Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

TÍTULO DE LA TESIS

Elementos de la teoría de retractos

Que para obtener el título de:
Matemático

P r e s e n t a
Basurto Garcia, Jeremias

Asesor
Dr. Antonyan Serguey

2007

Índice general

Índice alfabético

0.1. Prefacio

El campo de la teoría de retractos se ha hecho muy extenso en poco tiempo. En este trabajo sólo nos enfocaremos a trabajar con retractos en los espacios más comunes en topología. Existe una gran cantidad de trabajos más especializados sobre teoría de retractos, en otro tipo de espacios como son, los complejos simpliciales, los espacios triangulables, los CW complejos, etc.

Esperando dar un panorama más claro sobre la teoría de retractos y con el propósito de que nuestro trabajo sea útil, en un primer capítulo introductorio, hacemos una breve revisión historica. Enseguida daremos las herramientas de trabajo, como son algunas propiedades de las funciones continuas, las cuales son el punto de partida para desarrollar la mayor parte del contenido de este trabajo. En el segundo capítulo, daremos ejemplos y propiedades de retractos. En el tercer capítulo, ejemplificamos y damos teoría de extensores absolutos y retractos absolutos, así como la relación que existe entre ellos, para clases de espacios débilmente hereditarios arbitrarios. En el último capítulo, cerramos con retractos absolutos para una clase específica de espacios débilmente hereditaria, la clase de espacios metrizables.

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UNAM, por darme la oportunidad de hacer una licenciatura y, en especial, al Consejo Departamental de Matemáticas (CDM), por haberme permitido la utilización del taller de topología para la redacción de este trabajo.

También, agradezco el apoyo brindado por mi asesor, el Doctor Serguey A. Antonyan y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT), por haberme brindado una ayuda económica para la realización de este trabajo.

Finalmente, agradezco el apoyo de amigos y familiares que me apoyaron moral y económicamente en la realización de mis estudios de licenciatura, entre ellos a mis padres por darme el primer empujón.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Historia

La rama de la topología llamada *teoría de retractos*, se fundamenta en los trabajos de uno de los matemáticos de la escuela polaca de topología de tradición teórico-conjuntista llamado Karol Borsuk (1905-1980), considerado junto con Kazimierz Kuratowski (1896-1980) uno de los líderes de la Universidad de Varsovia. En los trabajos de Borsuk se planteó por primera vez la pregunta de la existencia de una extensión continua de la función identidad Id_A, en donde A es un subespacio del espacio X. En su tesis doctoral defendida en 1930 con el nombre "O retrakcjach i zbiorach zwiazanych" ("Sobre retracciones y conjuntos relacionados") en la Universidad de Varsovia, Borsuk introduce y estudia por primera vez estas cuestiones fundamentales, así como la invarianza topológica de retractos absolutos.

El término *retracto* dado al subespacio A, en caso de que exista una extensión continua de $Id_A \colon A \to A$, se debe a quien fuera su asesor de doctorado, Stefan Mazurkiewicz (1888-1945). El término de *retracto absoluto* reservado para las extensiones continuas de Id_A, en donde X pertenece a una clase topológica $\mathcal{C}$ de espacios débilmente hereditaria, fue sugerido por uno de los colegas de Borsuk llamado Nachman Aronszajn, también discípulo de Stefan Mazurkiewicz. Al parecer, el original de la tesis de Borsuk se perdió, sin embargo, sus principales resultados fueron publicados en 1931 con el nombre de "Sur les rétracts" y en 1932 con el nombre de "Über eine Klasse von zusammenhängenden Räumen", en donde se introducen los retractos de vecindad absoluta. Es importante destacar que las ideas de Borsuk no sólo fueron la base para la teoría de retractos, sino que también sirvieron como fundamento para la rama de la topología, de la cual no daremos detalles, llamada *teoría de la forma*, fundada en 1968 cuando Borsuk publica un documento sobre propiedades homotópicas de espacios compactos y Hausdorff con el nombre de "Concerning homotopy properties of compacta." Además, las ideas de Borsuk también sirvieron de enlace natural, en aquellos tiempos, entre la topología combinatoria y la topología teórico-conjuntista.

Después de los trabajos de Borsuk siguieron otras aportaciones que incluyen teoría de retractos como son: "Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n" en 1935, de Kazimierz Kuratowski (1896-1980); "A Characterization of absolute neighborhood retracts" en 1942, de Ralph Hartzler Fox (1913-1973); "A new generalization of Borsuk's theory of retracts" en 1947, de Sze-Tsen Hu (1914-?); "Retracts of metric spaces" en 1948, de Clifford Hugh Dowker (1912-1982); "An extension of Tietze's theorem" en 1951, de James Dugundji (1919-1985); "Retraction and extension of mappings of metric and nonmetric spaces" en 1952, de Olof Hanner (1922-?); "Some extension theorems for continuous functions" en 1953, de Ernest A. Michael (1925-?); "Theory of retracts" en 1965, de Sze-Tsen Hu; "Theory of retracts" en 1967, de Karol Borsuk; "An equivariant theory of retracts" en 1985, de Sergey A. Antonyan; "Une caractérisation des rétractes absolus de voisinage" en 1994, de Robert Cauty; entre otros. En cada una de las aportaciones anteriores se hicieron nuevos descubrimientos e innovaciones. Por ejemplo, las llevadas acabo por Sze-tsen Hu, Olof Hanner y Ernest A. Michael a clases más generales de espacios $\mathcal{C}$, cerrados bajo imágenes homeomórficas y subconjuntos cerrados.

Finalmente es también importante destacar que las ideas de Borsuk tienen un sustento en el teorema de extensión de Heinrich Tietze (1880-1964) y el lema de Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924). El teorema de Tietze, demostrado en "Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind" de 1915, muestra que cualquier función continua de valores reales sobre un subespacio cerrado de un espacio normal puede ser extendida a una función continua de valores reales sobre todo el espacio. El lema de Urysohn, demostrado en "Über die Machtigkeit der zuzammenhängenden Menguen" de 1925, muestra que a cualesquiera dos subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio normal, puede asignársele valores reales y constantes distintos bajo alguna función continua sobre el espacio en cuestión.

1.2. Resultados fundamentales

Para entender el presente texto asumimos que el lector está familiarizado con topología general. No definiremos conceptos fundamentales, sólo los necesarios en el contexto, a fin de precisar o puntualizar. Como podemos ver, el tema central en sí son las funciones continuas $r\colon X \to A$ del espacio X en el subespacio A de X. Por otro lado, diremos un **espacio** cuando se trate de espacio topológico, y **subespacio** cuando se trate de subespacio topológico.

Como sabemos, a un espacio X lo podemos dotar con distintas topologías, en particular, a un subconjunto A de un espacio X, lo podemos dotar con la **topología del subespacio** que consiste de subconjuntos abiertos de la forma $A \cap U$, en donde U es un elemento de la topología para X. También sabemos que una función continua $f\colon X \to Y$ entre dos espacios topológicos respeta las relaciones de cercanía.

Enseguida daremos algunas condiciones equivalentes que aparecen en la literatura matemática, para que una función $f\colon X \to Y$ entre los espacios X y Y sea continua.

a) Para cada $x \in X$ y cada vecindad $W(f(x))$ de $f(x)$ en Y, existe una vecindad $V(x)$ de x en X tal que $f(V(x)) \subset W(f(x))$.

b) Si $V \subseteq Y$ es abierto en Y, entonces su preimagen $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto en X.

c) Si $V \subseteq Y$ es cerrado en Y, entonces su preimagen $f^{-1}(V) \subseteq X$ es cerrado en X.

d) Para todo subconjunto $U \subseteq X$, tenemos que $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.

e) Para todo subconjunto $V \subseteq Y$, tenemos que $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(\overline{V})$.

f) Para todo subconjunto $A \subseteq X$, si a es un punto límite de A, entonces $f(a)$ es un punto de $f(A)$ o un punto límite de $f(A)$.

Para las demostraciones de las propiedades anteriores, ver [22] y [8].

Por último, es importante también destacar las siguientes propiedades de funciones continuas que serán de gran utilidad. Sus demostraciones pueden encontrarse en [17] página 254 y [19] páginas 461, 465, 469 y 470.

1) Para todo espacio X la función identidad $Id_X\colon X \to X$ es continua.

2) Toda función constante es continua.

3) Sean T y $T^{'}$ dos topologías en X. La función identidad $Id_X\colon (X,T) \to (X,T^{'})$ es continua si y sólo si $T^{'} \subset T$.

4) Supongamos que $f\colon (X,T) \to (Y,S)$ es continua.

   a) Si U es una topología para Y tal que $U \subset S$, entonces $f\colon (X,T) \to (Y,U)$ es continua.

   b) Si V es una topología para X tal que $T \subset V$, entonces $f\colon (X,V) \to (Y,S)$ es continua.

5) La composición de funciones continuas es continua.

6) Supongamos que $A \subseteq X$ y $f\colon X \to Y$ es una función continua. Entonces $f_{|A}$ es continua.

7) (**Lema de Pegar**) Supongamos que $X = A \cup B$ y $f\colon X \to Y$, con $f_{|A}$ y $f_{|B}$ ambas continuas.

   a) Si A y B son subconjuntos abiertos de X, entonces f es una función continua.

   b) Si A y B son ambos subconjuntos cerrados de X, entonces f es una función continua.

Definamos a la recta real como $\mathbb{R} = \{\, x : -\infty < x < \infty \,\}$ y al espacio Euclidiano de dimensión n como $\mathbb{R}^n = \{\, x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \,\}$.

8) Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ y definamos $\pi_A\colon A \times B \to A$ por $\pi_A(a,b) = a$ y $\pi_B\colon A \times B \to B$ por $\pi_B(a,b) = b$, para toda $a \in A$ y toda $b \in B$. Entonces las funciones **proyección** π_A y π_B son continuas y abiertas.

9) Si $A \subseteq X$, entonces la función inclusión $i_A\colon A \to X$ es continua.

10) Sean $f\colon X \to Y$, $g\colon W \to Z$ donde X, Y, W y Z son espacios, entonces $h = f \times g\colon X \times W \to Y \times Z$, dada por $h(x,w) = (f(x), g(w))$, es continua si y sólo si f y g son continuas.

11) Sea $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ con coordenadas $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces F es continua si y sólo si todas las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ son continuas.

Recordemos que el intervalo cerrado $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ se define como $\mathbb{I} = \{\, x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \,\}$.

12) (**Teorema de Urysohn**) Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es normal si y sólo si para cada par de conjuntos cerrados y ajenos A y B en X, existe una función continua (llamada **función de Urysohn**) $u\colon X \to \mathbb{I}$ tal que $u(A) = \{0\}$ y $u(B) = \{1\}$.

13) (**Teorema de Tietze**) Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es un espacio normal si y sólo si para todo subconjunto cerrado $A \subseteq X$, toda función continua $g\colon A \to \mathbb{I}$ tiene una extensión continua $G\colon X \to \mathbb{I}$. Esto es, G es continua y $G_{|A} = g$.

En [20] página 250, encontramos la siguiente versión del Teorema de Extensión de Tietze, la cuál es más general.

Sea X un espacio normal y A un subconjunto cerrado de X.

a) Cualquier función continua de A en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ se puede extender a una función continua de todo X en $[a, b]$.

b) Cualquier función continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una función continua de todo X en $\mathbb{R}$.

14) Sea (X, δ) un espacio métrico, donde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X \neq \emptyset$. La función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \delta(p, X)$ (distancia de X a p) es continua.

Si X es un espacio y R es una relación de equivalencia sobre X, entonces R determina una partición de X en clases de equivalencia. Decimos que dos elementos $x, y \in X$ pertenecen a la misma clase, si y sólo si, xRy (x está en relación a y). El conjunto de clases de equivalencia es denotado por $\frac{X}{R}$. Luego, podemos definir una función $f\colon X \to \frac{X}{R}$ por $f(x) = [x]$, llamada **función identificación** o **función cociente**. Además, podemos dotar a $\frac{X}{R}$ con una topología de la siguiente forma: un subconjunto U de $\frac{X}{R}$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Esta topología es llamada **topología de identificación** o **topología cociente** y el espacio $\frac{X}{R}$, así obtenido, es llamado el **espacio cociente**.

Sea $f\colon X \to Y$ una función del espacio X con la topología τ sobre un espacio Y. Si $\tau_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$, decimos que f es una **identificación**, si la topología de Y coincide con τ_f.

15) Supongamos que R es una partición del espacio X. Entonces la función cociente $p\colon X \to \frac{X}{R}$, definida por $p(x) = [x]$, es continua.

16) Sean X, Y y Z espacios. Si $f\colon X \to Y$ es una función identificación y $g\colon Y \to Z$, entonces g es continua si y sólo si $h = g \circ f$ es continua.

En las siguientes propiedades sobre funciones continuas, agregamos también su demostración.

Aclaramos que cuando nos refiramos a una vecindad, estamos hablando de un abierto relativo al espacio en cuestión. Así cuando decimos una vecindad V de un punto $x \in X$, estamos pensando en un abierto V en X que contiene a x.

17) Sean $f\colon X \to Y$ una función continua y $A \subseteq X$ un subespacio compacto. Entonces $f(A)$ es compacto.

    Demostración. Sean $f\colon X \to Y$ cualquier función continua y A un subconjunto compacto de X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(A)$ en Y. Por la continuidad de f, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \subseteq X : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $A \subseteq X$. Como A es compacto, existe una subcubierta finita $\{f^{-1}(U_i) : 1 \leq i \leq n\}$ de $f^{-1}(\mathcal{U})$ que cubre a A. Entonces $A \subseteq \bigcup_i^n f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup_i^n U_i)$ y $f(A) \subseteq \bigcup_i^n U_i$, de donde la cubierta $\mathcal{U}$ de $f(A)$ tiene la subcubierta finita $\{U_i : 1 \leq i \leq n\}$. Por lo tanto, la imagen continua de un conjunto compacto es compacto. □

Un espacio X es de **Lindelöf** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable (como podemos ver, todo espacio compacto es de Lindelöf).

18) La propiedad de Lindelöf es invariante bajo suprayecciones continuas.

    Demostración. Sean $f\colon X \to Y$ y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua y suprayección, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}$ es una subcubierta contable de X por ser espacio de Lindelöf. Finalmente, como $f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) = U_{\alpha_i}$ para cada α_i, tenemos que $\{U_{\alpha_i}\}$ es una subcubierta contable de $\{U_\alpha\}$. En consecuencia, Y es un espacio de Lindelöf. □

Dos subconjuntos E y F de un espacio topológico X están **separados** en X si $E \cap \overline{F} = \overline{E} \cap F = \emptyset$. Una **separación** de un espacio topológico X es un par $\{E, F\}$, de subconjuntos separados no vacíos cuya unión es X. El espacio X es llamado **disconexo** si existe una separación $\{E, F\}$ de X; en otro caso, X es **conexo**.

19) Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva, donde X es un espacio conexo. Entonces Y es conexo.

Demostración. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es cualquier función continua, de un espacio X conexo sobre Y. Si Y no es conexo, entonces $Y = U \cup V$ es la unión de dos subconjuntos separados y no vacíos en Y. Notemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Por la continuidad de f, $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(\overline{U} \cap V) = f^{-1}(\overline{U}) \cap f^{-1}(V) \supseteq \overline{f^{-1}(U)} \cap f^{-1}(V)$ y $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(U \cap \overline{V}) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(\overline{V}) \supseteq f^{-1}(U) \cap \overline{f^{-1}(V)}$, lo que muestra que $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ es una separación de X contradiciendo el hecho de que X era conexo. Por lo tanto, Y es conexo. □

Una función continua $f\colon \mathbb{I} \to X$ es llamada una **trayectoria** en el espacio X entre $f(0) \in X$ y $f(1) \in X$. Se dice que un espacio X es **conexo por trayectorias**, si cada par de puntos de Xestán unidos por alguna trayectoria en X.

20) Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva, donde X es un espacio conexo por trayectorias. Entonces Y es conexo por trayectorias.

Demostración. Sean X un espacio conexo por trayectorias y $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Tomemos dos puntos a_1, $a_2 \in Y$, entonces existen a_1', $a_2' \in X$ tales que $f(a_1') = a_1$ y $f(a_2') = a_2$. Por otro lado, puesto que X es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $g\colon \mathbb{I} \to X$ tal que $g(0) = a_1'$ y $g(1) = a_2'$. Entonces, $f \circ g\colon \mathbb{I} \to Y$ es una trayectoria en Y tal que $(f \circ g)(0) = f(a_1') = a_1$ y $(f \circ g)(1) = f(a_2') = a_2$. En consecuencia, Y es conexo por trayectorias. □

Un espacio X es **localmente conexo**, si para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad V de x, existe una vecindad conexa U de x tal que $U \subset V$.

21) Sean $f\colon X \to Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y X un espacio localmente conexo. Entonces Y es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y sea $f\colon X \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Sean $y \in Y$ y U cualquier vecindad de y en Y. Mostraremos que existe una vecindad conexa V de y tal que $V \subset U$. Como f es suprayectiva y continua, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y $f^{-1}(U) = W$ es una vecindad de x en X. Luego, como X es localmente conexo, existe una vecindad conexa Z de x, tal que $Z \subset W$. Finalmente, como f es abierta, tenemos que $y \in V = f(Z) \subset f(W) = U$ y $V = f(Z)$ es una vecindad conexa de y en Y. En consecuencia, Y es localmente conexo. □

Un espacio X se dice **localmente compacto** si para cualquier punto $x \in X$ y cualquier vecindad V de x, existe un conjunto compacto U de x tal que $x \in int(U) \subset U \subset V$.

22) Sea $f\colon X \to Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y X un espacio localmente compacto. Entonces Y es localmente compacto.

    Demostración. Sea X un espacio localmente compacto y $f\colon X \to Y$ una función continua, suprayectiva y abierta. Sean $y \in Y$ y U una vecindad de $y \in Y$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Sea $V = f^{-1}(U)$, entonces V es una vecindad de $x \in X$. Como X es localmente compacto, existe un conjunto compacto W de x, tal que $x \in int(W) \subset W \subset V$. Por último, tenemos que $y = f(x) \in f(int(W)) \subset f(W) \subset f(V) = U$, en donde $f(int(W))$ es abierto por ser f función abierta y $f(W)$ es un conjunto compacto de y en Y por ser f una función continua. En consecuencia, Y es localmente compacto. □

Capítulo 2

RETRACTOS

2.1. Definición y propiedades fundamentales

En ésta sección definiremos los conceptos de retracto y de retracción y daremos algunos ejemplos de ellos. Mostraremos algunas de las propiedades que preservan las retracciones.

Sean un subespacio A de un espacio X, y dos funciones continuas $g\colon A \to Y$ y $G\colon X \to Y$ con el mismo espacio codominio Y. Si se satisface que $g(a) = G(a)$, para todo $a \in A$, entonces g se llama una **restricción** de G a A, y se denota $g = G_{|A}$. Por otro lado, G se llama una **extensión** de g sobre X.

Definición 2.1.1. *Dado cualquier subespacio $X \subseteq Y$, a la función $Id_X\colon X \to X$ de X en X definida por $Id_X(x) = x$ para todo $x \in X$ se le llama la* ***identidad*** *de X.*

Definición 2.1.2. *Dado un subespacio $A \subseteq X$ del espacio X, la función $i_A\colon A \to X$ de A en X definida por $i_A(a) = a$ para todo $a \in A$, es llamada la* ***inclusión*** *de A en X.*

Como podemos ver, la función inclusión i_A es la restricción, a A, de Id_X; es decir, $i_A = (Id_X)_{|A}$. Por otro lado, si $g\colon A \to Y$ es una restricción de $G\colon X \to Y$ a A, entonces g satisface la relación $g = G \circ i_A = G_{|A}$.

Definición 2.1.3. *Un subespacio $A \subseteq X$ del espacio X es un* ***retracto*** *de X si existe una función continua $r\colon X \to A$ tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$.*

Notemos que si A es un retracto de X y $r\colon X \to A$ es una función continua tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$, entonces $Id_A = r \circ i_A = r_{|A}$.

En la definición de retracto, decimos que A es **invariante** bajo r. También decimos que $A \subseteq X$ es un retracto de X si y sólo si Id_A tiene una extensión continua $r\colon X \to A$. A la función continua $r\colon X \to A$ que deja invariante a A se le llama una retracción de X en A y se le denota por $\mathbf{r} : \mathbf{X} \supseteq \mathbf{A}$. Enseguida daremos algunos ejemplos de retractos.

Ejemplo 2.1.1. Sea X un espacio. Tenemos que $r\colon X \to X$ definida por $r(x) = x$ es una función continua de X en X. Luego, $r = Id_X$, por lo que X es un retracto de X.

Ejemplo 2.1.2. Sean X un espacio y $x_0 \in X$. Entonces la función $r\colon X \to \{x_0\}$ definida, para cada $x \in X$, como $r(x) = x_0$ es una retracción de X en uno de sus puntos. Por lo tanto, todo subconjunto de un solo punto $\{x_0\}$ es un retracto de X.

Los dos ejemplos anteriores son llamados **retractos triviales** del espacio X.

Ejemplo 2.1.3. Sea el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^3$. La función retracción $r\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \{u_0\}$ definida por $r(x, y) = (x, u_o)$ es una función continua del toro en uno de sus meridianos. Por lo tanto, un meridiano es un retracto de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 2.1.4. Sean X y Y dos espacios. Se tiene que $r\colon X \times Y \to X$ definida por $r(x, y) = \pi_x(x, y) = x$ es una función continua. Luego, abusando de la notación r es un retracción, pues formalmente $X \not\subset X \times Y$. En general las copias $X \times \{y\}$ de X, para todo $y \in Y$, son retractos de $X \times Y$. De aquí resulta que $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{D} = \{\, x : -1 < x < 1 \,\}$ son retractos de $\mathbb{I}^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{D}^n$, respectivamente.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos la unión de los círculos A y B de radio 1 con centros en $(0, 1)$ y $(0, -1)$ respectivamente. La función $r\colon A \cup B \to A$ definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$r(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in A, \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \in B, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

es una retracción. Otra retracción para $A \cup B$ estaría definida por $r(x, y) = (x, |y|)$, la cual coloca a B sobre A.

Ejemplo 2.1.6. Sea $X = A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$, en donde: $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ -1 \le y \le 1 \,\}$ y $B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x} \,\}$. Se tiene que el conjunto A es un retracto de X, pues la función $r\colon X \to A$ definida por $r(x, y) = \pi_A(x, y) = (0, y)$ es continua.

Ejemplo 2.1.7. Sea $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, la frontera de la bola unitaria cerrada $\mathbf{D}^n$ con centro en el origen. La función $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{D}^n$ definida por

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{si } |x| \geq 1, \\ x & \text{si } |x| < 1, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

donde $\|x\|$ es la distancia del origen a x, es una retracción. Por lo tanto, $\mathbf{D}^n$ es un retracto de $\mathbb{R}^n$. De igual forma, $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con la función $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Esta retracción es llamada la **retracción radial**.

Teorema 2.1.1. *Un subespacio $A \subseteq X$ del espacio X es un retracto de X si y sólo si, para cualquier espacio Y, toda función continua $g\colon A \to Y$ tiene una extensión continua de g en X.*

Demostración. Supongamos que $r : X \supseteq A$. Sean Y un espacio y $g\colon A \to Y$ una función continua. La función $g \circ r\colon X \to Y$ es continua y $(g \circ r)(a) = g(r(a)) = g(a)$, para cada $a \in A$. Luego, $h = g \circ r\colon X \to Y$ es una extensión de g en X.

