UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN
DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
(MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

ROBERTO RODRÍGUEZ PÉREZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. CATHERINE GARCÍA REIMBERT

MÉXICO, D.F. JUNIO DE 2007

DEDICATORIA

A MI PADRE

Con todo mi amor dedico ésta tesis a la persona que me enseño que lo más importante en la vida es: la dedicación, el cariño y el empeño que uno dedique a esas cosas importantes que uno se traza como proyectos en la vida.

José Toribio Rodríguez Corrales

A MI HERMANA

Por su ayuda incondicional y de quien me siento orgulloso por su lucha tenaz que ha tenido para lograr sus metas.

María de la Paz Rodríguez Pérez

A MIS HIJOS

Por ser la mayor motivación que un ser humano puede tener y porque tal vez sin darse cuenta de ello, ellos forman parte de este proyecto.

José Roberto Rodríguez Jiménez
Raquel Rodríguez Sánchez

A MIS SOBRINOS

Por ser parte de mi familia, ser comprensivos, generosos y que cuándo se les necesita ahí están para ayudar incondicionalmente a los integrantes de la familia.

Laura de la Paz González Rodríguez
German Omar González Rodríguez

A Diana, a mis maestros y a todas aquellas personas que directa ó indirectamente han hecho posible la realización de este trabajo.

ROBERTO

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero agradecimiento a:

DRA. CATHERINE GARCÍA REIMBERT

DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

MAESTRA. ROXANNA PASTOR FASQUELLE

DR. GUSTAVO CRUZ PACHECO

M en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Por su interés, dedicación y el tiempo que me brindaron para la realización del presente trabajo.

A mis amigos y compañeros: Silvia, Silvia Canabal, Eleazar y Rodolfo por su sincera amistad y el apoyo que me brindaron siempre.

Contenido

Contenido

Introducción

El currículo de la educación media superior está compuesto por una amplia variedad de estructuras que corresponden a los distintos sistemas. Las diversas propuestas educativas se manifiestan en la delimitación y organización de los cursos, en las estrategias de enseñanza, en las formas de evaluación y en los recursos materiales que se aplican para lograr los propósitos de cada una de ellas. En términos generales, el currículo se encuentra desfasado en relación con las demandas y necesidades de los jóvenes, de los sectores productivos y de una sociedad en constante transformación.

Sin duda, a pesar de la diversidad curricular, en la mayor parte de los casos prevalecen enfoques educativos que ponen énfasis en la cantidad de información que puede adquirir el estudiante mediante métodos de memorización de datos, fórmulas y definiciones en detrimento del razonamiento, la investigación y la comunicación verbal y escrita.

El reto es reformar el currículo de la educación media superior para que responda a las exigencias de la sociedad del conocimiento, además del desarrollo social y económico del país, incorporando enfoques educativos centrados en el aprendizaje y el uso intensivo de las tecnologías de la información y la comunicación.

Por lo tanto, en el marco de la política educativa nacional, se ha visualizado a la **EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR**, como la estructura curricular que busca formar al estudiante para acceder a la educación superior con las competencias que se requieran para el desarrollo integral del egresado. El acceder a dicho nivel implica afianzar lo aprendido anteriormente, tener una preparación básica general que comprenda conocimientos científicos, técnicos y humanísticos, conjuntamente con alguna metodología de investigación y de dominio del lenguaje[1].

En suma, si se pretende llegar a esta propuesta y es considerado uno de los objetivos de los programas de estudio de las asignaturas de matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria, el cual propone un enfoque metodológico de un aprendizaje basado en la resolución de problemas, así como de utilizar la teoría constructiva del aprendizaje[2]. Esto implicaría que los docentes pudieran contar con las herramientas tecnológicas y material didáctico especializado para lograr este reto.

La elaboración del presente material didáctico, es con la finalidad de que el docente del bachillerato pueda contar con algunos problemas de aplicación de las matemáticas del tipo interdisciplinario.

La tesis esta formada por los siguientes capítulos:

En el primer capítulo, son expuestos algunos antecedentes del quehacer del docente del nivel medio superior. Posteriormente, son presentadas algunas teorías educativas, así como algunos conceptos referentes a estrategias de aprendizaje. Las nociones anteriores, serán utilizadas en el desarrollo de los problemas que son presentados en los capítulos posteriores. Finalmente, se proporciona la metodología utilizada en la elaboración del material didáctico propuesto.

---

[1] Programa Nacional de Educación (2001-2006), Secretaria de Educación Pública, México.
[2] Programas de estudio de Matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria, UNAM, México, 1996.

Antes de continuar con la presente introducción haré la siguiente observación. Las ecuaciones diferenciales son interesantes e importantes, debido a la posibilidad de utilizarlas para la investigación de una gran variedad de problemas: de las ciencias físicas, biológicas y sociales. Para resolver un problema de éste tipo, se tiene que realizar lo siguiente:

En primer lugar, describir la situación real en términos matemáticos. Esto se lleva a cabo al establecer hipótesis acerca de lo que está sucediendo y que parezcan ser coherentes con los fenómenos observados. Por ejemplo, se ha observado que el calor pasa de un cuerpo caliente a uno más frío con una rapidez proporcional a la diferencia de temperaturas (Ley de enfriamiento de Newton). Esta ley física, comprende una razón de cambio (derivada) y, por lo tanto, al expresarse matemáticamente, toma la forma de una ecuación diferencial. Los problemas que se verán serán relacionados a la Física, Geografía, Sociología, Química, Biología y a las Matemáticas.

En el segundo capítulo, se analiza el problema de la explosión demográfica, se enuncia y se resuelve el modelo exponencial de **MALTHUS**. Posteriormente, se presenta un ejemplo, tomando como referencia a la República Mexicana. Al realizar las proyecciones de población se utilizan datos del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (**INEGI**). Más adelante, se expone una pequeña biografía de Roberth Malthus y para finalizar el capítulo, se proporcionan ejemplos referentes al modelo exponencial de Malthus, los cuales son:

a) **Aplicación de un Modelo Matemático para Determinar el Enfriamiento de un Líquido, cuya Temperatura Inicial es Superior a la del Ambiente.** En este problema, se plantea la ejecución de un experimento para investigar cual de dos personas toma más caliente el café con leche, siendo distintos los instantes en los que cada uno agrega la leche. También, se plantea el modelo matemático y se encuentra la solución. Finalmente, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos por el método experimental y por el modelo matemático.

b) **Aplicación de las Matemáticas en la Determinación del Momento de Muerte**. En este problema, se plantea el caso de una investigación sobre el asesinato de un ciudadano del Distrito Federal. En primer lugar, se realiza el análisis del dictamen emitido por la Procuraduría General de Justicia del Distrito Federal (**PGJDF**), después se propone el modelo matemático para resolver el problema en cuestión. Posteriormente, se resuelve el modelo y con los resultados obtenidos se resuelve el problema del homicidio del ciudadano.

En el tercer capítulo, se expone el modelo de Verlhust y se da la solución de la ecuación logística de crecimiento de una población; se obtiene una proyección de población para la República Mexicana y otra para el Distrito Federal. Para la proyección del Distrito Federal, se obtienen los elementos: el pronóstico límite, el punto de inflexión y el año en que se llegó al punto de inflexión.

Posteriormente, es enunciado el modelo de **VERLHUST** con un término forzante (de migración), es proporcionada la solución analítica por casos de está ecuación y son dados algunos ejemplos para cada uno de ellos.

En el cuarto capítulo, se presenta un modelo realizado con matrices para resolver un problema de migración. Para este problema es enunciada la definición de determinante, así como cuáles son las condiciones para que un sistema de ecuaciones simultáneas tenga solución utilizando determinantes. Se plantea el problema de la migración existente en el Distrito Federal como un sistema de ecuaciones simultáneas. Para la matriz de transición obtenida se realizaron algunas iteraciones, esto con el fin de darnos cuenta de cómo se comportará la migración de la población en el Distrito Federal. Al final del capítulo, se calcula el límite del vector de distribución de estados para la matriz obtenida en el problema, el cual proporcionará la información de cómo se va a comportar la migración de la población del Distrito Federal en un número finito de años.

En el quinto capítulo, se enuncia la noción de concepto de evaluación y de evaluación alternativa, la cuál será utilizada para evaluar al educando al serle expuesto el material didáctico en el aula. Posteriormente, se realiza el análisis de resultados obtenidos al presentar el material didáctico al alumno. Es importante señalar, que los resultados obtenidos no influyeron con las expectativas que se tenían contempladas en la elaboración del material didáctico.

Finalmente son presentadas las conclusiones que se obtuvieron al realizar la evaluación del material didáctico propuesto en la presente tesis.

Capítulo 1

Justificación del material didáctico propuesto y algunas teorías educativas

En las primeras secciones del presente capítulo, son proporcionados algunos antecedentes sobre el quehacer del docente de bachillerato. Así como el hecho, de que se pretende exponer el material didáctico bajo una concepción cosntructivista del aprendizaje, lo cual conlleva a que el educando adquiera un aprendizaje significativo.

Posteriormente, en las secciones subsecuentes se hace la exposición de las teorías del aprendizaje en que se esta fundamentando para el diseño del material didáctico.

Finalmente, se realiza la presentación de la metodología que fue utilizada en la exposición del material didáctico para el alumno en el aula.

1.1 ANTECEDENTES DEL QUEHACER DOCENTE DEL PROFESOR DE BACHILLERATO EN EL AULA

En los últimos años, la teoría más aceptada en el sistema de educación nacional, tanto a nivel macro (Programa Nacional de Educación), así como a nivel micro (Bachillerato) ha sido la teoría sobre el aprendizaje constructivista[3].

Lo que se pretende en los programas de estudio del bachillerato, es que el docente utilice esa teoría para que el alumno adquiera un aprendizaje significativo. Esto está muy lejos de la realidad ya que si efectuamos una pequeña investigación bibliográfica sobre los textos que existen en el mercado nacional, de cualquiera de las asignaturas de matemáticas que son impartidas en los tres años de bachillerato, podemos percatarnos de que la mayoría de los ejemplos expuestos en tales textos son meramente para realizar cálculos utilizando algún algoritmo matemático (enfoque del tipo de recepción repetitiva), los cuales no conllevan a un aprendizaje significativo para el estudiante.

La mayoría (si no hasta el total) de los programas de estudio mencionan que los problemas que les sean planteados en clase a los educandos deben estar relacionados al entorno social en donde viven, pero:

¿Cómo puede ser que un problema que únicamente implique el uso de un algoritmo matemático, pueda ser significativo para el alumno?

El trabajo del docente del bachillerato se basa en proporcionarle al alumno problemas, los cuales estén basados en hechos reales, y que su solución gire en torno al hábitat del estudiante. Esto con el fin, de que el educando se interese más en la disciplina, ya que él se daría cuenta de que las matemáticas pueden ser utilizadas para resolver problemas de la vida cotidiana.

[3]Programa Nacional de Educación (SEP- 2000-2006).

En mi experiencia como docente, me he percatado de que los problemas planteados en la mayoría de los textos de matemáticas que son utilizados en bachillerato a los alumnos, se les hacen tediosos, aburridos, y en el peor de los casos piensan que no sirven para nada, ya que estos como mencioné anteriormente, no están enfocados a hechos reales que giren en el entorno social y político de ellos, es por este motivo que únicamente los alumnos estudian para acreditar la asignatura, es decir no adquieren un conocimiento relevante para ellos (aprendizaje significativo[4]).

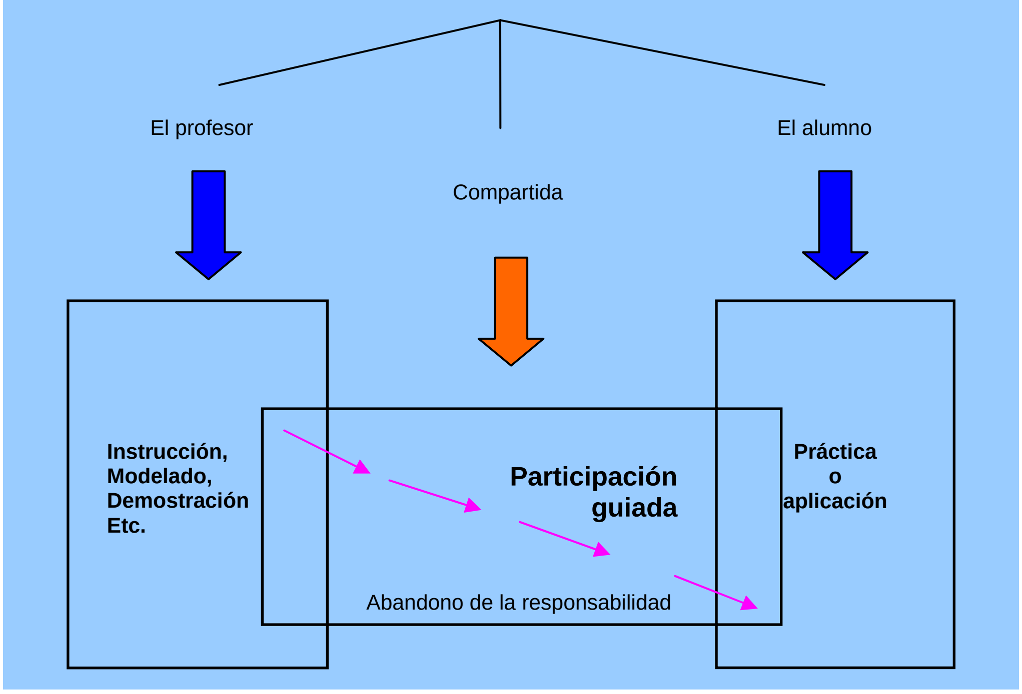
En particular, para llegar a un aprendizaje significativo, el docente debe de tener la noción de lo que es el constructivismo del aprendizaje. Además, proporcionar al educando en el aula, problemas que conlleven a ello, ya que el docente no es únicamente un mediador o intermediario entre los contenidos del aprendizaje y la actividad constructiva que desplieguen los estudiantes para asimilarlos.

En la enseñanza de las matemáticas el docente también juega el papel de mostrar al educando: teorías, conceptos, reglas, etc., exponiéndolos en el salón de clase, combinando esto último con el diálogo docente–alumno, y con esto conllevar al estudiante a obtener un aprendizaje significativo.

El diálogo que realiza el docente con los educandos genera una motivación para ellos, ya que conlleva a que el alumno se sienta involucrado en la práctica del quehacer docente, ya que éste lo toma en cuenta, cuestionándolo en el desarrollo de la clase y motivándolo a participar en ella.

En la figura siguiente podemos observar el proceso de la construcción del aprendizaje por parte del alumno y cómo el docente es el mediador en éste:

Figura 1. Proporción de la responsabilidad en la realización de la tarea o contenido de aprendizaje



Fuente: Campione, reproducida en Cazden, 1988: Coll, 1990.

---

[4] En la página 7 del presente capítulo, se define que se entenderá por aprendizaje significativo.

1.2 ANTECEDENTES TEÓRICOS

PROPUESTAS EDUCATIVAS

En las concepciones de la pedagogía tradicional del siglo XIX, los ideales educativos estaban representados por el cultivo de la inteligencia y el hábito de la disciplina mediante la memorización y repetición. El vínculo docente-alumno se caracterizaba por una relación autoritaria, derivada del poder que la sociedad le adjudicaba al status del maestro. Por otra parte, del alumno, se destacaban actitudes de imitación, obediencia y pasividad.

En el siglo XX se empieza a desarrollar en Estados Unidos la corriente de la tecnología educativa, la cual se difunde en los países de América Latina. Esta concepción, se fundamenta en el montaje tecnológico a partir del cual, el profesor, mediante el diseño de cartas descriptivas, organiza y determina la actividad, ateniéndose a objetivos preestablecidos. Esta corriente se fundamenta epistemológicamente en la psicología conductista y pone el acento, ergo, en la conducta observable y en la actividad como expresión directa, omitiendo el carácter histórico de las instituciones, así como el social y psicológico de los sujetos en la diversidad de las situaciones que definen la realidad del salón de clases.

Otra corriente francesa empieza a desarrollarse a fines de los setenta y principios de los ochenta, ligada a una pedagogía de la creatividad y la libertad. En los noventas, Giroux, nos habla de una Pedagogía Crítica y de una teoría de la resistencia, retomando principios de Paulo Freire[5].

Berenfeld liga el problema de la educación al de la libertad y a la transformación de la realidad social. Esta relación, educación-libertad, supone una enseñanza que no separa lo intelectual de lo afectivo.

Gastón Maralet subraya la necesidad de realizar una pedagogía experimental investigando el valor de los procedimientos y métodos de enseñanza para retroalimentar el proceso educativo.

Leo Apostel enfatiza en la necesidad de modificar la relación maestro-alumno, así como profundizar la formación teórico-práctica.

J. Filloux se pregunta acerca de cómo se sitúa el docente como actor social. De las respuestas a esta interrogante se deriva su propuesta metodológica referida al compromiso del docente con el medio ambiente social. El método pedagógico que propone consiste en realizar un análisis de las zonas de libertad y constreñimiento del mismo profesor, y el de una aproximación individual y social a esas zonas[6].

En América Latina surge una corriente de educación popular vinculada a la investigación participativa, y cuyo iniciador es Paulo Freire. Éste propone una metodología basada en la convivencia entre los personajes que participan en el desarrollo de la clase (alumnos-docente), como una posible alternativa para una educación liberadora. La educación es un proceso de permanente formación que parte

[5] Giroux H. “Teorías de la reproducción y la resistencia en la nueva sociología de la educación: un análisis Crítico”. En Cuadernos Políticos. Num. 44, julio-diciembre 1985.

[6] Filloux Jean “Formación docente dinámica grupal y cambio” en Revista de Ciencia de Educación. Edit. Axis, Rosario, Argentina, 1975.

de la práctica misma, en la que educandos y educadores se eduquen dentro de un mismo proceso en el que ambos aprenden[7].

La reflexión radical de Iván Illich, quien encuentra en la escuela el origen de todos los males sociales y propone, a partir de un análisis de las instituciones educativas en donde desaparece el docente como “distribuidor de mercancías” y el alumno como “consumidor”[8].

La cuestión que surge con base a esto es la siguiente:

¿Cuál será la mejor estrategia de aprendizaje que es más conveniente de aplicar en la enseñanza de las matemáticas?

Para contestar esta pregunta se proporcionan algunos conceptos importantes desde el punto de vista pedagógico:

Definición de estrategias de aprendizaje

De acuerdo a Weinstein y Mayer (1986), las estrategias de aprendizaje son acciones y pensamientos de los alumnos que ocurren durante el aprendizaje, que tienen gran influencia en el grado de motivación e incluyen aspectos, tales como la adquisición, retención y transferencia. Estos autores consideran a las estrategias como técnicas que pueden ser enseñadas para ser utilizadas durante el aprendizaje. Es así, que la meta de cualquier estrategia particular de aprendizaje será la de efectuar el estado motivacional y afectivo, y la manera en que el aprendiz selecciona, adquiere, organiza e integra un nuevo conocimiento.

Características del aprendizaje auténtico

Newman y Wuhlase (1993) presentan cinco estándares que constituyen la construcción auténtica. Éstas son las siguientes:

- **Pensamiento de alto nivel**. El aprendizaje deberá de propiciar un pensamiento de alto nivel, el cual requiera que los alumnos manipulen la información e ideas, de tal suerte que transformen sus significados e implicaciones, tal como cuando se combinan hechos e ideas para sintetizar, generalizar, explicar, hipotetizar o llegar a algunas conclusiones. La manipulación de información e ideas por medio de estos procesos propiciará que los alumnos resuelvan problemas, descubran significados y logren la comprensión.

De manera opuesta, el pensamiento de bajo nivel ocurre cuando a los estudiantes se les pide memorizar o recibir información de hechos o emplear reglas y algoritmos mediante rutinas repetitivas.

- **Profundidad del conocimiento**. El conocimiento es profundo, cuando este aborda las ideas centrales de un tema o disciplina. Los alumnos pueden realizar distinciones, desarrollar argumentos, resolver problemas, construir explicaciones y el poder trabajar con una comprensión compleja relativa.

---

[7] Freire P. Extensión o Comunicación. Edit. Siglo XXI, México, 1975.

[8] Gramsci A. La Alternativa Pedagógica. Edit. Fontana, Barcelona, 1981.

El conocimiento es superficial cuando no incluye los conceptos importantes de un tema o disciplina. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen una comprensión insustancial de conceptos importantes o cuando ellos sólo tienen una experiencia superficial con sus significados.

- **Conexiones con el mundo real.** El aprendizaje tiene mayores posibilidades de significatividad cuando se establecen conexiones con el contexto dentro del cual los alumnos viven.

Para que el aprendizaje sea significativo el docente deberá:

1. Colocar a los estudiantes en la posibilidad de abordar problemas reales.

2. Que los estudiantes utilicen sus experiencias personales para explicar su conocimiento (tal como resolver problemas en su propia escuela o comunidad).

En una clase en donde las actividades son asumidas como importantes solamente para el éxito en la escuela, el trabajo de los estudiantes no es significativo y sólo sirve para certificar su nivel de acuerdo con las normas de la escolarización formal. Como por ejemplo pasar un examen de matemáticas o de cualquier otra disciplina.

- **Diálogo sustantivo.** Los altos niveles de diálogo sustantivo se distinguen por las características siguientes:

1. Existe una interacción considerable acerca de las ideas centrales de un tema o tópico.

2. Compartir las ideas, entre los integrantes del grupo y con el profesor. El compartir es mejor ilustrado cuando los participantes se explican entre ellos mismos, se hacen preguntas, y cuando éstas responden finalmente a los comentarios y dudas que surjan en ellos.

3. El diálogo se construye coherentemente sobre las ideas de los participantes para promover una comprensión colectiva de un tema.

En clases con muy poco diálogo sustantivo, la interacción consiste típicamente en exposiciones, en las cuales el docente se desvía muy poco de un cuerpo de información preparado previamente para ser expuesto, así como a un pequeño número de preguntas a las cuales los alumnos deberán de dar respuestas cortas y sin ningún significado para él.

- **Apoyo social para el aprovechamiento del alumno.** El apoyo social es alto cuando el docente deja de ver grandes expectativas para todos los alumnos, incluyendo las necesarias para tomar riesgos y dominar trabajos académicos.

Si se piensa en que todos los miembros de la clase pueden construir conocimiento y desarrollar habilidades esenciales, y se puede propiciar un clima de respeto mutuo entre ellos, se contribuye al aprendizaje efectivo. Donde, se entenderá por “Respeto mutuo”, que aquellos estudiantes con menos habilidades y destreza serán tratados de tal manera que se estimulen sus esfuerzos y sean valoradas sus contribuciones.

Por otro lado, el apoyo social es bajo, cuando los comportamientos del docente o de los compañeros, así como sus comentarios y acciones tienden a desanimar el esfuerzo a la participación, o la voluntad para expresar sus propias expectativas.

La visión constructivista del aprendizaje

Fosnot (1985) sostiene que el constructivismo no es una teoría acerca de la enseñanza, sino una teoría acerca del conocimiento y del aprendizaje. Derivado de una síntesis del trabajo contemporáneo de la psicología cognoscitiva, de la filosofía y antropología. Esta teoría define al conocimiento como temporal, en desarrollo cultural y socialmente mediado y no objetivo. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es comprendido como un proceso autocontrolado al resolver conflictos cognoscitivos interiores que con frecuencia se hacen patentes a través de la experiencia concreta, el discurso colaborativo a la reflexión.

La construcción de la comprensión

Brooks y Brooks (1993) señalan que la construcción de la comprensión es fácilmente explicable: “nosotros por naturaleza construimos nuestras propias comprensiones del mundo en él cual vivimos y buscamos estrategias que nos ayuden a comprender nuestras experiencias. Todo esto por la naturaleza humana”.

Perkins (1992) anota que la pedagogía de la comprensión sería un arte de la enseñanza para la comprensión. Por otro lado, hay una gran cantidad de resultados de investigación que dan evidencia de una falta de comprensión por parte de los niños y jóvenes en situaciones de enseñanza-aprendizaje; generalmente sufren de estereotipos y errores.

Cuando comprendemos algo, no sólo poseemos cierta información, sino que nos permite hacer ciertas cosas con ese conocimiento. Esas cosas que podemos hacer y que muestran comprensión son llamadas por Perkins desempeños de la comprensión.
Por otro lado, Wiggins y MacTighe (1997) describen un número de “indicadores” de comprensión. Sostienen que los estudiantes realmente comprenden algo cuando ellos pueden:

- Explicarlo.
- Predecirlo.
- Aplicarlo o adaptarlo a nuevas situaciones.
- Demostrar su importancia.
- Verificar, defender, justificar o criticar.
- Hacer juicios precisos y calificados.
- Hacer conexiones con otras ideas y hechos.
- Evitar falsas concepciones, tendencias o visiones simplistas.

Así mismo, proponen las siguientes preguntas clave que los educadores deberían usar para probar la comprensión de sus alumnos. Éstas son:

- ¿Qué deberemos hacer de esto?
- ¿Cuáles son las causas o razones?
- ¿Desde qué punto de vista?
- ¿Cuál es un ejemplo de esto?
- ¿Cómo deberá esto ser calificado?
- ¿Qué significatividad tendrá?

Un medio ambiente de aprendizaje cosntructivista

Un medio ambiente de aprendizaje es donde la gente puede buscar recursos para dar sentido a las ideas y construir soluciones significativas para los problemas. Los elementos de un medio ambiente de aprendizaje son:

a) El alumno.

b) Un lugar o espacio donde el alumno actúa, usa herramientas y artefactos para recoger e interpretar información, interactúa con otros, etcétera.

De acuerdo con Wilson (1996), "un medio ambiente donde a los estudiantes les es dado un espacio para explorar y determinar metas y actividades de aprendizaje, es un concepto atractivo". A los alumnos que se les proporciona el acceso a recursos de información (libros, impresos, videos, materiales, etc.) y a herramientas (programas de computación, correo electrónico, acceso a Internet, etc.), probablemente aprenderán mejor si les es dado el apoyo y guía apropiados. En suma, un medio ambiente de aprendizaje es donde el aprendizaje es fortalecido y apoyado.

Para este fin, los educadores deberán permanecer atentos y asegurarse de que el medio ambiente que diseñe incluya el apoyo y las guías apropiadas. El trabajo de diseño consistiría en articular los principios o modelos conceptuales para ayudar a los profesores y diseñadores en la creación de un medio ambiente que apoye y nutra el aprendizaje; es decir, un lugar donde los estudiantes tengan éxito al lograr los objetivos de aprendizaje (Wilson, 1996).

Por otro lado, deberemos considerar que existe una connotación individualista del "medio ambiente". La idea que se tiene de una persona en el medio ambiente, al menos en la psicología, tiende a aislar a los individuos y a tratarlos como objetos. Por lo anterior, la idea de "comunidades de aprendizaje" podría ser más apropiada: comunidades de alumnos trabajando juntos en proyectos y agendas de aprendizaje.

Desde la perspectiva anterior, un medio ambiente de aprendizaje constructivista podría definirse también, como un lugar donde los alumnos trabajan juntos apoyándose mutuamente, usando una variedad de recursos de información y de herramientas en el cumplimiento y de la búsqueda de sus metas de aprendizaje y actividades de solución de problemas.

LA TEORÍA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE AUSUBEL

La propuesta hecha por Ausubel, es especialmente interesante tras la exposición de la teoría de Vygostkii, ya que está centrada en el aprendizaje producido en un contexto educativo, es decir en el marco de una situación de interiorización o asimilación, a través de la instrucción. La teoría de Ausubel se ocupa específicamente de los procesos de aprendizaje/enseñanza de los conceptos científicos a partir de los conceptos previamente formados por el alumno en su vida cotidiana. En la terminología de Vygostkii, diríamos que Ausubel desarrolló una teoría sobre la interiorización o asimilación, a través de la instrucción, de los conceptos verdaderos, que se construyen a partir de conceptos previamente formados o "descubiertos" por el niño en su entorno. Además, Ausubel pone el acento de su teoría en la organización del conocimiento en estructuras y en las reestructuraciones que se producen debido a la interacción entre esas estructuras presentes en el sujeto y la nueva información[9].

---

[9] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

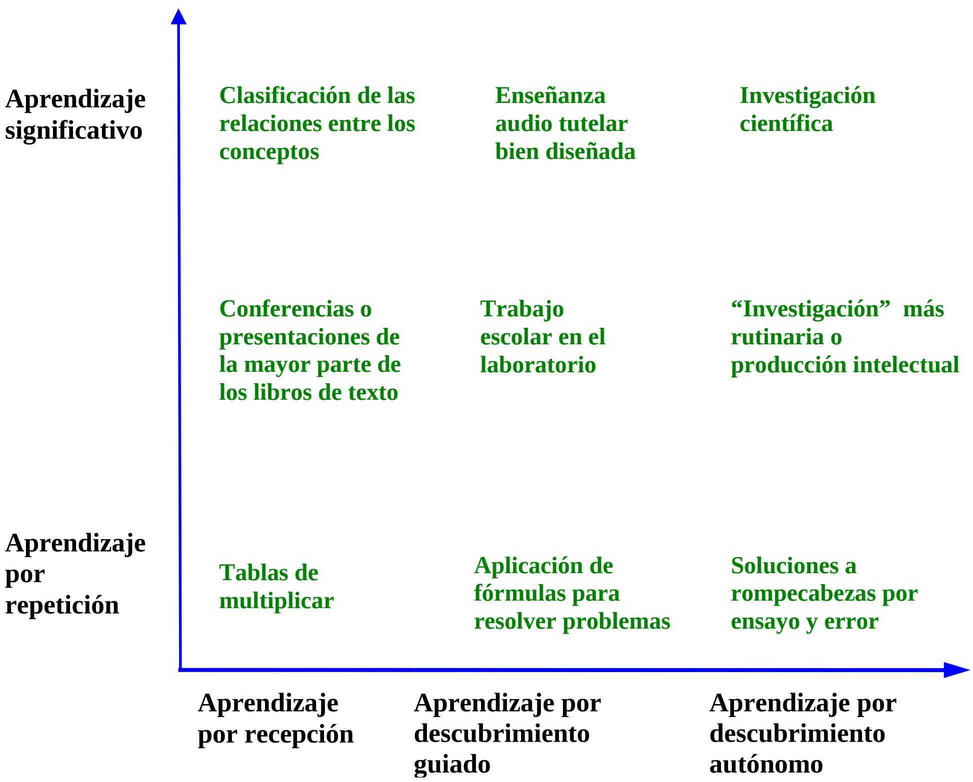
Aprendizaje memorístico y significativo

Ausubel considera que toda situación de aprendizaje, sea escolar o no, puede analizarse conforme a dos dimensiones, que constituyen los ejes vertical y horizontal de la figura 2. El continuo vertical hace referencia al tipo de aprendizaje realizado por el educando; es decir, los procesos mediante los cuales, codifica, transforma y retiene la información, e iría del aprendizaje meramente memorístico o repetitivo al aprendizaje plenamente significativo. El continuo horizontal se refiere a la estrategia de instrucción planificada para fomentar ese aprendizaje, que iría de la enseñanza puramente receptiva, en la que el docente expone de modo explícito en el aula, lo que el alumno debe de aprender la enseñanza basada exclusivamente en el descubrimiento espontáneo por parte del estudiante.

Una de de las aportaciones más relevantes de la posición de Ausubel es la distinción entre dos ejes, que serían independientes el uno del otro. Además, el concebir el aprendizaje y la enseñanza como dos continuos, y no como variables dicotómicas.

Ausubel viene a mostrar que, aunque el aprendizaje y la instrucción interactúan, son relativamente independientes, de tal forma que ciertas formas de enseñanza no conducen necesariamente a un tipo determinado de aprendizaje. Más concretamente, tanto el aprendizaje significativo como el memorístico son posibles en ambos tipos de enseñanza, la receptiva o expositiva y la enseñanza por descubrimiento, como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Clasificación de las situaciones de aprendizaje según Ausubel, Novak y Hanesian[10] .



---

[10] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

Si consideramos el eje vertical, Ausubel distingue diferencias entre aprendizaje memorístico y significativo. Según él, un aprendizaje es significativo cuando el educando, puede relacionarlo, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que él ya sabe. En otras palabras, un aprendizaje es significativo cuando puede incorporarse a las estructuras de conocimiento que posee el sujeto, es decir cuando el nuevo material adquiere significado para el sujeto a partir de su relación con conocimientos anteriores. Es necesario además que el alumno disponga de los requisitos cognitivos necesarios para asimilar ese significado.

Por otro lado, el aprendizaje memorístico o por repetición es aquel en el que los contenidos están relacionados entre sí de un modo arbitrario, es decir careciendo de cualquier significado para la persona que aprende.

Además de diferenciarse cognitivamente, ambos extremos del continuo de aprendizaje se distinguen, también por el tipo de motivación que promueven y por las actitudes del alumno ante el aprendizaje. Todas esas diferencias quedan reflejadas en la tabla 1.

Tabla 1. Diferencias fundamentales entre el aprendizaje significativo y el aprendizaje memorístico, según Novak y Gowin (1984).

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	**APRENDIZAJE MEMORÍSTICO**
• Incorporación sustantiva, no arbitraria y no verbalista de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva.	• Incorporación no sustantiva, arbitraria y verbalista de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva.
• Esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos de nivel superior, más inclusivos, ya existentes en la estructura cognitiva.	• Ningún esfuerzo por integrar los nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva.
• Aprendizaje relacionado con experiencias, con hechos u objetos.	• Aprendizaje no relacionado con experiencias, con hechos u objetos.
• Implicación afectiva para relacionar los nuevos conocimientos con aprendizajes anteriores.	• Ninguna implicación afectiva para relacionar los nuevos conocimientos con aprendizajes anteriores.

Ausubel admite que, en muchas ocasiones del aprendizaje escolar o extraescolar, puede haber aspectos memorísticos. Pero el aprendizaje memorístico va perdiendo importancia gradualmente a medida que el educando adquiere más conocimientos, ya que al aumentar éstos se facilita el establecimiento de relaciones significativas con cualquier material didáctico.

En cualquier caso, el aprendizaje significativo será generalmente más eficaz que el aprendizaje memorístico. Esa mayor eficacia se debería a las tres ventajas esenciales de la comprensión o asimilación sobre la repetición: producir una retención más duradera de la información, facilitar nuevos aprendizajes relacionados y producir cambios profundos (o significativos) que persisten más allá del olvido de los detalles concretos. En cambio, el aprendizaje memorístico sólo será superior en el caso de que la evaluación del aprendizaje requiera un recuerdo literal del original.

En todo caso, debe recordarse que los tipos de aprendizaje constituirán un continuo y no una simple dicotomía, por lo que el aprendizaje memorístico y significativo no son excluyentes, sino que pueden coexistir.

Las condiciones del aprendizaje significativo

¿Cuándo se produce el aprendizaje significativo?

Según Ausubel para que se produzca un aprendizaje significativo es preciso que tanto el material que debe aprenderse como el sujeto que debe aprenderlo cumplan ciertas condiciones. En cuanto al material es importante mencionar, que no debe de ser del tipo arbitrario, es decir que posea significado en sí mismo. Un material posee significado lógico o potencial si sus elementos están organizados y no sólo yuxtapuestos. Es difícil que puedan aprenderse significativamente aquellos materiales que no tienen significado para el educando. Para que haya aprendizaje significativo, el material debe estar compuesto por elementos organizados en una estructura, de tal forma que las distintas partes de esa estructura se relacionen entre sí de modo no arbitrario.

Pero no siempre los materiales estructurados con lógica se aprenden significativamente. Para ello es necesario además que se cumplan otras condiciones en la persona que debe aprenderlos. En primer lugar, es necesaria una predisposición para el aprendizaje significativo por parte del educando. Dado que comprender requiere siempre un esfuerzo, el alumno debe de tener algún motivo para esforzarse. Es sobradamente conocido, desde las investigaciones de los conductistas con ratas corriendo hambrientas por los laberintos, que el aprendizaje necesita siempre un móvil. Por más significativo que sea un material didáctico, es decir, por más relaciones potenciales que contenga, si el alumno no está dispuesto a esforzarse en relacionar y se limita a repetir el material, no habrá aprendizaje significativo.

Sin duda, una de las razones que puede conducir a los alumnos a no intentar comprender y (en la terminología de Piaget) limitarse a buscar el éxito, puede ser que sus intentos anteriores por comprender los materiales potencialmente significativos hayan concluido en un fracaso, debido a la ausencia de una tercera condición del aprendizaje significativo que reside también en el sujeto. Para que se produzca un aprendizaje significativo, además de un material con significado y una predisposición por parte del sujeto, es necesario que la estructura cognitiva del alumno contenga ideas inclusoras, es decir, ideas con las que pueda ser relacionado el nuevo material.

Por consiguiente, la transformación del significado lógico en significado psicológico no está asegurada sólo con estructurar los materiales. Según Ausubel, el significado psicológico es siempre idiosincrásico y se alcanza únicamente cuando una persona concreta asimila un significado lógico (por ejemplo: un concepto matemático) dentro de su propia estructura cognitiva individual. En otras palabras, el aprendizaje significativo es producto siempre de la interacción entre un material o una información nueva y la estructura cognitiva preexistente (véase la tabla 2).

Tabla 2. Condiciones para el logro del aprendizaje significativo[11].

Respecto al:	
a) Material didáctico	• Relacionabilidad no arbitraria • Relacionabilidad sustancial • Estructura y organización (Significado lógico)
b) Alumno	• Disposición o actitud • Naturaleza de su estructura cognitiva • Conocimientos y experiencias previas (Significado psicológico)

Tipos de aprendizaje significativo

En función de la naturaleza del conocimiento adquirido, Ausubel, Novak y Hanesian (2005) distinguen tres tipos básicos de aprendizaje significativo (véase la figura 3): el aprendizaje de representaciones, de conceptos y de preposiciones. Existe una escala de "significatividad" creciente en estos tipos de conocimiento, de forma que las representaciones son más simples que los conceptos y, por tanto más próximas al extremo repetitivo del continuo del aprendizaje, mientras que las preposiciones son más complejas que los conceptos, ya que por definición una preposición es la relación entre varios conceptos.

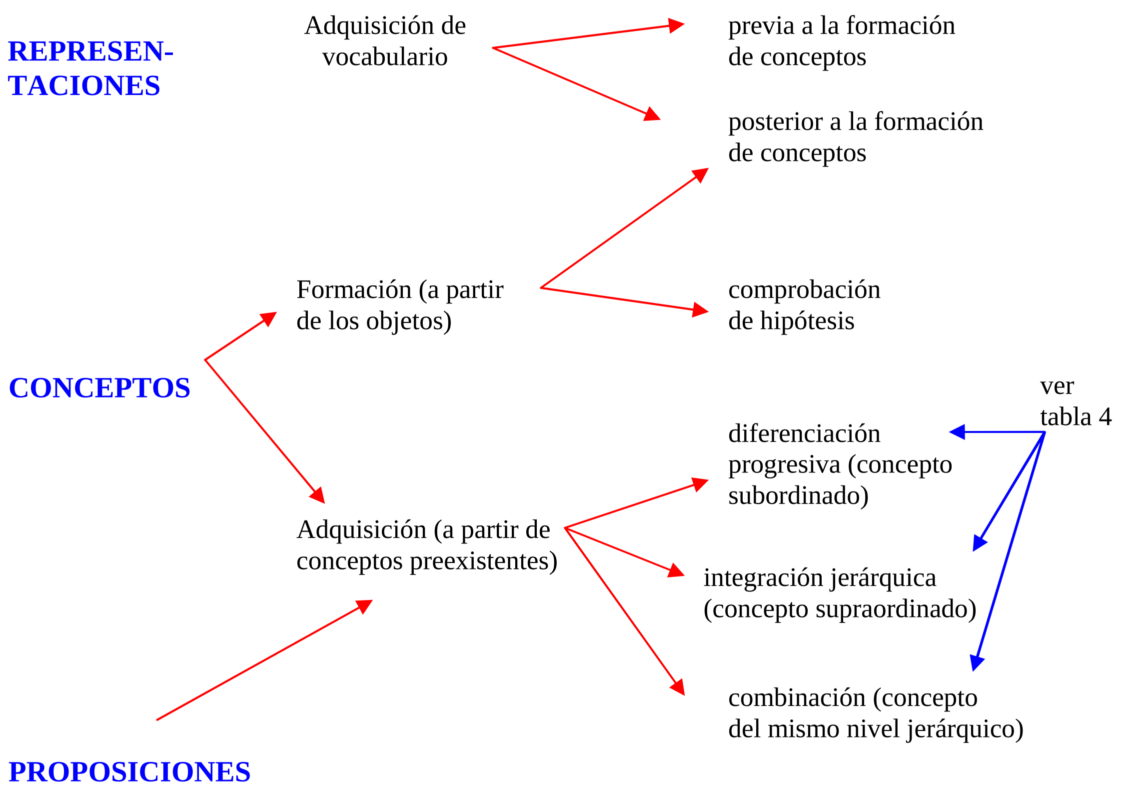
El aprendizaje de representaciones tiene como resultado conocer que "las palabras particulares representan psicológicamente las mismas cosas que sus referentes"[12]. Por tanto, se trata de la adquisición del vocabulario, dentro de lo cual Ausubel establece, dos variantes: el aprendizaje de representaciones previo a los conceptos y el posterior a la formación de conceptos. El aprendizaje de representaciones, sería el tipo de aprendizaje significativo más próximo a lo repetitivo, ya que en el aprendizaje del vocabulario existen elementos o relaciones arbitrarias que deben de adquirirse por repetición.

