UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"(k,l)-Núcleos en Operaciones de Digráficas"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

WARENKA CHIMAL GARMA

DIRECTORA DE TESIS: MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ.

2006

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por apoyarme en todo momento.

A mis hermanos y hermanas por su ayuda y comprensión.

Un agradecimiento especial a mi directora de tesis, Mat. Laura Pastrana Ramírez, por todas sus enseñanzas, su comprensión y su paciencia. Gracias Laurita.

A mis sinodales Dra. Hortensia Galeana Sánchez, Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, Mat. Clara Elena Vidrio Amor, Act. Leonardo López Monroy, por sus valiosos comentarios y sugerencias. Por su atención y tiempo dedicados a la realización de este trabajo.

A todos los amigos que han estado a mi lado apoyandome.

A todos ustedes mi agradecimiento y cariño.

Gracias.

Warenka Chimal Garma.

Contenido

...

Introducción.

En Matemáticas siempre se han estudiado varios tipos de operaciones entre elementos de un mismo conjunto, ya que la Teoría de Gráficas es un área de las Matemáticas, es de interés estudiar operaciones definidas dentro del conjunto de las gráficas. Por lo que en esta tesis tenemos como objetivo definir algunas operaciones entre un tipo especial de gráficas, denominadas digráficas. Además, estudiaremos las digráficas con núcleos, las digráficas con (k, ℓ)-núcleos y veremos bajo que operaciones se conservan estas propiedades. Con este trabajo se pretende dar una gran cantidad de ejemplos de digráficas con núcleos y (k, ℓ)-núcleos, mediante las operaciones que aquí se definen. Esto es de gran relevancia, ya que durante varios años se han estudiado condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo y (k, ℓ)-núcleo.

Primero, definiremos los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas, tales como las digráficas, los grados exteriores e interiores de un vértice, los conjuntos independientes y los conjuntos absorbentes de una digráfica, entre otras cosas. Después, como parte del primer capítulo, definiremos el núcleo de una digráfica como un conjunto independiente y absorbente. Este concepto fue introducido por Von Neumann y Morgentern en 1944 en Teoría de Juegos bajo el nombre de solución. Veremos uno de los resultados más importantes de núcleos dado por Von Neumann y Morgenstern en 1944, que dice lo siguiente: "Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene un núcleo". También probaremos el Teorema de Richardson que fue demostrado en 1953 y se enuncia como sigue: "Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene un núcleo".

Después revisaremos una generalización del Teorema de Richardson, definiremos primeramente el concepto de (k, ℓ)-núcleo y en particular el de k-núcleo, que fue introducido en 1981 por María Kwasnik, quien demostró que: "Toda digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k tiene un k-núcleo".

En el segundo capítulo definiremos tres tipos de operaciones en digráficas denominadas; la disyunción excluyente, la suma cartesiana y el producto normal. Demostraremos resultados que sirven de base para hallar (k, ℓ)-núcleos en las digráficas resultantes de las operaciones mencionadas, a partir de los (k, ℓ)-núcleos de dos digráficas dadas. Estos resultados fueron realizados por María Kwasnik [5] en: "(k, ℓ)-núcleos de la disyunción excluyente, suma cartesiana y producto normal de dos digráficas".

En el último capítulo definiremos el s_0-sistema y el s-sistema, por medio de los cuales construiremos las digráficas $s_0(S_0)$ y $s(S)$ a partir de una digráfica D_0 cualquiera. Desde 1981 cuando María Kwasnik definió el concepto de k-núcleo, varios autores han estudiado condiciones suficientes para la existencia de k-núcleos en digráficas ([7], [8], [9]). De ahí la idea de buscar una forma de obtener digráficas con k-núcleo con base en una digráfica con k-núcleo, usando la digráfica $s(S)$ y un corolario que dice que una digráfica D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo. En [10], se prueban dos teoremas que en conjunto proporcionan dicho corolario que concluye bajo ciertas hipótesis que una digráfica D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo.

Este resultado provee un método para construir, a partir de una digráfica D_0, otra digráfica $s(S)$ tal que D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo, que permite obtener una gran variedad de digráficas con (sin) k-núcleo, teniendo una digráfica cualquiera como una subdigráfica inducida, esto constituye una poderosa herramienta en la construcción de una amplia clase de digráficas con (sin) k-núcleos.

Además demostraremos un teorema que concluye que el número de k-núcleos en D_0 es igual al número de k-núcleos en $s(S)$.

En particular, los resultados anteriores se cumplen para digráficas con núcleo, puesto que un núcleo es un k-núcleo con $k = 2$. Este teorema fue demostrado en [6] por Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara.

En la última sección del capítulo definiremos las digráficas núcleo perfectas, las núcleo imperfectas críticas, demostraremos que si una digráfica no tiene núcleo, entonces tiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica. Daremos las definiciones de k-núcleo perfecta, k-núcleo imperfecta crítica y probaremos que el resultado anterior se cumple también para k-núcleos, es decir, si una digráfica no tiene k-núcleo, entonces tiene una subdigráfica inducida k-núcleo imperfecta crítica. Además demostraremos que si una digráfica es núcleo imperfecta crítica, entonces es fuertemente conexa. Veremos que este resultado no se cumple para k-núcleos, es decir, si una digráfica es k-núcleo imperfecta crítica, no necesariamente es fuertemente conexa.

Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara demostraron además, que bajo ciertas hipótesis toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene un núcleo si y sólo si toda subdigráfica inducida propia de $s(S)$ tiene un núcleo. Así, D_0 es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) si y sólo si $s(S)$ es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica).

Lo anterior es de gran importancia, puesto que nos permite generar una amplia clase de digráficas núcleo imperfectas críticas, su relevancia radica en que durante varios años, las únicas digráficas núcleo imperfectass críticas que se conocieron fueron los ciclos impares y las digráficas $\overrightarrow{C}_7(1,2)$ y $\overrightarrow{C}_{11}(1,2,4)$ que se verán en esta sección.

Observaremos además, que si tenemos una digráfica D_0 que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) y construimos su digráfica $s(S)$, veremos que $s(S)$ no necesariamente es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Pero, si tenemos una digráfica $s(S)$ que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), la digráfica D_0 a partir de la cual fue construida es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica).

Preliminares

En esta sección definiremos los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

Definición 1. Una digráfica $D = (V(D), F(D))$ consta de un conjunto finito, no vacío, de objetos llamados vértices, que se denota por $V(D)$ y un conjunto de pares ordenados de vértices distintos, llamados flechas, el cual se denota por $F(D)$.

Defición 2. El par ordenado (u, v) es la flecha que va de u a v, y diremos que u es adyacente hacia v o v es adyacente desde u ($u\ ady_D\ v$).

Por ejemplo, para la digráfica $D = (V(D), F(D))$ de la *Figura* 1 se tiene que:

$$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

$$F(D) = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

con $a = (x_0, x_1)$, $b = (x_1, x_2)$, $c = (x_2, x_3)$, $d = (x_4, x_3)$, $e = (x_0, x_4)$, $f = (x_4, x_1)$, $g = (x_3, x_1)$.

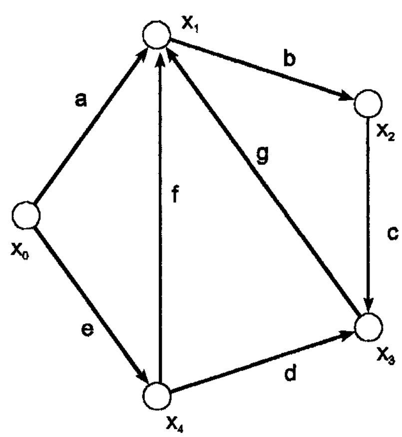


Figura 1. Digráfica D.

Definición 3. El grado exterior o exgrado de un vértice v en la digráfica D es el número de vértices adyacentes desde v, es decir, el número de flechas que salen de v. Se denota por $\delta_D^+(v)$.

Definición 4. El grado interior o ingrado de un vértice v en la digráfica D es el número de vértices adyacentes hacia v, es decir, el número de flechas que inciden en v. Se denota por $\delta_D^-(v)$.

Definición 5. El grado de un vértice v en la digráfica D es el número de vértices adyacentes hacia y desde v, es decir, el número de flechas que inciden en v y el número de flechas que salen de v. Se denota por $\delta_D(v)$.

Definición 6. El conjunto de los vecinos exteriores de un vértice u en la digráfica D es el conjunto $\Gamma_D^+(u) = \{v \in V(D) \mid (u,v) \in F(D)\}$. El conjunto de vecinos exteriores de un conjunto U en la digráfica D es el conjunto $\Gamma_D^+(U) = \{v \in V(D)$ |existe alguna Uv-flecha en $D\}$.

Definición 7. El conjunto de los vecinos interiores de un vértice u en la digráfica D es el conjunto $\Gamma_D^-(u) = \{v \in V(D) \mid (v,u) \in F(D)\}$. El conjunto de vecinos interiores de un conjunto U en la digráfica D es el conjunto $\Gamma_D^-(U) = \{v \in V(D)$ |existe alguna vU-flecha en $D\}$.

En la digráfica $D = (V(D), F(D))$ de la *Figura* 2 se tiene que:

$\delta_D^+(x_0) = 1, \delta_D^-(x_0) = 1, \delta_D(x_0) = 2, \Gamma_D^+(x_0) = \{x_3\}, \Gamma_D^-(x_0) = \{x_1\}$

$\delta_D^+(x_1) = 1, \delta_D^-(x_1) = 1, \delta_D(x_1) = 2, \Gamma_D^+(x_1) = \{x_0\}, \Gamma_D^-(x_1) = \{x_2\}$

$\delta_D^+(x_2) = 4, \delta_D^-(x_2) = 0, \delta_D(x_2) = 4, \Gamma_D^+(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, \Gamma_D^-(x_2) = \emptyset$

$\delta_D^+(x_3) = 1, \delta_D^-(x_3) = 2, \delta_D(x_3) = 3, \Gamma_D^+(x_3) = \{x_5\}, \Gamma_D^-(x_3) = \{x_0, x_2\}$

$\delta_D^+(x_4) = 1$, $\delta_D^-(x_4) = 2$, $\delta_D(x_4) = 3$, $\Gamma_D^+(x_4) = \{x_5\}$, $\Gamma_D^-(x_4) = \{x_2, x_5\}$

$\delta_D^+(x_5) = 1$, $\delta_D^-(x_5) = 3$, $\delta_D(x_5) = 4$, $\Gamma_D^+(x_5) = \{x_4\}$, $\Gamma_D^-(x_5) = \{x_2, x_3, x_4\}$.

Definición 8. Sean D y H digráficas, D es isomorfa a H si y sólo si existe una función biyectiva $f : V(D) \rightarrow V(H)$ tal que $(u, v) \in F(D)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in F(H)$. Se denota por $D \cong H$.

En las *Figuras* 2 y 3 se muestran las digráficas D y H, respectivamente. Estas digráficas son isomorfas puesto que existe una función biyectiva $f : V(D) \rightarrow V(H)$, en donde:

$V(D) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$, $f(x_2) = c$, $f(x_3) = d$, $f(x_4) = e$, $f(x_5) = f$.

La función f es tal que:

$(x_1, x_0) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_1), f(x_0)) = (b, a) \in F(H)$

$(x_2, x_1) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_2), f(x_1)) = (c, b) \in F(H)$

$(x_2, x_3) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_2), f(x_3)) = (c, d) \in F(H)$

$(x_0, x_3) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_0), f(x_3)) = (a, d) \in F(H)$

$(x_2, x_4) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_2), f(x_4)) = (c, e) \in F(H)$

$(x_2, x_5) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_2), f(x_5)) = (c, f) \in F(H)$

$(x_3, x_5) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_3), f(x_5)) = (d, f) \in F(H)$

$(x_4, x_5) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_4), f(x_5)) = (e, f) \in F(H)$

$(x_5, x_4) \in F(D)$ si y sólo si $(f(x_5), f(x_4)) = (f, e) \in F(H)$

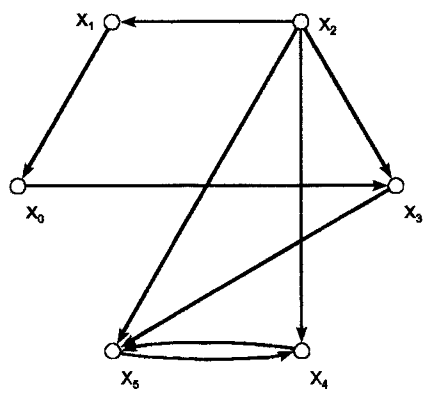


Figura 2. Digráfica D

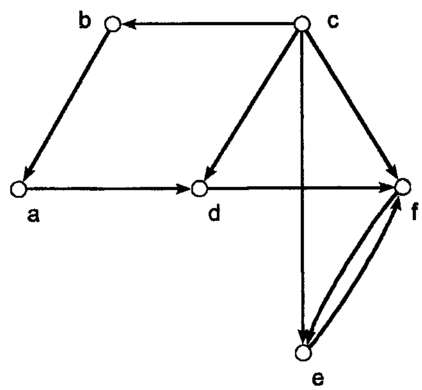


Figura 3. Digráfica H

Definición 9. Sea D una digráfica, una subdigráfica H de D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$.

Definición 10. Sea D una digráfica, una digráfica H es una subdigráfica inducida por vértices de D (o subdigráfica inducida de D) si $V(H) \subseteq V(D)$ y $(u,v) \in F(H)$ si y sólo si $(u,v) \in F(D)$ con $\{u,v\} \subseteq V(H)$. Denotamos por $D[V(H)]$ a la subdigráfica de D inducida por los vértices de H.

Definición 11. Sea D una digráfica, una subdigráfica H es generadora de D, si contiene a todos los vértices de D.

En la *Figura* 4 se muestra la digráfica D. Las digráficas D_1, D_2 y D_3 de la *Figura* 5 son subdigráficas de la digráfica D de la *Figura* 4. La digráfica D_2 es una subdigráfica inducida de D y la digráfica D_3 es una subdigráfica generadora de D.

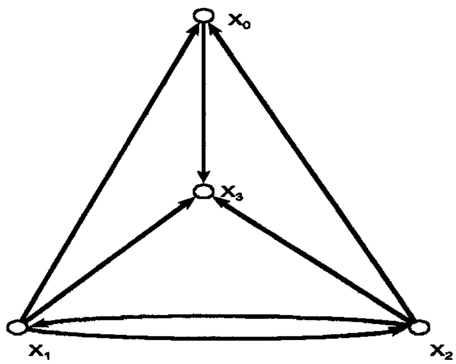


Figura 4. Digráfica D

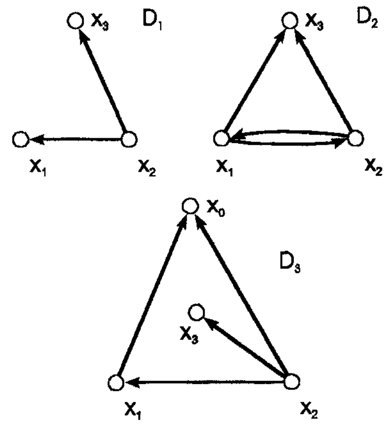


Figura 5. Subdigráficas de D

Definición 12. Sea D una digráfica, una flecha $(u, v) \in F(D)$ es llamada simétrica si $(v, u) \in F(D)$ y es llamada asimétrica si $(v, u) \notin F(D)$.

Definición 13. Sea D una digráfica, D es una digráfica simétrica si para cada $(u, v) \in F(D)$ existe $(v, u) \in F(D)$.

Definición 14. La parte simétrica de D, denotada por $Sim(D)$, es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son todas las flechas simétricas de D.

Definición 15. La parte asimétrica de D, denotada por $Asim\,(D)$, es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son todas las flechas asimétricas de D.

En la digráfica D de la *Figura* 4, tenemos que $(x_1, x_2) \in F\,(D)$ es una flecha simétrica, puesto que existe $(x_2, x_1) \in F\,(D)$. Observemos que las flechas (x_1, x_0), (x_1, x_3), (x_0, x_3), (x_2, x_0) y (x_2, x_3) son flechas asimétricas de la digráfica D. En las *Figuras* 6 y 7, se muestran las partes simétrica y asimétrica de D, respectivamente.

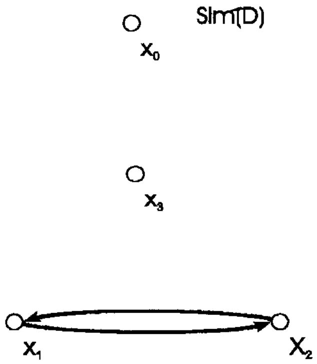


Figura 6. Parte simétrica de D

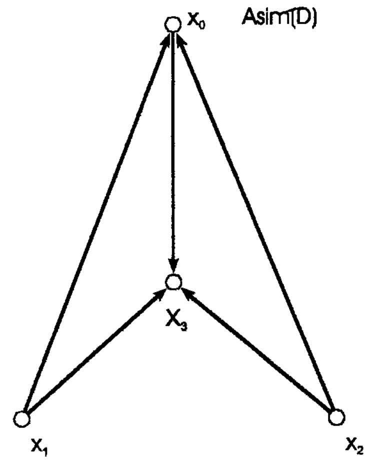


Figura 7. Parte asimétrica de D

En la Figura 8 se muestra una digráfica simétrica D en la que $(x_1, x_2) \in F\,(D)$, $(x_2, x_1) \in F\,(D)$, $(x_2, x_3) \in F\,(D)$, $(x_3, x_2) \in F\,(D)$, $(x_3, x_1) \in F\,(D)$ y $(x_1, x_3) \in F\,(D)$.

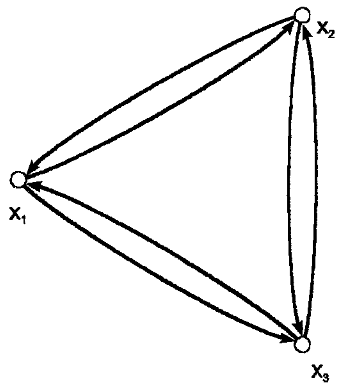


Figura 8. Digráfica simétrica

Definición 16. Un uv-camino $\mathcal{C}$ en una digráfica D es una sucesión de vértices y flechas alternadas $\mathcal{C} = (u = x_0, f_0, x_1, f_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f_{n-1}, x_n = v)$ tal que $f_i = (x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ o $f_i = (x_{i+1}, x_i) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$. Por simplicidad denotaremos un uv-camino $\mathcal{C}$ en una digráfica D como

$\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = v)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ o $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Definición 17. Un uv-camino dirigido $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ en una digráfica D es una sucesión de vértices y flechas alternadas $\overrightarrow{\mathcal{C}} = (u = x_0, f_0, x_1, f_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f_{n-1}, x_n = v)$ tal que $f_i = (x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$. Por simplicidad denotaremos un uv-camino dirigido $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ en una digráfica D como $\overrightarrow{\mathcal{C}} = (u = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = v)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para $0 \leq i \leq n-1$.

La longitud del camino dirigido $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ es el número de flechas de $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ y se denota por $\ell\left(\overrightarrow{\mathcal{C}}\right)$.

Definición 18. Un paseo en una digráfica D es un camino en el que no se repiten flechas.

Definición 19. Un paseo dirigido en una digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten flechas.

Definición 20. Una trayectoria $\mathcal{T}$ en una digráfica D es un camino en el que no se repiten vértices.

Definición 21. Una trayectoria dirigida $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ en una digráfica D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

Definición 22. Un camino cerrado $\mathcal{C}$ en una digráfica D es un camino cuyo vértice inicial y final son el mismo.

Definición 23. Un camino dirigido cerrado $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ en una digráfica D es un camino dirigido en el cual el primero y el último vértice son iguales.

Definición 24. Un ciclo $\mathcal{C}$ en una digráfica D es un camino cerrado en el cual no se repiten vértices (excepto el primero y el último), con $\ell(\mathcal{C}) \geq 2$.

Definición 25. Un ciclo dirigido $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ en una digráfica D es un camino dirigido cerrado en el que no se repiten vértices (excepto el primero y el último), con $\ell\left(\overrightarrow{\mathcal{C}}\right) \geq 2$.

En la *Figura* 9 se muestra la digráfica D.

$\mathcal{C}_1 = (x_0, x_1, x_6, x_2, x_4, x_3, x_2, x_6, x_5)$ es un x_0x_5-camino contenido en D.

$\overrightarrow{\mathcal{C}}_2 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_4, x_5)$ es un x_0x_5-camino dirigido contenido en D.

$\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_6, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5)$ es un x_0x_5-paseo contenido en D.

$\overrightarrow{\mathcal{P}} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_5)$ es un x_0x_5-paseo dirigido contenido en D.

$\mathcal{T} = (x_0, x_1, x_6, x_2, x_3, x_4, x_5)$ es una x_0x_5-trayectoria contenida en D.

$\overrightarrow{\mathcal{T}} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ es una x_0x_5-trayectoria dirigida contenida en D.

$\mathcal{C}_3 = (x_0, x_1, x_6, x_2, x_4, x_3, x_2, x_6, x_5, x_6, x_0)$ es un camino cerrado contenido en D.

$\overrightarrow{\mathcal{C}}_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_4, x_5, x_0)$ es un camino dirigido cerrado contenido en D.

$\mathcal{C}_5 = (x_0, x_1, x_6, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0)$ es un ciclo contenido en D.

$\overrightarrow{\mathcal{C}_6} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0)$ es un ciclo dirigido contenido en D.

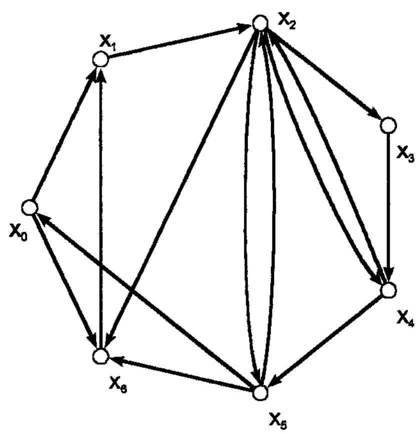


Figura 9. Digráfica D

Lema 1. Todo uv-camino dirigido con $u \neq v$ contiene una uv-trayectoria dirigida.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v)$ un uv-camino dirigido en D, con $u \neq v$. Si $\mathcal{C}$ no repite vértices, entonces $\mathcal{C}$ es una uv-trayectoria dirigida. Si $\mathcal{C}$ repite $m+1$ vértices, entonces $\mathcal{C}$ es de la siguiente forma:

$\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0} = x_{j_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_{j_0-1}, x_{i_0} = x_{j_0}, x_{j_0+1}, \ldots, x_{i_1-1},$
$x_{i_1} = x_{j_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{j_1-1}, x_{i_1} = x_{j_1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{i_m-1}, x_{i_m} = x_{j_m}, x_{i_m+1}, \ldots, x_{j_m-1},$
$x_{i_m} = x_{j_m}, x_{j_m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = v)$

Por lo que $\mathcal{C}$ contiene una uv-trayectoria dirigida de la siguiente forma:

$\mathcal{T} = (u = x_0, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0} = x_{j_0}, x_{j_0+1}, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1} = x_{j_1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{i_m-1},$
$x_{i_m} = x_{j_m}, x_{j_m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = v)$. ■

Lema 2. Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Demostración. Por inducción sobre la longitud del camino.

Sea $\ell(\mathcal{C})$ la longitud del camino $\mathcal{C}$.

Para $\ell(\mathcal{C}) = 3$ tenemos $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, x_0)$, como $x_0 \neq x_1$, pues $(x_0, x_1) \in F(\mathcal{C})$, $x_1 \neq x_2$, pues $(x_1, x_2) \in F(\mathcal{C})$, $x_2 \neq x_0$, pues $(x_2, x_0) \in F(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{C}$ es un ciclo dirigido de longitud 3.

Supongamos que todo camino dirigido cerrado de longitud impar menor que $2n+1$, $n \geq 1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_0)$ un camino dirigido cerrado de longitud $2n+1$. Por demostrar que $\mathcal{C}$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Si $x_i \neq x_j$ para toda i, j, entonces $\mathcal{C}$ es un ciclo dirigido de longitud $2n+1$.

Si $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, tenemos que

$$\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_0).$$

De donde $\mathcal{C}_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, x_0)$ y $\mathcal{C}_2 = (x_i = x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i = x_j)$ son caminos cerrados. Como $\mathcal{C}$ es de longitud impar, tenemos que $\mathcal{C}_1$ es de longitud impar o $\mathcal{C}_2$ es de longitud impar, pero no ambos, además $\ell(\mathcal{C}_1) < \ell(C)$ y $\ell(\mathcal{C}_2) < \ell(C)$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{C}_1$ es de longitud impar y por hipótesis de inducción $\mathcal{C}_1$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ contiene un ciclo dirigido de longitud impar. ∎

Lema 3. Todo camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$, $k \geq 2$, contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$.

Demostración. Por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado.

Sea $\mathcal{C}$ un camino dirigido cerrado de D tal que $\ell(\mathcal{C}) = 2$ y $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$, para $k \geq 3$, entonces $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_0)$ es un ciclo dirigido tal que $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$.

Sea $\mathcal{C}$ un camino dirigido cerrado de D tal que $\ell(\mathcal{C}) = 3$, para $k \neq 3$, $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$, entonces $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ es un ciclo dirigido tal que $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$.

Supongamos que todo camino dirigido cerrado $\mathcal{C}$ con $\ell(\mathcal{C}) < n$ y $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ contiene un ciclo dirigido $\mathcal{C}'$ con $\ell(\mathcal{C}') \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$.

Sea $\mathcal{C}$ un camino dirigido cerrado con $\ell(\mathcal{C}) = n$ y $\ell(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$, por demostrar que $\mathcal{C}$ contiene un ciclo dirigido con longitud $\not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$.

Sea $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0)$, tenemos los siguientes casos:

1) Si $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathcal{C}$ es un ciclo dirigido.

2) Si $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, tenemos que

$$\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_0),$$

entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde

$$\mathcal{C}_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_0) \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_2 = (x_i = x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i = x_j).$$

Observemos que $\ell(\mathcal{C}) = \ell(\mathcal{C}_1) + \ell(\mathcal{C}_2)$, así $\ell(\mathcal{C}_i) < n$ para $i = 1, 2$ y $\ell(\mathcal{C}_i) \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ para algún $i = 1, 2$, puesto que si $\ell(\mathcal{C}_i) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ con $i = 1, 2$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \equiv 0 \pmod{k}$, contradicción, por lo tanto $\ell(\mathcal{C}_i) \not\equiv 0 \pmod{k}$ para algún $i = 1, 2$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\ell(\mathcal{C}_1) \not\equiv 0 \pmod{k}$, como $\ell(\mathcal{C}_1) < n$, entonces por la hipótesis de inducción tenemos que $\mathcal{C}_1$ contiene un ciclo dirigido $\mathcal{C}'$ con $\ell(\mathcal{C}') \not\equiv 0 \pmod{k}$, pero $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$, por lo tanto $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. ■

Lema 4. Si una digráfica D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe $v \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(v) = 0$.

Demostración. Sea D una digráfica que no posee ciclos dirigidos, supongamos que $\delta_D^+(v) > 0$ para todo $v \in V(D)$.

Sea $T = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D. Como $\delta_D^+(x_n) > 0$, entonces existe $u \in V(D)$ tal que $(x_n, u) \in F(D)$. Si $u \in T$, entonces $u = x_i$ para alguna $i = 0, \ldots, n-1$, de donde tenemos que se forma el ciclo $C = (u = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, u = x_i)$, lo cual contradice la hipótesis de que D no tiene ciclos. Si $u \notin T$, entonces $T' = T \cup \{u\}$ es una trayectoria de longitud mayor que T, contradicción, puesto que T es de longitud máxima. Por lo tanto, existe $v \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(v) = 0$. ■

Definición 26. La distancia dirigida $d_D(u, v)$ de un vértice u al vértice v en una digráfica D es el mínimo del conjunto $\{\ell\left(\overrightarrow{T}\right) \mid \overrightarrow{T}$ es una uv-trayectoria dirigida$\}$.

Si no existe una uv-trayectoria dirigida en D, definimos la distancia de u a v como $d_D(u, v) = \infty$.

En la *Figura* 9a tenemos que $d_D(x_0, x_5) = 3 = \ell(\overrightarrow{T_1}) = \ell((x_0, x_1, x_2, x_5))$

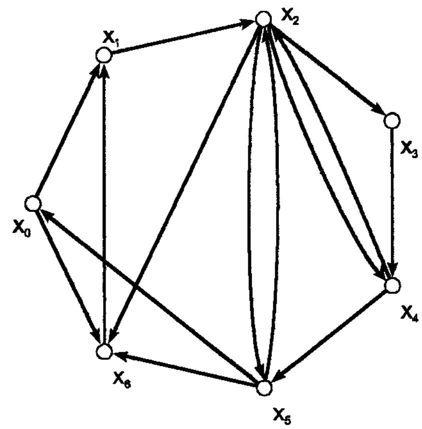


Figura 9a. Digráfica D

Lema 5. Sea D una digráfica y sean $\{x, y, z\} \subseteq V(D)$, entonces

1.a) $d_D(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in V(D)$.

1.b) $d_D(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

2) $d_D(x, y) \leq d_D(x, z) + d_D(z, y)$

Demostración.

Podemos suponer que existe una xy-trayectoria dirigida en D, ya que si no existe dicha trayectoria, por definición de distancia tenemos que $d_D(x, y) = \infty$, lo cual cumple que $d_D(x, y) \geq 0$.

1.a) Si $x = y$, entonces $\overrightarrow{T} = (x, x)$ es la xy-trayectoria de longitud mínima, esto es, $d_D(x, y) = \ell\left(\overrightarrow{T}\right) = 0$. Si $x \neq y$, entonces si existe $\overrightarrow{T} = (x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y)$ una xy-trayectoria de longitud mínima, con $n > 1$, entonces $d_D(x, y) = \ell\left(\overrightarrow{T}\right) = n > 1$. Por lo tanto $d_D(x, y) \geq 0$.

1.b) Si $d_D(x, y) = 0$, entonces la xy-trayectoria de longitud mínima es $\overrightarrow{T} = (x, x)$, por lo tanto $x = y$. Si $x = y$, se demostró en el inciso 1.a) que $d_D(x, y) = 0$.

2) Sea $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y)$ una xy-trayectoria dirigida de longitud mínima, entonces $d_D(x,y) = \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}\right) = n$. Sea $z \in V(D)$ tal que existe $\overrightarrow{\mathcal{T}_1} = (x = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_m = z)$ una xz-trayectoria dirigida de longitud mínima y existe $\overrightarrow{\mathcal{T}_2} = (z = v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_p = y)$ una zy-trayectoria dirigida de longitud mínima. De donde, $d_D(x,z) = \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}_1}\right) = m$ y $d_D(z,y) = \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}_2}\right) = p$. Por otro lado, tenemos que $\overrightarrow{\mathcal{T}_1} \cup \overrightarrow{\mathcal{T}_2}$ es un xy-camino dirigido, que por el *Lema* 1 contiene una xy-trayectoria $\overrightarrow{\mathcal{T}}'$ tal que $\ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}\right) \leq \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}'\right)$, por ser $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ una xy-trayectoria de longitud mínima. Por lo que

$$d_D(x,y) = \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}\right) \leq \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}}'\right) \leq \ell\left(\overrightarrow{\mathcal{T}_1} \cup \overrightarrow{\mathcal{T}}_2\right) = d_D(x,z) + d_D(z,y). \blacksquare$$

Observemos que $d_D(x,y) \neq d_D(y,x)$. De la *Figura* 9a tenemos que $d_D(x_1,x_2) = 1$ y que $d_D(x_2,x_1) = 2$.

Definición 27. Una digráfica D es conexa si para cualquier $\{u,v\} \subseteq V(D)$ existe un uv-camino. En caso contrario, diremos que D es disconexa.

Definición 28. Una digráfica D es fuertemente conexa si para cualquier $\{u,v\} \subseteq V(D)$ existe un uv-camino dirigido y un vu-camino dirigido.

La digráfica D de la *Figura* 9a es una digráfica conexa, más aún, es una digráfica fuertemente conexa.

Lema 6. D es una digráfica fuertemente conexa si y sólo si existe un camino cerrado dirigido $\mathcal{C} \subseteq D$ tal que $V(\mathcal{C}) = V(D)$.

Demostración. Supongamos que D es una digráfica fuertemente conexa. Por demostrar que existe un camino cerrado dirigido $\mathcal{C}$ en D tal que $V(\mathcal{C}) = V(D)$. Supongamos lo contrario. Esto es, que para cualquier camino cerrado dirigido $\mathcal{C}$ en D se tiene que $V(\mathcal{C}) \neq V(D)$. Consideremos $\mathcal{C}'$ un camino cerrado en D que contenga el mayor número de vértices de D. Por hipótesis, tenemos que $V(\mathcal{C}') \subsetneq V(D)$, entonces existe $x \in V(D) - V(\mathcal{C}')$. Puesto que D es fuertemente conexa se tiene que entre todo par de vértices existe un camino dirigido en D. Sea $u \in V(\mathcal{C}')$. Como D es fuertemente conexa, entonces existe $\mathcal{C}_1$ un ux-camino dirigido en D y $\mathcal{C}_2$ un xu-camino dirigido en D. De donde $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}'$ es un camino cerrado dirigido en D tal que $|V(\mathcal{C}'')| = |V(\mathcal{C}')| + 1 > |V(\mathcal{C}')|$. Contradicción, puesto que $\mathcal{C}'$ es un camino cerrado dirigido que contiene el mayor número de vértices. Por lo tanto existe un camino cerrado dirigido $\mathcal{C}$ en D tal que $V(\mathcal{C}) = V(D)$.

Supongamos que existe un camino cerrado dirigido $\mathcal{C}$ en D tal que $V(\mathcal{C}) = V(D)$. Por demostrar que D es fuertemente conexa. Sean $\{u, v\} \subseteq V(D) = V(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = u, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = v, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_0)$, entonces tenemos que existe un uv-camino dirigido en D de la siguiente forma $(x_i = u, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = v)$ y existe un vu-camino dirigido en D de la siguiente forma $(x_j = v, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = u)$. Puesto que entre todo par de vértices en D existe un camino dirigido tenemos que D es una digráfica fuertemente conexa. ■

Definición 29. Sea D una digráfica, una componente fuertemente conexa de D es una subdigráfica fuertemente conexa de D, máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa.

Definición 30. Una componente fuertemente conexa terminal H de una digráfica D es una componente fuertemente conexa de una digráfica D con la propiedad de que para todo $y \in V(H)$ no existe la yS-flecha en D, para cualquier componente fuertemente conexa S distinta de H, es decir, $\Gamma^{+}(H) \subseteq V(H)$.

Lema 7. Si D es una digráfica, entonces D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.

Demostración.

Si D es fuertemente conexa, entonces por definición D es una componente fuertemente conexa terminal.

Si D no es fuertemente conexa. Supongamos que D tiene n componentes fuertemente conexas distintas. Por demostrar que D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal. Por contradicción. Supongamos que D no tiene componentes fuertemente conexas terminales, es decir, que para toda H componente fuertemente conexa de D se tiene que $\Gamma^{+}(H) \cap (D - H) \neq \emptyset$. Sea H_0 una componente fuertemente conexa de D, llamemos H_1 a la componente fuertemente conexa tal que existe una H_0H_1-flecha. Consideremos H_2 la componente fuertemente conexa tal que existe una H_1H_2-flecha. Así, construimos una sucesión $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}$ de componentes fuertemente conexas en D tal que existe una $H_{i-1}H_i$-flecha en D y $H_i \neq H_j$ para $i \neq j$ con $i, j = 0, 1, \ldots n-1$. Se tiene que H_{n-1} cumple que $\Gamma^{+}(H_{n-1}) \cap (D - H_{n-1}) \neq \emptyset$ porque H_{n-1} no es una componente fuertemente conexa terminal, por lo que existe H_j una componente fuertemente conexa tal que $\Gamma^{+}(H_{n-1}) \cap H_j \neq \emptyset$ para alguna $j = 0, 1, \ldots, n-2$. Entonces existe una $H_{n-1}H_j$-flecha en D. Pero por la construcción de la sucesión de las componentes fuertemente conexas, se tiene que existe una H_jH_{j+1}-flecha, una $H_{j+1}H_{j+2}$-flecha, así sucesivamente, existe una $H_{n-2}H_{n-1}$-flecha en D. De donde tenemos que entre todo par de vértices $\{u, v\} \subseteq \bigcup_{i=j}^{n-1} V(H_i)$ existe un uv-camino dirigido, entonces $H_j, H_{j+1}, \ldots, H_{n-2}, H_{n-1}$ forman una sola componente fuertemente conexa o están contenidas en una componente fuertemente conexa, lo cual contradice que las H_i son componentes fuertemente conexas de D para $i = j, j+1, \ldots, n-1$. Por lo tanto D tiene al menos una componente fuertemente conexa terminal. ∎

La digráfica D de la *Figura* 10 es una digráfica disconexa, las subdigráficas D_1 y D_2 son las componentes fuertemente conexas de D. Además, D_1 y D_2 son componentes fuertemente conexas terminales.

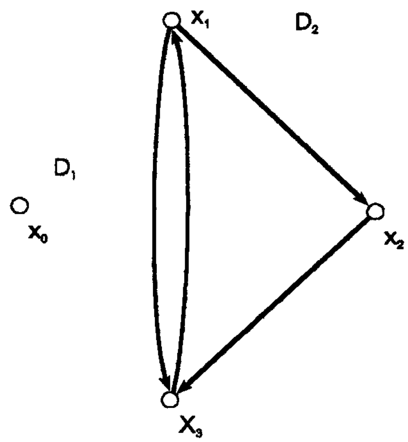


Figura 10. Digráfica disconexa D

Definición 31. Sea D una digráfica, y $J \subseteq V(D)$. Diremos que J es un conjunto independiente si para cualquier $\{x, y\} \subseteq J$, tenemos que $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$.

En la *Figura* 10, los conjuntos $\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_0, x_3\}$ son conjuntos independientes, puesto que $(x_0, x_1) \notin F(D)$, $(x_1, x_0) \notin F(D)$, $(x_0, x_2) \notin F(D)$, $(x_2, x_0) \notin F(D)$, $(x_0, x_3) \notin F(D)$, $(x_3, x_0) \notin F(D)$.

Observación 1. Un conjunto que contiene únicamente un vértice, es un conjunto independiente.

Consideremos la digráfica D de la *Figura* 10, el conjunto $\{x_0\}$ es un conjunto independiente en D, al igual que los conjuntos $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ y $\{x_3\}$.

Definición 32. Una digráfica D es completa si para cada par de vértices $\{u, v\} \subseteq V(D)$ se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.

Observación 2. En una digráfica completa, cualquier conjunto independiente contiene un solo vértice.

Definición 33. Sea D una digráfica y $J \subseteq V(D)$. Diremos que J es un conjunto absorbente si para cualquier $z \in (V(D) \setminus J)$, existe $x \in J$ tal que $(z, x) \in F(D)$.

En la *Figura* 10, el conjunto $\{x_0, x_3\}$ es un conjunto absorbente, puesto que $(x_1, x_3) \in F(D)$ y $(x_2, x_3) \in F(D)$.

Observación 3. En una digráfica D, tenemos que $V(D)$ es un conjunto absorbente.

Observación 4. En una digráfica D con p vértices, si el conjunto $\{v\} \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente, tenemos que $\delta_D^-(v) = p - 1$.

Consideremos la digráfica D_2 de la *Figura* 10, observemos que $V(D_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y que el conjunto $\{x_3\}$ es un conjunto absorbente en D_2, donde $\delta^-(x_3) = 2$.

Capítulo 1
Núcleos y (k, ℓ)-núcleos

En la sección anterior se definieron los conceptos de conjunto independiente y conjunto absorbente, la unión de estas definiciones da lugar al concepto de núcleo. Este capítulo tiene como finalidad introducirnos a dicho concepto y a algunos resultados que surgen a partir de él. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgensten en 1944 en Teoría de Juegos bajo el nombre de solución. Veremos uno de los resultados más importantes de núcleos dado por Von Neumann y Morgenstern en 1944, que dice lo siguiente: "Toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene un núcleo". También probaremos el Teorema de Richardson, que fue demostrado en 1953 y se enuncia como sigue: "Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene un núcleo". Después revisaremos una generalización del Teorema de Richardson, definiremos primeramente el concepto de (k, ℓ)-núcleo y en particular el de k-núcleo, que fue introducido en 1981 por María Kwasnik, quien demostró que: "Toda digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k tiene un k-núcleo".

