



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

“PARTICIONES EN M-ÁGONOS  
DE FAMILIAS DE PUNTOS  
K-COLOREADOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)

P R E S E N T A:  
MARCO ANTONIO HEREDIA VELASCO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE URRUTIA GALICIA

México, D.F.

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre:  
Genoveva

A mi padre:  
Antonio

A mi hermana:  
Alma Rosa

# Agradecimientos

Quiero agradecer al doctor Jorge Urrutia por darme la oportunidad de realizar esta tesis bajo su dirección, por permitirme trabajar a su lado en estos años, y por todo el tiempo y paciencia que me ha dedicado.

A los doctores Francisco Hernández, Juan Montellano, Sergio Rajsbaum y Eduardo Rivera: Por revisar esta tesis y por sus valiosos comentarios para mejorarla.

A todos los profesores que han ayudado a convertirme en la persona que soy ahora, en especial a Mario Campos y a Carmen Georgina Rodríguez.

A mis amigos: Angel, Citlali, Cuauhtémoc, Juan Carlos, Noe, Pedro, Rafael, Sergio, Vania y Victor; por ser casi como hermanos para mí.

A mis abuelos; a todos mis tios, en especial a mi tía Cecilia, a mi tío Carlos y a mi tío Victor; y a mis primos, en particular a Alejandra, Itzel y Tonatiuh: Por estar siempre conmigo.

A Laura por todo el amor que me ha brindado y por todo lo que hemos compartido juntos.

A mi cuñado Huitzilin Yépez: Por su amistad, y por todos los comentarios y opiniones que ha compartido conmigo.

La mayoría de los problemas aquí presentados fueron propuestos y parcialmente resueltos en el “I minitaller en cuadrangulaciones”, celebrado en Granada, España en enero del 2006. Deseo agradecer a todos los participantes por su trabajo y consejos, y en particular al Dr. Alberto Márquez, organizador del taller, por invitarme a participar en él.

Finalmente quisiera agradecer a: CONACYT por la beca que me otorgó para mis estudios de posgrado; y a la DGEP, por el apoyo económico que me brindó durante mi estancia en España.

*“Sueña el rico en su riqueza,  
que más cuidados le ofrece;  
sueña el pobre que padece  
su miseria y su pobreza;  
sueña el que a medrar empieza,  
sueña el que afana y pretende,  
sueña el que agravia y ofende,  
y en el mundo, en conclusión,  
todos sueñan lo que son,  
aunque ninguno lo entiende.*

*Yo sueño que estoy aquí  
destas prisiones cargado,  
y soñe que en otro estado  
más lisonjero me vi.  
¿Qué es la vida? Un frenesí  
¿Qué es la vida? Una ilusión,  
una sombra, una ficción,  
y el mayor bien es pequeño;  
que toda la vida es sueño,  
y los sueños, sueños son.”*

Pedro Calderón de la Barca. “La vida es sueño” (Act. II, esc. xix).

# Índice General

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Trabajo previo</b>	<b>5</b>
2.1. Preliminares . . . . .	5
2.2. Particiones en $m$ -ágonos de conjuntos $k$ -coloreados . . . . .	10
<b>3. <math>m</math>-agonalizaciones de puntos <math>k</math>-coloreados en forma convexa</b>	<b>14</b>
3.1. Existencia de la $m$ -agonalización . . . . .	14
3.1.1. Algoritmo . . . . .	21
3.2. Conexión del grafo de $m$ -agonalizaciones . . . . .	22
3.2.1. Caso $k > m$ . . . . .	26
3.2.2. Otros valores de $k$ y $m$ . . . . .	36
<b>4. Cuadrilaterizaciones con <math>k</math> colores</b>	<b>39</b>
4.1. La gráfica de cuadrilaterizaciones bicoloradas . . . . .	39
4.2. Cuadrilaterizaciones 3-coloreadas y puntos Steiner . . . . .	44
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
5.1. Existencia de la $m$ -agonalización. . . . .	49
5.2. Gráfica $G_{m,k}(n)$ . . . . .	50
5.3. Cuadrilaterizaciones 2 y 3-coloreadas . . . . .	50
5.4. Aplicaciones . . . . .	51
5.5. A futuro . . . . .	51
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# Índice de figuras

1.1.	Representación de los servidores en el plano. . . . .	2
1.2.	Soluciones deficientes. . . . .	2
1.3.	Triangulación de un conjunto de puntos coloreados. . . . .	3
2.1.	Línea y segmento de $a$ y $b$ . . . . .	5
2.2.	Un polígono simple (9-ágono) y un polígono convexo (6-ágono). . .	6
2.3.	Un conjunto de puntos $S$ y su envolvente convexa. . . . .	7
2.4.	Partición en 4-ágonos del conjunto $S$ de la figura 2.3. . . . .	7
2.5.	Conjunto de puntos no cuadrilaterizable. . . . .	8
2.6.	Una partición en 3-ágonos bien coloreada. . . . .	9
2.7.	Dos cuadrilaterizaciones adyacentes de un conjunto 2-coloreado. . .	9
2.8.	Cuadrilaterización de $S$ usando inserción secuencial. . . . .	10
2.9.	Cuadrilaterizando convexamente un conjunto de $n$ puntos. . . . .	11
2.10.	La triangulación de un polígono simple es 3-coloreable. . . . .	11
2.11.	Conjunto cuya gráfica de cuadrilaterizaciones es desconexa. . . . .	12
2.12.	Cuadrilaterización obtenida usando el método de [2]. . . . .	13
2.13.	Conjunto 3-coloreado no cuadrilaterizable. . . . .	13
3.1.	Conjunto 7-coloreado con tamaño y coloración adecuados. . . . .	15
3.2.	Las orejas de una partición en 6-ágonos. . . . .	15
3.3.	Forzando todos los puntos de $S$ con diagonales no-válidas. . . . .	16
3.4.	Cortando una oreja de un conjunto. . . . .	17
3.5.	$m$ -agonalización de tipo abanico. . . . .	18
3.6.	Un abanico corta sólo una vez una oreja. . . . .	18
3.7.	Oreja que separa toda la clase cromática 3. . . . .	19
3.8.	Formando una $m$ -agonalización abanico con base en $u$ . . . . .	20
3.9.	La coloración determina si puede haber 4-ágonos o no. . . . .	20
3.10.	Se pueden agregar diagonales válidas sólo en intervalos par. . . . .	21

3.11. $m$ -agonalizando un conjunto en posición convexa $k$ -coloreado. . . .	23
3.12. Subpolígono de una $m$ -agonalización. . . . .	24
3.13. Convirtiendo $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}_1$ dentro de $S'$ . . . . .	25
3.14. Cortando la oreja $O$ cuando $SP$ no tiene todos los colores. . . . .	28
3.15. Cortando la oreja $O$ cuando $SP \neq S$ y tiene todos los colores. . . .	29
3.16. $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ en configuración tipo <i>pelota de basketball</i> . . . . .	30
3.17. Caso imposible. . . . .	30
3.18. El ciclo de diagonales $CD_{u,5}(S)$ , igual al ciclo $CD_{v,5}(S)$ . . . . .	32
3.19. Empezando en $u$ llegamos a $v$ al completar una “vuelta” a $B$ . . . .	32
3.20. Ejemplo de ciclo $CD_{u,m}(B)$ que minimiza los cambios de color. . .	33
3.21. Regiones definidas por $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ . . . . .	34
3.22. Pasando de $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_1$ si existe $L$ admisible entre costados. . . . .	35
3.23. Intercambio por una diagonal que va de esquina a costado. . . . .	36
3.24. No se puede ir de una $m$ -agonalización a la otra ( $k < m$ ). . . . .	37
3.25. $m$ -agonalizaciones que no pueden llevarse una a la otra ( $k = m$ ). .	38
4.1. Conjunto cuya gráfica de cuadrilaterizaciones es desconexa. . . . .	40
4.2. La configuración $W$ . . . . .	40
4.3. Cuadrilaterizaciones de $W$ : $\mathcal{M}_1$ (izquierda) y $\mathcal{M}_2$ (derecha). . . .	41
4.4. Cuadrilaterizaciones a las que se puede llegar desde $\mathcal{M}_1$ . . . . .	42
4.5. Formas de cuadrilaterizar por debajo de la cadena $a-b$ . . . . .	43
4.6. Conjunto $P_6$ que no puede ser cuadrilaterizado. . . . .	44
4.7. Una cuadrilaterización de $P$ sin tomar en cuenta colores. . . . .	45
4.8. Gráfica $H$ sin colorear (izquierda) y coloreada usando $\oplus$ (derecha). .	46
4.9. Ejemplos de los dos casos posibles de un cuadrilátero de $G$ . . . . .	47

# Capítulo 1

## Introducción

Dentro de las Ciencias de la Computación resulta frecuente que para resolver un problema dividamos a este en subproblemas, que por lo regular son más fáciles de resolver, y que en conjunto nos llevan a la solución del problema original. En el área de Algoritmos a esta práctica se le llama “divide y vencerás”.

Si se requiere que trabajemos en dominios geométricos entonces también necesitamos partir dichos dominios en pequeñas piezas. Estas piezas pueden ser de todo tipo: puntos, planos, triángulos, líneas, etc.

También es común que los elementos del los que consta nuestro problema estén divididos en diversas clases, y sea necesario categorizarlos u ordenarlos de acuerdo a estas clases. Una manera de abstraer el concepto de clases a un dominio geométrico es por medio del uso de colores.

Un problema al que uno se podría enfrentar es el siguiente: Supongamos que tenemos  $n$  servidores ubicados en diversas partes del país, estos pueden ser de tipos diferentes (web, correo, base de datos, etc.), y deseamos crear una red de comunicación entre ellos, de forma que cada servidor se conecte con al menos un servidor de tipo diferente al de él, y de manera que la información pueda fluir de un servidor a cualquier otro.

Podemos modelar este problema utilizando un punto en el plano por cada servidor (de acuerdo con sus coordenadas) e identificando los tipos de servidor por el color que tenga cada punto (ver la figura 1.1). Así, al poner un segmento de recta entre dos puntos conectaríamos con un cable dos servidores.

Una solución obvia al problema es conectar cada servidor con todos los demás servidores, pero si tomamos en cuenta el costo de cada cable, el hecho de unir dos servidores del mismo tipo implica redundancia de datos, y que el

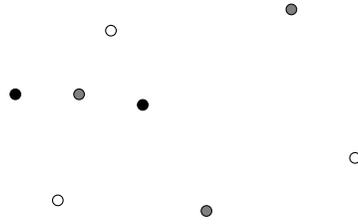


Figura 1.1: Representación de los servidores en el plano.

costo de mantenimiento de una red es proporcional al número de conexiones, entonces podemos ver que esta no es una buena solución (ver lado izquierdo de la figura 1.2).

Otra solución podría ser el conectar todos los servidores en una red con forma de árbol. El problema de esta opción es que, en un árbol, el número de saltos que tiene que dar un mensaje entre dos servidores puede ser relativamente largo, aunque geográficamente estén muy cerca, además esta red es muy propensa a fallos, pues si una conexión falla, entonces nuestra red se corta en dos subredes entre las cuales ya no puede haber intercambio de mensajes (ver lado derecho de la figura 1.2).

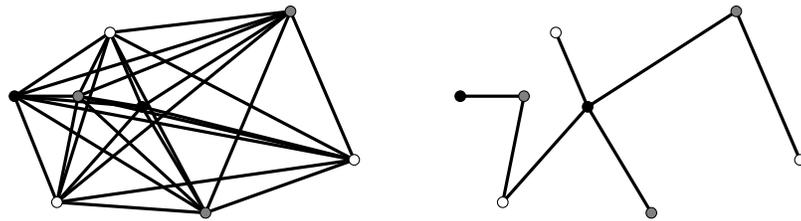


Figura 1.2: Soluciones deficientes.

Entonces buscamos una solución que no contenga una gran cantidad de conexiones, para ahorrar en el costo por conexión, y que tampoco tenga muy pocas, para evitar que se desconecte la red en caso de fallas. Por ejemplo, una mejor solución podría ser el dividir el conjunto de puntos en triángulos de manera que no unamos puntos del mismo color (ver la figura 1.3), a este proceso se le conoce comúnmente como triangulación. Este tipo de red tiene diversas ventajas: la pérdida de una conexión no desconecta la red; la red es una gráfica plana, con lo que se pueden usar algoritmos de ruteo eficientes

[24]; además el tamaño de las caras acotadas es fijo.

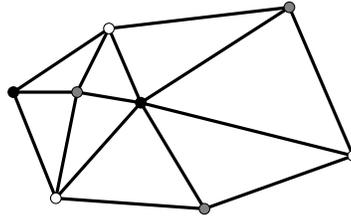


Figura 1.3: Triangulación de un conjunto de puntos, no uniendo puntos del mismo color.

Una observación importante es que en lugar de triángulos pudimos haber dividido en cuadriláteros, pentágonos, etc. o en general  $m$ -ágonos, y seguir manteniendo la propiedad de no unir puntos del mismo color. Entre más grande tomemos  $m$ , el número de conexiones se reduciría al particionar en  $m$ -ágonos, con lo cuál el costo por cada conexión se reduce.

La dificultad ahora reside en que dependiendo del número  $k$  de colores, el tamaño de nuestro conjunto y el tipo de  $m$ -ágonos que escojamos, la tarea de dividir en  $m$ -ágonos puede no ser fácil, o de hecho no se pueda realizar.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, coloreados de  $k$  colores diferentes. Una  $m$ -agonalización de  $S$  es un conjunto de  $m$ -ágonos con interiores ajenos, cuyos vértices son todos los puntos de  $S$ , cuya unión es la envolvente convexa de  $S$  y de forma que todas las aristas unen puntos de diferente color. Llamamos  $G_{m,k}(S)$  a la gráfica cuyos vértices son las  $m$ -agonalizaciones de  $S$ , y donde dos vértices son adyacentes si se puede pasar de una  $m$ -agonalización a otra haciendo un intercambio de arista.

El presente trabajo está enfocado a identificar para qué valores de  $m$ ,  $k$  y  $n$  es posible realizar  $m$ -agonalizaciones, y para qué valores la gráfica  $G_{m,k}(S)$  es conexa, suponiendo que los puntos en  $S$  están en posición convexa. Además se darán resultados específicos sobre las cuadrilaterizaciones  $k$ -coloreadas de puntos en el plano ( $m = 4$ ), como encontrar conjuntos en posición general para los cuales  $G_{4,2}(S)$  es no conexa; y la imposibilidad de obtener cuadrilaterizaciones 3-coloreadas de algunos conjuntos de puntos, aún agregando puntos extra, llamados Steiner.

Otra motivación para estudiar dichos problemas es que la literatura acerca de triangulaciones es muy vasta, pero para  $m$ -ágonos con  $m > 3$  es muy poca, y es más escasa cuando se añade el uso de colores. Nuestra investigación

intenta ser una continuación a los estudios previos de esta área, generalizando algunos resultados a  $m$ -ágonos de cualquier tamaño, e introduciendo nuevos problemas relacionados.

De esta forma, en el capítulo 2 abundaremos en los estudios de las  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas a través de la historia, en el capítulo 3 mostraremos nuestros resultados con puntos  $k$ -coloreados en posición convexa, en el capítulo 4 trataremos con cuadrilaterizaciones de puntos 2 y 3-coloreadas, y en el capítulo 5 expondremos las conclusiones obtenidas en esta investigación.

Sólo falta mencionar que a lo largo de esta obra se usarán conceptos básicos de Geometría Computacional, Análisis de Algoritmos y Teoría de las Gráficas. Algunos de estos conceptos no serán expuestos aquí para no extender demasiado la obra. Se recomienda que ante cualquier duda se consulte bibliografía especializada, como [5] y [21] para Geometría Computacional, [11] para Análisis de Algoritmos, y [13] para Teoría de las Gráficas.

# Capítulo 2

## Trabajo previo

En este capítulo veremos algunas definiciones básicas que se ocuparán a lo largo de este trabajo. Entre ellas definiremos formalmente las particiones en  $m$ -ágonos.

También se hará un breve recuento de los resultados obtenidos por otras personas que han trabajado en este problema.

### 2.1. Preliminares

Trabajaremos con conjuntos de puntos en el plano. Estos conjuntos deben ser finitos y sus puntos deben tener asociadas coordenadas cartesianas.