Ausubel define los conceptos como "objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo". Por tanto, para Ausubel los conceptos son claramente una estructura lógica. Según su teoría, habría dos formas básicas de asimilar conceptos, es decir de relacionar determinados objetos, eventos, con ciertos atributos o propiedades comunes entre ellos. En primer lugar habría un proceso de formación inductiva a partir de experiencias empíricas concretas. En otras palabras, sería un aprendizaje basado en situaciones de descubrimiento que incluiría procesos tales como, la diferenciación, la generalización, la formulación y comprobación de hipótesis, etc. Según Ausubel, ésta sería la forma predominante de adquirir conceptos en el periodo preescolar.

[11] Frida Díaz-Barriga Arceo y Gerardo Hernández Rojas. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación cosntructivista. Edit. Mc Graw Hill. México, 2006.

[12] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

Figura 3. Tipos básicos de aprendizaje significativo en la teoría de Ausubel[13].



En la formación de conceptos el significado se extraería por abstracción de la propia realidad, en la asimilación el significado es un producto de la interacción de la propia realidad, en la asimilación el significado es un producto de la interacción entre la nueva información con las estructuras conceptuales ya construidas. Según Ausubel, la asimilación sería la forma predominante de adquirir conceptos a partir de la edad escolar y muy especialmente en la adolescencia y la edad adulta. A diferencia de la formación de conceptos, la asimilación sería un aprendizaje significativo producido en contextos receptivos y no de descubrimiento; es decir, sólo será posible a partir de la instrucción.

La asimilación de conceptos nos conduce al tercer tipo básico de aprendizaje significativo. Si asimilar un concepto es relacionado con otros ya existentes en la estructura cognitiva, el aprendizaje de proposiciones consiste en adquirir el significado de nuevas ideas expresadas en una frase o una oración que contenga dos o más conceptos.

En la medida en que las preposiciones impliquen una relación entre conceptos, sólo podrán ser adquiridas por asimilación. Por tanto, a partir de la edad escolar, la asimilación es el proceso fundamental para la adquisición de significados. En función del tipo de relación jerárquica entre las ideas ya existentes y las nuevas ideas, Ausubel distingue tres formas de aprendizaje por asimilación, las cuales son presentadas en la figura 4.

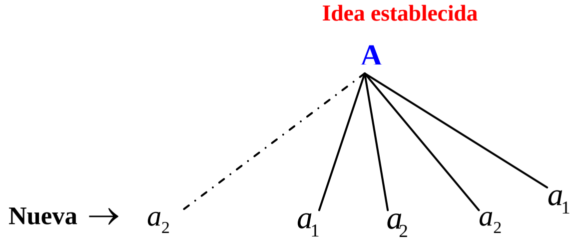
---

[13] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

Figura 4. Formas de aprendizaje significativo según la teoría de la asimilación de Ausubel[14].

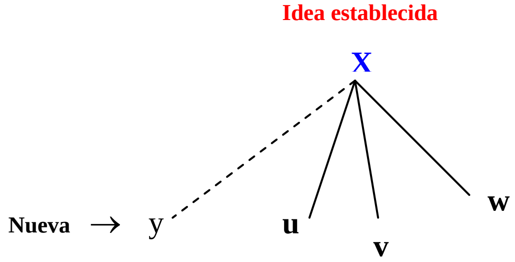
1. Aprendizaje subordinado:

A. inclusión derivativa



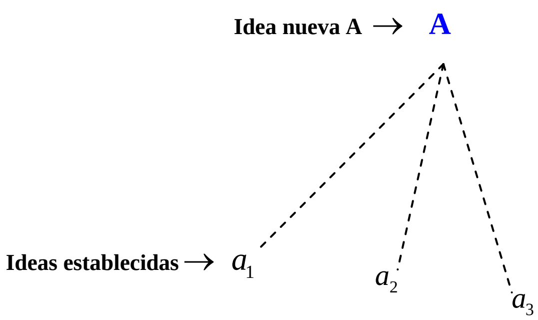
En la inclusión derivativa, la nueva información a_2, es vinculada a la idea supraordinada A y representa otro caso o extensión de A. No se cambian los atributos de criterio del concepto A, pero se reconocen nuevos ejemplos como relevantes.

B. Inclusión correlativa



En la inclusión correlativa, la nueva información y es vinculada a la idea X, pero es una extensión, modificación o limitación de X. Los atributos de criterio del concepto incluido pueden ser extendidos o modificados con la nueva inclusión correlativa.

2. Aprendizaje supraordinado



En el aprendizaje supraordinado, las ideas establecidas a_1, a_2 y a_3 se reconocen como ejemplos más específicos de la idea nueva A y se vinculan a A. La idea supraordinada A se define mediante un conjunto nuevo de atributos de criterio que abarcan las ideas subordinadas.

3. Aprendizaje combinatorio

Idea nueva A → B → C → D

Ideas establecidas

En el aprendizaje combinatorio, la idea nueva A es vista en relación con las ideas existentes B, C y D, pero no es más inclusiva ni más específica que las ideas B, C y D. En este caso, se considera que la idea nueva A tiene algunos atributos de criterio en común con las ideas preexistentes.

[14] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

Según Ausubel, la mayor parte de los aprendizajes significativos son subordinados, es decir la nueva idea aprendida se halla jerárquicamente subordinada a una idea ya existente. En este tipo de aprendizajes se produce una diferenciación progresiva de conceptos ya existentes en varios conceptos de nivel inferior. Por ejemplo, el alumno puede aprender a diferenciar entre diversos tipos de funciones: algebraicas, trigonométricas, exponenciales, implícitas, explícitas, etc. Existen dos tipos de aprendizaje subordinado: en el caso de la inclusión derivativa, la nueva información subordinada se limita a ejemplificar o apoyar un concepto ya existente, pero sin que cambien los atributos que definen a éste. En este caso, la diferenciación consiguiente da lugar simplemente a un reconocimiento de la existencia de varias subclases de un concepto pero sin que éste sufra ninguna modificación. En otro caso, cuando se produce una inclusión correlativa, la diferenciación existente acaba modificando a su vez el significado del concepto inclusor supraordinado.

La idea ausubeliana de que la mayor parte de los conocimientos se adquieren por diferenciación progresiva de los conceptos o estructuras ya existentes es, sin duda, atractiva. Aunque Ausubel está convencido de la primacía de la diferenciación, admite otras dos formas de aprendizaje significativo. El aprendizaje supraordinado es justamente el proceso inverso a la diferenciación. En él las ideas existentes son más específicas que la idea que se intenta adquirir. Se produce una reconciliación integradora entre los rasgos de una serie de conceptos que da lugar a la aparición de un nuevo concepto más general o supraordinado. Por ejemplo, sobre la definición de la ley de la inercia, dada por Galileo, al darse cuenta de que dos conceptos que se hallaban a un mismo nivel jerárquico pero sin conexión entre sí (el reposo y la velocidad constante de un móvil) eran en realidad dos manifestaciones de la misma ley general: la ley de la inercia.

Una última forma de aprendizaje significativo es el combinatorio. En este caso, la idea nueva y las ideas ya establecidas no están relacionadas jerárquicamente, sino que se hallan al mismo nivel dentro de la "pirámide de conceptos" usando la terminología de Vygostkii. Dentro de este tipo de aprendizaje significativo podrían incluirse diversas modalidades de aprendizaje por analogía.

Como podemos observar, para realizar un análisis ausubeliano de una situación de aprendizaje es necesario disponer tanto de la estructura lógica de la disciplina como de la estructura psicológica del alumno en esa misma área de conocimiento e ir introduciendo progresivas diferenciaciones en las ideas del educando, acompañadas ocasionalmente de algunas comparaciones y generalizaciones. En otras palabras, según Ausubel el aprendizaje de conceptos procede fundamentalmente de lo general a lo específico, siguiendo una vía descendente similar a la impuesta por Vygotskii con respecto al aprendizaje de conceptos científicos.

Las anteriores definiciones no son algo definitivo, pero pueden servir como un punto de arranque o de referencia, para el trabajo en cuestión.

1.3 LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA ELABORACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO

En el material didáctico propuesto, se pretende que al resolver problemas interdisciplinarios, el alumno pueda unificar su conocimiento, y que a partir de una idea central de un tema o de una disciplina pueda explicar algunas nociones que serán abordadas en el desarrollo de la solución del problema expuesto en el salón de clase. Además, las ideas centrales en la solución del problema, argumentarán algunas otras más, de distintas disciplinas que les son impartidas al educando en el salón de clase del bachillerato (Biología, Historia, Sociología, Geografía y Matemáticas).

Es importante que el educando vea que las matemáticas le sirven para entender el entorno donde vive, y que no necesariamente las utilizadas para resolver algunos problemas que implican su vida diaria son excesivamente complicadas, sino que muchas veces son matemáticas sencillas de entender y que sí existen algunas ideas centrales en la solución de los problemas.

Los problemas que serán presentados en ésta tesis, no serán problemas triviales, tales como la solución de algunos vistos en el bachillerato, por ejemplo los de máximos y mínimos referentes a la derivada o bien del cálculo de área de una región en un plano del tema de integral definida.

En la elaboración del material didáctico del presente trabajo de tesis se ha seguido un camino alterno al propuesto en las teorías del aprendizaje de la sección precedente, ya que en la enseñanza de las matemáticas siempre es recomendable que el alumno memorice ciertos conceptos, por ejemplo la fórmula general para la solución de una ecuación de segundo grado.

Es ineludible mencionar que en la enseñanza de las matemáticas, la memorización juega un papel importante, ya que existen conceptos que es necesario que el alumno aprenda de memoria, para que posteriormente los aplique en la resolución de problemas o bien en la comprensión de otras nociones que involucren a éste concepto.

El material fue diseñado bajo la idea principal, de que el estudiante conciba el entorno en donde vive; el hecho importante que se consideró, fue que los problemas que conforman el presente material didáctico giren en torno a problemas reales, los cuales por ser del tipo interdisciplinario, permitan que el educando se sienta inmerso en ellos, y así adquiera un conocimiento significativo.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, los textos del nivel bachillerato en su mayoría, presentan ejercicios sin sentido alguno para el estudiante. Si a este problema se le añade, que un alto porcentaje de los profesores que imparten las asignaturas de matemáticas los utilizan; y que además el interés que radica en los docentes es el de transferir a los educandos la solución de estos ejercicios, y según ellos, con esto están cumpliendo con el desarrollo de los programas de estudio del bachillerato. La tesis está elaborada con la pretensión de que la matemática no sea vista así por el alumno, es decir que sea vista divertida, menos complicada, más aplicable a las solución de problemas de la vida real y que estos problemas involucren al educando en su resolución, para que así el material diseñado tenga un sentido lógico para él.

Si existieran en el mercado, textos en los cuales fueran presentados problemas con un sentido de aplicación de las matemáticas en su solución, y que además, fueran expuestos desde un punto de vista de la vida real del estudiante, estos serían más interesantes para él, y generarían un aprendizaje significativo en el estudiante.

Un problema grave existente en la enseñanza de las matemáticas, y en particular en el bachillerato, es el de proporcionar al educando la elaboración de ejercicios y más ejercicios, los cuales para ellos son tediosos, aburridos y sin ningún sentido, esto conlleva a que el estudiante no adquiera un aprendizaje significativo y además que con el paso del tiempo deteste las matemáticas.

El desarrollo de la presente tesis, no esta basada en las teorías del aprendizaje expuestas en la sección anterior, aquí se tomo un camino alternativo, el de la presentación de problemas del tipo interdisciplinario, esto con el fin de que el alumno se sienta implicado en la solución de ellos. Además, es de esperarse que el educando, al serle presentados problemas que involucren el lugar en donde vive, se sienta implicado en él y se sienta inmerso en su solución. Si a esto se le añade que los materiales (problemas interdisciplinarios) presentan cierta lógica en su estructura, los estudiantes adquirirán un aprendizaje significativo. Lo cual es lo que se pretende obtener en los programas de estudio del bachillerato.

Capítulo 2

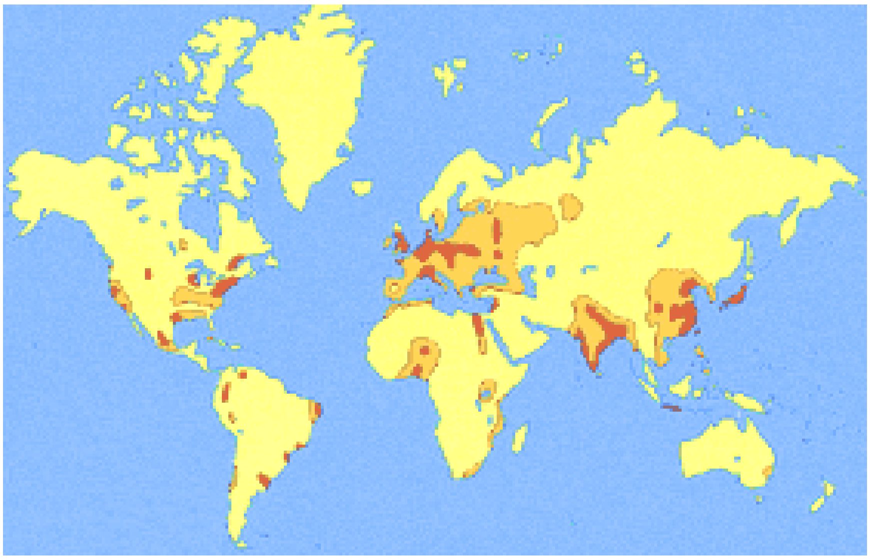
La Ley de Malthus

2.1 APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS A LA TEORÍA DE POBLACIONES

EL PROBLEMA DE LA EXPLOSIÓN DEMOGRÁFICA

Analizando cuál es la actual situación demográfica mundial, ¿Qué sería razonable esperar para el futuro de México en esta cuestión?

Para contestar ésta interrogante, es necesario dar marcha atrás en el tiempo, hasta los años 60, cuándo nadie tenía duda de que ciertamente existía una explosión demográfica. En 1960, la población mundial había alcanzado la cifra de 3000 millones. La edición del tercer millar de millones se había logrado en un período sorprendentemente corto de 30 años.



Resaltado en rojo se puede observar la mayor concentración de población mundial (más de 100 habitantes por km^2); en naranja la distribución media (entre 25 y 100 habitantes por km^2); y en amarillo, que es la mayor parte de la superficie terrestre, se distribuyen menos de 25 habitantes por km^2.

Por otro lado, la población de México, era de 34 923 129 habitantes. También, es importante mencionar, que en los años 60, la población mundial crecía al ritmo más acelerado de la historia. En los países en desarrollo, la población aumentaba a razón de 2.5 por ciento anual y representaba más del 70% de la población total del mundo. A este ritmo, su número se doblaría cada 27 años. Era algo que daba miedo si se tomaba en cuenta que a la humanidad le tomó hasta el año 1800 para alcanzar los primeros 1000 millones y hasta 1930 para el segundo millar de millones de habitantes.

Otro dato alarmante, es que la población mundial ya alcanza los 6 mil 500 millones de habitantes y pudiera llegar a 9 mil millones en el año 2050, según un informe de la Organización de las Naciones Unidas (**ONU**) divulgado el miércoles 16 de febrero del 2005.

Tabla 3. Población República Mexicana (1790-2000)[15]

Año	Población	Año	Población
1790	4 636 074	**1871**	9 176 082
1803	5 764 731	**1872**	9 141 661
1810	6 122 354	**1874**	8 743 614
1820	6 204 000	**1878**	9 169 700
1827	8 000 000	**1880**	9 000 000
1830	7 996 000	**1882**	10 001 884
1831	6 382 284	**1885**	10 879 398
1834	7 734 292	**1893**	11 994 347
1836	7 843 132	**1895**	12 632 427
1838	7 004 140	**1900**	13 607 272
1842	7 015 509	**1903**	14 074 149
1846	7 000 000	**1905**	14 331 188
1850	7 500 000	**1907**	14 222 445
1852	7 661 919	**1910**	15 160 369
1854	7 853 395	**1921**	14 334 780
1856	7 859 564	**1930**	16 552 722
1857	8 247 660	**1940**	19 653 552
1858	8 604 000	**1950**	25 791 017
1861	8 174 400	**1960**	34 923 129
1862	8 396 524	**1970**	48 225 238
1865	8 200 000	**1990**	81 249 645
1869	8 812 850	**1995**	91 158 290
1870	8 782 198	**2000**	97 483 412

Es digno de mencionarse, que el mayor aumento de la población en los próximos decenios se producirá en países de África y Asia, siendo India, China, Pakistán y Nigeria los que experimentarán un mayor crecimiento, seguidos por Estados Unidos[16].

[15]http://biblioteca.itam.mx/recursos/ehm.html#poblacion

Ahora bien, la primera cuestión que es formulada es:

¿Cómo se podría hacer una estimación aproximada de la población de tu país en el año 2090, de acuerdo a los datos antes mencionados?

Antes de comenzar a resolver el problema propuesto, serán proporcionadas algunas definiciones de elementos importantes en la teoría sobre crecimiento de poblaciones, la cuestión que se hará es la siguiente:

¿Qué es una población y cuáles son los elementos que la conforman?

En la siguiente sección, será proporcionada una definición de lo que se entiende por población:

2.2 EL MODELO EXPONENCIAL DE MALTHUS

Antes de comenzar a exponer el modelo exponencial de Malthus, se definirá que se entenderá por una población, en el sentido más común de la palabra: la población de un área geográfica es el número de personas, o los organismos de una especie particular, que viven en aquella área. La población humana es estudiada por la demografía, la sociología y la geografía. Las poblaciones de animales son estudiadas por la biología y en particular, la biología demográfica, una rama de la ecología, y por la genética demográfica

Las poblaciones serán entonces conjuntos de organismos de una especie, que como grupo presentan elementos que los definen y los caracterizan como tal, estos elementos son los siguientes:

Densidad

Toda población es su calidad de grupo, tiene un origen y se ha desarrollado más y mejor en un área determinada porque ésta le ha brindado las mejores condiciones, y ha sido a partir de ella que se ha distribuido.

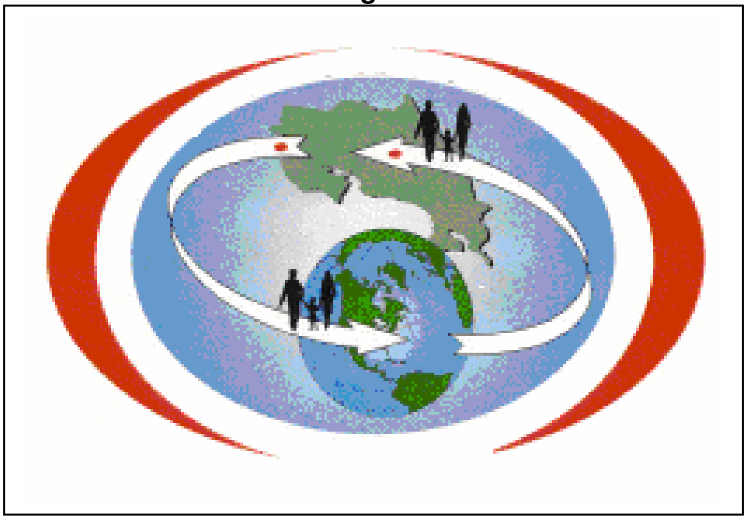
[16] www.iespana.es/natureduca/ geog_hum_demograf2.htm

Cada población es un componente estructural del ecosistema a través del cual la energía y los nutrientes fluyen. Se caracteriza por la densidad, que es el número de organismos que ocupan una unidad de espacio definida[17].

Migración

La migración es una característica que se refiere a los desplazamientos que la población presenta en el área en la que se ubica, o sea la dispersión o acumulación que los organismos presentan. De igual forma que en el caso de la natalidad y de la mortandad, también al ser referida a una unidad de tiempo o un lapso de tiempo específico como una semana, un mes, un año o bien horas se hará referencia a la tasa de migración. En este caso, habrá que considerar que los individuos que integran a la población pueden dar lugar a la salida de algunos individuos o bien a la llegada de otros, para lo que utilizaremos la palabra **emigración** para las salidas y la de **inmigración** para las llegadas y la suma de estos dos aspectos proporciona en total a la **migración**. Se ha mencionado que para referirse a la tasa es necesario relacionar los desplazamientos de fuera hacia adentro o de dentro hacia fuera o la suma con una unidad de tiempo, desde luego que para cualquiera de los tres casos, ya sea la migración, la emigración o la inmigración, habrá una tasa.

La Migración



Ya definidos éstos elementos, importantes para el desarrollo de éste material didáctico, será ahora presentado el modelo matemático que será utilizado para la solución del problema.

Se desea estudiar como evoluciona una población en el tiempo de cualquier especie (conejos, peces, humanos, microorganismos, etc.).

Lo que queremos es una función del tiempo, que a cada tiempo nos haga corresponder una cantidad de individuos de una determinada población. Denotaremos con $y(t)$ al número de individuos de la especie en el momento t.

---

[17] González, Adrián y Medina, Norah; Ecología; Editorial Mc Graw Hill, México, 1995.

Por otro lado, la población al tiempo $(t+\Delta t)$, será los individuos que estaban en el tiempo t, más los que nacen menos los que mueren. Por lo tanto, tendremos:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + Nacimientos - Muertes \qquad \mathbf{(1)}$$

Como el número de nacimientos es proporcional a la población en cualquier tiempo, este se expresará como el producto de la población $y(t)$ por la constante a y a su vez multiplicado por el incremento del tiempo Δt.

La constante a estará en función de la población que se encuentra en la edad de reproducción sexual (la cual también se le llama fecundidad, y es el promedio de hijos nacidos vivos en las mujeres de 12 a 49 años[18]).

En éste caso diremos que será la tasa de natalidad, y será el número de nacimientos referido a un lapso de tiempo, el cual puede ser una semana, un año o bien unas horas para el caso de los microorganismos. Por lo tanto, será definida como:

$$Nacimientos = a\, y(t)\, \Delta t$$

Por otro lado, el número de muertes es proporcional a la población en cualquier tiempo, es por ello que se expresa como el producto de la población $y(t)$ por la constante b y a su vez multiplicada por el incremento del tiempo Δt. La constante b, se definirá como:

$b =$ tasa de mortandad por unidad de tiempo

Por lo tanto, el número de muertes será definida como:

$$Muertes = b\, y(t)\, \Delta t$$

y se dirá que es el número de muertes considerados en un lapso de tiempo. De acuerdo a lo anterior se puede deducir lo siguiente:

a) Si el número de individuos que nacen es mayor que el número de individuos que mueren, tendremos que $a > b$, es decir, la población está creciendo.

b) Si el número de individuos que nacen es menor que el número de individuos que mueren, tendremos que $a < b$, es decir, la población está decreciendo.

Lo anterior se esta considerando para lapsos de tiempo pequeños de Δt, para intervalos de tiempo muy grandes no es posible predecir qué es exactamente lo que sucederá con el crecimiento de la población.

Por lo tanto, la ecuación (**1**) se puede escribir como:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t\, a\, y(t) - \Delta t\, b\, y(t) \;= y(t) + (a-b)\Delta t\, y(t)$$

$$\Rightarrow \qquad (a-b)\,\Delta t\, y(t) = y(t+\Delta t) - y(t)$$

---

[18]http:/www.inegi.com.mx

Si dividimos esto último entre Δt, obtenemos en promedio cuánto creció por unidad de tiempo la población, es decir, la tasa de crecimiento de la población:

$$(a-b)y(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \qquad (\mathbf{2})$$

Realmente lo que nos interesa es saber qué sucede para incrementos muy pequeños del tiempo, entonces calculemos el límite del lado derecho de la ecuación (**2**) cuando Δt tiende a cero, y se obtendrá la velocidad instantánea de crecimiento de la población:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \qquad (\mathbf{3})$$

Igualando las ecuaciones (**2**) y (**3**) se obtendrá lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = (a-b)y$$

Acabamos de deducir que la razón de cambio de la población $y(t)$ es proporcional a la población $y(t)$.

Si definimos a la constante k como: $k = (a-b)$, que le llamaremos constante de proporcionalidad, obtendremos finalmente:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Nótese que no se está considerando el modelo con migraciones.

Al valor de $y(t)$ en $t = 0$, se le llamará una **condición inicial**, y se escribirá en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = k\,y \\ &y(0) = y_0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{1})$$

La ecuación (**1**), es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para tener un Problema de Valor Inicial (**PVI**), basta conocer la cantidad de población en un momento específico. La ecuación (**1**), es conocida como la **Ley de Malthus de Crecimiento de Población**.

Por otro lado, para resolver el problema, supongamos que tenemos un modelo matemático que implica la **ley de crecimiento natural** y la condición inicial de que $y = y_0$ cuando $t = 0$. La ecuación diferencial será:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (\mathbf{1})$$

Resolvamos la ecuación (**1**), si multiplicamos ambos miembros de ésta por $\dfrac{dt}{y}$ obtendremos:

$$\frac{dy}{dt}\frac{dt}{y} = k\,y\,\frac{dt}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = k\,dt \qquad (\mathbf{2})$$

Integremos la ecuación (**2**):

$$\int \frac{dy}{y} = k\int dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln|\,y\,| = kt + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad |\,y\,| = e^{kt+C_1} \qquad \Rightarrow \qquad |\,y\,| = e^{kt}\cdot e^{C_1}$$

Si hacemos que $C = e^{C_1}$ tendremos que: $|\,y\,| = C\cdot e^{kt}$, y como y es positiva, podemos omitir las barras del valor absoluto, por lo tanto:

$$y = C\cdot e^{kt}$$

Pero como $y = y_0$ cuando $t = 0$, se obtendrá que: $C = y_0$. Por consiguiente:

$$y(t) = y_0\cdot e^{kt}$$

Otra forma de resolver la ecuación (**1**), es utilizando la regla de la cadena para la diferenciación; supongamos que tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k \qquad \Rightarrow \qquad \left[\ln(y(t))\right]' = k$$

Si se integra ésta última expresión con respecto a t:

$$\int \left[\ln(y(t))\right]'\,dt = k\int dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln|\,y(t)\,| = k\,t + C_2$$

Aplicando la exponencial a ambos miembros de la última expresión:

$$|\,y(t)\,| = e^{k\,t+C_2} \qquad \Rightarrow \qquad |\,y(t)\,| = e^{k\,t}\cdot e^{C_2}$$

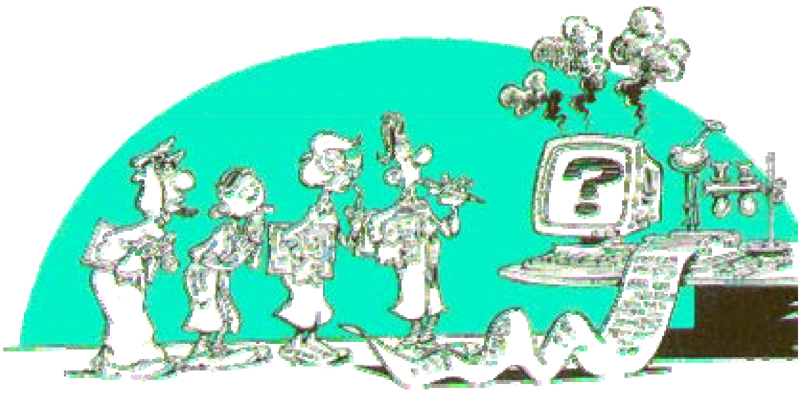
Si se supone que $C = e^{C_2}$ se tendrá: $|\,y\,| = C\cdot e^{k\,t}$, y como $y > 0$, se pueden omitir las barras del valor absoluto, por lo tanto:

$$y = C\cdot e^{kt}$$

Pero como $y = y_0$ cuando $t = 0$, obtendremos que: $C = y_0$. Por consiguiente:

$$y(t) = y_0\cdot e^{kt}$$

Ya con el modelo resuelto, y con ayuda de material didáctico (calculadora, computadora, etc.) se podrá resolver el problema planteado inicialmente.



Para este fin, hagamos lo siguiente: vamos a aplicar la fórmula de la **ley de crecimiento natural**, en este caso las variables cumplirán con las siguientes condiciones, si y aumenta cuando t aumenta, entonces $k > 0$ y la fórmula será:

1) $$y = y_0 \cdot e^{kt}$$

2.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (UNA PROYECCIÓN DE POBLACIÓN)

EJEMPLO DEL MODELO 2.3.1. Según datos obtenidos de la página del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (**INEGI**) en el XII Censo General de Población y Vivienda del 2000, la población en el año de 1970 era de 48 225 238 habitantes y en el año 2000 era aproximadamente de 97 483 412 habitantes. *¿Cuál será la población de México en el año 2090?*

SOLUCIÓN. Sean t el tiempo a partir de ahora en años y y el número de habitantes presentes a los t años, vamos a considerar datos obtenidos de la página del **INEGI**, la población total en el año 2000 era aproximadamente de 97 483 412 habitantes[19]. Escribamos los datos en la tabla siguiente:

t	0	30	60
y	48 225 238	97 483 412	y_{60}

Sustituyamos estos valores en la ecuación (**1**) de crecimiento natural:

$$y = 48225238e^{kt} \qquad (\mathbf{2})$$

Como además se sabe que $y = 97483412$ cuando t = 30, sustituyendo esto en (**2**), se obtendrá:

$$97483412 = 48225238e^{30k} \quad \Rightarrow \quad \frac{97483412}{48225238} = e^{30k} \qquad (\mathbf{3})$$

[19] http:/www.inegi.com.mx

Por otro lado, cuando t = 60, se tiene que $y = y_{60}$. Por lo tanto, se tendrá en la ecuación (**1**) que:

$$y_{60} = 48\,225\,238 e^{60k} \qquad \Rightarrow \qquad y_{60} = 48\,225\,238 (e^{30k})^2 \qquad (\mathbf{4})$$

Si se sustituye (**3**) en (**4**) y se calcula se obtendrá:

$$y_{60} = 48\,225\,238 \left[\frac{97\,483\,412}{48\,225\,238}\right]^2 = 197\,054\,820.4$$

Por lo tanto, la población esperada para el año 2030 será de 197 054 820 habitantes. La gráfica que representa éste valor aparece en la figura 5.

Nótese que de la ecuación (**3**):

$$\frac{97\,483\,412}{48\,225\,238} = e^{30k}$$

se puede despejar a la constante k; realizaremos tal despeje para hallar el valor de esta constante:

$$\frac{97\,483\,412}{48\,225\,238} = e^{30k} \qquad \Rightarrow \qquad \ln[e^{30k}] = \ln\left[\frac{97483412}{48225238}\right] \qquad \Rightarrow \qquad 30k = 0.7031$$

$$\Rightarrow \qquad k = 0.002344$$

Por lo tanto:

$$k = 0.002344\,.$$

Ya con el valor de k se puede realizar la proyección del crecimiento de la población para el año 2090[20]. Pero con el fin de que el estudiante vea como va creciendo la población de su país, lo realizaremos para múltiplos de 30 años.

Recordemos que buscamos cuál es la población en México en el año 2090, para resolver éste problema tendremos que realizar dos iteraciones más para llegar al resultado buscado. Si calculamos nuevamente:

t	0	30	60	90
y	48 225 238	97 483 412	197 054 820	y_{90}

Sustituyamos estos valores en la fórmula (**1**):

$$y = 97\,483\,412 e^{kt}$$

[20] Se resuelve el modelo de esta forma para evitarse el uso de logaritmos, pero el estudiante al tener ya el valor de la constante k, puede realizar la proyección para cualquier año.

Como además se sabe que $y = 197\,054\,820$, cuando t = 60, se obtendrá:

$$197054820 = 97\,483\,412 e^{30k} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{197\,054\,820}{97\,483\,412} = e^{30k} \qquad \textbf{(2a)}$$

Por otro lado, cuando t = 90, se tiene que: $y = y_{90}$. Por lo tanto, se tiene en la ecuación (**1**) lo siguiente:

$$y_{90} = 97\,483\,412\, e^{60k} \qquad \Rightarrow \qquad y_{90} = 97\,483\,412\,(e^{30k})^2 \qquad \textbf{(3a)}$$

Si se sustituye (**3a**) en (**2a**) y se calcula se obtendrá:

$$y_{90} = 97\,483\,412 \left[\frac{197\,054\,820}{97\,483\,412}\right]^2 = 398330354.8$$

Por lo tanto, la población esperada para el año 2060 será de 398 330 355 habitantes. La gráfica que representa el crecimiento de la población aparece en la figura 6.

Figura 5. La población esperada en México en el año 2030.

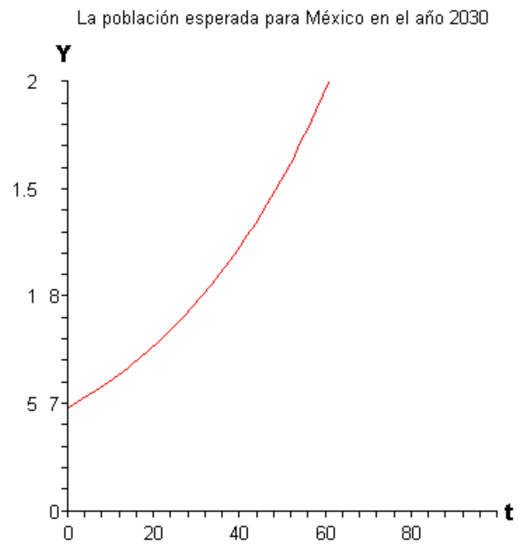
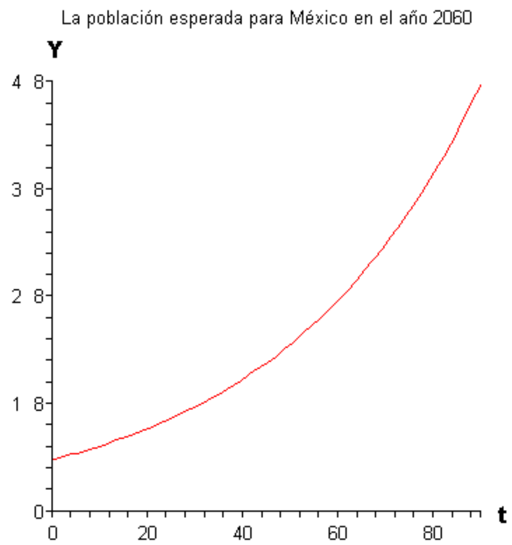


Figura 6. La población esperada en México en el año 2060.



Para el año 2090 la población esperada será la siguiente. Si se calcula nuevamente:

t	0	30	60	90	120
y	48 225 238	97 483 412	197 054 820	398 330 355	y_{120}

Finalmente, sustituyamos estos valores en la fórmula (**1**):

$$y = 197\,054\,820\, e^{kt}$$

Como además se sabe que $y = 398\,330\,355$, cuando t = 90, se obtendrá:

$$398\,330\,355 = 197\,054\,820\, e^{30k} \quad \Rightarrow \quad \frac{398\,330\,355}{197\,054\,820} = e^{30k} \qquad \textbf{(2b)}$$

Por otro lado, cuando t = 120, se tiene que: $y = y_{120}$. Por lo tanto, se tendrá en la ecuación (**1**) que:

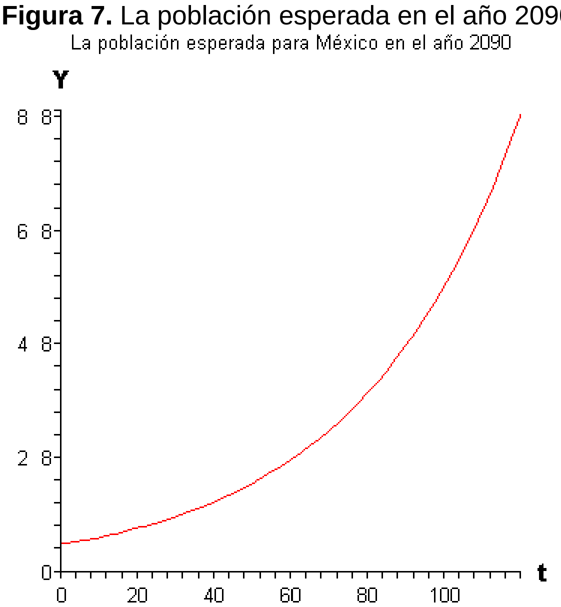
$$y_{120} = 197\,054\,820\, e^{60k} \quad \Rightarrow \quad y_{120} = 197\,054\,820\,(e^{30k})^2 \qquad \textbf{(3b)}$$

Si se sustituye (**3b**) en (**2b**) se obtendrá:

$$y_{120} = 197\,054\,820 \left[\frac{398\,330\,355}{197\,054\,820}\right]^2 = 805\,192\,543.4$$

Por lo tanto, la población esperada para el año 2090 será de 805 192 543 habitantes. El crecimiento de la población para este año, es representado en la gráfica que aparece en la figura 7.

Figura 7. La población esperada en el año 2090.

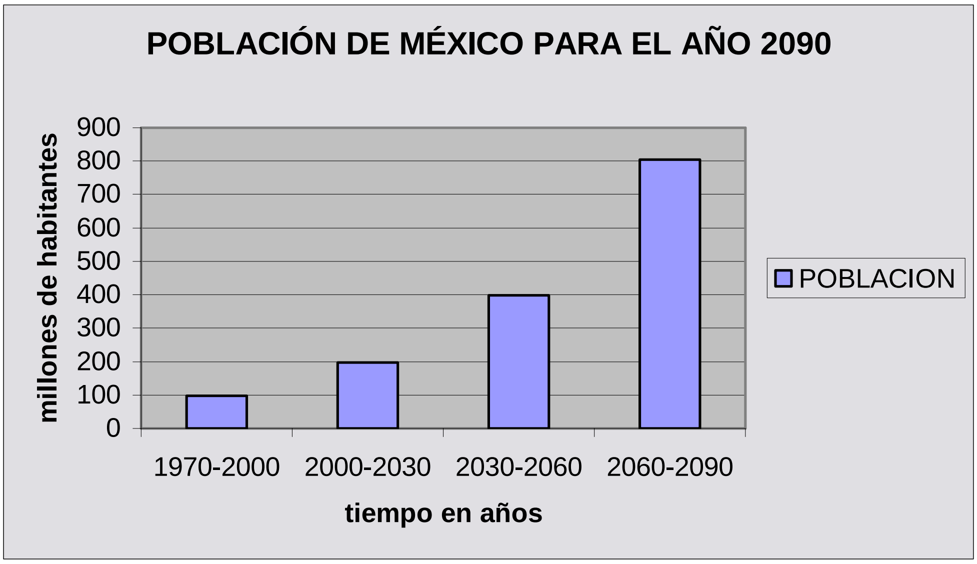


Por consiguiente, en el año 2090 seremos ya demasiados para poder vivir sin problema alguno en la República Mexicana.

De acuerdo a estos datos se tendrá la tabla siguiente:

t	0	30	60	90	120
y	48 225 238	97 483 412	197 054 820	398 330 355	805 192 543

Si construimos una gráfica de barras con estos datos:



Si analizamos los resultados obtenidos, el modelo utilizado predice razonablemente bien a la población hasta aproximadamente 2030, pero después de éste año la predicción resulta exageradamente grande.

Además, se puede afirmar que el modelo es bastante bueno siempre y cuando la población sea relativamente pequeña. Sin embargo, con el paso del tiempo el modelo predice que la población continuará creciendo sin límite, pero esto no sucede en la realidad. Entonces, si aspiramos a un modelo que sea exacto sobre una escala grande de tiempo, debemos de tomar en cuenta el hecho de que las poblaciones existen en una cantidad finita de espacio y con recursos limitados.

El pensamiento de Malthus

Se señala que de acuerdo a **Malthus** la población suele aumentar en una proporción geométrica, y la producción de alimentos sólo puede aumentar en una proporción aritmética. Concluyéndose inmediatamente, que la población suele exceder las posibilidades reales de alimentación que ofrece la tierra, por lo que la miseria tiende a estar siempre presente.