1.1 Núcleos.

En esta sección estudiaremos como surge el concepto de núcleo y algunos resultados en digráficas sobre núcleos. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgensten en 1944 en Teoría de Juegos bajo el nombre de solución. Supongamos que un grupo de n personas $1, 2, \ldots, n$ se reunirán para tomar una decisión sobre un asunto (es decir, elegir una situación de un conjunto X de posibles situaciones). Para resolver el problema de cómo elegir una situación, se consideran primeramente las preferencias individuales, pero cuando $n \geq 2$, se puede dar el caso de que las preferencias individuales no sean compatibles, esto es, que la persona 1 prefiera la situación a a la b, pero la persona 2 opine lo contrario. Von Neumann solucionó el problema de las incompatibilidades en las preferencias individuales, introduciendo el concepto de preferencia efectiva, que definió como: una situación a es efectivamente preferida a una situación b, si existe un grupo de personas (dentro de las n personas) capaces, si quieren, de imponer la preferencia a sobre b.

Denotaremos $a > b$ si a es efectivamente preferida a b y notemos que esta relación no necesariamente es transitiva. Ahora, daremos un planteamiento del problema usando digráficas.

Consideremos la digráfica $D_i = (V(D_i), F(D_i))$, donde $V(D_i)$ representa el conjunto de situaciones que puede seleccionar la persona i, y $F(D_i)$ representa el conjunto de situaciones que son efectivamente preferidas sobre otras. Si la persona i prefiere efectivamente una situación a a una situación b, tendremos que $(b, a) \in F(D_i)$. Von Neumann y Morgenstern proponen que el problema sea limitado a los elementos de un conjunto

N, donde N es un núcleo de la digráfica (si existe). Definen el núcleo de una digráfica como un conjunto independiente y absorbente, esto es, N es un conjunto de situaciones en el que ninguna situación de N es preferida efectivamente a otra del mismo conjunto. Además, para cualquier situación x que no esté en N, encontramos una situación en N que es preferida efectivamente a x por i. De esta forma, reducen el problema inicial, a elegir una situación en N.

Formalicemos el concepto de núcleo de una digráfica.

Definición 1.1. Sea D una digráfica, el conjunto $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D si y sólo si N es un conjunto tal que

a) para cualquier $\{x, y\} \subseteq N$, tenemos que $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$, es decir, N es un conjunto independiente.

b) para cualquier $z \in (V(D) \setminus N)$, existe $x \in N$ tal que $(z, x) \in F(D)$, es decir, N es un conjunto absorbente.

En la *Figura* 1.1 se muestra la digráfica D con núcleo $N = \{x_0, x_2, x_4\}$.

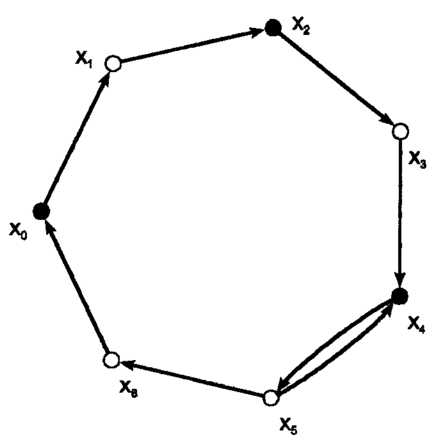


Figura 1.1. Digráfica con núcleo

Observación 1.1. No todas las digráficas tienen núcleo.

En la *Figura* 1.2 se muestra una digráfica que no tiene núcleo. Más aún, cualquier digráfica que sea un ciclo de longitud impar no tiene núcleo.

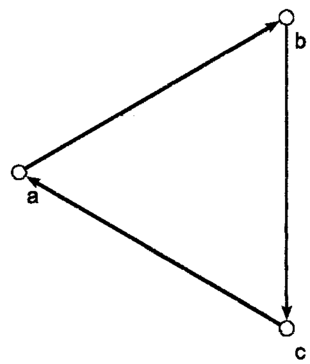


Figura 1.2. Digráfica sin núcleo

Observación 1.2. El núcleo de una digráfica no necesariamente es único.

En la *Figura* 1.3 se muestra una digráfica D que tiene dos núcleos distintos, $N_1 = \{a, c\}$ y $N_2 = \{b, d\}$.

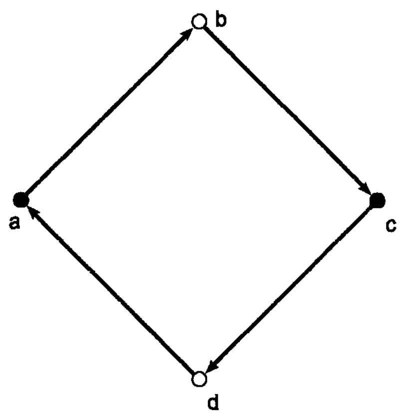


Figura 1.3. Digráfica con núcleos

Lema 1.1 Si un conjunto N es un núcleo de una digráfica D, entonces N es un conjunto maximal de la familia $\mathcal{F}$ de conjuntos independientes, esto es, tenemos que:

Si $A \in \mathcal{F}, A \supset N$, entonces $A = N$.

Demostración. Sea A un conjunto independiente que contiene al núcleo N. Supondremos que N está contenido estrictamente en A, y mostraremos que esto es absurdo. En efecto, si éste fuera el caso, existe un vértice a, con $a \in A$ y $a \notin N$, por ser N un conjunto absorbente, existe una aN-flecha en D, lo que implica que existe una aA-flecha en D, contradicción, puesto que $A \in \mathcal{F}$. ∎

Lema 1.2. En una digráfica simétrica D, cualquier conjunto maximal de la familia $\mathcal{F}$ de conjuntos independientes es un núcleo.

Demostración. Sea N un conjunto maximal de $\mathcal{F}$, mostraremos que cualquier vértice $x \notin N$ satisface que existe una xN-flecha en D. Supongamos lo contrario, es decir, existe un vértice $x \notin N$ tal que no existe una xN-flecha en D, entonces el conjunto $A = N \cup \{x\}$ es un conjunto independiente o existe una Nx-flecha en D, pero si existe la Nx-flecha, por ser D una digráfica simétrica, entonces existe una xN-flecha, contradicción. Por lo tanto el conjunto $A = N \cup \{x\}$ es un conjunto independiente. Además como $N \subset A$ y $A \neq N$, se contradice la hipótesis de que N es maximal en $\mathcal{F}$. ∎

Lema 1.3. Una condición necesaria y suficiente para que N sea un núcleo de D, es que su función característica $\phi_N(x)$ satisfaga lo siguiente:

$$\phi_N(x) = 1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y).$$

La función característica $\phi_N(x)$ de un conjunto N está definida por:

$$\phi_N(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in N \\ 0, & \text{si } x \notin N \end{cases}$$

Si no existe $y \in V(D)$ tal que $(x, y) \in F(D)$, tenemos que $\max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 0$.

Demostración.

1. Sea N un núcleo.

Por demostrar que N cumple que $\phi_N(x) = 1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y)$.

Consideremos $x \in N$, por definición de función característica, tenemos que $\phi_N(x) = 1$. Como N es un conjunto independiente, para toda $y \in V(D)$ tal que $(x, y) \in F(D)$, se tiene que $y \notin N$, por lo tanto $\phi_N(y) = 0$.

De donde $\max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 0$. Por lo tanto $1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 1 = \phi_N(x)$.

Si $x \notin N$, tenemos que $\phi_N(x) = 0$. Como N es un conjunto absorbente, existe una $y \in V(D) \cap N$ tal que $(x, y) \in F(D)$, entonces $\phi_N(y) = 1$.

De donde $\max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 1$. Entonces $1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 0 = \phi_N(x)$.

Por lo tanto $\phi_N(x) = 1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y)$.

2. Sea $\phi_N(x)$ la función característica de un conjunto N, si $\phi_N(x)$ satisface la condición del enunciado, tenemos que

i) Si $x \in N$. Se sigue que $\phi_N(x) = 1 = 1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y)$.

Entonces $\max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 0$. Por lo que no existe una xN-flecha en D. Por lo tanto N es un conjunto independiente.

ii) Si $x \notin N$. Se sigue que $\phi_N(x) = 0 = 1 - \max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y)$.

Entonces $\max_{(x,y)\in F(D)} \phi_N(y) = 1$. Por lo que existe una xN-flecha en D. Por lo tanto N es un conjunto absorbente.

Así, N es un núcleo de D. ■

Teorema 1.1. Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces D tiene un núcleo. Más aún, el núcleo es único.

Demostración. Por inducción sobre $|V(D)| = n$.

Para $n = 1$, sea $V(D) = \{u\}$. Entonces $N = \{u\}$ es núcleo de D.

Para $n = 2$, sea $V(D) = \{u, v\}$. Si $\{(u, v)\} = F(D)$, entonces $N = \{v\}$ es núcleo de D, análogamente si $\{(v, u)\} = F(D)$, el núcleo de D es $N = \{u\}$, si $F(D) = \emptyset$, entonces $N = \{u, v\}$ es el núcleo de D, en todos los casos el núcleo es único.

Supongamos cierto el resultado para toda digráfica D sin ciclos dirigidos, tal que $|V(D)| \leq n - 1$.

Sea D una digráfica sin ciclos dirigidos tal que $|V(D)| = n$.

Sea $N_0 = \left\{v \in V(D) \mid \delta_D^+(v) = 0\right\}$, puesto que D no tiene ciclos dirigidos, por el *Lema* 4, tenemos que $N_0 \neq \emptyset$. Sea $\Gamma^-(N_0) = \{v \in V(D) \mid \text{existe alguna } vN_0\text{-flecha en } D\}$, ahora consideremos la digráfica $D' = D[V(D) - (N_0 \cup \Gamma^-(N_0))]$. Si $D' = \emptyset$, tenemos que N_0 es núcleo de D. Si $D' \neq \emptyset$, tenemos que D' no tiene ciclos dirigidos ya que $D' \subset D$, además como $N_0 \neq \emptyset$, $|V(D')| \leq n - 1$, entonces por hipótesis de inducción D' tiene un único núcleo N'. Por demostrar que $N = N_0 \cup N'$ es un núcleo de D.

N es un conjunto independiente en D, puesto que no existen flechas de N_0 a N', por la elección de N_0, además no existen flechas de N' a N_0 porque N' es núcleo de D' y D' no contiene a $\Gamma^-(N_0)$.

N es un conjunto absorbente en D, puesto que N' por ser un núcleo de D' es un conjunto absorbente en D' y N_0 absorbe al conjunto $\Gamma^-(N_0)$.

Por lo tanto N es núcleo de D.

Ahora demostraremos que N es el único núcleo de D.

Supongamos que existe N_1 núcleo de D, por definición de N_0, $N_0 \subseteq N_1$, por definición de D' tenemos que $N_1 - N_0$ es un núcleo de D', entonces por elección de N'se tiene que $N_1 - N_0 = N'$. Por lo tanto $N_1 = N$. ■

Ahora demostraremos el Teorema de Richardson, el cual dice lo siguiente: "Toda digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar tiene un núcleo". La demostración original de este teorema dada en 1946 es larga y complicada, pero en 1971 Victor Neumann Lara introdujó el concepto de seminúcleo, que permitió una demostración del Teorema de Richardson mucho más simple.

A continuación definiremos el concepto de seminúcleo de una digráfica.

Definición 1.2. Sea D una digráfica, y $S \subseteq V(D)$. Diremos que S es un seminúcleo de D si

a) S es independiente, es decir, para cualquier $\{x, y\} \subseteq S$, tenemos que $(x, y) \notin F(D)$ y $(y, x) \notin F(D)$.

b) Si existe una Sx-flecha en D, existe una xS-flecha en D.

La digráfica de la *Figura* 1.4 tiene un seminúcleo $S = \{v_0, v_3, v_5\}$.

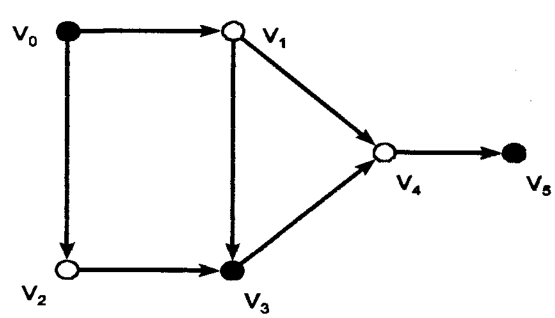


Figura 1.4. Digráfica con seminúcleo

Observación 1.3. Todo núcleo es un seminúcleo, pero no todo seminúcleo es un núcleo.

Mostremos lo anterior con un ejemplo. La digráfica D de la *Figura* 1.5 tiene un seminúcleo $S = \{w\}$, pero S no es un núcleo, puesto que $u \notin S$ y no existe una uS-flecha en D.

Figura 1.5. Digráfica D

A continuación demostraremos un lema que utilizaremos para demostrar el Teorema de Richardson.

Lema 1.4. Si toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo distinto del vacío, entonces D tiene núcleo.

Demostración. Sea S un seminúcleo maximal de D y sea $V_0 = V(D) - \left(S \cup \Gamma_D^-(S)\right)$.

Si $V_0 = \emptyset$, tenemos que $V(D) = S \cup \Gamma_D^-(S)$, por lo tanto S es un núcleo de D.

Si $V_0 \neq \emptyset$, entonces por hipótesis la subdigráfica inducida por los vértices de V_0 tiene un seminúcleo distinto del vacío T. Observemos que $S \cup T$ es independiente. Sabemos que S y T son conjuntos independientes por ser seminúcleos de D y V_0, respectivamente. Además, por la elección de V_0 y T no existen las TS-flechas en D y por ser S seminúcleo de D, tenemos que si existe una ST-flecha, entonces existe una TS-flecha, contradicción. Por lo que $S \cup T$ es un conjunto independiente en D. Supongamos que existe una $(S \cup T)\,x$-flecha con $x \in V(D) - \{S \cup T\}$. Si $x \in \Gamma_D^+(S)$, por ser S un seminúcleo de D, existe una xS-flecha en D. Si $x \in V_0 - T$ y existe una Tx-flecha en D, entonces por ser T un seminúcleo de V_0, existe una xT-flecha en D. Por lo que si existe una $(S \cup T)\,x$-flecha en D con $x \in V(D) - \{S \cup T\}$, se tiene que existe una $x\,(S \cup T)$-flecha en D. Por lo tanto $S \cup T$ es un seminúcleo de D. Como $T \neq \emptyset$, tenemos que $|S \cup T| > |S|$, lo que contradice que S es un seminúcleo maximal. Por lo que este caso no es posible. Por lo tanto S es un núcleo de D. ■

Teorema 1.2. Si una digráfica D no tiene ciclos de longitud impar, entonces D tiene un núcleo.

Demostración. Puesto que D no tiene ciclos de longitud impar, todas sus subdigráficas inducidas no tienen ciclos de longitud impar, por lo que por el *Lema* 1.4 basta demostrar que D tiene un seminúcleo distinto del vacío. Tenemos dos casos:

1) Si D no es una digráfica fuertemente conexa, entonces D tiene una componente fuertemente conexa terminal D_1, es decir, D_1 es tal que $\Gamma_D^+(D_1) \subseteq V(D_1)$. Por demostrar que D_1 tiene un seminúcleo distinto del vacío, el cual también es un seminúcleo de D.

Si $|V(D_1)| = 1$, entonces D_1 es un seminúcleo de D.

Si $|V(D_1)| > 1$, sea $x_0 \in V(D_1)$. Mostremos que todas las x_0x-trayectorias dirigidas están contenidas en D_1, para toda $x \in V(D_1) - \{x_0\}$. Supongamos lo contrario. Sea $T = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x)$ una trayectoria dirigida tal que $x_j \notin V(D_1)$ para algún $j = 1, \ldots, n-1$. Elijamos x_i el primer vértice de la sucesión tal que $x_i \notin V(D_1)$, como $(x_{i-1}, x_i) \in F(D)$ y $x_{i-1} \in V(D_1)$, se contradice el supuesto de que $\Gamma_D^+(D_1) \subseteq V(D_1)$. Por lo tanto todas las x_0x-trayectorias dirigidas están contenidas en D_1, para toda $x \in V(D_1) - \{x_0\}$.

Ahora, mostremos que todas las x_0x-trayectorias dirigidas tienen la misma paridad para toda $x \in V(D_1) - \{x_0\}$. Supongamos lo contrario. Supongamos que existe T_1 una x_0x-trayectoria dirigida de longitud par para alguna $x \in V(D_1) - \{x_0\}$, y existe T_2 una x_0x-trayectoria dirigida de longitud impar. Por ser D_1 una componente fuertemente conexa existe T_3 una xx_0-trayectoria dirigida, de donde tenemos los siguientes casos:

i) Si T_3 es de longitud impar, entonces $T = T_1 \cup T_3$ es un camino dirigido de longitud impar, el cual por el *Lema* 3 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, contradicción, puesto que D no tiene ciclos de longitud impar.

ii) Si T_3 es de longitud par, entonces $T' = T_2 \cup T_3$ es un camino dirigido de longitud impar, el cual por el *Lema* 3 contiene un ciclo dirigido de longitud impar, contradicción, puesto que D no tiene ciclos de longitud impar.

Por lo tanto todas las x_0x-trayectorias dirigidas tienen la misma paridad.

Sea $S = \{x \in V(D_1) \mid \text{existe } x_0x\text{-trayectoria dirigida de longitud par}\}$.

Por demostrar que S es un seminúcleo no vacío de D_1.

Sabemos que S es distinto del vacío, ya que $x_0 \in S$.

Mostremos que S es un conjunto independiente. Supongamos que S no es un conjunto independiente, es decir, que existe $\{x, y\} \subseteq V(S)$ tal que $(x, y) \in F(S)$ o $(y, x) \in F(S)$. Por definición de S, tenemos que existe T_1 una x_0x-trayectoria dirigida de longitud par y T_2 una x_0y-trayectoria dirigida de longitud par.

Si $(x, y) \in F(S)$, tenemos que $T_1 \cup \{(x, y)\}$ es una x_0y-trayectoria dirigida de longitud impar, lo cual contradice que todas las x_0y-trayectorias dirigidas tienen la misma paridad. Por lo tanto $(x, y) \notin F(S)$.

Si $(y, x) \in F(S)$, tenemos que $T_2 \cup \{(y, x)\}$ es una x_0x-trayectoria dirigida de longitud impar, lo cual contradice que todas las x_0x-trayectorias dirigidas tienen la misma paridad. Por lo tanto $(y, x) \notin F(S)$.

Por lo tanto S es un conjunto independiente.

Demostremos que si existe una Sz-flecha en D_1, entonces existe una zS-flecha en D_1 para toda $z \in V(D_1) - V(S)$. Consideremos $x \in V(S)$ tal que $(x, z) \in F(D_1)$. Como $x \in V(S)$, entonces por definición de S, existe $T = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1} = x)$ una x_0x-trayectoria dirigida de longitud par. Por ser D_1 una componente fuertemente conexa, tenemos que existe $T' = (z = z_0, z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1} = x_0)$ una zx_0-trayectoria dirigida en D_1. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1) Si $z \in V(T)$, entonces $z = x_i$ para alguna $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Como $z \notin V(S)$, entonces la x_0z-trayectoria dirigida es de longitud impar, por lo que $(x_0, T, z = x_i) \cup (z = x_i, x_{i+1})$ es una x_0x_{i+1}-trayectoria dirigida de longitud par, lo cual implica que $x_{i+1} \in V(S)$. Además, como $(z = x_i, x_{i+1}) \in F(D_1)$, tenemos que existe una zs-flecha en D_1.

Caso 2) Si $z \notin V(T)$, entonces debemos considerar los siguientes casos:

2.1) Si $z_1 \notin V(T)$, entonces $T \cup (x, z) \cup (z = z_0, z_1)$ es una x_0z_1-trayectoria dirigida de longitud par, por lo que $z_1 \in V(S)$, por lo tanto existe una zS-flecha en D_1.

2.2) Si $z_1 \in V(T)$, tenemos que $z_1 = x_i$ para alguna $i = 0, 1, \ldots, m-1$. De donde se tienen los siguientes casos:

2.2.1) Si la x_0z_1-trayectoria dirigida es de longitud par, entonces por definición de S se tiene que $z_1 \in V(S)$. Puesto que $(z = z_0, z_1) \in F(D_1)$, tenemos que existe una zS-flecha en D_1.

2.2.2) Si la x_0z_1-trayectoria dirigida es de longitud impar, entonces por ser T una x_0x-trayectoria dirigida de longitud par, tenemos que la z_1x-trayectoria dirigida es de longitud impar, de donde se tiene que $(z_1 = x_i, T, x) \cup (x, z) \cup (z = z_0, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud impar, contradicción, puesto que D no contiene ciclos dirigidos de longitud impar. Por lo que este caso no es posible.

Por lo tanto S es un seminúcleo no vacío de D_1 y S es un seminúcleo de D. Por lo tanto, usando el *Lema* 1.4, tenemos que D tiene un núcleo.

2) Si D es fuertemente conexa, la demostración es análoga. ■

Otro concepto importante relacionado con el núcleo de una digráfica es el concepto de cuasinúcleo, que veremos a continuación:

Definición 1.3. Sea D una digráfica y $Q \subseteq V(D)$. Diremos que Q es un cuasinúcleo de D si Q es un conjunto independiente tal que $V(D) = Q \cup \Gamma_D^-(Q) \cup \Gamma_D^-(\Gamma_D^-(Q))$, es decir, para todo $x \in V(D) - Q$, tenemos que la distancia de x a Q en D es uno o dos, esto es, $0 < d_D(x, q) \leq 2$ para algún $q \in Q$.

La digráfica D de la *Figura* 1.6 tiene un cuasinúcleo $Q = \{u_1, u_5\}$.

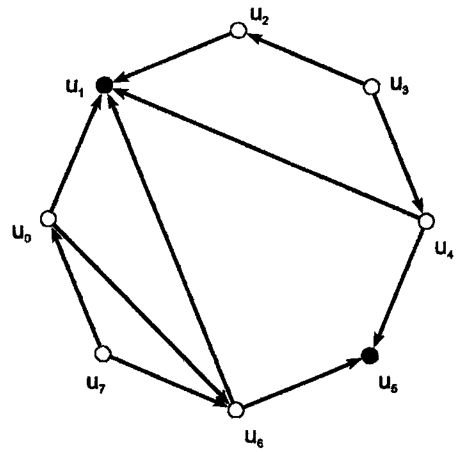


Figura 1.6. Digráfica con cuasinúcleo

Observación. 1.4. Todo núcleo es un cuasinúcleo, pero no todo cuasinúcleo es un núcleo.

Consideremos la digráfica D de la *Figura* 1.7, D tiene un cuasinúcleo $Q = \{x_0, x_2\}$, pero Q no es un núcleo, puesto que $x_3 \notin Q$ y no existe una x_3Q-flecha en D.

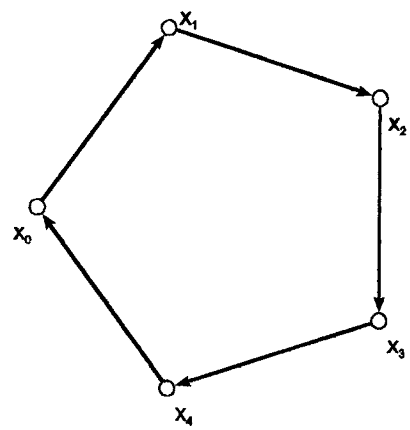


Figura 1.7. Digráfica D

Observación 1.5. No todo seminúcleo es un cuasinúcleo y no todo cuasinúcleo es un seminúcleo.

En la *Figura* 1.8 se muestra una digráfica D_1 con un seminúcleo $S = \{x_3\}$, pero S no es un cuasinúcleo.

En la *Figura* 1.9 se muestra una digráfica D_2 que tiene un cuasinúcleo $Q = \{y_0, y_3\}$, pero Q no es un seminúcleo.

Lema 1.5. Todo núcleo N de una digráfica D es un cuasinúcleo.

Demostración. Sea D una digráfica con núcleo N, entonces N es un conjunto independiente y para todo $x \in V(D) - N$ existe una xN-flecha, por lo que todos los vértices que no están contenidos en N, se encuentran a distancia uno de N. Por lo tanto N es un cuasinúcleo de D. ∎

Observación 1.6. No todo cuasinúcleo es un núcleo.

En la *Figura* 1.9 se muestra la digráfica D_2 que tiene un cuasinúcleo $Q = \{y_0, y_3\}$, pero Q no es núcleo de D_2.

Figura 1.8. Digráfica D_1

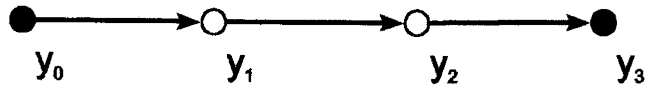


Figura 1.9. Digráfica D_2

Ahora veremos un resultado de gran importancia en la Teoría de Gráficas.

Teorema 1.3. Toda digráfica D tiene un cuasinúcleo.

Demostración. Por inducción sobre $|V(D)|$.

Cuando $|V(D)| = 1$, tenemos que la digráfica D es sólo un vértice, y por lo tanto éste es el cuasinúcleo de D.

Supongamos que toda digráfica D' tal que $|V(D')| < n$ tiene un cuasinúcleo.

Sea D una digráfica tal que $|V(D)| = n$. Tenemos dos casos:

Caso 1) Si D tiene un núcleo N, entonces, por el *Lema* 1.5 tenemos que N es un cuasinúcleo.

Caso 2) Si D no tiene núcleo. Sea $x \in V(D)$. Consideremos la digráfica $D' = D - \left(x \cup \Gamma_D^-(x)\right)$. Como D no tiene núcleo, entonces $D' \neq \emptyset$. Además, $|V(D')| < n$, así que por hipótesis de inducción tenemos que D' tiene un cuasinúcleo Q'.

i) Si $Q' \cup \{x\}$ es un conjunto independiente, entonces como Q' es un cuasinúcleo de D' y $V(D) - V(D') = \Gamma_D^-(x) \cup \{x\}$, tenemos que $Q' \cup x$ es un cuasinúcleo de D.

ii) Si $Q' \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente. Entonces existe un vértice $z \in Q'$ tal que existe $(z, x) \in F(D)$ o $(x, z) \in F(D)$. Como $z \in Q'$, entonces $z \notin \Gamma_D^-(x)$, es decir, $(z, x) \notin F(D)$. Por lo tanto $(x, z) \in F(D)$. Por ser Q' un cuasinúcleo de D', es un conjunto independiente y para todo $u \in V(D') - Q'$, tenemos que $0 < d_{D'}(u, z) \leq 2$, con $z \in Q'$, puesto que $(x, z) \in F(D)$, tenemos que para todo $w \in \Gamma^-(x) = V(D) - Q'$, se cumple que $0 < d_D(w, z) \leq 2$, con $z \in Q'$. Por lo tanto Q' es un cuasinúcleo de D. ∎

1.2 (k, ℓ)-Núcleos.

Ahora daremos una generalización del concepto de núcleo, (k, ℓ)-núcleo, que fue introducido en 1981 por María Kwasnik. Veremos también un resultado general del Teorema de Richardson que fue demostrado por María Kwasnik: "Toda digráfica fuertemente conexa sin ciclos dirigidos de longitud no congruente con cero módulo k tiene un k-núcleo".

Definición 1.4. Sea D una digráfica, el conjunto $N \subseteq V(D)$ es un (k, ℓ)-núcleo de D con k y ℓ números naturales tales que $k \geq 2$ y $\ell \geq 1$ si y sólo si

a) Para todo $x', x \in N$ tal que $x' \neq x$, tenemos que $d_D(x', x) \geq k$.

b) Para toda $y \in V(D) - N$, existe $x \in N$ tal que $d_D(y, x) \leq \ell$.

Un k-núcleo es un $(k, k-1)$-núcleo, para $k = 2$ y $\ell = 1$ tenemos un núcleo, si $k = 2$ y $\ell = 2$ tenemos un cuasinúcleo.

En la *Figura* 1.10 se muestra una digráfica con un $(3, 2)$-núcleo o 3-núcleo $N = \{x_0, x_3, x_6\}$. La digráfica de la *Figura* 1.11 tiene un $(4, 3)$-núcleo o 4-núcleo $N = \{x_0, x_4, x_8\}$. La digráfica de la *Figura* 1.12 tiene un $(2, 3)$-núcleo $N = \{d, f\}$.

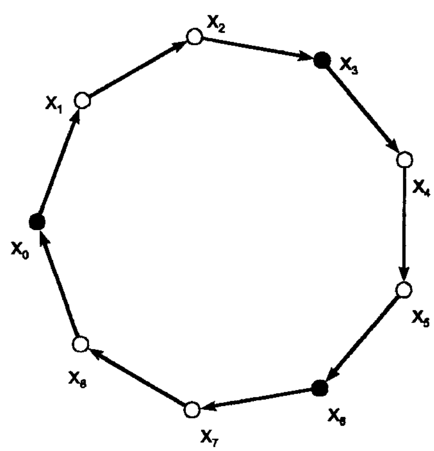


Figura 1.10. Digráfica con 3-núcleo

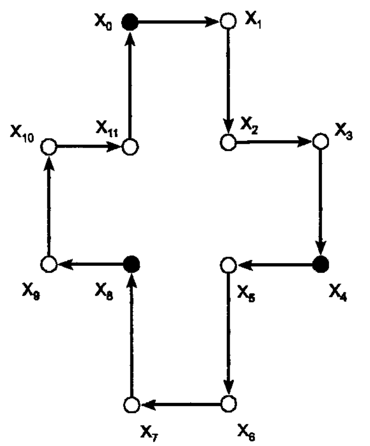


Figura 1.11. Digráfica con 4-núcleo

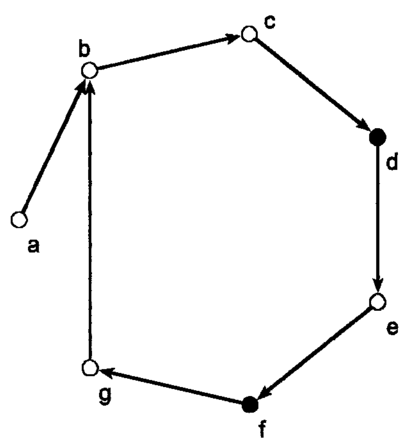


Figura 1.12. Digráfica con $(2,3)$-núcleo

Observación 1.7. Toda digráfica D tal que D es un ciclo dirigido de longitud $\equiv 0(\bmod k)$ con $k \geq 2$, tiene k-núcleo.

Como D es un ciclo dirigido de longitud $\equiv 0\,(\bmod k)$, entonces $D = (x_0, x_1, x_{m-1}, x_m = x_0)$ con $m \equiv 0\,(\bmod k)$, esto es, $m = nk$ con n un número natural. Tenemos que $N = \{x_0 = x_{nk}, x_k, x_{2k}, \ldots, x_{(n-1)k}\}$ es un k-núcleo de D.

Tomemos como ejemplo la digráfica D de la *Figura* 1.11. Notemos que D es un ciclo dirigido de longitud $\equiv 0\,(\bmod 4)$ y tiene un 4-núcleo $N = \{x_0, x_4, x_8\}$.

Observación 1.8. Toda digráfica D tal que D es un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$ con $k \geq 2$, no tiene k-núcleo.

Como D es un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, k)$, entonces $D = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = x_0)$ con $m \not\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, k)$, esto es, $m = nk + r$ con n y r números naturales, tal que $0 < r < k$. Supongamos que D tiene un k-núcleo N. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0 = x_m = x_{nk+r} \in N$, entonces $x_{nk+r-1}, x_{nk+r-2}, \ldots, x_{(n-1)k+r+1} \notin N$, ya que N es un k-núcleo y $d_D\,(x_j, x_0 = x_{nk+r}) < k$ con $j = nk + r - 1, nk + r - 2, \ldots, (n-1)\,k + r + 1$. Consideremos el vértice $x_{(n-1)k+r}$. Tenemos los siguientes casos:

1) $x_{(n-1)k+r} \notin N$.

2) $x_{(n-1)k+r} \in N$.

Si $x_{(n-1)k+r} \notin N$. Como D es un ciclo dirigido y $d_D\left(x_{(n-1)k+r}, x_0 = x_{nk+r}\right) = k$, tenemos que $x_{(n-1)k+r}$ no es absorbido por algún elemento de N, contradicción, ya que N es un k-núcleo. De donde se tiene que $x_{(n-1)k+r} \in N$.

Por lo que $x_{(n-1)k+r-1}, x_{(n-1)k+r-2}, \ldots, x_{(n-2)k+r+1} \notin N$, ya que N es un k-núcleo y $d_D\left(x_j, x_{(n-1)k+r}\right) < k$ con $j = (n-1)\,k+r-1, (n-1)\,k+r-2, \ldots, (n-2)\,k+r+1$. Consideremos el vértice $x_{(n-2)k+r}$. Tenemos los siguientes casos:

1) $x_{(n-2)k+r} \notin N$.

2) $x_{(n-2)k+r} \in N$.

Si $x_{(n-2)k+r} \notin N$. Como D es un ciclo dirigido y $d_D\left(x_{(n-2)k+r}, x_{(n-1)k+r}\right) = k$, tenemos que $x_{(n-2)k+r}$ no es absorbido por algún elemento de N, contradicción, ya que N es un k-núcleo. De donde se tiene que $x_{(n-2)k+r} \in N$. De manera análoga, concluimos que $x_{(n-3)k+r}, x_{(n-4)k+r}, \ldots, x_r \in N$. Como $d_D(x_0 = x_{nk+r}, x_r) = r < k$, se contradice el supuesto de que N es un k-núcleo. Por lo tanto D no tiene k-núcleo.

Tomemos como ejemplo la digráfica D de la *Figura* 1.11. Notemos que D es un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod 5$, si consideramos el conjunto $\{x_0, x_5, x_{10}\}$, tenemos que no es un 5-núcleo, ya que $d_D(x_{10}, x_0) = 2 < 5$. Ahora, si consideramos el conjunto $\{x_0, x_5\}$ se tiene que no es un 5-núcleo de D, ya que $d_D(x_6, x_0) = 6 > 5$. De igual forma si consideramos el conjunto $\{x_1, x_6, x_{11}\}$, tenemos que no es un 5-núcleo, ya que $d_D(x_{11}, x_1) = 2 < 5$. Ahora, si consideramos el conjunto $\{x_1, x_6\}$ se tiene que no es un 5-núcleo de D, ya que $d_D(x_7, x_1) = 6 > 5$. Si consideramos el conjunto $\{x_2, x_7, x_0\}$, tenemos que no es un 5-núcleo, ya que $d_D(x_0, x_2) = 2 < 5$. Ahora, si consideramos el conjunto $\{x_2, x_7\}$ se tiene que no es un 5-núcleo de D, ya que $d_D(x_8, x_2) = 6 > 5$. De donde concluimos que D no tiene 5-núcleo.

Teorema 1.4. Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod k$ con $k \geq 2$. Entonces D tiene un k-núcleo.

Demostración. Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido de D tiene longitud $\equiv 0 \pmod k$ con $k \geq 2$. Como D es fuertemente conexa, por el *Lema* 6, tenemos que existe un camino cerrado dirigido $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_0)$ tal que $V(\mathcal{C}) = V(D)$. Por el *Lema* 3 se tiene que $m = nk$, esto es, $m \equiv 0 \pmod k$. Además, tenemos que $\mathcal{C}$ contiene un ciclo dirigido $\mathcal{C}'$ que por hipótesis tiene longitud $\equiv 0 \pmod k$. Consideremos el conjunto $N(x) = \{i \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \,|\, x_i = x \text{ para toda } x \in V(D)\}$. Como $V(\mathcal{C}) = V(D)$, se tiene que $N(x) \neq \emptyset$ para toda $x \in V(D)$.

Si $i,j \in N(x)$ tal que $i \neq j$, afirmamos que $i \equiv j \pmod k$ para $k \geq 2$. Como $i \in N(x)$, entonces existe $x_i \in V(\mathcal{C})$ tal que $x_i = x$, de igual forma, como $j \in N(x)$, entonces existe $x_j \in V(\mathcal{C})$ tal que $x_j = x$, para $i \neq j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Por lo que $\mathcal{C}$ es de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i = x, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = x, x_{j+1}, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_0)$$

con $m \equiv 0 \pmod k$. Entonces existe un camino cerrado dirigido $(x_i = x, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = x)$ de longitud $\equiv 0 \pmod k$. Por lo que $\ell(\mathcal{C}) = rk$ con r en los números naturales. Así, $j - i = rk$, por lo que $j - i \equiv 0 \pmod k$. De donde se tiene que $i \equiv j \pmod k$.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$S_0 = \{x \in V(D) \mid N(x) \subset \{0, k, 2k, 3k, \ldots\}\}$

$S_1 = \{x \in V(D) \mid N(x) \subset \{1, k+1, 2k+1, 3k+1, \ldots\}\} \ldots$

$S_{k-1} = \{x \in V(D) \mid N(x) \subset \{k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots\}\}$

Por demostrar que $V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y los conjuntos S_i son k-núcleos de D para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Con lo cual mostraremos que la digráfica D tiene i k-núcleos.

Probemos que $V(D) \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$, sabemos que para toda $x \in V(D)$, se tiene que $N(x) \neq \emptyset$ y que $N(x) \subset \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$ para algún $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, por lo que $x \in S_i$ para algún $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, por lo tanto $x \in \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$. De donde tenemos que $V(D) \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$. Ahora, observemos que por definición de los conjuntos S_i con $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, tenemos que $\bigcup_{i=0}^{k-1} S_i \subset V(D)$. Por lo tanto $V(D) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$.

Demostremos que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$ tal que $i \not\cong j \, (\bmod\, k)$. Por contradicción. Supongamos que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ para alguna i, j con $i \neq j$ tal que $i \not\cong j \, (\bmod\, k)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $S_i \cap S_j = \{x_i\}$ para alguna i, j con $i \neq j$ tal que $i \not\cong j \, (\bmod\, k)$. Como $x_i \in S_i$, por definición, tenemos que $N(x_i) \subset \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$. Además, como $x_i \in S_j$, por definición, se tiene que $N(x_i) \subset \{j, k+j, 2k+j, \ldots\}$. Entonces $i \equiv j \, (\bmod\, k)$, contradicción. Por lo tanto $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$ tal que $i \not\cong j \, (\bmod\, k)$.

Ahora, demostremos que los conjuntos S_i son k-núcleos de D para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Primero veamos que S_i es un conjunto tal que para todo $\{x', x\} \subseteq S_i$, con $x' \neq x$ tenemos que $d_D(x', x) \geq k$ y $d_D(x, x') \geq k$. Sean $\{x, x'\} \subseteq S_i$, con $x \neq x'$. Entonces $N(x) \subset \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$, $N(x') \subset \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$. De donde $x = x_r$ con $r \in \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$, $x' = x_s$ con $s \in \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$, como $x \neq x'$, entonces $r \neq s$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $r < s$, entonces $d_D(x = x_r, x' = x_s) \geq k + i > k$.

De igual forma tenemos que $d_D(x' = x_s, x = x_r) \geq k + i > k$.

Por lo tanto S_i para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$ es un conjunto que satisface que para todo $\{x', x\} \subseteq S_i$, con $x' \neq x$ se cumple que $d_D(x', x) \geq k$ y $d_D(x, x') \geq k$.

Demostremos que S_i es un conjunto tal que para todo $y \notin S_i$, se tiene que $d_D(y, x) \leq k-1$ con $x \in S_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Sea $y \notin S_i$ para algún $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Como $y \notin S_i$, entonces $N(y) \not\subseteq \{i, k+i, 2k+i, \ldots\}$. Además, como $N(y) \neq \emptyset$ tenemos que existe $x_r = y$ para algún

$r \in (\{0,1,\ldots,m-1\} - \{i, k+i, 2k+i, \ldots\})$, es decir, $r = ak + i + t$ donde $a \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ y $0 < t < i-1$.

Por lo que $d_D\left(y = x_r = x_{ak+i+t}, x_{(a+1)k+i}\right) \leq k-1$, donde $x_{(a+1)k+i} \in S_i$ con $a \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, entonces $x = x_{(a+1)k+i} \in S_i$. Por lo tanto $d_D(y,x) \leq k-1$ con $x \in S_i$ para todo $i = 0,1,\ldots,k-1$. ■

Capítulo 2
(k, ℓ)-Núcleos y Operaciones de Digráficas.