Dados dos puntos en el plano  $a$  y  $b$ , denotaremos con  $l(a, b)$  a la línea que pasa por  $a$  y  $b$ , y con  $\overline{ab}$  al segmento de recta que une a  $a$  y  $b$  (ver figura 2.1).

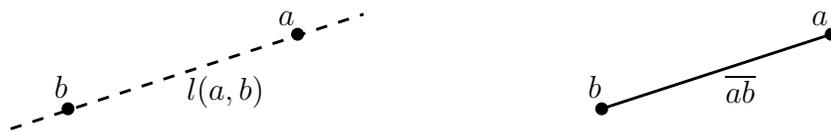


Figura 2.1: Línea y segmento de  $a$  y  $b$ .

**Definición 2.1** Decimos que un conjunto de puntos está en **posición general** si no contiene tres puntos colineales.

**Definición 2.2** Un **polígono**  $P$  es una secuencia ordenada de puntos  $p_1, \dots, p_n$ ,  $n \geq 3$ , llamados *vértices de  $P$* , junto con los segmentos de línea  $\overline{p_i p_{i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $\overline{p_n p_1}$ , llamados *aristas de  $P$* . Decimos que  $P$  es **simple** si no se intersectan cualesquiera dos aristas no consecutivas (ver figura 2.2).

Un polígono simple divide el plano en dos regiones, una no acotada llamada exterior y otra acotada llamada interior. En general, el término polígono simple denota al polígono junto con su interior.

**Definición 2.3** Un polígono simple  $P$  es **convexo** si para cualesquiera dos puntos  $a, b$  en el interior de  $P$ , también  $\overline{ab}$  está totalmente contenido en el interior de  $P$  (ver figura 2.2).

Llamaremos  **$m$ -ágono** a cualquier polígono simple  $P$  cuyo número de vértices sea  $m$ . (ver figura 2.2). Así a un triángulo le llamaremos 3-ágono y a un cuadrilátero 4-ágono, etc.

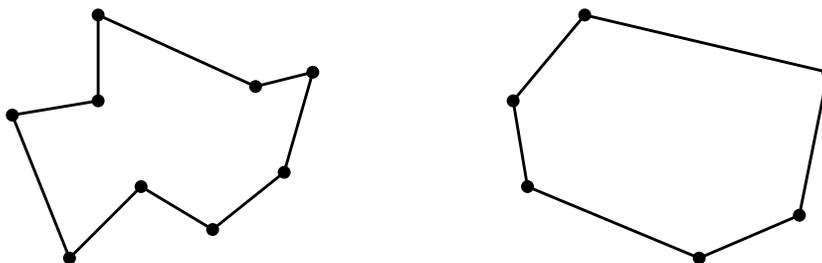


Figura 2.2: Un polígono simple (9-ágono) y un polígono convexo (6-ágono).

Sea  $S$  un conjunto finito de puntos en el plano y en posición general.

**Definición 2.4** La **envolvente convexa** de  $S$ ,  $\text{CONV}(S)$ , es el polígono convexo  $P$  de menor área, tal que todo punto de  $S$  es vértice de  $P$  o está en su interior (ver figura 2.3).

**Definición 2.5** Diremos que  $S$  está en **posición convexa** si todo punto de  $S$  es vértice de  $\text{CONV}(S)$ .

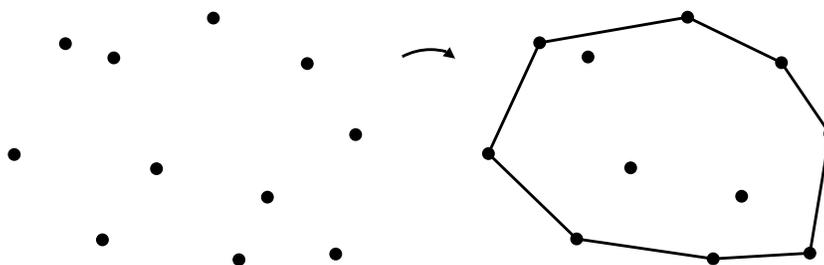


Figura 2.3: Un conjunto de puntos  $S$  y su envolvente convexa.

**Definición 2.6** Dado  $m \in \mathbb{N}$  fijo, definimos una **partición en  $m$ -ágonos** o  **$m$ -agonalización** de  $S$ , como una familia de  $m$ -ágonos, con interiores ajenos, cuyos vértices son todos los puntos de  $S$  y cuya unión es  $\text{CONV}(S)$  (ver figura 2.4).

Cuando  $m = 3$  a este tipo de particiones se les conoce como *triangulaciones*, y se han estudiado sus propiedades de manera extensa. Cuando  $m = 4$  se les conoce como *cuadrilaterizaciones* o *cuadrangulaciones*, y han sido estudiadas más escasamente.

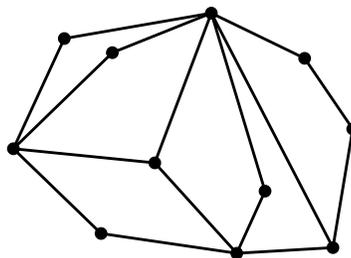


Figura 2.4: Partición en 4-ágonos (cuadrilaterización) del conjunto  $S$  de la figura 2.3.

Dependiendo de  $m$ , la cardinalidad de  $S$  y la posición de los puntos de  $S$ , es posible que no se pueda particionar  $S$  en  $m$ -ágonos; por ejemplo, si la cantidad de puntos en  $\text{CONV}(S)$  no fuera mayor o igual a cuatro y par, entonces  $S$  no podría cuadrilaterizarse [7]; es por estas razones que algunas veces es necesario agregar a  $S$  puntos extra, para poder obtener una  $m$ -agonalización del conjunto. En la literatura, a estos puntos extra se les conoce como **Steiner** o **de Steiner** (ver figura 2.5).

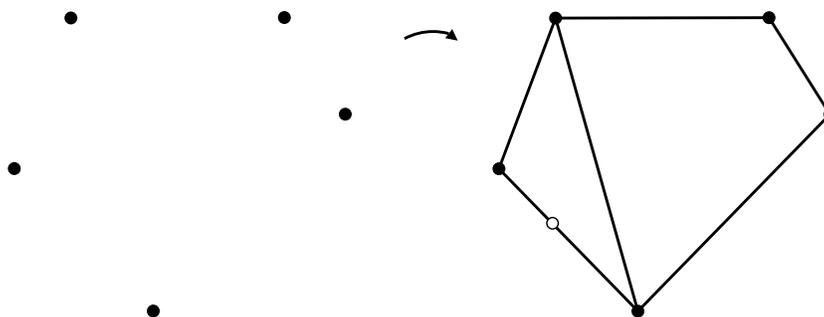


Figura 2.5: Conjunto de puntos que no se puede partir en 4-ágonos y partición agregando un Steiner.

Las siguientes definiciones involucran el uso de colores:

**Definición 2.7** *Dados  $k$  colores distintos, decimos que  $S$  está  $k$ -coloreado, si  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ , y para todo  $i$ ,  $0 < i \leq k$ , se tiene que:  $S_i \neq \emptyset$ , cada punto de  $S_i$  está pintado del color  $i$ , y para todo  $j \neq i$  ( $0 < j \leq k$ )  $S_i \cap S_j = \emptyset$ .*

A cada conjunto  $S_i$  de un conjunto  $k$ -coloreado  $S$ , le llamaremos **clase cromática** del color  $i$ ,  $0 < i \leq k$ .

**Definición 2.8** *Al segmento de recta  $\overline{ab}$  le llamaremos **arista bicromática** si los puntos  $a$  y  $b$  tienen diferente color.*

De esta misma manera, cuando los extremos de un segmento de recta tenga los mismos colores le llamaremos **arista monocromática**.

Ahora somos capaces de definir las particiones en  $m$ -ágonos utilizando colores:

**Definición 2.9** *Una partición en  $m$ -ágonos de un conjunto  $k$ -coloreado está **bien coloreada** si todas las aristas de los  $m$ -ágonos son bicromáticas (ver figura 2.6).*

De aquí en adelante cuando se hable de  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas se presupondrá que hablamos de particiones en  $m$ -ágonos bien coloreadas de conjuntos  $k$ -coloreados.

Habrán ocasiones en las que la cantidad de colores que se necesitan en una figura sean demasiados, en esos casos, en lugar de colores, se utilizarán

etiquetas con el número de color que le corresponda (ver figura 2.6), habrá casos en los que incluso no se denotará el color de los puntos, si es que dichos colores fueran irrelevantes (considerando que de antemano trabajamos con  $m$ -agonalizaciones bien coloreadas).

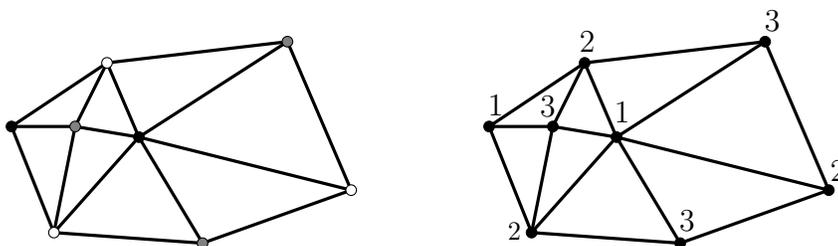


Figura 2.6: Una partición en 3-ángulos bien coloreada de un conjunto 3-coloreado y la misma partición usando etiquetas en lugar de colores.

Dependiendo de  $S$  y su coloración, este puede tener cero o más  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas. Dadas dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $S$  en  $m$ -ángulos, decimos que estas son adyacentes si se puede obtener  $P_1$  a partir de  $P_2$ , substituyendo una arista de  $P_1$  por otra arista de  $P_2$  que no está en  $P_1$  (ver figura 2.7). Dicha operación se conoce como un **giro** de aristas. Esta relación de adyacencia entre particiones nos define un gráfica que llamaremos  $G_{m,k}(S)$  cuyos vértices son todas las  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas de  $S$ , y tal que dos son adyacentes en  $G_{m,k}(S)$  si se puede ir de una  $m$ -agonalización a la otra mediante un giro de aristas. En general, a dicha gráfica, también la conoceremos con el nombre **gráfica de  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas**.

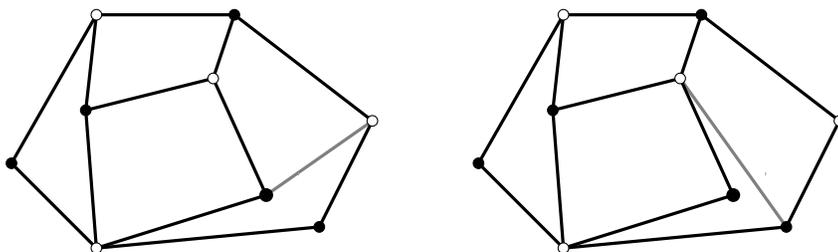


Figura 2.7: Dos cuadrilaterizaciones adyacentes de un conjunto 2-coloreado (en gris las aristas que se intercambian).

## 2.2. Particiones en $m$ -ágonos de conjuntos $k$ -coloreados

La investigación relacionada con triangulaciones es vasta, sin embargo para particiones en  $m$ -ágonos con  $m > 3$  la investigación es relativamente escasa, y lo es más si tomamos en cuenta el uso de colores. Mucha de esta investigación está restringida a casos particulares y no a  $m$ -ágonos de tamaño arbitrario o cantidad de colores variable.

Entre los estudios que no involucran colores, Bose y Toussaint en [7] dieron una caracterización de los conjuntos que admiten particiones en 4-ágonos (cuadrilaterizaciones). Ellos mostraron que  $S$ , un conjunto de  $n$  puntos en posición general, admite una cuadrilaterización si, y sólo si, el número de puntos en la envolvente convexa de  $S$  es al menos cuatro y es par. También presentaron un algoritmo que cuadrilateriza  $S$  en tiempo  $O(n \log n)$ , y si  $S$  no admite una cuadrilaterización entonces lo cuadrilateriza agregando tan sólo un punto Steiner. Este algoritmo fue llamado de Inserción Secuencial, y consiste en calcular  $\text{CONV}(S)$  (en tiempo  $O(n \log n)$ ), partir  $\text{CONV}(S)$  en cuadriláteros agregando diagonales (en tiempo  $O(n)$ ), y finalmente insertar cada punto interior en el cuadrilátero que lo contiene ( $O(n \log n)$  usando barrido de línea), ver figura 2.8.

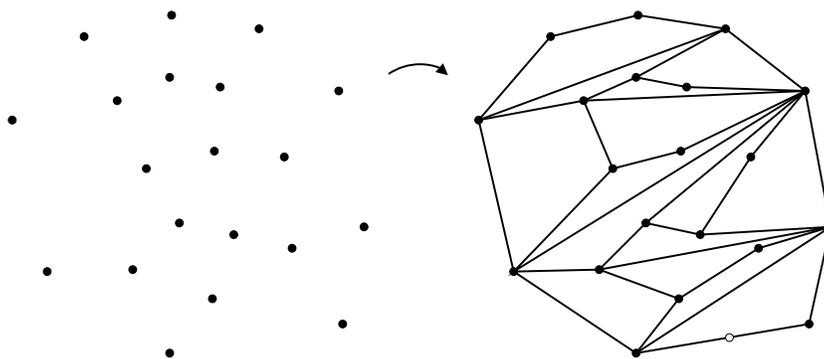


Figura 2.8: Cuadrilaterización de  $S$  usando inserción secuencial y agregando un Steiner.

Bremner, *et al.* en [8] buscaron minimizar el número de puntos Steiner suficientes para cuadrilaterizar convexamente cualquier conjunto de puntos, dónde “convexamente” se refiere a que todos los cuadriláteros obtenidos en

la partición sean polígonos convexos. La cota obtenida fue de  $3\lfloor n/2 \rfloor$  puntos Steiner, para cuadrilaterizar convexamente  $S$ . Por nuestra parte hemos mejorado esta cota en [16] y [17], reduciendo a  $n + 1$  Steiner usando un método relativamente sencillo, y a  $(4/5)n + (8/5)$  Steiner usando un método más complicado (ver figura 2.9). Tanto el método de Bremner, *et al.*, como los propuestos por nosotros, son de complejidad  $O(n \log n)$ .

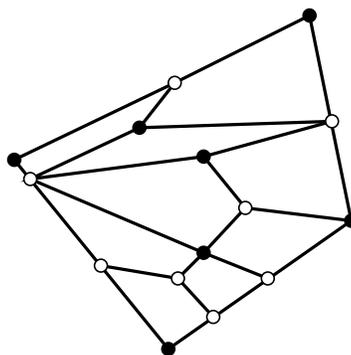


Figura 2.9: Cuadrilaterizando convexamente un conjunto de  $n$  puntos usando  $n + 1$  Steiner (puntos blancos).

En referencia al problema con colores tenemos a Fisk [15], que en 1978 da una nueva demostración del *Teorema de la Galería de Arte* [9]. Esta nueva demostración se basa en el hecho de que la triangulación de un polígono simple es 3-coloreable (ver figura 2.10), que es una consecuencia del *Teorema de las Dos Orejas* de Meisters [20].

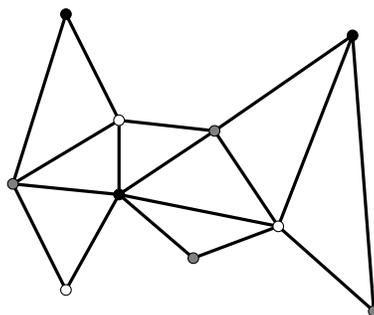


Figura 2.10: La triangulación de un polígono simple es 3-coloreable.

Cortés, *et al.* en [12] encontraron una configuración de puntos  $X$ , para la cual la gráfica  $G_{4,2}(X)$  es desconexa, ver figura 2.11. El conjunto  $X$  sólo tiene dos cuadrilaterizaciones diferentes y no se puede pasar de una a otra por medio de giros de arista, el único problema con esta configuración es que los puntos no se encuentran en la posición general.