Inclusive llega a señalarse que el crecimiento exagerado de la población no es una causa, y que las cosas serían realmente distintas si la población no aumentara tan rápidamente.

En este cuadro las diversas medidas de control de natalidad se convierten en un factor clave en la lucha por el desarrollo, aún cuando no se llega a asegurar que controlado el crecimiento de la población el progreso será realmente posible.

Veamos algunos aspectos importantes de la vida de **Malthus**:

Malthus nació el 13 de febrero de 1766 en la finca *The Rookery* que su padre compró en 1759; y murió en el año de 1834.

A los 16 años de edad, en 1782, el joven **Malthus** fue recomendado a Gilbert Wakefield, clérigo herético que fuera encarcelado en 1799 por haber expresado el deseo de que los revolucionarios franceses invadieran Inglaterra.

A los 18 años, probablemente por influencia de Wakefield ingresó al Jesús College en Cambridge. Cuatro años más tarde, en 1788 se ordenó clérigo, sin dejar sus estudios, graduándose de Bachiller en Artes en 1791.

En junio de 1793, **Malthus** recibió una beca que le permitió permanecer en Cambridge hasta 1804, en que renuncia para casarse. Desde 1796, se las arreglaba para atender el curato de Albury, cerca de la nueva casa paterna, y de Cambridge.

En 1805 fue nombrado profesor de "Historia Moderna y Economía Política" del *East India College*, que se acababa de fundar.

La vida en los tiempos de Malthus

Es relevante ubicarnos en la historia de Francia a finales del siglo XVIII y a principios del siglo XIX, esto con el fin de saber cual era el contexto del momento en que vivía Roberth Malthus.

A principios del siglo XIX, la Francia de Napoleón Bonaparte, intentaba conquistar a Inglaterra, imponiéndole un bloqueo comercial. España había tenido que terminar uniéndose a la flota francesa, Napoleón era tan peligroso para sus enemigos como para sus aliados. La alianza hispano-francesa tuvo efectos desastrosos para España, como por ejemplo, la pérdida de la Isla de Trinidad, cedida a Inglaterra en 1798, y la pérdida de la flota de guerra y de sus mejores marinos en la batalla de **Trafalgar**, el día 21 de octubre de 1805, donde las fuerzas marítimas de Francia y España fueron aniquiladas por los ingleses.

España estaba aliada a la potencia francesa y bajo el mando de los almirantes Pierre Villeneuve y el español Federico Gravina que contaban con 33 embarcaciones**,** se enfrentó a la armada inglesa de Horacio Nelson con 27 embarcaciones. Al principio, la superioridad de los navíos españoles debería, en teoría, darles la victoria, pero no fue así.

Esta batalla terminó con las aspiraciones del gran Napoleón Bonaparte de poder conquistar al pueblo inglés.

Sin embargo, el tiempo del gran Napoleón Bonaparte I y su gran imperio estaba por finalizar.

El inicio de la caída de Napoleón fue en 1812, cuando pretendió dar solución militar a sus desacuerdos con Rusia. La alianza de Bonaparte con el zar Alejandro I quedó anulada en 1812 y Napoleón emprendió una campaña contra Rusia que terminó con la trágica retirada de Moscú. Este fracaso impulsó a que toda Europa se uniera para combatirlo y a pesar de su maestría frente a los ejércitos y a sus brillantes estrategias militares, el poderío de sus enemigos lo aplastó. En 1814, una invasión a Francia lo llevó a abdicar en Fontainebleau y fue relegado a la isla de Elba.

De acuerdo a la lectura anterior, el pueblo francés estaba en crisis, tanto económica como políticamente, ya que había perdido la guerra y había tenido que ceder territorios a los aliados, así como el de pagar en efectivo a algunos de los países que había invadido. Pero sobre todo recayó sobre las clases humildes que eran las que soportaban sobre sus débiles economías el peso de estos desastres militares.

Ahora que hemos visto, en forma breve, cuál era la situación en que se encontraba Francia a principios del siglo XIX, en el tiempo en que vivió Roberth Malthus, resolvamos los siguientes cuestionarios:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 2.1

Lee con atención las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la lectura, ¿Estarías tú de acuerdo con la teoría económica de Roberth Malthus? Si tu respuesta es afirmativa escribe porqué y si es negativa escribe motivos:____

2. ¿Qué evento fue el que terminó con las aspiraciones de Napoleón Bonaparte al de someter al pueblo inglés?____
____

3. ¿Cuál era la situación política y económica que ponderaba en Europa en el siglo XIX?____

4. De acuerdo a la lectura, ¿Cuál era la situación económica en la que se encontraba la Francia de Roberth Malthus?______________________________
____

5. ¿Tú crees que tuvo alguna influencia la situación que ponderaba en la Francia del siglo XIX en la teoría sobre economía que desarrollo Roberth Malthus? Explica tu respuesta:____

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 2.2

Lee con cuidado las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la gráfica anterior, ¿podrías hacer una estimación de cuál sería la población que habrá en México en el año 2180?_________________________

2. Si la población sigue creciendo así, ¿tú crees que la producción de alimentos será suficiente para todos?____
____

3. Si tomamos en cuenta que la extensión territorial de la República Mexicana, es de 1 964 375 Km^2 de los cuales 1 959 248 Km^2 son superficie continental y 5 127 Km^2 corresponden a superficie insular[21], ¿cuántos habitantes vivirán en cada metro cuadrado en el año 2090?________________________________

4. Si la superficie territorial del Distrito Federal es de 1499 Km^2, ¿Cuántos habitantes por metro cuadrado habitan la ciudad en la actualidad[22]?____

5. De acuerdo a los datos anteriores, si el crecimiento de la población sigue su marcha, ¿cuántos habitantes por kilómetro cuadrado vivirán en el año 2030, en el Distrito Federal (para esto toma en cuenta la tabla de censos de población del DF)? ____

De acuerdo al cuestionario anterior, es realmente imposible que las poblaciones de las ciudades crezcan incontroladamente, porque por muy grandes que sean los recursos de una población, éstos son esencialmente finitos.

De hecho el modelo de Malthus es sumamente adecuado cuando las poblaciones son pequeñas, sin embargo, cuando las poblaciones son grandes resulta inadecuado. De hecho los individuos compiten entre si por el espacio, recursos naturales, alimentos y por reproducirse.

NOTA IMPORTANTE

En el problema que se acaba de resolver, la solución de la ecuación diferencial es una exponencial positiva, esto implica que se tiene una ecuación creciente, la cual refleja el crecimiento de la población.

Por otro lado, si se tiene el caso en que la ecuación diferencial sea una exponencial negativa, esto implicará que será de la forma decreciente, entonces se tendrá en si el mismo problema, pero la solución será con respecto a un problema de decrecimiento. Esto se verá en el desarrollo de los siguientes problemas.

---

[21] http://mapserver.inegi.gob.mx/geografia/espanol/datosgeogra/extterri/frontera.cfm?c=154

[22] http://mapserver.inegi.gob.mx/geografia/espanol/datosgeogra/extterri/frontera.cfm?c=154

2.4 ALGUNAS OTRAS APLICACIONES

En esta sección veremos las siguientes aplicaciones del modelo de Malthus:

a) APLICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DETERMINAR EL ENFRIAMIENTO DE UN LÍQUIDO, CUYA TEMPERATURA INICIAL ES SUPERIOR A LA DEL AMBIENTE.

Se realizó un experimento para investigar cual de dos personas toma más caliente el café con leche, siendo distintos los instantes en los que cada uno agrega la leche. Para este fin, se registraron las temperaturas de las dos tazas de café durante 11 minutos.

También se comprobó la solución utilizando un modelo matemático sobre el mismo problema y posteriormente se realizó una comparación de los resultados obtenidos matemáticamente con los obtenidos experimentalmente.

EJEMPLO 2.4.1. Los señores Lavolpe y Blanco, para limar asperezas en su relación, deciden tomarse una deliciosa taza de café con leche. Las tasas de café les son servidas a la misma temperatura y al mismo tiempo.

Blanco añade inmediatamente un chorrito de leche pero no toma su café hasta pasados 11 minutos. Lavolpe espera 9 minutos, añade entonces la misma cantidad de leche y toma su café 2 minutos después. La siguiente cuestión es:

¿Quién tomará más caliente el café con leche?

Para contestarnos esta interrogante, resolveremos el problema por medio de un experimento y posteriormente realizaremos un análisis matemático del mismo.

El objetivo del experimento es el de investigar el enfriamiento de un líquido cuya temperatura inicial es superior a la temperatura ambiente; en otras palabras, es ver si para tomar un café con leche más caliente es mejor echarle la leche justo antes de tomarlo o en el momento en el cual se sirve el café. Comencemos a realizar el experimento:

MÉTODO EXPERIMENTAL

Utilizaremos los siguientes materiales:

- Dos termómetros
- Café caliente y leche
- Dos cronómetros
- Dos tazas del mismo tamaño
- Recipientes para medir la leche y el café

La metodología que seguiremos en el desarrollo del experimento, es la siguiente:

1. Tomar temperatura del ambiente y de la leche y registrar.
2. Llenar dos tazas con 150 mililitros de café caliente.
3. Introducir termómetros en ambos recipientes y registrar durante 11 minutos.
4. A los 30 segundos agregar 50 mililitros de leche al recipiente de Blanco.
5. A los 630 segundos agregar 50 mililitros de leche a la taza de Lavolpe.
6. Representar gráficamente los datos obtenidos.
7. Realizar una comparación con los datos obtenidos en ambos registros.

Las cantidades de café y de leche deben de ser las mismas en ambas tazas y además, las tazas deben de ser del mismo material.

Las temperaturas registradas para el café con leche de Blanco y de Lavolpe se presentan en la tabla siguiente, el tiempo esta dado en segundos y la temperatura en grados Celsius:

Tabla 4

TIEMPO	TEMPERATURA
30	59
90	57
150	56
210	55
270	54
330	53
390	52
450	51.2
510	50.3
570	49.4
630	48.9
700	48

Taza Blanco

TIEMPO	TEMPERATURA
30	68.5
90	66
150	64
210	62
270	60.8
330	59
390	57.9
450	56.5
510	55
570	54.8
630	45
700	44.4

Taza Lavolpe

Las gráficas de cada uno de los casos, fueron hechas en Excel, las cuales aparecen en las siguientes figuras:

Figura 8. Temperatura registrada en la taza de Blanco.

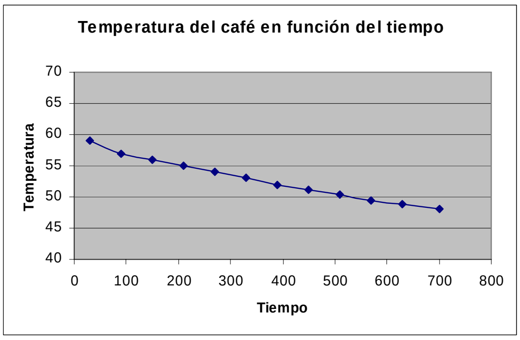
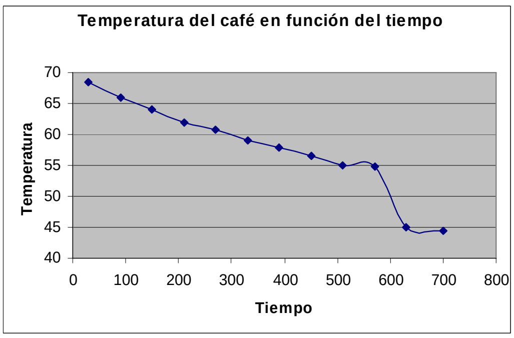
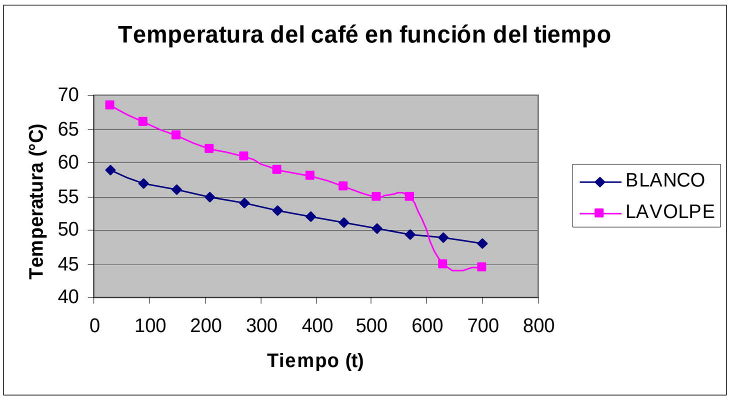


Figura 9. Temperatura registrada en la taza de Lavolpe.



En la siguiente gráfica son consideradas las temperaturas registradas en ambas tazas de café:

Figura 10. Temperaturas registradas en ambas tazas de café



Se puede observar que la curva que representa al café con leche de Lavolpe tiene mayor pendiente a la de Blanco. Esto se debe a que la diferencia de la temperatura del café de Lavolpe con la temperatura del ambiente es mayor, se enfriará más rápido que cuando la diferencia es menor, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton. Es de esperarse que Lavolpe vaya a tomar el café más frío que Blanco, esto se puede verificar de acuerdo con los datos registrados del experimento.

En la figura 10 se muestra la temperatura del café en función del tiempo (o de la mezcla, según el instante en que se observe).

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Realizaremos ahora el análisis matemático del problema, para tal fin serán considerados los siguientes valores:

$T_a = temperatura\ ambiente$

$T_c = temperatura\ del\ café$

$T_l = temperatura\ de\ la\ leche$

$T_m = temperatura\ de\ la\ mezcla$

$k =$ constante de enfriamiento

L y $C =$ constantes

Para el análisis matemático se debieron de realizar algunos supuestos, esto con el fin de simplificar los cálculos. La temperatura del ambiente y la de la leche antes de mezclarla con el café la supusimos constantes, ya que las variaciones de las mismas eran pequeñas y no alterarían el análisis.

Una observación importante que haremos, es la referente a la altitud de la ciudad de México, la cual esta entre 2240 y 2700 metros de altura sobre el nivel del mar[23]. La altura va a influir en el punto de ebullición del agua, ya que el punto de ebullición al nivel del mar es de 100 °C y a la altura de la ciudad del Distrito Federal, el punto de ebullición registrado fue de 75 °C.

[23] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática. Página, www.**inegi**.gob.mx

Es pertinente mencionar que el resultado del experimento sería el mismo que si éste fuera realizado al nivel de mar, o bien en cualquier otra ciudad de diferente altura a la de la ciudad del Distrito Federal.

El experimento fue realizado aproximadamente a las 14:00 horas, el día 20 de mayo del presente año, el **Sistema Meteorológico Nacional** nos proporcionó la temperatura ambiente que existía en ese momento[24], esto con el fin de cotejar datos con los registrados en el lugar en donde se realizó el experimento[25].

Recordemos la fórmula de la Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T_a - T(t))$$

Comencemos a plantear el problema. Los datos iniciales que se tienen son:

$$T_a(t) = 18.5\ °C \qquad ; \qquad T_c(0) = 75\ °C \qquad ; \qquad T_l(t) = 8\ °C$$

Por otro lado, el café con leche estaba compuesto por 150 mililitros de café y por 50 mililitros de leche, es decir por un 75 % de café y por un 25 % de leche, del total de la mezcla. Por lo tanto, tendremos:

$$T_m(t) = 0.75T_c(t) + 0.25T_l(t) \qquad \textbf{(1)}$$

El experimento se realizó con las cantidades mencionadas anteriormente de café y de leche, pero estas pueden ser cualesquiera, únicamente lo que se debe de considerar es que sean las mismas, tanto para la de la leche como la del café.

Lavolpe mezcla el café con leche a los 9 minutos, mientras que Blanco lo mezcla en el instante $t = 0$; ambos toman el café con leche a los 11 minutos. Resolvamos el problema por casos:

✓ **CASO BLANCO**:

$$\frac{dT_c}{dt} = k\,(18.5 - T) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT_c}{dt} + kT_c(t) = 18.5\,k \;^{26} \qquad \Rightarrow \qquad T_c(t) = B\,e^{-kt} + 18.5$$

Por tanto, tendremos que:

$$T_c(t) = B\,e^{-kt} + 18.5 \qquad \textbf{(2)}$$

Como la temperatura del café es: $T_c(0) = 75\ °C$, si sustituimos y calculamos:

$$T_c(0) = B + 18.5 = 75 \qquad \Rightarrow \qquad B = 56.5$$

---

[24] Se realizó una llamada telefónica al Sistema Metereológico Nacional y nos fue proporcionada la temperatura ambiente que existía en el lugar en que fue realizado el experimento.

[25] Servicio Meteorológico Nacional, página, http://smn.cna.gob.mx/

[26] La solución de la ecuación de la forma: $\frac{dy}{dt} + cx = a$, con a y c constantes, es dada en la página 42.

De aquí se puede deducir, la temperatura del café en función del tiempo:

$$T_c(t) = (56.5)\,e^{-kt} + 18.5 \qquad (\mathbf{3})$$

Como además sabemos que la temperatura de la leche es: $T_l(t) = 8°C$. Si sustituimos la ecuación (**2**) y esto último en la ecuación (**1**), se obtendrá:

$$T_m(t) = 0.75\left[56.5\,e^{-kt} + 18.5\right] + (0.25)(8) \qquad \Rightarrow \qquad T_m(t) = 42.375e^{-kt} + 15.875$$

Y como el café se toma a los 11 minutos, se obtendrá:

$$T_m(11) = 42.375\,e^{-11k} + 15.875 \qquad (\mathbf{4})$$

✓ **CASO LAVOLPE**:

Como Lavolpe mezcla el café con la leche a los nueve minutos se tendrá, lo siguiente:

$$\frac{dT_m}{dt} = k\,(18.5 - T_m(t)) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT_m}{dt} + kT_m(t) = 18.5\,k \qquad \Rightarrow \qquad T_m(t) = L\,e^{-kt} + 18.5$$

Por lo tanto, se obtendrá la expresión:

$$T_m(t) = L\,e^{-kt} + 18.5 \qquad (\mathbf{5})$$

Como la mezcla se realiza en el tiempo $t = 9$, se tendrá que:

$$T_m = (0.75)(54.8) + (0.25)(8) = 41.1 + 2 = 43.1$$

Por lo tanto:

$$T_m(9) = L + 18.5 = 43.1 \qquad \Rightarrow \qquad L = 24.6$$

Sustituyamos el valor obtenido para $L = 24.6$, en la expresión (**5**):

$$T_m(t) = 24.6\,e^{-kt} + 18.5$$

Como Lavolpe también toma su café a los 11 minutos se tendrá:

$$T_m(11) = 24.6\,e^{-11k} + 18.5 \qquad (\mathbf{6})$$

Únicamente faltaría hallar el valor de k, para poder comparar la temperatura del café con leche de Lavolpe; con la temperatura del café con leche de Blanco en el instante en el cual ambos beben el café (11 minutos)[27].

---

[27] En el análisis matemático, la constante k que se mide, es la de la mezcla del café con leche, la cual no depende de la densidad de ambos líquidos.

Para realizar esto se utilizarán algunas de las mediciones del experimento llevado a cabo anteriormente. Utilizando, los valores de: $T_1 = 54°C$, $T_0 = 59°C$, $T_a = 18.5°C$ y $t = 4$ minutos. Si utilizamos la fórmula[28] para hallar el valor de k_1 y calculamos:

$$k_1 = -\frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right] \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{4}\ln\left[\frac{54-18.5}{59-18.5}\right] = -\frac{1}{4}\ln\left[\frac{35.5}{40.5}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(0.8765) = -\frac{1}{4}(-0.1318) = 0.0329$$

Por lo tanto:

$$k_1 = 0.0329$$

Si se realiza lo mismo pero para el caso de **Lavolpe**, utilizando los valores de $T_1 = 60.8°C$, $T_0 = 68.5°C$, $T_a = 18.5°C$ y $t = 4$ minutos. Si se sustituye en la fórmula para hallar el valor de k_2 y se calcula:

$$k_2 = -\frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right] \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{4}\ln\left[\frac{60.8-18.5}{68.5-18.5}\right] = -\frac{1}{4}\ln\left[\frac{42.3}{50}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(0.846) = -\frac{1}{4}(-0.1672) = 0.04181$$

Por lo tanto:

$$k_2 = 0.04181.$$

Vamos a realizar ahora las operaciones necesarias para cada uno de los valores de k obtenidos:

✓ **CASO BLANCO**:

Para el valor de $k_1 = 0.0329$, si se sustituye en (**4**) y se calcula:

$$T_m(11) = 42.375e^{-11(0.0329)} + 15.875 = 42.375e^{-0.3623} + 15.875$$

$$= (42.375)(0.6960) + 15.875 = 29.49 + 15.875 = 45.37 \quad \Rightarrow \quad T_m(11) = 45.37\ °C$$

Para el valor de $k_2 = 0.04181$, si se sustituye en (**4**) y se calcula:

$$T_m(11) = 42.375e^{-11(0.0418)} + 15.875 = 42.375e^{-0.4598} + 15.875$$

$$= (42.375)(0.6313) + 15.875 = 26.75 + 15.875 = 42.63 \quad \Rightarrow \quad T_m(11) = 42.63\ °C$$

---

[28] La fórmula para hallar el valor de k_1 y k_2: $k = -\frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right]$, para T_0 , T_1 y T_a cantidades conocidas, aparece en la página 43.

✓ **CASO LAVOLPE**:

Para el valor de $k_1 = 0.0329$, si se sustituye en (**6**) y se calcula:

$$T_m(11) = 24.4e^{-11(0.0329)} + 18.5 = 24.6e^{-0.3623} + 18.5$$

$$= (24.6)(0.696) + 18.5 = 17.12 + 18.5 = 35.62 \qquad \Rightarrow \qquad T_m(11) = 35.62\ °C$$

Para el valor de $k_2 = 0.0418$, si se sustituye en (**6**) y se calcula:

$$T_m(11) = 24.6e^{-11(0.0418)} + 18.5 = 24.6e^{-0.4598} + 18.5$$

$$= (24.6)(0.6313) + 18.5 = 15.53 + 18.5 = 34.03 \qquad \Rightarrow \qquad T_m(11) = 34.03°C$$

Realicemos una comparación para los dos valores de k y para cada uno de los casos[29]:

Para el valor de $k_1 = 0.0329$:

LAVOLPE $\quad T_m(11) = 35.62\ °C \quad < \quad T_m(11) = 45.37\ °C$ **BLANCO**

Para el valor de $k_2 = 0.0418$:

LAVOLPE $\quad T_m(11) = 34.03\ °C \quad < \quad T_m(11) = 42.63\ °C$ **BLANCO**

Por lo tanto, se tiene la siguiente afirmación:

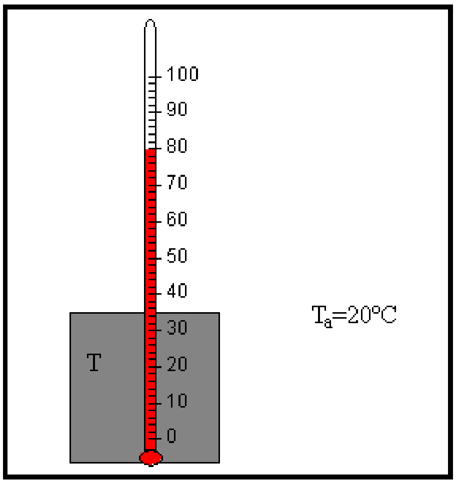
Temperatura café con leche de **Lavolpe** < Temperatura café con leche de **Blanco**

Se puede concluir, que quien toma el café con leche más caliente es Blanco. Es importante mencionar que las diferencias entre las temperaturas del café con leche de Lavolpe y las de Blanco obtenidas matemáticamente son más grandes que las obtenidas en el experimento, esto se debe a que para el análisis matemático se consideraron algunos supuestos importantes que en el experimento no se dan. Aún así, se llego a la misma conclusión, tanto matemáticamente como experimentalmente, es decir, en los dos casos toma el café más caliente quien mezcla la leche fría en el minuto inicial.

[29] Cuando se tienen varios valores de la constante k, se toma la media aritmética de todas ellas.

b) APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN LA DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE MUERTE

Comencemos con un poco de historia sobre un matemático muy importante del siglo XVIII.



El nombre de **Isaac Newton** (1641–1727) es reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. En su juventud estudió el movimiento y estableció las leyes de la dinámica, estableció la ley de la gravitación universal, explicó la descomposición en colores de la luz blanca cuando pasa por un prisma, desarrolló el cálculo diferencial, entre otras cosas. A la edad de 60 años, aceptó un puesto como funcionario nacional y se desempeñó como responsable de la casa de moneda de su país; probablemente, fue ahí donde se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales motivado por su responsabilidad de supervisar la calidad de acuñación.

Utilizando un horno de carbón de una pequeña cocina, Newton realizó el siguiente experimento. Calentó al rojo vivo un bloque de hierro; al retirarlo del fuego lo colocó en un lugar frío y observo como se enfriaba. Los resultados obtenidos, dieron lugar a lo que hoy conocemos como la **ley de enfriamiento de Newton**. La cual se escribe como sigue:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \qquad \textbf{(1)}$$

donde: la derivada de la temperatura con respecto al tiempo $\frac{dT}{dt}$, representa la rapidez del enfriamiento, T es la temperatura instantánea del cuerpo, k es una constante que define el ritmo del enfriamiento y T_m es la temperatura del ambiente, la cual es la temperatura que alcanza el cuerpo después de transcurrido el tiempo. El signo negativo de la ecuación (**1**) indica si el objeto está más caliente que su entorno ($T > T_m$), entonces se enfriará con el paso del tiempo. Donde: $\frac{dT}{dt} < 0$ cuando $T - T_m > 0$.

Una aplicación interesante de esta ley, consiste en determinar el instante del fallecimiento de una persona, después de algunas horas de muerta. Esta información es de crucial importancia en criminología y en estudios forenses, el escenario de un crimen puede variar de una manera muy importante, si éste haya ocurrido a una hora o a otra hora diferente del día. Supongamos que queremos resolver el siguiente caso:

EJEMPLO 2.4.2. Se quiere resolver un problema referente al asesinato de una persona, los datos proporcionados en este crimen se obtuvieron de un dictamen emitido por la dependencia competente para resolver un caso de éste tipo.

El planteamiento del problema es sobre una investigación real, es decir, un homicidio por disparo de arma de fuego.

Al C. **Francisco Quesadilla Limones**, se le acusa de haber participado en el asesinato del C. **José Yizuael Borrego de Fox**[30].

Él argumenta no haber participado en el asesinato, él tiene coartadas de lo que hizo en los siguientes horarios, del día en que ocurrió el homicidio:

De 10:00 horas a 12:30 horas	y	de 13:40 horas a 15 horas

En resumen, el dictamen de la investigación del asesinato del C. José Yizuael Borrego de Fox[31], es el siguiente:

A las 14:40 horas del día 14 de octubre del 2005, en las calles de Centella y Morelos, Colonia Valle de las Luces, Delegación Iztapalapa, en el Distrito Federal, fue levantado el cadáver del C. José Yizuael Borrego de Fox. Del dictamen, serán consideradas las siguientes conclusiones:

- De la interpretación de los fenómenos cadavéricos, se deduce un tiempo de muerte en un lapso mayor a dos horas y menor a cuatro horas al momento de realizar el estudio de anfiteatro.

- De las características de las lesiones señaladas en el capítulo correspondiente, se establece que éstas son producidas por proyectil disparado por arma de fuego.

- De las lesiones apreciadas al hoy occiso de nombre **José Yizuael Borrego de Fox**, se establece que las causas de muerte son las heridas producidas por proyectil disparado por arma de fuego.

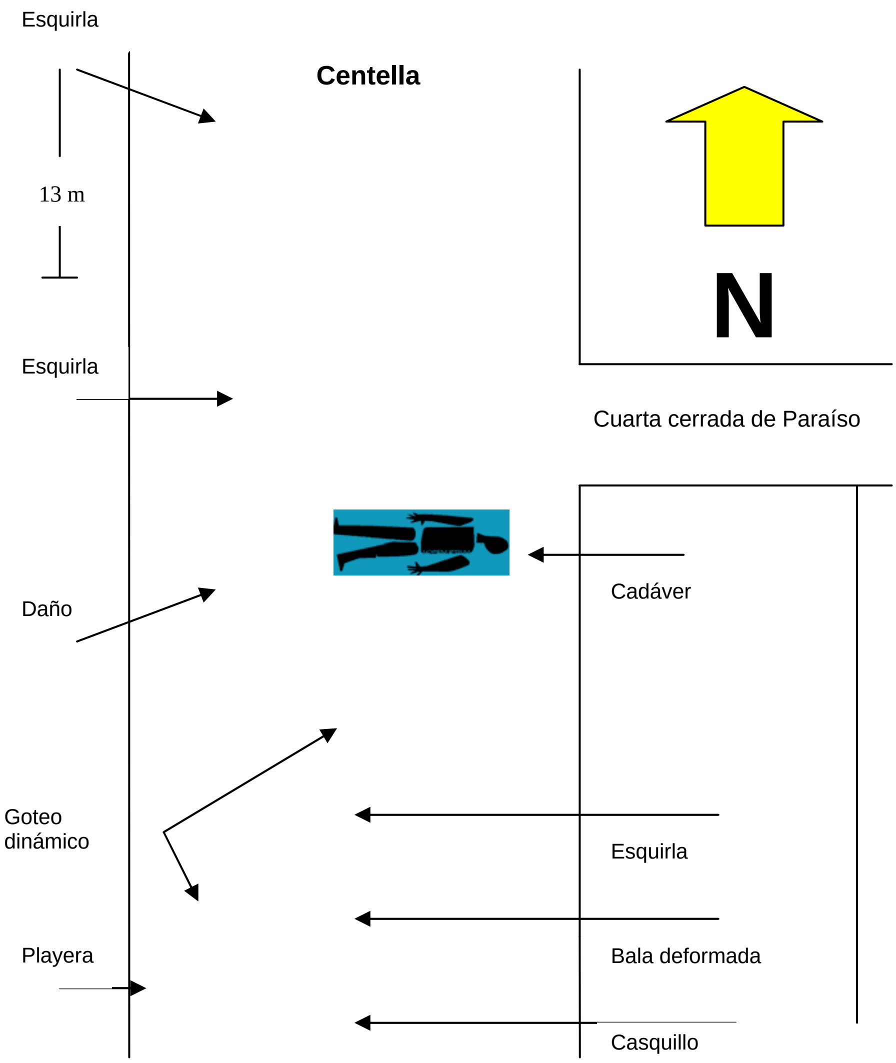
Las anteriores conclusiones las ocuparemos en la solución del problema a resolver. Vamos a realizar la construcción de una gráfica que represente los datos contenidos en el dictamen emitido por la Coordinación General de Servicios Periciales de la Fiscalía, esto con el fin de simplificar los datos que se manipularán en la construcción

[30] El nombre de la persona asesinada fue cambiada por razones obvias, así como el nombre del sospechoso del asesinato, si existieran nombres con apellidos similares en México sería mera coincidencia.

[31] Dictamen emitido en la Coordinación General de Servicios Periciales, de la Fiscalía Desconcentrada en Iztapalapa (El Dictamen completo aparece en el apéndice de la tesis).

del modelo matemático que será utilizado para llegar a la solución del problema, el cual será presentado más adelante.

Figura 11. Croquis del lugar donde fue realizado el asesinato.



CALLE CENTELLA COLONIA VALLE DE LAS LUCES
DELEGACIÓN IZTAPALAPA D.F.
CROQUIS SIMPLE SIN ESCALA[32]

De acuerdo al argumento de una de las conclusiones del dictamen:

- De la interpretación de los fenómenos cadavéricos, se deduce un tiempo de muerte en un lapso mayor a dos horas y menor a cuatro horas al momento de realizar el estudio de anfiteatro.

Por lo tanto, para saber si efectivamente el C. **Francisco Quesadilla Limones** participó en el asesinato, se desarrollará el siguiente modelo matemático:

[32] Este es el croquis original que aparece en el dictamen.

En la investigación de un homicidio o de una muerte accidental, a menudo es importante investigar el momento de la muerte. A continuación será descrito un método matemático para enfocar este problema.[33]

Para resolver el problema, supóngase que al instante $t = 0$ se descubre un cadáver y que su temperatura es T_0. Supóngase además, que en el instante del fallecimiento t_d, la temperatura del cuerpo es T_d y que tenía el valor normal de $37\ ^oC$. Si se supone que la ecuación (**1**) es válida en esta situación, entonces se tendrá que determinar el valor de t_d. Resolvamos la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m) \\ &T(0) = T_0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{1})$$

Si calculamos:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dT}{T - T_m} = -kdt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{T_m}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -k\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\left|T - T_m\right| = -kt + k$$

Aplicando la exponencial a ambos miembros, se obtendrá:

$$T - T_m = e^{-(kt+k)} \qquad \Rightarrow \qquad T = T_m + e^{-(kt+k)} \qquad \Rightarrow \qquad T = T_m + e^k\left[e^{-kt}\right]$$

Por lo tanto, la solución general será:

$$T = T_m + e^k\left[e^{-kt}\right]$$

Para satisfacer la condición inicial $T(0) = T_0$ es necesario elegir a $e^k = T_0 - T_m$. Por lo tanto:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)\,e^{-kt} \qquad (\mathbf{2})$$

La expresión (**2**), es la solución de la ecuación (**1**). Es posible determinar en la ecuación (**2**) el valor de k al realizar una segunda medición de la temperatura del cuerpo en algún instante posterior t_1; supongamos que $T = T_1$ cuando $t = t_1$. Si sustituimos estos valores en la ecuación (**2**) y calculamos:

$$T_1 = T_m + (T_0 - T_m)\,e^{-kt_1} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 - T_m = (T_0 - T_m)\,e^{-kt_1} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-kt_1} = \frac{T_1 - T_m}{T_0 - T_m}$$

$$\Rightarrow \qquad -kt_1 = \ln\left[\frac{T_1 - T_m}{T_0 - T_m}\right] \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{T_1 - T_m}{T_0 - T_m}\right]$$

[33] Boyce William – DiPrima Richard, Ecuaciones diferenciales y problemas en la frontera, México, Limusa Willey, 2003. Paginas: 66 y 67.

Por lo tanto:

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln\left[\frac{T_1 - T_m}{T_0 - T_m}\right] \qquad \textbf{(3)}$$

Donde: T_0 , T_1 y T_m son cantidades conocidas. Finalmente, para determinar el valor de t_d , sustituimos: $t = t_d$ y $T = T_d$ en la ecuación (**2**) y despejamos a t_d :

$$T_d = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt_d} \quad \Rightarrow \quad e^{-kt_d} = \frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m} \quad \Rightarrow \quad -kt_d = \ln\left[\frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m}\right]$$

$$\Rightarrow \quad t_d = -\frac{1}{k}\ln\left[\frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m}\right]$$

Por lo tanto:

$$t_d = -\frac{1}{k}\ln\left[\frac{T_d - T_m}{T_0 - T_m}\right] \qquad \textbf{(4)}$$

En donde k estará dada por la ecuación (**3**).

Regresando a la solución del problema del asesinato. Datos adicionales proporcionados por el perito en materia de criminalística son: la temperatura del cadáver es de $25.1\,^oC$ cuando es descubierto, su temperatura tres horas más tarde es de $15.2\,^oC$ y la temperatura ambiente es de $23.1\,^oC$, con estos datos vamos a calcular el momento de muerte del C. José Yizuael Borrego de Fox.

En primer lugar, hallemos el valor de k, para tal fin, utilicemos la fórmula (**3**) y calculemos:

$$k = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{15.2 - 23.1}{25.1 - 23.1}\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-7.9}{2}\right|$$

$$= -\frac{1}{3}\ln[3.95] = -\frac{1}{3}[1.3737] \approx 0.457905193$$

Por lo tanto:

$$k \approx 0.4579 \; horas$$

Por otro lado, con el valor obtenido de k, hallemos el valor de t_d, utilizando la ecuación (**4**) y calculando nuevamente:

$$t_d = -\frac{1}{0.4579}\ln\left|\frac{37 - 23.1}{25.1 - 23.1}\right| = -\frac{1}{0.4579}\ln\left[\frac{13.9}{2}\right]$$

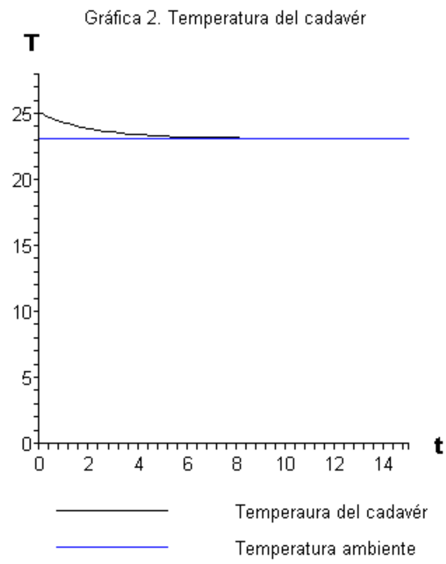
$$= -\frac{1}{0.4579}\ln[6.95] = -\frac{1}{0.4579}[1.9387] \approx -4.233936826$$

Por lo tanto:

$$t_d \approx -4.23393826\ horas$$

Podemos concluir que cuando el cuerpo fue descubierto llevaba aproximadamente 4 horas con 14 minutos, después del fallecimiento. En la figura 12, aparece la gráfica que representa la temperatura del cadáver.

Figura 12. Temperatura del cadáver.



Como el cuerpo fue descubierto a las 14:40 horas, y el modelo proporcionó un momento de muerte de 4 horas con 4 minutos, esto significa que el C. José Yizuael Borrego de Fox, fue asesinado aproximadamente a las 10:26 horas, si analizamos las horas que el C. Francisco Quesadilla Limones, tiene coartadas:

De 10:00 horas a 12:30 horas	y	de 13:40 horas a 15 horas

Se puede afirmar, que efectivamente el C. **Francisco Quesadilla Limones** no participó en el asesinato del C. José Yizuael Borrego de Fox.

Nótese que el C. **José Yizuael Borrego de Fox** fue asesinado a la intemperie y a mediados del mes de octubre del año 2005; y de acuerdo a la solución obtenida fue aproximadamente a las 10:26 horas. Es de esperarse que la temperatura a la hora del asesinato, posiblemente fuera menor o mayor a la reportada en el dictamen emitido por la Coordinación General de Servicios Periciales de la Fiscalía, el cual fue realizado a las 14:40 horas.

Datos emitidos en la página del **Servicio Meteorológico Nacional**, referentes al mes de octubre de 2005, y si se consideran los reportados por la estación del Cerro de la Estrella (**CES**), ubicada en la Delegación Iztapalapa, los cuales se encuentran en la tabla 5.

Tabla 5. Temperatura Media mensual por hora y por estación[34].

HORA	TAC	EAC	SAG	TLA	XAL	MER	PED	CES	PLA	HAN	CUA
1	13.3	12.8	12.1	13.6	14.2	14.2	12.4	**12.8**	13.2	14.2	11.9
2	13.1	12.6	11.6	13.2	13.7	13.7	11.9	**12.4**	12.8	13.6	11.7
3	12.7	12.4	11.2	12.9	13.3	13.3	11.6	**11.9**	12.4	13.1	11.4
4	12.3	12.3	10.8	12.6	13.1	12.9	11.2	**11.6**	12.1	12.9	11.2
5	12.2	12.1	10.6	12.4	12.8	12.7	11.0	**11.3**	11.9	12.6	11.1
6	11.7	12.0	10.3	12.2	12.6	12.5	10.9	**11.2**	11.7	12.1	11.0
7	11.7	12.4	10.1	12.1	12.6	12.4	10.9	**11.1**	11.6	12.3	10.9
8	12.6	13.2	10.5	12.6	13.2	13.1	12.0	**11.8**	12.7	12.8	11.1
9	13.9	14.4	11.9	14.1	14.6	14.6	14.8	**13.7**	14.2	14.4	11.9
10	15.1	15.9	13.5	15.9	16.2	16.5	17.3	**16.4**	15.8	16.7	12.7
11	16.7	17.1	15.1	17.6	18.0	18.4	19.3	**18.5**	17.6	18.6	13.6
12	18.3	18.6	16.7	19.3	19.5	20.3	20.9	**20.5**	19.2	20.4	14.7
13	19.7	19.8	18.0	20.8	20.8	21.6	21.9	**22.2**	20.5	21.9	15.7
14	20.8	20.8	19.0	21.6	21.8	22.8	22.6	**23.0**	21.4	22.7	16.5
15	21.1	21.1	19.4	21.8	21.7	23.1	22.7	**23.5**	21.6	23.0	17.0
16	21.5	21.2	19.6	21.8	21.6	22.8	22.3	**23.1**	21.3	22.4	17.5
17	20.8	20.9	18.9	21.0	21.0	21.9	21.0	**22.1**	20.6	21.7	17.4
18	19.7	19.2	18.0	19.6	19.9	20.4	19.0	**19.9**	19.1	20.2	16.5
19	18.3	17.1	16.5	17.9	18.4	18.5	16.9	**17.9**	17.4	18.6	15.1
20	16.9	15.2	15.0	16.7	17.0	17.3	15.8	**16.5**	16.3	17.5	14.1
21	15.9	14.8	14.1	15.7	16.1	16.4	14.8	**15.5**	15.5	16.6	13.4
22	15.0	14.0	13.5	15.0	15.6	15.7	14.1	**14.6**	14.8	15.8	12.8
23	14.6	13.6	13.1	14.5	15.1	15.2	13.4	**14.0**	14.1	15.3	12.3
24	13.9	13.3	12.6	14.0	14.6	14.7	12.8	**13.5**	13.7	14.7	12.1

Se puede observar que la temperatura media horaria para el mes de octubre en la Delegación Iztapalapa fue de $16.4\ °C$ para las 10:00 horas, la cual fue la hora en que aproximadamente fue asesinado el C. José Yizuael Borrego de Fox. De acuerdo a éste dato, surge la duda siguiente:

¿Tendrá alguna influencia el cambio de la temperatura en la hora del asesinato del C. **José Yizuael Borrego de Fox**?