En este capítulo definiremos tres tipos de operaciones en digráficas denominadas la disyunción excluyente, la suma cartesiana y el producto normal. Demostraremos resultados que sirven de base para hallar (k, ℓ)-núcleos en las digráficas resultantes de las operaciones mencionadas. Estos resultados fueron realizados por María Kwasnik [5] en: "(k, ℓ)-núcleos de la disyunción excluyente, suma cartesiana y producto normal de dos digráficas".

La primera sección de este capítulo contiene las definiciones de las operaciones que se verán. La segunda, proposiciones acerca de la distancia entre vértices en las digráficas resultantes de dichas operaciones, estas proposiciones serán utilizadas en las siguientes secciones, las cuales contienen teoremas y corolarios que sirven para encontrar (k, ℓ)-núcleos en las digráficas disyunción excluyente, suma cartesiana y producto normal, a partir de los (k, ℓ)-núcleos de dos digráficas dadas.

2.1 Definiciones.

Con base en las definiciones de las operaciones en digráficas que veremos a continuación, construiremos tres nuevas digráficas a partir de dos digráficas cualesquiera.

Dadas D_1 y D_2 dos digráficas, definiremos las digráficas disyunción excluyente, suma cartesiana y producto normal de D_1 y D_2, denotadas como $D_1 \otimes D_2$, $D_1 + D_2$ y $D_1 \cdot D_2$, respectivamente.

Definición 2.1. Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica disyunción excluyente de D_1 y D_2, denotada por $D_1 \otimes D_2$, como sigue:

i) $V(D_1 \otimes D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$

ii) $((x,y),(x',y')) \in F(D_1 \otimes D_2)$ si y sólo si $(x,x') \in F(D_1)$ y $(y,y') \notin F(D_2)$ o $(x,x') \notin F(D_1)$ y $(y,y') \in F(D_2)$.

En la *Figura* 2.1 mostramos dos digráficas D_1 y D_2, a partir de las cuales construiremos la digráfica disyunción excluyente $D_1 \otimes D_2$ que se muestra en la *Figura* 2.2.

Observemos que en la *Figura* 2.1 tenemos: $V(D_1) = \{x,y,z\}$, $V(D_2) = \{u,v,w\}$, $F(D_1) = \{(z,y),(y,x)\}$ y $F(D_2) = \{(u,v),(v,w),(w,u)\}$.

Ahora veamos como se construye la digráfica $D_1 \otimes D_2$:

$V(D_1 \otimes D_2) = V(D_1) \times V(D_2) = \{(x,u) = xu, (x,v) = xv, (x,w) = xw, (y,u) = yu, (y,v) = yv, (y,w) = yw, (z,u) = zu, (z,v) = zv, (z,w) = zw\}$.

Puesto que $(x,y) \notin F(D_1)$ y $(w,u) \in F(D_2)$, tenemos que $(xw,yu) \in F(D_1 \otimes D_2)$. Como $(y,x) \in F(D_1)$ y $(u,w) \notin F(D_2)$, entonces $(yu,xw) \in F(D_1 \otimes D_2)$. Además, como $(x,x) \notin F(D_1)$ y $(u,v) \in F(D_2)$, entonces $(xu,xv) \in F(D_1 \otimes D_2)$. De igual forma, como $(y,x) \in F(D_1)$ y $(u,u) \notin F(D_2)$, entonces $(yu,xu) \in F(D_1 \otimes D_2)$.

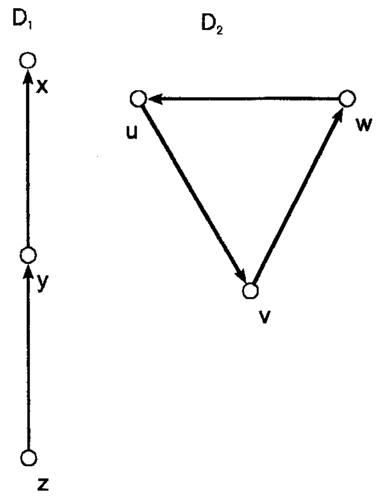


Figura 2.1. Digráficas D_1 y D_2

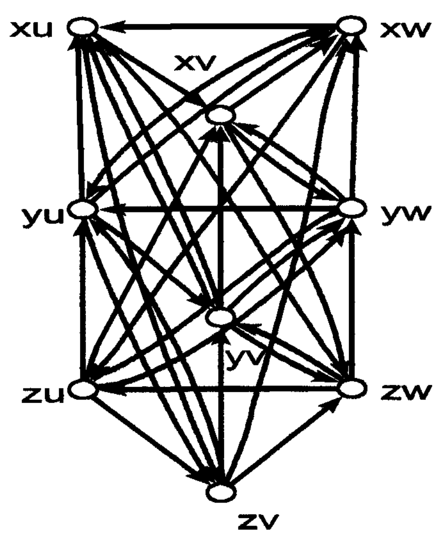


Figura 2.2. Digráfica $D_1 \otimes D_2$

Definición 2.2. Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica suma cartesiana de D_1 y D_2, denotada por $D_1 + D_2$, como sigue:

i) $V(D_1 + D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$

ii) $((x,y),(x',y')) \in F(D_1 + D_2)$ si y sólo si $(x,x') \in F(D_1)$ y $y = y'$ o $(y,y') \in F(D_2)$ y $x = x'$.

En la *Figura* 2.3 mostramos la digráfica suma cartesiana $D_1 + D_2$, construida a partir de las digráficas D_1 y D_2 de la *Figura* 2.1, en las cuales $V(D_1) = \{x, y, z\}$, $V(D_2) = \{u, v, w\}$, $F(D_1) = \{(z, y), (y, x)\}$ y $F(D_2) = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$.
Por lo que $V(D_1 + D_2) = V(D_1) \times V(D_2) = \{(x, u) = xu, (x, v) = xv, (x, w) = xw,$ $(y, u) = yu, (y, v) = yv, (y, w) = yw, (z, u) = zu, (z, v) = zv, (z, w) = zw\}$.

Como $(z, y) \in F(D_1)$ y $u \in V(D_2)$, entonces $(zu, yu) \in F(D_1 + D_2)$. Ya que $(y, x) \in F(D_1)$ y $u \in V(D_2)$, entonces $(yu, xu) \in F(D_1 + D_2)$. De igual forma, $\{(zv, yv), (yv, xv), (zw, yw), (yw, xw)\} \subseteq F(D_1 + D_2)$.

Como $(u, v) \in F(D_2)$ y $x \in V(D_1)$, entonces $(xu, xv) \in F(D_1 + D_2)$. Debido a que $(v, w) \in F(D_2)$ y $x \in V(D_1)$, entonces $(xv, xw) \in F(D_1 + D_2)$. Además, como $(w, u) \in F(D_2)$, entonces $(xw, xu) \in F(D_1 + D_2)$. De manera análoga tenemos que $\{(yu, yv), (yv, yw), (yw, yu), (zu, zv), (zv, zw), (zw, zu)\} \subseteq F(D_1 + D_2)$.

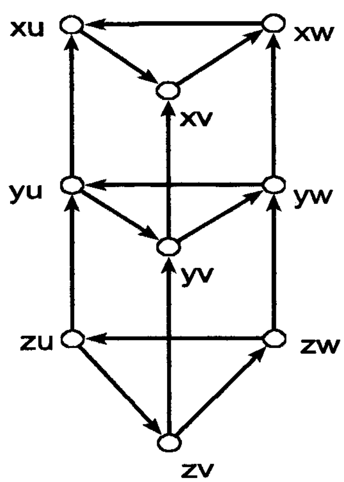


Figura 2.3. Digráfica $D_1 + D_2$

Definición 2.3. Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica producto normal de D_1 y D_2, denotada por $D_1 \cdot D_2$, como sigue:

i) $V(D_1 \cdot D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$

ii) $((x,y),(x',y')) \in F(D_1 \cdot D_2)$ si y sólo si

$$(x,x') \in F(D_1) \text{ y } y = y'$$

$$\text{o } (y,y') \in F(D_2) \text{ y } x = x'$$

$$\text{o } (x,x') \in F(D_1) \text{ y } (y,y') \in F(D_2).$$

En la *Figura* 2.4 mostramos la digráfica producto normal $D_1 \cdot D_2$, construida a partir de las digráficas D_1 y D_2 de la *Figura* 2.1. Recordemos que $V(D_1) = \{x,y,z\}$, $V(D_2) = \{u,v,w\}$, $F(D_1) = \{(z,y),(y,x)\}$ y $F(D_2) = \{(u,v),(v,w),(w,u)\}$. Por lo que $V(D_1 \cdot D_2) = V(D_1) \times V(D_2) = \{(x,u) = xu, (x,v) = xv, (x,w) = xw, (y,u) = yu, (y,v) = yv, (y,w) = yw, (z,u) = zu, (z,v) = zv, (z,w) = zw\}$.

Como $(x,x') \in F(D_1)$ y $y = y'$, o $(y,y') \in F(D_2)$ y $x = x'$, son las mismas condiciones que se piden para las flechas de la digráfica $D_1 + D_2$, entonces $F(D_1 + D_2) \subset F(D_1 \cdot D_2)$. Puesto que $(y,x) \in F(D_1)$ y $(w,u) \in F(D_2)$, tenemos que $(yw,xu) \in F(D_1 \cdot D_2)$, como $(y,x) \in F(D_1)$ y $(u,v) \in F(D_2)$, entonces $(yu,xv) \in F(D_1 \cdot D_2)$, ya que $(v,w) \in F(D_2)$, entonces $(yv,xw) \in F(D_1 \cdot D_2)$. Además, como $(z,y) \in F(D_1)$ y $(u,v) \in F(D_2)$, se sigue que $(zu,yv) \in F(D_1 \cdot D_2)$, debido a que $(z,y) \in F(D_1)$ y $\{(v,w),(w,u)\} \subseteq F(D_2)$, se tiene que $\{(zv,yw),(zw,yu)\} \subseteq F(D_1 \cdot D_2)$.

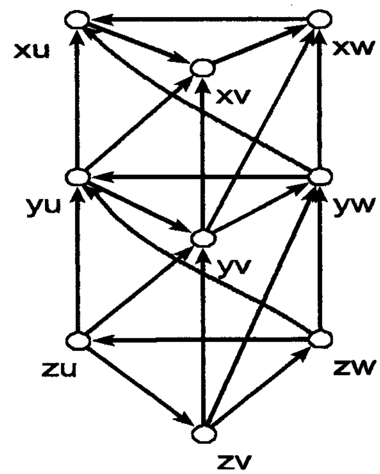


Figura 2.4. Digráfica $D_1 \cdot D_2$

Sea $J \subset V(D_1) \times V(D_2)$ un conjunto de vértices. Denotamos por $\Pr_{V(D_i)}(J)$ a la proyección de J en $V(D_i)$ para $i = 1, 2$. Sea $\alpha = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ una sucesión de vértices, donde $(x_j, y_j) \in V(D_1) \times V(D_2)$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Por la proyección de la sucesión α en el conjunto de vértices $V(D_i)$, denotada por $\Pr_{V(D_i)}(\alpha) = \alpha_i$, nos referimos a la sucesión α_i de los vértices de $V(D_i)$, con las siguientes propiedades:

1. Elementos consecutivos de la sucesión α_i son las i-ésimas coordenadas de los vértices de α,

2. Si α' es una sección de α y todos los elementos sucesivos de α' tienen igual la primera coordenada x_k o identica la segunda coordenada y_l, entonces $\Pr_{V(D_i)}(\alpha') = \{x_k\}$ o $\Pr_{V(D_i)}(\alpha') = \{y_l\}$, respectivamente.

De la *Figura* 2.2, tenemos que:

$V(D_1) \times V(D_2) = \{(x,u) = xu, (x,v) = xv, (x,w) = xw, (y,u) = yu, (y,v) = yv, (y,w) = yw, (z,u) = zu, (z,v) = zv, (z,w) = zw\}$.

Si $\alpha = ((x,u), (x,v), (x,w), (y,u), (y,v), (y,w))$, entonces $\mathrm{Pr}_{V(D_1)}(\alpha) = \alpha_1 = (x,y)$ y $\mathrm{Pr}_{V(D_2)}(\alpha) = \alpha_2 = (u,v,w)$. Si $\alpha' = ((x,u), (x,v), (x,w))$, tenemos que $\mathrm{Pr}_{V(D_1)}(\alpha') = \{x\}$.

Recordemos que por distancia $d_D(x,y)$ en una digráfica nos referimos a la longitud de la trayectoria de longitud mínima de x a y en D.

Además el conjunto $N \subset V(D)$ es un (k,ℓ)-núcleo de una digráfica D con k y ℓ números naturales tales que $k \geq 2$ y $\ell \geq 1$ si y sólo si

a) Para todo $x', x \in N$, tal que $x' \neq x$ tenemos que $d_D(x',x) \geq k$.

b) Para toda $y \in V(D) - N$, existe $x \in N$ tal que $d_D(y,x) \leq \ell$.

2.2 Distancia en operaciones de digráficas.

Sean D_1 y D_2 dos digráficas, tomemos $\{u_1, u_2\} \subseteq V(D_1)$ y $\{v_1, v_2\} \subseteq V(D_2)$, de donde $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \subseteq V(D_1) \times V(D_2)$. En esta sección encontraremos la distancia de (u_1, v_1) a (u_2, v_2) en las digráficas disyunción excluyente, suma cartesiana y producto normal a partir de la distancia de u_1 a u_2 en la digráfica D_1 y la distancia de v_1 a v_2 en D_2. Además, demostraremos algunas proposiciones acerca de la distancia entre vértices en las digráficas resultantes de las operaciones definidas anteriormente.

Recordemos que la distancia entre dos vértices de una digráfica es la longitud de la trayectoria dirigida mínima entre ellos. Si no existe una trayectoria entre dos vértices de una digráfica, la distancia entre ellos es infinita. Con el fin de que las distancias entre los vértices sean finitas, es necesario que entre todo par de vértices de la digráfica exista una trayectoria dirigida que los una, es decir, que la digráfica sea fuertemente conexa. Por lo tanto en lo que resta del capítulo consideraremos únicamente digráficas fuertemente conexas.

Proposición 2.1. Si D_1 y D_2 son digráficas fuertemente conexas, entonces tenemos que

$$d_{D_1 \otimes D_2}\left(\left(x', y'\right), (x, y)\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } d_{D_1}\left(x', x\right) = 1 \text{ y } d_{D_2}\left(y', y\right) \neq 1 \\ & \text{o } d_{D_1}\left(x', x\right) \neq 1 \text{ y } d_{D_2}\left(y', y\right) = 1. \\ 2, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Consideramos los siguientes casos:

1. $d_{D_1}(x', x) = 1$ y $d_{D_2}(y', y) \neq 1$ o $d_{D_1}(x', x) \neq 1$ y $d_{D_2}(y', y) = 1$.

2. a. $d_{D_1}(x', x) = 2$ y $d_{D_2}(y', y) \geq 2$ o $d_{D_1}(x', x) \geq 2$ y $d_{D_2}(y', y) = 2$.

   b. $d_{D_1}(x', x) > 2$ y $d_{D_2}(y', y) > 2$ o $d_{D_1}(x', x) = 1$ y $d_{D_2}(y', y) = 1$.

Caso 1. En este caso, como $(x', x) \in F(D_1)$ y $(y', y) \notin F(D_2)$ o $(x', x) \notin F(D_1)$ y $(y', y) \in F(D_2)$, entonces por la definición de $D_1 \otimes D_2$, tenemos que $((x', y'), (x, y)) \in F(D_1 \otimes D_2)$. Por lo tanto $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) = 1$.

Caso 2.a. Supongamos que $d_{D_1}(x', x) = 2$ y $d_{D_2}(y', y) \geq 2$, entonces existe T_x una $x'x$-trayectoria dirigida de longitud 2 en D_1, tal que $T_x = (x', x_1, x)$, esto es, $d_{D_1}(x', x_1) = 1$ y $d_{D_1}(x_1, x) = 1$. De donde $\{(x', x_1), (x_1, x)\} \subseteq F(D_1)$ y $(y', y) \notin F(D_2)$.

Entonces por la definición de $D_1 \otimes D_2$ tenemos que $((x', y'), (x_1, y)) \in F(D_1 \otimes D_2)$ y $((x_1, y), (x, y)) \in F(D_1 \otimes D_2)$, es decir, $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x_1, y)) = 1$ y $d_{D_1 \otimes D_2}((x_1, y), (x, y)) = 1$.

Por lo que

$$d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) \leq d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x_1, y)) + d_{D_1 \otimes D_2}((x_1, y), (x, y)) = 2.$$

Por lo anterior y usando que $d_{D_1}(x', x) \neq 1$, $d_{D_2}(y', y) \neq 1$, tenemos que

$$d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y))=2.$$

Si $d_{D_1}(x',x)\geq 2$ y $d_{D_2}(y',y)=2$, argumentamos de manera análoga. Como $d_{D_2}(y',y)=2$, entonces existe T_y una $y'y$-trayectoria dirigida de longitud 2 en D_2, tal que $T_y=(y',y_1,y)$, esto es, $d_{D_2}(y',y_1)=1$ y $d_{D_2}(y_1,y)=1$.

De donde $\{(y',y_1),(y_1,y)\}\subseteq F(D_2)$ y $(x',x)\notin F(D_1)$. Entonces por la definición de $D_1\otimes D_2$ tenemos que $((x',y'),(x,y_1))\in F(D_1\otimes D_2)$ y $((x,y_1),(x,y))\in F(D_1\otimes D_2)$, es decir, $d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y_1))=1$ y $d_{D_1\otimes D_2}((x,y_1),(x,y))=1$.

Por lo que

$$d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y))\leq d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y_1))+d_{D_1\otimes D_2}((x,y_1),(x,y))=2.$$

Por lo tanto, usando que $d_{D_1}(x',x)\neq 1$ y $d_{D_2}(y',y)\neq 1$, tenemos que

$$d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y))=2.$$

Caso 2.b. Si $d_{D_1}(x',x)>2$ y $d_{D_2}(y',y)>2$ o $d_{D_1}(x',x)=1$ y $d_{D_2}(y',y)=1$.

Sean x_1 y y_1 vértices de D_1 y D_2, respectivamente, tales que

i) $(x',x_1)\in F(D_1)$ (si $d_{D_1}(x',x)=1$, entonces $x_1=x$), y

ii) $(y_1,y)\in F(D_2)$ (si $d_{D_2}(y',y)=1$, entonces $y_1=y'$).

De donde se sigue que $((x',y'),(x_1,y_1))\in F(D_1\otimes D_2)$ y $((x_1,y_1),(x,y))\in F(D_1\otimes D_2)$, esto es, $d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x_1,y_1))=1$ y $d_{D_1\otimes D_2}((x_1,y_1),(x,y))=1$.

Por lo que

$$d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y))\leq d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x_1,y_1))+d_{D_1\otimes D_2}((x_1,y_1),(x,y))=2.$$

Por lo anterior y usando las hipótesis, tenemos que $d_{D_1\otimes D_2}((x',y'),(x,y))=2$. ■

Proposición 2.2. $d_{D_1+D_2}((x',y'),(x,y)) = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y)$.

Demostración. Supongamos que $d_{D_1}(x',x) = \ell_1$ y $d_{D_2}(y',y) = \ell_2$. De donde tenemos que existen T_1 una $x'x$-trayectoria dirigida en D_1 de longitud $\ell(T_1) = d_{D_1}(x',x) = \ell_1$ y T_2 una $y'y$-trayectoria dirigida de longitud $\ell(T_2) = d_{D_2}(y',y) = \ell_2$ en D_2, de la siguiente forma:

$$T_1 = (x', x_1, x_2, \ldots, x_{\ell_1-1}, x) \text{ y}$$

$$T_2 = (y', y_1, y_2, \ldots, y_{\ell_2-1}, y).$$

Por la definición de suma cartesiana tenemos que:

$$C = ((x',y'),(x_1,y'),\ldots,(x_{\ell_1-1},y'),(x,y'),(x,y_1),\ldots,(x,y_{\ell_2-1}),(x,y))$$

es un $(x',y')\,(x,y)$-camino dirigido en $D_1 + D_2$ de longitud $\ell_1 + \ell_2$.

Sea α una trayectoria dirigida de (x',y') a (x,y) en $D_1 + D_2$ de la forma:

$$\alpha = \left((x',y'),(\overline{x}_1,\overline{y}_1),(\overline{x}_2,\overline{y}_2),\ldots,(\overline{x}_{p-1},\overline{y}_{p-1}),(x,y)\right)$$

tal que $\ell(\alpha) = d_{D_1+D_2}((x',y'),(x,y)) = p < \ell_1 + \ell_2$.

Por la definición de suma cartesiana y de proyección tenemos que:

$$\mathrm{Pr}_{x_1}(\alpha) = \left(x', \overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_{r-1}}, x\right)$$

es un $x'x$-camino dirigido en D_1 y

$$\mathrm{Pr}_{x_2}(\alpha) = (y', \overline{y}_{j_1}, \ldots, \overline{y}_{j_{s-1}}, y)$$

es un $y'y$-camino dirigido en D_2, donde $r + s \leq p$, entonces existe un camino dirigido de (x',y') a (x,y) en $D_1 + D_2$ de longitud $r + s$ de la forma:

$$C' = ((x',y'),(\overline{x}_{i_1},y'),\ldots,(\overline{x}_{i_{r-1}},y'),(x,y'),(x,\overline{y}_{j_1}),\ldots,(x,\overline{y}_{j_{s-1}}),(x,y)).$$

Por lo que $r+s \leq p < \ell_1+\ell_2$, esto es, $r < \ell_1$ o $s < \ell_2$, contradicción, ya que $\ell_1 = d_D(x',x)$ y $\ell_2 = d_D(y',y)$, es decir, $\ell_1 \leq r$ y $\ell_2 \leq s$.

Por lo tanto $d_{D_1+D_2}((x',y'),(x,y)) = \ell_1 + \ell_2 = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y)$. ■

Proposición 2.3. $d_{D_1 \cdot D_2}((x',y'),(x,y)) = \max(d_{D_1}(x',x), d_{D_2}(y',y))$.

Demostración. Supongamos que $\max(d_{D_1}(x',x), d_{D_2}(y',y)) = d_{D_2}(y',y) = \ell_2$. Consideremos una trayectoria dirigida α de longitud mínima de (x',y') a (x,y) en $D_1 \cdot D_2$, tal que $\ell(\alpha) = d_{D_1 \bullet D_2}((x',y'),(x,y))$, de la siguiente forma:

$$\alpha = ((x',y'),(x_1,y_1),\ldots,(x_{\ell-1},y_{\ell-1}),(x,y)), \text{ donde } \ell < \ell_2.$$

Por la definición de producto normal y de proyección tenemos que:

$$\mathrm{Pr}_{x_2}(\alpha) = (y', y_1, \ldots, y_{\ell-1}, y)$$

es un $y'y$-camino dirigido en D_2.

De donde obtenemos dos posibles casos:

i) $(y', y_1, \ldots, y_{\ell-1}, y)$ es una $y'y$-trayectoria dirigida en D_2 de longitud mínima y

ii) $\left(y', y_{j_1}, \ldots, y_{j_{t-1}}, y\right)$ es una $y'y$-trayectoria dirigida en D_2 de longitud mínima, donde $t < \ell$.

De (i) se sigue que existe una trayectoria dirigida en D_2 de y' a y de longitud $\ell < \ell_2$, contradicción, porque $\ell_2 = d_{D_2}(y',y)$, es decir, $\ell_2 \leq \ell$. De (ii) se sigue que existe una trayectoria en D_2 de y' a y de longitud $t < \ell < \ell_2$, contradicción, porque $\ell_2 = d_{D_2}(y',y)$, es decir, $\ell_2 \leq t$.

Supongamos ahora que $\max(d_{D_1}(x',x), d_{D_2}(y',y)) = d_{D_1}(x',x) = \ell_1$, consideremos una trayectoria dirigida α de (x',y') a (x,y) en $D_1 \cdot D_2$, tal que: $\alpha = ((x',y'),(x_1,y_1),\ldots,(x_{\ell-1},y_{\ell-1}),(x,y))$ con $\ell(\alpha) = d_{D_1 \cdot D_2}((x',y'),(x,y))$ y $\ell < \ell_1$.

Por la definición de producto normal y de proyección tenemos que:

$$\mathrm{Pr}_{x_1}(\alpha) = (x', x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x)$$

es un $x'x$-camino dirigido en D_1.

De donde obtenemos dos posibles casos:

i) $(x', x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x)$ es una $x'x$-trayectoria dirigida en D_1 de longitud mínima y

ii) $\left(x', x_{i_1}, \ldots, x_{i_{s-1}}, x\right)$ es una $x'x$-trayectoria dirigida en D_1 de longitud mínima, donde $s < \ell$.

De (i) se sigue que existe una trayectoria dirigida en D_1 de x' a x de longitud $\ell < \ell_1$, contradicción, porque $\ell_1 = d_{D_1}(x', x)$, es decir, $\ell_1 \leq \ell$. De (ii) se sigue que existe una trayectoria dirigida en D_1 de x' a x de longitud $s < \ell < \ell_1$, contradicción, porque $\ell_1 = d_{D_1}(x', x)$, es decir, $\ell_1 \leq t$.

Por lo tanto $d_{D_1 \cdot D_2}((x', y'), (x, y)) = \max(d_{D_1}(x', x), d_{D_2}(y', y))$. ■

2.3 (k,ℓ)-núcleos en la digráfica $D_1 \otimes D_2$.

Dadas dos digráficas fuertemente conexas D_1 y D_2 con (k_1,ℓ_1)-núcleo y (k_2,ℓ_2)-núcleo, respectivamente. Encontraremos el (k,ℓ)-núcleo de la disyunción excluyente de D_1 y D_2, denotada por $D_1 \otimes D_2$, usando los (k,ℓ)-núcleos de las digráficas a partir de las cuales se construyó. Para lo cual demostraremos dos teoremas, basándonos en la *Proposición* 2.1 de la sección anterior.

Sean D_i digráficas fuertemente conexas, ℓ_i y k_i números naturales que satisfacen las siguientes condiciones: $\ell_i \geq 1, k_i \geq 2$ con $i = 1,2$. Denotamos por $N_D(k,\ell)$ al (k,ℓ)-núcleo de una digráfica D.

Teorema 2.1. $N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2) = N_{D_1 \otimes D_2}(2,2)$.

Demostración. Primero demostraremos que el conjunto $N = N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2)$ satisface la condición (a) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 \otimes D_2$, para $k = 2$, es decir, que para todo $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, tenemos que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) \geq 2$.

Sean $x,x' \in N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ y $y,y' \in N_{D_2}(k_2,\ell_2)$, esto es, $d_{D_1}(x',x) \geq k_1 > 1$ y $d_{D_2}(y',y) \geq k_2 > 1$. Por la *Proposición* 2.1 tenemos que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) = 2$. Esto demuestra que el conjunto N satisface que para todo par de vértices en N, la distancia entre ellos es mayor o igual a 2.

Ahora demostremos que N satisface la condición (b) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 \otimes D_2$, con $\ell = 2$, es decir, que para todo $(x',y') \notin N$, existe $(x,y) \in N$, tal que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) \leq 2$.

Por la *Proposición* 2.1, $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) \leq 2$ para todo $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq V(D_1) \times V(D_2)$. En particular se cumple que para todo $(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \setminus N$ existe $(x,y) \in N$ tal que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) \leq 2$. Por lo tanto el conjunto N satisface que para todo vértice $(x',y') \notin N$, existe un vértice $(x,y) \in N$, tal que la distancia de (x',y') a (x,y) es menor o igual a 2. ∎

Teorema 2.2. Si una digráfica D_1 satisface la condición (c1) o una digráfica D_2 satisface la condición (c2), entonces $N_{D_1}(k_1,1) \times N_{D_2}(k_2,1) = N_{D_1 \otimes D_2}(2,1)$, donde

c1) Para todo $x' \in V(D_1) \backslash N_{D_1}(k_1,1)$, existe $x \in N_{D_1}(k_1,1)$ tal que $d_{D_1}(x',x) \neq 1$.

c2) Para todo $y' \in V(D_2) \backslash N_{D_2}(k_2,1)$, existe $y \in N_{D_2}(k_2,1)$ tal que $d_{D_2}(y',y) \neq 1$.

Demostración. Del *Teorema* 2.1 se sigue que $N = N_{D_1}(k_1,1) \times N_{D_2}(k_2,1)$ satisface la condición (a) en $D_1 \otimes D_2$ para $k=2$, es decir, que para todo $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, tenemos que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) \geq 2$. Demostremos ahora que N satisface la condición (b), para $\ell = 1$, es decir, que para todo $(x',y') \in N$, existe $(x,y) \in N$, tal que $d_{D_1 \otimes D_2}((x',y'),(x,y)) = 1$. Sea $(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \setminus N$.

Construyamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \notin N_{D_1}(k_1,1) \text{ y } y' \in N_{D_2}(k_2,1)\},$$

$$B = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \notin N_{D_1}(k_1,1) \text{ y } y' \notin N_{D_2}(k_2,1)\},$$

$$C = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \in N_{D_1}(k_1,1) \text{ y } y' \notin N_{D_2}(k_2,1)\}.$$

Consideremos los siguientes casos:

i) Si $(x',y') \in A$, entonces $x' \notin N_{D_1}(k_1,1)$ y $y' \in N_{D_2}(k_2,1)$, por lo tanto existe $x \in N_{D_1}(k_1,1)$ tal que $d_{D_1}(x',x) = 1$.

Consideremos $y \in N_{D_2}(k_2, 1)$, entonces $d_{D_2}(y', y) \geq k_2 > 1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.1 tenemos que $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) = 1$.

ii) Si $(x', y') \in B$, entonces $x' \notin N_{D_1}(k_1, 1)$ y $y' \notin N_{D_2}(k_2, 1)$. Si suponemos que la digráfica D_1 satisface la condición (c1), entonces existe $x \in N_{D_1}(k_1, 1)$, tal que $d_{D_1}(x', x) \neq 1$. Además, como $y' \notin N_{D_2}(k_2, 1)$, tenemos que existe $y \in N_{D_2}(k_2, 1)$ tal que $d_{D_2}(y', y) = 1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.1 se sigue que $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) = 1$. Si suponemos que la digráfica D_2 satisface la condición (c2), entonces existe $y \in N_{D_2}(k_2, 1)$, tal que $d_{D_2}(y', y) \neq 1$. Además, como $x' \notin N_{D_1}(k_1, 1)$, tenemos que existe $x \in N_{D_1}(k_1, 1)$ tal que $d_{D_1}(x', x) = 1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.1 se tiene que $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) = 1$.

iii) Si $(x', y') \in C$, entonces $x' \in N_{D_1}(k_1, 1)$ y $y' \notin N_{D_2}(k_2, 1)$, por lo que existe $y \in N_{D_2}(k_2, 1)$ tal que $d_{D_2}(y', y) = 1$.

Consideremos $x \in N_{D_1}(k_1, 1)$, entonces $d_{D_1}(x', x) \geq k_1 > 1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.1 tenemos que $d_{D_1 \otimes D_2}((x', y'), (x, y)) = 1$. ■

En la *Figura* 2.5 se muestran dos digráficas fuertemente conexas, D_1 y D_2. Observemos además que $N_1 = \{p, s\}$ es un $(3, 2)$-núcleo de D_1, es decir, N_1 es un 3-núcleo de D_1 y $N_2 = \{u\}$ es un $(2, 2)$-núcleo de D_2. En la *Figura* 2.6 tenemos la digráfica disyunción excluyente $D_1 \otimes D_2$ y por el *Teorema* 2.1, el conjunto $N_1 \times N_2 = N = \{pu, su\}$ es un $(2, 2)$-núcleo de $D_1 \otimes D_2$.

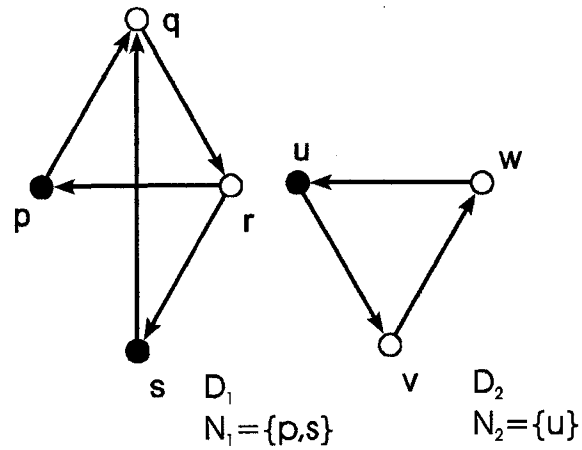


Figura 2.5. Digráficas D_1 y D_2

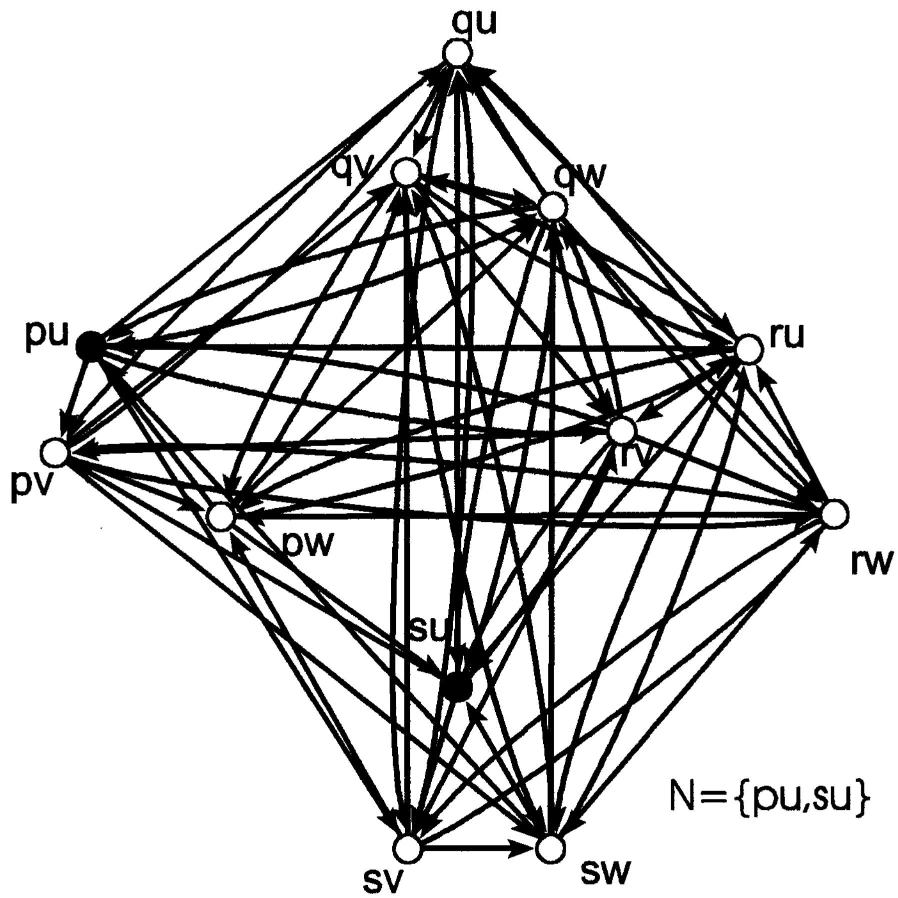


Figura 2.6. Digráfica $D_1 \otimes D_2$

2.4 (k,ℓ)-núcleos en la digráfica $D_1 + D_2$.

Dadas dos digráficas D_1 y D_2 con (k_1,ℓ_1)-núcleo y (k_2,ℓ_2)-núcleo, respectivamente. En esta sección encontraremos el (k,ℓ)-núcleo de la suma cartesiana de D_1 y D_2, denotada por $D_1 + D_2$. Para lo cual demostraremos algunos resultados, utilizando la *Proposición* 2.2 de la *sección* 2.1.

Sean D_i digráficas fuertemente conexas, ℓ_i y k_i números naturales que satisfacen las siguientes condiciones: $\ell_i \geq 1, k_i \geq 2$ con $i = 1,2$. Recordemos que denotamos por $N_D(k,\ell)$ al (k,ℓ)-núcleo de una digráfica D.

Teorema 2.3. $N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2) = N_{D_1+D_2}(\min(k_1,k_2), \ell_1+\ell_2)$.

Demostración. Demostremos que $N = N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2)$ satisface la condición (a) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 + D_2$ para $k = \min(k_1,k_2)$, es decir, que para todo $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, tenemos que $d_{D_1+D_2}((x',y'),(x,y)) \geq k = \min(k_1,k_2)$.

Sean $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq V(D_1+D_2)$ tales que $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, por lo que $\{x',x\} \subseteq N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ y $\{y',y\} \subseteq N_{D_2}(k_2,\ell_2)$.

Consideremos los siguientes casos:

i) $x' = x$ y $y' \neq y$. Por la *Proposición* 2.2 y puesto que $d_{D_2}(y',y) \geq k_2$, por ser N_{D_2} un (k_2,ℓ_2)-núcleo de D_2, tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}((x',y'),(x,y)) = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y) \geq k_2 \geq \min(k_1,k_2).$$

ii) $x' \neq x$ y $y' = y$. Por la *Proposición* 2.2 y puesto que $d_{D_1}(x',x) \geq k_1$, por ser N_{D_1} un (k_1,ℓ_1)-núcleo de D_1, tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}\left((x',y'),(x,y)\right) = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y) \geq k_1 \geq \min(k_1,k_2).$$

iii) $x' \neq x$ y $y' \neq y$. Por la *Proposición* 2.2 y por ser N_{D_1} y N_{D_2},(k_1,ℓ_1) y (k_2,ℓ_2)-núcleos de D_1 y D_2, respectivamente, tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}\left((x',y'),(x,y)\right) = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y) \geq k_1 + k_2 \geq \min(k_1,k_2).$$

Por lo tanto N satisface que para todo par de vértices en N, la distancia entre ellos es mayor o igual a k.

Ahora demostremos que $N = N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2)$ satisface la condición (b) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 + D_2$ para $\ell = \ell_1 + \ell_2$, es decir, que para todo $(x',y') \notin N$, existe $(x,y) \in N$, tal que $d_{D_1+D_2}\left((x',y'),(x,y)\right) \leq \ell = \ell_1 + \ell_2$.

Sea $(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \setminus N$. Construyamos los conjuntos A, B y C.

$A = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \notin N_{D_1}(k_1,\ell_1) \text{ y } y' \in N_{D_2}(k_2,\ell_2)\}$,

$B = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \notin N_{D_1}(k_1,\ell_1) \text{ y } y' \notin N_{D_2}(k_2,\ell_2)\}$,

$C = \{(x',y') \in V(D_1) \times V(D_2) \mid x' \in N_{D_1}(k_1,\ell_1) \text{ y } y' \notin N_{D_2}(k_2,\ell_2)\}$.

Consideremos los siguientes casos:

i) Si $(x',y') \in A$, entonces $x' \notin N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ y $y' \in N_{D_2}(k_2,\ell_2)$, por lo tanto existe $x \in N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ tal que $d_{D_1}(x',x) \leq \ell_1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.2 tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}\left((x',y'),(x,y')\right) = d_{D_1}(x',x) + d_{D_2}(y',y') = d_{D_1}(x',x) \leq \ell_1 \leq \ell_1 + \ell_2,$$

con $(x,y') \in N$.

ii) Si $(x',y') \in B$, entonces $x' \notin N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ y $y' \notin N_{D_2}(k_2,\ell_2)$, por lo tanto existe $x \in N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ tal que $d_{D_1}(x',x) \leq \ell_1$ y existe $y \in N_{D_2}(k_2,\ell_2)$ tal que $d_{D_2}(y',y) \leq \ell_2$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.2 tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}\left(\left(x', y'\right), \left(x, y\right)\right) = d_{D_1}\left(x', x\right) + d_{D_2}\left(y', y\right) \leq \ell_1 + \ell_2,$$

con $(x, y) \in N$.

iii) Si $(x', y') \in C$, entonces $x' \in N_{D_1}(k_1, \ell_1)$ y $y' \notin N_{D_2}(k_2, \ell_2)$, por lo tanto existe $y \in N_{D_2}(k_2, \ell_2)$ tal que $d_{D_2}(y', y) \leq \ell_2$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.2 tenemos que:

$$d_{D_1+D_2}\left(\left(x', y'\right), \left(x', y\right)\right) = d_{D_1}\left(x', x'\right) + d_{D_2}\left(y', y\right) = d_{D_2}\left(y', y\right) \leq \ell_2 \leq \ell_1 + \ell_2,$$

con $(x', y) \in N$.