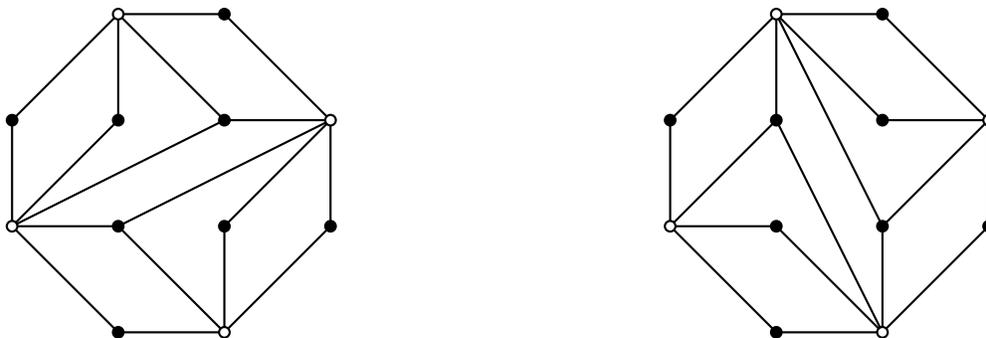


Figura 2.11: Las únicas cuadrilaterizaciones del conjunto  $X$ , no se puede pasar de una a otra por medio de giros de arista.

Por su parte, Álvarez, *et al.* en [2] y [3] prueban que cualquier conjunto 2-coloreado  $P = R \cup B$ , donde  $|R| = |B| = n$ , puede ser cuadrilaterizado agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  puntos Steiner (ver figura 2.12) y que  $\frac{2n}{3}$  Steiner son a veces necesarios. Además prueban que hay conjuntos 3-coloreados que no pueden ser completados a cuadrilaterizaciones, no importando el número de puntos Steiner que agreguemos (ver figura 2.13).

La limitación de estos resultados es que se enfocan a triángulos o a cuadriláteros. El propósito de este trabajo es el de generalizar un poco más el tema de estudio para  $m$ -ángonos en general y para cualquier cantidad de colores  $k$ , aunque con la limitación de que nuestros conjuntos serán puntos en posición convexa. También daremos resultados nuevos en lo que se refiere a las cuadrilaterizaciones con dos y tres colores.

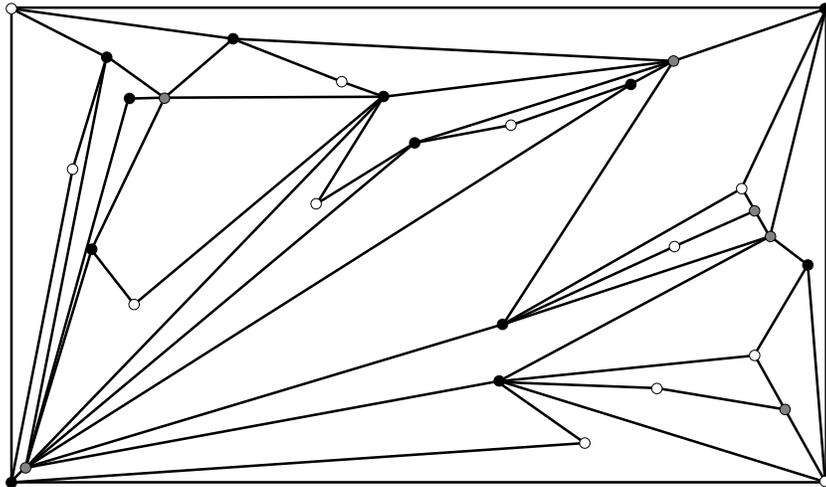


Figura 2.12: Cuadrilaterización obtenida usando el método de [2], los puntos grises son Steiner.

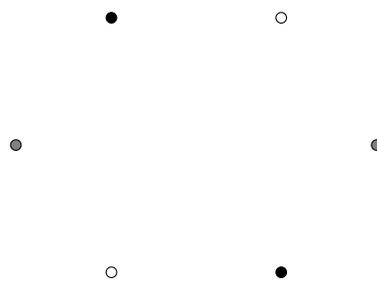


Figura 2.13: Conjunto 3-coloreado que no puede ser cuadrilaterizable, aún agregando puntos Steiner.

# Capítulo 3

## $m$ -agonalizaciones sobre puntos $k$ -coloreados en posición convexa

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas, cuando el conjunto de puntos a particionar esta en posición convexa, así como la conexidad de su gráfica de  $m$ -agonalizaciones.

### 3.1. Existencia de la $m$ -agonalización

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos  $k$ -coloreados en posición convexa. Como  $S$  está en posición convexa, entonces cualquier  $m$ -agonalización de  $S$  contiene las aristas de  $\text{CONV}(S)$  y aristas entre vértices no contiguos en  $\text{CONV}(S)$  (diagonales). Para que  $S$  tenga  $m$ -agonalización bien coloreada es necesario que  $n = m + r(m - 2)$ , dónde  $r$  es el número de diagonales de dicha  $m$ -agonalización, además es necesario que todas las aristas de  $\text{CONV}(S)$  sean bicromáticas. Debido a lo anterior, a lo largo de este capítulo supondremos que nuestros conjuntos tienen cardinalidad adecuada ( $n = m + r(m - 2)$  para alguna  $r \in \mathbb{N}$ ), y coloración de forma que las aristas de la envolvente convexa sean bicromáticas (ver figura 3.1).

El propósito de esta sección es buscar los valores de  $m$  y  $k$  para los cuales existe una  $m$ -agonalización de  $S$ . En particular demostraremos que cuando  $k \geq m$  siempre se puede particionar en  $m$ -ágonos, pero antes de demostrarlo necesitaremos algunos lemas y definiciones.

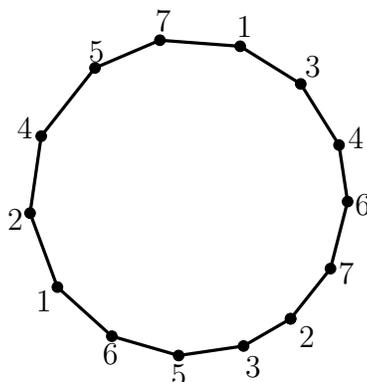


Figura 3.1: Conjunto 7-coloreado, con tamaño y coloración adecuada de la envolvente convexa para intentar particionar en 6-ágonos.

Lo primero que debemos observar es que toda  $m$ -agonalización de  $S$  tiene el mismo número de diagonales ( $r$ ).

Si llamamos **oreja** a un  $m$ -ágono cuyos vértices están contiguos en  $\text{CONV}(S)$ , entonces toda  $m$ -agonalización que tenga al menos una diagonal tiene al menos dos orejas (ver figura 3.2).

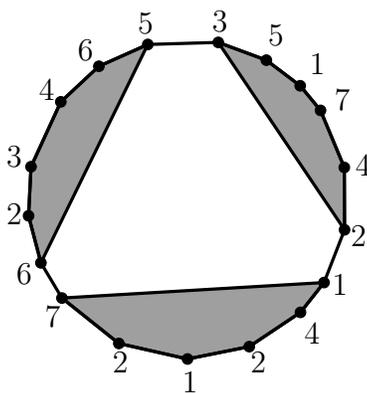


Figura 3.2: Las orejas de una partición en 6-ágonos.

Intuitivamente, lo que haremos para construir una  $m$ -agonalización de un conjunto, será buscar una **oreja admisible** dentro del conjunto, quitarle al conjunto esa oreja y continuar inductivamente. Usaremos el termino de

*admisibles* cuando encontremos diagonales bicromáticas que formen un  $m$ -ágono, de esta forma, una oreja es admisible si la diagonal que la forma es bicromática (hay que recordar que además estamos suponiendo que todas las aristas de  $\text{CONV}(S)$  son bicromáticas).

**Lema 3.1** *Si  $k \geq m$  entonces  $S$  siempre tiene una oreja admisible.*

**Demostración.-** Supongamos que  $S$  es tal que no contiene una oreja admisible. Escojamos un punto  $u$  de color 1, como  $S$  no tiene orejas admisibles entonces los puntos a distancia  $m$  de  $u$ , en sentido de las manecillas del reloj y en contra, deben de ser también de color 1. Consideremos ahora el siguiente punto  $v$  a favor de las manecillas del reloj de  $u$ , por ser vecino de  $u$  debe ser de color diferente de 1, sin pérdida de generalidad supongamos que es de color 2, al igual que antes los puntos que están a distancia  $m$  de  $v$  a favor y en contra de las manecillas del reloj deben tener color 2 (ver lado izquierdo de la figura 3.3). Si seguimos repitiendo el mismo proceso veremos que el color de muchos puntos queda forzado por el hecho de no tener orejas admisibles.

Observemos el espacio  $C$ , de  $m - 2$  puntos, que hay entre  $u$  y cualquiera de los otros dos puntos de color 1, en el mejor de los casos a cada punto en  $C$  le asignamos un color diferente, ocupando así  $m - 2$  colores. Como todas las orejas están bloqueadas el patrón de colores dentro de  $C$  se va propagando en ambos sentidos de las manecillas del reloj hasta que el color de todos los puntos en  $S$  queda forzado (ver lado derecho de la figura 3.3).

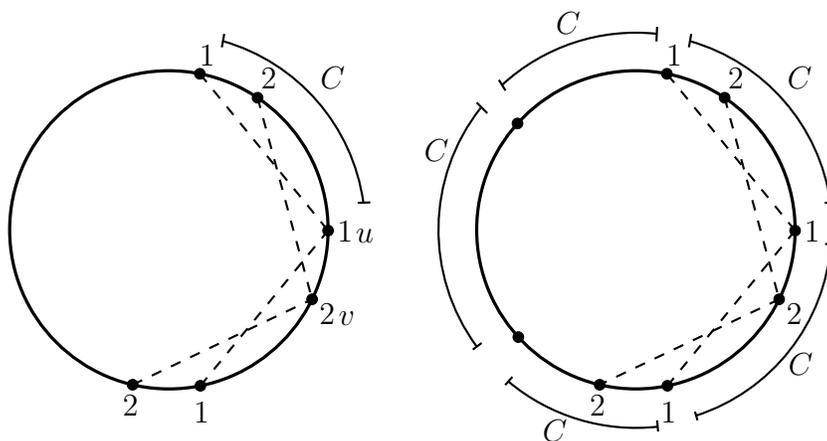


Figura 3.3: Forzando todos los puntos de  $S$  con diagonales no-válidas.

Si contamos también los puntos de color 1, forzados por  $u$ , entonces  $S$  está coloreado con  $m - 1$  colores, pero esto es una contradicción pues sabemos que  $S$  está  $k$ -coloreado, que  $k \geq m > m - 1$  y que  $S$  debe tener al menos un punto de cada uno de los  $k$  colores.

Por tanto por reducción al absurdo tenemos que  $S$  siempre tiene una oreja admisible.  $\square$

Aplicando el lema anterior podemos crear  $m$ -agonalizaciones **cortando** orejas de nuestro conjunto original, quedándonos con conjuntos más pequeños. Cortar una oreja de un conjunto significa quitar de nuestro conjunto todos los puntos de la oreja, exceptuando los dos puntos de la diagonal que define dicha oreja (ver figura 3.4). El problema de este enfoque es que después de cortar una oreja podemos haber perdido colores, con lo cual ya no podríamos asegurar la existencia de otra oreja admisible, esto nos obliga a buscar herramientas adicionales.

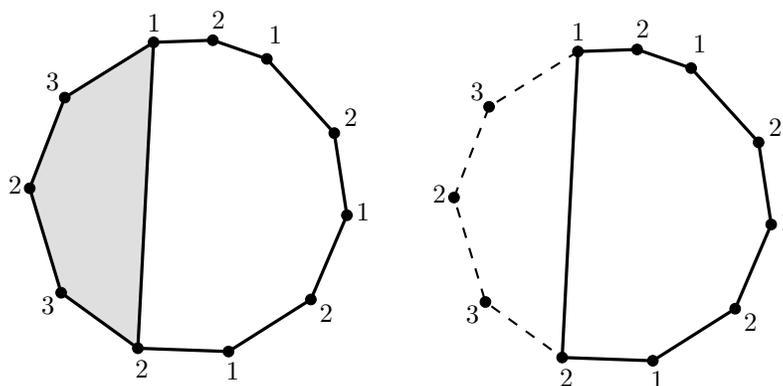


Figura 3.4: Cortando una oreja de un conjunto.

**Definición 3.1** Diremos que una  $m$ -agonalización de  $S$  es de tipo **abanico** si existe un punto en  $S$  del cual salen todas las diagonales de la  $m$ -agonalización (ver figura 3.5).

Es importante observar que, a excepción de las orejas que pudieran contener al punto base de una  $m$ -agonalización abanico, las diagonales de un abanico intersectan a la diagonal de cualquier otra oreja sólo una vez (ver

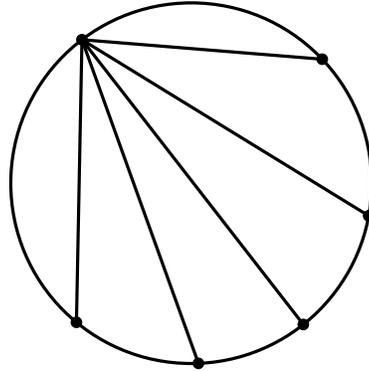
Figura 3.5:  $m$ -agonalización de tipo abanico.

figura 3.6). Cabe señalar que estamos considerando que dos diagonales se intersectan sólo si su intersección no ocurre en sus extremos, esta es la definición de intersección de diagonales que usaremos de aquí en adelante.

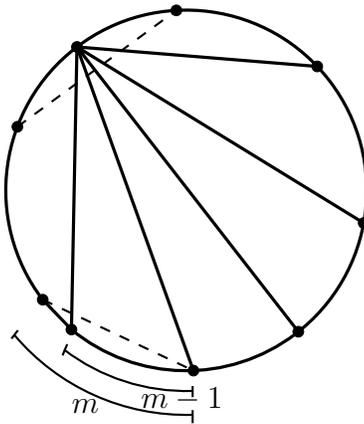


Figura 3.6: Un abanico corta sólo una vez cualquier oreja que no contenga su punto base.

**Definición 3.2** Si alguna oreja admisible contiene todos los puntos de una clase cromática, se dice que **separa** dicha clase (ver figura 3.7).

Una de las propiedades de las  $m$ -agonalizaciones abanico es la siguiente:

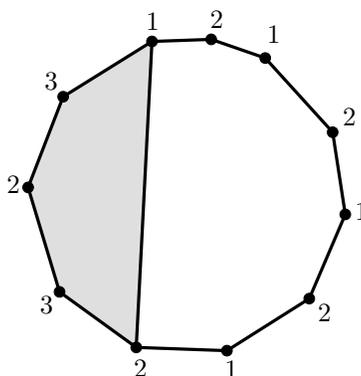


Figura 3.7: Oreja que separa toda la clase cromática 3.

**Lema 3.2** *Si una oreja admisible de  $S$  separa una clase cromática, entonces se puede construir una  $m$ -agonalización abanico de  $S$  con base en cualquier punto de la clase cromática separada.*

**Demostración.**- Sea  $S_i$  la clase cromática separada,  $O$  la oreja que la separa y  $u$  un punto de  $S_i$ . Como todos los puntos de  $S_i$  están contenidos en  $O$ , entonces los puntos que están a distancia  $m$  de  $u$ , a favor y en contra de las manecillas del reloj, son de color diferente del de  $u$ , por tanto podemos tomar esas dos orejas admisibles  $P$  y  $Q$  (ver lado izquierdo de la figura 3.8).

Si cortamos  $P$  y  $Q$  de nuestro conjunto podemos continuar inductivamente cortando orejas que salgan de  $u$  hasta que nos quedemos sólo con un  $m$ -ágono o que las dos orejas admisibles compartan la misma diagonal (ver lado derecho de la figura 3.8). Esto lo podemos hacer porque después de cortar  $P$  y  $Q$ ,  $u$  es el único elemento de  $S_i$  que nos queda, con lo cual todas las diagonales que partan de  $u$  son admisibles.