Supongamos ahora que para cualquier espacio Y, toda función continua $g\colon A \to Y$ tiene una extensión a X. Entonces, en particular la identidad Id_A tiene una extensión $r\colon X \to A$ en X. Por definición, es claro que A es un retracto de X. $\square$

Proposición 2.1.1. *Si $A \subseteq B$ son subconjuntos de un espacio X y $r : X \supseteq A$, entonces $r_{|B}\colon B \to A$ es una retracción.*

Demostración. Supongamos que $r : X \supseteq A$. Entonces la función $r_{|B}\colon B \to A$ es continua. Como $A \subseteq B$, se tiene que $r_{|B}(a) = a$, para todo $a \in A$. En consecuencia, $r_{|B}$ es una retracción. $\square$

De acuerdo a la siguiente proposición, la composición de retracciones es una retracción. En otras palabras, la relación de ser retracción es transitiva.

Proposición 2.1.2. *Si $A \subseteq B$ son subconjuntos de un espacio X, A es un retracto de B y B es un retracto de X, entonces A es un retracto de X.*

Demostración. Supongamos que $r_1 : X \supseteq B$ y $r_2 : B \supseteq A$. La función $r = r_2 \circ r_1\colon X \to A$ es continua. Como $A \subseteq B$, tenemos que $r(a) = r_2(r_1(a)) = r_2(a) = a$, para cada $a \in A$. Esto muestra que A es un retracto de X. $\square$

A continuación mostraremos que el producto de retracciones es una retracción.

Proposición 2.1.3. *Supongamos que $\prod_\alpha Y_\alpha$ es cualquier producto Cartesiano y que para cada α, $B_\alpha \subseteq Y_\alpha$ es un retracto de Y_α. Entonces $\prod_\alpha B_\alpha$ es un retracto de $\prod_\alpha Y_\alpha$.*

Demostración. Supongamos que $r_\alpha \colon Y_\alpha \to B_\alpha$ es una retracción para todo α. Entonces la función $r\colon \prod_\alpha Y_\alpha \to \prod_\alpha B_\alpha$ dada por $r((y_\alpha)) = (r_\alpha(y_\alpha))$ es continua. Además, dada $b = (b_\alpha) \in \prod_\alpha B_\alpha$, $r((b_\alpha)) = (r_\alpha(b_\alpha)) = (b_\alpha) = b$, con lo que termina la demostración. □

Cuando se considera el conjunto $C(X, X)$ de todas las funciones continuas de X en X tenemos que, para $f, g \in C(X, X)$, la composición $g \circ f$ está bien definida y $g \circ f \in C(X, X)$.

Definición 2.1.4. *Sea $e \in C(X, X)$. Decimos que e es **idempotente** si $e \circ e = e$.*

No es difícil ver que si $r\colon X \to A$ es una retracción e i_A es la función inclusión, entonces la función $i_A \circ r$ es una función idempotente. Enseguida veremos que la imagen de una función idempotente $e \in C(X, X)$ es un retracto de X.

Teorema 2.1.2. *Si $e \in C(X, X)$ es una función idempotente, entonces la imagen $e(X)$ es un retracto de X.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $a \in e(X)$ tal que $e(x) = a$, entonces $a = e(x) = (e \circ e)(x) = e(e(x)) = e(a)$. Esto muestra que e es una retracción de X en $e(X)$. Por lo tanto, $e(X)$ es un retracto de X. □

Teorema 2.1.3. *Si X es un espacio de Hausdorff y $r : X \supseteq A$, entonces A es cerrado.*

Demostración. Mostraremos que para un retracto arbitrario A de un espacio de Hausdorff X, el conjunto $X \setminus A = B$ es abierto en X. Elijamos un punto arbitrario b de $B = X \setminus A$. Tenemos que $r(b) = a$ es un punto de A tal que $a \neq b$. Como X es un espacio T_2, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $a \in U$ y $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por la continuidad de r, tenemos que $W = r^{-1}(U \cap A) \cap V$ es un subconjunto abierto en X que contiene a b. Veamos que $W \subseteq B$. Sea $x \in W$. Entonces $x \in r^{-1}(U \cap A)$ y $x \in V$, de donde $r(x) \in U$ y $x \in V$. Como $U \cap V = \emptyset$, se tiene que $r(x) \neq x$. Por lo tanto $x \in B$, con lo que queda demostrado que B es abierto. En consecuencia, A es cerrado. □

Notemos que el retracto $A = \{0\}$ del espacio de Sierpiński $X = \{\,0, 1\,\}$ no es cerrado. También, si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces la grafica de f es un retracto cerrado de $X \times Y$.

De manera general, tenemos que si $f, g\colon X \to Y$ son continuas y Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X (ver [10] en página 169). Así, otra forma de demostrar el teorema anterior, es observando que el conjunto $A = \{\,x \in X : r(x) = x\,\}$ es cerrado.

Cuando hablamos de una **propiedad hereditaria** P del espacio X, nos referimos a que todo subconjunto A de X también la debe tener. Si la propiedad se hereda sólo a los subconjuntos cerrados, se dirá que P es una **propiedad débilmente hereditaria**. Por otro lado, cuando la propiedad se preserva bajo homeomorfismos, se dice que P es una **propiedad topológica** (**invariante topológico**).

Enseguida demostraremos algunas propiedades hereditarias de los retractos.

Decimos que $x \in X$ es un **punto fijo** de una función $f\colon X \to X$, si $f(x) = x$. Un espacio X se dice que tiene la **propiedad delpunto fijo**, si toda función continua $f\colon X \to X$ tiene un punto fijo.

Algunos espacios que poseen la propiedad del punto fijo son $\mathbb{D}^n$, $\mathbb{I}^n$, $\mathbb{I}^\infty$ y $\mathbb{I}^M$ para cualquier M. No es nuestro interés mostrar aquí ésta propiedad; sin embargo, no es difícil como veremos, deducir que $\mathbb{S}^{n-1}$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Proposición 2.1.4. *Sean X un espacio con la propiedad del punto fijo y $r : X \supseteq A$. Entonces A tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Mostraremos que A tiene la propiedad del punto fijo. Para esto, tomemos una función $f\colon A \to A$ continua. Consideremos la función continua $g = i_A \circ f \circ r\colon X \to X$, donde i_A es la función inclusión. Como X tiene la propiedad del punto fijo, para algún $x \in X$ se tiene que $g(x) = x$. Por otro lado, como $g(x) = f(r(x)) \in A$, se tiene que $r(x) = x$ y $x = g(x) = f(r(x)) = f(x)$ lo que muestra que x es un punto fijo de f. En consecuencia, A tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Proposición 2.1.5. *Si $r : X \supseteq A$, entonces r es una identificación.*

Demostración. Mostraremos que U es abierto en A si y sólo si $r^{-1}(U)$ es abierto en X. De la continuidad de r, tenemos que $r^{-1}(U)$ es abierto en X

siempre que U es abierto en A. Para la otra parte, tenemos que ver que $r^{-1}(U) \cap A = U$. Sea $x \in U \subseteq A$, entonces $x \in r^{-1}(\{x\}) \subseteq r^{-1}(U)$, de donde $x \in r^{-1}(U) \cap A$. Ahora supongamos que $x \in r^{-1}(U) \cap A$. Entonces $r(x) = x \in U$. Esto prueba que $r^{-1}(U) \cap A = U$. Por lo tanto, si $U \subseteq A$ es tal que $r^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces $U = r^{-1}(U) \cap A$ es abierto en A. En consecuencia, r es una identificación. $\square$

De la continuidad de las retracciones, se tiene que un retracto A de un espacio compacto X, es un espacio compacto.

Proposición 2.1.6. *Si X es un espacio compacto y $r : X \supseteq A$, entonces A es compacto.*

Demostración. Sean $r\colon X \to A$ una retracción y X un espacio compacto. Por la propiedad 17), A es compacto. $\square$

También, tenemos que si X es un espacio conexo y A es un retracto de X, entonces A es un subespacio conexo.

Proposición 2.1.7. *Si X es un espacio conexo y $r : X \supseteq A$, entonces A es conexo.*

Demostración. Por la propiedad 19), para una retracción $r\colon X \to A$, se tiene que A es conexo . $\square$

Los siguientes dos resultados ayudarán a demostrar que las retracciones preservan la conexidad local y conexidad en pequeño.

Recordemos que para $x \in X$, al mayor subconjunto conexo C de X que contiene a x es llamado la **componente** de x.

Teorema 2.1.4. *X es localmente conexo si y sólo si cada componente de todo conjunto abierto es abierta.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y $x \in C$ una componente de un conjunto abierto U en X. Por la conexidad local, existe un conjunto abierto y conexo V con $x \in V \subseteq U$. Luego, $V \subset C$ y por lo tanto C es abierto.

Supongamos que cada componente de cada conjunto abierto en X es abierta. Si U es cualquier vecindad de x en X, entonces la componente de U que contiene a x es una vecindad conexa de x contenida en U. Luego, X es localmente conexo. $\square$

Decimos que X es **conexo en pequeño** en x si cada vecindad U de x contiene una vecindad V de x, tal que cualesquier par de puntos en V están contenidos en algún subconjunto conexo de U.

Teorema 2.1.5. *Si X es conexo en pequeño en cada punto, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean U un conjunto abierto en X y C una componente de U. Si $x \in C$, entonces existe un conjunto abierto V que contiene a x y está contenido en U tal que, cada dos puntos en V están contenidos en un subconjunto conexo de U. Afirmamos que $V \subset C$. En efecto, sea $v \in V$ cualquier punto. Entonces existe un conexo $K_{x,v}$ conteniendo los puntos x y v. Como $x \in K_{x,v} \cap C$ entonces $K_{x,v}$ tiene que estar en C por ser este último componente de conexidad. Luego, $V \subset C$. Así, C es abierto y X es localmente conexo, por el teorema 2.1.4. □

En [23] página 201, se muestra un espacio X que es conexo en pequeño en un punto particular p y no es localmente conexo en este mismo punto p.

Proposición 2.1.8. *Sean X un espacio localmente conexo y $r : X \supseteq A$, entonces A es conexo en pequeño y localmente conexo.*

Demostración. Sea $W \subseteq A$ una vecindad de p en A. Mostraremos que A es conexo en pequeño. Como $r(p) = p$ y r es continua, $r^{-1}(W) = N$ es una vecindad de p en X. Luego, como X es localmente conexo, existe una vecindad conexa M de p en X tal que $M \subseteq N$. Finalmente, como $p \in M \cap A \subseteq M \subseteq N$ y r es continua, $M \cap A \subseteq r(M) \subseteq W$, lo que implica que A es conexo en pequeño en p. Para la otra parte, como p fue un punto arbitrario de A, por el teorema 2.1.5, se concluye que A es localmente conexo. □

Proposición 2.1.9. *Si X es un espacio localmente conexo y $r : X \supseteq A$ es abierta, entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Sean $r\colon X \to A$ una retracción abierta y X un espacio localmente conexo. Por la propiedad 21), se sigue que A es localmente conexo. □

Proposición 2.1.10. *Sean X un espacio conexo por trayectorias y $r : X \supseteq A$. Entonces A es conexo por trayectorias.*

Demostración. Por la propiedad 20), si $r\colon X \to A$ es una retracción y X es un espacio conexo por trayectorias, se tiene que A es conexo por trayectorias.

□

Proposición 2.1.11. *Todo retracto de un espacio localmente compacto es localmente compacto.*

Demostración. Sean X un espacio localmente compacto y $r : X \to A$ una retracción sobre el subconjunto A. Sean $p \in A$ y $W \subseteq A$ una vecindad de p en A. Mostraremos que existe un conjunto compacto K que contiene a p tal que $p \in int(K) \subset K \subset W$. Como $r(p) = p$ y r es continua, se tiene que $r^{-1}(W) = V$ es una vecindad de p en X. Luego, como X es localmente compacto, existe un conjunto compacto S tal que $p \in int(S) \subset S \subset V$. Enseguida, tenemos que $A \cap (int(S))$ es una vecindad de p en A y $\overline{(A \cap int(S))}$ es un conjunto compacto que contiene a p en A por ser cerrado en un conjunto compacto S. Finalmente, se tiene que $p \in (A \cap int(S)) \subset \overline{(A \cap int(S))} \subset r(V)$, tomando $K = \overline{(A \cap int(S))}$ se obtiene lo deceado. Como p fue un punto arbitrario de A, se concluye que A es localmente compacto. ☐

Más adelante probaremos que todo retracto A de un espacio X simplemente conexo, A es un subespacio simplemente conexo.

2.1.1. El Espacio de Adjunción

De la construcción del espacio cociente podemos obtener uno especial: el espacio de adjunción $X \cup_\phi Y$, que surge cuando el espacio X es unido al espacio Y por medio de una función continua $\Phi\colon A \to Y$ definida sobre un subespacio cerrado $A \subseteq X$.

Dados los espacios X y Y, definamos $X \overset{\circ}{\cup} Y$ como sigue: si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $X \overset{\circ}{\cup} Y = X \cup Y$. Si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces identificamos a X con $X \times \{0\}$ y a Y con $Y \times \{1\}$ y hacemos $X \overset{\circ}{\cup} Y = X \cup Y$, bajo dicha identificación. En otras palabras $X \overset{\circ}{\cup} Y$ es la unión de X y Y, concinderados como conjuntos ajenos. Al conjunto $X \overset{\circ}{\cup} Y$ se le llama la **unión disjunta** de X y Y. La topología que se le asigna a $X \overset{\circ}{\cup} Y$ es la siguiente: $U \subset X \overset{\circ}{\cup} Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ y $U \cap Y$ son abiertos de X y Y, respectivamente.

Definición 2.1.5. *Si $A \subset X$ es cerrado y $\Phi\colon A \to Y$ es una función continua, entonces el* ***espacio de adjunción*** *$X \cup_\Phi Y$ de X a Y por Φ es el que resulta de la unión disjunta $X \overset{\circ}{\cup} Y$ cuando a cada punto $z \in A$ se le identifica con su imagen $\Phi(z) \in Y$.*

Notemos que, por definición, si $X \cup_\Phi Y$ es el espacio de adjunción de X a Y por Φ, entonces existe una función identificación $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$, la cual identifica cada punto $a \in A$ con el punto $\Phi(a)$ y con todos los puntos del conjunto $\Phi^{-1}(\{\Phi(a)\})$.

Definición 2.1.6. *Decimos que la función continua $f\colon X \to Y$ es un* ***encaje*** *de X en Y, si la función $f\colon X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Lema 2.1.1. *Supongamos que $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$ es la función identificación. Entonces $p_{|Y}\colon Y \to X \cup_\Phi Y$ es un encaje y $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_\Phi Y$.*

Demostración. Es claro que $p_{|Y}$ es biyectiva y continua. Nos falta ver que $p_{|Y}^{-1}$ es continua. Sea $W \subseteq Y$ un subconjunto abierto de Y. Mostraremos que $(p_{|Y}^{-1})^{-1}(W)$ es abierto en $p_{|Y}(Y)$. Se tiene que $(p_{|Y}^{-1})^{-1}(W) = p_{|Y}(W)$, pues $u \in (p_{|Y}^{-1})^{-1}(W)$ si y sólo si $p_{|Y}^{-1}(u) \in W$ si y sólo si $u \in p_{|Y}(W)$. Por otro lado, como $p_{|Y}^{-1}(p_{|Y}(W)) = W$ es abierto en Y, se tiene que $p_{|Y}(W)$ es abierto en $p(Y)$ por ser p una identificación. Por lo tanto, $p_{|Y}^{-1}$ es continua.

Veamos que $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_\Phi Y$. Como p es una función identificación, debemos mostrar que $p^{-1}(p(Y))$ es cerrado en $X \overset{\circ}{\cup} Y$. Notemos que $p^{-1}(p(Y)) = Y \cup A$ es cerrado en $X \overset{\circ}{\cup} Y$, por lo tanto $p(Y)$ es cerrado en $X \cup_\Phi Y$. □

Proposición 2.1.12. *El subespacio Y del espacio adjunción $X \cup_\Phi Y$ es un retracto de $X \cup_\Phi Y$ si y sólo si la función $\Phi\colon A \to Y$ tiene una extensión sobre X.*

Demostración. Sean $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$ la proyección natural y $r\colon X \cup_\Phi Y \to Y$ una retracción del espacio de adjunción $X \cup_\Phi Y$ sobre Y. Definamos la función $f\colon X \to Y$ como $f(x) = r(p_{|X}(x))$, para todo $x \in X \subseteq X \overset{\circ}{\cup} Y$. f es continua por ser composición de funciones continuas y $f(x) = r(p(x)) = r(\Phi(x)) = \Phi(x)$, para todo $x \in A$. Por lo anterior, se concluye que f es una extensión sobre X de Φ.

Ahora supongamos que $f\colon X \to Y$ es una extensión de $\Phi\colon A \to Y$. Definiremos a $r : X \cup_\Phi Y \supseteq Y$ de tal forma que r sea continua y $r_{|Y} = Id_Y$. Sea z un punto de $X \cup_\Phi Y$. Si $z \in Y$, definimos $r(z) = z$. Si $z \notin Y$, entonces existe un único punto $x \in (X \setminus A)$ con $p(x) = z$. Definamos $r(z) = f(x)$. Sea $h = r \circ p$, entonces $h_{|X} = f$ y $h_{|Y} = Id_Y$. Como h y p son continuas, se tiene que r es continua y además $r_{|Y} = Id_Y$ porque así la definimos. Luego, r es una retracción de $X \cup_\Phi Y$ sobre Y. □

Cuando tenemos una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio X y x un punto de X, decimos que la **estrella** en x de $\mathcal{U}$, es la unión de los miembros de $\mathcal{U}$ en los que x es un elemento. Una cubierta $\mathcal{V}$ de un espacio X es un **refinamiento** de una cubierta $\mathcal{U}$ de X, si cada elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{U}$. Una cubierta $\mathcal{V}$ es un **refinamiento estrella** de $\mathcal{U}$ si la familia de estrellas de $\mathcal{V}$ en puntos de X es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Definición 2.1.7. *Un conjunto es llamado un* ***conjunto*** $\mathbf{G}_\delta$ *si es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos.*

Definición 2.1.8. *Una cubierta (familia de subconjuntos)* $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *de* X *es* ***localmente finita*** *(**discreta**) si cada punto* $x \in X$ *tiene una vecindad que intersecta un número finito de (a lo más un)* X_α.

Así también, decimos que un espacio X es **totalmente normal** si toda cubierta abierta tiene un refinamiento estrella abierto. El espacio X es **perfectamente normal** si es normal y todo subconjunto cerrado de X es un G_δ. El espacio X es **completamente normal** si es T_1 y para cualesquiera dos subconjuntos H y K separados de X, existen subconjuntos abiertos disjuntos en X, tal que uno contiene a H y otro contiene a K. Un espacio X es **paracompacto** si es Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. Un espacio X es **numerablemente paracompacto** si cualquier cubierta abierta numerable de X posee un refinamiento localmente finito. Un espacio X es **colectivamente normal** si cada vez que se tenga una familia discreta de cerrados $\{ F_\alpha : \alpha \in S \}$, existe una familia discreta de abiertos $\{ V_\alpha : \alpha \in S \}$ tal que para cada $\alpha \in S$, $F_\alpha \subset V_\alpha$.

A continuación enunciamos la siguiente proposición, la cual nos será de gran utilidad más adelante.

Proposición 2.1.13. *El espacio adjunción* $X \cup_\Phi Y$ *posee cada una de las siguientes propiedades si* X *y* Y *las cumplen:*

a) *Espacio* T_1.

b) *Espacio compacto.*

c) *Espacio de Lindelöf.*

d) *Espacio normal.*

e) *Espacio Hausdorff compacto.*

f) *Espacio numerablemente paracompacto normal (Binormal).*

g) *Espacio totalmente normal.*

h) *Espacio perfectamente normal.*

i) *Espacio completamente normal.*

j) *Espacio colectivamente normal.*

Demostración. a) Prueba 1. Sean z un punto arbitrario de $X \cup_\Phi Y$ y $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$ la proyección natural. Si $z \in Y$, entonces $\{z\}$ es cerrado en Y por ser Y un espacio T_1. Luego, como Y es cerrado en $X \cup_\Phi Y$, $\{z\}$ es cerrado en $X \cup_\Phi Y$. Si $\{z\} \notin Y$, tenemos que $p^{-1}(z) \in (X \setminus A)$ es cerrado en X y por lo tanto en $X \overset{\circ}{\cup} Y$. Luego, $\{z\}$ es cerrado en $X \cup_\Phi Y$.

Prueba 2. Sean X e Y espacios T_1. Si $z \in X \cup_\Phi Y$, entonces

$$p^{-1}(z) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } z = p(x),\ x \in X \setminus A, \\ \Phi^{-1}(y) \cup \{y\} & \text{si } z = p(y),\ y \in Y. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Por lo tanto, $\{z\}$ es cerrado por ser p identificación y $X \cup_\Phi Y$ es T_1.

b) Si X y Y son compactos, entonces $X \overset{\circ}{\cup} Y$ es un espacio compacto. Luego, por la propiedad 17) de funciones continuas, la imagen de la función identificación $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$ es compacta.

c) Si X y Y son espacios de Lindelöf, entonces $X \overset{\circ}{\cup} Y$ es un espacio de Lindelöf. Luego, por la propiedad 18), $X \cup_\Phi Y$ es un espacio de Lindelöf.

d) Sean $F_1, F_2 \subset X \cup_\Phi Y$ subconjuntos cerrados y disjuntos. Mostraremos que estos conjuntos tienen vecindades disjuntas en $X \cup_\Phi Y$. Como Y es normal, para $i = 1, 2$ existen vecindades disjuntas V_i en Y tales que $Y \cap p^{-1}(F_i) \subseteq V_i$ y $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Luego, por el lema 2.1.1, se tiene que $p(\overline{V_i})$ son cerrados en $X \cup_\Phi Y$. También, por ser X normal, para $i = 1, 2$ existen abiertos disjuntos U_i en X tales que $X \cap p^{-1}(F_i \cup p(\overline{V_i})) \subset U_i$. Para $i = 1, 2$ los conjuntos $p((U_i \setminus A) \cup V_i)$ son disjuntos en $X \cup_\Phi Y$ y $F_i \subset p((U_i \setminus A) \cup V_i)$. Veamos que estos conjuntos son abiertos en $X \cup_\Phi Y$. Notemos que $Y \cap p^{-1}p((U_i \setminus A) \cup V_i) = V_i$ y $X \cap p^{-1}p((U_i \setminus A) \cup V_i) = (U_i \setminus A) \cup \Phi^{-1}(V_i)$. Mostraremos que $(U_i \setminus A) \cup \Phi^{-1}(V_i)$ es abierto en X. Para este fin, como $X \cap p^{-1}p(V_i) = \Phi^{-1}(V_i) \subset U_i$ y, siendo abierto en A, tenemos que $\Phi^{-1}(V_i) = W_i \cap A$ con W_i abierto en X. Así $(U_i \setminus A) \cup \Phi^{-1}(V_i) = (U_i \setminus A) \cup (U_i \cap W_i \cap A) = U_i \cap (W_i \cup A^c)$ y también es abierto en X. Por lo tanto, $X \cup_\Phi Y$ es normal.

e) Por b), $X \cup_\Phi Y$ es compacto. Además, por d), $X \cup_\Phi Y$ es normal. Entonces $X \cup_\Phi Y$ es regular, lo cual a su vez implica que $X \cup_\Phi Y$ es Hausdorff. En consecuencia, $X \cup_\Phi Y$ es Hausdorff compacto.

