UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA DERIVADA

R E P O R T E D E S E M I N A R I O

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JOSÉ ROBERTO BENHUMEA SANTIAGO

TUTOR
M. EN C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2007

INDICE:

INTRODUCCIÓN:

La derivada y toda la teoría que existe alrededor de ella es un tema de importancia relevante dentro del desarrollo del Cálculo Infinitesimal, de tal manera que a la rama que lo trata se le denomina Cálculo Diferencial.

La diferenciación y el desarrollo de los temas afines a ella tienen su origen a partir de los problemas de la recta tangente a una curva –tratado desde la antigua Grecia, en particular por Arquímedes-, el de la velocidad instantánea de un móvil, el cual desembocaría en el de la razón de cambio instantánea, problemas que se desarrollan a partir del siglo XV de nuestra era. Más adelante, Gottfried Leibnitz e Isaac Newton establecen las bases del Cálculo Diferencial.

Sin embargo, la teoría referente a la derivada goza de vigencia en nuestros días debido a las aplicaciones que se efectúan del tema en diversas disciplinas, tanto en las ciencias como en aquellas que no lo son. Además, es parte importante en el desarrollo de la tecnología actual y a su vez, gracias a ésta, se facilita el estudio, el desarrollo y la aplicación del Cálculo Diferencial. Más aún, este y otros temas han servido de base para el desarrollo del Análisis Matemático.

Es por ello que la derivada es uno de los temas importantes de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, la cual se imparte en los últimos grados de bachillerato; además, es materia de algunas carreras universitarias.

Como parte del trabajo del Seminario de Titulación "Enseñanza del Cálculo" resulta el desarrollo de este texto, el cual se presenta como un ejercicio de creación de un escrito de apoyo y consulta para los involucrados en la enseñanza del Cálculo Diferencial, el cual fue creado a través de reportes semanales de acuerdo a cada tema que forma parte de la teoría sobre la derivada.

En las primeras trece secciones se establece la teoría sobre la derivada. En la primera, se define la derivada a partir de los problemas mencionados arriba y, a partir de esa definición, se obtienen las derivadas de algunas funciones básicas. Luego, se definen las derivadas de operaciones entre funciones, lo cual se trata en dos secciones. Continuamos con dos secciones sobre teoremas, entre ellos, el Teorema del Valor Medio y sus aplicaciones. En las siguientes, se tratan temas como las derivadas de orden superior y la aplicación de la diferenciación en la obtención de límites indeterminados.

Las secciones 8, 9 y 10 tratan los elementos que nos sirven para trazar las gráficas de funciones con mayor precisión: puntos críticos, intervalos de crecimiento y curvatura, etc. Los siguientes temas son la aproximación a una función a través de polinomios y la derivación implícita. La sección trece es un cierre de la parte teórica debido a los diversos temas que trata: funciones exponenciales, logarítmicas, inversas y el concepto de diferencial.

La secciones de la 14 a la 17 son ejemplos de soluciones a diversos problemas en los cuales está inmersa la derivada y sus aplicaciones; además, se hace notar la relación con temas anteriores del Cálculo Infinitesimal y con otros que no son parte de éste pero si de la matemática. Esto no significa que en las secciones anteriores no haya ejercicios prácticos, pero éstos sirven para ejemplificar los temas tratados.

Sin más, entonces, se presenta el trabajo.

1.1 CONCEPTO DE DERIVADA

Las funciones poseen características que pueden ser estudiadas, propiedades tanto locales –alrededor de un punto- o globales, que abarcan intervalos o el dominio de la función. De la misma manera, encontramos que ciertos problemas de la vida cotidiana pueden ser descritos como funciones y, por tanto, el estudio de las mismas estará involucrado en la resolución de dichos problemas.

Una de esas características mencionadas es la manera en la que la función varía, es decir, a qué razón lo hace. Podemos considerar el ejemplo de la velocidad de un vehículo en movimiento, este problema es objeto de estudio de la Física. De acuerdo con la fórmula de la velocidad, la cual es el desplazamiento entre el tiempo, podemos determinar la velocidad media, o promedio, en un trayecto determinado, con la razón siguiente:

$$V = \frac{P_f - P_0}{t_f - t_0}.$$

Aclaramos que, en dicha fórmula, P_f es la posición del vehículo al final del trayecto, P_0 es su posición al inicio -lo cual nos da como resultado el desplazamiento- , t_f es el tiempo final y t_0 el tiempo de inicio.

Sin embargo, en un viaje, por lo regular, el vehículo no se mantiene a la misma velocidad en todo el trayecto. ¿Cómo determinamos la velocidad en un cierto instante t_0? A través de la misma fórmula, fijamos primero ese instante t_0 como nuestro tiempo inicial y podemos tomar otro momento del recorrido, el cual será t_f. Pero necesitamos saber lo que pasa en t_0, por lo que hacemos que t_f se acerque a t_0; es ahí donde entra la definición de límite. Por lo tanto, la velocidad en el instante t_0 queda determinada por la expresión

$$\lim_{t_f \to t_0} \frac{P_f - P_0}{t_f - t_0}.$$

Esta expresión es lo que se llama la velocidad instantánea en t_0.

Otras cantidades físicas o de otras disciplinas también pueden poseer una razón de cambio que podemos determinar. Si consideramos que la velocidad es expresada por medio de una función que va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y generalizamos para cualquier otra cantidad a través de esa función, la expresión para una razón de cambio entre dos instantes distintos x_0 y x_1 queda como

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Por otro lado, si nos interesa la razón de cambio de la función en x_0, lo cual llamaremos la razón de cambio instantánea en x_0, usa la aplicación de límite al acercar x_1 a x_0, esto es,

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Ahora, ya que la función va de los reales a los reales, consideremos un hecho importante: el instante x_1 es igual a x_0 mas un número real, el cual podemos denotar como h. Esto significa que $x_1 = x_0 + h$. Y, por tanto, la razón de cambio instantánea también se escribe

$$\lim_{x_0+h\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

La variación de una función también puede analizarse mediante su gráfica. De la misma manera, tomemos dos puntos x_0 y x_1 pertenecientes al dominio de la función; las imágenes de estos puntos serán $f(x_0)$ y $f(x_1)$. Pero, si nos basamos en el hecho mencionado en las razones de cambio, consideramos que $x_1 = x_0 + h$, para h en los reales. Por lo tanto, los puntos de la gráfica de la función serán $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

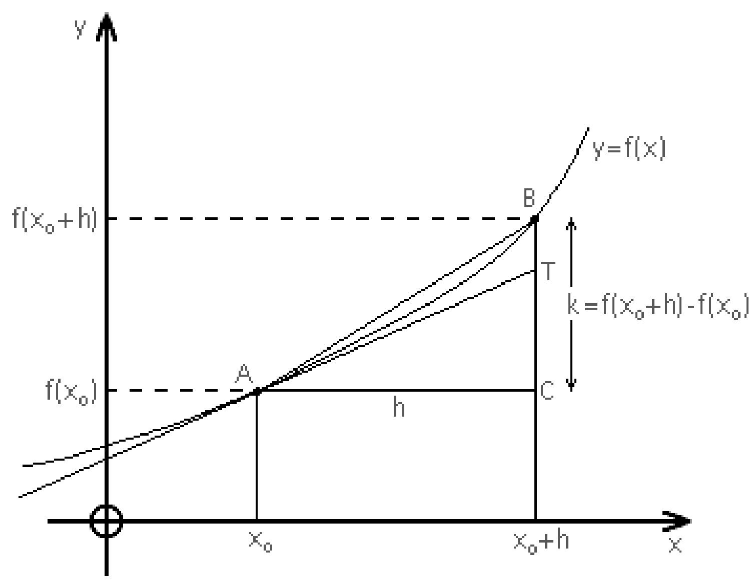
De acuerdo con la geometría clásica, por estos dos puntos tomados en la función tendremos una recta única. En el plano cartesiano tenemos que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera tiene una pendiente dada por

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

La recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ se le conoce como recta secante. De ella, obtenemos su pendiente:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Lo anterior se ve representado en la gráfica siguiente:



Tal como en la razón de cambio instantánea, veamos lo que pasa en x_0. Esto nos permitirá analizar la forma como varía la función en este punto. Y nos apoyaremos en la pendiente de la ecuación de la recta que obtuvimos.

La forma en la que nos enfocaremos en x_0 será aproximarnos poco a poco a través de la ecuación de la recta al mover el punto $x_0 + h$ hacia x_0; en pocas palabras, hacemos cada vez más pequeña la distancia entre x_0 y $x_0 + h$, la cual es la misma h; claro, siempre que sea posible llevarlo a cabo. Y en esto involucramos la definición de límite en la pendiente de la recta obtenida. En pocas palabras, lo que se busca es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Claro, todo esto con un detalle: que este límite exista.

¿Qué hemos obtenido? Primero, al acercarnos poco a poco a x_0, la recta obtenida se ha modificado hasta llegar a ser la recta que pasa solamente por x_0, lo que se denomina la recta tangente a f en el punto x_0. Por lo que el límite de la pendiente de cada recta obtenida llega a ser, a su vez, la pendiente de la recta tangente a f en x_0.

Pero hemos obtenido algo más. A fin de cuentas, la recta tangente puede o no modificarse, dependiendo en qué punto de la función la evaluamos. Lo que significa que, de igual manera, la pendiente de la recta tangente puede cambiar en cada punto de la función f dada. Y aunque no cambiara, la información que se obtiene a partir de este hecho será de gran valor puesto que nos indicará la razón con la que cambia f.

Esta razón de cambio instantánea es lo que se llama derivada de f en x_0. En palabras formales:

Definición: *Sea $f(x)$ una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (es decir, de los reales en los reales). La <u>derivada</u> de $f(x)$ en un punto x_0 de su dominio es*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

siempre y cuando este límite exista.

Ahora, este procedimiento de obtener la derivada se puede realizar con cada punto del dominio de la función –es decir, con la variación de x_0- en el cual el mencionado límite exista. Esto es,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Para todo x que se encuentre en el dominio de f y para el cual el límite exista.

Así, podemos obtener otra función, la cual es llamada la *función derivada* o simplemente derivada de $y = f(x)$ y se denomina por medio de los símbolos $f'(x), y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$, entre otras.

Ahora, para obtener las derivadas de algunas funciones conocidas, se debe aplicar el límite a la función de la cual se desea obtener la derivada, y a su vez, esta función debe evaluarse en x y en $x + h$. Como ejemplo, apliquemos el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

a algunas funciones conocidas para conocer su derivada:

i) $f(x)= c$, para algún valor constante real c:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

ii) $f(x)= x$, es decir, la función identidad:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

iii) $f(x)= x^2$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}2x=2x\ .$$

iv) Para el caso general $f(x)= x^n$, para cualquier número natural n:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1} = nx^{n-1}.$$

1.2 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA DERIVADA

De acuerdo con la existencia del límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

nos encontramos con que las operaciones existentes entre funciones, tales como la suma de ellas, la multiplicación de una función por una constante, la resta, la multiplicación de dos funciones, la división y la composición de funciones también se pueden definir para sus derivadas, claro, en caso de que éstas existan.

Y más aún, para la definición de las propiedades existentes entre derivadas nos apoyaremos en las operaciones entre funciones, lo que permitirá en algunos casos una diferencia entre ambos tipos de conceptos; por ejemplo, el producto de funciones y la derivada de tal producto.

Pero, antes de afirmar lo antes mencionado y, sobre todo, para explicarlo con mayor claridad, debemos probarlo.

1) Suma:

¿Qué es lo que pasa con la derivada de la suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, ambas diferenciables en un punto x? Tomemos una función $F(x) = (f+g)(x)$ y analicemos su derivada:

$$(f+g)'(x) = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}.$$

Por la definición de suma de funciones,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}.$$

Ahora, cambiamos el orden de los sumandos para acomodarlos y aprovechamos una propiedad de la suma de límites (el límite de la suma es la suma de los límites, o $\lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$),

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1: Sean f y g funciones de los reales en los reales y cada una con derivada existente, o sea, diferenciables en x. Entonces

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

O, traducido en palabras, la derivada de la suma es la suma de las derivadas. También se dice que la derivada abre sumas.

2) Resta:

Un razonamiento similar para la prueba de la suma y otra propiedad de límites, la cual nos indica que $\lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)$ será útil para encontrar, si f y g dos funciones diferenciables en x, el límite de una diferencia:

$$(f-g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)-(-g(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)-g'(x).$$

Entonces, también podemos enunciar este resultado:

<u>Teorema 2:</u> Si $f'(x)$ y $g'(x)$ son funciones de variable real y diferenciables en x, entonces

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

O lo que es lo mismo, la derivada de la resta (o de la diferencia) es la resta de las derivadas.

En algunos casos, por la semejanza de las pruebas y por la definición que se le da a la resta en base al concepto de suma, el Teorema 2 a veces se suprime, entendiéndose como una aplicación o caso particular del Teorema 1. En otros casos, el resultado de ambos teoremas se engloba de esta manera:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

3) Multiplicación por una constante:

Ahora tenemos el caso de la función $F(x) = cf(x)$, esto es, cuando multiplicamos una función diferenciable en x por una constante, un número real. ¿Cómo se ve afectada la aplicación de la derivada? Veamos:

$$F'(x) = (cf)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h}.$$

Puesto que, para cualesquiera función $g(x)$ y constante a,

$(ag)(x)=ag(x)$ (o sea, se pueden sacar los escalares), y después de factorizar la constante c,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h}.$$

Luego, por la propiedad de límites que establece que $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$,

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x).$$

Entonces, el resultado queda de esta manera:

<u>Teorema 3</u>: Sea *f(x)* una función de variable real y diferenciable en x y sea c una constante. Entonces,

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

En palabras, se dice que la operación derivar saca escalares.

Al haber demostrado estos tres enunciados, obtenemos como resultado que la aplicación de la derivada es un operador lineal, un concepto importante en cursos de nivel superior. Se dice que un operador[1] L es lineal si satisface las condiciones siguientes para u, v elementos de V y para k constante:

a) $L(u+v) = L(u) + L(v)$
b) $L(ku) = kL(u)$.

Es decir, que sea aditivo y saque escalares. Y lo que hemos probado muestra que la derivada es un operador lineal.

Pero también estos teoremas tienen una aplicación más práctica. Las funciones no sólo se limitan a constantes o a una sola variable elevada a cualquier exponente. De hecho, gracias a lo antes demostrado, podemos derivar un tipo muy importante de funciones: los polinomios.

Veámoslo con un ejemplo. Sea $f(x) = 7x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 15x + 54$. Por los Teoremas 1 y 2, lo primero que hacemos es:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(7x^5) + \frac{d}{dx}(4x^4) - \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(9x^2) - \frac{d}{dx}(15x) + \frac{d}{dx}(54).$$

[1] Un operador es una relación entre un conjunto V, es decir, entre sus elementos, consigo mismo.

Luego, aplicamos el Teorema 3 y nos queda:

$$f'(x) = 7\frac{d}{dx}(x^5) + 4\frac{d}{dx}(x^4) - 5\frac{d}{dx}(x^3) + 9\frac{d}{dx}(x^2) - 15\frac{d}{dx}(x) + 54\frac{d}{dx}(1).$$

Derivamos cada expresión, pues conocemos el método de cada una:

$$f'(x) = 7(5x^4) + 4(4x^3) - 5(3x^2) + 9(2x) - 15(1) + 54(0).$$

Lo que nos arroja como resultado final:

$$f'(x) = 35x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 18x - 15.$$

4) Multiplicación:

A continuación, tenemos la siguiente función $F(x) = (fg)\ (x) = f(x)\ g(x)$, donde f y g son funciones diferenciables. Pero, antes de encontrar la derivada, primero necesitaremos probar un resultado que nos será útil en la obtención de esta regla.

Proposición: Si $f(x)$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivable en x, entonces $f(x)$ es continua en x.

Para la demostración usaremos el hecho de que $f(x)$ es continua si $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ o, de manera equivalente, $[\lim_{h\to 0} f(x+h)] - f(x) = 0$. Como $f(x)$ no depende de h, podemos escribir $\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)] = 0$.

Pero $f(x+h) - f(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \bullet h$, por lo que

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \bullet h.$$

De acuerdo con la propiedad de límites que establece que el límite de un producto es el producto de los límites, obtenemos:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \bullet \lim_{h\to 0} h = f'(x) \bullet 0 = 0.$$

Ahora sí, procedamos a obtener la derivada de un producto:

$$F'(x) = (fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Ahora, usaremos un truco: sumaremos y restaremos a la vez en el numerador del cociente *f(x+h) g(x)*. Luego, al acomodar los sumandos, tenemos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}.$$

Al fijarnos en los dos últimos sumandos, encontramos que tienen un factor común, *g(x)*. Por la propiedad de límites usada en el caso (3), sacamos ese factor común. Y por la propiedad de suma de límites (ver (1)), la suma se separa para obtener:

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

De acuerdo con la proposición demostrada antes, la diferenciabilidad implica continuidad, por lo que, al aplicar los límites y usar la definición de derivada, obtenemos la expresión:

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Así, nuestro siguiente resultado quedará:

Teorema 4: Sean *f(x) y g(x)* funciones reales y diferenciables en x. Entonces

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Tal vez uno esperaba que la derivada de la multiplicación fuera la multiplicación de las derivadas, pero no fue así. Incluso, hemos obtenido una regla más larga y algo más tediosa que en otros casos.

Para ejemplificar el uso de esta regla, tomemos $f(x) = 2x(4x^3 - 7x^2 - 5)$. Entonces,

$$f'(x) = 2x\frac{d}{dx}(4x^3 - 7x^2 - 5) + (4x^3 - 7x^2 - 5)\frac{d}{dx}(2x)$$
$$= 2x(12x^2 - 14x) + 2(4x^3 - 7x^2 - 5)\,.$$

Ésta todavía se puede reducir.

5) División:

Si eso pasó en la derivada del producto de dos funciones, ¿qué esperaremos en el caso de la división de dos de ellas, o sea, $F(x) = f(x)/g(x)$? Primero pediremos que, para que la función división tenga sentido, $g(x) \neq 0$. Luego, procedemos a obtener la derivada, para lo cual pediremos que f y g sean diferenciables en x:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\left[g(x+h)g(x)\right]}\,.$$

De manera similar al caso anterior, sumamos y restamos $f(x)\,g(x)$. Así,

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\left[g(x+h)g(x)\right]}\,.$$

Sacamos como factor común $g(x)$ en los primeros dos sumandos y $f(x)$ en los otros dos. Eso nos da

$$= \lim_{h\to 0}\left\{g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h\left[g(x+h)g(x)\right]} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h\left[g(x+h)g(x)\right]}\right\}\,.$$

Aplicamos el límite y la proposición; así, lo que nos queda es

$$= \frac{g(x)f'(x)}{g(x)g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}\,.$$

Así, de la misma manera, se tiene un resultado diferente al que uno podría pensar: la derivada de una división no es la división de cada derivada. El teorema siguiente queda:

<u>Teorema 5:</u> Para dos funciones reales f y g diferenciables en x y con $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Ejemplifiquemos la regla: Sea $f(x) = \dfrac{6x+11}{3x+5}$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{(3x+5)\dfrac{d}{dx}(6x+11) - (6x+11)\dfrac{d}{dx}(3x+5)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{6(3x+5) - 3(6x+11)}{(3x+5)^2} = \frac{18x+30-18x-33}{(3x+5)^2} = \frac{-3}{(3x+5)^2}.$$

1.3. LA REGLA DE LA CADENA

A estas alturas ya hemos visto las derivadas de varias de las operaciones entre funciones: suma y resta de funciones y la multiplicación de una función por una constante, que nos ha dado como resultado reglas sencillas. También se han analizado los casos de la multiplicación y la división de funciones, en las que las reglas a seguir no son tan sencillas. Todo ello si suponemos que dichas funciones son diferenciables.

Sin embargo, todavía no se ha terminado este análisis de las operaciones entre funciones y sus derivadas, ya que falta por obtener la derivada de una de las propiedades más importantes entre funciones: la composición. Es decir, la función

$$F(x) = (g \circ f)\,(x) = g(f(x))$$

tal que primero se aplica $f(x)$ y luego se aplica $g(x)$, pero a f.

Recordemos de qué se trata la composición. Sea $f(x) = -x + 1$ y $g(x) = x^2$. En este caso, $(g \circ f)\,(x) = (-x + 1)^2$. Y de paso, podemos ver que la composición de funciones no es conmutativa, es decir, $(g \circ f)\,(x) \neq (f \circ g)\,(x)$, pues $(f \circ g)\,(x) = -x^2 + 1$, con las mismas $f(x)$ y $g(x)$.

Con el supuesto previo de que las funciones sean diferenciables, como una idea del resultado que se podría obtener de este caso, es posible que comencemos con lo primero que veamos: Obtener la derivada de la composición en su totalidad, es decir, $(g \circ f)'(x)$, o, de una manera más clara, proponemos que la derivada es $g'(f(x))$. Si aplicamos este hecho con las funciones anteriores, obtenemos entonces que la derivada es $2(-x + 1)$ en lugar de $-2(-x + 1)$, la cual es la verdadera derivada de $(g \circ f)\,(x)$.

Y es porque falta algo: Al aplicar la composición, primero se aplica $f(x)$, por lo que nos faltaría su razón de cambio, o sea, su propia derivada. Entonces multiplicaremos $f'(x)$ a lo obtenido por aplicar la idea anterior. Y ponemos $f'(x)$ precisamente porque, al ser la primera, se aplica directamente a x, mientras que $g(x)$ ya se aplica a $f(x)$, o sea $g\,(f(x))$.

Entonces, si nos basamos en nuestro ejemplo anterior, como la derivada de $-x + 1$ es -1, se obtiene la derivada completa, ya que multiplicamos por -1 a la propuesta del párrafo anterior.

