UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# GEORGE BOOLE
# ¿EL DESCUBRIDOR DE LA MATEMÁTICA PURA?

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ABELARDO VELA PONCE DE LEÓN

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO
DANTAN

2007

Universidad Nacional Autónoma De México
Facultad de Ciencias

# *"George Boole, ¿El Descubridor de la Matemática Pura?"*

Por: Abelardo Vela Ponce de León

Director de Tesis
Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan
Carrera de Matemáticas

*Las proposiciones matemáticas,*
*en cuanto tienen que ver con la realidad,*
*no son ciertas;*
*y en cuanto que son ciertas,*
*no tienen nada que ver con la realidad.*
*Albert Einstein*

# Tabla de Contenidos

# Introducción

Algo que siempre ha intrigado a los hombres es el concepto de lo que *es*, no en referencia a lo que uno *es* como persona, sino al *ser*, o sea, *el ser* de los objetos del mundo material. Los filósofos al explicar o definir el *ser*, la *percepción* es siempre tomada en cuenta, para sustentar dicha explicación o definición. Así, los objetos del mundo físico encuentran bajo la *percepción*, una representación conceptual en la mente humana; en términos simples, es en base a *conceptos*, que el ser humano reconoce su entorno, relacionando conceptualmente los objetos que percibe de su medio exterior. Esta relación entre conceptos mentales y objetos materiales, tiene como fin ubicar de forma razonada los conceptos con los objetos, y si se corresponden, entonces se tiene una certeza de lo que es o son tales objetos; así, al relacionar un concepto con otro se cres un nuevo concepto, y si se corresponde a alguna relación entre objetos materiales, se da un otro punto importante.

La *forma* de esta realción entre conceptos y objetos es el otro punto importante en este trabajo, y en la lógica, porque como se va a ver más adelante, la *forma* será la base de un cambio que dará origen a una nueva concepción de lo que se entiende por lógica y sentará los fundamentos para uno de los cambios conceptuales más profundos dentro de la matemática.

La comprensión de lo anterior es vital. Las ideas que aquí se vierten, tienen como fin, mostrar por qué Bertrand Russell afirmó que George Boole fue el descubridor de la matemática pura. Para lograr esto, la discusión se centra principalmente en tratar de entender cuál era la concepción de lógica y matemática en la época de Boole y de Russell, en ambos, las ideas eran radicalmente diferntes, pero aún así se pueden encontrar paralelismos entre los dos. El eje que guiará esta discusión será lo que se entendía por *forma* antes y después de Boole, para de ahí ver cómo se conectan las ideas de Russell respecto a la matemática pura, con el cambio de *forma* que implementa Boole, a la idea aristotélica de la misma; es aquí donde se discuten los paralelismos entre Boole y Russell, para luego dar las conclusiones de dicha discusión.

Para entender lo que Russell escribió en el artículo *Recent Work on the Principles of Mathematics*, en 1901, en la International Monthly. Se hace un trazo de tres capítulos que contienen lo siguiente.

El primer capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección, se tocan de forma muy breve algunos puntos históricos relevantes, y se describe cómo los griegos definieron en un inicio los términos *concepto* y *forma*.

La segunda parte de este capítulo está enfocada en dar un repaso por la historia de la matemática de forma muy escueta, pero haciendo hincapié en el hecho, que de forma muy parecida que en la lógica, la idea de lo que era la matemática no evolucionó de forma real hasta la segunda mitad del siglo XIX. Así, la teoría de la cantidad mantuvo su primacía en la forma de comprender la matemática, hasta que en 1847, Boole uso el álgebra como herramienta para definir su idea de lógica. Esta idea revolucionó a la lógica, y marca los primeros pasos para redefinir, a ésta y a la matemática, casi de forma simultanea. Esta revolución se da en función de una nueva interpretación de las concepciones, tanto lógicas como matemáticas, definidas por los griegos, respecto a lo que se entiende por *concepto*, *forma* y *juicio*, dada inicialmente en la obra de Boole, mejor conocida como *Las Leyes del Pensamiento*.

No se debe perder de vista, la motivación principal de este trabajo de tesis. Si bien, es interesante la lógica griega, es crucial el capítulo uno, ya que en él se dan las bases, que van a mantener por más de dos mil años, una idea de lógica, y será precisamente Boole el primero en cambiar ésto. Por ello, el capítulo dos, se concentra particularmente en su obra principal *Las Leyes del Pensamiento*. Esta obra, está dividida en dos partes, la deductiva y la inductiva. La primera se enfoca a definir toda la estructura que va a necesitar para construir su lenguaje lógico, y la segunda se inspira en la teoría de la probabilidad de su época. Pero aquí sólo se presto atención a la primera parte, dado que, es en ésta donde se precisa el motivo y la estructura del lenguaje que Boole desarrolla, para justificar, cómo es que la mente humana trabaja, y al intentar develar sus leyes, a través del primer lenguaje formal lógico matemático, él tal vez sin proponérselo, va a cambiar la *forma* del juicio, dando un nuevo significado a éste. La forma que va a tomar la lógica de Boole, va a permitir que Russell, cuarenta y seis años después, afirme que Boole fue el descubridor de la matemática pura.

En el capítulo tres, se esbozan de forma muy breve las influencias que Russell tuvo antes de hacer su afirmación respecto a Boole. El entender qué fue lo que orilló a Russell a decir tal cosa, debe tener un fuerte motivo. Así, se estudia su paso por el idealismo, y algunos puntos que antecedieron su deserción de esta filosofía. También se tocan cuáles fueron los motores que impulsaron a Russell en su aventura hacia el realismo. Si bien no es fácil saber qué o cuáles fueron las causas verdaderas de este cambio de ideas en Russell, sí se puede encontrar evidencia dentro de su obra, que permite vislumbrar lo que pudo estar pasando por su mente.

Para saber claramente si Russell habló por hablar, o si lo hizo con fundamento, se tiene que poner atención, en lo que él entendía por 'matemática pura'. Lo más cercano a esto, es la definición que da en *Los Principios de la Matemática*; al comprender esta definición, se puede observar que al terminar su primer borrador, justo unos días antes de escribir su afirmación respecto de Boole, Russell ya tenía claro en su mente lo que era la 'matemática pura'; por ello se estudia en este capítulo el artículo *Recent Work on the Principles of Mathematics*, y comparando este estudio con la obra de Boole, y lo que él entendía pro 'matemática pura' se puede ver en cierta forma, si Russell tenía o no razón al decir que Boole era 'el descubridor de la matemática pura'.

Este trabajo termina, con las conclusiones obtenidas, a raíz del estudio comparativo, entre la obra de Boole y las ideas de Russell. De donde se desprenden los argumentos, que tal vez justifican de alguna forma, el proceder de Russell.

Capítulo 1

# Antecedentes

## 1.1 Introducción

La percepción de cualquier ser humano, con respecto al entorno que lo rodea la realiza a través de sus sentidos. Es de suma importancia, poder relacionar los objetos de nuestro medio, con los objetos preconcebidos por el razonamiento, a estos objetos de la mente los llamamos *conceptos*. Si no se reconoce alguno de los objetos del mundo físico, podemos recurrir a nuestros *conceptos*, para de ahí poder asignarle uno o crear uno nuevo para tal objeto. Lo anterior se da, siempre que se tenga información suficiente, para poder dar de forma objetiva un razonamiento formal. Así, una vez identificados los objetos, basta con observarlos para darse una idea de lo que son. De esta forma, se puede pensar, que estos objetos tienen una relación entre ellos, por lo que *son*, esto es, la relación entre objetos, se da por lo que éstos representan para nosotros según los percibimos, en tanto se les pueda asociar un *concepto* en una *forma*, de modo que tales objetos percibidos se puedan conjuntar en una relación de modo correcto, y se pueda afirmar o negar dicha relación. Algo similar ocurre con los objetos de la lógica y la matemática.

En este sentido, ¿cómo es que entendían en las escuelas clásicas griegas y escolásticas los objetos matemáticos? Antes, se debe saber cómo se dividía la educación de un aspirante a conocer estos objetos matemáticos.

El *Trivium* y el *Quadrivium* eran los esquemas de enseñanza que se aplicaban a todos los miembros de dichas escuelas. El *Trivium* abarcaba el estudio de la gramática, la retórica, y la dialéctica. El *Quadrivium* desarrollaba la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, ciencias que eran indispensables, para la etapa final del aprendizaje de los educandos. La forma en que se estructuraba la instrucción de estas ciencias tenía como fin dotar al individuo de elocuencia en su escritura, en su verbo y en su razonamiento, en base a una argumentación razonada. Con fundamento en lo anterior, las disciplinas del *Quadrivium* permitirían desarrollar una observación más cuidadosa del individuo, dando a éste un mayor conocimiento, racionalmente elaborado del mundo. El estudio que primaba aquí, se centraba en los astros. Hasta finales del siglo XVI los objetos siderales, al no poderse observar más que los propios ojos, y con herramientas muy rudimentarias dichos objetos, no se podía hacer otra cosa, más que especular sus formas y deducir a tráves de la geométria sus movomientos. Las especulaciones metafísicas llevarón a pensar que las formas de las estrellas y planetas eran perfectas e incluso divinas. La geometría hacía posible el estudio de éstas; a través de sus figuras se podía dar una proporción a tales objetos geométricos en base a la aritmética. Al determinar que la geometría era la ciencia que daba fundamento al estudio de los astros, y la aritmética daba sentido a las mediciones de éstos, no era raro pensar que se les llegase a considerar perfectos o divinos dada su relación precisamente con los objetos astrales. De ahí que, los significados de las figuras geométricas y los números, tuviesen una relación asignada a un orden perfecto, de aquí la creencia de los pitagóricos y los platónicos, que los números existiesen en realidad, fundamentado esto, en los nexos de la astronomía con la aritmética. Así, los objetos de la matemática tenían una significación propia, lo que les permitía existir en las mentes de estos pensadores.

Por otro lado al ser objetos de la mente, y no del mundo físico, para

Aristóteles no tenían una representación en la realidad, no podían existir, ya que su concepción de la *forma* requería una participación acticva de los objetos del mundo material, y en este caso, la astronomía no se había desenvuelto de modo conveniente para entender que los astros forman parte del mundo físico. Esto también se debe de entender. Hoy, para nosotros, el hablar de los astros, es hablar de objetos materialmente reales, desde el punto de vista aristotélico.

Las figuras geométricas y los números, tuvieron dos significaciones principales, una divina y otra práctica; la primera se perdió y la otra evolucionó hasta transformarse en la ciencia de la cantidad.

Por otro lado, se ha vinculado al pensamiento humano con la dialéctica, o lógica según la época. Dado que el razonamiento es algo que ha intrigado al hombre, y uno de sus intentos por entenderlo se enfoca en el estudio de la lógica, la inclusión de ésta, ya sea como dialéctica o lógica en el *Trivium*, era una propedéutica que le permitía a los filósofos prepararse para el estudio de otras ciencias, y ahondar más en la filosofía. Dado que el objetivo de su aprehensión, era dotar a aquél que la estudiase de un razonamiento correcto, en consecuencia lo capacitaba para una comprensión ideal de tales disciplinas.

Así, la lógica, en manos de Aristóteles, toma un ideal que perdurará por más de dos mil años. Este ideal se enfoca, a diferencia del platonismo, en que las formas externas de los objetos de nuestro mundo, son como las pensamos. La forma en que pensamos, según Aristóteles, son *conceptos* definidos en nustras mentes por la *susbtancia* de tales objetos. Tal substancia es la esencia que define a un objeto del mundo material, dando *contenido* a la relación entre substancia y conceptos. Esta relación se va a concebir como la *forma* de la substacias y los conceptos. Estos conceptos, substancias y formas se manifiestan mediante el lenguaje. Esto restringirá a la lógica para un ulterior desarrollo, y será hasta la llegada de Las Leyes del Pensamiento, de Boole que la lógica adquirirá un nuevo y renovado impulso.

## 1.2 De la lógica griega a la lógica *Art De Penser*

La lógica obtuvo su principal desarrollo en la antigüedad por Aristóteles, pero no se puede ignorar lo que está detrás de él. Antes que Aristóteles hubo otros pensadores como: Pitágoras, Sócrates y Platón, por ejemplo. Es difícil imaginar que sólo se haga referencia a Aristóteles cuando de lógica se habla. Su obra fue tan extensa que es de suponer que, para él, la lógica era tan sólo un instrumento, y no el fin último de su filosofía. En su trabajo se pueden encontrar conceptos de su lógica, y al evolucionar su pensamiento, el desarrollo de la lógica también lo hace. Sin embargo, ésta se mantuvo casi sin cambios por más de dos mil años. Será a partir del siglo XIX que la lógica comience un desarrollo notable, a tal grado que el hablar de lógica se dificulta.

Por lo anterior, en este capítulo sólo se concentrarán de forma breve los antecedentes de la lógica, desde los griegos, hasta el *Art de Penser*. Lo que aquí se toca no se puede pasar por alto, dado que estos antecedentes son claves para entender a Boole.

### 1.2.1 Platón

La lógica prearistotélica tiene exponentes como Pitágoras, Sócrates, Platón, pero no es hasta éste último que, aún sin poder hablar de lógica como tal, se da la madurez de las ideas que llevarán a Aristóteles a escribir su primer trabajo *la teoría de las categorías*, dando inicio a lo que se llamará 'lógica aristotélica'. De regreso con Platón, se dijo que no se puede hablar de lógica estrictamente, pero hay quienes afirman que Platón da una clara interpretación de ésta. Por ejemplo, Bochenski afirma, que él fue el primero en 'formarse una idea clara de la lógica'. Él toma un extracto del Timeo para hacer esta afirmación:

> [...], que Dios inventó la visión para nosotros, y nos hizo presente de ella para que contemplando los cursos de la inteligencia en el firmamento, los pudiésemos trasladar a los movimientos de nuestro propio pensamiento, de la misma naturaleza que aquellos, en tanto pueden ser lo perturbable y lo imperturbable, y para que tras su indagación minuciosa y una vez efectuado el cálculo de su justo caminar como corresponde a su esencia, ordenemos a imitación de los cursos circulares, libres de todo error en Dios, los de nosotros mismos. [Bochenski 1985, 45]

Platón refiere una idea plantada nuevamente en la percepción, haciendo referencia a la 'visión'. La inteligencia que se deduce aquí es una 'inteligencia superior' a aquélla que muestra sus ideas como objetos, los cuales nosotros percibimos en nuestra mente; una vez identificados éstos, se puede saber que son, no como objetos sino como *conceptos*, conjugados en su esencia, nuestros pensamientos pueden relacionar esos objetos de la 'inteligecia' en 'formas' que nos permitan entender cómo es el mundo. En otras palabras, Platón esboza la 'forma' de cómo se puede entender un objeto que es observable, y en base a cómo lo percibimos, le podemos dar una característica a este objeto según la concepción que se tenga de éste, pero esto no se detiene ahí, no debe de haber error en identificar al objeto, por ello su esencia justifica su veracidad, su existencia. Esto se parece un poco en cómo entiende Aristóteles a los objetos, con la diferencia de que éstos no son ideas de ninguna 'inteligencia'. Así es como se puede interpretar lo que Bochenski afirma de Platón. Desde un punto de vista particular, es poco probable que Platón haya supuesto un concepto que no conocía. Puede pensarse que esta cita de Platón, coincida con lo que se puede pensar como *lógica*, más no que ésta sea una concepción de *lógica* para él. Por lo que se entiende, ésta es una posible definición de lo que los griegos entendían por ciencia. Cualquier otra interpretación tendría que descartar las ideas de Platón, y de esta forma restringir todo a una interpretación de lo que es la *lógica*, que ni siquiera en estos momentos se podría dar.

¿Se puede argumentar a favor de Platón, que sea el primero en exponer lo que se puede entender por argumento lógico? Posiblemente sí, si se entiende qué era para Platón la *Dialéctica*. Aristóteles afirmó que la dialéctica fue inventada por Zenón de Elea, ¿A qué se refería Aristóteles? Presumiblemente a la forma en la que Zenón refutó algunas hipótesis de sus oponentes, al extraer de éstas, consecuencias inaceptables, esto es, se da una hipótesis, y en base a una argumentación válida, se extrae una conclusión contradictoria a la hipótesis. Pero, ¿no es acaso Sócrates quien la aplica de una manera general? Sócrates es presentado en los primeros diálogos de Platón, como aquél que practicaba constantemente la técnica de refutar las hipótesis de sus oponentes, dando en el curso del dialogo, una conclusión última de la hipótesis de su rival contraria a su primera postura.

La dialéctica para Platón es la actitud del verdadero filósofo, de aquél que trata de llegar a la verdad por medio del diálogo, en contraposición a la erística (técnica orientada a refutar una tesis independientemente de su verdad). La dialéctica para Platón era el método filosófico supremo, *el método de las ciencias*, siendo enseñada al final de la educación formal del filósofo. En sus diálogos Platón permite contraponer argumentaciones aparentemente opuestas y frecuentemente complementarias para de esta manera, alcanzar la verdad mediante la explicación de tales argumentaciones.

Platón identifica la dialéctica constituida por dos términos lógicos inversos: (1) La *composición* o *unificación*, que consiste en captar la esencia inmutable de las cosas, mediante una observación progresiva de los objetos, que, en base a la experiencia sensible, llegue a los conceptos más generales; es decir, lo que se llama abstracción o universalización a partir de lo particular; y, (2) La *división* (o particularización), que consiste en hacer una subdivisión de un concepto general a uno particular mediante diferencias internas de los distintos géneros. Por ejemplo, si se quiere llegar al concepto de hombre a partir del de animal se procede como sigue: Tomamos el concepto 'animal' y lo subdividimos en el concepto de 'animal bípedo' y 'animal no-bípedo'. Al seguir con la subdivisión, ahora tenemos el concepto 'animal bípedo' y lo subdividimos en los conceptos complementarios 'animal bípedo sin plumas' y 'animal bípedo con plumas'. Se procede de igual forma con el concepto 'animal bípedo sin plumas' y lo subdividimos en sus conceptos complementarios 'animal bípedo sin plumas y lampiño' y en 'animal bípedo con plumas y no lampiño'. Entonces, el concepto 'animal bípedo sin plumas y lampiño' que constituye una posible definición de hombre y, por lo que se puede interpretar en una particularización del concepto 'animal'. Con esto, se puede identificar en Platón, una idea muy similar, en cuanto a la asignación que se hace respecto a los conceptos de los términos, conceptos que se pueden identificar como internos, dando una asignación a estos términos que los identifica o define, antes de relacionarlos con otros. En el ejemplo del término 'animal', se extrae otro término 'hombre', tal que se puede entender, que hay términos, que contienen otros términos con lo que se pueden relacionar. Del mismo modo, en el capítulo tres, Bradley da conceptos totales, estos conceptos tienen una definición de la cual se pueden extraer las demás que definen al concepto. En este punto, se puede encontrar una afinidad entre Platón y Bradley. Pero la dialéctica de Platón no se basa solamente en conceptos generales o individuales, también se pueden encontrar otras cosas que la hacen más afín, con lo que se entiende por lógica.

La dialéctica platónica, se entiende como método racional; que se relaciona con la filosofía y la ciencia. Otras características de la dialéctica de Platón son: 1) Es una actividad cognitiva, que ejercita la razón; 2) el objeto de estudio es el conocimiento del mundo perceptible, de las relaciones existentes entre las Ideas; 3) por ser una disciplina estrictamente racional, no se apoya en la percepción sensible; por usar sólo la razón, el conocimiento que se genera es estricto, universal y necesario; sin hipótesis. Ninguna premisa que no haya sido cuestionada es aceptada, hurga hasta encontrar el sentido último de cada razonamiento que le ocupa. De esta forma, se puede justificar la afirmación que hiciera Bochenski en un análisis anterior, pero, aún en estos términos, es difícil encontrar en Platón una definición formal de lógica.

### 1.2.2 Aristóteles

Los trabajos de Aristóteles sobre lógica no están contenidos en una sola obra. De hecho, él no hace referencia de los textos del *Organon* como tal. Los libros que componen este compendio fueron escritos en distintas etapas de su vida. No fue hasta el siglo I a. c. que Andocrino de Rodas ordenó y editó el *Corpus Aristolelicum* (el Organon), el cual está estructurado de la siguiente forma: *Las Categorías, La Hermenéutica, Los Tópicos, Los Elencos Sofísticos, Los Primeros Analíticos y Los Segundos Analíticos.*

La concepción de que la lógica comienza con la obra de Aristóteles se debe a una vacilación entre dos ideas. La primera concibe a la lógica como prolegómeno de toda investigación científica, filosófica o simplemente pertenece al lenguaje ordinario. De esta forma, es que la lógica no es parte de la filosofía, a lo sumo, es la entrada que permite acceder a cualquiera de sus partes (la teórica, la práctica y la poética). La segunda ve a la lógica como el análisis de los principios según los cuales se haya articulada la realidad. Así como en Platón podía ser considerado el razonamiento como el *qué* de las cosas, en Aristóteles podría ser considerado como el *por qué* de las cosas. Pero, además en las obras de Aristóteles aparecen los siguientes temas: Estudios acerca del uso de los términos en el lenguaje ordinario; estudios sobre el arte de la argumentación y de la retórica; estudios de metodología de la ciencia, incluida su concepción del método inductivo; el estudio de la organización de los sistemas deductivos; y, finalmente, la teoría del razonamiento deductivo o silogístico. De aquí que la lógica de Aristóteles parece seguir el tratado de una ontología general [1]. Esto se manifiesta en una serie de proposiciones que pueden resumirse del siguiente modo:

1. La lógica es un instrumento para el pensar y supone un pensamiento.
2. El pensamiento supone una realidad pensada, pues el pensar carece de espontaneidad y es sólo relativo.
3. Es necesario, en vista de ello, desarrollar una teoría del concepto como expresivo del ser *constitutivo* de lo real.
4. La lógica puede de este modo convertirse en ciencia de los principios de lo que es.

Aristóteles [*Metafísica* XI, 7] afirma que la lógica es indispensable para la investigación, y que los principios silogísticos corresponden al filósofo y a quien especula sobre la naturaleza de cualquier sustancia. Así, él reconduce a la lógica un supuesto indispensable para la teoría de la sustancia. Esta teoría es el fundamento de todo conocimiento intelectual. La 'forma' es a la vez la 'razón esencial' y la 'razón cognitiva' del ser; en tanto que la 'razón esencial' es sustancia la 'razón cognitiva' es concepto. La 'forma', pues, garantiza la correspondencia entre el concepto y la sustancia y, por tanto, la verdad del conocimiento y la racionalidad del ser. Por esto Aristóteles dice que el ser y la verdad se encuentran en relación recíproca. Por ejemplo, si el hombre existe, la afirmación de que el hombre exista es verdadera; y recíprocamente, si es verdadera la afirmación de que el hombre existe, el hombre existe. Pero Aristóteles añade que en esta relación, el fundamento es

[1] La ontología trata de describir o proponer las categorías y relaciones básicas del ser o la existencia para definir las entidades y de qué tipo son. Las entidades comprenden los objetos, las personas, los conceptos, las ideas, las cosas, y todo algo de lo que se puede cuestionar su existencia. En cierto modo reflexiona sobre las concepciones de la realidad, sobre cómo son definidas las entidades de la realidad por el estudio.

la realidad, y la verdad del concepto se funda en la sustancia de la forma y no viceversa. La metafísica precede y fundamenta la lógica. Por ello, se puede decir que Aristóteles no pretendió fundar la lógica como ciencia formal, en el sentido moderno del término, o sea, de disciplina sin objeto o sin contenido, constituida únicamente por proposiciones tautológicas. Según Aristóteles, la lógica tiene un objeto que es la estructura de la ciencia en general que luego es la misma estructura del ser que es objeto de la ciencia. Para Aristóteles la lógica debe analizar el lenguaje declarativo, que es el propio de las ciencias teoréticas, en el cual tienen lugar las determinaciones de verdadero y falso según sea la unión o separación de los signos (de que consta una proposición), reproduzca o no la unión o la separación de las cosas.