Para las propiedaes f)-j), remitimos al lector a [13] en página 15. □

2.2. Retractos de deformación

En topología resulta muy importante transformar una función continuamente en otra. Esto se puede lograr gracias a las homotopías, las cuales definiremos aquí y nos servirán también para deformar un espacio en otro. Recordemos que $\mathbb{I}$ es el intervalo cerrado $[0,1]$ con la topología usual.

Definición 2.2.1. *Sean f y g dos funciones continuas del espacio X en un espacio Y. Se dice que f es* ***homotópica*** *a g si existe una función continua $H\colon X\times\mathbb{I}\to Y$, llamada homotopía entre f y g, tal que $H_{|X\times\{0\}}=f$ y $H_{|X\times\{1\}}=g$.*

Escribimos $\mathbf{f}\simeq\mathbf{g}$ si f es homotópica a g y $H:f\simeq g$ para enfatizar que H es una homotopía entre f y g. También, podemos representar a la función $H\colon X\times\mathbb{I}\to Y$, por la familia de funciones continuas $H_t\colon X\to Y$, tal que $H_t(x)=H(x,t)$ para cada $(x,t)\in X\times\mathbb{I}$.

Sea $i_A : A\subseteq X$ la función inclusión de un subespacio A en un espacio X. Una **deformación** de X en A es una homotopía $H\colon X\times\mathbb{I}\to X$ entre las funciones $Id_X\colon X\to X$ e $i_A\circ d\colon X\to X$, donde $d\colon X\to A$ es cualquier función continua. Cuando existe una deformacion H de X en A, se dice que X es **deformable** en A. A la homotopía $H:Id_X\simeq i_A\circ r$, donde $r\colon X\to A$ es una retracción, se le llama una **retracción de deformación** de X en A.

Definición 2.2.2. *Sea $A\subseteq X$.*

i) Decimos que A es un ***retracto de deformación*** *de X si $Id_X\simeq i_A\circ r$ donde r es una retracción de X en A.*

ii) Decimos que A es un ***retracto de deformación fuerte*** *de X si $H:Id_X\simeq i_A\circ r$ y $H(a,t)=a$, para todo $(a,t)\in A\times\mathbb{I}$.*

También, decimos que una retracción de deformación de X en A es una homotopía $H\colon X\times\mathbb{I}\to X$ entre Id_X y r, donde r es una retracción de X sobre A.

Cuando se tiene una homotopía $H\colon X\times\mathbb{I}\to Y$, entre $f,g\colon X\to Y$, tal que $f(a)=H(a,t)=g(a)$, para todo $a\in A\subseteq X$ y todo $t\in\mathbb{I}$, se dice que H es una **homotopía relativa** a A de f a g. Luego, una retracción de deformación fuerte de X en A es una retracción de deformación relativa a A.

Recordemos que en un espacio vectorial, las operaciones de adición y multiplicación por un ecalar en $\mathbb{R}^n$ de funciones continuas son funciones continuas.

Ejemplo 2.2.1. Sean $X = \mathbb{I}$ y $A = \{0\}$. Tenemos que $H\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ definida por $H(x,t) = x(1-t)$, para todo $(x,t) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I}$, es una homotopía entre $r : X \supseteq A$ y Id_X, pues $H(x,0) = x$, $H(0,t) = 0$ y $H(x,1) = 0 \in A$. Por lo tanto, A es un retracto de deformación fuerte de X. En general, $A = \{(0,0,0,\dots,)\}$ es un retracto de deformación fuerte para $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{D}^n$ y $\mathbf{D}^n$ con la misma homotopía.

Ejemplo 2.2.2. Sean el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$ y $\mathbb{S}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\}$. $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación fuerte del cilindro C. Para $r : C \supseteq \mathbb{S}^1$ definida por $r(x,y,z) = (x,y,0)$, tenemos que $H_t(x,y,z) = (x,y,(1-t)z)$, para todo $t \in \mathbb{I}$ y todo $(x,y,z) \in C$ es una homotopía entre Id_C y r.

Ejemplo 2.2.3. La $(n-1)$-esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$. Para la homotopía lineal $H\colon (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)\times\mathbb{I} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida por $H(x,t) = tr(x) + (1-t)x$, para todo $(x,t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)\times\mathbb{I}$, en donde r es la retracción radial dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, tenemos que $H(x,1) = r(x)$ y $H(x,0) = Id_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{D}^n}(x)$. Además, para todo $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $t \in \mathbb{I}$, se tiene que $r(a) = H(a,t) = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}(a)$ y $H(x,1) \in \mathbb{S}^{n-1}$. También, $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de deformación fuerte para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con la misma homotopía.

Ejemplo 2.2.4. Sean $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 = 1\}$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 = 1\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Tenemos que para $X = (C_1\cup C_2)\setminus\{(2,0),(-2,0)\}$, $A = \{(0,0)\}$ es un retracto de deformación fuerte para X. Mediante la homotopía $H\colon X\times\mathbb{I} \to X$ definida por $H((x,y),t) = \frac{(1-t)(x,y)}{\|((1-t)x+(-1)^i,(1-t)y)\|}$, para todo $((x,y),t) \in X\times\mathbb{I}$ y $i = 1,2$, tenemos que $H((x,y),0) = Id_X(x,y)$, $H((x,y),1) = r(x,y)$ y $H((0,0),t) = (0,0)$, donde $r\colon X \to A$ se define como $r(x,y) = (0,0)$, para todo $(x,y) \in X$.

Ejemplo 2.2.5. Sean $(\mathbb{I}\times\{1\})\cup(M\times\mathbb{I}) = X$ y $\{0\}\times[0,\frac{1}{2}] = A$, en donde $M = \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{k},\dots\}$. Definamos a $r : X \supseteq A$ por $r(x,y) = (0,\frac{y}{2})$, para todo $(x,y) \in X$. Luego, A es un retracto de deformación no fuerte mediante la homotopía $H\colon X\times\mathbb{I} \to X$ definida por

$$H((x,y),t) = \begin{cases} (x,(1-t)y) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ((2-2t)x,\frac{y}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

//

El siguiente ejemplo muestra que no todo retracto es un retracto de deformación. Sea $X = A \cup B$ como en ejemplo 2.1.6. Vimos que A es un retracto para X. Supongamos que existe una homotopía H entre Id_X y

$r : X \supseteq A$, definida por $r(x,y) = (0,y)$. Sea g un punto de B. Entonces $H_{|g\times I}$ es una trayectoria en X, de un punto de B a un punto de A, lo que es una contradicción pues A y B son dos componentes por trayectorias diferentes de X. Por lo tanto, A no es un retracto de deformación para X.

Proposición 2.2.1. *Sea A un retracto de deformación de X. Entonces A es conexo por trayectorias si y sólo si X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que X es conexo por trayectorias. Del hecho de que A es un retracto de deformación de X y X es conexo por trayectorias, se desprende inmediatamente que A es conexo por trayectorias.

Supongamos que A es conexo por trayectorias y A es un retracto de deformación de X. Para $a, b \in X$ y una deformación $H\colon X \times \mathbb{I} \to X$, podemos obtener una trayectoria de a a b concatenendo trayectorias correspondientes a los subconjuntos $H(\{a\} \times \mathbb{I})$ y $H(\{b\} \times \mathbb{I})$ con una trayectoria en A de $H(a)$ a $H(b)$. □

En el conjunto de todas las funciones continuas $C(X,X)$, tenemos que la relación de homotopía es de equivalencia y el conjunto cociente obtenido se le denota por $[X,Y]$. También, en el conjunto $P(X)$ de todas las trayectorias en X, la relación de homotopía es de equivalencia y el conjunto cociente obtenido se llama **conjunto fundamental** en X denotado por $\pi(X)$.

Teorema 2.2.1. *Un subespacio $A \subseteq X$ es un retracto de deformación de X si y sólo si, A es un retracto de X y X es una deformación en A.*

Demostración. Supongamos que $H : Id_X \simeq i_A \circ d$ es una deformación de X en A y $r\colon X \to A$ es una retracción. De $Id_X \simeq i_A \circ d$ se tiene que $r = r \circ Id_X \simeq r \circ i_A \circ d = Id_A \circ d = d$, de donde $Id_X \simeq i_A \circ d \simeq i_A \circ r$, lo cual por la transitividad en $[X,Y]$, nos lleva a que existe $H : Id_X \simeq i_A \circ r$ una retracción de deformación de X en A. En consecuencia, A es un retracto de deformación de X.

Ahora supongamos que $H : Id_X \simeq i_A \circ r$ es una retracción de deformación de X en A. Como $r\colon X \to A$ es una retracción, se concluye que A es un retracto de X y H es una deformación para X en A. □

Se dice que dos espacios X y Y son del mismo **tipo de homotopía** (son homótopicamente equivalentes), denotado por $X \simeq Y$, si existen funciones continuas $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$, respectivamente.

Enseguida veremos que un retracto de deformación $A \subseteq X$ es homótopicamente equivalente al espacio X.

Proposición 2.2.2. *Si A es un retracto de deformación de X, entonces A es homótopicamente equivalente a X.*

Demostración. Supongamos que A es un retracto de deformación de X. Mostraremos que $X \simeq A$. Como A es un retracto de deformación de X se tiene que $Id_X \simeq i_A \circ r$, en donde $i_A\colon A \to X$ es la función inclusión y $r\colon X \to A$ es una retracción. Por otro lado, tenemos que $r \circ i_A = Id_A$ y $r \circ i_A \simeq Id_A$ por la reflexividad en $[X, Y]$. Por lo tanto, como $Id_X \simeq i_A \circ r$ y $r \circ i_A \simeq Id_A$, tenemos que A es homótopicamente equivalente a X. $\square$

El siguiente teorema es conocido como **propiedad de naturalidad** del conjunto fundamental $\pi(X)$ en X, en el conjunto fundamental $\pi(Y)$ en Y.

Teorema 2.2.2. *Sea $F\colon X \to Y$ una función continua. Si las trayectorias $f, g\colon \mathbb{I} \to X$ son homotópicas en el espacio dominio X, entonces las trayectorias $F \circ f, F \circ g\colon \mathbb{I} \to Y$ son trayectorias homotópicas en el espacio codominio Y.*

Demostración. Sea $f \simeq g$ en X vía la homotopía $H\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$. Como $F \circ H\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$ es continua y $(F \circ h)(t, 0) = (F \circ f)(t)$ y $(F \circ h)(t, 1) = (G \circ g)(t)$, se tiene que $F \circ f \simeq F \circ g$ en Y. $\square$

Un espacio X se dice que es **simplemente conexo** si es conexo por trayectorias y cualesquiera dos trayectorias con los mismos puntos extremos en X son homotópicas relativas a $\{0, 1\}$.

Proposición 2.2.3. *Si A es un retracto de un espacio X simplemente conexo, entonces A es simplemente conexo.*

Demostración. Supongamos que $r : X \supseteq A$ y X es simplemente conexo. Por la proposición 2.1.10, vimos que las retracciones preservan la conexidad por trayectorias. Mostraremos que para dos trayectorias f, g en el subespacio A con puntos extremos comunes, se tiene que $f \simeq g$ relativas a $\{0, 1\}$. Como X es simplemente conexo, para dos trayectorias h, k con puntos extremos comunes en X, se tiene que $h \simeq k$ relativas a $\{0, 1\}$ vía la homotopía $H\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$. Por el teorema 2.2.2, tenemos que $r \circ h \simeq r \circ k$ relativas a $\{0, 1\}$ en el espacio codominio A vía la homotopía $r \circ H\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to A$. Tomando $f = r \circ h$ y $g = r \circ k$, se tiene que f y g son dos trayectorias homotópicas relativas a $\{0, 1\}$ con puntos extremos comunes en A. En consecuencia, A es simplemente conexo. $\square$

Con lo visto sobre homotopías, ahora demostraremos que $\mathbb{S}^1$ no es un retracto de $\mathbf{D}^2$.

Teorema 2.2.3. *La esfera $\mathbb{S}^1$ no es un retracto del disco cerrado $\mathbf{D}^2$.*

Demostración. Consideremos las trayectorias $f, g\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ definidas por $f(t) = \mathrm{e}^{-\pi i t}$ y $g(t) = \mathrm{e}^{\pi i t}$ las cuales tienen los mismos puntos extremos $(1,0)$ y $(-1,0)$. Tenemos que f, g no son homotópicas en $\mathbb{S}^1$ relativas a $\{0,1\}$ (ver ejemplo 1, [22] página 274). Por otro lado, tenemos que las composiciones $i_{\mathbb{S}^1} \circ f$, $i_{\mathbb{S}^1} \circ g\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$ son trayectorias homotópicas, ya que $\mathbf{D}^2$ es un subespacio (simplemente) conexo de $\mathbb{R}^2$. Si r fuera una retracción del disco a la esfera, tendríamos que $f = r \circ i_{\mathbb{S}^1} \circ f \simeq r \circ i_{\mathbb{S}^1} \circ g = g$ relativas a $\{0,1\}$ por la propiedad de naturalidad, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{S}^1$ no es un retracto de $\mathbb{D}^2$. □

2.3. Retractos de espacios contraíbles.

Cuando una función continua f es homotópica a la función constante c_p en p, decimos que f es **homotópica nula** o **innesencial**. Por otro lado, cuando Id_X es homotópica nula decimos que X es un espacio contraíble.

Definición 2.3.1. *Un espacio X se dice que es* ***contraíble****, si existe un punto $p \in X$ tal que la función identidad Id_X es homotópica a la función $c_p\colon X \to X$ constante en p. La función continua $H\colon X \times \mathbb{I} \to X$ tal que $H(x,0) = Id_X$ y $H(x,1) = c_p(x) = p$ es llamada una* ***contracción*** *del espacio X a p.*

Los siguientes son algunos ejemplos de espacios contraíbles.

Ejemplo 2.3.1. El disco cerrado $\mathbf{D}^n$, con $n \geq 1$, es contraíble al origen. La función $H\colon \mathbf{D}^n \times \mathbb{I} \to \mathbf{D}^n$, definida por $H(x,t) = (1-t)x,$, para todo $(x,t) \in \mathbf{D}^n \times \mathbb{I}$, es una contracción del disco cerrado unitario al punto 0. De igual forma $\mathbb{D}^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{I}^n$ con la misma contracción son contraíbles al origen.

Ejemplo 2.3.2. La bola abierta unitaria $\mathbb{D}^n$, con $n \geq 1$, es contraíble al origen. En efecto, para la homotopía $H\colon \mathbb{D}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{D}^n$ definida por $H(x,t) = tx$ se tiene que $H(x,0) = c_0(x) = 0$ y $H(x,1) = x$, para todo $(x,t) \in \mathbb{D}^n \times \mathbb{I}$. De igual forma $\mathbf{D}^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{I}^n$ son contraíbles al origen con la misma contracción.

Ejemplo 2.3.3. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, es un espacio contraíble a un punto $p \in \mathbb{R}^n$ de acuerdo a la homotopía $H\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$, definida por $H(x,t) = (1-t)x + tp$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{I}$. De la misma forma $\mathbb{D}^n$, $\mathbf{D}^n$, y $\mathbb{I}^n$ son contraíbles a un punto con la misma contracción.

Ejemplo 2.3.4. Sean X como en el ejemplo 2.2.5 y $H\colon X \times \mathbb{I} \to X$ una función definida por

$$H((x,y),t) = \begin{cases} (x, 2t + (1-2t)y) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ ((2-2t)x, 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Entonces H es una contracción de X en $(0,1)$.

A continuación damos una importante propiedad de retractos en espacios contraíbles.

Proposición 2.3.1. *Todo retracto de un espacio contraíble es contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio contraíble y $r : X \supseteq A$. Mostraremos que A es contraíble. Como X es contraíble, existe una contracción $H\colon X \times \mathbb{I} \to X$ tal que $H(x,0) = Id_X$ y $H(x,1) = c_{x_0}(x) = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Sea $F\colon A \times \mathbb{I} \to A$ definida por $F(a,t) = r(H(a,t)) = (r \circ H_t \circ i_A)(a,t)$. Entonces $F(a,0) = r(H(a,0)) = r(Id_X(a)) = r(a) = a = Id_A(a)$ y $F(a,1) = r(H(a,1)) = r(x_0) \in A$, para cada $a \in A$. Esto muestra que A es contraíble. □

Proposición 2.3.2. *X es un espacio contraíble a un punto p si y sólo si $\{p\}$ es un retracto de deformación para X.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio contraíble en p. Mostremos que $\{p\}$ es un retracto de deformación para X. Como X es contractil, existe una homotopía $H_t\colon X \to X$ $(0 \leq t \leq 1)$ tal que $H_0 = Id_X$ y $H_1(x) = c_p(x) = p$ para todo $x \in X$. Como $c_p = i_{\{p\}} \circ r$, donde $r\colon X \to \{p\}$ es una retracción. Por definición, $\{p\}$ es un retracto de deformación de X.

Supongamos que $\{p\}$ es un retracto de deformación de X. Mostraremos que X es un espacio contrátil al punto p. Como $\{p\}$ es un retracto de deformación de X, existe una homotopía $H_t\colon X \to X$ tal que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) = i_{\{p\}} \circ r$, donde $r\colon X \to \{p\}$ es una retracción. Como $i_{\{p\}} \circ r = c_p$, se tiene que H es una contracción del espacio X a p. En consecuencia, X es un espacio contraíble al punto p. □

De acuerdo a la siguiente definición, veremos que el concepto de espacio contractil lo podemos definir en un punto.

Definición 2.3.2. *Se dice que un espacio X es* ***localmente contraíble en un punto*** *$p \in X$, si para toda vecindad U de p, existe una vecindad $V \subseteq U$ de p y una homotopía $H\colon V \times I \to U$ tal que H_0 es la función inclusión de V en U y H_1 es una función constante. Se dice que X es* ***localmente contraíble*** *si lo es en cada uno de sus puntos.*

Proposición 2.3.3. *Todo retracto de un espacio localmente contraíble es localmente contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio localmente contraíble y $r : X \supseteq A$. Mostraremos que A es localmente contraíble. Sean $p \in A$ y U una vecindad de p en A. Como $p \in A$, tenemos que $r(p) = p$. Como r es continua, se tiene que $r^{-1}(U) = W$ es una vecindad de p en X. Por otro lado, como X es localmente contraíble, existen una vecindad Z de p en X tal que $Z \subset W$ y una homotopía $H\colon Z \times \mathbb{I} \to W$, tal que $H_0(x)$ es la función inclusión de Z en W y $H_1(x)$ es una función constante. Sea $V = Z \cap A \subset Z \subset W$. Luego, se tiene que $V \subset r(Z) \subset r(W) = U$, de donde V es una vecindad de p en A. Enseguida definamos una homotopía $F\colon V \times \mathbb{I} \to U$ por $F_t(x) = r(H_t(x))$ para todo $(x,t) \in V \times \mathbb{I}$. De aquí, para cada $x \in V$, $F_0(x) = r(H_0(x))$ es una función inclusión y $F_1(x) = r(H_1(x))$ es una función constante. Por lo tanto, A es localmente contraíble en p. Como p fue arbitrario se concluye que A es localmente contraíble. $\square$

2.4. Retractos de vecindad.

Como hemos visto en la sección 2.1, para un espacio X y $A \subseteq X$ un subespacio de X, en ocasiones podemos encontrar una extensión continua (retracción) $r\colon X \to A$ de $Id_A\colon A \to A$ tal que $r(X) \subseteq A$ y $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Sin embargo, también en ocasiones podemos encontrar una extensión continua $r\colon U \to A$ de $Id_A\colon A \to A$ tal que $r(U) \subseteq A$ y $r(a) = a$ para todo $a \in A$, en donde $A \subseteq U \subseteq X$ y U es un subespacio abierto de X. A continuación definimos este tipo de extensiones.

Definición 2.4.1. *Un subespacio $A \subseteq X$ de un espacio X es un **retracto de vecindad** de X, si A es un retracto de un subespacio abierto U de X que contiene a A.*

Ejemplo 2.4.1. Dado que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de $\mathbf{D}^n \setminus \{0\}$, el cual es un subconjunto abierto de $\mathbf{D}^n$, se tiene que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de vecindad de $\mathbf{D}^n$ con la retracción radial. Con la misma retracción, resulta que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4.2. Sean X un espacio Hausdorff y a_1, $a_2 \in X$. Entonces $A = \{a_1, a_2\}$ es un retracto de vecindad de X. En efecto, sean U_1 y U_2 vecindades disjuntas de a_1 y a_2 respectivamente y sea $r\colon U_1 \cup U_2 \to A$, definida como $r(x) = a_1$, para todo $x \in U_1$ y $r(x) = a_2$,para todo $x \in U_2$. Entonces r es continua y $r_{|A} = Id_A$.

Ejemplo 2.4.3. Como X es un abierto del espacio X que contiene a un subconjunto A, A es un retracto de vecindad de X.

Por comodidad esribiremos $r : U \supseteq A$ para referirnos a una retracción de vecindad de un subespacio $U \subseteq X$ que contiene a A.

Proposición 2.4.1. *Un subespacio A del espacio X es un retracto de vecindad de X si y sólo si, para cualquier espacio Y, toda función continua $g\colon A \to Y$ tiene una extensión continua sobre algún abierto U que contiene a A.*

Demostración. Supongamos que $r : U \supseteq A$ y $g\colon A \to Y$ es continua. Tomemos $g \circ r\colon U \to Y$. Vemos que $g \circ r$ es una extensión continua de g pues $(g \circ r)_{|A} = g$.

Inversamente, como Id_A es continua, por hipótesis tenemos que existe una extensión continua $r\colon U \to A$. En consecuencia, A es un retracto de vecindad de X. □

Vemos que todo retracto de vecindad A de un espacio X tiene toda propiedad hereditaria de X. Por otro lado, subespacios abiertos de X heredan toda propiedad topológica local de X. Enseguida, veremos que todo retracto de vecindad de X tiene las propiedades locales de conexidad, compacidad y contractilidad si X las tiene.