Por lo tanto N satisface que para todo $(x', y') \notin N$, existe $(x, y) \in N$, tal que $d_{D_1+D_2}\left(\left(x', y'\right), \left(x, y\right)\right) \leq \ell$. ■

Corolario 2.3.1. $N_{D_1}(k_1, 1) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1+D_2}(2, 2)$,

$N_{D_1}(k, r) \times N_{D_2}(k, \ell - r) = N_{D_1+D_2}(k, \ell)$ para $k \geq 2, \ell > r, r \geq 1$.

Demostración. Por el *Teorema* 2.3 tenemos que

$$N_{D_1}(k_1, 1) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1+D_2}\left(\min\left(k_1, 2\right), 1 + 1\right) = N_{D_1+D_2}(2, 2),$$

para $k_1 \geq 2$. Además, se tiene que

$$N_{D_1}(k, r) \times N_{D_2}(k, \ell - r) = N_{D_1+D_2}\left(\min\left(k, k\right), r + (\ell - r)\right) = N_{D_1+D_2}(k, \ell)$$

para $k \geq 2, \ell > r, r \geq 1$. ■

En la *Figura* 2.5 mostramos las digráficas D_1 y D_2, a partir de las cuales construimos la digráfica $D_1 + D_2$, que se muestra en la *Figura* 2.7. Por el *Teorema* 2.3, el conjunto $N_1 \times N_2 = N = \{pu, su\}$ es un $(2, 4)$-núcleo de $D_1 + D_2$. Donde $N_1 = \{p, s\}$ es un $(3, 2)$-núcleo de D_1 y $N_2 = \{u\}$ es un $(2, 2)$-núcleo de D_2.

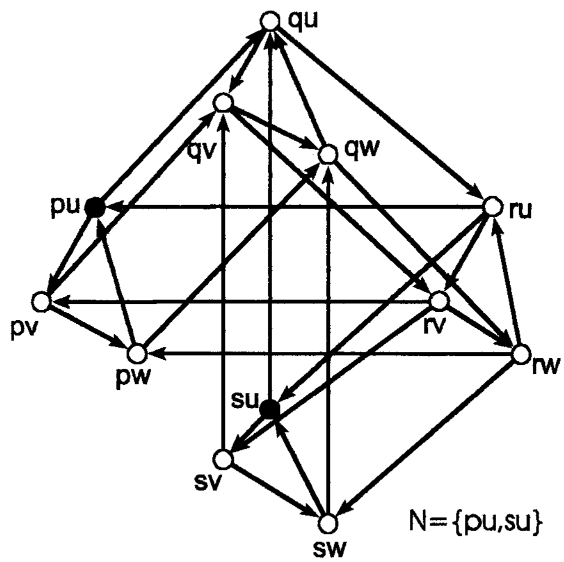


Figura 2.7. Digráfica $D_1 + D_2$

2.5 (k,ℓ)-núcleos en la digráfica $D_1 \cdot D_2$.

Dadas dos digráficas fuertemente conexas, D_1 y D_2 con (k_1,ℓ_1)-núcleo y (k_2,ℓ_2)-núcleo, respectivamente, encontraremos el (k,ℓ)-núcleo de la digráfica producto normal de D_1 y D_2, denotada por $D_1 \cdot D_2$. Para lo cual usaremos la *Proposición* 2.3, demostrada en la *sección* 2.1. Sean D_i digráficas fuertemente conexas, ℓ_i y k_i números naturales que satisfacen las siguientes condiciones: $\ell_i \geq 1, k_i \geq 2$ con $i = 1,2$. Denotamos por $N_D(k,\ell)$ al (k,ℓ)-núcleo de una digráfica D.

Teorema 2.4. $N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2) = N_{D_1 \cdot D_2}(\min(k_1,k_2), \max(\ell_1,\ell_2))$.

Demostración. Demostremos que $N = N_{D_1}(k_1,\ell_1) \times N_{D_2}(k_2,\ell_2)$ satisface la condición (a) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 \cdot D_2$ para $k = \min(k_1,k_2)$, es decir, que para todo $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, tenemos que $d_{D_1 \cdot D_2}((x',y'),(x,y)) \geq k = \min(k_1,k_2)$.

Sean $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq V(D_1 \cdot D_2)$ tales que $\{(x',y'),(x,y)\} \subseteq N$, por lo que $\{x',x\} \subseteq N_{D_1}(k_1,\ell_1)$ y $\{y',y\} \subseteq N_{D_2}(k_2,\ell_2)$.

Consideremos los siguientes casos:

i) $x' = x$ y $y' \neq y$. Por la *Proposición* 2.3 y puesto que $d_{D_2}(y',y) \geq k_2$, por ser N_{D_2} un (k_2,ℓ_2)-núcleo de D_2, tenemos que:
$d_{D_1 \cdot D_2}((x',y'),(x,y)) = \max(d_{D_1}(x',x), d_{D_2}(y',y)) = d_{D_2}(y',y) \geq k_2 \geq \min(k_1,k_2)$.

ii) $x' \neq x$ y $y' = y$. Por la *Proposición* 2.3 y puesto que $d_{D_1}(x',x) \geq k_1$, por ser N_{D_1} un (k_1,ℓ_1)-núcleo de D_1, tenemos que:
$d_{D_1 \cdot D_2}((x',y'),(x,y)) = \max(d_{D_1}(x',x), d_{D_2}(y',y)) = d_{D_1}(x',x) \geq k_1 \geq \min(k_1,k_2)$.

iii) $x' \neq x$ y $y' \neq y$. Por la *Proposición* 2.3 y por ser N_{D_1} y N_{D_2}, (k_1,ℓ_1) y (k_2,ℓ_2)-núcleos de D_1 y D_2, respectivamente, tenemos que:

$$d_{D_1 \cdot D_2}\left(\left(x',y'\right),\left(x,y\right)\right) = \max(d_{D_1}\left(x',x\right), d_{D_2}\left(y',y\right)) \geq \min\left(k_1,k_2\right).$$

Por lo tanto N satisface que para todo par de vértices en N, la distancia entre ellos es mayor o igual a k.

Ahora demostremos que $N = N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right) \times N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)$ satisface la condición (b) de la definición de (k,ℓ)-núcleo en $D_1 \cdot D_2$ para $\ell = \max(\ell_1,\ell_2)$, es decir, que para todo $(x',y') \notin N$, existe $(x,y) \in N$, tal que $d_{D_1 \cdot D_2}\left(\left(x',y'\right),\left(x,y\right)\right) \leq \ell = \max\left(\ell_1,\ell_2\right)$.

Sea $(x',y') \in V\left(D_1\right) \times V\left(D_2\right) \setminus N$. Construyamos los conjuntos A, B y C.

$A = \left\{(x',y') \in V\left(D_1\right) \times V\left(D_2\right) \mid x' \notin N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right) \text{ y } y' \in N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)\right\}$,

$B = \left\{(x',y') \in V\left(D_1\right) \times V\left(D_2\right) \mid x' \notin N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right) \text{ y } y' \notin N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)\right\}$,

$C = \left\{(x',y') \in V\left(D_1\right) \times V\left(D_2\right) \mid x' \in N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right) \text{ y } y' \notin N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)\right\}$.

Consideremos los siguientes casos:

i) Si $(x',y') \in A$, entonces $x' \notin N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right)$ y $y' \in N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)$, por lo tanto existe $x \in N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right)$ tal que $d_{D_1}\left(x',x\right) \leq \ell_1$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.3 tenemos que:

$d_{D_1 \cdot D_2}\left(\left(x',y'\right),\left(x,y'\right)\right) = \max(d_{D_1}\left(x',x\right), d_{D_2}\left(y',y'\right)) = d_{D_1}\left(x',x\right) \leq \ell_1 \leq \max(\ell_1,\ell_2)$, con $(x,y') \in N$.

ii) Si $(x',y') \in B$, entonces $x' \notin N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right)$ y $y' \notin N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)$, por lo tanto existe $x \in N_{D_1}\left(k_1,\ell_1\right)$ tal que $d_{D_1}\left(x',x\right) \leq \ell_1$ y existe $y \in N_{D_2}\left(k_2,\ell_2\right)$ tal que $d_{D_2}\left(y',y\right) \leq \ell_2$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.3 tenemos que:

$$d_{D_1 \cdot D_2}\left(\left(x',y'\right),\left(x,y\right)\right) = \max(d_{D_1}\left(x',x\right), d_{D_2}\left(y',y\right)) \leq \max(\ell_1,\ell_2),$$

con $(x,y) \in N$.

iii) Si $(x', y') \in C$, entonces $x' \in N_{D_1}(k_1, \ell_1)$ y $y' \notin N_{D_2}(k_2, \ell_2)$, por lo tanto existe $y \in N_{D_2}(k_2, \ell_2)$ tal que $d_{D_2}(y', y) \leq \ell_2$. Por lo tanto, usando la *Proposición* 2.3 tenemos que:

$d_{D_1 \cdot D_2}((x', y'), (x', y)) = \max(d_{D_1}(x', x'), d_{D_2}(y', y)) = d_{D_2}(y', y) \leq \ell_2 \leq \max(\ell_1, \ell_2)$, con $(x', y) \in N$.

Por lo tanto N satisface que para todo $(x', y') \notin N$, existe $(x, y) \in N$, tal que $d_{D_1 \cdot D_2}((x', y'), (x, y)) \leq \ell$. ■

Corolario 2.4.1. $N_{D_1}(k, 1) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 1)$,

$N_{D_1}(k, 2) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 2)$,

$N_{D_1}(k, i) \times N_{D_2}(2, 2) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 2)$ para $i = 1, 2$,

$N_{D_1}(k, \ell) \times N_{D_2}(k, \ell) = N_{D_1 \cdot D_2}(k, \ell)$ para $k \geq 2, \ell \geq 1$.

Demostración. Usando el *Teorema* 2.4 tenemos que

$N_{D_1}(k, 1) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1 \cdot D_2}(\min(k, 2), \max(1, 1)) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 1)$ para $k \geq 2$,

$N_{D_1}(k, 2) \times N_{D_2}(2, 1) = N_{D_1 \cdot D_2}(\min(k, 2), \max(2, 1)) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 2)$ para $k \geq 2$,

$N_{D_1}(k, i) \times N_{D_2}(2, 2) = N_{D_1 \cdot D_2}(\min(k, 2), \max(i, 2)) = N_{D_1 \cdot D_2}(2, 2)$ para $k \geq 2$ e $i = 1, 2$,

$N_{D_1}(k, \ell) \times N_{D_2}(k, \ell) = N_{D_1 \cdot D_2}(\min(k, k), \max(\ell, \ell)) = N_{D_1 \cdot D_2}(k, \ell)$ para $k \geq 2$, $\ell \geq 1$. ■

En la *Figura* 2.5 mostramos las digráficas D_1 y D_2, a partir de las cuales construimos la digráfica $D_1 \cdot D_2$, que se muestra en la *Figura* 2.8. Por el *Teorema* 2.4, el conjunto $N_1 \times N_2 = N = \{pu, su\}$ es un $(2,2)$-núcleo de $D_1 \cdot D_2$. Donde $N_1 = \{p, s\}$ es un $(3,2)$-núcleo de D_1 y $N_2 = \{u\}$ es un $(2,2)$-núcleo de D_2.

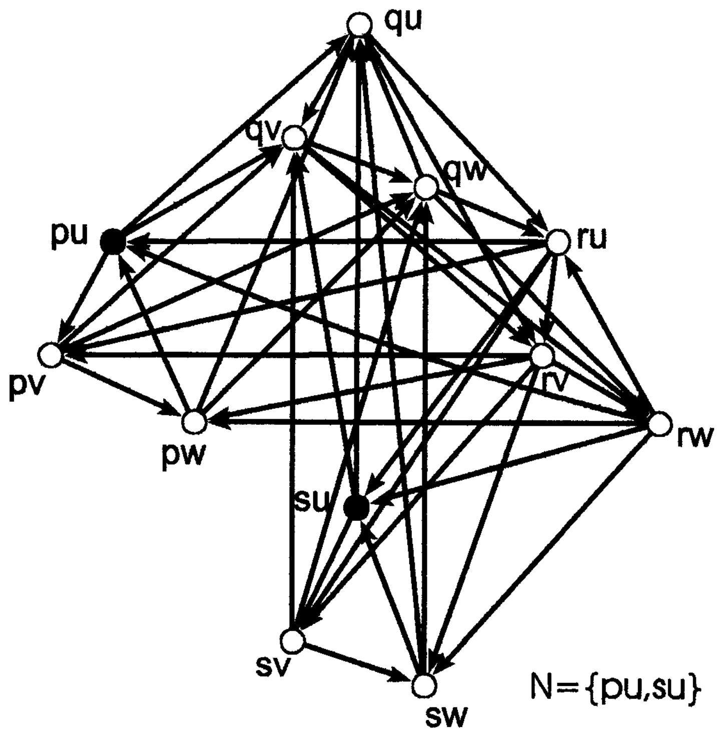


Figura 2.8. Digráfica $D_1 \cdot D_2$

Capítulo 3
k-Núcleos en s-Sistemas.

En este capítulo definiremos el s_0-sistema y el s-sistema, por medio de los cuales construiremos las digráficas $s_0(S_0)$ y $s(S)$ a partir de una digráfica D_0 cualquiera.

Recordemos que en el primer capítulo se definió el k-núcleo de una digráfica, concepto introducido por María Kwasnik en [5], en base al cual se han estudiado condiciones suficientes para la existencia de k-núcleos en digráficas [7], [8], [9]. Así, se buscó una forma de obtener digráficas con k-núcleo a partir de una digráfica con k-núcleo, usando la digráfica $s(S)$ y un corolario que dice que una digráfica D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo. En [10], se prueban dos teoremas que en conjunto proveen dicho corolario, los cuales se verán en la segunda sección, en la que probaremos una serie de resultados útiles en las demostraciones de dichos teoremas.

El primer teorema dice lo siguiente:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, mediante las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construyamos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si existe la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Supongamos además que para cada vértice $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$. Entonces si D_0 tiene un k-núcleo, se tiene que $s(S)$ tiene un k-núcleo.

El segundo teorema de esta sección se enuncia como sigue:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, construyamos la digráfica $s(S)$, mediante las definiciones de s_0-sistema y s-sistema. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si existe la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Entonces si $s(S)$ tiene un k-núcleo, se tiene que D_0 tiene un k-núcleo.

Además, veremos el corolario que resume estos teoremas:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, mediante las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construyamos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si existe la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Supongamos además que para cada vértice $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$. Entonces D_0 tiene un k-núcleo, si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo.

El resultado anterior provee un método para construir, a partir de una digráfica D_0, otra digráfica $s(S)$ tal que D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo, lo cual permite obtener una gran variedad de digráficas con (sin) k-núcleo, teniendo una digráfica cualquiera como una subdigráfica inducida, esto constituye una poderosa herramienta en la construcción de una amplia clase de digráficas con (sin) k-núcleos.

El último teorema concluye que el número de k-núcleos en D_0 es igual al número de k-núcleos en $s(S)$.

En particular, los resultados anteriores se cumplen para digráficas con núcleo, puesto que un núcleo es un k-núcleo con $k = 2$, además para cada vértice $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \geq 2$.

En [6] Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara demostraron el siguiente teorema:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, usando las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construyamos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si existe la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Entonces D_0 tiene un núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un núcleo.

En la última sección del capítulo definiremos las digráficas núcleo perfectas, las núcleo imperfectas críticas, demostraremos que si una digráfica no tiene núcleo, entonces tiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica. Daremos las definiciones de k-núcleo perfecta, k-núcleo imperfecta crítica y probaremos que el resultado anterior se cumple también para k-núcleos, es decir, si una digráfica no tiene k-núcleo, entonces tiene una subdigráfica inducida k-núcleo imperfecta crítica. Además demostraremos que si una digráfica es núcleo imperfecta crítica, entonces es fuertemente conexa. Veremos que este resultado no se cumple para k-núcleos, es decir, si una digráfica es k-núcleo imperfecta crítica, no necesariamente es fuertemente conexa.

Hortensia Galeana Sánchez y Victor Neumann Lara demostraron además el siguiente resultado:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, por medio de las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construyamos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si existe la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Entonces toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene un núcleo si y sólo si toda subdigráfica inducida propia de $s(S)$ tiene un núcleo.

Así, D_0 es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) si y sólo si $s(S)$ es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica).

Lo anterior es de gran importancia, puesto que nos permite generar una amplia clase de digráficas núcleo imperfectas críticas, su relevancia radica en que durante varios años, las únicas digráficas núcleo imperfectas críticas que se conocieron fueron los ciclos impares y las digráficas $\overrightarrow{C}_7(1,2)$ y $\overrightarrow{C}_{11}(1,2,4)$, que se verán en esta sección.

Observaremos además, que si tenemos una digráfica D_0 que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) y construimos su digráfica $s(S)$, veremos que $s(S)$ no necesariamente es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Pero si tenemos una digráfica $s(S)$ k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), entonces la digráfica D_0 es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Lo cual permite generar una amplia clase de digráficas k-núcleo imperfectas críticas, la importancia de este resultado consiste en que durante mucho tiempo sólo se conocían pocos ejemplos de este tipo de digráficas.

3.1 Definiciones.

A continuación daremos las definiciones de s_0-sistema y s-sistema, mediante las cuales construiremos las digráficas $s_0\,(S_0)$ y $s\,(S)$ a partir de una digráfica D_0 dada. En las secciones siguientes nos enfocaremos a encontrar k-núcleos en la digráfica $s\,(S)$ por medio de los k-núcleos de la digráfica D_0, y viceversa.

Definición 3.1. Sea D_0 una digráfica. Un s_0-sistema (sobre D_0) es una cuarteta ordenada $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ con las siguientes propiedades:

i) $U \subseteq V(D_0)$

ii) U, U_+, U_- son conjuntos de vértices con la misma cardinalidad

iii) $V(D_0), U_+, U_-$ son ajenos dos a dos.

Denotaremos por u_- (respectivamente u_+) al elemento de U_- (respectivamente U_+) que corresponde a $u \in U$ para cualquier biyección de u a u_- (respectivamente de u a u_+).

Si $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0-sistema sobre D_0, denotamos como $s_0(S_0)$ a la digráfica definida por:

$$V(s_0(S_0)) = (V(D_0) - U) \cup (U_+ \cup U_-)$$

$$\begin{aligned} F(s_0(S_0)) = {} & F(D_0[V(D_0) - U]) \cup \{(z, u_-) \mid (z, u) \in F(D_0), z \notin U, u \in U\} \\ & \cup \{(u_+, z) \mid (u, z) \in F(D_0), z \notin U, u \in U\} \\ & \cup \{(u_+, v_-) \mid (u, v) \in F(D_0), u \in U, v \in U\}. \end{aligned}$$

En la *Figura* 3.2 se muestra la digráfica $s_0\,(S_0)$, construida a partir de la digráfica D_0 de la *Figura* 3.1, donde $U = \{a, c, f, g\}$, por lo que $U_+ = \{a_+, c_+, f_+, g_+\}$ y $U_- = \{a_-, c_-, f_-, g_-\}$. Por lo tanto $V\,(s_0\,(S_0)) = \{b, d, e, h, a_+, c_+, f_+, g_+, a_-, c_-, f_-, g_-\}$.

Como $(a,b) \in F(D_0)$ con $a \in U$ y $b \in V(D_0) - U$, por definición de $s_0(S_0)$, tenemos que $(a_+, b) \in F(s_0(S_0))$. Puesto que $(c,g) \in F(D_0)$ con $\{c,g\} \subseteq U$, por definición de $s_0(S_0)$, se tiene que $(c_+, g_-) \in F(s_0(S_0))$. Como $(e,d) \in F(D_0)$ con $\{d,e\} \subseteq V(D_0) - U$, por definición de $s_0(S_0)$, tenemos que $(e,d) \in F(s_0(S_0))$. Puesto que $(h,a) \in F(D_0)$ con $a \in U$ y $h \in V(D_0) - U$, por definición de $s_0(S_0)$, se tiene que $(h, a_-) \in F(s_0(S_0))$. Así, como $F(D_0) = \{(b,c), (e,d), (h,a), (h,g), (a,b), (c,d), (f,e), (g,b), (c,g), (g,f)\}$, entonces $F(s_0(S_0)) = \{(b,c), (e,d), (h,a_-), (h,g_-), (a_+,b), (c_+,d), (f_+,e), (g_+,b), (c_+,g_-), (g_+,f_-)\}$.

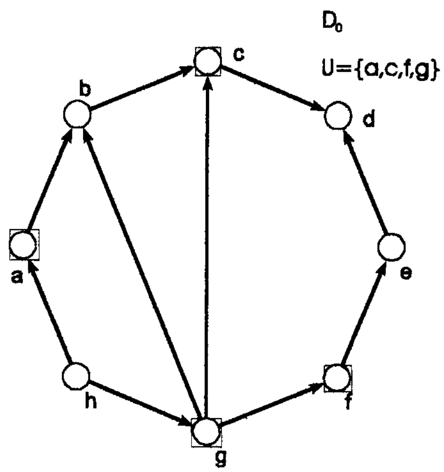


Figura 3.1. Digráfica D_0

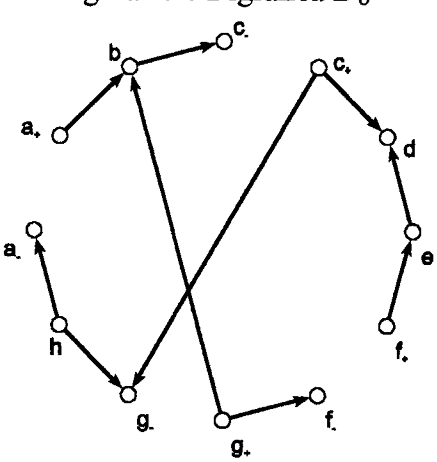


Figura 3.2. Digráfica $s_0(S_0)$

Definición 3.2. Un s-sistema es una cuarteta ordenada $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ donde:

i) $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$ es un s_0-sistema.

ii) $\mathcal{U}_+$ y $\mathcal{U}_-$ son digráficas.

iii) $V(\mathcal{U}_+) = U_+$ y $V(\mathcal{U}_-) = U_-$

iv) $\beta = \{\beta_u \mid u \in U\}$ es una colección de trayectorias dirigidas de longitud $\equiv 0 \bmod k$, ajenas dos a dos, y tales que $V(\beta_u) \cap V(s_0(S_0)) = \{u_+, u_-\}$.

Si $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ es un s-sistema, entonces $s(S)$ denota la digráfica dada por:

$$s(S) = s_0(S_0) \cup \bigcup_{u \in U} \beta_u \cup \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$$

Nótese que si $U = \emptyset$, entonces $s_0(S_0) \cong s(S) \cong D_0$. Observemos además que $D_0 - U$ es una subdigráfica de D_0 y $s(S)$.

En la *Figura* 3.3 se muestra la digráfica $s\,(S)$, construida a partir de las digráficas D_0 y $s_0\,(S_0)$ de las *Figuras* 3.1 y 3.2, respectivamente, donde $U = \{a, c, f, g\}$, $U_+ = \{a_+, c_+, f_+, g_+\}$ y $U_- = \{a_-, c_-, f_-, g_-\}$. Notemos que $V\,(\mathcal{U}_-) = \{a_-, c_-, f_-, g_-\}$ y $F(\mathcal{U}_-) = \emptyset$, $V\,(\mathcal{U}_+) = \{a_+, c_+, f_+, g_+\}$ y $F(\mathcal{U}_+) = \{(a_+, f_+)\,, (c_+, g_+)\,, (g_+, f_+)\,, (g_+, a_+)\}$. Además las β_u trayectorias dirigidas tienen longitud $\equiv 0 \pmod k$ con $k = 3$, las cuales son: $\beta_a = (a_- = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = a_+)$, $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3 = c_+)$, $\beta_f = (f_- = f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 = f_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2, g_3 = g_+)$ y $\beta = \{\beta_a, \beta_c, \beta_f, \beta_g\}$.

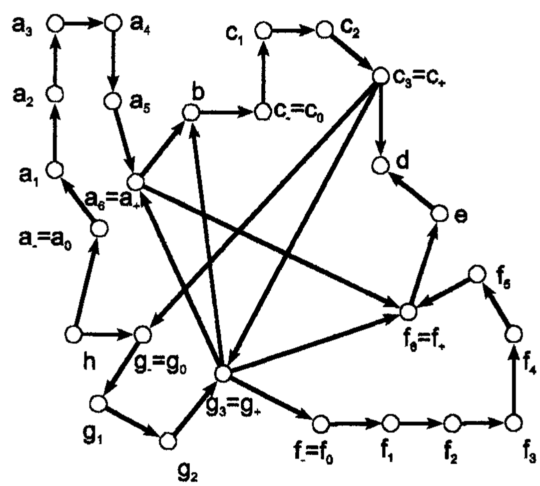


Figura 3.3. Digráfica $s(S)$ con $k = 3$

Definición 3.3. Definimos la función: $p : V(s(S)) \to V(D_0)$ donde:

$$p(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin U \\ u, & \text{si } x \in \beta_u \text{ para alguna } u \in U. \end{cases}$$

De la *Figura* 3.3 y como $b, d, e, h \notin U$ tenemos que $p(b) = b$, $p(d) = d$, $p(e) = e$, $p(h) = h$. Como $\{a, c, f, g\} \subseteq U$, entonces $p(a_-) = p(a_1) = \ldots = p(a_+) = a$, $p(c_-) = p(c_1) = p(c_2) = p(c_+) = c$, $p(f_-) = p(f_1) = \ldots = p(f_+) = f$, $p(g_-) = p(g_1) = p(g_2) = p(g_+) = g$.

3.2 k-Núcleos en la digráfica $s(S)$

Veremos que, mediante una digráfica D_0 que tiene un k-núcleo, podemos encontrar un k-núcleo en la digráfica $s(S)$ construida a partir de D_0, además encontraremos un k-núcleo en D_0, usando un k-núcleo de $s(S)$.

Tomemos una digráfica D_0 y $U \subseteq V(D_0)$. Usando las definiciones de s_0 y s-sistema, construyamos las digráficas $s_0(S_0)$ y $s(S)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Supongamos además que para cada $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$. Demostraremos que bajo estas hipótesis, si D_0 tiene un k-núcleo, entonces $s(S)$ tiene un k-núcleo.

Luego, tomemos una digráfica D_0 y $U \subseteq V(D_0)$. Usando las definiciones de s_0 y s-sistema,construyamos las digráficas $s_0(S_0)$ y $s(S)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Demostraremos que si $s(S)$ tiene un k-núcleo, entonces D_0 tiene un k-núcleo.

Además, demostraremos un corolario que concluye, bajo las hipótesis del primer teorema, que una digráfica D_0 tiene k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene k-núcleo. A partir de este resultado, veremos que en particular una digráfica D_0 tiene núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene núcleo.

Mostraremos que el número de k-núcleos en D_0 es igual al número de k-núcleos en $s(S)$, lo cual se cumple también para digráficas con núcleo.

Para la demostración de estos teoremas utilizaremos los resultados que se probarán a continuación.

Lema 3.1. Si $\beta = (0, 1, \ldots, nk)$ con $n \geq 1$ es una $0nk$-trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$, entonces:

1. $N_0 = \{nk, (n-1)k, \ldots, k, 0\}$ es el único k-núcleo de β,

2. $N_1 = \{nk - (k - r) = (n-1)k + r, (n-2)k + r, \ldots, (n-n)k + r = r\}$ es el único k-núcleo de $\beta - \{nk, nk-1, nk-2, \ldots, nk - [(k-r) - 1]\}$ con $r \geq 1$,

3. La longitud de la $(0, \beta, r)$-trayectoria dirigida es r.

4. La longitud de la $(nk - (k-r), \beta, nk)$-trayectoria dirigida es $k - r$.

Demostración.

1. Sea $\beta = (0, 1, \ldots, nk)$ con $n \geq 1$ una $0nk$-trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$. Consideremos el vértice de exgrado cero en β, nk; y hagamos $N_n = \{nk\}$. Después tomemos el vértice x en β tal que $d_\beta(x, nk) = k$, es decir, $(n-1)k$, y hagamos $N_{n-1} = N_n \cup \{(n-1)k\} = \{nk, (n-1)k\}$.
A continuación tomemos el vértice x en β tal que $d_\beta(x, (n-1)k) = k$, es decir, $(n-2)k$, y hagamos $N_{n-2} = N_{n-1} \cup \{(n-2)k\} = \{nk, (n-1)k, (n-2)k\}$. Siguiendo con este proceso obtenemos un conjunto de vértices $N_0 = N_1 \cup \{0\} = \{nk, (n-1)k, \ldots, k, 0\}$, el cual es un conjunto k-independiente, porque todos sus elementos se encuentran a distancia k, y además es k-absorbente puesto que para todo vértice $v \in (V(\beta) - N_0)$ existe $u \in N_0$ tal que $d_\beta(v, u) \leq k - 1$, por construcción. Por lo que N_0 es k-núcleo de β.
Dado que $\delta^+_\beta(nk) = 0$, entonces $N_0 = \{nk, (n-1)k, \ldots, k, 0\}$ es el único k-núcleo de β.

2. Ahora tomemos la trayectoria $\beta' = \beta - \{nk, nk-1, nk-2, \ldots, nk - [(k-r) - 1]\}$ con $r \geq 1$. Consideremos el vértice de exgrado cero en β', $nk - (k - r)$; y hagamos $N_n = \{nk - (k-r)\} = \{(n-1)k + r\}$. Después tomemos el vértice x en β' tal que

$d_{\beta'}(x,(n-1)k+r) = k$, es decir, $(n-2)k + r$, y hagamos $N_{n-1} = N_n \cup \{(n-2)k+r\} = \{(n-1)k+r,(n-2)k+r\}$. A continuación tomemos el vértice x en β' tal que $d_{\beta'}(x,(n-2)k+r) = k$, es decir, $(n-3)k+r$, y hagamos $N_{n-2} = N_{n-1} \cup \{(n-3)k+r\} = \{(n-1)k+r,(n-2)k+r,(n-3)k+r\}$.

Siguiendo con este proceso obtenemos un conjunto de vértices $N_1 = N_2 \cup \{(n-n)k+r = r\} = \{(n-1)k+r,(n-2)k+r,\ldots,(n-n)k+r = r\}$, el cual es un conjunto k-independiente, porque todos sus elementos se encuentran a distancia k, y además es k-absorbente ya que para todo vértice $v \in (V(\beta') - N_1)$ existe $u \in N_1$ tal que $d_{\beta'}(v,u) \leq k-1$, por construcción. Por lo que N_1 es k-núcleo de β'. Dado que $\delta^+_{\beta'}(nk-(k-r)) = 0$, entonces $N_1 = \{nk-(k-r) = (n-1)k+r,(n-2)k+r,\ldots,r\}$ es el único k-núcleo de $\beta' = \beta - \{nk, nk-1, nk-2, \ldots, nk-[(k-r)-1]\}$ con $r \geq 1$.

3. Observemos también que $\ell((0,\beta,r)) = d_\beta(0,r) = r$.

4. Además,

$$\ell((nk-(k-r),\beta,nk)) = d_\beta(nk-(k-r),nk) = nk-[nk-(k-r)] = k-r. \blacksquare$$

Lema 3.2. Sea $S = (S_0,\beta,\mathcal{U}_+,\mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0,U,U_+,U_-)$. Supongamos que si $(u_+,v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-,v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u,v) \in F(D_0[U])$. Sean $\{x,y\} \subseteq V(s(S))$, si existe $T = (0 = x,1,2,\ldots,n = y)$ una xy-trayectoria dirigida en $s(S)$, entonces existe una $p(x)p(y)$-trayectoria T' en D_0 tal que $\ell(T') \leq \ell(T)$.

Demostración. Consideremos $T = (0 = x,1,2,\ldots,n = y)$ una xy-trayectoria dirigida en $s(S)$. Sea $M(T) = \{u \in U \mid \beta_u \cap T \neq \emptyset\}$.

Demostremos este lema usando inducción sobre $|M(T)|$.

- Si $|M(T)| = 0$ implica que no existe $u \in U$ tal que $\beta_u \cap T \neq \emptyset$, es decir, que la trayectoria T no se intersecta con ningún camino β_u, entonces $T \subseteq D_0$.

- Si $|M(T)| = 1$, entonces existe una única $u \in U$ tal que $\beta_u \cap T \neq \emptyset$.

Tomemos $\beta_u \cap T$, la cual por definición de $s(S)$ es una subtrayectoria de T, digamos que:

$$\beta_u \cap T = (d, d+1, \ldots, j-1, j),$$

entonces sustituimos T por la siguiente sucesión T':

$$T' = (0 = x, T, d-1) \cup (d-1, u, j+1) \cup (j+1, T, n = y).$$

Por definición de $s(S)$ y como $\beta_{u'} \cap T' = \emptyset$ para alguna $u' \in U$ tenemos que

$$\{(d-1, u), (u, j+1)\} \subseteq F(D_0).$$

Por lo tanto T' es una $p(x)p(y)$-trayectoria dirigida en D_0.

- Supongamos que si $\{z, w\} \subseteq V(s(S))$ y existe una zw-trayectoria dirigida T' en $s(S)$ con $|M(T')| < m$, entonces existe una $p(z)p(w)$-trayectoria dirigida T'' en D_0 tal que $\ell(T'') \leq \ell(T')$.

- Sean $\{x, y\} \subseteq V(s(S))$ tal que existe una xy-trayectoria dirigida $T = (0 = x, 1, 2, \ldots, y = n)$ en $s(S)$ con $|M(T)| = m$.

Sea $j = \max\{i \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid i \in \bigcup_{u \in U} \beta_u\}$, consideremos $u(j) \in U$ tal que $j \in \beta_{u(j)}$. Tomemos $\beta_{u(j)} \cap T$, nótese que por definición de $s(S)$, $\beta_{u(j)} \cap T$ es una subtrayectoria de T, digamos que:

$$\beta_{u(j)} \cap T = (d, d+1, \ldots, j).$$

Consideremos $T_1 = (d, d+1, \ldots, j, j+1, \ldots, n = y)$, T_1 es una subtrayectoria de T tal que

$$\begin{cases} i \notin \bigcup\limits_{u \in U} \beta_u & \text{con } j+1 \leq i \leq n \\ i \in \beta_{u(j)} & \text{con } d \leq i \leq j \end{cases}$$

Entonces $|M(T_1)| = 1$.

Por lo que $T_1' = (p(d) = u(j), j+1, \ldots, n = y)$ es una $p(d)p(y)$-trayectoria dirigida en D_0 tal que $\ell(T_1') \leq \ell(T_1)$.

Consideremos $T_2 = (x = 0, 1, 2, \ldots, d-1)$, T_2 es una subtrayectoria de T tal que $|M(T_2)| < m$, por hipótesis de inducción existe una $p(x)p(d-1)$-trayectoria dirigida T_2' en D_0 tal que $\ell(T_2') \leq \ell(T_2)$. Por definición de $s(S)$, $(p(d-1), p(d) = u(j)) \in F(D_0)$.

Por lo tanto $T' = T_2' \cup (p(d-1), p(d)) \cup T_1'$ es una $p(x)p(y)$-trayectoria dirigida en D_0 tal que $\ell(T') = \ell(T_2') + 1 + \ell(T_1') \leq \ell(T_2) + 1 + \ell(T_1) = \ell(T)$.

De donde $\ell(T') \leq \ell(T)$. ∎

Lema 3.3. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Sean $\{x, y\} \subseteq V(D_0)$, si $d_{D_0}(x, y) \geq m$, entonces:

1. Cuando $x \notin U$ y $y \notin U$, $d_{s(S)}(x, y) \geq d_{D_0}(x, y)$.
2. Cuando $x \in U$ y $y \notin U$, $d_{s(S)}(z, y) \geq d_{D_0}(x, y)$ para todo $z \in \beta_x$.
3. Cuando $x \notin U$ y $y \in U$, $d_{s(S)}(x, z) \geq d_{D_0}(x, y)$ para todo $z \in \beta_y$.

4. Cuando $x \in U$ y $y \in U$, $d_{s(S)}(z,w) \geq d_{D_0}(x,y)$ para cualesquiera $z \in \beta_x$ y $w \in \beta_y$.

Demostración.

Caso1) Sean $\{x,y\} \subseteq V(D_0)$, tal que $x \notin U$ y $y \notin U$, por lo que $\{x,y\} \subseteq V(s(S))$. Sea T una xy-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(x,y)$, por el *Lema* 3.2, existe una xy-trayectoria dirigida T' en D_0 tal que $\ell(T) \geq \ell(T')$, por definición de distancia tenemos que $\ell(T) \geq \ell(T') \geq d_{D_0}(x,y)$. Por lo tanto $d_{s(S)}(x,y) = \ell(T) \geq d_{D_0}(x,y)$.

Caso 2) Sean $\{x,y\} \subseteq V(D_0)$, tal que $x \in U$ y $y \notin U$, por lo que $y \in V(s(S))$. Sea $z \in V(s(S))$ tal que $z \in \beta_x$. Sea T una zy-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(z,y)$, por el *Lema* 3.2, existe una $p(z)p(y)$-trayectoria dirigida T' en D_0, con $p(z) = x$ y $p(y) = y$, tal que $\ell(T) \geq \ell(T')$. Por definición de distancia tenemos que $\ell(T) \geq \ell(T') \geq d_{D_0}(x,y)$, por lo tanto $d_{s(S)}(z,y) = \ell(T) \geq d_{D_0}(x,y)$ para todo $z \in \beta_x$.

Caso 3) Sean $\{x,y\} \subseteq V(D_0)$, tal que $x \notin U$ y $y \in U$, por lo que $x \in V(s(S))$ y sea $w \in V(s(S))$ tal que $w \in \beta_y$. Sea T una xw-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(x,w)$, por el *Lema* 3.2, existe una $p(x)p(w)$-trayectoria dirigida T' en D_0, con $p(x) = x$ y $p(w) = y$, tal que $\ell(T) \geq \ell(T')$. Por definición de distancia tenemos que $\ell(T) \geq \ell(T') \geq d_{D_0}(x,y)$, por lo tanto $d_{s(S)}(x,w) = \ell(T) \geq d_{D_0}(x,y)$ para todo $w \in \beta_y$.

Caso 4) Sean $\{x,y\} \subseteq V(D_0)$, tal que $x \in U$ y $y \in U$. Sean $\{z,w\} \subseteq V(s(S))$ tal que $z \in \beta_x$ y $w \in \beta_y$. Sea T una zw-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(z,w)$, por el *Lema* 3.2, existe una $p(z)p(w)$-trayectoria dirigida T' en D_0, con $p(z) = x$ y $p(w) = y$, tal que $\ell(T) \geq \ell(T')$.

Por definición de distancia tenemos que $\ell(T) \geq \ell(T') \geq d_{D_0}(x,y)$, por lo tanto $d_{s(S)}(z,w) = \ell(T) \geq d_{D_0}(x,y)$ para todo $z \in \beta_x$ y $w \in \beta_y$. ■

Lema 3.4. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F\,(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F\,(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u,v) \in F\,(D_0[U])$. Sea $u \in U$, si para todo ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ tal que $u \in \mathcal{C}$ se tiene que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$, entonces $d_{s(S)}(u_+, w) \geq k$ para toda $w \in \beta_u$ con $w \neq u_+$.

Demostración. Claramente suponemos que existe una u_+u_--trayectoria dirigida en $s\,(S)$, puesto que si no existiera tendríamos que $d_{s(S)}\,(u_+, w) = \infty$.

Sea $T = (u_+ = 0, 1, \ldots, n-1, n = u_-)$ una u_+u_--trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(u_+, u_-)$, consideremos $T' = (u_+ = 0, T, n-1)$ una $u_+(n-1)$-trayectoria dirigida en $s(S)$. Por el *Lema* 3.2, existe una $p(u_+)p(n-1)$-trayectoria dirigida T'' en D_0 tal que $\ell(T'') \leq \ell(T')$. Por definición de $s(S)$, ya que $(n-1, u_-) \in F(s(S))$, $(p(n-1), p(u_-)) \in F(D_0)$.

Por lo que $\mathcal{C} = (p(u_+), T'', p(n-1)) \cup (p(n-1), p(u_-))$ es un ciclo en D_0 con $p(u_+) = p(u_-) = u \in \mathcal{C}$, por hipótesis $\ell(\mathcal{C}) \geq k$, entonces $\ell(T'') \geq k-1$.

