigo mismo bajo el *corchete de Schouten*,

$$[c, c]_S = 0$$

un corchete definido entre cualesquiera 2 campos multivectoriales que generaliza al conmutador de campos vectoriales. Si X_n es un campo n -vectorial y X_m es un campo m -vectorial, su corchete de Schouten será un campo $(n + m - 1)$ -vectorial. En general, el corchete de Schouten satisface las siguientes propiedades:

1. *Anticonmutatividad graduada.* Si X_n es un campo n -vectorial y X_m un campo m -vectorial, entonces

$$[X_n, X_m]_S = -(-1)^{(n-1)(m-1)}[X_m, X_n]_S$$

2. *Identidad de Jacobi graduada.* Si X_n es un campo n -vectorial, X_m un campo m -vectorial y X_l un l -campo vectorial, entonces

$$\begin{aligned}(-1)^{(l-1)(n-1)}[X_l, [X_m, X_n]_S]_S + (-1)^{(m-1)(l-1)}[X_m, [X_n, X_l]_S]_S \\ + (-1)^{(n-1)(m-1)}[X_n, [X_l, X_m]_S]_S = 0\end{aligned}$$

3. *Regla de Leibniz graduada.* Si X_n es un campo n -vectorial, X_m un campo m -vectorial y X_l un l -campo vectorial, entonces

$$[X_l, X_m \wedge X_n]_S = [X_l, X_m]_S \wedge X_n + (-1)^{(l-1)m} X_m \wedge [X_l, X_n]_S$$

llamaremos a todo campo bivectorial c que satisfaga $[c, c]_S = 0$ *tensor de Poisson*. Tenemos así condiciones suficientes para la construcción de una estructura de Poisson a partir de un campo bivectorial.

Recíprocamente, es posible demostrar [20] que las condiciones anteriores son también necesarias, es decir, que *cualquier* estructura de Poisson sobre una variedad diferenciable proviene de un tensor de Poisson. En este sentido existe una equivalencia entre estructuras de Poisson y el espacio de tensores de Poisson en toda variedad diferenciable M :

$$\text{estructuras de Poisson en } C^\infty(M) \Leftrightarrow \text{tensores de Poisson en } M$$

y hemos encontrado el contexto más general posible en que un álgebra de Poisson puede construirse a partir de un esquema diferencial.

Una estructura de Poisson, al igual que una estructura simpléctica, define un homomorfismo del álgebra de Lie de funciones suaves en M en el álgebra de Lie de campos vectoriales en M : la derivada de una función g a lo largo del campo de otra función f es igual a $\{f, g\}$. Los campos pertenecientes a la imagen de este homomorfismo son llamados *Hamiltonianos*; sus flujos preservan la estructura de Poisson. De particular importancia resultan ser las funciones de Casimir:

Definición 1.5.1. *Una función de Casimir es una función perteneciente al centro de $C^\infty(M)$ bajo $\{\cdot, \cdot\}$. Estas corresponden al kernel del homomorfismo mencionado previamente.*

En general, si A es un álgebra de Poisson, llamaremos *invariante de Casimir* a todo elemento $c \in Z(A)$ bajo la estructura de álgebra de Lie, es decir, tal que $\{c, A\} = 0$.

La relación entre estructuras de Poisson y estructuras simplécticas queda de manifiesto en el siguiente teorema. Para esto decimos que 2 puntos en una variedad de Poisson son equivalentes si existe una curva suave que los una tal que sea la trayectoria de un campo vectorial hamiltoniano. Los vectores de campos Hamiltonianos generan un subespacio vectorial del espacio tangente a cada punto de la variedad de Poisson. Su dimensión es llamada el *rango de la estructura de Poisson* en dicho punto.

Teorema 1.5.2. (Teorema de la foliación) *La clase de equivalencia de un punto arbitrario en una variedad de Poisson es una subvariedad simpléctica de dimensión igual al rango de la estructura de Poisson en dicho punto.*

Por tanto toda variedad de Poisson admite una foliación en hojas simplécticas, que a su vez determinan la estructura de Poisson.

Capítulo 2

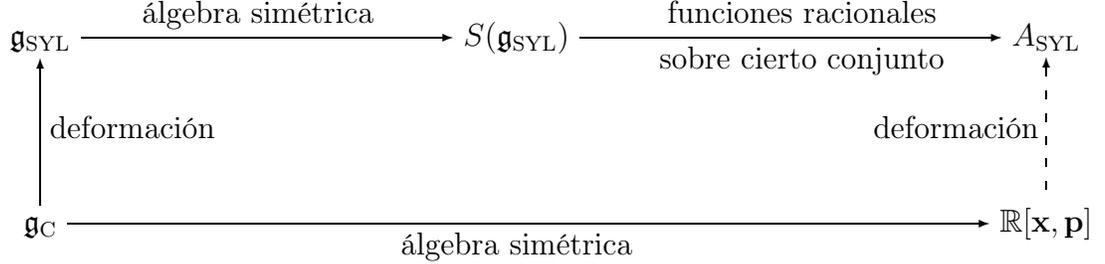
El Álgebra de Snyder-Yang-Leznov

2.1. Construcción del álgebra de Snyder-Yang-Leznov

Vamos a construir un álgebra de Poisson conmutativa que corresponda a una deformación triparamétrica del álgebra de polinomios en el espacio fase de una partícula libre $\mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ (de acuerdo al tratamiento clásico estándar). Como sabemos, esta última álgebra posee estructura de álgebra de Poisson conmutativa a través del paréntesis de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

La manera de proceder se puede esbozar de la siguiente manera: pensaremos a $\mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ como el álgebra simétrica de una cierta álgebra de Lie \mathfrak{g}_C y consideraremos otra álgebra de Lie \mathfrak{g}_{SYL} tal que \mathfrak{g}_C pueda obtenerse de esta última a partir de una contracción. El álgebra de Snyder-Yang-Leznov, A_{SYL} , será el álgebra de ciertas funciones racionales sobre el álgebra simétrica de \mathfrak{g}_{SYL} . El siguiente diagrama ilustra lo anterior:



Consideremos al espacio vectorial real generado por los elementos x_i , p_i , l_i e I , donde $1 \leq i \leq 3$, al cual dotamos de 2 estructuras de álgebra de Lie al construir 2 operaciones $\{\cdot, \cdot\}$ a través de las relaciones

$$\begin{aligned}
\{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}I - \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}, & \{l_i, x_j\} &= \epsilon_{ijk}x_k, & \{I, x_i\} &= \frac{p_i}{M^2} - \frac{x_i}{S}, \\
\{x_i, x_j\} &= \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{M^2}, & \{l_i, p_j\} &= \epsilon_{ijk}p_k, & \{I, p_i\} &= \frac{p_i}{S} - \frac{x_i}{L^2}, \\
\{p_i, p_j\} &= \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{L^2}, & \{l_i, l_j\} &= \epsilon_{ijk}l_k, & \{I, l_i\} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{aligned}
\{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}I, & \{l_i, x_j\} &= \epsilon_{ijk}x_k, & \{I, x_i\} &= 0, \\
\{x_i, x_j\} &= 0, & \{l_i, p_j\} &= \epsilon_{ijk}p_k, & \{I, p_i\} &= 0, \\
\{p_i, p_j\} &= 0, & \{l_i, l_j\} &= \epsilon_{ijk}l_k, & \{I, l_i\} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

y extenderlas a todo el espacio de manera que dichas operaciones sean lineales y antisimétricas. Un cálculo sencillo demuestra que estas operaciones también satisfacen la identidad de Jacobi; para esto el lector es referido al apéndice A. Llamaremos a las álgebras de lie resultantes $\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ y \mathfrak{g}_{C} respectivamente. Es claro aquí que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ es una deformación triparamétrica del álgebra de Lie \mathfrak{g}_{C} , con parámetros $1/L^2$, $1/M^2$ y $1/S$ (o bien \mathfrak{g}_{C} es una contracción de $\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$). Las dimensiones de los inversos de estos parámetros son area, momento cuadrado y acción, respectivamente. En el segundo caso los elementos l_i corresponden físicamente a las 3 componentes del momento angular e I a la función constate 1.

2.1. CONSTRUCCIÓN DEL ÁLGEBRA DE SNYDER-YANG-LEZNOV21

Se puede mostrar [18] que el álgebra de Lie (2.1) es isomorfa a $\mathfrak{o}(5)$, $\mathfrak{o}(1, 4)$ y $\mathfrak{o}(2, 3)$, dependiendo de los signos de L^2 , M^2 y $L^2M^2 - S^2$. La siguiente tabla hace cuenta de esto:

Cuadro 2.1: El álgebra $\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ según signo de parámetros

Signo de L^2, M^2 y $L^2M^2 - S^2$			Álgebra de Lie
$L^2 > 0,$	$M^2 > 0,$	$L^2M^2 - S^2 < 0$	$\mathfrak{o}(5)$
$L^2 > 0,$	$M^2 > 0,$	$L^2M^2 - S^2 > 0$	$\mathfrak{o}(1, 4)$
$L^2 < 0,$	$M^2 < 0,$	$L^2M^2 - S^2 > 0$	$\mathfrak{o}(1, 4)$
$L^2 < 0,$	$M^2 < 0,$	$L^2M^2 - S^2 < 0$	$\mathfrak{o}(2, 3)$
$L^2 > 0,$	$M^2 < 0$ ó	$L^2 < 0, M^2 > 0$	$\mathfrak{o}(1, 4)$

El álgebra $\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ generada a partir de las relaciones (2.1) es considerada y estudiada en [18]¹; ahí es mostrado que esta posee 2 invariantes de Casimir independientes, los cuales son²

$$K_2 = I^2 + \frac{x^2}{L^2} + \frac{p^2}{M^2} - \frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{S} - l^2 \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{L^2M^2} \right)$$

$$K_4 = (\mathbf{l} - \mathbf{x} \times \mathbf{p})^2 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{l}}{M^2} + \frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{l})}{S} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}^2}{L^2}$$

A fin de obtener el límite correcto en el caso no deformado, fijaremos $K_2 = 1$. Similarmente fijamos

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \tag{2.3}$$

¹Es importante mencionar que esta es en realidad una contracción de un álgebra de Lie más general, también considerada en [18], correspondiente al problema mecánico relativista y en donde son considerados 15 generadores; de los 5 adicionales, 2 de ellos corresponden al tiempo y su momento conjugado, mientras que los otros 3 se interpretan como los otros 3 generadores de $\mathfrak{o}(1, 3)$ (los tres primeros corresponden a las 3 componentes del momento angular clásico, que como puede verse en (2.2) forman un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{o}(3) \hookrightarrow \mathfrak{o}(1, 3)$).

²Existen fórmulas explícitas para los invariantes de Casimir como elementos del álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie en el caso en que esta es semisimple; por ejemplo, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base para \mathfrak{g} y $\{x^1, \dots, x^n\}$ es su base dual con respecto a la forma de Killing, $\sum_{i=1}^n x_i x^i$ es conocido como el invariante cuadrático de Casimir.

esto implica que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = 0$ y por lo tanto que $K_4 = 0$. La relación (2.3) generaliza la definición de momento angular como función de otras variables en el caso deformado.

La ecuación $K_2 = 1$ con l^2 expresado a través de \mathbf{p} , \mathbf{x} e I puede ser pensada como la ecuación que define al espacio fase de nuestro sistema dinámico. En este sentido, resulta importante mencionar un poco de historia en torno a esta álgebra: a través de diversas contracciones, $S(\mathfrak{g}_{\text{SYL}})$ se reduce a tres álgebras que fueron introducidas a mediados del siglo XX al (intentar) resolver diversos problemas de la mecánica cuántica y las teorías cuánticas de campos. La primera de estas es debida a E. Schrödinger y corresponde al caso en que $M^2, S \rightarrow \infty$. Este es el caso más estudiado en la literatura, pues tal y como se muestra en el trabajo de P. Higgs [16], corresponde al estudio de la dinámica en el espacio tridimensional de curvatura constante. En este caso la ecuación $K_2 = 1$ corresponde a la igualdad

$$I^2 + \frac{x^2}{L^2} = 1.$$

En el caso en que la curvatura es positiva, esta es la ecuación de $S^3 \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^7$ y el álgebra (2.1) describe la dinámica en la 3-esfera de radio L . las coordenadas $\{x_i\}$ se interpretan como la proyección en la coordenada I , aunque en el trabajo de Higgs son utilizadas las *coordenadas gnomónicas*, que corresponderían a ciertas q_i 's que satisfacen la expresión $Iq_i = x_i$.

En 1947, Hartland S. Snyder exhibió un ejemplo de un espacio-tiempo discreto e invariante ante el grupo de transformaciones de Lorentz al introducir un álgebra isomorfa a la correspondiente contracción $L^2, S \rightarrow \infty$ [24]; sin embargo, este modelo no era invariante ante el grupo de transformaciones de Poincaré, que generaliza al de Lorentz al considerar traslaciones y es el grupo ante el cual debería ser invariante cualquier teoría física relativista válida. Esto motivó a que ese mismo año, C. N. Yang considerara el caso correspondiente a la contracción $S \rightarrow \infty$ al introducir un ejemplo de espacio-tiempo discreto que si era invariante ante el grupo de Poincaré [27].

En un sentido puramente físico, la introducción del tercer parámetro S tiene la propiedad de romper la simetría de las ecuaciones de movimiento ante el cambio de sentido del *tiempo*; si cambiamos el signo de las funciones p_i , l_j y el paréntesis de Poisson simultáneamente, se puede observar que las relaciones de conmutación no se preservan, invirtiéndose el signo de los términos que contienen a dicho parámetro.