Para contestar esta interrogante, supongamos que el día del asesinato del C. **José Yizuael Borrego de Fox**, la temperatura a la hora de su muerte era de $17.5\ °C$; con este cambio en la temperatura resolveremos nuevamente el problema, esto para evidenciar si la temperatura influye en el tiempo de muerte.

Hallemos el valor de k, para tal fin, utilicemos la fórmula (**3**) y si calculamos:

$$k = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{15.2-17.5}{25.1-17.5}\right| = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{-2.3}{7.6}\right|$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left[0.3026\right] = -\frac{1}{3}\left[-1.1952\right] \approx 0.398413041$$

[34] Tabla proporcionada por el Servicio Meteorológico Nacional.

Por lo tanto:

$$k \approx 0.3984 \ horas$$

Con el valor obtenido de k, hallemos el valor de t_d, utilizando la fórmula (**4**) y calculemos nuevamente:

$$t_d = -\frac{1}{0.3984}\ln\left|\frac{37-17.5}{25.1-17.5}\right| = -\frac{1}{0.3984}\ln\left[\frac{19.5}{7.6}\right]$$

$$= -\frac{1}{0.3984}\ln\left[2.5658\right] = -\frac{1}{0.3984}\left[0.9423\right] \approx -2.3650$$

Por lo tanto:

$$t_d \approx -2.3650 \ horas$$

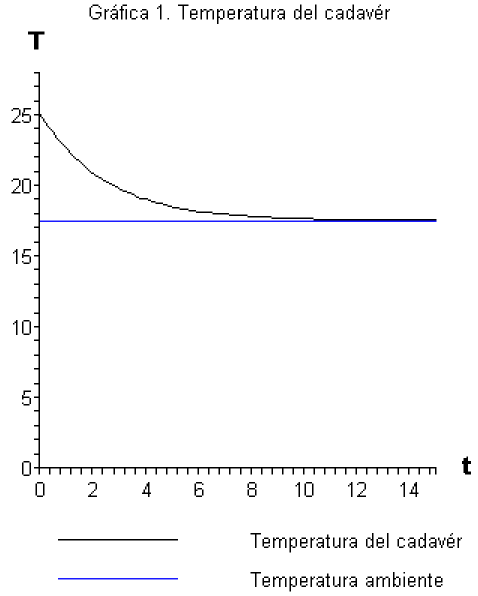
Se puede concluir, que el cuerpo se descubrió aproximadamente 2 horas con 22 minutos, después del fallecimiento. En la figura 13 aparece la gráfica que representa el enfriamiento del cadáver.

Como el cuerpo fue descubierto a las 14:40 horas, el modelo proporciona un momento de muerte de 2 horas con 22 minutos, esto significa que el C. José Yizuael Borrego de Fox, fue asesinado aproximadamente a las 12:18 horas, si examinamos las horas que el C. **Francisco Quesadilla Limones**, tiene coartadas:

De 10:00 horas a 12:30 horas	y	de 13:40 horas a 15 horas

Se puede concluir que, con los nuevos datos, que efectivamente, el C. **Francisco Quesadilla Limones** no participó en el asesinato del C. **José Yizuael Borrego de Fox**.

Figura 13. Enfriamiento del cadáver.



Considerando, ahora la siguiente conclusión del dictamen:

- De la interpretación de los fenómenos cadavéricos, se deduce un tiempo de muerte en un lapso mayor a dos horas y menor a cuatro horas al momento de realizar el estudio de anfiteatro.

Los tiempos de muerte obtenidos con el modelo, son:

1. Cuando el cuerpo se descubrió llevaba aproximadamente 4 horas con 14 minutos, después del fallecimiento.

2. Cuando el cuerpo se descubrió llevaba aproximadamente 2 horas con 22 minutos, después del fallecimiento.

Por lo tanto, los dos tiempos de muerte, no están fuera de los límites que proporciona el perito en criminalística, así que podemos decir, que el modelo dio una predicción del tiempo de muerte para poder deducir que el C. **Francisco Quesadilla Limones**, es inocente en el crimen que se le imputa.

Aunque es fácil percatarse, que las diferencias en las temperaturas ambiente si influyen en el tiempo de muerte; en la primera obtuvimos un tiempo de muerte de 10:26 horas y en la segunda de 12:18 horas, de aquí se puede deducir que la temperatura influye en el tiempo de muerte. Aquí tendremos un problema referente a la temperatura, por un lado, la temperatura del medio ambiente (Figura 15) y por el otro la temperatura del cadáver (Figura 14).

Si observamos las gráficas podemos darnos cuenta que mientras la temperatura del medio ambiente crece (pero únicamente en los horarios comprendidos de las 06:00 hasta las 16:00 horas), la temperatura del cadáver decrece. También, es de mencionarse que el modelo propuesto resolvió el problema, aunque si el problema hubiera considerado otras posibilidades diferentes, hubiéramos tenido que poner a la temperatura en función del tiempo, pero ese caso no será resuelto en el presente trabajo.

Figura 14. Representación del enfriamiento del cadáver.

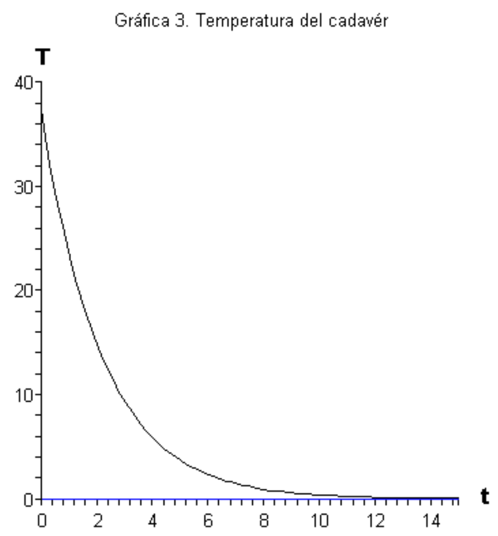
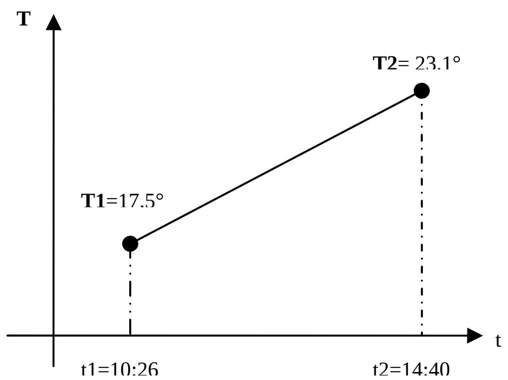


Figura 15. Representación de la temperatura del ambiente en las horas comprendidas en el problema.



CONCLUSIÓN. Al resolver el problema llegamos a un resultado, el cual se encuentra en el intervalo de tiempo que es proporcionado por el perito en criminalística forense de la Coordinación General de Servicios Periciales de la Fiscalía, también se observa que la temperatura del medio ambiente influye en el resultado del problema. Es pertinente el señalar que los peritos en criminalística forense se apoyan en tablas para saber establecer, cual es el tiempo de muerte aproximado de la persona que fue asesinada[35]. Lo relevante en el desarrollo de la solución del problema, es que el alumno se de cuenta que para resolverlo se utilizaron datos reales, los cuales fueron obtenidos en las páginas que se están proponiendo como referencias bibliográficas, así como algunas herramientas matemáticas que le fueron proporcionadas en los cursos de las asignaturas de Biología, Geografía, Cálculo Diferencial e Integral, Geometría Analítica, Derecho y Física.

[35] Instituto Nacional de Ciencias Penales, Manual Metodológico de Medicina Forense, paginas 310-311, México 2001.

Capítulo 3

La Ley Logística del Crecimiento de una Población

En el presente capítulo será considerado el siguiente:

3.1 EL MODELO DE VERLHUST

Las proyecciones de población por sexo y por edad se calculan a partir de la población deducida de un censo, se establecen hipótesis sobre la evolución que van a experimentar en el futuro los tres componentes demográficos básicos: la mortalidad, la fecundidad y la migración, que determinan su crecimiento y su estructura por edades. Para la estimación de los componentes demográficos de mortalidad (riesgos de muerte por edad y sexo, la esperanza de vida), de fecundidad (número medio de hijos por mujer, edad media a la maternidad, descendencia final que alcanzan las diferentes generaciones de mujeres) y de migración (volumen de entradas de extranjeros, riesgos de emigración).

Un método para realizar proyecciones de población es realizado por primera vez por el matemático y biólogo holandés Verhulst en 1837, el cual está dado por ecuaciones diferenciales que rigen el crecimiento de varias especies. Este método complementa al modelo lineal de la **Ley de Malthus** para el crecimiento de población ya que éste es satisfactorio siempre que la población no sea demasiado grande.

Pierre F. Verhulst fue educado en la ciudad de Bruselas, capital de Bélgica, después en 1822 ingresó a la universidad de Gante, allí recibió su doctorado en el año de 1825.

Verhulst trabajó en la teoría de números, e influenciado por Quetelet, se interesó en la estadística social, por otro lado, se había propuesto en publicar los trabajos completos de Euler, pero esto hizo que se interesará más en la estadística social.

El 28 de septiembre de 1835 Verhulst fue designado profesor de matemáticas en la Universidad Libre de Bruselas, e impartió cursos de Astronomía, Mecánica Celeste, Cálculo diferencial e integral, Geometría, Trigonometría y Teoría de la Probabilidad.

La investigación de Verhulst sobre la ley del crecimiento de población fue importante, ya que se aceptaba que el crecimiento de la población se comportaba como una progresión geométrica. Pero Quetelet creía que existían fuerzas que tienden a prevenir el crecimiento de la población y que estas aumentan de acuerdo a la proporción en la cual la población crece.

Verhulst demostró en el año de 1846 que las fuerzas que tienden a prevenir un crecimiento de la población crecen en proporción con el cociente de exceso de la población a la población total. La ecuación diferencial no lineal que describe el crecimiento de una población biológica, la que él dedujo y estudió, ahora es conocida como la **ley logística del crecimiento de una población.**

De acuerdo con su teoría Verhulst predijo que el límite superior de la población de Bélgica sería de 9 400 000 habitantes. De hecho la población en el año de 1994 era de 10 118 000 habitantes, pero por los efectos de la inmigración existentes en éste país, si nos damos cuenta su predicción, es muy acertada.

En 1841 Verhulst fue elegido a la academia de Bélgica y en 1848 se convirtió en su presidente. Sin embargo, la mala salud que él presentaba le hizo difícil su existencia durante sus últimos años de vida.

Continuando con el ejemplo; es importante señalar que cuando la población es demasiado grande, los modelos lineales no pueden ser exactos, ya que no reflejan el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por los recursos naturales y por el alimento disponible. Por tanto, hay que agregar un término de competencia a la ecuación diferencial lineal, este término de competencia que agregaremos será $-by^2$, donde **b** es una constante, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a y^2. Consideremos entonces la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

A esta ecuación se le llama la ley logística del crecimiento de una población y a los números **a** y **b** se les llama coeficientes vitales de la población. En general, la constante **b** es muy pequeña comparada con el valor de **a**, de tal suerte que si y no es demasiado grande, entonces el término $-by^2$ es insignificante comparado con ay, por lo que la población crece exponencialmente. Sin embrago, si y es grande entonces, el término $-by^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento de la población. Cuanto más industrializado es un país, tanto más espacio disponible tiene, y cuanto más alimento posee, entonces es más pequeño el coeficiente **b**.

Consideremos a la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de una población aislada. Si y_0 es la población en el tiempo t_0, entonces $y(t)$, la población en el tiempo t, satisface el problema de valor inicial siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \\ &y(t_0) = y_0 \end{aligned} \qquad (\Delta)$$

La ecuación (Δ) es una ecuación diferencial, resolvamos tal ecuación. Si se realiza una separación de variables y posteriormente un cambio de las mismas se tendrá lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{ay - by^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{ar - br^2} = ds$$

Si se integra esta última expresión, el lado izquierdo con respecto a r y el lado derecho con respecto a s, se obtendrá:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dr}{ar - br^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0 \qquad (\mathbf{1})$$

Resolvamos la integral del lado izquierdo, utilizando el método de fracciones parciales, si se calcula:

$$\frac{1}{ar - br^2} = \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a - br} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a - br} \qquad (\mathbf{2})$$

Si se multiplica, (**2**) por $r(a - br)$, se obtendrá:

$$1 = A(a - br) + Br \qquad \Rightarrow \qquad 1 = Aa - Abr + Br \qquad \Rightarrow \qquad 1 = (B - Ab)r + Aa$$

$$\Rightarrow \qquad B - bA = 0 \qquad \text{y} \qquad aA = 1 \qquad (\mathbf{3})$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones (**3**). Se obtendrá: $A = \frac{1}{a}$ y $B = \frac{b}{a}$. Si se sustituyen estos valores en (**2**), se obtendrá:

$$\frac{1}{r(a - br)} = \frac{\frac{1}{a}}{r} + \frac{\frac{b}{a}}{a - br} = \frac{1}{ar} + \frac{b}{a(a - br)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r(a - br)} = \frac{1}{ar} + \frac{b}{a(a - br)}$$

Si se resuelve la integral (**1**), se tendrá:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dr}{ar - br^2} = \int_{y_0}^{y} \frac{dr}{ar} + \int_{y_0}^{y} \frac{b}{a(a - br)} dr = \frac{1}{a}\left[\int_{y_0}^{y} \frac{dr}{r} + \int_{y_0}^{y} \frac{bdr}{a - br}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\ln|r| - \ln|a - br|\right]_{y_0}^{y} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)}\right|$$

Por lo tanto, la solución quedará como:

$$t - t_0 = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)}\right|$$

Si despejamos, se obtendrá:

$$\ln\left|\frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)}\right| = a(t - t_0) \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)}\right| = e^{a(t - t_0)} \qquad (\mathbf{3})$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{y(a-by_0)}{y_0(a-by)} > 0 \quad \text{para} \quad 0 < t_0 < t$$

Continuando con el despeje:

$$\frac{y(a-by_0)}{y_0(a-by)} = e^{a(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad y(a-by_0) = y_0(a-by)e^{a(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad y(a-by_0) = ay_0e^{a(t-t_0)} - by_0ye^{a(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad y(a-by_0) + by_0ye^{a(t-t_0)} = ay_0e^{a(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad y[a-by_0+by_0e^{a(t-t_0)}] = ay_0e^{a(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{ay_0e^{a(t-t_0)}}{a-by_0+by_0e^{a(t-t_0)}}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación:

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0+(a-by_0)e^{-a(t-t_0)}}$$ **Ley Logística de Crecimiento de una Población**

Donde: a los números **a** y **b** se les llamará coeficientes vitales de la población; y_0 es la población inicial, t_0 es el tiempo inicial y t es el tiempo.

En la anterior ecuación observemos que cuando $t \to \infty$ se tiene:

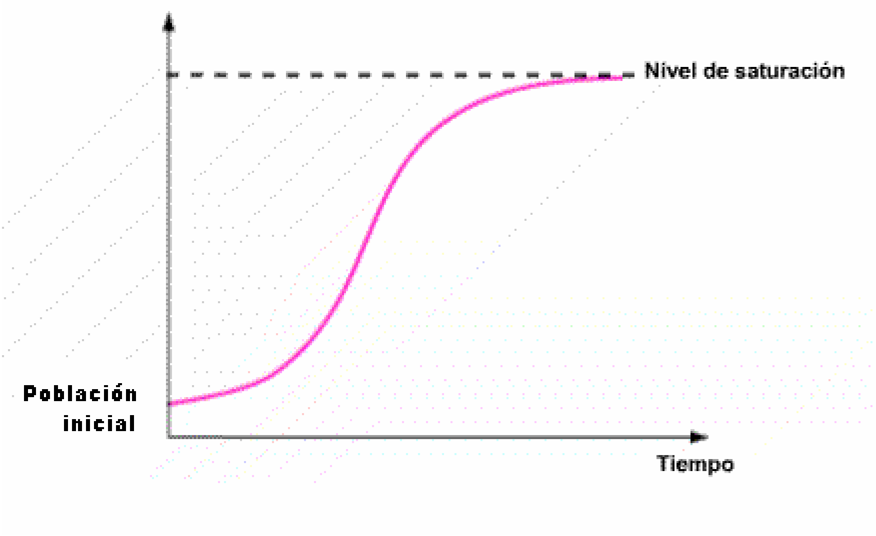
$$p(t) \to \frac{ay_0}{by_0} = \frac{a}{b}$$

Es decir, independientemente del valor inicial, la población siempre tiende al valor límite $\frac{a}{b}$. Además, $y(t)$ es una función monótona creciente respecto al tiempo si $0 > y_0 > \frac{a}{b}$. Más aún, dado que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{dy}{dt} - 2by\frac{dy}{dt} = (a-2by)(ay-by^2) \quad ,$$

es fácil de ver que $\frac{dy}{dt}$ es creciente si $y(t) < \frac{a}{2b}$, y es decreciente si $y(t) > \frac{a}{2b}$. Por ello la gráfica de $y(t)$ debe tener la forma:

Figura 16. La curva logística



A una curva como ésta se le llama **curva logística** (figura 16). A partir de su forma se concluye que el tiempo antes de que la población alcance la mitad de su valor límite es un periodo de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero. Este es un periodo de crecimiento reducido.

Por otro lado, la ecuación logística tendrá dos puntos de equilibrio, los cuales se obtendrán si se iguala a cero la expresión y se resuelve para y:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = y(a - by) \qquad \Rightarrow \qquad y(a - by) = 0$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio serán:

$$y = 0 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{a}{b}.$$

Considerando la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de la población de la República Mexicana (México). Si y_0 es la población en el tiempo t_0, entonces, $y(t)$ es la población en el tiempo t, y satisface el Problema de Valor Inicial (**PVI**):

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$
$$y(t_0) = y_0$$

Para aplicar esta fórmula para la solución del problema, es necesario calcular los coeficientes vitales **a** y **b** en la ecuación que gobierna el crecimiento.

3.2 UNA PROYECCIÓN DE POBLACIÓN PARA LA REPÚBLICA MEXICANA Y OTRA PARA EL DISTRITO FEDERAL

En esta sección se resolverá el problema:

PROBLEMA 3.2.1. Calcular la población que habrá en la República Mexicana para el año 2030.

De acuerdo al **INEGI**, la población de México crecía a un ritmo del 1.74 % en el año 2000, cuando la población era de 97 483 412 habitantes[36], y como el valor del coeficiente vital de población **a** está dado por la relación:

$$a = tasa\ de\ natalidad - tasa\ de\ mortalidad \qquad (\mathbf{1})$$

los valores recabados de la página del **INEGI** son: la tasa de mortandad es del 0.4489656% y la tasa de natalidad es del 2.87%. Por lo tanto, si se sustituyen estos valores en la relación (**1**) y se calcula:

$$a = 2.87 - 0.4489656 = 2.421614063$$

Por lo tanto, el valor de **a** es de 2.42 y como además, se sabe que:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = y(a - by) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = a - by$$

Como $\frac{\frac{dy}{dt}}{y}$ es la proporción de crecimiento, si sustituimos para así poder hallar el valor del coeficiente vital de población **b**:

$$0.0174 = a - b\,y = 0.0242 - b(97\,483\,412) \qquad \Rightarrow \qquad b(97483412) = 0.0242 - 0.0174$$

$$. \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{0.0068}{97\,483\,412} = 6.975545747 \times 10^{-11}$$

Por lo tanto:

$$b = 6.975545747 \times 10^{-11}$$

Por otro lado, el **PVI** que expresa el comportamiento de la población de la República Mexicana es:

$$\frac{dy}{dt} = 0.0242\,y - 6.975545747 \times 10^{-11}\,y^2$$
$$y_0(2000) = 97\,483\,412$$

---

[36] http:/www.inegi.com.mx

Cuya solución general es:

$$y(t)=\frac{a\,y_0}{b\,y_0+(a-b\,y_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

Para nuestro caso particular, serán realizadas algunas pequeñas operaciones aritméticas para simplificar la solución:

$$y(t)=\frac{2359098.57}{0.0068+(0.0242-0.0068)e^{-0.0242(2030-2000)}}=\frac{2\,359\,098.57}{0.0068+0.00493558}$$

$$=\frac{2\,359\,098.57}{0.01173558}=201021046.3$$

Por lo tanto, la población que habrá en México en el año 2030 será aproximadamente de: 201 021 046 habitantes.

Finalmente, obtengamos el pronóstico límite para la población de México el cual será de aproximadamente:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\frac{2\,3590\,898.57}{0.0068}=346\,962\,260.3 \text{ habitantes.}$$

Por lo tanto, el límite de habitantes que podrán vivir sin problema de espacio, de trabajo, de servicios, ni de alimentación, etc., en la República Mexicana será de 346 926 260.3 habitantes (Figura 17).

De acuerdo al problema resuelto utilizando el **Modelo Exponencial de Malthus**, de que la población esperada para el año 2090 será de 805 192 543 habitantes y como el resultado obtenido en el problema anterior, de que el límite de habitantes que podrá sostener sin problema alguno la República Mexicana será de 346 926 260 habitantes.

Ésta comparación con estos datos nos reafirman que el modelo exponencial de Malthus no se cumple para poblaciones muy grandes.

El problema que acabamos de resolver es a nivel nacional, ahora cabe hacernos las siguientes preguntas:

¿Cuál será la población que habrá en la ciudad del Distrito Federal en el año 2020?

¿Cuál será la población límite que puede haber en nuestra ciudad en el año 2020?

¿Cuál será el punto de inflexión de la curva logística que describe la función del crecimiento de población del Distrito Federal?

En primer lugar, para contestar la primera interrogante, consideremos los datos que nos proporcionan las tablas 6, 7 y 8.

De acuerdo al **INEGI**, la población del Distrito Federal crecía a un ritmo del 0.30% en el periodo 1995-2000, cuando la población era de 8 605 239 habitantes en el año 2000[37]. Además, sabemos que el valor de **a** está dado por la relación:

$$a = tasa\ de\ natalidad - tasa\ de\ mortalidad \qquad (\mathbf{1})$$

los valores proporcionados por el **INEGI** son: la tasa de mortandad es del 0.42% y la tasa de natalidad es del 2.03%. Por lo tanto, si sustituimos estos valores en la relación (**1**) y si calculamos:

$$a = 2.03 - 0.42 = 1.61$$

Por lo tanto, el valor de **a** es de 1.61%. Como además, $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{y}$ es la proporción de crecimiento, entonces se puede establecer la siguiente ecuación, y con ella obtener el valor de **b**:

$$0.003 = a - by = 0.0161 - b(8\,605\,239) \quad \Rightarrow \quad b(8\,605\,239) = 0.0161 - 0.0030$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{0.0131}{8\,605\,239} = 1.52232843 \times 10^{-9}$$

Por lo tanto: $b = 1.52232843 \times 10^{-9}$. Por otro lado, se sabe que el **PVI** que expresa el comportamiento de la población del Distrito Federal es:

$$\frac{dy}{dt} = 0.0161\, y - 1.52232843 \times 10^{-9}\, y^2$$
$$y(2000) = 8\,605\,239$$

Cuya solución general es:

$$y(t) = \frac{a\, y_0}{b\, y_0 + (a - b\, y_0)\, e^{-a(t-t_0)}}$$

Para nuestro caso, realizaremos algunas operaciones aritméticas para llegar a la solución, si sustituimos y calculamos:

$$y(t) = \frac{138\,544.3479}{0.0131 + (0.0161 - 0.0131)\, e^{-0.0161(2020-2000)}} = \frac{138\,544.3479}{0.0131 + [0.003]\, e^{-0.322}}$$

$$= \frac{138\,544.3479}{0.0131 + 0.002174094} = \frac{138\,544.3479}{0.015274094} = 9\,070\,544.407$$

Por tanto, la población que habrá en el Distrito Federal en el año 2020 será de aproximadamente: 9 070 544 habitantes. **¡Recáspita!**, si ya somos según algunos pronósticos 20 millones de habitantes[38] (Figura 18).

---

[37] http:/www.inegi.com.mx

Figura 17. Pronóstico límite para la Republica Mexicana

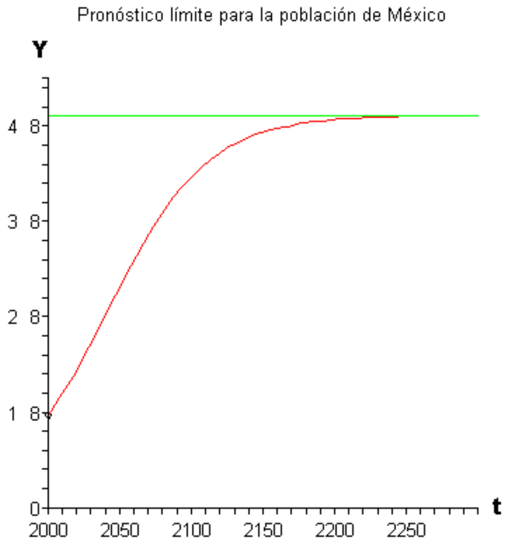


Figura 18. Pronóstico límite para el Distrito Federal

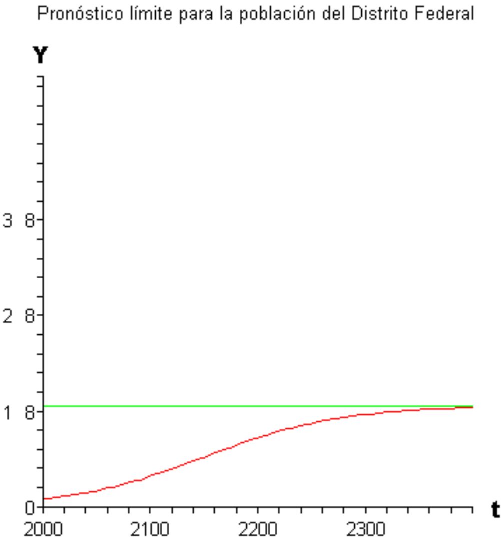
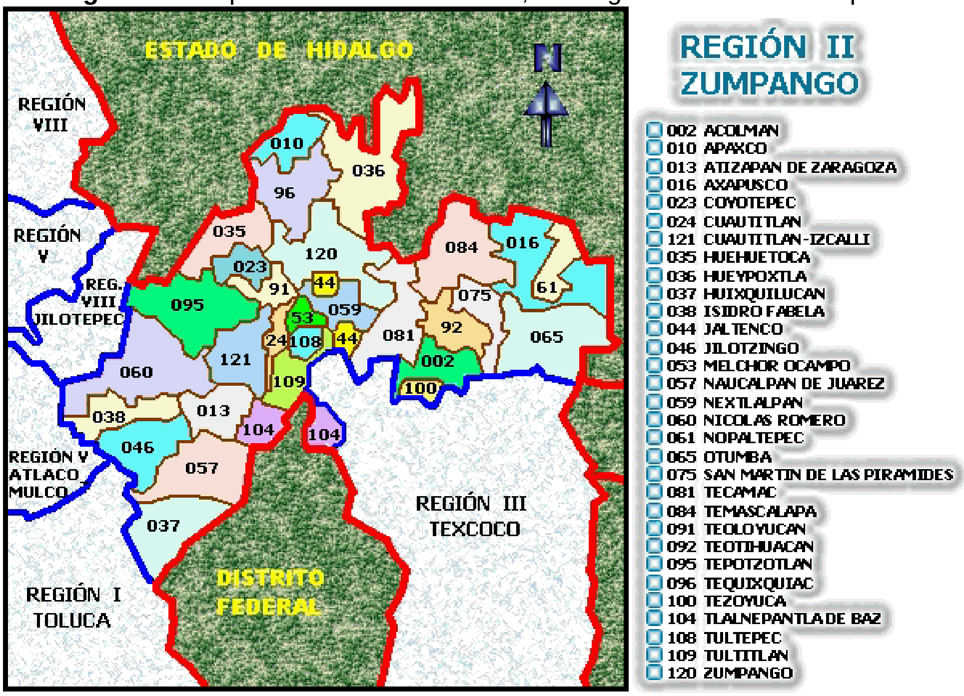


Figura 19. Mapa del Estado de México, con algunos de sus municipios.



---

[38] Nota. En general, la mayoría de personas consideran que la zona metropolitana forma parte del Distrito Federal, cuya consideración es errónea. Se considera zona metropolitana al conjunto de dos o más municipios que cubren a la misma mancha urbana. De acuerdo con información del Conteo de Población y Vivienda de 1995, el CONAPO, la correspondiente a la ciudad de México se compone de las 16 delegaciones del Distrito Federal, 37 municipios del estado de México y Tizayuca en Hidalgo. (Como por ejemplo, hacia el norte: los municipios de Naucalpan, Tlalnepantla y Ecatepec; por el oriente, Chimalhuacán; también los municipios de Atizapán de Zaragoza, Coacalco, Cuatlitlán, Huixquilucan, Netzahualcóyotl, la Paz y Tultitlán), es por este motivo que la población del Distrito Federal es considerada tan exorbitante.

3.3 EL PRONÓSTICO LÍMITE Y EL PUNTO DE INFLEXIÓN DE UNA PROYECCIÓN DE POBLACIÓN PARA EL DISTRITO FEDERAL

Obtengamos ahora, el pronóstico límite de la población del Distrito Federal. Para tal fin calcularemos el siguiente límite:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a\,y_0}{b\,y_0 + (a - b\,y_0)\,e^{-a(t-t_0)}} = \frac{138544.3479}{0.0131} = 10575904.42 \text{ habitantes.}$$

Por consiguiente, el pronóstico límite de población para la ciudad del Distrito Federal será de 10 575 904 habitantes.

Este dato obtenido, habiendo utilizado la fórmula, no está tan lejos de la realidad, ya que en el año 2004 éramos 103.7 millones a nivel nacional y la población del Distrito Federal representaba un 8.4% de la población total, es decir: 8 710 800 habitantes[39].

Esto significa que únicamente faltan 1 865 104 habitantes para que en el Distrito Federal, lleguemos al límite máximo de población que puede habitar en esta ciudad sin problemas de servicios públicos, espacio, alimentos, trabajo, educación, etc.

Por otro lado, hemos encontrado el límite de la población que puede habitar en el Distrito Federal.

Contestemos la tercera interrogante que nos hicimos párrafos anteriores, pero para ello, recordemos que es un punto de inflexión de una curva, este concepto se define ambiguamente como:

Un punto $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión** si la gráfica de la función: $y = f(x)$ cambia de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo, o viceversa, en el punto $(a, f(a))$.

Proporcionemos un ejemplo para que quede claro este concepto:

EJEMPLO 3.3.1 Hallar los puntos de inflexión, si es que existen, de la función:

$$y(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \qquad (\mathbf{1})$$

y construir la gráfica correspondiente.

Solución. Obtengamos en primer lugar la primera y segunda derivada de la función, si calculamos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \qquad (\mathbf{2})$$

Obtengamos los posibles puntos de inflexión, para tal fin, igualemos a cero la ecuación (**2**) y resolvamos para x:

$$6x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

---

[39] http://www.dif.gob.mx/inegi/POBLACION%202004.pdf

Si se evalúa la función (**1**) en $x = 1$, se obtendrá:

$$y(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y(1) = 2$$

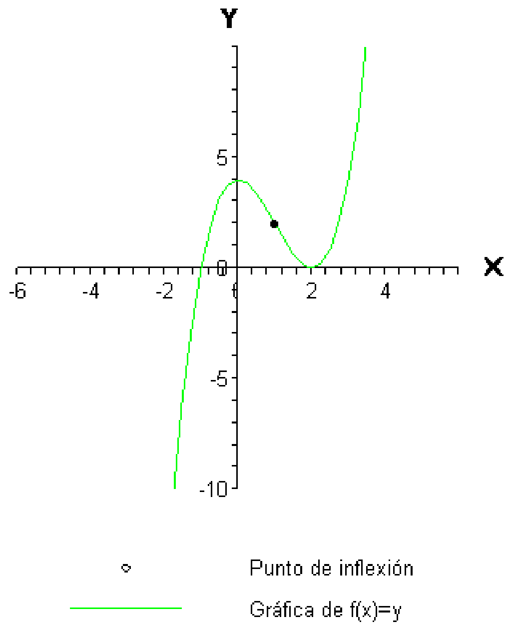
Por consiguiente, el punto de inflexión es $I(2,1)$. Veamos ahora, donde la curva es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo, para obtener esto consideremos la tabla siguiente:

Intervalo	**Valor de x**	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	**Concavidad**
$x < 1$	0	-6	Hacia arriba
$x > 1$	2	6	Hacia abajo

Obtengamos una tabulación para hallar algunos puntos de la gráfica correspondientes a la función:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	0	4	2	0	4

Finalmente, con estos valores obtenidos, construyamos la gráfica correspondiente:



Regresemos a la solución del problema, de acuerdo al ejemplo, tenemos que calcular la segunda derivada de la función, y como:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \quad (\mathbf{1}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{dy}{dt} - 2by\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = (a - 2by)\frac{dy}{dt} \quad (\mathbf{2})$$

Por otro lado, si sustituimos (**1**) en (**2**) obtendremos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (a - 2by)(ay - by^2) \qquad (\mathbf{3})$$

Resolvamos la ecuación (**3**) para obtener los puntos de inflexión de la curva de la función (**1**):

$$(a-2by)(ay-by^2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y\,(a-2by)(a-by)=0$$

Por lo tanto, las soluciones para la ecuación serán:

$$y_1=0 \quad , \quad y_2=\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad y_3=\frac{a}{2b}$$

De estos tres valores para la variable dependiente, de acuerdo a la definición de punto de inflexión, únicamente será aquél en donde existe un cambio de concavidad, es decir, en el valor de:

$$y_3=\frac{a}{2b}$$

Finalmente, obtengamos el valor del punto de inflexión de la gráfica que nos representa al crecimiento de la población del Distrito Federal, si se calcula:

$$y_i=\frac{0.0161}{2(1.52232843\times10^{-9})}=5\,287\,952.21$$

Por lo tanto, el valor de la variable dependiente, la cual representa a la población, será de $y_i=5\,287\,952.21$ habitantes.

De acuerdo a los censos de población a este punto de inflexión ya se llegó, aproximadamente en la década de 1960-1970, y esto implica que a partir de ese momento el crecimiento de la población del Distrito Federal se ha vuelto más moderado. Si reflexionamos sobre una de las lecturas de este trabajo de tesis, la población de la ciudad crece muy lentamente en la actualidad, es decir, la obtención del punto de inflexión es correcta.

Además, si miramos la **tabla 8**, y se considera el renglón que representa a la población del Distrito Federal:

1895	**1900**	**1910**	**1921**	**1930**	**1940**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**1995**	**2000**
474 860	541 516	720 753	906 063	1229 576	1757 530	3050 442	4870 876	6874 165	8831 079	8235 744	8489 007	8605 239

Obtendremos el año en el que se alcanzó el punto de inflexión. En primer lugar, obtengamos la tasa de crecimiento de la población del Distrito Federal en el año de 1960. Para tal fin consideremos los datos:

- Población de 1960 = 4 870 846 habitantes
- Población de 1970 = 6 874 165 habitantes

Además, otros datos que nos proporciona el **INEGI** son los siguientes:

- Tasa de natalidad = 4.81%
- Tasa de mortandad = 0.58%

Utilicemos los porcentajes anteriores para hallar el valor de **a**, si sustituimos y calculamos:

$$a = 4.81 - 0.58 = 4.23$$

Por lo tanto, el valor de **a** es de 4.23%. Obtengamos ahora, el valor de **b**: utilizando datos de la tabla 8, hallemos la tasa de crecimiento de la población del Distrito Federal en el año de 1960:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cong \frac{2003289}{10} = 200328.9$$

Sustituyendo esto último en la ecuación (**1**):

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = a - by \qquad \Rightarrow \qquad \frac{200328.9}{4870876} = 0.0423 - b(4870846)$$

$$\Rightarrow \qquad b(4870846) = 0.0423 - 0.041127899$$

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{0.001172101}{4870846} = 2.406360209 \times 10^{-10}$$

Por lo tanto:

$$b = 2.406360209 \times 10^{-10}$$

Si se sustituyen los valores obtenidos en la expresión (**A**), (ésta ya se había obtenido anteriormente) para poder obtener el año en que se llegó al punto de inflexión:

$$t - t_0 = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)} \right| \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y(a - by_0)}{y_0(a - by)} \right| + t_0 \qquad \textbf{(A)}$$

Si sustituimos los valores que tenemos en la expresión (**A**), y recordemos por un instante, que $y(t) = 5287952.21$, y si se calcula:

$$t = \frac{1}{0.0423} \ln \left| \frac{(5287952.21)(0.0423 - 0.001172101}{(4870846)(0.0423 - 0.001272471)} \right| + 1960$$

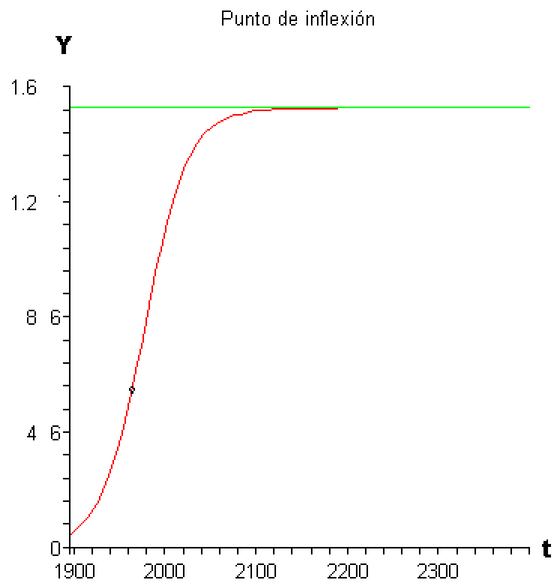
$$\Rightarrow \qquad t = \frac{1}{0.0423} \ln \left| \frac{(5287952.21)(0.041127899)}{(4870846)(0.041027529)} \right| + 1960$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{1}{0.0423} \ln \left| \frac{217482.3644}{199838.7755} \right| + 1960 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{0.0423} \ln |1.088289116| + 1960$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{0.084606845}{0.0423} + 1960 = 2.0016 + 1960 = 1962.0016 \qquad \Rightarrow \qquad t \approx 1962$$

Por lo tanto, aproximadamente en el año de 1962 se alcanzó el punto de inflexión en el Distrito Federal. Por consiguiente, el punto de inflexión será: $I_{DF}(5\,287\,952{,}1962)$.

Figura 20. Punto de inflexión del Distrito Federal



Es decir, desde hace aproximadamente 42 años se alcanzó el punto de inflexión en la ciudad del Distrito Federal (Figura 20).