Por lo tanto $k - 1 \leq \ell(T'') \leq \ell(T') = \ell(T) - 1$. Así, $\ell(T) \geq k$.

De donde concluimos que

$$d_{s(S)}(u_+, u_-) \geq k.$$

Sea $w \in \beta_u$ con $w \neq u_+$, por construcción de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(u_+, w) = d_{s(S)}(u_+, u_-) + \ell((u_-, \beta_u, w)) \geq k.$$

Por lo tanto $d_{s(S)}(u_+, w) \geq k$ con $w \in \beta_u$, $w \neq u_+$. ■

Observación 3.1. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Para un k-núcleo N de $s(S)$, tenemos que $u_- \in N$ si y sólo si $u_+ \in N$.

Demostración. Sea $\beta_u = (u_- = t_0^u, t_1^u, \ldots, t_{n(u)k}^u = u_+)$ y n un k-núcleo de $s(S)$.

Si $u_- \in N$, entonces $t_{jk}^u \in N$ con $0 \leq j \leq n(u)$, ya que $t_{(j-1)k+1}^u \notin N$, N es un k-núcleo y β_u es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$. Por lo que $u_+ = t_{n(u)k}^u \in N$.

Si $u_- \notin N$, entonces existe $v \in N$ tal que $d_{s(S)}(u_-, v) < k$.

Si $v \in \beta_u$, entonces $v = t_\ell^u$ con $\ell > 0$. Como N es k-núcleo, entonces $d_{s(S)}(t_\ell^u, x) \geq k$ para toda $x \in N$ y dado que β_u es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$, se tiene que

$$N \cap \beta_u = \{t_{\ell+jk}^u \mid 0 \leq j \leq n(u) - 1\} = \{t_\ell^u, t_{\ell+k}^u, t_{\ell+2k}^u, \ldots, t_{\ell+(n(u)-1)k}^u\},$$

puesto que $\ell > 0$, concluimos que $u_+ = t_{n(u)k}^u \notin N$.

Si $v \notin \beta_u$, entonces existe una u_-v-trayectoria dirigida

$$T = (u_- = z_1, z_2, \ldots, z_m = v)$$

en $s(S)$ tal que $\ell(T) = d_{s(S)}(u_-, v) < k$ y $z_2 \notin \beta_u$.

Por definición de $s(S)$, $z_2 = w_-$ para alguna $w \in U$.

Como $(u_-, w_-) \in F(s(S))$, por hipótesis $(u, w) \in F(D_0[U])$, y por construcción de $s(S)$, $(u_+, w_-) \in F(s(S))$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(u_+, v) \leq \ell(u_+, w_- = z_2, z_3, \ldots, z_\ell = v) < k$.

Puesto que $v \in N$ y $u_+ \neq v$, ya que de la definición de $s(S)$ tenemos que $z_i \in U_-$ o $z_i \in \bigcup_{u \in U} (\beta_u - \{u_+\})$.

De donde $d_{s(S)}(u_+, v) < k$ con $v \in N$.

De esta forma, concluimos que $u_+ \notin N$. ∎

Lema 3.5. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Si N es un k-núcleo de $s(S)$, $a_{1_-} \in U_-$ y $a_{1_-} \notin N$, entonces existe una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de vértices de D_0 tal que:

a) $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}) = k$. Para $i \in \{1, \ldots, m-2\}$.

b) Para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $a_i \in U$.

c) Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$.

Si $a_m \notin U$, entonces $a_m \in N$.

d) Para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $r_{i+1} < r_i$ y $r_m = 0$.

e) $r_i = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$,

donde para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ tenemos que

$$\beta_{a_i} = \left(a_{i_-} = t_0^{a_i}, t_1^{a_i}, \ldots, t_{n(a_i)k}^{a_i} = a_{i_+}\right),$$

$$b_i = \max\{\ell \in \{0, 1, \ldots, n(a_i)\, k\} \mid t_\ell^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\},$$

$$c_i = \min\{\ell \in \{0, 1, \ldots, n(a_i)\, k\} \mid t_\ell^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\},$$

$$r_i = d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_i}^{a_i}).$$

Para toda $i \in \{1, \ldots, m-2\}$, $s_i = d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-})$.

Si $a_{m_-} \in N$, entonces $s_{m-1} = d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-})$.

Si $a_m \in N$, entonces $s_{m-1} = d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m)$.

Demostración. Consideremos N un k-núcleo de $s(S)$. Sea $a_1 \in U$, $p(a_{1_-}) = a_1$ y $a_{1_-} \in \mathcal{U}_-$ tal que $a_{1_-} \notin N$, observemos que a_1 satisface las propiedades de la (a) a la (c) y $r_1 = d_{s(S)}\left(a_{1_-}, t_{c_1}^{a_1}\right) \geq 1$, ya que $a_{1_-} \notin N$. Supongamos que tenemos $a_1, a_2, \ldots, a_i$, donde $i \geq 1$, que cumplen las propiedades (a) a la (e). Definiremos a_{i+1} y probaremos que satisface las propiedades requeridas, la construcción de esta sucesión se detiene en el primer número natural m tal que $r_m = 0$. De este modo, podemos suponer que $r_i > 0$ y por lo tanto $b_i < n(a_i)k$, ya que de otra manera $a_{i_+} \in N$ y de la *Observación* 3.1 tenemos que $a_{i_-} \in N$ implica que $r_i = 0$, contradicción.

Así, podemos considerar que $t_{b_i+1}^{a_i} \in \beta_{a_i}$, puesto que $t_{b_i}^{a_i} \in N \cap \beta_{a_i}$, entonces $t_{b_i+1}^{a_i} \notin N$.

Puesto que N es un k-núcleo, existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(t_{b_i+1}^{a_i}, x) < k$.

Observemos que $x \neq t_{b_i}^{a_i}$, puesto que

$$d_{s(S)}\left(t_{b_i+1}^{a_i}, t_{b_i}^{a_i}\right) = d_{s(S)}\left(t_{b_i+1}^{a_i}, a_{i_+}\right) + d_{s(S)}\left(a_{i_+}, a_{i_-}\right) + d_{s(S)}\left(a_{i_-}, t_{b_i}^{a_i}\right).$$

De la definición de $s(S)$ tenemos que

$$d_{s(S)}\left(a_{i_+}, a_{i_-}\right) \geq 2,\ d_{s(S)}\left(a_{i_-}, t_{b_i}^{a_i}\right) + d_{s(S)}\left(t_{b_i+1}^{a_i}, a_{i_+}\right) = \ell\left(\beta_{a_i}\right) - 1 \geq k - 1.$$

Por lo tanto $d_{s(S)}\left(t_{b_i+1}^{a_i}, t_{b_i}^{a_i}\right) \geq k - 1 + 2 = k + 1$, ya que $d_{s(S)}(t_{b_i+1}^{a_i}, x) < k$.

Afirmación 1. $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, x) = k$. Puesto que $\{x, t_{b_i}^{a_i}\} \subseteq N$ y $x \neq t_{b_i}^{a_i}$, tenemos que $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, x) \geq k$. Entonces $k \leq d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, x) = d_{s(S)}(t_{b_i+1}^{a_i}, x) + 1 < k + 1$.

Ahora, definamos a_{i+1} como sigue:

Caso 1) Si $x \in \bigcup_{u \in U} \beta_u$. Definamos $a_{i+1} \in U$ tal que $x \in \beta_{a_{i+1}}$. Puesto que $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, x) = k$, entonces $x = t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}$, ya que la distancia de un vértice en $\beta_{a_{i+1}} \cap N$ al siguiente en $\beta_{a_{i+1}} \cap N$ es k. Por lo tanto $d_{s(S)}\left(t_{b_i}^{a_i}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}\right) = k$. Si $t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}} = a_{i+1_-}$, entonces $d_{s(S)}\left(a_{i+1_-}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}\right) = r_{i+1} = 0$, tomamos $m = i+1$. Por lo tanto $a_{m_-} \in N$.

Caso 2) Si $x \notin \bigcup\limits_{u \in U} \beta_u$. Definamos $a_{i+1} = x$, tomamos $m = i+1$ y la sucesión termina, también definamos $r_m = 0$. De este modo, $a_m \in N$ y por la *Afirmación* 1 tenemos que $d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_m) = k$.

Afirmación 2. Para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, tenemos que $r_{i+1} < r_i$. Podemos suponer que estamos en el *Caso* 1 de la definición de x y $t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}} \neq a_{i+1_-}$, de otro modo $r_{i+1} = r_m = 0$ y hemos terminado. Recordemos que $r_i = d_{s(S)}\left(a_{i_-}, t_{c_i}^{a_i}\right)$.

De la definición de $s(S)$ tenemos que:

$$d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}) = d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, a_{i_+}) + d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) + d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}).$$

Puesto que $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_i}^{a_i}) = r_i$, β_{a_i} es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$ y N es un k-núcleo, se sigue que $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, a_{i_+}) = k - r_i$. De la *Afirmación* 1, $d_{s(S)}(t_{b_i}^{a_i}, t_{c_{i+1}}^{a_{i+1}}) = k$.

Entonces $k = k - r_i + d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) + d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_c^{a_{i+1}})$.

De donde $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) + d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_c^{a_{i+1}}) = r_i$ y como $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) > 0$, entonces $r_{i+1} = d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_c^{a_{i+1}}) < r_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$. Dado que $r_m = 0$ y $d_{s(S)}(a_{m-1_-}, t_c^{a_{m-1}}) = r_{m-1} > 0$, tenemos que $r_m < r_{m-1}$.

Por lo tanto $r_{i+1} < r_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Afirmación 3. Para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, tenemos que $r_i = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$.

Demostrémoslo para $m-1$:

Caso a. Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$ y por la *Afirmación* 1, $d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m_-}) = k$.

Por definición de $s(S)$ tenemos que

$$d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m_-}) = d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-})$$

y como $d_{s(S)}(a_{m-1_-}, t_{c_{m-1}}^{a_{m-1}}) = r_{m-1}$, entonces $d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) = k - r_{m-1}$.

Por definición, $d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-}) = s_{m-1}$.

Entonces $k = d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m_-}) = k - r_{m-1} + s_{m-1}$.

Por lo tanto $r_{m-1} = s_{m-1}$.

Caso b. Si $a_m \notin U$, entonces $a_m \in N$ y por la *Afirmación* 1, $d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_m) = k$.

Sabemos por definición de $s(S)$ que

$$d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_m) = d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m),$$

ya que $d_{s(S)}(a_{m-1_-}, t_{c_{m-1}}^{a_{m-1}}) = r_{m-1}$, entonces $d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) = k - r_{m-1}$.

Por definición $s_{m-1} = d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m)$ cuando $a_m \in N$, entonces

$$k = d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_m) = d_{s(S)}(t_{b_{m-1}}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m) = k - r_{m-1} + s_{m-1}.$$

Por lo que $r_{m-1} = s_{m-1}$.

Supongamos válida la *Afirmación* 3 para alguna i con $1 \leq i \leq m-1$, es decir, $r_i = d_{s(S)}\left(a_{i_-}, t_{c_i}^{a_i}\right) = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$. Por demostrar que $r_{i-1} = s_{i-1} + s_i + \cdots + s_{m-1}$.

Por (a): $d_{s(S)}(t_{b_{i-1}}^{a_{i-1}}, t_{c_i}^{a_i}) = k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(t^{a_{i-1}}_{b_{i-1}}, t^{a_i}_{c_i}) = d_{s(S)}(t^{a_{i-1}}_{b_{i-1}}, a_{i-1_+}) + d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t^{a_i}_{c_i}).$$

Además

$$d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) = s_{i-1}.$$

Por hipótesis de inducción tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t^{a_i}_{c_i}) = r_i = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$$

ya que β_{a_i} es una trayectoria de longitud $\equiv 0 \bmod k$, N es un k-núcleo y $d_{s(S)}(a_{i-1_-}, t^{a_{i-1}}_{c_{i-1}}) = r_{i-1}$, entonces $d_{s(S)}(t^{a_{i-1}}_{b_{i-1}}, a_{i-1_+}) = k - r_{i-1}$.

Por lo tanto $k = (k - r_{i-1}) + s_{i-1} + r_i = (k - r_{i-1}) + s_{i-1} + s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$.

De donde concluimos que $r_{i-1} = s_{i-1} + s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}$. ■

A continuación veremos dos teoremas que fueron demostrados por Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez en [10], los cuales surgen de la idea de encontrar una generalización del *teorema* que fue probado por Hortensia Galeana Sánchez y Victor Neumann Lara en [6], y que dice lo siguiente:

Sea D_0 una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, usando las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construyamos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$, o bien, si existe $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Entonces D_0 tiene un núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un núcleo.

Teorema 3.1. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$.

Para todo ciclo dirigido $\mathcal{C}$ de D_0 con $V(\mathcal{C}) \cap U \neq \emptyset$, se tiene que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$. Si D_0 tiene un k-núcleo, entonces $s(S)$ tiene un k-núcleo.

Demostración. Supongamos que D_0 tiene un k-núcleo N_0, $U \neq \emptyset$.

Para cada $u \in U$, sea N_u definida como sigue:

Si $u \in N_0$, entonces N_u es el k-núcleo de β_u y si $u \notin N_0$, entonces N_u es el k-núcleo de β_u^r, donde $\beta_u^r = \beta_u - \{u_+ = t^u_{n(u)k}, t^u_{n(u)k-1}, \ldots, t^u_{n(u)k-[(k-r)-1]}\}$ con $n(u) \geq 1$ y $r = \min\{d_{D_0}(u,w) \mid w \in N_0\}$. Nótese que como $u \notin N_0$ existe $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u,w) < k$ y por lo tanto $r < k$. Por el *Lema* 3.1, el k-núcleo de β_u contiene a $\{u_-, u_+\}$ y el k-núcleo de β_u^r no contiene a u_-.

Demostraremos que $N = (N_0 - U) \cup \bigcup\limits_{u\in U} N_u$ es un k-núcleo de $s(S)$.

Sean $\{x,y\} \subseteq N$, por demostrar que $d_{s(S)}(x,y) \geq k$ y $d_{s(S)}(y,x) \geq k$.

Consideremos varios posibles casos:

1. $\{x,y\} \subseteq N_0 - U$.
2. $\{x,y\} \subseteq \bigcup\limits_{u\in U} N_u$
3. $x \in N_0 - U$ y $y \in \bigcup\limits_{u\in U} N_u$
4. $x \in \bigcup\limits_{u\in U} N_u$ y $y \in N_0 - U$

Caso 1) $\{x,y\} \subseteq N_0 - U$. Como $x \in N_0$ y $y \in N_0$, entonces $d_{D_0}(x,y) \geq k$, y puesto que $x \notin U$ y $y \notin U$, por el *Lema* 3.3, tenemos que $d_{s(S)}(x,y) \geq d_{D_0}(x,y) \geq k$. Como $x \in N_0$ y $y \in N_0$, entonces $d_{D_0}(y,x) \geq k$, y puesto que $x \notin U$ y $y \notin U$, por el *Lema* 3.3, tenemos que $d_{s(S)}(y,x) \geq d_{D_0}(y,x) \geq k$.

Caso 2) $\{x,y\} \subseteq \bigcup\limits_{u\in U} N_u$.

En este caso tenemos los dos siguientes posibles subcasos:

2.1) $\{x, y\} \subseteq N_u$ para alguna $u \in U$.

2.2) $x \in N_u$ y $y \in N_{u'}$ con $u \neq u'$.

A continuación analizaremos estos subcasos:

Subcaso 2.1) $\{x, y\} \subseteq N_u$ para alguna $u \in U$. Consideremos sin pérdida de generalidad que $\beta_u = (u_- = t_0^u, t_1^u, \ldots, t_i^u = x, \ldots, t_j^u = y, \ldots, t_{n(u)k-1}^u, t_{n(u)k}^u = u_+)$.

Supongamos que $u \in N_0$, entonces N_u es k-núcleo de β_u, si $x \neq u_-$ o $y \neq u_+$, nótese que la única xy-trayectoria dirigida en $s(S)$ es (x, β_u, y). Como $\{x, y\} \subseteq N_u$, entonces $d_{\beta_u}(x, y) \geq k$.

Por definición de $s(S)$ tenemos que $d_{s(S)}(x, y) = \ell((x, \beta_u, y)) = d_{\beta_u}(x, y) \geq k$, por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq k$.

Si $x = u_-$ y $y = u_+$, entonces $\ell((u_-, \beta_u, u_+)) = n(u)k$. Si existe $T = (u_- = x_0, x_1, \ldots, x_n = u_+)$ una u_-u_+-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $T \neq \beta_u$, entonces $\ell(T) \geq k$, ya que si consideramos $x_i \in T$ tal que $i = \max\{j \mid x_j \in \mathcal{U}_-\}$, como $(x_{n-1}, u_+) \in F(s(S))$ se tiene que $i < n-1$. Consideremos x_{i+1}, por definición de i, $x_{i+1} \notin \mathcal{U}_-$. Por definición de $s(S)$, $x_{i+1} \notin \mathcal{U}_+$, $x_{i+1} \in \beta_{x_i}$ y $\beta_{x_i} \subset T$; como $\ell(\beta_{x_i}) \geq k$, entonces $\ell(T) \geq k$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(x = u_-, y = u_+) \geq k$.

Supongamos que $u \notin N_0$, entonces N_u es k-núcleo de β_u^r, donde $r = \min\{d_{D_0}(u, w) \mid w \in N_0\}$ y puesto que $\{x, y\} \subseteq N_u$, $d_{\beta_u^r}(x, y) \geq k$.

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(x, y) = \ell((x, \beta_u, y)) = d_{\beta_u^r}(x, y) \geq k$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq k$.

Por otro lado, por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(y,x) = d_{s(S)}(y,u_+) + d_{s(S)}(u_+,u_-) + d_{s(S)}(u_-,x).$$

Por el *Lema* 3.4, $d_{s(S)}(u_+,u_-) \geq k$, por lo que $d_{s(S)}(y,x) \geq k$.

Subcaso 2.2) $x \in N_u$ y $y \in N_{u'}$ con $u \neq u'$.

Consideremos varios posibles casos:

2.2.1) $\{u,u'\} \subseteq N_0$.

2.2.2) $u \in N_0$ y $u' \notin N_0$.

2.2.3) $u \notin N_0$ y $u' \in N_0$.

2.2.4) $u \notin N_0$ y $u' \notin N_0$.

2.2.1) $\{u,u'\} \subseteq N_0$.

Como $x \in N_u$ y $y \in N_{u'}$ entonces $x \in \beta_u$ y $y \in \beta_{u'}$. Como $\{u,u'\} \subseteq N_0$, se tiene que $d_{D_0}(u,u') \geq k$ y $d_{D_0}(u',u) \geq k$, por ser N_0 un k-núcleo de D_0. Ya que $\{u,u'\} \subseteq U$, del *Lema* 3.3 obtenemos que $d_{s(S)}(x,y) \geq d_{D_0}(u,u') \geq k$ y $d_{s(S)}(y,x) \geq d_{D_0}(u',u) \geq k$.

2.2.2) $u \in N_0$ y $u' \notin N_0$.

Como $u' \notin N_0$, entonces $N_{u'}$ es k-núcleo de

$$\beta^r_{u'} = \beta_{u'} - \{u'_+ = t^{u'}_{n(u')k}, t^{u'}_{n(u')k-1}, \ldots, t^{u'}_{n(u')k-[(k-r)-1]}\} \text{ con } n(u') \geq 1,$$

donde $r = \min\{d_{D_0}(u',x) \mid x \in N_0\}$.

Sea $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u',w) = r$, $d_{D_0}(u',u) = \ell$, $d_{D_0}(u,u') = s$, por lo tanto $\ell + s \geq k$, ya que todo ciclo que pasa por un vértice de U tiene longitud mayor o igual a k.

Afirmamos que $r + s \geq k$.

Si $w \neq u$, entonces $d_{D_0}(u,u') + d_{D_0}(u',w) = s + r \geq d_{D_0}(u,w) \geq k$, porque $\{u,w\} \subseteq N_0$.

Si $w = u$, entonces $r = \ell$ y como $\ell + s \geq k$, tenemos que $r + s \geq k$.

Ahora si $x \neq u_-$, por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(x, y) = d_{s(S)}(x, u_+) + d_{s(S)}(u_+, u'_-) + d_{s(S)}(u'_-, y).$$

Por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u_+, u'_-) \geq d_{D_0}(u, u') = s$.

Como $y \in N_{u'}$, $N_{u'}$ es k-núcleo de $\beta^r_{u'}$ y por el *Lema* 3.1:

$$d_{s(S)}(u'_-, y) \geq r.$$

Por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq s + r \geq k$.

Si $x = u_-$, por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x, y) = d_{s(S)}(u_-, u'_-) + d_{s(S)}(u'_-, y).$$

Por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u_-, u'_-) \geq d_{D_0}(u, u') = s$, como $y \in N_{u'}$, $N_{u'}$ es k-núcleo de $\beta^r_{u'}$ y por el *Lema* 3.1 $d_{s(S)}(u'_-, y) \geq r$, por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq s + r \geq k$.

Demostraremos ahora que $d_{s(S)}(y, x) \geq k$.

Notemos que como $y \in N_{u'}$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(y, u'_+) \geq k - r$ y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u'_+, u_-) \geq d_{D_0}(u', u) = \ell$; y por definición de r, $\ell \geq r$.

Por lo tanto $k - r + \ell \geq k$.

Ahora si $x \neq u_+$, por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(y, x) = d_{s(S)}(y, u'_+) + d_{s(S)}(u'_+, u_-) + d_{s(S)}(u_-, x)$$

Por lo que $d_{s(S)}(y, x) \geq k - r + \ell \geq k$.

Si $x = u_+$, entonces por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(y, x) = d_{s(S)}(y, u'_+) + d_{s(S)}(u'_+, u_+)$$

y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u'_+, u_+) \geq d_{D_0}(u', u) = \ell$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(y, x) \geq k - r + \ell \geq k$.

2.2.3) $u \notin N_0$ y $u' \in N_0$.

La demostración es análoga a la del Caso 2.2.2) intercambiando u con u'. Veamos a continuación como se demuestra.

Como $u \notin N_0$, entonces N_u es k-núcleo de

$$\beta_u^r = \beta_u - \{u_+ = t^u_{n(u)k}, t^u_{n(u)k-1}, \ldots, t^u_{n(u)k-[(k-r)-1]}\} \text{ con } n(u) \geq 1,$$

donde $r = \min\{d_{D_0}(u, x) \mid x \in N_0\}$.

Sea $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u, w) = r$, $d_{D_0}(u', u) = \ell$, $d_{D_0}(u, u') = s$, por lo tanto $\ell + s \geq k$, ya que todo ciclo que pasa por un vértice de U tiene longitud mayor o igual a k.

Afirmamos que $r + \ell \geq k$.

Si $w \neq u'$, entonces $d_{D_0}(u', u) + d_{D_0}(u, w) = \ell + r \geq d_{D_0}(u', w) = k$, porque $\{u', w\} \subseteq N_0$.

Si $w = u'$, entonces $r = s$ y como $\ell + s \geq k$, tenemos que $r + s \geq k$.

Ahora si $x \neq u'_-$, por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(x, y) = d_{s(S)}(x, u'_+) + d_{s(S)}(u'_+, u_-) + d_{s(S)}(u_-, y).$$

Por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u'_+, u_-) \geq d_{D_0}(u', u) = \ell$.

Como $y \in N_u$, N_u es k-núcleo de β_u^r y por el *Lema* 3.1:

$$d_{s(S)}(u_-, y) \geq r.$$

Por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq \ell + r \geq k$.

Si $x = u'_-$, por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x, y) = d_{s(S)}(u'_-, u_-) + d_{s(S)}(u_-, y).$$

Por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u'_-, u_-) \geq d_{D_0}(u', u) = \ell$; como $y \in N_u$, N_u es k-núcleo de β_u^r y por el *Lema* 3.1 $d_{s(S)}(u_-, y) \geq r$, por lo tanto $d_{s(S)}(x, y) \geq \ell + r \geq k$.

Demostraremos ahora que $d_{s(S)}(y,x) \geq k$.

Notemos que como $y \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(y,u_+) \geq k-r$ y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u_+,u'_-) \geq d_{D_0}(u,u') = s$; y por definición de r, $s \geq r$. Por lo tanto $k-r+s \geq k$.

Ahora si $x \neq u'_+$, por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(y,x) = d_{s(S)}(y,u_+) + d_{s(S)}(u_+,u'_-) + d_{s(S)}(u'_-,x)$$

Por lo que $d_{s(S)}(y,x) \geq k-r+s \geq k$.

Si $x = u'_+$, entonces por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(y,x) = d_{s(S)}(y,u_+) + d_{s(S)}(u_+,u'_+)$$

y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(u_+,u'_+) \geq d_{D_0}(u,u') = s$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(y,x) \geq k-r+s \geq k$.

2.2.4) $u \notin N_0$ y $u' \notin N_0$.

Como $u \notin N_0$ y $u' \notin N_0$, N_u es k-núcleo de

$$\beta_u^{r_1} = \beta_u - \{u_+ = t^u_{n(u)k}, t^u_{n(u)k-1}, \ldots, t^u_{n(u)k-[(k-r_1)-1]}\} \text{ con } n(u) \geq 1,$$

donde $r_1 = \min\{d_{D_0}(u,w) \mid w \in N_0\}$, y $N_{u'}$ es el k-núcleo de

$$\beta_{u'}^{r_2} = \beta_{u'} - \{u'_+ = t^{u'}_{n(u')k}, t^{u'}_{n(u')k-1}, \ldots, t^{u'}_{n(u')k-[(k-r_2)-1]}\} \text{ con } n(u') \geq 1,$$

donde $r_2 = \min\{d_{D_0}(u',w) \mid w \in N_0\}$.

Sea $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u,w) = r_1$, $w' \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u',w') = r_2$, denotemos por $s_1 = d_{D_0}(u',u)$ y $s_2 = d_{D_0}(u,u')$. Por definición de r_2, $s_1 + r_1 \geq r_2$. Por definición de r_1, $s_2 + r_2 \geq r_1$.

Por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(x,y) = d_{s(S)}(x,u_+) + d_{s(S)}(u_+,u'_-) + d_{s(S)}(u'_-,y).$$

Como $x \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(x,u_+) \geq k - r_1$ y por el *Lema* 3.3 $d_{s(S)}(u_+,u'_-) \geq d_{D_0}(u,u') = s_2$.

Como $y \in N_{u'}$, $N_{u'}$ es k-núcleo de $\beta_{u'}^{r_2}$, por el *Lema* 3.1 $d_{s(S)}(u'_-,y) \geq r_2$, entonces $d_{s(S)}(x,y) \geq k - r_1 + s_2 + r_2 \geq k - r_1 + r_1 = k$ ya que $s_2 + r_2 \geq r_1$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(x,y) \geq k$.

Demostremos que $d_{s(S)}(y,x) \geq k$.

Por definición de $s\,(S)$,

$$d_{s(S)}(y,x) = d_{s(S)}(y,u'_+) + d_{s(S)}(u'_+,u_-) + d_{s(S)}(u_-,x)$$

Como $y \in N_{u'}$, $N_{u'}$ es k-núcleo de $\beta_{u'}^{r_2}$, por el *Lema* 3.1:

$$d_{s(S)}(y,u'_+) \geq k - r_2.$$

Como $x \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(u_-,x) \geq r_1$ y por el *Lema* 3.3 $d_{s(S)}(u'_+,u_-) \geq d_{D_0}(u',u) = s_1$, además $s_1 + r_1 \geq r_2$. Por lo tanto

$$d_{s(S)}(y,x) \geq k - r_2 + s_1 + r_1 \geq k - r_2 + r_2 = k.$$

Caso 3) $x \in N_0 - U$ y $y \in \bigcup\limits_{u \in U} N_u$. Tomemos $y \in N_u$ para alguna $u \in U$.

Veamos los dos siguientes posibles subcasos:

3.1) $u \in N_0$

3.2) $u \notin N_0$

Subcaso 3.1) $u \in N_0$.

Como $\{x,u\} \subseteq N_0$, entonces $d_{D_0}(x,u) \geq k$ y $d_{D_0}(u,x) \geq k$, y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(x,y) \geq d_{D_0}(x,u) \geq k$ con $y \in \beta_u$ y $d_{s(S)}(y,x) \geq d_{D_0}(u,x) \geq k$ con $y \in \beta_u$.

Subcaso 3.2) $u \notin N_0$.

Como $u \notin N_0$, N_u es k-núcleo de β_u^r, donde

$$\beta_u^r = \beta_u - \{u_+ = t_{n(u)k}^u, t_{n(u)k-1}^u, \ldots, t_{n(u)k-[(k-r)-1]}^u\} \text{ con } n(u) \geq 1$$

y $r = \min\{d_{D_0}(u, w) \mid w \in N_0\}$.

Sea $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u, w) = r$, denotemos por $s_1 = d_{D_0}(x, u)$ y por $s_2 = d_{D_0}(u, x)$. Tenemos que $s_1 + s_2 \geq k$, ya que todo ciclo que pasa por un vértice de U tiene longitud mayor o igual a k.

Afirmamos que $s_1 + r \geq k$.

Si $w \neq x$, como $\{w, x\} \subseteq N_0$ se tiene que $d_{D_0}(x, w) \geq k$, y ya que $s_1 + r \geq d_{D_0}(x, w)$ se concluye que $s_1 + r \geq k$.

Si $w = x$, entonces $r = s_2$, como sabemos que $s_1 + s_2 \geq k$, se sigue que $s_1 + r \geq k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x, y) = d_{s(S)}(x, u_-) + d_{s(S)}(u_-, y).$$

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{s(S)}(x, u_-) \geq d_{D_0}(x, u) = s_1.$$

Como $y \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(u_-, y) \geq r$, por lo que $d_{s(S)}(x, y) \geq s_1 + r \geq k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(y, x) = d_{s(S)}(y, u_+) + d_{s(S)}(u_+, x).$$

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{s(S)}(u_+, x) \geq d_{D_0}(u, x) = s_2.$$

Como $y \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(y, u_+) \geq k - r$, por definición de r, $s_2 \geq r$, por lo que $k - r - s_2 \geq k$. Por lo tanto $d_{s(S)}(y, x) \geq k$.

Caso 4) $x \in \bigcup_{u \in U} N_u$ y $y \in N_0 - U$. Tomemos $x \in N_u$ para alguna $u \in U$.

Consideremos los siguientes posibles subcasos:

4.1) $u \in N_0$

4.2) $u \notin N_0$

Subcaso 4.1) $u \in N_0$.

Como $y, u \in N_0$, entonces $d_{D_0}(y,u) \geq k$ y $d_{D_0}(u,y) \geq k$, y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(x,y) \geq d_{D_0}(u,y) \geq k$ con $x \in \beta_u$ y $d_{s(S)}(y,x) \geq d_{D_0}(y,u) \geq k$ con $x \in \beta_u$.

Subcaso 4.2) $u \notin N_0$.

Como $u \notin N_0$, N_u es k-núcleo de β_u^r, donde

$$\beta_u^r = \beta_u - \{u_+ = t_{n(u)k}^u, t_{n(u)k-1}^u, \ldots, t_{n(u)k-[(k-r)-1]}^u\} \text{ con } n(u) \geq 1$$

y $r = \min\{d_{D_0}(u,w) \mid w \in N_0\}$.

Sea $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u,w) = r$, denotemos por $s_1 = d_{D_0}(y,u)$ y por $s_2 = d_{D_0}(u,y)$. Tenemos que $s_1 + s_2 \geq k$, ya que todo ciclo que pasa por un vértice de U tiene longitud mayor o igual a k.

Demostremos que $d_{s(S)}(x,y) \geq k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x,y) = d_{s(S)}(x,u_+) + d_{s(S)}(u_+,y).$$

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{s(S)}(u_+,y) \geq d_{D_0}(u,y) = s_2.$$

Como $x \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(x,u_+) \geq k - r$, por definición de r, $s_2 \geq r$, por lo que $d_{s(S)}(x,y) \geq k - r + s_2 \geq k$.

Ahora, demostremos que $d_{s(S)}(y,x) \geq k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(y,x) = d_{s(S)}(y,u_-) + d_{s(S)}(u_-,x).$$

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{s(S)}(y,u_-) \geq d_{D_0}(y,u) = s_1.$$

Como $x \in N_u$, por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(u_-,x) \geq r$, por lo tanto $d_{s(S)}(y,x) \geq s_1 + r$.

Afirmamos que $s_1 + r \geq k$.

Si $w \neq y$, como $\{w,y\} \subseteq N_0$ se tiene que $d_{D_0}(y,w) \geq k$ y ya que $s_1 + r = d_{D_0}(y,u) + d_{D_0}(u,w) \geq d_{D_0}(y,w) \geq k$, concluimos que $s_1 + r \geq k$.

Si $w = y$, entonces $r = s_2$, como sabemos que $s_1 + s_2 \geq k$, se sigue que $s_1 + r \geq k$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(y,x) \geq s_1 + r \geq k$.

Por demostrar que $N = (N_0 - U) \cup \bigcup_{u \in U} N_u$ es k-absorbente en $s(S)$, es decir, por demostrar que para toda $z \in (V(s(S)) - N)$ existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(z,x) < k$.

Sea $z \in V(s(S)) - N$. Tenemos dos casos posibles que veremos a continuación.

Caso 1) $z \in \bigcup_{u \in U} \beta_u$, por lo cual tenemos que existe $u \in U$ tal que $z \in \beta_u$.

Consideremos los dos siguientes subcasos posibles:

1.1) $z = u_+$.

1.2) $z \neq u_+$.

Subcaso 1.1) Como $z = u_+ \notin N$, entonces $u \notin N_0$. Puesto que N_0 es un k-núcleo de D_0 existe $x \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u,x) < k$. Sea $r = \min\{d_{D_0}(u,w) \mid w \in N_0\}$ y $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(u,w) = r$. Nótese que $r < k$.

Sea $T = (u = j(0), j(1), \ldots, j(r) = w)$ una uw-trayectoria dirigida en D_0 tal que $\ell(T) = d_{D_0}(u, w)$.

Observamos que $j(i) \notin N_0$, $i \neq r$, por la elección de w y ya que $d_{D_0}(u, j(i)) < d_{D_0}(u, w)$.

Si $j(i) \notin U$ con $i \in \{1, \ldots, r\}$, por definición de $s(S)$:
$d_{s(S)}(u_+, w) \leq \ell(u_+, j(1), j(2), \ldots, j(r) = w) = r < k$ con $w \in N_0 - U \subseteq N$.

Si $j(i) \in U$ para alguna $i \in \{1, \ldots, r\}$, sea $e = \min\{i \mid j(i) \in U, j(i) \in T\}$. Como $j(e) \notin N_0$, entonces $N_{j(e)}$ es el k-núcleo de

$$\beta_{j(e)}^{r_1} \text{ con } \beta_{j(e)}^{r_1} = \beta_{j(e)} - \{j(e)_+ = t_{n(j(e))k}^{j(e)}, t_{n(j(e))k-1}^{j(e)}, \ldots, t_{n(j(e))k-[(k-r_1)-1]}^{j(e)}\}$$

donde $r_1 = \min\{d_{D_0}(j\,(e)\,, x) \mid x \in N_0\}$, y por el *Lema* 3.1 tenemos que $t_{r_1}^{j(e)} \in N_{j(e)}$.

Sea $s = d_{D_0}(u, j(e))$, nótese que $d_{D_0}(j(e), w) = r_1$ y $s + r_1 = r$.

Por definición de $s(S)$ se tiene que

$$d_{s(S)}(u_+, t_{r_1}^{j(e)}) = d_{s(S)}(u_+, j(e)_-) + d_{s(S)}(j(e)_-, t_{r_1}^{j(e)}).$$

Como $j(\ell) \notin U$ con $\ell \in \{1, \ldots, e-1\}$, entonces

$$d_{s(S)}(u_+, j(e)_-) \leq \ell(u_+, j(1), j(2), \ldots, j(e-1), j(e)_-) = s.$$

Por el *Lema* 3.1: $d_{s(S)}(j(e)_-, t_{r_1}^{j(e)}) = r_1$, de donde $d_{s(S)}(u_+, t_{r_1}^{j(e)}) \leq s + r_1 = r < k$, entonces $d_{s(S)}(u_+, t_{r_1}^{j(e)}) < k$ con $t_{r_1}^{j(e)} \in N$.

Por lo tanto existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(u_+, x) < k$.

Subcaso 1.2) Como $z \neq u_+$, $z \in \beta_u - u_+$.

Si $u \in N_0$, entonces N_u es k-núcleo de β_u, por lo tanto existe $x \in N_u$ tal que $d_{\beta_u}(z, x) < k$, con lo que tenemos que $d_{s(S)}(z, x) = d_{\beta_u}(z, x) < k$ con $x \in N$.

Si $u \notin N_0$, entonces N_u es k-núcleo de β_u^r.

Si $z \in \beta_u^r$, entonces como N_u es k-núcleo de β_u^r, existe $x \in N_u$ tal que $d_{\beta_u^r}(z,x) < k$. Por lo tanto $d_{s(S)}(z,x) = d_{\beta_u^r}(z,x) < k$ con $x \in N$.

Si $z \notin \beta_u^r$, entonces $z \in \{u_+ = t^u_{n(u)k}, t^u_{n(u)k-1}, \ldots, t^u_{n(u)k-[(k-r)-1]}\}$. Como $u_+ \notin N$, por el Subcaso 1.1, existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(u_+,x) \leq r < k$, y por definición de $s(S)$ tenemos que $d_{s(S)}(z,x) = d_{s(S)}(z,u_+) + d_{s(S)}(u_+,x)$, además por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(z,u_+) \leq (k-r)-1$, de donde concluimos que $d_{s(S)}(z,x) \leq (k-r)-1+r = k-1$ con $x \in N$.

Caso 2) $z \notin \bigcup\limits_{u\in U} \beta_u$.

Como $z \notin N$, entonces $z \in V\,(D_0) - N_0$. Puesto que N_0 es un k-núcleo de D_0, existe $x \in N_0$ tal que $d_{D_0}(z,x) < k$. Sea $r = \min\{d_{D_0}(z,w) \mid w \in N_0\}$ y $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(z,w) = r$. Nótese que $r < k$.

Sea $T = (z = j(0), j(1), \ldots, j(r) = w)$ una zw-trayectoria dirigida en D_0 tal que $\ell(T) = d_{D_0}(z,w)$. Observemos que $j(i) \notin N_0$, $i \neq r$, por la elección de w y ya que $d_{D_0}(z,j(i)) < d_{D_0}(z,w)$.

Si $j(i) \notin U$ con $i \in \{1,\ldots,r\}$, por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(z,w) \leq \ell(z,j(1),j(2),\ldots,j(r)=w) = r < k \text{ con } w \in N_0 - U \subseteq N.$$

Si $j(i) \in U$ para alguna $i \in \{1,\ldots,r\}$, sea $e = \min\{i \mid j(i) \in U, j(i) \in T\}$.

Como $j(e) \notin N_0$, entonces $N_{j(e)}$ es el k-núcleo de $\beta_{j(e)}^{r_1}$ con

$$\beta_{j(e)}^{r_1} = \beta_{j(e)} - \{j(e)_+ = t^{j(e)}_{n(j(e))k}, t^{j(e)}_{n(j(e))k-1}, \ldots, t^{j(e)}_{n(j(e))k-[(k-r_1)-1]}\}$$

donde $r_1 = \min\{d_{D_0}(j(e),x) \mid x \in N_0\}$.

Por el *Lema* 3.1 tenemos que:

$$t_{r_1}^{j(e)} \in N_{j(e)}.$$

Sea $s = d_{D_0}(z, j(e))$, nótese que $d_{D_0}(j(e), w) = r_1$ y $s + r_1 = r$.

Por definición de $s(S)$ se tiene que:

$$d_{s(S)}(z, t_{r_1}^{j(e)}) = d_{s(S)}(z, j(e)_-) + d_{s(S)}(j(e)_-, t_{r_1}^{j(e)}).$$

Como $j(\ell) \notin U$ con $\ell \in \{1, \ldots, e-1\}$, entonces

$$d_{s(S)}(z, j(e)_-) \leq \ell(z, j(1), j(2), \ldots, j(e-1), j(e)_-) = s.$$

Por el *Lema* 3.1: $d_{s(S)}(j(e)_-, t_{r_1}^{j(e)}) = r_1$, de donde $d_{s(S)}(z, t_{r_1}^{j(e)}) \leq s + r_1 = r < k$, entonces $d_{s(S)}(z, t_{r_1}^{j(e)}) < k$ con $t_{r_1}^{j(e)} \in N$.