Por tanto, si unimos todas las orejas que cortamos, obtenemos una  $m$ -agonalización de  $S$ , esta  $m$ -agonalización es abanico porque todas las diagonales salen de  $u$ .  $\square$

Ahora podemos demostrar el siguiente teorema con respecto a la existencia de las  $m$ -agonalizaciones:

**Teorema 3.3** *Si  $S$  es un conjunto de tamaño  $n$  en posición convexa  $k$ -coloreado, entonces se tiene lo siguiente:*

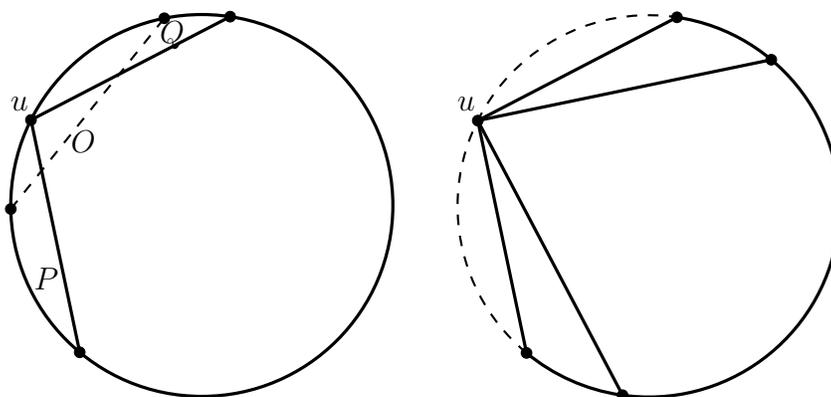


Figura 3.8: Formando una  $m$ -agonalización abanico con base en  $u$ .

- a) Para  $2 < k < m$ , existen coloraciones de los vértices que admiten  $m$ -agonalización y otras que no.  
 b) Si  $k = 2$ , existe  $m$ -agonalización sólo si  $m$  es par.  
 c) Si  $k \geq m$ , siempre existe  $m$ -agonalización .

**Demostración.-**

- a) Tomemos  $k = 3$  y  $m = 4$ , en la figura 3.9 hay dos configuraciones 3-coloreadas, una que admite partición en 4-ángulos y otra que no porque ninguna diagonal es admisible.

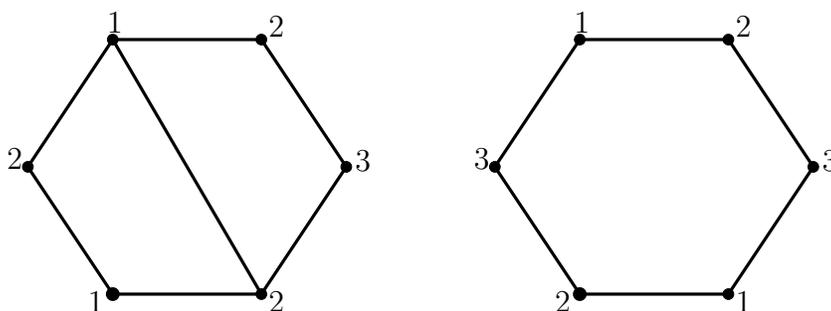


Figura 3.9: La coloración determina si puede haber 4-ángulos o no.

- b) Las aristas de  $\text{CONV}(S)$  son bicromáticas, como sólo tenemos dos colores entonces los vértices de  $S$  se encuentran coloreados alternadamente.

Podemos partir en  $m$ -ágonos siempre que  $m$  sea par, pues de lo contrario se intentarían agregar aristas monocromáticas (ver figura 3.10).

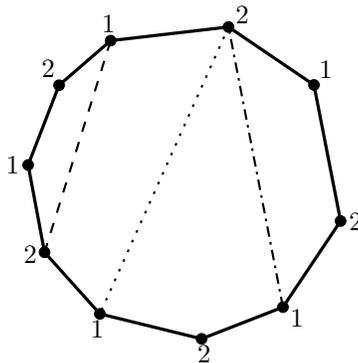


Figura 3.10: Se pueden agregar diagonales válidas sólo en intervalos par.

- c) Por el Lema 3.1 existe una oreja admisible. Si esa oreja separa una clase cromática hacemos una  $m$ -agonalización abanico por el Lema 3.2 y terminamos, en caso contrario cortamos esa oreja y continuamos repitiendo el proceso en el resto del conjunto, hasta que nos quedemos con sólo un  $m$ -ágono. Podemos asegurar que en cada repetición hay una oreja admisible, pues este conjunto contiene los  $k$  colores, de lo contrario la última oreja que quitamos separaba algún color y hubiéramos acabado. Al final, al unir todos los  $m$ -ágonos obtenidos, formamos una  $m$ -agonalización de  $S$ .

□

El Teorema 3.3 precisa valores de  $k$  y  $m$  para los cuales podemos asegurar que existe una  $m$ -agonalización de  $S$ . Con este resultado intentamos aportar un poco en la búsqueda de caracterizar, de manera puntual, aquellos conjuntos de puntos  $k$ -coloreados que aceptan  $m$ -agonalizaciones.

### 3.1.1. Algoritmo

Como la demostración del Teorema 3.3 fue constructiva, entonces al mismo tiempo se define un algoritmo para  $m$ -agonalizar conjuntos en posición convexa cuando  $k \geq m$ . Recordemos que  $S$  es un conjunto  $k$ -coloreado, en

posición convexa, de tamaño  $n = m + r(m - 2)$  con  $r \in \mathbb{N}$ , y con todas las aristas de  $\text{CONV}(S)$  bicromáticas. De manera intuitiva el algoritmo para  $m$ -agonalizar  $S$  trabaja así:

1. Toma  $U = S$ .
2. Repite mientras  $|U| \neq m$ :
  - a) Recorre los puntos de  $U$  hasta encontrar un punto que forme una oreja admisible  $O$ .
  - b) Si  $O$  separa un color, haz un abanico desde un punto de ese color y sal del ciclo.
  - c) Si  $O$  no separa color, toma  $U$  como lo que tiene  $U$ , pero cortando  $O$ .
3. FIN

En la figura 3.11 se puede ver una corrida de este algoritmo.

El paso *a)* toma tiempo  $O(|U|)$ , porque una vez escogido un punto de  $U$  nos toma tiempo constante ver si forma una oreja admisible. El paso *b)* nos lleva tiempo  $O(|U|)$ , pues tenemos que revisar si alguna clase cromática quedó totalmente contenida en  $O$ . El paso *c)* lleva tiempo constante. Debido a que el tamaño de  $U$  disminuye  $m - 2$  puntos en cada iteración, el número máximo de repeticiones del ciclo es  $r$ . La complejidad sería entonces:  $\sum_{i=0}^{r-1} n - i(m - 2)$ , y esto es  $O(n^2)$  porque  $r$  es una fracción lineal de  $n$ . Por tanto complejidad total del algoritmo es  $O(n^2)$  y su correctez está basada en la demostración del Teorema 3.3.

Este algoritmo, al ser consecuencia del Teorema 3.3, no es necesariamente el más eficiente, de hecho conjeturamos que, utilizando técnicas más especializadas (como “divide y vencerás”), la complejidad puede bajarse a  $O(n \log n)$ .

## 3.2. Conexión del grafo de $m$ -agonalizaciones

Tomemos de nuevo  $S$  como un conjunto  $k$ -coloreado, en posición convexa, de tamaño  $n = m + r(m - 2)$  con  $r \in \mathbb{N}$ , y con todas las aristas de  $\text{CONV}(S)$  bicromáticas. Antes se definió la gráfica  $G_{m,k}(S)$  como la gráfica de  $m$ -agonalizaciones del conjunto  $k$ -coloreado  $S$ , donde dos  $m$ -agonalizaciones son adyacentes si se puede ir de una a otra por medio de un *giro* de aristas.

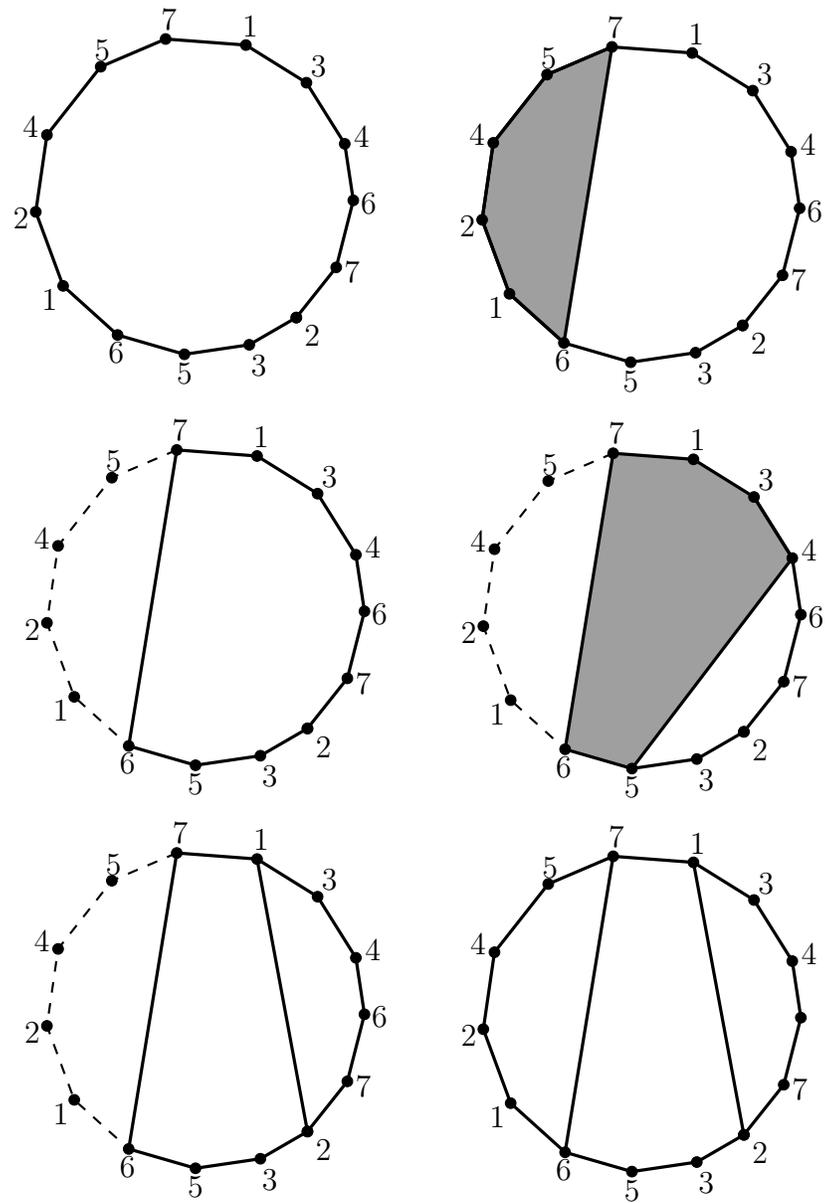


Figura 3.11:  $m$ -agonalizando un conjunto en posición convexa  $k$ -coloreado.

Para puntos en posición convexa definimos  $G_{m,k}(n)$  como la gráfica de cualquier conjunto convexo  $k$ -coloreado de  $n$  puntos, de forma que si decimos que  $G_{m,k}(n)$  cumple alguna propiedad entonces para todo  $S$   $k$ -coloreado en posición convexa, con  $|S| = n$ , la gráfica  $G_{m,k}(S)$  cumple dicha propiedad.

En esta sección buscaremos para qué valores de  $m$ ,  $k$  y  $n$  la gráfica  $G_{m,k}(n)$  es conexas. Primero expondremos algunos conceptos y lemas.

**Definición 3.3** *Dada una  $m$ -agonalización  $\mathcal{M}$  de  $S$ , podemos definir un subpolígono de  $S$  que cumpla cierta propiedad, como el menor polígono que contiene todos los  $m$ -ángulos de  $\mathcal{M}$  que cumplan con dicha propiedad (ver figura 3.12).*

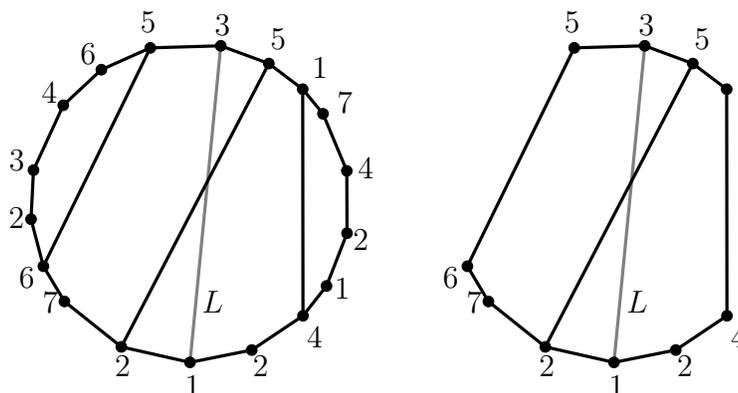


Figura 3.12: A la derecha el subpolígono que contiene las diagonales de la  $m$ -agonalización que intersectan  $L$ .

El siguiente lema muestra la utilidad de las  $m$ -agonalizaciones abanico, como intermediarias entre  $m$ -agonalizaciones.

**Lema 3.4** *Si  $S$  tiene dos  $m$ -agonalizaciones y alguna de ellas es abanico, entonces se puede ir de una a otra por medio de giros de arista.*

**Demostración.-** Toma  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  dos  $m$ -agonalizaciones de  $S$ , de forma que  $\mathcal{M}_2$  es un abanico con base en un punto  $u$ . Si  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$  entonces terminamos.

Supongamos que  $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2$ . Recordemos que  $|S| = m + r(m - 2)$  donde  $r$  es el número de diagonales de una  $m$ -agonalización de  $S$ . Si  $r = 0$  entonces

no tiene diagonales y se cumple por vacuidad. Si  $r = 1$  entonces sólo tenemos que intercambiar la diagonal de  $\mathcal{M}_1$  por la diagonal de  $\mathcal{M}_2$ .

Entonces debemos suponer también que  $r \geq 2$ . Si  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  comparten alguna oreja la cortamos del conjunto y repetimos el proceso hasta llegar al conjunto  $S'$  en el que  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  no comparten orejas. Observemos que basta convertir las diagonales de  $\mathcal{M}_1$  dentro de  $S'$  a diagonales  $\mathcal{M}_2$  dentro de  $S'$ , para ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  en  $S$ . Si  $\mathcal{M}_1$  tiene sólo una diagonal dentro de  $S'$ , entonces basta intercambiar dicha diagonal por la válida que salga de  $u$  en  $\mathcal{M}_2$ .

Tomemos entonces el caso en que  $S'$  tiene más de una diagonal y restrinjámonos a  $S'$ .  $\mathcal{M}_1$  debe tener al menos dos orejas (orejas desde el punto de vista de  $S'$ , no necesariamente orejas de  $S$ ), como  $u$  sólo podría pertenecer a una de esas orejas, entonces existe una oreja de  $\mathcal{M}_1$  que no contiene a  $u$  y cuya diagonal  $O$  debe intersectar sólo a una diagonal  $L$  de  $\mathcal{M}_2$  (ver lado izquierdo de la figura 3.13). Entonces procedemos a intercambiar en  $\mathcal{M}_2$  a  $L$  por  $O$ , cortar de  $S'$  la oreja que forma  $O$ , y procedemos inductivamente sobre el conjunto restante (ver lado derecho de la figura 3.13).

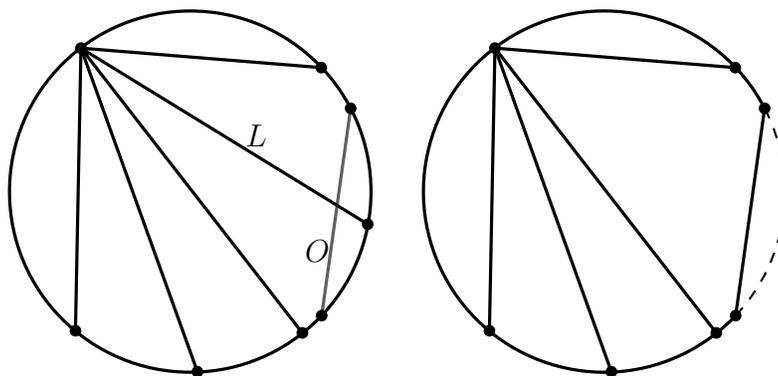


Figura 3.13: Convirtiendo  $\mathcal{M}_2$  en  $\mathcal{M}_1$  dentro de  $S'$ .

Al terminar el proceso anterior sobre  $S'$  lo que habremos hecho es ir de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  en  $S'$ , por medio de giros de arista. Si quisiéramos ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  en  $S'$  se siguen los mismos giros de arista, pero en orden inverso.

Por lo tanto podemos ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  y de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  en  $S$ , por medio de giros de arista.  $\square$

Como consecuencia casi directa del Lema 3.4 tenemos los dos siguientes

Lemas:

**Lema 3.5** *Si alguna clase cromática de  $S$  tiene sólo un elemento, entonces podemos llevar, por medio de giros de arista, toda  $m$ -agonalización a una  $m$ -agonalización abanico con base en dicho elemento.*

**Demostración.-** Sea  $\mathcal{M}_1$  la  $m$ -agonalización de  $S$  y sea  $u$  el vértice que forma la clase cromática de un único elemento.