En el lenguaje declarativo no tiene algo de convencional. Esto es según Aristóteles, mientras las palabras de algún lenguaje son convencionales, el lenguaje puede tomar diversas formas, así de una lengua a otra, las palabras son distintas. Pero las palabras se refieren a afectos del alma que son los mismos para todos y constituyen imágenes de objetos que son los mismos para todos. Por tanto, se puede decir que, para Aristóteles, el lenguaje es convencional en su diccionario, no en su sintaxis. En consecuencia, la lógica ha de mirar a esta sintaxis para analizar la estructura fundamental del conocimiento científico y del ser.

### El Concepto

Por otro lado, el *concepto* para Aristóteles se interpreta como la estructuración razonada de un objeto, la cual marca la diferencia entre lo que se percibe mediante los sentidos, la imaginación y los recuerdos. Las propiedades del *concepto*, se dan por *comprensión* y *extensión*: La *comprensión* indica las características esenciales de un concepto; tales características se pueden dividir en simples y compuestas. Un concepto con una sola característica se define como simple, pero un concepto con dos o más características se define como compuesto, dichos conceptos son llamados *sujetos*. La *extensión* está determinada, por la cantidad de conceptos definidos por comprensión, a otro concepto, al cual se le asigna una característica particular, la de afirmar algo sobre los conceptos dados por comprensión. Estos conceptos extencionales pueden ser singulales o plurales, esto es que pueden afirmar a un concepto o a varios. Estos conceptos extencionales son denominados *predicados*.

El *sujeto* no se debe de ver como el sustantivo gramatical del lenguaje natural. La composición de un *sujeto* dentro de la lógica aristotélica es el conjunto de palabras que hace referencia a un concepto; por ejemplo, en la proposición 'los televisores de pantalla plana, tienen una mejor resolución de imagen'. En el lenguaje natural 'los televisores' representan al sujeto; pero, para el lenguaje desarrollado por Aristóteles, el sujeto es 'los televisores de pantalla 'plana'', 'tienen' es la cópula y 'una mejor resolución' es el *predicado*.

Ahora, los predicables son divididos por Aristóteles de la forma que sigue: 1) El género. Éste representa lo que es la esencia que es común a varios conceptos; 2) La especie. Es lo que define al concepto o la esencia del concepto; 3) La diferencia. Trata la parte del concepto que no es común a él, sino que es una característica; 4) La propiedad de la especie. Representa una cualidad necesaria de ésta; 5) El accidente. Expresa una cualidad contingente, que puede estar o no en el concepto. En la medida en que las formas remiten a los conceptos de ser extramentales, adquieren un definición externa, a diferencia de la idea platónica de concepto. Así, los objetos captados por la mente son como tales en la realidad.

Los conceptos son objetos mentales que se expresan por medio del lenguaje, a éstos se les denomina *términos*. Los términos que expresan un concepto diferente, pero que expresan un significado en común se reconocen como análogos. El análisis de los distintos tipos de analogía interesó mucho a los filósofos medievales y algunos problemas de la relación entre lo divino y lo humano fueron tratados con el desarrollo del análisis de los distintos tipos de analogía.

### El Juicio

La relación dada entre dos términos da lugar a un *juicio*. Si la relación dada es coherente e inteligible, entonces el juicio se puede afirmar o negar, y en caso contrario, el juicio puede ser una contradicción o un absurdo. Como ya se adelantó, el sujeto de un juicio es el término que se afirma o niega, según sea el predicado. El predicado es el término que se afirma o niega del sujeto. Los juicios pueden distinguir la interpretación de su *contenido* y de su *forma*. El contenido de un juicio está dado por los términos que se relacionan; y la forma es aportada por la relación que se establece entre los términos, a través del verbo *ser*.

La forma en que se representa a un juicio es establecida por Aristóteles, asignándole al sujeto el signo $S$ y al predicado el signo $P$. Así, el juicio se escribe '$S$ es $P$'. Si el juicio es afirmado queda '$S$ es $P$', pero si es negado se representa '$S$ no es $P$'.

Los juicios se clasifican de distintas formas, por ejemplo: Por la extensión del sujeto, en universales, particulares, singulares; por la cualidad de la cópula, en afirmativos y negativos; por la relación entre los términos del juicio, en categóricos, hipotéticos y disyuntivos; y, por el modo en que es dada la relación entre sus términos, en apodícticos, asertóricos y problemáticos.

De todo lo anterior se deduce que, la forma en su contenido como se señaló, es razón cognitiva y razón esencial. Así, al representar un juicio mediante conceptos, y fundamentando su verdad es su correspondencia con los objetos del mundo físico, entonces dichos objetos existen externalmente del conocimiento.

De aquí radica la importancia de entender la forma aristotéloca del juicio, dado que en el sguiente capítulo se verá como Boole transformó la forma del juicio.

**Deducción**

La deducción tiene dos razonamientos, uno deductivo y otro inductivo. El primero tiene como eje las reglas de inferencia, que están compuestas por encadenamientos de juicios, ser parte de una premisa, para llegar por medio de las reglas de inferencia a una conclusión. La premisa es una proposición conocida, de la que se parte para encontrar otra desconocida, la cual es consecuencia de las reglas y de la premisa. El razonamiento inductivo, se alcanza deduciendo de lo particular lo general, pero considera que el conocimiento científico se logra de forma inversa, es decir, al deducir lo particular de lo general. Así, Aristóteles da mayor fuerza al análisis del razonamiento deductivo, y en especial al razonamiento que se deduce mediante los silogismos. El razonamiento deductivo extrae de una verdad universal otra particular. Esta forma de razonamiento va del todo a las partes.

### 1.2.3 Los estoicos

Los estoicos trabajaron con la lógica de los discursos (la lógica de los discursos continuos) y la lógica que se identifica con la retórica. Los estoicos dividían los discursos en preguntas y respuestas. Definían a grandes rasgos la retórica como 'los discursos de lo que es verdadero y de lo que es falso y de lo que no es ni verdadero ni falso'. Pero la división de los discursos en preguntas y respuestas podía ser interpretada, por una parte, como verdadera; y, por otra parte, como falsa. El problema de la interpretación aquí yace más en las repercusiones de traducción, que en nociones epistémicas [2]. Por ejemplo,

[2] Una noción epistémica, se puede entender como una noción de conocimiento. La epistemología es el estudio de la producción y validación del conocimiento científico. Se ocupa de problemas tales como las circunstancias históricas, psicológicas y sociológicas que llevan a su obtención, y los criterios por los cuales se lo justifica o invalida.

ellos debieron haber estudiado los sofismas o las paradojas, sobre cuya verdad o falsedad no se puede decidir con el tercer criterio del discurso, lo que no es ni verdadero ni falso.

A la lógica estoica se le puede dividir en cuatro partes:

1) Palabras
2) Interpretación de las palabras
3) Gramática de las palabras
4) Interpretación lógica de las cosas

La última de las subdivisiones tiene por objeto estudiar las representaciones, las proposiciones, los razonamientos y los sofismas.

Los estoicos dieron su mayor aportación a la lógica al ser ellos los primeros en estudiar la lógica de enunciados, esto es, las relaciones entre enunciados unidos por partículas como 'y', 'o', 'si [...] entonces [...]', etc. Los estoicos también se interesaron por los razonamientos en forma de argumento y no en forma de implicación. Esto es, de una serie de premisas *p, q, r, ...* afirmadas y una conclusión derivada de ellas, en lugar de premisas condicionales en forma de enunciados que implican una conclusión también en forma de enunciado. Pero uno de los aspectos más fundamentales que estudiaron fue la lógica de las partículas conectivas entre enunciados.

En este tipo de relaciones lógicas, uno de los temas más debatidos fue la lógica de los condicionales. Dos fueron las interpretaciones principales que se dieron acerca de las condiciones de verdad de los condicionales. Para Filón de Megara, los enunciados del tipo 'si [...] entonces [...]' sólo son falsos cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso; en todos los demás casos es verdadero. Este condicional fue denominado por Russell implicación, en dos variantes, la implicación material y la formal. Por otro lado, Diódoro de Cronos, defendía la idea de que para que un enunciado condicional sea verdadero, requiere que 'en ese momento' el consecuente sea verdadero, y no debe de ocurrir que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Entonces, 'si está nublado entonces está despejado el cielo' es falso, siempre que se haga mención de este enunciado. Para Diódoro la verdad del condicional sólo se da si constituye una implicación material siempre verdadera; podemos llamarlo implicación material permanente.

### 1.2.4 La lógica medieval

Durante la Edad Media, la lógica griega es retomada por algunos filósofos medievales. Alcuino, bajo el mandato de Carlomagno, escribe *La Dialéctica*. Esta obra se escribió en forma de dialogo para ser utilizada en la educación elemental de dicha época.

La lógica se convierte rápidamente en un tratado de nociones generales, que sólo encuentran un uso práctico en la dialéctica. Las discusiones relacionadas con la naturaleza de los universales y la gramática le dan por un momento un nuevo auge a la lógica. Pedro Abelardo es el primero en destacar en sus textos *La Dialéctica* donde reestructura la obra de Boecio, y Sic et Non, que significa 'Sí y no'.

La lógica tuvo un uso limitado hasta comienzos del siglo XII, y no fue hasta que se tuvieron las obras lógicas completas de Aristóteles que se dio un renovado impulso a la lógica escolástica, conocida como la *ars nova*. Este desarrollo es fundamental para la lógica del siglo XIII, que se enseñaba en las universidades de esa época, y llegó a tomar el camino de la lógica formal, fundamentada en los cuatro primeros textos lógicos aristotélicos, compilados en el *Organon*. Pedro Hispano es la figura más representativa de este período. Sus obras de lógica fueron los *Summulae Logicales*, manuales que se usaron con relativa frecuencia incluso en el siglo XV. En Oxford, la lógica escolástica encuentra sus mayores representantes en Roberto Kilwarby, Juan Duns Escoto y Guillermo de Occam. Las aportaciones más relevantes de esta etapa son: La teoría de la referencia; la teoría de la implicación; algunos trabajos sobre modalidades, y el trabajo con paradojas y el lenguaje.

### 1.2.5 Un periodo de transición

El desarrollo de la dialéctica en la Edad Media permitió un análisis más detallado de los sofismas, estudiados por los estoicos. En consonancia, se desarrolló también el estudio de las proposiciones y los términos que las componían. Esto derivó en la estructuración de las reglas a seguir en las disputas dialécticas, ya fuera para defender una tesis o atacarla. De este periodo de disputas dialécticas se encuentran documentos y textos sobre las controversias, que estudian las inferencias entre proposiciones simples y compuestas y los *sophismata*. Debe entenderse que un *sophisma* es una proposición compuesta con una falta o a una ambigüedad en su construcción. Esa proposición es estudiada por sí misma y, en la práctica escolar, sirve en muchos casos para que el maestro desarrolle un punto particular de la disciplina que enseña. Proposiciones como 'este enunciado es falso' y 'yo digo mentiras, cuando hablo con la verdad' tienen distintas complicaciones para el lenguaje oral o escrito, unas son imposibles y otras insolubles, lo que nos remite a casos particulares de *sophismas*.

Lo que los lógicos medievales pretendían era estudiar el único instrumento de razonamiento del que se disponía: La lengua latina. Ellos construyeron un álgebra del lenguaje y se esforzaron mucho por disipar sus ambigüedades y extraer las reglas de su uso exacto. Este mismo uso de la lógica permitió que poco a poco se cayera en la creencia de que la lógica no era realmente una disciplina que desarrollara otras, sino que sólo servía para demostrar la elocuencia de los graduantes en filosofía, los cuales en muchas ocasiones caían en la soberbia y la pedantería. En los años en que se considera que germina el renacimiento científico en Europa, la lógica pasa a un período de abandono, ya que el desarrollo científico provoca que los filósofos dirijan su mirada hacia otras áreas, como la física. Este descuido provocó que su uso sólo fuera de orden académico. Este desinterés por la lógica permitió que surgieran un mundo de guías, pero sin aportaciones significativas a esta materia, por ejemplo *The rule reason* de Thomas Wilson (1551), y el *The art of reason* de Raphe Lever (1573). Por esta época, un hombre que se destacó como lógico fue Pierre de la Ramée, mejor conocido como Petrus Ramus. Su trabajo *Aristotelicae Animadversiones* de 1543 llamó la atención ya que en él acusa a Aristóteles de oscuro y confuso. Esto le atrajo enemistades, pero aún así alcanzó gran popularidad por otros trabajos como *Scholae in Liberales Artes* de 1565. Pero la obra que más se destaca de él en lógica es su *Dialectica* versión latina de 1556.

Para Leibniz el desarrollo de un lenguaje universal era algo llegó a tener un punto central en el trabajo que desarrolló durante su vida. Este proyecto se puede enfocar en tres partes: La primera, él busca el desarrollo de un alfabeto que englobe todas las posibilidades de combinación lógica; la segunda, trata sin éxito, la creación de un lenguaje universal; y la tercera, también sin éxito, intenta compilar una enciclopedia general, en la cual se depositaría y se coordinaría el saber conceptual, se reducirá en último término a descubrir todas las combinaciones posibles de los primeros elementos primitivos y sus conexiones en este reino de las verdades esenciales. A sus veinte años, había escrito sobre un género de arte combinatoria, que tendría por cometido hallar una especie de alfabeto de los conocimientos humanos, que permitiera, mediante la combinación de sus letras y el análisis de las palabras compuestas de aquéllas, descubrir y juzgar todo lo demás.

Leibniz era un gran admirador de la silogística aristotélica, aunque no creía que todos los argumentos pudiesen ponerse en forma de silogismo. Por ejemplo, los argumentos por inversión de la relación, como 'Tito es más alto que Cayo. Por tanto, Cayo es más bajo que Tito'. Sin embargo, no llegó a crear una lógica de relaciones debido a que pensaba que éstas podían reducirse a conjunciones o concatenaciones de predicados monádicos. Sostuvo también que las figuras de los silogismos no son tres, sino cuatro, obteniéndose entonces veinticuatro, y no catorce, formas de silogismo válidos.

En *De Arte Combinatoria*, Leibniz pensó en la creación de una 'Caracteristica universales' o lenguaje simbólico universal, que fuese un instrumento de cálculo del pensamiento. Su ideal era que las disputas y diferencias de opinión se pudiesen resolver mediante el cálculo. De acuerdo con eso, los disputantes se sentarían, tomarían sus plumas y dirían: 'Calculemos'. En este primer esfuerzo, él ensayó un alfabeto que debía ser básico y completo. Además, se tenía que disponer de un procedimiento que englobara todas las posibles combinaciones. Pero el amplio uso de cálculos en su obra primaria hizo que se perdieran de vista estos dos puntos. A pesar de esto, logró demostrar que sus veinticuatro formas del silogismo eran válidas.

De acuerdo con su tesis en *De Arte Combinatoria*, Leibniz presentó un método novedoso de representar a la lógica. La sola idea de formar un alfabeto y una sintaxis que dieran forma a un nuevo lenguaje fue sobresaliente. Mostró los números, no con su usual interpretación, sino que él da una definición particular a cada uno de ellos, por ejemplo: El '1' se define como el *punctum*, el '2' como el *spatium* y los números racionales representan por definición distintas clases, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}$$

representa al primer término de la segunda clase. La falta de una idea clara de que este código tuviera un uso práctico en lo que se pretendía, quizás lo llevó a abandonar esta idea, dado que ya no volvió a intentar desarrollarla. Aunque Leibniz tenía una firme creencia en el desarrollo de la lógica aristotélica, su idea de que el concepto del predicado está incluido en el concepto de sujeto, lo llevó a otros desarrollos, siendo el último, el que más se acerca a la lógica estructurada por Bradley, la cual jugará un papel principal, para el desarrollo de la lógica moderna.

Leibniz trazó la línea de su trabajo lógico con una regla que para él era fundamental, la regla de no contradicción. Asimismo, se enfocó en dos fórmulas $aa = a$ y $ab = ba$ El primer principio se conoce hoy como la idempotencia, esto es por ejemplo, 'pedro es pedro, entonces pedro'; el segundo principio es dado de forma muy semejante a lo que hace Boole en su trabajo. Con estos principios,los cuáles encuentran su equivalente en la tabla que adelante se esboza, donde cada término simple debía estar definido por un número primo, y cada término complejo debía estar definido por el producto de sus números primos. Entonces, si la proposición era verdadera debería ser el número-sujeto divisible por el número-predicado, esto es si $a = yb$, donde $a$ representa al número-sujeto y $b$ al número-predicado, entonces una proposición afirmada es verdadera. El problema con esto es que no hay lugar para proposiciones negativas.

Para Leibniz la interpretación de estos cálculos era de dos formas: Una extensional y la otra de contención; la primera está dada en términos aristotélicos; la segunda determina que el significado del término-predicado debe estar contenido en el término-sujeto, lo que después retomará Kant para desarrollar su teoría sobre los enunciados analíticos y los enunciados sintéticos. En términos kantianos Leibniz estaría trabajando con enunciados analíticos, esto sin entrar en detalle.

En algunas dificultades de la lógica, Leibniz propone dos lecturas de las proposiciones categóricas. Son las siguientes:

| **Forma Aristóteles** | **Forma Latin** | **Forma Leibniz** |
|---|---|---|
| Todo $A$ es $B$ | $A$ no $B$ es no-ens | $AB = A$ |
| Algún $A$ no es $B$ | $A$ no $B$ es ens | $AB \neq A$ |
| Ningún $A$ es $B$ | $AB$ es no ens | $AB \neq AB$ ens |
| Algún $A$ es $B$ | $AB$ es ens | $AB = AB$ ens |

Se puede observar que dada la contención o inclusión propia del predicado en el sujeto, tanto $A$ como el predicado $B$ están dados en el sujeto $A$, es decir, $AB \neq A$; pero también podemos ver que $A \neq AB$, y esto se debe a que para Leibniz todo enunciado o proposición, tanto de razón como de hecho, afirma en el fondo una identidad (o su negación). Si la identidad es una verdad de razón, ésta se demuestra en un número finito de pasos. Si es una verdad de hecho se necesita, para su demostración por parte de nosotros (no de Dios), un análisis infinito, es decir, una aproximación continua e interminable a una identidad que sólo es vista por la mente divina.

Tiempo después de que Leibniz retomara su trabajo en lógica, al parecer no hubo grandes cambios en la teoría, pero su aproximación en los cálculos fue mayor. También trató de solventar el problema con la negación, lo que lo llevó a cambiar la multiplicación por la adición; en consecuencia, hizo uso del signo de la sustracción para tratar de tomarlo como la negación lógica, de forma que $A - C = B$ si y sólo si $A + B = C$, donde $B$ y $C$ no poseen algo en común. Algo más que se debe destacar es que Leibniz, a pesar de seguir dando una interpretación intencional a su trabajo en *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis*, él usa el signo $\bigoplus$ para diferenciar al signo $+$ de su uso numérico; trabaja de forma semejante al álgebra de interpretación numérica, pero sin ser realmente un signo de la Ciencia del Número. A Leibniz sólo le faltó un paso para crear un lenguaje formal simbólico, sacudirse la interpretación aristotélica del juicio.

### 1.2.6 La lógica del ***Art De Penser***

Los lógicos del *Art De Penser* no conciben la lógica como una disciplina solamente, sino que la ven como un arte: El arte que enseña no a combinar palabras y fórmulas, sino a pensar correctamente. Así, la lógica tiene que convertirse en un instrumento adecuado para servir a las demás disciplinas del conocimiento humano. Por consiguiente, es inútil perder el tiempo con silogismos elaborados mediante ejemplos del todo artificiosos. Si la enseñanza quiere ser no sólo entretenida, sino también quiere conseguir resultados valiosos y útiles, entonces debe basarse en ejemplos de razonamientos que se utilicen de modo efectivo en los diversos ámbitos del saber, la literatura y la vida. Además, la lógica del *Art De Penser* se propone ofrecer las reglas de los razonamientos correctos, y su utilidad consiste, sin duda, en tales reglas. Sin embargo, 'no debemos creer siquiera que tal utilidad vaya muy lejos, ya que la mayor parte de los errores humanos no consiste en verse engañados por consecuencias erróneas, sino en caer en juicios falsos de los que se extraen consecuencias erróneas'. Los hombres, en suma, razonan en general de un modo correcto, es decir, no se engañan al extraer determinadas consecuencias de las premisas; lo que ocurre es que a menudo juzgan equivocadamente, es decir, no saben establecer las premisas. En resumen, no es cuestión de corrección, sino que es problema de la verdad, por lo cual el arte de razonar (esto es, deducir consecuencias basándose en premisas) debe estar precedido por el arte de pensar (el arte que enseñe a establecer premisas válidas).

El pensamiento asume la forma de lenguaje, pero el lenguaje no debe enclaustrar o distorsionar el pensamiento. La forma lingüística no debe torcer o viciar las operaciones lógicas. La función de la lógica, del arte de pensar, consiste justamente en poner en claro el auténtico pensamiento que se encuentra debajo de las apariencias de la forma verbal, ayudándonos a remontarnos desde la *forma* hasta el *significado*. Éste es el que debe permitir una interpretación de la *forma* y no es ésta la que impone el significado. La noción de un pensamiento que está por debajo de las más diversas formas lingüísticas condujo a la concepción de una gramática general. La intención específica de dicha gramática general es llegar a aquellas estructuras fundamentales que rigen la mente humana en general, y que puede constatarse en el *interior* de las diferencias existentes entre las lenguas históricas.

## 1.3 La interpretación de lo que es la matemática

Se puede especular sobre el origen de la matemática, y sobre las interpretaciones que ha recibido a lo largo de la historia. Se puede partir desde las necesidades básicas de los comerciantes, los agrimensores, los sacerdotes etc. En la mayoría de los casos, se le dieron tres tipos de interpretación. La primera era mística o divina; la segunda era simbólica; y la tercera era práctica. El primer concepto fue desarrollado por diversas culturas desde los asirios hasta nuestros días. La creencia en seres perfectos divinos, y figuras de igual forma perfectas, llevó a esta diversidad de culturas a dar prioridad a cierto tipo de enseñanzas. Por ejemplo, la escuela pitagórica tendió un puente entre los números que ellos llamaban conmensurables (los enteros positivos) y lo divino. Por ejemplo, los números pares eran compuestos y, por lo tanto, eran imperfectos; mientras que los impares eran indivisibles, por lo tanto tenían una relación más estrecha con la divinidad. Los pitagóricos usaron la representación geométrica y la aritmética en conjunto para dar fundamento a estas ideas de divinidad de los números, teniendo siempre en cuenta una divinidad superior y otra interior. Por ejemplo, el ternario o triángulo divino representaba una unidad dada por tres entidades supremas; el pentagrama, símbolo de mucho significado para los pitagóricos, significaba la divinidad humana; y, así con el siete y el nueve, los cuales representaban elementos más elevados. Por esto los números impares eran más cercanos a lo trascendente, a lo supremo. Pero al percatarse que el número $\sqrt{2}$ no era, ni número perfecto ni imperfecto, entonces entraron en pánico. Dadas las ideas que tenían en relación con lo infinito, no era posible que un número pudiera poner en tela de juicio la infinidad del ser supremo. Las enseñanzas de los maestros serían cuestionadas si se daban a conocer estos hechos, por lo que decidieron guardar su secreto, hasta que uno de los miembros de esta escuela decidió romper el silencio a este secreto, lo que le costó la vida.