Por lo tanto existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(z, x) < k$.

Hemos demostrado que $N = (N_0 - U) \cup \bigcup\limits_{u \in U} N_u$ es k-independiente y k-absorbente.

Entonces N es k-núcleo de $s(S)$.

Por lo tanto si D_0 tiene un k-núcleo, entonces $s(S)$ tiene un k-núcleo. ∎

A continuación veremos un teorema que fue demostrado por Hortensia Galeana Sánchez y Laura Pastrana Ramírez en [10], que junto con el teorema anterior provee una extensión para k-núcleos del *teorema* demostrado por Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara en [6] para núcleos.

Teorema 3.2. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Si $s(S)$ tiene un k-núcleo, entonces D_0 tiene un k-núcleo.

Demostración. Sea N un k-núcleo de $s(S)$, definimos $\eta_u = N \cap \beta_u$ para cada $u \in U$.

Afirmamos que $N_0 = (N - \bigcup_{u \in U} \eta_u) \cup \{u \in U \mid u_+ \in N\}$ es un k-núcleo de D_0.

Por demostrar que para todo $\{x, y\} \subseteq N_0$, $d_{D_0}(x, y) \geq k$ y $d_{D_0}(y, x) \geq k$ y para todo $z \in V(D_0) - N$ existe $x \in N_0$ tal que $d_{D_0}(z, x) < k$.

Primero probaremos que para todo $\{x, y\} \subseteq N_0$, $d_{D_0}(x, y) \geq k$ y $d_{D_0}(y, x) \geq k$.

Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $\{z, w\} \subseteq N_0$ tal que $d_{D_0}(z, w) < k$.

Sean $\{x, y\} \subseteq N_0$ tales que $d_{D_0}(x, y) = \min\{d_{D_0}(t, d) \mid \{t, d\} \subseteq N_0\}$.

Sea $T = (x = z_1, z_2, \ldots, z_\ell = y)$ una xy-trayectoria dirigida en D_0 tal que $\ell(T) = d_{D_0}(x, y)$, por la suposición de que existe $\{z, w\} \subseteq N_0$ tal que $d_{D_0}(z, w) < k$ y por la elección de x y y se tiene que $d_{D_0}(x, y) = \ell(T) < k$.

Por demostrar que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Consideremos los siguientes posibles casos:

Caso1) Si $z_i \notin U$ para $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, entonces T es una xy-trayectoria dirigida en $s(S)$ tal que $d_{s(S)}(x, y) < \ell(T) < k$. Como $x \notin U$ y $y \notin U$, entonces $\{x, y\} \subseteq N_0 - U$. Ahora por definición de N_0, $\{x, y\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(x, y) < k$, contradicción.

Caso 2) Si $z_i \in U$ para alguna $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\} \subseteq V(T)$ tal que $a_i \in V(T) \cap U$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$, donde $a_i = z_j$ y $a_{i+1} = z_q$ con $j < q$.

Subcaso 2.1) Consideremos el caso en que $x \notin U$ y $y \notin U$, por lo que $a_1 \neq x$ y $a_d \neq y$. Sea $s_0 = d_{D_0}(x, a_1)$, $s_i = d_{D_0}(a_i, a_{i+1})$, $s_d = d_{D_0}(a_d, y)$, $s = d_{D_0}(x, y)$. Nótese que $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_{d-1} + s_d$ por la elección de x y y, $z_j \notin N_0$ para $j \in \{2, \ldots, \ell - 1\}$. En particular $a_i \notin N_0$ y $a_{i_+} \notin N$ con $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Sea $\beta_{a_i} = \left(a_{i_-} = t_0^{a_i}, t_1^{a_i}, \ldots, t_{n(a_i)}^{a_i} = a_{i_+}\right)$, como $a_{i_-} \notin N$ y $a_{i_+} \notin N$, β_{a_i} es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$ y N es un k-núcleo de $s\,(S)$, entonces existe $t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N$.

Sea $t_b^{a_i}$ con $b = \max\left\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\right\}$ y $t_c^{a_i}$ con $c = \min\left\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\right\}$. Demostraremos que existen $\{w, w'\} \subseteq N$ tales que $d_{s(S)}\,(w, w') < k$, para esto primero demostraremos las siguientes observaciones:

1. $d_{s(S)}\left(a_{i_-}, t_c^{a_i}\right) \leq d_{s(S)}\left(a_{i_+}, z\right)$ con $z \in N$, z está bien definida ya que N es un k-núcleo de $s\,(S)$ y $a_{i_+} \notin N$.

Por definición de $s\,(S)$ tenemos que:

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, a_{i_+}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = n\,(a_i)\,k.$$

De donde

$$\begin{aligned} d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) &= n\,(a_i)\,k - d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) \\ &= n(a_i)k - (n(a_i) - 1)k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) \ldots (*) \end{aligned}$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) = d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) + d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$, como $t_b^{a_i} \in N$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) \geq k$ para todo $z \in N$, entonces

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_+}, z) = d_{s(S)}(a_{i_+}, z) \geq k - d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}).$$

Por $(*)$ tenemos que $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$.

2. $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

Tenemos que $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \leq \ell((a_{i_+}, T, a_{i+1_-})) = s_i$ y por el *Lema* 3.3

$$d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \geq d_{D_0}(a_i, a_{i+1}) = s_i.$$

Por lo tanto $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

3. $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) = s_0$ y $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d$.

Tenemos que $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) \leq \ell((x, T, a_{1_-})) = s_0$ por definición de a_1 y como $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) \geq d_{D_0}(x, a_1) = s_0$ por el *Lema* 3.3, entonces $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) = s_0$. De igual manera tenemos que $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) \leq \ell((a_{d_+}, T, y)) = s_d$, por definición de a_d y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) \geq d_{D_0}(a_d, y) = s_d$, entonces $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d$.

4. $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Primero demostrémoslo para $i = d$.

Por 1) y 3):

$$d_{s(S)}(a_{d_-}, t_c^{a_d}) \leq d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d \text{ con } y \in N.$$

Supongamos que es válido para i, es decir, $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_{i+1} + s_i$.

Por demostrar para $i-1$:

Por 1) tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i-1_-}, t_c^{a_{i-1}}) \leq d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \text{ con } t_c^{a_i} \in N.$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) = d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i})$, de donde $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) = s_{i-1}$, por 2) y por hipotesis de inducción tenemos:

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i.$$

Entonces $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i + s_{i-1}$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Ahora demostraremos que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x, t_c^{a_1}) = d_{s(S)}(x, a_{1_-}) + d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}).$$

Por (3) $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) = s_0$.

Por (4) $d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_1$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(x, t_c^{a_1}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_1 + s_0 = s = d_{D_0}(x, y) < k$, entonces $d_{s(S)}(x, t_c^{a_1}) < k$. Contradicción, ya que $\{x, t_c^{a_1}\} \subseteq N$.

Subcaso 2.2) $x \in U$ y $y \notin U$. Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\} \subseteq V(T) - \{x\}$ tal que $a_i \in V(T) \cap U$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$, donde $a_i = z_j$ y $a_{i+1} = z_q$ con $j < q$.

Por demostrar que existen $w \in N$ y $w' \in N$ tales que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Por definición $a_1 \neq x$. Sea $s_0 = d_{D_0}(x, a_1)$, $s_i = d_{D_0}(a_i, a_{i+1})$, $s_d = d_{D_0}(a_d, y)$ y $s = d_{D_0}(x, y)$. Nótese que $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_{d-1} + s_d$. Por la elección de x y y, $z_j \notin N_0$ para toda $j \in \{2, \ldots, \ell - 1\}$. En particular $a_i \notin N_0$ con $i \in \{1, \ldots, d\}$, por lo que $a_{i_-} \notin N$ y $a_{i_+} \notin N$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$. Sea $\beta_{a_i} = (a_{i_-} = t_0^{a_i}, t_1^{a_i}, \ldots, t_{n(a_i)}^{a_i} = a_{i_+})$. Como $a_{i_-} \notin N$, $a_{i_+} \notin N$, β_{a_i} es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$ y N es un k-núcleo de $s(S)$ entonces existe $t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N$. Sea $t_b^{a_i}$ con $b = \max\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\}$ y $t_c^{a_i}$ con $c = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\}$.

Demostraremos que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$, para esto primero demostraremos las siguientes observaciones:

1. $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$, z está bien definida ya que N es un k-núcleo de $s(S)$ y $a_{i_+} \notin N$.

Por definición de $s(S)$ tenemos que:

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, a_{i_+}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = n(a_i)k.$$

De donde

$$\begin{aligned} d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) &= n(a_i)k - d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) \\ &= n(a_i)k - (n(a_i)-1)k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) \ldots (*_1). \end{aligned}$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) = d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) + d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$; como $t_b^{a_i} \in N$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) \geq k$ para todo $z \in N$, por lo que

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_+}, z) = d_{s(S)}(a_{i_+}, z) \geq k - d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}).$$

Por $(*_1)$ tenemos que $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$.

2. $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

Tenemos que $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \leq \ell((a_{i_+}, T, a_{i+1_-})) = s_i$ y por el *Lema* 3.3 $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \geq d_{D_0}(a_i, a_{i+1}) = s_i$.

Por lo que $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

3. $d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) = s_0$ y $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d$.

Tenemos que $d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) \leq \ell((x_+, T, a_{1_-})) = s_0$ por definición de a_1 y $d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) \geq d_{D_0}(x, a_1) = s_0$ por el *Lema* 3.3, por lo que $d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) = s_0$.

De igual manera tenemos que $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) \leq \ell((a_{d_+}, T, y)) = s_d$, por definición de a_d y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) \geq d_{D_0}(a_d, y) = s_d$, entonces $d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d$.

4. $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Primero demostrémoslo para $i = d$.

Por 1) y 3):

$$d_{s(S)}(a_{d_-}, t_c^{a_d}) \leq d_{s(S)}(a_{d_+}, y) = s_d \text{ con } y \in N.$$

Supongámoslo válido para i, es decir, $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_{i+1} + s_i$.

Demostrémoslo para $i - 1$:

Por 1) tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i-1_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \text{ con } t_c^{a_i} \in N.$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) = d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i})$, de donde $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) = s_{i-1}$, por 2) y por hipótesis de inducción se tiene que

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i.$$

Entonces $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i + s_{i-1}$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(a_i, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Ahora demostraremos que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(x_+, t_c^{a_1}) = d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) + d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}).$$

Por (3) $d_{s(S)}(x_+, a_{1_-}) = s_0$.

Por (4) $d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_1$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(x_+, t_c^{a_1}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_1 + s_0 = s = d_{D_0}(x, y) < k$, entonces $d_{s(S)}(x_+, t_c^{a_1}) < k$. Contradicción, ya que $\{x_+, t_c^{a_1}\} \subseteq N$. Puesto que por definición de N_0, $x_+ \in N$.

Subcaso 2.3) $x \notin U$ y $y \in U$. Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\} \subseteq V(T) - \{y\}$ tal que $a_i \in V(T) \cap U$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$, donde $a_i = z_j$ y $a_{i+1} = z_q$ con $j < q$. Se demuestra de igual manera que el Subcaso 2.1) que existen $w \in N$ y $w' \in N$ tales que $d_{s(S)}(w, w') < k$, sustituyendo cuando se hable de $s(S)$, y por y_-.

Veamos su demostración.

Recordemos que por la *Observación* 3.1, $y_+ \in N$ si y sólo si $y_- \in N$.

Por demostrar que existen $w \in N$ y $w' \in N$ tales que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Por definición $a_d \neq y$.

Sea $s_0 = d_{D_0}(x, a_1)$, $s_i = d_{D_0}(a_i, a_{i+1})$, $s_d = d_{D_0}(a_d, y)$ y $s = d_{D_0}(x, y)$.

Nótese que $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_{d-1} + s_d$. Por la elección de x y y, $z_j \notin N_0$ para todo $j \in \{2, \ldots, \ell - 1\}$.

En particular $a_i \notin N_0$ con $i \in \{1, \ldots, d\}$, por lo que $a_{i_-} \notin N$ y $a_{i_+} \notin N$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$. Sea $\beta_{a_i} = (a_{i_-} = t_0^{a_i}, t_1^{a_i}, \ldots, t_{n(a_i)}^{a_i} = a_{i_+})$. Como $a_{i_-} \notin N$, $a_{i_+} \notin N$, β_{a_i} es una trayectoria dirigida de longitud $\equiv 0 \bmod k$ y N es un k-núcleo de $s(S)$ entonces existe $t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N$.

Sea $t_b^{a_i}$ con $b = \max\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\}$ y $t_c^{a_i}$ con $c = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N\}$.

Demostraremos que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$, para esto primero demostraremos las siguientes observaciones:

1. $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$, z está bien definida ya que N es un k-núcleo de $s(S)$ y $a_{i_+} \notin N$.

Por definición de $s(S)$ tenemos que:

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, a_{i_+}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) + d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = n(a_i)k.$$

De donde

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = n(a_i)k - d_{\beta_{a_i}}(t_c^{a_i}, t_b^{a_i}) - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+})$$

$$= n(a_i)k - (n(a_i) - 1)k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) = k - d_{\beta_{a_i}}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) \ldots (*_1).$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) = d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}) + d_{s(S)}(a_{i_+}, z)$ con $z \in N$; como $t_b^{a_i} \in N$, $d_{s(S)}(t_b^{a_i}, z) \geq k$ para todo $z \in N$, por lo que

$$d_{\beta_{a_i}}(a_{i_+}, z) = d_{s(S)}(a_{i_+}, z) \geq k - d_{s(S)}(t_b^{a_i}, a_{i_+}).$$

Por $(*_1)$ tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = d_{\beta_{a_i}}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, z) \text{ con } z \in N.$$

2. $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

Tenemos que $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \leq \ell((a_{i_+}, T, a_{i+1_-})) = s_i$ y por el *Lema* 3.3 $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) \geq d_{D_0}(a_i, a_{i+1}) = s_i$.

Por lo que $d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i$ con $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

3. $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) = s_0$ y $d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) = s_d$.

Tenemos que $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) \leq \ell((x, T, a_{1_-})) = s_0$ por definición de a_1 y $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) \geq d_{D_0}(x, a_1) = s_0$ por el *Lema* 3.3, por lo que $d_{s(S)}(x, a_{1_-}) = s_0$.

De igual manera tenemos que $d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) \leq \ell((a_{d_+}, T, y_-)) = s_d$, por definición de a_d y por el *Lema* 3.3, $d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) \geq d_{D_0}(a_d, y) = s_d$, entonces $d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) = s_d$.

4. $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Primero demostrémoslo para $i = d$.

Por 1) y 3):

$$d_{s(S)}(a_{d_-}, t_c^{a_d}) \leq d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) = s_d \text{ con } y \in N.$$

Supongámoslo válido para i, es decir, $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_{i+1} + s_i$.

Demostrémoslo para $i - 1$:

Por 1) tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i-1_-}, t_c^{a_{i-1}}) \leq d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \text{ con } t_c^{a_i} \in N.$$

Por definición de $s(S)$, $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) = d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i})$, de donde $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, a_{i_-}) = s_{i-1}$, por 2) y por hipótesis de inducción se tiene que

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i.$$

Entonces $d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i + s_{i-1}$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) \leq s_d + s_{d-1} + \cdots + s_i$ para $1 \leq i \leq d$.

Ahora demostraremos que existe $\{w, w'\} \subseteq N$ tal que $d_{s(S)}(w, w') < k$.

Por definición de $s(S)$:

$$d_{s(S)}(t_b^{a_d}, y_-) = d_{s(S)}(t_b^{a_d}, a_{d+}) + d_{s(S)}(a_{d+}, y_-).$$

Por (3) $d_{s(S)}(a_{d_+}, y_-) = s_d$.

Por (4) $d_{s(S)}(a_{d_-}, t_c^{a_d}) \leq s_d$.

Por ($*_1$) tenemos que $d_{\beta_{a_d}}(t_b^{a_d}, a_{d+}) = k - d_{\beta_{a_d}}(a_{d-}, t_c^{a_d})$.

De donde tenemos que $d_{s(S)}(t_b^{a_d}, a_{d+}) = d_{\beta_{a_d}}(t_b^{a_d}, a_{d+}) \leq k - s_d$.

Por lo que $d_{s(S)}(t_b^{a_d}, y_-) \leq k - s_d + s_d = k$. Contradicción, ya que $\{t_b^{a_d}, y_-\} \subseteq N$. Puesto que por definición de N_0, $y_- \in N$.

Subcaso 2.4) $x \in U$ y $y \in U$. Se demuestra de igual manera que el Subcaso 2.1) que existen $w \in N$ y $w' \in N$ tales que $d_{s(S)}(w, w') < k$, sustituyendo cuando se hable de $s(S)$, x por x_+ y y por y_-.

Concluimos por los casos 1) y 2) que para todo $\{x, y\} \subseteq N_0$, $d_{D_0}(x, y) \geq k$ y $d_{D_0}(y, x) \geq k$.

Ahora demostraremos que para todo $z \in (V(D_0) - N)$ existe $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(z, w) < k$.

Consideremos los siguientes casos posibles:

Caso 1) $z \notin U$.

Por definición de $s(S)$, $z \in V(s(S))$. Como $z \notin N_0$ y $z \notin U$, por definición de N_0, $z \notin N$, por lo que existe $w \in N$ tal que $d_{s(S)}(z, w) < k$.

Si $w \notin \bigcup\limits_{u \in U} \beta_u$, entonces $w \in N - \bigcup\limits_{u \in U} \eta_u$ y por lo tanto $w \in D_0 \cap N_0$, y por el *Lema* 3.3 tenemos que $d_{D_0}(z, w) \leq d_{s(S)}(z, w) < k$ con $w \in N_0$.

Si $w \in \bigcup\limits_{u \in U} \beta_u$.

Si $w = a_-$ para alguna $a \in U$, entonces por la *Observación* 3.1, $a_+ \in N$, por lo que $a \in N_0 \cap D_0$, por definición de N_0.

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{D_0}(z, a) \leq d_{s(S)}(z, w = a_-) < k \text{ con } a \in N_0.$$

Si $w \neq a_-$ para toda $a \in U$, entonces existe $a_1 \in U$ tal que

$$w \in \beta_{a_1} - a_{1_-} = (t_1^{a_1}, \ldots, t_{n(a_1)k}^{a_1} = a_{1_+}).$$

Nótese que como $w \neq a_{1_-}$, N es un k-núcleo, $w \in N \cap \beta_{a_1}$ y $d_{s(S)}(z, w) < k$, concluimos que $a_{1_-} \notin N$ y $w = t_c^{a_1}$ con $c = \min\{j \mid t_j^{a_1} \in N \cap \beta_{a_1}\}$. Como $a_{1_-} \notin N$, por el *Lema* 3.5 podemos construir una sucesión: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tal que

a) $d_{s(S)}\left(t_b^{a_i}, t_c^{a_{i+1}}\right) = k$

b) $a_i \in U$ para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$

c) Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$

Si $a_m \notin U$, entonces $a_m \in N$.

d) $r_{i+1} = d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_c^{a_{i+1}}) < d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = r_i$ tal que $r_m = 0$.

e) $r_i = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}, r_1 < k$

Donde $c = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in N \cap \beta_{a_i}\}$ y $s_i = d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-})$ con $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Por demostrar que $d_{D_0}(z, a_m) < k$.

Sabemos que $d_{s(S)}(z, w = t_c^{a_1}) < k$, y por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(z, t_c^{a_1}) = d_{s(S)}(z, a_{1_-}) + d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) < k;$$

además por e) tenemos que $r_1 = d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) = s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1}$.

Denotemos por $s_0 = d_{s(S)}(z, a_{1_-})$, entonces

$$d_{s(S)}(z, t_c^{a_1}) = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1} < k.$$

Por otro lado en D_0 se tiene que

$$d_{s(S)}(z, a_m) \leq d_{D_0}(z, a_1) + d_{D_0}(a_1, a_2) + \cdots + d_{D_0}(a_{m-1}, a_m)$$

por definición de las a_i.

Por el *Lema* 3.3 sabemos que

$$d_{D_0}(z, a_1) \leq d_{s(S)}(z, a_{1_-}) = s_0,$$

$$d_{D_0}(a_i, a_{i+1}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i \text{ para } 1 \leq i \leq m-2,$$

$$d_{D_0}(a_{m-1}, a_m) \leq d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m) = s_{m-1}, \text{ si } a_m \notin U,$$

$$\text{o } d_{D_0}(a_{m-1}, a_m) \leq d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-}) = s_{m-1}, \text{ si } a_m \in U.$$

Por lo tanto $d_{D_0}(z, a_m) \leq s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1}$.

Por otro lado sabemos que $d_{s(S)}(z, t_c^{a_1}) = s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} < k$.

Entonces $d_{D_0}(z, a_m) \leq s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} < k$.

Por lo tanto $d_{D_0}(z, a_m) < k$.

Ahora, si $a_m \notin U$, como $a_m \in N$, por definición de $s(S)$ y de N_0, $a_m \in N_0$.

Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$, y por la *Observación* 3.1, $a_{m_+} \in N$ y por lo tanto $a_m \in N_0$.

De donde concluimos $d_{D_0}(z, a_m) < k$ con $a_m \in N_0$.

Caso 2) Si $z \in U$, entonces por definición $s(S)$, $\{z_+, z_-\} \subseteq V(s(S))$, como $z \notin N_0$ y $z \in U$, por definición de N_0, $z_+ \notin N$ y $z_- \notin N$, por lo que existe $w \in N$ tal que $d_{s(S)}(z_+, w) < k$. Por lo que éste caso se demuestra de manera análoga al Caso 1) sustituyendo z por z_+ cuando se refiera a $s(S)$. Veamos su demostración.

Si $w \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$, entonces $w \in N - \bigcup_{u \in U} \eta_u$, por lo tanto $w \in D_0 \cap N_0$, por el *Lema* 3.3 tenemos que $d_{D_0}(z, w) \leq d_{s(S)}(z_+, w) < k$ con $w \in N_0$. Si $w \in \bigcup_{u \in U} \beta_u$.

Si $w = a_-$ para alguna $a \in U$, entonces por la *Observación* 3.1, $a_+ \in N$, por lo que $a \in N_0 \cap D_0$, por definición de N_0.

Por el *Lema* 3.3 tenemos que:

$$d_{D_0}(z, a) \leq d_{s(S)}(z_+, w = a_-) < k \text{ con } a \in N_0.$$

Si $w \neq a_-$ para toda $a \in U$, entonces existe $a_1 \in U$ tal que

$$w \in \beta_{a_1} - a_{1_-} = (t_1^{a_1}, \ldots, t_{n(a_1)k}^{a_1} = a_{1_+}).$$

Nótese que como $w \neq a_{1_-}$, N es un k-núcleo, $w \in N \cap \beta_{a_1}$ y $d_{s(S)}(z_+, w) < k$, de donde concluimos que $a_{1_-} \notin N$ y $w = t_c^{a_1}$ con $c = \min\{j \mid t_j^{a_1} \in N \cap \beta_{a_1}\}$. Como $a_{1_-} \notin N$, por el *Lema* 3.5 podemos construir una sucesión: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tal que

a) $d_{s(S)}\left(t_b^{a_i}, t_c^{a_{i+1}}\right) = k$

b) $a_i \in U$ para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$

c) Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$

Si $a_m \notin U$, entonces $a_m \in N$.

d) $r_{i+1} = d_{s(S)}(a_{i+1_-}, t_c^{a_{i+1}}) < d_{s(S)}(a_{i_-}, t_c^{a_i}) = r_i$ tal que $r_m = 0$.

e) $r_i = s_i + s_{i+1} + \cdots + s_{m-1}, r_1 < k$

Donde $c = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in N \cap \beta_{a_i}\}$ y $s_i = d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-})$ con $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Por demostrar que $d_{D_0}(z, a_m) < k$.

Sabemos que $d_{s(S)}(z_+, w = t_c^{a_1}) < k$, y por definición de $s(S)$,

$$d_{s(S)}(z_+, t_c^{a_1}) = d_{s(S)}(z_+, a_{1_-}) + d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) < k;$$

además por e) tenemos que $r_1 = d_{s(S)}(a_{1_-}, t_c^{a_1}) = s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1}$.

Denotemos por $s_0 = d_{s(S)}(z_+, a_{1_-})$, entonces

$$d_{s(S)}(z_+, t_c^{a_1}) = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1} < k.$$

Por otro lado en D_0 se tiene que

$$d_{s(S)}(z_+, a_m) \leq d_{D_0}(z, a_1) + d_{D_0}(a_1, a_2) + \cdots + d_{D_0}(a_{m-1}, a_m)$$

por definición de las a_i.

Por el *Lema* 3.3 sabemos que

$$d_{D_0}(z, a_1) \leq d_{s(S)}(z_+, a_{1_-}) = s_0,$$

$$d_{D_0}(a_i, a_{i+1}) \leq d_{s(S)}(a_{i_+}, a_{i+1_-}) = s_i \text{ para } 1 \leq i \leq m-2,$$

$$d_{D_0}(a_{m-1}, a_m) \leq d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m) = s_{m-1}, \text{ si } a_m \notin U,$$

$$\text{o } d_{D_0}(a_{m-1}, a_m) \leq d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-}) = s_{m-1}, \text{ si } a_m \in U.$$

Por lo tanto $d_{D_0}(z, a_m) \leq s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1}$.

Por otro lado sabemos que $d_{s(S)}(z_+, t_c^{a_1}) = s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} < k$.

Entonces $d_{D_0}(z, a_m) \leq s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} < k$.

Por lo tanto $d_{D_0}(z, a_m) < k$.

Ahora, si $a_m \notin U$, como $a_m \in N$, por definición de $s(S)$ y de N_0, $a_m \in N_0$.

Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N$, por la *Observación* 3.1, $a_{m_+} \in N$ y por lo tanto $a_m \in N_0$.

De donde concluimos $d_{D_0}(z, a_m) < k$ con $a_m \in N_0$.

Por lo tanto para todo $z \in (V(D_0) - N_0)$ existe $w \in N_0$ tal que $d_{D_0}(z, w) < k$.

Por lo que N_0 es un k-núcleo de D_0.

Por lo tanto si $s(S)$ tiene un k-núcleo, entonces D_0 tiene un k-núcleo. ■

A continuación veremos un corolario que concluye que una digráfica D_0 tiene k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene k-núcleo.

Corolario 3.1. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema, donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$. Para todo ciclo dirigido $\mathcal{C}$ de D_0 con $V(\mathcal{C}) \cap U \neq \emptyset$, se tiene que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$. Entonces D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo.

Demostración. Es inmediata usando los *Teoremas* 3.1 y 3.2. ■

En particular, el corolario anterior se cumple para digráficas con núcleo, puesto que un núcleo es un k-núcleo con $k = 2$, además para cada vértice $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$, tenemos que $\ell(\mathcal{C}) \geq 2$. Así, este corolario es una generalización del teorema demostrado por Galeana-Sánchez y Neumann-Lara, que se enuncia como sigue:

Si D_0 es una digráfica y $U \subseteq V(D_0)$, mediante las definiciones de s_0-sistema y s-sistema construimos la digráfica $s(S)$. Supongamos que si existe la flecha (u_+, v_+) en la digráfica $\mathcal{U}_+$, o bien, si exite la flecha (u_-, v_-) en la digráfica $\mathcal{U}_-$, entonces (u, v) está en las flechas de la digráfica D_0 inducidas por U. Entonces D_0 tiene un núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un núcleo.

Usando este teorema podemos hallar una gran variedad de digráficas que tengan núcleo, a partir de una digráfica que tenga núcleo.

Veamos un ejemplo de este teorema, consideremos la digráfica D_0 de la *Figura* 3.4, donde $U = \{a, c, f, g\}$ y cuyo núcleo es $N_0 = \{b, d, f, h\}$. Entonces $N_0 - U = \{b, d, h\}$. Construyamos la digráfica $s(S)$ con $k = 2$, la longitud de las trayectorias dirigidas es par y se muestran a continuación:

$\beta_a = (a_- = a_0, a_1, a_2 = a_+)$, $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 = c_+)$, $\beta_f = (f_- = f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 = f_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2 = g_+)$. Como $a \notin N_0$, entonces $a_-, a_+ \notin N_a$, donde N_a es el núcleo de β_a, por lo tanto $a_1 \in N_a$. Como $c \notin N_0$, entonces $c_-, c_+ \notin N_c$, donde N_c es el núcleo de β_c, por lo tanto $c_3 \in N_c$, lo cual implica que $c_1 \in N_c$. Como $f \in N_0$, entonces $\{f_-, f_+\} \subset N_f$, donde N_f es el núcleo de β_f, por lo tanto $f_2 \in N_f$, lo cual implica que $f_4 \in N_f$. Como $g \notin N_0$, entonces $g_-, g_+ \notin N_g$, donde N_g es el núcleo de β_g, por lo tanto $g_1 \in N_g$. Así, $N_a = \{a_1\}$, $N_c = \{c_1, c_3\}$, $N_f = \{f_- = f_0, f_2, f_4, f_6 = f_+\}$, $N_g = \{g_1\}$. De donde $N = (N_0 - U) \cup N_a \cup N_c \cup N_f \cup N_g = \{b, d, h, a_1, c_1, c_3, f_- = f_0, f_2, f_4, f_6 = f_+, g_1\}$. Usando este teorema, tenemos que N es el núcleo de la digráfica $s(S)$ de la *Figura* 3.5.

Ahora si consideramos la digráfica $s(S)$ de la *Figura* 3.5, donde $U = \{a, c, f, g\}$, $N_a = \{a_1\}$, $N_c = \{c_1, c_3\}$, $N_f = \{f_- = f_0, f_2, f_4, f_6 = f_+\}$, $N_g = \{g_1\}$, cuyo núcleo es $N = \{b, d, h, a_1, c_1, c_3, f_- = f_0, f_2, f_4, f_6 = f_+, g_1\}$. Por lo que $N - \bigcup\limits_{u \in U} N_u = \{b, d, h\}$ y $\{u \in U \mid u_+ \in N\} = \{f\}$. Usando el *teorema* anterior concluimos que

$$N_0 = (N - \bigcup_{u \in U} N_u) \cup \{u \in U \mid u_+ \in N\} = \{b, d, h, f\}$$

es el núcleo de la digráfica D_0 de la *Figura* 3.4.

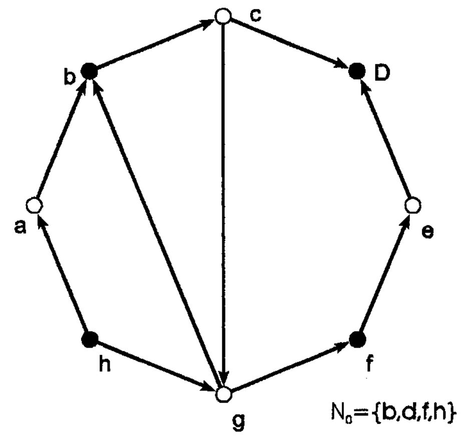


Figura 3.4. D_0 con núcleo N_0

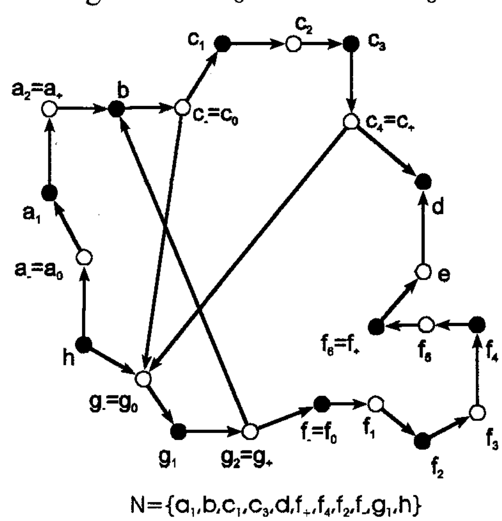


Figura 3.5. $s\,(S)$ con núcleo N

Ahora, mostremos el caso $k = 3$. Sea la digráfica D_0 como en la *Figura* 3.6, donde $U = \{c, g\}$ y cuyo 3-núcleo es $N_0 = \{a, d, g\}$. Entonces $N_0 - U = \{a, d\}$. Construyamos la digráfica $s(S)$ con $k = 3$. Como $U = \{c, g\}$, tenemos que $V(\mathcal{U}_-) = \{c_-, g_-\}$ y $F(\mathcal{U}_-) = \{(c_-, g_-)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$, $V(\mathcal{U}_+) = \{c_+, g_+\}$ y $F(\mathcal{U}_+) = \{(c_+, g_+)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$.

La longitud de las trayectorias dirigidas es $\equiv 0 \pmod 3$ y se muestran a continuación: $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3 = c_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 = g_+)$. Como $a, d \notin U$ y $\{a, d\} \subset N_0$, usando el *Teorema* 3.1 tenemos que $\{a, d\} \subset N$. Ya que $c \in U$ y $c \notin N_0$, entonces $c_-, c_+ \notin N_c$, donde N_c es el 3-núcleo de β_c. Puesto que $d_{s(S)}(c_2, d) = 2$, se tiene que $c_2 \notin N_c$. Tenemos que $c_1 \in N_c$, ya que $d_{s(S)}(c_1, d) = d_{s(S)}(c_1, g_- = g_0) = 3$. Como $g \in N_0$, entonces $\{g_-, g_+\} \subset N_g$, donde N_g es el 3-núcleo de β_g, por lo tanto $g_1, g_2, g_4, g_5 \notin N_g$. Así, $g_3 \in N_g$. Por lo tanto $N_c = \{c_1\}$, $N_g = \{g_- = g_0, g_3, g_6 = g_+\}$.

De donde $N = (N_0 - U) \cup N_c \cup N_g = \{a, d, c_1, g_- = g_0, g_3, g_6 = g_+\}$.

Usando el *Teorema* 3.1, tenemos que N es 3-núcleo de la digráfica $s(S)$ de la *Figura* 3.7.

Ahora si consideramos la digráfica $s(S)$ de la *Figura* 3.7, construida a partir de la digráfica D_0 de la *Figura* 3.6, donde $U = \{c, g\}$. Además, $V(\mathcal{U}_-) = \{c_-, g_-\}$ y $F(\mathcal{U}_-) = \{(c_-, g_-)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$, $V(\mathcal{U}_+) = \{c_+, g_+\}$ y $F(\mathcal{U}_+) = \{(c_+, g_+)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$.

La longitud de las trayectorias dirigidas es $\equiv 0 \pmod 3$ y se muestran a continuación: $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3 = c_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 = g_+)$.

Sabemos que $N = \{a, c_1, d, g_-, g_3, g_+\}$ es 3-núcleo de $s(S)$. Sea $\eta_c = N \cap \beta_c = \{c_1\}$ y $\eta_g = N \cap \beta_g = \{g_-, g_3, g_+\}$. Entonces $N - \bigcup_{u \in U} \eta_u = N - (\eta_c \cup \eta_g) = \{a, d\}$. Como $g_+ \in N$, entonces $\{u \in U \mid u_+ \in N\} = \{g\}$. Usando el *Teorema* 3.2 concluimos que

$$N_0 = (N - \bigcup_{u \in U} \eta_u) \cup \{u \in U \mid u_+ \in N\} = \{a, d, g\}$$

es 3-núcleo de la digráfica D_0 de la *Figura* 3.6.

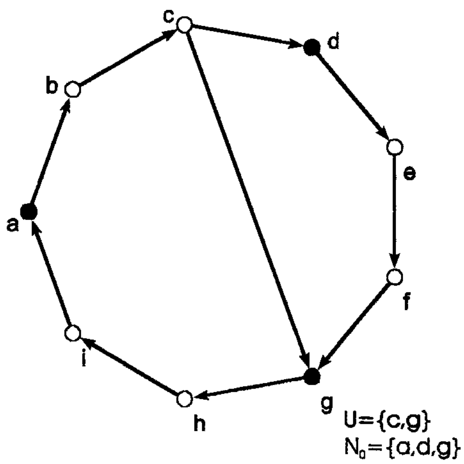


Figura 3.6. Digráfica D_0

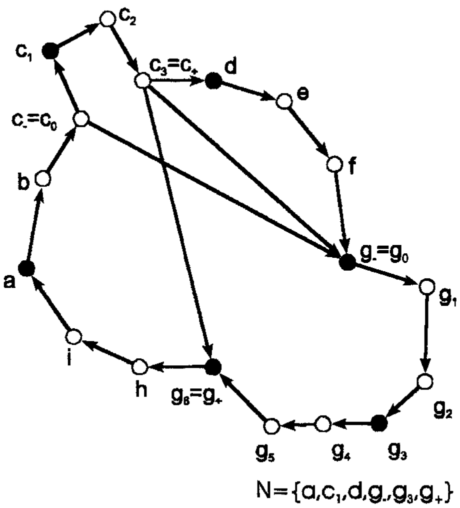


Figura 3.7. Digráfica $s(S)$

Teorema 3.3. Sea $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que si $(u_+, v_+) \in F\,(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F\,(\mathcal{U}_-)$. Entonces $(u, v) \in F\,(D_0[U])$ y para cada $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in \mathcal{C}$ se tiene que $\ell(\mathcal{C}) \geq k$, entonces el número de k-núcleos de D_0 es igual al número de k-núcleos de $s(S)$.

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los k-núcleos de D_0 y $\mathcal{K}^*$ el conjunto de todos los k-núcleos de $s(S)$.

Sea $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^*$ tal que si N es un k-núcleo de D_0, entonces $f(N) = X(N) \cup Y(N)$, donde:

$$X(N) = \{v \in V(s(S)) \mid v \in N - U\} \text{ y}$$

$$Y(N) = \{v \in V(s(S)) \mid v \in \bigcup_{u \in U} N_u\}$$

y para cada $u \in U$, definimos N_u como sigue:

Si $u \in N$, entonces N_u es el k-núcleo de β_u.

Si $u \notin N$, entonces N_u es el k-núcleo de β_u^r, donde

$$\beta_u^r = \beta_u - \{u_+ = t^u_{n(u)k}, t^u_{n(u)k-1}, \ldots, t^u_{n(u)k-[(k-r)-1]}\} \text{ con } n(u) \geq 1, \text{ y}$$

$$r = \min\{d_{D_0}(u, w) \mid w \in N_0\}.$$

En la demostración del *Teorema* 3.1 se prueba que $f(N)$ es un k-núcleo de $s(S)$.

Demostremos que el mapeo f es inyectivo.

Sean N_1 y N_2 dos k-núcleos de D_0 tal que $N_1 \neq N_2$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $N_1 - N_2 \neq \emptyset$. Sea $h \in N_1 - N_2$.

i) Si $h \notin U$, entonces $h \in V(s(S))$ y $h \in X(N_1) = N_1 - U$. Por lo tanto $h \in f(N_1)$. Como $h \notin N_2$ y $h \notin U$, entonces $h \notin X(N_2)$ y $h \notin Y(N_2)$.

De donde $h \notin f(N_2)$.

$$\therefore f(N_1) \neq f(N_2).$$

ii) Si $h \in U$, entonces, como $h \in N_1 \cap U$, N_h^1 es un k-núcleo de β_h, por el *Lema* 3.1, $\{h_+, h_-\} \subseteq N_h^1$, entonces $h_- \in Y(N_1)$. Por lo tanto $h_- \in f(N_1)$.

Luego, como $h \notin N_2$ y $h \in U$, N_h^2 es un k-núcleo de β_h^r donde

$$\beta_h^r = \beta_h - \{h_+ = t^h_{n(h)k}, t^h_{n(h)k-1}, \ldots, t^h_{n(h)k-[(k-r)-1]}\} \text{ con } n(h) \geq 1, \text{ y}$$

$$r = \min\{d_{D_0}(h, w) \mid w \in N_2\},$$

por el *Lema* 3.1, $h_- \notin N_h^2$, entonces $h_- \notin Y(N_2)$. Ahora, como $h \in U$, $h_- \notin X(N_2)$, tenemos que $h_- \notin Y(N_2)$.

Por lo tanto

$$f(N_1) \neq f(N_2).$$

De donde

$$|\mathcal{K}| \leq |\mathcal{K}^*| \ldots (a)$$

Sea $g : \mathcal{K}^* \to \mathcal{K}$ tal que si N es un k-núcleo de $s(S)$, entonces $g(N) = X(N) \cup Y(N)$, donde:

$$X(N) = \{u \in V(D_0) \mid u \in N - \bigcup_{u \in U} \eta_u\} \text{ y}$$
$$Y(N) = \{u \in V(D_0) \cap U \mid u_+ \in N\}$$

y para cada $u \in U$, definimos $\eta_u = N \cap \beta_u$.