Como  $u$  es el único elemento de su clase cromática podemos tomar como  $\mathcal{M}_2$  a la  $m$ -agonalización abanico que tiene a  $u$  como base, pues todas las diagonales que salgan de  $u$  son válidas.

Ahora sólo aplicamos el Lema 3.4 con las  $m$ -agonalizaciones  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  y terminamos.  $\square$

**Lema 3.6** *Si una oreja admisible separa un color, podemos llevar toda  $m$ -agonalización a un abanico partiendo de un elemento de esa clase cromática.*

**Demostración.-** Sea  $\mathcal{M}_1$  una  $m$ -agonalización de  $S$ . Por el Lema 3.2 podemos construir una  $m$ -agonalización abanico  $\mathcal{M}_2$  que salga de un elemento de la clase cromática separada, después sólo se aplica el Lema 3.4 con  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ , y terminamos.  $\square$

En teoremas posteriores se hará uso de los lemas 3.4, 3.5 y 3.6 para llevar, cuando sea posible, dos  $m$ -agonalizaciones a un mismo abanico y así poder ir de una  $m$ -agonalización a otra.

### 3.2.1. Caso $k > m$

Ahora intentaremos probar que si  $k > m$  entonces la gráfica de  $m$ -agonalizaciones de  $S$  es conexa.

**Teorema 3.7** *Si  $k > m$  entonces  $G_{m,k}(n)$  es conexo.*

**Demostración.-** Si  $S$  sólo tiene una  $m$ -agonalización entonces  $G_{m,k}(S)$  es conexa pues podemos ir de esa  $m$ -agonalización a sí misma.

Entonces tomamos  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  dos  $m$ -agonalizaciones diferentes de  $S$ . Demostraremos por inducción que podemos ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  mediante giros de arista. Procederemos por inducción sobre  $r$ , el número de diagonales de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ .

*Caso base:*

- $r = 1$ . Como  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  sólo contienen una diagonal cada una, sólo debemos intercambiar la diagonal de  $\mathcal{M}_1$  por la de  $\mathcal{M}_2$  y por tanto  $G_{m,k}(S)$  es conexa.

*Hipótesis Inductiva:* Si un polígono convexo  $k$ -coloreado tiene dos  $m$ -agonalizaciones con  $d$  diagonales cada una, entonces podemos ir de una a otra con giros de arista.

Ahora supongamos que  $S$  tiene  $d + 1$  diagonales, demostremos que la Hipótesis Inductiva también se cumple.

El conjunto  $S$  debe cumplir las siguientes condiciones:

- a)  $S$  no debe tener una clase cromática de un sólo punto, de lo contrario se puede hacer uso del Lema 3.5, llevar  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  al mismo abanico, y habríamos terminado.
- b) Ninguna oreja admisible de  $S$  debe separar una clase cromática, de lo contrario se usa el Lema 3.6, se lleva  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  al mismo abanico, y terminamos.

Lo primero que debemos buscar es si  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  comparten alguna oreja  $P$ , en este caso cortamos  $P$  de ambas  $m$ -agonalizaciones, aplicamos la Hipótesis Inductiva en el resto del conjunto para llevar  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$ , y así obtener un camino de giros entre  $\mathcal{M}_2$  y  $\mathcal{M}_1$  en el conjunto general. Podemos aplicar la Hipótesis Inductiva por b), pues nuestro conjunto conserva todos los colores después de cortar  $P$ .

Tomamos  $O$  una oreja de  $\mathcal{M}_1$ . La idea general para llevar  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$ , es llevar a  $\mathcal{M}_2$  a una  $m$ -agonalización  $\mathcal{M}_3$  que contenga a  $O$ , cortar dicha oreja, aplicar la Hipótesis Inductiva en el resto del conjunto para llevar  $\mathcal{M}_3$  a  $\mathcal{M}_1$ , y así obtener un camino de giros entre  $\mathcal{M}_2$  y  $\mathcal{M}_1$  en el conjunto general.

Consideremos  $SP$  el subpolígono de  $\mathcal{M}_2$  en  $S$  que contiene todas las diagonales que intersectan a  $O$ . Y nos preguntamos: ¿Están presentes todas las clases cromáticas en  $SP$ ?

- **NO**  $\Rightarrow$  Agrego a  $SP$   $m$ -ágonos de  $\mathcal{M}_2$  hasta que consigamos un polígono  $SP'$  que contenga todos los colores. El último  $m$ -ágono que agregamos debe ser una oreja que contiene un color que el polígono no tenía antes, por tanto separa una clase cromática. Ahora podemos aplicar el Lema 3.6 y convertir la parte de  $\mathcal{M}_2$  dentro de  $SP'$  a un abanico  $\mathcal{M}'_2$ . Como ese abanico sólo puede cortar una vez a  $O$ , puedo hacer un giro de esa

arista y así obtener una  $m$ -agonalización de  $S$ ,  $\mathcal{M}_2''$ , que contenga  $O$ . Quitamos  $O$  de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2''$ , el conjunto que nos queda debe conservar los  $k$  colores por  $b$ ), entonces podemos aplicar Hipótesis de Inducción e ir de una  $m$ -agonalización a cualquier otra (ver figura 3.14). Entonces el camino de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  queda así:  $\mathcal{M}_2 \leftrightarrow \mathcal{M}_2' \leftrightarrow \mathcal{M}_2'' \leftrightarrow \mathcal{M}_1$ .

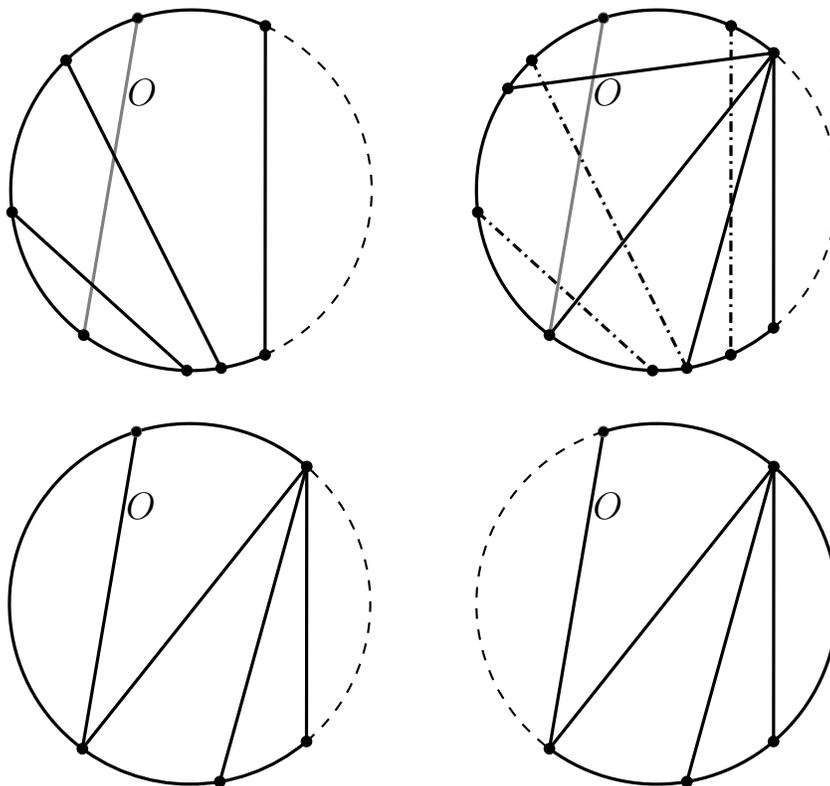


Figura 3.14: Cortando la oreja  $O$  cuando  $SP$  no tiene todos los colores. Las diagonales en negro indican los cambios sufridos por  $\mathcal{M}_2$ .

- **SÍ**  $\Rightarrow$  ¿Es  $SP = S$ ?
- **NO**  $\Rightarrow$  Consideremos  $SP'$  como  $SP$  con la oreja  $O$  cortada.  $SP'$  debe tener los  $k$  colores por  $b$ ), entonces por el Teorema 3.3 podemos obtener una  $m$ -agonalización  $\mathcal{M}_3$  de  $SP'$ .  $\mathcal{M}_3 \cup O$   $m$ -agonaliza  $SP$ . Como  $S \neq SP$  y tiene todos los colores, entonces podemos aplicar Hipótesis de Inducción para llevar la parte de  $\mathcal{M}_2$  en  $SP$  a

$\mathcal{M}_3$ , obteniendo una  $m$ -agonalización de  $S$ ,  $\mathcal{M}'_2$ , que contiene  $O$ . Podemos cortar  $O$  de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}'_2$ , por  $b$ ) podemos aplicar de nuevo Hipótesis de Inducción, y terminar. Entonces el camino de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  queda así:  $\mathcal{M}_2 \leftrightarrow \mathcal{M}'_2 \leftrightarrow \mathcal{M}_1$ .

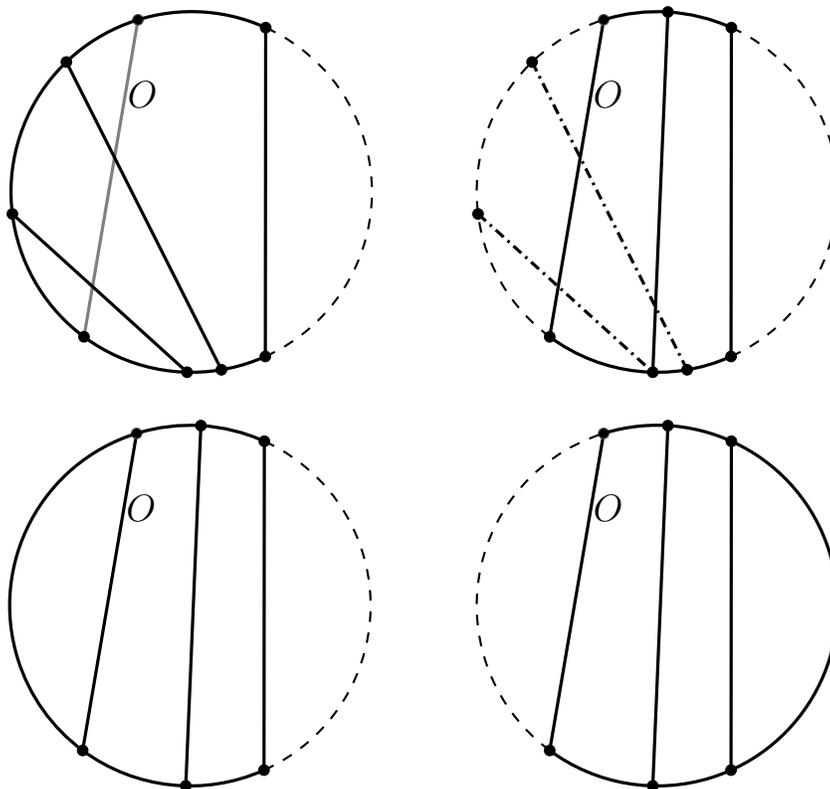


Figura 3.15: Cortando la oreja  $O$  cuando  $SP \neq S$  y tiene todos los colores. Las diagonales en negro indican los cambios sufridos por  $\mathcal{M}_2$ .

- **SÍ**  $\Rightarrow$  Cambio de oreja.

Cuando decimos cambio de oreja, significa que intentemos hacer lo que hicimos con  $O$ , pero con las demás orejas de  $\mathcal{M}_1$ , y si es necesario con las orejas de  $\mathcal{M}_2$ . En el caso límite, todas las orejas de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  obtuvieron **SÍ** en la última pregunta. En ese caso podemos deducir que: toda diagonal de  $\mathcal{M}_1$  intersecta a toda oreja de  $\mathcal{M}_2$  y toda diagonal de  $\mathcal{M}_2$  intersecta a toda oreja de  $\mathcal{M}_1$ . Como una diagonal de una  $m$ -agonalización sólo puede intersectar

a dos orejas de la otra  $m$ -agonalización, entonces deducimos que tanto  $\mathcal{M}_1$  como  $\mathcal{M}_2$  tienen exactamente dos orejas. Estas condiciones sólo se pueden cumplir cuando  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  forman una configuración tipo *pelota de basketball* (ver figura 3.16), que sólo se puede dar cuando las  $m$ -agonalizaciones de  $S$  tienen dos diagonales ( $r = 2$ ).

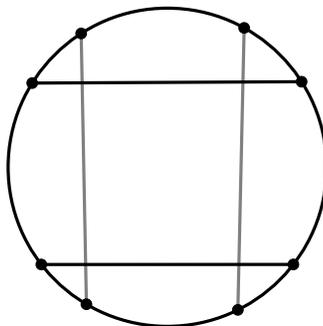


Figura 3.16:  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  en configuración tipo *pelota de basketball*.

Las condiciones sólo se pueden dar con  $r = 2$ , porque en el caso  $r > 2$  tendríamos una situación como la expuesta en la figura 3.17 ( $r = 3$ ). En este caso tenemos dos  $m$ -ágonos con todos sus vértices dentro de dos orejas, esto supone que las dos orejas tienen al menos  $2m + 2$  puntos, demasiados para los  $2m$  puntos que tienen.

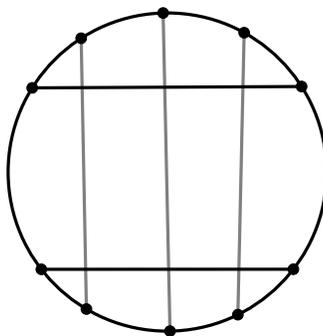


Figura 3.17: Caso imposible.

Por tanto basta con demostrar que se puede ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  en la *pelota de basketball*, cosa que haremos más adelante. La dificultad radica en que

en esta configuración ninguna de las diagonales de  $\mathcal{M}_1$  puede pasar a una de  $\mathcal{M}_2$  mediante un sólo giro de arista, y viceversa.

$\therefore$  la Hipótesis de Inducción vale para conjuntos  $k$ -coloreados con  $d + 1$  diagonales.

$\therefore G_{m,k}(S)$  es conexa cuando  $k > m$ .

$\therefore$  Como tomamos cualquier conjunto  $S$  de tamaño  $n$  tenemos:  $G_{m,k}(n)$  es conexa cuando  $k > m$ .  $\square$

### Pelota de Basquetball

Para completar la demostración del Teorema 3.7 sólo falta demostrar que dadas dos  $m$ -agonalizaciones en configuración tipo pelota de basquetball se puede ir de una a otra mediante giros de arista, teniendo como hipótesis que  $k > m$ . Para eso necesitamos definir algunos conceptos previos.

Tomando los puntos de  $S$  como vértices y las diagonales como aristas podemos definir lo que sigue:

**Definición 3.4** *Dado un punto  $u$  en  $S$  definimos la gráfica  $CD_{u,m}(S) = (V, E)$ , que llamaremos **ciclo de diagonales de  $u$  con respecto a  $m$** , determinando inductivamente  $V$  y  $E$  de la siguiente forma:*

- $u \in V$ .
- $\forall v \in V$  tenemos que  $w$  también está en  $V$ , donde  $w$  es el punto que se encuentra a distancia  $m$  de  $v$  en  $S$ , a favor de las manecillas del reloj. Además de que  $\overline{vw} \in E$ .

Toma  $CD_{u,m}(S) = (V, E)$ . Si  $|V| > 2$  entonces todo punto en  $V$  tiene grado dos, debido a que cada punto tiene un “predecesor” y un “sucesor” a distancia  $m$ , en el sentido de las manecillas del reloj, esto significa que  $CD_{u,m}(S)$  es en efecto un ciclo. Para todo punto  $v$  en  $V$  tenemos que  $CD_{u,m}(S) = CD_{v,m}(S)$ . Además de que  $V$  puede no ser igual a  $S$ , con lo cual pueden ser necesarios varios ciclos de diagonales para cubrir todo  $S$ . Ver figura 3.18.