Proposición 2.4.2. *Sean X un espacio localmente conexo y A un retracto de vecindad de X. Entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Sean $r : U \supseteq A$ y $W \subseteq A$ una vecindad de p en A. Mostraremos que existe una vecindad conexa de p contenida en W. Como $r(p) = p$ y r es continua, $r^{-1}(W) = N$ es una vecindad de p en U. Luego, como U es localmente conexo, existe una vecindad conexa M de p en U tal que $M \subseteq N$. Finalmente, como $p \in M \cap A \subseteq M \subseteq N$ y r es continua, $M \cap A \subseteq r(M) \subseteq W$, lo que indica que A es conexo en pequeño. Por el teorema 2.1.5, A es localmente conexo en p. Como p fue un punto arbitrario de A, se concluye que A es localmente conexo. □

Proposición 2.4.3. *Sean X un espacio localmente contraíble y A un retracto de vecindad de X. Entonces A es localmente contraíble.*

Demostración. Sean $U \subseteq X$ un subespacio abierto de X que contiene a A y $r : U \supseteq A$. Sean $p \in A$ y V una vecindad de p en A. Como $r(p) = p$ y r es continua, $r^{-1}(V) = W$ es una vecindad de p en U. Por otro lado, como U es localmente contraíble, existen una vecindad Z de p en U tal que $Z \subseteq W$ y una homotopía $H\colon Z \times \mathbb{I} \to W$, tal que $H_0(x)$ es la función inclusión de Z en W y $H_1(x)$ es una función constante. Sea $M = Z \cap A \subseteq Z \subseteq W$. Luego, $M \subseteq r(Z) \subseteq V$ y M es una vecindad de p en A. Definamos $F\colon M \times \mathbb{I} \to V$ por $F_t(x) = r(H_t(x))$, para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{I}$. De aquí $F_0(x)$ es una función inclusión y $F_1(x)$ es una función constante. En consecuencia, A es localmente contraíble. $\square$

Finalmente, lo referente a localmente compacto sigue de la proposición 2.1.11 y del hecho de que todo retracto es un retracto de vecindad.

2.4.1. El cubo de Tychonoff

Consideremos el intervalo cerrado $\mathbb{I} = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y el cubo de Tychonoff $T = \mathbb{I}^M = \{\, f \mid f\colon M \to \mathbb{I}\,\}$, en donde M es un conjunto no numerable. La función $\theta \in T$ tal que $\theta(M) = 0$ es llamada el origen en T. Además, para cada $\lambda \in M$, tenemos que el subespacio cerrado de T definido por $\mathbf{I}_\lambda = \{\, f \in T : f(M \setminus \{\,\lambda\,\}) = 0\,\}$ es homeomorfo a $\mathbb{I}$. En efecto, para cada $f \in T$ tal que $f(M \setminus \{\lambda\}) = 0$ significa un punto $(0,0,0,...,0,a_\lambda,0,...)$ en T, en donde a_λ toma valores en el λ-ésimo factor de T. En consecuencia, $\mathbf{I}_\lambda$ es una replica de $\mathbb{I}$ y por lo tanto, $\mathbf{I}_\lambda \approx \mathbb{I}$.

Sabemos que para una familia $\{X_\delta : \delta \in \Lambda\}$ de espacios, la **topología de Tychonoff** (**topología producto**) sobre el producto Cartesiano $\prod_{\delta\in\Lambda} X_\delta = \{\,(x_\delta)_{\delta\in\Lambda} : x_\delta \in X_\delta, \forall\delta \in \Lambda\,\}$, es la topología que tiene como base la colección de conjuntos de la forma $\prod_{\delta\in N} U_\delta \times \prod_{\mu\in\Lambda\setminus N} X_\mu$, donde U_δ es un conjunto abierto en X_δ para cada $\delta \in N$ y N es un subconjunto finito de Λ. Así, un abierto U en la topología del espacio producto es la unión de elementos basicos; es decir, $U = \bigcup(\prod_{\delta\in N} U_\delta \times \prod_{\mu\in\Lambda\setminus N} X_\mu)$.

Lema 2.4.1. *Para toda sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades del origen θ en T, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ contiene a $\mathbf{I}_\lambda$ para toda $\lambda \in M$ excepto, a lo más, para un número numerable de índices λ. De aquí, ya que M es no numerable, existe $\lambda \in M$ tal que $\mathbf{I}_\lambda \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por definición de topología producto, toda vecindad U_n de θ en T contiene a $\mathbf{I}_\lambda$ para toda $\lambda \in M$ excepto, a lo más, un número finito de índices $\lambda \in M$. Luego, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ contiene a $\mathbf{I}_\lambda$ para toda $\lambda \in M$ excepto, a lo más, para un número numerable de índices λ. De aquí, existe $\lambda \in M$ tal que $\mathbf{I}_\lambda \subset U_n$ para toda n, con lo cual queda demostrado el lema. $\square$

Sea $X = \mathbb{I} \times T$ el cubo de Tychonoff, donde $x_0 = (0,\theta)$ es el origen en X y $T = \mathbb{I}^M$ es como antes. El siguiente resultado, muestra que $W = X \setminus \{x_0\}$ no es normal al considerar los conjuntos cerrados disjuntos $E = (\mathbb{I} \setminus \{0\}) \times \{\theta\}$ y $F = \{0\} \times (T \setminus \{\theta\})$.

Lema 2.4.2. *Los conjuntos cerrados disjuntos E y F de W, no tienen vecindades disjuntas en W.*

Demostración. Mostraremos que si U es una vecindad de E, entonces la cerradura de U intersecta a F. Sea $t_n = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como U es una vecindad de (t_n, θ) para toda $n \in \mathbb{N}$, U contiene un conjunto de la forma $\{t_n\} \times U_n$ donde U_n es una vecindad de θ en T. Por el lema 2.4.1, existe un $\lambda \in M$ tal que $\mathbf{I}_\lambda \subset U_n$ para toda n. Entonces $\{t_n\} \times \mathbf{I}_\lambda \subset U$, para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\{0\} \times (\mathbf{I}_\lambda \setminus \{\theta\}) \subset \overline{U}$, de donde $\overline{U} \cap F \neq \emptyset$ con lo que queda demostrado el lema. $\square$

Finalmente considerando el conjunto cerrado $A = (\mathbb{I} \times \{\theta\}) \cup (\{0\} \times T)$ en el cubo de Tychonoff $X = \mathbb{I} \times T$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.1. *A no es un retracto de vecindad de X.*

Demostración. Supongamos que existe $r : U \supseteq A$ de un subespacio abierto U de X que contiene a A en A. Ya que E y F son abiertos en A y son disjuntos, tenemos que $r^{-1}(E)$ y $r^{-1}(F)$ son abiertos disjuntos en U. En consecuencia, son vecindades disjuntas para E y F en X, lo que contradice el lema 2.4.2. Por lo tanto, A no es un retracto de vecindad de X. $\square$

Capítulo 3

RETRACTOS ABSOLUTOS

En este capítulo trataremos los extensores (de vecindad) o subespacios que tienen la propiedad de extensión. Desde un punto de vista más general, se verán los extensores (de vecindad) absolutos para clases $\mathcal{C}$ de espacios débilmente hereditarias. También se tratarán los retractos absolutos (de vecindad) para clases $\mathcal{C}$ de espacios cerrados bajo imágenes homeomórficas.

3.1. Extensores (de vecindad)

A continuación definiremos la propiedad de extensión para un espacio en relación a otro, en donde, como veremos, algunas retracciones son un caso particular.

Definición 3.1.1. *Se dice que un subespacio cerrado A de X tiene la* ***propiedad de extensión*** (***de vecindad***) *en X con respecto a un espacio Y si toda función continua $f\colon A \to Y$ admite una extensión sobre X (sobre una vecindad U de A en X).*

Equivalentemente, se dice que Y es un **extensor** (**de vecindad**) para el par (X, A), si toda función continua $f\colon A \to Y$ admite una extensión sobre X (sobre una vecindad U de A en X).

Ejemplo 3.1.1. Todos los retractos A de un espacio Hausdorff X son extensores o tienen la propiedad de extensión, por el teorema 2.1.3.

Ejemplo 3.1.2. La $(n-1)$-esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ es un extensor de vecindad del par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, por el ejemplo 2.4.1.

Ejemplo 3.1.3. Si Y consta de un solo punto, entonces Y es un extensor para cualquier par (X, A).

Ejemplo 3.1.4. Por el Teorema de Extensión de Tietze, el intervalo cerrado $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ son extensores para cualquier par (X, A), en donde A es un subespacio cerrado de un espacio normal X.

De manera más general y formal, veremos que $\mathbb{I}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son extensores del par (X, A), para cualquier espacio normal X y cualquier subconjunto cerrado A de X.

Teorema 3.1.1. *Sean X un espacio normal, y $f\colon A \to \mathbb{I}^n$ una función continua definida en el subconjunto cerrado A de X. Entonces, existe una extensión F de f sobre todo el espacio X.*

Demostración. Para cada $x \in A$, sea $f(x) = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ un punto en $\mathbb{I}^n$. Definiendo $f_i\colon A \to \mathbb{I}_i$ por $f_i(x) = y_i$, para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$, tenemos que $f_i = \pi_i \circ f$ es continua, donde π_i es la proyección del espacio producto $\mathbb{I}^n$ sobre su i-ésimo factor $\mathbb{I}^n$. Por el Teorema de Extensión de - Tietze, f_i se puede extender para obtener una función continua $F_i\colon X \to \mathbb{I}_i$, para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Para cada punto $x \in X$ definamos $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$. Entonces F es continua y concuerda con f en A. Por lo tanto, F es la extensión deseada. □

Teorema 3.1.2. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función continua de un subespacio cerrado A de un espacio X T_4. Entonces existe una extensión $F\colon X \to \mathbb{R}^n$ continua de f.*

Demostración. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función continua de A en $\mathbb{R}^n$. Entonces podemos escribir $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, en donde cada f_i para cada $i = 1, 2 \dots, n$, es continua de A en $\mathbb{R}$. Por el Teorema de Extensión de Tietze, para cada f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, existe una extensión continua F_i de f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, de X en $\mathbb{R}$. Definamos a F por $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$. Como toda F_i, $i = 1, 2, \dots, n$, es continua, F es continua. Por lo tanto, F es una extensión continua de f de X en $\mathbb{R}^n$. □

En la siguiente sección, veremos que los extensores absolutos (de vecindad) son también extensores (de vecindad).

3.2. Extensores absolutos (de vecindad)

Bajo ciertas condiciones, podemos generalizar el concepto de extensor (de vecindad) a una clase más amplia de espacios y obtener el concepto de extensor absoluto (de vecindad). Para esto definiremos una clase $\mathcal{C}$ de espacios, débilmente hereditaria.

Definición 3.2.1. *Una clase $\mathcal{C}$ de espacios es **débilmente hereditaria** si satisface las siguientes condiciones:*

1) *(**Débilmente hereditaria**) Si $X \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ contiene todo subespacio cerrado de X.*

2) *(**Topológica**) Si $X \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ contiene toda imagen homeomórfica de X.*

Existe una gran cantidad de clases $\mathcal{C}$ débilmente hereditarias de espacios, además de considerar que la unión y la intersección de clases $\mathcal{C}$ débilmente hereditarias es una clase $\mathcal{C}$ débilmente hereditaria.

1) La clase $\mathcal{C}_1$ de todos los espacios primero numerables.
2) La clase $\mathcal{C}_2$ de todos los espacios segundo numerables.
3) La clase $\mathcal{CR}$ de todos los espacios completamente regulares.
4) La clase $\mathcal{F}$ de todos los espacios totalmente normales.
5) La clase $\mathcal{FP}$ de todos los espacios totalmente normales y perfectamente normales.
6) La clase $\mathcal{H}$ de todos los espacios Hausdorff.
7) La clase $\mathcal{K}$ de todos los espacios compactos.
8) La clase $\mathcal{KH}$ de todos los espacios Hausdorff compactos.
9) La clase $\mathcal{KM}$ de todos los espacios compactos metrizables.
10) La clase $\mathcal{L}$ de todos los espacios de Lindelöf.
11) La clase $\mathcal{LK}$ de todos los espacios localmente compactos.
12) La clase $\mathcal{M}$ de todos los espacios metrizables.
13) La clase $\mathcal{N}$ de todos los espacios normales.
14) La clase $\mathcal{P}$ de todos los espacios perfectamente normales.
15) La clase $\mathcal{PH}$ de todos los espacios Hausdorff perfectamente normales.
16) La clase $\mathcal{R}$ de todos los espacios regulares.

17) La clase $\mathcal{SM}$ de todos los espacios metrizables separables.

18) La clase $\mathcal{T}$ de todos los espacios de Tychonoff.

Veamos que 7) es una clase topológica débilmente hereditaria, las demas se dejan como ejercicio para el lector. Sabemos que todo $A \subset X$ subespacio cerrado de un espacio compacto X es compacto (ver [22] página 199). Por otro lado, si X es un espacio compacto y $f \colon X \to Y$ es un homeomorfismo entre los espacios X y Y, entonces la imagen $f(X) \subseteq Y$ es compacto, por ser f continua.

Definición 3.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase débilmente hereditaria. Un espacio Y es un* ***extensor absoluto*** *(**de vecindad**) para $\mathcal{C}$, si todo subespacio cerrado A de un espacio $X \in \mathcal{C}$ tiene la propiedad de extensión a X (a un subespacio abierto de X que contiene a A) con respecto a Y.*

Simbólicamente, escribiremos $Y \in AE(ANE)(\mathcal{C})$[1] para indicar que Y es un extensor absoluto o bien un extensor absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.

Ejemplo 3.2.1. Sea $Y = \{p\}$, entonces Y es un AE para cualquier clase $\mathcal{C}$. En efecto para $X \in \mathcal{C}$ y A un subconjunto cerrado de X, se tiene que $f \colon A \to \{p\}$ es continua y la única función $F \colon X \to \{p\}$ es extensión de f.

Ejemplo 3.2.2. Por el teorema 3.1.1 y teorema 3.1.2, $\mathbb{I}^n$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente son $AE(ANE)(\mathcal{N})$.

Proposición 3.2.1. *Todo extensor absoluto para la clase $\mathcal{C}$ es un extensor absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $X \in \mathcal{C}$ y A un subconjunto cerrado de X. Por hipótesis, para cada $f \colon A \to Y$ función continua, existe una extensión $F \colon X \to Y$. Como X es un subconjunto abierto de X que contiene a A, F puede verse como una extensión de f a una vecindad U de X que contiene a A. Esto completa la demostración. $\square$

En [18], página 95 se muestra una condición para que un $ANE(\mathcal{N})$ sea un $AE(\mathcal{N})$.

Como la clase $\mathcal{P}$ de todos los espacios perfectamente normales es más amplia que la clase $\mathcal{CR}$ de todos los espacios completamente regulares, entonces la siguiente proposición es aplicable para este par de clases.

[1] **Absolute Extensor (AE) y Absolute Neighborhood Extensor (ANE).**

Proposición 3.2.2. *Si $\mathcal{B}$ es una clase débilmente hereditaria de espacios contenida en una clase débilmente hereditaria $\mathcal{C}$, entonces todo AE para la clase $\mathcal{C}$ es un AE para la clase $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $f\colon A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de $X \in \mathcal{B}$ y $Y \in AE(\mathcal{C})$. Mostraremos que A tiene la propiedad de extensión en X con respecto a un espacio Y. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ y $Y \in AE(\mathcal{C})$, tenemos que para la función continua $h\colon A \to Y$ existe una extensión $H\colon X \to Y$. Tomando $f = h$, tenemos que H es una extensión de f. En consecuencia, todo AE para la clase $\mathcal{C}$ es un AE para la clase $\mathcal{B}$. $\square$

Enseguida probaremos que todo espacio homeomorfo a un $AE(\mathcal{C})$ es un $AE(\mathcal{C})$.

Proposición 3.2.3. *Ser $AE(\mathcal{C})$ es un invariante topológico.*

Demostración. Sean $Y \in AE(\mathcal{C})$ y $Z \approx Y$. Mostraremos que el espacio Z es un $AE(\mathcal{C})$. Sea $g\colon A \to Z$ una función continua de un subconjunto cerrado A de $X \in \mathcal{C}$ en Z. Como $Z \approx Y$, existe un homeomorfismo $h\colon Z \to Y$ entre los espacios Z y Y. Por otro lado, como $Y \in AE(\mathcal{C})$, la función continua $f = h \circ g\colon A \to Y$ admite una extensión $F\colon X \to Y$. Finalmente, tomando $G = h^{-1} \circ F\colon X \to Z$ se muestra que G es una extensión de g. En consecuencia, Z es un $AE(\mathcal{C})$. $\square$

Proposición 3.2.4. *Si la clase $\mathcal{C}$ contiene un espacio X que no es normal, entonces todo $AE(ANE)(\mathcal{C})$ Hausdorff consiste de un solo punto.*

Demostración. Supongamos que $Y \in ANE(\mathcal{C})$ es de Hausdorff y tiene más de un punto. Sean $p, q \in Y$ distintos y U, V vecindades disjuntas de p y q, respectivamente en Y. Ya que X no es normal, existen dos subconjuntos cerrados y disjuntos A y B de X que no tienen vecindades disjuntas en X. Sea $C = A \cup B$. C es un subconjunto cerrado de X. Definamos una función $f\colon C \to Y$ por

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in A, \\ q & \text{si } x \in B. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Como Y es de Hausdorff, Y es T_1 y por lo tanto cada uno de sus puntos es cerrado. Luego, f es continua pues $f^{-1}(p)$ y $f^{-1}(q)$ son cerrados en C. Como $Y \in ANE(\mathcal{C})$, f admite una extensión $F\colon W \to Y$ de una vecindad W de C en Y. Luego, las vecindades $F^{-1}(U)$ y $F^{-1}(V)$ de A y B en X son disjuntas en contradicción con la eleccion de A y B. Por lo tanto, Y consiste de un solo punto.

La demostración para $AE(\mathcal{C})$ es muy similar. $\square$

Como $\mathbb{R} \in AE(\mathcal{N})$, según el siguiente teorema, $\mathbb{R}^\infty$ es un $AE(\mathcal{N})$.

Teorema 3.2.1. *a) El producto topológico de $AE's(\mathcal{C})$ es un $AE(\mathcal{C})$.*

b) El producto topológico de una colección finita de $ANE's(\mathcal{C})$ es un $ANE(\mathcal{C})$.

Demostración. a) Sean $\{Y_\alpha : \alpha \in M\}$ una colección de extensores absolutos para la clase $\mathcal{C}$ y Y el producto topológico de esta colección. Mostraremos que $Y \in AE(\mathcal{C})$. Sea $f\colon A \to Y$ una función continua, donde A es un subespacio cerrado de $X \in \mathcal{C}$. Para cada $\alpha \in M$ consideremos $f_\alpha = p_\alpha \circ f\colon A \to Y_\alpha$, donde $p_\alpha\colon Y \to Y_\alpha$ es la proyección en el α-ésimo factor. Ya que Y_α es un $AE(\mathcal{C})$, f_α admite una extensión $F_\alpha\colon X \to Y_\alpha$. Sea $F\colon X \to Y$ una función definida de tal modo que $p_\alpha[F(x)] = F_\alpha(x)$, para toda $x \in X$. Vemos que F es continua y $F_{|A} = f$ con lo que finalizá la demostración. Por lo tanto, $Y \in AE(\mathcal{C})$.

b) Sean $\{Y_\alpha : \alpha \in M\}$ una colección finita de espacios tal que $Y_\alpha \in ANE(\mathcal{C})$ y Y el producto de esta colección. Mostraremos que $Y \in ANE(\mathcal{C})$. Sean $X \in \mathcal{C}$ y $f\colon A \to Y$ cualquier función continua definida en un subconjunto cerrado A de X. Para cada $\alpha \in M$, consideremos la función continua $f_\alpha = p_\alpha \circ f\colon A \to Y_\alpha$. Ya que Y_α es un $ANE(\mathcal{C})$, existe una extensión $F_\alpha\colon U_\alpha \to Y_\alpha$ de f_α de una vecindad U_α de X que contiene a A. Como M es finito, la intersección U de todos los U_α es una vecindad de X que contiene a A. Por último, definamos una función $F\colon U \to Y$ tal que $p_\alpha[F(x)] = F_\alpha(x)$, para toda $x \in U$. Se tiene que F es continua y $F_{|A} = f$, lo que finalizá la demostración. Por lo tanto, $Y = \prod_\alpha Y_\alpha \in ANE(\mathcal{C})$. □

Sean $\mathbb{H} = \{\, \{x_i\}_{i=1}^\infty : x_i \in \mathbb{R} \text{ y } \Sigma_i^\infty x_i^2 < \infty \,\}$ el **espacio de Hilbert** y $\mathbb{H}_C = \{\, \{x_i\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{H} : 0 \leq x_i \leq \frac{1}{i} \,\}$ el **cubo de Hilbert**. En vista de que $\mathbb{R}^\infty \approx \mathbb{H}$ y $\mathbb{I}^\infty \approx \mathbb{H}_C$ (ver [6] en página 198), por la proposición 3.2.3, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}_C$ son $AE(ANE)(\mathcal{N})$.

Como una aplicación del teorema anterior veremos que $\mathbb{S}^n \in ANE(\mathcal{N})$.

Teorema 3.2.2. *Sean A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f\colon A \to \mathbb{S}^n$, $n \geq 0$, una función continua de A en la n-esfera. Entonces existen un subconjunto abierto U de X tal que U contiene A y una extensión $F\colon U \to \mathbb{S}^n$ de f.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.2, existe una extensión $g\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}$ de $f\colon A \to \mathbb{S}^n$. Sea $F = r \circ g\colon U \to \mathbb{S}^n$ donde $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n$ es la retracción radial. Sea $U = g^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = X \setminus \{g^{-1}(0)\}$. Tenemos que U es un subconjunto abierto de X y $A \subseteq U$. Entonces F es una función bien definida y además $(r \circ g)(x) = (r \circ f)(x) = f(x)$, para toda $x \in A$. Por lo tanto, $F = r \circ g$ es una extensión de f, con lo que queda demostrado el teorema. $\square$

Proposición 3.2.5. *Todo retracto de un $AE(\mathcal{C})$ es un $AE(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sean $Y \in AE(\mathcal{C})$ y $r\colon Y \to B$ una retracción. Tomemos $X \in \mathcal{C}$ y $f\colon A \to B$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de X. La función continua $\Phi = i_B \circ f\colon A \to Y$ admite una extensión continua $\psi\colon X \to Y$, por ser Y un extensor absoluto para la clase $\mathcal{C}$. Finalmente, la función compuesta $g = r \circ \psi\colon X \to B$ es una extensión de f, pues $g_{|A} = (r \circ \psi)_{|A} = r(\psi_{|A}) = r(\Phi) = f$, lo que muestra que todo retracto B de Y es un $AE(\mathcal{C})$. $\square$

De acuerdo al siguiente resultado, $\mathbb{D}^n$ es un extensor absoluto de vecindad para la clase de los espacios normales.

Proposición 3.2.6. *Todo subespacio abierto de un $ANE(\mathcal{C})$ es un $ANE(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sean $Y \in ANE(\mathcal{C})$ y W un subespacio abierto de Y. Tomemos una función continua $f\colon A \to W$ definida sobre un subespacio cerrado A de un espacio $X \in \mathcal{C}$. Siendo $Y \in ANE(\mathcal{C})$, la composición $\Phi = i_W \circ f\colon A \to Y$ admite una extensión $\psi\colon V \to Y$ definida en un subespacio abierto V que contiene A en X. Consideremos $U = \psi^{-1}(W)$, vemos que U es un abierto en V. Luego, U es un abierto de X que contiene a A. Finalmente, definamos $F\colon U \to W$ por $F(x) = \psi(x)$, para toda $x \in U$. Tenemos que F es una extensión continua de f sobre U. Por lo tanto, todo subespacio abierto W de Y es un $ANE(\mathcal{C})$. $\square$

Puesto que $\mathbb{R}$ es un $ANE(\mathcal{N})$, para $(a,b) \subset \mathbb{R}$, se tiene que (a,b) es un $ANE(\mathcal{N})$. Por otro lado, si $A \subseteq Y$ es un subespacio cerrado de $Y \in ANE(\mathcal{C})$, se tiene que, en general, A no es un $ANE(\mathcal{C})$ (ver [13] en página 47).