En la demostración del *Teorema* 3.2, se prueba que $g(N)$ es un k-núcleo de D_0.

Por demostrar que g es inyectiva.

Sea $\{N_1, N_2\} \subseteq \mathcal{K}^*$ tal que $N_1 \neq N_2$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $N_1 - N_2 \neq \emptyset$.

Denotemos por $\eta_u^1 = \beta_u \cap N_1$, $\eta_u^2 = \beta_u \cap N_2$ con $u \in U$. Sea $h \in N_1 - N_2$.

i) Si $h \notin \bigcup_{u \in U} \beta_u$, entonces $h \notin \beta_u$ para todo $u \in U$ y como $h \in N_1$, se tiene que $h \notin (N_1 \cap \beta_u)$ para todo $u \in U$, y por lo tanto $h \notin \eta_u^1$ para todo $u \in U$, entonces $h \notin \bigcup_{u \in U} \eta_u^1$. Por lo tanto $h \in N_1 - \bigcup_{u \in U} \eta_u^1$.

ii) Si $h \in \bigcup_{u \in U} \beta_u$, entonces sea $a \in U$ tal que $h \in \beta_a = \{t_0^a, t_1^a, \ldots, t_{n(a)k}^a\}$ con $n(a) \geq 1$.

Denotamos por:

$$\eta_a^1 = \beta_a \cap N_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\} \text{ y}$$
$$\eta_a^2 = \beta_a \cap N_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_\ell\}.$$

Demostraremos que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset$.

I. Notemos que

$$d_{s(S)}(c_i, c_{i+1}) = k \text{ con } i \in \{1, \ldots, m-1\} \text{ y } d_{s(S)}(e_i, e_{i+1}) = k \text{ con } i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}.$$

Como N_1 es un k-núcleo de $s(S)$ y por definición de $s(S)$ tenemos que

$$d_{\beta_a}(c_i, c_{i+1}) = d_{s(S)}(c_i, c_{i+1}) \geq k \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Supongamos que $d_{\beta_a}(c_i, c_{i+1}) > k$ donde $c_i = t_j^a \in \beta_a$, entonces $d_{\beta_a}(t_{j+1}^a, c_{i+1}) \geq k$, es decir, $d_{\beta_a}(t_{j+1}^a, N_1) = d_{s(S)}(t_{j+1}^a, N_1) \geq k$ con $t_{j+1}^a \notin N_1$. Contradicción, puesto que N_1 es un k-núcleo.

Por lo tanto $d_{\beta_a}(c_i, c_{i+1}) = d_{s(S)}(c_i, c_{i+1}) = k$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Análogamente se demuestra que $d_{s(S)}(e_i, e_{i+1}) = k$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

Como N_2 es un k-núcleo de $s(S)$ y por definición de $s(S)$:

$$d_{\beta_a}(e_i, e_{i+1}) = d_{s(S)}(e_i, e_{i+1}) \geq k \text{ con } i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}.$$

Supongamos que $d_{\beta_a}(e_i, e_{i+1}) > k$ donde $e_i = t_j^a \in \beta_a$, entonces $d_{\beta_a}(t_{j+1}^a, e_{i+1}) \geq k$, es decir, $d_{\beta_a}(t_{j+1}^a, N_2) = d_{s(S)}(t_{j+1}^a, N_2) \geq k$ con $t_{j+1}^a \notin N_2$. Contradicción, puesto que N_2 es un k-núcleo.

Por lo tanto $d_{\beta_a}(e_i, e_{i+1}) = d_{s(S)}(e_i, e_{i+1}) = k$ para todo $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$.

II. Demostremos que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset$.

Supongamos que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 \neq \emptyset$, por lo que existe $c_i \in \eta_a^1$ tal que $c_i = e_j$ con $e_j \in \eta_a^2$.

Por hipótesis $h \in N_1 - N_2$ y $h \in \beta_a$, entonces $h \in \eta_a^1$, $h = c_s$.

Supongamos que $i \geq s$, por la observación anterior $d_{\beta_a}(h = c_s, c_i) = t_k$, $1 \leq t \leq n(a)$, sustituyendo tenemos que $d_{\beta_a}(h = c_s, c_i = e_j) = tk$. Como $h \in \beta_a$, se tiene que $h = e_b$, y por lo tanto $h \in N_2$; contradicción, ya que $h \in N_1 - N_2$.

De donde $c_i \neq e_j$ para todo i, j.

$$\therefore \eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset.$$

Análogamente se demuestra que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset$ si $i \leq s$.

Supongamos que $i \leq s$, por la observación anterior $d_{\beta_a}(c_i, h = c_s) = t_k$, $1 \leq t \leq n(a)$, sustituyendo tenemos que $d_{\beta_a}(c_i = e_j, h = c_s) = tk$. Como $h \in \beta_a$, se tiene que $h = e_d$, y por lo tanto $h \in N_2$, contradicción, ya que $h \in N_1 - N_2$.

De donde $c_i \neq e_j$ para todo i, j.

$$\therefore \eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset.$$

Ahora demostremos que $g(N_1) \neq g(N_2)$.

Consideremos los siguientes posibles casos:

Caso 1) $a_+ \in N_1$ y $a_+ \notin N_2$.

Como $a_+ \in N_1$, entonces $a_+ \in \eta_a^1$, puesto que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset$, tenemos que $a_+ \notin \eta_a^2$ y por lo tanto $a_+ \notin N_2$. Por definición de g, si $a_+ \in N_1$, entonces $a \in Y(N_1)$, por lo que $a \in g(N_1)$. Como $a_+ \notin N_2$, entonces $a \notin Y(N_2)$, y por definición de g, $a \notin X(N_2)$.

Por lo tanto $a \notin Y(N_2) \cup X(N_2)$.

Así, $g(N_1) \neq g(N_2)$.

Caso 2) $a_+ \notin N_1$ y $a_+ \in N_2$.

Como $a_+ \in N_2$, entonces $a \in Y(N_2)$, por lo que $a \in g(N_2)$. Como $a_+ \notin N_1$, entonces $a \notin Y(N_1) \cup X(N_1) = g(N_1)$.

Por lo tanto $g(N_1) \neq g(N_2)$.

Caso 3) $a_+ \notin N_1$ y $a_+ \notin N_2$.

Como $a_+ \notin N_1$, por la *Observación* 3.1, $a_- \notin N_1$. Como $a_+ \notin N_2$, por la *Observación* 3.1, $a_- \notin N_2$.

Definamos $t_{c_1}^a$ y $t_{c_2}^a$ con

$$c_1 = \min\{j \mid t_j^a \in \beta_a \cap N_1\},$$

$$c_2 = \min\{j \mid t_j^a \in \beta_a \cap N_2\},$$

$$r_a^1 = d_{s(S)}(a_-, t_{c_1}^a),$$

$$r_a^2 = d_{s(S)}(a_-, t_{c_2}^a).$$

Puesto que $\eta_a^1 \cap \eta_a^2 = \emptyset$, $t_{c_1}^a \neq t_{c_2}^a$ y $r_a^1 \neq r_a^2$.

Supongamos que $r_a^2 < r_a^1$. Ya que $a_- \notin N_2$, por el *Lema* 3.5, existe una sucesión $a = a_1, a_2, \ldots, a_m$ tal que:

a) $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_i}, t_{c_2}^{a_{i+1}}) = k$

b) $a_i \in U$ con $i \in \{1, \ldots, m-1\}$

c) Si $a_m \in U$, entonces $a_{m_-} \in N_2$.

Si $a_m \notin U$, entonces $a_m \in N_2$.

d) $r_{i+1}^2 < r_i^2$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $r_m^2 = 0$

donde:

$$b_2 = \max\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N_2\},$$

$$c_2 = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N_2\},$$

$$r_i^2 = d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_2}^{a_i}).$$

Definamos de igual manera:

$$b_1 = \max\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N_1\},$$

$$c_1 = \min\{j \mid t_j^{a_i} \in \beta_{a_i} \cap N_1\},$$

$$r_i^1 = d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_1}^{a_i}).$$

Nótese que: $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_i}, a_{i_+}) > d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_i}, a_{i_+})$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Demostración por inducción sobre i.

- Para $i = 1$, tenemos que $a_1 = a$ y por hipótesis se tiene que $r_a^1 > r_a^2$, es decir,

$$r_a^1 = d_{s(S)}(a_-, t_{c_1}^a) > d_{s(S)}(a_-, t_{c_2}^a) = r_a^2.$$

Por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_1}, a_{1_+}) = k - r_a^1$ y $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_1}, a_{1_+}) = k - r_a^2$.

Por lo tanto $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_1}, a_{1_+}) > d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_1}, a_{1_+})$.

- Supongamos que es válido para $i-1$, esto es, $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{i-1}}, a_{i-1_+}) > d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i-1_+})$
- Demostrémoslo para i.

Por el *Lema* 3.5 inciso (a), tenemos que $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{i-1}}, t_{c_2}^{a_i}) = k$.

Por definición de $s(S)$:

$$k = d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{i-1}}, t_{c_2}^{a_i}) = d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{i-1}}, a_{i-1_+}) + d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_{c_2}^{a_i})$$

$$> d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i-1_+}) + d_{s(S)}(a_{i-1_+}, t_{c_2}^{a_i}).$$

Entonces, $d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, t_{c_2}^{a_i}) < k$ con $t_{b_1}^{a_{i-1}} \in N_1$.

Por lo que $t_{c_2}^{a_i} \notin N_1$.

Usando la definición de $s(S)$ tenemos que:

$$d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, t_{c_2}^{a_i}) = d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_2}^{a_i}) < k \quad \ldots(1)$$

$$\text{y } d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, t_{c_1}^{a_i}) = d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i_-}) + d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_1}^{a_i}) \geq k \quad \ldots(2).$$

De (1) tenemos que:

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_2}^{a_i}) < k - d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i_-}) = \xi.$$

De (2) se tiene que

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_1}^{a_i}) \geq k - d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{i-1}}, a_{i_-}) = \xi.$$

Por lo que

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_2}^{a_i}) < \xi \leq d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_1}^{a_i}).$$

De donde

$$d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_2}^{a_i}) < d_{s(S)}(a_{i_-}, t_{c_1}^{a_i}).$$

Por lo tanto $r_i^2 < r_i^1$.

Por el *Lema* 3.1, $d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_i}, a_{i_+}) = k - r_i^2$ y $d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_i}, a_{i_+}) = k - r_i^1$.

Entonces

$$d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_i}, a_{i_+}) > d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_i}, a_{i_+}).$$

En especial para $m-1$, tenemos que

$$d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) > d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) \quad \ldots (3).$$

Ahora demostraremos que $g(N_1) \neq g(N_2)$.

Si $a_m \notin U$, entonces por el *Lema* 3.5.c), $a_m \in N_2 \cap V(s(s))$.

Por definición de g, $a_m \in X(N_2) = N_2 - \bigcup_{u \in U} \eta_u$.

Entonces $a_m \in g(N_2)$.

Por demostrar que $a_m \notin N_1$.

Por definicion de $s(S)$ y por el *Lema* 3.5.a) se tiene que

$$\begin{aligned} k = d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{m-1}}, a_m) &= d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m) \\ &> d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_m) = d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_m). \end{aligned}$$

Así, $d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_m) < k$ con $t_{b_1}^{a_{m-1}} \in N_1$. Por lo que $a_m \notin N_1 - \bigcup_{u \in U} \eta_u = X(N_1)$.

Como $a_m \notin U$, entonces $a_m \notin Y(N_1) = \{u \in V(D_0) \cap U \mid u_+ \in N_1\}$, de donde $a_m \notin g(N_1)$ y como $a_m \in g(N_2)$, concluimos que $g(N_1) \neq g(N_2)$.

Si $a_m \in U$, entonces por el *Lema* 3.5.c), $a_{m_-} \in N_2$. Por la *Observación* 3.1, $a_{m_+} \in N_2$, y por la definición de g, $p(a_{m_+}) = a_m \in Y(N_2)$ y por lo tanto $a_m \in g(N_2)$.

Por demostrar que $a_{m_-} \notin N_1$.

Se demuestra de manera análoga al caso para cuando $a_m \notin U$ intercambiando a_m por a_{m_-} en $s(S)$.

Por definición de $s(S)$ y por el *Lema* 3.5.a),

$$k = d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{m-1}}, a_{m_-}) = d_{s(S)}(t_{b_2}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-})$$
$$> d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_{m-1_+}) + d_{s(S)}(a_{m-1_+}, a_{m_-}) = d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_{m_-}).$$

Así, $d_{s(S)}(t_{b_1}^{a_{m-1}}, a_{m_-}) < k$ con $t_{b_1}^{a_{m-1}} \in N_1$. Por lo que $a_{m_-} \notin N_1$. Entonces por definición de g, $p(a_{m_-}) \notin x(N_1) = N_1 - \bigcup\limits_{u \in U} \eta_u$. Por la *Observación* 3.1, $a_{m+} \notin N_1$, entonces $p(a_{m_-}) = p(a_{m_+}) \notin Y(N_1)$, por lo que $p(a_{m_-}) \notin g(N_1)$.

De donde se sigue que

$$g(N_1) \neq g(N_2).$$

Por lo tanto

$$|\mathcal{K}^*| \leq |\mathcal{K}|. \ldots (b)$$

A partir de (a) y (b) concluimos que

$$|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}^*|. \blacksquare$$

Observemos que este teorema en particular se cumple para $k = 2$, esto es, que el número de núcleos en una digráfica D_0 es igual al número de núcleos en la digráfica $s\,(S)$, ilustremos lo anterior poniendo como ejemplo las digráficas D_0 y $s\,(S)$ de las *Figuras* 3.4 y 3.5, respectivamente. La digráfica D_0 tiene únicamente el núcleo: $N_0 = \{b, d, f, h\}$. Es decir que $|\mathcal{K}| = 1$. Recordemos que $U = \{a, c, f, g\}$, las trayectorias de longitud par son: $\beta_a = (a_- = a_0, a_1, a_2 = a_+)$, $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 = c_+)$, $\beta_f = (f_- = f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 = f_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2 = g_+)$.

De donde $N_a = \{a_1\}$, $N_c = \{c_1, c_3\}$, $N_f = \{f_- = f_0, f_2, f_4, f_6 = f_+\}$, $N_g = \{g_1\}$.

Sea $X\,(N_0) = \{v \in V\,(s\,(S)) \mid v \in N_0 - U\} = \{b, d, h\}$ y $Y\,(N_0) = \{v \in (s\,(S)) \mid v \in \bigcup\limits_{u \in U} N_u\} = \{a_1, c_1, c_3, f_+, f_4, f_2, f_-, g_1\}$.

Entonces $f(N_0) = X(N_0) \cup Y(N_0) = \{a_1, b, c_1, c_3, d, f_+, f_4, f_2, f_-, g_1, h\}$ por el *Teorema* 3.1 $f(N_0)$ es un núcleo de $s(S)$ y por el *Teorema* 3.3 sabemos que el mapeo f es inyectivo. Por lo que la digráfica $s(S)$ tiene únicamente el núcleo: $N = f(N_0) = \{a_1, b, c_1, c_3, d, f_+, f_4, f_2, f_-, g_1, h\}$. Así, $|\mathcal{K}^*| = 1$. Por lo que se comprueba que $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}^*|$.

Ahora, veamos el caso $k = 3$. La digráfica D_0 de la *Figura* 3.6 tiene los siguientes 3-núcleos: $N_0 = \{a, d, g\}$, $M_0 = \{b, e, h\}$ y $P_0 = \{c, f, i\}$. Es decir que $|\mathcal{K}| = 3$. Sabemos que $U = \{c, g\}$, consideremos el 3-núcleo $N_0 = \{a, d, g\}$. Entonces $N_0 - U = \{a, d\}$. Como $U = \{c, g\}$, tenemos que $V(\mathcal{U}_-) = \{c_-, g_-\}$ y $F(\mathcal{U}_-) = \{(c_-, g_-)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$, $V(\mathcal{U}_+) = \{c_+, g_+\}$ y $F(\mathcal{U}_+) = \{(c_+, g_+)\}$ ya que $(c, g) \in F(D_0)$. La longitud de las trayectorias dirigidas es $\equiv 0 \pmod 3$ y se muestran a continuación: $\beta_c = (c_- = c_0, c_1, c_2, c_3 = c_+)$, $\beta_g = (g_- = g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 = g_+)$. De donde $N_c = \{c_1\}$, $N_g = \{g_- = g_0, g_3, g_6 = g_+\}$.

Sea $X(N_0) = \{v \in V(s(S)) \mid v \in N_0 - U\} = \{a, d\}$ y $Y(N_0) = \{v \in (s(S)) \mid v \in \bigcup_{u \in U} N_u\} = \{c_1, g_-, g_3, g_+\}$.

Entonces $f(N_0) = X(N_0) \cup Y(N_0) = \{a, c_1, d, g_-, g_3, g_+\}$ por el *Teorema* 3.1 $f(N_0)$ es un 3-núcleo de $s(S)$. De manera análoga tenemos que $f(M_0) = \{b, c_2, e, g_1, g_4, h\}$ y $f(P_0) = \{c_- c_+, f, g_2, g_5, i\}$ son 3-núcleos de $s(S)$. Por el *Teorema* 3.3 sabemos que el mapeo f es inyectivo. Por lo que la digráfica $s(S)$ tiene los siguientes 3-núcleos: $N = f(N_0) = \{a, c_1, d, g_-, g_3, g_+\}$, $M = f(M_0) = \{b, c_2, e, g_1, g_4, h\}$ y $P = f(P_0) = \{c_-, c_+, f, g_2, g_5, i\}$. Así, $|\mathcal{K}^*| = 3$. Por lo que se comprueba que $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}^*|$.

A continuación veremos porque son necesarias las condiciones que se piden en los resultados demostrados en esta sección, daremos ejemplos de digráficas D_0 (respectivamente $s(S)$) que no satisfagan alguna de las hipótesis, y construiremos su digráfica $s(S)$ (respectivamente D_0), observando que los teoremas no se cumplen.

Nota 3.1. La condición de que si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(D_0[U])$, no puede eliminarse de las hipótesis del *Corolario* 3.1.

Veamos primeramente el caso para $k = 2$.

La digráfica D_0 de la *Figura* 3.8, donde $U = \{b, e\}$, no tiene núcleo. Supongamos que D_0 tiene un núcleo N_0. Si $a \in N_0$, como $\{(a, b), (a, d), (e, a)\} \subset F(D_0)$, entonces $b, d, e \notin N_0$. Puesto que $(b, a) \notin F(D_0)$ y $(b, c) \in F(D_0)$, tenemos que $c \in N_0$. Ya que $(d, c), (d, a) \notin F(D_0)$, se tiene que d no es absorbido por algún elemento de N_0, lo cual contradice que N_0 es núcleo. Si $a \notin N_0$, como $\{(a, b), (a, d)\} \subset F(D_0)$, entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1) $b \in N_0$. Como $\{(a, b), (b, c), (d, b)\} \subset F(D_0)$, entonces $a, c, d \notin N_0$. Puesto que $\Gamma^+_{D_0}(c) = \{d\}$, tenemos que c no es absorbido por algún elemento de N_0, lo cual contradice que N_0 es núcleo.

Caso 2) $d \in N_0$. Como $\{(a, d), (d, b), (c, d)\} \subset F(D_0)$, entonces $a, b, c \notin N_0$. Ya que $\Gamma^+_{D_0}(b) = \{c\}$, se tiene que b no es absorbido por algún elemento de N_0, lo cual contradice que N_0 es núcleo.

Por lo que N_0 no es núcleo de D_0.

Por lo tanto D_0 no tiene núcleo.

Construyamos la digráfica $s(S)$ a partir de D_0, usando las definiciones de s_0 y s-sistema. Observemos que $V(\mathcal{U}_-) = \{b_-, e_-\}$, $V(\mathcal{U}_+) = \{b_+, e_+\}$, $F(\mathcal{U}_-) = \emptyset$ y $F(\mathcal{U}_+) = \{(b_+, e_+)\}$. Notemos además que $(b, e) \notin F(D_0)$. La digráfica $s(S)$ con núcleo $N = \{b_1, d, e_- = e_0, e_2, e_4 = e_+\}$, se muestra en la *Figura* 3.9.

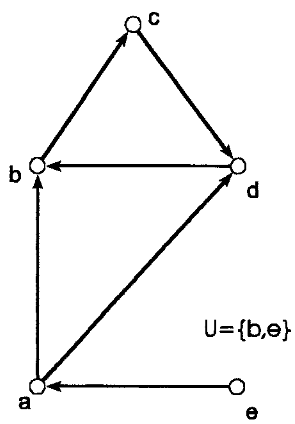


Figura 3.8. Digráfica D_0

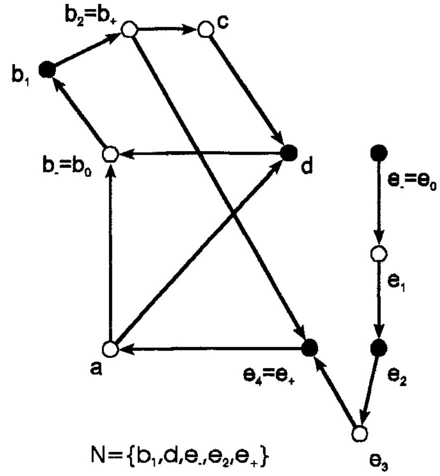


Figura 3.9. Digráfica $s(S)$

Ahora veamos el caso en el que la digráfica D_0 tiene un núcleo y la digráfica $s(S)$ no tiene núcleo. Sea D_0 una digráfica, con $U = \{b, d, e\}$ y núcleo $N_0 = \{d, e\}$, como se muestra en la *Figura* 3.10. Construyamos la digráfica $s(S)$ a partir de la digráfica D_0, usando las definiciones de s_0 y s-sistema. Observemos que $V(\mathcal{U}_-) = \{b_-, d_-, e_-\}$, $V(\mathcal{U}_+) = \{b_+, d_+, e_+\}$, $F(\mathcal{U}_-) = \{(d_-, e_-)\}$ y $F(\mathcal{U}_+) = \emptyset$. La digráfica $s(S)$ se muestra en la *Figura* 3.11. Notemos que $(d, e) \notin F(D_0)$.

Demostremos que la digráfica $s(S)$ no tiene núcleo. Supongamos que $s(S)$ tiene un núcleo N. Como el vértice $d_4 = d_+$ tiene exgrado cero, entonces $d_4 = d_+ \in N$, ya que de lo contrario, no sería absorbido por algún vértice de N.

Como $(d_3, d_4 = d_+) \in F(s(S))$, tenemos que $d_3 \notin N$. Puesto que $\Gamma^+_{s(S)}(d_2) = \{d_3\}$, tenemos que $d_2 \in N$. Ya que $(d_1, d_2) \in F(s(S))$, se tiene que $d_1 \notin N$. Como $\Gamma^+_{s(S)}(d_- = d_0) = \{d_1, e_0\}$, tenemos los siguientes casos:

Caso 1) $d_- = d_0 \in N$.

Como $\{(a, d_- = d_0), (b_2 = b_+, d_- = d_0), (c, d_- = d_0), (d_- = d_0, e_- = e_0)\} \subset F(s(S))$, entonces $a, b_2 = b_+, c, e_- = e_0 \notin N$. Puesto que $\Gamma^+_{s(S)}(e_- = e_0) = \{e_1\}$, tenemos que $e_1 \in N$. Ya que $(e_1, e_2) \in F(s(S))$, se tiene que $e_2 \notin N$. Como $\Gamma^+_{s(S)}(e_2) = \{e_3\}$, entonces $e_3 \in N$. Puesto que $(e_3, e_4 = e_+) \in F(s(S))$, se tiene que $e_4 = e_+ \notin N$. Además, como $\Gamma^+_{s(S)}(e_4 = e_+) = \{a\}$ y $a \notin N$, entonces $e_4 = e_+$ no es absorbido por algún elemento de N, lo cual contradice que N es núcleo.

Caso 2) $e_- = e_0 \in N$.

Como $\{(d_- = d_0, e_- = e_0), (e_- = e_0, e_1)\} \subset F(s(S))$, entonces $d_- = d_0, e_1 \notin N$. Puesto que $\Gamma^+_{s(S)}(e_1) = \{e_2\}$, tenemos que $e_2 \in N$. Ya que $(e_2, e_3) \in F(s(S))$, se tiene que $e_3 \notin N$. Como $\Gamma^+_{s(S)}(e_3) = \{e_4 = e_+\}$, entonces $e_4 = e_+ \in N$. Puesto que $(e_4 = e_+, a) \in F(s(S))$, se tiene que $a \notin N$. Como $\Gamma^+_{s(S)}(a) = \{b_- = b_0, d_- = d_0\}$ y $d_- = d_0 \notin N$, entonces $b_- = b_0 \in N$. Ya que $(b_- = b_0, b_1) \in F(s(S))$, se tiene que $b_1 \notin N$. Como $\Gamma^+_{s(S)}(b_1) = \{b_2 = b_+\}$, entonces $b_2 = b_+ \in N$. Puesto que $(b_2 = b_+, c) \in F(s(S))$, se tiene que $c \notin N$. Además, como $\Gamma^+_{s(S)}(c) = \{d_- = d_0\}$ y $d_- = d_0 \notin N$, entonces c no es absorbido por algún elemento de N, lo cual contradice que N es núcleo.

Por lo que N no es núcleo de $s(S)$.

Por lo tanto la digráfica $s(S)$ no tiene núcleo. ∎

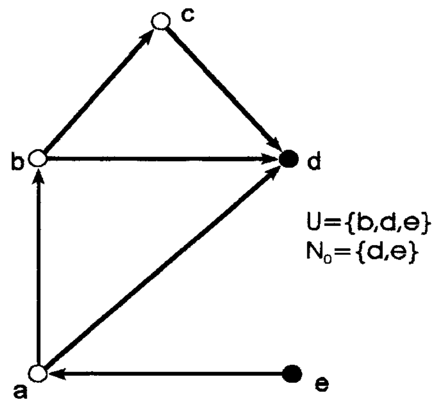


Figura 3.10. Digráfica D_0

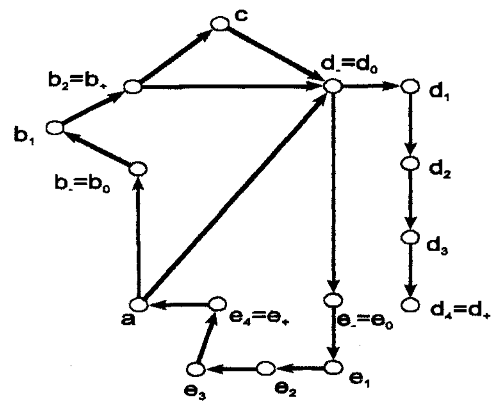


Figura 3.11. Digráfica $s\left(S\right)$

A continuación veamos el caso para $k > 2$.

Dada la digráfica D_0 con 3-núcleo $N_0 = \{d, g\}$ y $U = \{c, g\}$, como se muestra en la *Figura* 3.12. Construyamos la digráfica $s\left(S\right)$, como se muestra en la *Figura* 3.13. Notemos que $(g, c) \notin F\left(D_0\right)$ y $(g_-, c_-) \in F\left(s\left(S\right)\right)$. Veamos que la digráfica $s\left(S\right)$ no tiene 3-núcleo.

Supongamos que la digráfica $s\left(S\right)$ tiene un 3-núcleo N. Si $g_+ \notin N$, como $\delta^+_{s(S)}\left(g_+\right) = 0$, entonces g_+ no es absorbido por algún elemento de N, lo que contradice que N sea 3-núcleo. Por lo tanto $g_+ \in N$. Como $(g_2, g_+) \in F\left(s\left(S\right)\right)$, por ser N un 3-núcleo, tenemos que $g_2 \notin N$. De igual forma, como $d_{s(S)}\left(g_1, g_+\right) = 2$ y N es un 3-núcleo, entonces $g_1 \notin N$.

Si $g_- \in N$, entonces por ser N un 3-núcleo y como $\{(c_+, g_-), (f, g_-)\} \subset F\left(s\left(S\right)\right)$ y $d_{s(S)}\left(c_2, g_-\right) = d_{s(S)}\left(e, g_-\right) = 2$, entonces $c_2, c_+, e, f \notin N$. Si $d \notin N$, se contradice el hecho de que N es un 3-núcleo, puesto que $d_{s(S)}\left(d, x\right) \geq 3$ para toda $x \in N$. Por lo tanto $d \in N$. Como $(c_+, d) \in F\left(s\left(S\right)\right)$, por ser N un 3-núcleo, tenemos que $c_+ \notin N$. Análogamente, como $d_{s(S)}\left(c_2, d\right) = 2$ y N es un 3-núcleo, entonces $c_2 \notin N$. Si $c_1 \notin N$, se contradice la hipótesis de que N es un 3-núcleo ya que $d_{s(S)}(c_1, x) \geq 3$ para toda $x \in N$. Por lo que $c_1 \in N$, contradicción, puesto que $d_{s(S)}(g_-, c_1) = 2$ y $\{g_-, c_1\} \subset N$. Por lo tanto N no es 3-núcleo.

Si $g_- \notin N$, consideremos el vértice c_-.

Si $c_- \in N$, entonces como $\{(b, c_-), (g_-, c_-), (a, c_-)\} \subset F(s(S))$ y $d_{s(S)}(f, c_-) = d_{s(S)}(c_+, c_-) = 2$, tenemos que $a, b, c_+, f, g_- \notin N$. Si $e \in N$, como $(d, e) \in F(s(S))$, entonces $d \notin N$. Ahora, si $c_2 \notin N$, se contradice la hipótesis de que N es un 3-núcleo ya que $d_{s(S)}(c_2, x) \geq 3$ para toda $x \in N$. Por lo que $c_2 \in N$, contradicción, puesto que $d_{s(S)}(c_-, c_2) = 2$ y $\{c_-, c_2\} \subset N$. Por lo tanto N no es 3-núcleo.Si $e \notin N$, como $d_{s(S)}(e, x) \geq 3$ para toda $x \in N$, tenemos que N no es 3-núcleo.

Si $c_- \notin N$, tenemos que $c_1 \in N$ o $c_2 \in N$. Si $c_2 \in N$, se contradice la hipótesis de que N es un 3-núcleo ya que $d_{s(S)}(g, c_2) = 3$. Por lo tanto $c_2 \notin N$. Si $c_1 \in N$, como $(c_-, c_1) \in F(s(S))$ y $d_{s(S)}(a, c_1) = d_{s(S)}(b, c_1) = d_{s(S)}(g_-, c_1) = 2$, entonces $a, b, c_-, g_- \notin N$. Consideremos el vértice f. Si $f \notin N$, se contradice el hecho de que N es un 3-núcleo puesto que $d_{s(S)}(f, x) \geq 3$ para toda $x \in N$. Si $f \in N$, como $(e, f) \in F(s(S))$ y $d_{s(S)}(d, f) = 2$, entonces $d, e \notin N$. Ahora, consideremos el vértice c_+. Si $c_+ \notin N$, puesto que $d_{s(S)}(c_+, x) \geq 3$ para toda $x \in N$, se contradice el supuesto de que N es un 3-núcleo. Por lo que $c_+ \in N$, contradicción, ya que $d_{s(S)}(c_1, c_+) = 2$.

Por lo tanto $s(S)$ no tiene 3-núcleo.

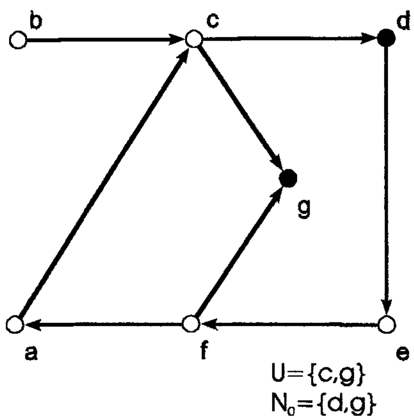


Figura 3.12. Digráfica D_0

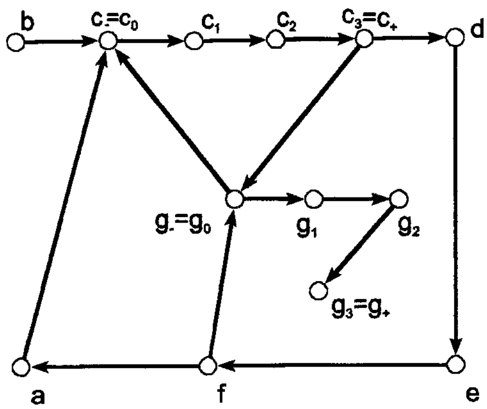


Figura 3.13. Digráfica $s\left(S\right)$

Dada la digráfica D_0 de la *Figura* 3.14 con $U = \{b, g\}$, construiremos su digráfica $s\left(S\right)$, como se muestra en la *Figura* 3.15. Veamos que la digráfica D_0 es un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod 3$, por lo tanto D_0 no tiene 3-núcleo, mientras que la digráfica $s\left(S\right)$ tiene un 3-núcleo $N = \{b_-, b_+, e, g_1\}$.

Notemos que $(g, b) \notin F\left(D_0\right)$ y $(g_+, b_+) \in F\left(s\left(S\right)\right)$. ∎

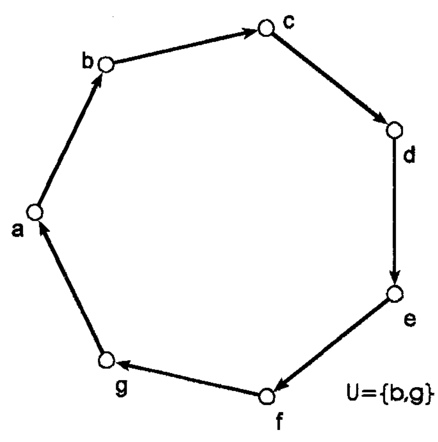


Figura 3.14. Digráfica D_0

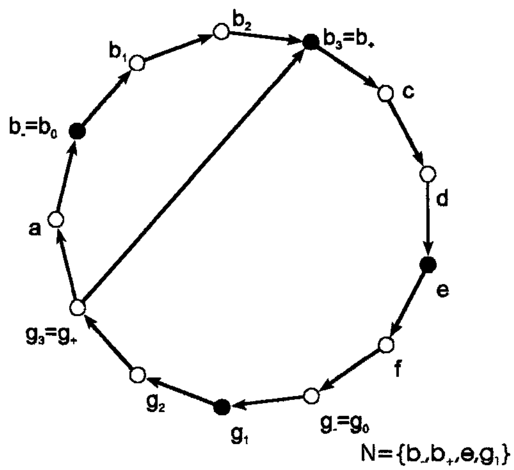


Figura 3.15. Digráfica $s(S)$

Nota 3.2. La condición de que $\ell(\beta_u) \cong 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ no puede eliminarse de las demostraciones de los *Teoremas* 3.1 y 3.2.

Veamos primeramente el caso cuando $k = 2$.

En la *Figura* 3.16 se muestra la digráfica D_0 con $U = \{b\}$ y núcleo $N_0 = \{a, c\}$. Construyamos su digráfica $s(S)$ como se muestra en la *Figura* 3.17. Observemos que la longitud de la trayectoria β_u es igual a 3. La digráfica $s(S)$ no tiene núcleo, puesto que es un ciclo de longitud impar.

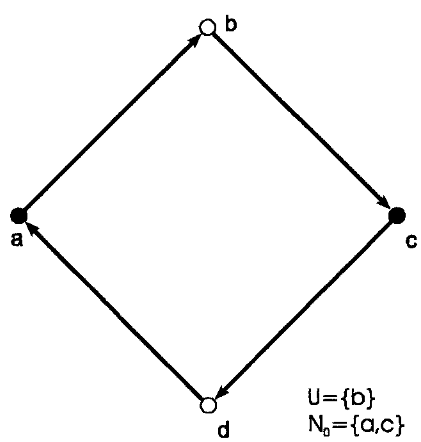


Figura 3.16. Digráfica D_0

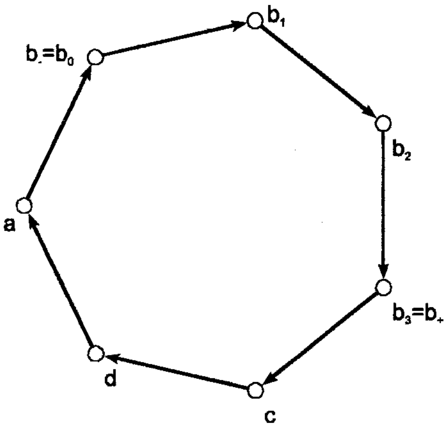


Figura 3.17. Digráfica $s\,(S)$

Ahora, veamos el caso de una digráfica D_0 que tiene núcleo y su digráfica $s\,(S)$ no tiene núcleo. En la *Figura* 3.18, se muestra la digráfica D_0 con $U = \{b\}$. La digráfica D_0 no tiene núcleo, ya que es un ciclo de longitud impar. Construyamos su digráfica $s\,(S)$ como se muestra en la *Figura* 3.19. Observemos que la longitud de la trayectoria β_u es igual a 3, y que $N = \{a, b_1, b_3 = b_+\}$ es un núcleo de la digráfica $s\,(S)$. ■

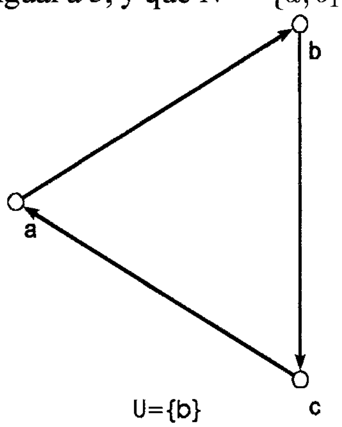


Figura 3.18. Digráfica D_0

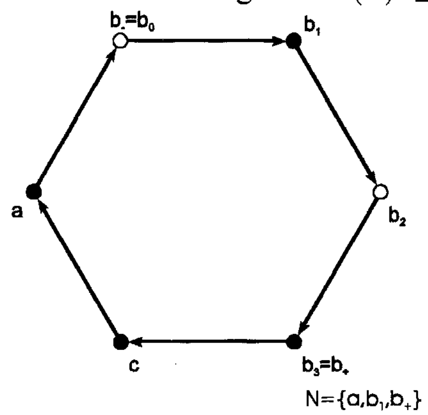


Figura 3.19. Digráfica $s\,(S)$

Ahora, veamos el caso para $k > 2$.

En la *Figura* 3.20 se muestra a la digráfica D_0 con $U = \{c\}$ y un 3-núcleo $N_0 = \{a, d\}$. En la *Figura* 3.21 se muestra la digráfica $s\,(S)$. Observemos que la longitud de la trayectoria β_c es igual a 4. Veamos que la digráfica $s(S)$ no tiene 3-núcleo, puesto que $s(S)$ es un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod 3$.