La geometría, en este punto, tenía que ver con lo perfecto de las figuras que se trabajaban. Ésta era usada para el estudio de la astronomía, y dado que los astros eran considerados objetos perfectos, entonces al triángulo, al cuadrado, al pentágono, a la circunferencia etc., se les asignó el estatus de lo perfecto, de lo divino. La parte simbólica de la interpretación ha tomado diversas vertientes. Las interpretaciones simbólicas anteriores eran del dominio exclusivo de ciertas sociedades o escuelas, dejando para el uso común el carácter práctico de la interpretación numérica y geométrica, siendo los comerciantes y agrimensores los que llevaban a la práctica éstas.

La geometría y la aritmética, durante siglos se trabajaron como disciplinas separadas la una de la otra. La geometría euclidiana, por largo tiempo, fue el esquema de formalismo y rigor en una demostración lo que se tradujo en varios intentos por demostrar que el quinto postulado (el de las paralelas) se podía deducir de los otros cuatro, siendo Ptolomeo y Proclo los que intentaron en un principio demostrar este hecho. No fue hasta el siglo XVIII que Saccheri intentó una forma distinta de demostrar que el postulado de las paralelas es una verdad necesaria. La novedad estribaba en no intentar una demostración directa sino una demostración de que la verdad de este postulado se siguiera de su propia negación. Así tomó un equivalente de este postulado propuesto por Clavius:

> En los extremos de una línea recta $AB$ se levantan dos perpendiculares $AC$ y $BD$ de la misma longitud, uniéndose por la recta $CD$. En el cuadrilátero resultante de los ángulos $ACD$ y $BDC$ serán iguales a los ángulos $CAB$ y $ABD$ lo que indica que ambos ángulos son rectos.

La demostración de Saccheri consiste en negar que los ángulos sean rectos, lo que lo lleva a trabajar, en primera instancia, con la suposición de que dichos ángulos son obtusos, y luego con la suposición de que los ángulos son agudos. Esto hace que Saccheri demuestre los primeros teoremas de lo que un siglo más adelante se desarrollará como geometrías no-euclidianas. Por ejemplo, en el primer caso, suponer que los ángulos internos de un cuadrilátero son obtusos llevará a Saccheri a que éstos en su conjunto suman más de trescientos sesenta grados. Y, si se supone que los ángulos internos del cuadrilátero son agudos sumarán menos de trescientos sesenta grados. En el primer caso, se desarrollará la geometría elíptica, y, en el otro, se desarrollará la geometría hiperbólica. Esto fue fundamental para el desarrollo de nuevos sistemas axiomáticos, lo que permitiría, a mediados y finales del siglo XIX, desarrollar las teorías formalistas y logicistas que predominarán para tratar de dar una fundamentación de la matemática. Pero no será hasta después de 1867, en la disertación de Riemman *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Acerca de las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría), que las geometrías no-euclidianas serán tomadas en serio.

Algo que es de suma importancia en la matemática es que todo sistema matemático sea consistente. Esto es que el grupo de axiomas que componen dicha teoría, no provoque contradicciones dentro del mismo sistema. El primer sistema axiomático fue la propia geometría euclidiana, y más tarde las geometrías no-euclidianas serían las que continuarían, en lo que posteriormente se transformaría en una regla general en todo sistema matemático.

En realidad, el desarrollo de la aritmética fue muy distinto desde un inicio al de la geometría. La aritmética no partió de algún sistema axiomático. Se puede pensar que su desenvolvimiento tuvo más que ver con diversos tipos de interpretación. Tal vez en un inicio muy primitivo se le daba una interpretación a los números puramente de adjetivos. Esto no significa que algo tuviera la propiedad de dicho adjetivo. Por ejemplo: cuando se afirma que ‘Hay dos perros en el patio’, no se quiere decir aquí que cada perro tenga la propiedad de ser dos, sino que se sobreentiende, de forma muy natural, sin entrar en discusiones, que se hace referencia a dos objetos que son perros y que están en el patio. Pero hay otro tipo de enunciados que sí hacen referencia a objetos que no están representados en el mundo físico. Por ejemplo, los números primos que están entre el uno y el diez son el dos, el tres, el cinco y el siete. Aquí los objetos de estudio son los números en sí, pero ahora juegan el papel de estar en el sujeto de esta oración, y los adjetivos que tenemos son 'números' y 'primos'. Pero éste no es el tema de discusión de esta tesis, sólo se quiere hacer ver que la idea de número más antigua pudo haber estado relacionada con enunciados del tipo 'Hay dos perros en el patio'. En un sentido más llano, la interpretación que se puede deducir fácilmente es la de relacionar los números con objetos del mundo físico. El otro tipo de enunciados vendrá más tarde con la evolución y el desarrollo de nuevas herramientas dentro de lo que se conoce hoy como aritmética.

De lo anterior no resulta tan complicado suponer qué es la matemática; una disciplina que se dedica a contabilizar, medir o dar valores que acerquen a la mente humana a entender mejor su entorno. Esta forma de entender a la matemática, incluso hoy en día es muy común, especialmente en un nivel más básico de su estudio. Pero en niveles más avanzados la matemática puede estar hablando de lo que sea, no se limita a dar representaciones cuantitativas de lo que es el mundo, sus aplicaciones pueden involucrar casi culaquier cosa u objeto que exista, incluso los que no se han descubierto aún; la matemática realmente puede dar cualquier representación, de todo aquello que cumpla con su estructura. Pero eso es hoy, ¿qué hay de la interpretación de lo que trata la matemática hasta antes de Boole? Euler da una posible respuesta a esta interrogante: "La matemática, en general es la ciencia de cantidad; o, la ciencia que investiga los medios de medir la cantidad" [Euler 1972. 12].

En una etapa más avanzada, el lento desarrollo de la aritmética en los países europeos se debió al uso de sistemas numéricos, como el romano, que no eran demasiado amigables para el desarrollo y operación de números muy grandes. No fue hasta la introducción del sistema de numerales indo-arábigo que se pudo dar un desarrollo constante en la teoría de los números, y con la introducción de signos como + para la suma y el × para el producto se dio un impulso mayor en su desarrollo. Pero la idea de cantidad no desaparecía, de hecho, en los textos anteriores a la primera mitad del siglo XIX se hablaba en términos de 'valores' para lo que hoy entendemos como 'variables'. Como se mencionó anteriormente, una de las primeras propuestas de una interpretación diferente a la de cantidad, (tal vez sin proponérselo) fue el intento de Leibniz de desarrollar un lenguaje formal simbólico. Pero el desarrollo de la aritmética, y el descubrimiento de nuevos números que poco a poco se fueron integrando a ésta, llevó a los matemáticos a concluir la creencia de que la matemática era la teoría de las cantidades. Para finales del siglo XVIII y principios del XIX, los intentos por redefinir la matemática comenzaron a tomar forma. Por ejemplo, Lagrange, con su teoría de las funciones analíticas, mostraba que los objetos algebraicos pertenecían a un lenguaje formal. Dichos objetos se definen dentro de este lenguaje como fórmulas bien formadas, las cuales se operan conforme al modelo matemático de las cantidades [Ferrano y Panza 2006, 6], en consecuencia, los objetos de este lenguaje formal pueden ser cualquier cosa, no sólo valores que representen una cantidad. Para Lagrange, las fórmulas no son indiferentes a los valores que se les asigne a las variables. Entonces una expresión $f(x)$ se dice que está bien formada, mientras no se asigne un valor constante a la variable que pueda transformar a ésta en una expresión que no esté bien formada. Por ejemplo: Sea $f(x)$ un expresión bien formada, definida como

$$f(x) = \frac{a}{x-a}.$$

Esta expresión está bien formada, pero si se toma $a$ por $x$, entonces

$$f(a) = \frac{a}{a-a},$$

la cual se ve como una expresión que no está bien formada. Para Lagrange, $f(x)$ es una expresión bien formada, mientras no suceda que $x = a$. Si esto ocurre, simplemente la fórmula no está definida. Se puede argumentar sin embargo que ésta no es continua en $x = a$, pero para Lagrage esto no era necesario [Ferraro y Panza, 2006, 15]. Esta idea fracasó en su momento, pero Lagrange mostró que no necesariamente se tenía que trabajar bajo el concepto de cantidad dentro de la matemática. Se puede observar que, conforme las necesidades se van incrementando dentro de la matemática, el desarrollo de nuevas teorías provoca el cuestionamiento de otras y sus conceptos. Lo que permite concluir que sólo es cuestión de tiempo para que la interpretación de un concepto de lo que se considera matemática, en un momento específico, quede en desuso. Pero esta idea de cantidad, que caracterizó a la matemática por siglos, se puede fundamentar en el desarrollo de la aritmética. Desde los números naturales, pasando por los enteros, los racionales, los irracionales y los complejos, este crecimiento paulatino de la aritmética da una idea platónica de existencia de los números, lo cual es llevado hasta el álgebra y el análisis. Esto provoca que dado que los valores por los que se pueden sustituir las variables son precisamente los números, no hay otros objetos en los que se pueda pensar como sustitutos de los números, de ahí la importancia del trabajo de Boole.

A pesar del desarrollo dispar de la lógica y la matemática, a principios del siglo XIX se gestaban ya las condiciones para que George Boole diera a conocer sus trabajos sobre lógica, de los cuales el que más se destaca es el de *Las Leyes del Pensamiento*, el cual se analizará con cierto detalle en el siguiente capítulo.

# Capítulo 2

# George Boole

## 2.1 Introducción

Podrá parecer exagerado hoy, la afirmación hecha por Bretand Russell, antes citada, respecto a la aparente autoría de George Boole, sobre la matemática pura. Pero antes de adelantar juicios infundados se tiene que dar un vistazo a los trabajos de ambos hombres, para dilucidar una opinión a favor o en contra a tal aseveración de Russell. En este capítulo, se tocaran ciertos puntos del trabajo de Boole, se analizará cuáles fueron las motivaciones que propiciaron el desarrollo de *Las Leyes del Pensamiento*, cuáles son los puntos más sobresalientes de éste, y cuáles fueron las repercusiones posteriores.

Para esta investigación es trascendente el hecho de que Boole haya nacido el 2 de Noviembre de 1815 en Lincoln, Lincolnshire (Inglaterra), dado que su nacimiento marca el inicio de lo que treinta y dos años después será uno de los años que dará el primer paso para una revolución dentro de toda la matemática. El hecho de que Boole, se desarrollase en una familia modesta, va a motivar que el genio de éste, en busca de conocimiento, tome clases poco formales, en el sentido académico, e inicie un estudio propio de los clásicos, en filosofía y en matemáticas. Esto es importante, ya que al no contar con un maestro formal, Boole hace su investigación sin ningún prejuicio inculcado por una enseñanza académica tradicional de la Inglaterra de principios del siglo XIX. Así, él podrá desarrollar una interpretación propia de sus lecturas, lo que motivará que su trabajo en lógica sea el inicio de una nueva forma de entenderla, y a la matemática por añadidura.

Seguramente, si Boole hubiese crecido en una familia con recursos suficientes, para proporciónale una educación clásica de aquella época, no se hablaría hoy de él de la misma forma. Dado su genio, quizás habría destacado de otra manera, pero eso no ocurrió, y lo real es que, su obra marca puntualmente un camino completamente nuevo para la lógica y la matemática.

En la primera mitad del siglo XIX, la idea de que la matemática era la ciencia de la cantidad, tenía su fundamento en un hecho muy simple. Los términos en los que se gestaban los desarrollos en la matemática de principios del siglo XIX, tomaban que los únicos objetos que se podían aplicar a las variables, para obtener los valores requeridos, eran los términos de la aritmética, en todo caso los números. Los números se han tratado de definir de muchas formas, pero la idea generalizada se puede suponer, que estos objetos, tenían intrínsecamente su *concepto* bien definido. Por ejemplo, el uno se puede tomar fuera del ámbito matemático abstracto, como el término al que se le puede relacionar con todo aquello que tenga la cualidad de la unidad, y así se puede suponer para el dos, etc. Pero, la obra que Boole desarrolló en un contexto matemático tradicional, se puede ubicar en el contexto anterior. Pero, *El Análisis Matemático de la Lógica* y *Las Leyes del Pensamiento* no se pueden tomar como obras comúnes de la matemática. Estos dos trabajos, tienen un interés muy particular.

Boole, bajo la influencia de Auguste DeMorgan, se interesó por el problema de la representación de los pensamientos a través de la lógica. Esto no era algo nuevo, ya Aristóteles hacia más de dos mil años, había tratado este problema con cierto éxito. La obra de Boole se sitúa, por mucho, en otro contexto. La intención con que se fundó ésta radica en crear un lenguaje que permitiese con certeza total, estructurar la forma en que el pensamiento opera, dejando de lado las especulaciones metafísicas, con las cuales se justificaba el uso de la lógica. Esta nueva forma que se va a plantear en el trabajo de Boole, incluye una nueva interpretación de como aplicar la matemática de su tiempo, para, en este caso implementarla, en la construcción de una nueva estructura, que diera sustento a su vez, a una nueva idea de ver la lógica. Esta estructura estuvo en la mente de Leibniz, y quizás de otros, pero como dijera de nuevo Russell, 'el respeto al maestro pudo más' haciendo referencia a Aristóteles, y a su lógica. No es que Boole no respetase a sus antecesores, sino que la manera, en que él trato las relaciones lógicas, no tenían su interpretación en los *conceptos*, los cuales son representaciones de objetos del mundo fisico en la mente humana, danda la *forma* aristotélica del enunciado. Así, Boole dará un vuelco a esta forma de comprender la lógica, e incluso de la matemática. En lo que resta de este capítulo, se va a tratar de justificar este planteamiento, dado que es de suma importancia para entender como se relaciona el trabajo de Boole, con la afirmación de Russell.

## 2.2 Las leyes de la mente

Boole supone que las leyes de la mente se pueden establecer de forma análoga a las leyes del álgebra. Se esfuerza, por proponer un grupo de reglas, muy similares a las del álgebra tradicional pero el objetivo de éstas era ser aplicadas a una estructura que le permitiese estudiar con el rigor de una ciencia, las operaciones mentales. Para este estudio tenía que apoyarse en el lenguaje, ya que siempre se ha argumentado que el lenguaje es la forma en que expresamos nuestra forma de pensar.

Así, para Boole, el análisis del lenguaje mediante el álgebra aplicada a la lógica tendría que mostrar claramente la forma en que se estructura el razonamiento, sin la ambigüedad del lenguaje natural, ni la intromisión de la metafísica.

La naturaleza especulativa de la época lleva a Boole a remitir las críticas de su obra a los resultados obtenidos, donde él no pretende poner sobre la mesa una serie de resultados y definiciones, supuestas *a priori*, sino argumentos que se pueden demostrar en la práctica. Pero es imposible demostrar todo, así que Boole tiene que partir de algo. Pero este algo va a modificar la forma de entender a la lógica y a la matemática. Es en este punto enel cual se va a dejar de lado la *forma* aristotelica del juicio,y se va a pasar a unaentendimiento totalmente distinto de lo que es la lógica. Boole va a usar los operadores matematicos de la suma y el producto junto con el operador de equivalencia, para redefinir la *forma* aristotélica del juicio, si bien está se define en primer lugar bajo conceptos, ahora Boole va a definir mediante los operadores, una nueva forma. Estos operadores van a funcionar según ciertor axiomas y definiciones, de hecho hoy se puededefinir a un operador matemático sino cumple con ciertos axiomas y definiciones. Esto no era nada nuevo para Boole, dado que la matemática de su momento si bien no definía a los operadore como se hace en la actualidad, sí se puede observar que en principio la idea de como definir un operador era muy familiar a la idea actual. Pues es así que Boole da el primer paso para dar una nueva concepción de *forma* lógica. El segundo componente para el cambiose da en no ver ya a la *forma* como una union entre el concepto y los objetos del mundo material, ya que como se menciono antes, si estos se corresponden entonces la *forma* es verdadera. Ahora, la verdad lógica es heredada de una serie de axiomas y definiciones, que como ya se dijó, estos axiomas y definiciones van a regular la forma en que los oreradores, ya lógicos van a relacionar a lor términos de este nuevo lenguaje, qué serán los términos variables, definidos por Boole como conceptos, si bien estos son importantes el el lenguaje, ya no son los que priman enla *forma*.

En las siguientes seccionesse va mostrar como Boole define sus axiomas y como construye su lenguaje lógico, que al mismo tiempo permite ver que la matemática no se puede considerar tan sólo como una disciplina de la cantidad.

Sin duda Russell se percatará de esto, lo cual parece coincide con su entender lo que él llama matemática pura. Así, entender la nueva *forma lógica* creada por Boole, dará un marco apropiado para saber si Russell tenía razón en su afirmación.

## 2.3 Qué es la lógica en Boole

Boole, como ya se mencionó con anterioridad, intenta desarrollar una matemática de la mente: Una estructura formal que le permita descifrar las leyes del pensamiento. Pero, ¿qué es lo que se entiende por lógica hasta antes de su trabajo? Por ejemplo, algunas de las ideas de la lógica que cambiaron, se las puede concentrar en dos puntos: 1) La idea de diseñar un cálculo puramente simbólico no fue idea original de Boole, Leibniz ya había intentado desarrollar un sistema simbólico para un cálculo lógico, pero con intención distinta a la de Boole. Leibniz se acercó a su idea de crear un sistema universal que le permitiese sintetizar el lenguaje a una serie de cálculos, los cuales darían mayor certeza al momento de desarrollar un argumento, pero quedó atrapado en la interpretación aristotélica de *forma lógica*, donde, como ya se menciono antes, el significado de un enunciado recae en la interpretación de los *conceptos* del enunciado en cuestión. Aquí, Boole da un paso muy complejo; pasar de la interpretación aristotélica de *concepto*, a una interpretación dada por la *forma lógica* no del concepto, sino de la estructura dada por las leyes de la mente, que condiciona al operador lógico en una nueva *forma lógica*. La gran diferencia entre Leibniz y Boole radica en la forma de entender la manera en que se relacionan los términos de un enunciado, pero las semejanzas se pueden ver. Las analogías que se dan entre ellos, se dan en la forma en que cada uno desarrolló el lenguaje sintáctico simbólico. Por ejemplo, Leibniz define a 'Todo $A$ es $B$' como $AB = A$, y Boole define en forma 'Todo $X$ es $Y$' como $xy = x$. Aunque se puede pensar un una igualdad de las formas, el uso, en ambos casos, no lo es. Las igualdades se dan sólo en la forma en cómo se definen sintacticámente dichos enunciados, dado que la intención de cada sistema es totalmente distinta. Por lo mismo, su uso tendrá un significado diferente en cada uno. De esta forma, podemos establecer similitudes entre Leibniz y Boole en lo que corresponde a la notación. Pero la gran diferencia entre ambos sistemas es la interpretación y el uso para el que fueron concebidos. Se hace énfasis en la interpretación y el uso, porque es aquí donde Leibniz sigue a Aristóteles; donde la interpretación, se funda en los términos que componen la proposición, y en la proposición misma, y el uso adquiere sentido en las reglas o silogismos, que Aristóteles y la lógica escolástica formularon para estas proposiciones. Para Boole, la interpretación se dispone en términos de los símbolos de operación del álgebra, como la suma, la resta, el producto, y el signo de equivalencia; por otro lado, los términos se representan como miembros de *clases*. Si una clase cumple con los lineamientos impuestos por las 'leyes de la mente' en la estructura desarrollada por Boole, entonces, si se da el caso que la clase sea no vacía, sus miembros podrán relacionarse con ellos mismos o con miembros de otras clases, simpre que así se dé por medio de las 'leyes de la mente'. 2) El siguiente punto tiene que ver más con la influencia filosófica reinante en la época de Boole. Por un lado, está el empirismo lógico de John Stuart Mill, desarrollado en su obra *System of Logic*, donde él defiende la tesis de que la lógica es una elaboración posterior de nuestras intuiciones sensibles. Pero no todo es percepción inmediata, éstas son ciertas y contra ellas no hay apelación. Sin embargo, la mayor parte de las observaciones particulares requerirán de establecer leyes generales y conceptos. Estas leyes implican una conexión y dependencia, entre un $A$ y un $B$, $C$, etc. Por otro lado la concepción de la lógica que tubo la obra *Art de penser* influye en la obra de Boole. Recuerdese que en el *Art de penser* se establece una forma correcta del buen pensar, algo que sirve de antemano a las demás formas del pensamiento humano. Al dejar de lado el uso que la metafísica hizo de la lógica se evitan los sofismas que puedan surgir de ésta,la lógica tiene que convertirse en un instrumento adecuado, para servir a las demás ciencias. Por consiguiente, es inútil perder el tiempo con silogismos, elaborados mediante ejemplos del todo artificiosos. Si la enseñanza quiere ser no sólo entretenida, sino también conseguir resultados valiosos y útiles, ésta debe basarse en ejemplos de razonamientos, que se utilicen de modo efectivo en los diversos ámbitos del saber, la literatura y la vida. De esta forma, el pensamiento asume la forma de lenguaje, pero el lenguaje no debe enclaustrar o distorsionar el pensamiento. La forma lingüística no debe torcer o viciar las operaciones lógicas. La función de la lógica 'el arte de pensar', consiste justamente en poner en claro el auténtico pensamiento que se halla debajo de las apariencias de la forma verbal, ayudándonos a remontarnos desde la forma hasta el significado.

Con estas influencias, Boole intenta construir una lógica que tendrá una nueva concepción de la forma, y está dirigida hacia los símbolos que relacionan a las letras proposicionales o términos de las proposiciones; también tiene que ver con la idea de clase. Así, por clase Boole entiende lo que sigue:

Una clase $X$ es un conjunto de objetos $x$ los cuales cumplen en su totalidad la propiedad que define a dicha clase. Los objetos que no cumplan con la propiedad de la clase pertenecen a su complemento. Esta clase complemento es ajena a la clase $X$ y Boole la define como $1 - X$, sus términos se escriben de la forma $1-x$. Así, a estas clases se les puede aplicar un dato o descripción determinado, siempre que exista al menos un objeto dento de cada clase. De no ser así, se denominará a la clase sin objetos como 'nada' y a la clase que le pertenecen todos los objetos como 'univeresal'. Boole toma de DeMorgan el concepto 'universal', donde 'nada' es equivalente a no tener ningún ser y 'universal' se entiende como tener a todos los seres. Así definide Boole los objetos que van a representar a las clases.

Boole refiere dos tipos de proposiciones: El primer tipo, las define como proposiciones primarias siendo éstas de la forma 'Todo $X$ es $Y$'. Éstas tienen una interpretación puramente extensional, dándose la extensión en el alcance existencial de los *conceptos* que definen en este caso a las clases $X$ y $Y$. Algo que se debe aclarar, es que si bien estos *conceptos* se definen como términos del lenguaje lógico, son también objetos de la mente, que están compuestos en grupos llamados *clases*, la diferencia es que estos conceptos no dependen de una existencia de algún objeto en el mundo físico. Ahora, Boole no define 'extensión' como tal, aquí se hace este uso para una mejor comprención.

Ahora, las proposiciones primarias juegan un papel central en el desarrollo del segundo tipo de proposiciones, llamadas 'proposiciones secundarias'. La interpretación de las proposiciones secundarias, tienen la forma; 'si [...] entonces [...], [...] o [...], [...] y [...]'. Lo que caracteriza a estas proposiciones secundarias es que se componen de proposiciones primarias. Son entonces las proposiciones primarias los términos de las secundarias, y los términos de las primarias son los de las clases. Definida la costitución de proposiciones primarias y secundarias, la interpretación de las proposiciones secundarias pasa a un nivel distinto. Para Boole, lo anterior se enfoca cualitativamente en la estructura del sistema que él construye. Así, la estructura cuenta con dos cualidades semánticas, siendo estas cualidades las que definen si el concepto de una clase, está o no en la estructura. Estas cualidades son la *validez* y la *invalidez*.

El concepto de validez de esta nueva lógica, está en cierto modo relacionado con el de la matemática, dado este concepto por la estructura creada por la misma matemática. Entonces se debe recordar, que la validez dada en la matemática estaba intrínsecamente ligada a la creencia en que sus axiomas, en los cuales se funda, son intuitivamente verdaderos, esto logicamente lo hereda el trabajo de Boole. Algo que se debe destacar en el trabajo de

Boole es la creeación de un concepto de validez dado por la semántica misma de la estructura con que se funda su trabajo.