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 3.1

Lee con cuidado las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la lectura, ¿cuáles son los elementos que definen y caracterizan a una población?:____

2. Explica brevemente qué se entiende por **MIGRACIÓN:**________________
____
____

3. Si la superficie territorial del Distrito Federal es de 1499 Km^2, ¿Cuántos habitantes por metro cuadrado habitarán la ciudad, cuando se llegue al límite máximo de población que pueda habitar en la ciudad sin problema alguno?____

4. De acuerdo a los datos anteriores, si el crecimiento de la población sigue su marcha, ¿cuándo se llegará al límite máximo de población que pueda habitar en el Distrito Federal sin problema alguno?___________________________

5. De acuerdo a los resultados anteriores, ¿en qué año se llegó al punto de inflexión en el crecimiento de la población del Distrito Federal?:
____

6. De acuerdo a la lectura, ¿Cuáles son las diferencias existentes entre el Modelo de Thomas Roberth Malthus y el Modelo de Pierre Verhulst ?____

Tabla 6. Fuente: INEGI - XII Censo General de Población y Vivienda 2000.

Entidad federativa	1990-1995	1995-2000	1990-2000
Estados Unidos Mexicanos	**2.0**	**1.6**	**1.8**
Aguascalientes	3.2	2.1	2.7
Baja California	4.3	3.8	4.1
Baja California Sur	3.0	2.8	2.9
Campeche	3.2	1.7	2.6
Coahuila de Zaragoza	1.7	1.3	1.5
Colima	2.3	2.5	2.4
Chiapas	2.0	2.1	2.0
Chihuahua	2.4	2.1	2.2
Distrito Federal	0.5	0.3	0.4
Durango	1.0	0.3	0.7
Guanajuato	1.8	1.3	1.6
Guerrero	1.9	1.3	1.6
Hidalgo	2.0	1.3	1.7
Jalisco	2.2	1.3	1.8
México	3.1	2.6	2.9
Michoacán de Ocampo	1.5	0.7	1.2
Morelos	3.3	1.8	2.7
Nayarit	1.5	0.6	1.1
Nuevo León	2.4	1.8	2.1
Oaxaca	1.2	1.5	1.3
Puebla	2.0	2.2	2.1
Querétaro Arteaga	3.1	2.7	2.9
Quintana Roo	6.3	5.1	5.8
San Luís Potosí	1.7	1.0	1.4
Sinaloa	1.7	1.0	1.4
Sonora	2.4	1.4	2.0
Tabasco	2.7	1.8	2.3
Tamaulipas	2.1	2.0	2.0
Tlaxcala	2.6	2.0	2.4
Veracruz de Ignacio de la Llave	1.4	0.6	1.0
Yucatán	2.3	1.5	2.0
Zacatecas	0.8	0.3	0.6

Tabla 7. Fuente: INEGI - XII Censo General de Población y Vivienda 2000.

TASAS DE FECUNDIDAD POR EDAD Y GLOBAL DEL AÑO 1999 DE LA POBLACIÓN FEMENINA DE 12 A 49 AÑOS POR MUNICIPIO

Entidad Federativa, Municipio	Tasas de fecundidad por edad								Tasa Global de Fecundidad (T.G.F)
	12 - 14 Años	15 - 19 Años	20 - 24 Años	25 - 29 Años	30 - 34 Años	35 - 39 Años	40 - 44 Años	45 - 49 Años	
09 Distrito Federal	0.00	0.04	0.11	0.11	0.09	0.04	0.01	0.00	2.03
002 Azcapotzalco	0.00	0.04	0.09	0.10	0.08	0.04	0.01	0.00	1.85
003 Coyoacán	0.00	0.03	0.07	0.09	0.09	0.05	0.01	0.00	1.69
004 Cuajimalpa de Morelos	0.00	0.04	0.11	0.13	0.11	0.05	0.02	0.00	2.29
005 Gustavo A. Madero	0.00	0.04	0.11	0.11	0.08	0.04	0.01	0.00	2.02
006 Iztacalco	0.00	0.04	0.10	0.10	0.08	0.04	0.01	0.00	1.96
007 Iztapalapa	0.00	0.05	0.13	0.13	0.09	0.04	0.01	0.00	2.33
008 Magdalena Contreras, La	0.00	0.05	0.11	0.12	0.09	0.04	0.01	0.00	2.12
009 Milpa Alta	0.00	0.07	0.15	0.13	0.09	0.05	0.02	0.00	2.53
010 Álvaro Obregón	0.00	0.04	0.11	0.11	0.08	0.04	0.01	0.00	2.03
011 Tláhuac	0.00	0.06	0.15	0.13	0.09	0.05	0.01	0.00	2.42
012 Tlalpan	0.00	0.04	0.11	0.11	0.09	0.05	0.01	0.00	2.04
013 Xochimilco	0.00	0.06	0.13	0.12	0.09	0.05	0.01	0.00	2.26
014 Benito Juárez	0.00	0.01	0.05	0.07	0.08	0.05	0.01	0.00	1.36
015 Cuauhtémoc	0.00	0.04	0.09	0.09	0.08	0.04	0.01	0.00	1.79
016 Miguel Hidalgo	0.00	0.03	0.07	0.09	0.08	0.04	0.01	0.00	1.59
017 Venustiano Carranza	0.00	0.04	0.10	0.10	0.08	0.04	0.01	0.00	1.92

TABLA 8. Población de México y sus entidades Federativas, 1895-2000.

Entidad federativa	1895	1900	1910	1921	1930	1940	1950 a/	1960	1970	1980	1990	1995	2000
Estados Unidos Mexicanos	12 700 294	13 607 259	15 160 369	14 334 780	16 552 722	19 653 552	25 791 017	34 923 129	48 225 238	66 846 833	81 249 645	91 158 290	97 483 412
Aguascalientes	104 693	102 416	120 511	107 581	132 900	161 693	188 075	243 363	338 142	519 439	719 659	862 720	944 285
Baja California	42 875	47 624	52 272	23 537	48 327	78 907	226 965	520 165	870 421	1 177 886	1 660 855	2 112 140	2 487 367
Baja California Sur b/				39 294	47 089	51 471	60 864	81 594	128 019	215 139	317 764	375 494	424 041
Campeche	88 144	86 542	86 661	76 419	84 630	90 460	122 098	168 219	251 556	420 553	535 185	642 516	690 689
Coahuila de Zaragoza	242 021	296 938	362 092	393 480	436 425	550 717	720 619	907 734	1 114 956	1 557 265	1 972 340	2 173 775	2 298 070
Colima	55 718	65 115	77 704	91 749	61 923	78 806	112 321	164 450	241 153	346 293	428 510	488 028	542 627
Chiapas	320 694	360 799	438 843	421 744	529 983	679 885	907 026	1 210 870	1 569 053	2 084 717	3 210 496	3 584 786	3 920 892
Chihuahua	265 546	327 784	405 707	401 622	491 792	623 944	846 414	1 226 793	1 612 525	2 005 477	2 441 873	2 793 537	3 052 907
Distrito Federal	474 860	541 516	720 753	906 063	1 229 576	1 757 530	3 050 442	4 870 876	6 874 165	8 831 079	8 235 744	8 489 007	8 605 239
Durango	296 979	370 294	483 175	336 766	404 364	483 829	629 874	760 836	939 208	1 182 320	1 349 378	1 431 748	1 448 661
Guanajuato	1 069 418	1 061 724	1 081 651	860 364	987 801	1 046 490	1 328 712	1 735 490	2 270 370	3 006 110	3 982 593	4 406 568	4 663 032
Guerrero	420 926	479 205	594 278	566 836	641 690	732 910	919 386	1 186 716	1 597 360	2 109 513	2 620 637	2 916 567	3 079 649
Hidalgo	563 824	605 051	646 551	622 241	677 772	771 818	850 394	994 598	1 193 845	1 547 493	1 888 366	2 112 473	2 235 591
Jalisco	1 114 765	1 153 891	1 208 855	1 191 957	1 255 346	1 418 310	1 746 777	2 443 261	3 296 586	4 371 998	5 302 689	5 991 176	6 322 002
México	842 873	934 463	989 510	884 617	990 112	1 146 034	1 392 623	1 897 851	3 833 185	7 564 335	9 815 795	11 707 964	13 096 686
Michoacán de Ocampo	898 809	935 808	991 880	939 849	1 048 381	1 182 003	1 422 717	1 851 876	2 324 226	2 868 824	3 548 199	3 870 604	3 985 667
Morelos	159 123	160 115	179 594	103 440	132 068	182 711	272 842	386 264	616 119	947 089	1 195 059	1 442 662	1 555 296
Nayarit	149 807	150 098	171 173	163 183	167 724	216 698	290 124	389 929	544 031	726 120	824 643	896 702	920 185
Nuevo León	311 665	327 937	365 150	336 412	417 491	541 147	740 191	1 078 848	1 694 689	2 513 044	3 098 736	3 550 114	3 834 141
Oaxaca	897 182	948 633	1 040 398	976 005	1 084 549	1 192 794	1 421 313	1 727 266	2 015 424	2 369 076	3 019 560	3 228 895	3 438 765
Puebla	992 426	1 021 133	1 101 600	1 024 955	1 150 425	1 294 620	1 625 830	1 973 837	2 508 226	3 347 685	4 126 101	4 624 365	5 076 686
Querétaro de Arteaga	232 305	232 389	244 663	220 231	234 058	244 737	286 238	355 045	485 523	739 605	1 051 235	1 250 476	1 404 306
Quintana Roo c/			9 109	10 966	10 620	18 752	26 967	50 169	88 150	225 985	493 277	703 536	874 963
San Luís Potosí	571 420	575 432	627 800	445 681	579 831	678 779	856 066	1 048 297	1 281 996	1 673 893	2 003 187	2 200 763	2 299 360
Sinaloa	261 050	296 701	323 642	341 265	395 618	492 821	635 681	838 404	1 266 528	1 849 879	2 204 054	2 425 675	2 536 844
Sonora	192 721	221 682	265 383	275 127	316 271	364 176	510 607	783 378	1 098 720	1 513 731	1 823 606	2 085 536	2 216 969

Tabasco	134 956	159 834	187 574	210 437	224 023	285 630	362 716	496 340	768 327	1 062 961	1 501 744	1 748 769	1 891 829
Tamaulipas	209 106	218 948	249 641	286 904	344 039	458 832	718 167	1 024 182	1 456 858	1 924 484	2 249 581	2 527 328	2 753 222
Tlaxcala	168 358	172 315	184 171	178 570	205 458	224 063	284 551	346 699	420 638	556 597	761 277	883 924	962 646
Veracruz-Llave	863 220	981 030	1 132 859	1 159 935	1 377 293	1 619 338	2 040 231	2 727 899	3 815 422	5 387 680	6 228 239	6 737 324	6 908 975
Yucatán	298 569	309 652	339 613	358 221	386 096	418 210	516 899	614 049	758 355	1 063 733	1 362 940	1 556 622	1 658 210
Zacatecas	456 241	462 190	477 556	379 329	459 047	565 437	665 524	817 831	951 462	1 136 830	1 276 323	1 336 496	1 353 610

NOTA: Cifras correspondientes a las siguientes fechas censales: 20 de octubre (1895), 28 de octubre (1900), 27 de octubre (1910), 30 de noviembre (1920), 15 de mayo (1930), 6 de marzo (1940), 6 de junio (1950), 8 de junio (1960), 28 de enero (1970), 4 de junio (1980), 12 de marzo (1990), 5 de noviembre (1995) y 14 de febrero (2000). La división política de México y su nomenclatura han registrado diversos cambios a través de la historia.

a/ El total incluye 11 763 habitantes, dato registrado bajo el concepto de *Complementarios*, el cual no se presentó por entidad federativa.

b/ Hasta 1910 se incluyó en Baja California.

c/ Hasta 1900 se incluyó en Yucatán.

FUENTE: Para 1895 a 1990: I al XI Censos de Población y Vivienda.
Para 1995: INEGI. *Estados Unidos Mexicanos. Conteo de Población y Vivienda, 1995. Resultados Definitivos. Tabulados Básicos.*
Para 2000: INEGI. *Estados Unidos Mexicanos. XII Censo General de Población y Vivienda, 2000. Tabulados Básicos y por Entidad Federativa. Bases de Datos y Tabulados de la Muestra Censal.*
INEGI. *División Territorial de los Estados Unidos Mexicanos de 1810 a 1995.*

3.4 EL MODELO DE VERHULST CON UN TÉRMINO FORZANTE (DE MIGRACIÓN)

Hasta el momento, únicamente se han considerado los elementos o características que definen a una población:

- **La natalidad**
- **La mortalidad**

pero no hemos tomado en cuenta a la migración. Vamos a enunciar lo que está sucediendo con el crecimiento de la población nacional; según información proporcionada por el Consejo Nacional de Población (**CONAPO**), el cual estima que a mediados de 2004 la población de México alcanzó los 105.3 millones; es decir, 1.1 millones o 1.09 por ciento más que en 2003. Por su número de habitantes, México ocupa el decimoprimer lugar entre las naciones más pobladas del mundo. Así mismo, se estima que ocurrirán alrededor de dos millones de nacimientos y cerca de 469 mil defunciones durante el presente año, lo cual equivale a un incremento absoluto de casi 1.5 millones de personas, o bien, a una tasa de crecimiento anual de 1.44 por ciento.

El saldo neto migratorio internacional de México es negativo, aproximadamente de 398 mil personas durante 2004. Al descontar esta cifra del aumento natural de la población (la diferencia entre nacimientos y defunciones), el crecimiento neto total en números absolutos desciende a poco más de 1.1 millones de personas y la tasa de crecimiento a 1.06 por ciento anual, lo cual sitúa al país en la posición número 83 entre las naciones, con cien mil o más habitantes, que registran el menor crecimiento poblacional, y en el sitio 62 entre las naciones con más bajo crecimiento demográfico positivo.

El descenso de la fecundidad ha seguido su curso, por lo que es muy probable que se alcance el nivel de reemplazo intergeneracional al final de la actual administración, prevista por el Programa Nacional de Población 2001-2006. El promedio de hijos por mujer se ha reducido en 11 por ciento entre 2000 y 2004, al pasar de 2.41 a 2.16 hijos por mujer, la cual ubica al país en el lugar 70 entre las naciones con menor descendencia media de las familias.

La disminución de la fecundidad en México ha sido posible gracias al avance de los programas de planificación familiar y salud reproductiva. El número de mujeres en edades fértiles que usa métodos anticonceptivos ha aumentado de 12.3 a 13.5 millones en los pasados cuatro años y la proporción de mujeres unidas en pareja en edades fértiles que practican la anticoncepción ha aumentado de 71.1 a 73.2 por ciento. A estos logros ha correspondido una baja de la tasa de natalidad de 21.1 a 18.8 nacimientos por cada mil habitantes entre 2000 y 2004.

La mortalidad general ha seguido disminuyendo, de tal manera que la esperanza de vida de los mexicanos aumentó de 74.0 a 75.2 años durante el cuatrienio pasado, lo que equivale a una reducción del riesgo de morir de dos por ciento anual para ambos sexos. La mortalidad infantil, por su parte, se redujo en 16 por ciento al descender de 233 decesos de menores de un año por cada diez mil nacimientos en 2000 a 197 en la actualidad.

Los cambios en la estructura por edad también dan cuenta del avance de la transición demográfica. La reducción del número de niños y jóvenes menores de 15 años se ha mantenido, ascendiendo a más de 186 mil en el primer semestre del presente año (2004), un decremento del 10 por ciento superior al registrado durante la primera mitad de 2003. La población en edades laborales (15 a 64 años) y los adultos mayores (65 años o más), en cambio, aumentaron 646 mil y 99 mil, respectivamente.

El Distrito Federal se mantiene como la entidad federativa más densamente poblada con 5 880 residentes por kilómetro cuadrado, seguido por el estado de México con 673.2. En el extremo opuesto se encuentra Baja California Sur con sólo 7 habitantes por kilómetro cuadrado y Durango y Sonora con 13 habitantes. Quintana Roo sigue registrando el mayor crecimiento relativo (3.65 por ciento), aunque con tendencia a la baja, y el Distrito Federal el menor de los 32 estados que comprenden la República Mexicana (0.01 por ciento), cada vez está más cerca del decrecimiento.

Las discrepancias en el ritmo de crecimiento entre las entidades derivan principalmente de la desigual incidencia de la migración interna. Se estima que, durante el presente año, cerca de 890 000 personas muden su residencia de una entidad federativa hacia otra, es decir, 0.85 por ciento de la población nacional. El Distrito Federal y el estado de México conservan su primacía como origen y destino de los flujos migratorios interestatales más numerosos. Se espera que en 2004 salgan casi 179 000 y 118 000 personas de esas entidades, respectivamente, y lleguen a ellas 99 000 y 166 000 nuevos habitantes.

El Distrito Federal mantiene la preponderancia de la emigración aún en términos relativos, con un retiro de 2.0 por ciento anual de su población; sin embargo, ahora es seguido por Veracruz con 1.2 por ciento y por Guerrero y Sinaloa con 1.1 por ciento. Bajo la óptica de la inmigración, Quintana Roo prevalece como el estado que proporcionalmente acoge a más nuevos residentes con 3.0 por ciento anual, seguido de Baja California Sur con 2.1 y Baja California con 2.0 por ciento.

La atracción que ejerce Quintana Roo sobre la población del resto del país es tan intensa, que casi la mitad de su crecimiento demográfico anual corresponde a la movilidad territorial de la población; por el contrario, la propensión a salir del Distrito Federal es tan fuerte que la alta pérdida neta por migración reduce casi en 99 por ciento su crecimiento natural.

El Distrito Federal registra la menor fecundidad (1.8 hijos por mujer) y se mantiene significativamente por debajo del nivel de reemplazo. Además, es de mencionarse que Baja California y el Distrito Federal prevalecen como las entidades con mayor esperanza de vida (76.4 años); no obstante, es en Chiapas, Oaxaca y Guerrero donde se advierten los mayores incrementos (1.3 años) de 2000 a 2004.[40]

Ahora bien, el siguiente problema es:

¿Qué influencia tiene la migración en el crecimiento de las poblaciones?

En base a la lectura anterior, podemos darnos cuenta de que la migración sí tiene una influencia muy importante en el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones.

[40]http://gobernacion.gob.mx/templetas/boletin.php?id=3119

3.5 SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA DE CRECIMIENTO DE POBLACIÓN CON TÉRMINO FORZANTE

Para resolver el problema, supongamos que existe un cierto número de migración de la población, la cual se define con la constante m, con estos cambios la **ECUACIÓN LOGÍSTICA DE CRECIMIENTO DE POBLACIÓN**, quedará de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 + m \qquad (\mathbf{1})$$

donde: a la constante m le llamaremos elemento de migración.

Por otro lado, se debe considerar que un emigrante que llega a residir a una población, se comporta como todo el resto de los que conforman a la población y posteriormente, ya que se ha adaptado a ésta, se reproduce al igual que los demás integrantes.

Ahora bien, nuestro modelo tiene tres parámetros: a, b y m, pero únicamente nos interesa saber qué sucede si el parámetro m varía. Por lo tanto, consideremos a a y a b como constantes fijas determinadas por la población que habita en cierta ciudad.

Si $m = 0$, sabemos que todas las condiciones iniciales positivas tienden al punto de equilibrio $y = \frac{a}{b}$. Entonces, si no existe migración la población será cercana a $y = \frac{a}{b}$. Por otro lado, consideremos a la función:

$$f_m(y) = ay - by^2 + m$$

Cuando m crece, la gráfica de $f_m(y)$ se desliza hacia arriba (ver figura siguiente). Los puntos donde $f_m(y)$ cruzan el eje Y tienden el uno hacia el otro. Por otro lado, cuando m decrece, la gráfica de $f_m(y)$ se desliza hacia abajo (ver figura siguiente).

En otras palabras, los puntos de equilibrio para las correspondientes ecuaciones diferenciales se acercan entre sí. Ahora obtendremos los puntos de equilibrio de la ecuación, si calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 + m \quad \Rightarrow \quad 0 = ay - by^2 + m \quad \Rightarrow \quad by^2 - ay - m = 0$$

Utilicemos la **fórmula general** para resolver la ecuación de segundo grado, si se resuelve para y, se obtendrá:

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bm}}{2b} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} + \frac{4bm}{4b}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} + m}$$

De esto último, si $\frac{a^2}{4b^2}+m<0$, la gráfica de la función no corta al eje Y, y su ecuación, no tiene puntos de equilibrio. Pero es de mencionarse, que la población no puede extinguirse.

Por otro lado, si $\frac{a^2}{4b^2}+m>0$, la gráfica de la función cruzará dos veces el eje horizontal y la correspondiente ecuación, tendrá dos puntos de equilibrio. Es decir, si $\frac{a^2}{4b^2}+m>0$ habrá dos puntos de equilibrio. Para cualquier valor de m, la función $f_m(y)$ es positiva para todo valor de y y las soluciones de la correspondiente ecuación tienden hacia $+\infty$. Por tanto, la población mantendrá un crecimiento y no se extinguirá. Resolvamos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt}=ay-by^2+m \qquad \textbf{(v)}$$

Si se realiza una separación de variables y un cambio de variables, la ecuación (**v**), se puede escribir de la forma siguiente, y si se integra esta expresión, se obtendrá:

$$ds=\frac{dr}{ar-br^2+m} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_o}^{t} ds=-\int_{y_0}^{y}\frac{dr}{br^2-ar-m} \quad \Rightarrow \quad t-t_o=-\int_{y_0}^{y}\frac{dr}{br^2-ar-m}$$

Resolvamos la integral del lado derecho, utilizando el método de solución por fracciones parciales, si factorizamos el denominador, utilizando la fórmula general, obtendremos:

$$\frac{1}{br^2-ar-m}=\frac{1}{\left[r-\frac{a+\sqrt{a^2+4bm}}{2b}\right]\left[r-\frac{a-\sqrt{a^2+4bm}}{2b}\right]}$$

Suponiendo que:

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2+4bm}}{2b} \qquad \text{y} \qquad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2+4bm}}{2b}$$

Regresando a la solución:

$$\frac{1}{(r-\alpha)(r+\beta)}\equiv\frac{A}{r-\alpha}+\frac{B}{r+\beta} \quad \Rightarrow \quad 1\equiv A(r+\beta)+B(r-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad 1\equiv Ar+A\beta+Br-B\alpha=(a+B)r+(A\beta-B\alpha)$$

Si igualamos coeficientes se tiene:

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ A\beta-B\alpha&=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A=-B$$

Si se sustituye en (**2**), y se calcula, se obtendrá:

$$A\beta + B\alpha = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{\alpha+\beta} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{-1}{\alpha+\beta}$$

Regresando a la fracción parcial:

$$\frac{1}{(r-\alpha)(r+\beta)} \equiv \frac{1}{(\alpha+\beta)(r-\alpha)} - \frac{1}{(\alpha+\beta)(r+\beta)}$$

Al evaluar la integral:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{(r-\alpha)(r+\beta)}\,dr = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\int_{y_0}^{y}\frac{1}{r+\beta}\,dr - \int_{y_0}^{y}\frac{1}{r-\alpha}\,dr\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\left|\ln|r+\beta| - \ln|r-\alpha|\right|_{y_0}^{y}$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{r+\beta}{r-\alpha}\right|_{y_0}^{y} = \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{y+\beta}{y-\alpha} - \frac{y_0+\beta}{y_0-\alpha}\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{(y+\beta)(y_0-\alpha)-(y_0+\beta)(y-\alpha)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{y\,y_0 - \alpha y + \beta y_0 - \alpha\beta - y\,y_0 + \alpha\,y_0 - \beta y + \alpha\beta}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right|$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{-\alpha y + \beta y_0 + \alpha\,y_0 - \beta y}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right|$$

Por lo tanto, se tendrá la siguiente expresión:

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha+\beta}\ln\left|\frac{(\alpha+\beta)y_0 - (\alpha+\beta)y}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right| \quad \Rightarrow \quad (t-t_0)(\alpha+\beta) = \ln\left|\frac{(y_0-y)(\alpha+\beta)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right| \quad \textbf{(1)}$$

Por otro lado, como α , $\beta > 0$ y y_0 , $y > 0$, por lo tanto:

$$\frac{(y_0-y)(\alpha+\beta)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)} > 0 \qquad para \quad 0 < t_0 < t$$

Continuando con el despeje de la variable dependiente, y si le aplicamos la función exponencial a la igualdad (**1**), se obtendrá:

$$(t-t_0)(\alpha+\beta)=\ln\left[\frac{(y_0-y)(\alpha+\beta)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}\right] \qquad \Rightarrow \qquad e^{(t-t_0)(\alpha+\beta)}=\frac{(y_0-y)(\alpha+\beta)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)}$$

Suponiendo por un instante que: $u=e^{(t-t_0)(\alpha+\beta)}$, y continuando con el despeje:

$$u=\frac{(y_0-y)(\alpha+\beta)}{(y-\alpha)(y_0-\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad u(y-\alpha)(y_0-\alpha)=(y_0-y)(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \qquad uyy_0-u\alpha y-u\alpha y_0+u\alpha^2=\alpha y_0+\beta y_0-\alpha y-\beta y$$

$$\Rightarrow \qquad y(\alpha+\beta+uy_0-u\alpha)=\alpha y_0+\beta y_0-u\alpha y_0-u\alpha^2$$

$$\Rightarrow \qquad y=\frac{\alpha y_0+\beta y_0-u\alpha y_0-u\alpha^2}{\alpha+\beta+uy_0-u\alpha}$$

Por lo tanto, la solución será:

$$y(t)=\frac{(\alpha+\beta)y_0-u\alpha(y_0+\alpha)}{(\alpha+\beta)+u(y_0-\alpha)}$$

Al realizarse las sustituciones, de los valores de α, β y u, así como unas pequeñas operaciones algebraicas, finalmente se obtendrá, que la solución de la ecuación (**v**) es:

$$y(t)=\frac{a+\tanh\left[\frac{t}{2}\sqrt{a^2+4mb}-\frac{t_0}{2}\sqrt{a^2+4mb}-\tan^{-1}\mathrm{h}\left[\frac{-2by_0+a}{\sqrt{a^2+4mb}}\right]\right]\sqrt{a^2+4mb}}{2b} \qquad (\mathbf{S})$$

La solución obtenida de la ecuación (**v**), será difícil de manipular en el salón de clase. Así, que para poder deducir cómo influye la migración en el crecimiento o decrecimiento de una población, únicamente esta podrá ser obtenida utilizando algunas herramientas más (por ejemplo, una computadora, un paquete, como **MAPLE, MATLAB,** etc.**)**.

Veamos qué sucede si le damos valores a las variables que aparecen en la fórmula, de acuerdo a **INEGI** y a los valores que obtuvimos, tenemos lo siguiente: $a=1.61$; $b=1.52232843\times10^{-9}$; $y_0=8710800$; $m=-0.91$; $t_0=2000$ y $t=2020$. Si sustituimos estos datos y utilizamos el paquete de **MAPLE**, nos da como resultado la siguiente expresión:

$$y(t)=\frac{10000000}{28761133491015734624037 87}\left(115000000\sqrt{1322499997172818630}+1322499997172818 63\tanh\left(\frac{1}{1322499997172818630000000000}\left(925749998020973041\,t\right.\right.\right.$$
$$\left.-925749998020973041\,o+1000000000\sqrt{1322499997172818630}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{132249999717281863 00000000}(21747549\,y_0-115000000000000000)\sqrt{1322499997172818630}\right)\right)$$
$$\left.\left.\sqrt{1322499997172818630}\right)\right)\sqrt{1322499997172818630}$$

Si se observa, hasta este momento no hemos obtenido un valor numérico, así que hagámoslo manualmente utilizando una calculadora para simplificar esta última expresión:

$$y(t) = 3.9984\times10^{-9}\Big[1.3424\times10^{17} + 1.3224\times10^{17}\tanh\Big[\frac{1}{1.3224\times10^{27}}$$
$$\Big[1.8514\times10^{19} + 1.1499\times10^{18}\arctan h\big[2.1523\times10^{23}\big]\Big]1.1499\times10^{9}\Big]\Big]$$

Si nos damos cuenta esta expresión aún está muy complicada para llegar a su solución, así que simplifiquémosla aún más:

$$y(t) = 3.9984\times10^{-9}\Big[1.3424\times10^{17} + 1.3224\times10^{17}\tanh\big[16.099 + 0.9999\arctan h[2.1523\times10^{23}]\big]\Big]$$

Una simplificación más:

$$y(t) = 5.2879\times10^{8} + 5.2879\times10^{8}\tanh\Big[16.099 + 0.9999\ \arctan h\big(2.1524\times10^{23}\big)\Big]$$

En esta última expresión, obtenemos las funciones trigonométricas: tangente hiperbólica y la de su inversa, es decir, ahora tenemos el problema de saber de qué tipo de funciones estamos hablando. Veamos algo referente a estas funciones:

Las combinaciones particulares de la función exponencial dan lugar a un interesante tipo de funciones llamadas funciones hiperbólicas, las cuales están presentes en muchas ramas de las matemáticas. Estas funciones se identifican con un punto $P(x, y)$ de la hipérbola unidad:

$$x^2 - y^2 = 1\,.$$

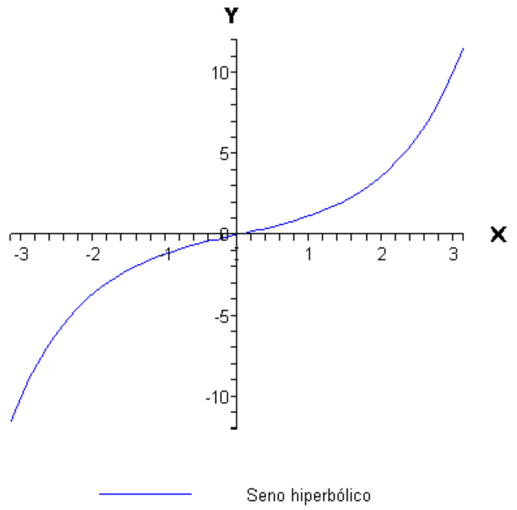
En efecto, basta comprobar con algunas simples operaciones, que el punto dado por $P(\cosh(x), senh(x))$ verifica sin problema alguno a dicha expresión. De ahí resulta que, la igualdad:

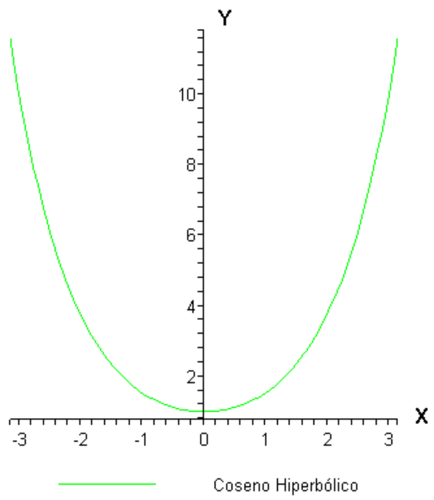
$$\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

en lugar de la popular expresión fundamental de la trigonometría sobre la circunferencia $\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$. Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen como:

$$f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Las gráficas de estas funciones son:

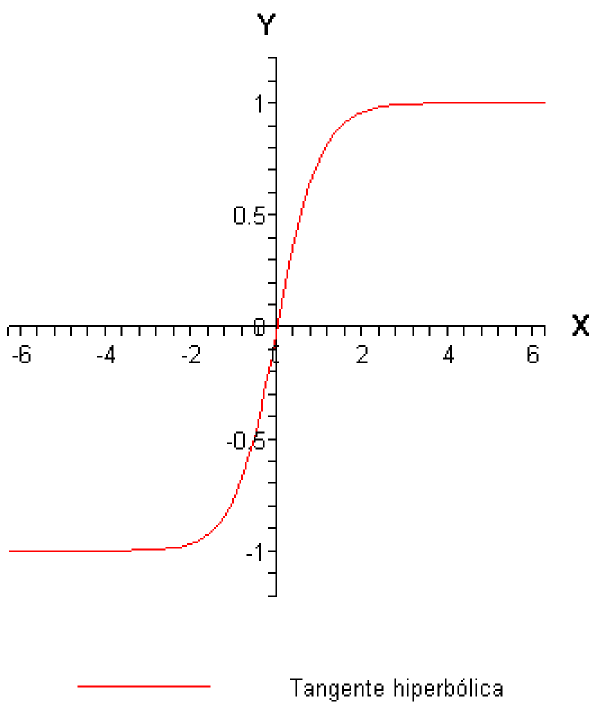




De aquí se puede definir a la tangente hiperbólica como:

$$h(x) = \tan h(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \tan h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La gráfica de la función tangente hiperbólica es la siguiente:



3.6 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA DE CRECIMIENTO DE POBLACIÓN CON TÉRMINO FORZANTE POR CASOS

El problema de resolver el modelo agregándole el término referente a la migración, complica en demasía la solución de éste. Por consiguiente, para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 + A\,sen(\omega t)$$

donde: $\omega = 2\pi$ y A es una constante positiva, vamos a considerar los siguientes casos:

a) Si $A = 0$, la forma de la ecuación es:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

Este caso ya fue resuelto.

b) Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, entonces: $A\,sen(\omega t) = A$; y la ecuación queda de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 + A$$

Este caso ya fue resuelto también.

c) Si $b = 0$, la ecuación es de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + A\,sen(\omega t)$$
$$y(0) = y_0$$

Para resolver esta ecuación, vamos a proporcionar un método de solución, al cual se le conoce como:

MÉTODO DE FACTORES INTEGRANTES

Para resolver una ecuación diferencial lineal por este método, la escribiremos en la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} + h(t)\,y = g(t) \qquad \textbf{(1)}$$

donde: $h(t) = -m(t)$.

Vamos a explicar como hallar el **factor integrante** de la ecuación (**1**); para tal fin multipliquemos ambos miembros de la ecuación diferencial[41] (**1**) por una función $\mu(t)$, la cual hasta este momento no está determinada. Por lo tanto:

$$\mu(t)\,\frac{dy}{dt} + \mu(t)\;h(t)\,y = \mu(t)\;g(t) \qquad \textbf{(2)}$$

Lo que se pretenderá es elegir a la función $\mu(t)$ de tal suerte que el primer miembro de la ecuación (**2**) sea la derivada de alguna otra función. Si observamos, el término $\mu(t)\,\frac{dy}{dt}$ sugiere que la función buscada podría ser el producto $\mu(t)\;y(t)$, para así poder establecer la expresión:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)\;y(t)] = \mu(t)\,\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\;y(t)$$

Para llegar a ello, será necesario sumar y restar el término $\frac{d\mu}{dt}\;y(t)$ en el primer miembro de la ecuación (**2**):

$$\mu(t)\,\frac{dy}{dt} + \mu(t)\,h(t)\,y(t) + \frac{d\mu}{dt}\,y(t) - \frac{d\mu}{dt}\,y(t) = \mu(t)\,g(t)$$

Al agrupar términos, se obtendrá:

$$\left[\mu(t)\,\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\,y(t)\right] - \left[\frac{d\mu}{dt}\,y(t) - \mu(t)\,h(t)\,y(t)\right] = \mu(t)\,g(t)$$

Si $\frac{d\mu}{dt}\,y(t) - \mu(t)\,h(t)\,y(t) = 0$. Entonces, se tendrá la ecuación:

$$\frac{d}{dt}[\,\mu(t)\,y(t)] = \mu(t)\,g(t) \qquad \textbf{(3)}$$

El primer miembro de la ecuación (**3**) será fácil de integrar. Pero si se desea lograr lo anterior se debe de elegir a la función $\mu(t)$ de tal suerte que se tenga:

$$\frac{d\mu}{dt} - \mu(t)\;h(t) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

---

[41] Se utilizará el símbolo $\frac{dy}{dt}$ para representar a la derivada de una función, la cual no debe de considerarse como un cociente o una razón. En realidad, $\frac{d}{dt}$ debe de considerarse como un operador (un símbolo para la operación de evaluar la derivada de una función), y cuando se escriba $\frac{d}{dt}$, esto significará $\frac{d}{dt}(y)$, es decir, la derivada de y con respeto a t.

Supongamos por un instante que la función $\mu(t)>0$, entonces la ecuación (**4**) puede escribirse como:

$$\frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu(t)}=h(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\ln\mu(t)=h(t) \qquad (\mathbf{5})$$

Por lo tanto, integrando la ecuación (**5**):

$$\ln\mu(t)=\int h(t)\,dt+k \quad \text{con} \quad k=\text{constante.}$$

Si elegimos a $k=0$, y aplicamos la exponencial a la anterior ecuación, se obtendrá:

$$\mu(t)=e^{\int h(t)\,dt} \qquad (\mathbf{6})$$

Es fácil ver que la función $\mu(t)$ es positiva para toda $t\in\mathbb{R}$. Si ahora Integramos la ecuación (**3**):

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\;y(t)\right]=\mu(t)\,g(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t)\,y(t)+k=\int\mu(t)\,g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \qquad \mu(t)\,y(t)=\int\mu(t)\,g(t)\,dt-k$$

Al despejar se obtendrá:

$$y(t)=\frac{\int\mu(t)\,g(t)\,dt-k}{\mu(t)} \qquad (\mathbf{7})$$

A la expresión (**7**) se le llama la **SOLUCION GENERAL** de la ecuación (**1**), para hallar la solución de la ecuación (**7**), es necesaria una integración más para determinar el valor de $y(t)$ a partir de la ecuación (**7**).

Ya analizado cómo se obtiene el **FACTOR INTEGRANTE** de una ecuación diferencial de la forma (**1**), escribamos la ecuación a resolver como:

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}-a\,y=A\,sen(\omega t)\\&y(0)=y_0\end{aligned} \qquad (\mathbf{1})$$

En la ecuación (**1**) tenemos que $h(t)=-a$ y que $g(t)=A\,sen(\omega t)$. En primer lugar, obtengamos el **FACTOR INTEGRANTE**. Si calculamos:

$$\mu(t)=\mathrm{e}^{-\int a\,dt}=e^{-at} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t)=e^{-at} \qquad (\mathbf{2})$$

Si multiplicamos la ecuación (**1**) por la (**2**), obtendremos:

$$\frac{dy}{dt}e^{-at}-a\,e^{-at}y=A\,e^{-at}sen(\omega t)$$

Esto último, se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-as}\,y\right] = A e^{-as}\,sen(\omega s) \qquad \textbf{(3)}$$

Si integremos la ecuación (**3**) sobre el intervalo $\left[a,b\right]$, se obtendrá:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-as}\,y\right] = A\int_0^t e^{-as} sen(\omega s)ds \quad \Rightarrow \quad e^{-as}\,y(t) - y(0) = A\int_0^t e^{-as} sen(\omega s)ds \qquad \textbf{(4)}$$

La solución de la integral[42] del lado derecho de la igualdad (**4**) es:

$$\int_0^t e^{-as} sen(\omega s)ds = \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} - \frac{\omega\, e^{-at}\cos(\omega t) + a\, e^{-at}\, sen(\omega t)}{\omega^2 + a^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (**5**) en la (**4**) y simplificando se obtendrá:

$$e^{-at}\,y(t) - y_0 = A\left[\frac{\omega}{a^2+\omega^2} - \frac{a\, e^{-at}\, sen(\omega t) + \omega\, e^{-at}\cos(\omega t)}{a^2+\omega^2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad e^{-at} y(t) = y_0 + \frac{A\omega}{a^2+\omega^2} - \frac{a\,A e^{-at} sen(\omega t) + \omega A e^{-at}\cos(\omega t)}{a^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y(t) = y_0\, e^{at} + \frac{A\omega}{a^2+\omega^2} e^{at} - \frac{a\,A sen(\omega t) + \omega A\cos(\omega t)}{a^2+\omega^2}$$

Por lo tanto, la solución buscada es:

$$y(t) = \left[y_0 + \frac{\omega A}{a^2+\omega^2}\right]e^{at} - \frac{a\,A sen(\omega t) + \omega A\cos(\omega t)}{a^2+\omega^2}$$

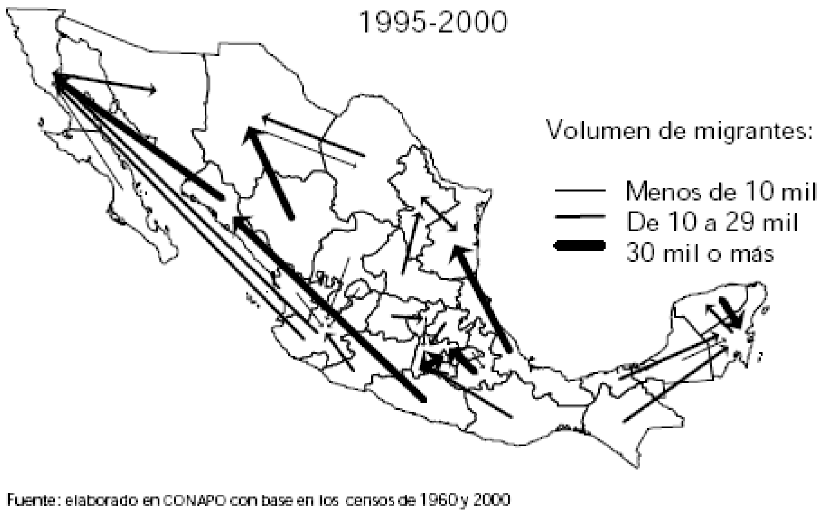
Así el caso (**c**) está resuelto.