Definición 2.1.1. Consideremos el conjunto multiplicativo \mathfrak{I} formado por los monomios de la forma $I^k, k \in \mathbb{N}$. Definimos el álgebra de Snyder-Yang-Leznov como el campo de fracciones de $S(\mathfrak{g}_{\text{SYL}})$ sobre \mathfrak{I} ,

$$A_{\text{SYL}} := \mathfrak{I}^{-1}S(\mathfrak{g}_{\text{SYL}}) \quad (2.4)$$

es decir, un elemento de A_{SYL} es de la forma a/I^k , donde $a \in S(\mathfrak{g}_{\text{SYL}})$.

La motivación para construir esta álgebra de la presente manera viene de la correspondencia de coordenadas en el caso de Higgs, pues como se ha mencionado anteriormente, las coordenadas q_i en las cuales trabaja (y resuelve satisfactoriamente) los problemas del oscilador armónico y de Kepler en el espacio de curvatura constante son tales que

$$Iq_i = x_i$$

El problema de Kepler en el álgebra de Snyder-Yang-Leznov es resuelto en [19]. En la siguiente sección plantearémos y resolverémos el problema del oscilador armónico en esta álgebra, donde por esto se entiende encontrar a sus generadores x_i, p_j, l_k e I como funciones de t a partir de las ecuaciones determinadas por (1.13).

2.2. El Oscilador Armónico

2.2.1. La simetría escondida del problema

El problema clásico del oscilador armónico isotrópico tridimensional está determinado a través de la función Hamiltoniana³

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)$$

donde p^2 y x^2 son las normas al cuadrado de los vectores \mathbf{p} y \mathbf{q} cuyas componentes $p_i, x_i, 1 \leq i \leq 3$ constituyen las coordenadas del espacio fase, y ω es una constante que representa la velocidad angular característica del oscilador.

En 1956, George A. Baker [4] relacionó el problema cuántico sobre la degeneración de los niveles de energía del oscilador armónico isotrópico n -dimensional con una simetría *escondida* de la función Hamiltoniana, misma

³Convendremos de ahora en adelante que la masa del oscilador es igual a 1.

que no había sido descubierta dado que la naturaleza de esta no radica en la geometría del problema (como por ejemplo lo es la simetría rotacional del oscilador) sino una simetría en el espacio fase, referida entonces como *simetría dinámica*.

La simetría en cuestión está representada por el grupo de Lie $SU(3)$, aunque en este caso presentaremos su versión infinitesimal, es decir, a través del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$. Consideremos la familia de funciones⁴

$$S_{ij} = p_i p_j + \omega^2 x_i x_j \quad (2.5)$$

donde $1 \leq i, j \leq 3$. Utilizando el paréntesis de Poisson clásico, podemos verificar que estas funciones conmutan con la función Hamiltoniana. Similarmente, las 3 componentes del momento angular⁵

$$l_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j \quad (2.6)$$

conmutan con la función Hamiltoniana. Esto es una consecuencia de la simetría rotacional del problema, pues a través del paréntesis de Poisson, el momento angular actúa como *generador infinitesimal de rotaciones*, como puede apreciarse en el álgebra (2.2). Las componentes del momento angular forman un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(3)$.

La simetría de $\mathfrak{su}(3)$ aparece al considerar las funciones

$$N_{ij} = \frac{1}{\omega} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

que claramente conmutan con la función Hamiltoniana. Dado que para cada valor en su dominio, estas funciones constituyen los elementos de una matriz simétrica de traza 0, solo 5 de ellas son independientes. Su paréntesis de Poisson resulta ser

$$\{N_{ij}, N_{kl}\} = (\epsilon_{ikm} \delta_{jl} + \epsilon_{ilm} \delta_{jk} + \epsilon_{jkm} \delta_{il} + \epsilon_{jlm} \delta_{ik}) l_m \quad (2.8)$$

Dado que

$$\{N_{ij}, l_k\} = \epsilon_{ikl} N_{jl} + \epsilon_{jkl} N_{il} \quad (2.9)$$

estas 5 funciones, junto con las 3 componentes del momento angular, constituyen los 8 generadores de $\mathfrak{su}(3)$ ⁶.

⁴También llamadas *Tensor de Fradkin* en la jerga física.

⁵Seguiremos de ahora en adelante la convención de representar sumas a través de índices repetidos.

⁶Estas relaciones de conmutación pueden parecer no estándares; la manera usual de

2.2.2. El oscilador en A_{SYL}

Hemos visto que en el caso no deformado, resolver el problema del oscilador armónico implica considerar una función Hamiltoniana cuyas integrales primeras conformen al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$. En este sentido, resolver el problema del oscilador armónico en A_{SYL} estará fundamentado en la introducción de una función Hamiltoniana que 1) preserve dicha simetría y 2) genere el límite correcto al considerar el caso $L^2, M^2, S \rightarrow \infty$.

Consideremos la familia de funciones

$$S_{ij} = p_i p_j + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2} \quad (2.10)$$

donde $1 \leq i, j \leq 3$. En el apéndice C se muestra que las relaciones de conmutación de estas funciones resultan ser:

$$\begin{aligned} \{S_{ij}, S_{kl}\} = & \epsilon_{ikm} l_m \left(\omega^2 \delta_{jl} + \frac{S_{jl}}{L^2} \right) + \epsilon_{ilm} l_m \left(\omega^2 \delta_{jk} + \frac{S_{jk}}{L^2} \right) \\ & + \epsilon_{jkm} l_m \left(\omega^2 \delta_{il} + \frac{S_{il}}{L^2} \right) + \epsilon_{jlm} l_m \left(\omega^2 \delta_{ik} + \frac{S_{ik}}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Curiosamente, a pesar de la introducción de los parámetros M^2 y S con respecto al caso considerado por P. Higgs [16], las relaciones de conmutación aquí obtenidas son exactamente las mismas a las encontradas por él. En este sentido la técnica introducida por Higgs para mostrar que aún es posible construir al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ a partir de S_{ij} y l_k se sigue textualmente aquí. Básicamente, la afirmación de Higgs es que la subálgebra de Poisson cuadrática generada por S_{ij} y l_k posee una base en la cual las relaciones de conmutación se vuelven lineales, y por lo tanto puede ser pensada como álgebra de Lie, precisamenete isomorfa a $\mathfrak{su}(3)$.

Consideremos la siguiente función Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{l^2}{L^2} + \omega^2 \frac{x^2}{I^2} \right) \quad (2.12)$$

esta función posee las siguientes tres propiedades:

definir al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ es en términos de matrices complejas 3x3 antihermiteanas de traza 0 con el corchete dado por el conmutador de matrices. Si definimos convenientemente $L_{ij} = \epsilon_{ijk} l_k$ e identificamos a la familia de funciones $N_{ij} + \sqrt{-1} L_{ij}$ con dichas matrices, las relaciones de conmutación dadas por el paréntesis de Poisson resultan ser exactamente las mismas que las obtenidas con el conmutador de matrices. Sin embargo, en un afán de ser congruentes con la notación convenida, se han dejado las relaciones en la presente forma.

1. En el caso en que $\omega = 0$, obtenemos la función Hamiltoniana correspondiente al movimiento libre tal y como es presentada en [19]
2. Dada la interpretación de las coodenadas x_i mencionada previamente, el término

$$\omega^2 \frac{x^2}{I^2}$$

corresponde al potencial del oscilador en el caso en que $M^2, S \rightarrow \infty$, tal y como se puede corroborar en [16].

3. Como se muestra en el apéndice B, esta función conmuta con las funciones $N_{ij} = \frac{1}{\omega} (S_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}S_{mm})$ y las tres componentes del momento angular l_k , que constituyen los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ como subálgebra de A_{SYL} .

Por ende las ecuaciones de movimiento $\dot{f} = \{f, H\}$ resultan ser:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{I} \left(\left(\frac{1}{L^2} - \frac{\omega^2}{M^2 I^2} \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \frac{1}{S} \left(p^2 - \omega^2 \frac{x^2}{I^2} \right) \right) x_i - \frac{1}{I} \left(I^2 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{S} \right) p_i \\ \dot{p}_i &= \frac{\omega^2}{I^3} \left(I^2 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{S} \right) x_i \\ \dot{l}_i &= 0 \\ \dot{I} &= \left(\frac{1}{L^2} - \frac{\omega^2}{M^2 I^2} \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \frac{1}{S} \left(p^2 - \frac{\omega^2}{I^2} x^2 \right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.3. Solución del caso unidimensional

Antes de resolver el sistema de ecuaciones (2.13) mostraremos la solución del problema análogo en el caso unidimensional, es decir, cuando solo tenemos las variables x , p e I (l es idénticamente 0 claramente). En este caso la función Hamiltoniana es igual a

$$H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \omega^2 \frac{x^2}{I^2} \right)$$

y por ende las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ip - 2\frac{x^2}{SI^3} = 2\frac{px^2}{M^2I^3} \\
\dot{p} &= \frac{\omega^2}{I^3} \left(I^2 + \frac{x^2}{L^2} - \frac{xp}{S} \right) q \\
\dot{I} &= \left(\frac{1}{L^2} - \frac{\omega^2}{M^2I^2} \right) xp - \frac{1}{S} \left(p^2 - \frac{\omega^2}{I^2} x^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si introducimos la variable $q = x/I$, la función Hamiltoniana toma la forma de un polinomio cuadrático en p y q , mientras que las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \left(1 + \frac{q^2}{L^2} - \frac{pq}{SI} \right) p \\
\dot{p} &= -\omega^2 \left(1 + \frac{q^2}{L^2} - \frac{pq}{SI} \right) q \\
\dot{I} &= \frac{1}{S} (p^2 - \omega^2 q^2) - \left(\frac{1}{L^2} - \frac{\omega^2}{M^2I^2} \right) pqI
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Estas tres ecuaciones se encuentran acopladas; sin embargo, podemos hacer uso de 2 funciones que conmuten con la función Hamiltoniana de tal suerte que su valor sea una constante, para expresar a I como función de p y q , $I(p, q)$, y a p como función de q , y la primera ecuación adquiera entonces la forma $\dot{q} = f(q)$. Estas cantidades serán la Hamiltoniana misma

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = cte = E$$

y el segundo invariante de Casimir

$$I^2 \left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) + \frac{p^2}{M^2} - \frac{2pqI}{S} = 1, \tag{2.16}$$

de la primera ecuación tenemos que

$$p = \sqrt{2E - \omega^2 q^2} \tag{2.17}$$

y haciendo uso de esta podemos expresar a I como función de q :

$$I = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right)} \left(\frac{q\sqrt{2E - \omega^2 q^2}}{S} \pm \sqrt{aq^4 + bq^2 + c} \right) \tag{2.18}$$

donde

$$a = -\omega^2 \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{L^2 M^2} \right), \quad b = \frac{1}{L^2} + \frac{\omega^2}{M^2} + 2E \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{L^2 M^2} \right), \quad c = 1 - \frac{2E}{M^2}$$

de tal manera que tenemos entonces

$$\frac{dq}{dt} = \left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) \left(\sqrt{2E - \omega^2 q^2} - \frac{q(2E - \omega^2 q^2)}{q\sqrt{2E - \omega^2 q^2} \pm S\sqrt{aq^4 + bq^2 + c}} \right) \quad (2.19)$$

con lo que se ha reducido nuestro problema a resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Para esto observemos que

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dq}{\left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) \left(\sqrt{2E - \omega^2 q^2} - \frac{q(2E - \omega^2 q^2)}{q\sqrt{2E - \omega^2 q^2} \pm S\sqrt{aq^4 + bq^2 + c}} \right)} \\ &= \frac{q\sqrt{2E - \omega^2 q^2} \pm S\sqrt{aq^4 + bq^2 + c}}{\left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) \left(\pm S\sqrt{aq^4 + bq^2 + c}(2E - \omega^2 q^2) \right)} dq \\ &= \frac{dq}{\left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) \sqrt{2E - \omega^2 q^2}} \pm \frac{q dq}{S \left(1 + \frac{q^2}{L^2} \right) \sqrt{aq^4 + bq^2 + c}} \end{aligned}$$

y la solución de la ecuación se expresa en términos de la función implícita

$$t - t_0 = \frac{1}{\rho} \arctan \left(\frac{\rho q}{\sqrt{2E - \omega^2 q^2}} \right) \pm \frac{L^2 \ln(L^2 + q^2)}{2S\sqrt{aq^4 + bq^2 + c}} \quad (2.20)$$

donde $\rho = \sqrt{\frac{2E}{L^2} + \omega^2}$.

Finalmente podemos hacer uso de la ecuación $p^2 + \omega^2 q^2 = 2E$ para encontrar una solución $p = p(t)$, el segundo invariante de Casimir para $I = I(t)$ y de aquí tenemos

$$x = q(t)I(t) = x(t).$$

2.2.4. Solución del caso general

De forma análoga al caso unidimensional, resolveremos el problema tridimensional introduciendo las coordenadas de Higgs $q_i = x_i/I$. En este caso la función Hamiltoniana toma la forma

$$H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \omega^2 q^2 + \frac{l^2}{L^2} \right) \quad (2.21)$$

y por ende las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \left(1 + \frac{q^2}{L^2} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{SI} \right) p_i \\ \dot{p} &= -\omega^2 \left(1 + \frac{q^2}{L^2} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{SI} \right) q_i \\ \dot{I} &= \frac{1}{S} (p^2 - \omega^2 q^2) - \left(\frac{1}{L^2} - \frac{\omega^2}{M^2 I^2} \right) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) I \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ya sabemos que la función Hamiltoniana posee la simetría de $\mathfrak{su}(3)$, y usa-remos este hecho para determinar la ecuación de la órbita.

Primeramente, como el momento angular es una constante de movimiento en este problema, el movimiento del oscilador en las coordenadas q_i ocurrirá en un plano; podemos entonces sin pérdida de generalidad (dado que \mathbb{R}^3 es un espacio homogéneo, es decir, la acción de $SO(3)$ es transitiva en \mathbb{R}^3) suponer que el momento angular es un vector cuyas 2 primeras coordenadas son iguales a cero, lo cual es a su vez equivalente a suponer que las funciones coordenadas q_3 y p_3 son idénticamente 0, como se puede verificar después de sencillas manipulaciones algebraicas.