Proposición 3.2.7. *Todo retracto de vecindad de un $ANE(\mathcal{C})$ es un $ANE(\mathcal{C})$.*

Demostración. Supongamos que $Y \in ANE(\mathcal{C})$ y B es un retracto de vecindad de Y. Entonces existe un subconjunto abierto U de Y tal que $r\colon U \to B$ es una retracción. Mostraremos que $B \in ANE(\mathcal{C})$. Sean $X \in \mathcal{C}$ y $f\colon A \to B$ una función continua definida en un subespacio cerrado A de X. Sea $\Phi = i_B \circ f\colon A \to Y$. Entonces existe una extensión $\psi\colon V \to Y$ definida sobre un subespacio abierto V de X que contiene a A. Finalmente, como $\psi^{-1}(U) = W$ es un subconjunto abierto de X que contiene a A, podemos definir una función $g\colon W \to B$ por $g(x) = r(\psi(x))$, para toda $x \in W$. Notemos que $g_{|A} = f$. Luego, $B \in ANE(\mathcal{C})$. $\square$

En el siguiente teorema, asumase que todo espacio en la clase $\mathcal{C}$ es normal.

Teorema 3.2.3. *Si un espacio contraíble Y es un $ANE(\mathcal{C})$, entonces Y es un $AE(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $f\colon A \to Y$ una función continua definida sobre un subconjunto cerrado A de un espacio $X \in \mathcal{C}$. Mostraremos que existe una extensión $F\colon X \to Y$ continua de f. Por ser Y un espacio contraíble, existen un punto p y una función continua $h\colon Y \times \mathbb{I} \to Y$ tal que $h(y,0) = Id_Y(y)$ y $h(y,1) = p$, para toda $y \in Y$. Por otro lado, como $Y \in ANE(\mathcal{C})$, existe una extensión $g\colon U \to Y$ continua de f sobre algún subconjunto abierto U de X que contiene a A. Ya que X es un espacio normal, existe un subespacio abierto V de X con $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Por el Teorema de Uryson, existe una función continua $j\colon X \to \mathbb{I}$ tal que

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus V. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Luego, podemos definir una función continua $F\colon X \to Y$ tomando

$$F(x) = \begin{cases} h(g(x), j(x)) & \text{si } x \in \overline{V}, \\ p & \text{si } x \in X \setminus V. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Finalmente, como $F_{|A} = f$, esto prueba que Y es un $AE(\mathcal{C})$. $\square$

Observacion: Para más propiedades de extensores absolutos y extensores absolutos de vecindad, ver [13] en páginas 39-40.

A continuación daremos una importante propiedad para la clase $\mathcal{PH}$ de todos los espacios Hausdorff perfectamente normales que será usada más adelante.

Proposición 3.2.8. *Si Y es un $AE(ANE)(\mathcal{PH})$, entonces toda colección de conjuntos abiertos, mutuamente disjuntos y no vacíos de Y es a lo más numerable.*

Demostración. La prueba es para $ANE(\mathcal{PH})$, la otra parte es similar. Sea $\gamma = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección no numerable de conjuntos abiertos, mutuamente disjuntos y no vacíos de Y. Por el ejemplo H en [4] tomo 1, página 185, existe un espacio X de Hausdorff perfectamente normal y un subconjunto $A = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ localmente finito, de puntos distintos que no tienen vecindades disjuntas en X. Ya que A es localmente finito en un espacio de Hausdorff X, A es cerrado en X. Sea $f : A \to Y$ una función de tal modo que $f(x_\lambda) \in U_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Como A es localmente finito en X, A es un subespacio discreto y por lo tanto f es continua.

Como Y es un $ANE(\mathcal{PH})$, existe una extensión continua $F : V \to Y$ de f, en donde V es una vecindad de A en X. Entonces $x_\lambda \in F^{-1}(U_\lambda)$ y $F^{-1}(U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_1}) = F^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap F^{-1}(U_{\lambda_2}) = F^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, para cada $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, contradicción que prueba la proposición. $\square$

En la proposición anterior usamos el hecho de que todo subconjunto en un espacio discreto es abierto. Por lo tanto, cualquier función $f \colon X \to Y$ de un espacio discreto X en un espacio Y es continua.

Recordemos que un espacio X es **separable** si existe un subconjunto X_α denso numerable en X. En adelante vamos a necesitar el siguiente resultado cuyo demostración se puede encontrar, por ejemplo en el libro de Engelking [9, pag. 256]:

Lema 3.2.1. *Un espacio métrico Y es separable, si y sólo si toda familia de abiertos no vacíos y disjuntos entre sí es numerable.*

Proposición 3.2.9. *Si Y es un espacio métrico el cual es un $AE(ANE)(\mathcal{PH})$, entonces Y es separable.*

Demostración. Por la proposición 3.2.8 y el lema 3.2.1, Y es separable. $\square$

Las siguientse propiedades muestran la relación que existe entre extensión de funciones continuas y funciones homotópicas.

Proposición 3.2.10. *Sean $f, g \colon X \to Y$ dos funciones continuas. La función $h \colon (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \to Y$ definida por $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$, puede ser extendida a una función $H \colon X \times \mathbb{I} \to Y$ si y sólo si, f y g son homotópicas en Y.*

Demostración. Supongamos que f y g son homotópicas. Entonces, existe una función continua $H \colon X \times \mathbb{I} \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Como $H(x,0) = h(x,0)$ y $H(x,1) = h(x,1)$, para toda $x \in X$, H es una extensión de h.

Supongamos que h puede ser extendida a una función continua $H \colon X \times \mathbb{I} \to Y$. Como $H(x,0) = h(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = h(x,1) = g(x)$, para toda $x \in X$, se tiene que f y g son homotópicas en Y. $\square$

Teorema 3.2.4. (***Borsuk***) *Sean $f, g\colon C \to \mathbb{S}^n$ dos funciones continuas, en donde C es un subconjunto cerrado de un espacio normal X. Supóngase que $f \simeq g$ en C. Sea $F\colon X \to \mathbb{S}^n$ una extensión continua de f. Entonces existe una extensión continua $G\colon X \to \mathbb{S}^n$ de g tal que $F \simeq G$ en X.*

Demostración. Sea $h\colon C \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$ una homotopía entre f y g en C con $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$, para toda $x \in C$. Sea $C^* = X \times \{0\} \cup (C \times \mathbb{I})$. Definamos a $F^*\colon C^* \to \mathbb{S}^n$ como $F^*(x,0) = F(x)$ para cada $x \in X$ y $F^*(x,t) = h(x,t)$ para cada $(x,t) \in C \times \mathbb{I}$. F^* es continua en C^* por ser continua en cada uno de los subconjuntos cerrados $X \times \{0\}$ y $C \times \mathbb{I}$ de C^* y por estar bien definida en su intersección. De acuerdo con el teorema 3.2.2 aplicado al espacio normal $X \times \mathbb{I}$, F^* tiene una extensión continua a un abierto $U \subseteq X \times \mathbb{I}$, en donde $U \supset C^*$. Seguiremos denotando la extensión con F^*.

Para cada $x \in C$, $\{x\} \times \mathbb{I}$ está contenido en una unión finita de abiertos de la forma $W_i \times V_i$, en donde W_i es un abierto en X, V_i es un abierto en $\mathbb{I}$ y $W_i \times V_i \subset U$. Si W_x es la intersección de las W_i, tenemos $\{x\} \times \mathbb{I} \subset W_x \times \mathbb{I} \subset U$. Si W es la unión de las W_x, entonces $W \times \mathbb{I} \subset U$ y $W \supset C$.

Como X es normal, existe una función continua $p\colon X \to \mathbb{I}$ tal que $p(x) = 1$ en C y $p(x) = 0$ en $X \setminus V$. Definamos $H(x,t) = F^*(x, tp(x))$ para cada $(x,t) \in X \times \mathbb{I}$, y sea $G(x) = H(x,1) = F^*(x, p(x))$. Entonces, tenemos $G(x) = F^*(x,1) = h(x,1) = g(x)$, para $x \in C$. Además, $H(x,0) = F^*(x,0) = F(x)$. Por lo tanto, $F \simeq G$ en X. □

3.3. Extensores absolutos (de vecindad) métricos

Un **espacio vectorial lineal**, espacio lineal o espacio vectorial sobre un campo F es un grupo aditivo G junto con una operación $m\colon F \times G \to G$, definida como $m(\alpha, x) = \alpha x$, la cual satisface las siguientes cuatro condiciones:

i) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

iv) $1x = x$, para cada $\alpha, \beta \in F$ y $x, y \in G$.

Para cada par de puntos a, b de un espacio métrico Y, tenemos que $d(a,b) = \frac{d^\star(a,b)}{1+d^\star(a,b)}$ es una distancia acotada para Y, en donde $d^\star$ es cualquier distancia en Y. Consideremos a $L = C(Y)$ el espacio de todas las funciones continuas, acotadas, con valores reales, definidas en el espacio métrico Y. Entonces $L = C(Y)$ es un espacio lineal sobre los numeros reales, en donde la adición y multiplicación escalar estan definida como:

i) $(f + g)(y) = f(y) + g(y)$ y

ii) $(\alpha f)(y) = \alpha(f(y))$, para cada $f, g \in L$, $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sean $f \in L$ y $\|f\| = sup_{y \in Y}|f(y)|$. Entonces $\|f\|$ define una norma en L la cual, con la distancia del supremo o la distancia uniforme, nos produce el espacio métrico completo L y, por lo tanto, L es un espacio de Banach. Definamos $f_a(y) = d(a, y)$ para un punto arbitrario $a \in Y$, $f_a \in L$ y $y \in Y$. Como veremos la función $\chi\colon Y \to L$ definida por $\chi(a) = f_a$, para toda $a \in Y$, tiene dos importantes propiedades que serán usadas más adelante.

En el siguiente lema usamos el hecho de que para un espacio métrico Y, siempre existe un encaje isométrico de Y en un espacio métrico completo L(ver [20], en página 306).

Lema 3.3.1. *La función $\chi\colon Y \to L$, definida anteriormente, es una función isométrica de Y en L, llamada el* ***encaje isométrico canónico*** *del espacio métrico acotado Y.*

Demostración. Para a, b puntos arbitrarios de Y, tenemos que

$$
\begin{aligned}
d(a, b) &= |f_a(b) - f_b(b)| \leq \|f_a - f_b\| && (3.3.1)\\
&= sup_{y \in Y}|f_a(y) - f_b(y)| && (3.3.2)\\
&= sup_{y \in Y}|d(a, y) - d(b, y)| && (3.3.3)\\
&\leq d(a, b), && (3.3.4)
\end{aligned}
$$

de donde $d(\chi(a), \chi(b)) = \|f_a - f_b\| = d(a, b)$. En consecuencia, χ es una función isométrica. □

Como veremos más adelante, la composición $\chi \circ f$, en donde $f\colon A \to Y$ es una función continua de un subconjunto cerrado A de un espacio X en una cierta clase $\mathcal{C}$, admite una extensión continua $F\colon X \to L$.

Enseguida definiremos la noción de conjunto convexo y de envoltura convexa, para un subconjunto de un espacio topológico lineal arbitrario L.

Definición 3.3.1. *Un subconjunto K de L es* ***convexo*** *si para todo número finito $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de puntos en K, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i \in K$ para cualesquiera valores $\alpha_i \geq 0$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.*

Así, un espacio topológico lineal L es **localmente convexo** si para cada $a \in L$ y toda vecindad $U(a)$ de a en L existe una vecindad convexa V tal que $a \in V \subset U(a)$.

Definición 3.3.2. *Para un subconjunto S en L, la intersección $\bigcap_i Z_i = Z$ de todos los conjuntos convexos Z_i en L tales que $S \subseteq Z_i$ para todo i, es llamada la* ***envoltura convexa*** *de S en L.*

Recordemos también que un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si contiene el segmento de línea $(1-t)x + ty$ $(0 \leq t \leq 1)$ para cada par de puntos $x, y \in K$. Cuando $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K coincide con su envoltura convexa si y sólo si K es convexo. En efecto, como $\bigcap_i Z_i = Z$ es un convexo para Z_i convexo y $K = \bigcap_i Z_i = Z$, K debe ser convexo. Para la otra parte, como $K \subseteq K$ y K es convexo, se tiene que $K = Z_i$ para algún i y $K = \bigcap_i Z_i = Z$, en donde $K \subseteq Z_i$ para cada i.

El siguiente resultado incluye el concepto de complejo simplicial el cual no definiremos aquí, para mayores detalles recomendamos ver [1] en página 136.

Teorema 3.3.1. *La imagen $\chi(Y)$ es un subconjunto cerrado de la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$ en L. Además si Y es separable, entonces Z es separable.*

Demostración. Mostraremos que $Z \setminus \chi(Y)$ es abierto en Z. Sea $g \in Z \setminus \chi(Y)$. Como Z es la cerradura convexa de $\chi(Y)$, existe un número finito de puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en Y, tal que $g = \sum_{i=1}^{n} t_i f_{a_i}$ con $f_{a_i} = \chi(a_i)$, $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Ya que g no está en $\chi(Y)$, tenemos que $g \neq f_{a_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Elijamos un $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{2} d(g, f_{a_i})$ para todo i, donde d es la distancia en L. Denotemos por $V_\delta = \{z \in Z : d(g, z) < \delta\}$ la vecindad abierta de g en Z. Probaremos que V_δ está contenida en $Z \setminus \chi(Y)$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto $y \in Y$ con $f_y = \chi(y) \in V_\delta$. Por la elección de δ, tenemos que $d(f_{a_i}, f_y) = d[\chi(a_i), \chi(y)] > \delta$, para todo i. Además, ya que χ es una función isométrica $f_{a_i}(y) = d(a_i, y) > \delta$ para toda i y entonces $d(g, f_y) = \|g - f_y\| \geq |g(y) - f_y(y)| = |g(y)| = \sum_{i=1}^{n} t_i f_{a_i}(y) > (\sum_{i=1}^{n} t_i)\delta = \delta$, lo que contradice el hecho de que $f_y \in V_\delta$. En consecuencia, $V_\delta \subset Z \setminus \chi(Y)$ y $\chi(Y)$ es un subconjunto cerrado de la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$ en L.

Para la segunda afirmación, supongamos que Y es separable. Como $Y \approx \chi(Y)$, por ser χ un encaje, tenemos que $\chi(Y)$ es separable. Luego, sea C

un subconjunto denso numerable de $\chi(Y)$. Entonces los subconjuntos finitos de C forman una familia numerable Γ. Sea $\gamma = \{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ cualquier subconjunto finito de C. La envoltura convexa $H(\gamma)$ de γ en L es un simplicial cerrado (ver [2] en página 212) con vértices $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Por tanto, es separable. En consecuencia, ya que la envoltura convexa $Q = H(C) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H(\gamma)$ de C en $\chi(Y)$ es la unión de una familia numerable de conjuntos separables, Q es separable. Sea D un subconjunto denso numerable de Q. Mostraremos que D es denso en Z. Sean $z \in Z$ y $\delta > 0$ arbitrariamente dada. Luego, existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $\chi(Y)$ tal que $z = \sum_{i=1}^m t_i x_i$, donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^m t_i = 1$. Por otro lado, como C es denso en $\chi(Y)$, existe un número finito de puntos $c_1, c_2, \ldots, c_m$ en C tal que $d(x_i, c_i) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Sea $p = \sum_{i=1}^m t_i c_i$ un punto de Q. Entonces tenemos que $d(z, p) \leq \sum_{i=1}^m t_i d(x_i, c_i) < (\sum_{i=1}^m t_i)\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$. Ya que p está en Q y D es denso en Q existe un punto $a \in D$ con $d(p, a) < \frac{\delta}{2}$. Luego, tenemos que $d(z, a) \leq d(z, p) + d(p, a) < \delta$ y D es denso en Z, lo que evidencía que Z es separable. $\square$

A continuación damos las bases para demostrar el Teorema de Extensión de Dugundji, el cual es una importante generalización del Teorema de Extensión de Tietze. Como veremos, todo espacio vectorial lineal localmente convexo es un extensor absoluto para la clase de los espacios métricos.

Definición 3.3.3. *El **soporte** de una función continua $g\colon X \to \mathbb{R}$ es el conjunto cerrado sop$(g) = \overline{\{\, x \in X : g(x) \neq 0 \,\}}$.*

Definición 3.3.4. *Una familia $\{\, g_\alpha : \alpha \in \Lambda \,\}$ de funciones continuas $g_\alpha\colon X \to \mathbb{I}$ se llama una **partición de unidad** sobre X si cumple las siguientes condiciones:*

i) Los soportes sop(g_α) forman una cubierta cerrada localmente finita de X.

ii) Para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $x \in X$, los valores $g_\alpha(x) \in \mathbb{R}$ tienen suma $\Sigma_\alpha g_\alpha(x) = 1$.

Teorema 3.3.2. *Sean $\{\, g_\alpha : \alpha \in \Lambda \,\}$ una partición de unidad sobre X y $\{\, f_\alpha\colon X \to \mathbb{R} \mid \alpha \in \Lambda \,\}$ una familia de funciones continuas. Entonces la función $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \Sigma_\alpha g_\alpha(x) f_\alpha(x)$, es continua.*

Demostración. Por la definición 3.3.4, los soportes de las funciones continuas $\{\, g_\alpha : \alpha \in \Lambda \,\}$ forman una cubierta cerrada localmente finita de X. Luego, cada punto $x \in X$ tiene alguna vecindad sobre la cual f es una suma finita de funciones continuas. En consecuencia, f es continua. $\square$

Definición 3.3.5. *Si* $\{U_\beta : \beta \in \mathcal{A}\}$ *es una cubierta abierta dada de* X*, decimos que una partición de unidad* $\{g_\beta : \beta \in \mathcal{A}\}$ ***es subordinada*** *a* $\{U_\beta : \beta \in \mathcal{A}\}$ *si el soporte de cada* g_β *está contenido en el correspondiente* U_β*.*

Supongamos también las siguientes dos afirmaciones: a) Todo espacio métrico X *es paracompacto (**Teorema de A. H. Stone**, ver [8] en página 186). b) Para toda cubierta abierta* $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *de un espacio paracompacto existe una partición de unidad subordinada a* $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *(ver [8] en página 170).*

Teorema 3.3.3. (***Dugundji***) *Sean* X *un espacio métrico arbitrario,* A *un subconjunto cerrado de* X*,* L *un espacio lineal localmente convexo y* $f\colon A \to L$ *una función continua. Entonces existe una extensión continua* $F\colon X \to L$ *de* f*; además,* $F(X)$ *está contenida en la envoltura convexa de* $f(A)$ *en* L*.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Para cada $x \in X \setminus A$ sea $B_x = \{y \in X \setminus A : d(x,y) < \frac{1}{2}d(x,A)\}$, entonces B_x es una vecindad de x que no intersecta a A. Como todo espacio métrico es paracompacto, la cubierta abierta $\alpha = \{B_x : x \in X \setminus A\}$ del espacio paracompacto $X \setminus A$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\beta = \{U_i : i \in \Lambda\}$. Sean $\eta > 0$ y $B(A,\eta) = \{y \in X : d(y,A) < \eta\}$, vemos que si $x \notin B(A, 2\eta)$, entonces B_x no intersecta a $B(A,\eta)$. Consecuentemente, si $U \in \beta$ y U intersecta a $B(A,\eta)$, entonces U está contenido en un B_x con centro en $B(A,2\eta)$ y el diámetro de U es menor o igual que 2η.

Con cada $U \in \beta$ no vacío, asociemos un punto $a_U \in A$ como sigue: elegimos un elemento $x_U \in U$ y encontramos $a_U \in A$ con $d(x_U, a_U) < 2d(x_U, A)$. La propiedad fundamental de los conjuntos de $\beta = \{B_x : x \in X \setminus A\}$ y puntos de $\{a_U\}$ es:

Para cada $a \in A$ y $W(a)$ vecindad de a en X, existe una vecindad $V(a) \subseteq W(a)$ tal que si $U \cap V(a) \neq \emptyset$, entonces $U \subset W(a)$ y $a_U \in A \cap W(a)$. En efecto, pongamos $W(a) = B(A,\epsilon)$ y tomemos $V(a) = B(a, \frac{\epsilon}{12})$, cualquier U que intersecta $V(a)$ tendrá diámetro menor o igual que $\frac{\epsilon}{6}$ y estará contenido en $B(a, \frac{\epsilon}{4})$. Así para cualquier tal U, se tiene que $d(x_U, a) < \frac{\epsilon}{4}$, $d(x_U, A) < \frac{\epsilon}{4}$; y también $d(a_U, a) \leq d(a_U, x_U) + d(x_U, a) \leq 2d(x_U, A) + d(x_U, A) < 3\frac{\epsilon}{4}$, esto es $a_U \in W(a)$.

Ahora sea $\{g_U : U \in \beta\}$ una partición de unidad sobre $(X \setminus A)$, subordinada a β y defínase $F\colon X \to L$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \Sigma_U g_U(x) f(x) & \text{si } x \in (X \setminus A). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Por el teorema 3.3.2, F es continua en cada punto de $(X \setminus A)$, sólo necesitamos mostrar la continuidad en cada punto de A. Sean $a \in A$ y M una vecindad de $F(a) = f(a)$. Ya que L es un espacio lineal localmente convexo y f es continua, existe una vecindad $W(a)$ en X tal que $F(W(a) \cap A) \subseteq C \subset M$ para algún subconjunto convexo C en L. Al encontrar $V(a) \subseteq W(a)$ que satisfaga la condición arriba mencionada, mostraremos que $F(V(a)) \subset M$. Claramente si $x \in A \cap V(a)$, entonces $F(x) \in C \subset M$. Si $x \in V(a) \setminus A$, entonces x pertenece a al menos un número finito $U_1, U_2, ..., U_n$ tal que en x, $g_{U_1}, g_{U_2}, ..., g_{U_n}$ no son cero por definición de soporte. Luego, como cada U_i intersecta $V(a)$, los correspondientes a_{U_i} están en $A \cap W(a)$, así que los $f(a_{U_i})$ son todos elementos de C y ya que $F(x)$ está en la envoltura convexa de los puntos $f(a_{U_1}), f(a_{U_2}), ..., f(a_{U_n})$, encontramos que $F(x) \in C$. Así, $F(V(a)) \subset M$ y F es continua en a. Como F es continua en cada punto de X, tenemos que $F\colon X \to L$ es continua. Luego, F es una extensión de f y $F(X)$ está contenida en la envoltura convexa de $f(A)$. $\square$

Corolario 3.3.1. *Todo conjunto convexo en un espacio topológico lineal localmente convexo, es un $AE(\mathcal{M})$ para la clase de los espacios metrizables.*

Corolario 3.3.2. *Todo espacio de Banach, es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{M}$ $(\mathcal{F})$ de todos los espacios metrizables (respectivamente totalmente normales).*

Por último, en está sección mostraremos algunas equivalencias entre extensores absolutos. Antes definamos y aclaremos algunos conceptos.