Recordemos que la migración influye directamente sobre la distribución territorial de las personas y modifica el volumen, tamaño y estructura por edad de la población, tanto en el lugar de origen como en el de destino[43]. En el ejemplo que será presentado posteriormente, será considerada una migración del tipo estatal de la República Mexicana[44].

---

[42] Se deja al estudiante como actividad extraclase calcular la integral (**4**). (Nota utiliza el método de integración por partes para hallar la solución).
[43] En la página 20 del capítulo 2, es definido el concepto de migración.
[44] Será considerado el estado de Baja California Sur, ya que según el Fondo Nacional de Población es uno de los que presenta un alto porcentaje de migración interestatal.

Figura 21. Principales entidades de origen de los inmigrantes interestatales (México).

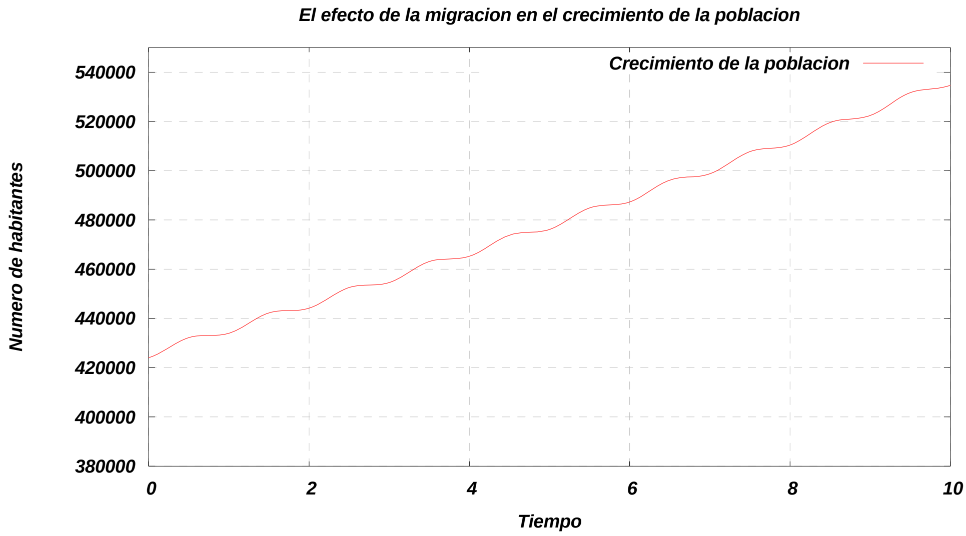


EJEMPLO 3.6.1. Consideremos los valores emitidos por el **INEGI** del estado de Baja California Sur[45]: $y_0 = 424041$; $a = 0.0231$, $A = 8000$ y $\omega = 2\pi$. La ecuación quedará de la siguiente forma:

$$y(t) = \left[424041 + \frac{8000\omega}{0.00053361 + \omega^2}\right]e^{0.0231t} - \frac{(0.0231)(8000)\,sen(\omega t) + 8000\,\omega\cos(\omega t)}{0.00053361 + \omega^2}$$

Se utilizará el graficador del paquete Gnuplot 4.2[46], para la construcción de la gráfica correspondiente (figura 22).

Figura 22. El efecto de la migración en el crecimiento de la población del estado de Baja California Sur (caso de crecimiento).



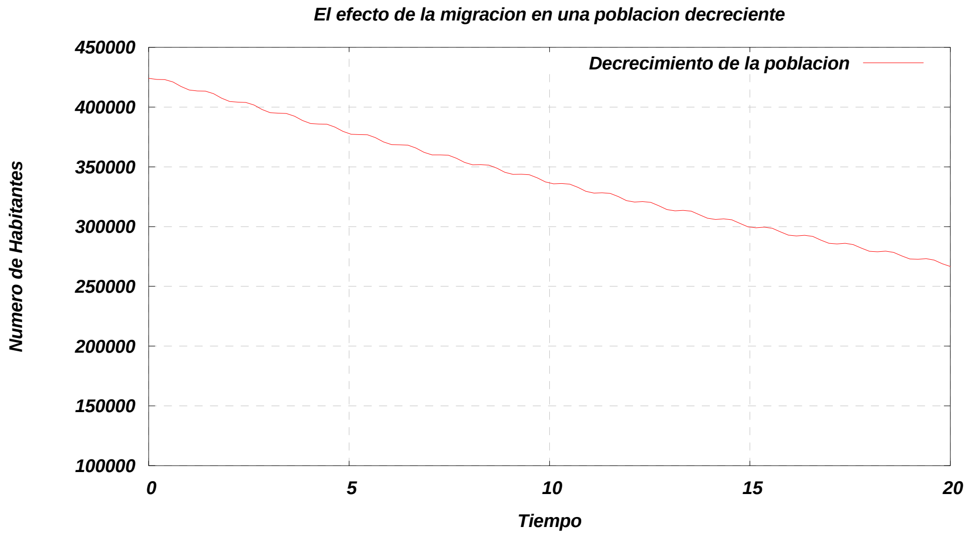
[45] Fuente. INEGI - XII Censo General de Población y Vivienda 2000. http://www.inegi.gob.mx.
[46] Página http://www.gnuplot.info.

EJEMPLO 3.6.2. Consideremos nuevamente los valores del estado de Baja California Sur[47], pero con el supuesto de que la población esta decreciendo: $y_0 = 424041$; $a = 0.0231$, $A = 8000$ y $\omega = 2\pi$. La ecuación quedará de la siguiente forma:

$$y(t) = \left[424041 + \frac{8000\omega}{0.00053361 + \omega^2} \right] e^{-0.0231t} - \frac{(0.0231)(8000)\,sen(\omega t) + 8000\,\omega\cos(\omega t)}{0.00053361 + \omega^2}$$

La gráfica correspondiente aparece en la figura 23.

Figura 23. El efecto de la migración en el crecimiento de la población del estado de Baja California Sur (caso de decrecimiento).



Así el caso c) esta resuelto.

d) Si $A =$ constante, se tiene la ecuación de la forma:

$$(\mathbf{1}) \qquad \frac{dy}{dt} = ay - by^2 + A\cos(\omega t)$$

Para resolver los casos **a**), **b**) y **c**), se utilizaron métodos para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aplicación de técnicas analíticas, por ejemplo, la integración.

Resolver la ecuación (**1**), utilizando técnicas analíticas es muy complicado. Utilizaremos un enfoque alternativo, el uso de procedimientos numéricos para obtener una aproximación a la solución de la ecuación diferencial.

SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL POR MÉTODOS NUMÉRICOS

Escribiremos un programa de computadora para efectuar los cálculos necesarios para obtener los resultados del algoritmo, las instrucciones específicas las escribiremos en el lenguaje de programación **TURBO C**. Veamos los siguientes ejemplos de solución para este caso:

[47] Fuente. INEGI - XII Censo General de Población y Vivienda 2000. http://www.inegi.gob.mx.

EJEMPLO 3.6.3. Para los valores de: $a = 2$; $b = \frac{1}{2}$, $A = 1$ y $\omega = \frac{2\pi}{365}$. La ecuación queda de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = 2y - \frac{1}{2}y^2 + \cos(\omega t) \qquad (\alpha)$$

Utilizaremos el tamaño de paso h, uniforme sobre el eje t, con valor de $h = 0.2$.

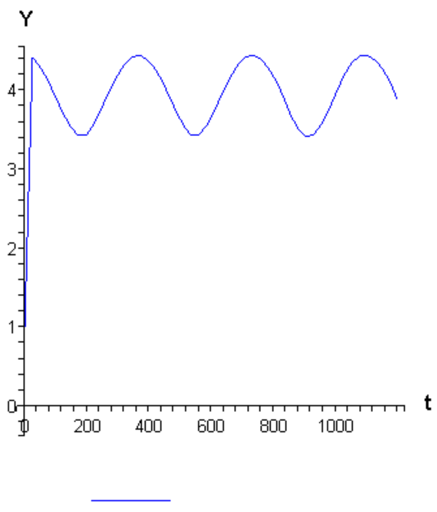
SOLUCIÓN DE UN P.V.I DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN POR MÉTODOS NUMÉRICOS

Valor inicial de la variable independiente: $t_0 = 0$
Valor final de la variable independiente: $t_n = 5$
Paso de integración h: $h = 0.2$
Valor inicial de la variable dependiente: $y_0 = 1$

Tabla 9. Resultados de salida de la solución numérica del problema con valor inicial de la ecuación (α). La figura 24[48], representa la gráfica de la ecuación.

t	$h = 0.2$
0.0000	1.0000
0.2000	1.5435
0.4000	2.1380
0.6000	2.7166
0.8000	3.2192
1.0000	3.6440
1.2000	3.9017
1.4000	4.0986
1.6000	4.2283
1.8000	4.3115
2.0000	4.3639
2.2000	4.3966
2.4000	4.4168
2.6000	4.4293
2.8000	4.4369
3.0000	4.4416
3.2000	4.4444
3.4000	4.4461
3.6000	4.4471
3.8000	4.4476
4.0000	4.4477
4.2000	4.4480
4.4000	4.4482
4.6000	4.4483
4.8000	4.4482
5.0000	4.4481

Figura 24



[48] La gráfica resultante no es muy fina, esto se debe a los errores que presenta el método numérico (tal vez porque el tamaño de paso h debe de ser más pequeño).

EJEMPLO 3.6.4. Para los valores de: $a = 3$; $b = \frac{2}{3}$; $A = 3$ y $\omega = \frac{2\pi}{365}$. La ecuación queda de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = 3y - \frac{2}{3}y^2 + 3\cos(\omega t) \qquad (\beta)$$

El tamaño de $h = 0.1$.

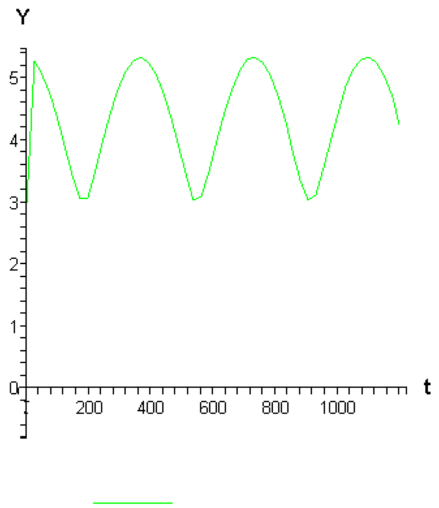
SOLUCIÓN DE UN P.V.I DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN POR MÉTODOS NUMÉRICOS

Valor inicial de la variable independiente: $t_0 = 0$
Valor final de la variable independiente: $t_n = 3$
Paso de integración h: $h = 0.1$
Valor inicial de la variable dependiente: $y_0 = 3$

Tabla 10. Resultados de salida de la solución numérica del problema con valor inicial de la ecuación (β). La figura 25[49], representa la gráfica de la ecuación.

t	$h = 0.1$
0.0000	3.0000
0.1000	3.5380
0.2000	4.0380
0.3000	4.4125
0.4000	4.6937
0.5000	4.8971
0.6000	5.0401
0.7000	5.1389
0.8000	5.2061
0.9000	5.2514
1.0000	5.2818
1.1000	5.3021
1.2000	5.3156
1.3000	5.3245
1.4000	5.3305
1.5000	5.3344
1.6000	5.3370
1.7000	5.3387
1.8000	5.3398
1.9000	5.3305
2.0000	5.3410
2.1000	5.3413
2.2000	5.3414
2.3000	5.3415
2.4000	5.3416
2.5000	5.3417

Figura 25



[49] La gráfica resultante no es muy fina, esto se debe a los errores que presenta el método numérico (tal vez porque el tamaño de paso h debe de ser más pequeño).

Capítulo 4

Aplicaciones de las Matemáticas a un Problema de Migración

4.1 UN MODELO REALIZADO CON MATRICES PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE MIGRACIÓN

Se definirá lo que se entiende por un determinante y se enunciarán algunas de sus propiedades, que serán utilizadas más adelante:

A cada matriz cuadrada $A=(a_{ij})$, para $i=1,2$ y $j=1,2$, a la que se le asigna un escalar particular que será denominado el determinante de la matriz *A*, el que será denotado con el símbolo:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Una tabla ordenada de 2×2 escalares situada entre dos líneas verticales, llamada determinante de orden 2.

La función determinante apareció por primera vez en el estudio de los sistemas de ecuaciones simultáneas. Se verá que es una herramienta indispensable en el estudio y obtención de éstas. La solución de un determinante de orden 2 se realiza de la siguiente forma:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Resolvamos un ejemplo numérico para entender éste concepto:

EJEMPLO 4.1. Hallar el valor del determinante, de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Calculando:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=(-2)(2)-(4)(3)=-4-12=-16 \qquad \Rightarrow \qquad \det(A)=-16$$

Por lo tanto:

$$\det(A)=-16$$

Como se utilizan estos conceptos matemáticos en la solución del problema a resolver, hay que realizar una pequeña discusión referente a sistemas de ecuaciones simultáneas. Esto para saber de antemano si un sistema de ecuaciones simultáneas tiene o no solución, si tiene una única solución o bien una infinidad de soluciones.

El estudio o discusión de los sistemas de ecuaciones se efectúa aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius. Este dice que con un sistema de ecuaciones simultáneas, pueden ocurrir dos cosas:

1. Que el sistema de ecuaciones sea un sistema compatible, es decir, que tenga solución.

2. Que el sistema de ecuaciones sea un sistema incompatible, es decir, que no tenga solución.

El primer caso puede dividirse en dos subcasos:

a) Que sea un sistema compatible y determinado, es decir, que tenga una única solución.

b) Que el sistema sea compatible e indeterminado, es decir, que tenga una infinidad de soluciones.

Se tiene la pregunta:

¿Como se comportará la migración de la población de la ciudad del Distrito Federal en un número de n años?

Para contestarnos esta interrogante, recordemos que la migración fue definida como los desplazamientos que la población presenta en el área en la que se ubica; donde a los individuos que salen se les llama emigración y a los que entran inmigración[50]. Por lo tanto, se tendrá la relación siguiente:

Migración = **Inmigración** + **Emigración**

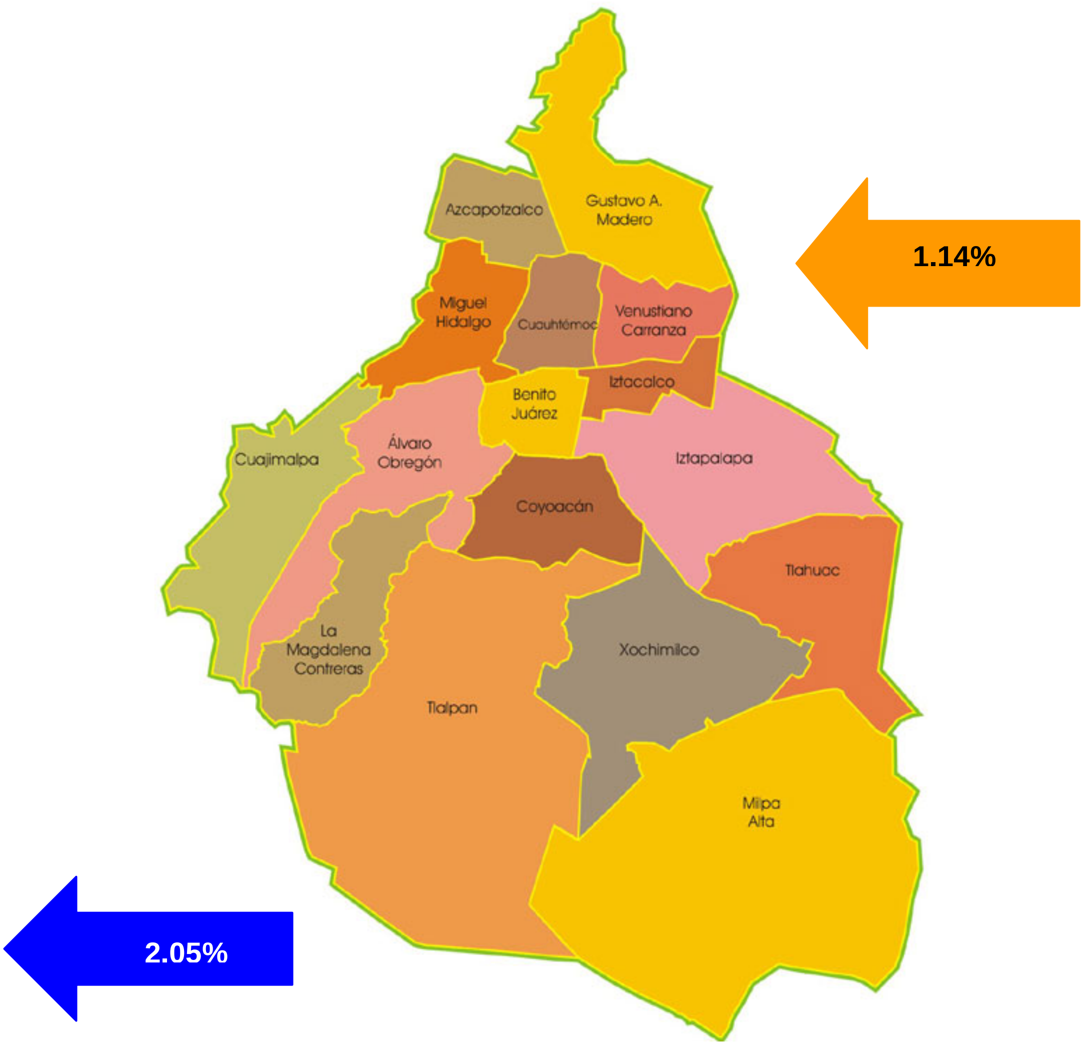
[50] Ver página 20 del capítulo 2.

De acuerdo a los datos emitidos por la **FONAPO**[51]:

- Población = 8 710 800 habitantes
- Emigrantes = 179 000 individuos
- Inmigrantes = 99 000 individuos

De acuerdo a esto, se tienen los siguientes porcentajes:

Emigrantes = 2.05% y de **Inmigrantes** = 1.14%.



Por consiguiente, se escriben las ecuaciones siguientes, una de las cuales será referente a la **inmigración** y la otra a la **emigración**:

Inmigrantes $x_{n+1} = x_n - 0.0205x_n + 0.0114y_n \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = 0.9795x_n + 0.0114y_n$

Emigrantes $y_{n+1} = y_n + 0.0205x_n - 0.0114y_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = 0.0205x_n + 0.9886y_n$

---

[51] **Fondo Nacional de Población**, http://www.dif.gob.mx/inegi/POBLACION%202004.pdf

Con estas dos últimas ecuaciones se puede formar el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x_{n+1} = 0.9795x_n + 0.0114y_n$$
$$y_{n+1} = 0.0205x_n + 0.9886y_n$$

El cual se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se necesita definir el siguiente concepto, el cual será utilizado en la solución del problema. La probabilidad de moverse en un periodo de tiempo, del **Estado** i al **Estado** j $(i, j = 1, 2)$. Se le llama, matriz de transición y será denotada con el símbolo:

$$P = \left[P_{ij}\right]$$

Enunciemos el siguiente problema, para ejemplificar este nuevo concepto:

EJEMPLO 4.2. Construir una matriz de transición para el siguiente problema. Un administrador de control de tráfico en el medio oeste de los Estados Unidos, clasifica a los días como despejados o bien nublados. Datos recabados, muestran que la probabilidad de que de un día despejado siga después un día nublado es de 0.6 (o bien del 60%), mientras que la probabilidad de que de un día despejado siga otro día despejado es de 0.9 (o bien del 90%).

Solución. Aunque pueden considerarse algunas otras clasificaciones, tales como: muy nublado, parcialmente asoleado, lluvioso, etc. Pero el administrador únicamente considera dos estados: despejado y nublado, y cada uno de los días a considerar únicamente pueden estar dentro de estos dos estados. Definamos entonces, arbitrariamente como sigue:

Estado 1 = despejado y **Estado 2** = nublado

La unidad de tiempo natural será de un día. Por lo tanto, se tendrá que dado: $p_{12} = 0.6$ se sigue que, $p_{22} = 0.4$, puesto que, después de un día nublado, el siguiente día puede ser un día nublado o bien un día despejado y la probabilidad de que uno de estos dos acontecimientos ocurra es de 1. Recíprocamente, dado $p_{11} = 0.9$, se sigue que, $p_{21} = 0.1$. Por lo tanto, la matriz de transición será:

$$\begin{array}{cc} & \textbf{despejado} \quad \textbf{nublado} & \\ P = & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textit{despejado} \\ \textit{nublado} \end{array} \end{array}$$

De acuerdo a esto último, la matriz del problema a resolver, es una matriz de transición, es decir:

$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{Inmigrantes} & \textbf{emigrantes} & \\
P = \left(\begin{array}{c} 0.9795 \\ 0.0205 \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} 0.0114 \\ 0.9886 \end{array} \right) & \begin{array}{c} \textit{inmigrantes} \\ \textit{emigrantes} \end{array}
\end{array}
$$

También, es importante el mencionar, que las potencias de una matriz de transición tienen las mismas propiedades a las de la matriz de transición dada: todos los elementos están entre 0 y 1, y en cualquier columna la suma de sus elementos es igual a 1.

Para la matriz de transición **P**, obtengamos la segunda y la tercera potencia, para éste fin utilizaremos el paquete de **MAPLE**:

>MatrixPower(A, 2);

$$
\begin{bmatrix} 0.9596539500000000088 & 0.0224363400000000025 \\ 0.0403460500000000014 & 0.9775636600000000056 \end{bmatrix}
$$

Es decir, la segunda potencia de la matriz **P** será:

$$
P^2 = \begin{pmatrix} 0.9596539500 & 0.0224363400 \\ 0.0403460500 & 0.9775636600 \end{pmatrix}
$$

Si calculamos nuevamente:

>MatrixPower(A, 3);

$$
\begin{bmatrix} 0.940440988995000171 & 0.033120620754000047 \\ 0.059559011005000024 & 0.966879379246000092 \end{bmatrix}
$$

Es decir, la tercera potencia de la matriz **P** será:

$$
P^3 = \begin{pmatrix} 0.9404409889 & 0.0331206207 \\ 0.0595590110 & 0.9668793792 \end{pmatrix}
$$

Con base en estos resultados, se tendrá:

El valor de $P_{11}^{(2)} = 0.9596$ es la probabilidad de que una persona inmigrante permanezca siendo inmigrante al final del segundo día; el valor de $P_{12}^{(2)} = 0.0224$ es la probabilidad de que una persona inmigrante cambie a ser emigrante al final del segundo día; el valor de $P_{21}^{(3)} = 0.0595$ es la probabilidad de que una persona inmigrante cambie a ser emigrante al final del tercer día y el valor de $P_{22}^{(3)} = 0.9669$ es la probabilidad de que una persona emigrante permanezca siendo emigrante al final del tercer día.

Si realizamos el cálculo de la potencia de la matriz de transición P^{1000} :

>MatrixPower(A, 1000);

$$\begin{bmatrix} 0.357366771159988384 & 0.357366771159988160 \\ 0.642633228840329807 & 0.642633228840329474 \end{bmatrix}$$

De donde se obtendrá la matriz:

$$P^{1000} = \begin{pmatrix} 0.3574 & 0.3574 \\ 0.6426 & 0.6426 \end{pmatrix}$$

Claramente se puede observar que:

$$P_{11}^{(1000)} = P_{12}^{(1000)} = 0.3574$$

Es decir, la probabilidad de que una persona inmigrante permanezca siendo inmigrante al final de 1000 días es la misma de que una persona inmigrante cambie a ser emigrante al final de 1000 días.

Definamos otro objeto matemático que será utilizado en el desarrollo de la solución del problema:

Un **VECTOR DE DISTRIBUCIÓN** para un N-estado de una cadena de Markov en un tiempo dado, es una matriz columna cuyo componente i, es la probabilidad de que un objeto cambie a un estado j en el tiempo. En otras palabras, un vector de distribución **d** para un N-estado de una cadena de Markov en un tiempo dado, es una matriz columna de dimensión N, teniendo como componentes a las probabilidades de los estados, que un objeto tiene en cada uno de los estados respectivos en el tiempo, y en el sistema considerado.

Enunciemos otro resultado importante. Si **P** es una matriz de transición para una cadena de Markov, entonces:

$$d^{(k)} = P^k \cdot d^{(0)} = P \cdot d^{(k-1)}$$

donde: P^k denotará a la potencia **k** de la matriz **P**.

Por ejemplo, para la matriz de transición **P**, considérese el siguiente vector de distribución, y si calculamos:

$$d^{(1)} = P\,d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0114 \\ 0.9886 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0114 \\ 0.9886 \end{pmatrix}$$

$$d^{(2)} = P^2\,d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9597 & 0.0224 \\ 0.0403 & 0.9776 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0224 \\ 0.9776 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0224 \\ 0.9776 \end{pmatrix}$$

$$d^{(1000)} = P^{1000} \cdot d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.3574 & 0.3574 \\ 0.6426 & 0.6426 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3574 \\ 0.6426 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d^{(1000)} = \begin{pmatrix} 0.3574 \\ 0.6426 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de este último cálculo, se tendrá que las probabilidades de tener a una persona emigrante en 1 periodo de tiempo, 2 periodos de tiempo y 1000 periodos de tiempo, son respectivamente: 0.9886, 0.9776 y de 0.6426.

Si continuamos calculando algunas otras potencias de la matriz **P**, se obtendrá:

>MatrixPower(A, 100000);

$$\begin{bmatrix} 0.357366771161124196 & 0.357366771161123642 \\ 0.642633228842371174 & 0.642633228842370175 \end{bmatrix}$$

>MatrixPower(A, 10000000);

$$\begin{bmatrix} 0.357366771266670712 & 0.357366771266670546 \\ 0.642633229032171016 & 0.642633229032170572 \end{bmatrix}$$

Si ahora, nos cuestionamos:

¿Cuánto valdrá el límite de la matriz de transición **P**, si **n** tiende al infinito?:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0.3574 & 0.3574 \\ 0.6426 & 0.6426 \end{pmatrix}^n = ?$$

Para contestar esta interrogante, se requerirán algunos resultados más, y este resultado ayudará a la solución del problema principal.

- Una matriz de transición es regular si una de sus potencias tiene únicamente elementos positivos.

- Una matriz de transición para una cadena de Markov finita es regular si y sólo si una de sus potencias contiene únicamente elementos positivos. Las potencias de una matriz regular convergen al límite de una matriz **L**.

Será necesario también enunciar el siguiente resultado:

Si una matriz **P** de transición de $n \times n$ es regular, entonces las sucesiones de las potencias de la matriz **P,** convergen a una matriz límite **L,** cuyos componentes de las columnas que conforman a la matriz, son positivos y su suma es igual a 1.

Por otro lado, se define el límite del vector de transición de estados para una cadena de Markov de N-estados como:

$$d^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} d^n$$

si este límite existe.

Si $d^{(\infty)}$ existe, entonces la matriz **P** es regular. Entonces, los componentes de $d^{(\infty)}$ son las probabilidades límite, de que un objeto en el sistema en cada uno de los estados respectivos después de haber considerado un gran número de periodos de tiempo.

Si se realizan algunas operaciones sobre límites se puede obtener lo siguiente:

$$d^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} d^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left[P^n \cdot d^{(0)}\right]$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} P^n\right] \cdot d^{(0)} = L \cdot d^{(0)} \qquad \Rightarrow \qquad d^{(\infty)} = L \cdot d^{(0)}$$

Por lo tanto:

$$d^{(\infty)} = L \cdot d^{(0)}$$

A este último resultado se le puede agregar:

El vector de distribución de los estados límite para una matriz **P** regular de transición, es un vector cuya suma de sus componentes es igual a 1.

Con este resultado, resolvamos el problema, el cual lo podemos escribir de la siguiente forma:

PROBLEMA 4.1. Hallar el límite del vector de distribución de estados para la cadena de Markov, descrita en el problema.

Solución. Como la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{pmatrix}$$

es regular, su vector de distribución, tiene la forma:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como se desea resolver la ecuación, dada en forma matricial: $P\,\overline{X} = \overline{X}$. Reescribamos esta igualdad como:

$$P\,\overline{X} - \overline{X} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (P - I)\,\overline{X} = 0$$

La cual es equivalentemente, al sistema:

$$\left[\begin{pmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{(m)} \quad \begin{cases} -0.0205x + 0.0114y = 0 \\ \;\;\,0.0205x - 0.0114y = 0 \end{cases}$$

Veamos si este sistema tiene solución. Para tal fin calculemos el valor del determinante correspondiente a la matriz de transición P. Si calculamos:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{vmatrix} = (0.9795)(0.9886) - (0.0205)(0.0114)$$

$$= 0.9683337 - 0.0002337 = 0.9681$$

Por lo tanto, como: $\det(P) = 0.9681 \neq 0$, el sistema (**m**) tiene solución. Si despejamos la x de la ecuación (**1**), se obtendrá:

$$x = \frac{0.0114}{0.0205}y = \frac{1.14\times10^{-3}}{2.05\times10^{-3}}y = \frac{114}{205}y \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{114}{205}y \qquad (\mathbf{2})$$

De acuerdo a esto:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \frac{114}{205}y \\ y \end{bmatrix}$$

Y como se sabe que la suma de los componentes de $\bar{X}$ suman 1, se tendrá:

$$\frac{114}{205}y + y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{319}{205}y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{205}{319} \qquad (\mathbf{3})$$

Sustituyendo (**3**) en (**2**) se obtendrá:

$$x = \frac{114}{205}y \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{114}{205}\frac{205}{319} = \frac{114}{319} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{114}{319}$$

Por consiguiente, el vector resultante es el límite del vector de los estados de distribución, es decir:

$$d^{(\infty)} = \begin{bmatrix} \frac{114}{319} \\ \frac{205}{319} \end{bmatrix}$$

Finalmente, con esto se puede escribir la matriz límite buscada:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{114}{319} & \frac{114}{319} \\ \frac{205}{319} & \frac{205}{319} \end{pmatrix}$$

Esto último contesta la pregunta:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 0.9795 & 0.0114 \\ 0.0205 & 0.9886 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{114}{319} & \frac{114}{319} \\ \frac{205}{319} & \frac{205}{319} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{114}{319} & \frac{114}{319} \\ \frac{205}{319} & \frac{205}{319} \end{pmatrix}$$

Este último resultado permitirá saber cómo se va a comportar la población de la ciudad del Distrito Federal, es decir, con el transcurso de un número k de periodos de tiempo, la migración de la población del Distrito Federal se comportará de la siguiente forma:

- El 35.74% de la migración de la población será **inmigrante**.
- El 64.26% de la migración de la población será **emigrante**.

Esto resuelve finalmente el problema.

Capítulo 5

Evaluación del Material Didáctico

En el presente capítulo será realizada una evaluación del material que se está presentado como propuesta de tesis, para llegar a ésta, serán enunciadas algunas definiciones para realizar una evaluación más acertada del material propuesto. El primer punto será:

5.1 EL SIGNIFICADO DE LA EVALUACIÓN

El término evaluación en nuestro contexto tiene un significado muy amplio, ya que lo usamos tanto en un sentido específico, como cuando se evalúa el aprendizaje del alumno, o en un sentido más amplio, como cuando se evalúa un programa de estudio, un curso o un currículo.

Con frecuencia los docentes utilizamos la información derivada de la evaluación de los estudiantes para tomar decisiones curriculares importantes, reorganizar la clase, destacar o representar temas o bien el de cambiar el ritmo de la instrucción de la clase. La evaluación será definida como:

“El proceso de evaluación es esencialmente el proceso de determinar a qué magnitud los objetivos educativos están siendo realmente logrados por el programa de instrucción o de estudio”[52].

Por otro lado, la evaluación no es un fin en sí mismo, sino que es un proceso que facilita la toma de decisiones para proveer información en las siguientes preguntas fundamentales:

¿Cómo lo estamos haciendo? y ¿Cómo podemos mejorarlo?

En suma, el papel de la evaluación desde ésta perspectiva será proporcionar una retroalimentación significativa para mejorar el aprendizaje del alumno, las prácticas de enseñanza y las diferentes opciones educativas.

Lo que ahora sabemos del aprendizaje indica que la evaluación y el aprendizaje están íntimamente ligados. La importancia de cambiar las prácticas de evaluación como éstas es permitir que el proceso de enseñanza-aprendizaje se torne más claro, cuando uno puede percatarse de que los alumnos sólo aprenden aquello sobre lo cual serán examinados en alguna de las asignaturas del plan de estudios del bachillerato.

En resumen, no existe forma correcta de evaluar a los alumnos. La tendencia en éste trabajo de tesis es hacia la evaluación del desempeño por parte del educando. No se pretende con esto, que se rechace el uso de prácticas tradicionales, como el empleo de preguntas abiertas, pero sí se puede afirmar que la evaluación del desempeño ofrece formas más equilibradas para evaluar el pensamiento complejo y la resolución

---

[52] Madaus, G.F. y T. Kellaghan, “Curriculum Evaluation and assessment” en P.W. Jackson (ed), Handbook on Curriculum, Macmillan, Nueva York, 1992, pp. 106.

de problemas por parte del alumno, porque éstos están enraizados en problemas reales y son potencialmente más motivantes y reforzadores para los estudiantes. Sin embargo, mientras la evaluación del desempeño nos indica qué tan bien y qué tan profundamente los alumnos pueden aplicar sus conocimientos, las pruebas de evaluación tradicional quizá sean eficientes para determinar qué tan bien han adquirido los alumnos los hechos y los conceptos básicos.

La evaluación tradicional ayuda a contestar la pregunta: ¿conoces esto?, y la evaluación del desempeño ayuda a contestar la pregunta: ¿qué tan bien puedes usar lo que conoces?. Éstas dos formas de evaluar no compiten entre sí, el reto es en sí, el de buscar el balance perfecto entre ellas. Dicho balance es presentado en la figura siguiente[53]:

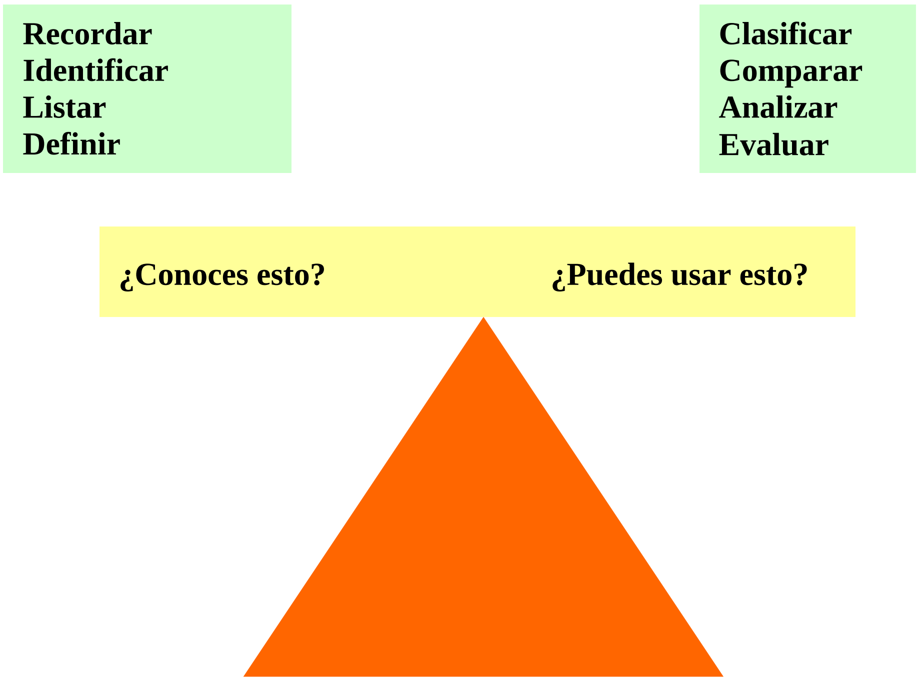


Figura 26. ¿Cuál es el balance perfecto?

5.2 HACIA UNA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA EVALUACIÓN ALTERNATIVA

Los términos evaluación alternativa, evaluación auténtica y evaluación del desempeño son discutidos en la reforma de la evaluación que se está llevando a cabo. Este tipo de evaluación demanda del alumno un logro activo de tareas complejas y significativas, usando conocimientos previos y habilidades relevantes para resolver problemas reales y auténticos. A continuación serán presentadas las siguientes definiciones:

- **Evaluación alternativa**. Se aplica a cualquier evaluación que difiera de los exámenes de opción múltiple, programados para determinado tiempo y enfocados a medir el aprendizaje en una sola ocasión; es decir, una evaluación diferente a la mayoría de las evaluaciones convencionales y típicas del salón de clases de hoy.

---

[53] Fuente: Educators in Connecticu´s Pomperaug Regional School District (1996)

- **Evaluación auténtica**. Se sustenta en que las evaluaciones deberán comprometer a los estudiantes a aplicar conocimiento y habilidades de la misma manera que en el "mundo real", es decir fuera de la escuela. Las características de la evaluación auténtica son:

    - Es abierta relativamente, en lugar de problemas de una respuesta correcta.
    - No es solucionable por métodos rutinarios.
    - Requieres una comprensión sustantiva del significado (en el caso de la aritmética, del álgebra y de otros conocimientos matemáticos).
    - Demanda considerablemente más tiempo que los problemas convencionales.
    - Hace un llamado para generar un número de ideas diversas sobre la materia o bien sobre las materias, si el problema es del tipo interdisciplinario.
    - Con frecuencia involucra la escritura, así como manipulaciones formales tales como los cálculos (aritméticos, algebraicos, etc.).
    - Generalmente tiene un producto completo: un ensayo, un plan o un problema.

- **Evaluación del desempeño.** Es un término amplio que comprende una actividad de evaluación en la cual los educandos construyen respuestas, crean productos o llevan a cabo demostraciones para proveer evidencia de su conocimiento y habilidades.[54]

En suma, vemos que estas definiciones comparten elementos opuestos a la evaluación tradicional y que por ello, forman parte de una reforma de la evaluación llamada: la evaluación alternativa, en la cual existe la esperanza de que ésta capte mejor los productos educativos significativos y consistentes. Las características de éste tipo de evaluación son:

- Solicite a los estudiantes que ejecuten, creen, produzcan o realicen algo.
- Estimule el pensamiento de orden superior y la solución de problemas.
- Use tareas que presenten actividades instruccionales significativas.
- Promueva aplicaciones al mundo real.
- Gente, no maquinas, hacen la evaluación, usando juicios humanos.
- Se requiere de nuevos argumentos para el maestro en la instrucción y en la evaluación.

Ya definidos los elementos que serán utilizados para evaluar el material didáctico desarrollado en la presente tesis, se comenzará con la evaluación del material didáctico propuesto:

---

[54] González Capetillo Olga, Flores Fahara Manuel. Enfoques Innovadores para el diseño de un Curso, Edit. Trillas, México, 2003.

5.3 LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA PRESENTACIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO EN EL AULA

En el material didáctico propuesto, se intentará explicar que tomando como referencia un problema del tipo interdisciplinario, el alumno pueda unificar su conocimiento, y que a partir de una idea central de un tema o bien de una disciplina pueda explicar algunas nociones que serán abordadas en el desarrollo de la solución del problema expuesto en el salón de clase. Además, las ideas centrales en la solución del problema, argumentarán algunas otras más, de distintas disciplinas (Biología, Historia, Sociología, Geografía y Matemáticas).

Que además, el educando vea que las matemáticas le sirven para entender el entorno donde vive, y que no necesariamente las utilizadas para resolver algunos problemas que implican su vida diaria son excesivamente complicadas, sino que muchas veces son matemáticas sencillas de entender y que si existen algunas ideas centrales en la solución de los problemas, algunas veces no es tan necesario que entiendan la esencia de los conceptos implicados en tales soluciones.

Es importante mencionar que los problemas que serán presentados en la presente tesis, no serán problemas triviales, tales como la solución de algunos vistos en el bachillerato, por ejemplo los de máximos y mínimos referentes a la derivada o bien del cálculo de integrales.

La estrategia que se utilizó, fue la siguiente:

Conexiones con el mundo real

El aprendizaje es más significativo cuando se establecen conexiones con el contexto dentro del cual los alumnos viven. Para esto el docente deberá:

1. Colocar a los estudiantes en la posibilidad de abordar problemas reales.

2. Que los estudiantes utilicen sus experiencias personales para explicar su conocimiento adquirido a lo largo del tiempo que ha asistido a la escuela.