Entonces, como resultado, obtenemos:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

La importancia de esta regla de derivación es mucha, de tal manera que el teorema que la enuncia lleva su propio nombre: La Regla de la Cadena, en alusión a la ligadura existente entre las derivadas sucesivas, producto de su manera de aplicación. Entonces, dicha regla es:

Teorema (Regla de la Cadena): Sean f y g funciones reales, diferenciales y tales que f está compuesta con g, o sea, $(g \circ f)(x)$. Entonces

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

La demostración de este teorema no es difícil si disminuimos un poco el rigor, pero si queremos ser completamente exactos entonces se complica la prueba. Sin embargo, daremos una pequeña idea de cómo se demuestra esta regla.

Sea $F(x) = g(f(x))$. La derivada entonces queda:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

Para ayudar a la comprensión de la prueba, realicemos un cambio de notación: Escribamos $y = f(x)$ y sea $k = f(x + h) - f(x)$ (Se observa que k depende de h). Entonces $f(x + h) = y + k$, por lo que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{h}.$$

Ahora multipliquemos y dividamos por k (pero k no debe ser cero o no tendría sentido realizar la división entre k):

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k}.\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k}.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k}\bullet\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Como k depende de h, si h tiende a cero, entonces k también tenderá a cero. Nos apoyaremos en la proposición de la sección anterior; así,

$$=g'(f(x))f'(x).$$

Parece que la prueba está bien hecha, es clara y sencilla, por lo que no tiene ningún problema. ¿Dónde está entonces la cuestión de la falta de rigor? En pedir que k no sea cero, puesto que $k = f(x + h) - f(x)$, por lo que se puede dar el caso en el que k sea igual a cero.

Para resolver el problema, definimos una nueva función

$$G(t)=\frac{g(y+t)-g(y)}{t}-g'(y)\text{, si } t\neq 0 \text{ y } G(0)=0.$$

Esta función resulta ser claramente continua para $t = 0$, pues $\lim_{t\to 0}G(t)=G(0)$, de donde $g(y+t)-g(y)=t[G(t)+g'(y)]$, para todo t cercano a cero, incluso para $t = 0$.

Sustituimos k en lugar de t y a y por su valor, es decir, $f(x)$; entonces, lo que se obtiene es

$$g(f(x+h))-g(f(x))=g[f(x)+(f(x+h)-f(x))]-g(f(x))=k[G(k)+g'(f(x))]$$

Ahora, dividimos entre h y sustituimos k por su valor. Tenemos así

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}[G(f(x+h)-f(x))+g'(f(x))]$$

Si ahora aplicamos el límite cuando $h \to 0$ a la expresión de arriba, el lado izquierdo de la igualdad tiende a $(g\circ f)'(x)$, mientras que en la parte derecha primero obtenemos $f'(x)$, luego, como k depende de manera continua de h y $\lim_{h \to 0} k = 0$, entonces $G(k) \to 0$, por lo que nos queda $g'(f(x))$.

Y de esta manera, obtenemos el resultado deseado:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Es de suma importancia la aplicación de la regla de la cadena. En primer lugar, algunas de las reglas de derivación ya conocidas funcionan de manera similar cuando cambiamos la variable por una función.

Como ejemplo de esta nueva regla de derivación, tomemos una función $f(x) = (5x^3 + 12x)^2$. Tenemos dos opciones para derivar f: desarrollar el binomio o aplicar la regla. Analicemos la primera:

$f(x) = 25x^6 + 120x^4 + 144x^2$,

Es lo que obtenemos si llevamos a cabo el desarrollo del binomio. De esta manera,

$$f'(x) = 25(6x^5) + 120(4x^3) + 144(2x) = 150x^5 + 480x^3 + 288x.$$

Ahora, bajo la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(5x^3 + 12)(15x^2 + 12) = 2(75x^5 + 60x^3 + 180x^3 + 144x) \\ &= 2(75x^5 + 240x^3 + 144x) = 150x^5 + 480x^3 + 288x. \end{aligned}$$

En conclusión, se han obtenido los mismos resultados. Por la segunda opción parecería que el camino fue más largo, pero esto es porque lo que se buscaba era mostrar que por cualquiera de los dos caminos se obtiene la misma derivada. En todo caso, pudimos habernos quedado con el primer resultado que arrojara la regla de la cadena, depende de cómo se desea presentarlo o usarlo.

Sin embargo, para otros casos la aplicación de la regla de la cadena es mucho más conveniente y más fácil de realizar. Para ello sea ahora nuestro ejemplo $f(x) = (5x^3 + 12x)^{10}$. Para poder llevar a cabo la derivada a través del desarrollo del binomio es posible pero el procedimiento es más largo e incluso hasta tedioso. Pero si derivamos por la regla de la cadena el resultado obtenido es

$$f'(x) = 10(5x^3 + 120x)^9(15x^2 + 12).$$

Tal vez la derivada escrita de esa forma no ayudaría para desarrollar el binomio, pero eso es opcional. De hecho, podemos quedarnos ahí, con este resultado.

La regla de la cadena también es útil e importante para la obtención de las derivadas de otro tipo de funciones como las que están en términos de funciones trigonométricas o exponenciales.

Incluso muchísimas de las funciones de las que se desea conocer su derivada están en términos de otras que a su vez tienen como variables otras funciones y así sucesivamente. Es ahí donde la regla de la cadena es de vital importancia para la obtención de estas derivadas.

1.4 CONTINUIDAD, TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y OTROS RESULTADOS

Hasta estos momentos hemos llegado a ciertas propiedades de la derivada, sin embargo, estas tienen que ver más con definir la derivada y con las operaciones entre funciones; inclusive, una sección entera se ha dedicado a la composición de funciones y a su procedimiento para derivarla: la Regla de la Cadena.

Ahora, los teoremas de este apartado se enfocan en otras propiedades que más adelante nos permitirán el análisis y la descripción de las funciones diferenciables, solamente que los resultados obtenidos se reducen a su aplicación en un intervalo (a, b) de su dominio. En algunos casos se pueden extender a todo el dominio, pero no necesariamente.

El primer teorema tiene que ver con la diferenciabilidad. Si tomamos la definición de derivada:

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

entonces, de acuerdo con este límite, nos encontramos con que la diferencia entre y y x puede ser muy pequeña; de la misma manera, la diferencia entre sus imágenes $f(x)$ y $f(y)$ también deberá ser muy pequeña, pues, en caso contrario, $\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ no existiría.

Lo que tenemos como resultado es la definición de continuidad, o en otras palabras, que f, al ser diferenciable, también es continua. Entonces es posible enunciar el primer teorema:

Teorema 1: Sea $f(x)$ una función real. Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

El teorema fue demostrado en secciones anteriores, por lo que nos enfocaremos en resultados que parten de él.

Por ejemplo, ¿es posible tener lo contrario, es decir, que si f es continua entonces f sea diferenciable? La respuesta es no. Y el ejemplo para probarlo es la función $f(x) = |x|$, el valor absoluto de x. A veces, se considera que tomar el valor absoluto de un número es tomarlo solamente sin considerar su signo. En realidad, como función, la definición formal del valor absoluto de x es:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0. \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

Ahora, en $c = 0$, la función valor absoluto no es diferenciable, ya que $\lim_{h \to 0} \frac{|c+h| - |c|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe, veamos por qué: Para $h \geq 0$, el límite se aplica a $h/h = 1$, mientras que para $h < 0$, tiende a $-h/h = -1$, con lo que tenemos dos límites diferentes para el mismo punto. Conclusión: la derivada para $|x|$ no existe en $c = 0$.

Ahora tenemos una propiedad importante sobre las funciones diferenciables, la cual usaremos en algunos de los resultados que serán presentados más adelante, no solamente en esta sección.

Parte del análisis de las funciones en general es saber si las imágenes se obtienen dentro de un cierto intervalo, es decir, si están acotadas por ciertos valores. Y si los alcanzan, estaremos hablando de valores máximos y mínimos para la función.

Como definición formal, una función real f tiene un máximo (o máximo absoluto) en S –con S un subconjunto de su dominio-, si existe a en S para el cual se tenga que $f(x) \leq f(a)$, para todo x elemento de S; entonces se dice que f alcanza su máximo en a. Y a su vez, si tenemos b en S tal que $f(b) \leq f(x)$, para todo x de S, entonces f alcanza su mínimo (mínimo absoluto) en b.

Pero, para algunas funciones, se tiene que sus valores suben y bajan en ciertos intervalos, como si ondulara dentro de ellos, por lo que, para esos intervalos, tenemos valores máximos y/o mínimos. A estos se les denomina máximos y mínimos locales (o relativos). Con detalle, su definición se escribe de la siguiente manera:

Definición: Sea f una función de variable real.

a) f tiene un máximo local en c un punto del dominio de f, si existe un intervalo (a , b) que contiene a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para cualquier x dentro de (a , b).

b) f tiene un mínimo local en d un punto del dominio de f, si existe un intervalo (a , b) que contiene a d tal que $f(x) \leq f(d)$ para todos los x en (a , b).

c) Un punto que es máximo o mínimo local en f se le denomina extremo o punto extremo de f.

Es importante aclarar que lo que se expresa en la definición no quiere decir que (a, b) sea el único intervalo donde existan valores extremos o que forzosamente la función tenga máximo y mínimo local a la vez en ese lugar.

Existe una relación entre la existencia de valores extremos y la derivada en los puntos donde los alcanza. La existencia de un máximo local indica que, dentro de un intervalo en el que f es diferenciable, los valores alrededor son menores, como una montaña en la que la cima es el máximo local. A su vez, las pendientes de las tangentes van disminuyendo al acercarse al máximo local, de tal manera que en éste la recta tangente es horizontal. Ésta recta tiene pendiente cero, lo que significa que la derivada es cero en ese punto. De la misma manera, con un mínimo local tenemos que ahí la derivada se anula, en caso de existir- por ejemplo, $f(x)=|x|$ y $c=0$, y, en este caso, c resulta mínimo local-. Esto lo concluimos en el siguiente resultado:

Teorema (del valor extremo): Sea f diferenciable en (a, b) y supongamos que f tiene un valor extremo en un punto c que pertenece a (a, b). Entonces $f'(c) = 0$.

La idea de la demostración es tomar una función $Q(x)$ definida como $Q(c) = f'(c)$ si $x = c$ y $Q(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ si $x \neq c$. Como f es diferenciable, se tiene que $Q(x) \rightarrow Q(c)$, por lo que Q es continua en c.

Si $Q(c) > 0$ entonces, por ser continua en c, existe una vecindad de c, digamos $(c - \delta, c + \delta)$, donde $Q(x) > 0$ en tal vecindad; luego,

$Q(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$, para $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Luego, para $x > c$, se deberá tener que $f(x) - f(c) > 0$, de donde $f(x) > f(c)$, lo que contradice el que $f(c)$ sea máximo.

De manera análoga, si $Q(c) < 0$ en una vecindad de c se tiene que $Q(x)$ es negativa, por lo que habrá al menos un punto $x < c$ donde $f(x) - f(c) > 0$. De acuerdo con esas contradicciones, $Q(c) = 0$, por lo que $f'(c) = 0$.

El inverso de este teorema es falso, o sea, que la derivada se anule no significa que ese punto contenga un valor extremo. Por ejemplo, para $f(x) = x^3$, $f'(0) = 3(0)^2 = 0$, pero la función es creciente en todo $\mathbb{R}$, lo que significa que el cero no es valor extremo.

Por otro lado: La función valor absoluto tiene su mínimo en $x = 0$, pero la derivada no es cero (es más, no existe) en ese punto. Por eso se pide que f sea diferenciable y más que exista la derivada en el punto extremo.

Nos dirigimos al teorema del valor medio para derivadas, pero antes probemos un enunciado considerado un caso particular de aquél. La idea básica del teorema (y de paso su interpretación gráfica) es el hecho de que si tomamos un intervalo (a, b) tal que $f(a)=f(b)$- lo que significa que los puntos de la gráfica $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ están unidos por una línea horizontal-, entonces dentro del intervalo hay por lo menos un punto x tal que en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica la tangente es paralela a esa recta horizontal, pero, como mencionamos arriba, la pendiente de esta tangente es cero.

> **Teorema (de Rolle)*:** Sea f una función real continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Además, supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto c dentro de (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

La demostración se basa en suponer que se cumplen las hipótesis y, además, que $f'(c) \neq 0$, para todo x en (a, b). Como f es continua en $[a, b]$, f alcanza sus valores máximo y mínimo en ese intervalo. Por el teorema del valor extremo, los valores extremos no pueden estar en (a, b), ya que la derivada entonces se anularía, por lo que los valores se alcanzan en a y b precisamente. Como $f(a)$ y $f(b)$ son iguales, el máximo y el mínimo son iguales y la función resulta constante, por lo que su derivada en el intervalo es cero:

* Michel Rolle (1652-1719). Matemático francés. Su teorema se expone en 1690.

Esto es una contradicción a nuestra suposición de que $f'(c) \neq 0$ para todo x en *(a, b)*. Así, tenemos que, por lo menos para un punto c de *(a, b)*, $f'(c) = 0$.

Ahora, ¿es posible que tengamos un resultado similar no solo pasa una horizontal, sino para una recta con cualquier pendiente? Sí, aunque no igual, pero primero analicemos el caso.

Tomemos una función f diferenciable en un intervalo *(a, b)*. La recta que une los puntos de la gráfica que corresponden a los extremos del intervalo tiene como pendiente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Entonces, similar al teorema de Rolle, dentro del intervalo encontraremos al menos un real c en el cual la gráfica de f tenga en *(c, f(c))* una recta tangente paralela a la que une a los extremos del intervalo. Esa recta tangente tiene pendiente igual a la derivada que pasa por el punto mencionado. O sea, existe c en *(a, b)* tal que las pendientes son iguales, es decir:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De donde $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Este es el Teorema del Valor Medio para derivadas. Ya explicado, enunciémoslo:

Teorema (del Valor Medio para derivadas): Sea f una función continua en *[a, b]* y diferenciable en *(a, b)*. Existe al menos un punto c dentro de *(a, b)* en el que se tiene

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Para demostrar este teorema, definamos una función *F(x)* de esta manera:

$$F(x) = f(x)\,(b - a) - x\,[f(b) - f(a)].$$

De esta nueva función, $F(b) = F(a) = bf(a) - af(b)$. Como f es continua, F también lo es. Y de la misma manera, F es diferenciable porque f lo es; entonces es posible aplicar el Teorema de Rolle a F, por lo que $F'(c) = 0$ para un punto c de $(a. b)$. Ahora, si derivamos F, obtenemos $F'(x) = f'(x)(b-a) - \left[f(b) - f(a)\right]$. Si hacemos $x = c$, tenemos $0 = F'(c) = f'(c)(b-a) - \left[f(b) - f(a)\right]$, de donde se obtiene la igualdad.

Concluimos con dos hechos importantes de este teorema.

1) Es necesario que f sea continua en todo $[a, b]$. Sea $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \geq 0. \\ x & si\ \ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función deja de ser continua en 0 y no hay $c \in (0, 1)$ con $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0$. En efecto, $f'(c) = 1$ para toda $c \in (0, 1)$.

2) Es necesario que f sea derivable en todo (a, b). Como ejemplo, sea $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Sin embargo, no hay $c \in (-1, 1)$ con $f'(c) = 0$. De hecho, $f'(c) = \dfrac{2}{3} \bullet \dfrac{1}{\sqrt[3]{c}} = 0$ es imposible.

1.5 APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

La importancia del Teorema del Valor Medio no es porque su demostración sea espectacular o llamativa o que por si solo nos proporcione información clave o útil para seguir desarrollando la teoría sobre la derivada. Más bien, el teorema es importante porque otros resultados, teoremas, procedimientos, etc., que se usan después con referencia a la diferenciación lo toman como base.

Antes de pasar a la presentación de dichos resultados, establezcamos algunas conclusiones importantes que se desprenden del Teorema del Valor Medio.

Una primera aplicación del teorema es el enunciado siguiente:

Proposición: Si $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable con $f'(c) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b).

Sean c y d arbitrarios en (a, b) con $a < c < d < b$. Apliquemos el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[c, d] \subset (a, b)$, por lo que existe $x_0 \in (c, d)$ tal que $\dfrac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x_0) = 0$. Por tanto, $f(d) = f(c)$; luego, $f(x)$ es constante en (a, b).

Es necesario que el dominio de f sea un intervalo (a, b). Por ejemplo, sea $f : (0, 1) \cup (2, 3) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in (0, 1). \\ -x & si\ x \in (2, 3). \end{cases}$$

f no es una función constante, sin embargo, $f'(x) = 0$ en el dominio de la función, o sea, en $(0, 1) \cup (2, 3)$.

El teorema del valor medio nos habla de la existencia de por lo menos un valor c dentro del intervalo (a, b) que cumpla la igualdad que menciona, pero no nos dice que podemos encontrar con exactitud dicho valor. En algunos casos, para ciertas funciones, podremos conocer la posición exacta de c, ya sean uno o varios valores, pero no siempre será posible obtenerlos para todas las funciones diferenciables en cualquier intervalo y en varios de los casos posibles puede volverse un proceso muy complicado. Sin embargo, con el simple hecho de que el punto o los puntos existan se pueden sacar muchas conclusiones útiles.

Pero, como mencionamos arriba, existen algunos casos en los que es posible obtener el o los valores de ciertas funciones que cumplan el teorema. A continuación, veremos un ejemplo de estos casos donde es posible conocer dichos valores:

Ejemplo 1: Encontrar el valor de c que garantiza el Teorema del Valor Medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$.

Primero, $f(x) = 2x^{1/2}$, por lo que $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Por otro lado,

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{2\sqrt{4}-2\sqrt{1}}{3} = \frac{2(2)-2(1)}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}.$$

De esta manera, queda por resolver la ecuación $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$, de donde se obtiene $3 = 2\sqrt{c}$. Si elevamos al cuadrado todo, nos queda $9 = 4c$, por lo que el resultado final es $c = 9/4$.

Para otras funciones se sigue el mismo proceso: obtenemos $f'(c)$ y $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; luego, los igualamos como indica el Teorema del Valor Medio y finalmente tenemos que resolver la ecuación. ¿Procedimiento muy sencillo? No tanto; de hecho, el problema de la obtención de los valores -que discutíamos arriba- descansa en el hecho de que la ecuación se pueda resolver.

Ahora sí, hechas estas observaciones respecto al Teorema del Valor Medio, podemos mostrar los resultados que se desprenden de él.

El primero de ellos se refiere a la generalización del mismo teorema respecto a dos funciones que cumplan las condiciones pedida dentro de un intervalo *(a, b)* común a los dos.

Teorema (Fórmula del Valor Medio de Cauchy): Sean f y g funciones reales continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Entonces, para un cierto c que se encuentre en (a, b), se tiene que

$$f'(c)[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)].$$

La demostración se lleva a cabo de manera similar a la del Teorema del Valor Medio: Definimos una función $F(x)$ de esta manera:

$$F(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

En esta función tenemos que $F(b) = F(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, por lo que es posible aplicar el Teorema de Rolle. Así, para el valor c dado por dicho teorema tenemos que

$$0=F'(c)=f'(c)[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)].$$

De donde se obtiene el resultado del teorema.

Así, el Teorema del Valor Medio se puede considerar como un caso particular de la Fórmula del Valor Medio de Cauchy, donde $g(x) = x$.

El siguiente teorema también tiene que ver con la relación existente entre dos funciones y sus derivadas; en este caso, si las dos funciones tienen la misma derivada.

Teorema: Sean f y g funciones reales y diferenciables en (a, b). Si $f'(x)=g'(x)$ para todo x en (a, b), entonces existe C número real constante tal que $f(x) = g(x) + C$, para todo x en (a, b).

Para demostrar el teorema, usaremos una idea similar a la de los teoremas anteriores: definir una función $H(x) = f(x) - g(x)$. Entonces $H'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. Fijamos un punto x_1 dentro de (a, b) y sea x cualquier otro punto del intervalo. Como f y g son diferenciables en (a, b), entonces son continuas en el intervalo $[x, x_1]$ o $[x_1, x]$, depende cómo se encuentren uno y otro. Por lo tanto, se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio, por lo que existe c dentro de x y x_1 tal que

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1).$$

Como $H'(c) = 0$, $H(x) - H(x_1) = 0$, de donde $H(x) = H(x_1)$, para cualquier x en (a, b). Como habíamos definido $H(x) = f(x) - g(x)$, tenemos entonces que $f(x) - g(x) = f(x_1) - g(x_1)$. Si llamamos C a esta última parte de la igualdad, se tiene el resultado del teorema.

La interpretación del teorema es ésta: Si partimos de una derivada, podemos encontrar que la función de donde parte esa derivada no es una, sino pueden ser varias. La regla básica de esa derivada es la misma y, dicho sea de paso, la forma básica de la gráfica también; la diferencia es una constante, cualquier valor real que incluye al cero –aunque el cero nos daría una función idéntica-. Y, a nivel de gráficas, la constante añadida a la función implica que la gráfica se traslade hacia arriba o hacia abajo. Visto de otra manera, recordemos que una función constante cualquiera tiene como derivada la función constante cero, por lo que no afecta la obtención de una derivada.

Viene el tercer teorema que se desprende del Teorema del Valor Medio, pero para ello necesitaremos recordar una definición a partir de la cual se basará este enunciado, la definición de función creciente y decreciente sobre un intervalo definido (a, b).

Definición: Sea f una función definida en los reales sobre un intervalo I cualquiera.

1. f es creciente sobre I si, para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) < f(x_2)$.
2. f es decreciente sobre I si, para cada par de números x_1 y x_2 que pertenecen a I, cuando $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.
3. f es estrictamente monótona sobre I si es creciente o decreciente sobre I.

Después de escrita la definición, nos encontramos con un problema que se sigue a partir de esta definición: su aplicación. No se trata de cómo determinar si una función es creciente o decreciente –para eso escribimos la definición-, sino en dónde lo es.