Como se puede ver, la existencia de los términos dentro de la estructura es crucial para 'la matemática de la mente'. La contribución más importante y medular del desarrollo de Boole es dar una nueva interpretación a los signos de operación de la matemática de aquella época. Para Boole la matemática es una y se puede quedar así, pero la 'matemática de la mente' es algo que está totalmente fuera del concepto de 'ciencia de la cantidad'. Al hacer referencia a la matemática de mediados del siglo XIX, los símbolos de la matemática, para Boole, serán tan sólo una herramienta, que le permitirá desarrollar un nuevo concepto dentro de las ciencias. Una herramienta que le va permitir a Boole estudiar *Las Leyes del Pensamiento*. Es por esto que Boole llama a esta herramienta la 'matemática de la mente'.

### 2.3.1 La interpretación del simbolismo matemático de la mente

> Que el lenguaje es un instrumento de la razón humana, y no simplemente un medio para la expresión del pensamiento, es una verdad admitida generalmente [Boole 1854, 29].

Así es como da comienzo el capítulo dos de *Las Leyes del Pensamiento*, y es por este medio como se pretende ver en parte los fundamentos del pensamiento. El lenguaje como herramienta para el estudio del razonamiento sólo puede mostrar una pequeña parte de lo que éste comprende.

El estudio del cerebro mantiene, desde hace mucho tiempo, ocupados a un sin numero de estudiosos, tanto biólogos, psicólogos, filósofos, sociólogos, etc., siendo el lenguaje uno de los medios de estudio para tratar de descifrar la forma en que razonamos. Es en este sentido que la búsqueda de una herramienta, que permita estudiar la mente humana, es sin duda uno de los objetivos primordiales de la ciencia. Boole intentó obtener esta herramienta. No se puede decir que lo logró, dado que él mismo estaba conciente de lo limitado del desarrollo de *Las Leyes del Pensamiento*, pero el centrar su estudio en el lenguaje de una manera totalmente distinta a como se hiciera anteriormente, permitió dirigir el estudio lógico en una nueva dirección. Incluso la matemática en la actualidad se ha visto influida en su evolución por esta nueva forma de interpretación que él desarrolló.

¿Cómo es que Boole construye el lenguaje que le puede permitir acceder, aunque sea de forma limitada, a *Las Leyes del pensamiento*? El paso que da Boole para la construcción de su lenguaje es el de definir el término *signo*, como él llamará a los términos literales tomados del alfabeto. Pero antes de ver la definición de signo de Boole, hace una afirmación que es en sumo muy importante para dar el siguiente paso a la transformación de la lógica.

> El sentido real de un signo no depende de ningún modo de su forma o expresión particulares, tampoco lo hacen las leyes que determinan su empleo.[Boole 1954. 30]

Si bien, en la lógica aristotélica, como ya se discutió el sentido de un signo se da en el objeto que se representa mediante un concepto ahora la generalidad que se plantea en el signo está dada por las representaciones que se pueden dar en diversas lenguas, o denotaciones ya sea gráficas o a modo de señas. Al final la esencia de dicho concepto es una sola, así que, el signo obtiene su generalidad de la gran cantidad de representaciones que se pueden dar, tanto sonoras como escritas, de dicho objeto en particular.

En cambio en Boole, con la afirmación anterior, pareciera que la asignación a un signo pudiese quedar vacía. En el álgebra de esa época, cualquier número podía representar como valor cuantitativo a un signo de la forma *x, y, z,...*, de ahí que un signo no tenga un sentido particular. Pero una vez hecha la asignación, ésta se representa de forma particular; por ejemplo: si $x = 2$, $y = 5$ y $z = 7$, entonces $x + y = z$ es $2 + 5 = 7$. De lo anterior se puede ver que incluido el signo + como operador algebraico, éste no juega tampoco un papel que devele la forma particular de los signos, hasta que se hacen las asignaciones en lo particular de los sentidos elegidos en los signos.

Se puede entender ahora lo que signxfica a que se refería Boole con aquello de que los sentidos de un signo no dependen en lo particular de su forma o expresión, o la forma en que las leyes del álgebra lo operan. Así, hasta que se hace una asignación particular al signo, se puede definir un sentido particular para el mismo.

Esto que se comenta es relevante, porque como se mostrará más adelante en la Proposición 1, los signos o símbolos literales representan conceptos y no números. Como se dijo antes Aristóteles plantea la generalidad de un signo o símbolo literal, en base al contexto en el cual se expresa el concepto de tal signo; así, el sentido del signo es dado por el concepto, pero este concepto es particular.

¿Qué se puede decir de lo anterior? Boole plantea en la cita, una generalidad dada en el sentido de los signos o símbolos literales, con fundamento en los números. Lo que se puede deducir de ésto es que, del mismo modo que los signos del álgebra de la cantidad, el sentido de los signos de la lógica algebraica booleana, aunque repersenten conceptos, no es definido ni en su forma ni en su expresión por ningún concepto en particular, como es el caso de los signos de la lógica aristotélica. Es aquí donde se da la pincipal diferencia entre ambas lógicas.

**Definición 1** *Un signo es una señal arbitratria, poseedora de una interpretación fija y susceptible de combinación con otros signos según las leyes fijas dependientes de su interpretación mutua.*

Con esta definición Boole expresa dos cosas. La primera se centra en que el designio de un signo 'es indiferente a la palabra concreta o señal que asociamos con una idea determinada', esto está en consonancia con lo expuesto antes, referente a la asignación de conceptos desde la perspectiva de Boole. Así, no es relevante que se use para representar en este caso ideas, lo que sí es de importancia es que la asignación de los signos por conceptos o ideas se conserve, sin importar cuáles sean. Uno de los requisitos que debe cubrir la lógica de Boole para encajar en la definición de Russell de matemática pura es precisamente que los signos sean arbitrarios. Pero si se presta atención, Boole habla de conceptos, o restringe a los signos a sólo conceptos, por endelos signos no son tan arbitrarios. Es por ello que Russell afirma que él no cree que Boole hable de las leyes de la mente, para de alguna forma forzar la lógica desarrollada por Boole a su definición de matemática pura.

Por otro lado, Boole no es ajeno aún a la influencia de Aristóteles. Se observa que él refiere un ejemplo donde se pueden dar asignaciones de ideas a un signo, así con la palabra ‘state’ en inglés y ‘civitas’ en latin, ambas significan lo “mismo”, lo que en español se entiende como ‘estado’. Lo que refiere lo anterior es que un objeto puede ser represantado de muchas formas, pero en esencia todas esas representaciones son lo mismo. Al igual que Aristóteles, Boole retoma el hecho que una idea en esencia se puede representar por un signo, sin importar cual sea la fuente de emisión en cualquier lenguaje estructurado por el ser humano. La similitud entre Boole y Aristóteles se da con una diferencia muy sutil. Mientras que Aristóteles plantea la asignación de signos en términos del contexto, el concepto y la esencia de un objeto o situación dada, para Boole basta hacer la asignación a nivel solamente del lenguaje escrito, dado que para él, el lenguaje es la forma en que se transmiten las ideas, es el medio de expresión de nuestros razonamiento. Así, mientras Aristóteles crea toda una teoría alrededor del signo, a Boole le basta con el lenguaje.

El segundo punto que Boole trata es el de que una idea tenga un significado fijo, de forma que su representación mediante un signo no sea ambigüa, tal como lo plantea de nuevo Aristóteles.

De este modo se puede enunciar la definicón que hace Boole para el *signo*.

Ahora, los signos sólo van a responder a la forma en que las leyes de combinación los dispongan, su verdad ya no se va a centrar en los objetos materiales, sino en reglas específicas, que permitan seguir de forma ordenada la evolución de los conceptos de la mente.

> **Proposición 1** Todas las operaciones del lenguaje en tanto instrumentos del razonamiento pueden llevarse a cabo en un sistema de signos compuestos con los elementos, a saber:
>
> Primero. Símbolos literales, como x, y, etc., que representan cosas en tanto objetos de nuestras concepciones.
>
> Segundo. Signos de operación, como, $+$, $-$, $\times$, que representan aquellas operaciones de la mente mediante las cuales se combinan o descomponen las concepciones de las cosas, de tal modo que forman nuevas concepciones que contengan los mismos elementos.
>
> Tercero. El signo identidad $=$.
>
> Y estos símbolos de la lógica se hallan sometidos en un empleo de leyes definidas, en parte coincidentes, y en parte diferentes, de las leyes correspondientes a los símbolos del Álgebra.

Esta proposición deja ver claramente lo que ya tanto se ha manejado respecto a la *forma* que Boole busca para su sistema lógico. Boole remite lo que hoy es muy común hacer al definir un lenguaje formal, el alfabeto, o los términos literales y los términos de operación, y lo novedoso, y que es de recalcar, es el último parrafo de la proposición, los símbolos ya no dependen de una representación metafísica del concepto, sino que ahora se definen mediante un uso racional de reglas y axiomas que se definirán más adelante. Y bajo estas mismas reglas se van a definir el concepto de *función*, y las representaciones con los numerales, las cuales tampoco van a definir términos numéricos, sino otros conceptos de la semántica creada por Boole, y en su momento se dará con precisión la definición que les corresponde.

Si bien tanto Boole como Aristóteles buscan dar una representación correcta del pensamiento basado en la *forma* lógica, su idea de representación corresponde con las ideas de cada época. No se puede acusar a ninguno de nada, porque las necesidades en ambos casos buscan resolver el problema con las herramientas que tenían a la mano. Simplemente son tiempos distintos e ideas completamente diferntes de conceptualizar al mundo.

Una vez definida la herramineta, se tiene que definir su uso, así Boole enuncia tres reglas, a las cuales llama 'Clases':

> Clase I. Signos apelativos o descriptivos que expresen el nombre de alguna cosa o alguna cualidad o circunstancia que le corresponde.

Esta primera interpretación de operación está directamente en relación con la yuxtaposición de términos de una clase, de donde, las primeras interpretaciones de alcance puramente extensional tienen efecto. Por ejemplo, si $x$ representa a la clase de los *hombres* y $y$ representa a la clase de los objetos *blancos*, donde la palabra *hombre* es equivalente a $x$ y la palabra *blanco* es equivalente a $y$, donde el sustantivo hombre se yuxtapone al adjetivo blanco, entonces la frase *hombre blanco* es equivalente a $xy$. La interpretación de esta conjunción de términos está dentro del alcance de la intersección de las clases $x$ y $y$, siendo ésta la clase de los *hombres blancos*. Pero, ¿qué pasa si en vez de tener la clase $xy$, ahora se tiene a la clase $yx$. Aquí, ¿se habla de la clase de los objetos blancos en conjunción con la clase de los hombres? Si $xy$ es la clase de los 'hombres blancos', la clase $yx$ es también la clase de los 'hombres blancos'. Claro está que la interpretación de la clase $yx$ será: La clase de los objetos blancos que pertenecen a la clase de los hombres, ya que 'blancos hombres' en el lenguaje natural tendrá otra interpretación. Es por esto que dadas las complicaciones con la escritura del lenguaje natural se recurre a un lenguaje alterno, en este caso al algebraico, pero si $xy$ es lo mismo que $yx$, entonces se introduce el signo de identidad en su interpretación habitual que se le da en el álgebra estándar, entonces se tiene:

$$xy = yx$$

Esta propiedad en álgebra es conocida como conmutatividad. Boole no la nombra, pero afirma que esta es una 'ley del pensamiento', indispensable en su sistema. De aquí se desprende la ley que hoy se conoce como ídem potencia, y la razón por la que debe existir es simple. Si tenemos $xx = xx$, esto se debe al caso cuando la clase $y$ es equivalente a la clase $x$, de aquí que resulta redundante decir la clase 'hombre hombre' es equivalente a la clase 'hombre hombre'. Con enunciar una sola vez este hecho es suficiente; así que la clase 'hombre hombre', es equivalente a la clase 'hombre', por lo que $xx = x$, como en notación matemática $x^2 = x$, ésta también va a ser una ley del pensamiento. Pero, con una connotación muy particular para la matemática del siglo XIX, esta ley es introducida en el sistema matemático de Boole, y no es equivalente a ninguna ley del sistema algebraico tradicional. Todas las proposiciones del sistema booleano deben cumplir con esta ley. Estas leyes se pueden generalizar a $n$-términos, con resultados semejantes, pero el uso que hace Boole de éstas es normalmente de dos o tres términos, a lo más cuatro, pero estos casos se tornan escasos en su obra. En esta primera clase, Boole muestra 'las dos primeras leyes del pensamiento', que son fundamentales para las siguientes dos clases, donde se muestran más leyes del pensamiento:

> Clase II. Signos de aquellas operaciones mentales mediante las cuales reunimos partes en todos o separamos todos en sus partes

Es claro lo que Boole intenta dar a entender en esta parte: La reunión o conjunción de las diversas clases. Las conjunciones dadas por el símbolo + tienen una interpretación que hoy conocemos como 'disyunción' y 'conjunción' dentro de la lógica. El argumento de Boole que las clases que compone una 'operación mental' del tipo '$x$ y $z$' o del tipo '$x$ o $z$' son equivalentes, dado que las clases que componen estas *operaciones mentales* son ajenas entre sí en sus dominios. No queda muy claro este punto, dado que la conjunción lógica se puede entender como inclusiva; mientras que la disyunción lógica es exclusiva. Por ejemplo, siguiendo a Boole, supóngase la clase de los hombres y la clase de las mujeres, entonces ¿se puede decir que la interpretación de las proposiciones 'hombres y mujeres' y 'hombres o mujeres' son análogas? No necesariamente, se puede ver a 'hombres y mujeres' como inclusiva, y a 'hombres o mujeres' como exclusiva, por ejemplo: 'se admiten hombres y mujeres' y 'se admiten hombres o mujeres'. Se puede dar una interpretación más compleja en ambos casos y argumentar que sí son análogas, bajo ciertas condiciones. Pero el uso de estas 'operaciones mentales' se puede especificar para casos muy concretos en los que la conjunción y la disyunción son análogas. En los términos en los que Boole plantea la interpretación de estas 'operaciones mentales' se restringe mucho, tan sólo toma clases que son ajenas entre sí. Se debe notar que Boole debió notar la dificultad de la interpretación de estas 'operaciones mentales', de ahí la restricción a clases ajenas. Dentro de esta clase encontramos cuatro leyes más:

1. Las dos primeras como ya se mencionó, tienen una interpretación de inclusión, de donde éstas son las pares de las propiedades matemáticas de la conmutatividad aditiva y distributividad. Así, la operación en el lenguaje de Boole, es equivalente a tomar la clase de los *patos* y la *clase* de los cisnes, entonces la oración 'patos y cisnes' tiene la forma de $x + y$, siendo la oración 'cisnes y patos' equivalente a la anterior $y + x$, por lo que se tiene
$$x + y = y + x$$

2. Ahora, si se expresa la oración 'patos y cisnes blancos' es lo mismo que decir 'los patos blancos y los cisnes blancos' tal que la clase de los objetos blancos representados por el término $x$. Así por lo anterior, y esta ley se pueden expresar las dos últimas oraciones como sigue

$$x(y+z) = xy + xz$$

3. Así, en una exclusión, Boole usa el signo $(-)$ como símbolo de exclusión. Por ejemplo, se toma la clase de las aves y se excluye a una de sus subclases, por decir algo, la clase de los patos, de modo que se puede expresar la siguiente oración: 'Las aves excepto los patos' de forma si la clase de las aves se representa por el término $x$ y la clase de los patos por el término $y$, esta oración representa $x - y$. Si se dice 'exceptuando a los patos tenemos aves', la interpretación simbólica es $-y + x$, que por ser equivalente a la anterior oración se sigue que

$$x - y = -y + z.$$

   Tomando este punto se puede escribir la interpretación lógica de la cuarta ley

$$x(y-z) = xy - xz.$$

   Esta ley y la segunda de esta clase tienen un uso muy similar, pero su interpretación es totalmente distinta, por lo que no se deben confundir.

Lo importante es la doble interpretación que se hace del signo $(=)$. ¿Por qué se dice esto? Es muy sencillo, en las dos clases de leyes anteriores, este signo tuvo una interpretación muy clara, la de 'identidad' como se maneja en matemáticas. Sin embargo, hay una nueva interpretación que es la de 'relación'. No se quiere decir que el concepto de 'relación' sea nuevo en sí, sino que la forma de interpretarlo es lo que va a cambiar. Ahora, ¿cuál es esta nueva interpretación que se le da al signo (=)? La siguiente clase de leyes da la respuesta a este cuestionamiento.

> Clase III. Signos mediante los cuales se expresa una relación, y merced a los cuales formamos proposiciones.

En el lenguaje natural es muy claro que este tipo de relación se da entre oraciones, siendo los verbos los que definen a éstas. Boole consciente de esto, refiere a un solo tipo de verbo, llamándolo verbo sustantivo. 'Es o son' tiene la característica relacional que Boole busca. No es Boole quien se fija primero en este verbo. Viene su conocimiento desde los griegos, siendo Aristóteles quien le da un uso predominante en la lógica de los categóricos. Aunque Boole sigue bajo la influencia de la lógica aristotélica, tiene el acierto de asignar un valor interpretativo al signo (=), donde en lugar de tan sólo pensar en operaciones lógicas, se puede pensar bajo una nueva interpretación de este signo. Así, Boole introduce la siguiente definición.

> 13. El signo anterior es o son puede expresarse por el símbolo =
> ...

Si se toma el ejemplo que Boole da, se puede ver con más claridad lo que él refiere. Se toma la proposición: 'Los astros son los soles y los planetas'. Se le asigna el término $x$ a astros, $y$ a soles y $z$ a planetas, tal que se tiene la reinterpretación de esta proposición en el lenguaje simbólico como sigue:

$$x = y + z$$

Se puede obtener un razonamiento análogo a la siguiente proposición, 'Los astros, excepto los planetas, son soles' siendo su reinterpretación simbólica la siguiente:

$$x - z = y$$

Estas interpretaciones simbólicas muestran la simetría que sigue el lenguaje creado por Boole, al lenguaje del álgebra. Boole deja con la definición anterior, y el ejemplo expuesto, el camino listo para añadir dos axiomas, con los cuales pretende justificar lo expuesto en los ejemplos anteriores, los cuales dicen lo que sigue:

> PRIMERO. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los todos son iguales.
>
> SEGUNDO. Si se separan cosas iguales de cosas iguales, los restos son iguales [Boole 1854, 38]

Ahora, si se tiene que $x = y + z$, donde la clase $z$ no tiene ningún concepto que la defina, entonces $x = y + z$ es equivalente a $x = y$, de donde se puede tomar una clase $t$ definida con al menos un concepto, por lo que al yuxtaponer esta clase, con $x$ y $y$ se obtiene lo siguiente $xt = yt$. En este punto, en la matemática de la cantidad puede suceder que $t = 0$, entonces se tiene $0 = 0$, pero en este caso, el numeral 0 tienen una definición distinta. Así, Boole define dos clases nuevas, que deben cumplir con la ley formal $x^2 = x$. Los símbolos elegidos para este efecto son el 0 y el 1. Estos numerales no van a tener la interpretación habitual que se les da en la matemática. Podrán tener características similares, como el hecho de que ambos símbolos se interpretan bajo la anterior ley para el numeral 0, $0^2 = 0$, y para el 1, $1^2 = 1$. La interpretación de estos símbolos se puede justificar como sigue: Si existe alguna clase que no esté definida por ningún concepto, en el lenguaje simbólico se representará $x = 0$, y si hay alguna clase que defina todo un universo conceptual se le representará $x = 1$. De esta forma, Boole admite que de la proposición $x = y$, se puede obtener la proposición $xt = yt$, siempre que $t \neq 0$, pero no a la inversa. Si se tiene el caso en que $t = 0$, entonces $x = y$ no es verdadera necesariamente, dado que $x$ y $y$ pueden ser diferentes y, como en la aritmética si $x = 3$, $y = 4$ y $t = 0$, entonces $xt = yt$, pero $x \neq y$. Del mismo modo, el sistema de Boole tine el mismo problema, pero en el lenguaje por él estructurado.

Los símbolos 0 y 1, en el caso anterior, sólo se mostraron en parte, por la interpretación que Boole les da. En este caso, es una interpretación en términos de clase. Faltará definir las condiciones de la interpretación veritativo funcional.

Hasta aquí sólo se han definido la interpretación y el uso sintáctico de la simbología para definir este nuevo lenguaje lógico. En el capítulo III, Boole tiene en claro que las ciencias experimentales se rigen dentro de las leyes establecidas por causa y efecto, de tal manera que toda verdad científica es independiente de toda opinión particular. Toda ley establecida dentro de estas ciencias debe ser independiente de toda especulación sobre su verdad o falsedad, en tanto sea su aplicación práctica, esto es que su valor deverdad depende de su aplicación al mundo físico. Para las leyes del pensamiento, se pide lo mismo. Éstas deben de ser independientes de cualquier especulación metafísica. Para Boole el uso de operaciones de la mente conduce, mediante la deducción, a las leyes de los símbolos de la lógica. Antes que nada se tiene que tener en cuenta que para él, 'el universo de discurso' tiene un límite de referencia de alcance o extensión de un objeto definido dentro del alcance de la clase a la que pertenece. Por ejemplo, Boole toma el concepto 'hombre'. Su alcance se ve limitado por algún adjetivo que haga ese efecto, en este caso 'civilizado'; de esta manera 'hombre civilizado' limita al sujeto de la oración, a la extensión del universo del discurso, que se refiere a la clase de los hombres civilizados. Los adjetivos tienen un papel definitorio dentro de las oraciones y proposiciones que se componen dentro de las clases o subclases que éstos puedan definir en un universo del discurso.

Como se vio con anterioridad, Boole define el uso de los símbolos 0 y 1. Ahora una vez definido el concepto de universo de discurso, define la interpretación extensional, dado que por primera vez se define el concepto de ‘clase nada’ y se significa con el 0. La ‘clase universo’ la define de forma natural, el concepto de ‘universo del discurso’. Boole representa a esta ‘clase universo’ con el signo 1, de modo que la clase que no define a algún objeto, o ‘clase nada’, es denotada por $x = 0$, y la ‘clase universo’ se representa $x = 1$. Boole define otras propiedades de la lógica referente a los símbolos 0 y 1: Para el 0 se tiene

$$0x = 0$$

para el 1 define

$$1x = x$$

y, de la ley $x^2 = x$ , Boole deduce:

$$x(1 - x) = 0.$$

Esta ley es análoga a la ley de la lógica tradicional, llamada principio de no contradicción, según la cual si tenemos las clases de los ’hombres’ y la clase de los ’no-hombres’, entonces esta regla representa en su forma tradicional ’hombres y no-hombres’. Esta proposición, en la lógica aristotélica, es falsa, pero en la lógica algebraica es fundamental, ya que todas las proposiciones que no cumplan con esta ley, quedan fuera del universo del discurso que se estableció para operar y deducir proposiciones dentro de la lógica que Boole define.

### 2.3.2 De las proposiciones Primarias y Secundarias

> **Proposición 2** Todas las proposiciones lógicas pueden considerarse como pertenecientes a una u otra de las dos grandes clases

> a las que pueden darse los nombres respectivos 'primarias' o 'proposiciones concretas' y 'secundarias' o 'proposiciones abstractas'[Boole 1854, 51].