Ahora tomemos  $B$  un conjunto de puntos  $k$ -coloreado, de tamaño  $n = m + 2(m - 2) = 3m - 4$ , en posición convexa y con todas las aristas de  $CONV(S)$  bicromáticas (que son algunas de las características de la pelota

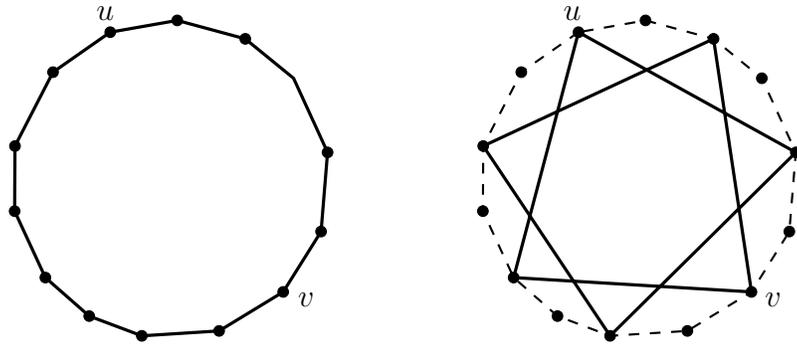


Figura 3.18: El ciclo de diagonales  $CD_{u,5}(S)$ , igual al ciclo  $CD_{v,5}(S)$ .

de basquetball). Y nos preguntamos cómo es  $CD_{u,m}(B) = (V, E)$  para algún  $u \in B$ .

Observemos que  $V = B$ , esto es debido a la cardinalidad de  $B$ . Si partimos desde  $u$ , avanzamos  $m$  puntos y luego otros  $m$ , en total habremos avanzado  $2m - 1$  puntos (el  $-1$  es porque hay un punto que contamos doble vez), osea que para el siguiente avance nos quedan sólo  $m - 3$  puntos de  $B$ , esto indica que le daremos una “vuelta” completa a  $B$  y caeremos en el punto  $v$  contiguo a  $u$ , en el sentido de las manecillas del reloj (ver figura 3.19). O sea que en cada “vuelta” de  $CD_{u,m}(B)$  empezamos la siguiente vuelta en el punto contiguo de dónde empezamos la anterior, cubriendo así todos los vértices de  $B$ .

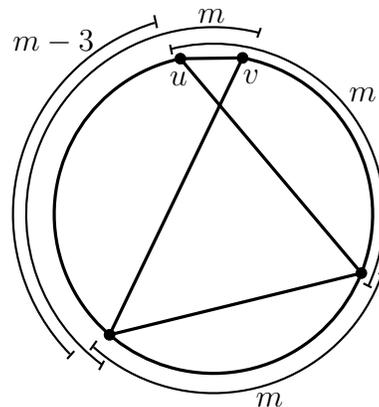


Figura 3.19: Empezando en  $u$  llegamos a  $v$  al completar una “vuelta” a  $B$ .

Usando los ciclos de diagonales intentaremos encontrar el número de diagonales admisibles del conjunto  $B$  (diagonales bicromáticas que forman  $m$ -ángulos en  $B$ ).

**Lema 3.8** *El conjunto  $B$  tiene al menos  $k$  diagonales admisibles.*

**Demostración.-**

Sea  $u \in B$ . Cualquier ciclo de diagonales está formado de diagonales que pueden ser o no bicromáticas (admisibles), como el ciclo  $CD_{u,m}(B)$  contiene todos los puntos de  $B$ , también contiene todas las diagonales que forman  $m$ -ángulos en  $B$  (admisibles y no admisibles).

$CD_{u,m}(B)$  es un ciclo con vértices  $k$ -coloreados que contiene todos los puntos de  $B$ , así que si en ese ciclo pasamos de un punto de color  $i$  a un punto de color  $j$  ( $i \neq j$ ), en  $B$  se refleja con una diagonal admisible.

En el peor de los casos,  $CD_{u,m}(B)$  contiene la menor cantidad posible de cambios de color, esta situación la tenemos cuando en  $CD_{u,m}(B)$  los puntos de cada color están contiguos (ver figura 3.20).

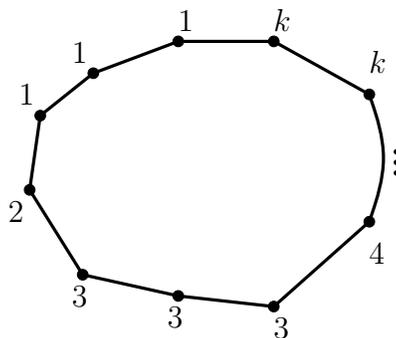


Figura 3.20: Ejemplo de ciclo  $CD_{u,m}(B)$  que minimiza los cambios de color.

Como al menos debemos cambiar de color una vez por cada color, entonces  $CD_{u,m}(B)$  tiene al menos  $k$  cambios de color, implicando que  $B$  tiene al menos  $k$  diagonales admisibles.  $\square$

La cantidad de diagonales admisibles la usaremos para demostrar que siempre quedan diagonales admisibles que ayudan a formar giros en la pelota de basquetball.

**Lema 3.9** Si  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  son  $m$ -agonalizaciones de  $B$  que se intersectan en forma de balón de basquetball y  $k > m$ , entonces se puede ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  por medio de giros de arista.

**Demostración.-** Debemos suponer de antemano que  $B$  no tiene clases cromáticas de un punto, ni orejas admisibles que separen una clase cromática, pues de lo contrario usaríamos los Lemas 3.5 y 3.6 para ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$ . Más aún, vamos a suponer que  $B$  no tiene ninguna  $m$ -agonalización de tipo abanico, pues de lo contrario podríamos hacer uso del Lema 3.4 e ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$ .

Llamemos  $a, b, c, d, e, f, g$  y  $h$  a las regiones de puntos que se forman entre las diagonales de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ , no incluyendo en ninguna de estas regiones los puntos de las diagonales de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ , ver la figura 3.21 para ver la distribución. A las regiones  $a, b, c$  y  $d$  les llamaremos esquinas, y a las regiones  $e, f, g$  y  $h$  les llamaremos costados.

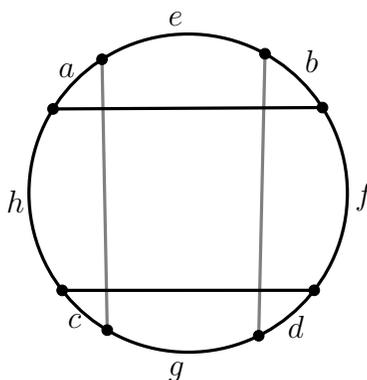


Figura 3.21: Regiones definidas por  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ .

Como las regiones están definidas por medio de los  $m$ -ágonos de  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ , entonces después de algunos cálculos podemos deducir lo siguiente:

- $g = a + b.$
- $e = c + d.$
- $f = a + c.$
- $h = b + d.$

$$\blacksquare a + b + c + d = m - 4.$$

Debido a la distribución de las regiones, las diagonales que forman  $m$ -ángulos no pueden ir de esquina a esquina, ni formarse entre puntos de  $e$  y  $g$ , ni entre puntos de  $f$  y  $h$ . O sea que las diagonales que forman  $m$ -ángulos van de esquina a costado o de costado a costado.

Si existe una diagonal  $L$  admisible entre dos costados, entonces  $L$  intersecta a sólo una diagonal de  $\mathcal{M}_1$  y una diagonal de  $\mathcal{M}_2$ , así que podemos cambiar dicha diagonal de  $\mathcal{M}_2$  por  $L$ , cambiar la otra diagonal de  $\mathcal{M}_2$  por la diagonal de  $\mathcal{M}_1$  que no era intersectada por  $L$  y finalmente cambiar la diagonal  $L$  en  $\mathcal{M}_2$  por la diagonal de  $\mathcal{M}_1$  que intersectaba  $L$  (ver figura 3.22). Lo anterior nos daría la serie de giros para pasar de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  y habríamos acabado.

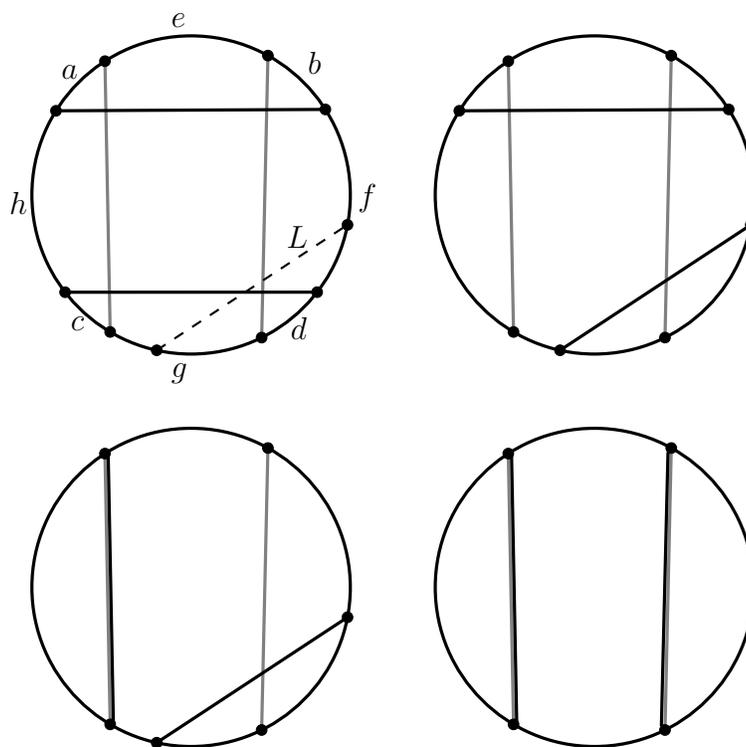


Figura 3.22: Pasando de  $\mathcal{M}_2$  a  $\mathcal{M}_1$  si existe  $L$  admisible entre costados.

Por el Lema 3.8 sabemos que  $B$  tiene al menos  $k$  diagonales admisibles,

$\mathcal{M}_1$  junto con  $\mathcal{M}_2$  están utilizando cuatro de esas diagonales, o sea que nos sobran al menos  $k - 4$  diagonales admisibles.

Como una diagonal admisible entre costados es buena para nosotros, entonces el peor de los casos se da cuando maximizamos la cantidad de diagonales admisibles que van de esquina a costado. Dichas diagonales son malas porque intersectan a las dos diagonales de  $\mathcal{M}_1$  o de  $\mathcal{M}_2$ , y si hiciéramos intercambio con alguna de ellas seguiríamos teniendo una configuración tipo pelota de basquetball (ver figura 3.23).

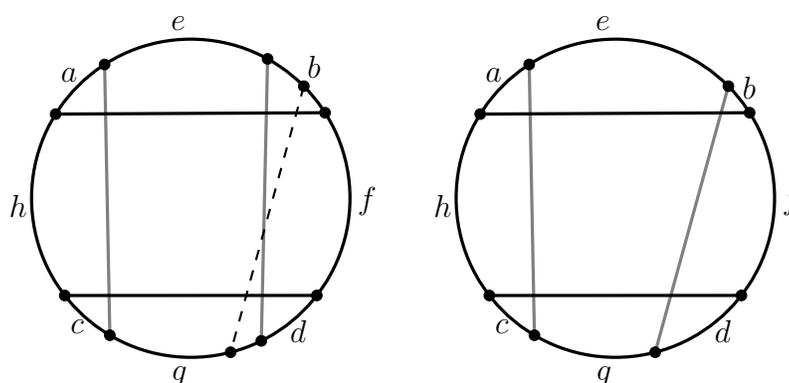


Figura 3.23: Intercambio por una diagonal que va de esquina a costado.

Como  $B$  no tiene  $m$ -agonalizaciones abanico, entonces de cada punto en esquina sólo puede salir una diagonal válida. Por otro lado, como  $a+b+c+d = m - 4$ , entonces la máxima cantidad de diagonales admisibles de esquina a costado es  $m - 4$ . Nos sobran al menos  $k - 4$  diagonales admisibles en  $B$  y ocupamos  $m - 4$ , como  $k > m$ , entonces todavía tenemos al menos una diagonal admisible que debe ir de costado a costado y esa es la que podemos usar para ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$ .  $\square$

Con la demostración del Lema 3.9 hemos completado satisfactoriamente la demostración del Teorema 3.7.

### 3.2.2. Otros valores de $k$ y $m$

Consideremos ahora la conexidad de  $G_{m,k}(n)$  para los demás valores posibles de  $k$  y  $m$ .

**Proposición 3.10** *Si  $k < m$  entonces  $G_{m,k}(n)$  es vacío o no conexo.*

**Demostración.-** La gráfica  $G_{m,k}(n)$  es vacía si no existe  $m$ -agonalización de  $S$ , como por ejemplo el lado derecho de la figura 3.9 con  $k = 3$  y  $m = 4$ .

Puede ser no conexa como en la figura 3.24 con  $k = 5$  y  $m = 6$ , aquí se muestran las dos  $m$ -agonalizaciones de este conjunto de puntos, pero no se puede ir de una a otra por medio de giros, pues la  $m$ -agonalización de la izquierda no puede girar ninguna de sus aristas.

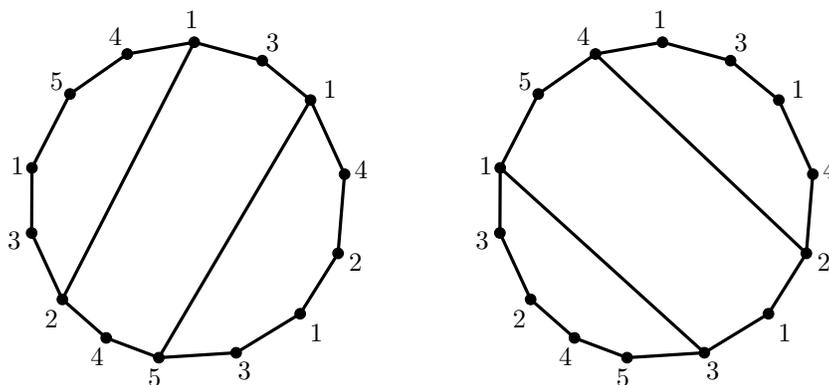


Figura 3.24: No se puede ir de una  $m$ -agonalización a la otra ( $k < m$ ).

□

**Proposición 3.11** *Si  $k = m$  entonces  $G_{m,k}(n)$  puede ser no conexa.*

**Demostración.-** Toma  $k = m = 4$ , en la figura 3.25 se exhibe un conjunto con dos  $m$ -agonalizaciones únicas, pero no se puede pasar de una a otra pues ninguna de ellas puede efectuar un giro de arista.

□

Así pues finalizamos esta sección conjuntando el Teorema 3.7 y las proposiciones 3.10 y 3.11 en el siguiente teorema:

**Teorema 3.12** *Para conjuntos  $k$ -coloreados de  $n$  puntos en posición convexa la gráfica  $G_{m,k}(n)$  cumple lo siguiente:*

- a) *Si  $k < m$  puede ser vacía o no conexa.*
- b) *Si  $k = m$  puede ser no conexa.*
- c) *Si  $k > m$  es siempre conexa.*

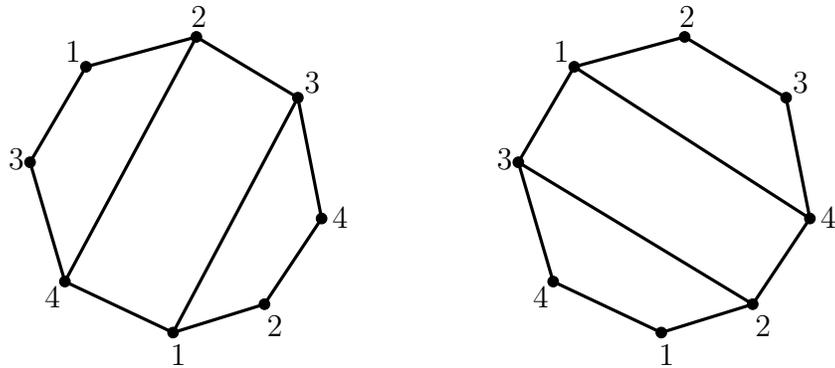


Figura 3.25:  $m$ -agonalizaciones que no pueden llevarse una a la otra ( $k = m$ ).

Con lo cual ya tenemos bien categorizada la conexidad de  $G_{m,k}(n)$ , la gráfica de  $m$ -agonalizaciones  $k$ -coloreadas de  $n$  puntos en posición convexa.