Para ello, podemos hacerlo por dos métodos: prueba de puntos o dibujar la gráfica. En el primer caso, podría ser que necesitemos muchos puntos para determinar con exactitud esos intervalos; en el segundo, con algunos puntos y conociendo la gráfica general, podemos tener una idea aproximada, pero no completamente exacta, sobre todo si se diera el caso de que la gráfica oscile mucho en un intervalo pequeño, lo que sería difícil determinar con pocos puntos.

Existe un tercer método, más sencillo que los anteriores, basado en la derivada, y cuya idea básica es la siguiente: en un intervalo creciente, los valores de la función van creciendo al irnos moviendo hacia la derecha; igualmente, la recta tangente de esos puntos, en caso de existir, tendrá una pendiente positiva. Bajo el mismo razonamiento, si la función es decreciente, las pendientes de las tangentes serán negativas. Y recordemos que la pendiente de esas tangentes es determinada por la derivada de la función.

Esto queda escrito y demostrado en el siguiente enunciado.

Teorema (de monotonía): Sea f función real continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

i) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).
ii) Si $f'(x) > 0$ para cualquier x que esté en (a, b), entonces f es creciente en (a, b).

La demostración de cada caso es como sigue.

i) Supongamos que $f'(x) < 0$ para todo x dentro de (a, b) y tomemos x_1 y x_2 puntos en (a, b) de tal manera que $x_1 < x_2$. Como f es continua en $[a, b]$, entonces lo es en el intervalo $[x_1, x_2]$. Entonces podemos aplicar al intervalo el Teorema del Valor Medio; así, existe c en (x_1, x_2) para el cual

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Luego, $f'(c) < 0$ (pues $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b)); además, como $x_1 < x_2$, entonces $0 < x_2 - x_1$, por lo que la multiplicación de tales cantidades es negativa; por lo tanto, $f(x_2) - f(x_1) < 0$. De esta desigualdad, $f(x_2) < f(x_1)$; como tomamos x_1 y x_2 puntos cualesquiera en (a, b), entonces se cumple con la definición de que $f(x)$ es decreciente en (a, b).

ii) Usaremos un argumento similar para el caso en el que $f'(x) > 0$ para cualquier x en (a, b). Si tomamos dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, entonces f será continua en $[x_1, x_2]$, por lo que podremos aplicar el Teorema del Valor Medio para tener una ecuación semejante a la que se encuentra en el caso anterior, sólo que en este caso tendremos que $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ (pues $f'(x) > 0$), por lo que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de donde, a su vez, $f(x_2) > f(x_1)$, definición de función creciente, por lo que se cumple la condición del segundo caso del teorema.

Entonces, gracias al teorema de Monotonía, hemos encontrado una herramienta bastante útil para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento para cualquier función, lo cual será importante en el análisis de su comportamiento y en la construcción de su gráfica.

El procedimiento a seguir será, entonces, obtener en primer lugar la derivada de la función; luego, para determinar con exactitud los intervalos deseados, buscaremos los puntos donde la derivada sea igual a cero, ya que delante o detrás de esos puntos, la derivada tendrá un valor positivo o negativo. Además, esos puntos donde la derivada sea igual a cero los consideraremos como extremos de los intervalos.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3: Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$. Encontrar los intervalos donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.

Primero, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$.

Entonces, podemos considerar los extremos de los intervalos a -1 y a 2; o sea, los intervalos a analizar serán $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$.

Si hacemos una tabla para obtener los signos de los factores, obtenemos lo siguiente:

Signo de \ *Intervalos de x*	*(-∞, -1)*	*(-1, 2)*	*(2, ∞)*
(x - 2)	-	-	+
(x + 1)	-	+	+
6(x – 2)(x + 1)	+	-	+

Entonces, de acuerdo con estos resultados, *f(x)* es creciente en los intervalos *(-∞, -1]* y *[2, ∞)* mientras que la función es decreciente en el intervalo *[1, 2]*. Problema terminado.

Parte importante del análisis de la función, además del conocimiento de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, serán los puntos donde la derivada es igual a cero, ya que, además de ayudar a determinar esos intervalos, tienen importancia en sí mismos. Pero analizar esa relevancia de los puntos será tema de una sección posterior.

1.6 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Cuando empezamos a hablar de la derivada, se explicaba que al aplicar esta operación a una función $f(x)$ daba como resultado una nueva función, la función derivada $f'(x)$. A esta nueva función, además de que podemos aplicarla para llevar a cabo un análisis de la original, la podemos analizar a su vez, aplicarle operaciones entre funciones o para funciones, como el límite.

Esto significa que, de la misma manera, podemos aplicar algo como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}.$$

Pero, claro está, siempre y cuando este nuevo límite exista.

Este nuevo límite es, entonces, la derivada de la derivada de la función. Se la llama también segunda derivada de la función $f(x)$ y se le simboliza como $f''(x), y'', \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2}$, etc.

Entonces, tendremos una nueva forma de llamar al paso anterior, es decir, a la primera aplicación de la derivada; precisamente, le denominaremos como la primera derivada de la función $f(x)$. Otra manera de llamarla será como f prima –por ser la primera derivada-, mientras que a la segunda se le llamará f biprima. Y, al igual que la primera derivada, también será una función.

Por ser función, podemos pensar en aplicar nuevamente la derivada a $f''(x)$, si es que el límite existe. El resultado obtenido será entonces la derivada de la derivada de la derivada de $f(x)$, la tercera derivada de $f(x)$ o f triprima. Y la simbolizaremos como $f'''(x), y''', \frac{d^3 f}{dx^3}, \frac{d^3 y}{dx^3}$ o de otras maneras.

Así, podemos continuar este proceso para la cuarta, la quinta, la sexta, la enésima vez o hasta un número infinito de veces, en caso de ser posible.

Y, de la misma manera, así llamaremos a estas derivadas sucesivas que se obtengan a partir de la función original *f(x)*: la cuarta derivada, la quinta derivada, la enésima derivada, etc. A estas se les simboliza a veces con números romanos (f^{iv}, f^{v}, f^{vi}, etc.), con números entre paréntesis ($f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, etc.) o usando la notación de cociente ($\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dy^5}, \ldots$). Por cierto, esta última se le llama notación de Leibnitz*.

A estas derivadas se les llama derivadas de orden superior, debido a que el orden de las derivadas es proporcionado por el número de la derivada que queremos obtener. Y, como el primer orden es precisamente la primera derivada, los siguientes escalones son la segunda, tercera y demás derivadas.

Diremos, a su vez, que f es dos veces diferenciable o dos-diferenciable si obtenemos la segunda derivada, tres-diferenciable si hallamos la tercera, n-diferenciable si llegamos a la enésima derivada (ser n-diferenciable engloba los casos de la segunda, tercera, etc., derivada) o infinitamente diferenciable si podemos derivar tantas veces como queramos. Esto también puede ayudar en el análisis de la función original.

Ejemplifiquemos lo dicho anteriormente:

Ejemplo 1: Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 8$. Obtengamos cada derivada y veamos:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 \\
&f''(x) = 6x + 6 \\
&f'''(x) = 6 \\
&f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0
\end{aligned}
$$

Esto significa que las siguientes derivadas existen y se pueden seguir obteniendo, solamente que de la cuarta derivada en adelante todas serán cero; es así como se entiende en matemáticas que una función es infinitamente diferenciable.

Además, este es un ejemplo de lo que pasa en el caso de que desarrollemos la derivada de funciones polinómicas o polinomiales, término por término. No todos los casos son de este tipo, pero a la par que podamos

* Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716). Matemático alemán, desarrollador, junto con Isaac Newton, del Cálculo

dar ejemplos para otro tipo de funciones, veremos algunas reglas para casos generales con esos tipos.

<u>Caso 1</u>: $f(x) = x^n$, *para* $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

.

.

.

$$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)x$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)^{\dagger}$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = 0.$$

Si tenemos que $f(x) = cx^n$, donde c es una constante, entonces a todas las derivadas las multiplicamos por c. Además, el lugar donde se empiezan a hacer cero las derivadas de todo el polinomio depende de su grado, es decir, el término con el exponente más alto.

<u>Caso 2</u>: $f(x) = sen\ x$.

$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -senx$$
$$f'''(x) = -\left(\frac{d(senx)}{dx}\right) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = -\left(\frac{d(\cos x)}{dx}\right) = -(-senx) = senx$$

.

.

.

Entonces, podemos decir que derivar la función seno es una operación repetitiva o cíclica, pues damos la vuelta por las mismas funciones. Caso

† A esta multiplicación se le llama factorial de n o n-factorial y se representa como n!

similar será $f(x) = \cos x$, pues la tabla casi es la misma, sólo se recorre el orden de las derivadas, pues la primera será $-sen\ x$, la segunda $-\cos x$, y así sucesivamente.

Para el caso de las operaciones entre funciones, derivar varias veces una suma o una resta es lo mismo que derivar varias veces cada elemento de esa suma o resta, manteniendo la operación entre ellos. Para la división es posible establecer una regla general, pero también complicada.

Caso aparte es la multiplicación de dos funciones, ya que la regla general para derivar esta operación varias veces se puede establecer. Primero, recordemos que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(fg)''(x) &= [f''(x)g(x) + f'(x)g'(x)] + [f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)] \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).\end{aligned}$$

Quitemos por el momento la x y continuemos

$$(fg)''' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

Entonces, vamos obteniendo en cada derivada algo similar al desarrollo de un binomio elevado a una potencia, el binomio de Newton. Y así será la regla para cualquier número natural n. Esta regla es conocida como la regla de Leibnitz para la derivada de productos. Y la enunciamos así:

Teorema (Regla de Leibnitz para la derivada de productos): Sean f y g dos funciones n-diferenciables, para cualquier n número natural. Entonces

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{1}{2}(n)(n-1)f^{(n-2)}g'' + \ldots + nf'g^{(n-1)} + fg^{(n)}.$$

Y la derivada para los términos interiores, en la posición i-ésima, es

$$\frac{n!}{(n-i)!i!}f^{(i)}g^{(n-i)}.$$

Debido a que es un teorema válido para cualquier número natural n, la demostración puede hacerse por el método de inducción –o sea, se prueba primero para el primer caso, sea cero o uno, y luego la suponemos para algún n natural y lo probamos para $n+1$, el que le sigue-. Por lo realizado arriba, ya tenemos la demostración para las primeras derivadas; queda entonces para el caso $n+1$, bajo la suposición de que es válido para n. Y lo haremos para el caso general, es decir, supondremos que la proposición es válida para el término k-ésimo de $(fg)^{(n)}$, que es $\frac{n!}{(n-k)!k!}f^{(k)}g^{(n-k)}$, con $k = 1, 2,\ldots,n$, y lo probaremos para la siguiente derivada. Entonces, si derivamos ese término k-ésimo, obtenemos

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\frac{n!}{(n-k)!k!}f^{(k)}g^{(n-k+1)}.$$

Pero, si también derivamos el término anterior, es decir, $\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}f^{(k-1)}g^{(n-(k-1))}$, obtenemos como resultado

$$\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}f^{(k)}g^{(n-k+1)}+\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}f^{(k-1)}g^{(n-k+2)}.$$

Por lo que tendremos que sumar los coeficientes que se encuentran junto al término $f^{(k)}g^{(n-k+1)}$, es decir, $\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}$. Ahora, multipliquemos al denominador del primer término por $(n-(k-1))/(n-(k-1))$ y el segundo por k/k; así, obtenemos la expresión

$$\frac{n!(n-(k-1))}{(n-(k-1)!k!}+\frac{n!k}{(n-(k-1)!k!}.$$

Como tenemos denominador común, podemos sumar los denominadores. Además, acomodaremos el denominador. Esto da como resultado

$$\frac{n!(n-k+1+k)}{(n+1-k)!k!}=\frac{n!(n+1)}{((n+1)-k)!k!}.$$

Entonces, el coeficiente queda

$$\frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!}.$$

Concluimos entonces que el término k-ésimo de la derivada $n+1$ es de la siguiente manera

$$\frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Por lo tanto, se demuestra la regla.

<u>Ejemplo 2:</u> Obtener la quinta derivada de $f(x) = 3x^4 \, sen\, x$.

Apliquemos la regla:

$$f^{(5)}(x) = \begin{array}{l} 3x^4 \frac{d^5}{dx^5}(senx) + 5\frac{d}{dx}(3x^4)\frac{d^4}{dx^4}(senx) + 10\frac{d^2}{dx^2}(3x^4)\frac{d^3}{dx^3}(senx) + \\ 10\frac{d^3}{dx^3}(3x^4)\frac{d^2}{dx^2}(senx) + 5\frac{d^4}{dx^4}(3x^4)\frac{d}{dx}(senx) + \frac{d^5}{dx^5}(3x^4) \bullet (senx) \end{array}$$

$$= 3x^4 cosx + 60x^3 senx - 360x^2 cosx - 720x\, senx + 360\, cosx + 0\, senx.$$

$$= 3x^4 cosx + 60x^3 senx - 360x^2 cosx - 720x\, senx + 360\, cosx.$$

Como dijimos al principio, el obtener derivadas sucesivas no solo nos arroja nuevas funciones que podemos analizar, sino que también será útil en el análisis de la función original y en la construcción de la gráfica de ésta función con mayor exactitud y precisión. Además, algunas aplicaciones de la derivada también se basan en las derivadas de orden superior.

1.7 DERIVADA Y LÍMITES INDETERMINADOS.

Recordemos que la derivada es un límite de una división, dado por

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Este límite, bajo ciertas condiciones, puede ser aplicado a una gran cantidad de funciones de varios tipos: constantes, lineales, algebraicas, trigonométricas, exponenciales, hiperbólicas, etc., algunas de las cuales hemos visto con anterioridad.

Además, hemos encontrado resultados importantes a partir de la definición de la derivada o sus propiedades que nos han proporcionado herramientas útiles para el estudio de funciones.

Ahora, el problema a tratar será la aplicación de la derivada para la obtención de un límite en un cierto punto; esto es, como si se tratara de obtener un límite a partir de otro límite, en este caso, la derivada.

Recordemos que en el estudio de límites de funciones, nos hemos encontrado con que algunos de los más problemáticos-y, por tanto, más trabajosos- son los límites indeterminados de la forma *0/0*. Estos son los límites que se aplican a una función dada por un cociente de otras dos y que el resultado de la aplicación del límite en el numerador y el denominador es cero; es decir, que al aplicar los límites obtengamos como resultado *0/0*.

Del estudio de los límites hemos obtenido procedimientos para resolver algunos de ellos. En muchos de los casos analizados –si no es que en todos- se aplican a funciones que son divisiones de ecuaciones algebraicas.

Pero, ¿Qué pasa si las funciones se complican y la teoría de límites no nos ayuda a obtener el valor deseado? Ahí es donde entra la aplicación de la derivada; en especial, para demostrar esta regla para límites, nos apoyaremos en un resultado anterior, producto del Teorema del Valor Medio: La Fórmula del Valor Medio de Cauchy, con esta variante:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Por lo tanto, podemos decir que nuestra nueva regla es otro resultado del Teorema del Valor Medio, el cual en esta ocasión se trata de manera especial.

Este resultado se conoce como la Regla de L'Hôpital*, la cual se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 1 (Regla de L'Hôpital): Sean f y g dos funciones en los reales continuas en $[a, b]$, diferenciables en (a, b) y tales que $f(c) = g(c) = 0$, para un c en (a, b) Si existe $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ y, además,

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Para la demostración del teorema, tomemos un punto $x \neq c$ pero dentro del intervalo (a, b). Entonces f es continua en $[c, x]$ y diferenciable en (c, x), por lo que podemos aplicar la fórmula del valor medio de Cauchy y tendremos que, para un punto d entre c y x,

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}.$$

Como $f(c) = g(c) = 0$, nuestra igualdad queda $\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ahora, podemos aplicar límite a esta expresión y, del hecho de que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim_{x\to c}\frac{f'(d)}{g'(d)}$ -recuerde que $d \in (c, x)$- y serán iguales a un valor L. A su vez, existe también $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$, por la igualdad

* G. F. A., Marqués de L'Hôpital (1661-1704). Matemático francés.

de arriba, por lo que también es igual a L. Y como esto se puede aplicar a cualquier valor x, entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(d)}{g'(d)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Así pues, gracias a la Regla de L'Hôpital, tenemos una herramienta que nos permitirá sacar de manera más sencilla el valor de límites indeterminados. Veamos un ejemplo para saber cómo se aplica la regla.

Ejemplo 1: Queremos obtener el límite de la expresión $\frac{senx}{x}$ cuando x tiende a cero. Primero, al aplicar ese límite a la expresión tenemos como resultado $0/0$. Ambas funciones cumplen las condiciones de la Regla de L'Hôpital, por lo que podemos aplicarla. Entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos(0)=1.$$ [†]

En el caso en el que la primera derivada siga dando como resultado $0/0$, podemos tomar ahora las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$. Si estas cumplen con las condiciones de la Regla de L`Hôpital, podemos aplicar nuevamente el límite, pero ahora será

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Y esto lo podemos aplicar de manera sucesiva, en caso de ser necesario, para obtener el valor del límite.

Cambiemos un poco las cosas: Si tenemos $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, podemos aplicar también la regla. La justificación consiste en poner $z = 1/x$, así, $z \to 0$, los límites se conservan y la regla se mantiene. Veamos una aplicación de ello:

Ejemplo 2: $\lim_{x\to\infty} xsen\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

[†] La derivada de la función sen x es la función cos x.

Si efectuamos el cambio $y = 1/x$, obtenemos

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{seny}{y}.^{‡}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital y el límite $\lim_{y\to 0^+} \cos y = 1$.

Entonces resulta

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y}{1} = 1.$$

Hemos involucrado ya al infinito. Esto nos servirá para adentrarnos en otro tipo de límites indeterminados: los infinitos; esto es, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Para ellos, tendremos una regla similar a la de L'Hôpital, la cual enunciamos.

Teorema 2 (Regla para límites indeterminados infinitos): Sean f y g dos funciones continuas en una vecindad del punto a. Supongamos también que $g'(x) \neq 0, \lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe y es igual a un valor L. Entonces, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

La idea de la demostración, al igual que la Regla de L'Hôpital, se basa en la Fórmula del Valor Medio de Cauchy, pero trabajado con más cuidado por la situación de los límites al infinito. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3: Encontrar $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(senx)}$.

Puesto que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \ln(senx) = -\infty$, entonces podemos considerar

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{-\ln(senx)}.$$

‡ El símbolo $x\to 0^+$ significa que x tiende a cero por la derecha.

Así, *f(x) = -ln x, g(x) = -ln (sen x),* $f'(x) = -\frac{1}{x}$ y $f'(x) = -\frac{\cos x}{senx}$.

Luego, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{senx}} = \frac{\frac{senx}{x}}{\cos x}$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x}}{\lim_{x\to 0^+} \cos x} = 1$.

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(senx)} = 1$.

Veamos algunos hechos importantes respecto a este teorema: El primero de ellos es que, al aplicarlo, encontramos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty .$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 .$$

Por el teorema de límites infinitos, también $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Finalmente, si volteamos de nuevo el cociente, obtenemos como resultado

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Podemos también determinar qué pasa con el límite si x, en vez de tender a un punto a, se dispara hacia infinito. Similar al caso considerado en la Regla de L'Hôpital, hacemos que $x = 1/z$ y nuestra regla para los límites al infinito sea válida, por lo que resulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Analicemos algunos ejemplos más de cómo se aplica esta regla:

Ejemplo 4: Obtener $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8}{7x^2-3}$.

Aplicamos dos veces la regla y obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8}{7x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{14x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{14}=\frac{3}{7}.$$

En general, si tenemos $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ para cualesquiera a, b, c, d, e y f reales, entonces el valor del límite será $\frac{a}{d}$.

Ejemplo 5: Calcular $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x})$.

Para este límite usaremos un criterio de comparación: Tomemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Entonces, si el límite de alguna de las dos funciones, ya sea la del numerador o la del denominador, tiende a un cierto valor L cuando x tiende a un punto a, el otro elemento del cociente tenderá también a L. Esto a raíz de que, si el resultado de una división es igual a uno, entonces tanto el numerador como el denominador son iguales; en este caso, los límites tienden a lo mismo.

Por lo tanto, si encontramos otra función $g(x)$ de tal manera que $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{g(x)}=1$, entonces el valor que tome el límite de $g(x)$, cuando x tiende a infinito, será el mismo valor que tome el límite deseado. Además, para resolver el límite del cociente que se generará, podemos valernos de la regla para límites indeterminados infinitos.

Entonces, de acuerdo con el criterio expuesto, podemos considerar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Por lo que hemos escogido $g(x) = x$. Ahora, veamos lo que pasa cuando resolvemos el límite de este cociente de funciones, con el uso de la regla para límites indeterminados infinitos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{1}.$$

Como $x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, entonces $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}=1$.

Entonces, $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x})$ y $\lim_{x\to\infty}x$ convergen al mismo valor. Pero $\lim_{x\to\infty}x=\infty$, por lo que $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x})=\infty$.

1.8 MÁXIMOS Y MINIMOS LOCALES

De acuerdo con secciones anteriores, la derivada nos ayuda a obtener información sobre la función de la cual proviene, ya sea para realizar un análisis más exacto de ésta o trazar su gráfica. Esta información puede ser, por ejemplo, los intervalos en los cuales la función crece o decrece.

También, dentro de los resultados que se pueden obtener a través de la derivación, están los puntos extremos, es decir, los máximos o mínimos locales, los cuales ya hemos definido con anterioridad. Además, hemos mostrado y también probado el Teorema del Valor Extremo, el cual nos dice que si la función tiene un valor extremo para un punto c dentro de un intervalo, entonces $f'(c) = 0$.

Es importante aclarar que también observamos que no siempre podemos tener el caso contrario, es decir, que si $f'(c) = 0$, para un punto c dentro de un cierto intervalo, no significa que c sea un máximo o mínimo local.