Ahora, las tres funciones

$$S_{11} = p_1^2 + \omega^2 q_1^2, \quad S_{22} = p_2^2 + \omega^2 q_2^2 \quad \text{y} \quad S_{12} = p_1 p_2 + \omega^2 q_1 q_2 \quad (2.23)$$

son también constantes de movimiento; fijando sus valores como E_{11} , E_{22} y E_{12} , después de cierta manipulación obtenemos la expresión

$$\omega^2 (E_{22} q_1^2 + E_{11} q_2^2 - 2E_{12} q_1 q_2) = E_{11} E_{22} - E_{12}^2$$

Por otro lado, el cuadrado del momento angular es también expresable en términos de estas constantes como $\omega^2 l^2 = E_{11} E_{22} - E_{12}^2$; la expresión para la órbita del oscilador toma entonces la forma

$$E_{22}q_1^2 + E_{11}q_2^2 - 2E_{12}q_1q_2 = l^2 \quad (2.24)$$

que es la ecuación de una elipse en el plano determinado por q_1 y q_2 . Aplicando una rotación en este plano, podemos encontrar nuevas coordenadas q'_1 y q'_2 tales que la ecuación de esta elipse tome la forma

$$\frac{q_1'^2}{A^2} + \frac{q_2'^2}{B^2} = 1. \quad (2.25)$$

Puede verificarse fácilmente que dicha rotación corresponde a un ángulo θ_0 tal que

$$\tan(2\theta_0) = \frac{2E_{12}}{E_{22} - E_{11}}$$

y en este caso los respectivos valores de A y B serán

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E_{11} + E_{22} - \sqrt{(E_{11} + E_{22})^2 - 4\omega^2 l^2}}{2}}$$

$$B = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E_{11} + E_{22} + \sqrt{(E_{11} + E_{22})^2 - 4\omega^2 l^2}}{2}}$$

Antes de continuar, haremos mención a un hecho que será de gran utilidad más adelante, y que es válido para cualquier sistema que presente las simetrías (2.23). Un poco de manipulación a estas ecuaciones nos permite expresar a p_1 y p_2 como una combinación lineal de q_1 y q_2 : al multiplicar las dos primeras por q_2 y q_1 respectivamente obtenemos

$$S_{11}q_2 = p_1^2 q_2 + \omega^2 q_1^2 q_2$$

$$S_{22}q_1 = p_2^2 q_1 + \omega^2 q_2^2 q_1.$$

Similarmente, al multiplicar la tercera ecuación por q_1 y q_2 obtenemos

$$S_{12}q_1 = p_1 p_2 q_1 + \omega^2 q_1^2 q_2$$

$$S_{12}q_2 = p_1 p_2 q_2 + \omega^2 q_1 q_2^2.$$

Recordemos que en el caso en cuestión $l = l_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$. Entonces concluimos que

$$p_1 = \frac{1}{l} (E_{12}q_1 - E_{11}q_2) \quad (2.26)$$

$$p_2 = \frac{1}{l} (E_{22}q_1 - E_{12}q_2) \quad (2.27)$$

Ahora solo tenemos que ver como se transforman las ecuaciones de movimiento; primero observemos que

$$\dot{q}'_1 = \cos \theta_0 \dot{q}_1 - \sin \theta_0 \dot{q}_2 = \left(1 + \frac{q^2}{L^2} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{SI}\right) (\cos \theta_0 p_1 - \sin \theta_0 p_2)$$

como el cambio de coordenadas es una transformación ortogonal, tendremos que $q^2 = q'^2$; de manera análoga

$$p^2 = E_{11} + E_{22} - \omega^2 q^2 = E_{11} + E_{22} - \omega^2 q'^2.$$

Similarmente, es posible expresar al producto escalar de \mathbf{q} y \mathbf{p} , $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ como función de q'_1 y q'_2 ; esta resulta ser

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{l} (\sqrt{(E_{11} + E_{22})^2 - 4\omega^2 l^2}) q'_1 q'_2.$$

Como nuevamente podemos expresar a I como función de q^2 , p^2 y $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ a través del segundo invariante de Casimir

$$I = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{L^2}\right)} \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{S} \pm \sqrt{\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}{S^2} - \left(1 + \frac{q^2}{L^2}\right) \left(\frac{p^2}{M^2} - \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{L^2 M^2}\right) l^2 - 1\right)} \right)$$

y q'_1 y q'_2 satisfacen la ecuación (2.25), todas las expresiones anteriores hacen que nuestro problema se reduzca a resolver una ecuación diferencial ordinaria, la ecuación para q'_1 (aunque claramente también podríamos plantear la ecuación para q'_2). Dado que es posible reducir a cuadraturas cualquier ecuación diferencial ordinaria de primer orden, consideraremos nuestro problema resuelto al determinar esta explícitamente. Fijando $\alpha = \frac{1}{S^2} - \frac{1}{L^2 M^2}$ tenemos entonces que

$$\dot{q}'_1 = \left(1 + \frac{q^2}{L^2}\right) \cdot (\cos \theta_0 p_1 - \sin \theta_0 p_2) \cdot \left(\frac{\pm S \sqrt{\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}{S^2} - \left(1 + \frac{q^2}{L^2}\right) \left(\frac{p^2}{M^2} - \alpha l^2 - 1\right)}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \pm S \sqrt{\frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2}{S^2} - \left(1 + \frac{q^2}{L^2}\right) \left(\frac{p^2}{M^2} - \alpha l^2 - 1\right)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_1 + \alpha_2 q_1'^2) \cdot \left(\beta_1 q_1' + \beta_2 \sqrt{1 - \frac{q_1'^2}{A^2}} \right) \\
&\cdot \left(\frac{\pm \sqrt{\gamma_1 + \gamma^2 q_1'^2 + \gamma_3 q_1'^4}}{\delta q_1' \sqrt{1 - \frac{q_1'^2}{A^2}} \pm \sqrt{\gamma_1 + \gamma^2 q_1'^2 + \gamma_3 q_1'^4}} \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 + \frac{B^2}{L^2}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{L^2} \left(1 - \frac{B^2}{A^2} \right), \\
\beta_1 &= \frac{1}{l} (\cos \theta_0 E_{12} - \sin \theta_0 E_{22}), \\
\beta_2 &= \frac{B}{l} (\sin \theta_0 E_{12} - \cos \theta_0 E_{11}), \\
\gamma_1 &= \left(\alpha l^2 + 1 - \frac{\omega^2 A^2}{M^2} \right) \left(1 + \frac{B^2}{L^2} \right), \\
\gamma_2 &= \left(\alpha \omega^2 \left(A^2 - B^2 + \frac{A^2 B^2}{L^2} \right) + \frac{\omega^2}{M^2} + \frac{1}{L^2} \right) \left(1 - \frac{B^2}{A^2} \right), \\
\gamma_3 &= -\alpha \omega^2 \left(1 - \frac{B^2}{A^2} \right)^2, \\
\delta &= \frac{1}{Sl} \sqrt{(E_{11} + E_{22})^2 - 4\omega^2 l^2}.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Cuantización por Deformación

En el año de 1997 Maxim Kontsevich demostró que toda variedad de Poisson admite una cuantización formal, canonica salvo equivalencia, resolviendo así un problema de la física matemática con muchos años de historia. En términos generales, el problema resuelto por Kontsevich consiste en el paso de una estructura *conmutativa* a una estructura *no conmutativa*, teniendo la primera su origen en la mecánica Hamiltoniana tal y como se mostró en la sección 1.4, mientras que la última en el formalismo matemático de la mecánica cuántica.

3.1. Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica como 2 perspectivas de un mismo objeto

Contrario a lo que se piensa comunmente, la revolución cuántica de los años 20's no desplazó a la mecánica clásica, al menos en lo que a la teoría matemática se refiere. Ambas disciplinas existen en una suerte de relación simbiótica.

En la mecánica cuántica, una observable O es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , un estado ϕ es un vector unitario en dicho espacio determinado salvo multiplicación de un número complejo unitario (es decir, es un elemento de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$), y el número

$$\langle \phi, O\phi \rangle$$

se denomina el valor esperado de la observable O en el estado ϕ .

Un sistema cuántico en el cual los estados no dependen del tiempo se conoce como la *imagen de Heisenberg*. La evolución de una observable O está dada por la ecuación

$$\frac{dO}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[O, H]$$

donde $\hbar = h/2\pi$, y h es la *constante de Planck*¹

Como ya hemos visto, en la mecánica Hamiltoniana los sistemas físicos son descritos por álgebras conmutativas de funciones suaves en variedades de Poisson. En contraste, las álgebras de operadores sobre espacios de Hilbert estudiadas en la mecánica cuántica son naturalmente no conmutativas. La descripción cuántica de un sistema físico predice resultados experimentales mucho más precisos que su contraparte clásica; sin embargo la descripción clásica es bastante satisfactoria a nivel macroscópico. La forma en que es determinada que tan buena es esta aproximación es expresando la constante de Planck en unidades que sean características de la escala del sistema en cuestión y, mientras más pequeño sea el valor de esta constante, más precisa será dicha aproximación. En este sentido es natural afirmar que la mecánica clásica surge a partir de la mecánica cuántica como el límite de esta cuando la constante de Planck tiende a cero; matemáticamente, la estructura del álgebra de observables clásicas es obtenida a partir del álgebra de observables cuánticas a través de la ecuación

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar}[f, g].$$

3.1.1. El sueño de Dirac: el programa de Cuantización

Existen diversas razones [13] por las cuales sería deseable llegar a definir las teorías cuánticas como el resultado de un *proceso de cuantización* aplicado a las teorías clásicas. Esta línea de pensamiento ha sido una rica fuente de investigación matemática en la mayor parte del siglo pasado. Al parecer Dirac fue el primero en observar la profunda relación existente entre el paréntesis de Poisson de la mecánica clásica y el conmutador de la mecánica cuántica, y en cierto sentido, el primero en proponer un *programa de cuantización* en su libro sobre mecánica cuántica [8], que queda de manifiesto simbólicamente en el siguiente diagrama

$$\{\cdot, \cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$$

¹En el sistema internacional de unidades, $h = 6.626068... \times 10^{-34}$ J·s.

y que consiste en un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathcal{Q} : A \subset C^\infty(M) \rightarrow \text{SYM}(\mathcal{H})$ de cierta subálgebra del álgebra de funciones en el espacio fase al conjunto de operadores simétricos en un espacio de Hilbert (típicamente $\mathcal{L}^2(Q, d\mu)$, donde Q es el espacio de configuraciones clásico y $d\mu$ es la medida que se deriva de la métrica Riemanniana definida por la energía cinética). Existen axiomatizaciones que precisan estas ideas (véase [13]); sin embargo, el teorema de Groenewold y van Howe hace explícito que una construcción de este tipo no es posible.

El programa de cuantización en el cual estamos interesados ahora fue introducido en 1978 por Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz y Sternheimer, y se conoce como *cuantización por deformación*. Este programa toma como punto de partida una variedad de Poisson; en contraste, su resultado es un álgebra no conmutativa y asociativa, cuyos elementos son vistos como observables cuánticas. Esta álgebra no es presentada como un álgebra de operadores en un espacio de Hilbert sino como una deformación formal uniparamétrica del álgebra de funciones suaves de la variedad de Poisson original. En [5] se presentan los fundamentos teóricos de la cuantización por deformación, cuya filosofía se resume en palabras de sus autores:

We suggest that quantization be understood as a deformation of the structure of the algebra of classical observables, rather than as a radical change in the nature of the observables.

y en [6] se introducen las primeras aplicaciones físicas importantes. En la siguiente sección presentaremos los pormenores matemáticos de estas ideas.

3.2. Deformaciones y estructuras de Poisson

Consideremos un anillo conmutativo k y una k -álgebra A . Denotemos por $k[[t]]$ al anillo de series formales de potencias en la indeterminada t y por $A[[t]]$ al $k[[t]]$ -módulo de series formales de potencias con coeficientes en A , es decir

$$A[[t]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mid a_n \in A \right\}$$

Definición 3.2.1. *Una **deformación formal** \star de la multiplicación en A es una función $k[[t]]$ -bilineal*

$$A[[t]] \times A[[t]] \rightarrow A[[t]]$$

tal que tenemos

$$u \star v \equiv uv \pmod{tA[[t]]}$$

para todas las series formales de potencias $u, v \in A[[t]]$.

Entonces, el producto de dos elementos $a, b \in A$ tendría la forma

$$a \star b = ab + B_1(a, b)t + \cdots + B_n(a, b)t^n + \cdots \quad (3.1)$$

para una sucesión de funciones bilineales $B_n : A \times A \rightarrow A$. Podemos hacer $B_0(a, b) = ab$ y entonces escribir

$$\star = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$$

y el producto de elementos arbitrarios de $A[[t]]$ quedará determinado en términos de los B_n 's por su $k[[t]]$ -bilinealidad y la continuidad t -ádica:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \star \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l+m=n} B_m(a_k, b_l) \right) t^n.$$

De particular importancia resultan ser las deformaciones formales *asociativas*, que satisfacen la relación $u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$ para todos $u, v, w \in A[[t]]$ o equivalentemente

$$\sum_{i+j=n} [B_i(B_j(a, b), c) - B_i(a, B_j(b, c))] = 0 \quad (3.2)$$

para todos $a, b, c \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

En el caso en el que A es el álgebra de funciones suaves sobre una variedad diferenciable M , $A = C^\infty(M)$, decimos que una función $P : A^k \rightarrow A$ es un *operador k -diferencial* si es k -lineal y es un operador diferencial con respecto a cada argumento.