En la sección anterior se mostró que los adjetivos restringen el universo del discurso de las clases que se relacionan. En este caso, por ejemplo, Boole da a la conjunción 'el hombre civilizado', la categoría de proposición primaria. Una proposición primaria se puede convertir en una proposición secundaria. El caso que él usa para justificar esto es el siguiente: 'El sol brilla'. Esta proposición es equivalente a decir, 'el sol es una cosa que brilla', pero cuando hacemos referencia a que alguna proposición sea verdadera o falsa, en este caso se hace uso de la mención de una oración, de forma que la proposición (es verdad que 'el sol brilla') se puede presentar como un cuestionamiento, pero para la lógica de esta clase de oraciones no tiene mucho sentido para su representación simbólica. Sin embargo, la interpretación afirmativa de esta proposición, indica que 'es verdad' que 'el sol brilla'. Esta oración es afirmada, y hace una auto-referencia sobre su verdad, a la vez que se refiere sobre la verdad de la proposición de la que se hace 'mención'. Boole toca una de las partes que después Russell y Whitehead van a definir de forma extensiva, de donde cada proposición que componen los *Principia Mathematica* será afirmada.

La simbología algebraica permite dar una interpretación con valores de verdad, y hacer lo siguiente: La interpretación de verdad a los numerales 0 y 1 es de falso y verdadero respectivamente. Si $x$ es la clase que define a los objetos que son 'soles', y $y$ define a la clase de 'las cosas que brillan', entonces, 'los soles que brillan' se representa como $xy$, y el símbolo $(=)$ con su interpretación 'es o son', y con la equivalencia de enunciados 'es verdad que el sol brilla' y 'el sol brilla es verdadero' se puede hacer la representación simbólica $xy = 0$ ó $xy = 1$, según sea el caso en el que la proposición sea verdadera o falsa. Si bien Boole, en *Las Leyes del Pensamiento*, expresa de forma más general estos términos, en *El Análisis Matemático de la Lógica*, refleja esto de forma particular.

Ahora, el uso de los símbolos y leyes será el mismo, tanto para proposiciones primarias, como para proposiciones secundarias, y la diferencia entre estas dos clases de proposiciones 'no es de forma, sino de interpretación', esto en palabras del propio Boole. La diferencia, como él dice, se encuentra dentro de la interpretación que se hace de cada proposición.

¿Cómo es que se define una proposición primaria? Se puede construir una proposición primaria para de ahí poder decir qué clase de interpretación es la que le corresponde. Como ya se mostró, las 'clases' son de dos tipos. Las que definen nombres y las que hacen referencia a propiedades de los objetos que componen dichas clases. En todo caso, un solo símbolo podrá representar a una sola 'clase' de objetos, por lo que la representación simbólica será combinando los términos o símbolos que representan a las clases en cuestión, siendo la multiplicación algebraica la operación que componga los términos representados. Por ejemplo, $x$ representa a los objetos opacos, $y$ representa a los objetos brillantes y $z$ representa a las piedras:

$$xyz = \text{piedras opacas y brillantes}$$
$$xy(1-z) = \text{objetos opacos y brillantes que no son piedras}$$
$$x(1-y)(1-z) = \text{objetos opacos que no son ni brillantes ni piedras}$$

Estas representaciones deben de cumplir con la ley de la dualidad $x^2 = x$. La interpretación de estos términos es puramente extensional; sólo hace referencia a los objetos que los componen, por medio de nombres o propiedades de las clases representadas por cada término.

La interpretación de la combinación mediante la operación algebraica de la multiplicación juega un papel primario en la combinación de 'términos clase'. Esta combinación se da en el marco del símbolo $+$, y su significado es equivalente a las conjunciones 'y', 'o'. Como se ve, los 'términos clase' se forman de manera individual y, posteriormente, se relacionan entre sí mediante los símbolos $+$, $-$. El símbolo $(-)$ se interpreta como se mostró más arriba, con la palabra 'excepto'. Siguiendo el ejemplo que da una interpretación extensional, se pueden conjuntar por ejemplo:

$$yz - xz = z(y - x) = \text{las piedras brillantes 'excepto' las opacas.}$$
$$xyz + (1 - x)(1 - y)z = \text{las piedras opacas y brillantes o las piedras que no son opacas ni brillantes.}$$

Estas conjunciones deben cumplir con la ley de la dualidad $x^2 = x$, y las constituciones definidas por clases exclusivas. La conjunción de los términos de clase se expresará como sigue: Si la expresión es del tipo 'ó $x$ ó $y$' de forma simbólica se tiene $x(1-y)+y(1-x)$. Algo similar se obtiene con tres términos, la expresión 'ó $x$, ó $y$, ó $z$' se representa $x(1 - y)(1 - z) + y(1 - x)(1 - z) + z(1 - x)(1 - y)$. En ambos casos, si las clases no son exclusivas, entonces se expresan $x(1 - y)$ y $x + y(1 - x) + z(1 - x)(1 - y)$, para dos y tres términos, en el ejemplo de las piedras, se puede dar una interpretación cuando las clases son exclusivas:

$x(1-y)(1-z)+y(1-x)(1-z)+z(1-x)(1-y) =$ 'los objetos que no son piedras ni brillantes', 'pero sí opacos' o 'los objetos que no son piedras, pero sí brillantes' o 'las piedras que no son ni opacas ni brillantes'.

Como se observa, la interpretación extensional hace su parte. La interpretación que se obtiene de la conjunción anterior tiene una clara intención, ser 'ó $x$, ó $y$, ó $z$'. Así, la exclusión que marcan los términos clase, remite al lector a llevar la interpretación a una cosa o a otra, o a otra pero no las tres al unísono.

El objeto de esto es motivado por el interés entre las posibles semejanzas entre el trabajo de Boole y Russell. Como ya se mencionó antes, ambos personajes manifiestan objetivos diversos en sus obras; mas, sin embargo, las similitudes que se dan, permiten verificar el pensamiento de Russell en su ya anunciada afirmación.

Aunque se pueden semejar bastante las interpretaciones de extensión e intención entre Boole y Russell, en lo que concierne al tema de las proposiciones, se debe poner aparte cada uno. Boole continúa bajo el dominio de la lógica aristotélica. Así, él define su concepto de proposición:

> Supóngase que extendemos el significado de los términos *sujeto* y *predicado* de la siguiente manera. Signifiquemos por sujeto al primer término cualquier proposición afirmativa, es decir, el término que precede a la cópula *es* o *son*; y por predicado convengamos en significar el segundo término, [...] y admitamos que cualquiera de los dos pueden ser universal o particular [Boole 1854, 56].

En el capítulo uno se muestra cómo define Aristóteles las proposiciones, en sujeto y predicado, donde $S$ es el sujeto $P$ el predicado y la cópula *es* o *son* aparece de la misma forma como lo hace Boole. La diferencia es clara, Boole usa el signo $=$ como el símbolo que relaciona al sujeto con el predicado, aunque Boole no reconoce a las proposiciones indefinidas.

Boole restringe la formación de proposiciones universales con la siguiente regla:

> Regla.- Cuando tanto el sujeto como el predicado de una proposición son universales, fórmese la expresión separada de cada uno y conéctese mediante el signo $=$ [Boole 1854, 56]

Se puede ver por ejemplo: 'Todas las piedras son opacas y no brillantes, o brillantes y no-opacas'. La sustitución es como se dio anteriormente: $x$ representa a la clase de los objetos opacos, $y$ representa a la clase de los objetos brillantes y $z$ representa a la clase de las piedras, donde se da una conjunción de clases $x$ y $y$ exclusiva, esto es, la clase $x$ excepto la clase $y$ ó la clase $y$ excepto la clase $x$. Por lo anterior, se representa esta conjunción, según con el simbolismo booleano como: $x(1-y)+y(1-x)$ y haciendo lo propio con el signo $=$, la regla dictada con anterioridad se puede deducir que el equivalente de la proposición 'Todas las piedras son opacas y no brillantes o brillantes y no opacas' en la configuración que da Boole es

$$z = x(1-y)+y(1-x).$$

Se pueden hacer composiciones similares con distintas proposiciones. Por ejemplo, una proposición que se puede representar con la expresión simbólica anterior es: 'Todos los seres humanos son hombres o mujeres', y se pueden seguir mencionando distintas proposiciones universales a las que les acomodaría muy bien la conjunción anterior.

Antes de definir la siguiente regla, Boole introduce un nuevo símbolo $v$. Este signo va a representar junto a otro, que establezca una relación con alguna clase definida en el universo del discurso, una referencia hacia las proposiciones particulares como se muestra más adelante. La interpretación de este símbolo será 'indefinida'. Con esto, Boole pretende establecer que el signo $v$ se operará como a una clase, pero no se referirá a ninguna clase en particular. Referirse al signo $v$ será como decir 'algunos'. Así, cuando se dice: 'algunos seres mortales', se yuxtapone el símbolo $v$ con el símbolo de la clase de los seres mortales, en este caso será la $x$, de forma que si nos referimos a algunos seres mortales, lo podemos representar simbólicamente como $vx$. Ahora, si se toma la clase de los hombres y se le representa con el símbolo $y$, entonces podemos decir que la representación simbólica de: 'los hombres son algunos seres mortales' quedará:

$$y = vx$$

Esto le permite a Boole dar la siguiente regla:

> Regla.- Expresar como antes el sujeto y el predicado, adjuntar el último símbolo indefinido v e igualar las expresiones [Boole 1854, 58].

Del mismo modo, con el ejemplo de las proposiciones universales, se hace referencia a la proposición particular 'las piedras son algunas, opacas pero no brillantes o brillantes pero no opacas' y se la representa:

$$z = v(x(1-y) + y(1-x)).$$

Boole continúa con las proposiciones universales, pero ahora con las negativas: 'Ningún $x$ es $y$'. Por medio de una trasformación simple, se puede obtener un equivalente en forma de una proposición universal afirmativa, 'Todos los $x$ son no $y$', quedando

$$x = (1-y).$$

Ahora, dado que, no todos los $y$ son $x$, podemos decir que, 'los $y$ son algunos no $x$' quedando bajo las leyes de los símbolos, siendo éste el más usado por Boole:

$$y = v(1-x).$$

Así, Boole enuncia la última regla del capítulo IV:

> Regla.- Para expresar cualquier proposición de la forma 'ningún x es y' conviértase a la forma "todo x es no y" y a continuación procédase como en le caso anterior [Boole 1854, 56]

Así, con esta regla, Boole concluye el capítulo IV. Se debe aclarar que el signo $v$ cumple con la ley de la dualidad para que pueda ser usado; de lo contrario, se trabajaría en un sistema dudoso a sus ojos.

La interpretación de las proposiciones bajo estas tres reglas se da en la 'intención' que éstas tengan, ya sea universal, particular o cualquiera de las dos, pero negada. La interpretación de la operación $x = (1 - y)$ es, en su totalidad, extensional; pero la interpretación de la proposición $x = (1 - y)$ es en su forma. Por otra parte, la interpretación del signo de equivalencia $(=)$, cuando se trata de proposiciones representa la conjunción 'es o son' entre proposiciones, ya se trate de primarias o secundarias.

### La interpretación del signo

Después de que Boole ha estructurado la base de su lenguaje simbólico es momento para que se pase a otro nivel de interpretación del signo. Este nuevo nivel va a dar 'Las condiciones de un razonamiento válido mediante símbolos', estas condiciones son tres:

> Primero.- Que se otorgue una interpretación fija a los símbolos empleados en la expresión de los datos, y que las leyes de la combinación de esos símbolos determinen correctamente a partir de aquella interpretación [Boole 1854, 63]

Al igual que Aristóteles, Boole reconoce la necesidad de fijar la interpretación de lo símbolos, aunque en distintos contextos. Como se mostró, para Boole el lugar donde se va a fijar la interpretación del signo es en el lenguaje escrito. Así, cada signo representado en el lenguaje lógico algebraico booleano tendrá una única interpretación, la cual será adecuada a las leyes que se usen para combinar dicho signo con otros del mismo tipo

La segunda condición pone las nociones de los procesos intermedios, para la solución o demostración de algún argumento.

> Segundo.- Que los procesos formales de solución o demostración, se lleven siempre a cabo, en obediencia a todas las leyes determinadas, según se expuso arriba, sin considerar la cuestión de interpretabilidad de los resultados particulares obtenidos.

> Tercera.- Que el resultado final sea interpretable, en cuanto a la forma, y que el hecho se interprete en concordancia con aquel sistema de interpretación, que se ha empleado en la expresión de los datos [Boole 1854, 63].

Es claro que para Boole los pasos intermedios son irrelevantes en la sintaxis. Dado que cada uno de estos pasos es irrelevante para el resultado final, el cual sí va a tener una interpretación, es fundamental, que estos pasos intermedios corresponda a las leyes regulares del álgebra, dado que su verdad no se puede dejar de lado.

En la tercera condición, la interpretación del resultado final será una demostración o una solución que debe apegarse a la interpretación inicial del argumento en cuestión. Bajo estas condiciones, Boole enuncia una definición de función. Con esta definición, él se auxilia para desarrollar sus cálculos lógicos:

> **Definición 2** Cualquier expresión algebraica que contenga un símbolo $x$ se llama función de $x$, y puede representarse de la forma general abreviada $f(x)$. Cualquier expresión que contenga dos símbolos $x$ y $y$ es igualmente llamada función de $x$ y $y$, y puede representarse $f(x, y)$, y así cualquier otro caso [Boole 1854, 66].

Con esta definición $f(x)$, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, etc., son funciones, por ejemplo:

$$x, 1-x, \frac{1-x}{1+y}, \frac{1+y}{y-2z}.$$

Boole no puede operar las reglas que establece con cualquier tipo de función. **Dado que Boole define a la fracción $\frac{0}{0}$ como indeterminada, como se mostrará más adelante, para dar otro enfoque a estas funciones, las va a desarrollar en término de los valores de 0 y 1. De aquí se extrae la siguiente definición.**

> **Definición 3** Cualquier función $f(x)$ en que $x$ es un símbolo lógico, o un símbolo cuantitativo susceptible tan sólo de dos

> valores 0 y 1 se dice desarrollada cuando se reduce a la forma $ax+b(1-x)$, siendo a y b determinados de tal modo que haga el resultado equivalente a la función de que se derivó [Boole 1854, 66].

Con los valores 0 y 1 se puede asumir lo siguiente:

$$f(x) = ax + b(1-x)$$

para $x = 1$ se tiene

$$f(1) = a$$

y, para $x = 0$, sustituyendo en la función da

$$f(0) = b$$

de modo que se obtiene

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1-x).$$

La forma de reducir una función cualquiera usando este método es muy simple. Supóngase que se tiene

$$f(x) = \frac{1+3x}{2+2x}$$

tal que si $x = 1$ y $x = 0$, haciendo la sustitución de $x$ en la función da como resultado que

$$f(1) = \frac{1+3}{2+2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ y } f(0) = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

tal que, al hacer la reducción,

$$f(x) = x + \frac{1}{2}(1-x) = \frac{1}{2}(1-x)$$

De esta forma, Boole reduce cualquier expresión algebraica, siendo tal el proceso que la función se pueda operar bajo las leyes de los símbolos.

La representación para dos o más términos tiene un desarrollo similar. Boole lo hace para dos, y da la forma ya terminada de tres términos. Sólo se reproducirá el desarrollo de dos términos para una función.

Dado el desarrollo de la función para $x$, la forma que toma la función con dos términos para reducir en primera instancia es como sigue:

$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)(1 - x)$$

calculando para los casos en que $y = 1$ y $y = 0$, entonces de forma similar que para $x$ se obtiene

$$f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)(1 - y) \text{ y } f(1 - y) = f(0, 1)y + f(0, 0)(1 - y)$$

para al final tener la función final de dos términos.

Boole llama a las conjunciones entre términos de la forma, $xy, x(1 - y)y(1-x)(1-y)$, 'constituyentes', y serán representados por una $t$. Dado que los constituyentes cumplen con la ley de la dualidad, entonces este símbolo respetará dicha ley, de forma que, $t^2 = t$ o $t(1-t) = 0$, con esto Boole define una nueva suma:

> **Proposición 3** Si $V$ representa la suma de cualquier serie de constituyentes, cuyos coeficientes separados son 1, se satisface la condición
> $$V(1 - V) = 0$$

Demostración
Sean $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ los constituyentes en cuestión, entonces

$$V = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, y observando que tenemos

$$V^2 = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$$

de donde

$$V = V^2$$

entonces

$$t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$$

tal que si se aplica bajo el símbolo $(-)$ de ambos lados $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + ... + t_n^2$ entonces

$$(t_1+t_2+t_3+...+t_n)-(t_1^2+t_2^2+t_3^2+...+t_n^2) = (t_1+t_2+t_3+...+t_n)-(t_1^2+t_2^2+t_3^2+...+t_n^2)$$

así

$$(t_1-t_1^2)+(t_2-t_2^2)+(t_3-t_3^2)+...+(t_n-t_n^2) = (t_1-t_1^2)+(t_2-t_2^2)+(t_3-t_3^2)+...+(t_n-t_n^2)$$

y por $t(1-t) = 0$ se tiene que

$$t_1(1-t_1)+t_2(1-t_2)+t_3(1-t_3)+...+t_n(1-t_n) = t_1(1-t_1)+t_2(1-t_2)+t_3(1-t_3)+...+t_n(1-t_n)$$

tal que

$$t_1(1-t_1) + t_2(1-t_2) + t_3(1-t_3) + ... + t_n(1-t_n) = 0 + 0 + 0 + ... + 0$$

de donde

$$t_1(1-t_1) + t_2(1-t_2) + t_3(1-t_3) + ... + t_n(1-t_n) = 0$$

y así dado el desarrollo

$$V - V^2 = t_1(1 - t_1) + t_2(1 - t_2) + t_3(1 - t_3) + ... + t_n(1 - t_n)$$

entonces

$$V - V^2 = 0$$

así por $x(y - z) = xy - xz$, por lo tanto

$$V(1 - V) = 0$$

Así es como Boole, en el siguiente capítulo, está listo para dar una interpretación de las ecuaciones lógicas. Las interpretaciones, que hasta este punto se han seguido, están comprendidas dentro del marco teórico del lenguaje simbólico que ha construido Boole. Estas interpretaciones (forma y extensión) han dado fundamento, en conjunto a las leyes de los símbolos lógicos, tal que por esto la interpretación de los constituyentes representan una parte de las cualidades del universo de discurso. De esta forma se puede fundar la extensión de cada constituyente, dadas sus propiedades.

Boole divide estos casos: El primero da tres posibilidades de interpretación para las ecuaciones. La primera se da cuando la función $V$ es igual a 0. Entonces por ejemplo:

$$axy + bx(1 - y) + cy(1 - x) + d(1 - x)(1 - y)$$

ocurre tomando el constituyente $axy = 0$, donde $a$ no es 0, $xy = 0$. Por ejemplo, esto se puede traducir como: 'Las cosas que no poseen la propiedad $x$ ni la propiedad $y$', de esta forma el coeficiente a determinar es la interpretación de $xy$.

Por ejemplo si se tiene la ecuación que interpreta:

Todos los objetos de $x$ que son tanto, $y$ como $z$

tal que su representación simbólica es

$$x = yx$$

Entonces, si $V = 0$, al sustituir

$$V = x - yz$$

la ecuación que se tiene es

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & f(1,1,1)xyz + f(1,1,0)xy(1-z) + f(1,0,1)xz(1-y) + \\ & + f(0,1,1)yz(1-x) + f(1,0,0)x(1-y)(1-z) + \\ & + f(0,1,0)y(1-x)(1-z) + f(0,0,1)z(1-x)(1-y) + \\ & + f(0,0,0)(1-x)(1-y)(1-z). \end{aligned}$$

Así,

$$f(1,1,1) = 0; f(1,1,0) = 1; f(1,0,1) = 1; f(0,1,1) = 1$$

$$f(1,0,0) = -1; f(0,1,0) = 0; f(0,0,1) = 0; f(0,0,0) = 1$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & 0xyz + xy(1-z) + xz(1-y) + \\ & + yx(1-x) + x(1-y)(1-z) + \\ & + 0y(1-x)(1-z) + 0z(1-x)(1-y) + \\ & + 0(1-x)(1-Y)(1-z). \end{aligned}$$

De aquí se desprende la interpretación para los constituyentes para los cuales su coeficiente no es 0,

$$xy(1-z) = 0; xz(1-y) = 0; yz(1-x) = 0; x(1-y)(1-z) = 0.$$

Estas proposiciones primarias tienen una interpretación puramente extensional, por lo que se pueden representar como sigue:

1. de los objetos que son $x$ y $y$, pero no $z$;
2. de los objetos que son $x$ y $z$, pero no $y$;
3. de los objetos que son $y$ y $z$, pero no $x$;
4. de los objetos que son $x$, pero no $y$ ni $z$.

Las proposiciones primarias, cuyos coeficientes no son 0, según el criterio de interpretación, muestran la inexistencia de alguna o algunas de las clases. Lo que se vería en álgebra como términos de valor cero claramente se anulan. En este caso, en el lenguaje lógico simbólico se trata de justificar la nulidad de las proposiciones primarias. Al faltar la existencia de alguna clase, dada la conjunción de los términos que las representan, obligan a Boole a explicar en cada proposición primaria 'puede así descomponerse en una serie de negaciones de la existencia de ciertas clases de cosa definidas, y, desde este sistema de negaciones puede reconstruirse' [Boole 1854, 70]. Lo que se desprende de aquí es que Boole afirma que puede reconstruirse una interpretación negativa en una positiva, siendo esto respetando los parámetros aristotélicos de las transformaciones de los universales, mostradas en el capítulo uno, se puede proceder y respetar las leyes de los símbolos lógicos, de forma análoga a una representación simbólica.

La segunda de las posibilidades se da cuando los coeficientes de los constituyentes son iguales a 1. Los constituyentes tendrán en la suma lógica un valor igual a 1. En el ejemplo anterior se puede ver esto más claramente, si se toman los constituyentes que tienen coeficiente valor a 1, entonces:

$$xyz; x(1-y)(1-z); z(1-x)(1-y); (1-x)(1-y)(1-z).$$

Como se puede observar, estos constituyentes forman el complemento de aquéllos cuyo coeficiente no tenía el valor de 0, por lo que la suma lógica de estos constituyentes es el universo; el cual se representa con 1, así:

$$xyz + x(1-y)(1-z) + z(1-x)(1-y) + (1-x)(1-y)(1-z) = 1.$$

La interpretación de cada constituyente es;

1. objetos que son $x$, $y$ y $z$;
2. objetos que no son $x$, que son $y$, pero no $z$;
3. objetos que no son $x$ ni $y$, pero si $z$;
4. objetos que no son $x$ ni $y$ ni $z$.