# Capítulo 4

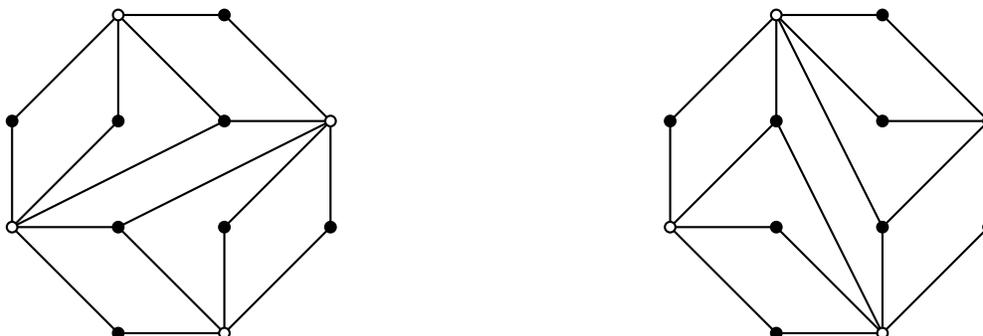
## Cuadrilaterizaciones con $k$ colores

En este capítulo mostraremos algunos resultados obtenidos para el caso particular en que  $m = 4$ , o sea cuando intentamos cuadrilaterizar conjuntos  $k$ -coloreados. Mostraremos que la gráfica  $G_{4,2}(T)$  de un conjunto  $T$  bicolorado puede ser desconexa, incluso si los puntos de  $T$  se encuentran en posición general. También mostraremos que hay configuraciones de puntos 3-coloreadas que no pueden ser cuadrilaterizadas, aún si agregamos puntos extra (puntos Steiner) a nuestro conjunto.

### 4.1. Disconexidad de la gráfica de cuadrilaterizaciones bicoloradas

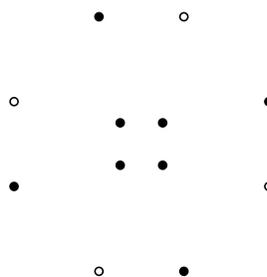
Como se dijo en el capítulo 2, Cortés, *et al.* en [12] encontraron una configuración de puntos bicolorados  $X$ , para la cual la gráfica  $G_{4,2}(X)$  es desconexa, pero el problema con esta configuración es que los puntos no se encuentran en posición general. Justamente el hecho de que  $X$  no está en posición general, es la base del argumento para decir que  $G_{4,2}(X)$  es desconexa, ya que ninguna de las dos cuadrilaterizaciones expuestas en la figura 4.1 tiene giros de arista, pues los posibles giros están bloqueados por la colinealidad de los puntos.

En este tipo de casos, cuando una configuración tiene una propiedad, pero no está en posición general, lo que generalmente se intenta hacer es perturbar dicha configuración de forma mínima (infinitesimal si se desea), de forma

Figura 4.1: Únicas cuadrilaterizaciones del conjunto  $X$ .

que ya se encuentre en posición general, pero que vista a grandes rasgos siga siendo la misma configuración. El problema de  $X$  es que al hacer el procedimiento anterior y obtener  $X'$ , en número de cuadrilaterizaciones de  $X'$  y de giros entre ellas prácticamente se disparaba, de hecho no queda totalmente claro el número de cuadrilaterizaciones que tendría  $X'$ , y queda menos claro aún que la propiedad de desconexidad de  $G_{4,2}(X')$  se mantenga. Estos factores provocaron que no se hiciera un análisis exhaustivo sobre las cuadrilaterizaciones de  $X'$ , para probar la desconexidad de  $G_{4,2}(X')$  (esto nos fue dicho directamente por los autores de [12]).

A continuación presentamos una configuración de puntos  $W$ , que es similar a la configuración  $X$ , pero en posición general, y cuya gráfica de cuadrilaterizaciones bicromáticas  $G_{4,2}(W)$  es desconexa (ver figura 4.2).

Figura 4.2: La configuración  $W$ .

La manera en que se mostrará que  $G_{4,2}(W)$  es desconexa sera tomar una

cuadrilaterización bicromática de  $W$  en particular  $\mathcal{M}_1$ , generar exhaustivamente todas las cuadrilaterizaciones a las que se puede ir desde  $\mathcal{M}_1$  por giros de arista, y finalmente observar que entre ellas no se encuentra otra cuadrilaterización particular  $\mathcal{M}_2$ . En la figura 4.3 podemos ver las cuadrilaterizaciones  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  que tomaremos.

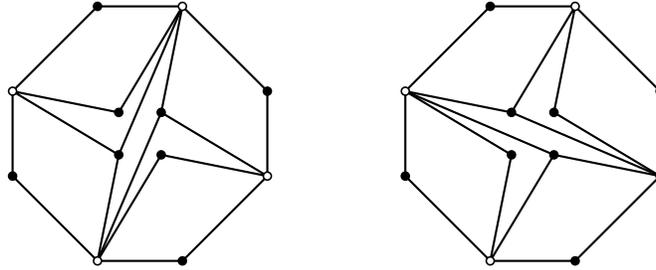
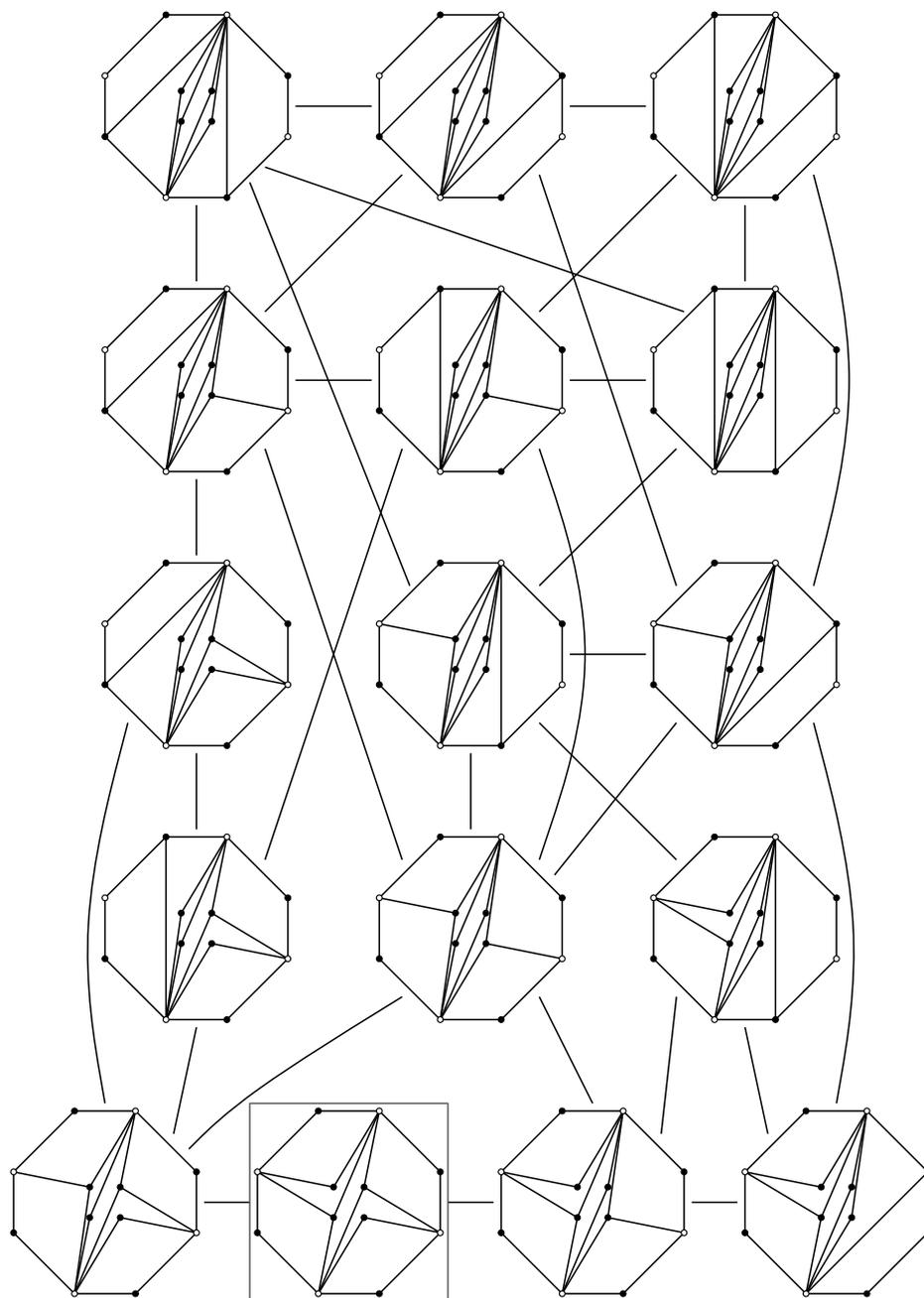
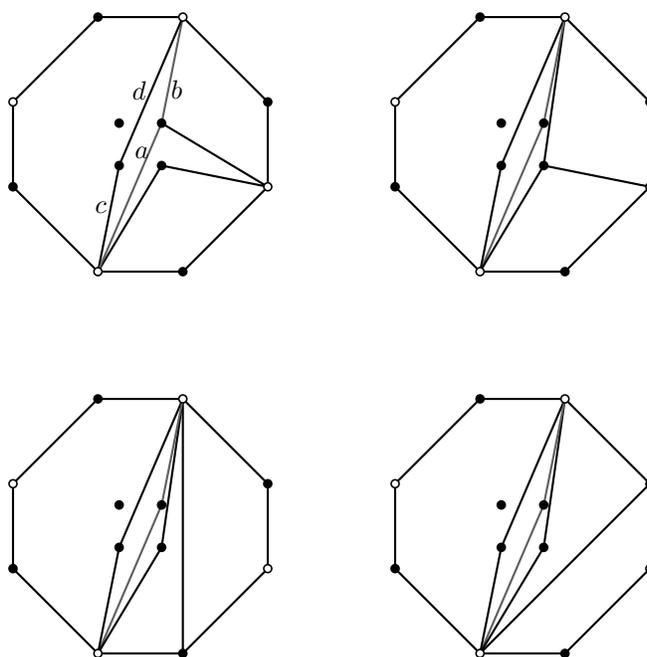


Figura 4.3: Cuadrilaterizaciones de  $W$ :  $\mathcal{M}_1$  (izquierda) y  $\mathcal{M}_2$  (derecha).

En la figura 4.4 podemos ver todas las cuadrilaterizaciones a las que se puede llevar a  $\mathcal{M}_1$  por medio de giros de arista, una curva entre dos cuadrilaterizaciones nos indica que se puede ir de una a otra con un sólo giro de arista. Como podemos observar  $\mathcal{M}_2$  no está entre estas cuadrilaterizaciones.

La razón por la que no se puede ir de  $\mathcal{M}_1$  a  $\mathcal{M}_2$  es la siguiente: Toma el cuadrilátero central de  $\mathcal{M}_1$  y llama a sus aristas  $a, b, c$  y  $d$ , como se ve en la figura 4.5. Por debajo de la cadena  $a-b$  sólo existen cuatro formas diferentes de cuadrilaterizar. Observemos que en las cuatro formas tanto  $a$  como  $b$  no son girables, por tanto nunca pueden eliminarse. Como con  $b$  y  $c$  pasa algo similar que con  $a$  y  $b$ , entonces nunca podremos llegar a  $\mathcal{M}_2$  porque no contiene dicho cuadrilátero. Por otro lado, el hecho de que por debajo de la cadena  $a-b$  haya cuatro formas de cuadrilaterizar, y otras cuatro para la cadena  $b-c$ , nos confirma que en la figura 4.4 en efecto están todas las cuadrilaterizaciones a las que se puede llegar desde  $\mathcal{M}_1$ , pues serían las combinaciones de las cuadrilaterizaciones relacionadas con  $a-b$  contra las de  $b-c$ .

Figura 4.4: Cuadrilaterizaciones a las que se puede llegar desde  $\mathcal{M}_1$ .

Figura 4.5: Formas de cuadrilaterizar por debajo de la cadena  $a-b$ .

## 4.2. Cuadrilaterizaciones 3-coloreadas y puntos Steiner

En esta sección estudiaremos las cuadrilaterizaciones de conjuntos de puntos 3-coloreados y la imposibilidad de algunos conjuntos 3-coloreados de ser cuadrilaterizados.

Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, en posición general y 3-coloreado con colores  $\{1, 2, 3\}$ . En el capítulo 2 vimos que para que un conjunto de puntos sea cuadrilaterizable, entonces su envolvente convexa debe tener una cantidad par de vértices, a esta condición debemos agregar el factor de que, como  $P$  es 3-coloreado, todas las aristas de  $\text{CONV}(P)$  deben ser bicromática. A lo largo de esta sección, supondremos que nuestros conjuntos de puntos cumplen con estas condiciones.

Como se demostró en el capítulo 3, existen conjuntos de puntos 3-coloreados que no pueden ser cuadrilaterizados, como por ejemplo el mostrado en la figura 4.6, que a partir de este momento denominaremos como  $P_6$ .

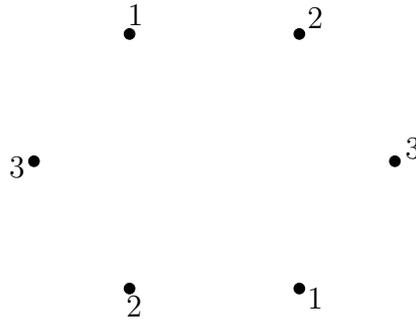


Figura 4.6: Conjunto  $P_6$  que no puede ser cuadrilaterizado.

En esta sección intentaremos dar solución al siguiente problema:

**Problema 1** *Si un conjunto 3-coloreado  $P$  no es cuadrilaterizable, entonces: ¿cuántos puntos Steiner coloreados debemos agregar a  $P$  para obtener una cuadrilaterización 3-coloreada del nuevo conjunto?*

De forma asombrosa, la respuesta a esta pregunta es que: existen conjuntos de puntos  $P$  tales que, no importando el número de Steiner que agreguemos al interior de  $\text{CONV}(P)$ , no es posible obtener una cuadrilaterización 3-coloreada.

Sea  $S$  un conjunto de puntos contenidos en el interior de  $\text{CONV}(P_6)$  (por ahora los colores de los puntos de  $S$  no son importantes). Supongamos por un momento que  $P = P_6 \cup S$  es un conjunto monocromático, y obtengamos una cuadrilaterización  $\mathcal{Q}$  de  $P$ . El que dicha cuadrilaterización existe fue demostrado en [7]. Ahora tomemos  $G$  como la gráfica cuyos vértices son  $P$  y de forma que dos vértices sean adyacentes si hay una arista de  $\mathcal{Q}$  que los une, una manera de ver esto es pensar que  $P$  es una forma de embeber  $G$  en el plano. Ver la figura 4.7.

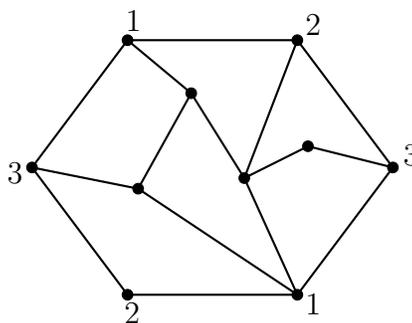


Figura 4.7: Una cuadrilaterización de  $P$  sin tomar en cuenta colores.

Con estos elementos podemos demostrar lo siguiente:

**Teorema 4.1** *En cualquier 3-coloración de  $G$  en la que los vértices de  $P_6$  en  $G$  reciban sus mismos colores, existe siempre una arista  $e$  de  $G$  tal que los dos vértices que une  $e$  son del mismo color.*

**Demostración.-** Consideremos una coloración de los vértices de  $G$  con colores  $\{1, 2, 3\}$ , no importando que vértices adyacentes reciban el mismo color, sólo que los vértices de  $P_6$  en  $G$  reciban sus colores originales. Tomemos  $H$  la gráfica dual de  $G$ , donde por cada cara de  $G$  hay un vértice en  $H$ , y por cada arista  $e$  de  $G$  hay una arista en  $H$  uniendo las caras de  $G$  que contienen a  $e$  en sus envolventes. Sea  $v_\infty$  el vértice de  $H$  que representa la cara no acotada de  $G$ . En general  $H$  tiene múltiples aristas, por ejemplo en la figura 4.8 se muestra el dual de la cuadrilaterización de la figura 4.7.