Esto, a fin de cuentas, nos abre la posibilidad de afirmar que tenemos a la mano una herramienta valiosa, el Teorema del Valor Extremo, para encontrar los puntos que pueden ser extremos locales; sin embargo, a la vez, parece que ésta no es suficiente para usarla y encontrar esos extremos. Por lo tanto, tendremos que valernos de otros resultados que complementen al antes mencionado teorema para que, por medio de él, encontremos con seguridad los máximos y mínimos dentro de intervalos definidos.

El complemento que mencionamos con anterioridad viene a través de otro teorema que ya fue probado secciones atrás: el Teorema de Monotonía; éste enunciado afirma que si $f'(x) > 0$ para cualquier punto x que se encuentre dentro de un intervalo definido dentro de su dominio, entonces f es creciente en ese intervalo. A su vez, para las x dentro de un intervalo, si $f'(x) < 0$, entonces la función es decreciente dentro de ese intervalo.

¿Eso qué tiene que ver con la posibilidad de determinar si un punto es o no es un extremo local? Por la manera en la que se comporta la función alrededor de algún extremo local.

Entonces, el procedimiento a seguir será el de analizar cómo es el signo de la derivada alrededor de los candidatos a máximos y mínimos locales; esto se hace a través de procedimientos tales como escoger uno o más puntos de prueba alrededor de los puntos que sean máximos o mínimos locales o análisis de la derivada en cada intervalo.

En el caso de encontrar que la derivada es negativa antes del punto, la función será decreciente; si es positiva después, será creciente; por lo tanto, habremos encontrado un mínimo. Algo similar ocurrirá en el caso del máximo: la derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha.

Cabe mencionar que, en el caso de que la derivada no cambie de signo en ambos lados del punto candidato a valor extremo, significará que la función sigue creciendo o decreciendo, según sea el caso. Por lo que podremos afirmar que el punto no es máximo o mínimo local.

Todo esto se puede resumir en un enunciado: El Criterio de la Primera Derivada para máximos y mínimos locales.

Teorema (Criterio de la Primera Derivada): Sea f una función real continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) excepto quizás para un c elemento de (a, b).

i. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces $f(c)$ es un máximo de f en (a, b).
ii. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces $f(c)$ es un mínimo de f en (a, b).
iii. Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un extremo local de f.

Como explicamos anteriormente, el teorema se demuestra con ayuda del Teorema de Monotonía. En el primer caso, antes de c la función es creciente y después de él es decreciente; por lo que $f(x) < f(c)$ para todo x en (a, b) excepto, claro está, para c. Por lo tanto, f tiene un máximo local en c. Para el segundo caso, la idea será similar: a la izquierda de c la función es decreciente; a su derecha, es creciente, por lo que $f(x) > f(c)$ para todo x en (a, b) que no sea c, por lo que f tiene un mínimo en c. Finalmente, para el tercer caso, si $f'(x) < 0$ a ambos lados del punto, la función decrece a ambos lados de c, por lo que podemos encontrar un x en (a, b) a la izquierda de c tal que $f(x)$ es mayor a $f(c)$ y un y en (a, b) a la derecha de c tal que $f(y)$ es menor a $f(c)$; por lo tanto, f no tiene un valor extremo en c. Lo mismo sucederá si $f'(x) > 0$ a ambos lados de c.

Ya mostrado este criterio, usémoslo en una función para encontrar sus puntos extremos.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = 1/3\, x^3 - x^2 - 3x + 4$. Buscar sus puntos extremos en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Primero, $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$. Esto nos arroja como candidatos a puntos extremos a los puntos $x = -1$ y $x = 3$.

Los puntos -1 y 3 dividen a $\mathbb{R}$ en tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$. Veamos qué signo toma $f'(x)$ en cada uno de ellos:

Si $x < -1$, entonces $x + 1 < 0$ y $x - 3 < -4 < 0$. Luego, $(x + 1)(x - 3) > 0$ y entonces $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$.

Si $-1 < x < 3$ se tiene que $x + 1 > 0$ y $x - 3 < 0$, de donde obtenemos que $f'(x) = (x+1)(x-3) < 0$ en $(-1, -3)$.

Finalmente, si $x > 3$, $x + 1 > 4 > 0$ y $x - 3 > 0$. Así resulta que $f'(x) = (x+1)(x-3) > 0$ en $(3, \infty)$.

Por lo señalado antes, $x = -1$ corresponde a un máximo local; de hecho, es máximo en $(-\infty, 3)$. A su vez, $x = 3$ resulta ser un mínimo local y también un mínimo en $(-1, \infty)$.

Para saber los valores de esos puntos, calculamos $f(-1)$ y $f(3)$.

$f(-1) = 1/3(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 4 = -1/3 - 1 + 3 + 4 = 17/3.$
$f(3) = 1/3(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 4 = 9 - 9 - 9 + 4 = -5.$

Por lo tanto, decimos que la gráfica de f tiene un máximo en el punto *(-1, 17/3)* y un mínimo en *(3, -5)*.

Existe otro criterio para conocer si los puntos extremos son máximos o mínimos locales, éste es el Criterio de la Segunda Derivada.

La idea de este criterio es la siguiente: investigaremos el comportamiento de la función en el punto extremo; sabemos ya que la primera derivada es igual a cero, pero si usamos el Teorema de Monotonía en la segunda derivada, conoceremos el signo de ésta en el punto, lo cual nos indicará hacia dónde va la primera derivada después del punto. Si la segunda derivada en el punto es positiva, la primera va hacia arriba -o crece- después del extremo, lo que nos indica que venimos de un mínimo; si es negativa, entonces vamos hacia abajo o decrecemos, lo que significa que partimos de un máximo.

Entonces, lo enunciaremos.

Teorema (Criterio de la Segunda Derivada): Sea f una función real continua y 2-diferenciable en un intervalo *(a, b)* para la cual $f'(c) = 0$ para algún punto c dentro del intervalo.

i. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.
ii. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.

Demostremos primero (i). Por definición,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Habíamos supuesto que $f'(c) = 0$ y que la segunda derivada en c es menor que cero, por lo que tenemos

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Por lo tanto, existe una vecindad de c –es decir, un intervalo (α, β) alrededor de c, el cual puede ser muy pequeño- para el que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$, con la condición $x \neq c$.

De esta desigualdad, encontramos que para los x entre α y c, $x - c$ es menor que cero, por lo que $f'(x) > 0$. A la vez, para x entre c y β, tenemos que $x - c$ es mayor que cero, por lo que $f'(x) < 0$. De acuerdo con el criterio de la primera derivada, f tiene un máximo en c.

Para (ii) usaremos una idea similar. De hecho, iniciamos igual y llegamos a que $\frac{f'(x)}{x-c} > 0$, para $x \neq c$. Para $\alpha < x < c$, tenemos que $x - c < 0$, por lo que $f'(x) < 0$; y para $c < x < \beta$, $x - c > 0$, por lo que $f'(x) > 0$. Estas son las condiciones del criterio de la primera derivada para el mínimo. Conclusión: f tiene un mínimo en c.

Para ejemplificar el criterio de la segunda derivada, usemos la misma función que en ejemplo del criterio de la primera derivada.

Ejemplo 2: $f(x) = 1/3\ x^3 - x^2 - 3x + 4$. Debemos encontrar sus puntos extremos dentro del intervalo $(-\infty, \infty)$.

Primero, $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$. Por lo que los candidatos a puntos extremos son $x = -1$ y $x = 3$.

Ahora, $f''(x) = 2x - 2$. Probemos los puntos obtenidos:

$$f''(-1) = 2(-1) - 2 = -2 - 2 = -4 < 0.$$
$$f''(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = +4 > 0.$$

Por lo tanto, f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 3$.

Los puntos donde se alcanzan máximos y mínimos se llaman puntos críticos. Además, tenemos otros puntos especiales, como los puntos singulares –aquellos donde $f'(x) = 0$ -, los puntos frontera –los extremos de los intervalos- y los puntos donde la derivada no existe. En algunos casos, también se pueden aplicar los criterios para saber cómo se comporta la función en esos puntos.

Esta observación la aplicaremos en nuestro siguiente ejemplo:

<u>Ejemplo 3:</u> Sea $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ con dominio en todos los reales.

Primero, veamos que la función está definida en todo ℝ, pues no podría estar definida en puntos donde el denominador $x^2 + x + 1$ fuese cero, pero no existe $x \in$ ℝ que cumpla $x^2 + x + 1 = 0$. En efecto, sus raíces son $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, que no se encuentran en los reales.

A continuación, encontraremos sus puntos extremos: la regla de la derivada de un cociente nos dice que

$$f'(x) = \frac{(\frac{d}{dx}(x+2)^2)(x^2+x+1) - (\frac{d}{dx}(x^2+x+1))((x+2)^2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(2(x+2))(x^2+x+1) - (2x+1)(x+2)^2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+4)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x - x^2 - 4x - 4}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 - 6x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-3x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Ahora, obtengamos los puntos singulares. Y entonces resolvemos $-3x\ (x + 2) = 0$. Por la misma idea que usamos arriba, resolvemos $-3x = 0$ y $x + 2 = 0$. De la primera, obtenemos $x = 0$; de la segunda, $x = -2$. Ahora, usemos el criterio de la primera derivada.

El signo de $f'(x)$ lo determina $-3x(x + 2) = 0$, ya que $(x^2 + x + 1)^2 > 0$. Los puntos -2 y 0 dividen a ℝ en tres intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$. Para $x < -2$ se tiene que $x + 2 < 0$ y $-3x > 0$; luego, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -2)$. Si $-2 < x < 0$, entonces $x + 2 > 0$ y $-3x > 0$, por lo que $f'(x) > 0$ en $(-2, 0)$. Y, para $x > 0$, $x + 2 > 0$ y $-3x < 0$, de donde $f'(x) < 0$ para $x > 0$.

Por lo tanto, f tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 0$.

$$f(-2) = \frac{(-2+2)^2}{(-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{0}{4-2+1} = 0.$$

Y $f(0) = \dfrac{(0+2)^2}{(0)^2 + (0) + 1} = \dfrac{4}{1} = 4.$

Entonces, esos puntos extremos en la gráfica de *f* son *(-2, 0)* y *(0, 4)*.

Ahora, veamos un caso en el que la derivada no exista en el punto. Sea $f(x)=|x|$. Si tomamos $c = 0$, la derivada no existe ahí, sin embargo, para los demás puntos es diferenciable. Para los $x < 0$, $f'(x) = -1$, mientras que para $x > 0$, $f'(x) = 1$. Por lo que, de acuerdo con el Criterio de la Primera Derivada, $c = 0$ resulta ser un mínimo.

En muchas aplicaciones se necesita obtener máximos y mínimos: en Física, Economía, Finanzas, Biología, Medicina, Topografía, Agricultura y muchas otras; básicamente, en cualquier situación en la que deseamos saber el máximo o el mínimo de algo: la mínima distancia, el área o el volumen máximo, el costo mínimo, el volumen máximo, etc.,… Pero eso es otra historia.

1.9 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

Dentro del análisis que se efectúa de las funciones a través de su derivada, ya sea para conocer sus puntos críticos o para dibujarla, también tiene que ver el comportamiento de la curvatura de la gráfica de la función: de qué forma es, en qué intervalos, hacia dónde se dirige, etc. Por ejemplo, podemos tener que la gráfica sea muy sinuosa, o sea, que presente muchas ondas, en un cierto intervalo de su dominio. Y para ello, usaremos las nociones de convexidad[1] y concavidad.

Se dice que una función $f(x)$ es convexa en un intervalo si para cualesquiera dos puntos a y b de un cierto intervalo, con $a < b$, el segmento de recta que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se encuentra por encima de la gráfica de f entre los mismos puntos. A su vez, $f(x)$ será cóncava en un intervalo si la que está arriba es la gráfica de f; es decir, que el segmento de recta que una a $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está por debajo de la gráfica de f en (a, b).

Cabe mencionar que, en otros textos sobre Cálculo Diferencial, a una función convexa también se le denomina como cóncava hacia arriba y a la cóncava de le llama cóncava hacia abajo; de esta manera, la concavidad se refiere a la curvatura de la función, no importa su forma. En esta ocasión, usaremos las nociones de función convexa y cóncava.

¿Y cómo expresamos de manera algebraica la condición de convexidad o la de concavidad? Primero la de convexidad: La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es, para cualquier x entre a y b, de la manera siguiente:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Como $f(x)$ es convexa, la recta se encuentra por arriba. Es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x).$$

[1] Existe otro contexto y, por lo tanto, otra definición de convexidad, sólo que relacionados a los conjuntos.

Si pasamos restando del otro lado de la desigualdad a $f(a)$ y, al mismo lado, dividiendo entre $(x - a)$ –note que $a < x$, por lo que $x - a > 0$ y entonces no se altera la desigualdad al pasar dividiendo-, nos queda la siguiente expresión:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Esta desigualdad, entonces, será lo que defina a las funciones convexas. Por otro lado, la concavidad se dará por la misma desigualdad, solo que en el sentido inverso. Es decir,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

De manera formal, escribimos.

Definición: Sea $f(x)$ función.

i) $f(x)$ es convexa en un intervalo J si para $a, x, b \in J$ con $a < x \leq b$ si se cumple que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

ii) $f(x)$ es cóncava en el intervalo J si para $a, x, b \in J$ donde $a < x \leq b$ se da la relación

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

A continuación, veamos algunos ejemplos de funciones cóncavas y convexas en intervalos definidos.

Ejemplo 1: La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo $\mathbb{R}$. Si $a \leq x \leq b$ se tiene que

$$(b+a) = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = (x+a).$$

Esto pasa si y solo si $b + a \geq x + a$, lo cual es claro.

Ejemplo 2: $f(x) = x^3$ para $x < 0$ es cóncava. Sean $a < x < b < 0$.

De $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tenemos que $b^2+ab+a^2 = \frac{b^3-a^3}{b-a} \leq \frac{x^3-a^3}{x-a} = x^2+ax+a^2$. A su vez, resulta que $b^2 - x^2 \leq a\,(x - b)$, de donde $b + x \leq -a$, y como $b + x < 0 < -a$, la desigualdad es verdadera.

Como un resultado adicional sobre la relación entre estos tipos de curvatura, podemos suponer que f es convexa. Entonces, ¿qué pasa con la función $-f(x)$?

Por definición, f es convexa si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \geq f(x)$. Si multiplicamos por -1 esta desigualdad, se tiene que

$$\frac{(-f)(b)-(-f)(a)}{b-a}(x-a)+(-f)(a) \leq (-f)(x).$$

Esto nos da la condición para que $-f$ sea cóncava.

Ahora, ¿cuál es la relación existente entre la convexidad o concavidad de una función y la derivada?

La gráfica de una función convexa se encuentra por debajo de la recta que une los extremos de un intervalo en el que posea esa propiedad. Entonces los valores de las pendientes de las tangentes en cada punto donde f es convexa aumenta. Y resulta, entonces, que esas pendientes de las rectas tangentes son la derivada de esa función. Y, como los valores de las pendientes aumentan, entonces f' es creciente. En el caso en el que f es cóncava, entonces las pendientes disminuyen, o sea, f' es decreciente.

Por lo tanto, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema: Sea f función real diferenciable en (a, b).

i) Si f' es creciente en dicho intervalo, entonces f es convexa en (a, b).
ii) Si f' es decreciente en (a, b), entonces f es cóncava sobre dicho intervalo.

Ejemplo 3: i) $f(x) = e^x$ es convexa en $\mathbb{R}$, pues $f'(x) = e^x$ es creciente.
ii) $f(x) = \ln x$ es cóncava en $(0, \infty)$ ya que $f'(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente.

Si recurrimos nuevamente al Teorema de Monotonía, pero esta vez aplicado a f', entonces nos encontramos que f'' es útil para conocer la concavidad o convexidad dentro de un intervalo, puesto que, si $f''(x) > 0$, entonces $f'(x)$ es creciente para dicho intervalo y cuando $f''(x) < 0$, tenemos que $f'(x)$ resulta decreciente sobre el mismo lugar.

Si ligamos este hecho con el teorema anterior, resulta el siguiente teorema.

Teorema (de Concavidad): Sea $f(x)$ una función real 2-diferenciable sobre (a, b).

i) Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es convexa sobre (a, b).
ii) Si $f''(x) < 0$ para cualquier x dentro de (a, b), entonces f es cóncava sobre (a, b).

Ahora, para conocer con exactitud los intervalos donde una función sea convexa y en los que sea cóncava, recurrimos a los puntos en los que la segunda derivada sea igual a cero. Luego, verificamos los signos entre dichos puntos y, si encontramos cambios de signo a los lados de cada punto, entonces, en ese punto, la función pasa de convexa a cóncava o viceversa. A esos puntos, donde la curvatura de la función cambia, se les conoce como puntos de inflexión.

Bajo este criterio, entonces, los candidatos a puntos de inflexión son las soluciones de $f''(x) = 0$ aunque, para algunas funciones, también pueden ser los puntos donde la segunda derivada no exista. Y los puntos buscados serán aquellos donde haya cambios de signo a cada lado de dichos puntos.

El ejemplo típico de punto de inflexión es $x = 0$ para $f(x) = x^3$, ya que $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$. Tenemos que $f''(x) = 0$ solo si $x = 0$ y para $x > 0$, $f''(x) = 6x > 0$ y para $x < 0$, $f''(x) < 0$; luego, $x = 0$ cumple con el criterio de punto de inflexión.

La función $f(x) = x^4$ cumple en $x = 0$ que $f''(0) = 0$, sin embargo, como $f''(x) = 12x^2$, se tiene que para $x \neq 0$, $f''(x) > 0$, por lo que no hay cambio de signo cuando se pasa por $x = 0$, por lo que $x = 0$ no es punto de inflexión. Por lo tanto, no siempre se cumple la condición contraria del criterio: si $f''(c) = 0$, entonces c es punto de inflexión.

Veamos un ejemplo de una función con varios puntos de inflexión y, por lo tanto, con varios intervalos de convexidad y concavidad.

Ejemplo 4: Sea $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + x + 2$.

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 48x + 1$.

$f''(x) = 12x^2 - 36x - 48 = 12(x^2 - 3x - 4) = 12(x+1)(x-4) = 0$.

Las soluciones de la ecuación son, entonces, $x = -1$ y $x = 4$. Estos son nuestros candidatos a puntos de inflexión.

Ahora, $f''(x)$ cumple que en el intervalo $(-\infty, -1)$, $f''(x) > 0$, en $(-1, 4)$, $f''(x) < 0$ y en $(4, \infty)$, $f''(x) > 0$. Por lo tanto, -1 y 4 son puntos de inflexión, ya que antes y después de cada uno de ellos la derivada tiene signos distintos. Además, tenemos que f es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(4, \infty)$, mientras que es cóncava en $(-1, 4)$.

Finalmente, para conocer los valores bajo f de los puntos de inflexión, veamos.

$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^3 - 24(-1)^2 + (-1) + 2 = 1 + 6 - 24 - 1 + 2 = -16$

$f(4) = (4)^4 - 6(4)^3 - 24(4)^2 + (4) + 2 = 256 - 384 - 384 + 4 + 2 = -506$.

Los puntos en la gráfica de f son $(-1, -16)$ y $(4, -506)$.

1.10 GRAFICACIÓN.

A lo largo de las secciones anteriores hemos encontrado, enunciado y probado resultados sobre características importantes de las funciones y cómo a través de la derivada los obtenemos: puntos críticos, máximos y mínimos locales, singularidades, zonas de crecimiento y de decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, solo por mencionar algunas.

Estas características de la función nos permiten el análisis y la descripción de la función sobre la cual trabajamos: en qué partes resulta continua y en dónde no lo es, en qué puntos tiende a ciertos valores y cuáles son esos límites, dónde sube y dónde baja, etc.

La información recabada sobre la función a analizar y la cual obtenemos a través de la diferenciación es importante, entre otras cosas, para trazar la gráfica, ya que podemos representar en ella todas las características mencionadas que nos permiten describir mejor la función en la que trabajamos.

Esto no significa que no existan otras maneras de hacerlo, pero las derivadas nos permiten el trazado de gráficas de funciones, en algunos casos, con mayor exactitud y con menos trabajo; además, nos abre la posibilidad de realizar gráficas de funciones que, bajo otros métodos de trazado, se vuelve una tarea complicada e incluso imposible de llevar a cabo.

Pero, para saber cómo se traza una gráfica usando las derivadas, analicemos los tipos de funciones que se nos pueda presentar.

A. Funciones polinómicas o polinomiales.

En esta primera clasificación encontramos los polinomios, es decir, las funciones de tipo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde a_i-las a- son números reales e $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son números naturales. Por ejemplo, sea
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$. Y ya que dimos un ejemplo de polinomios, usémoslo para ejemplificar su forma de graficarse con el uso de la derivada.

Nuestro primer paso será obtener algunos datos de la función original. Primero, cualquier número real puede ser sustituido en lugar de x y nos arroja valores reales, por lo que el dominio de la función son todos los reales, es decir, $\mathbb{R}$.

A continuación, podemos hacer $f(x) = 0$ para conocer los puntos donde la función se anula, es decir, las intersecciones de la función con el eje x. En algunos casos, resultaría una ecuación difícil y hasta imposible de resolver, lo cual nos sucede en este caso; por lo tanto, no lo haremos.

Ahora, ¿qué información podemos obtener de la primera derivada? Primero, derivemos.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2).$$

Al igualar a cero la primera derivada, el primer factor da como resultado $x = 2$, del otro, $x = -1$. Derivemos por segunda vez y veamos qué puntos son estos dos candidatos.

$$f''(x) = 12x - 6.$$

Probemos los puntos que hemos obtenido.

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 < 0 \\ f''(2) &= 12(2) - 6 = 24 - 6 = +18 > 0 \end{aligned}.$$

Por lo que f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 2$. También por el signo de $f'(x)$, podemos decir que $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $(2, \infty)$, mientras que es decreciente en $(-1, 2]$.

Para finalizar el análisis con la primera derivada, obtengamos los valores máximo y mínimo locales de la función.