En este caso se observa que si primero se vio que $V = 0$, el complemento es $1 - V = 1$, lo que se muestra aquí es que $V$ cumple con la ley de la dualidad. Ya se vio lo que sucede cuando los coeficientes son 1 ó 0. Pero, ¿qué pasa cuando los valores de los coeficientes son distintos a estos dos valores? La respuesta a esta pregunta se encuentra en un nuevo símbolo que está en función de $V$. El símbolo que usa Boole es $w$. Éste se maneja como los demás símbolos $x, y, z$, etc., pero su valor de interpretación está en función de éstos, tal que $V = W$. Así, Boole define la siguiente proposición:

> **Proposición 4** Determinar la interpretación de cualquier ecuación lógica de la forma $V = W$ en que $w$ es un símbolo de clase, y $V$ una función de otros símbolos de clase muy indelimitados en su forma [Boole 1854, 80]

Ahora, como los demás símbolos, $w$ debe cumplir con la ley de la dualidad, es decir, $w(1-w)=0$, de esto se toman a $E$ y a $E'$ como funciones de los símbolos restantes, de donde por ejemplo si $f(x,w)=0$, entonces

$$f(1,1,)xw + f(1,0)x(1-w) + f(0,1)w(1-x) + f(0,0)(1-x)(1-w) = 0.$$

por lo que, agrupando se obtiene

$$\big(f(1,1,)x + f(0,1)(1-x)\big)w + \big(f(1,0)x + f(0,0)(1-x)\big)(1-w) = 0$$

Ahora se definen a $E$ y a $E'$ como

$$E = \big(f(1,1,)x + f(0,1)(1-x)\big)$$

$$E' = \big(f(1,0)x + f(0,0)(1-x)\big)$$

tal que

$$Ew + E'(1-w) = 0.$$

Por lo tanto

$$w = \frac{E'}{E'-E};$$

con esto Boole calcula el valor de $w$, y, del mismo modo, se obtiene el valor de $1-w$, de donde

$$1 - w = \frac{E}{E-E'}.$$

Esto permite continuar con las interpretaciones de los valores 0 y 1, los cuales representan la nada (el vacío) y el universo. Por otro lado, la interpretación de

$$\frac{0}{0}$$

toma, como en el álgebra, un valor indeterminado, pero a diferencia de ésta, la interpretación lógica, es que puede ser el universo, el vacío, o algo que puede ser representado por otro símbolo. De esta forma, se le representa con el símbolo $v$, el cual define la indeterminación dada. Por ejemplo, si se tiene la ecuación $x(1-y)=0$, donde $x$ va a ser las veces de función tal que, y juega el papel de símbolo lógico libre, de donde:

$$x(y)\frac{y}{y}$$

con $y=0$, 1, entonces

$$x(1)=\frac{1}{1} \text{ y } x(0)=\frac{0}{0}$$

por lo que

$$x(y)=y+\frac{0}{0}(1-y)$$

y, por lo tanto,

$$x(y)=y+v(1-y)$$

¿Cómo se puede leer esta ecuación? Todos los $x$ son $y$, y una parte indeterminada de los no-$y$, de esta forma se define, la parte indeterminada de las proposiciones. Pero, ¿qué sucede con el resto de los coeficientes? Boole los iguala a 0, así:

$$\frac{1}{2}=0\ ,\ \frac{2}{3}=0.$$

Se debe dejar en este punto muy en claro que la interpretación no se da en el concepto de la matemática de esta época, por lo que estos valores en sí parecen números. No tienen interpretación dentro del proceso de demostración.

Boole provee algunos ejemplos del manejo de su lenguaje, y la forma de cómo se puede servir de éste para hacer determinadas inferencias. Ejemplo:

"Seres responsables son todos los seres racionales que o bien son libres para actuar o bien han sacrificado verdaderamente su libertad" [Boole. 1854. VI]. Boole proporciona las siguientes sustituciones

1. $x =$ seres responsables;
2. $y =$ seres racionales;
3. $z =$ aquéllos que son libres para actuar;
4. $w =$ aquéllos que se han sacrificado voluntariamente su libertad de acción.

Hay una yuxtaposición entre $yz$ y $yw$, lo que se interpreta como: Seres racionales libres para actuar y seres racionales cuya libertad de acción ha sido sacrificada voluntariamente. Aquí, la intención es establecer la relación entre 'seres racionales' y 'seres responsables' tal que se da la siguiente ecuación

$$x = yz + yw$$

de donde

$$y = \frac{x}{z + w}.$$

Así, y hace las veces de función de $x, w$ y $z$, de donde

$$y(x, w, z) = \frac{x}{z + w}$$

tal que

$$y(1,1,1) = \frac{1}{2}; y(1,1,0) = 1; y(1,0,1) = 1; y(0,1,1) = 0$$

$$y(1,0,0) = \frac{1}{0}; y(0,1,0) = 0; y(0,0,1) = 0; y(0,0,0) = \frac{0}{0}.$$

Los coeficientes que tienen una interpretación directa son el

$$0, 1, \frac{0}{0},$$

y los coeficientes que son distintos como

$$\frac{1}{0} \text{ y } \frac{1}{2}$$

no cumplen la ley de la dualidad $a(1-a) = 0$ . En este caso, estos coeficientes se igualan a 0. Así,

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2}xwz + xz(1-w) + xw(1-z) + \\ & + \frac{1}{0}x(1-w)(1-z) + \\ & + \frac{0}{0}(1-x)(1-w)(1-z). \end{aligned}$$

Los términos independientes de esta ecuación son

$$xwz = 0 \text{ y } x(1-w)(1-z) = 0$$

por lo que, la otra ecuación está interpretada por

$$y = xwz + xw(1-z) + v(1-x)(1-w)(1-z).$$

De aquí se pueden extraer tres conclusiones. Una directa y dos interdependientes. La conclusión directa se interpreta como sigue: Seres racionales son todos los seres responsables o bien son libres para actuar, al no haber sacrificado voluntariamente su libertad, o bien, no son libres para actuar, al haber sacrificado voluntariamente su libertad, junto con un resto indefinido de seres no responsables, no libres y que no han sacrificado voluntariamente su libertad.

Por otro lado, las conclusiones interdependientes son:

1. Ningún ser responsable es a la vez libre para actuar, sujeto a la conclusión de haber sacrificado voluntariamente su libertad.

2. Ningún ser responsable es no libre para actuar, y a la vez sujeto a la conclusión de no haber sacrificado voluntariamente su libertad.

Si bien la base de la lógica moderna está sustentada en la lógica aristotélica, las ideas sobre las cuales se funda son completamente diferentes a las concebidas por el mismo Aristóteles. Este cambio tiene una evolución pausada, y se da en un momento donde los cambios en muchas áreas del pensamiento humano están transformando de raíz sus bases. La lógica y la matemática no se van a quedar al margen de estos cambios, en una situación más discreta, pero se pueden considerar de igual o mayor trascendencia, ya que estos cambios al interior de estas disciplinas serán las que marquen los estándares de cómo se debe desembolver en general una ciencia que se jacte de tener una estructura lógica y una aplicación matemática a su interior.

La matemática junto con la lógica no disfrutan de la rimbombante adulación que se hace a cincias como la física, la astrofísica, la biología molecular, etc., de las cuales sin la inclusión de la lógica y la matemática en su estructura no disfrutarían de ese reconocimiento.

Ahora, estos cambios por lo menos en lo que a la lógica y la matemática conciernen, tienen su simiente en dos conceptos que cambiaron de manera radical la manera de ver ambas disciplinas. Una es la definición de *signo* dada por Boole al inicio del capítulo dos de *Las Leyes del Pensamiento*, definición fundamental, que va a simentar todos los cambios por venir en su trabajo. La otra idea que va a transformar de forma definitiva a la lógica en particular es la proposición uno del mismo capítulo, ya que en ella se define cómo se van a entender los términos lierales, ya no como conceptos apegados a una correlación indispensable con los objetos del mundo material, lo cual para

Aristóteles, permite saber la existencia de un objeto o no, y por consiguiente saber su verdadera esencia. Lo que ahora se define es que estos términos, se reclutan para estar subordinados a reglas precisas de formación, centradas en la representaciones simbólicas que hace Boole de las operaciones mentales. Esto con el fin de entender cómo es que estas operaciones que funcionan bajo ciertas leyes, dan certeza al estudio palnteado por Boole.

Lo que se hace en el resto del cuerpo de las secciones 2.3.1 y 2.3.2, es mostrar la manera en cómo se construyen estas reglas y cuáles son las aplicaciones posibles. Para Boole, las aplicaciones son en lo particular al lenguaje natural. Lo que se debe destacar es la aplicación, o la adaptación de esta estructura a la teoría de las probabilidades. Este es un punto que se discutió en su momento, dado que parecía que Boole usaba sin fijarse en las consecuencias de las diversas interpretaciones que supuestamente se manejaban.

Boole define a $x$ como un suceso, con una probabilidad $p$ de que ocurra, y $1-p$ de que no ocurra. Lo que llama la atención es que se define a $x$ como un suceso, cuando con anterioridad esta misma $x$ representaba un concepto, entonces ¿de qué está hablando Boole con esta doble definición para $x$? Bien, si se enfoca en un inicio a $x$ dentro de los conceptos, que son representaciones del razonamineto humano, entonces no hay pérdida de generalidad, dado que un suceso se puede representar como un concepto. Recuérdese que todo hecho u objeto del mundo físico se puede representar en la mente en forma de concepto, tenga o no definición como tal. Así, un suceso, al ser un hecho del mundo físico se puede representar como un concepto mental, por lo tanto $x$ no deja de ser un concepto, pero con una restricción en su dominio entre los conceptos, definido sólo para éstos, que son a su vez sucesos.

Aún así, hay algo que puso incómodos a muchos lógicos de aquellos primeros años, y era la representación de signo $(=)$, el cual podía representar varios casos a la vez, según fuera su uso, ya fuere para designar la equivalencia entre dos proposiciones o para expresar una proposición de la forma, si [...] entonces [...]. Lo anterior sí puede ser algo incómodo si no se sabe qué representa (=). Hubo quienes intentaron subsanar estas deficiencias, como Jevons y Pierce, pero su éxito sólo fue parcial. Aún así esto abrió la senda para que pocos años después Frege y Peano en primer lugar y luego Russell diesen el paso a lo que hoy conocemos como lógica matemática.

Las leyes presentadas por Boole, tenían una limitada comprehensión de la totalidad de lo que él llamó leyes de la mente. Éstas sólo reflejaban en una proporción muy baja lo que realmete sucede en la mente de un ser humano, y al tratar de estandarizar esas leyes, sólo permitió que este tipo de razonamiento se limitará al estudio racional de ciertas ciencias, caso que hoy en día es una práctica común para cualquier estudio científico que se quiera realizar.

En su estudio de Boole, Russell tuvo que notar estos detalles, y reconocer este cambio radiacal propuesto en la lógica simbólica de Boole. Esos detalles en los que el signo ya no es más algo que defina su existencia mediante su relación con el mundo físico, sino que ahora es un concepto variable dependiente solamente de las reglas establecidas en los operadordes que realcionan dichos signos, al ser ésto lo que en primer lugar más se destaca, y el posterior desarrollo de estas ideas, dieron en su momento, quiáz, la certeza a Russell de que Boole era el descubridor de las matemáticas puras. En el siguiente capítulo se verá el trabajo de Russell, y ahí se mostrará si realmente Russell tenía razón.

# Capítulo 3

# Bertrand Russell

## 3.1 Introducuión

Russell, a diferencia de Boole, nace en una familia donde lo que menos escasea son los recursos económicos. Se queda muy pequeño huérfano de padre y madre, por lo que queda bajo la custodia de sus abuelos paternos, en particular de su abuela, quien ejerció un radical cambio en la educación que recibiría por parte de sus padres, de corte liberal, a uno conservador. También como en Boole, esto influyó de forma profunda a Russell. Su abuela implementó una serie de tutores que permanecían con él hasta el punto en que ella consideraba que se estrechaba la relación entre su nieto y el tutor, ya que no quería que éstos influyesen en Russell de ninguna forma. Este ir y venir de tutores no le permitía pedagógicamente establecer una continuidad a Russell en sus estudios. Es claro que al no tener una educación académica tradicional, la influencia que se pudo haber dado en él, si se hubiese inscrito en un colegio, quedó prácticamente anulada, dado el temor de su abuela a que ésto fuese a repercutir en ideas liberales en su nieto; hecho paradójico, ya que después que Russell se iscribiese en Cambridge para estudiar matemáticas, la libertad con la que se movía ahora le permitió desarrollar su intelecto de una forma que lo llevaría a reescribir la historia de las matemáticas y a convertirse en un liberal empedernido.

Uno de los tutores de Russell fue su hermano, quien le dio las primeras clases de matemáticas. Cuando comenzó con este estudio, se quedó totalmente insatisfecho con la forma de estudiarlas, ya que en un inicio, su hermano lo introdujo con los cinco postulados de Euclides, de modo que Russell en su eterno escepticismo, le preguntó a su hermano la razón por la cual él debía aceptar estos postulados sin antes demostrarlos, a lo cual su hermano le respondió, "si no los aceptas, entonces no podemos continuar", hecho que molesto a Russell, pero se tuvo que conformar para poder continuar con el estudio de la matemática.

## 3.2 Russell y su pensamiento filosófico

Russell, como se puede observar, era desde joven muy inquisitivo. Esto le permitió, ya en la etapa universitaria, a quedar insatisfecho con la enseñaza de la matemática en Cambridge, y buscar en la filosofía una respuesta al cuestionamiento de: ¿Cómo o qué conocemos? De ahí, lo siguiente: "de principio a fin, siempre estuve ansioso por descubrir cuánto puede decirse que conocemos, y con qué grado de certeza o duda" [Russell 1976, 9]. Esta preocupación está enfocada en la percepción. Para Russell, al igual que para otros filósofos, la percepción es la conexión entre la mente y la materia. El planteamiento de cómo percibimos al mundo, y cómo es que se obtiene conocimiento, ha dado siempre material a los filósofos para exponer diversas teorías al respecto.

Este problema epistemológico podrá durar hasta que el ser humano descubra la fuente universal del conocimiento, o hasta que cada uno defina para si, qué es la materia o el mundo que lo rodea, según sus propias percepciones. Es difícil, por no decir imposible que esto ocurra, dada la generalidad de las percepciones que cotidianamente tenemos como seres sensoriales. Así, un evento en particular, en la mayoría de los casos, no se puede generalizar.

Cada individuo que viva dicho evento, tendrá una experiencia distinta. No se puede decir que sea completamente distinta, pero sí hay diferencias en las observaciones que éstos hacen, ya que no todos van a observar el suceso, desde la misma perspectiva. Entonces se pueden verter una gran cantidad de argumentos y no llegar a ningún acuerdo; o se puede llegar a un consenso, pero con ciertas reservas. Las percepciones son tan únicas como personas hay sobre el planeta. Sólo se puede decir lo que cada persona piensa sobre dicho evento, para así dar un juicio, y tratar de ofrecer esta versión, como una hipótesis, una tesis, una teoría o una ley en general, sin tomar en cuenta otras teorías. Así, cada quien puede observar el juicio hecho, y aceptar o no su sistema de creencias, aunque después se modifique dicho sistema. Esto es lo que se observa en Russell durante diversas etapas de su vida. El argumento, en su mente, después de cierto tiempo, se modificará según el nuevo sistema de argumentos esgrimidos a favor o en contra del juicio expuesto.

### 3.2.1 Su concepto de universo

El razonamiento filosófico de Russell, según su propia afirmación, es inverso al razonamiento de la filosofía común. Él afirma que comenzar con el 'cómo conocemos' y continuar con el 'qué conocemos' es un error, porque el saber 'cómo conocemos' es tan sólo una pequeña parte del conocimiento del 'qué conocemos', según él.

Obtener conocimiento del 'cómo', según la idea anterior, es hacer sólo aportaciones del 'qué conocemos'. Por lo que se puede entender que el 'cómo conocemos' está contenido en el 'qué conocemos'. Parece dicotómico, pero esto aporta poca luz del ¿qué conocemos? ¿Qué es lo que acontece para que una persona pueda conocer algo? Esto es lo que durante largo tiempo ha preocupado a los filósofos. Pero saber cómo conocemos es tan sólo una parte de ese mismo conocimiento, que intenta rasgar un poco ese velo que parece impenetrable. Es aquí donde Russell parece retomar la idea aristótelica sobre el *qué* y no sobre el *cómo* platónico.

Teorías del conocimiento nacen y mueren, otras se afianzan. Pero, ¿alguna arroja verdadera luz sobre 'cómo conocemos'? No parece que exista alguna respuesta clara en este sentido; por ello, concentrarse en crear un área del saber, que se enfoque sólo en 'cómo conocemos' es para Russell, algo que no tiene sentido, dado que se descuida en gran parte el 'qué conocemos'.

Para Russell, el 'cómo conocemos' pondera un error, que lleva al estudiante a sublimar la mente, y a enfocar en el razonamiento, la deducción, la asociación y conducción de los pensamientos, de aquello que se conoce o se cree conocer sobre el 'universo mental'. En otras palabras, pretender conocer a través del cómo puede ocasionar una confusión de creer entender el qué conocemos, sin percatarse que sólo se conoce una ínfima parte del 'universo mental', por ello, el cómo conocer no es opción para Russell.

Cuando Russell habla de 'universo mental' se pueden suponer muchas cosas. Póngase el concepto 'mente' en su término más sencillo, o sea, en su afirmación fisiológica, y entiéndase universo mental, como el cúmulo de conocimientos que se pueden deducir del mundo material, tal que este cúmulo de conocimientos sólo se podrá incrementar en la forma en que avance la obtención y en la ampliación del saber. Un saber que Russell entiende está sujeto a los conceptos de espacio y tiempo, [1] valga la expresión. Así, mientras más comprendamos lo que nos rodea, más amplio será nuestro entender del mundo. Del mismo modo cuanto más tiempo pase, mayor será el conjunto de ideas que podamos comprender. De esta manera el 'universo mental' estará cada vez más a nuestro alcance. Así era la visión de Russell respecto al 'universo mental'.

Ahora, para poder descubrir los secretos del mundo, y exponer éstos como conocimiento universal e independiente de cualquier mente, se tiene que pro-

[1] Entiéndase espacio en su conceptualización científica, y tiempo en su idea temporal.

ceder a observar ciertos eventos, de los cuales se harán ciertos juicios. Si la observación de estos eventos lleva una estructura lógica y rigurosa para la obtención de sus conclusiones, entonces se puede afirmar que este conocimiento particular, tiene cierta veracidad según la metodología aplicada para su obtención. Este accionar es el de la ciencia; pero, el tomar un evento y discriminar las variables necesarias, para facilitar su estudio, es simplemente enfocarse en un instante singular del tiempo y del espacio, donde sólo unas cuantas variables van a ser tomadas en cuenta, para llegar a ciertas conclusiones, y si se repiten otros eventos con este tipo de variables, se obtendrán resultados equivalentes al primer estudio. Pero, ¿qué sucede si se incrementan las variables? Los resultados pueden variar, y tal vez se amplíen las conclusiones ya preestablecidas. Pero, al aumentar estas variables, el resultado del incremento de este conocimiento es tal que, en algún momento, éste puede crear teorías sobre dicho evento, las cuales quedarán en desuso, según se acumule el conocimiento al incrementarse las variables del objeto de estudio. ¿Qué es lo que se entiende con esto? Qué al sólo tomarse un objeto de estudio y dejar fuera vaiables, se permite entonces dejar fuera otros eventos que podrían dar mayor información respecto al evento en estudio. Esto es en lo que Russell no concuerda con los filósofos que siguen esta línea. Él propone que si un evento ocurre, éste genera otra serie de eventos en determinadas circunstancias, y así estos nuevos eventos dan vida a otros, y así subsecuentemente. Se genera una ramificación convexa de eventos que influyen directamente o indirectamente en los demás, de modo qué ningún evento es independiente. ¿Qué significa para el estudio de un evento en particular? El estudio de este evento se tiene que sincronizar con el estudio de otros eventos que sucedan, en parte, en el mismo tiempo y en el espacio adyacente al evento, el cual es el objeto de estudio, de esta forma se puede obtener un conocimiento más completo.

Por ejemplo, tomemos el caso de dos astrónomos, y suponiendo que ambos desean observar la misma estrella; además, ambos cuentan con el mismo tipo de instrumentos de observación, pero uno, como es común en él, sólo tomará ciertas variables, para facilitar su observación; en cambio el otro toma en cuenta más variables. Así, ambos, en el mismo instante observan y capturan en dicha estrella en una placa y, según sus propias observaciones, anotan según su costumbre lo que sucedió en ese instante en el que capturaron la estrella a observar. Suponiendo que se conozcan, entonces se reúnen para comparar sus placas, y se dan sus observaciones para compararlas, entonces ven que sus concluciones son parecidas; tal vez en este caso sólo les interese calcular la edad de la estrella, pero el que se apoyó en la observación de más variables, además de interesarle este dato, puede observar que aunque ambas concluciones tienen casi la misma información, dado que se hicieron en la misma escala del espacio tiempo, y con el mismo tipo de instrumentos, las condiciones atmosféricas y la altura, en la que ambas placas fueron tomadas, tendrán ciertas diferencias, de luz y de disposición de los objetos estelares capturados en ellas. Incluso la latitud juega en este caso cierta importancia, de ahí, uno de los astrónomos concluye, que la estrella tiene cinco mil millones de años, pero el otro al ver que una de las estrellas, que está en ambas placas, no concuerda con el tono de luz que se captó en ambas, lo lleva a no hacer un juicio tan apresurado ante tal diferencia, tal vez insignificante para el otro. Pero, este sólo hecho lleva al otro astrónomo a sacar más placas, para de ahí quizás, llegar a la misma conclusión que el otro astrónomo, pero con una amplitud de certidumbre más holgada.

Un evento por consiguiente, tiene tres actores: El tiempo, el espacio y la materia, pero no se confunda el concepto 'materia' con lo que comúnmente entendemos por materia. La idea ontológica de 'materia' para Russell tiene que ver más con el logicismo, que con las ciencias naturales. Para él, la idea de materia tenía que ver más con un 'concepto-clase'[2] que con un objeto

[2]Para entender qué es un concepto-clase, primero se debe de tener en cuenta, que una

cualquiera. La materia al ser un concepto-clase, denota; esto quiere decir, que cuando se habla de 'materia' no se habla de la materia, sino de los objetos que denota la 'materia', que no son otra cosa que los términos de esta clase, 'términos que ocupan instantes'. Así, estos términos cumplen con ciertas características: 1) Cada término ocupa un punto espacial en cualquier momento; 2) dos términos no pueden ocupar el mismo espacio al unísono; 3) un término no puede ocupar dos puntos espaciales simultáneamente; 4) todo término perdura en el tiempo; 5) el movimiento en el espacio necesita series continuas; y, 6) la identidad de cada término se obtiene de su relación con el espacio y el tiempo. Se puede entender ontológicamente que cada término de la materia es indivisible e impenetrable en un tiempo y espacios determinados. Esto muestra la relación que hay entre la 'materia', el tiempo y el espacio. No se observan como conceptos separados, sino que guardan una relación indivisible entre sí.

Así, Russell aborda el tema de las mónadas [3] de Leibniz, con el cual muestra estar en desacuerdo. Desde su punto de vista, esta teoría interpreta al universo de dos formas, una interna y otra externa. La idea interior del universo, en el concepto espacio-tiempo es uno en cada monada, y la exterior es cómo éstas reflejan dicho concepto, dando una idea de lo que es el universo. Leibniz enfoca al espacio-tiempo como un grupo de cosas que existen al mismo tiempo, y guardan la posibilidad de un orden en el espacio, en tanto existen de forma conjunta, no son relevantes las relaciones particulares entre estas cosas, y si se observan éstas, se puede entender el orden que hay entre ellas. Esto nos remite a que el espacio-tiempo no tiene una existencia real en el universo, sino que son sólo relaciones a partir de las cuales se construyen

clase se entiende en los térmios en los que se explicó el capítulo anterior, así un concepto-clase es aquello que denota a los elementos de la clase, por ejemplo: Sea la clase de los hombres, el concepto-clase es 'hombre', así el elemento denotado es un hombre, tal que $x$ es un hombre.

[3]Cada una de las sustancias indivisibles de distinta naturaleza,dotadas de voluntad,que componen el universo,según el filósofo alemán Leibniz.

conceptos que les dan un orden a estas cosas. Ontológicamente, este concepto de espacio-tiempo sólo existe en nuestras mentes. Esto es con lo que Russell no está de acuerdo, porque él cree que el espacio-tiempo no es tan sólo un concepto de nuestras mentes, sino que existe realmente. De ahí que él considere un error el concentrar el estudio en 'cómo conocemos', para no dar más importancia a lo que pasa en nuestras mentes, y poder centrarse en los hechos reales del universo mental.

### 3.2.2 La influencia del idealismo

Cuando Russell llega a Cambridge, lo hace con el propósito de estudiar matemáticas, pero no quedó satisfecho con la enseñanza de éstas, incluso llamó a su método de enseñanza como 'un insulto a la inteligencia de las matemáticas'. En esta etapa se vieron sus estudios en filosofía limitados por el de las matemáticas, y por un problema de influenza que lo afectó, según su propia versión.