Definición 3.2.2. *Sea M una variedad diferenciable. Un **producto estrella** en M es una deformación formal asociativa de la multiplicación en $C^\infty(M)$, tal que las funciones $B_n : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ son operadores bidiferenciales.*

Ejemplos:

1. **El producto de Moyal.** El ejemplo más sencillo de un producto estrella es el producto de Moyal para \mathbb{R}^m cuando la estructura de Poisson está dada a través de una matriz antisimétrica.

Sea $M = \mathbb{R}^2$ con coordenadas x_1, x_2 y el paréntesis de Poisson dado por

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

donde $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. El *producto de Moyal* es el producto estrella dado por

$$f \star_M g := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-i} \partial x_2^i} \frac{\partial^n g}{\partial x_1^i \partial x_2^{n-i}} \right) \frac{t^n}{n!} \quad (3.3)$$

Ahora, en \mathbb{R}^m , supongamos que

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

donde c^{ij} es una matriz antisimétrica. Entonces la fórmula

$$\begin{aligned} f \star_M g &= m \left(\exp \left(t c^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f \otimes g) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, j_1, \dots, i_n, j_n} c^{i_1 j_1} \dots c^{i_n j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \dots x_{j_n}} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $m(a \otimes b) = ab$, define un producto estrella en $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Esta fórmula es conocida como el producto de Moyal-Weyl asociado a $\{\cdot, \cdot\}$.

2. **El producto estrella de Gutt sobre el dual de un álgebra de Lie.** Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita, \mathfrak{g}^* su dual sobre \mathbb{R} y $A = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ el álgebra de funciones suaves sobre \mathfrak{g}^* . Hemos visto que como el doble dual de \mathfrak{g} , $(\mathfrak{g}^*)^* \subset A$ se identifica canónicamente con \mathfrak{g} , podemos introducir un corchete en él de manera natural y extenderlo de manera única a un paréntesis de Poisson en A (sección 1.1, ejemplo 4).

Es posible introducir un producto estrella en $A[[t]]$ que está íntimamente relacionado al producto del álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} ; la

forma explícita de este producto puede encontrarse en [3]. Recordemos que $S(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*] \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*) = A$. Se puede demostrar que el subespacio $S(\mathfrak{g})[t]$ de $A[[t]]$ formado por los polinomios en t cuyos coeficientes son polinomios en \mathfrak{g}^* es una subálgebra para el producto estrella. Más aún, la inclusión $\mathfrak{g} \hookrightarrow S(\mathfrak{g})[t]$ induce un isomorfismo

$$U_{hom}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\cong} S(\mathfrak{g})[t]$$

donde $U_{hom}(\mathfrak{g})$ es el álgebra envolvente homogénea, es decir, la $\mathbb{R}[t]$ -álgebra generada por \mathfrak{g} con relaciones $x_1x_2 - x_2x_1 - t[x_1, x_2]$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$. El cociente $S(\mathfrak{g})[t]/(t-1)S(\mathfrak{g})[t]$ es entonces isomorfo al álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$.

En la sección 1.2 vimos que como espacios vectoriales, $S(\mathfrak{g})$ y $U(\mathfrak{g})$ son isomorfos. Sea $I_{PBW} : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ el correspondiente isomorfismo introducido en la sección 1.2.3. Definimos para $P \in S^p(\mathfrak{g})$ y $Q \in S^q(\mathfrak{g})$

$$P \star_G Q = \sum_{n=0}^{\infty} I_{PBW}^{-1}((I_{PBW}(P) \circ I_{PBW}(Q))_{p+q-n})(2t)^n$$

y usando la linealidad del isomorfismo podemos extender esta expresión a un producto estrella en $S(\mathfrak{g})$, conocido como *producto estrella de Gutt*.

Consideremos al subgrupo G del grupo $\text{Aut}(A[[t]])$ de automorfismos de $k[[t]]$ -módulos de $A[[t]]$ formado por todos los g tales que

$$g(u) \equiv u \pmod{tA[[t]]} \quad \forall u \in A[[t]]$$

es decir, los automorfismos de la forma $\text{Id}_{A[[t]]} + \sum g_n t^n$, siendo los g'_n s funciones bilineales. Resulta natural definir deformaciones formales salvo la relación de equivalencia surgida a partir de la acción de este grupo:

Definición 3.2.3. *Decimos que dos deformaciones \star y \star' son equivalentes si existe un elemento $g \in G$ tal que*

$$g(u \star v) = g(u) \star' g(v)$$

para todo $u, v \in A[[t]]$.

En el caso particular en que $A = C^\infty(M)$ para alguna variedad diferenciable M , el grupo G estará formado por los automorfismos de $\mathbb{R}[[t]]$ -módulos de $A[[t]]$ de la forma $g = \sum g_n t^n$ donde $g_0 = \text{Id}_{A[[t]]}$ y los demás g_n 's sean operadores diferenciales. Entonces llamaremos *transformación de norma* a todo elemento $g \in G$. Recordemos que estas álgebras son conmutativas; el siguiente es un resultado de considerable importancia en el caso en que A es un álgebra conmutativa:

Proposición 3.2.4. *Sea \star una deformación formal asociativa de la multiplicación en A . Para cualesquiera $a, b \in A$ definamos $\{a, b\} := B_1(a, b) - B_1(b, a)$. Entonces:*

1. La función $\{\cdot, \cdot\}$ es un paréntesis de Poisson en A .
2. $\{\cdot, \cdot\}$ solo depende de la clase de equivalencia de \star .

Demostración.-

1) La función

$$(u, v) \mapsto \frac{1}{t}(u \star v - v \star u)$$

define un corchete de Lie en $A[[t]]$. Si denotamos a este por $[\cdot, \cdot]$, entonces $\{\cdot, \cdot\}$ equivale a la reducción módulo t de $[\cdot, \cdot]$. Por lo tanto $\{\cdot, \cdot\}$ es un corchete de Lie. La regla de Leibniz se sigue de que

$$[u, vw] = [u, v]w + v[u, w]$$

para todos $u, v, w \in A[[t]]$, pues la deformación formal en cuestión es asociativa (véase el ejemplo 1 de la sección 1.1).

2) Si $g \in G$ es una equivalencia entre \star y \star' , entonces tenemos

$$B'_1(a, b) = B_1(a, b) - ag(b) - g(a)b + g(ab)$$

para todos $a, b \in A$. Por lo tanto la diferencia $B_1(a, b) - B'_1(a, b)$ es simétrica en a y b , y por lo tanto no contribuye a $\{\cdot, \cdot\}$. Q.E.D.

Por la proposición probada anteriormente, cada clase de productos estrella $[\star]$ en M da lugar a un paréntesis de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ en $A = C^\infty(M)$. En este caso llamaremos a cualquier representante de esta clase \star una **cuantización formal** de $\{\cdot, \cdot\}$. Tanto el producto de Moyal como el producto

estrella de Gutt son ejemplos de cuantizaciones formales de sus correspondientes estructuras de Poisson. Por otro lado, al ser todo producto estrella una operación asociativa, el conmutador inducido por este

$$u \star v - v \star u$$

será un paréntesis de Poisson en $A[[t]]$.

Todo paréntesis de Poisson en A corresponde de manera biunívoca a una clase de paréntesis de Poisson en $A[[t]]$ bajo la siguiente relación: decimos que 2 paréntesis de Poisson en $A[[t]]$ están relacionados si son conjugados bajo algún elemento $g \in G$. Como $g \equiv \text{Id}_A \pmod{tA[[t]]}$, dos paréntesis de Poisson en $A[[t]]$ estarán relacionados si y solo si sus correspondientes paréntesis de Poisson en A son el mismo.

Hasta ahora sabemos que las clases de equivalencia de productos estrella módulo $O(t^2)$ son clasificadas por estructuras de Poisson en M ; sin embargo no es claro cuando es que existe un producto estrella cuyo primer término corresponda a una estructura de Poisson dada y en todo caso cuando es que existe una elección preferencial de una clase de equivalencia de productos estrella. El siguiente teorema demostrado por Kontsevich resuelve esta cuestión:

Teorema 3.2.5. (Kontsevich [17]) *Sea M una variedad de Poisson y $A = C^\infty(M)$. Existe una biyección $[\pi] \mapsto [\star_\pi]$ entre el conjunto de clases de equivalencia de paréntesis de Poisson*

$$\pi = 0 + \pi_1 t + \cdots + \pi_n t^n + \cdots$$

en el álgebra $A[[t]]$ y el conjunto de clases de equivalencia de productos estrella en M . Si π corresponde a \star_π , entonces el paréntesis de Poisson en A asociado con \star_π es igual al coeficiente π_1 de t en π .

3.3. La fórmula de Kontsevich en \mathbb{R}^m

Sea M un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m y A el álgebra de funciones suaves en M dotada de alguna estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. En [17], Maxim Kontsevich presenta una fórmula explícita para la cuantización formal canónica de M , es decir, un producto estrella \star_K para $\{\cdot, \cdot\}$, canónico salvo equivalencia, con la propiedad de reducirse a los 2 casos mencionados previamente, la cual presentaremos a continuación.

Recordemos que si x_1, \dots, x_m son coordenadas de \mathbb{R}^m , toda estructura de Poisson puede ser expresada en términos de m^2 funciones $c^{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $1 \leq i, j \leq m$ y $c^{ji} = -c^{ij}$ como

$$c = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

cuyo correspondiente paréntesis de Poisson es

$$\{f, g\} = \langle c, df \wedge dg \rangle = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Como mencionamos en la sección anterior, la fórmula para el producto estrella estará determinada por una sucesión de funciones bilineales

$$\star_K = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$$

de tal manera que para cada pareja de funciones $f, g \in C^\infty(M)$, $B_n(f, g)$ se expresará como una combinación lineal de sumas y productos de derivadas parciales tanto de f y g como de las funciones c^{ij} .

La construcción de las funciones B_n se puede esquematizar de la siguiente manera: Primero introduciremos un conjunto G_n , cuyos elementos serán un cierto tipo de gráficas, y en función de este conjunto introduciremos dos familias de objetos, ambas indexadas por los elementos $\Gamma \in G_n$: (1) un conjunto de operadores bidiferenciales $B_{\Gamma,c}$ y (2) un conjunto de números reales w_Γ , llamados *pesos de Kontsevich*, que se derivan de una construcción de geometría hiperbólica, de tal manera que podamos definir

$$B_n := \sum_{\Gamma \in G_n} w_\Gamma B_{\Gamma,c} \quad (3.5)$$

Ahora procedamos con dicha construcción.

Definición 3.3.1. Una gráfica orientada Γ es una terna $(\Gamma_0, \Gamma_1, (s, t))$, formada por:

- (1) Un conjunto Γ_0 , cuyos elementos son llamados *vértices* de Γ .
- (2) Un conjunto Γ_1 , cuyos elementos son llamados *aristas* de Γ .
- (3) Una pareja de funciones $s, t : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ que a toda arista asocian una pareja de vértices, su *inicio* y su *blanco*.

En una gráfica orientada, se denomina *lazo* a toda arista a tal que $s(a) = t(a)$, y *arista doble* a toda pareja de aristas a, b tales que $s(a) = s(b)$ y $t(a) = t(b)$.

Definición 3.3.2. Llamaremos G_n al conjunto de gráficas orientadas Γ tales que

- (1) $\Gamma_0 = \{1, \dots, n\} \sqcup \{L, R\}$, donde L y R son solo 2 símbolos;
- (2) $\Gamma_1 = \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$
- (3) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $s(a_i) = s(b_i) = i$
- (4) Γ no posee lazos ni aristas dobles.

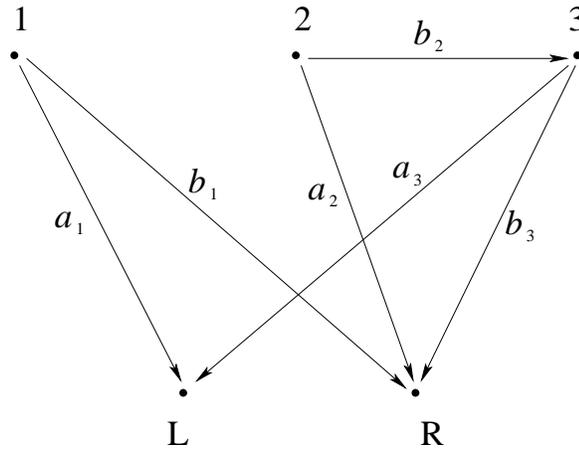
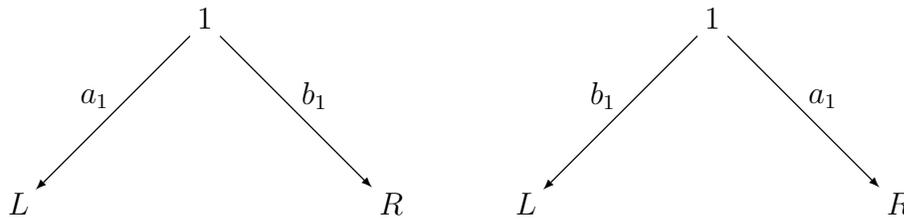


Figura 3.1: Gráfica orientada perteneciente a G_3 .

G_0 contiene a la única gráfica formada por los vértices L y R y ninguna arista; G_1 está formado por 2 elementos, los cuales se pueden esquematizar como



G_2 por 36, G_3 por 1728, ..., G_{10} por 259374246010000000000 elementos. En general para $n \geq 1$, un sencillo argumento combinatorio muestra que G_n contiene $(n(n+1))^n$ elementos.

Dada una pareja de funciones suaves f y g en M y una gráfica orientada $\Gamma \in G_n$, definimos la función $B_{\Gamma,c}(f, g)$ como

$$B_{\Gamma,c}(f, g) := \sum \left(\prod_{i=1}^n \left(\prod_{a \in \Gamma(i)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) c^{I(a_i)I(b_i)} \right) \cdot \left(\prod_{a \in \Gamma(L)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (f) \cdot \left(\prod_{a \in \Gamma(R)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (g) \quad (3.6)$$

donde $\Gamma(v)$ denota al conjunto de aristas cuyo blanco es v y la suma es considerada sobre todas las funciones $I : \Gamma_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$.