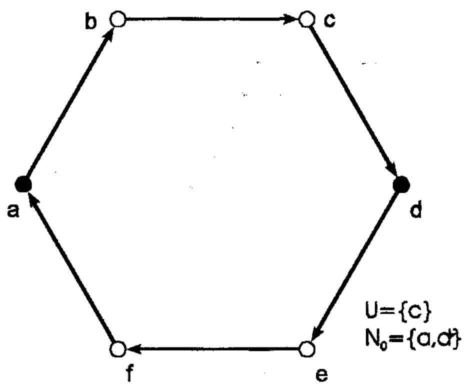


Figura 3.20. Digráfica D_0

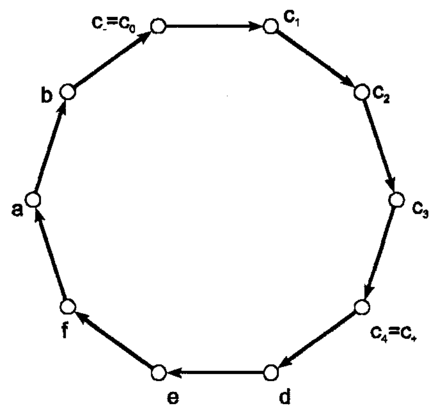


Figura 3.21. Digráfica $s(S)$

Veamos el caso en el que una digráfica D_0 no tiene 3-núcleo y su digráfica $s(S)$ tiene un 3-núcleo. Sea la digráfica D_0 de la *Figura* 3.22, con $U = \{e\}$, se demostró anteriormente que esta digráfica no tiene 3-núcleo. Construyamos su digráfica $s(S)$ como se muestra en la *Figura* 3.23. Notemos que la longitud de la trayectoria β_e es igual a 5, y que $N = \{b, e_-, e_3, f\}$ es un 3-núcleo de la digráfica $s(S)$. ∎

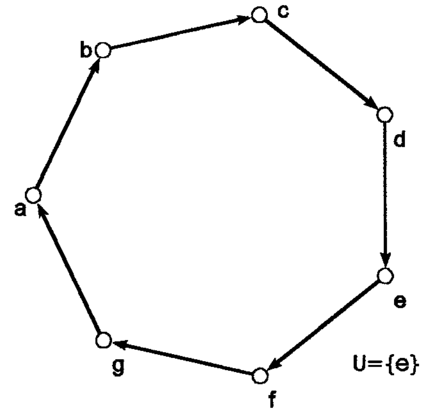


Figura 3.22. Digráfica D_0

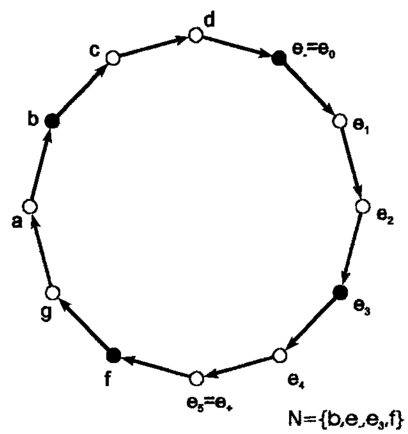


Figura 3.23. Digráfica $s\,(S)$

Nota 3.3. La condición siguiente:

para cada $u \in U$ y cada ciclo $\mathcal{C} \subseteq D_0$ con $u \in C$, se tiene que $\ell\,(\mathcal{C}) \geq k$

no puede eliminarse de las hipótesis del *Teorema* 3.1.

En la *Figura* 3.24 se muestra la digráfica D_0 con $U = \{d\}$ y $N_0 = \{a\}$ es un 5-núcleo de D_0. Construyamos la digráfica $s\,(S)$ como se muestra en la *Figura* 3.25. Notemos que $\mathcal{C} = (a, b, c, d) \subseteq D_0$ y $\mathcal{C} \cap U \neq \emptyset$, por lo que $\ell\,(\mathcal{C}) = 4 < 5$. Observemos que la digráfica $s\,(S)$ no tiene un 5-núcleo, ya que es un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod 5$. ■

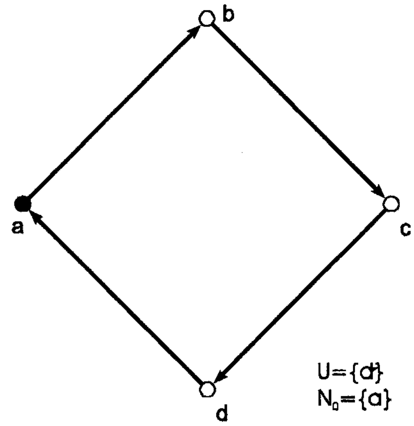


Figura 3.24. Digráfica D_0

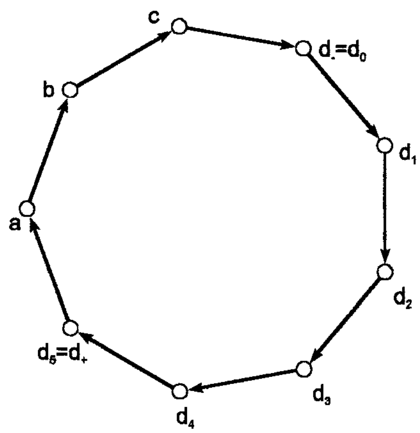


Figura 3.25. Digráfica $s(S)$

3.3 Digráficas k-Núcleo Perfectas.

En esta sección definiremos las digráficas núcleo perfectas, las núcleo imperfectas críticas y sus correspondientes en k-núcleos. Demostraremos que toda digráfica que no tiene núcleo, tiene una subdigráfica inducida que es núcleo imperfecta crítica, y veremos que este resultado se satisface para k-núcleos, es decir, toda digráfica que no tiene k-núcleo, tiene una subdigráfica inducida k-núcleo imperfecta crítica. Probaremos además que toda digráfica núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa, veremos que este resultado no se cumple para k-núcleos, para lo cual daremos un ejemplo de una digráfica k-núcleo imperfecta crítica que no es fuertemente conexa.

En la *sección* 3.2 se demostró que una digráfica D tiene un k-núcleo si y sólo si la digráfica $s(S)$ (que se construye a partir de D) tiene un k-núcleo. Observamos además, que este resultado se cumple para $k = 2$. Este caso particular, fue demostrado por Hortensia Galeana Sánchez y Victor Neumann Lara en [6], quienes demostraron también que lo anterior se cumple para digráficas núcleo perfectas y núcleo imperfectas críticas, el teorema dice lo siguiente:

Sea D_0 una digráfica y $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema,donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que $\mathcal{U}_+$ y $\mathcal{U}_-$ son digráficas núcleo perfectas tales que:

i) si $(u_+, v_-) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(\mathrm{Si}m(D_0[U]))$.

ii) si $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$ y $(z_+, w_+) \in F(\mathcal{U}_+)$, entonces $w \neq u$.

Entonces $s(S)$ es una digráfica núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) si y sólo si D_0 es una digráfica núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica).

Observaremos que este resultado no se satisface para digráficas k-núcleo perfectas y tampoco para digráficas k-núcleo imperfectas críticas. Daremos un ejemplo de una digráfica D que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) y su correspondiente digráfica $s\,(S)$ que no es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Demostraremos que si $s\,(S)$ es una digráfica k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), entonces D es una digráfica k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica).

De esta forma mostraremos que no es posible hacer una extensión del *Corolario* 3.1 para digráficas k-núcleo perfectas ni para k-núcleo imperfectas críticas como la que se realizó para las núcleo perfectas y las núcleo imperfectas críticas.

3.3.1 Definiciones

A continuación daremos las definiciones de digráficas núcleo perfectas, núcleo imperfectas críticas, y sus correspondientes para k-núcleos.

Definición 3.4. Sea D una digráfica, D es núcleo-perfecta (NP) si D tiene núcleo y toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

Definición 3.5. Sea D una digráfica, D es k-núcleo perfecta (KNP) si D tiene k-núcleo y toda subdigráfica inducida de D tiene k-núcleo.

Un ejemplo de digráfica núcleo perfecta es la digráfica de la *Figura* 3.26, cuyo núcleo es $N_0 = \{b, d, e\}$. Observemos que ninguna de las subdigráficas inducidas de D tiene ciclos de longitud impar, por lo que todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo. Una digráfica k-núcleo perfecta es la que se muestra en la *Figura* 3.27, cuyo núcleo es $N_0 = \{a, e\}$.

Observemos que las componentes conexas de las subdigráficas inducidas son vértices aislados o trayectorias de longitud menor o igual a 6, por lo que todas sus subdigráficas tienen 4-núcleo.

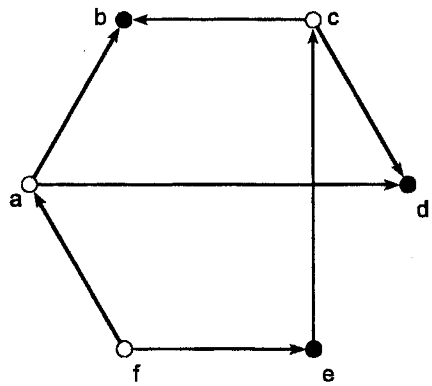


Figura 3.26. Digráfica Núcleo Perfecta

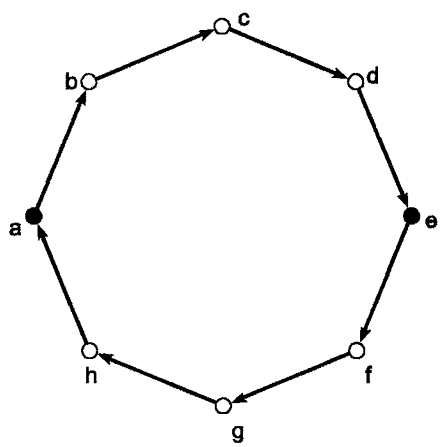


Figura 3.27. Digráfica 4-Núcleo Perfecta

Definición 3.6. D es núcleo imperfecta crítica (NIC) si D no tiene núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo.

Definición 3.7. D es k-núcleo imperfecta crítica ($KNIC$) si D no tiene k-núcleo, pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene k-núcleo.

En la *Figura* 3.28 se muestra la digráfica D, la cual no tiene núcleo, ya que es un ciclo dirigido de longitud impar. Observemos también que ninguna de sus subdigráficas inducidas tienen ciclos dirigidos de longitud impar, por lo que todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo. Por lo tanto D es un ejemplo de digráfica núcleo imperfecta crítica.

Así, todas las digráficas que son ciclos dirigidos de longitud impar son digráficas núcleo imperfectas críticas.

La digráfica D de la *Figura* 3.28 es un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod 4$, por lo que D no tiene 4-núcleo. Notemos que las componentes conexas de las subdigráficas inducidas de D son vértices aislados o trayectorias de longitud menor o igual a 5, por lo que todas las subdigráficas inducidas de D tienen 4-núcleo. Por lo tanto D es 4-núcleo imperfecta crítica.

Así, todas las digráficas que son ciclos dirigidos de longitud $\not\equiv 0 \pmod k$ son digráficas k-núcleo imperfectas críticas. ∎

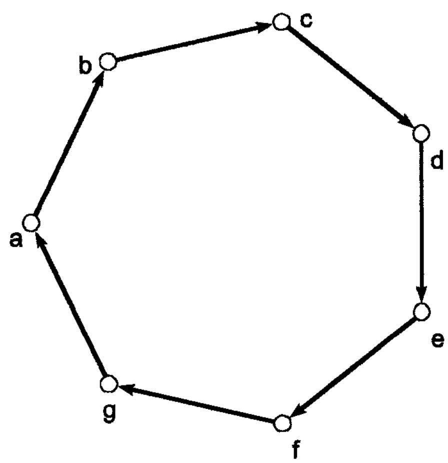


Figura 3.28. Digráfica D

3.3.2 Resultados importantes

En esta sección mostraremos que toda digráfica que no tiene núcleo, tiene una subdigráfica inducida que es núcleo imperfecta crítica, también probaremos que toda digráfica que no tiene k-núcleo, tiene una subdigráfica inducida k-núcleo imperfecta crítica. Después demostraremos que toda digráfica núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa. Este resultado fue utilizado en [6] por Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara para demostrar que una digráfica D es núcleo perfecta si y sólo si $s(S)$ es núcleo perfecta. Buscando extender este teorema a digráficas k-núcleo perfectas y k-núcleo imperfectas críticas se propone el siguiente enunciado: "Toda digráfica k-núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa", veremos que no se cumple, dando un ejemplo de una digráfica que es k-núcleo imperfecta crítica y no es fuertemente conexa. Además, veremos un ejemplo de una digráfica D que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) y su correspondiente digráfica $s(S)$ que no es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Por último, demostraremos que si $s(S)$ es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), entonces D es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). De esta forma, se demuestra que no es posible hacer una extensión del teorema de digráficas núcleo perfectas a digráficas k-núcleo perfectas (respectivamente k-núcleo imperfectas críticas).

Teorema 3.4. Si D no tiene núcleo, entonces D tiene una subdigráfica inducida NIC.

Demostración. Sea D una digráfica tal que D no tiene núcleo. Si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, entonces D es NIC.

Supongamos que existe al menos una subdigráfica inducida de D que no tiene núcleo.

Sea H_1 una subdigráfica inducida de D tal que H_1 no tiene núcleo. Si toda subdigráfica inducida de H_1 tiene núcleo, entonces H_1 es NIC y por lo tanto se cumple el teorema.

Supongamos que existe al menos una subdigráfica inducida de H_1 tal que no tenga núcleo, sea ésta H_2. De donde, si toda subdigráfica de H_2 tiene núcleo, entonces H_2 es NIC.

Supongamos que existe H_3 una subdigráfica inducida de H_2 tal que H_3 no tiene núcleo.

Siguiendo con este proceso y puesto que D es finita y como toda digráfica con uno o dos vértices tiene núcleo, entonces podemos obtener una H_m subdigráfica inducida de H_{m-1} tal que H_m no tiene núcleo y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo. Por lo tanto H_m es NIC. ■

Teorema 3.5. Si D no tiene k-núcleo, entonces D tiene una subdigráfica inducida $KNIC$.

Demostración. Sea D una digráfica tal que D no tiene k-núcleo. Si toda subdigráfica inducida de D tiene k-núcleo, entonces D es $KNIC$.

Supongamos que existe al menos una subdigráfica inducida de D que no tiene k-núcleo.

Sea H_1 una subdigráfica inducida de D tal que H_1 no tiene k-núcleo. Si toda subdigráfica inducida de H_1 tiene k-núcleo, entonces H_1 es $KNIC$ y por lo tanto se cumple el teorema.

Supongamos que existe al menos una subdigráfica inducida de H_1 tal que no tenga k-núcleo, sea ésta H_2. De donde, si toda subdigráfica de H_2 tiene k-núcleo, entonces H_2 es $KNIC$.

Supongamos que existe H_3 una subdigráfica inducida de H_2 tal que H_3 no tiene k-núcleo. Siguiendo con este proceso y puesto que D es finita y como toda digráfica con uno o dos vértices tiene k-núcleo, entonces podemos obtener una H_m subdigráfica inducida de H_{m-1} tal que H_m no tiene k-núcleo y todas sus subdigráficas inducidas tienen k-núcleo.

Por lo tanto H_m es $KNIC$. ■

Teorema 3.6. Si D es NIC, entonces D es fuertemente conexa.

Demostración. Supongamos que D no es fuertemente conexa, entonces D tiene dos o más componentes fuertemente conexas.

Sea D_1 la subdigráfica inducida por los vértices de la componente fuertemente conexa terminal de D. Puesto que D es NIC, D_1 tiene núcleo, sea N_1 núcleo de D_1.

Sea $H = \{v \in V(D) \mid \text{existe } (v,z) \in F(D), z \in N_1\}$ y $S = D - (N_1 \cup H)$. Como S es una subdigráfica inducida de D, S tiene núcleo. Sea N_2 núcleo de S.

Afirmamos que $N = N_1 \cup N_2$ es núcleo de D.

Sea $\{x,y\} \subseteq N$. Por demostrar que N es un conjunto independiente en D, es decir, que $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D)$.

Tenemos los siguientes casos:

1. $\{x,y\} \subset N_1$. Como N_1 es núcleo de D_1, N_1 es un conjunto independiente, entonces $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D)$.

2. $\{x,y\} \subset N_2$. Como N_2 es núcleo de S, N_2 es un conjunto independiente y por lo tanto $(x,y) \notin F(D)$ y $(y,x) \notin F(D)$.

3. $x \in N_1$ y $y \in N_2$. Por definición de S, tenemos que $(y,w) \notin F(D)$ con $w \in N_1$. En particular $(y,x) \notin F(D)$. Como $y \in N_2$, por definición de S y H, tenemos que

$y \notin V(D_1)$. Además, como $x \in N_1 \subset V(D_1)$ y D_1 es la componente fuertemente conexa terminal, entonces $(x, y) \notin F(D)$.

4. $y \in N_1$ y $x \in N_2$. Por definición de S, tenemos que $(x, w) \notin F(D)$ con $w \in N_1$. En particular $(x, y) \notin F(D)$. Como $x \in N_2$, por definición de S y H, tenemos que $x \notin V(D_1)$. Además, como $y \in N_1 \subset V(D_1)$ y D_1 es la componente fuertemente conexa terminal, entonces $(y, x) \notin F(D)$.

Ahora demostremos la absorbencia de N en D, es decir, si $z \in V(D) - N$, entonces existe $(z, x) \in F(D)$ tal que $x \in N$.

Sea $z \in V(D) - N$.

1. $z \in H$. Entonces por definición de H existe $(z, x) \in F(D)$ tal que $x \in N_1$, más aún como $x \in N_1$, tenemos que $x \in N$.

Por lo que existe $(z, x) \in F(D)$ tal que $x \in N$.

2. $z \in S - N_2$. Entonces como N_2 es núcleo de S, se tiene que existe $(z, x) \in F(D)$ tal que $x \in N_2$, más aún $x \in N$.

Por lo tanto existe $(z, x) \in F(D)$ tal que $x \in N$.

Por lo tanto $N = N_1 \cup N_2$ es núcleo de D. Contradicción, puesto que D es NIC.

$\therefore$ D es fuertemente conexa. ■

Veamos que el teorema anterior no se cumple para k-núcleos.

Proponemos el siguiente enunciado:

Si D es $KNIC$, entonces D es fuertemente conexa.

Demostremos mediante un ejemplo que esta proposición no se cumple.

Sea D la digráfica dada en la *Figura* 3.29. Primero observemos que D no tiene k-núcleo para $k = 3$.

Supongamos que N_0 es 3-núcleo de D.

Como $\delta_D^+(h) = \delta_D^+(j) = \delta_D^+(l) = 0$, entonces $\{h, j, l\} \subseteq N_0$. Después tomemos $z \in V(D)$ tal que $d_D(z, x) = 3$ con $x \in N_0$, entonces $z \in N_0$.

Puesto que $d_D(e, h) = d_D(c, l) = d_D(a, j) = 3$, entonces $\{a, c, e\} \subseteq N_0$. Pero como $d_D(a, c) = d_D(c, e) = d_D(e, a) = 2$, entonces N_0 no es 3-núcleo. Contradicción. Por lo tanto D no tiene 3-núcleo.

Observemos que no existe un camino dirigido de h a j, por lo que D no es fuertemente conexa.

Veamos que todas las subdigráficas inducidas propias de D tienen 3-núcleo. En las digráficas de la *Figura* 3.30 se muestra que las subdigráficas de D tienen 3-núcleo, los vértices con interior negro pertenecen al 3-núcleo de la subdigráfica.

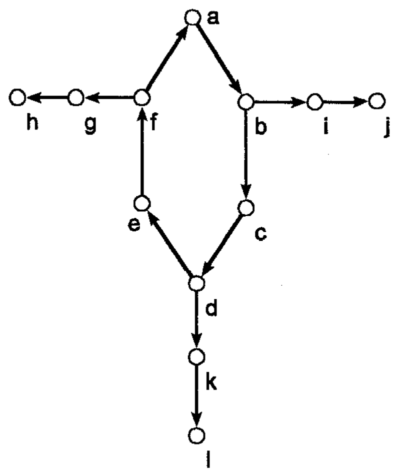
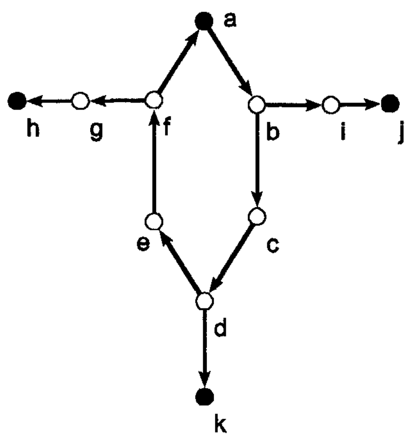
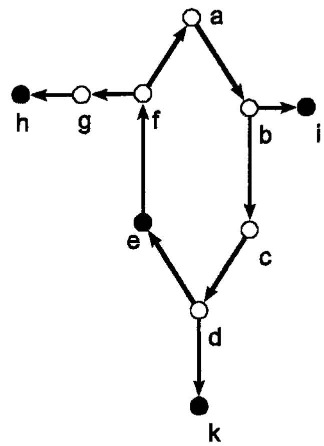
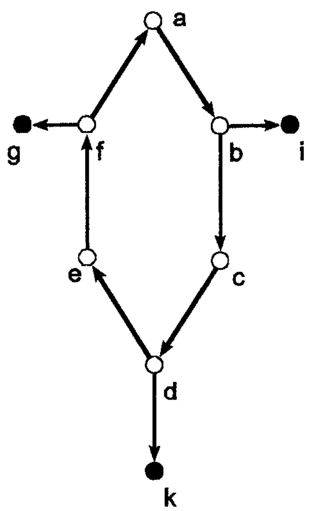
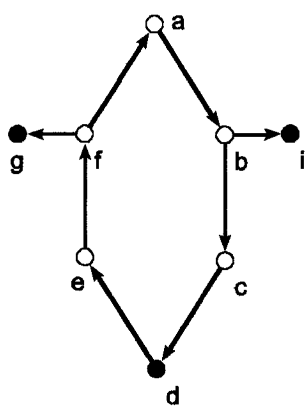


Figura 3.29. Digráfica D 3-NIC









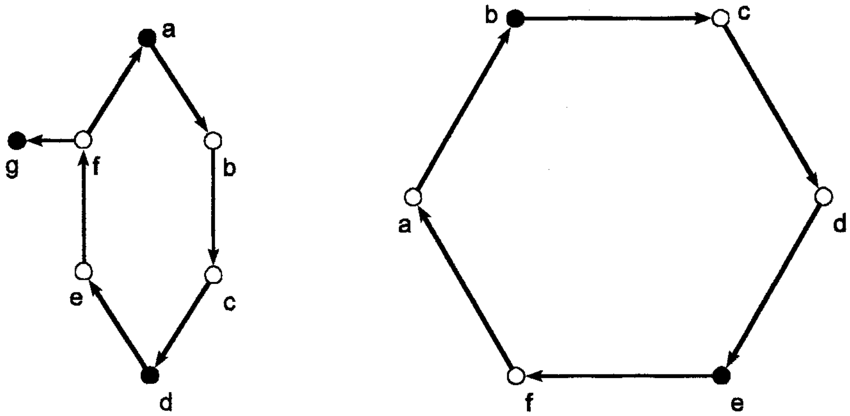


Figura 3.30. Subdigráficas de D

Por lo tanto D es 3-núcleo imperfecta crítica y no es fuertemente conexa.

De donde concluimos que si D es k-núcleo imperfecta crítica no implica que D es fuertemente conexa.

Por lo tanto la proposición no se cumple. Por lo que no es posible extender el *Teorema* 3.6 para digráficas con k-núcleos.

Hemos demostrado en las sección anterior que bajo ciertas condiciones una digráfica D_0 tiene un k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un k-núcleo, en particular D_0 tiene un núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene un núcleo. En [6] Hortensia Galeana Sánchez y Victor Neumann Lara demostraron lo siguiente:

Sea D_0 una digráfica y $S = (S_0, \beta, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$ un s-sistema,donde $S_0 = (D_0, U, U_+, U_-)$. Supongamos que $\mathcal{U}_+$ y $\mathcal{U}_-$ son digráficas núcleo perfectas tales que:

i) si $(u_+, v_+) \in F(\mathcal{U}_+)$ o $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$, entonces $(u, v) \in F(\mathrm{Si}m(D_0[U]))$.

ii) si $(u_-, v_-) \in F(\mathcal{U}_-)$ y $(z_+, w_+) \in F(\mathcal{U}_+)$, entonces $w \neq u$.

Entonces D_0 es una digráfica núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) si y sólo si $s(S)$ es una digráfica núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica).

Para la demostración de este teorema utilizaron el *Teorema* 3.6, que dice que: "Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica, entonces D es fuertemente conexa". Tratando de hacer una extensión de estos resultados para digráficas con k-núcleos, propusimos el siguiente enunciado: "Si D es una digráfica k-núcleo imperfecta crítica, entonces D es fuertemente conexa". Pero demostramos que este enunciado no se cumple.

Ahora veremos que no es posible extender el teorema demostrado en [6] para digráficas núcleo perfectas a digráficas k-núcleo perfectas y tampoco a digráficas k-núcleo imperfectas críticas. Daremos un ejemplo de una digráfica D que es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) y su correspondiente digráfica $s(S)$ que no es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica). Demostraremos que si $s(S)$ es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), entonces D es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica).

Propusimos el siguiente enunciado:

Si D es KNP, entonces $s(S)$ es KNP.

Demostremos mediante un ejemplo que esta proposición no se cumple.

La *Figura* 3.31 muestra una digráfica D que es 3-núcleo perfecta, cuyo 3-núcleo es $N_0 = \{b, e\}$. Sea $U = V(D)$, contruyamos la digráfica $s(S)$, con $k = 3$. Además $F(\mathcal{U}_+) = \emptyset$ y $(u_-, v_-) \in F(s(S))$ si $(u, v) \in F(D)$ para todo $\{u, v\} \subseteq U$. La digráfica $s(S)$ se muestra en la *Figura* 3.32, la cual tiene 3-núcleo $N = \{a_1, b_-, b_+, c_2, d_1, e_-, e_+, f_2\}$.

Pero no es 3-núcleo perfecta puesto que tiene una subdigráfica inducida que no tiene 3-núcleo y que se muestra en la *Figura* 3.33.

Por lo tanto si D es KNP no implica que $s(S)$ es KNP. Por lo que la proposición no es válida.

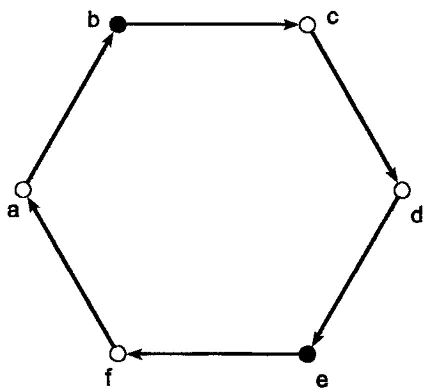


Figura 3.31. Digráfica D 3-NP

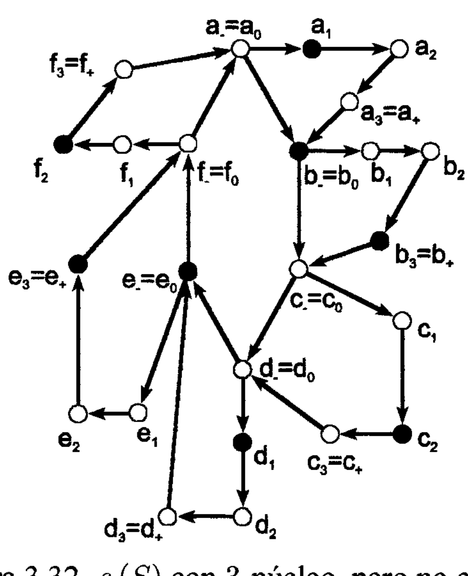


Figura 3.32. $s\,(S)$ con 3-núcleo, pero no es NP

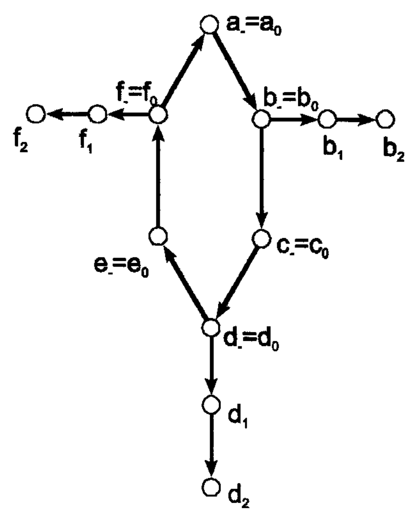


Figura 3.33. Subdigráfica inducida de $s\,(S)$

Proponemos el siguiente enunciado:

Si D es $KNIC$, entonces $s(S)$ es $KNIC$.

Demostremos mediante un ejemplo que esta proposición no es válida.

Consideremos la digráfica D de la *Figura* 3.33, la cual es 3-núcleo imperfecta crítica, puesto que no tiene 3-núcleo pero todas sus subdigráficas inducidas si tienen 3-núcleo, como se mostró anteriormente. Ahora construyamos su digráfica $s\,(S)$, considerando $U = V\,(D)$, $F\,(\mathcal{U}_+) = \emptyset$ y $(u_-, v_-) \in F\,(s\,(S))$ si $(u,v) \in F\,(D)$ para todo $\{u,v\} \subseteq U$. Esta digráfica se muestra en la *Figura* 3.34.

Demostremos primeramente que $s\,(S)$ no tiene 3-núcleo. Supongamos lo contrario. Sea N un 3-núcleo de $s\,(S)$. Puesto que $\delta_D^+\,(h_+) = \delta_D^+\,(j_+) = \delta_D^+\,(l_+) = 0$ y como N es 3-absorbente, entonces $\{h_+, j_+, l_+\} \subseteq N$. De la *Observación* 3.1, se sigue que $\{h_-, j_-, l_-\} \subseteq N$. Como N es 3-independiente por ser 3-núcleo, entonces $\{g_1, f_2, e_-, e_+, i_1, b_2, a_-, a_+, k_1, d_2, c_-, c_+\}$ deberían de pertenecer a N. Pero $d_{s(S)}\,(f_2, a_-) = 2$, $d_{s(S)}\,(b_2, c_-) = 2$ y $d_{s(S)}\,(d_2, e_-) = 2$. Por lo que $f_2 \notin N$. Como

$d_{s(S)}(f_1, x) \geq 3$ con $x \in N$, por ser N 3-núcleo, entonces $f_1 \in N$, pero $d_{s(S)}(e_-, f_1) = d_{s(S)}(e_+, f_1) = 2$ implica que $\{e_-, e_+\} \nsubseteq N$, como $d_{s(S)}(e_2, f_1) = 3$ se sigue que $e_2 \in N$. Por otro lado como $d_{s(S)}(d_+, e_2) = 4$, entonces $d_+ \in N$, lo que implica que $d_2 \notin N$ y $d_- \in N$. Como $d_{s(S)}(d_-, l_-) = 2$ y $l_- \in N$ tenemos que $d_- \notin N$ y por consiguiente $d_+ \notin N$. Puesto que no existe $x \in N$ tal que $d_{s(S)}(d_+, x) \leq 2$, entonces N no es 3-núcleo de $s(S)$. De manera análoga analizamos los casos $b_2 \notin N$ y $d_2 \notin N$. De donde concluimos que $s(S)$ no tiene 3-núcleo.

Observemos que $s(S)$ tiene una subdigráfica inducida que no tiene 3-núcleo y que se muestra en la *Figura* 3.33. Por lo tanto $s(S)$ no es 3-núcleo imperfecta crítica. De donde concluimos que si D es $KNIC$ no implica que $s(S)$ es $KNIC$. Por lo que la proposición no se cumple.

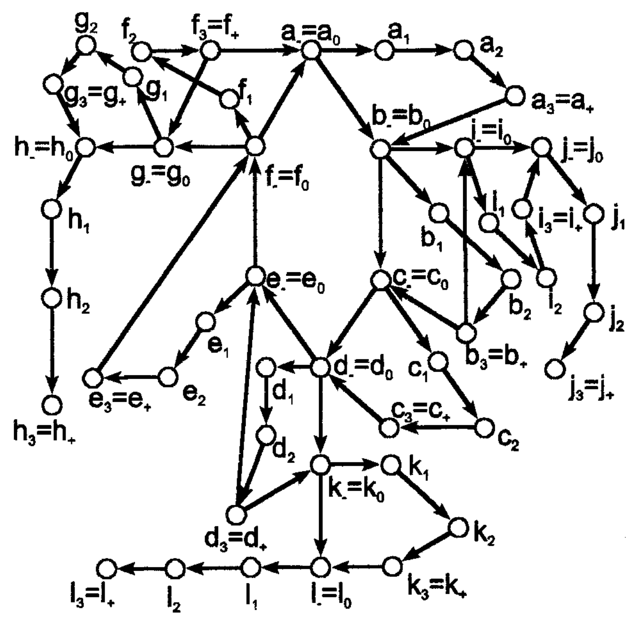


Figura 3.34. Digráfica $s(S)$

Teorema 3.7. Si $s(S)$ es KNP (respectivamente $KNIC$), entonces D_0 es KNP (respectivamente $KNIC$).

Demostración. Demostremos primeramente que si toda subdigráfica inducida propia de $s(S)$ tiene k-núcleo, entonces toda subdigráfica inducida propia de D_0 tiene k-núcleo.

Supongamos que toda subdigráfica inducida propia de $s(S)$ tiene k-núcleo y sea H una subdigráfica inducida propia de D_0. Consideremos el siguiente s-sistema: $s' = (s'_0, \beta', \mathcal{U}'_+, \mathcal{U}'_-)$ donde $s'_0 = (H, U, U'_+, U'_-)$, $U' = V(H) \cap U$, $U'_+ = \{u_+ \mid u \in U'\}$, $U'_- = \{u_- \mid u \in U'\}$, $\beta' = \{\beta_u \mid u \in U'\}$, $\mathcal{U}'_+ = \mathcal{U}_+[U'_+]$ y $\mathcal{U}'_- = \mathcal{U}_-[U'_-]$. Claramente $s(S')$ es una subdigráfica inducida propia de $s(S)$. De donde $s(S')$ tiene un k-núcleo. Se sigue del *Teorema* 3.1. que H tiene un k-núcleo. Ahora, la afirmación del *Teorema* 3.2 se sigue del *Teorema* 3.1. ∎

A continuación definiremos las digráficas C_n que utilizaremos en las demostraciones de los resultados que veremos más adelante.

Definición 3.8. La digráfica $C_n = C_n(1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm [n/2])$ está definida por: $V(C) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $F(C) = \{(u, v) \mid v - u \in \{1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm [n/2]\} \pmod{n}\}$.

La digráfica C_n^{k-1} es obtenida de C intercambiando la flecha $(0,1)$ por una 01-trayectoria dirigida de longitud $k-1$, T con $V(T) \cap V(C) = \{0, 1\}$.

Teorema 3.8. Para $n \geq 4$ y $k \geq 3$, tenemos que C_n tiene un k-núcleo y C_n^k no tiene un k-núcleo.

Como una importante aplicación de los *Teoremas* 3.1 y 3.2 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.9. Toda digráfica α es una subdigráfica inducida de una digráfica D con (respectivamente sin) k-núcleo.

Demostración. Sea D_0 una digráfica con (respectivamente sin) k-núcleo tal que existe un conjunto $U \subseteq V(D_0)$ que satisface las siguientes condiciones $|U| = |V(\alpha)| = p$ y $\mathrm{Si}\, m(D_0)[U]$ es una digráfica completa (tomamos como ejemplo $D_0 = C_{2p}$ (respectivamente $D_0 = C_{2p}^{k-1}$) y $U = \{0, 2, 4, \ldots, 2p-2\}$). $D_0 = C_{2p}$ tiene un k-núcleo (respectivamente $D_0 = C_{2p}^{k-1}$ no tiene un k-núcleo). Tomamos $\mathcal{U}_+$ y $\mathcal{U}_-$ tales que $\mathcal{U}_+[U_+] \cong \alpha$ y $F(\mathcal{U}_-) = \emptyset$, y sea β_u una trayectoria dirigida de longitud positiva $\equiv 0 \pmod k$. De donde obtenemos un s-sistema. Por el *Teorema* 3.1 tenemos que $s(S)$ tiene un k-núcleo (respectivamente no tiene un k-núcleo). Por lo $s(S)[U_+] \cong \alpha$. ∎

Corolario 3.3. Existe un número infinito de digráficas núcleo imperfectas críticas que contienen a una digráfica dada.

Demostración. Se sigue del teorema anterior, ya que a partir de una digráfica núcleo imperfecta crítica $D_0 = C_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm m)$ se puede obtener una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas $s(S)$ variando la longitud de las trayectorias dirigidas β_u.

Además, $m \geq |V(\alpha)|$, con m un número natural. Por lo tanto existe una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas de la forma $C_{2m}(1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm m)$ a partir de las cuales se obtiene una infinidad de digráficas núcleo imperfectas críticas que contienen a la digráfica núcleo perfecta dada α. ∎

Conclusiones.

En este trabajo se estudiaron varios tipos de operaciones en digráficas, para lo cual se definieron primeramente los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas, así como el núcleo y el (k, ℓ)-núcleo de una digráfica, los cuales fueron introducidos por Von Neumann-Morgenstern y Kwasnik, respectivamente. Definimos un k-núcleo de una digráfica como un (k, ℓ)-núcleo con $\ell = k - 1$ (véase [5]). Observamos, también, que un núcleo de una digráfica es un k-núcleo con $k = 2$ (véase [2]). Demostramos además algunos resultados referentes a dichos conceptos, como son el Teorema de Richardson y una generalización del mismo para k-núcleos (véase [1] y [9]).

Después, determinamos los (k, ℓ)-núcleos de las digráficas resultantes de operar dos digráficas con (k, ℓ)-núcleos, usando las definiciones de suma cartesiana, producto normal y disyunción excluyente (véase [5]). Además, definimos la digráfica $s(S)$, la cual es un tipo de operación. Se estudiaron condiciones para que una digráfica $s(S)$ tenga k-núcleo, si la digráfica D_0 a partir de la cual se construyó tiene k-núcleo. Así, demostramos que bajo ciertas condiciones una digráfica D_0 tiene k-núcleo si y sólo si $s(S)$ tiene k-núcleo (véase [10]). Este resultado es una generalización para k-núcleos del teorema demostrado por Hortensia Galeana Sánchez y Víctor Neumann Lara (véase [6]).

También definimos las digráficas k-núcleo perfectas y las k-núcleo imperfectas críticas. Probamos algunos resultados que involucran dichos conceptos, como el siguiente teorema: "Si una digráfica es núcleo imperfecta crítica, entonces es fuertemente conexa". Dicho teorema fue utilizado por Galeana Sánchez y Neumann Lara para demostrar que:

"Una digráfica D_0 es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) si y sólo si $s(S)$ es núcleo perfecta (respectivamente núcleo imperfecta crítica) (véase [6]). Como un intento de extender este resultado a digráficas con k-núcleo, para $k > 2$, probamos que una digráfica k-núcleo imperfecta crítica no necesariamente es fuertemente conexa, demostramos que si una digráfica D_0 es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), su correspondiente digráfica $s(S)$ no necesariamente es k-núcleo perfecta (respectivamente no necesariamente es k-núcleo imperfecta crítica). Demostramos que si una digráfica $s(S)$ es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica), entonces la digráfica D_0 a partir de la cual se construyó es k-núcleo perfecta (respectivamente k-núcleo imperfecta crítica) (véase [10]). Con lo anterior mostramos que no es posible hacer una generalización del teorema de Galeana Sánchez y Neumann Lara para digráficas con k-núcleo.

Por todo lo anterior, podemos concluir que esta tesis nos ayuda a construir una gran variedad de ejemplos de digráficas con (k, ℓ)-núcleos, en particular, con k-núcleos, utilizando las operaciones que se vieron aquí. Lo cual es de gran relevancia porque hasta hace algunos años no se tenían muchos ejemplos de digráficas con estas propiedades.

Por esta razón, este trabajo es una base para seguir definiendo operaciones en digráficas, que conserven las propiedades de tener (k, ℓ)-núcleo, en particular k-núcleo.

Bibliografía.

[1] Berge, Claude. "The theory of graphs". Methven-Wiley (1962).

[2] Berge, Claude. "Graphs and hipergraphs". North Holland Amsterdam (1976).

[3] Chartrand, G. "Introductory graph theory". Dover Publications, Inc. (1985).

[4] Behzad, M. Chartrand, G., Lesniak-Foster, L. "Graphs and digraphs". Prindle, Weber and Schmidt (1979).

[5] Kwasnik, María. "On (k, ℓ)-kernels of exclusive disjunction, cartesian sum and normal product of two directed graphs". Discussions Mathematics. T. V. (1982), 29-34.

[6] Galeana Sánchez, Hortensia y Neumann Lara, Victor. "Extending kernel perfect digraphs to kernel perfect critical digraphs". Discrete Mathematics 93 (1991) 000-000.

[7] Galeana Sánchez, Hortensia y Neumann Lara, Victor. "On the existence of kernels and h-kernels in directed graphs". Discrete Mathematics 110 (1992) 251-255.

[8] Galeana Sánchez, Hortensia y Rincón Mejía, Hugo. "A sufficient condition for the existence of k-kernels in digraphs". Discussions Mathematics. Graph Theory 18 (1998) 197-204.

[9] Kwasnik, María. "The generalization of Richardson Theorem". Discussions Mathematics. Graph Theory IV (1981), 11-14.

[10] Galeana Sánchez, Hortensia y Pastrana Ramírez, Laura. "Extending digraphs to digraphs with (without) k-kernel". Discrete Mathematics. En revisión.