Una vez se que graduó en matemáticas Russell, continuó con sus estudios en filosofía, los personajes que mayor fuerza tuvieron sobre él fueron Stout y McTaggart. Este último impresionó a Russell. Según él, McTaggart "decía que podía probar lógicamente que el mundo era bueno, y la inmortalidad del alma". Russell se resistió a la influencia de McTaggart, en un inicio, pero poco a poco cedió, hasta 1894, que fue cuando tomó de nuevo su filosofía metafísica semikantiana y semihegeliana.

Durante sus viajes a Berlín y a los Estados Unidos, estudió la matemática continental europea, leyendo a Darboux, Dini, Gauss, Grassman, incluyendo textos de física como, *Electricidad y magnetismo* de Maxwell, y los *Principios de mecánica*. Entre 1896 y 1898, realizó una serie de trabajos en filosofía de la física, con los cuales no guardará poco tiempo después la misma opinión. Esto porque durante estos años las ideas neohegelianas enfocan los trabajos de Russell, pero dados ciertos eventos, en particular las critícas hechas por Moore a su trabajo, comenzó un desencanto por parte de Russell a estas ideas. Es en este momento cuando Whitehead le aconseja leer directamente a Hegel, lo que termina por dar el cambio de posición filosófica. Pero, ¿cómo es que se puede suscitar tal cambio? y ¿cómo marcó esta influencia el trabajo posterior de Russell? En las siguientes secciones se toman estas preguntas.

### Hegel

En su libro, Hegel define a la lógica como sigue:

> La lógica es la ciencia de la idea pura, de la idea del pensamiento abstracto. [Hegel 1817, 17][...]
>
> Se puede decir que la lógica es la ciencia del pensamiento, de sus determinaciones y de sus leyes; pero el pensamiento como tal no constituye sino la determinabilidad general o el elemento en que la *idea* se halla en el estado de idea lógica. La *idea* es el *pensamiento*, no como pensamiento puramente formal, sino como totalidad que se desarrolla ella misma en sus determinaciones y en sus leyes, y, por tanto, estas determinaciones y estas leyes no las encuentra en sí como elementos que están ya en ella y que le son dados de antemano, sino que ella misma los da [Hegel 1817, 17].

Esto significa que el *pensamiento* en abstacción es *idea*. Nada que la defina está fuera de ella, ni conceptos. La *idea* es en sí misma su propia definición, en ella se gesta ese razonamiento que a la postre será concepto, transformándose en definición y quizás posteriormente en hipótesis, y sólo al final, tal vez en ley. En todo caso, la *idea* es el último elemento del pensamiento.

Podrá parecer contradictorio que una *idea* defina sus determinaciones y sus leyes porque la intuición nos refiere, que a ciertas nociones se les asocie un grupo de conceptos y determinaciones que permitan comprenderlas. Así, una idea, para nosotros es algo que se fundamenta en conceptos, a los cuales podermos acceder en nuestra mente para poder de ahí entender dicha idea, y darle una relación con el mundo que nos rodea. Pero, esto es precisamente lo contrario a lo que Hegel expone. Una idea, a partir de sí misma, va a determinar sus propios razonamientos, sus propios conceptos. Entonces, una idea está por encima de cualquier razonamineto y de cualquier concepto. Una *idea* es *pensamiento* puro.

Hegel, por otro lado, afirma que la 'lógica es la ciencia más difícil, esto es que, no tiene por objeto intenciones, sino abstracciones puras' [Hegel 1817, 17]. Su ejemplo es la geometría. Según él, esta materia, en su abstracción, aún tiene representaciones sensibles. Porque de no ser así, la lógica sería la ciencia más fácil, de ahí, el pensamiento y sus determinaciones serían ordinarios, sencillos y elementales.

La lógica de Hegel sólo observa la parte metafísica, deja claramente de lado cualquier posibilidad de insertar en ella argumentos formales sensibles, de modo que al dar una lógica, o al tratar de estudiar la lógica sólo se puede hacer en la forma más abstracta del pensamiento. En este punto, la teoría de Boole es antagonista con la de Hegel, dado que Boole pretende eliminar el pensamiento metafísico de la lógica. Como se ve en las siguientes secciones, Russell predispuesto por Moore, al leer esto, debió darse cuenta de lo que realmete pasaba con Hegel, dado que la noción dada por Bradley se puede enfocar en el ejemplo del 'Animal', dado cuando se vio a Platón. La concepción de que una *idea* sea algo en sí un *pensamiento* abstracto, y que ninguna ley, ni concepto, ni determinación, definan lo que es una *idea*, es claro que debía provocar una reacción en Russell, la cual se comentará más adelante.

Para Hegel, la verdadera utilidad del estudio de la lógica, radica en que el individuo, al penetrar en su pensamiento abstracto, profundiza en la 'idea pura'. Así, se le abren las puertas de su 'espíritu', como una introducción del pensamiento por el pensamiento, es decir, estudiar el pensamiento a través del metapensamiento.

Hegel afirma que si se estudia el pensamiento, a través del pensamiento, éste quedará libre de cualquier impresión sensible. De esto, él asevera, que: La lógica es la forma de la verdad pura, no de aquella verdad que se desprende del estudio sensible de las formas. Es la verdad en su más pura expresión [Hegel 1817, 18]. Así, el objeto de estudio de la lógica definida por él es la 'verdad'. Para Hegel esta palabra encierra un significado mucho más alto y serio. De hecho es más que una obtención de la verificación de algo: Es una aspiración que conduce al hombre a vibrar, si su corazón y su espíritu están sanos. Tras esto, Hegel parte de la idea de la relación de lo finito y lo infinito, y la cuestión de cómo alcanzar la verdad. Él afirma: 'Dios es la verdad'. Esto, puede causar controversia, pero, la crítica que él alza en contra de la búsqueda de la verdad, a través de la ciencia, es contundente. Pero habría que preguntarse si esto significaba que Hegel estuviese en contra de la ciencia, y tal vez más de uno asienten este concepto. La relación aparentemente antagónica de Hegel se debe de tomar con cuidado, ya que él no critica a la ciencia, sino el uso que se le comenzó a dar. El criterio para obtener la verdad se transformó en la búsqueda de ésta a través de la ciencia, al dejar de lado la verdad absoluta, como un estudio anquilosado. En concreto, el abandono de la indagación de la verdad absoluta, para Hegel, supone la forma de inducir a la nueva investigación de la verdad, por medio de la ciencia, y termina con la pérdida de la humildad y la modestia, al formar en la mente del hombre, nuevos conceptos que le permiten indagar de forma externa a él, la verdad.

No se puede, como ya se dijo, acusar a Hegel de estar en contra de la ciencia, sino en la forma que ésta se usa para buscar la verdad. Así, las similitudes con Russell no son tan claras, pero esto permite entender, un poco a Hegel, y a su filosofía, y el por qué Russell, después de leerlo, dejará el idealismo de forma definitoria.

### Bradley

A Bradley se le considera como uno de los máximos representantes del idealismo inglés. Lo que sí se puede decir de él es la influencia que tuvo esta filosofía en el desarrollo filosófico de Russell. Se puede hablar del Russell logicista, pero no se puede comprender bien su pensamiento sin antes dar una mirada a la filosofía de Bradley.

Bradley toma como eje los conceptos de relación, cualidad, apariencia, realidad y juicio. En *Apariencia y realidad*, Bradley toca los cuatro primeros puntos a tratar aquí. Así, si se toma un conjunto de objetos, lo primero que se debe entender es qué los caracteriza, en otras palabras, qué cualidades son las que tienen, y en base a éstas, cuáles pueden ser las relaciones apropiadas, para que estas cualidades se entiendan. No es posible que las relaciones por sí solas caractericen las cualidades de los objetos. Por ejemplo: El acero es un metal, es gris, duro y resistente. No se puede pensar en que las cualidades del acero por separado, nos refieran al acero como tal, es decir, si se habla de la cualidad de ser duro, ésta se encuentra en los objetos que son duros, pero un diamante es más duro que el acero, así que ni siquiera dos o tres de las cualidades que refieren a un objeto, pueden definirlo. Pero, si se habla en conjunto de todas las cualidades de dicho objeto y la forma en que éstas se relacionan, entonces se puede decir de qué objeto se habla. Así, de esta forma se puede sustentar lo que se decía anteriormente, respecto al *ser* de los objetos. Éstos tienen una clara representación en esta filosofía, y su interpretación no depende de las relaciones que se den entre objetos, y es enfático observar que, sin dejar de ser las relaciones de gran importancia en la concepción, en este caso de las *cualidaes*, en otros *conceptos*, son las que priman en la interpretación de la forma; pero, como se verá en breve, los primeros pasos a una lógica, cómo hoy la entendemos, los da precisamente

Bradley.

Así, las cualidades tienen un distintivo particular al depender de cómo se den las relaciones entre la multiplicidad de éstas. Serán entonces, inteligibles o ininteligibles; tales que crean sus propias relaciones en función de las necesidades que se den entre ellas. Pero aún así, las relaciones tienen que diferenciar a las cualidades, sino, no se sabe qué es lo que se quiere dar a entender; entonces tanto las cualidades como las relaciones dependen mutuamente entre sí para hacerse perceptibles.

Depués de las cualidades y las relaciones, Bradley está listo para hablar de *apariencia*. Si se piensa en forma relacional, los términos y las relaciones son entonces partícipes claves, tal que sólo se trata de la *apariencia* y no de la *verdad*. Esto lo que supone es que los conceptos son artificiales y prácticos para este tipo de pensamiento; pero no se pueden sustentar estos pensamientos, dado que sólo tratan con lo que es *aparente* a la realidad, y no de la *verdad*. Aquí, la *verdad* va a jugar un papel de vital importancia, porque la manera en que la define Bradley, será decisiva para los acontecimientos respecto a Russell.

Los objetos a los cuales se les asignan un cierto número de cualidades, y tal que dichas cualidades requieren relacionarse para ser inteligibles en la experiencia, no son suficientes para que sean *verdaderas*, entonces son a lo sumo *aparentes*. Así, todo lo que convengan dentro del dominio de los fenómenos está condenado a ser sólo una relación. Por lo que, si se lleva esto al campo del tiempo y el espacio, éstos son sólo relaciones; por lo que el tiempo y el espacio no son *verdaderos*, sino sólo *aparentes*. Pero, el espacio no sólo es relación, dicho de paso, el espacio como un todo, tiene partes, por lo que el espacio se compone de sus partes, tales partes se relacionan de alguna forma que sea inteligible. El mismo argumento se puede usar para el tiempo, y dado que en la experiencia, esto resulta ser atribuible al pensamiento relacional, el tiempo y el espacio no determinan la *verdad*.

Así, para Bradley, las apariencias por sí solas o en pequeños conjuntos, no representan la realidad. Pero, no se puede ver a la realidad sin las apariencias, esto significa que la totalidad de las apariencias, forma nuestra realidad. De este modo, la totalidad que se busca es una totalidad metafísica. Así, ésta es lo absoluto, es todo lo que pueda ser identificado con el mundo visible; así, lo absoluto es espíritu, por lo tanto, así se está en posesión de la *verdad*.

Por otro lado, algo que se debe destacar en Bradley es la separación que hace del psicologismo de la lógica, y su aportación a la generalización de los términos. Pero la forma en que los pensamientos se asocian, no pierde su importancia, pero esto es un problema de la psicología. Esto, inevitablemente, tiene todas las características de la idea en la cual se sustenta toda la filosofía de los *Principios de las Matemáticas*. Es aquí donde se puede encontrar la influencia más importante que tuvo la filosofía de la lógica de Bradley sobre la de Russell; e incluso no sólo para la lógica de Russell, sino para la mayor parte de la lógica moderna. Habrá quien se aferre aún a las viejas ideas, pero este cambio dio un vuelco a la lógica en general.

El estudio de Bradley en *Los Principios de la Lógica* comienza con el juicio y sus relaciones. Esto no deja de lado la importancia que tienen las interpretaciones que de éstos se obtengan, mas sin embargo, a Bradley sólo le interesan estos juicios en su interpretación simbólica general, las asociaciones particulares no son parte importante de su investigación. Esta es otra aportación de Bradley a Russell. En Bradley, el estudio de los juicios, lo verdadero y lo falso, se toman desde las correspondencias que a éstos se les atribuyen, tal que si hay correspondencia del juicio, su afirmación es verdadera, de no tener correspondencia, la afirmación será falsa. Esta otra característica de la verdad del juicio da la pauta para que Russell defina a la matemática pura, ya que si todas las afirmaciones de un sistema formal corresponden con la verdad lógica, entonces se garantiza su pertenencia a ésta, de lo contrario, sólo se habla de lógica proposicional.

Pero, aún con la separación que hiciera Bradley del psicologismo y la lógica, la diferencia entre la metafísica y la lógica no estaba muy clara para él. Lo que para un lógico moderno puede parecer familiar, para Bradley no lo era tanto, dado que él mismo afirmará que no sabía dónde comenzaba y dónde terminaba la lógica. Aunado a esto, su lógica no se salvó de los rasgos metafísicos que se manifiestan claramente en su obra *Apariencia y realidad*. Así que, si todo juicio es general y abstracto en su formación, no se afirman conceptos individuales, sino conceptos totales. De esta forma, se afirma la realidad absoluta.

Las diferencias entre Hegel y Bradley pueden parecer de poca importancia, y no detectables a simple vista; pero se debe de obsevar que son relevantes para el desarrollo que tomaría la lógica, y, en particular, la matemática durante el siglo XX, ya que estas diferencias entre filósofos van a repercutir en tal vez uno de los cambios más drásticos y significativos dentro de la historia de la filosofía de la matemática. Y ese cambio se daría en Russell, que al detectar que Hegel no habla de cualidades ni de juicios para definir la *totalidad absoluta* y la *verdad*, y mucho menos considera los lenguajes formales para llegar a éstas, sino mediante el estudio del pensamiento, mediante el pensamiento. Bajo estos términos, es claro que cualquiera se sentiría defraudado y engañado, así reaccionó Russell al percatarse de esto.

### John McTaggart

McTaggart, en palabras del mismo Russell, desempeñó la mayor influencia que pudo tener dentro del idealismo. McTaggart, continúa con el ideal metafísico, en este caso, de lo *existente*. Para él lo que existe no existe por existir, esto es un absurdo, ya que la sola existencia por el existir no tiene sentido, así que aquello que existe debe de tener al menos una cualidad. De este modo, eso que existe, para poder negarlo, hay que afirmarlo en su existencia, a través de una cualidad, ¿cuál? La que le da la característica de ser afirmado o negado. A diferencia de Bradley, MacTaggart, toma la *totalidad*, y enfoca su estudio a los componentes de esa *totalidad*. Así, cada 'algo' existente será su objeto de estudio. En sí, la cualidad pude ser simple o compuesta. Si es compuesta, entonces está formada por una multiplicidad de cualidades que de igual forma pueden ser compuestas, o simples, o ambas. Si una cualidad es compuesta, entonces puede ser una cualidad total, estas cualidades lo que definen es la *sustancia* de lo que existe, tal que la sustancia sólo depende de las cualidades totales para ser. De modo que el estudio de un objeto está centrado en la totalidad de sus cualidades. Así, esta multiplicad de cualidades, en su totalidad, permiten entender en lo individual la sustancia de algo que existente, a esto se lo nombrará, *idealismo personal*, porque, como se puede ver, la sustancia es personal, es individual, hacia eso particular que existe.

La notoriedad de definir a los términos sigue en MacTaggart, aunque con otro enfoque, definir los objetos, sigue aquí presente. En este caso la definición se da a partir de la experiencia. Así, si algo existe, entonces esta existencia está dada por la percepción. Se ve claramente que la influencia de Platón y Aristóteles sigue presente en tanto son las definiciones de los términos.

Las cualidades guardan respecto a otras cualidades ciertas relaciones, las cuales permiten saber si tienen o no sentido tales relaciones, esto es que sean o no inteligibles. Dos cualidades al relacionarse forman una nueva cualidad, la cual deberá ser una cualidad *derivada* de las dos primeras. Si la cualidad derivada es inteligible, entonces es una afirmación de algo que existe. De lo contrario, será sólo una relación, que no es afirmada en la existencia; por lo que esta no representa una cualidad que afirme o niegue la existencia de algo.

Ahora, si las sustancias tienen las mismas cualidades, entonces son la misma sustancia, y si no lo son, entonces deben distinguirse entre sí. Así, un conjunto de sustancias forma junto con otros conjuntos de sustancias un grupo, de modo que dicho grupo es una sustancia. Ninguna sustancia puede ser simple, éstas deberán ser compuestas. A cada grupo le corresponde una sola sustancia, y si se agrupa la totalidad de las sustancias que contengan todo lo existente, entonces se tiene una sustancia llamada universo. En la sustancia, dado que si bien se pueden diferenciar entre sí, no se puede afirmar que no se puedan contener a sí mismas.

Con todo lo anterior, no se puede afirmar una certeza absoluta por lo que la experiencia de ciertas características no demuestra que se pueda conocer la verdad total, ya que pueden existir características que nunca se puedan experimentar o imaginar. Por ende, aquéllas que sí se pueden experimentar e imaginar, pertenecen al ámbito de las apariencias, mientras que las que no, pertenecen a la realidad total. De las primeras se pueden obtener verdades razonables, de las segundas se obtiene la verdad absoluta.

Se pueden hacer ciertas analogías entre MacTaggart y Russell, ya que si se conoce la obra de Russell se puede ver en primer lugar que el idealismo existencial de MacTaggar es clara influencia para Russell, con la diferencia que para MacTaggart, la existencia residía en el espíritu y no en la materia. Como se discutió al principio de este capítulo, para Russell la representación de lo que existe se encuentra en la materia, concebida en los términos de clases, ya explicada anteriormente. El punto que diferencía todo es la visión de lo que existe. Para Russell, el concepto espacio-tiempo es necesario; para MacTtaggart, tan sólo es parte de las verdades razonables y no de la verdad total.

### La ruptura con el idealismo

La abrupta ruptura de Russell con el idealismo trajo consecuencias que hasta en la actualidad continuan. Los motivos por los cuales se puede aducir este hecho se pueden discutir largamente. Las diferencias dadas entre la filosofía hegeliana y la neohegeliana tienen como principal discrepancia la forma en que se obtiene el concepto de *verdad*. Las diferencias con MacTaggart se pueden llevar al mismo nivel, ya que él sustenta la verdad total en un concepto espiritual y no material, de forma que para él la materia sólo refiere verdades razonables y no la verdad total.

La influencia del idealismo en Russell es fundamental, ya que tanto de Bradley como de MacTaggart, él obtuvó una gran influencia para el desarrollo filosófico de *Los Principios de las Matemáticas*.

### 3.2.3 Técnica en lógica matemática

En el Congreso de Filosofía de 1900 en París, Russell tuvo por primera vez contacto con Peano. Se le acercó y le preguntó si tenía ejemplares de su trabajo, ya que le interesaba profundizar en él. De estas lecturas, Russell sacó sus propias observaciones sobre *Los principios de las Matemáticas*.

Pronto regresó a sus trabajos anteriores a 1900, y notó que ni Leibniz, ni Boole, ni Schröder, ni Pierce, ni el propio Whitehead daban "siquiera un principio de solución de los problemas que la aritmética plantea a la lógica". Tal reproche no se puede justificar, porque simplemente los problemas filosóficos dados en cada época son totalmente distintos. Por ejemplo, hace cien años se sucedía una reforma completa a la filosofía de la ciencia, con los problemas esbozados por el mismo Russell, Hilbert y Einstein. En la actualidad, la problemática de la filosofía de la ciencia radica más que nada en el desarrollo de la genética, la teoría M, entre otros, y dentro de cien años los problemas serán distintos. De ahí, que la pretensión de Russell de tratar de encontrar algo ligado a su pensamiento era vacuo.

Russell, al enfocar sus energías al trabajo de Peano, derivó dos avances técnicos. El primero de estos avances tiene relación con las proposiciones de la forma 'Sócrates es mortal' y 'Todos los griegos son mortales', que en la teoría aristotélica, según Russell son 'indistinguibles', en todo caso se entienden como no-diferentes. Pero lo que propone este avance es la separación de ambos tipos de proposiciones. Así, se pueden reescribir las proposiciones de la forma 'Todo $P$ es $Q$' como 'Para todos los valores posibles de $x$, si $x$ es $P$, entonces $x$ es $Q$' las letras $P$ y $Q$ pasan de términos a clases, y la $x$ es la variable que se relaciona en este caso con las dos clases $P$ y $Q$, donde si $x$ es $P$ y $Q$, entonces $x$ guarda las propiedades que definen a $P$ y $Q$; de esto se puede concluir, que al menos estas clases guardan una relación donde comparten miembros que son denotados simultáneamente por los conceptos-clase de ambas clases a los que pertenecen. Los enunciados $x$ es un $P$ y $x$ es un $Q$, en un principio, son llamados proposiciones, posteriormente Russell rectificará y los renombrará llamándolos 'funciones proposicionales'.

El segundo de los avances mencionado por Russell tiene que ver con no confundir a los elementos de la clase con la clase misma. Por ejemplo, tómese la proposición $P$ es $Q$. Se puede sustituir el término $P$ por la palabra atenienses, y $Q$ por griegos, entonces si se toma la proposición, Todo $P$ es $Q$, entonces, 'Todo ateniense es griego', o 'Todos los atenienses son griegos', en ambos casos parece que tenemos dos proposiciones equivalentes, y al mismo tiempo verdaderas. Pero, obsérvese que en una proposición se habla de ateniense y en la otra de atenienses, y estas dos palabras no son las mismas en ningún caso. Esto a los lógicos anteriores a Russell perecía no causarles demasiados problemas, porque Aristóteles dejó libre la interpretación de los términos $P$ o $Q$, siempre y cuando estuviera claro el uso de éstos. Pero si para un lógico 'Todo $P$ es $Q$' está claro, habría que ver cuál era su opinión respecto con la proposición 'Todos los $P$ son $Q$'. Tal vez se harían las observaciones anteriores; pero, ¿qué sucedería con alguien que quisiera aprender lógica, y se encontrara con lo anterior? Tal vez se confundiría porque al pensar ¿qué es $P$? o ¿quiénes son $P$? Tendría que detener su estudio hasta comprender el papel de $P$ en ambos casos. De ahí que, definir a $P$ como una clase y no como un término, deja ver con mayor claridad el papel de

$P$ y el de $x$ como miembro de esta clase. Entonces, al ver las ventajas que daban estos avances dados por Russell, se marcará el inicio del proyecto que concluirá en 1903 con la publicación de *Los Principios de las Matemáticas.* En esta misma etapa, Russell escribió un ensayo sobre la lógica de relaciones, titulado "La lógica de relaciones con aplicaciones a la teoría de series", el cual apareció en el *Revue de Mathématiques* en dos etapas, la primera en julio y la segunda en noviembre de 1901. Es de notar que la teoría de las relaciones, si bien da comienzo en Pierce y Shröder, como lo reconoce Russell, para él ésta es de mayor importancia que la teoría de las clases, dado que las realciones guardan un lazo más cercano con las matemáticas que las clases. En el tratamiento que muestra Russell define a una relación $R$ y a dos variables $x$ y $y$ tales que $xRy$, se lee '$x$ guarda la relación $R$ con $y$'. Para Russell esta expresión requiere, para ser una proposición que abarque todos los valores de las clases $x$ y $y$, definir lo siguiente: 1) Que los términos de la clase $x$ que guarden una relación $R$ con algún término de la clase $y$ se denotaran como *referentes*, y los términos de la clase $y$ que son relacionados por la relación $R$ con al menos un término de la clase $X$, se les llamará *relatos.* 2)Otro dato que define Russell es la iguldad entre relaciones, ésta se da si dadas dor relaciones $R$ y $R'$, tales que si $xRy$ implica a $xR'y$ y $xR'y$ implica a $xRy$, entonces $R$ y $R'$ son igulales. Algo más que se debe de destacar es la definición de los dominios restingidos de las relacinoes, tales que si una clase de términos $x$, donde todos los $x$ se relacionen con no todos los $y$, de forma que sólo se toman en cuenta aquellos $y$ que sí se relacionencon los $y$, este subconjunto de términos de la clase $y$ guarda para la relación $R$ un dominio restringido repecto al conjunto $x$, en pocas palabras sólo se considera a los términos de $x$ que bajo la $R$, se relacionan con términos de la clase $y$. La teoría de las relaciones que Russell muestra en estos ensayos, muestra la madurez de su trabajo respecto a *Los pincipios de la Matemática.* Anterior a este trabajo, Russell de octubre a diciembre de 1900, escribió el primer borrador de *Los*

*Principios de las Matemáticas*, corrigiendo posteriormente las partes I, II y VII. Según Russell, terminó este primer borrador el 31 de diciembre de 1900, 'el último día del siglo'. Si bien Russell hace esta afirmación, se convierte de suma importancia este simple hecho para este trabajo de tesis. En abril de 1910 en una carta dirigida a Phillip Jordain, le menciona que su ensayo "Recent Work on The Principles of mathematics" lo realizó en enero de 1901. Además, el 31 de diciembre de 1900 le confió a Helen Thomas que tenía que elaborar un ensayo sobre los avances más recientes en matemáticas para el *International Monthly.* Durante el tiempo que Russell desarrolló el primer borrador de *Los Principios* afirmó que pasó por una etapa de fluidez de ideas que le permitían comprender mejor sobre este trabajo. Esto influirá definitivamente en su artículo "Recent Work on The Principles of mathematics", simplemente por la proximidad de las fechas en que ambos trabajos fueron compuestos.