Por ejemplo, para la gráfica orientada mostrada en la figura 3.1, el operador $B_{\Gamma,c}$ correspondiente es

$$\sum c^{I(a_1)I(b_1)} \cdot c^{I(a_2)I(b_2)} \cdot \frac{\partial c^{I(a_3)I(b_3)}}{\partial x_{I(b_2)}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_{I(a_1)} x_{I(a_3)}} \cdot \frac{\partial^3 g}{\partial x_{I(b_1)} x_{I(a_2)} x_{I(b_3)}}$$

(Nótese que se han dejado indicados la suma y los valores de las funciones $I(v)$ pues no se ha especificado sobre que \mathbb{R}^m se está considerando la estructura de Poisson.)

Ahora, sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ el semiplano superior del plano complejo dotado con la métrica hiperbólica (véase por ejemplo [22]). Para dos puntos distintos $p, q \in \mathcal{H}$ denotemos por $\phi(p, q)$ al ángulo en p formado por 2 líneas, la geodésica $l(p, q)$ por p y q y la semirecta vertical $l(p, \infty)$ de p a ∞ . Podemos apreciar en la siguiente figura que su valor está determinado por la ecuación

$$\phi(p, q) = \arg \left(\frac{q-p}{q-\bar{p}} \right) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{(q-p)(\bar{q}-p)}{(q-\bar{p})(\bar{q}-\bar{p})} \right)$$

Esta función admite una extensión continua al conjunto de parejas de números complejos (p, q) tales que $\Im(p), \Im(q) \geq 0$ y $p \neq q$.

Consideremos ahora al conjunto $\mathcal{H}_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{H}^n | p_i = p_j \Rightarrow i = j\}$ de n -adas de puntos distintos de \mathcal{H} , al cual podemos dar la siguiente interpretación geométrica en \mathcal{H} : Dada una gráfica orientada $\Gamma \in G_n$, identificamos los vértices $1, \dots, n$ con puntos distintos $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{H}$, los vértices L y R con los puntos 0 y 1 (en la cerradura de $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$) y cada una de las

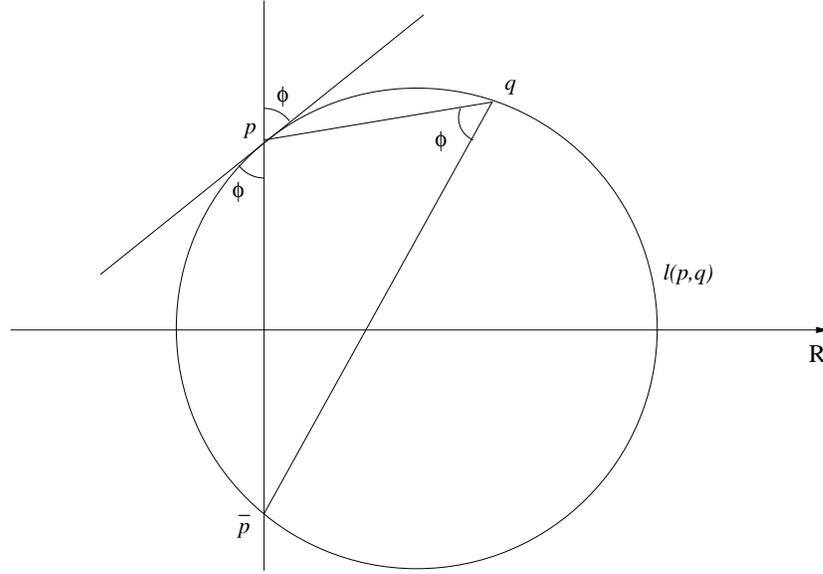


Figura 3.2: Deducción de la fórmula para $\phi(p, q)$

aristas con el segmento geodésico entre su punto de inicio y su punto blanco. Para cada arista $a \in \Gamma$, definimos la función

$$\phi_a : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi_a(p_1, \dots, p_n) := \phi(p_{s(a)}, p_{t(a)})$$

los pesos de Kontsevich están dados por la integral

$$w_\Gamma := \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{\mathcal{H}_n} \bigwedge_{i=1}^n (d\phi_{a_i} \wedge d\phi_{b_i}) \quad (3.7)$$

Teorema 3.3.3. (Kontsevich [17]) *Sea c una estructura de Poisson en un abierto M de \mathbb{R}^m . La fórmula*

$$f \star_K g := \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{\Gamma \in G_n} w_\Gamma B_{\Gamma, c}(f, g)$$

define un producto estrella en $C^\infty(M)$. Su clase de equivalencia es independiente de la elección de coordenadas en M .

3.4. LA FÓRMULA DE KONTSEVICH Y EL PRODUCTO DE MOYAL⁴⁵

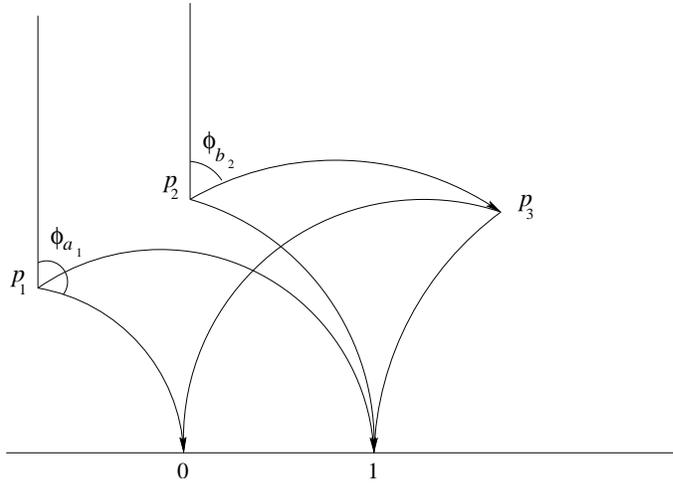


Figura 3.3: Dibujo geodésico correspondiente a la gráfica de la figura 3.1

Esta fórmula fue deducida en realidad como un corolario de una afirmación mucho más general formulada por Kontsevich en 1993, la *conjetura de formalidad* (conocida ahora como el teorema de formalidad) y contiene como casos particulares al producto de Moyal y al producto estrella de Gutt para el dual de un álgebra de Lie, además de implicar en este último caso el *isomorfismo de Duflo*. Hablaremos un poco de esto en las siguientes 2 secciones. La demostración de esta fórmula se basa en la fórmula de Stokes y la combinatoria de gráficas admisibles.

3.4. La especialización de la fórmula de Kontsevich al producto de Moyal

Hemos mencionado previamente que la fórmula de Kontsevich contiene al producto de Moyal como un caso particular, y en esta sección mostraremos la veracidad de dicha afirmación. Recordemos que el producto de Moyal es un producto estrella definido en el caso en que nuestra estructura de Poisson está dada por una matriz antisimétrica,

$$c = \sum_{i,j} c^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c^{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$$

Proposición 3.4.1. *Si c es una estructura de Poisson constante en \mathbb{R}^m , es decir, las funciones c^{ij} son constantes, la fórmula de Kontsevich para el producto estrella se reduce al producto de Moyal.*

Demostración.-

La primera observación que podemos hacer es que dado que las c^{ij} son funciones constantes, el siguiente factor de los operadores bidiferenciales $B_{\Gamma,c}$

$$\left(\prod_{i=1}^n \left(\prod_{a \in \Gamma(i)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) c^{I(a_i)I(b_i)} \right)$$

será distinto de 0 solamente en el caso en que no aparezca ninguna derivada parcial, es decir, en aquellas gráficas tales que el conjunto de aristas cuyo blanco es i sea vacío, donde $i \in \{1, \dots, n\}$, lo cual es equivalente a que n aristas tengan como blanco a L mientras que las n restantes a R . Para cada n , existen un total de 2^n gráficas de este tipo.

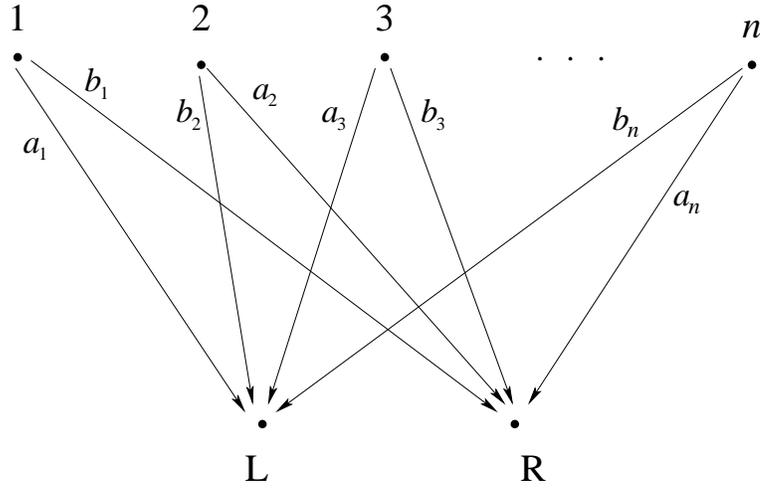


Figura 3.4: Una posible gráfica con $B_{\Gamma,c}$ distinto de 0

Notemos también que para un n fijo, todas las posibles gráficas con $B_{\Gamma,c}$ distinto de 0 se pueden obtener de la gráfica Γ_0 tal que $t(a_i) = L$, $t(b_i) = R$, $\forall 1 \leq i \leq n$ a partir de permutaciones de aristas $a_i \leftrightarrow b_i$ para ciertas $i \in \{1, \dots, n\}$. Esto implica que los correspondientes pesos de Kontsevich

$$w_{\Gamma} = \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{\mathcal{H}_n} \bigwedge_{i=1}^n (d\phi_{a_i} \wedge d\phi_{b_i})$$

3.4. LA FÓRMULA DE KONTSEVICH Y EL PRODUCTO DE MOYAL⁴⁷

satisfacen la relación

$$w_\Gamma = \text{sgn}(\sigma)w_{\Gamma_0} \quad (3.8)$$

donde σ denota a la permutación que lleva Γ en Γ_0 . En [17], pág. 187-193 es demostrado en términos de integrales que generalizan la expresión anterior (sobre las llamadas *gráficas admisibles*) que para la gráfica en G_1 tal que $t(a_1) = L$, $t(b_1) = R$, la integral

$$\int_{\mathcal{H}} d\phi_{a_1} \wedge d\phi_{b_1}$$

es igual a $(2\pi)^2/2$. El siguiente lema es inmediato de la definición de peso de Kontsevich:

Lema 3.4.2. *Si una gráfica $\Gamma \in G_n$ es la unión de 2 gráficas $\Gamma_1 \in G_{n_1}, \Gamma_2 \in G_{n_2}$, donde $n = n_1 + n_2$, entonces se satisface la relación*

$$w_\Gamma = \frac{n_1!n_2!}{n!}w_{\Gamma_1}w_{\Gamma_2}. \quad (3.9)$$

De aquí podemos deducir que para $\Gamma_0 \in G_n$, su peso de Kontsevich w_{Γ_0} es igual a $1/(n!2^n)$.

Entonces, si fijamos una gráfica $\Gamma \in G_n$, tenemos que

$$B_{\Gamma,c}(f, g) := \sum_I \left(\prod_{i=1}^n c^{I(a_i)I(b_i)} \right) \left(\prod_{a \in \Gamma(L)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (f) \left(\prod_{a \in \Gamma(R)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (g)$$

Nótese que estamos tomando la suma sobre todas las posibles funciones $I : \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ y un sumando no se anula exactamente cuando $I(a_i) \neq I(b_i) \forall i$. En el caso particular de Γ_0 ,

$$B_{\Gamma_0,c}(f, g) := \sum_I c^{I(a_1)I(b_1)} \dots c^{I(a_n)I(b_n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{I(a_1)} \dots \partial x_{I(a_n)}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{I(b_1)} \dots \partial x_{I(b_n)}}$$

Nuestra última observación será sobre como se relacionan los operadores $B_{\Gamma,c}$ y $B_{\Gamma_0,c}$ para algún $\Gamma \in G_n$. Aplicar la permutación σ que lleva a Γ en Γ_0 en $c^{I(a_1)I(b_1)} \dots c^{I(a_n)I(b_n)}$ solo cambiará el signo de este coeficiente por $\text{sgn}(\sigma)$,

pues recordemos que los c^{ij} 's son coeficientes antisimétricos en i y j , mientras que los correspondientes factores

$$\left(\prod_{a \in \Gamma(L)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (\cdot) \left(\prod_{a \in \Gamma(R)} \frac{\partial}{\partial x_{I(a)}} \right) (\cdot)$$

toman la forma más conveniente

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{I(a_1)} \cdots \partial x_{I(a_n)}} (\cdot) \frac{\partial^n}{\partial x_{I(b_1)} \cdots \partial x_{I(b_n)}} (\cdot)$$

por lo tanto, concluimos que se satisface la relación

$$B_{\Gamma,c} = \text{sgn}(\sigma) B_{\Gamma_0,c} \quad (3.10)$$

Y de las expresiones (3.8) y (3.10) concluimos que

$$\begin{aligned} B_n(f, g) &= \sum_{\Gamma \in G_n} w_{\Gamma} B_{\Gamma,c}(f, g) = \sum_{\Gamma \in G_n} \text{sgn}^2(\sigma) w_{\Gamma_0} B_{\Gamma_0,c}(f, g) \\ &= 2^n w_{\Gamma_0} \sum_I c^{I(a_1)I(b_1)} \cdots c^{I(a_n)I(b_n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{I(a_1)} \cdots \partial x_{I(a_n)}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{I(b_1)} \cdots \partial x_{I(b_n)}} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_I c^{I(a_1)I(b_1)} \cdots c^{I(a_n)I(b_n)} \frac{\partial^n f}{\partial x_{I(a_1)} \cdots \partial x_{I(a_n)}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{I(b_1)} \cdots \partial x_{I(b_n)}} \end{aligned}$$

ahora, tomar todas las posibles funciones I equivale a considerar los índices $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ variando entre 1 y m y la suma

$$\sum_{i_1, j_1, \dots, i_n, j_n} c^{i_1, j_1} \cdots c^{i_n, j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}}$$

Y entonces tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} f *_K g &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(f, g) t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i_1, j_1, \dots, i_n, j_n} c^{i_1, j_1} \cdots c^{i_n, j_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} \frac{\partial^n g}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_n}} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$= f *_M g$$

\therefore la fórmula de Kontsevich se reduce al producto de Moyal. Q.E.D.