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 7 = -2 - 3 + 12 + 7 = 14$$
$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 7 = 16 - 12 - 24 + 7 = -13.$$

Los puntos bajo la gráfica de $f(x)$ son $(-1, 14)$ y $(2, -13)$.

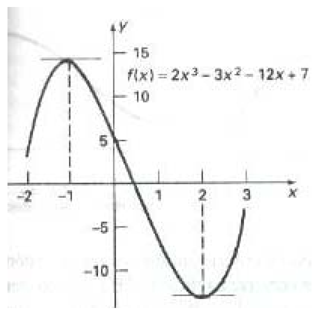
Ahora, $f''(x) = 12x - 6 = 0$. Entonces, $12x = 6$, por lo que $x = 6/12 = ½$.

Como $f''(x) > 0$ para $x > ½$ y $f''(x) < 0$ para $x < ½$, tenemos que f es cóncava en el intervalo $(-\infty, ½)$, mientras que es convexa en $(½, \infty)$. Para conocer el valor de inflexión, evaluamos la función en $x = ½$.

$$f(½) = 2(½)^3 - 3(½)^2 - 12(½) + 7 = ¼ - ¾ - 6 + 7 = -½ + 1 = ½.$$

Por lo tanto, la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $(½, ½)$.

Si aplicamos toda la información obtenida, la gráfica queda de la siguiente manera.



B. Funciones Algebraicas.

En este grupo se ubican funciones elevadas a cierta potencia o a una raíz. Por ejemplo, sea $f(x) = \sqrt{x}(x-5)^2$. Esta será nuestra función ejemplo.

Primero, por la raíz que se incluye, x solamente puede tomar valores positivos, por lo que su dominio es $[0, \infty)$. Y, por la definición de la función, este intervalo corresponde a la imagen de la función.

Este mismo hecho proporciona otra información: no podemos hablar de que f sea par o impar*.

Para conocer la intersección de la función con el eje x, igualamos a cero. Como tenemos una multiplicación, el primer factor da como resultado $x = 0$; el segundo, al sacar raíz cuadrada, queda $|x - 5| = 0$, por lo que $x = 5$.

Continuamos con la obtención de la primera derivada:

* f(x) es par si es simétrica al eje y, por lo que f(x) = f(-x). Y f(x) es impar si la simetría es respecto al origen, lo que es f(-x) = -f(x).

$$f'(x) = \frac{(x-5)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}(2(x-5)) = \frac{(x-5)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x})2(x-5)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(x-5)(x-5+4x)}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-5)(5x-5)}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x-5)(x-1)}{2\sqrt{x}}.$$

En primer lugar, la derivada no existe en $x = 0$, pero ya obtuvimos el valor de la función en ese punto. Luego, igualamos a cero el numerador y obtenemos $x = 5$ y $x = 1$; estos son nuestros candidatos a extremos. Obtenemos de una vez la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{5}{2} \bullet \frac{[\sqrt{x}((x-5)+(x-1)) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-5)(x-1)]}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{5[\frac{2x}{2\sqrt{x}}(2x-6) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-5)(x-1)]}{2x} = \frac{5[4x^2 - 12x - x^2 + 5x + x - 5]}{2x(2\sqrt{x})}$$
$$= \frac{5[3x^2 - 6x - 5]}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora, probamos los valores obtenidos en la primera derivada.

$$f''(1) = \frac{5[3(1)^2 - 6(1) - 5]}{4(1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5(3-6-5)}{4} = \frac{-40}{4} = -10 < 0.$$

$$f''(5) = \frac{5[3(5)^2 - 6(5) - 5]}{4(5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5(75-30-5)}{4(\sqrt{125})} = \frac{5(40)}{4(5\sqrt{5})} = \frac{10}{\sqrt{5}} > 0.$$

Por lo que f tiene un máximo local en $x = 1$ y un mínimo local en $x = 5$. Entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(1, 5]$ y es creciente en $[0, 1]$ y en $(5, \infty)$. Luego,

$f(1) = \sqrt{1}(1-5)^2 = 1(-4)^2 = 16.$

$f(5) = \sqrt{5}(5-5)^2 = \sqrt{5}(0) = 0.$

Por lo tanto, obtuvimos los puntos de la gráfica de f: $(1, 16)$ y $(5, 0)$.

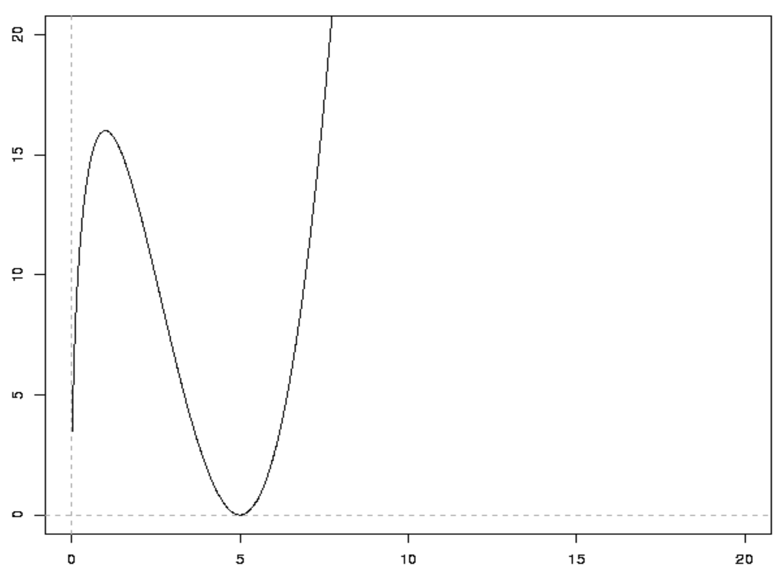
Vamos con la segunda derivada, la cual ya obtuvimos, para la curvatura. Nuevamente, no existe en el cero, pero ese problema ya quedó atrás. Igualamos a cero el numerador, o sea, $3x^2 - 6x - 5 = 0$, que si resolvemos por fórmula general nos da

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+60}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Pero, como el dominio de $f(x)$ es $[0, \infty)$, nos quedamos con la solución positiva, es decir, $1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$$f''(x) = \frac{5[3x^2 - 6x - 5]}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{5[x - (1 - \frac{2\sqrt{6}}{3})][x - (1 + \frac{2\sqrt{6}}{3})]}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$ Por lo tanto, cumple que $f''(x) < 0$ para $x < 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ y $f''(x) > 0$ para $x > 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Por lo tanto, f es cóncava en el intervalo $(0, 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3})$ y es convexa en el intervalo $(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}, \infty)$. Por lo tanto, la inflexión de la gráfica resulta, después de aplicar f, aproximadamente $(2.6, 9.2)$.

Entonces, la gráfica es



C. Funciones Racionales.

Este tipo de funciones son de la forma $f(x)/g(x)$, donde f y g son dos polinomios. Tomemos como ejemplo, tanto de este tipo de función como del análisis de ella, a $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 2(-x) + 4}{(-x) - 2} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{-x - 2}$. Esto significa que la función no es par ni impar. Por otro lado, si queremos saber las intersecciones con el eje x, hacemos $f(x) = 0$; como tenemos una división, basta que el numerador sea cero, o sea, resolvemos $x^2 - 2x + 4 = 0$. Si usamos la fórmula general de ecuaciones de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}.$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones en los reales, por lo que no hay intersección con el eje x. Por otro lado, si hacemos $x = 0$, obtenemos que $f(0) = \dfrac{(0)^2 - 2(0) + 4}{0 - 2} = \dfrac{4}{-2} = -2$, por lo tanto, la gráfica intersecta al eje y en $(0, -2)$.

Ahora vamos al denominador. La función no existe para los puntos en los que aquél es igual a cero –pues no existe la división entre cero-, lo cual pasa en el punto $x = 2$. Entonces, ¿qué pasa en este punto? Primero, cuando nos acercamos a 2 por la izquierda, el numerador tiende a ser positivo, pues el único elemento negativo, $-2x$, no puede tener valor absoluto mayor que 4; mientras tanto, el denominador tiende a ser negativo y muy pequeño, pues la diferencia $x - 2$ cada vez es más pequeña, por lo que el resultado de la división cada vez es con valor absoluto muy grande y negativa. Luego, por la derecha, el numerador también es positivo, pues el valor absoluto de $-2x$ es menor que el de x^2 para valores mayores de 2, mientras que el denominador es positivo y cada vez más pequeño, por lo que el resultado se agranda más y más. La conclusión de esto es

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty.$$

Por lo que *f(x)* tiene una asíntota vertical† en $x = 2$. En algunos casos, si el cociente resulta ser *0/0*, entonces podemos aplicar la Regla de L'Hopital, pero en este caso el numerador no es cero si $x = 2$.

Obtengamos $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(2x-2)-(x^2-2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{[(x-2)^2]^2}$$
$$= \frac{2(x-2)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{8}{(x-2)^3}.$$

De la primera derivada obtenemos los puntos $x = 0$ y $x = 4$. Bajo el criterio de la segunda derivada, los resultados son.

$$f''(0) = \frac{8}{(0-2)^3} = \frac{8}{(-2)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0.$$

$$f''(4) = \frac{8}{(4-2)^3} = \frac{8}{2^3} = \frac{8}{8} = +1 > 0.$$

Por lo tanto, *f* tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 4$, por lo que *f* es decreciente en *(0, 2)* y *(2, 4]*, mientras que en *(-∞, 0]* y *(4, ∞)*, *f* resulta creciente.

Luego, $f(0) = -2$ –ya lo habíamos obtenido-, mientras que

$$f(4) = \frac{(4)^2-2(4)+4}{4-2} = \frac{16-8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

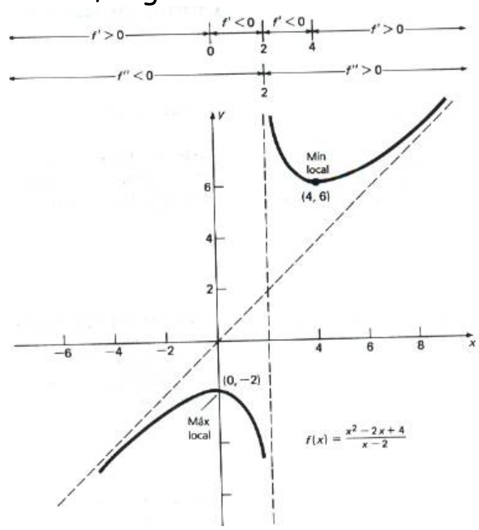
Por lo tanto, los puntos extremos en la gráfica son *(0, -2)* y *(4, 6)*.

† Una recta x = c es una asíntota vertical de una función si el límite de ésta cerca del punto tiende a infinito o a menos infinito y la función no existe para c.

Como $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$, $f''(x) > 0$ para $x > 2$ y $f''(x) < 0$ si $x < 2$. Luego, f es cóncava en $(-\infty, 2)$ y es convexa en $(2, \infty)$.

Como punto extra del análisis, como $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \dfrac{4}{x-2}$, entonces, si $x \to -\infty$, la fracción tiende a cero, igual si tiende a infinito, por lo que $f(x)$ tiende a la recta $y = x$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.

Con esta información, la gráfica resulta de esta manera.



D. Funciones en general.

En base a los casos anteriores, podemos bosquejar un método para graficar una función cualquiera en base a las derivadas:

1) Análisis previo al Cálculo.
    a) Verificar dominio e imagen de la función.
    b) Simetría de la función (par o impar).
    c) Intersecciones con los ejes coordenados.
    d) Asíntotas.
2) Análisis en base al Cálculo.
    a) Primera derivada: puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
    b) Búsqueda de máximos y mínimos locales.

c) Segunda derivada: Convexidad, concavidad y puntos de inflexión.
d) Asíntotas (con Reglas de L'Hôpital y de Límites Infinitos).

3) Dibujo de algunos puntos (intersecciones, críticos y de inflexión).
4) Bosquejo de la gráfica.

No siempre se seguirá al pie de la letra este método, pues no siempre encontraremos todos los elementos requeridos, las derivadas podrán no existir o se volverán a veces difíciles de resolver cuando igualamos a cero, la gráfica tendría otras características importantes que no sean las mencionadas, etc. En todo caso, el sentido común será sumamente importante a la hora de graficar.

Además, el método también tendría que aplicarse al resto de las funciones: trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas, etc., y a las combinaciones entre ellas y con las funciones vistas con anterioridad.

Ejemplifiquemos el método en general con la función $f(x) = 3\ sen\ 2x$. Su dominio resulta ser todos los números reales y su imagen queda comprendida en el intervalo $[-3, 3]$, pues la imagen de $sen\ x$ está entre 1 y -1. Como $sen\ x$ es impar, $f(x)$ también lo será. Ahora, $sen\ x = 0$ en los puntos de la forma $x = k\pi$, con k número entero $(\ldots,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\ldots)$, por lo que $f(x) = 0$ en los puntos $x = k\pi/2$, con k entero; esto significa que existen varios puntos de intersección con el eje x, mientras que la función sólo cruza al eje y en el origen. Debido a esta variedad de puntos, junto con el hecho de que $sen\ x$ es una función periódica en intervalos de tamaño 2π, entonces $f(x)$ es periódica en intervalos de tamaño π, nos restringiremos al intervalo $[0, \pi]$; la información obtenida se repetirá cada periodo de tamaño π.

Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son $x = \pi/2$ y $x = \pi$.
Las derivadas primera y segunda de $f(x)$ son

$$f'(x) = 3(2\cos 2x) = 6\cos 2x$$
$$f''(x) = 6(-2sen 2x) = -12sen 2x.$$

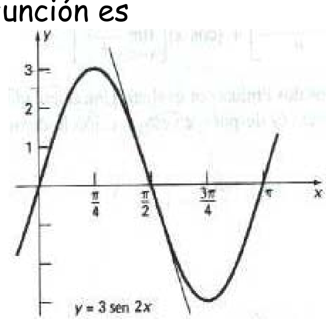
Como $\cos x = 0$ en los puntos $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$, entonces $f'(x) = 0$ en los puntos $x = \pi/4$ y $3\pi/4$. Al probarlos en la segunda derivada nos queda

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 < 0$$
$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -12sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -12(-1) = 12 > 0$$

Por lo tanto, f tiene un máximo relativo en $\pi/4$ y un mínimo relativo en $3\pi/4$; además, es creciente en $[0, \pi/4]$ y en $(3\pi/4, \pi]$, mientras que es decreciente en $(\pi/4, 3\pi/4]$. Y como dijimos que la imagen de $f(x)$ queda comprendida entre -3 y 3, entonces f tiene un máximo en $(\pi/4, 3)$ y un mínimo en $(3\pi/4, -3)$.

Al resolver $f''(x) = 0$, los puntos que obtenemos son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$; como 0 y π son puntos fronteras de nuestra restricción, nos enfocaremos en $x = \pi/2$. Como $f''(x) < 0$ en el intervalo $(0, \pi/2)$ y es positiva en $(\pi/2, \pi)$, entonces $f(x)$ es cóncava en el intervalo $(0, \pi/2)$ y es convexa en $(\pi/2, \pi)$.

La gráfica de esta función es



Y, como mencionamos que $f(x) = 3\ sen\ 2x$ es de periodo π, entonces tendremos una copia de esta gráfica en cada intervalo de tamaño π, es por ello que la gráfica se extiende más allá del intervalo restringido.

1.11 APROXIMACIÓN A UNA FUNCIÓN POR MEDIO DE POLINOMIOS.

Las herramientas que ya con anterioridad hemos mostrado, como la utilización de las derivadas de una función para conocer sus puntos críticos, sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, los de concavidad o convexidad y otras características, se vuelven un procedimiento que resulta útil para investigar, describir, analizar o graficar la regla de correspondencia de la cual partimos. A su vez, declaramos que puede convertirse en una manera sencilla de realizar todo lo anterior.

Sin embargo, de la misma manera, podemos toparnos con funciones que se convierten en un verdadero reto y para las cuales el análisis a través de las derivadas no aligera el problema.

Más aún, entre las características que podemos desear conocer respecto a una función, puede estar el valor exacto de ella en un punto específico. Para algunos puntos y algunas funciones no es difícil, pero, por ejemplo, ¿cómo le hacemos para saber cuánto es exactamente $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt[4]{7}}{5}\right)^3$, o *sen 25º54'25''*? No nos vayamos muy lejos, a veces saber con exactitud cuánto es $\sqrt{2}$ se convierte en un verdadero problema y más sin calculadora.

En esta sección nos valdremos de propiedades de ciertas funciones para acercarnos a una solución para este problema. Y, como decimos, nos acercaremos: no significa que hallaremos la solución definitiva, pero sí nos permitirá una aproximación.

De manera especial, nos enfocaremos a las funciones tales como el logaritmo, la exponencial o las trigonométricas, las que son conocidas como funciones trascendentes, debido a su definición. *

* Una función trascendente se define como una función no algebraica, por lo que las funciones anteriores entran en esta categoría.

Tomemos, por ejemplo, la función exponencial, es decir, $f(x) = e^x$; además, nos fijaremos en lo que sucede cuando nos paramos en el cero. Usaremos algunos detalles de esta función como si fueran un hecho, pero más adelante se demostrarán.

Primero, cuando $x = 0$, resulta que $f(0) = e^0 = 1$, debido a que $x^0 = 1$, para cualquier x número real con $x \neq 0$.†

Otro hecho que sobresale de la función exponencial es que $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = ... = e^x$, y es la única función a la cual le sucede. Por lo que, si nos volvemos a fijar en el cero, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = ... = 1$.

Ahora se trata de encontrar una función que pueda manejarse con más facilidad y que se aproxime al valor de la función y de sus derivadas en el punto dado. Por ejemplo, empecemos con probar con el polinomio $P(x) = x + 1$. Cuando $x = 0$, entonces $f(x) = 0 + 1 = 1$; luego, al efectuar la derivada de P, resulta que $P'(x) = 1 + 0 = 1$, por lo que $P'(0) = 1$. De esta manera, hemos encontrado una función g que coincide con f en el cero y cuya derivada también toma el mismo valor en el punto ya fijado. Si llevamos este hecho a una interpretación geométrica, resulta que $P(x) = 1 + x$ es la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(0, 1)$, pues las derivadas de ambas son iguales en el punto.

Ahora, si buscamos un polinomio de segundo grado que, además de tener las propiedades anteriores, también cumpla que $f''(0) = P''(0)$, tendremos una mejor aproximación de f en el punto $x = 0$ o incluso en una vecindad muy reducida alrededor de él. Ese polinomio resulta ser

$P(x) = 1 + x + ½\, x^2$.

Veamos si cumple las propiedades pedidas con anterioridad.

$P(0) = 1 + 0 + ½\,(0)^2 = 1 + 0 + 0 = 1$
$P'(x) = 1 + ½(2x) = 1 + x$, por lo que $P'(0) = 1$.
$P''(x) = 1$, por lo que $P''(0) = 1$.

---

† Esta afirmación se demuestra de la siguiente manera: $x^0 = x^{c-c} = \dfrac{x^c}{x^c} = 1$

Debido a esto, el polinomio $1 + x + \frac{1}{2} x^2$ resulta ser una mejor aproximación que la recta $1 + x$ en las cercanías del punto $(0, 1)$.

Si seguimos este proceso de forma sucesiva, entonces un polinomio de tercer grado que cumpla, además de lo anterior, que $f'''(0) = P'''(0)$ se convertirá en una mejor aproximación. Así con otro polinomio y la cuarta derivada, la quinta, la sexta, etc.

Para finalizar, de manera general, podremos terminar con un polinomio de esta manera:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

Este polinomio coincidirá con la función exponencial en el punto $(0, 1)$. También coincidirán estas dos funciones en sus derivadas hasta de orden n, derivada por derivada, en el mismo punto $(f'(0) = P'(0), f''(0) = P''(0),..., f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0))$.

En este caso particular, realizamos la aproximación a través de los polinomios, pero esto puede ser posible para otras funciones. ¿Y por qué por polinomios? Porque son funciones fáciles de manejar, de derivar y para trabajar en cálculos numéricos, debido a su definición, a la de sus derivadas y a que sus valores se pueden obtener a través de un número finito de sumas y multiplicaciones.

Entonces, si la diferencia del valor de una función con un candidato a polinomio para aproximar es suficientemente pequeña, conviene más calcular entonces con dicho polinomio que con la función original.

Si partimos con la misma idea del caso de la exponencial y en el punto $x = 0$, podemos llegar a un caso general para cualesquiera otras funciones. Entonces, para la aproximación de una función n-diferenciable, lo que necesitamos es un polinomio P que cumpla con las siguientes $n + 1$ condiciones:

$$f'(0) = P'(0), f''(0) = P''(0),..., f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0).$$

Es decir, que el polinomio deseado coincida con la función y sus primeras n derivadas, lo cual es importante para que el polinomio en verdad aproxime a la función.

Tomemos entonces un polinomio de ensayo, es decir, suponemos que existe uno cualquiera que cumpla con lo que deseamos, o sea, el P buscado es

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n.$$

Con c_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$ números naturales) en los números reales.

Lo que debemos determinar a continuación es el valor exacto de los coeficientes, para lo cual nos valdremos de las condiciones anteriores.

Cuando tenemos $x = 0$ en el polinomio, el único término que queda es c_0, por lo que $P(0) = c_0$. Y como $P(0) = f(0)$, entonces $f(0) = c_0$.

Si derivamos una vez el polinomio, nos queda

$$P'(x) = c_1 + 2c_2x + \ldots + nc_nx^{n-1}.$$

Por lo que, si evaluamos en cero, tenemos $f'(0) = P'(0) = c_1$

Derivamos de nuevo, evaluamos en cero y entonces nos queda $f''(0) = P''(0) = 2c_2$, por lo que $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Al continuar este proceso hasta el paso k, con $1 \leq k \leq n$, lo que nos queda entonces es $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0) = c_k$, de donde se obtiene que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Entonces hemos encontrado un polinomio con grado menor o igual a n tal que cumpla las condiciones establecidas.