Definamos ahora una suma de los colores  $\{1, 2, 3\}$  como sigue:

$$i \oplus i = 0 \text{ con } i \in \{1, 2, 3\}, 1 \oplus 2 = 3, 1 \oplus 3 = 2, \text{ y } 2 \oplus 3 = 1$$

Ahora podemos colorear las aristas de  $H$  como sigue: una arista  $e$  de  $H$  que cruza una arista  $f$  de  $G$  cuyos vértices tienen colores  $i$  y  $j$  será coloreada de color  $i \oplus j$ . Ver lado derecho de la figura 4.8.

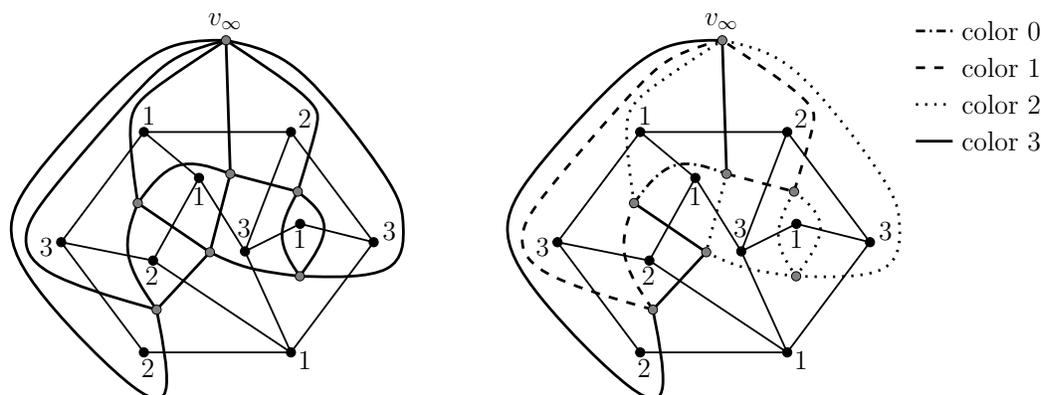


Figura 4.8: La gráfica  $H$  sin colorear (izquierda) y coloreada usando el operador  $\oplus$  (derecha).

Probaremos que siempre existe una arista de  $H$  cuyo color es 0, es decir, existe una arista de  $G$  cuyos vértices tienen el mismo color.

Supongamos que todas las aristas de  $G$  son bicromáticas, o sea tienen sus vértices de diferente color. Tomemos ahora  $Q_0$  un cuadrilátero de  $G$ . Se puede ver que sólo podemos tener uno de los siguientes casos:

- Las cuatro aristas de  $H$  que cruzan  $Q_0$  tienen todas el mismo color.
- Las cuatro aristas de  $H$  que cruzan  $Q_0$  tienen exactamente dos colores, digamos  $i$  y  $j$ , donde dos aristas son de color  $i$  y dos de color  $j$ . Incluso las curvas obtenidas al unir aristas del mismo color no se intersectan entre ellas, sólo se reúnen en el vértice que representa  $Q_0$  en  $H$ .

El primer caso se da cuando los vértices de  $Q_0$  reciben sólo dos colores, y el segundo cuando reciben tres colores diferentes (ver figura 4.9).

Estamos listos para finalizar la demostración. Sea  $H_i$  la subgráfica de  $H$  conteniendo todas las aristas de  $H$  de color  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Gracias a los dos casos expuestos antes, podemos notar que todos los vértices de  $H_i$  tienen grado par, grado 2 ó 4. Además, por la coloración de  $P_6$ , la gráfica

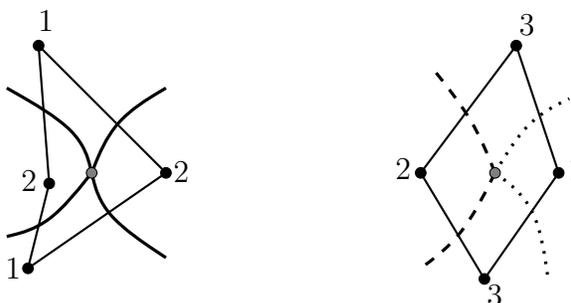


Figura 4.9: Ejemplos de los dos casos posibles de un cuadrilátero de  $G$ .

$H_i$  contiene al vértice  $v_\infty$ . Más aún, si  $C_i$  y  $C_j$  son curvas cerradas de  $H_i$  y  $H_j$  respectivamente, entonces  $C_i$  y  $C_j$  no se intersectan en el interior de  $\text{CONV}(P)$ , por la observación del segundo caso de cuadrilátero. Como todos los vértices de  $H_1$  y  $H_2$  tiene grado par, existe un ciclo en cada una de ellas conteniendo  $v_\infty$ ; llamemos estos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Como  $C_1$  y  $C_2$  deben cruzarse en  $v_\infty$ , entonces por el Teorema de la Curva de Jordan [21] deben cruzarse otra vez. Sin embargo el segundo cruce de  $C_1$  y  $C_2$  debe ser en el interior de  $\text{CONV}(P)$ , y esto contradice lo que habíamos expuesto antes.

Por tanto el resultado se sigue por reducción al absurdo.  $\square$

Haciendo uso del Teorema 4.1 podemos demostrar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 4.2** *Existe uno conjunto 3-coloreado  $P$  (a saber  $P_6$ ), al cual no es posible agregarle otro conjunto de puntos 3-coloreados  $S$  al interior de  $\text{CONV}(P)$ , de forma que  $P \cup S$  sea cuadrilaterizable (sin importar el número, posición y color de los elementos de  $S$ ).*

**Demostración.**- Supongamos que hay un conjunto 3-coloreado  $S$  contenido en el interior de  $\text{CONV}(P_6)$  y tal que  $P_6 \cup S$  es cuadrilaterizable (de forma bien coloreada). Sea  $\mathcal{Q}$  una cuadrilaterización bien coloreada de  $P_6 \cup S$ . Entonces la gráfica  $G$  generada por  $\mathcal{Q}$ , cuyos vértices son  $P_6 \cup S$ , es 3-coloreable, contradiciendo el Teorema 4.1.

Por tanto el resultado se sigue por reducción al absurdo.  $\square$

Gracias al Teorema 4.2 sabemos que hay conjuntos que no tiene cuadrilaterización 3-coloreada, no importando el número de puntos Steiner que agreguemos; también podemos observar que el que un conjunto  $P$  tenga o no una cuadrilaterización 3-coloreada depende de manera importante de  $\text{CONV}(P)$ . La primera de estas observaciones contradice la intuición, debido a que un conjunto 2-coloreado siempre puede ser completado a una cuadrilaterización bicromática al agregar puntos Steiner [2, 3]; así que uno podría pensar que el uso de otro color aumentaría el grado de libertad para formar cuadriláteros, pero no fue así.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este capítulo daremos las conclusiones a las que llegamos después de este trabajo de investigación. Hablaremos de los alcances y deficiencias de nuestros resultados, haremos comparaciones con resultados anteriores, daremos posibles aplicaciones prácticas de nuestros resultados, y finalmente, expondremos conjeturas y posibles líneas de investigación que podrían abordarse en un futuro.

### 5.1. Existencia de la $m$ -agonalización.

Como vimos en el capítulo 2, el trabajo realizado en este tema es escaso, y nuestra aportación en el rubro de existencia de una  $m$ -agonalización es el Teorema 3.3.

El Teorema 3.3 dista de ser una caracterización de todos los conjuntos de puntos  $k$ -coloreadas que aceptan una  $m$ -agonalización. Si bien dicho teorema puntualiza valores de  $k$  y  $m$  para los cuales hay una  $m$ -agonalización, sólo lo hace para conjuntos en posición convexa. Sería muy interesante conseguir un resultado como el de Bose, *et al.* [7] en el que se caracterizan de forma precisa todos los conjuntos de puntos que aceptan cuadrilaterizaciones.

De cualquier forma, la importancia del Teorema 3.3 radica en que es, hasta donde sabemos, el primero en encontrar una familia de conjuntos  $k$ -coloreados  $m$ -agonalizables, para valores variables de  $m$ ,  $k$  y  $n$ , y con la única restricción de que  $k \geq m$ . El resultado más próximo pertenece a Cortés, *et al.* en [12], en el que se describe una familia de conjuntos bicromáticos que pueden ser cuadrilaterizados.

## 5.2. Gráfica $G_{m,k}(n)$ .

A diferencia del del rubro anterior, la investigación previa en este rubro es casi nula cuando se agrega el factor de los colores. Por lo anterior el resultado que obtuvimos en este rubro es sin duda el más ambicioso de toda la tesis (Teorema 3.12). Basándonos en el Teorema 3.12, obtenemos una familia de conjuntos cuya gráfica  $G_{m,k}(n)$  es conexa, para valores variables de  $m$ ,  $k$  y  $n$ , cuya única restricción es  $k > m$ . Este resultado significa que no importando cómo se  $m$ -agonalize un elemento de esa familia, siempre se puede ir y venir de cualquier  $m$ -agonalización por medio de giros de arista..

Hasta donde sabemos, el único resultado parecido también se encuentra en [12] y es sólo un ejemplo de un conjunto  $T$  cuya gráfica  $G_{4,2}(T)$  es no conexa. Si bien nuestro resultado sólo funciona para puntos en posición convexa, significa un gran avance en comparación con el trabajo previo.

## 5.3. Cuadrilaterizaciones 2 y 3-coloreadas

En el capítulo 4 se presentaron dos resultados acerca de las cuadrilaterizaciones cuando los puntos tienen colores. Aunque ambos resultados sólo muestran la existencia de conjuntos particulares que cumplen cierta propiedad, su importancia radica en que se responden a interrogantes en las que nadie podía dar por segura una respuesta, ni la respuesta afirmativa, ni la negativa. Dichas interrogantes son:

- ¿Hay conjuntos en posición general cuya gráfica de cuadrilaterizaciones bicromáticas sea no conexa?
- ¿Siempre se puede cuadrilaterizar agregando puntos Steiner no importando la cantidad de colores?

Para la primera pregunta, la mayoría de los que han trabajado en el problema, conjeturaban que la respuesta era afirmativa, aunque no podían estar seguros hasta que no se encontrara al menos uno de dichos conjuntos. Ahora ya se puede asegurar, fuera de dudas, que la respuesta a dicha pregunta es: **SÍ**.

Aunque la opinión general sobre la segunda pregunta era la respuesta afirmativa, ahora podemos descartarla, ya que mostramos la existencia de un conjunto que no tiene cuadrilaterización 3-coloreada, aún permitiendo el uso de puntos Steiner.

## 5.4. Aplicaciones

Debido a que los resultados obtenidos en este trabajo están muy ligados a las áreas de Algoritmos, Geometría Computacional y Teoría de Gráficas, las posibles aplicaciones son innumerables. Lo anterior es debido a el nivel de abstracción de los resultados, ya que así son aterrizables a diversas áreas del conocimiento.

Un ejemplo son los estudios recientes en los métodos de elemento finito ([4] y [1]) y en la interpolación de datos dispersos ([18], [10] y [19]), en los que se hace uso de particiones en cuadriláteros y triángulos. En dichos estudios se demuestra que en algunas ocasiones es preferible el uso de cuadriláteros en lugar de triángulos, esto nos indica que posiblemente el uso de  $m$ -ágonos con  $m > 4$  pueda mejorar sus resultados.

El uso de colores se puede relacionar con categorías, así que mediante su uso y partición en  $m$ -ágonos podemos dar una organización especial a esas categorías.

En el ejemplo presentado en el capítulo 1, relacionado con redes de computadoras y diversos tipos de servidor, ahora con la gráfica  $G_{m,k}(n)$  podríamos analizar las diversas topologías que puede tener la red, así como intercambiar conexiones y saber que se siguen conservando ciertas propiedades. Si los enlaces fueran inalámbricos se podría fácilmente intercambiar conexiones entre servidores hasta encontrar la más adecuada, a sabiendas de que la topología de la red se mantiene.

## 5.5. A futuro

Sin duda los resultados obtenidos en esta investigación son un gran avance en el tema, pero mantienen y crean muchos problemas en los cuales trabajar a futuro.

Un ejemplo es crear un algoritmo que aproveche estos resultados y que verifique si un conjunto  $k$ -coloreado cualquiera es  $m$ -agonalizable.

Otro trabajo a futuro sería continuar la investigación hecha en [2, 3, 16, 17] en intentar  $m$ -agonalizar conjuntos  $k$ -coloreados agregando puntos Steiner, ya sea que se exijan todos los  $m$ -ágonos convexos o no.

Sin embargo, el principal objetivo a futuro sigue siendo el intentar caracterizar todos los conjuntos  $k$ -coloreados que pueden ser particionados en  $m$ -ágonos, no importando si están es posición convexa o no.

# Bibliografía

- [1] D. J. Allman. *A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, 1988, pag. 717 – 730.
- [2] V.M. Álvarez., T. Sakai, y J. Urrutia *Bichromatic Quadrangulations with Steiner Points*. Graphs and Combinatorics, Vol. 23, 85 – 98, 2007
- [3] V.M. Álvarez. *Gráficas Geométricas Sobre Conjuntos de Puntos Coloreados*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Julio 2005.
- [4] S. Benzley, E. Perry, K. Merkley, B. Clark, y K. Sjaardema. *A comparison of all-hexahedral and all-tetrahedral finite element meshes for elastic and ecto-plastic analysis*. 4th International Meshing Roundtable, 1995, pag. 179 – 191.
- [5] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, y O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, segunda edición, 2000.
- [6] J. Bown. *Injection Mouldings of Plastic Components*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [7] P. Bose, y G. Toussaint. *No Quadrangulation is Extremely Odd*. Technical report #95-03, Dept. of Computer Science, University of British Columbia, 1995.
- [8] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, y V. Sacristán. *Small Convex Quadrangulations of Point Sets*. Algorithmica, Volumen 38, Número 2, 2003, pag. 317 – 339.

- 
- [9] V. Chvátal. *A combinatorial theorem in plane geometry*. J. Combin. Theory Ser. B, Vol. 18, 1975, pag. 39 – 41.
- [10] C. K. Chui, y M. J. Lai. *Filing polygonal holes using  $C^1$  cubic triangular spline patches*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 17, 2000, pag. 297 – 307.
- [11] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, y R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, McGraw-Hill, 1990.
- [12] C. Cortés, A. Márquez, A. Ñakamoto, y J. Valenzuela. *Quadrangulations and 2-colorations*. 21th European Workshop on Computational Geometry, 2005.
- [13] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, segunda edición, 2000.
- [14] H. Everett, W. Lenhart, M. Overmars, T. Shermer, y J. Urrutia. *Strictly convex quadrilateralizations of polygons*. Proc. of the 4th Canadian Conference on Computational Geometry, 1992, pag. 77 – 83.
- [15] S. Fisk. *A short proof of Chvátal's watchman theorem* J. Combin. Theory Ser. B, Vol. 24, 1978, pag. 374.
- [16] M.A. Heredia, y J. Urrutia. *On convex quadrangulations of point sets on the plane*. Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, Lecture Notes in Computer Science 4381, Proc. CJCDCGCGT 2005, pag. 38–46, 2007.
- [17] M.A. Heredia. *Cuadrilaterizaciones convexas con pocos puntos Steiner Tesis de licenciatura*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Julio 2005.
- [18] M. J. Lai. *Convex preserving scattered data interpolation using bivariate  $C^1$  cubic splines*. Journal of Comput. Applied Math., Vol. 119, 2000, pag. 249 – 258.
- [19] M. J. Lai, y L. L. Schumaker. *Scattered data interpolation using  $C^2$  supersplines of degree six*. SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 34(3), 1997, pag. 905 – 921.
- [20] G. Meisters. *Polygons have ears*. Amer. Math. Monthly, Vol. 82, 1975, pag. 648 – 651.

- 
- [21] F. P. Preparata, y M. I. Shamos *Computational Geometry. An Introduction*. Springer-Verlag, 1985
  - [22] G. Toussaint. *Quadrangulations of Planar Sets*. Proc. of 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS'95), Agosto 16-18, 1995, pag. 218 – 227.
  - [23] J. Urrutia. *Some Open Problems*. LATIN 2002, Cancún, México Abril 3-6. Lecture Notes in Computer Science 2286 (2002), pag. 4 – 11.
  - [24] J. Urrutia. *Routing with guaranteed delivery in geometric and wireless networks*. En I. Stojmenovic, editor, “Handbook of Wireless Networks and Mobile Computing”, Cap. 18, pag. 393 – 406. John Wiley & Sons, 2002.