3.5. El isomorfismo de Duflo

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre \mathbb{R} . Como se mencionó en las secciones anteriores, el dual de esta álgebra de Lie, \mathfrak{g}^* , es una variedad de Poisson y la fórmula de Kontsevich en este caso involucra una cuantización formal que está íntimamente relacionada con el producto en el álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} . Previo al trabajo de Kontsevich, Simone Gutt introdujo un producto estrella en el haz cotangente a un grupo de Lie G que se reduce a un producto estrella en el dual de su correspondiente álgebra de Lie. En [10] y [17] es demostrado que el producto estrella de Kontsevich para $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es equivalente al producto estrella de Gutt.

Antes de continuar es necesario un poco de notación: denotaremos por $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ a la subálgebra del álgebra simétrica de \mathfrak{g} formada por polinomios \mathfrak{g} -invariantes de \mathfrak{g}^* , es decir, polinomios P tales que $[P, \mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = 0$, donde $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ es el paréntesis de Poisson introducido en el ejemplo 4 de la sección 1.1.

Un resultado sorprendente que se desprende de lo anterior es que a partir de este producto estrella (y un isomorfismo demostrado por Kontsevich entre ciertas cohomologías asociadas a toda variedad de Poisson) es posible construir el *isomorfismo de Duflo* entre el espacio de polinomios \mathfrak{g} -invariantes de \mathfrak{g}^* y el centro del álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} , un resultado altamente no trivial de la teoría de álgebras de Lie.

Recordemos que el álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es el cociente del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ por las relaciones $x \otimes y - y \otimes x = [x, y]$. La inclusión del álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ en $T(\mathfrak{g})$ como tensores totalmente simétricos, seguida de la aplicación cociente, da lugar al isomorfismo de espacios vectoriales introducido en la sección 1.2.3

$$I_{\text{PBW}} : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \rightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} x_{\sigma(i_1)} \cdot x_{\sigma(i_2)} \cdots x_{\sigma(i_k)}$$

la restricción de I_{PBW} al espacio de polinomios \mathfrak{g} -invariantes es un isomorfismo de espacios vectoriales, del espacio de polinomios invariantes al centro del álgebra universal envolvente, más no un isomorfismo de álgebras conmutativas. Sin embargo, esto puede ser arreglado introduciendo un intrincado operador en el álgebra simétrica de \mathfrak{g} : Sea $J \in C^\infty(\mathfrak{g})$ la función

$$J(x) = \det(j(\text{ad}_x)), \quad j(z) := \frac{\sinh(z/2)}{z/2} \quad (3.11)$$

$J^{1/2}$ su raíz cuadrada, definida en una vecindad de $x = 0$, e I_S el operador diferencial en $S(\mathfrak{g}) \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ obtenido al remplazar la variable $x \in \mathfrak{g}$ por la derivada direccional $\frac{\partial}{\partial \xi}$ en $J^{1/2}$, donde ξ es la variable dual en \mathfrak{g}^* . El isomorfismo de Duflo es obtenido al restringir la composición

$$I_{\text{PBW}} \circ I_S : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

a $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

3.5.1. Un isomorfismo de Cohomologías

Dado que el producto estrella de Kontsevich para un abierto M de \mathbb{R}^m es una operación asociativa en $C^\infty(M)[[t]]$, el conmutador de esta operación, $a \star b - b \star a$, la cual denotaremos por π , dará estructura de álgebra de Poisson no conmutativa a $C^\infty(M)[[t]]$. El producto estrella de Kontsevich posee una propiedad extremadamente interesante: las cohomologías de ciertos sub-complejos de los complejos de Hochschild y Chevalley asociados a \star y π son *isomorfas*. En un afán de simplificar la notación, a lo largo de esta sección convendremos que $A = C^\infty(M)$.

Primeramente consideremos la operación π en $A[[t]]$. Por reducción, en particular π define un corchete de Lie en $A[[t]]/(t^n)$ (el espacio formado por polinomios con coeficientes en A de grado a lo mas $n-1$ o más precisamente, el cociente de $A[[t]]$ entre el ideal I formado por series formales de la forma $t^n S(t)$, $S(t) \in A[[t]]$) de tal manera que este espacio es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}[t]/(t^n)$. El complejo asociado de Chevalley-Eilenberg con coeficientes en $A[[t]]/(t^n)$ admite un subcomplejo formado por las cocadenas que son derivaciones en cada argumento para la multiplicación conmutativa usual de $A[[t]]/(t^n)$. Denotemos a este complejo por $D^*(A[[t]]/(t^n), \pi)$. Definimos entonces al complejo

$$D^*(A[[t]], \pi) \quad (3.12)$$

como el límite inverso de $D^*(A[[t]]/(t^n), \pi)$, $n \geq 2$.

Por otro lado, si \star es una deformación formal de la multiplicación en A y $n \geq 2$, la multiplicación \star define una estructura de $\mathbb{R}[t]/(t^n)$ -álgebra asociativa por reducción en $A[[t]]/(t^n)$. Denotemos por $V^*(A[[t]]/(t^n), \star)$ al subcomplejo del complejo de Hochschild de $A[[t]]/(t^n)$ con coeficientes en $A[[t]]/(t^n)$ cuyas p -cocadenas poseen operadores p -diferenciales como coeficientes. Definimos al complejo

$$V^*(A[[t]], \star) \quad (3.13)$$

como el límite inverso del sistema de complejos $V^*(A[[t]]/t^n, \star)$, $n \geq 2$. Si μ denota la multiplicación conmutativa usual de $A[[t]]$, los complejos (3.12) y (3.13) están provistos de productos cup asociativos que extienden las multiplicaciones μ y \star de sus componentes D^0 y V^0 respectivamente. Sus homología

$$H_D^*(A[[t]], \pi), \quad H_V^*(A[[t]], \star)$$

se tornan en álgebras conmutativas graduadas con la multiplicación inducida por el producto cup. En particular, es claro que la 0-cohomología del subcomplejo de Hochschild $V^*(A[[t]], \star)$ corresponde al centro de $A[[t]]$ bajo \star , mientras que la 0-cohomología del subcomplejo de Chevalley $D^*(A[[t]], \pi)$ corresponde al centro de $A[[t]]$ bajo π .

Teorema 3.5.1. (Kontsevich [17]) *Sea M un abierto de \mathbb{R}^m y $A = C^\infty(M)$. Entonces para cada paréntesis de Poisson π en $A[[t]]$, existe un morfismo de cocadenas canónico*

$$\Psi_\pi : D(A[[t]], \pi) \rightarrow V(A[[t]], \star_\pi)$$

que induce un isomorfismo de álgebras

$$H_D^*(A[[t]], \pi) \rightarrow H_V^*(A[[t]], \star_\pi).$$

Por la observación que hemos hecho anteriormente, este teorema implica que los espacios $(Z(A[[t]]), \pi)$ y $(Z(A[[t]]), \star_\pi)$, con las estructuras de álgebra dadas por el producto cup, siempre serán isomorfos.

3.5.2. Dos isomorfismos

Recordemos que el producto estrella de Gutt posee la propiedad de restringirse a un producto estrella en la subálgebra $S(\mathfrak{g})$, es decir, el resultado

de operar cualesquiera 2 polinomios en \mathfrak{g}^* será un polinomio en t cuyos coeficientes serán polinomios en \mathfrak{g}^* .

Si consideramos el caso particular en que $t = 1$, lo anterior es equivalente a dotar al espacio $S(\mathfrak{g})$ de una estructura de álgebra no conmutativa a través del producto estrella; además para $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ se puede verificar que se satisface

$$x_1 \star x_2 - x_2 \star x_1 = [x_1, x_2]$$

y por la propiedad universal del álgebra universal envolvente concluimos que existe un isomorfismo de álgebras

$$I_{\text{alg}} : (U(\mathfrak{g}), \cdot) \rightarrow (S(\mathfrak{g}), \star)$$

tal que $I_{\text{alg}}|_{\mathfrak{g}} = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$. De aquí podemos recuperar al parámetro formal t y ver que efectivamente, la cuantización formal de la variedad de Poisson \mathfrak{g}^* es isomorfa al álgebra $U_t(\mathfrak{g})$, definida como el álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} dotada del corchete $t[\cdot, \cdot]$.

Un corolario que se sigue del teorema 3.5.1 es que el centro del álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} es canónicamente isomorfo como álgebra al álgebra $(S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ de polinomios \mathfrak{g} -invariantes en \mathfrak{g}^* : el centro de $U(\mathfrak{g})$ corresponde a la 0-cohomología del subcomplejo de Hochschild de $U(\mathfrak{g})$ dotado del producto cup estándar, mientras que el álgebra $(S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ es la 0-cohomología del subcomplejo de Chevalley de $S(\mathfrak{g})$.

El morfismo de cocadenas mencionado en el teorema 3.5.1 puede ser aplicado ahora y especializado a $t = 1$ y coeficientes polinomiales. Denotemos por I_{T} a la componente que aplica los campos 0-vectoriales polinomiales (es decir, los elementos de $(S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$) en las 0-cocadenas del complejo de Hochschild del álgebra $(S(\mathfrak{g}), \star)$. Entonces I_{T} es un isomorfismo de espacios vectoriales

$$I_{\text{T}} : (S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \rightarrow Z((S(\mathfrak{g}), \star))$$

y la restricción de esta función al álgebra de polinomios \mathfrak{g} -invariantes en \mathfrak{g}^* es un isomorfismo de álgebras

$$(S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \rightarrow Z((S(\mathfrak{g}), \star))$$

si resumimos todo lo anterior, tenemos entonces los siguientes isomorfismos de espacios vectoriales:

$$S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{I_{\text{T}}} (S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \xleftarrow{I_{\text{alg}}} U(\mathfrak{g})$$

y hemos visto que son \mathfrak{g} -invariantes. Sus restricciones son isomorfismos de álgebras:

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{I_T} Z((S(\mathfrak{g}), \star)) \xleftarrow{I_{\text{alg}}} Z(U(\mathfrak{g}))$$

lo anterior implica que la restricción de la función

$$(I_{\text{alg}})^{-1} \circ I_T : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

a $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ es un isomorfismo de álgebras entre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ y $Z(U(\mathfrak{g}))$. Kontsevich demuestra en [17] que este isomorfismo coincide con el isomorfismo de Duflo.

Apéndice A

$\mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ es un álgebra de Lie

En el capítulo 3 construimos un espacio vectorial y lo dotamos de estructura de álgebra de Lie al definir una operación en los generadores y extenderla lineal y antisimétricamente a todo el espacio. Sin embargo, hizo falta ver que nuestra construcción es efectivamente consistente, es decir, se satisfacen las identidades de Jacobi para todos los generadores.

El objetivo de este apéndice es mostrar lo anterior, y para esto recordemos que consideramos a dichos generadores en 4 familias: $\{x_i\}$, $\{p_i\}$, $\{l_i\}$ e I , donde $1 \leq i \leq 3$. Consideraremos todas las posibilidades en tres casos:

1. Cuando los elementos de las 4 familias aparecen a lo más una vez,
2. Cuando dos elementos de la misma familia aparecen a la vez,
3. Cuando tres elementos de la misma familia aparecen a la vez.

(1) Para el primer caso, un simple argumento combinatorio nos muestra que existen 4 posibilidades de considerar tercias de representantes de estas familias de tal manera que cada representante aparezca a lo más una vez. Así:

$(x_i, p_j, I) :$

$$\begin{aligned} & \{x_i, \{p_j, I\}\} + \{p_j, \{I, x_i\}\} + \{I, \{x_i, p_j\}\} \\ &= \left\{x_i, \frac{x_j}{L^2} - \frac{p_j}{S}\right\} + \left\{p_j, \frac{p_i}{M^2} - \frac{x_i}{S}\right\} + \left\{I, \delta_{ij}I + \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}\right\} \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{L^2M^2} - \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{L^2M^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(x_i, l_j, I) :$

$$\begin{aligned} & \{x_i, \{l_j, I\}\} + \{l_j, \{I, x_i\}\} + \{I, \{x_i, l_j\}\} \\ &= \{I, \frac{p_i}{M^2} - \frac{x_i}{S}\} + \{I, \epsilon_{ijk}x_k\} = \frac{\epsilon_{ijk}x_k}{S} - \frac{\epsilon_{ijk}p_k}{M^2} + \epsilon_{ijk} \left(\frac{p_k}{M^2} - \frac{x_k}{S} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(p_i, l_j, I) :$

$$\begin{aligned} & \{p_i, \{l_j, I\}\} + \{l_j, \{I, p_i\}\} + \{I, \{p_i, l_j\}\} \\ &= \{l_j, \frac{p_i}{S} - \frac{x_i}{L^2}\} + \{I, \epsilon_{ijk}p_k\} = \frac{\epsilon_{ijk}x_k}{L^2} - \frac{\epsilon_{ijk}p_k}{S} + \epsilon_{ijk} \left(\frac{p_k}{S} - \frac{x_k}{L^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(x_i, p_j, l_k) :$

$$\begin{aligned} & \{x_i, \{p_j, l_k\}\} + \{p_j, \{l_k, x_i\}\} + \{l_k, \{x_i, p_j\}\} \\ &= \{x_i, \epsilon_{jkl}p_l\} + \{p_j, \epsilon_{kil}x_l\} + \{l_k, \delta_{ij}I + \frac{\epsilon_{ijl}l_l}{S}\} \\ &= \epsilon_{jkl} \left(\delta_{il}I + \frac{\epsilon_{ilm}l_m}{S} \right) - \epsilon_{kil} \left(\delta_{jl}I - \frac{\epsilon_{jlm}l_m}{S} \right) + \frac{\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}l_m}{S} \\ &= \frac{1}{S}(\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl}\epsilon_{klm})l_m \\ &= 0 \end{aligned}$$

la última igualdad es la menos obvia de todas las anteriores. Esta se puede verificar al considerar los tres casos esencialmente distintos: (i) cuando los tres índices son diferentes, (ii) cuando dos de ellos son iguales y (iii) cuando los tres son iguales.