De esto nos resulta un polinomio, el cual se le llama Polinomio o Serie de McLaurin[‡], el cual se enuncia en el siguiente teorema:

[‡] Colin MacLaurin(1698 – 1746). Matemático escocés

Teorema (Polinomio de MacLaurin): Sea f una función real n-diferenciable en el punto $x = 0$. Entonces existe un polinomio único P de grado $\leq n$ que satisface $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ para $k = 0, 1, 2, ..., n$ y cuya fórmula es

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

La demostración ha quedado ligeramente tratada arriba.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = sen\ x$, por lo que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -senx$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = sen\ x$, etc. Como $sen(0) = 0$ y $cos(0) = 1$, entonces $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n)}(0) = 0$. Por lo tanto, sólo aparecen potencias impares de x en el polinomio generado por $sen\ x$ en $x = 0$. Por lo tanto, el polinomio de grado $2n+1$ de esta función queda:

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Si tomamos como $f(x) = cos\ x$ en $x = 0$, usamos un razonamiento similar que con el seno y nos quedamos con las potencias pares, por lo que el polinomio de grado $2n$ queda

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Todo lo anterior lo hemos realizado para $x = 0$, pero también es posible para cualquier punto a del dominio de la función. El chiste es realizar un traslado de la variable hasta el punto a, es decir, el polinomio se aplica en $(x - a)$. Por lo tanto, quedan las mismas potencias que en el polinomio de McLaurin, pero aplicadas a $(x - a)$. Este es el Polinomio de Taylor[§] y el teorema asociado a él es el siguiente.

Teorema (Polinomio de Taylor): Sea f una función real n-diferenciable en el punto $x = a$. Entonces existe un único polinomio P de grado $\leq n$ que satisface $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. El polinomio queda descrito por la fórmula

[§] Brook Taylor (1685 – 1731). Matemático ingles

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

Ejemplo 2: Sea $f(x) = e^x$. Ya obtuvimos su polinomio en $x = 0$, pero ahora veamos cómo queda el polinomio en $x = 1$. Primero, $f^{(k)}(x) = e^x$, para cualquier k natural. Ahora, en este caso, $f(1) = e^1 = e \approx 2.7178...$. Entonces el polinomio de $f(x)$ cuando $x = 1$ queda como

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{e}{n!}(x-a)^n .$$

Estos polinomios pueden ser de gran apoyo a la hora de buscar un valor aproximado al valor de una función en un punto determinado c, es decir, $f(c)$. Por medio del polinomio de Taylor, aplicado en otro punto cercano a en el cual sea fácil de obtener, sustituimos x en el polinomio por el punto deseado c, lo cual nos dará un valor aproximado de $f(c)$.

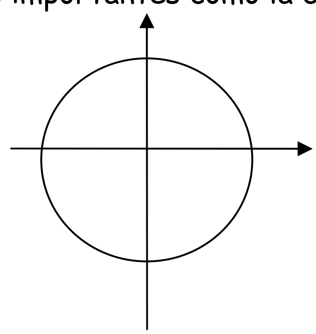
Eso sí, lo mejor es trabajar con un polinomio de un orden bastante alto, para que la aproximación sea lo más cercana posible.

Existen otras formas de aproximación a valores de una función en ciertos puntos, algunas de las cuales también incluyen en sus pasos a las derivadas: Estos últimos métodos serán temas de secciones posteriores.

1.12 DERIVACIÓN IMPLÍCITA.

Todo lo que sabemos sobre derivadas hasta este momento es aplicable para funciones. Recordemos que la función es una relación entre dos conjuntos en la que un elemento del dominio se relaciona con uno y sólo uno del contradominio, codominio o imagen.

Pero esto, en primera instancia, deja fuera a algunas ecuaciones representativas de figuras importantes como la circunferencia.



La ecuación correspondiente a la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, con r la medida de su radio. Esta misma también se vuelve un problema: por ejemplo, si deseamos conocer las rectas tangentes a los puntos de la ecuación, se necesita derivar una ecuación que, además de x, tiene a y dentro de su composición, es decir, se compone de dos variables independientes: x y y. La ecuación de la circunferencia no es el único ejemplo de ecuaciones así; podemos tener e incluso crear muchísimas ecuaciones en las que y también participe, como por ejemplo, $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

No todo está perdido; es más, de entrada, la solución no parece complicada: En el caso de la circunferencia, si despejamos y de su ecuación, resulta que $y^2 = r^2 - x^2$; de esta, se obtiene que $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. De esta manera, logramos expresar al círculo en términos de dos funciones. No parece tan mala idea, solo que nos genera un problema: tendríamos que hacer doble trabajo, pues entonces debemos de trabajar sobre dos funciones que se han generado: $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ y $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Esta idea también se puede aplicar para resolver ecuaciones con y como variable independiente: despejamos a y, lo que nos genera una ecuación en términos de x.

Por ejemplo, de la ecuación $4x^2y - 3y = x^3 - 1$, factorizamos y a la izquierda de la igualdad, por lo que obtenemos $y\,(4x^2 - 3) = x^3 - 1$; por último, despejamos a y, lo que nos da como resultado

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}.$$

Esta ecuación presenta a y en términos de x, por lo que entonces se puede manejar con métodos ya conocidos.

Sin embargo, nuevas cuestiones surgen respecto a estos métodos. Podemos tener gráficas de tal manera que descomponerlas en funciones sea complicado o hasta imposible de efectuar. A su vez, es posible que encontremos ecuaciones cuyo despeje sea un proceso laborioso o que no se pueda llevar a cabo.

Para ello, entonces, nos valdremos del método de diferenciación implícita. Se le conoce con este nombre debido a que, en este tipo de ecuaciones, y no está despejada de manera explícita ya que suponemos que si pasa esto, es decir, que y aparece en la ecuación en términos de x o que y está en función de x.

Esto quiere decir que podemos expresar $y = f(x)$, una simbolización que ya conocíamos, pero que en esta ocasión será vital para establecer este método, ya que podemos pensar en sustituir por $f(x)$ todas las veces que aparezca y en la ecuación. Entonces tendríamos que nuestra ecuación se consideraría una función en términos de $f(x)$.

Pero, de acuerdo a la Regla de la Cadena, si tenemos $g(f(x))$, su derivada es $g'(f(x))f'(x)$. Por lo que, después de diferenciar la expresión en la que y aparezca, tendremos que multiplicar por la derivada de y, es decir, añadimos la expresión $\frac{dy}{dx}$ -de acuerdo con la notación de Leibnitz- o el símbolo y'.

En el caso de los términos en los que tengamos solo a x, derivamos sin ningún problema, de acuerdo a los métodos que ya conocemos. Y si tenemos términos en los que x y y aparezcan juntos, aplicamos un método parecido a la regla para derivar un producto de funciones.

Finalmente, para resolver la ecuación, despejamos $\frac{dy}{dx}$ o y', según sea el caso.

Para ejemplificar la utilidad y la facilidad del método, volvamos al ejemplo anterior, es decir, $4x^2y - 3y = x^3 - 1$. Veamos qué sucede, tanto por el despeje de y como por derivación implícita.

1. Ya habíamos despejado a y, lo cual daba como resultado $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$, un cociente. Si derivamos esta expresión, resulta.

$$y' = \frac{(4x^2-3)(3x^2) - (x^3-1)(8x)}{(4x^2-3)^2} = \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2-3)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2-3)^2}.$$

2. De acuerdo con la Regla de la Cadena y la de derivada de un producto, nos queda:

$$8xy + 4x^2\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$8xy + \frac{dy}{dx}(4x^2-3) = 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx}(4x^2-3) = 3x^2 - 8xy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-8xy}{4x^2-3}.$$

A primera vista parece que no se obtiene el mismo resultado, pero es porque en la derivación implícita aparece y dentro del resultado. Si sustituimos a y por su despeje, entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8x(\frac{x^3-1}{4x^2-3})}{4x^2-3}=\frac{3x^2(\frac{4x^2-3}{4x^2-3})-\frac{8x^4-8x}{4x^2-3}}{4x^2-3}=\frac{12x^2-9x^2-8x^4+8x}{(4x^2-3)^2}$$

$$=\frac{4x^4-9x^2+8x}{(4x^2-3)^2}.$$

Ejemplo 2: Tenemos la ecuación $xy + sen\ y = x^2$. Por medio de la derivación implícita, el resultado es

$$x\frac{dy}{dx}+y+\cos y\frac{dy}{dx}=2x$$
$$\frac{dy}{dx}(x+\cos y)=2x-y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+\cos y}.$$

Este método puede parecer poco espectacular, no muy útil o sin chiste, pero es a través de los resultados que se generan o de los datos que se pueden obtener de donde obtiene su relevancia.

Primero, este teorema es auxiliar para la demostración del siguiente teorema, resultado que ya ha sido usado con anterioridad.

Teorema: Sea r un número racional cualquiera y supongamos que $y = x^r$ es diferenciable. Entonces

$$\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}.$$

Daremos un esbozo general a la prueba del teorema. Como r es racional, se puede escribir como p/q, con p y q enteros. Entonces $y = x^r = x^{p/q}$, de donde $y^q = x^p$. Aquí usamos la derivación implícita y la regla de derivación para exponentes enteros y obtenemos que $qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=px^{p-1}$, de donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\frac{y}{x}\frac{x^p}{y^q}.$$

Ahora, como $y^q = x^p$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{y}{x} = \frac{p}{q}\frac{x^r}{x} = rx^{r-1}.$$

Otra utilidad de la derivación implícita es la obtención de rectas tangentes en un punto de la gráfica. En el caso de funciones, la derivada nos proporciona la pendiente de la tangente en cierto punto de la función, por lo que podemos determinar la ecuación de esa recta, pues tenemos la pendiente, el punto por donde pasa y la ecuación se determina por la siguiente fórmula:

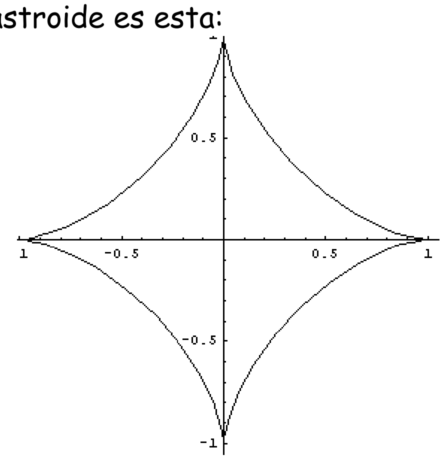
$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

En esta fórmula, (x_0, y_0) es el punto donde pasa la recta y m es su pendiente.

Muchas de las figuras que se expresan a través de ecuaciones que no son funciones también tienen tangentes en algunos o todos los puntos de la gráfica y podemos conocer la ecuación de esa recta tangente a través de la derivación implícita, pues, como acabamos de mencionar, la derivada nos da la pendiente de la recta tangente.

Ejemplo 2: Obtener la pendiente de la tangente al astroide generado por la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ en el punto $(-3\sqrt{3},1)$.

La gráfica del astroide es esta:



Por derivación implícita, nos resulta

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}} = \frac{\frac{-1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{y}}} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}.$$

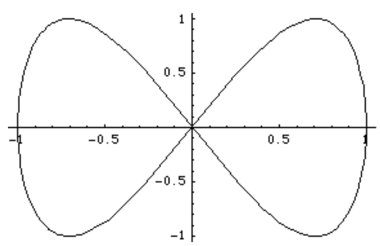
Si sustituimos el punto $(-3\sqrt{3},1)$ en la derivada, obtenemos $y' = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-3}\sqrt[6]{3}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Finalmente, la ecuación queda

$$y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3\sqrt{3}).$$

<u>Ejemplo 3:</u> Obtener la recta tangente a la lemniscata $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ en el punto $(3, 1)$.

Ésta es la gráfica de una lemniscata:



Primero, $2(x^2 + y^2)^2 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4$. Ahora, por derivación implícita,

$$8x^3 + 8xy^2 + 8x^2yy' + 8y^3y' = 50x - 50yy'$$
$$50yy' + 8x^2yy' + 8y^3y' = 50x - 8x^3 - 8xy^2$$
$$y'(50y + 8x^2y + 8y^3) = 50x - 8x^3 - 8xy^2$$
$$y' = \frac{50x - 8x^3 - 8xy^2}{50y + 8x^2y + 8y^3} = \frac{25x - 4x^3 - 4xy^2}{25y + 4x^2y + 4y^3}.$$

Al sustituir *(3, 1)* en esta derivada, tenemos:

$$y' = \frac{25(3)-4(3)^3-4(3)(1)^2}{25(1)+4(3)^2(1)+4(1)^3} = \frac{75-108-12}{25+36+4} = \frac{-45}{65} = -\frac{9}{13}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la tangente es

$$y-1=-\frac{9}{13}(x-3).$$

Otros datos se pueden obtener a través de este método. Uno de ellos es la ecuación de la recta normal, es decir, la recta perpendicular a la tangente. Como es perpendicular, si la pendiente de la tangente es m, entonces la de la normal es $-1/m$. Como las dos rectas pasan por el mismo punto, solo volteamos el resultado de la derivada.

Otro dato importante es el ángulo de intersección entre dos curvas. Lo que hacemos en este caso es calcular las derivadas en el punto de intersección, puesto que las tangentes solo se cruzan en el punto de intersección, de la misma forma que las gráficas. Con las pendientes m_1 y m_2 de cada curva en el punto de intersección, aplicamos

$$\tan\theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

1.13 EXPONENCIAL, LOGARITMO, INVERSA Y DIFERENCIAL.

En secciones anteriores se manejó la aproximación de una función por medio de los polinomios de Taylor y MacLaurin. Al ejemplificar cómo se obtienen estos polinomios, usamos la función exponencial, o sea, $f(x) = e^x$, y establecimos ciertos hechos referentes al comportamiento de esta función. En esta ocasión, junto con otros temas sobre la derivada, probaremos las características de esa función.

Conocemos el caso de x^r, con x variable que corra en los reales y r un número natural, entero o racional, función muy utilizada, por ejemplo, en los polinomios. Pero podemos invertir el orden: podemos tener r^x, con r una constante fija en los reales positivos y x variable real. Los casos en los que x es natural, entero o racional ya son conocidos; para el caso en el que x es irracional, el que falta, generalizamos la definición de esta función como

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r \text{, para } r \text{ racional.}$$

Las propiedades de los exponentes también se extienden a esta función; para probarlo, se usa la definición anterior. Además, tiene como dominio a todos los reales y como imagen solo a los reales positivos, pues a se encuentra en los reales positivos.

Entre las características de esta función, podemos tratar de obtener su derivada por medio de la definición de ésta:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

El límite resulta ser $f'(0)$, puesto que $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h}$. Por lo tanto, $f(x) = a^x f'(0)$.

Entre los valores que puedan obtenerse para $f'(0)$, uno de los casos más sencillos resulta cuando $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$. El real a que cumple con esta condición resulta ser el número $e \approx 2.71828...$, el cual resulta ser irracional. Y también es la base de la función llamada exponencial natural, que es la función $f(x) = e^x$.

De la regla obtenida de la derivada de la exponencial general, como tenemos que e es la base y pedimos que $f'(0)=1$, entonces obtenemos que $f'(e^x)=e^x$, lo que significa que la derivada de la exponencial es ella misma. Si elevamos la exponencial a una función u, por la Regla de la Cadena resulta

$$\frac{d}{dx}(e^u)=e^u\frac{du}{dx}.$$

Ahora, a partir de la exponencial, ¿existe una función $g(x)$ tal que $g(e) = 1$? ¿O que $g(e^x) = x$? ¿O incluso tal que $g(a^x) = x$? ¿O más aún, que también $e^{g(x)} = x$? La respuesta es sí; incluso, esa función tiene su nombre: logaritmo. Si la base que se eleva es a, entonces se le conoce como logaritmo de base a, o sea, $g(x) = log_a x$; si la base es e, entonces se la llama logaritmo natural, similar a la exponencial natural, la cual se escribe $g(x) = ln\, x$.

De hecho, ambas funciones cumplen una regla importante basada en la relación anterior: $log_a x = y$ es equivalente a $a^y = x$. Y de esta misma relación obtenemos que la función logaritmo tiene como dominio el intervalo $(0, \infty)$ y como imagen los reales. Además, como $e^0 = 1$, entonces $0 = ln(e^0) = ln\ 1$.

Entre las propiedades de los logaritmos, enlistamos las siguientes, que se basan en las leyes de los exponentes y se prueban en base a ellas.

<u>Teorema:</u> Sea $a > 1, x, y$ en los reales. Entonces

i) $log_a (xy) = log_a x + log_a y$.
ii) $log_a (x/y) = log_a x - log_a y$.
iii) $log_a (x^y) = y\ log_a x$.

Estas mismas propiedades aplican para el logaritmo natural. Además:

iv) Para a positivo y distinto de 1 se tiene $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Para demostrar esta propiedad, sea $y = log_a\, x$. Por la equivalencia de arriba, entonces $x = a^y$. Si aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la igualdad, resulta que $ln\ x = ln\ (a^y) = y\ ln\ a$. Al despejar a y, se obtiene la afirmación.

A continuación, obtengamos las derivadas de estas funciones. Primero, del logaritmo natural: Si $y = ln\ x$, entonces $x = e^y$. Por derivación implícita, $1 = e^y y'$, de donde $y' = \dfrac{1}{e^y}$. Como $y = ln\ x$, entonces $e^{ln\ x} = x$. Por lo tanto, la derivada resulta ser $1/x$. Y si se aplica el logaritmo a una función u, la derivada queda

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}du = \frac{du}{u}.$$

Luego, la de $g(x) = log_a\, x$. Usamos la propiedad (iv) y, ya que conocemos la derivada de $ln\ x$, entonces

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Y, de la misma manera, para una función u pasa que

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}du = \frac{du}{u\ln a}.$$

Completaremos ahora la derivada de a^x, pues había quedado $a^x f'(0)$.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{\ln a^x}) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}x\ln a = (e^{\ln a})^x \ln a = a^x \ln a.$$

Y, de la misma manera, si tenemos una función u, la derivada queda así

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

De la derivada de logaritmo natural resulta una nueva técnica de diferenciación: la derivación logarítmica. Puesto que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}du = \frac{du}{u}$$

Entonces, para derivar una función u, le aplicamos logaritmo natural, usamos sus propiedades para reducir las expresiones, luego derivamos y finalmente multiplicamos la derivada por u para dejar sola a du.

Esta regla puede ser en ocasiones más sencilla de aplicar, debido a que la derivada del logaritmo natural es muy fácil de obtener y, de acuerdo con las propiedades, las potencias y productos se convierten en productos y sumas.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3-4}}$. Por derivación logarítmica tenemos $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3-4}}\right)$. Por la propiedad (ii), queda $\ln(x+1) - \ln(\sqrt{x^3-4})$. Entonces obtenemos $\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x^3-4)$. Ahora, $F'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3x^2}{2x^3-8}$. Por último, multiplicamos por $f(x)$ y nos queda

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x+1} - \frac{3x^2}{2x^3-8}\right]\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^3-4}}\right].$$

De la relación entre las funciones exponencial y logarítmica encontramos otro concepto: la inversa de una función o función inversa. La idea de este concepto se da a partir de las operaciones entre números: la definición de suma en los enteros permite la existencia, para un entero z, de $-z$, también entero, tal que su suma nos resultara el neutro aditivo: el cero. El la multiplicación racional, para un r dado nos encontramos a $1/r$ tal que su producto sea 1, el neutro multiplicativo. Y para las funciones, si tenemos $f(x)$ podemos encontrar $f^{-1}(x)$* tal que la composición, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$ sea igual a la función identidad: $g(x) = x$, el neutro de la composición.

* Es importante aclarar que $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Es por ello que la función exponencial es la inversa del logaritmo: si aplicamos una y luego otra, el valor resultante es x.

Tenemos dos criterios para determinar si una función tiene inversa: una de ellos es que la función sea inyectiva o uno a uno, es decir, que si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. De manera gráfica, la inyectividad significa que una recta horizontal pase solo por un punto de la gráfica de la función. Otro criterio es que $f(x)$ sea estrictamente monótona, es decir, que si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$, pero que no se dé la igualdad; esto no es diferente de que f sea inyectiva.

Lo que sigue es encontrar esa función inversa. Para ello, buscamos despejar a x de la función, por lo que igualamos a y la función, luego despejamos x y por último cambiamos las y por x, así tenemos la inversa. ¿Fácil? No siempre, dependemos mucho de que se pueda despejar a y, junto con la dificultad que represente.

<u>Ejemplo 2:</u> Sea $f(x) = (x - 4)^3$. La ecuación a resolver es $y = (x - 4)^3$, de donde $\sqrt[3]{y} = x - 4$. Luego, $x = \sqrt[3]{y} + 4$. Por lo que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 4$. Comprobamos:

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{(x-4)^3} + 4 = x - 4 + 4 = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = \left(\left(\sqrt[3]{x} + 4\right) - 4\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \quad .$$

La interpretación gráfica de la relación entre una función y su inversa es que la gráfica de una es el reflejo de la otra; el espejo, o eje de reflexión, es la función $y = x$, la función identidad. Bajo la misma idea gráfica, podemos ver que si f es inyectiva y continua, f^{-1} también será una función continua.

Ahora, existe una relación entre funciones inversas y sus derivadas. Esta se conoce como el Teorema de la Función Inversa. La idea se basa en las pendientes de rectas reflejadas sobre la función $y = x$; si m_1 es la pendiente de una, $1/m_1$ es la de la otra, bajo previa suposición de que $m_1 \neq 0$. Recordamos que la pendiente de la recta tangente en cierto punto de una función es determinada por la derivada, así que éstas cumplen una relación similar, que se expresa a continuación.