Definición 3.3.6. *Un espacio métrico se dice que es **topológicamente completo**, si existe una métrica equivalente d, de X, para la cual (X, d) es un espacio métrico completo.*

Definición 3.3.7. *Un espacio topológico es un $\mathbf{G}_\delta$ **absoluto** si es metrizable y es un conjunto G_δ en todo espacio métrico, en el cual está topológicamente encajado.*

Es necesario también aclarar lo siguiente. Un subconjunto B es cerrado y G_δ de un espacio normal X, si y sólo si existe una función continua $g\colon X \to \mathbb{I}$ tal que $g^{-1}(0) = B$ (**Lema de Urysohn**, ver [10] en página 158). Si X es topológicamente completo, entonces cualquier subespacio cerrado A de X es también topológicamente completo (ver [8] en página 295). Si A es un subconjunto G_δ de un espacio métrico completo X, entonces A es topológicamente completo (ver [6] en página 274).

En el siguiente resultado $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{FP}$, $\mathcal{N}$, se definen como en la página 39.

Teorema 3.3.4. *Sea Y un espacio metrizable, el cual es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$. Entonces*

a) $Y \in AE(ANE)(\mathcal{FP})$.

b) $Y \in AE(ANE)(\mathcal{F})$ *si y sólo si Y es topológicamente completo.*

c) $Y \in AE(ANE)(\mathcal{P})$ *si y sólo si Y es separable.*

d) $Y \in AE(ANE)(\mathcal{N})$ *si y sólo si Y es separable y topológicamente completo.*

e) $Y \in AE(ANE)(\mathcal{C})$ *que contiene un espacio que no es normal si y sólo Y consiste de un solo punto.*

Demostración. a) Sea $f\colon A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de X en la clase $\mathcal{FP}$. Mostraremos que existe una extensión continua de f. Encajemos a Y en un espacio de Banach L por medio del encaje isométrico χ como en el lema 3.3.1. Por el corolario 3.3.2, tenemos que $g = \chi \circ f\colon A \to L$ admite una extensión continua $G\colon X \to L$.

Del conjunto $L \times \mathbb{I}$ identificamos al subconjunto cerrado $L \times \{0\}$ con L. Luego, Y es cerrado en el espacio metrizable $M = (L \times \mathbb{I}) \setminus (L \setminus Y)$.

Como A es cerrado y X es un espacio perfectamente normal, tenemos que A es un conjunto G_δ y X es normal. En consecuencia, por el Lema de Urysohn, existe una función continua $\Phi\colon X \to \mathbb{I}$ tal que $\Phi^{-1}(0) = A$ (ver [10] en página 156). Definamos una función $H\colon X \to M$ por $H(x) = (G(x), \Phi(x))$, para todo x en X.

En el caso en que $Y \in ANE(\mathcal{M})$, tenemos que Id_Y admite una extensión $r : V \supseteq Y$ de una vecindad V de Y en M. Sea $U = H^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = r[H(x)]$, para todo x en U. Podemos ver que F es una extensión continua de f. En consecuencia, $Y \in ANE(\mathcal{FP})$.

Para el caso en que $Y \in AE(\mathcal{M})$, tendríamos que $V = M$ y $U = X$. Luego, siguiendo el mismo procedimiento se prueba que $Y \in AE(\mathcal{FP})$.

b) Sea $f\colon A \to Y$ cualquier función continua definida sobre un subespacio cerrado A de un espacio X en la clase $\mathcal{F}$. Mostraremos que existe una extensión continua de f. Como Y es un espacio topológicamente completo, Y tiene una función distancia acotada, la cual hace a Y un espacio métrico completo. Encajemos a Y en el espacio de Banach L por medio del encaje isométrico χ. Por el corolario 3.3.2, tenemos que $g = \chi \circ f\colon A \to L$ admite una extensión continua $G\colon X \to L$.

Como χ es un encaje isométrico y Y es un espacio métrico completo en L, se tiene que Y debe ser cerrado en L.

En el caso en que $Y \in ANE(\mathcal{M})$, tenemos que Id_Y admite una extensión $r : V \supseteq Y$ de una vecindad V de Y en L. Sea $U = G^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = r[G(x)]$, para todo x en U. Podemos ver que F es una extensión continua de f. En consecuencia, $Y \in ANE(\mathcal{F})$.

Para cuando $Y \in AE(\mathcal{M})$, tendríamos $V = L$ y $U = X$. Luego, siguiendo el mismo procedimiento se tiene que $Y \in AE(\mathcal{F})$.

Por la parte b) del teorema 4.1.1 del siguiente capítulo, tenemos la otra implicación.

c) Sea $f\colon A \to Y$ una función continua de un subespacio cerrado A de X en la clase $\mathcal{P}$. Mostraremos que existe una extensión continua de f. Sea $i\colon Y \to \mathbb{R}^\infty$ el encaje de Y en el producto topológicamente completo y numerable infinito $\mathbb{R}^\infty$ de la recta real $\mathbb{R}$. Por el teorema 3.2.1, tenemos que la función $g = i \circ f\colon A \to \mathbb{R}^\infty$ admite una extensión continua $G\colon X \to \mathbb{R}^\infty$.

Como $\mathbb{R}^\infty$ es identificado por $\mathbb{R}^\infty \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{I}$, entonces Y es cerrado en el espacio $M = (\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{I}) \setminus (\mathbb{R}^\infty \setminus Y)$.

Dado que A es cerrado en un espacio perfectamente normal X, se tiene que A es un conjunto G_δ y X es normal. En consecuencia, existe una función continua $\Phi\colon X \to \mathbb{I}$ tal que $\Phi^{-1}(0) = A$. Definamos $H\colon X \to M$ por $H(x) = (G(x), \Phi(x))$, para todo $x \in X$.

Si $Y \in ANE(\mathcal{M})$, la función Id_Y admite una extensión continua $r\colon V \to Y$ de una vecindad V de Y en M. Sea $H^{-1}(V) = U$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = r(H(x))$, para todo $x \in U$. Podemos ver que F es una extensión continua de f. En consecuencia, Y es un $ANE(\mathcal{P})$.

Cuando $Y \in AE(\mathcal{M})$, la función Id_Y admite una extensión $r\colon M \to Y$. Sea $H^{-1}(M) = X$. Definamos una función $F\colon X \to Y$ por $F(x) = r(H(x))$, para todo $x \in X$. Vemos que F es una extensión continua de f. En consecuencia, Y es un $AE(\mathcal{P})$.

Por las proposiciones 3.2.2 y 3.2.9 se tiene la otra implicación.

d) Sea $f\colon A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de X en la clase $\mathcal{N}$. Mostraremos que existe una extensión continua de f. Sea el encaje $i\colon Y \to \mathbb{R}^\infty$. Por el teorema 3.2.1, tenemos que la función $g = i \circ f\colon A \to \mathbb{R}^\infty$ admite una extensión continua $G\colon X \to \mathbb{R}^\infty$.

Como Y es topológicamente completo, Y debe ser un subconjunto cerrado en el espacio topológicamente completo $\mathbb{R}^\infty$. Luego, Y es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^\infty$.

En el caso en que $Y \in ANE(\mathcal{M})$, la función Id_Y admite una extensión

$r\colon V \to Y$ de una vecindad V de Y en $\mathbb{R}^\infty$. Sea $U = G^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = r(G(x))$, para todo $x \in U$. Vemos que F es una extensión continua de f. En consecuencia, Y es un $ANE(\mathcal{N})$.

Para el caso en que $Y \in AE(\mathcal{M})$, la función Id_Y admite una extensión $h\colon \mathbb{R}^\infty \to Y$. Como $G^{-1}(\mathbb{R}^\infty) = X$, entonces la función continua $F\colon X \to Y$ definida por $F(x) = h(G(x))$, para todo $x \in X$ es una extensión de f. En consecuencia, Y es un $AE(\mathcal{N})$.

Ahora supongamos que Y es un $AE(ANE)(\mathcal{N})$. Por la parte b) se tiene que Y es topológicamente completo. Por otro lado, como ser perfectamente normal es una propiedad más fuerte que normalidad, por la parte c) se tiene que Y es separable.

e) Supongamos que $Y = \{p\}$. Sean X un espacio en la clase $\mathcal{C}$ y $f\colon A \to Y$ una función continua de un subespacio cerrado A de X en Y. Mostraremos que existe una extensión continua de f. Tenemos que $F\colon X \to Y$ definida por $F(x) = p$, para todo $x \in X$ (para todo $x \in U$ vecindad de A en X) es la unica extensión continua de f, con lo cual Y es un $AE(ANE)(\mathcal{C})$.

Para la otra parte, por la proposición 3.2.4, se tiene que Y consiste de un solo punto. □

3.4. Extensores absolutos de vecindad local

En ésta sección daremos la noción de propiedad local de extensor absoluto de vecindad sin profundizar tanto en esto.

Definición 3.4.1. *Un espacio Y es un **extensor absoluto de vecindad local** para la clase $\mathcal{C}$ (**local-ANE**$(\mathcal{C})$) si todo punto de Y tiene una vecindad que es un extensor absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.*

En otras palabras, decimos que un espacio Y es un extensor absoluto de vecindad local para la clase $\mathcal{C}$ si Y admite una cubierta abierta formada por extensores de vecindad absoluta para la clase $\mathcal{C}$.

Teorema 3.4.1. *Si cada espacio en la clase $\mathcal{C}$ es un espacio regular y totalmente normal, entonces todo extensor absoluto de vecindad local para la clase $\mathcal{C}$ es un ANE para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Ver [13] en la página 68. □

Como nota, en "Retraction and extension of mapping of metric and nonmetric spaces" de 1952, Olof Hanner consideró local-ANE($\mathcal{M}$) y, demostró que para espacios métricos (más generalmente, para espacios paracompactos), todo local-ANE($\mathcal{M}$) es un $ANE(\mathcal{M})$. Este teorema implica, por ejemplo, que variedades topológicas son $ANR's$.

3.5. Retractos absolutos (de vecindad)

En ésta sección definiremos los retractos absolutos para una clase $\mathcal{C}$, los cuales, en principio, sólo fuerón tratados por Karol Borsuk para la clase de espacios métricos separables (especialmente espacios métricos compactos). Gradualmente la teoría se extendió primero a espacios métricos arbitrarios, y luego, a clases $\mathcal{C}$ débilmente hereditarias de espacios. También ha llegado a ser claro que, la clase $\mathcal{M}$ de todos los espacios métricos nos da la teoría más satisfactoria.

Definición 3.5.1. *Un espacio Y es un* ***retracto absoluto*** (***de vecindad***) *para una clase $\mathcal{C}$ débilmente hereditaria de espacios, si cumple las siguientes condiciones:*

i) $Y \in \mathcal{C}$.

ii) *Si $h\colon Y \to Y^{'}$ es un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado $Y^{'}$ de X y $X \in \mathcal{C}$, entonces $Y^{'}$ es un retracto (de vecindad) de X.*

Equivalentemente Y es un retracto absoluto o bien un retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$, si y sólo si $Y \in \mathcal{C}$ y toda imagen homeomórfica de Y (encaje) como un subespacio cerrado $Y^{'}$ de un espacio $X \in \mathcal{C}$, es necesariamente un retracto (de vecindad) de X.

Simbólicamente escribiremos, $Y \in AR(ANR)(\mathcal{C})$[2]para indicar que Yes un retracto absoluto o bien un retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.

Proposición 3.5.1. *Para $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ y $Y \in \mathcal{C}_1$, si $Y \in AR(ANR)(\mathcal{C}_2)$entonces $Y \in AR(ANR)(\mathcal{C}_1)$.*

Demostración. Supongamos que $Y \in AR(ANR)(\mathcal{C}_2)$ y $Y \in \mathcal{C}_1$. Sea $h\colon Y \to h(Y)$ un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado de $X \in \mathcal{C}_1$. Mostraremos que $h(Y)$ es un retracto (de vecindad) de X. Como $Y \in \mathcal{C}_2$ y $X \in \mathcal{C}_2$, si $H\colon Y \to X$ es un encaje de Y en un subconjunto cerrado $H(Y)$, entonces $R : X \supseteq H(Y)$ $(R : U \supseteq H(Y)$ con U subconjunto

[2]**Absolute Retract (Absolute Neighborhood Retract).**

abierto de X). Tomando $H = h$, tenemos que $r = R$ es una retracción (retración de vecindad). Por lo tanto, $h(Y)$ es un retracto (de vecindad) de X y $Y \in ANR(\mathcal{C}_1)$. $\square$

El siguiente teorema establece la relación que existe entre extensores absolutos (de vecindad) y retractos absolutos (de vecindad) para una clase $\mathcal{C}$. Es importante además hacer notar que un extensor absoluto (de vecindad) Y para la clase $\mathcal{C}$ no necesariamente pertenece a la clase $\mathcal{C}$ en cuestión, mientras que para Y un retracto absoluto (de vecindad) para la clase $\mathcal{C}$, Y sí pertenece a la clase $\mathcal{C}$.

Teorema 3.5.1. *Si Y es un $AE(ANE)(\mathcal{C})$ y $Y \in \mathcal{C}$, entonces Y es un $AR(ANR)(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $f\colon Y \to A$ un homeomorfismo arbitrario de Y en un subconjunto cerrado A de $X \in \mathcal{C}$. Mostraremos que A es un retracto (de vecindad) de X. Como Y es un $AE(\mathcal{C})$, la función continua $h = f^{-1}\colon A \to Y$ admite una extensión continua $F\colon X \to Y$. De aquí, como $r(a) = (f \circ h)(a) = f(y) = a$, para cada $a \in A$, $r = f \circ F\colon X \to A$ es una retracción. Por lo anterior y como $Y \in \mathcal{C}$, Y es un retracto absoluto para la clase $\mathcal{C}$.

De manera similar se demuestra que Y es un retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$. $\square$

Ejemplo 3.5.1. Si Y consta de un solo punto, Y es un $AR(\mathcal{C})$. En efecto, sea $Y = \{\,p\,\}$ y $h\colon \{\,p\,\} \to A$ un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado A de X con $X \in \mathcal{C}$. Por ser h inyectiva, $A = \{x\}$, para alguna $x \in X$. En consecuencia, la única función $r\colon X \to A$ es una retracción. Por lo tanto, Y es un retracto absoluto para la clase $\mathcal{C}$.

Ejemplo 3.5.2. Por el Teorema de Extensión de Tietze, por el teorema 3.1.1 y el teorema 3.1.2, tenemos que $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son $AE's(\mathcal{N})$. Como $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios normales, por el teorema 3.5.1, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son retractos absolutos para la clase $\mathcal{N}$.

Ejemplo 3.5.3. Sean X un espacio completamente regular y $\mathbb{I} \subseteq X$. Supongamos que $X \subseteq \prod_\alpha \mathbb{I}_\alpha$, donde $\mathbb{I}_\alpha$ son copias de $\mathbb{I}$. Ya que $\mathbb{I} \in AR(\mathcal{N})$, por el teorema 3.5.1, y $\prod_\alpha \mathbb{I}_\alpha$ es normal, se sigue que $\mathbb{I}$ es un retracto de $\prod_\alpha \mathbb{I}_\alpha$ y también de X. Finalmente, como todo subespacio de un espacio normal es completamente regular, se tiene que $\mathbb{I} \in AR(\mathcal{CR})$ por la proposición 3.5.1.

Proposición 3.5.2. *Si $Y \in AR(\mathcal{C})$, entonces $Y \in ANR(\mathcal{C})$.*

Demostración. Supongamos que para $Y \in \mathcal{C}$ y $Y \approx Y^{'}$ con $Y^{'}$ subconjunto cerrado de $X \in \mathcal{C}$, entonces $Y^{'}$ es un retracto de X.

Como todo retracto de X es un retracto de vecindad de X, se tiene que $Y^{'}$ es un retracto de vecindad de X. Entonces para $Y \approx Y^{'}$ con $Y^{'}$ un subconjunto cerrado de $X \in \mathcal{C}$, $Y^{'}$ es un retracto de vecindad de X. En consecuencia, tenemos que $Y \in ANR(\mathcal{C})$. □

De manera formal, mostraremos que $\mathbb{I}^n$ es un $AR(ANR)(\mathcal{N})$. Para $\mathbb{R}^n$ la demostración es similar.

Proposición 3.5.3. *El cubo unitario $\mathbb{I}^n$ es un retracto absoluto (de vecindad) para la clase $\mathcal{N}$.*

Demostración. Sean X un espacio normal y $f\colon \mathbb{I}^n \to X$ un homeomorfismo. Como f es continua y $\mathbb{I}^n$ es compacto, $f(\mathbb{I}^n) = A$ es un subespacio compacto en X. Luego, como A es un subconjunto compacto de un espacio normal, A cerrado en X. Por el teorema 3.1.1, la función continua $f^{-1}\colon A \to \mathbb{I}^n$ admite una extensión continua $F\colon X \to \mathbb{I}^n$. Por lo anterior, $f \circ F\colon X \to A$ es continua y $(f \circ F)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$, para cada $x \in A$, lo que muestra que A es un retracto de X. En consecuencia, $\mathbb{I}^n$ es un retracto absoluto para la clase $\mathcal{N}$. □

Proposición 3.5.4. *La n-esfera $\mathbb{S}^n$ es un $ANR(\mathcal{N})$.*

Demostración. Sean X un espacio normal y $h\colon \mathbb{S}^n \to X$ un encaje de $\mathbb{S}^n$ en X. Como $h(\mathbb{S}^n) = A$ es un subconjunto cerrado de X (mismo argumento que la proposición 3.5.3), la función $h^{-1}\colon A \to \mathbb{S}^n$, con $n \geq 0$, es continua. Por el teorema 3.2.2, h^{-1} admite una extensión $g\colon U \to \mathbb{S}^n$, en donde U es un subconjunto abierto de X que contiene a A. Enseguida, como $h \circ g\colon U \to A$ es continua y $(h \circ g)(x) = (h \circ h^{-1})(x) = x$, para cada $x \in A$, se tiene que A es un retracto de vecindad de X. En consecuencia, $\mathbb{S}^n \in ANR(\mathcal{N})$. □

Como todo espacio métrico es de Hausdorff, en el siguiente resultado puede ser útil que un subespacio compacto F de un espacio de Hausdorff X es un subconjunto cerrado de X (ver [22] en la página 199).

Teorema 3.5.2. *Si $Y \in AR(ANR)(\mathcal{KM})$, entonces Y es un $AR(ANR)(\mathcal{N})$.*

Demostración. La prueba es para $ANR(\mathcal{KM})$, la otra parte es similar y más simple. Como Y es un espacio compacto-metrizable, Y puede ser encajado como un subespacio cerrado del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ (ver [6] en la página 198). Luego, como Y es un $ANR(\mathcal{KM})$ y $\mathbb{H}_C$ está en la clase $\mathcal{KM}$, existe $r : V \supseteq Y$ de una vecindad V de Y en $\mathbb{H}_C$. Sean A un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f\colon A \to Y$ una función continua. Como $\mathbb{H}_C$ es un $AE(ANE)(\mathcal{N})$, la función continua $g = i_Y \circ f\colon A \to \mathbb{H}_C$ admite una extensión continua $G\colon X \to \mathbb{H}_C$. Sea $U = G^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = r[G(x)]$, para toda $x \in U$. Vemos que F es una extensión continua de f. En consecuencia, Y es un $ANE(\mathcal{N})$ y $Y \in \mathcal{N}$. Finalmente, por el teorema 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{N})$. $\square$

Teorema 3.5.3. *Si* $Y \in AR(ANR)(\mathcal{SM})$, *entonces* Y *es un* $AR(ANR)(\mathcal{P})$.

Demostración. La prueba es para $ANR(\mathcal{SM})$, la otra parte es similar y más simple. Demos a Y una métrica acotada y consideremos el encaje isométrico canónico $\chi\colon Y \to L$, como en el lema 3.3.1, de Y en el espacio de Banach L. Por el teorema 3.3.1, tenemos que $\chi(Y)$ es cerrado en la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$ en L y además, Z es separable si Y lo es. Como Y es un $ANR(\mathcal{SM})$, del encaje isométrico canónico $\chi\colon Y \to L$, existe $r : V \supseteq \chi(Y)$ de una vecindad V de $\chi(Y)$ en Z. Sea $f\colon A \to Y$ una función continua de un subconjunto cerrado A de $X \in \mathcal{P}$ en Y. Como L es espacio métrico, Z también lo es. Por el corolario 3.3.1, Z es un $AE(\mathcal{M})$ y Z es separable. Por la parte c) del teorema 3.3.4, Z es un $AE(\mathcal{P})$. En consecuencia, la función continua $g = \chi \circ f\colon A \to Z$ admite una extensión $G\colon X \to Z$. Sea $U = \psi^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = \chi^{-1}(r[G(x)])$, para toda $x \in U$. Vemos que F es una extensión de f sobre U. Por lo tanto, Y es un $ANE(\mathcal{P})$ y $Y \in \mathcal{P}$. Finalmente, por el teorema 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{P})$. $\square$

En particular, como todo $AR(ANR)(\mathcal{SM})$ es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$, por la proposición 3.5.1, tenemos que todo $AR(ANR)(\mathcal{SM})$ coincide con todo $AR(ANR)(\mathcal{M})$

En el siguiente teorema mostraremos que para las siguientes clases, el recíproco del teorema 3.5.1 es verdadero.

Teorema 3.5.4. *Sea* $\mathcal{C}$ *cualquiera de las siguientes clases topológicas débilmente hereditarias:*

a) La clase de todos los espacios normales.

b) La clase de todos los espacios normales por colecciones.

c) La clase de todos los espacios totalmente normales.

d) La clase de todos los espacios perfectamente normales.

e) *La clase de todos los espacios completamente normales.*

f) *La clase de todos los espacios de Lindelöf normales.*

g) *La clase de todos los espacios numerablemente paracompactos normales.*

h) *La clase de todos los espacios Hausdorff compactos.*

i) *La clase de todos los espacios métricos.*

j) *La clase de todos los espacios metrizables separables.*

k) *La clase de todos los espacios metrizables compactos.*

Entonces todo $AR(ANR)(\mathcal{C})$ es un $AE(ANE)(\mathcal{C})$.

Demostración. Sea $f\colon A \to Y$ cualquier función continua de un subespacio cerrado A de X en la clase $\mathcal{C}$. Mostraremos que existe una extensión continua F de f sobre X (respectivamente sobre una vecindad U de A en X). Para nuestro objetivo dividiremos la demostración en tres casos:

Caso I. Sea $\mathcal{C}$ cualquiera de las clases a)-h). Consideremos el espacio de adjunción $Z = X \cup_\Phi Y$ y de la función de identificación $p\colon X \overset{\circ}{\cup} Y \to X \cup_\Phi Y$ considerar las restricciones $i = p_{|Y}$ y $j = p_{|X}$. Por la proposición 2.1.13, $Z \in \mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$ cualquiera de las clases a)-h).

En el caso en que Y es un $AR(\mathcal{C})$, si $i\colon Y \to Z_0$ es un homeomorfismo de Y sobre un subconjunto cerrado Z_0 de Z, se tiene que $r\colon Z \to Z_0$ es una retracción. Sea $X = j^{-1}(Z)$. Definamos una función $F\colon X \to Y$ por $F(x) = (i^{-1} \circ r)[j(x)]$, para todo $x \in X$. Vemos que F es una extensión continua de f sobre X. Por lo tanto, Y es un $AE(\mathcal{C})$.