En el desarrollo de las sesiones que les serán expuestas a los educandos, se les hará mención de la conexión existente entre los problemas a desarrollar en el salón de clase con su vida cotidiana, desde el punto de vista: geográfico, biológico y sociológico. Así como la conexión del problema con la Historia y con las Matemáticas. Esto con el fin de que se percaten de que se estará resolviendo un problema del tipo interdisciplinario.

Como sugerencia, debe existir el diálogo. El docente tratará que en las sesiones expuestas a los educandos se presenten los siguientes eventos:

1. Que exista una interacción considerable acerca de las ideas centrales de un tema o tópico.

2. Compartir las ideas entre el docente y los educandos.

3. El diálogo se construye coherentemente sobre ideas de los participantes para promover una comprensión colectiva del tema a desarrollar.

No con esto, se está afirmando que sea la mejor manera de exponer el material didáctico de la presente tesis, si no que es una forma muy particular de presentarlo en el aula.

En las clases, que les serán impartidas a los alumnos, el docente generará una interacción entre los integrantes del grupo, esto con el fin de que se genere un intercambio de ideas entre los alumnos y el docente sobre las ideas centrales a discutir. Es decir, que con ello exista la participación grupal y que se llegue con esto a la comprensión colectiva del grupo sobre las ideas y conceptos a exponer en el desarrollo de la solución del problema expuesto en el salón de clase.
Por otro lado, el docente tratará de que los educandos, con menos habilidades y con menos destreza en la asignatura de Matemáticas, participen en la clase y que además proporcionen sus ideas sobre los temas a discutir, ya que en muchas ocasiones su participación es nula por la falta de confianza de este tipo de alumnos en algunas asignaturas que le son impartidas en el bachillerato. Además, es de esperarse, que sus compañeros de clase estimulen sus esfuerzos y que valoren sus contribuciones en el desarrollo del problema en cuestión.

¿Qué se entenderá por un aprendizaje constructivista, en la presentación del material propuesto en el aula?

Cuando comprendemos algo, no sólo adquirimos cierta información, sino que nos permite hacer ciertas cosas con ese conocimiento. Esas cosas que podemos hacer y que muestran comprensión son llamadas desempeños de la comprensión.

Por otro lado, se tendrá contemplado un número de “indicadores” de comprensión, cuando los estudiantes puedan realizar lo siguiente:

1. **Explicarlo**. Cuando se le cuestione al educando, cuales fueron las ideas centrales de la solución de los problemas a resolver, pueda realizar comentarios acerca de ellos y a que disciplina pertenecen.

   Que utilicé herramientas de su curso de matemáticas para explicar cuales son las partes importantes de los modelos matemáticos que se utilizarán en la solución de los problemas expuestos en el salón de clase, tales como el uso de los métodos de derivación y los métodos de solución de integrales para los problemas de explosión demográfica. Así como el de la solución de sistemas de ecuaciones para el problema de migración. Es importante el mencionar, que el educando debe de percatarse de que estos problemas no son triviales y que además están presentes en su entorno social y político.

2. **Predecirlo.** Que el educando con ayuda de las herramientas expuestas en el desarrollo del problema pueda hacer predicciones para otro tipo de situaciones, es decir, de problemas en donde estén involucradas las ideas centrales del problema en cuestión.

   Que el alumno también pueda darse cuenta de que los modelos matemáticos no predicen más allá de lo que pueden predecir, es decir que siempre tienen sus limitaciones, aunque sean muy precisos. Por ejemplo, los problemas de hambruna están asociados a factores sociales, políticos o bien naturales, (guerras civiles, problemas de eventos naturales, etc.) los cuales no están contemplados en el modelo.

3. **Aplicarlo o adaptarlo a nuevas situaciones**. Que el alumno pueda adaptar los modelos desarrollados en la presente tesis a otras situaciones, donde cambien las condiciones de las variables que intervienen en el problema a resolver, así como también la disciplina en la que sea expuesto el contexto del problema.

   En primer lugar, se plantea el modelo de crecimiento exponencial de Malthus, después se adopta el modelo para plantearse otro que implica el enfriamiento de un cuerpo (cadáver), aquí el educando al resolver éste, puede percatarse que con este modelo pueden realizarse mejores juicios sobre asesinatos de individuos, los cuales pueden ocurrir en su comunidad. También puede percibir sin problema alguno que la solución de éstos, no implican matemáticas complicadas; que únicamente son aquellas herramientas que le fueron proporcionadas en las asignaturas de matemáticas impartidas en bachillerato.

   Finalmente, se realizará una adaptación del modelo, para determinar el enfriamiento de un líquido, en la solución de este problema el estudiante puede realizar la comparación de su solución, utilizando un método experimental y por otro lado, el análisis matemático, llegando por los dos caminos al mismo resultado del problema.

   Es importante mencionar que el educando es copartícipe en las resoluciones de los problemas: utilizando las herramientas adquiridas en las asignaturas de Física, Química y de Matemáticas, así como siguiendo las indicaciones propuestas por el docente.

4. **Verificar, defender, justificar o criticar**. Que el estudiante con ayuda de herramientas (calculadora, computadora, etc.) tenga los argumentos necesarios para poder verificar los resultados obtenidos en la solución del problema, así como el poder establecer una crítica constructiva de los resultados obtenidos.

   Que al resolver el problema de crecimiento de poblaciones o bien los demás problemas que aparecen el la presente tesis, el alumno pueda tener los argumentos para defender su solución obtenida frente a grupo, es decir, que tenga en claro cuales son las ideas principales de cada uno de ellos y así con ello poder argumentar la solución.

   Finalmente, que el estudiante reflexione de que el modelo de Malthus tiene deficiencias para tiempos muy grandes y que además no está considerando factores que influyan en el crecimiento de las poblaciones, pero que se de cuenta de que el modelo logístico de Verlusht lo complementa, ya que éste, predice mejor, tiene cierta coherencia lógica y es mucho más preciso que el de Malthus; pero que también tiene fallas, como el hecho de que no considera las mejoras existentes en lo referente a problemas de salud, así como los descubrimientos tecnológicos, los cuales le permiten al ser humano tener mejores expectativas de vida, como por ejemplo las condiciones referentes a las atenciones médicas y sociales en que vive el ciudadano común en los Estados Unidos de América. Así, del hecho de que perciba que los modelos tienen sus limitaciones aunque sean muy precisos.

5. **Hacer conexiones con otras ideas y hechos**. Que el educando pueda realizar conexiones de las ideas centrales de las soluciones de los problemas con otras ideas de disciplinas distintas a las matemáticas, así como el poder realizar conexiones con hechos del entorno social al que pertenece. Aquí

puede partir el estudiante del problema del crecimiento de poblaciones y que realice la conexión entre éste, con el problema de la determinación del momento de muerte, a su vez con el problema del enfriamiento del líquido.

Por otro lado, también que al analizar el problema de crecimiento de poblaciones, reflexione de que el fenómeno de las migraciones influye en gran medida con el crecimiento de la población de ciertas comunidades, así como el de ciertas ciudades y de algunos países del mundo, y que con ello pueda realizar la conexión de este problema con el de migración, expuesto en el capítulo 4 de la tesis.

6. **Hacer juicios precisos y calificados**. Que el alumno tenga los argumentos necesarios para poder realizar algunas reflexiones sobre las ideas centrales que serán expuestas en el desarrollo de la presentación de los problemas en el aula, así como el poder dar una evaluación a los conocimientos adquiridos o reafirmados por él.

En la presentación del material didáctico que conforma a la presente tesis, se tratará de llegar a los anteriores indicadores, esto con el fin de ver si los alumnos están comprendiendo los conceptos e ideas centrales que serán abordados en la exposición de los problemas que serán desarrollados en el salón de clase.

Así mismo, se proponen las siguientes preguntas clave, para comprobar la comprensión de los alumnos en los conceptos que serán vistos en el desarrollo de la presentación de los problemas en clase:

- ¿Qué vamos hacer con los resultados obtenidos en los modelos expuestos en el salón de clase?
- ¿Cuáles son las causas o razones que influyen en el crecimiento o decrecimiento de la población de ciertas ciudades o países?
- ¿Desde qué punto de vista vamos a analizar el crecimiento o decrecimiento de la población que existe en la comunidad en donde se vive?
- ¿Cuáles son otros ejemplos de crecimiento o de decrecimiento que se pueden analizar con las ideas centrales que se tengan respecto a estos problemas?
- ¿Cómo deberán ser comprendidos estos modelos que se están presentando en el salón de clase?
- ¿Qué significado tendrá que una población esté creciendo o decreciendo desde un punto de vista social, político, demográfico, biológico, etc.?

Los anteriores "indicadores de comprensión" no son algo definitivo, pero pueden servir como un punto de arranque o de referencia, para nuestro trabajo en cuestión[55] .

Por otro lado, estos "indicadores de comprensión", serán utilizados en la presentación de una parte del material didáctico que conforma a la presente tesis.

---

[55] González Capetillo Olga, Flores Fahara Manuel. Enfoques Innovadores para el diseño de un Curso, Edit., Trillas, México, 2003.

Lo expuesto anteriormente puede ser considerado como un aprendizaje constructivista, ya que el educando resuelve conflictos cognoscitivos interiores, los cuales con frecuencia se hacen patentes a través de su experiencia concreta, y además se apoya en el diálogo colaborativo y en la reflexión dentro del salón de clase.

5.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

RESULTADOS

El presente trabajo muestra los resultados arrojados sobre la evaluación del material didáctico que es presentado en el desarrollo de la tesis titulada:

UN ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO

Los temas que fueron expuestos o presentados frente a un grupo del sexto año del bachillerato, de la asignatura de Matemáticas VI, área 1, del Plantel Número 6 “Antonio Caso”, de la Escuela Nacional Preparatoria, fueron:

2.1 Aplicaciones de las matemáticas a la teoría de poblaciones.

2.2 El modelo exponencial de Malthus.

2.3 Solución del problema (Una proyección de población).

3.1 El modelo de Verlhust.

3.2 Una proyección de población para la República Mexicana y otra para el Distrito Federal.

3.3 El pronóstico límite y el punto de inflexión de una proyección de población para el Distrito Federal.

Los temas enunciados fueron presentados en dos sesiones: de dos y media hora cada una.

La exposición de los temas anteriores fue presentada en Power Point, y se expuso en el salón de clases, se utilizó como apoyo el siguiente material didáctico:

- Pizarrón y gises de colores
- Lap Top y cañón
- Pantalla
- Cámara de video
- Copias fotostáticas

Las planeaciones de las clases que les fueron impartidas a los alumnos en los dos días que duraron estas, son:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

MATEMÁTICAS

PROFESOR: Roberto Rodríguez Pérez

MATERIA: Matemáticas VI (área I) **Capítulo 2** La Ley de Malthus

TEMA 2.1 Aplicaciones de las Matemáticas a la Teoría de Poblaciones **2.2 El Modelo Exponencial de Malthus** **2.3 Solución del Problema (Una proyección de Población)**	**CLASE: 1** **FECHA: 15/11/05**

OBJETIVO DEL TEMA: Que el alumno perciba el problema tan grande y complejo que existe en cuento a la explosión demográfica a nivel mundial, y que aplique las herramientas matemáticas que le han sido proporcionadas en la asignatura de Matemáticas VI, en la resolución de los problemas que serán expuestos en el salón de clase. Y que además, realice una vinculación de las Matemáticas con otras disciplinas (Historia, Geografía, Biología, Sociología y la Política).

OBJETIVO DEL SUBTEMA: El alumno recordará algunos conceptos referentes a las Matemáticas, Historia, Geografía, Sociología y Política. Así, como algunas fórmulas vistas en sus cursos de Matemáticas cursadas anteriormente.

APRENDIZAJES A LOGRAR:	**CONOCIMIENTOS PREVIOS:**
✓ Reafirmar conceptos ya vistos anteriormente por el alumno. ✓ Solución de problemas que implican la interrelación entre las Matemáticas y otras disciplinas.	✓ Algunas nociones básicas de Matemáticas, Historia, Geografía, Sociología, Biología y Política.

A C T I V I D A D E S

A P E R T U R A

PRESENTACION DE ACTIVIDADES Proporcionar a los alumnos; el orden del día, los objetivos, y los aprendizajes a lograr. **Orden del día:** 1. Presentación. 2. Explosión demográfica. 3. Discusión sobre explosión demográfica. 4. Elementos que conforman una población. 5. Discusión sobre los elementos que constituyen una población. 6. El modelo exponencial de Malthus. 7. Discusión sobre el modelo exponencial de Malthus. 8. Solución del Problema. 9. Tarea (Investigar sobre tasas de crecimiento de los estados de la Republica Mexicana).	**TECNICA:** Exposición, discusión grupal y preguntas dirigidas individuales **RECURSOS:** Pizarrón y gises de colores Lap Top y cañón Pantalla Cámara de video Copias fotostáticas **OBSERVACIONES:**
1. Presentación. ***Propósito de la actividad***: Romper con el hielo y que el alumno tenga un primer acercamiento con el profesor que le impartirá la clase durante una semana del curso de la asignatura de Matemáticas VI.	***TÉCNICA:*** Exposición **RECURSOS:** Pizarrón y gises de colores

D E S A R O L L O

2. El profesor a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre el problema de la explosión demográfica.

Propósito de la actividad: Que el alumno se dé cuenta del problema tan complejo que es el de la explosión demográfica, desde el punto de vista social, político y económico.

3. El profesor a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre cuales son los elementos que constituyen una población.

Propósito de la actividad: Que el alumno recuerde cuáles son los elementos que constituyen a una población, así como también se hagan conexiones con otros conceptos que serán utilizados en la resolución del problema.

- ✓ El profesor entregará copias sobre un artículo referente el problema existente a nivel mundial sobre la explosión demográfica emitido por la Organización de las Naciones Unidas (**ONU)**.

4. El profesor a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre algunos conceptos históricos de finales del Siglo XVII y principios del XVIII de la Francia de Roberth Malthus, esto con el fin de que el alumno se cuestione el porque el Modelo de Malthus fue aceptado en aquella época.

Propósito de la actividad: Que al ir generando la discusión grupal sobre el tema, el alumno vaya relacionando las disciplinas de: Historia, Geografía, Sociología y Política con las Matemáticas.

- ✓ El profesor resolverá las posibles dudas que existan en las preguntas que les serán hechas a los alumnos. Generando con ello una discusión grupal y que además se de la participación individual por parte del educando.

5. El profesor resolverá la ecuación diferencial de la **Ley de Malthus de Crecimiento de Población**.

Propósito de la actividad: Que al ir realizando la solución de la ecuación diferencial en el pizarrón el docente, cuestionará al educando sobre las nociones que serán utilizadas en tal solución. Esto generará la retroalimentación de los conceptos ya vistos anteriormente por el alumno, y que se resuelvan las dudas que el educando pueda tener en esos conceptos y de algunos nuevos expuestos en el salón de clase.

6. El profesor planteará un problema sobre una proyección de población de la República Mexicana y a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre los pasos a seguir para llegar a la solución del problema propuesto.

- ✓ El profesor generará una discusión grupal para que sean resueltas las posibles dudas que puedan tener los estudiantes en la solución del problema propuesto.

TÉCNICA:

Exposición
Grupal
Lluvia de ideas
Preguntas dirigidas

RECURSOS:

Pizarrón y gises de colores
Lap Top y cañón
Pantalla
Cámara de video

MATERIALES

Copias sobre un artículo sobre explosión demográfica emitido por la **ONU**

OBSERVACIONES:

Pude percatarme que los alumnos no tuvieron ninguna dificultad al saltar de una disciplina a otra. Aunque, es de mencionarse que al pasar a la parte de la solución de la ecuación diferencial, al inicio de ello, se pusieron un poco nerviosos, pero después de poco tiempo llego la calma a ellos, es decir se tuvieron confianza en ellos mismos para ser participes de la solución de tal ecuación.

C I E R R E

SINTESIS: **7. Resumen** ***Propósito de la actividad****:* Que el alumno consolide la comprensión de que existen problemas, los cuales se tienen que resolver utilizando información de diferentes disciplinas, en éste caso serán de: Sociología, Biología, Geografía, Historia, Matemáticas y de Política. A problemas de éste tipo se les conoce como problemas interdisciplinarios. ✓ El profesor realizará, preguntas dirigidas a los educandos, sobre cuáles fueron los pasos a seguir para llegar a la solución del problema a resolver en el salón de clase.	***TÉCNICA:*** Exposición Interrogatorio Lluvia de ideas **RECURSOS:** Pizarrón y gises de colores Lap Top y cañón Pantalla Cámara de video
ACTIVIDADES EXTRACLASE **8.TAREA** ***Propósito de la actividad****:* Que el alumno sin la ayuda del profesor investigue los conceptos que se van a utilizar en la clase siguiente. ✓ El educando como actividad extraclase, investigará en distintas fuentes, las tasas de crecimiento de varios estados de la República Mexicana. ✓ Que el alumno obtenga una proyección de población del estado de Sonora con los datos obtenidos de la página del **INEGI (**Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática).	***TÉCNICA:*** Exposición **RECURSOS:** Bibliografía proporcionada por el profesor

COMENTARIOS Y NOTAS DEL PROFESOR:

Las sesiones fueron de 2.5 horas cada una, es decir en total 5 horas clase. También, es de mencionarse que los cuestionarios resueltos por los alumnos, fueron entregados al profesor que me facilitó el grupo para poder presentar el material didáctico antes mencionado.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

MATEMÁTICAS

PROFESOR: Roberto Rodríguez Pérez.

MATERIA: Matemáticas VI (área I)

Capítulo 3 La Ley Logística del Crecimiento de una Población

TEMAS: **3.1 El Modelo de Verlhust** **3.2 Una Proyección de Población para la República Mexicana y para el Distrito Federal.** **3.3 El Pronóstico Límite y el Punto de Inflexión de una Proyección para el Distrito Federal.**	**CLASE**: **2** **FECHA: 17/11/05**

OBJETIVO DEL SUBTEMA: Que el alumno adquiera estrategias de aprendizaje para poder resolver un problema de la vida cotidiana, utilizando información de varias disciplinas.

APRENDIZAJES A LOGRAR:	**CONOCIMIENTOS PREVIOS:**
✓ Reafirmar conceptos ya vistos anteriormente por el alumno. ✓ Solución de problemas que implican la interrelación entre las matemáticas y otras disciplinas.	✓ El haber leído las notas que se les dejó la clase anterior. ✓ El haber resuelto la tarea que se dejó terminar como actividad extraclase. ✓ Conocimientos básicos sobre las disciplinas: Sociología, Geografía, Historia y Matemáticas.

A C T I V I D A D E S

A P E R T U R A

PRESENTACION DE ACTIVIDADES

Proporcionar a los alumnos; el orden del día, los objetivos, y los aprendizajes a lograr.

Orden del día:

1. Retroalimentación.
2. El Modelo de Verlhust.
3. Una Proyección de Población para la Republica Mexicana y para el Distrito Federal.
4. El Pronóstico Límite y el Punto de Inflexión de una Proyección para el Distrito Federal.
5. Discusión grupal sobre los resultados obtenidos en clase.
6. Tarea (Cuestionarios sobre lo expuesto en las dos clases que les fueron impartidas).

TECNICA:

Exposición
Lluvia de ideas
Preguntas dirigidas

RECURSOS:

Pizarrón y gises de colores
Lap Top y cañón
Pantalla
Cámara de video
Copias fotostáticas

OBSERVACIONES:

1. Retroalimentación:

Propósito de la actividad: Revisión del problema extraclase, así como los conceptos que se dejaron investigar.

- ✓ Los educandos expondrán sus dudas o dificultades que hayan tenido al realizar las actividades señaladas en las tareas.
- ✓ El profesor disipará las dudas que tengan los alumnos y comentará la solución de la tarea a resolver por el educando.
- ✓ El profesor utilizando la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre los conceptos que se dejaron investigar como actividad extraclase.

TÉCNICA:
Exposición
Lluvia de ideas

RECURSOS:
Pizarrón y gises de colores
Lap Top y cañón
Pantalla
Cámara de video
Copias fotostáticas

MATERIALES:
Investigación realizada por los educandos

D E S A R O L L O

2. El profesor a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre los conceptos que se dejaron investigar como actividad extraclase.

Propósito de la actividad: Que el alumno comience a analizar y a razonar los elementos necesarios para el planeamiento de resolución del problema propuesto.

3. El profesor resolverá la ecuación logística en el pizarrón.

Propósito de la actividad: Que al ir efectuando la solución de la ecuación diferencial en el pizarrón el docente, cuestione al educando sobre conceptos que serán utilizados en tal solución. Esto generará la retroalimentación de los conceptos ya vistos anteriormente por el alumno, así como de que se resuelvan dudas que el educando pueda tener en esas nociones

4. El profesor planteará un problema sobre una proyección de población de la República Mexicana y para el Distrito Federal, y a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará al educando sobre los pasos a seguir para llegar a la solución del problema propuesto (para realizar esto será utilizado el modelo de Verlhust) .

   - ✓ El profesor generará una discusión grupal para que sean resueltas las posibles dudas que puedan tener los estudiantes en la solución del problema propuesto.

5. El profesor planteará un problema sobre el pronóstico límite de una proyección de población para el Distrito Federal, y a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará a los alumnos sobre los pasos a seguir para llegar a la solución del problema.

   - ✓ El profesor generará una discusión grupal para que sean resueltas las posibles dudas que puedan tener los educandos en la solución del problema propuesto.

TÉCNICA:

Grupal
Lluvia de ideas
Preguntas dirigidas

RECURSOS:

Pizarrón y gises de colores
Lap Top y cañón
Pantalla
Cámara de video

MATERIALES

Copias sobre el material expuesto en el salón de clase

OBSERVACIONES

6. El profesor planteará un problema sobre el punto de inflexión de una proyección de población para el Distrito Federal, y a través de la técnica lluvia de ideas, cuestionará a los alumnos sobre los pasos a seguir para llegar a la solución del problema a resolver. ✓ El profesor generará una discusión grupal para que sean resueltas las posibles dudas que puedan tener los alumnos en la resolución del problema. **7.** Discusión de la solución del problema. ***Propósito de la actividad****:* Que se realice una discusión grupal sobre la solución de los problemas que fueron resueltos en el salón de clase, así como el discutir los argumentos que fueron utilizados para llegar a su solución.	

C I E R R E

SINTESIS: **8.** Resumen de las actividades de la clase. ***Propósito de la actividad****:* Que el alumno consolide la comprensión de que existen problemas, que se tienen que resolver utilizando argumentos de varias disciplinas (Matemáticas, Geografía, Biología, Sociología, Historia y de Política) para llegar a su solución. ✓ El profesor realizará, preguntas dirigidas a los educandos, sobre cuales fueron los pasos a seguir para llegar a la solución correcta del problema.	***TÉCNICA:*** Exposición Interrogatorio **RECURSOS:** Pizarrón y gises de colores Lap Top y cañón Pantalla Cámara de video Copias fotostáticas
ACTIVIDADES EXTRACLASE **9. Tarea.** ***Propósito de la actividad:*** El educando como actividad extraclase, resolverá los cuestionarios que vienen como actividad de regulación en el material que se está presentando en la presente tesis.	***TÉCNICA:*** Exposición **RECURSOS:** Bibliografía proporcionada por el profesor.

5.5 RESULTADOS

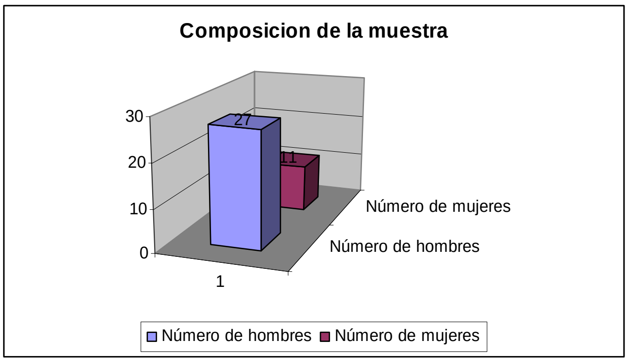
En primer lugar veamos a qué tipo de alumnos fue presentado el material didáctico a evaluar:

Se obtuvo una muestra de 38 alumnos, de los cuales 27 fueron hombres y 11 mujeres, cuyas edades fluctuaban entre 17 y 20 años, siendo la media de la edad de 17.8 años. La composición de la muestra es proporcionada en la tabla 11, así como la gráfica correspondiente (figura 27):

Tabla 11. Muestra de alumnos por categorías

Plantel "Antonio Caso"	Hombres	Mujeres
Total: 38	**27**	**11**

Figura 27



En el desarrollo de las sesiones en las que fueron presentados los temas antes mencionados, los alumnos resolvieron los siguientes cuestionarios, éstos se irán presentando al ir realizando la evaluación de cada uno de ellos. El primero es el siguiente:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 2.1

Lee con atención las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la lectura, ¿Estarías tú de acuerdo con la teoría económica de Roberth Malthus? Si tu respuesta es afirmativa escribe porqué y si es negativa escribe motivos:____

2. ¿Qué evento fue el que terminó con las aspiraciones de Napoleón Bonaparte al de someter al pueblo inglés?____

3. ¿Cuál era la situación política y económica que prevalecía en Europa en el siglo XIX?____

4. De acuerdo a la lectura, ¿Cuál era la situación económica en la que se encontraba la Francia de Roberth Malthus?____

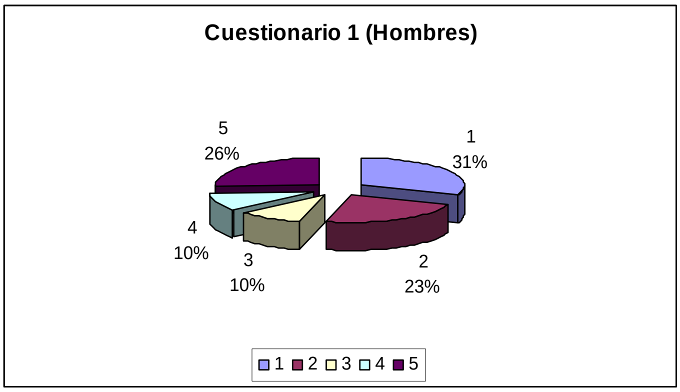
5. ¿Tú crees que tuvo alguna influencia la situación que prevalecía o predominaba en la Francia del siglo XIX en la teoría sobre economía que desarrollo Roberth Malthus? Explica tu respuesta:____

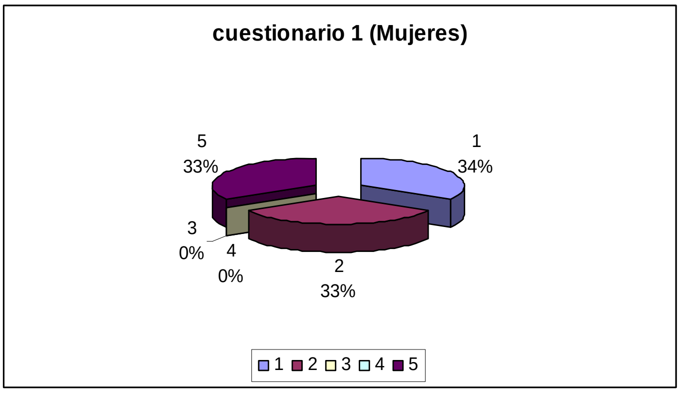
Los resultados arrojados de las soluciones por parte de los estudiantes, son presentados en la siguiente tabla, así como sus gráficas correspondientes:

Tabla 12. Respuestas congruentes con la teoría (cuestionario 1)

Pregunta	Hombres		Mujeres	
	Si	No	Si	No
1	12	1	4	0
2	9	4	4	0
3	4	9	0	4
4	4	9	0	4
5	10	3	4	0

Figura 28





El segundo cuestionario que fue resuelto por los educandos es el siguiente:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 2.2

Lee con cuidado las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la gráfica anterior, ¿podrías hacer una estimación de cuál sería la población que habrá en México en el año 2180?.________________________

2. Sí la población sigue creciendo así, ¿tú crees que la producción de alimentos será suficiente para todos?.____
____

3. Sí tomamos en cuenta que la extensión territorial de la República Mexicana, es de 1 964 375 Km² de los cuales 1 959 248 Km² son superficie continental y 5 127 Km² corresponden a superficie insular[56], ¿cuántos habitantes vivirán en cada metro cuadrado en el año 2090?________________________________

[56] http://mapserver.inegi.gob.mx/geografia/espanol/datosgeogra/extterri/frontera.cfm?c=154.

4. Sí la superficie territorial del Distrito Federal es de 1499 Km^2, ¿Cuántos habitantes por metro cuadrado habitan la ciudad en la actualidad[57]?____

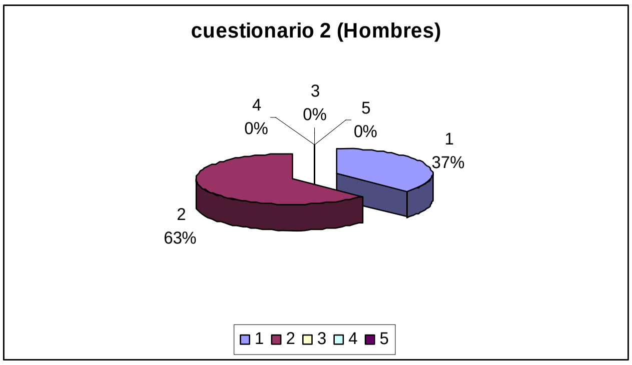
5. De acuerdo a los datos anteriores, sí el crecimiento de la población sigue su marcha, ¿cuántos habitantes por kilómetro cuadrado vivirán en el año 2030, en el Distrito Federal (para esto toma en cuenta la tabla de censos de población del DF)?. ____

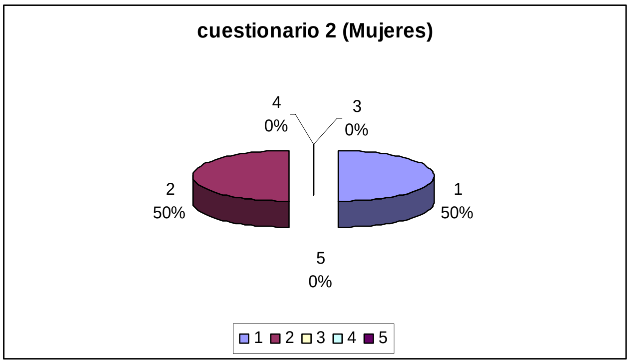
Los resultados arrojados de las soluciones por parte de los educandos, son presentados en la siguiente tabla y también sus gráficas correspondientes:

Tabla 13. Respuestas congruentes con la teoría (cuestionario 2)

Pregunta	Hombres		Mujeres	
	Si	No	Si	No
1	7	6	4	0
2	12	1	4	0
3	0	13	0	4
4	0	13	0	4
5	0	13	0	4

Figura 29





El tercer cuestionario resuelto por los estudiantes fue:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN 3.1

Lee con cuidado las siguientes preguntas y escribe las respuestas en las líneas correspondientes:

1. De acuerdo a la lectura, ¿cuáles son los elementos que definen y caracterizan a una población?:____

2. Explica brevemente qué se entiende por **MIGRACIÓN:**____________________
____

[57] http://mapserver.inegi.gob.mx/geografia/espanol/datosgeogra/extterri/frontera.cfm?c=154.

3. Sí la superficie territorial del Distrito Federal es de 1499 Km^2 , ¿Cuántos habitantes por metro cuadrado habitarán la ciudad, cuando se llegue al límite máximo de población que puede habitar en la ciudad sin problema alguno?____

4. De acuerdo a los datos anteriores, sí el crecimiento de la población sigue su marcha, ¿cuándo se llegará al límite máximo de población que puede habitar en el Distrito Federal sin problema alguno?___________________________________

5. De acuerdo a los resultados anteriores, ¿en qué año se llegó al punto de inflexión en el crecimiento de la población del Distrito Federal?: ____

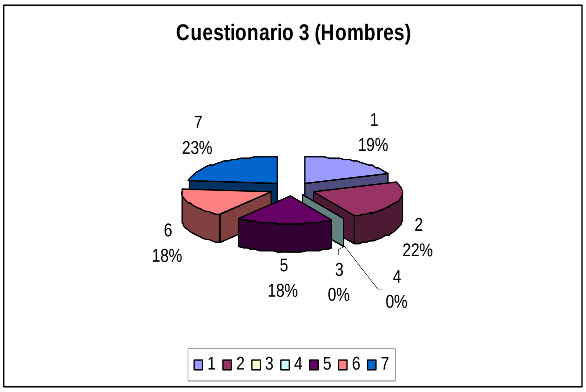
6. De acuerdo a la lectura, ¿Cuáles son las diferencias existentes entre el Modelo de Thomas Roberth Malthus y el Modelo de Pierre Verhulst ?___________________
____

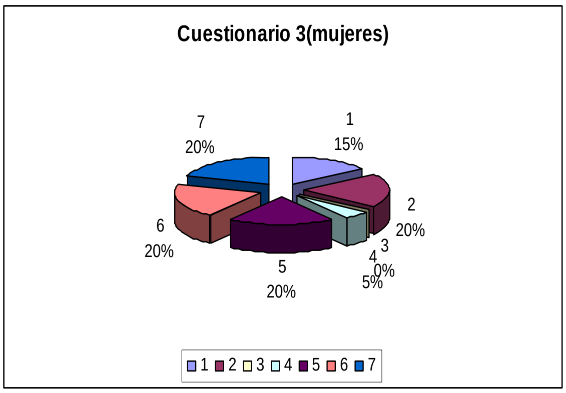
Los resultados arrojados de las soluciones por parte por los estudiantes, son presentados en la siguiente tabla, así como las gráficas correspondientes:

Tabla 14. Respuestas congruentes con la teoría (cuestionario 3)

Pregunta	Hombres		Mujeres	
	Si	No	Si	No
1	11	2	3	1
2	13	0	4	0
3	0	13	0	4
4	0	13	1	3
5	10	3	4	0
6	10	3	4	0
7	13	0	4	0

Figura 30





Es importante mencionar que únicamente los alumnos que entregaron el cuestionario resuelto fueron 17 en total, los cuales son presentados en la tabla siguiente:

Tabla 15. Muestra de alumnos por categorías que entregaron el cuestionario

Plantel "Antonio Caso"	**Número de hombres**	**Número de mujeres**
Total: 17	**13**	**4**

Es decir, los que no entregaron el cuestionario fueron 14 hombres y 7 mujeres.

En base a los resultados obtenidos, podemos hacer las siguientes observaciones:

Los resultados obtenidos por parte del estudiante, en lo personal quiero suponer, que éstos fueron negativos por lo siguiente: ellos estaban acostumbrados a una forma de ser evaluados por parte del profesor que les impartía la asignatura de matemáticas, la cual es tradicionalista, y al plantearles una forma distinta de evaluación, no se adaptaron a ella en una semana.

También me percaté que los alumnos no leyeron con atención las notas que les fueron entregadas, ya que varias de las preguntas que vienen en los cuestionarios, únicamente había que leer y analizar los contenidos de los mismos para contestar los cuestionarios. Aunque, las preguntas que eran más elaboradas, ninguno de ellos realizó las operaciones necesarias para llegar al resultado que se les pedía, debe de suponerse que aquí el compromiso por parte de ellos fue nulo.

Además, quizá no tenían mucho compromiso con la clase que les impartí, pues eso no implicaba ningún cambio en la evaluación que les haría el profesor de la asignatura antes mencionada.

Tal vez esa falta de compromiso por parte de los alumnos, se debió a que las sesiones impartidas no contaban para la calificación de su asignatura, aunque es de mencionarse que la asistencia a las clases sí fue considerada por su profesor para su evaluación, es por ello que se presentaban a las clases.

Es importante el enunciar, que no con lo anterior estoy afirmando que no se alcanzaron los objetivos particulares de la presentación del material didáctico que se esta presentando como propuesta de tesis, ya que el alumno siempre estuvo participando y aportando su punto de vista en la presentación del material en el salón de clase.

Conclusiones

Una parte del material didáctico que conforma el presente trabajo de tesis, fue expuesto frente a un grupo del bachillerato, y fue en la asignatura de matemáticas VI (área 1, cálculo diferencial e integral), ese grupo pertenecía a la Preparatoria Num. 6, “Antonio Caso”, de la Escuela Nacional Preparatoria (UNAM). En la presentación del material didáctico fue posible percatarse de los siguientes puntos:

En primer lugar, se les trató de brindar confianza a los alumnos, por parte del docente, y eso se reflejó en su participación, preguntando y completando la clase. Además, esto trajo consigo, un ambiente de clase relajado con los alumnos, ellos se sentían cómodos, es decir, estuvieron muy interesados en la clase. Se puede afirmar con esto, que se creó una buena empatía docente-alumno, ya que el docente no se presentó como una autoridad de poder. Sino que trató de ser símil al alumno, creando con ello un ambiente de confianza entre ambos (alumno-docente).

Por otro lado, al ver los videos sobre desnutrición, el ánimo del grupo decayó, es decir reflexiono sobre el gran problema que existe en este contexto a nivel mundial. Al salir de ese shock producido cuando se mencionó a su país, es decir, que ellos son mexicanos y que están atravesados o inmersos en ese gran problema mundial, participando y compartiendo sus inquietudes sobre el tema. Ahora bien, el alumno no tuvo ningún problema al interrelacionar diferentes disciplinas (Historia, Sociología, Geografía, Biología, Demografía, Matemáticas y Política), ya que en ningún momento se vieron incómodos o confusos, en cualquiera de éstas disciplinas, compartieron sus ideas y comentarios sin ningún problema. Esto en sí fue el detonante de una buena participación de los integrantes del grupo, ya que al brincar de una disciplina a otra la clase se hacia más dinámica. Mostrando con esto, el gran interés por parte del educando en el desarrollo de la clase. Cabe resaltar que éste es un tema muy actual que los jóvenes están viviendo, y que por ende están implicados en ello.

Es importante mencionar que el alumno al escuchar los términos que implican las matemáticas mostraban cierto nerviosismo, a falta del conocimiento. Sin embargo, cuando se les hizo mención que no era necesario manejar con precisión los términos matemáticos que iban a ser utilizados en el desarrollo de la presentación del material didáctico, volvieron a mostrar interés en el problema a resolver. Esto a su vez no implica que el alumno carezca de los conocimientos antes mencionados, ya que esto fue demostrado anteriormente con su participación e interés.

Cabe resaltar que el educando mostró un interés tan profundo en el tema que cuestionó al docente sobre el modelo que estaba proponiendo. Además, incitó al docente a cambiar los datos del estado de la Republica Mexicana, del cual se estaba obteniendo su proyección de población, para comprobar sí efectivamente el modelo funcionaba, para cualquier caso.

Por otro lado, también es importante que se mencione, que el docente mostró un buen manejo de su espacio, así como del pizarrón escribiendo ejemplos, de tal manera que los alumnos no tuvieron dificultad de accesar a la información que les era transmitida por el docente. Además, al realizar el profesor la aplicación de la parte matemática al alumno, éste mostró interés e inquietud sobre el modelo mostrado, manifestándolo en su participación en la clase, así como las preguntas hechas al docente del tema a tratar.

Por otro lado, es importante mencionar, que el docente tuvo un buen dominio de la teoría, demostrado al contestar a todas las preguntas que hacia el alumno, de cualquiera de las disciplinas que se abordo, así como aportando ejemplos e incitando al alumno a participar en el tema del cual se estaba hablando.

Finalmente, el material didáctico utilizado en la presentación del material mantuvo la atención del alumno, propiciando con ello su participación e interés en clase. Esto trajo consigo, que el grupo mostrara real interés en el tema ya que todos se mantuvieron en su lugar durante toda la clase. Además, todo el tiempo los estudiantes se mostraron coparticipes de la clase, demostrando de esta forma la empatía con el docente.

En suma, si los puntos anteriores los tomamos como referencia, podemos decir, categóricamente que los problemas del tipo interdisciplinario, como los propuestos en la presente tesis, les interesan a los jóvenes bachilleres, esto conlleva que pueda lograrse un aprendizaje significativo, y esto es obvio ya que el alumno en todo el desarrollo del problema está inmerso en la solución, esto se ve reflejado en su participación e interés en la resolución del problema. Lo anterior antes mencionado, es uno de los objetivos principales de los planes de estudio de la **Escuela Nacional Preparatoria**, y en general, del **Sistema de Educación Media Superior** a nivel nacional[58].

Por lo tanto, en lo personal, el presente material didáctico puede coadyuvar a que el alumno pueda acceder a una metodología constructiva en la enseñanza de las matemáticas.