(2) Cuando aparecen dos elementos de la misma familia, podemos agrupar convenientemente las posibilidades. En los casos $\{x_i, x_j, l_k\}$, $\{p_i, p_j, l_k\}$, $\{l_i, l_j, x_k\}$ o $\{l_i, l_j, p_k\}$, el argumento es el mismo que en el último caso:

$(x_i, x_j, l_k) :$

$$\begin{aligned} & \{x_i, \{x_j, l_k\}\} + \{x_j, \{l_k, x_i\}\} + \{l_k, \{x_i, x_j\}\} \\ &= \epsilon_{jkl}\{x_i, x_l\} + \epsilon_{kil}\{x_j, x_l\} + \frac{1}{M^2}\epsilon_{ijl}\{l_k, l_l\} \\ &= \frac{1}{M^2}(\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl}\epsilon_{klm})l_m = 0 \end{aligned}$$

$(p_i, p_j, l_k) :$

$$\begin{aligned}
& \{p_i, \{p_j, l_k\}\} + \{p_j, \{l_k, p_i\}\} + \{l_k, \{p_i, p_j\}\} \\
&= \epsilon_{jkl}\{p_i, p_l\} + \epsilon_{kil}\{p_j, p_l\} + \frac{1}{L^2}\epsilon_{ijl}\{l_k, l_l\} \\
&= \frac{1}{L^2}(\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl}\epsilon_{klm})l_m = 0
\end{aligned}$$

$(l_i, l_j, x_k) :$

$$\begin{aligned}
& \{l_i, \{l_j, x_k\}\} + \{l_j, \{x_k, l_i\}\} + \{x_k, \{l_i, l_j\}\} \\
&= \epsilon_{jkl}\{l_i, x_l\} + \epsilon_{kil}\{l_j, x_l\} + \epsilon_{ijl}\{x_k, l_l\} \\
&= (\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl}\epsilon_{klm})x_m = 0
\end{aligned}$$

$(l_i, l_j, p_k) :$

$$\begin{aligned}
& \{l_i, \{l_j, p_k\}\} + \{l_j, \{p_k, l_i\}\} + \{p_k, \{l_i, l_j\}\} \\
&= \epsilon_{jkl}\{l_i, p_l\} + \epsilon_{kil}\{l_j, p_l\} + \epsilon_{ijl}\{p_k, l_l\} \\
&= (\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl}\epsilon_{klm})p_m = 0
\end{aligned}$$

Ahora, para las posibilidades restantes,

$(x_i, x_j, p_k) :$

$$\begin{aligned}
& \{x_i, \{x_j, p_k\}\} + \{x_j, \{p_k, x_i\}\} + \{p_k, \{x_i, x_j\}\} \\
&= \{x_i, \delta_{jk}I + \frac{\epsilon_{jkl}l_l}{S}\} - \{x_j, \delta_{ki}I - \frac{\epsilon_{kil}l_l}{S}\} + \frac{1}{M^2}\epsilon_{ijl}\{p_k, l_l\} \\
&= \delta_{jk}\left(\frac{x_i}{S} - \frac{p_i}{M^2}\right) + \frac{\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}x_m}{S} - \delta_{ki}\left(\frac{p_j}{M^2} - \frac{x_j}{S}\right) \\
&+ \frac{\epsilon_{kil}\epsilon_{jlm}x_m}{S} + \frac{\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}p_m}{M^2} \\
&= \frac{1}{S}(\delta_{jk}x_i + \delta_{ki}x_j + \epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}x_m + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm}x_m) \\
&+ \frac{1}{M^2}(\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}p_m - \delta_{jk}p_i - \delta_{ki}p_j) = 0
\end{aligned}$$

$(p_i, p_j, x_k) :$

$$\begin{aligned}
& \{p_i, \{p_j, x_k\}\} + \{p_j, \{x_k, p_i\}\} + \{x_k, \{p_i, p_j\}\} \\
&= -\{p_i, \delta_{jk}I - \frac{\epsilon_{jkl}l_l}{S}\} + \{p_j, \delta_{ki}I + \frac{\epsilon_{kil}l_l}{S}\} + \frac{1}{L^2}\epsilon_{ijl}\{x_k, l_l\} \\
&= -\delta_{jk}\left(\frac{x_i}{L^2} - \frac{p_i}{S}\right) + \frac{\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}p_m}{S} + \delta_{ki}\left(\frac{x_j}{L^2} - \frac{p_j}{S}\right) \\
&+ \frac{\epsilon_{kil}\epsilon_{jlm}p_m}{S} + \frac{\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}x_m}{L^2} \\
&= \frac{1}{S}(\delta_{jk}p_i + \delta_{ki}p_j + \epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}p_m + \epsilon_{kil}\epsilon_{jlm}p_m) \\
&+ \frac{1}{L^2}(\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}x_m - \delta_{jk}x_i - \delta_{ki}x_j) = 0
\end{aligned}$$

estas dos identidades se siguen del hecho que para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}v_m = \delta_{jk}v_i + \delta_{ki}v_j$.

$(x_i, x_j, I) :$

$$\begin{aligned}
& \{x_i, \{x_j, I\}\} + \{x_j, \{I, x_i\}\} + \{I, \{x_i, x_j\}\} \\
&= \{x_i, \frac{x_j}{S} - \frac{p_j}{M^2}\} + \{x_j, \frac{p_i}{M^2} - \frac{x_i}{S}\} + \frac{\epsilon_{ijk}}{M^2}\{I, l_k\} \\
&= \frac{2\epsilon_{ijk}l_k}{SM^2} - \frac{1}{M^2}\left(\delta_{ij}I + \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}\right) + \frac{1}{M^2}\left(\delta_{ij}I - \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}\right) = 0
\end{aligned}$$

$(p_i, p_j, I) :$

$$\begin{aligned}
& \{p_i, \{p_j, I\}\} + \{p_j, \{I, p_i\}\} + \{I, \{p_i, p_j\}\} \\
&= \{p_i, \frac{x_j}{L^2} - \frac{p_j}{S}\} + \{p_j, \frac{p_i}{S} - \frac{x_i}{L^2}\} + \frac{\epsilon_{ijk}}{L^2}\{I, l_k\} \\
&= -\frac{2\epsilon_{ijk}l_k}{SL^2} - \frac{1}{L^2}\left(\delta_{ij}I - \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}\right) + \frac{1}{L^2}\left(\delta_{ij}I + \frac{\epsilon_{ijk}l_k}{S}\right) = 0
\end{aligned}$$

$(l_i, l_j, I) :$

$$\begin{aligned}
& \{l_i, \{l_j, I\}\} + \{l_j, \{I, l_i\}\} + \{I, \{l_i, l_j\}\} \\
&= \{l_i, 0\} + \{l_j, 0\} + \epsilon_{ijk}\{I, l_k\} = 0
\end{aligned}$$

(3) Finalmente cuando aparecen tres elementos de la misma familia,

$$\begin{aligned}
& \{x_i, \{x_j, x_k\}\} + \{x_j, \{x_k, x_i\}\} + \{x_k, \{x_i, x_j\}\} \\
&= \frac{1}{M^2} (\epsilon_{jkl} \{x_i, l_l\} + \epsilon_{kil} \{x_j, l_l\} + \epsilon_{ijl} \{x_k, l_l\}) \\
&= \frac{1}{M^2} (\epsilon_{jkl} \epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil} \epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl} \epsilon_{klm}) x_m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{p_i, \{p_j, p_k\}\} + \{p_j, \{p_k, p_i\}\} + \{p_k, \{p_i, p_j\}\} \\
&= \frac{1}{L^2} (\epsilon_{jkl} \{p_i, l_l\} + \epsilon_{kil} \{p_j, l_l\} + \epsilon_{ijl} \{p_k, l_l\}) \\
&= \frac{1}{L^2} (\epsilon_{jkl} \epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil} \epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl} \epsilon_{klm}) p_m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{l_i, \{l_j, l_k\}\} + \{l_j, \{l_k, l_i\}\} + \{l_k, \{l_i, l_j\}\} \\
&= (\epsilon_{jkl} \{l_i, l_l\} + \epsilon_{kil} \{l_j, l_l\} + \epsilon_{ijl} \{l_k, l_l\}) \\
&= (\epsilon_{jkl} \epsilon_{ilm} + \epsilon_{kil} \epsilon_{jlm} + \epsilon_{ijl} \epsilon_{klm}) l_m = 0
\end{aligned}$$

$\therefore \mathfrak{g}_{\text{SYL}}$ es un álgebra de Lie.

Apéndice B

S_{ij} y l_k conmutan con H

Recordemos que

$$S_{ij} = p_i p_j + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{l^2}{L^2} + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \{S_{ij}, H\} &= \left\{ p_i p_j + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2}, \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{l^2}{L^2} + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2} \right) \right\} \\ &= \{p_i, p_k\} p_j p_k + \{p_j, p_k\} p_i p_k + \{p_i, l_k\} \frac{p_j l_k}{L^2} + \{p_j, l_k\} \frac{p_i l_k}{L^2} \\ &\quad + \omega^2 \{p_i, x_k\} \frac{p_j x_k}{I^2} + \omega^2 \{p_j, x_k\} \frac{p_i x_k}{I^2} - \omega^2 \{p_i, I\} \frac{p_j x^2}{I^3} - \omega^2 \{p_j, I\} \frac{p_i x^2}{I^3} \\ &\quad + \omega^2 \{x_i, p_k\} \frac{x_j p_k}{I^2} + \omega^2 \{x_j, p_k\} \frac{x_i p_k}{I^2} + \frac{\omega^2}{L^2} \{x_i, l_k\} \frac{x_j l_k}{I^2} + \frac{\omega^2}{L^2} \{x_j, l_k\} \frac{x_i l_k}{I^2} \\ &\quad + \omega^4 \{x_i, x_k\} \frac{x_j x_k}{I^4} + \omega^4 \{x_j, x_k\} \frac{x_i x_k}{I^4} - \omega^4 \{x_i, I\} \frac{x_j x^2}{I^5} - \omega^4 \{x_j, I\} \frac{x_i x^2}{I^5} \\ &\quad - 2\omega^2 \{I, p_k\} \frac{x_i x_j p_k}{I^3} - \frac{2\omega^2}{L^2} \{I, l_k\} \frac{x_i x_j l_k}{I^3} - 2\omega^4 \{I, x_k\} \frac{x_i x_j x_k}{I^5} + 2\omega^4 \{I, I\} \frac{x_i x_j x^2}{I^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon_{ikl}p_j p_k l_l}{L^2} + \frac{\epsilon_{jkl}p_i p_k l_l}{L^2} + \frac{\epsilon_{ikl}p_j l_k p_l}{L^2} + \frac{\epsilon_{jkl}p_i l_k p_l}{L^2} \\
&- \omega^2 \left(\delta_{ik} I - \frac{\epsilon_{ikl} l_l}{S} \right) \frac{p_j x_k}{I^2} - \omega^2 \left(\delta_{jk} I - \frac{\epsilon_{jkl} l_l}{S} \right) \frac{p_i x_k}{I^2} + \omega^2 \left(\frac{p_i}{S} - \frac{x_i}{L^2} \right) \frac{p_j x^2}{I^3} \\
&+ \omega^2 \left(\frac{p_j}{S} - \frac{x_j}{L^2} \right) \frac{p_i x^2}{I^3} + \omega^2 \left(\delta_{ik} I + \frac{\epsilon_{ikl} l_l}{S} \right) \frac{x_j p_k}{I^2} + \omega^2 \left(\delta_{jk} I + \frac{\epsilon_{jkl} l_l}{S} \right) \frac{x_i p_k}{I^2} \\
&+ \omega^2 \frac{\epsilon_{ikl} x_j l_k x_l}{L^2 I^2} + \omega^2 \frac{\epsilon_{jkl} x_i l_k x_l}{L^2 I^2} + \omega^4 \frac{\epsilon_{ikl} x_j x_k l_l}{M^2 I^4} + \omega^4 \frac{\epsilon_{jkl} x_i x_k l_l}{M^2 I^4} \\
&+ \omega^4 \left(\frac{p_i}{M^2} - \frac{x_i}{S} \right) \frac{x_j x^2}{I^5} + \omega^4 \left(\frac{p_j}{M^2} - \frac{x_j}{S} \right) \frac{x_i x^2}{I^5} + 2\omega^2 \left(\frac{x_k}{L^2} - \frac{p_k}{S} \right) \frac{x_i x_j p_k}{I^3} \\
&+ 2\omega^4 \left(\frac{x_k}{S} - \frac{p_k}{M^2} \right) \frac{x_i x_j x_k}{I^5} \\
&= \frac{\omega^2}{S I^2} \left(\epsilon_{ikl} (p_j x_k + x_j p_k) l_l + \epsilon_{jkl} (p_i x_k + x_i p_k) l_l + 2 \frac{p_i p_j x^2 - x_i x_j p^2}{I} \right) \\
&+ \frac{\omega^2}{L^2 I^2} \left(\epsilon_{ikl} x_j l_k x_l + \epsilon_{jkl} x_i l_k x_l + \frac{2x_i x_j (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - (x_i p_j + p_i x_j) x^2}{I} \right) \\
&+ \frac{\omega^4}{M^2 I^4} \left(\epsilon_{ikl} x_j x_k l_l + \epsilon_{jkl} x_i x_k l_l - \frac{2x_i x_j (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - (x_i p_j + p_i x_j) x^2}{I} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

la igualdad se sigue de la relación dada por el invariante de Casimir

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

y las identidades familiares del producto vectorial.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \{l_i, H\} &= \left\{ l_i, \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{l^2}{L^2} + \omega^2 \frac{x^2}{I^2} \right) \right\} \\
 &= \{l_i, p_j\} p_j + \{l_i, l_j\} \frac{l_j}{L^2} + \omega^2 \{l_i, x_j\} \frac{x_j}{I^2} - \omega^2 \{l_i, I\} \frac{x^2}{I^3} \\
 &\quad - \epsilon_{ijk} p_j p_k + \frac{\epsilon_{ijk} l_j l_k}{L^2} + \omega^2 \frac{\epsilon_{ijk} x_j x_k}{I^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Apéndice C