Si Y es un $ANR(\mathcal{C})$, si $i\colon Y \to Z_0$ es un homeomorfismo de Y sobre un subespacio cerrado Z_0 de Z, existe una vecindad V de Z_0 en Z junto con una retracción $r\colon V \to Z_0$. Sea $U = j^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = (i^{-1} \circ r)[j(x)]$, para toda $x \in U$. Podemos ver que F es una extensión continua de f sobre U. Por lo tanto, $Y \in ANE(\mathcal{C})$.

Caso II. Supongamos que $\mathcal{C}$ es alguna de las clases i)-j). Consideremos el encaje $\chi\colon Y \to L$ del espacio métrico Y en el espacio métrico completo L como en el lema 3.3.1. Por el teorema 3.3.1, $\chi(Y)$ es un subconjunto cerrado de la envoltura convexa Z de $\chi(Y)$ en L. Además, Z es separable si Y lo es. Por lo tanto, Z está en la clase $\mathcal{C}$.

En el caso en que Y es un $AR(\mathcal{C})$, si $\chi\colon Y \to \chi(Y)$ es un homeomorfismo de Y sobre el subconjunto cerrado $\chi(Y)$ de Z, tenemos $r : Z \supseteq \chi(Y)$. Por el teorema 3.3.3 (Dugundji), la función compuesta $g = \chi \circ f\colon A \to L$ admite una extensión $G\colon X \to L$, tal que $G(X)$ está contenida en la envoltura convexa de $g(A) \subset \chi(Y)$ en L. Por lo tanto, $G(X) \subset Z$. Sea $X = G^{-1}(Z)$. Definamos una función $F\colon X \to Y$ por $F(x) = \chi^{-1}\{r[G(x)]\}$, para toda $x \in X$. Podemos ver que F es una extensión continua de f sobre X. Por lo tanto, Y es un $AE(\mathcal{C})$.

Para el caso en que Y es un $ANR(\mathcal{C})$, si $\chi\colon Y \to \chi(Y)$ es un homeomorfismo de Y sobre el subconjunto cerrado $\chi(Y)$ de Z, tenemos que $r\colon V \to \chi(Y)$ es una retracción de una vecindad V de $\chi(Y)$ en Z. Por el teorema 3.3.3 (Dugundji), la función compuesta $g = \chi \circ f\colon A \to L$ admite una extensión $G\colon X \to L$ tal que $G(X)$ está contenida en la envoltura convexa de $g(A) \subset \chi(Y)$ en L. Por lo tanto, $G(X) \subset Z$. Sea $U = G^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = \chi^{-1}[r[G(x)]]$, para toda $x \in U$. Podemos ver que F es una extensión de f sobre U. Por lo anterior, Y es un $ANE(\mathcal{C})$. **Caso III**. Supongamos que $\mathcal{C}$ es la clase k). Como Y es un espacio metrizable compacto, consideremos el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$, el cual es un espacio metrizable compacto (ver [6] página 198).

Si Y es un $AR(\mathcal{KM})$, para $j\colon Y \to Z_0$ un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado Z_0 de $\mathbb{H}_C$, se tiene que $r\colon \mathbb{H}_C \to Z_0$ es una retracción. Por otro lado, como $\mathbb{H}_C$ es un $AE(\mathcal{N})$, la función continua $g = j \circ f\colon A \to \mathbb{H}_C$ admite una extensión $G\colon X \to \mathbb{H}_C$. Sea $X = G^{-1}(\mathbb{H}_C)$. Definamos una función $F\colon X \to \mathbb{H}_C$ por $F(x) = (j^{-1} \circ r)[G(x)]$, para todo $x \in X$. Podemos ver que F es una extensión continua de f. Por lo tanto, Y es un $AE(\mathcal{KM})$.

Cuando Y es un $ANR(\mathcal{KM})$, si $j\colon Y \to Z_0$ es un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado Z_0 de $\mathbb{H}_C$, existe una vecindad V de Z_0 en $\mathbb{H}_C$ junto con una retracción $r\colon V \to Z_0$. Por otro lado, como $\mathbb{H}_C$ un $AE(\mathcal{N})$, la función continua $g = j \circ f\colon A \to \mathbb{H}_C$ admite una extensión $G\colon X \to \mathbb{H}_C$. Sea $U = G^{-1}(V)$. Entonces U es una vecindad de A en X. Definamos una función $F\colon U \to Y$ por $F(x) = (j^{-1} \circ r)[G(x)]$, para toda $x \in U$. Vemos que F es una extensión continua de f sobre U. Por lo tanto, $Y \in ANE(\mathcal{KM})$. $\square$

Como hemos visto, para ciertas clases de espacios se tiene que Y es un retracto absoluto (de vecindad) para la clase $\mathcal{C}$ si y sólo si para toda función $f\colon A \to Y$ existe una extensión $F\colon X \to Y$, en donde $A \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X y $Y \in \mathcal{C}$. En particular, tenemos que para la clase $\mathcal{N}$ de todos los espacios normales, esto es verdad.

Proposición 3.5.5. *a) Cualquier retracto de un $AR(\mathcal{N})$ es un $AR(\mathcal{N})$.*

b) *Un producto topológico es un $AR(\mathcal{N})$ si y sólo si cada factor es un $AR(\mathcal{N})$.*

Demostración. a) Supongamos que $Y \in AR(\mathcal{N})$ y $r : Y \supseteq A$. Sea $f\colon B \to A$ cualquier función continua definida sobre un subespacio cerrado B de un espacio normal X. Mostraremos que existe una extensión F de f y, en consecuencia, Y es un $AR(\mathcal{N})$. Como Y es un $AR(\mathcal{N})$, por la parte a) del teorema 3.5.4, la función $i_A \circ f\colon B \to Y$ tiene una extensión continua $H\colon X \to Y$. Luego, $F = r \circ H\colon X \to A$ es una extensión continua de f sobre X, pues $r \circ F \circ i_B = r \circ i_A \circ f = f$. Finalmente, como $A \in \mathcal{N}$ y $A \in AE(\mathcal{N})$, por el teorema 3.5.1, A es un $AR(\mathcal{N})$.

b) Como $p_\alpha\colon \prod_\alpha Y_\alpha \to Y_\alpha$ es una retracción, tenemos que cada Y_α es un retracto de $\prod_\alpha Y_\alpha$. Luego, por a), Y_α es un AR para la clase $\mathcal{N}$ si $\prod_\alpha Y_\alpha$ lo es.

Ahora supongamos que cada $Y_\alpha(\alpha \in \mathcal{A})$ es un $AR(\mathcal{N})$ y sea $g\colon A \to \prod_\alpha Y_\alpha$ cualquier función continua de un subespacio cerrado A de un espacio normal X. Como cada Y_α es un $AR(\mathcal{N})$, se tiene que $p_\alpha \circ g\colon A \to Y_\alpha$ admite una extensión continua $F_\alpha\colon X \to Y_\alpha$. Por último, como $F = i_{Y_\alpha} \circ F_\alpha\colon X \to \prod_\alpha Y_\alpha$ es una extensión continua de g sobre X. Como $\prod_\alpha Y_\alpha$ es un $AE(\mathcal{N})$ y $\prod_\alpha Y_\alpha \in \mathcal{N}$, por el teorema 3.5.1, $\prod_\alpha Y_\alpha$ es un $AR(\mathcal{N})$. □

En los siguientes cuatro resultados, conciderar a la clase $\mathcal{C}$ cualquiera de las clases del teorema 3.5.4.

Como sabemos, para una colección no numerable de espacios métricos con más de un punto, su producto topológico no es un espacio métrico. El siguiente resultado muestra que los productos numerables $\mathbb{I}^\infty$ y $\mathbb{R}^\infty$ son $AR's(ANR's)(\mathcal{N})$.

Teorema 3.5.5. *El producto topológico de una colección finita o numerable de $AR's(\mathcal{C})$ es un $AR(\mathcal{C})$.*

Demostración. Por el teorema 3.5.4, para cada $Y_\alpha \in AR(\mathcal{C})$, Y_α es un $AE(\mathcal{C})$. Por el teorema 3.2.1, el producto $\prod_\alpha Y_\alpha = Y$ es un AE en la clase $\mathcal{C}$ y $\prod_\alpha Y_\alpha \in \mathcal{C}$. Luego, por el teorema 3.5.1, tenemos que Y es un retracto absoluto para la clase $\mathcal{C}$. □

Teorema 3.5.6. *El producto topológico de una colección finita de $ANR's(\mathcal{C})$ es un $ANR(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea $\{\, Y_\alpha : \alpha \in M \,\}$ una colección finita de ANR para una clase $\mathcal{C}$. Por el teorema 3.5.4, para cada $Y_\alpha \in AR(\mathcal{C})$, Y_α es un $AE(\mathcal{C})$. Por la parte b) del teorema 3.2.1, el producto $\prod_\alpha Y_\alpha = Y$ es un ANE para la clase $\mathcal{C}$ y $Y \in \mathcal{C}$. Luego, por el teorema 3.5.1, Y es un ANR para la clase $\mathcal{C}$. □

Teorema 3.5.7. *Todo retracto de un $AR(ANR)(\mathcal{C})$ es un $AR(ANR)$ para la clase $\mathcal{C}$.*

Demostración. Por el teorema 3.5.4, si Y es un $AR(ANR)(\mathcal{C})$, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{C})$ y $Y \in \mathcal{C}$. Por la proposición 3.2.5 (proposición 3.2.7), si A es un retracto (retracto de vecindad) de Y, A es un $AE(ANE)(\mathcal{C})$. Luego, por la definición 3.2.1 y el teorema 3.5.1, tenemos que A es $AR(ANR)(\mathcal{C})$. En consecuencia, todo retracto de un $AR(ANR)(\mathcal{C})$ es un $AR(ANR)(\mathcal{C})$. □

Teorema 3.5.8. *Todo subespacio abierto de un $ANR(\mathcal{C})$ es un $ANR(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de $Y \in ANR(\mathcal{C})$. Por el teorema 3.5.4, Y es un $ANE(\mathcal{C})$ y $Y \in \mathcal{C}$. Por la proposición 3.2.6, A es un $ANE(\mathcal{C})$. Luego, por la definición 3.2.1 y el teorema 3.5.1, A es un $ANR(\mathcal{C})$. □

3.6. Retractos absolutos de vecindad local

Como una consecuencia de la definición 3.4.1 y del teorema 3.4.1, tenemos una caracterización que nos permite decidir cuándo la propiedad de ser retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$ de espacios es una propiedad local.

Definición 3.6.1. *Un espacio Y es un* ***retracto absoluto de vecindad local*** *para la clase $\mathcal{C}$ (**local-ANR**$(\mathcal{C})$), si todo punto de Y tiene una vecindad, la cual es un retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$.*

De igual forma, como una consecuencia del teorema 3.4.1, tenemos lo siguiente.

Teorema 3.6.1. *Si todo espacio en la clase $\mathcal{C}$ es regular y totalmente normal, entonces todo retracto absoluto de vecindad local para la clase $\mathcal{C}$ es un $ANR(\mathcal{C})$.*

Demostración. Asumiendo que toda vecindad para todo punto, es un retracto absoluto de vecindad para la clase $\mathcal{C}$ y aplicando el teorema 3.5.8, se tiene que toda vecindad es un extensor absoluto de vecindad y, en consecuencia, es un extensor absoluto de vecindad local para la clase $\mathcal{C}$. Finalmente por el teorema 3.5.1, se tiene el resultado deseado. □

Como todo espacio metrizable es regular y totalmente normal, por la parte i) del teorema 3.5.8, teorema 3.4.1 y teorema 3.5.1, se tiene que todo espacio $local - ANR(\mathcal{M})$ es un $ANR(\mathcal{M})$.

3.7. Retractos absolutos (de vecindad) deformables

Por medio del siguiente teorema, mostraremos la relación que existe entre retractos absolutos para una clase $\mathcal{C}$ y los retractos de deformación.

Teorema 3.7.1. *Sea X un $AR(\mathcal{C})$. Un subconjunto cerrado A de X es un $AR(\mathcal{C})$ si y sólo si A es un retracto de deformación fuerte de X.*

Demostración. Supongamos que A es un retracto de deformación fuerte de $X \in AR(\mathcal{C})$. Por el teorema 3.5.7, tenemos que A es un retracto absoluto para la clase $\mathcal{C}$.

Ahora supongamos que un subconjunto cerrado A de X es un $AR(\mathcal{C})$ y sea $Q = (X \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{I}) \cup (X \times \{1\})$ el cual es un subconjunto cerrado del producto $P = X \times \mathbb{I}$. Como A es un $AR(\mathcal{C})$ y es cerrado en X, para el homeomorfismo Id_A, existe $r : X \supseteq A$. Por otro lado, definamos una función $f \colon Q \to X$ por

$$f(x,t) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in X \text{ y } t = 0 \\ x, & \text{si } x \in A \text{ y } t \in \mathbb{I} \\ r(x), & \text{si } x \in X \text{ y } t = 1. \end{cases} \tag{3.7.1}$$

Como X es un $AR(\mathcal{C})$ y Q es cerrado en P, f admite una extensión $F \colon P \to X$ de P en X. Por último, definamos una homotopía $F \colon X \times \mathbb{I} \to X$ por $F(x,t) = f_t(x)$ De aquí, f_0 es la función identidad, $f_t(a) = a$ para toda $(a,t) \in A \times \mathbb{I}$ y $f_1(x) = r(x)$ para toda $x \in X$. Por la definición 2.2.2, A es un retracto de deformación fuerte de X. □

Tomando $X = \mathbb{I}^n$ y $A = \{ 0 \}$, vemos que A es un retracto de deformación fuerte de X tomando la homotopía $H \colon \mathbb{I}^n \times \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^n$ definida por $H(x,t) = (1-t)x$. Además, por la proposición 3.5.3, X es un $AR(\mathcal{N})$ para la clase de los espacios normales. También, no es difícil ver que A es un $AR(\mathcal{C})$ para la clase $\mathcal{C}$.

Capítulo 4

RETRACTOS ABSOLUTOS MÉTRICOS

Además de ser un espacio T_4, T_3, T_2, T_1, de Tychonoff, en los espacios métricos se dan las siguientes equivalencias: 1) Separable si y sólo si 2^o numerable si y sólo si Lindelöf. 2) Compacto si y sólo si numerablemente compacto si y sólo si secuencialmente compacto. 3) Perfectamente normal si y sólo si paracompacto si y sólo si numerablemente paracompacto, entre otras. Lo que nos muestra la gran riqueza que poseen.

Este capítulo está dedicado a los retractos absolutos (de vecindad) para la clase $\mathcal{M}$ de todos los espacios metrizables, que como veremos resulta ser AR y ANR para clases mayores de espacios si condiciones de completez, separabilidad o compacidad son satisfechas. Por otro lado, el ser AR o ANR, para las clases $\mathcal{KM}$ y $\mathcal{SM}$, son simplemente casos especiales de $AR(\mathcal{M})$ o $ANR(\mathcal{M})$. Ninguna otra clase topológica débilmente hereditaria de espacios tiene tal posición favorable.

4.1. Retractos absolutos

Es necesario destacar los siguientes resultados sin demostrar que usaremos en su momento. Al final de cada resultado, damos una referencia para mayores detalles.

Un espacio X es topologicamente completo, si y solo si, X es un G_δ absoluto (ver [15] en página 207). Todo espacio métrico es perfectamente normal (ver [8] en página 186). Si un espacio Xes metrizable, entonces X es totalmente normal (ver [6] en página 267). Todo subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular (ver [22] en página

242). Para que un espacio T_1 sea de Tychonoff o completamente regular es necesario y suficiente que sea homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{I}^M$ (ver [15] en página 118). Todo espacio métrico separable puede ser encajado en el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ (ver [6] en página 198). Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto (ver [19] en página 574). Cualquier espacio métrico compacto es completo (ver [8] en página 294). Cualquier espacio métrico compacto es numerablemente compacto (ver [19] en página 592). Todo espacio métrico numerablemente compacto es separable (ver [19] en página 609). El producto topológico de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff (ver [8] en página 138). El producto topológico de espacios compactos es compacto (ver [8] en página 224). Todo espacio de Hausdorff compacto es normal (ver [19] en página 581).

Como sabemos, un espacio no compacto X puede ser encajado como un subespacio denso en un espacio de Hausdorff compacto $\tilde{\mathrm{X}}$ llamado una **compactación** (Hausdorff) de X. Cuando el complemento $\tilde{\mathrm{X}}\backslash X$ consiste de n puntos, el espacio $\tilde{\mathrm{X}}$ es llamado una **compactación** (Hausdorff) **por n puntos** de X.

Definición 4.1.1. *Sean X un espacio T_1 que no es compacto y p un elemento que no esté en X. La* ***compactación por un punto*** *$\tilde{X}$ o* ***compactación de Alexandroff*** *del espacio X, consiste de los puntos de $X \cup \{p\}$, con una base para una topología de $\tilde{X}$ que consta de:*

a) *Todo conjunto abierto U de X.*

b) *Todo subconjunto U de $\tilde{X}$ tal que si $p \in U$, se tiene que $\tilde{X}\backslash U$ es un subconjunto cerrado compacto de X.*

A continuación damos un importante resultado, recordando que $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{FP}$, $\mathcal{N}$ y $\mathcal{T}$ se definen como en la página 37.

Teorema 4.1.1. *Si Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$, entonces se tiene lo siguiente:*

a) *Y es un $AR(ANR)(\mathcal{FP})$.*

b) *Y es un $AR(ANR)(\mathcal{F})$ si y sólo si Y es topológicamente completo.*

c) *Y es un $AR(ANR)(\mathcal{P})$ si y sólo si Y es separable.*

d) *Y es un $AR(ANR)(\mathcal{N})$ si y sólo si Y es separable y topológicamente completo.*

e) *Y es un $AR(ANR)(\mathcal{T})$ si y sólo si Y es compacto (separable y localmente compacto respectivamente).*

Demostración. a) Supongamos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. Mostraremos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{FP})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$. Luego, como Y es metrizable y $Y \in AE(ANE)(\mathcal{M})$, por la parte a) del teorema 3.3.4, $Y \in AE(ANE)(\mathcal{FP})$. Finalmente, como $Y \in \mathcal{M}$ y $Y \in AE(ANE)(\mathcal{M})$, por el teorema 3.5.1, $Y \in AR(ANR)(\mathcal{FP})$.

b) Supongamos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ topológicamente completo. Mostraremos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{F})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$ topológicamente completo. Luego, como Y es metrizable y $Y \in AE(ANE)(\mathcal{M})$, por la parte b) del teorema 3.3.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{F})$. Finalmente, por el teorema 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{F})$.

Ahora supongamos que $Y \in AR(ANR)(\mathcal{F})$. Mostraremos que Y es topológicamente completo. Equivalentemente, mostraremos que Y es un conjunto G_δ en un espacio métrico (Z, T) cuando Y es encajado en Z. Para este propósito, demos a Z una topología, la cual consiste de todos los conjuntos de la forma $H \cup K$, en donde $H \subset Z$ es un subconjunto abierto y $K \subset Z \setminus Y$ es cualquier subconjunto. Denotemos por $(Z^\star, T^\star)$ el espacio topológico obtenido. Luego, como $T \subseteq T^\star$, $Z^\star$ es un espacio de Hausdorff y como $Z \setminus Y = \emptyset \cup (Z \setminus Y)$, $Z^\star$ contiene a Y como un subespacio cerrado.

Mostremos que $Z^\star$ es totalmente normal. Sea $\alpha = \{ U_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ una cubierta abierta de $Z^\star$, donde para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $U_\lambda = H_\lambda \cup K_\lambda$ y para $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ se tiene que $Y \subseteq H$. Como H es un subespacio de un espacio metrizable Z, H es un espacio metrizable. En consecuencia H es totalmente normal. Por lo tanto, existe un refinamiento estrellado abierto $\{ G_\mu : \mu \in M \}$ de la cubierta abierta $\{ H_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ de H. Completemos la colección $\{ G_\mu : \mu \in M \}$ a una cubierta abierta β de $Z^\star$. Para esto, agregemos $\{ \{ p \} \mid p \in (Z \setminus H) \}$ la colección de todos los puntos en $Z \setminus H$, en donde cada uno de tales puntos es un conjunto abierto en $Z^\star$, pues $\{ p \} = \emptyset \cup \{ p \}$. Así, obtenemos una cubierta abierta β de $Z^\star$ la cual es un refinamiento estrellado abierto de α. Como α fue arbitraria, se sigue que $Z^\star$ es totalmente normal.

Así en el caso en que $Y \in ANR(\mathcal{F})$, para el homeomorfismo $j \colon Y \to Y$, existe una vecindad U de Y en $Z^\star$ junto con una retracción $r \colon U \to Y$.

Sea d la métrica que define la topología de Z. Ya que $H = H \cup \emptyset$, la topología de $Z^\star$ contiene todo conjunto abierto en Z. Luego, d es continua con respecto a la topología de $Z^\star$. Definamos una función real no negativa $\psi \colon U \to [0, \infty)$ por $\psi(x) = d[x, r(x)]$, para toda $x \in U$. Como r y d son continuas, ψ es continua. Por otro lado, de $\psi(x) = 0$ si y sólo si $x \in Y$, se sigue que Y es un G_δ conjunto en U y Y es cerrado en $Z^\star$. Por lo tanto, existe una familia numerable $\{ U_n : n = 1, 2, \dots \}$ de subconjuntos abiertos en U tal que $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Puesto que U_n es abierto en un subconjunto abierto U de $Z^\star$, U_n es abierto en $Z^\star$. Esto implica que $U_n = H_n \cup K_n$. Luego, $Y \subset H_n$ para toda n y $Y \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, lo que muestra que Y es un G_δ conjunto en el espacio Z. Por lo tanto, Y es topológicamenete completo.

En el caso en que Y es un $AR(\mathcal{F})$, la demostración es similar.

c) Supongamos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ separable. Mostraremos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{P})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$ separable. Luego, por la parte c) del teorema 3.3.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{P})$ si y sólo si Y es separable. Finalmente, como $Y \in \mathcal{P}$ y $Y \in AE(\mathcal{P})$, por el teorema 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{P})$ si y sólo si Y es separable.

d) Supongamos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ separable y topológicamente completo. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$ separable y topologicamenete completo. Luego, por la parte d) del teorema 3.3.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{N})$ si y sólo si Y es separable y topológicamente completo. Finalmente, como $Y \in \mathcal{N}$ y $Y \in AE(ANE)(\mathcal{N})$, por el teorema 3.5.1, se tiene que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{N})$ si y sólo si Y es separable y topológicamente completo.

e) Encajemos a Y como un subespacio cerrado de un espacio Z de Tychonoff y mostremos que Y es un retracto de vecindad de Z. Para la otra parte, la demostración es similar y más simple.

Caso I. Supongamos que Y es compacto. Consideremos a Z como un subespacio del espacio de Tychonoff $T = \mathbb{I}^M$. Como Y es compacto en el compacto T, Y es cerrado en T. Además, como Y es un espacio métrico compacto, Y es separable y topológicamente completo. Como $\mathbb{I}$ es de Hausdorff compacto, T es de Hausdorff compacto. Luego, T es normal. Por la parte d), Y es separable y topológicamente completo si y sólo si Y es un $ANR(\mathcal{N})$. Luego, existe una vecindad V de Y en T junto con una retracción $q \colon V \to Y$. Por último, el conjunto $U = V \cap Z$ es una vecindad de Y en el espacio de Tychonoff Z, en donde la restricción $r = q_{|U}$ es una retracción de U sobre Y. Por lo tanto, $Y \in AR(ANR)(\mathcal{T})$.