Otra cosa interesante que se debe de observar es que Russell, una vez fuera de la influencia del idealismo, deja de lado las preocupaciones ontológicas por definir primero los objetos que van a recibir los nombres de téminos, conceptos, cualidades, entre otros. Estas definiciones son clásicas, pero al existir ya un trabajo que antecede al suyo, en el cual se trataban a los términos como simples objetos de un sistema, sin restar claro está su importancia dentro del sistema, en donde la parte más importante no era cómo se debían definir estos objetos, sino que ya se les da una definición fija y lo que resta es primar sobre la forma en que éstos se relacionan, por medio de reglas y operaciones matemáticas, claro está se hace referencia al trabajo de Boole. Cuando Russell desarrolla su trabajo es de notar que si bien no define los términos como lo hiciera Boole, sí da una construcción de todo un sistema, el cual le va a permitir definir los objetos de estudio no de la lógica, sino de la matemática. Así, Russell redefine el tipo de relaciones con la que va a trabajar, es aquí donde se da una clara relevancia a la *forma* de los juicios y no al *concepto*. Esto es claro, cuando se quiere definir de manera formal el *ser* de los números, donde éstos se tornarán como objetos del sistema de Russell al definirlos como clases, entonces éstos dejan de ser simples términos para convertirse en clases. De ahí la importancia del trabajo de Russell.

## 3.3 “Los recientes avances de la matemática”

La evolución de la matemática posterior al trabajo de Boole en 1854 tuvo un gran avance con el desarrollo de las teorías del infinito de Cantor y Dedekind, y con la concreción sobre la completez de las geometrías no-euclidianas. Éstas marcaron el punto y aparte en el progreso que estaba por venir en el siguiente siglo. Russell, en su ensayo sobre los más recientes avances de las matemáticas, toca estos temas, y da su punto de vista. Lo que llama la atención en este artículo es la afirmación que es el tema central de este trabajo de tesis, con la que concluye que “Boole es el descubridor de las matemáticas puras” [Russell 1901, 83]. La pregunta obligada aquí es: ¿Qué fue lo que vio Russell en el trabajo de Boole para hacer tal afirmación? Se ha argumentado, que sólo era un ardid publicitario por parte de Russell, para llamar la atención. Puede ser, no se debe descartar esta afirmación, pero parece una afirmación *ad hoc*, cuando no se ha reflexionado con detenimiento las posibles causas, o simplemente no se entiende lo que el autor quiere decir. Al examinar los trabajos posteriores de Russell a este ensayo, se puede entender su visión al momento en que escribió éste. Lógicamente no se pueden enunciar aquí, más que como marcos de referencia, para entender lo que Russell quería decir, cuando enuncia qué es para él la matemática pura, después de su afirmación hecha sobre Boole.

Para saber si Russell ciertamente esbozó su definición de ‘Matemática Pura’ en este trabajo se da la siguente cita de *Los Pincipios de las Matemáticas*, donde Rusell da la definición de lo que es para él ‘Matemática Pura’:

> **Definición** Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma $\ll p$ implica $q \gg$, donde $p$ y $q$ son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni $p$ ni $q$ contienen constante alguna, excepto las constantes lógicas. [...] Además de ellas, la matemática usa una noción que no forma parte de las proposiciones que considera, la noción de verdad [Russell 1903, 28]

Bien, es de obsevar la última parte de la definición, en lo que toca a la noción de verdad, dado que no parece coincidir el criterio de verdad matemática pura con lo que se ha manejado en el capítulo dos. Se debe recordar que Boole fundamenta más sobre la validez de la estructura matemática del álgebra, que sobre la concepción de verdad matemática. Ahora, Boole define en función de los valores 0 y 1 la falsedad o la verdad de un término, pero ésto sólo era una representación, dado que 0 y 1 definían también a la clase 'nada' (la clase vacía) y a la clase universo, entonces no se puede afirmar que la verdad de un enunciado albebraico booleano se refirierá en concreto a la verdad de ese término compuesto, en todo caso debería establecerse con cuidado en qué caso de la aplicación del álgebra de Boole se está trabajando

Dentro de la definición que da Russell de matemática pura, las proposiciones de la forma $\ll p$ implica $q \gg$, en el momento en el que el escribió *Los Principios de la Matemática* eran las únicas que él cosideraba como 'las proposiciones de la matemática pura', posteriormente el reconocerá en la introducción de la segunda edición las otras formas de proposiciones lógicas que también son parte de su esquema de la matemática pura. En cuanto a lo que él define como proposición atómica, o sea una proposición $p$, es una función proposicional, hecho que también aclara en la introducción de la segunda edición. Ya qu él enuncia que las proposiciones $p$ o $q$ llevan variables, $x, y, z$...

En lo que concierne al artículo, algo que debe señalarse es la influencia que tuvo para Russell el haber terminado su primer borrador de *Los Principios de las Matemáticas*, días antes de escribir este ensayo, que en definitiva refleja el influjo de estas ideas concebidas para este borrador, en este artículo. Pero lo que no está tan claro es ¿por qué Boole es el descubridor de la matemática pura? ¿qué motivó esta afirmación? Russell no explica en este escrito, el ‘por qué’ de esta afirmación. Al estudiar el trabajo de Boole, se puede encontrar cierto sustento a lo dicho por Russell. Pero los trabajos de Boole y de Russell tienen casi cincuenta años de diferencia. Así, como se mencionó anteriormente, las ideas en las cuales se fundamentaron ambas obras, son totalmente distintas.

Boole en su trabajo no trata de matemáticas. Esto según la concepción de lo que eran las matemáticas en el momento en que él escribió *Las Leyes del Pensamiento*, ¿Por qué? Como se mostró en el capítulo uno, las matemáticas, en aquella época, eran consideradas como las ciencias de la cantidad. Su aportación era puramente cuantitativa en la mente de aquellos matemáticos que la concebían. Quizás no la podían ver de otra forma, con algunas excepciones, como la de Lagrange. Ahora es difícil creer que Boole hubiese pretendido crear una matemática totalmente distinta a la de su época, dado que las motivaciones que tuvo para escribir sus *Leyes del Pensamiento* eran totalmente distintas.

Si Boole hubiese pretendido desarrollar un nuevo sistema de matemáticas, no habría usado al álgebra de su época como mera herramienta. él tendría que haber propuesto definiciones alternativas a las de las ideas preconcebidas por los matemáticos contemporáneos a él. Pero este no fue el caso. Boole no pretendió hacer la competencia a sus colegas, porque esa no era su intención. Su pretensión sólo se concentró en desarrollar un sistema que le pudiera mostrar la forma en que los pensamientos infieren conclusiones de forma rigurosa.

Varios de los supuestos hechos por Boole se concentraron en el álgebra de la cantidad, para de ahí, bajo una nueva interpretación, poder deducir lo que él llama las leyes de la mente. Así, con la ayuda de un lenguaje matemático, Boole tiene por objeto desarrollar un sistema que le dé a la lógica la oportunidad de librarse de las especulaciones metafísicas, y darle el rigor de una ciencia que le dé la posibilidad de estudiar las leyes de la mente de forma 'objetiva', al reconocer de antemano las limitantes de este nuevo sistema.

Algo que es fundamental dentro de la matemática de aquellos años es el concepto de *verdad*. Para Boole esto era algo que se sobrentendía, no era necesario mencionarlo. Era algo ya implícito en la matemática. No requería de una justificación más allá de su sola mención. Pero, ¿cuál era esa concepción? Simplemente, si un sistema axiomático, donde sus axiomas eran intuitivamente concebidos como verdaderos, entonces las proposiciones de este sistema heredaban esa verdad por medio del cálculo, de esta forma, estos axiomas daban la certeza de verdad en la matemática. Así, al garantizar la consistencia del sistema, no tenía por qué dudarse de que todas sus proposiciones fuesen verdaderas.

Lo anterior tiene relación en la forma en que Russell explica lo que para él es la matemática. Lo fundamental para hablar de matemática es el 'concepto de verdad'. Ahora se debe de entender que aquí no se habla del 'concepto de verdad' que comúnmente entendemos. El 'concepto de verdad' de la matemática pretende afirmar que toda proposición verdadera pertenece a la matemática, es decir, que una proposición si es falsa, entonces sólo puede ser falsa en el sistema, no podrá ser verdadera a la vez; y además se halla deducida de éste. Si se afirmar la verdad de la proposición, o resulta ser ésta tener una verdad necesaria para todos los sistemas, osea si se tiene una tautología, entonces pertenece a la matemática pura, de lo contrario está fuera de ésta. Por ejemplo, se tiene una proposición: $(p$ ó $q)$ implica $(q$ ó $p)$, tal que al afirmar la verdad de los axiomas de los cuales esta proposición se deduce su verdad está dada, gracias a la forma lógica de la deducción hecha para llegar a esta proposición. En esta concepción de verdad se debe de tomar en cuenta que, ya no es necesario que el sistema de axiomas sea “intuitivo”, basta que el sistema de proposiciones que generan, sea consistente, dado que para la fecha en que se escribió este artículo, ya se había probado la consistencia de las geometrías no-euclidianas.

Russell da una definición de matemática pura, tal como se presentó anteriormente, pero a gandes rasgos, si una proposición $p$ tenía puras variables, $x, y, z, ...$ y las únicas constantes eran los operadores lógicos, y además si esta proposición es verdadera entonces es una proposición de la matemática pura. Si tiene constantes, aparte de los oporadores lógicos, entonces esta proposición pertenece a la matemática plicada.

Así, si una proposición está en la estructura de la matemática pura, puede, al estar compuesta de puras variables, ser cualquer cosa, siempre que respete la estructura de la matemática pura, y al ser parte de la estructura, es verdadera, por lo tanto cualquier proposición verdadera que esté compuesta de variables que representen cualquier cosa, está dentro de la matemática pura. Lo cual Russell explica de la siguiente forma en el artículo “Las matemáticas puras están integradas enteramente por aserciones que pretenden que si tal o cual proposición acerca de cualquier cosa, es verdadera, luego tal o cual otra proposición es verdadera” [Russell 1901, 83].

De lo anterior, se puede suponer que aún si Boole hubiese desarrollado este sistema, en la creencia dada por Aristóteles en cuanto a la forma lógica, lo más seguro es que Russell hubiese considerado el sistema de Boole, como apegado a la matemática aplicada, dado que un concepto asociado a la esencia de un objeto, determina su verdad, haciéndolo de forma particular. En la idea de Russell esto pertenece a la matemática aplicada; por ello es de gran importancia ver cómo el cambio dado por Boole a la forma lógica, puso sobre otro sendero, el avance de la matemática.

Lo que se discutió, respecto a la verdad, no está asociado a la definición, sino a lo que se puede deducir de lo escrito por Russell en enero de 1901. Pero aun así las similitudes con la definición y *Los Pincipio de las Matemáticas* no deja lugar a dudas, sobre la madurez de la idea de Russell respecto a la matemática pura.

Otro concepto importante para Russell es el de los indefinibles. Lo que supone Russell como matemáticas puras, comienzan con un conjunto de indefinibles y con unos cuantos axiomas, que son indemostrables. Los indefinibles que pertenecen a las matemáticas puras son aquéllos que pertenecen exclusivamente a la lógica. Estos indefinibles están dados por los símbolos que representan la implicación material, la conjunción, la disyunción, la negación, la equivalencia material; y los enunciados 'tal que', 'si [...] entonces [...]'. Estos símbolos y enunciados, son los que relacionan a las proposiciones, simples y complejas. En este caso la relación de los indefinibles, definidos así por Russell en este artículo, valga la expresión, no son más que las constantes lógicas, dadas en la definición citada, al inicio de esta sección. Por otro lado, Boole define dentro de su sistema, la suma, el producto y el signo (=), que reciben distintas interpretaciones, entre las que destaca 'si [...] entonces [...]'. Pero bajo los conceptos que da Russell éstos se consideran como indefinibles o constantes lógicas. Así, este es otro punto que él no debió pasar por alto en la obra de Boole, dado que los indefinibles de Russell son los operadores de la mente de Boole.

Algo que, en detalle, es también importante para Russell es considerar que si un sistema está dentro de la matemática pura, entonces sus proposiciones se deducen de los axiomas generales por medio de reglas de inferencia y silogismos. Si se observa el trabajo de Boole, éste define un conjunto de leyes, donde se toman en cuenta los silogismos, da también una serie de reglas de inferencia y de axiomas de los cuales por medio de las reglas definidas deduce las proposiciones que componen su esquema lógico.

Existen detalles que escapan, y que están dentro de la definición de matemática pura que da Russell en *Los Principios de las Matemáticas*, pero dada la posterioridad de su publicación, no aplican en este caso los detalles de estos puntos. Lo que sí se puede decir es que las similitudes que observó Russell en Boole son más que claras. El único detalle que queda en duda es el concepto filosófico bajo el cual ambos trabajos fueros concebidos. Pero el hecho de que Russell afirmara que él dudaba que Boole no se estuviera refiriendo a matemáticas, tiene una estrecha relación con las ideas que él desarrolla, y con el cambio en su filosofía, que ahora se concentra en una caracterización más realista del mundo. Entonces se puede comprender la reacción de Russell al afirmar que Boole era el descubridor de la matemática pura.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En el capítulo uno se establecieron las bases de lo que se siguió como eje conductor, en tratar de desentrañar una afirmación hecha por Bertrand Russell en el artículo titulado 'Recent Work on the Principles of Mathematics', publicado en la *International Monthly* en 1901; la cual refiere a George Boole como 'el descubridor de la Matemática Pura'.

Este trabajo de investigación trata de establecer una condición razonada de esta afirmación. En otros casos, se sugirió que Russell trata de entablar una especie de querella en contra de aquéllos que lo indujeron al idealismo neohegeleano; otras afirmaciones lo tildan de ardid publicitario para difundir su trabajo. Sea cual fuere la razón, no se puede más que especular, por lo tanto no se da una verdad sobre la afirmación de Russell en este trabajo, sino una posible respuesta fundamentada en el análisis del trabajo del mismo Russell, de Boole, entre otros.

Para dar esa respuesta, en el capítulo uno, como ya se adelantó, las bases se asientan en la idea de forma lógica. En esta idea se sustenta en esencia el trabajo hecho por Aristóteles y Boole.

La distancia en el tiempo entre ambos es abismal, por lo que es más que obvio que las ideas entre ambos fuesen totalmente distintas. Las posiciones filosóficas que inspiraron el trabajo de ambos, son completamente diferentes, aunque en escencia se pretendía establecer un sólo concepto, la 'verdad', concebida de formas distintas, pero al fin se buscaba lo mismo.

La verdad lógica en Aristóteles astá fundamentada en una relación, como se ha enfatizado durante todo este trabajo, entre el concepto y un objeto del mundo físico, en su esencia, o *archia* [Düring 1987, 160]; como lo enuncia Dürin en libro su sobre Aristóteles, donde la esencia es el inicio ontológico, es el hecho primero de algún hecho u objeto, que tenga como escenario la natura. Por lo que es primordialmente verdadera. Lo anterior está enfocado en la necesidad de establecer un contacto real entre la mente y el mundo exterior.

Por otro lado, Boole está más interesado en estructurar una serie de leyes, que le permitan estudiar las correlaciones entre los conceptos que se estructuran en la mente, de forma que el pensamiento humano se pueda estudiar sin interferencia de objetos externos que confundan las mentes. Su intención es dirigir la atención de la forma lógica en dirección hacia un estudio científico, entendamos estudio centífico en términos del siglo XIX, donde la ciencia busca la verdad en relación con una constante comprobación de los sucesos externos al hombre. Así, Boole introduce en su primera definición una idea distinta de término, que él llama 'signo', y en la segunda definición, enfoca la forma lógica ya no en los conceptos, como tanto se ha hecho mención aquí, sino en las reglas y leyes de los operadores lógicos.

La cuestión es ¿cómo se puede realcionar todo esto con la afirmación hecha por Russell?

La importancia de comprender los hechos que antecedieron al trabajo de Boole, permite obsevar el contorno en el cual su obra se desenvuelve. Es claro que la lógica aristotélica será la base del trabajo de Boole, no se puede entender, incluso hoy la lógica sin la base de Aristóteles, eso es obvio. Pero, lo que desarrolla Boole no lo es tanto.

El trabajo de Boole se gesta en una época donde las ciencias están encontrando una evolución sin precedentes. Es de notar que de igual forma, pero de una manera más discreta, las matemáticas están en este proceso de evolución también.

Boole reviste un ícono importante dentro de esta evolución. Su obra es fundamental en el desarrollo de la lógica y la matemática. Un ito olvidado por los matemáticos modernos, dando por sentado lo que en su momento fue trascendental, hoy eso no importa, lo que importa son los resultados concretos, los teoremas, proposiciones, etc..., no se detiene la maquinaria de la demostración un solo instante para reflexionar de dónde viene todo eso, qué fue su fundamento. El obtuso razonamiento de un matemático, no da cuenta de sucesos que marcaron el trabajo de sus antecesores, en los cuales, él sin percatarse gesta sus propios descubrimientos.

La obra de Boole, como ya se discutió anteiormente, busca fundar un sistema que permita entender el desarrollo objetivo del razonmiento, una herramienta que sea eficaz y al mismo tiempo pristina, sin las nubosidades de la especulación metafórica de la filosofía. Sin lograr por completo lo anterior, Boole reconoce la poca fiabilidad de aplicar de forma general esta nueva herramienta, para distinguir el proceso total del razonamiemto. Los límites de la nueva lógica no se pueden aplicar en lo general, ni siquiera al lenguaje natural, el cual Boole reconoce como el medio para poder accesar al razonamiento. Entonces al estudiar de forma limitada el lenguaje, se estudia aún de forma más limitada el razonamiento, es como estudiar el 'cómo comocemos' en lugar del 'qué conocemos'.

Russell, por otra parte, enemigo del estudio del 'cómo conocemos', al observar el trabajo de Boole, debe darse cuenta de lo que pretende éste último, cuando crea una herramienta para el estudio de razonamiento, por esto es probable, que su afirmación, después de asegurar a Boole como el descubridor de la matemática pura, sea de forma aseverativa, que Boole no pretendía saber cómo piensa el hombre, sino que su trabajo es en sí matemática pura. ¿Cómo podría ser matemática pura la obra de Boole?

Si cuando Boole habla de signos que define como conceptos, Russell habla de que una variavle es cualquier cosa, desde este punto de vista, si bien se puede hacer una analogía ente la $x$ booleana y la $x$ russelleana, no se puede afirmar que son lo mismo. Mientras en el mismo argumento de Russell, más pareciera que la $x$ booleana, al ser tan restringida, perteneciese a la matemática aplicada, según la propia concepción de Russell, dado que al ser tan particular, se puede decir que es una constante a los ojos de Russell. Esto quizás explique también por qué la negación de Russell, ante la afirmación de Boole de buscar las 'Leyes de la Mente'.

Por otra parte, Boole considera a una proposición, como una afirmación de algún objeto o evento, en un sentido muy aristotélico; por ejemplo, 'la lluvia es pertinaz', hecho que afirma algo sobre la lluvia, pero lo que importa es el significado de esta afirmación, ya que puede ser hecha en el vació de algún discurso, o en la plática matinal de dos personas que se encuentran, y dependiendo del contexto, dicha afirmación será verdadera o falsa. En cambio Russell requiere que las proposiciones sean simpre verdaderas, para poder aspirar a formar parte de la matemática pura, si Boole es más flexible que Russell respecto a las proposiciones, el trabajo de Boole sólo es lógica y no matemática, como el mismo Russell afirma.

Algo más que se debe considerar, es la dificultad de la notación que tanto incomodó a los sucesores de Boole. El ejemplo más notorio es el uso del signo (=), que en el trabajo de Boole representa varias interpretaciones, con significados diversos, como puede conciliar esto Russell en su afirmación.

Francamente, no se puede sostener por mucho tiempo que Russell tuviese razón, ni siquiera embriagado por sus logros en cuanto a sus descubrimientos más significativos en tanto a la lógica matemática. Sea cual fuere el motivo, la afirmación de Russell, dando el crédito a Boole como descubridor de la matemática pura, debió tener motivos muy distintos a los puramente conceptuales y técnicos de lo que para Russell era la matemática pura.

# Bibliografía


[1] BARCERLÓ ASPEITIA, Axel Arturo. 2007. 'Los Enfoques Analítico y Sintético de las Funciones Lógicas'. Publicación aun inédita.

[2] BOCHENSKI, I. M. 1985. *Historia de la Lógica Formal* España: Gredos.

[3] BOOLE, Gorge. 1984. *El Análisis Matemático de la Lógica.* España: Catedra.

[4] —. [1854], 1982. *Investigación sobre las Leyes del Pensamiento.* España, Paraninfo.

[5] COPLESTON, Frederick Charles. 1981. *Historia de la Filosofía.* México: Ariel. Vol. 6.

[6] DÜRING, Ingemar. 2005. *Aristóteles.* Exposición e Interpretación de su Pensamiento. México: UNAM.

[7] EULER, Leonhard. 1972. *Elements of Algebra.* USA: Springer. Traducción inglesa de *Vollständige Anleitung zur Algebra.*

[8] FERRARO, Giovanni, and PANZA, Marco. 2007. *"Is Lagrange's Theory of Analytical Funtion a Theory Quantities".* Publicación aun inédita.

[9] GARCIADIEGO DANTAN, Alejandro R. 1992. *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza

[10] HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. 1973. *Lógica*. España: Aguilera.

[11] KNEALE, William y Martha. 1972. *El Desarrollo de la Lógica*. España: Ed. Tecnos.

[12] RUSSELL, Bertrand. 1977. *Los Principios de las Matemáticas*. España: Espasa-Calpe.

[13] —. 1901. 'Recent Work on the Principles of Mathematics', *International Monthly*, 4: 83-101.

[14] —. 1976. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Madrid: Alianza.

[15] —. 1993. *Towards the Principles of Mathematics 1900-02*. London: Routledge. Vol. 3. [Editor. Gregory H. Moore].

[16] WHITEHEAD, Alfred North, y RUSSELL, Bertrand. 1990. *Principia Mathematica to 56*. England: Cambridge.