Teorema (de la Función Inversa): Sea f función real inyectiva y diferenciable. Entonces f^{-1} es diferenciable en a y

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Siempre y cuando $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

El teorema se aplica de manera puntual, o sea, sólo se aplica para conocer la derivada de la inversa en un número real determinado. También el teorema nos proporciona un método específico: a pertenece a la imagen de f, o sea, $f(x) = a$; buscamos determinar esa x para que $f^{-1}(a) = x$; obtenemos f' y lo aplicamos a $f^{-1}(a)$; colocamos este resultado en el denominador, como indica el teorema, por lo cual se obtiene el valor de la derivada.

Ejemplo 3: Sea $f(x) = x^3 + x + 1$ y $a = 1$. Determinar $(f^{-1})'(a)$.

Primero, $f(x) = 1$, de donde, por inspección, $x = 0$, pues $0^3 + 0 + 1 = 1$. Por lo que $f^{-1}(1) = 0$. Ahora, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Entonces $f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 3(0)^2 + 1 = 1$. Por lo tanto, $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Podemos encontrar una dificultad más en este proceso: qué tanta dificultad representa obtener la x que cumple $f(x) = a$, o más bien, $f^1(a) = x$.

Terminaremos con un concepto que parece no ligarse con todo lo anterior, pero sí con todo lo referente a la derivada -y por lo tanto, sí se conecta con lo tratado antes-: el de diferencial.

Definición: Sea $y = f(x)$ función real y diferenciable en una x en los reales.

i) La diferencial de una variable independiente x, que se escribe dx, indica un incremento arbitrario de x, es decir, puede tomar cualquier valor en los reales, sea mayor o menor que x.
ii) La diferencial de la variable dependiente y, que se simboliza dy, se define como

$$dy = f'(x)dx.$$

De otra manera, si estamos en un punto *(x, f(x))* y nos desplazamos sobre el eje x a otro valor x_1, la diferencia de ese desplazamiento se establece con dx; por medio de la recta tangente a *(x, f(x))*, obtenemos el desplazamiento en el eje y, es decir, dy, por lo que éste depende de $f'(x)$ y de dx.

Por ejemplo, si $f(x) = x^3 + 2x^2$, entonces $f'(x) = 3x^2 + 4x$ y, por tanto, $dy = (3x^2 + 4x)\, dx$. Si tomamos $x = 2$ y hacemos $dx = 0.1$, entonces $dy = (3(2)^2 + 4(2))\,(0.1) = (12 + 8)\,(0.1) = 20\,(0.1) = 2$.

Las diferenciales se usan mucho en las aproximaciones. Un desplazamiento de la variable x en un punto fijo *(x, y)* produce un incremento que es representado por Δx; bajo la función, y también cambia, lo cual se simboliza como Δy. Si usamos las diferenciales, podemos considerar el desplazamiento en x como dx, pero dy indica el movimiento sobre la recta tangente, no sobre la función, pero con un incremento Δx pequeño, la diferencia también lo será. Y, por tanto,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x\,.$$

Ejemplo 4: Buscar una buena aproximación a $\sqrt{4.6}$.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $x = 4$. La x cambia de 4 a 4.6, por lo que $\Delta x = 0.6$. Luego, y aproximadamente se mueve de $\sqrt{4} = 2$ a $2 + dy$. Ahora,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{2(2)} = \frac{0.6}{4} = 0.15\,.$$

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx f(x) + dy = \sqrt{4} + 0.15 = 2.15\,.$$

Donde se necesita buscar valores aproximados, como la capacidad aproximada de un recipiente, estimación de ganancias o pérdidas, conocer más o menos la cantidad de corriente que pasa por un cable, calcular como cuánta población hay, etc., las diferenciales también se aplican. Se trata de conocer que tanto vale algo, más o menos.

1.14 PROBLEMAS RESUELTOS 1

En todas las secciones anteriores se ha establecido la parte teórica de la derivada, por ejemplo, su definición -incluso la interpretación geométrica-, las derivadas de algunas funciones básicas, sus operaciones, las propiedades resultantes de algunos teoremas –como el del Valor Medio, el de la Función Inversa, etc.- y las aplicaciones de la derivada en aspectos del estudio de funciones, como el análisis, la graficación o la obtención de límites indeterminados.

En todo ello se añadieron algunos ejemplos de las definiciones, propiedades, etc., sin embargo, todavía se pueden añadir más y también mostrar con otros problemas aplicaciones no especificadas, como el uso de la derivada para resolver situaciones en materias como ciencias naturales, ciencias sociales, economía, etc. Este es el propósito de ésta y de las siguientes secciones.

Los problemas de estas secciones se encuentran en el libro de James Stewart, "Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas", bajo las secciones tituladas Complemento de Problemas en los capítulos que tratan el tema de la derivada.

Es importante resaltar la misma aclaración que el autor hace sobre las secciones mencionadas: los problemas no son única y exclusivamente sobre la diferenciación, sino incluyen conocimiento previo sobre funciones, su teoría y propiedades, algo que se realizó en ocasiones durante el desarrollo de este trabajo.

Entonces, sin más preámbulos, comencemos.

1. a) Calcula la suma de la serie geométrica finita $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.
   b) Deduce una fórmula para obtener la suma de los términos
   $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

   a) Primero, si tenemos que $x = 1$, obtenemos lo siguiente:

$$S = \sum_{i=0}^{n} 1^i = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1.$$

Por lo tanto, nos enfocaremos en el caso en que $x \neq 1$.

Para resolver ese caso, sea $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$. Como la suma algebraica es conmutativa, podemos escribir $S = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$. A continuación multiplicamos la suma por -1, de donde obtenemos que $-S = -x^n - x^{n-1} - ... - x - 1$. Tomamos otra suma, pero esta multiplicada por x, lo que nos da como resultado $xS = x\ (x^n + x^{n-1} + ... + x + 1) = x^{n+1} + x^n + ... + x^2 + x$. A continuación efectuamos la resta $xS - S = x^{n+1} + x^n + ... + x^2 + x - x^n - x^{n-1} - ... - x - 1$. Todos los elementos interiores de esta resta se eliminan a excepción del primero y del último, es decir, $xS - S = x^{n+1} - 1$. Como $xS - S = S(x - 1)$, despejamos S, de donde obtenemos, para $x \neq 1$,

$$S = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

b) Es importante hacer una deducción previa para esta otra suma, la cual llamaremos S'. Si le sumamos cero no cambia en lo absoluto, pero nos ayuda a ver algo importante

$$\frac{d1}{dx} = 0, \frac{dx}{dx} = 1, \frac{dx^2}{dx} = 2x, \frac{dx^3}{dx} = 3x^2, ..., \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Esto significa que la suma deseada resulta que es la suma de las derivadas de cada término de la suma efectuada en (a). Por lo que escribimos

$$S' = \frac{d1}{dx} + \frac{dx}{dx} + \frac{dx^2}{dx} + \frac{dx^3}{dx} + ... + \frac{dx^n}{dx}.$$

Puesto que la derivada es lineal, es decir, la suma de las derivadas es la derivada de la suma,

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + ... + x^n).$$

Por lo tanto S' resultó ser una notación adecuada para la suma a obtener. Por lo tanto, efectuaremos

$$S' = \frac{d}{dx}(\sum_{i=0}^{n} x^i) = \frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}) = \frac{(x-1)((n+1)x^n) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)((nx^n + x^n) - x^{n+1}+1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} + x^{n+1} - nx^n - x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Concluimos entonces que

$$S' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

2. Evalúa $\lim_{x \to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$.

Para la evaluación de este límite, bastará recordar la definición de valor absoluto:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } 2x-1 \geq 0, \text{ es decir, si } x \geq ½. \\ -(2x-1) & \text{si } 2x-1 < 0, \text{ es decir, si } x < ½. \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } 2x+1 \geq 0, \text{ es decir, si } x \geq -½. \\ -(2x+1) & \text{si } 2x+1 < 0, \text{ es decir, si } x < -½. \end{cases}$$

Como lo que buscamos es el límite de la función cuando x tiende a cero, podemos tomar vecindades alrededor del cero lo suficientemente pequeñas para que no sobrepasen el ½ y el - ½ en cada desigualdad. Eso hará entonces que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(2x-1) - (2x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x+1-2x-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-4x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4) = -4\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x} = -4\,.$$

3. Si f es diferenciable en a, y $a > 0$, evalúa el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\,.$$

Para este límite, usaremos la regla algebraica de los binomios conjugados, esto es, $(a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2$. Por lo tanto, multiplicaremos el límite por el conjugado del denominador, tanto arriba como abajo (pues es lo mismo que si multiplicamos por uno). En pocas palabras,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\bullet\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\,.$$

En el denominador, a partir del hecho de que $a > 0$, de que si x tiende a ese número positivo, podemos tomarlo en una vecindad lo suficientemente pequeña para que también sea positivo y, por tanto, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ y que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, se obtiene que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})\,.$$

De acuerdo a la propiedad sobre límites que indica que el límite de un producto es el producto de los límites, en el caso en el que ambos existan, podemos escribir

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\bullet\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

De este resultado, observamos que lo obtenido en el primer factor es la definición de $f'(a)$; por otro lado, para el segundo factor tenemos que

$$\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = \sqrt{a}+\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}f'(a).$$

4. a) Define el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$.
   b) Determina $f'(x)$

   a) Para obtener el dominio de la función, vayamos por partes: Antes que nada, definamos $u(x) = \sqrt{2-\sqrt{3-x}}$ y sea $v(x)=\sqrt{3-x}$. Además, recordemos un hecho importante de la raíz cuadrada: la imagen de $\sqrt{g(x)}$, para cualquier función g, está en los reales positivos junto con el cero, es decir, que $\sqrt{g(x)} \geq 0$.

   Primero, de $f(x)$, vemos que la imagen de $u(x)$ debe estar dentro del intervalo $(-\infty, 1)$ para que la función tenga sentido, pero, por definición de la raíz cuadrada, $u(x)$ arroja valores positivos, por lo que la imagen de $u(x) = [0, 1]$.

   Ahora, analicemos $u(x)$, que depende de $v(x)$. Para que $u(x)$ arroje valores entre 0 y 1, la imagen de $v(x)$ debe estar entre 1 y 2.

   Por último, para que $v(x)$ tenga sentido y concuerde con las imágenes de las composiciones anteriores, necesitamos que arroje valores entre 1 y 2. Entonces, para que $v(x) = 1, x = 2;$ y para que $v(x) = 2, x = -1$. Los valores que se hallen entre estos números reales harán que $f(x)$ arroje resultados entre los valores deseados.

   Por lo tanto, $Domf = [-1, 2]$.

b) Para obtener la derivada de $f(x)$, debemos valernos de la Regla de la Cadena aplicada varias veces. Empecemos por.

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{2\sqrt{1-u(x)}}.$$

$$u'(x) = \frac{-v'(x)}{2\sqrt{2-v(x)}}.$$

$$v'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Por lo tanto, queda

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-u(x)}}\,\frac{-1}{2\sqrt{2-v(x)}}\,\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}}\,\frac{-1}{2\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}\,\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

$$= \frac{-1}{8\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}\bullet\sqrt{2-\sqrt{3-x}}\bullet\sqrt{3-x}}.$$

1.15 PROBLEMAS RESUELTOS 2

Continuamos con nuestra lista de problemas resueltos. En esta ocasión, entre otros ejercicios, nos enfocamos a problemas sobre límites, en algunos de los cuales veremos si es posible o no aplicar la Regla de L'Hopital y, en caso de que así sea, llevarlo a cabo.

1. Evalúa $\lim_{x\to 0}\frac{sen[(3+x)^2]-sen9}{x}$.

Se antoja la aplicación de la Regla de L'Hopital, pero para ello necesitamos averiguar si este límite es indeterminado de la forma *0/0*. No existe problema con el denominador: si x tiende a cero, la función del denominador tiende también a cero; ahora veamos qué pasa con el numerador: si x tiende a cero, entonces

$$\lim_{x\to 0}[sen[(3+x)^2]-sen9] = sen9 - sen9 = 0.$$

Entonces sí, este límite es indeterminado de la forma *0/0* y, por lo tanto, la Regla de L'Hopital es aplicable, ya que, además el numerador y el denominador son funciones diferenciables. Entonces derivamos el numerador y el denominador y a esas nuevas funciones les aplicamos el límite, ya que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen[(3+x)^2]-sen9}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(3+x)\cos[(3+x)^2]}{1} = \lim_{x\to 0}(6+2x)\cos[(3+x)^2]$$

$$(6+0)\cos[(3+0)^2] = 6\cos 9.$$

2. Evalúa, para a constante,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(a+2x)-2sen(a+x)+sena}{x^2}.$$

De nueva cuenta, evaluemos el numerador y el denominador cuando x tienda a cero para analizar si tenemos un límite indeterminado de la forma $0/0$. El denominador, puesto que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, es cero. A su vez, en el numerador tenemos que

$$\lim_{x\to 0}[sen(a+2x)-2sen(a+x)+sena] = sena-2sena+sena$$

$$= -2sena+2sena = 0.$$

Por lo tanto, la regla de L'Hopital se puede aplicar. Además, las funciones que se encuentran en el numerador y el denominador son diferenciables.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(a+2x)-2sen(a+x)+sena}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(a+2x)-2\cos(a+x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-\cos(a+x)}{x}.$$

Este es el resultado de derivar al numerador y el denominador. Sin embargo si aplicamos el límite a esta expresión, resulta que el denominador es igual a cero, mientras que en el numerador resulta

$$\lim_{x\to 0}\cos(a+2x)-\cos(a+x) = \cos a - \cos a = 0.$$

Pero, de acuerdo con un resultado obtenido a partir de la Regla de L'Hopital, podemos volver a derivar y, si existe ese límite, entonces será igual al límite de las primeras derivadas y, a su vez, será igual al límite del numerador y el denominador originales.

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(a+2x)-2sen(a+x)+sena}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-\cos(a+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a+2x)+sen(a+x)}{1}=-2sena+sena=-sena\,.$$

3. Supongamos que f es diferenciable en 0 y que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2\,.$$

a) Calcula $f(0)$.

b) Calcula $f'(0)$.

c) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$.

a) Puesto que f es diferenciable en $x = 0$, entonces f es continua en cero, por lo que $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$. A su vez,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}(x)$$

Por la regla del producto de límites, obtenemos

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\bullet\lim_{x\to 0}x=(4)(0)=0 \;\; \bullet\lim_{x\to 0}x\,.$$

Por lo tanto, $f(0) = 0$.

b) Para obtener el valor de $f'(0)$, nos apoyamos en la definición de derivada:

$$f'(0) = \;\; f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\,.$$

Ya sabemos que $f(0) = 0$, por lo que el límite resulta

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 4 .$$

Por lo tanto, $f'(0) = 4$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} \bullet \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

En este caso, no fue necesario pedir que g fuera diferenciable.

4. Demuestra que $log_2 5$ es un número irracional.

Para la demostración de este ejercicio, usaremos una técnica llamada contradicción o reducción al absurdo; esta consiste en suponer lo contrario de lo que queremos demostrar y, a través de la información que se obtenga a partir de esa hipótesis y de reglas de demostración, debemos llegar a una conclusión que no sea posible que ocurra o que contradiga información previa que sea verdadera o que supusimos con anterioridad.

En este caso, supongamos que el número de nuestra hipótesis es lo contrario de irracional; es decir, que $log_2 5$ es un número racional. Esto significa que podemos escribir este número como otro de la forma p/q, con p y q números enteros tales que q sea distinto de cero y que p y q sean primos relativos, esto es, que el único divisor común que tengan sea 1. En conclusión, escribimos $log_2 5 = p/q$.

Si usamos la relación que se estableció con anterioridad respecto a logaritmos y exponenciales, la cual nos indica que $log_a y = x$ es equivalente a $a^x = y$, entonces, de $log_2 5 = p/q$ obtenemos que $2^{p/q} = 5$. Si elevamos toda la expresión a la potencia q –lo cual es posible porque $q \neq 0$-, del lado izquierdo resulta $(2^{p/q})^q = 2^{pq/q} = 2^p$. Por lo tanto, la igualdad queda $2^p = 5^q$. Ahora, como $q \neq 0$, entonces $5^q > 5^0 = 1$ y es un número impar.

Entonces, en conclusión, tenemos que una potencia entera del número 5 se ha escrito como potencia de 2. Pero $2^p > 1$ siempre es un número par, de donde obtenemos una contradicción, ya que ningún número impar puede ser par.

Conclusión: $log_2 5$ es un número irracional.

5. Si x, y y z son números positivos, demuestra que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geq 8.$$

La expresión algebraica puesta arriba es un producto de otras tres:

$$\frac{(x^2+1)}{x} \geq 2 \quad , \quad \frac{(y^2+1)}{y} \geq 2 \quad \text{y} \quad \frac{(z^2+1)}{z} \geq 2.$$

Bastará entonces ver que, en general, se tiene para cualquier $a > 0$ la desigualdad

$$\frac{(a^2+1)}{a} \geq 2.$$

Pero esta desigualdad es equivalente a las siguientes:

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

Lo cual es equivalente a obtener lo siguiente:

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

Y, a su vez, lo anterior es equivalente a:

$$(a-1)^2 \geq 0.$$

Esta última expresión siempre resulta positiva, por lo que la desigualdad de donde iniciamos es verdadera, ya que fuimos estableciéndola a través de equivalencias; por lo que todos los razonamientos usados resultan válidos. Es decir, para cualquier $a > 0$ siempre se cumple

$$\frac{(a^2+1)}{a} \geq 2 .$$

Por lo que resultan válidas las tres desigualdades de arriba

$$\frac{(x^2+1)}{x} \geq 2 \qquad \frac{(y^2+1)}{y} \geq 2 \qquad \frac{(z^2+1)}{z} \geq 2 .$$

Y, al multiplicarlas entre si, el resultado es

$$\left[\frac{(x^2+1)}{x}\right]\left[\frac{y^2+1}{y}\right]\left[\frac{z^2+1}{z}\right] \geq (2)(2)(2) .$$

De donde concluimos que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geq 8 .$$

1.16 PROBLEMAS RESUELTOS 3

Continuamos con nuestra lista de ejercicios resueltos. En esta ocasión nos enfocaremos en la aplicación de la diferenciación a problemas gráficos: obtención de puntos específicos, gráficas, aplicaciones a la geometría –tanto plana como analítica-, entre otros.

1. a) Sean L_1 y L_2 dos rectas que se intersecan –o cortan- formando el ángulo α, entonces

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

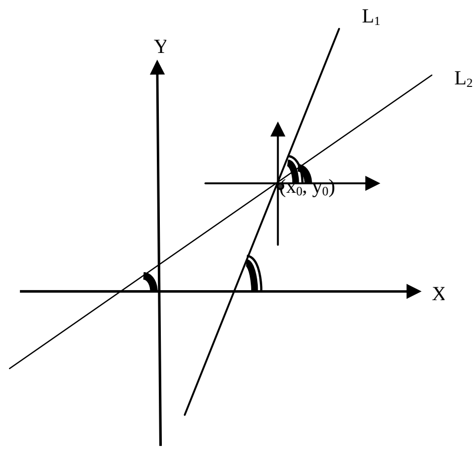
Donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2 respectivamente.

b) El ángulo entre las curvas C_1 y C_2 en su punto de intersección P se define como el formado por las tangentes a C_1 y C_2 en P (si dichas tangentes existen). Aplica el resultado de (a) para calcular, con precisión del grado, el ángulo formado entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

i) $y = x^2$ con $y = (x-2)^2$.
ii) $x^2 - y^2 = 3$ con $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$.

a) Este ejercicio fue parte de la teoría sobre la derivación implícita (véase la sección 1.12). En esa ocasión la fórmula y el método a seguir fueron mencionados sin detalle. Pero ahora nos toca demostrar que esta herramienta es válida.

Para darnos una idea de la demostración, apoyémonos en el siguiente dibujo:



Primero, veamos lo que pasa con una relación entre la tangente y una recta. Tomemos una recta cualquiera y nos paramos en un punto (x_0, y_0) cualquiera que pertenezca a la recta. En ese punto supondremos que tenemos un nuevo origen, por lo que de momento pensemos que (x_0, y_0) sería un nuevo $(0, 0)$ y rectas paralelas a los ejes coordenados que pasen por (x_0, y_0) serán nuestros ejes temporales. Luego, nos desplazamos hasta un punto (x, y) que se encuentre sobre la recta.

Ahora, la tangente de un ángulo queda definida por la medida del cateto opuesto entre la del cateto adyacente, lo que se simboliza como $\tan \alpha = C.O. / C.A.$ Si nos fijamos en el ángulo que la recta forma con el eje x temporal, resulta que el cateto opuesto es el desplazamiento vertical hacia (x, y), o sea y; de la misma manera, el cateto adyacente será x. Entonces

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = m\ .$$

La m que resulta al final es, pues, la pendiente de la recta, pues el cociente que sale al final es su definición. Por lo tanto, la tangente del ángulo que una recta forma con la horizontal es igual a su pendiente.

Ahora, tenemos dos rectas L_1 y L_2 que se intersecan en un punto, con pendiente m_1 y m_2 cada una, respectivamente. Sean α_1 el ángulo que L_1 forma con la horizontal y α_2 el correspondiente a L_2. Supongamos que $\alpha_2 > \alpha_1$; en caso contrario, invertimos los nombres de las rectas. Tenemos, pues, entonces, que el ángulo α que se forma entre las rectas es $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Por lo tanto

$$\tan\alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}.$$

Por lo que mostramos arriba, es decir, que $tan\ \alpha = m$, resulta que $tan\ \alpha_1 = m_1$ y $tan\ \alpha_2 = m_2$. Tenemos, en conclusión, que

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

b) Para los dos problemas usaremos un hecho importante: la derivada es la pendiente de la tangente, por lo que, después de obtener el o los puntos de intersección, derivaremos cada función para obtener la pendiente en el punto deseado; después, aplicamos la fórmula obtenida arriba para conocer el ángulo de intersección de las curvas.

i) Primero, conozcamos el punto de intersección igualando las ecuaciones de las curvas. Como ambas son iguales a y, entonces

$$x^2 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$
$$x^2 - x^2 + 4x = 4$$
$$x = 4/4 = 1.$$

Para conocer la coordenada en y sustituimos x en cualquiera de las ecuaciones. En este caso, para comprobar que es el punto donde las curvas se intersecan, lo haremos en las dos:

$$y = (1)^2 = 1$$
$$y = ((1)\text{-}2)^2 = (\text{-}1)^2 = 1.$$

Por lo tanto, el único punto de intersección es $(1, 1)$.