Caso II. Supongamos que Y es separable y localmente compacto, pero no compacto. Consideremos a Z como un subespacio cerrado del espacio de Tychonoff $T = \mathbb{I}^M$. Como $\overline{Y}$ es cerrado en el compacto T, $\overline{Y}$ es compacto en T. Por otro lado, como Y es separable y metrizable, la compactación por un punto $\tilde{Y}$ también lo es. Luego, podemos considerar a $\tilde{\mathrm{Y}}$ como un subespacio del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Sea $j\colon \overline{Y} \to \tilde{Y}$ la función definida por

$$j(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y \\ \infty, & \text{si } x \in \overline{Y} \setminus Y. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Sea U un subconjunto abierto arbitrario en Ỹ. si $\infty \in U$, entonces $\tilde{Y} \setminus U$ es un subconjunto cerrado compacto de $Y \subset \overline{Y}$. Entonces $j^{-1}(U)$ es el complemento de un subconjunto cerrado compacto de $\overline{Y}$. Por lo tanto, $j^{-1}(U)$ es abierto en $\overline{Y}$. Si $\infty \notin U$, entonces U es abierto en Y y $j^{-1}(U) = U$. Por otro lado, como Y es localmente compacto, se sigue que Y es abierto en $\overline{Y}$ y esto implica que $j^{-1}(U)$ es abierto en $\overline{Y}$. Por lo anterior, j es una función continua.

Ya que el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ es un $AE(\mathcal{N})$, la función $k = i_{\tilde{Y} \circ j}\colon \overline{Y} \to \mathbb{H}_C$ admite una extensión continua $K\colon T \to \mathbb{H}_C$. Como Ỹ es cerrado en $\mathbb{H}_C$, Y es cerrado en $\mathbb{H}_C \setminus \{\infty\}$. También, como $Y \in ANR(\mathcal{M})$ y $\mathbb{H}_C \setminus \{\infty\}$ está en la clase $\mathcal{M}$, para el homeomorfismo Id_Y, existe $r : W \supseteq Y$ de una vecindad W de Y en $\mathbb{H}_C \setminus \{\infty\}$ sobre Y. Por último, como $\mathbb{H}_C \setminus \{\infty\}$ es abierto en $\mathbb{H}_C$, W es abierto en $\mathbb{H}_C$. Por lo tanto, $V = K^{-1}(W)$ es una vecindad de Y en T. Sea $U = V \cap Z$. Entonces U es una vecindad de Y en Z. Definamos una función $s\colon U \to Y$, por $s(x) = r[K(x)]$, para toda $x \in U$. La función s es una retracción de U sobre Y. Por lo anterior, Y es un $ANR(\mathcal{T})$.

Ahora supongamos que Y es un $ANR(\mathcal{T})$. Por la parte c) y considerando que el teorema es valído para la clase de los espacios Hausdorff, por la proposición 3.2.9 , Y es separable.

Sólo resta ver que Y es localmente compacto. Como Y es un espacio metrizable y separable, Y puede ser encajado como un subespacio del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Si T es el cubo de Tychonoff, entonces $\mathbb{H}_C \times T$ es un cubo de Tychonoff y el subconjunto $S = [Y \times \{\theta\}] \cup [\mathbb{H}_C \times (T \setminus \{\theta\})]$ es un espacio de Tychonoff, en donde θ es el origen en T y $Y \times \{\theta\}$ es un subespacio cerrado de S homeomorfo a Y. Como Y es un $ANR(\mathcal{T})$, existe una vecindad V de $Y \times \{\theta\}$ en S junto con una retracción $r\colon V \to Y \times \{\theta\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que Y no es localmente compacto. Para este propósito, probaremos que existe un punto $u \in \mathbb{H}_C$ y una vecindad W de θ en T, que satisface lo siguiente:

1) $u \in \overline{Y}$.

2) $u \notin Y$.

3) $\{u\} \times (W \setminus \{\theta\}) \subset V$.

Puesto que Y no es localmente compacto, existe un punto $y_0 \in Y$ tal que para una vecindad de y_0 no existe ningún subconjunto compacto que lo contenga. Por otro lado, ya que V es una vecindad en S y contiene el punto (y_0, θ), se sigue de la topología producto que existe un conjunto cerrado U que contiene a y_0 en $\mathbb{H}_C$ y una vecindad W de θ en T, tal que $(y_0, \theta) \in (U \times W) \cap S \subset V$.

Nos proponemos elegir un $u \in U$ y que se satisfaga 3). El conjunto $U \cap Y$ es un conjunto que contiene a y_0 en Y y, por lo tanto, $U \cap Y$ no es compacto. Como U es compacto en $\mathbb{H}_C$, $U \cap Y$ no puede ser cerrado en U (si lo fuera, $U \cap Y$ sería compacto, lo que por hipótesis no puede pasar). Por lo tanto, existe un punto $u \in U$, el cual está en $\overline{U \cap Y} \subset \overline{U} \cap \overline{Y} \subset \overline{Y}$ pero no en $Y \cap U \subset Y$. Este punto u satisface 1)-3).

Ahora deduzcamos una contradicción fuera de 1)-3). Sea d una métrica para el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Para $n > 0$, sea $U_n = \{y \in Y : d(y, u) < \frac{1}{n}\}$ una vecindad en Y. Por 1) y 2), tenemos que $U_n \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, respectivamente. Luego, para cada n escogiendo un $y_n \in U_n$, obtenemos una sucesión $\{y_n\}$ la cual converge a u. Ya que U_n es abierto en Y, se tiene que $V_n = r^{-1}(U_n \times \{\theta\})$ es un conjunto abierto en S. Por otro lado, ya que el punto (y_n, θ) está en V_n, existe una vecindad W_n de θ en T tal que $\{y_n\} \times W_n \subset V_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, tenemos que $r(\{y_n\} \times W_n) \subset U_n \times \{\theta\}$. Aplicando el lema 2.4.1 a W, W_1, $W_2, ..., W_n, ...$ conjunto de vecindades de θ en T, obtenemos un segmento $\mathbf{I}_\lambda$ de T contenido en W y todo W_n. Por 3) y lo anterior, $\{u\} \times (\mathbf{I}_\lambda \setminus \{\theta\}) \subset V$ y $r(\{y_n\} \times W_n) \subset U_n \times \{\theta\}$, para todo n. En consecuencia, para $m > n$ se tiene que $U_m \subset U_n$ y $r(\{y_n\} \times \mathbf{I}_\lambda) \subset U_n \times \{\theta\}$, para toda n. Como r esta definida en $\{u\} \times (\mathbf{I}_\lambda \setminus \{\theta\})$ y como $y_m \to u$, tenemos que $r(\{u\} \times (\mathbf{I}_\lambda \setminus \{\theta\})) \subset \overline{U_n} \times \{\theta\}$, para todo n. Finalmente, para $n > i$ se tiene que $\overline{U_n} \subseteq U_i$ lo que contradice que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$. Por lo tanto, Y es localmente compacto.

Como Y es un espacio métrico separable, entonces Y es un espacio compacto. $\square$

En las siguientes tres afirmaciones, usamos el hecho de que el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es un espacio métrico, separable, completo (espacio de Banach) y convexo (ver [6] página 198).

Teorema 4.1.2. *Un espacio metrizable Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ si y sólo si es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo de un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $Y \in AR(ANR)(\mathcal{M})$. Por definición, dado un homeomorfismo $H \colon Y \to B$ de Y en un subconjunto cerrado B de un espacio metrizable X, existe $r : X \supseteq B$ ($r : U \supseteq B$ con $U \subseteq X$ vecindad en X). Sea X el cubo de Hilbert. Entonces Y es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo de un espacio de Banach.

Supongamos que $Y \approx B$, con B un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo X de un espacio de Banach. Se tiene que Y es un espacio metrizable y X es un espacio métrico por ser subespacio de un espacio de Banach. Como B es un retracto (de vecindad) de un espacio métrico X, B es cerrado por ser X un espacio de Hausdorff. Luego, por la definición 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. □

Teorema 4.1.3. *Un espacio métrico separable Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ si y sólo si es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo separable de un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que $Y \in AR(ANR)(\mathcal{M})$ es un espacio métrico separable. Luego, Y puede ser encajado en un subconjunto convexo del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, el cual es un espacio de Banach (ver [6] página 198). Es decir, para $h \colon Y \to A$ un homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado A del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$, el cual es un espacio separable localmente convexo (ver [8] página 192), existe una retracción $r \colon \mathbb{H}_C \to A$ ($r \colon U \to A$ con $U \subseteq \mathbb{H}_C$ vecindad de A en $\mathbb{H}_C$). Por lo anterior, se tiene que Y es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo separable de un espacio de Banach.

Supongamos que $Y \approx A$, con A un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo separable X de un espacio de Banach. Tenemos que Y es un espacio métrico y X es un espacio métrico por ser subespacio de un espacio de Banach. A es cerrado por ser un retracto (de vecindad) de un espacio X de Hausdorff. Por la definición 3.5.1, se tiene que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. □

Teorema 4.1.4. *Un espacio metrizable compacto Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ si y sólo si es homeomorfo a un retracto (de vecindad) del cubo de Hilbert.*

Demostración. Supongamos que el espacio compacto metrizable Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. Como el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ es metrizable, se tiene que para $h \colon Y \to A$ homeomorfismo de Y en un subconjunto cerrado A del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$, existe una retracción (de vecindad) $r : \mathbb{H}_C \supseteq A$ ($r : U \supseteq A$ con $U \subseteq X$ vecindad de A en $\mathbb{H}_C$). Por lo tanto, Y es homeomorfo a un retracto (de vecindad) del cubo de Hilbert.

Supongamos que $Y \approx A$, con A un retracto (de vecindad) del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Se tiene que Y y el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ son espacios métricos. Por otro lado, como todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado, A es cerrado. Por la definición 3.5.1, Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. $\square$

En las siguientes afirmaciones, relacionamos $AR(ANR)(\mathcal{M})$ con los conceptos contraíble, localmente contraíble y la propiedad del punto fijo.

Teorema 4.1.5. *Si Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$, entonces Y es contraíble.*

Demostración. Supongamos que Y es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. Por el teorema 4.1.2, Y es homeomorfo a un retracto (de vecindad) de un subconjunto convexo X de un espacio de Banach. Sea $p \in Y$. Como Y es convexo, para la homotopía línea recta $h_t \colon Y \to Y$ $(0 \leq t \leq 1)$ definida por $h_t(y) = tp + (1-t)y$ tenemos que $h_0(y) = y$ y $h_1(y) = p$, para toda $y \in Y$. Por lo tanto, Y es contraíble. $\square$

Teorema 4.1.6. *Si Y es un $ANR(\mathcal{M})$, entonces Y es localmente contraíble.*

Demostración. Supongamos que Y es un $ANR(\mathcal{M})$. Por el teorema 4.1.2, Y es homeomorfo a un retracto de vecindad de un subconjunto convexo X de un espacio de Banach. Como todo subconjunto convexo es localmente contraíble, por la proposición 2.3.3, Y es localmente contraíble. Como Y fue arbitrario, se tiene que Y es localmente contraíble. $\square$

Teorema 4.1.7. *Si Y es un $ANR(\mathcal{M})$ contraíble, entonces Y es un $AR(\mathcal{M})$.*

Demostración. Supongamos que Y es un $ANR(\mathcal{M})$ contraíble. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es $ANE(\mathcal{M})$. Luego, como Y es contraíble, Y es un $AE(\mathcal{M})$. Como $Y \in \mathcal{M}$, por el teorema 3.5.1, Y es un $AR(\mathcal{M})$. Por lo tanto, Y es un $AR(\mathcal{M})$. $\square$

Teorema 4.1.8. *Si Y es un $AR(\mathcal{M})$ compacto, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que Y es un $AR(\mathcal{M})$ compacto. Sabemos que la propiedad del punto fijo es un invariante topológico y el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$ tiene la propiedad del punto fijo (ver [6] página 198). Por el teorema 4.1.4, para $Y \in AR(\mathcal{M})$ metrizable compacto, Y es homeomorfo a A un retracto del cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Por la proposición 2.1.4, las retracciones preservan la propiedad del punto fijo. En consecuencia, si $Y \in AR(\mathcal{M})$ y Y es compacto, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 4.1.9. *Si Y es un $AR(\mathcal{KM})$, entonces Y es contraíble.*

Demostración. Usaremos el hecho de que todo espacio métrico separable puede ser encajado en el cubo de Hilbert $\mathbb{H}_C$. Como Y es un $AR(\mathcal{KM})$, si Y es homeomorfo a un subconjunto cerrado $Y^{'}$ del espacio compacto metrizable $\mathbb{H}_C$, entonces $Y^{'}$ es un retracto de $\mathbb{H}_C$. Por la proposición 2.3.1 y ya que contraíble es una propiedad topológica, Y es contraíble. $\square$

A continuación relacionamos el hecho de que para una familia $\{ X_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ numerable de espacios métricos, su producto topológico es un espacio métrico (ver [8] página 189).

Teorema 4.1.10. *El producto topológico de una colección numerable o finita de $AR's(\mathcal{M})$ es un $AR(\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $\beta = \{ X_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ una colección numerable de $AR's(\mathcal{M})$ no nulos con más de un punto. Por la parte i) del teorema 3.5.4, β es una colección numerable de $AE's(\mathcal{M})$. Por el teorema 3.2.1, $X = \prod_\alpha X_\alpha$ es un $AE(\mathcal{M})$. Finalmente, como $X \in AE(\mathcal{M})$ y $X \in \mathcal{M}$, por el teorema 3.5.1, X es un $AR(\mathcal{M})$. $\square$

Teorema 4.1.11. *El producto de una colección finita de $ANR's(\mathcal{M})$ es un $ANR(\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $\beta = \{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ una colección finita de $ANR's(\mathcal{M})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, se tiene que β es una colección finita de $ANE's(\mathcal{M})$. Por la parte b) del teorema 3.2.1, el producto $Y = \prod_\alpha Y_\alpha$ es un $ANE(\mathcal{M})$. Finalmente, como $Y \in ANE(\mathcal{M})$ y $Y \in \mathcal{M}$, por el teorema 3.5.1, Y es un $ANR(\mathcal{M})$. $\square$

Teorema 4.1.12. *Todo retracto (de vecindad) de un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$*

Demostración. Supongamos que A es un retracto (de vecindad) de $Y \in AR(ANR)(\mathcal{M})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$. Por la proposición 3.2.5 (proposición 3.2.7), A es un $AE(ANE)(\mathcal{M})$. Finalmente, como $A \in AE(ANE)(\mathcal{M})$ y $A \in \mathcal{M}$, por el teorema 3.5.1, se tiene que $A \in AR(ANR)(\mathcal{M})$. Como A fue arbitrario, se tiene que todo retracto (de vecindad) de un $AR(ANR)(\mathcal{M})$ es un $AR(ANR)(\mathcal{M})$. $\square$

Teorema 4.1.13. *Todo subespacio abierto de un $ANR(\mathcal{M})$ es un $ANR(\mathcal{M})$.*

Demostración. Supongamos que A es un subespacio abierto de $Y \in ANR(\mathcal{M})$. Por la parte i) del teorema 3.5.4, Y es un $ANE(\mathcal{M})$. Por la proposición 3.2.6, A es un $ANE(\mathcal{M})$. Finalmente, como $A \in ANE(\mathcal{M})$ y $A \in \mathcal{M}$, por el teorema 3.5.1, A es un $ANR(\mathcal{M})$. Como A fue arbitrario, tenemos que todo subespacio abierto de un $ANR(\mathcal{M})$ es un $ANR(\mathcal{M})$. □

Teorema 4.1.14. *Si Y es un local-$ANR(\mathcal{M})$, entonces Y es un $ANR(\mathcal{M})$.*

Demostración. Como todo espacio metrizable Y es regular y totalmente normal, podemos aplicar el teorema 3.6.1. Por lo tanto, Y es un $ANR(\mathcal{M})$. □

4.2. Retractos absolutos de vecindad deformables

Por último, finalizamos este capítulo mencionando algunas propiedades entre los retractos absolutos de vecindad y los retractos de deformación para un espacio en la clase $\mathcal{M}$ de todos los espacios métricos.

Teorema 4.2.1. *Si X es un $ANR(\mathcal{M})$ y A un subespacio de X, entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es un retracto de deformación fuerte de X.

b) A es un retracto de deformación de X.

Demostración. a)⇒ b) Supongamos que A es un retracto de deformación fuerte de X. Entonces para la homotopía $H_t\colon X \to X$ $(0 \le t \le 1)$ se tiene que $H_0(x) = x$, $H_t(a) = a$ para toda $a \in A$ y $H_1(x) \in A$ para todo $x \in X$. En particular, tenemos que $H_0(x) = x$ y $H_1(x) \in A$. Por lo tanto, A es un retracto de deformación de X.

b) ⇒ a) Supongamos que A es un retracto de deformación de X. Entonces existe una homotopía $f_t\colon X \to X$ $(0 \le t \le 1)$, tal que f_0 es la función identidad sobre X y f_1 es una retracción de X sobre A. Como X es un espacio métrico, X es un espacio de Hausdorff. Por el teorema 2.1.3, A es cerrado en X. Por otro lado, consideremos el subespacio cerrado $Q = (X \times \{0\}) \cup (A \times \mathbb{I}) \cup (X \times \{1\})$ del espacio producto $P = X \times \mathbb{I}$. Luego, definamos una homotopía $g_t\colon Q \to X$ $(0 \le t \le 1)$ por

$$g_t(x,s) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in X \text{ y } s = 0 \\ f_{s(1-t)}(x), & \text{si } x \in A \text{ y } s \in \mathbb{I} \\ f_{1-t}(f_1(x)), & \text{si } x \in X \text{ y } s = 1. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Tenemos que g_t está bien definida y es continua. Como X es un $ANR(\mathcal{M})$ y P es metrizable, la función $g_1: Q \to X$ admite una extensión $G_1: U \to X$ de una vecindad U de Q en P. Por último, definamos una homotopía $h_t: X \to X$ por $h_t(x) = G_1(x, s)$ para todo $x \in U$ y toda $t \in \mathbb{I}$. De donde se tiene que $h_0(x) = G_1(x, 0) = g_1(x, 0) = x$, $h_1(x) = G_1(x, 1) = g_1(x, 1) = f_0(f_1(x)) = f_1(x)$ y $h_t(a) = G_1(a, t) = g_1(a, t) = f_0(a) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in \mathbb{I}$. Por la definición 2.2.2, A es un retracto de deformación fuerte para X. $\square$

Corolario 4.2.1. *Si X es un $ANR(\mathcal{M})$ contraíble y si x_0 es un punto arbitrario en X, entonces existe una deformación $d_t: X \to X$ tal que $d_1(X) = x_0$ y $d_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{I}$.*

Demostración. Como X es contraíble, existe una deformación $f_t: X \to X$ tal que $f_1(X)$ es un solo punto $x_0 = f_1(x_0)$. Definamos una deformación $g_t: X \to X$ por

$$g_t(x) = \begin{cases} f_{2t}(x), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_{2t-1}(x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Puesto que $g_1(X) = x_0$, $\{x_0\}$ es un retracto de deformación de X. Por otro lado, como X es un $ANR(\mathcal{M})$, por el teorema 4.2.1, se tiene que $\{x_0\}$ es un retracto de deformación fuerte de X. En consecuencia, existe una deformación d_t. $\square$

Teorema 4.2.2. *Sean X un $ANR(\mathcal{M})$ y A un $ANR(\mathcal{M})$ subconjunto cerrado de X. Entonces A es un retracto de deformación de X si y sólo si existe una deformación $h_t: X \to X$ tal que $h_1(X) \subset A$ y $h_t(A) \subset A$ para todo $t \in \mathbb{I}$.*

Demostración. Por el teorema 4.2.1, A es un retracto de deformación fuerte de X. Es decir, para $h_t: X \to X$ se tiene que $h_1(X) \subset A$ para todo $x \in X$ y $h_t(A) \subset A$ para todo $t \in \mathbb{I}$.

Ahora supongamos que existe una deformación $h_t: X \to X$ tal que $h_1(X) \subset A$ y $h_t(A) \subset A$, para todo $t \in \mathbb{I}$. Ya que $h_1(X) \subset A$, X es deformable en A. Por otro lado, consideremos la homotopía $k_t: A \to A$ definida por $k_t(a) = h_t(a)$, para todo $(a, t) \in A \times \mathbb{I}$. Como A es un $ANR(\mathcal{M})$ se tiene que $k_0: A \to A$ admite una extensión $k_0^\star: U \to A$ de una vecindad U de A en X sobre A, lo que implica que $k_0^\star: U \to A$ es una retracción de U sobre A. Por el teorema 4.2.1, A es un retracto de deformación de X. $\square$

Bibliografía

[1] Armstrong M. A., *Topología Básica*, Barselona, Reverté, 1987.

[2] Alexandrov P. S., *Combinatorial Topology*, Mineola Nueva York, Dover Publications, 1998. Vols 1, 2 and 3.

[3] Arkhangel'skii A. V. y Ponomarev V. I., *Fundamentals of General Topology*, India, D. Reidel Publising company, 1984.

[4] Bing R. H., *The Collected Papers of R. H. Bing*, Rhode Island, American Mathematical Society Providence, 1998.

[5] Borsuk K., *Theory of Retracts*, Warsawa, 1967. Monografie Matematyczne Núm. 44.

[6] Christenson C. O. y Voxman W. L., *Aspects of Topology*, Nueva York, Marcel Dekker, 1977.

[7] Dominguez E. O.; Ferrando J. L. P.; Marrero M. G.; Roig J. M.; De L.-Caceres C. O., *Topología*, Madrid, Alhambra, 1975.

[8] Dugundji J., *Topology*, Boston, Allyn and Bacon, 1966.

[9] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[10] García Maynez C. A. y Tamariz M. A., *Topología General*, México, Porrúa, 1988.

[11] Gemignani M. C., *Elementary Topology*, Nueva York, Dover Publications, 1990.

[12] Hocking J. G. y Young G. S., *Topology*, Nueva York, Dover Publications, 1988.

[13] Hu S.-T., *Theory of Retracts*, Detroit Wayne, University Press, 1965.

[14] James I. M., *History of Topology*, North-Holland, Elsevier, 1982.

[15] Kelley J. L., *General Topology*, Nueva York, D. Van Nostrand, 1955.

[16] Mardesic S. y Segal J., *Shape Theory*, North-Holland, Mathematical Library, 1982.

[17] Margalef R. J. y Outerelo D. E., *Intoducción a la Topología*, Madrid, Complutense, 1993.

[18] Margalef R. J.; Outerelo D. E., y Pinilla F.J.L. *Topología*, Espaa, Alhambra, 1979. Tomo II.

[19] Milewski E. G., *The Essentials of Topology*, Piscataguay, Nueva Jersey, Research and Education Association, 1994.

[20] Munkres J. R., *Topología*, Madrid, Prentice Hall, 2002.

[21] Roseman D., *Elementary Topology*, Upper Saddle River, Nueva Jersey, Prentice Hall, 1999.

[22] Sieradski A. J., *An Introduction to Topology and Homotopy*, Boston, PWS-KENT Publishing company, 1992.

[23] Willard S., *General Topology*, Edmonton Alberta, Adisson-Wesley Publishing Company, 1970.