IMPORTANTE. Las conclusiones fueron obtenidas en base a la presentación del material didáctico frente al grupo. Es de señalarse, que las sesiones fueron grabadas, es así que las observaciones mencionadas fueron obtenidas del comportamiento del grupo en el aula, en el desarrollo de las dos clases que le fueron impartidas por el docente.

[58] Programa Nacional de Educación (SEP- 2000-2006).

Apéndice A

Comencemos a hacernos la cuestión siguiente:

¿Cómo crece y como se representa gráficamente una función exponencial?

En primer lugar, veamos algunas propiedades importantes de esta función para después realizar algunas operaciones básicas y comprender mejor estas propiedades.

Cuando fue desarrollado el tema de la derivada se dedujo que:

$$\text{Si} \quad y = \ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1}{x} \quad ; \text{ con } x > 0$$

En particular para el caso de $y'(1) = 1$. Por otro lado, si restringimos h, a que tome solamente valores racionales, supongamos que $h = \dfrac{m}{n}$, obtenemos:

$$\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \right]$$

Por lo tanto:

$$1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \right]$$

Esto último prueba que:

$$\lim_{h\to 0} \ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \right] = 1$$

Observemos, que h tiende a cero, la cantidad $\left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \right]$ tiene la peculiaridad de que el número $1+h$ tiende a 1 mientras la exponente $\dfrac{1}{h}$ tiende al infinito. Por consiguiente, no es claro que el límite:

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ exista}$$

Para tener una idea de cómo la cantidad $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ varia cuando h tiende a cero, usamos una tabla de logaritmos decimales y efectuamos unos sencillos cálculos aritméticos para obtener la siguiente tabla:

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
-0.01	2.7320
-0.001	2.7196
-0.0001	2.7184
1	2.0000
0.5	2.2500
0.25	2.4410
0.1	2.5940
0.003	2.6786
0.01	2.7148
0.001	2.7169
0.0001	2.7181

De los resultados numéricos expuestos en la tabla anterior, nos atreveríamos a conjeturar que cuando h tiende a cero la cantidad $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ tiende a un límite definido cuyo valor aproximado a tres cifras decimales es: 2.718. Si llamamos e a este límite:

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \qquad \textbf{(1)}$$

Es posible probar, realizando más operaciones aritméticas que:

$$e = 2.71828\ldots \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{y que} \qquad 2.718 < e < 2.719$$

Una consecuencia importante de las fórmulas (**1**) y (**2**) es que:

$$\ln(e) = 1$$

Analicemos el concepto de la continuidad de la función $y = \ln(x)$. El cual lo podemos interpretar geométricamente de la siguiente forma: la función $y = \ln(x)$ es continua porque su gráfica (Véase la **gráfica A.1**) puede dibujarse mediante el movimiento continuo de un lápiz sin despegarlo del papel. Matemáticamente esto se expresa con la condición, para cada $x_0 > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\ln(x) \text{ tiende a } \ln(x_0) \text{ cuando } x \text{ tiende a } x_0$$

En símbolos tenemos:

$$\ln(x) \to \ln(x_0) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0$$

De acuerdo a esto tenemos:

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} \to e \quad \text{cuando } h \to 0$$

Y de la continuidad de la función $\ln(x)$ se obtiene:

$$\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right] \to \ln(e) \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

Por otro lado, se sabe que:

$$\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right] \to 1 \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

Por consiguiente, se tiene:

$$\ln(e) = 1$$

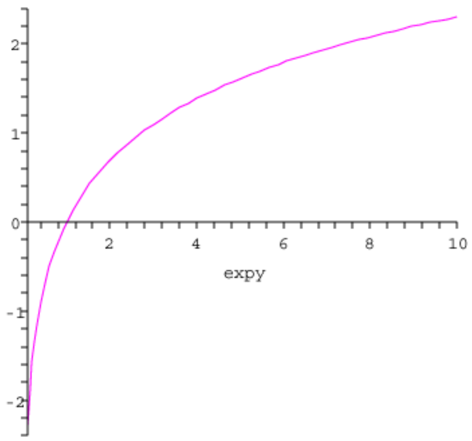
Que era lo que queríamos demostrar.

Obsérvese que se tiene para cualquier número racional r lo siguiente:

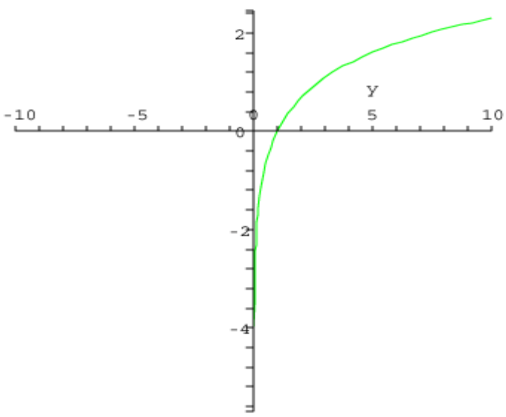
$$\ln(e^r) = r \cdot \ln(e) = r$$

Supongamos, que x un número real, entonces, y de acuerdo a las propiedades de la función logaritmo, vemos que existe un número real positivo y tal que $x = \ln(y)$. (Véase la gráfica A.2).

Gráfica A.1



Gráfica A.2



Por otro lado, la función que a cada número x le asocia tal número y la denotaremos por:

$$y = E(x).$$

Por ejemplo, tenemos que:

$$E(1) = e.$$

Más generalmente:

$E(r) = e^r$ para cualquier número racional. Por tanto:

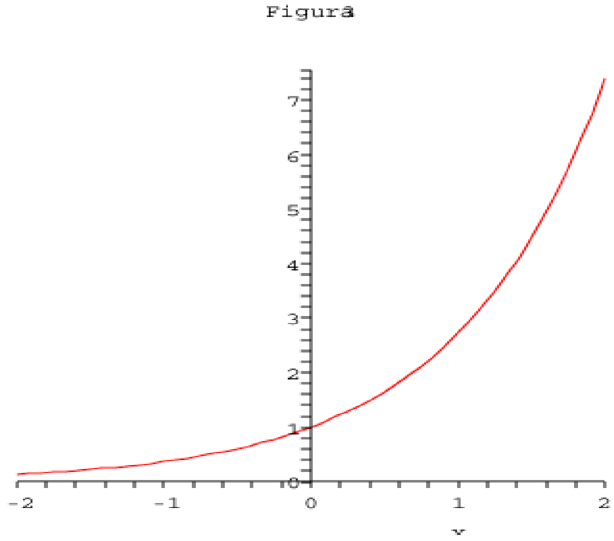
$$E(r) \to \infty \text{ cuando } r \to \infty$$

y también que:

$$E(r) \to 0 \quad \text{cuando} \quad r \to -\infty$$

A la función $y = E(x)$ le llamaremos la **función exponencial** cuya gráfica se muestra en la gráfica A.3.

Gráfica A.3



Veamos un ejemplo referente a la construcción de la gráfica de una función exponencial.

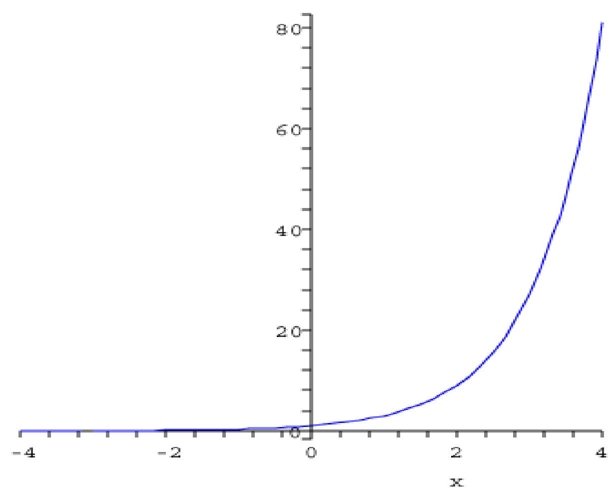
EJEMPLO 1. Construye la gráfica de la función: $y = 3^x$

SOLUCIÓN. Si le asignamos valores a la variable x obtendremos valores de la variable y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

Con estos valores, los cuales nos definen puntos en el plano cartesiano podemos trazar la gráfica correspondiente:

Gráfica A.4



Apéndice B

ALGUNOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Únicamente se han analizado métodos para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aplicación de técnicas analíticas, como la integración. En general, lo importante es hallar una expresión exacta para la solución.

En esta sección se utilizará un enfoque alternativo: el empleo de procedimientos numéricos para obtener una aproximación a la solución de una ecuación diferencial.

Los métodos numéricos ofrecen información cuantitativa sobre soluciones, aún si no es posible encontrar sus fórmulas. Se tiene la ventaja de que la mayor parte del trabajo puede ser elaborado por máquinas (calculadora, computadora, etc.). La desventaja radica, en que sólo se obtiene una aproximación de la solución. Si se está consciente de este hecho, los métodos numéricos son una herramienta muy poderosa para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Los métodos que se verán son los siguientes:

I. MÉTODO DE EULER O MÉTODO DE LA RECTA TANGENTE

Para explicar el método de Euler, consideremos el **PVI**[59]:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Como conocemos $f(t,y)$, puede trazarse su campo de pendientes en el plano tY. La idea del método consiste, en empezar en el punto (t_0, y_0) en el campo de pendientes y dar pequeños pasos obtenidos por las tangentes de ésta.

Elijamos un tamaño de paso h (pequeño). La pendiente de la solución aproximada es actualizada cada h unidades de t. En otras palabras, en cada paso nos desplazamos h unidades a lo largo del eje t. El tamaño de h determinará la exactitud de la solución, así como el número de cálculos que serán necesarios para obtener la aproximación.

Si comenzamos en el punto (t_0, y_0), el primer paso será hacia el punto (t_1, y_1); donde $t_1 = t_0 + h$ y (t_1, y_1) es el punto sobre la recta que pasa por (t_0, y_0) y cuya pendiente es proporcionada por el campo de pendientes en (t_0, y_0) (Figura 1). En el punto (t_1, y_1) se repite el procedimiento; dando un paso cuyo tamaño a lo largo del eje t es h y cuya dirección es determinada por el campo de pendientes en (t_1, y_1), llegando al nuevo punto (t_2, y_2). El nuevo tiempo estará dado por $t_2 = t_1 + h$ y el punto (t_2, y_2) estará sobre el segmento de la recta que comienza en (t_1, y_1) y tiene pendiente

[59] Problema de Valor Inicial.

$f(t_1, y_1)$. De la misma manera, utilizaremos el campo de pendientes en el punto (t_k, y_k) para calcular el punto (t_{k+1}, y_{k+1}). La secuencia de valores: $y_0, y_1, y_2, \ldots$, sirve como una aproximación a la solución en los tiempos: $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Geométricamente, el método produce una secuencia de pequeños segmentos de recta que unen al punto (t_k, y_k) con el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) (Figura 2).

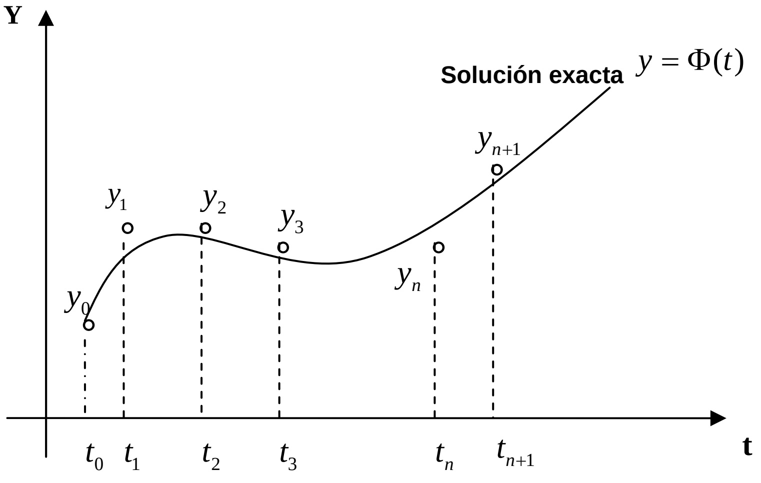


Figura 1. Una aproximación numérica a la solución de: $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

El método emplea segmentos de recta tangente, dados por el campo de pendientes para aproximar la gráfica de la solución. Por consiguiente, en cada paso cometemos un pequeño error. Si el tamaño del paso es suficientemente pequeño, esos errores no resultarán demasiado grandes y la gráfica resultante será cercana a la solución buscada.

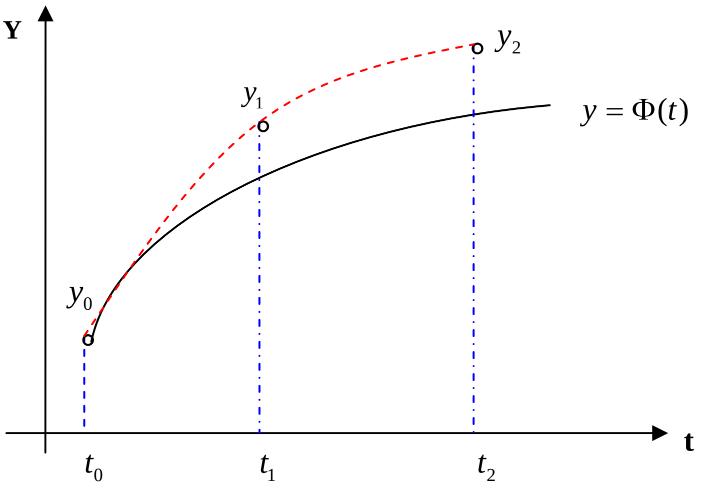


Figura 2. Aproximación de Euler o de la recta tangente.

Se necesitará una fórmula que determine el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) a partir del punto (t_k, y_k) . En primer lugar, especifiquemos el tamaño del paso h:

$$t_{k+1} = t_k + h \qquad \textbf{(2)}$$

Para obtener a partir del punto (t_k, y_k) las coordenadas del punto (t_{k+1}, y_{k+1}), utilizaremos la ecuación diferencial (**1**); se sabe que la pendiente de la solución de la ecuación: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ en el punto (t_k, y_k) es $f(t_k, y_k)$, y el método de Euler usa esta pendiente para calcular el valor de y_{k+1}. De hecho, determina el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) suponiendo que éste se encuentra sobre la recta que pasa por (t_k, y_k) con pendiente $f(t_k, y_k)$ (Figura 3 y 4).

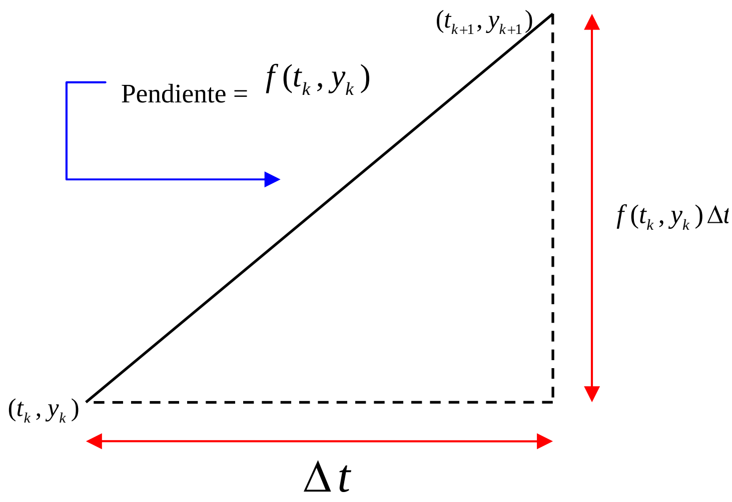


Figura 3. El método de Euler usa la pendiente en el punto (t_k, y_k) para aproximar la solución para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

Utilizando la fórmula de la pendiente de una recta, para obtener el valor de y_{k+1}:

$$f(t_k, y_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} \qquad \textbf{(3)}$$

Como $t_{k+1} = t_k + h$, sustituyendo (**2**) en (**3**) y calculando, se obtendrá:

$$f(t_k, y_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_k + h - t_k} \quad \Rightarrow \quad f(t_k, y_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \quad \Rightarrow \quad f(t_k, y_k)\,h = y_{k+1} - y_k$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,h$$

Por lo tanto, se obtendrá la fórmula para el método de Euler, la cual es:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,h \qquad \textbf{(4)}$$

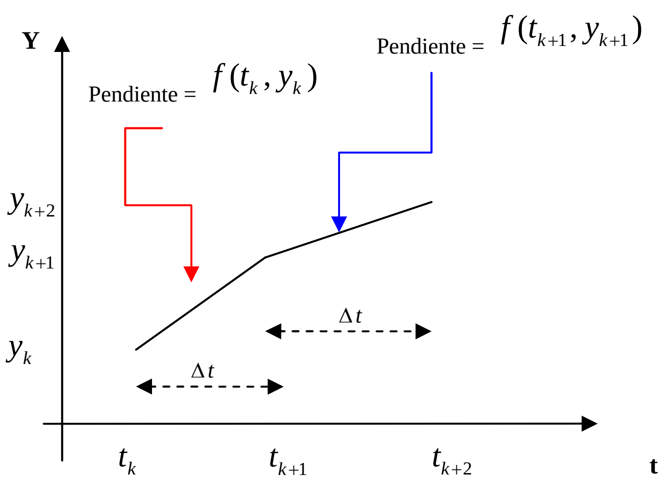


Figura 4. Dos pasos sucesivos del método de Euler.

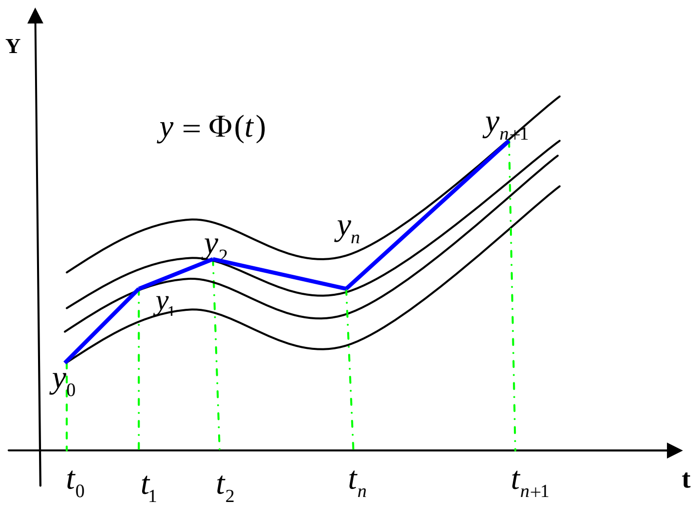


Figura 5. Varios pasos sucesivos del método de Euler.

MÉTODO DE EULER PARA LA ECUACIÓN:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \ , \quad y(t_0) = y_0 .$$

Dada la condición inicial $y(t_0) = y_0$ y el tamaño del paso h, calcule el punto (t_{k+1}, y_{k+1}) a partir del punto precedente (t_k, y_k) de la forma siguiente:

1. Utilice la ecuación diferencial para determinar la pendiente $f(t_k, y_k)$.

2. Calcule el siguiente punto (t_{k+1}, y_{k+1}) utilizando las fórmulas (**2**) y (**4**):

$$(2) \qquad t_{k+1} = t_k + h \qquad \text{y} \qquad (4) \qquad y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,h$$

Ilustraremos su uso en el siguiente **PVI.** Considerando el problema:

$$\textbf{1)} \qquad \begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = 1 - t + 4y \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$

La ecuación (**1**) es una ecuación lineal de primer orden y la solución que satisface la condición inicial es:

$$y = \Phi(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}$$

Como se conoce la solución exacta, no se requieren métodos numéricos para resolver el **PVI**. Utilizaremos su solución para realizar una comparación más objetiva con los resultados obtenidos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Utiliza la fórmula de Euler y un tamaño de paso $h = 0.1$ y otro de $h = 0.05$. Además, determina un valor aproximado de la solución $y = \Phi(t)$ en $t = 0.2$, para el problema con valor inicial:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = 1 - t + 4y \\ &y(0) = 1 \end{aligned}$$

Solución. Para poner en práctica la aproximación de Euler primero calculamos:

$$\frac{dy_0}{dt_0} = f(0,1) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = y_0 + h\, f(0,1) \quad = 1 + (0.1)(5) = 1.5$$

En el siguiente paso, se obtendrá:

$$y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = 1.5 + (0.1)\, f(0.1, 1.5) = 1.5 + (0.1)(6.9) = 2.19$$

En el tercer paso, se obtendrá:

$$y_3 = y_2 + h\, f(t_2, y_2) = 2.19 + (0.1)\, f(0.2, 2.19) = 2.19 + (0.1)(9.56) = 3.146$$

De manera semejante se obtienen los valores de los pasos siguientes, los cuales son representados en la tabla 1.

Si ahora consideramos el tamaño de paso $h = 0.05$ y calculamos nuevamente:

$$y_1 = y_0 + h\, f(0,1) = 1 + (0.05)(5) = 1.25$$

En el segundo paso se tendrá:

$$y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = 1.25 + (0.05)\, f(0.05, 1.25) = 1.25 + (0.05)(5.95) = 1.5475$$

En el tercer paso se obtendrá:

$$y_3 = y_2 + h\, f(t_2, y_2) = 1.5475 + (0.05)\, f(0.1, 1.5475) = 1.5475 + (0.05)(7.09) = 1.902$$

En el cuarto paso se obtendrá:

$$y_4 = y_3 + h\, f(t_3, y_3) = 1.902 + (0.05)\, f(0.15, 1.902) = 1.902 + (0.05)(8.458) = 2.3249$$

Los demás resultados de los subsecuentes pasos se obtienen de forma equivalente y se presentan en la tabla A**.**

Finalmente, consideremos los valores para la solución exacta de la ecuación diferencial, cuya representación está dada en la tabla A (las operaciones[60] fueron omitidas, ya que la finalidad del ejemplo era la de hacer la presentación del método numérico de Euler).

TABLA 1		**TABLA 2**		**TABLA 3**	
t	**h=0.1**	**t**	**h=0.05**	**t**	**Exacta**
0	1.0000	0	1.0000	0	1.0000
0.1	1.5000	0.1	1.5475	0.1	1.6090
0.2	2.1900	0.2	2.3449	0.2	2.5053
0.3	3.1460	0.3	3.4334	0.3	3.8301
0.4	4.4744	0.4	5.0185	0.4	5.7942
0.5	6.3241	0.5	7.2902	0.5	8.7120
0.6	8.9038	0.6	10.5504	0.6	13.0525
0.7	12.5053	0.7	15.2340	0.7	19.5155
0.8	17.5375	0.8	21.9675	0.8	29.1449
0.9	24.5725	0.9	31.6527	0.9	43.4979
1.0	34.4115	1.0	45.5884	1.0	64.8978

Tabla A. Método de Euler para la ecuación $\dfrac{dy}{dt} = 1 - t + 4y \quad ; \quad y(0) = 1$

Observando las tablas anteriores, podemos percatarnos que es posible obtener un resultado más aceptable si utilizamos un tamaño de paso más pequeño. Si se desea obtener resultados más exactos, existen dos posibilidades para llegar a ello:

a) Usar un tamaño de paso todavía más pequeño, con lo que se requieren más pasos para cubrir el intervalo dado.

b) Idear una fórmula aproximada más exacta y eficiente para sustituir la ecuación 3.

Por lo general la segunda posibilidad es la mejor.

En primer lugar, como $y = \Phi(t)$ es una solución del problema de valor inicial (**1**), al integrar desde t_n hasta t_{n+1}, obtendremos:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left[t, \Phi(t)\right]dt \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(t_{n+1}) = \Phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left[t, \Phi(t)\right]dt \qquad (\mathbf{2})$$

La Integral de la ecuación (**2**) se representa geométricamente como el área bajo la curva entre $t = t_n$ y $t = t_{n+1}$ (Figura 6). Si se aproxima a la integral al sustituir

[60] Todas las operaciones se realizaron utilizando una calculadora científica.

$f\left[t, \Phi(t)\right]$ por el valor de $f\left[t_n, \Phi(t_n)\right]$ en $t = t_n$, entonces se está aproximando el área real por el área del rectángulo sombreado. Por consiguiente, se obtendrá:

$$\Phi(t_{n+1}) \cong \Phi(t_n) + f\left[t_n, \Phi(t_n)\right](t_{n+1} - t_n) = \Phi(t_n) + h\, f\left[t_n, \Phi(t_n)\right] \qquad (\mathbf{3})$$

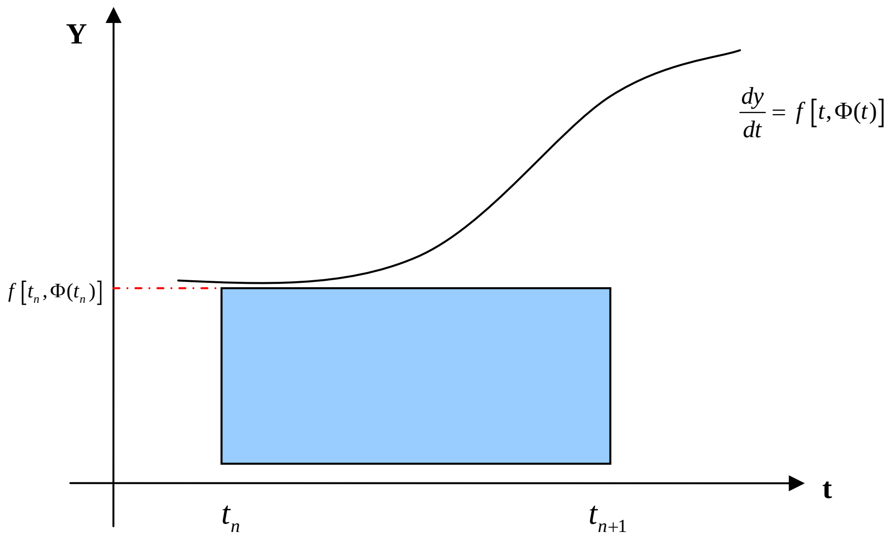


Figura 6. Deducción integral del método de Euler.

Por ultimo, para obtener una aproximación de y_{n+1}, se efectúa una segunda aproximación al sustituir $\Phi(t_n)$ por el valor aproximado de y_n de la ecuación (**3**). Esto da nuevamente la fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \qquad (\mathbf{4})$$

Es posible obtener una fórmula más precisa al aproximar con mayor exactitud la integral.

En segundo lugar, supongamos que se afirma que la solución $y = \Phi(t)$ tiene una serie de Taylor alrededor del punto $t = t_n$, entonces se tendrá:

$$\Phi(t_n + h) = \Phi(t_n) + \Phi'(t_n)\,h + \Phi(t_n)''\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

O bien como:

$$\Phi(t_{n+1}) = \Phi(t_n) + f\left[t_n, \Phi(t_n)\right]h + \Phi(t_n)''\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

Si por suerte la serie termina al cabo de los dos primeros términos y si $\Phi(t_{n+1})$ y $\Phi(t_n)$ se sustituyen por sus valores aproximados y_{n+1} y y_n, obtendremos nuevamente la fórmula de Euler (**4**). Si se conservan más términos de la serie, se obtendrá una fórmula más exacta. Además, al usar una serie de Taylor con un residuo es posible estimar la magnitud del error en la fórmula.

II. MÉTODO DE RUNGE- KUTTA

La ecuación diferencial que se tratará de resolver numéricamente es de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \qquad (\mathbf{1})$$

Algo interesante que se verá es en avanzar en la solución del punto $(t, y(t))$ al punto $(t+h, y(t+h))$. Una expresión relacionada al valor de y, la cual puede ser obtenida por una simple integración de ambos extremos de la ecuación diferencial entre t y $t+h$. El resultado será:

$$\int_{t}^{t+h} \frac{dy}{dt} = y(t+h) - y(t) = \int_{t}^{t+h} f(t, y(t))dt$$

Multiplicando y dividiendo la integral por h, se obtendrá:

$$y(t+h) = y(t) + h\left[\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(t, y(t))dt\right]$$

La expresión: $\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(t,\ y(t))dt$, es en realidad el valor promedio de la función en el intervalo $(t, t+h)$. Ahora se explicará en qué consiste este método, la fórmula de Runge-Kutta comprende un promedio ponderado de valores de la función $f(t, y)$ tomados en diferentes puntos del intervalo $t_n \le t \le t_{n+1}$; lo cual puede escribirse como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(m_k + 2n_k + 2q_k + p_k\right) \qquad (\mathbf{2})$$

Las fórmulas asociadas con este método son:

$$m_k = f(t_n, y_n) \qquad q_k = f\left[t_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}h\,n_k\right]$$

$$n_k = f\left[t_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}h\,m_k\right] \qquad p_k = f\left[t_n + h,\ y_n + h\,q_k\right]$$

La suma: $\frac{1}{6}\left(m_k + 2n_k + 2q_k + p_k\right)$; puede considerarse como una pendiente promedio. Obsérvese, que si la función f no depende de y, entonces se tendrá:

$$m_k = f(t_n)\ ;\ n_k = q_k = f\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\ ;\ p_k = f(t_n + h)$$

y la ecuación (**2**) se reduce a la expresión:

$$y_{n+1} - y_n = +\frac{h}{6}\left[f(t_n) + 4f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + f(t_n + h)\right] \qquad (\mathbf{3})$$

La ecuación (**3**) puede identificarse con la regla de Simpson[61] para la evaluación aproximada de la integral:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

Veamos la solución de una ecuación diferencial utilizando este método numérico.

Ejemplo 2. Aplicar el método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados de la solución $y = \Phi(t)$ del **PVI** y considérese un tamaño de paso $h = \frac{1}{8}$:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y$$
$$y(0) = 1$$

Solución. Como el tamaño de $h = \frac{1}{8}$, para la pendiente inicial, se tendrá:

$$m_0 = f(t_0, y_0) = f(0,1) = 0$$

Esta pendiente determina el valor de:

$$\tilde{y}_0 = y_0 + m_0 \frac{h}{2} = 1 + 0\left(\frac{1}{16}\right) = 1$$

Dados $\tilde{y}_0$ y $\tilde{t}_0 = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$, se puede obtener la segunda pendiente, la cual será:

$$n_0 = f(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0) = f\left(\frac{1}{16}, 1\right) = 0.00390625$$

A su vez, esta pendiente determina el valor de $\hat{y}_0$, por medio de la fórmula:

$$\hat{y}_0 = y_0 + n_0 \frac{h}{2} = 1 + (0.00390625)(0.0625) = 1.000244141$$

Apliquemos la función $f(t, y)$ al punto $(\tilde{t}_0, \hat{y}_0)$ para obtener la tercera pendiente, si calculamos:

$$q_0 = f(\tilde{t}_0, \hat{y}_0) = (0.00390625)(1.000244141) = 0.003907203$$

y con este valor obtendremos el cuarto punto con valor de $\overline{y}_0$, si utilizamos la fórmula y calculamos:

$$\overline{y}_0 = y_0 + q_0 h = 1 + (0.003907203)(0.125) = 1.0004884$$

---

[61] El teorema de la Regla de Simpson puede ser revisado en cualquier libro de Calculo Diferencial e Integral.

Finalmente, como $\overline{t_0} = t_0 + h = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, calculando la última pendiente con este nuevo punto, se obtendrá:

$$p_0 = f(\overline{t_0}, \overline{y_0}) = f(0.0625\ ,\ 1.0004884) = 0.015632631$$

Como ya se tienen las cuatro pendientes, se puede calcular el promedio ponderado que permitirá calcular la pendiente que determinará el primer paso. Si calculamos, utilizando la fórmula (**2**):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(m_0 + 2n_0 + 2q_0 + p_0\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 = 1 + \frac{0.125}{6}\left(0 + 2(0.00390625) + 2(0.003907203) + 0.015632631\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y_1 = 1 + \frac{0.125}{6}\left(0.031259537\right) = 1.00065124 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 = 1.00065124$$

En el segundo paso, si calculamos:

$$m_1 = f(t_1, y_1) = f(0.1{,}1.0002442) = 0.010006512$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{y}_1 = y_1 + m_1\frac{h}{2} = 1.0002442 + (0.010002442)(0.0625) = 1.001276647$$

Dados $\tilde{y}_1$ y $\tilde{t}_1 = t_1 + \frac{h}{2} = 0.1625$, obtengamos la segunda pendiente:

$$n_1 = f(\tilde{t}_1, \tilde{y}_1) = f(0.1625{,}1.000369356) = 0.026439961$$

Obtengamos ahora el valor de:

$$\hat{y}_1 = y_1 + n_1\frac{h}{2} = 1.00065124 + (0.026439961)(0.0625) = 1.002303738$$

Apliquemos la función $f(t, y)$ al punto $(\tilde{t}_1, \hat{y}_1)$ para obtener la tercera pendiente, la cual será:

$$q_1 = f(\tilde{t}_1, \hat{y}_1) = 0.026467083$$

con este valor obtengamos el cuarto punto:

$$\overline{y}_1 = y_1 + q_1 h = 1.00065124 + (0.026467083)(0.125) = 1.003959625$$

Finalmente, como $\overline{t_1} = t_1 + h = 0.1 + \frac{1}{8} = 0.225$, calculando la última pendiente con este nuevo punto, se obtendrá:

$$p_1 = f(\overline{t_1}, \overline{y}_1) = f(0.225\ ,\ 1.00355124) = 0.050825456$$

Como ya se tienen las cuatro pendientes, se puede calcular el promedio ponderado que permitirá calcular la pendiente que determinará el segundo paso. Si calculamos, utilizando la fórmula (**2**):

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(m_1 + 2n_2 + 2q_2 + p_2\right) \qquad \Rightarrow$$

$$y_2 = 1.00065124 + \frac{0.125}{6}\left(0.010006512 + 2(0.026439961) + 2(0.026467083) + 0.050825456\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = 1.00065124 + 0.003471792833 = 1.004123033 \qquad \Rightarrow \qquad y_2 = 1.004123033$$

En el tercer paso, para la pendiente inicial se tendrá:

$$m_2 = f(t_2, y_2) = 1.040164921 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{y}_2 = y_2 + m_2 \frac{h}{2} = 1.00663341$$

Como: $\tilde{t} = t_2 + \frac{h}{2} = 0.2625$, obtengamos la segunda pendiente:

$$n_2 = f(\tilde{t}_2, \tilde{y}_2) = 0.069363333$$

A su vez, esta pendiente determina el valor de:

$$\hat{y}_2 = y_2 + n_2 \frac{h}{2} = 1.008458241$$

Obtengamos la tercera pendiente, si calculamos:

$$q_2 = f(\hat{t}_2, \hat{y}_2) = 0.069489075$$

y con este valor obtengamos el cuarto punto:

$$\overline{y}_2 = y_2 + q_2 h = 1.012809167$$

Calculando la última pendiente:

$$p_2 = f(t_{n+1}, \overline{y}_2) = f(0.325\ ,\ 1.012397184) = 0.106977968$$

Obtengamos el promedio ponderado que permitirá calcular la pendiente que determinará el tercer paso. Si calculamos, utilizando la fórmula (**2**):

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}\left(m_2 + 2n_2 + 2q_2 + p_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_3 = 1.004123033 + \frac{1}{48}\left(0.040164921 + 0.138726666 + 0.13897815 + 0.106977968\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_3 = 1.004123033 + 0.008850993854 = 1.012974027 \qquad \Rightarrow \qquad y_3 = 1.012974027$$

Si continuamos realizando los sucesivos pasos restantes, obtendremos los valores representados en la siguiente tabla[62] :

Método de Runge-kutta			
k	t_k	y_k	**EXACTA**
0	0	1.000000000	1.000000000
1	0.1	1.000651240	1.001000500
2	0.2	1.004123033	1.008032086
3	0.3	1.012974027	1.027367803
4	0.4	1.029917914	1.066092399
5	0.4	1.057991297	1.133148453
6	0.6	1.100852054	1.241102379
7	0.7	1.163125163	1.409168762
8	0.8	1.251007187	1.668625110
9	0.9	1.373139743	2.073006564
10	1.0	1.541973635	2.718281828

Tabla B. Método de Runge-Kutta para la ecuación $\dfrac{dy}{dt} = t^2 y \;\; ; \;\; y(0) = 1$

Por otro lado, resolvamos la ecuación diferencial, esto con el fin de realizar una colación de la aproximación obtenida a la solución por el método numérico, con la solución exacta de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = t^2 dy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int t^2 dy \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{3} t^3 + C$$

Apliquemos la exponencial a la última igualdad:

$$y = \frac{1}{3} e^{t^3} e^C \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{k}{3} e^{t^3}$$

Donde la solución que satisface la condición inicial es:

$$y = e^{t^3}$$

Finalmente, realicemos las comparaciones con los resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta, el cual es presentado en la Tabla B (las operaciones fueron omitidas, ya que la finalidad del ejemplo era la de hacer la presentación del método numérico de Runge-Kutta).

[62] Todas las operaciones se realizaron utilizando una calculadora científica.

Referencias

[1] Abell Martha - Braselton James; **Maple by Example**; Elsevier Academia Press, United States of America, 2005.

[2] Abreu José Luís, Canavati José Ángel Ayub, Ize Jorge y Mizzoni Antón Maria; **Introducción a los Conceptos del Cálculo**; Limusa, México, 1987.

[3] Alanís Rodríguez, J. A. **La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo**, disertación doctoral no publicada, CINVESTAV-IPN. 1996.

[4] David P. Ausubel, Joseph D. Novak y Helen Hanesian; **Psicología Educativa. Un Punto de Vista Cognoscitivo** (Segunda edición); Editorial Trillas, México, 2005.

[5] Blanchard Paul; **Ecuaciones Diferenciales**; International Thomson Editores, México, 1999.

[6] Boyce William **-** BiPrima Richard; **Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera**. Editorial Limusa Wiley, México, 2003.

[7] Bronson Richard; **Linear Algebra**; Academic Press, United States of America, 1995.

[8] Brown William C.; **Matrices and Vector Spaces**; Marcel Dekker, United States of America, 1991.

[9] Coll César, Marchesi Álvaro y Palacios Jesús; **Desarrollo Psicológico y Educación,** II. Psicología de la Educación; Alianza Editorial, Madrid, 1998.

[10] Davis H. Jon.; **Diferential Ecuations with Maple**; Birkhäuser, Boston, United States of America, 2001.

[11] Frida Díaz-Barriga Arceo y Gerardo Hernández Rojas. **Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: Una Interpretación Constructivista**. Editorial Mc Graw Hill, México, 2006.

[12] Freire Paulo; **Extensión o Comunicación**. Editorial. Siglo XXI, México, 1975.

[13] González Capetillo Olga, Flores Fahara Manuel; **Enfoques Innovadores para el Diseño de un Curso**, Edit. Trillas, México, 2003.

[14] González, Adrián y Medina, Norah; **Ecología**, Editorial. Mc Graw Hill, México, 1995.

[15] Gramsci A; **La Alternativa Pedagógica**; Editorial. Fontana, Barcelona, 1981.

[16] Hegarty C John; **Applied Calculus Brief**; John Wiley & Sons, United States of America, 1990.

[17] J.M. Keynes, Robert Malthus, p.XI; "***Principios de Economía Política***" de R. Malthus; Fondo de Cultura Económica, México, 1977.

[18] Madaus, G. F. y T. Kellagan, "**Curriculum Evaluation and Assessments**", en P. W. Jackson, Handbook of research on Curriculum, Macmillan, New York, 1992, pp. 119-154.

[19] Quesada Castillo Roció, **Cómo Planear la Enseñanza Estratégica**; Noriega Editores, México, 2004.

[20] Simon William, **Mathematical Techniques for Biology and Medicine**; Dover Publications, Inc., New York, USA, 1986.

[21] Programa Nacional de Educación 2001-2006; Secretaria de Educación Pública (**SEP**). México, 2001.

[22] Programa de las asignatura de Matemáticas VI, áreas 1, 2, 3 y 4, de la Escuela Nacional Preparatoria (**ENP**). México, 1996.

[23] Coordinación General de Servicios Periciales de la Fiscalía Desconcentrada en la Delegación Iztapalapa, del Distrito Federal.

[24] Fondo Nacional de Población (**FONAPO**), http://www.dif.gob.mx/inegi/POBLACION%202004.pdf

[25] Instituto Nacional de Ciencias Penales, **Manual Metodológico de Medicina Forense**, paginas 310-311, México 2001. www.inacipe.gob.mx/htm/BibliotecaVirtual/Publicaciones/ManualMetod/MedicinaForenseFotos.pdf

[26] Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (**INEGI**). http://www.inegi.gob.mx/

[27] Biblioteca del Instituto Tecnológico del Estado de México (ITAM). http://biblioteca.itam.mx/recursos/ehm.html#poblacion

[28] Servicio Meteorológico Nacional (**SMN**), pagina, http://smn.cna.gob.mx

[29] Organización de las Naciones Unidas **(ONU)** http://www.un.org/spanih/