De la primera curva, $y' = 2x$. Por lo que la pendiente es $y' = 2(1) = 2$. De la segunda, $y' = 2(x - 2) = 2x - 4$, de donde la pendiente resulta $y' = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$.

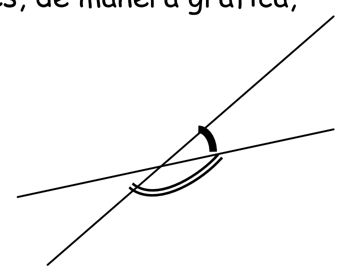
Entonces

$$\tan\alpha = \frac{-2-(2)}{1+(-2)(2)} = \frac{-4}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Pero también

$$\tan\alpha = \frac{2-(-2)}{1+(-2)(2)} = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}.$$

Del primer resultado obtenemos que $\alpha = \tan^{-1}(4/3) \approx 53°$, mientras que del segundo, $\alpha = \tan^{-1}(-4/3) \approx 127°$. En este caso no existen problemas de interpretación ya que ambos ángulos son suplementarios; esto es, de manera gráfica,



.

ii) Para conocer los puntos de intersección, debemos igualar las ecuaciones; en este caso, las igualaremos a y^2:

$$y^2 = x^2 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$
$$x^2 + x^2 - 4x = -3 + 3$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x(2x-4) = 0.$$

Del primer factor, obtenemos $x = 0$; del segundo, $2x - 4 = 0$, se obtiene $x = 4/2 = 2$.

Cuando sustituimos $x = 0$ para obtener el valor de y, nos resulta que

$$y^2 = (0)^2 - 3 = -3$$
$$y^2 = -(0)^2 + 4(0) - 3 = -3.$$

Pero esto es absurdo, pues no es posible obtener en los reales la raíz cuadrada de *-3*. Por lo tanto, no existe intersección en $x = 0$.

Veamos en nuestro otro punto $x = 2$:

$y^2 = (2)^2 – 3 = 4 – 3 = 1$
$y^2 = -(2)^2 + 4(2) – 3 = -4 + 8 – 3 = 1.$

En cualquiera de los casos, $y = \pm 1$. Por lo que nuestros puntos de intersección resultan ser *(2, -1)* y *(2, 1)*.

Por derivación implícita, obtenemos que, para la primera curva, $2x - 2yy' = 0$, de donde $2yy' = 2x$. Así,

$$y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}.$$

Para la segunda, también por derivación implícita, $2x - 4 + 2yy' + 0 = 0$, por lo que $2yy' = 4 - 2x$. Obtenemos entonces que

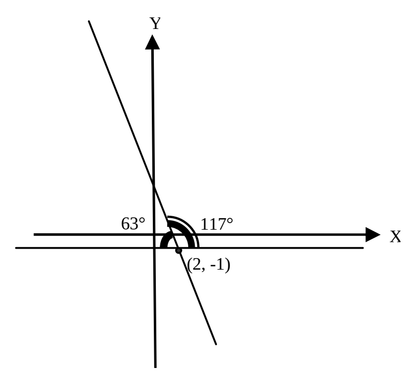
$$y' = \frac{4-2x}{2y} = \frac{2-x}{y}.$$

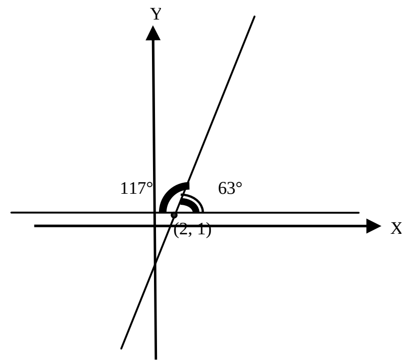
Si probamos el punto *(2, -1)* en ambas ecuaciones de las pendientes, en la primera obtenemos $y' = 2/-1 = -2$, mientras que la segunda queda $y' = (2 – 2)/-1 = 0$. Si ahora lo efectuamos con el punto *(2, 1)*, nos arroja los valores $y' = 2/1 = 2$ y $y' = (2 – 2)/1 = 0$.

Entonces, para el punto *(2, -1)*

$$\tan\alpha = \frac{-2-0}{1+(-2)(0)} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\tan\alpha = \frac{0-(-2)}{1+(0)(-2)} = \frac{2}{1} = 2.$$





Y para el punto *(2, 1)*

$$\tan\alpha = \frac{2-0}{1+(2)(0)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{0-(2)}{1+(0)(2)} = \frac{-2}{1} = -2 .$$

En ambos puntos resulta que la tangente es la misma. Para el caso en que $\tan \alpha = 2$, obtenemos $\alpha = \tan^{-1} (2) \approx 63^\circ$. Para el caso de que $\tan \alpha = -2$, $\alpha = \tan^{-1} (-2) \approx 117^\circ$.

2. Determina los puntos P y Q de la parábola $y = 1 - x^2$ de tal modo que el triángulo ABC formado por el eje x y las tangentes que pasan por P y Q sea equilátero.

Usaremos un hecho importante del triángulo equilátero: como la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera debe sumar 180° y un triángulo equilátero tiene sus lados y sus ángulos internos iguales, entonces la medida del ángulo en cada vértice es de $180/3 = 60^\circ$.

Una de las rectas es el eje x, es decir, $y = 0$. Como esta recta es horizontal, su pendiente es cero. La otra es la tangente de la parábola, cuya pendiente se obtiene a través de su derivada, por lo que la pendiente es $y' = -2x$.

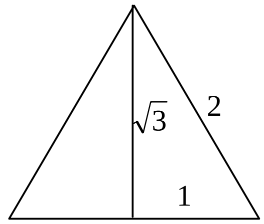
El ángulo entre las rectas debe ser de 60°, por lo que recurrimos a la fórmula anterior para conocer el ángulo entre dos rectas:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} .$$

Por lo tanto, si sustituimos los valores anteriores resulta esta ecuación:

$$\tan 60^\circ = \frac{(0)-(-2x)}{1+(0)(-2x)} = \frac{2x}{1} = 2x .$$

Aquí usamos un hecho importante. Si tomamos un triángulo equilátero cuyos lados midan *2* y lo partimos a la mitad por su altura, resulta un triángulo rectángulo con un ángulo de 60° cuya hipotenusa mide *2*, su cateto adyacente es de longitud *1* y su cateto opuesto resulta de $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, como se muestra en la siguiente ilustración:



De este hecho resulta lo siguiente: $\tan 60^\circ = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

Por lo tanto, $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = 2x$. Por lo tanto, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por otro lado, también se puede dar que

$$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{(-2x)-(0)}{1+(-2x)(0)} = \frac{-2x}{1} = -2x\,.$$

De donde se obtiene que $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ahora, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$. Por lo tanto, $y = 1 - x^2 = 1 - ¾ = ¼$.

Por lo tanto, $P = (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{4})$ y $Q = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{4})$.

3. a) Determina los tres puntos de la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una tangente con la misma pendiente.

   b) Encuentra los dos puntos de dicha curva cuya recta tangente sea la misma.

a) Obtenemos la pendiente de la tangente a través de su derivada, o sea, de $y' = 4x^3 - 4x - 1$. Pero lo que necesitamos es determinar tres puntos que, al sustituirlos en la derivada nos arrojen como resultado la misma pendiente, es decir, que $y' = a$ para tres puntos x_1, x_2 y x_3 distintos.

El problema es que no es fácil resolver directamente esta ecuación debido a su grado. Pero lo que si podemos hacer es buscar tres números reales que cumplan lo que deseamos por inspección. Una idea es buscar números que no aumenten mucho la potencia de $4x^3$ y que, como uno de los elementos de la ecuación es $-4x^3$ y otro es $4x^3$, que se eliminen de manera mutua y entonces y' tendrá el mismo resultado.

Tres números que cumplen con esta condición son -1, 0 y 1. De hecho,

$$
\begin{aligned}
y'(-1) &= 4(-1)^3 - 4(-1) - 1 = -4 + 4 - 1 = -1 \\
y'(0) &= 4(0)^3 - 4(0) - 1 = 0 - 0 - 1 = -1 \\
y'(1) &= 4(1)^3 - 4(1) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1
\end{aligned}
.
$$

Sustituimos x en la ecuación de la curva y obtenemos que, de $x = -1$, $y = (-1)^4 - 2(-1)^2 - (-1) = 1 - 2 + 1 = 0$; de $x = 0$, $y = (0)^4 - 2(0)^2 - (0) = 0$ y de $x = 1$, $(1)^4 - 2(1)^2 - (1) = 1 - 2 - 1 = -2$.

Los tres puntos que buscamos son, entonces, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, -2)$.

b) Para resolver este problema, usaremos la fórmula de la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde m es la pendiente y (x_1, y_1) es un punto donde la recta pasa, armaremos las ecuaciones de las tangentes a estos tres puntos.

$y - 0 = (-1)(x - (-1))$
$y = -x - 1.$

$y - 0 = (-1)(x - 0)$
$y = -x.$

$y - (-2) = (-1)(x - 1)$
$y + 2 = -x + 1$
$y = -x + 1 - 2$
$y = -x - 1.$

Por lo tanto, los dos puntos de la curva que tiene una tangente común son $(-1, 0)$ y $(1, -2)$.

1.17 PROBLEMAS RESUELTOS 4.

Continuamos con los ejercicios resueltos relacionados con la derivada. En esta ocasión, entre los problemas incluidos en esta sección, se incluye un ejemplo de situación cercana a la vida real y que para su resolución se vale de la diferenciación. Los demás tratan con propiedades de curvas, funciones y aplicaciones en la geometría, que en algunos casos también se pueden llevar a la vida cotidiana.

1. Un automóvil viaja de noche por una carretera en forma de una parábola con el vértice en el origen y el eje de la parábola sobre el eje y. El vehículo parte de un punto a *100 m* al oeste y a *100 m* al norte del origen y viaja en dirección general hacia el este. Hay una estatua a *100 m* al este y a *50 m* al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del automóvil la iluminarán?

Como parte inicial de la solución de este problema, necesitamos identificar la ecuación de la parábola que modele el problema, es decir, que nos permita identificar la situación con dicha función, para que, al resolver la parábola, resolvamos la incógnita.

Por las características del movimiento del automóvil, parecerá que la parábola que nos sirve es $y = x^2$. Sin embargo, $(100)^2 = 10000 \neq 100$, por lo que no nos serviría. Sin embargo, si dividimos todas las distancias entre 100, se cumple con las condiciones de la ecuación dada. Por lo que el automóvil parte del punto $(1, 1)$ y la estatua se encuentra en $(1, ½)$. Eso si, los resultados obtenidos los multiplicaremos por 100 para tener los datos reales.

La estatua no se encuentra en la parábola; si lo estuviera, significa que fue levantada en medio de la carretera y el automóvil chocaría con ella., pero sólo necesitamos que los faros la iluminen.

Por otro lado, podemos pensar que la trayectoria de la luz que sale de los faros es recta, una recta que parte de un punto: el automóvil; por lo tanto, sólo toca en un punto a la parábola. En conclusión, la recta es la tangente a la parábola en el punto que deseamos buscar.

Y para la pendiente de la recta, necesitamos la derivada, es decir, $y' = 2x$. Esa tangente debe iluminar la estatua, es decir, debe pasar por *(1, ½)*. Si llamamos *(x, y)* el punto que buscamos y nos valemos de la fórmula de la pendiente de una recta, obtenemos lo siguiente.

$$2x = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x - 1}.$$

Esta ecuación la resolveremos para obtener el valor de x.

$2x(x - 1) = x^2 - ½$
$2x^2 - 2x = x^2 - ½$
$x^2 - 2x + ½ = 0.$

Resolveremos esta ecuación por medio de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2}\right)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Un dato importante es que el auto viaja en dirección general hacia el este, por lo que x no puede ser $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ya que en este punto nos hemos pasado de la estatua, o más bien, sería solución si viajáramos al oeste. Por lo tanto, $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ahora,

$$y = x^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - 2(1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

Para obtener los resultados finales, multiplicamos por *100*.

$$x = 100\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100 - 50\sqrt{2} \approx 29.289m.$$
$$y = 100\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = 150 - 100\sqrt{2} \approx 8.579m.$$

El punto buscado es, entonces, $\left(100 - 50\sqrt{2}, 150 - 100\sqrt{2}\right)$. Por lo tanto, cuando nuestro automóvil llegue a poco más de *29 m.* al este del origen y a poco más de *8.5 m*. al norte del mismo punto, los faros iluminarán la estatua. Claro, depende de qué tan potentes sean nuestras luces.

2. Deduce una función f tal que $f'(-1) = \frac{1}{2}, f'(0) = 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x; o bien, demuestra que esta función no puede existir.

Primero, recordemos que si $f''(x) > 0$ para los x dentro de un cierto intervalo, entonces $f'(x)$ es creciente sobre el mismo intervalo; si $f''(x) < 0$ para otro intervalo, entonces $f'(x)$ es decreciente sobre tal intervalo.

Lo que tenemos aquí es que $f''(x) > 0$ para todo x, por lo que, de acuerdo con el resultado antes mencionado, $f'(x)$ debe ser creciente para cualquier x.

Pero, si analizamos las otras condiciones, tenemos que $-1 < 0$; sin embargo, $f'(-1) = \frac{1}{2} > 0 = f'(0)$, por lo que $f'(-1) > f'(0)$, lo que es condición de que la derivada es decreciente por lo menos en $[-1, 0]$; sin embargo, $f'(x)$ debe ser creciente para todas las x. Esto resultaría una contradicción en caso de que sucediera que exista una función con las características requeridas.

Por lo tanto la función no existe.

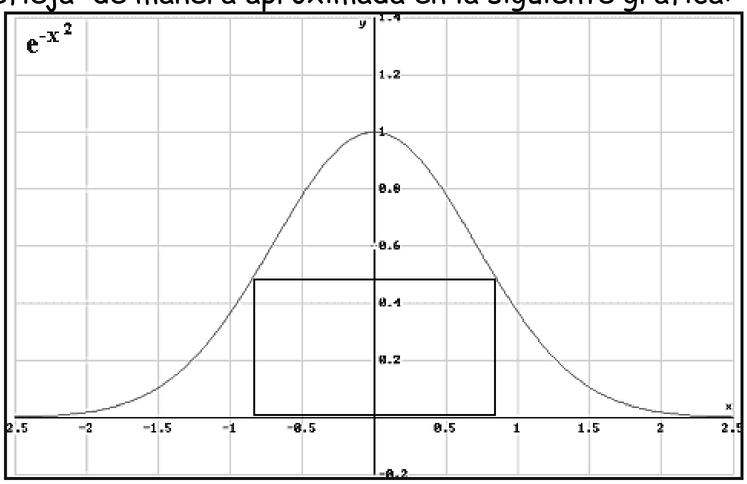
3. Si un rectángulo tiene su base en el eje x y dos de sus vértices en la curva $y = e^{-x^2}$, demuestra que tendrá el área máxima posible cuando los dos vértices sobre la curva sean los puntos de inflexión de dicha curva.

Primero, observemos un hecho importante respecto a la función:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}.$$

Esto significa que f es una función par, es decir, simétrica respecto al eje y, por lo que, si un rectángulo queda inscrito en la gráfica de la función y el eje x, tal como indica el problema, entonces sus vértices sobre el eje x, los cuales llamaremos A y B, deben ser simétricos, es decir: $A = (-x, 0)$ y $B = (x, 0)$, ya que C y D, los otros vértices, deben estar a la misma altura. (Note que si $0 < x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$, por lo que la función es decreciente para los positivos).

Esto se refleja de manera aproximada en la siguiente gráfica:



La base de este rectángulo está dada por la distancia entre A y B, es decir, $x - (-x) = x + x = 2x$; la altura se da por cualquiera de los puntos A o B y su valor de acuerdo con la función, es decir, por $f(x)$. Como el área del rectángulo es base por altura, la expresión que determina el área de este rectángulo inscrito es

$$A(x) = bh = 2xe^{-x^2}.$$

Maximicemos el área por medio del uso del Cálculo Diferencial:

$$A'(x) = (2)e^{-x^2} + (2x)(-2x)e^{-x^2} = (2-4x^2)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2).$$

Los candidatos a máximos o mínimos resultan de resolver $A'(x) = 0$. Por propiedades de la función exponencial, ésta no puede ser cero –ya que no existe ningún a real tal que $e^a = 0$ -, por lo que el primer factor de la ecuación no puede igualarse a cero; por lo tanto, para obtener el o los máximos, se debe resolver $1 - 2x^2 = 0$, de donde $1 = 2x^2$, por lo que $x^2 = ½$, lo que da como resultado que $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si nos apoyamos en el criterio de la primera derivada para saber si estos puntos son máximos o no, obtenemos que

$$A'(x) = 2e^{-x^2}(1-2x^2) = -4e^{-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Luego, $A'(x) < 0$ para $x < -1/\sqrt{2}$ y para $x > 1/\sqrt{2}$, mientras que $A'(x) > 0$ para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo que $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ es un mínimo y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es un máximo.

También podríamos usar el criterio de la segunda derivada, así tendríamos que

$$A''(x) = -2x\left(2e^{-x^2}\right)(1-2x^2) + (-4x)\left(2e^{-x^2}\right).$$

Y ver que $A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$. Por lo tanto, el área tiene su máximo en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Como los vértices en el eje x son simétricos, entonces el otro vértice es $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A continuación, veamos cuáles son los puntos de inflexión de la curva de la función dada. Empezamos:

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

$$y'' = -2x(-2x)e^{-x^2} + (-2)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

De acuerdo al razonamiento usado arriba, el segundo factor no puede ser cero. Entonces, $f''(x) = 0$ sólo si $4x^2 - 2 = 0$, de donde $4x^2 = 2$, luego $x^2 = 2/4 = ½$ y, finalmente, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entonces, estos dos puntos son los candidatos a puntos de inflexión. Ahora, como la parte exponencial es positiva para todos los reales, entonces tenemos que $y''<0$ para $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, mientras que $y''>0$ para $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}<x$.

Por lo tanto, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ resultan ser los puntos de inflexión de dicha curva, los cuales son, a su vez, los vértices del rectángulo inscrito entre la gráfica de la función y el eje x. La afirmación, entonces, ha quedado demostrada.

4. Encuentra el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes; o sea, un punto común entre ellas donde tengan una tangente común.

El problema nos pide sólo un punto en donde la tangente sea común a las dos curvas. Para dar solución a este requisito, es necesario que las funciones originales coincidan, por lo que buscaremos primero la intersección de las curvas.

Por tanto, resolveremos $x^3 - 3x + 4 = 3(x^2 - x) = 3x^2 - 3x$. De ella, resulta $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. En principio parecería que la ecuación no es fácil de resolver, pero, si inspeccionamos la ecuación, nos encontramos con que si $x = 2$, entonces $(2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$, por lo que el binomio $(x - 2)$ divide a esta ecuación. Si efectuamos división polinómica obtenemos el resultado siguiente:

$$\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}=x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

De esto, entonces tenemos dos puntos de intersección: $x = -1$ y $x = 2$. Ahora, para buscar la tangente común, aplicaremos estos valores en cada derivada y veremos es qué punto las derivadas de las dos curvas coinciden, pues si dos rectas tienen la misma pendiente y pasan por el mismo punto, la ecuación de la recta tangente será la misma y, por lo tanto, tendrán una tangente común.

De la primera curva, $y' = 3x^2 - 3$; de la segunda, $y' = 3(2x-1)$.

En primer lugar, si $x = -1$, tenemos:

$$y'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0$$
$$y'(-1) = 3(2(-1)-1) = 3(-2-1) = 3(-3) = -9 \neq 0.$$

Entonces, $x = -1$ no es el punto buscado, ya que las pendientes son distintas y, por tanto, las tangentes también.

Ahora, para $x = 2$,

$$y'(2) = 3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$
$$y'(2) = 3(2(2)-1) = 3(4-1) = 3(3) = 9.$$

Por lo tanto, $x = 2$ es el punto que deseamos.

Para finalizar, sustituimos $x = 2$ en cualquiera de las curvas para obtener el valor de y. En este caso, lo haremos en las dos.

$$y = (2)^3 - 3(2) + 4 = 8 - 6 + 4 = 6$$
$$y = 3((2)^2 - (2)) = 3(4 - 2) = 3(2) = 6.$$

Por lo tanto, el punto donde las dos curvas tienen una tangente común es $(2, 6)$.

BIBLIOGRAFÍA:

- Apostol, T. Calculus. 2ª. Edición, Reverté. Barcelona, 1999.
- García-Pelayo y Gross, R. Enciclopedia de las Ciencias Larousse. Tomo 1, 8ª. Edición. Ed. Larousse. México, 1982.
- Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral. Tomo I, 6ª. Edición, Mir. Moscú, 1983.
- Purcell, E., Varberg, D. Cálculo Diferencial e Integral. 6ª. Edición, Prentice Hall. México, 2000.
- Ruiz, C., Trigueros, M. Libro de la Sala de Matemáticas. Museo de las Ciencias, Universum. (Notas de capacitación para anfitriones).
- Spivak, M. Cálculo Infinitesimal. 1ª. Edición, Reverté. Barcelona, 1981.
- Stewart, J. Single Variable Calculus. 4ª. Edición, Internacional Thomson Publishing. U. S. A., 1999.
- Stewart, J. Cálculo de una Variable, Trascendentes Tempranas. 3ª. Edición, Internacional Thomson Editores. México, 1998.
- Thomas, G., Finney, R. Calculus and Analytic Geometry. 9ª. edición, Addison Wesley. U. S. A., 1996.