Relaciones de conmutación de S_{ij} y l_k

$$\begin{aligned}
\{S_{ij}, S_{kl}\} &= \{p_i p_j + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2}, p_k p_l + \omega^2 \frac{x_k x_l}{I^2}\} \\
&= \{p_i, p_k\} p_j p_l + \{p_i, p_l\} p_j p_k + \{p_j, p_k\} p_i p_l + \{p_j, p_l\} p_i p_k \\
&+ \omega^2 \{p_i, x_k\} \frac{p_j x_l}{I^2} + \omega^2 \{p_i, x_l\} \frac{p_j x_k}{I^2} + \omega^2 \{p_j, x_k\} \frac{p_i x_l}{I^2} \\
&+ \omega^2 \{p_j, x_l\} \frac{p_i x_k}{I^2} + \omega^2 \{x_i, p_k\} \frac{x_j p_l}{I^2} + \omega^2 \{x_i, p_l\} \frac{x_j p_k}{I^2} \\
&+ \omega^2 \{x_j, p_k\} \frac{x_i p_l}{I^2} + \omega^2 \{x_j, p_l\} \frac{x_i p_k}{I^2} - 2\omega^2 \{p_i, I\} \frac{p_j x_k x_l}{I^3} \\
&- 2\omega^2 \{p_j, I\} \frac{p_i x_k x_l}{I^3} - 2\omega^2 \{I, p_k\} \frac{p_l x_k x_l}{I^3} - 2\omega^2 \{I, p_l\} \frac{p_k x_k x_l}{I^3} \\
&+ \omega^4 \{x_i, x_k\} \frac{x_j x_l}{I^4} + \omega^4 \{x_i, x_l\} \frac{x_j x_k}{I^4} + \omega^4 \{x_j, x_k\} \frac{x_i x_l}{I^4} \\
&+ \omega^4 \{x_j, x_l\} \frac{x_i x_k}{I^4} - 2\omega^4 \{x_i, I\} \frac{x_j x_k x_l}{I^5} - 2\omega^4 \{x_j, I\} \frac{x_i x_k x_l}{I^5} \\
&- 2\omega^4 \{I, x_k\} \frac{x_i x_j x_l}{I^5} - 2\omega^4 \{I, x_l\} \frac{x_i x_j x_k}{I^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon_{ikm} p_j p_l l_m}{L^2} + \frac{\epsilon_{ilm} p_j p_k l_m}{L^2} + \frac{\epsilon_{jkm} p_i p_l l_m}{L^2} + \frac{\epsilon_{jlm} p_i p_k l_m}{L^2} \\
&- \omega^2 \left(\delta_{ik} I - \frac{\epsilon_{ikm} l_m}{S} \right) \frac{p_j x_l}{I^2} - \omega^2 \left(\delta_{il} I - \frac{\epsilon_{ilm} l_m}{S} \right) \frac{p_j x_k}{I^2} \\
&- \omega^2 \left(\delta_{jk} I - \frac{\epsilon_{jkm} l_m}{S} \right) \frac{p_i x_l}{I^2} - \omega^2 \left(\delta_{jl} I - \frac{\epsilon_{jlm} l_m}{S} \right) \frac{p_i x_k}{I^2} \\
&- 2\omega^2 \left(\frac{x_i}{L^2} - \frac{p_i}{S} \right) \frac{p_j x_k x_l}{I^3} - 2\omega^2 \left(\frac{x_j}{L^2} - \frac{p_j}{S} \right) \frac{p_i x_k x_l}{I^3} \\
&+ \omega^2 \left(\delta_{ik} I + \frac{\epsilon_{ikm} l_m}{S} \right) \frac{x_j p_l}{I^2} + \omega^2 \left(\delta_{il} I + \frac{\epsilon_{ilm} l_m}{S} \right) \frac{x_j p_k}{I^2} \\
&+ \omega^2 \left(\delta_{jk} I + \frac{\epsilon_{jkm} l_m}{S} \right) \frac{x_i p_l}{I^2} + \omega^2 \left(\delta_{jl} I + \frac{\epsilon_{jlm} l_m}{S} \right) \frac{x_i p_k}{I^2} \\
&+ 2\omega^2 \left(\frac{x_k}{L^2} - \frac{p_k}{S} \right) \frac{x_i x_j p_l}{I^3} + 2\omega^2 \left(\frac{x_l}{L^2} - \frac{p_l}{S} \right) \frac{x_i x_j p_k}{I^3} \\
&+ \omega^4 \frac{\epsilon_{ikm} x_j x_l l_m}{M^2 I^4} + \omega^4 \frac{\epsilon_{ilm} x_j x_k l_m}{M^2 I^4} + \omega^4 \frac{\epsilon_{jkm} x_i x_l l_m}{M^2 I^4} + \omega^4 \frac{\epsilon_{jlm} x_i x_k l_m}{M^2 I^4} \\
&+ 2\omega^4 \left(\frac{x_k}{S} - \frac{p_k}{M^2} \right) \frac{x_i x_j x_l}{I^5} + 2\omega^4 \left(\frac{x_l}{S} - \frac{p_l}{M^2} \right) \frac{x_i x_j x_k}{I^5} \\
&- 2\omega^4 \left(\frac{x_i}{S} - \frac{p_i}{M^2} \right) \frac{x_j x_k x_l}{I^5} - 2\omega^4 \left(\frac{x_j}{S} - \frac{p_j}{M^2} \right) \frac{x_i x_k x_l}{I^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega^2 (\epsilon_{ikm} \delta_{jl} + \epsilon_{ilm} \delta_{jk} + \epsilon_{jkm} \delta_{il} + \epsilon_{jlm} \delta_{ik}) l_m \\
&+ \frac{1}{L^2} (\epsilon_{ikm} p_j p_j + \epsilon_{ilm} p_j p_k + \epsilon_{jkm} p_i p_l + \epsilon_{jlm} p_i p_k) l_m \\
&+ \frac{\omega^2}{L^2} \left(\epsilon_{ikm} \frac{x_j x_j}{I^2} + \epsilon_{ilm} \frac{x_j x_k}{I^2} + \epsilon_{jkm} \frac{x_i x_l}{I^2} + \epsilon_{jlm} \frac{x_i x_k}{I^2} \right) l_m \\
&+ \frac{\omega^2}{S} \left(\epsilon_{ikm} \frac{(x_j p_l + p_j x_l)}{I^2} + \epsilon_{ilm} \frac{(x_j p_k + p_j x_k)}{I^2} \right) l_m \\
&+ \frac{\omega^2}{S} \left(\epsilon_{jkm} \frac{(x_i p_l + p_i x_l)}{I^2} + \epsilon_{jlm} \frac{(x_i p_k + p_i x_k)}{I^2} \right) l_m \\
&- \frac{4\omega^2}{S} \left(\frac{x_i x_j p_k p_l}{I^3} - \frac{p_i p_j x_k x_l}{I^3} \right) \\
&+ \frac{\omega^4}{M^2} \left(\epsilon_{ikm} \frac{x_j x_l}{I^4} + \epsilon_{ilm} \frac{x_j x_k}{I^4} + \epsilon_{jkm} \frac{x_i x_l}{I^4} + \epsilon_{jlm} \frac{x_i x_k}{I^4} \right) l_m \\
&- \frac{2\omega^4}{M^2} \left(x_i x_j \frac{(x_k p_l + p_k x_l)}{I^5} - \frac{(x_i p_j + p_i x_j)}{I^5} x_k x_l \right) \\
&= \left(\epsilon_{ikm} \left(\omega^2 \delta_{jl} + \frac{S_{jl}}{L^2} \right) + \epsilon_{ilm} \left(\omega^2 \delta_{jk} + \frac{S_{jk}}{L^2} \right) \right) l_m \\
&+ \left(\epsilon_{jkm} \left(\omega^2 \delta_{il} + \frac{S_{il}}{L^2} \right) + \epsilon_{jlm} \left(\omega^2 \delta_{ik} + \frac{S_{ik}}{L^2} \right) \right) l_m.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \{S_{ij}, l_k\} &= \{p_i p_j + \omega^2 \frac{x_i x_j}{I^2}, l_k\} \\
 &= \{p_i, l_k\} p_j + \{p_j, l_k\} p_i + \omega^2 \{x_i, l_k\} \frac{x_j}{I^2} + \omega^2 \{x_j, l_k\} \frac{x_i}{I^2} - 2\omega^2 \{I, l_k\} \frac{x_i x_j}{I^3} \\
 &= \epsilon_{ikl} p_j p_l + \epsilon_{jkl} p_i p_l + \omega^2 \epsilon_{ikl} \frac{x_j x_l}{I^2} + \omega^2 \epsilon_{jkl} \frac{x_i x_l}{I^2} \\
 &= \epsilon_{ikl} S_{jl} + \epsilon_{jkl} S_{il}.
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] V. I. Arnold, A. A. Kirillov, Et. Al. 1988; *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. IV, Springer-Verlag.
- [2] V. I. Arnold, 1989; *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag.
- [3] Santos Asin Lares, 1998; *On Tangential Properties of the Gutt *-product*. Journal of Geometry and Physics 24, no. 2, págs. 164-172.
- [4] George A. Baker, 1956; *Degeneracy of the n-Dimensional, Isotropic, Harmonic Oscillator*. Physical Review, Vol. 103, No. 4, págs. 1119-1120.
- [5] F. Bayen, M. Flato, Et. Al., 1978; *Deformation Theory and Quantization. I. Deformations of Symplectic Structures*. Annals of Physics, Vol. 111, No. 1, págs. 61-110.
- [6] F. Bayen, M. Flato, Et. Al., 1978; *Deformation Theory and Quantization. II. Physical Applications*. Annals of Physics, Vol. 111, No. 1, págs. 111-151.
- [7] A. Cattaneo, B. Keller, Et. Al.; *Déformation, Quantification, Théorie de Lie*.
- [8] P.A.M. Dirac, 1958; *The principles of Quantum Mechanics*. The International Series of Monographs in Physics 27, Oxford University Press.
- [9] P.A.M. Dirac, 1964; *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover publications.
- [10] Giuseppe Dito, 1999; *Kontsevich Star Product on the Dual of a Lie Algebra*. Letters in Mathematical Physics 48, No. 4, págs. 307-322.

- [11] Jean-Paul Dufour and Nguyen Tien Zung, 2005; *Poisson Structures and their Normal Forms*. Progress in Mathematics, Vol. 242, Birkhäuser.
- [12] Alice Fialowski and Marc de Montigny, 2006; *On Deformations and Contractions of Lie Algebras*. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol. 2 (electronic).
- [13] Domenico Giulini, 2003; *That strange procedure called Quantization*. preprint quant-ph/0304202v1
- [14] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, 1990; *Variations on a Theme by Kepler*. Colloquium publications/American Mathematic Society; 42.
- [15] Simone Gutt, 1999; *Variations on Deformation Quantization*. preprint math.DG/0003107
- [16] Peter W. Higgs, 1979; *Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry I*. Journal of Physics A, Vol. 12 No. 3, págs. 309-323.
- [17] M. Kontsevich, 2003; *Deformation Quantization of Poisson Manifolds*. Letters in Mathematical Physics 66, No. 3, págs. 157-216.
- [18] A. L. Leznov, 2002; *Some Integrable Models in Quantized Spaces*. Nuclear Physics B, Vol. 640, No. 3, págs. 469-480.
- [19] A. Leznov and J. Mostovoy, 2003; *Classical Dynamics in Deformed Spaces*. Journal of Physics A, Vol. 36, No. 5, págs. 1439-1449.
- [20] Jerrold E. Marsden, 1992; *Lectures on Mechanics*. London Mathematical Society lecture note series, Cambridge University Press.
- [21] E. Meinrenken, 2002; *Clifford Algebras and the Dufló Isomorphism*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II, Higher Ed. Press, págs. 637-642.
- [22] Elmer G. Rees, 1983; *Notes on Geometry*. Springer-Verlag.
- [23] Hans Samelson, 1969; *Notes on Lie Algebras*. Springer-Verlag.
- [24] Hartland S. Snyder, 1947; *Quantized Space-Time*. Physical Review, Vol. 71, No. 2, págs. 38-41.

- [25] Shlomo Sternberg, 2004; *Lie Algebras*.
- [26] Hermann Weyl, 1931; *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*.
Dover publications.
- [27] Chen N. Yang, 1947; *On Quantized Space-Time*. Physical Review, Vol.
72 No. 2, pág. 874.